

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

Estudo das Propriedades Dinâmicas e Sincronização do Mapa de Rede de Zaslavsky

Julio Cesar Cerri

Prof. Adj. Ricardo Egydio de Carvalho

Rio Claro (SP)

2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

JULIO CESAR CERRI

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS E
SINCRONIZAÇÃO NO MAPA DE REDE DE ZASLAVSKY

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Campus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2011

530.15 Cerri, Julio Cesar
C417e Estudo das propriedades dinâmicas e sincronização do
Mapa de Rede de Zaslavsky / Julio Cesar Cerri. - Rio Claro :
[s.n.], 2011
69 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e
Ciências Exatas
Orientador: Ricardo Egydio de Carvalho

1. Física matemática. 2. Sistemas caóticos. 3. Dinâmica
não-linear. 4. Caos. 5. Ruído. I. Título.

JULIO CESAR CERRI

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS E SINCRONIZAÇÃO NO MAPA DE REDE DE ZASLAVSKY

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Campus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (orientador)

Prof. Dr. Makoto Yoshida

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Rio Claro, 16 de novembro de 2011.

Assinatura do(a) aluno(a)

assinatura do(a) orientador(a)

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por me incentivarem a conquistar meus objetivos e me apoiarem nos momentos difíceis.

À toda minha família, pelo constante apoio e torcida.

Ao Prof. Adj. Ricardo Egydio de Carvalho pela orientação, apoio, incentivo e atenção ao longo da iniciação científica.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, pelo incentivo em forma de bolsa de iniciação científica.

Resumo

Sincronização em sistemas dinâmicos não-lineares, sobretudo em sistemas caóticos, é campo de pesquisa de diversas áreas do conhecimento, tais como Engenharia Mecânica e Engenharia Elétrica, Biologia, Física, entre outras. De maneira simplificada, dois entes sincronizam se, depois de certo tempo, eles apresentam comportamento semelhante ou ocorrem ao mesmo tempo. O som e imagem em um filme é um exemplo deste fenômeno em nosso cotidiano. Nos estudos de sincronização incluem-se estudos de sistemas dinâmicos contínuos, governados por equações diferenciais ou estudos de sistemas dinâmicos discretos, também chamados de mapas. Mapas correspondem, em geral, a discretizações de equações diferenciais ordinárias e são amplamente utilizadas para modelar sistemas físicos devido, sobretudo, à sua facilidade de manuseio computacional. É suficiente fazermos iterações a partir de condições iniciais dadas para conhecermos as trajetórias do sistema. Esse trabalho de conclusão de curso baseia-se no estudo do mapa identificado como "Mapa de Rede de Zaslavsky". O modelo de mapa de rede de Zaslavsky é um resultado da combinação do movimento de uma partícula em movimento em um campo magnético constante e uma onda eletrostática propagando-se perpendicularmente ao campo magnético. Além do interesse nas particularidades do mapa citado, havia o objetivo o aprofundamento de conceitos da dinâmica não-linear, como pontos de equilíbrio, estabilidade linear, estabilidade não-linear, bifurcações e caos.

Palavras-Chave: Sincronização. Dinâmica não-linear. Mapa de Rede de Zaslavsky.

Abstract

Synchronization in nonlinear dynamical systems, especially in chaotic systems, is field of research in several areas of knowledge, such as Mechanical Engineering and Electrical Engineering, Biology, Physics, among others. In simple terms, two systems are synchronized if after a certain time, they have similar behavior or occurring at the same time. The sound and image in a film is an example of this phenomenon in our daily lives. The studies of synchronization include studies of continuous dynamic systems, governed by differential equations or studies of discrete time dynamical systems, also called maps. Maps correspond, in general, discretizations of differential equations and are widely used to model physical systems, mainly due to its ease of computational. It is enough to make iterations from given initial conditions for knowing the trajectories of system. This completion of course work based on the study of the map called "Zaslavsky Web Map". The Zaslavsky Web Map is a result of the combination of the movements of a particle in a constant magnetic field and a wave electrostatic propagating perpendicular to the magnetic field. Apart from interest in the particularities of this map, there was objective the deepening of concepts of nonlinear dynamics, as equilibrium points, linear stability, stability non-linear, bifurcation and chaos.

Keywords: Synchronization. Nonlinear Dynamics. Zaslavsky Web Map.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Sistemas Dinâmicos	1
1.2	Sistemas Dinâmicos Contínuos	2
1.3	Sistemas Dinâmicos Discretos	3
1.4	Sistemas autônomos e Espaços de Fase	4
1.5	Mapa de Rede de Zaslavsky	6
2	Propriedades do Mapa de Rede de Zaslavsky	7
2.1	Ordem de ressonância	7
2.2	Amplitude de Perturbação	11
3	Dinâmica no Mapa de Rede de Zaslavsky	13
3.1	Região Regular x Região Caótica	13

3.2	Evolução Temporal das Variáveis Relevantes	15
3.3	Perturbação do Sistema Dinâmico	18
3.4	Efeitos da Perturbação no Mapa de Rede de Zaslavsky	20
4	Sincronização no Mapa de Rede de Zaslavsky	25
4.1	Regimes de Sincronização	26
4.1.1	Sincronização em fase	27
4.1.2	Sincronização em contra-fase	28
4.1.3	Sincronização completa	28
4.1.4	Sincronização incompleta	29
4.2	Análise do Regime de Sincronização	30
4.3	Resultados	31
4.4	Regiões de sincronização	36
5	Ruído no Mapa de Rede de Zaslavsky	38
6	Periodicidade de Perturbação	44
6.1	Considerações Sobre as Perturbações	44
6.2	Análise da Divergência Depois de Muitas Iterações	45
6.3	Periodicidade com Perturbação Aleatória	46

6.4	Estudo da Periodicidade	47
6.5	Periodicidade de Perturbação no Mapa de Chirikov	51
6.5.1	Mapa de Chirikov	52
6.5.2	Perturbação no Mapa de Chirikov	53
6.6	Mudança de Região Regular para Região Caótica	54
7	Expoentes de Lyapunov	56
7.1	Expoentes de Lyapunov	56
7.2	Expoentes de Lyapunov no Mapa de Rede de Zaslavsky	62
8	Conclusões	65

Capítulo 1

Introdução

Nesse capítulo introduziremos alguns conceitos básicos que foram necessários para o desenvolvimento da pesquisa.

1.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto. Classificamos um sistema como dinâmico quando as grandezas que caracterizam tais objetos evoluem no tempo. Um oscilador harmônico é um exemplo de um sistema dinâmico.

O modelo matemático de um dado sistema não é único, isto é, um sistema pode ser representado por diferentes modelos dependendo da análise que se deseja fazer. Um sistema dinâmico pode ser representado matematicamente por equações diferenciais ou de diferenças, através das quais buscamos obter informações sobre o estado em que se encontrará o sistema

no tempo [1].

1.2 Sistemas Dinâmicos Contínuos

Se o tempo varia continuamente e o sistema é governado por equações diferenciais, temos o chamado sistema dinâmico contínuo.

Um exemplo de equação diferencial é

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} \quad (1.1)$$

a solução dessa equação pode ser encontrada analiticamente, e sua solução será uma função $z(t)$ com uma constante de integração que pode ser avaliada a partir de uma condição inicial $z(0) = z_0$.

As equações diferenciais desempenham um papel muito importante na ciência. Muitos problemas conduzem a uma ou várias equações diferenciais que devem ser resolvidas, porém, nem sempre a solução é fácil de ser encontrada. Por exemplo, no caso de um pêndulo simples, constituído por uma partícula de massa m suspensa por meio de um fio inextensível de comprimento l e de massa desprezível, a equação de movimento associada é

$$m l \ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0 \quad (1.2)$$

onde g é a aceleração da gravidade e θ é o ângulo de deslocamento da massa suspensa m . A equação diferencial 1.2 envolve uma função não-linear ($\sin \theta$), e conseqüentemente em sua solução deve ser aplicada uma abordagem através de integrais elípticas [2].

Um sistema dinâmico governado por equações em que as variáveis dependentes (e suas derivadas se o sistema for contínuo) só aparecem em combinações aditivas de suas primeiras potências é dito linear. Quando o sistema não pode ser apenas descrito com tais combinações

apenas, temos um sistema dinâmico não-linear. O comportamento de um sistema não-linear apresenta uma dinâmica mais rica que os de sistemas lineares. As equações diferenciais não-lineares são mais difíceis de analisar e não existem técnicas gerais de resolução.

1.3 Sistemas Dinâmicos Discretos

Um sistema dinâmico é dito discreto quando a evolução desse sistema é governada por equações de diferenças, também chamadas mapas. Essas equações são fórmulas de recorrência, pois estabelecem uma relação entre termos de uma sequência, que denotamos por $z_t = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_t\}$.

Um exemplo de equação de diferenças é

$$z_{t+1} = \mu z_t(1 - z_t) \quad (1.3)$$

a que é conhecida por mapa logístico.

A equação 1.3 implica que para cada valor de t entre zero e infinito é possível determinar um termo de ordem $t + 1$, a partir de uma condição inicial $z_0 = c$ e do parâmetro μ .

Assim, o estado de um sistema dinâmico discreto só muda durante os instantes $t_0, t_1, t_2, \dots$, onde t é sempre um número inteiro positivo. No intervalo de tempo entre dois desses instantes, o estado permanece constante [4].

Uma forma gráfica de representar a evolução de um sistema consiste em desenhar um ponto para cada passo na sequência, com abscissa igual ao índice t e ordenada igual a z_t . Os sistemas discretos também são chamados de mapas.

Os sistemas dinâmicos não-lineares discretos serão objetos de estudo desse trabalho. Mais precisamente, o Mapa de Rede de Zaslavsky. Nas seções seguintes, desenvolveremos as ferramentas necessárias ao estudo deste sistema.

1.4 Sistemas autônomos e Espaços de Fase

Dada uma equação diferencial, como por exemplo,

$$\dot{z} = f(z) \tag{1.4}$$

nesse tipo de equação diferencial, em que a função f não depende do tempo, é chamada de equação diferencial autônoma.

Um sistema dinâmico autônomo, de primeira ordem é um sistema caracterizado por uma variável dependente do tempo, $z(t)$, que designamos por variável de estado, e por uma equação diferencial autônoma de primeira ordem, que define a evolução da variável de estado, a partir de uma condição inicial [5].

Os pontos fixos de um sistema dinâmico contínuo, de primeira ordem, são os pontos onde a primeira derivada da variável de estado é nula. Nesses pontos o estado do sistema permanece constante. O retrato de fase de um sistema dinâmico é um esboço do fluxo de direções, mostrando os pontos fixos e algumas soluções que podem começar ou terminar nesses pontos [6].

As equações diferenciais de segunda ordem são autônomas quando não dependem explicitamente do tempo. Essas equações podem ser reduzidas a duas equações diferenciais, de primeira ordem. A forma geral de uma equação autônoma de segunda ordem é

$$x'' + p x' + q x = F \tag{1.5}$$

se introduzirmos a variável $y = x'$, temos o seguinte sistema de duas equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= f(t) - p y - q x \end{cases}$$

O espaço de fases desse sistema é o plano y x x , formado pelas duas variáveis de estado.

Assim, é possível transformar uma equação diferencial de ordem n em um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem.

Para o caso do pêndulo simples, apresentado na equação (1.2) temos

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \varphi &= f(\theta, \varphi) \\ \dot{\varphi} &= -\frac{g}{l} \sin \theta &= g(\theta, \varphi) \end{cases}$$

Em geral não é possível obter soluções analíticas para tais sistemas de equações diferenciais. Muitas vezes, quando uma solução é encontrada, ela é tão complicada que fica difícil interpretá-la e compreender as suas principais propriedades. Porém, no caso discreto, é necessário apenas iterarmos o sistema a partir de condições iniciais dadas para conhecermos as trajetórias no espaço de fases.

Uma vez que um sistema discreto é determinado por uma forma de recorrência, torna-se interessante, sempre que possível, representar um sistema contínuo (regido por equações diferenciais) por um sistema discreto, no qual podemos, através de métodos numéricos, identificar características importantes de suas soluções. Tal procedimento é conhecido como *discretização* e se aplica tanto a equações diferenciais lineares como à não-lineares. Porém, é nos sistemas não-lineares que o estudo qualitativo é mais interessante [3].

1.5 Mapa de Rede de Zaslavsky

O modelo de mapa de rede de Zaslavsky é um resultado da combinação do movimento de uma partícula em movimento em um campo magnético constante e uma onda eletrostática propagando-se perpendicularmente ao campo magnético.

A equação de movimento é dada por

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T} \cos x \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (1.6)$$

onde ω_0 é a frequência de oscilação do campo elétrico e K é um parâmetro adimensional e joga o papel de amplitude da perturbação.

A discretização da equação diferencial que rege esse movimento, apresentada em [7], nos fornece o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + K \sin v_n) \cos \alpha + v_n \sin \alpha \\ v_{n+1} &= -(u_n + K \sin v_n) \sin \alpha + v_n \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde foram introduzidas as seguintes variáveis:

$$u = \frac{\dot{x}}{\omega_0} \quad v = -x \quad \alpha = \omega_0 T \quad (1.8)$$

Capítulo 2

Propriedades do Mapa de Rede de Zaslavsky

A partir do mapa apresentado na seção 1.5, daremos início à investigação das propriedades desse mapa, bem como a relação de dependência entre as características dos mapas e os parâmetros envolvidos. A fim de aprimorar a programação computacional e cálculo numérico, foram realizadas diversas reproduções de mapas para diferentes parâmetros K e α das equações (1.7), que correspondem à amplitude de perturbação e a ordem de ressonância, respectivamente.

2.1 Ordem de ressonância

Fixando um valor para o parâmetro de amplitude K e para as condições iniciais (u_0, v_0) fornecidas ao sistema, podemos obter conclusões sobre as propriedades da ordem de ressonância do mapa variando o parâmetro α .

O parâmetro que representa a ordem de ressonância é dado por

$$\alpha = \frac{2\pi}{q} \quad q \in \mathbb{N} \quad q \geq 3 \quad (2.1)$$

Uma única condição inicial resulta em uma única trajetória no espaço de fases. Para obter conclusões qualitativamente a partir de espaços de fases são necessárias diversas trajetórias, isso implica fornecer ao sistema um conjunto de condições iniciais.

As condições iniciais c_n podem ser escolhidas num intervalo $[a, b]$ como sendo:

$$c_n = a + nh \quad n = \frac{a - b}{h}$$

onde h representa o passo dado entre cada condição inicial.

A seguir são apresentados espaços de fase para $K = 1.0$ e condições iniciais de u contidas no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ e v contidas no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$. Em ambos os casos o passo escolhido foi $h = \pi/4$. Isso resulta em 32 condições iniciais em cada espaço de fases. Para cada condição inicial, foram realizadas 1000 iterações. Através de um *software* graficador “plotamos” todos esses pontos a fim de obter o espaço de fases. Alterando q de acordo com (2.1), obtivemos diferentes valores para as ordens de ressonância.

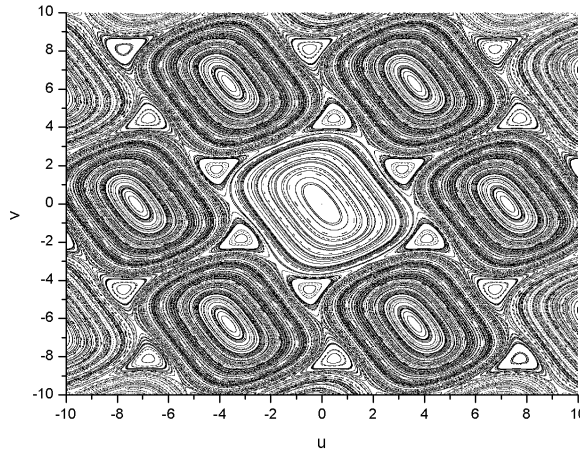


Figura 2.1: Espaço de fases para $K=1.0$ e $q=3$

Vemos a partir do espaço de fases anterior que é difícil associar o valor do parâmetro q às características do sistema. Esse problema foi contornado, usando outras cores para representar o conjunto de iterações para duas condições iniciais, assim como no espaço de fases da figura 2.2.

Dessa forma, fomos levados à seguinte hipótese:

O parâmetro q indica o número de regiões fechadas visitadas por uma condição inicial. Em outras palavras, uma condição inicial (u_0, v_0) visita q regiões fechadas representadas pelos pontos azuis, uma outra condição inicial (v_1, v_1) , visita q regiões fechadas representadas pelos pontos vermelhos.

A fim de comprovar essa hipótese, realizamos esse procedimento de diferenciar duas condições iniciais sobre o espaço de fases para outros valores de α , ou seja, outros valores de q . Isso é mostrado nos espaços de fases das figuras 2.3, 2.4 e 2.5.

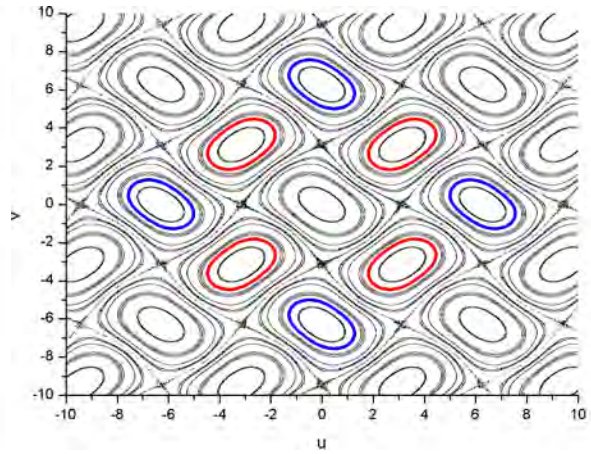
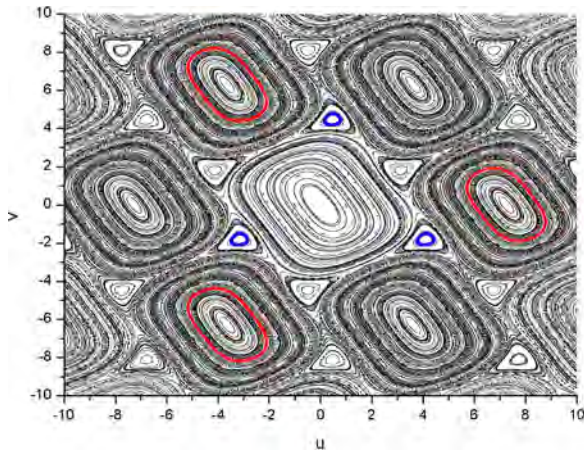


Figura 2.2: Espaço de fases para $K=1.0$ e $q=3$ Figura 2.3: Espaço de fases $K=1.0$ e $q=4$

As regiões fechadas acima mencionadas são as regiões regulares do espaço de fases. Nessas regiões o sistema não exibe comportamento caótico. As regiões em preto no espaço de fases indicam a existência de caos. Na seção 3.1 será exposta uma importante relação entre condições iniciais em regiões regulares (e/ou caóticas) e a evolução temporal do sistema.

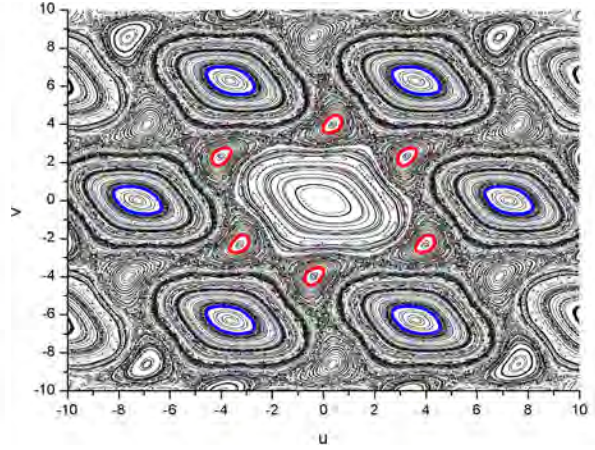
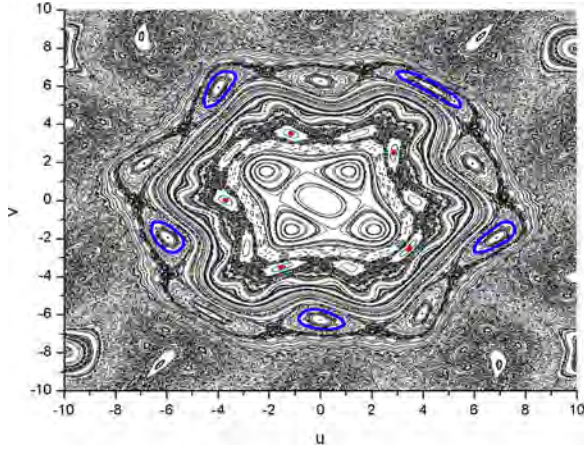


Figura 2.4: Espaço de fases $K=1.0$ e $q=5$ Figura 2.5: Espaço de fases para $K=1.0$ e $q=6$

Portanto, a análise dos espaços de fases das figuras 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 sugere que a hipótese inicial está correta. Pois claramente, existe uma dependência entre o valor de q e o número de regiões regulares visitadas. Porém, essa dependência não é observada quando as condições iniciais são dadas dentro da região regular que contém a origem do espaço de fases. É possível observar essa situação na figura 2.6, nesse caso $q = 5$ e apenas 1 região regular foi visitada.

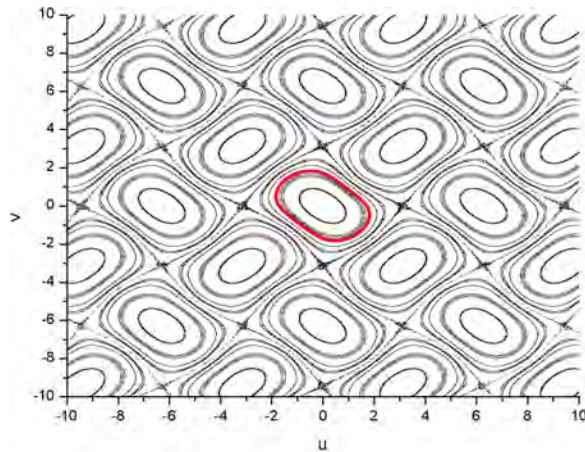


Figura 2.6: Espaço de fases para $K=1.0$ e $q=5$

2.2 Amplitude de Perturbação

De maneira análoga ao que foi feito no estudo das ordens de ressonância, fornecemos condições iniciais ao sistema para um valor fixado q . Variando o parâmetro K , é possível observar as variações no espaço de fases devido a mudança desse parâmetro.

A seguir são apresentados espaços de fase para $q = 4.0$ e condições iniciais de u contidas no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ e v contidas no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$. Em ambos os casos o passo escolhido foi $h = \pi/4$.

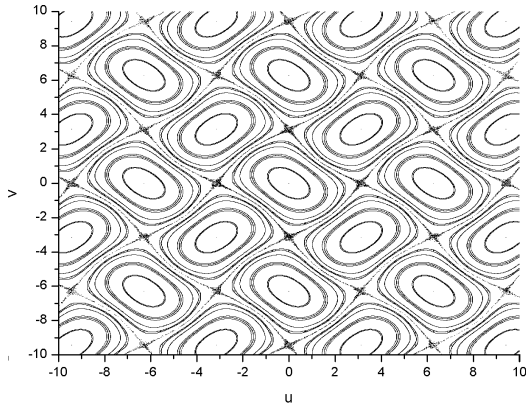


Figura 2.7: Espaço de fases $K=1.0$ e $q=4$

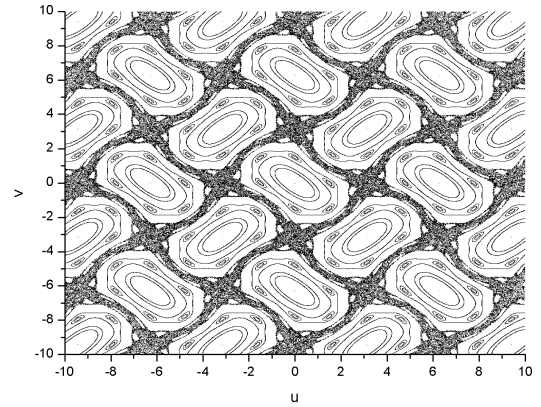


Figura 2.8: Espaço de fases $K=1.5$ e $q=4$

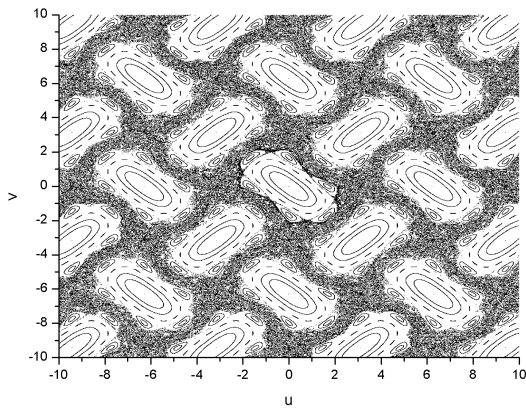


Figura 2.9: Espaço de fases $K=1.7$ e $q=4$

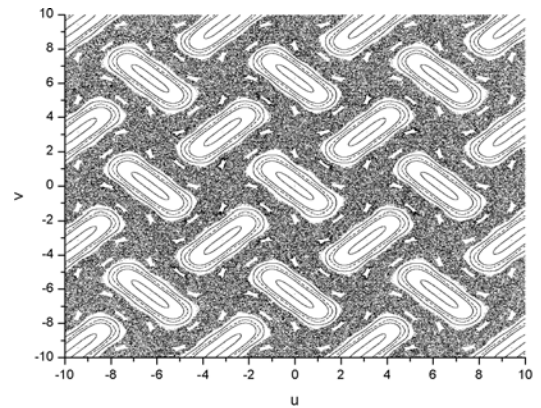


Figura 2.10: Espaço de fases $K=2.0$ e $q=4$

Da análise dos espaços de fases das figuras 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10 observa-se que o valor de

K está relacionado com quão caótico é o sistema. Para $K = 1.0$ o sistema é pouco caótico, sendo o espaço de fases praticamente dominado por regiões regulares. Já para $k = 2.0$ é notado o aumento da região caótica, bem como a diminuição do tamanho das regiões regulares. O aumento do parâmetro K causa a completa destruição do espaço de fases. Foi verificado ainda que o sinal de K não altera o espaço de fases, ou seja, obtemos o mesmo espaço de fases fazendo, por exemplo, $K = 1.5$ e $K = -1.5$.

Capítulo 3

Dinâmica no Mapa de Rede de Zaslavsky

Vimos no capítulo anterior que aplicando iterações sucessivas a partir de uma condição inicial, obtemos uma sequência de pontos sobre o espaço de fases. Definimos essa sequência de pontos como a órbita gerada a partir da condição inicial dada.

Uma vez que o sistema dinâmico discretizado é autônomo, as sucessivas iterações efetuadas representam a evolução temporal do sistema. A fim de verificar o comportamento da evolução temporal de uma condição inicial, foram realizadas os seguintes estudos.

3.1 Região Regular x Região Caótica

Após várias combinações entre os parâmetros K e q , foi escolhido para estudo o espaço de fases correspondente aos parâmetros $K = 1.5$ e $q = 4$, esse espaço de fases é mostrado na figura 3.1. É visível a semelhança entre o espaço de fases e uma rede de pesca, onde as

regiões regulares equivalem às células, e a região caótica à rede propriamente dita.

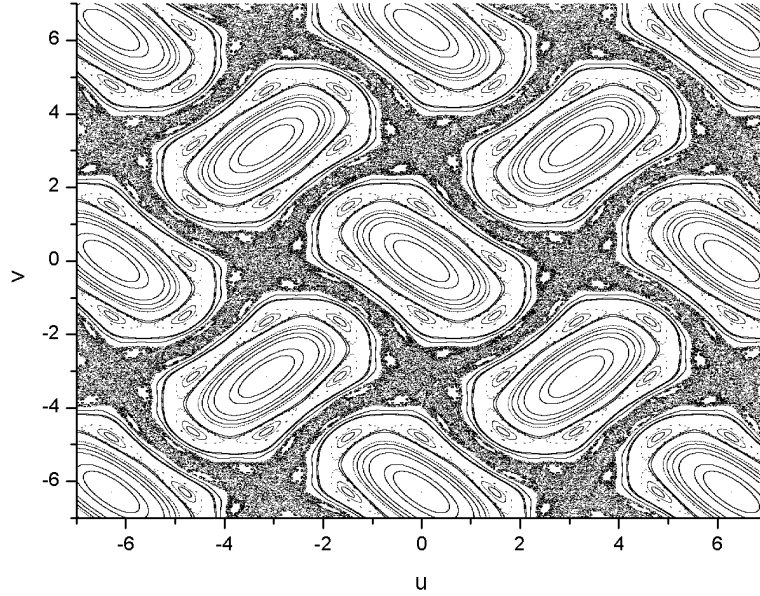


Figura 3.1: Espaço de fases para $K=1.5$ e $q=4$

É possível notar ainda a existência de curvas isoladas no interior das células, essas regiões não são uniformemente preenchidas e apresentam um padrão muito complexo. Tais regiões denominados ilhas e sub-ilhas.

Na seção 2.1 foi utilizado o artifício de representar com outra cor as iterações correspondentes a uma condição inicial. Naquela situação, todas as condições iniciais foram dadas dentro de regiões regulares, pois buscava-se obter uma dependência entre o número de regiões regulares e a ordem de ressonância do sistema. Esse mesmo artifício foi aqui empregado buscando visualizar a evolução temporal de uma condição inicial na região caótica. Para isso, foram escolhidas 2 condições iniciais localizadas na região caótica $((0.4, 3.1)$ e $(3.1, 6.2))$, e suas respectivas evoluções plotadas sobre o espaço de fases. A figura 3.2 mostra os resultados.

É interessante observar que todos os pontos iterados a partir de condições iniciais na região caótica continuam na região caótica independentemente do tempo transcorrido

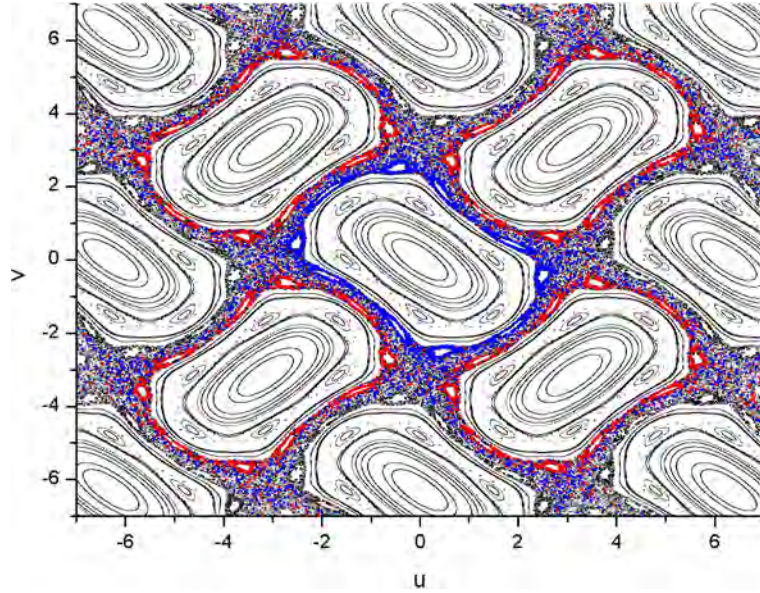


Figura 3.2: Evolução de duas condições iniciais localizadas na região caótica

(número de iterações efetuadas). Vimos na seção (2.1) que condições iniciais em regiões regulares, visitavam apenas outras regiões regulares correspondentes em ordem de ressonância.

Desta forma, concluímos que uma condição inicial dada numa região, permanece nessa região não importando quantas iterações sejam dadas. Na figura 3.3 temos as iterações para as condições iniciais $(-2.7, -1.3)$, $(0.5, 5.25)$, localizadas na região caótica, e $(\pi, 2\pi)$, $(0.5, 3.0)$, localizadas na região regular.

3.2 Evolução Temporal das Variáveis Relevantes

Na seção anterior, determinamos se uma condição inicial estava na região caótica (ou regular), plotando as iterações sucessivas dessa condição sobre o espaço de fases. Se o conjunto de pontos visitassem as regiões fechadas, sabíamos que a condição inicial havia

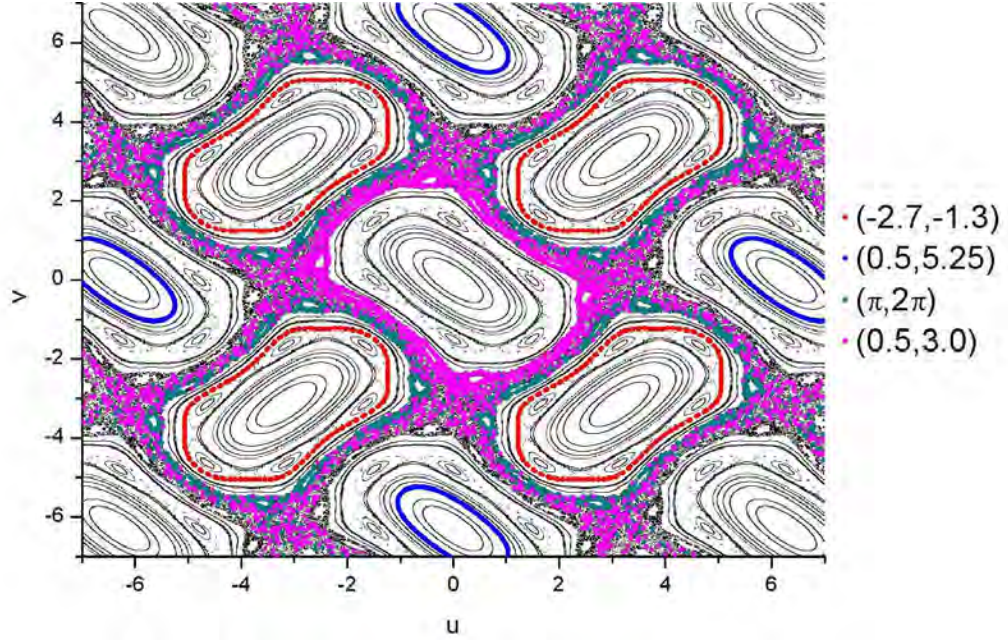


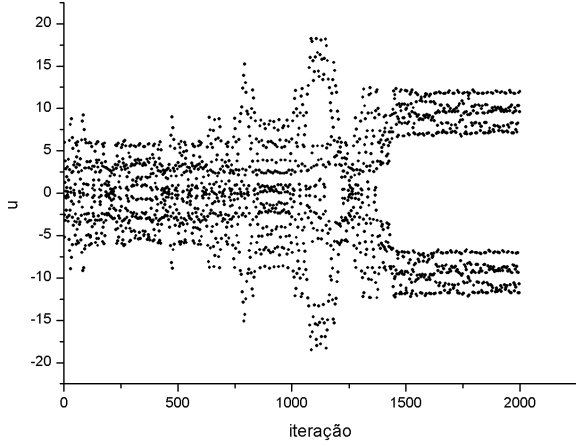
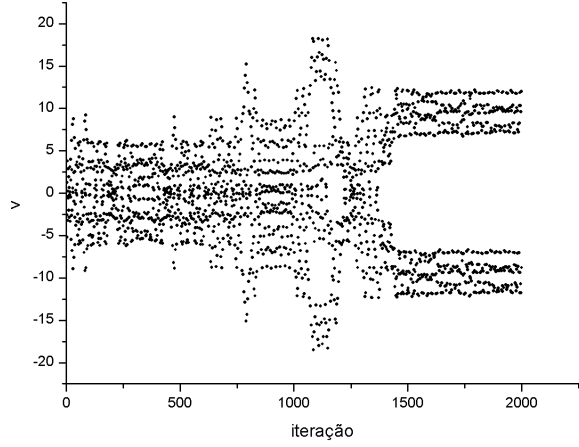
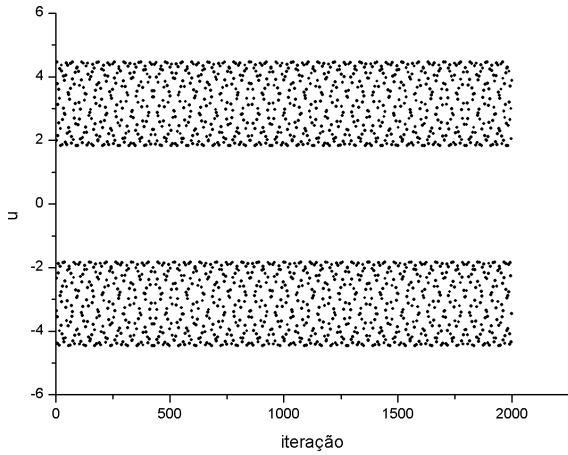
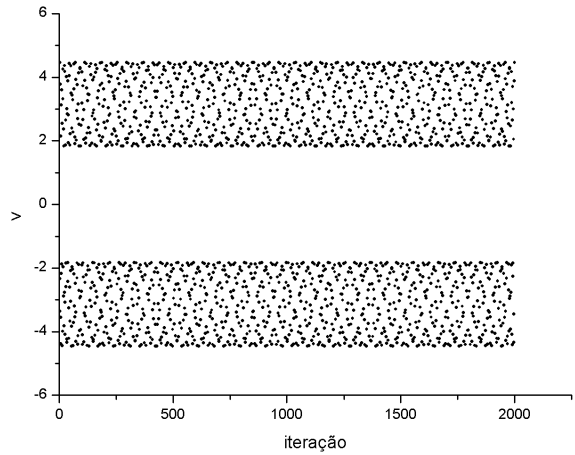
Figura 3.3: Evolução de condições iniciais localizadas na região caótica e na região regular

seja dada na região regular. De modo análogo, quando o conjunto de pontos viajava sobre a região caótica, sabíamos que a condição inicial havia sido dada na região caótica.

Apresentamos aqui, uma maneira de verificar se uma condição inicial pertence à região regular ou caótica, sem que seja necessário construir o espaço de fases do sistema dinâmico. O estudo consiste em analisar separadamente a evolução das variáveis em função do tempo, ou seja, a maneira com que as variáveis evoluem através das iterações.

Foi estudado o sistema dinâmico com as variáveis $K = 1.5$ e $q = 4$. Escolhendo-se arbitrariamente duas condições iniciais, como por exemplo $(3.0, 6.0)$ e $(2.0, 2.0)$, desejava-se saber a quais regiões pertencem essas condições iniciais. A seguir representamos as evoluções temporais das variáveis $u \times i$ e $v \times i$ das duas condições iniciais.

As evoluções $u \times i$, $v \times i$ da condição inicial $(3.0, 6.0)$ apresentou resultados comple-

Figura 3.4: Gráfico de $u \times i$, (3.0,6.0)Figura 3.5: Gráfico de $v \times i$, (3.0,6.0)Figura 3.6: Gráfico de $u \times i$, (2.0,2.0)Figura 3.7: Gráfico de $v \times i$, (2.0,2.0)

tamente diferentes das evoluções $u \times i$, $v \times i$ para a condição inicial (2.0,2.0). No primeiro caso é possível observar um comportamento totalmente irregular para as variáveis u e v com o passar do tempo, sugerindo que essas variáveis podem, à princípio, assumir qualquer valor. Já no segundo caso, é notável a regularidade das variáveis u e v , indicando que essas variáveis podem apenas assumir valores compreendidos dentro de certos intervalos. Observando a figura 3.3, vemos que as condições iniciais que possuem uma sequência de pontos confinadas dentro de um intervalo, são as condições iniciais dadas em regiões regulares, e

que as condições iniciais cuja sequência de pontos não apresenta este tipo de restrição são as condições iniciais dadas na região caótica.

Sendo assim, podemos determinar se uma condição inicial pertence à região caótica ou à região regular, observando a evolução temporal das variáveis separadamente.

3.3 Perturbação do Sistema Dinâmico

De acordo com a equação (1.6), que descreve o movimento de um oscilador afetado por impulso periódico, definimos na seção 2.2 que o parâmetro K representava a amplitude dessa perturbação.

Foi estudada, além dessa perturbação periódica, uma perturbação constante devido à inserção de um parâmetro β no mapa (1.7). Em física experimental a existência de interferências gerados por sinais eletromagnéticos ou interações mecânicas e vibrações provocam flutuações nas medidas fornecidas pelos instrumentos de medição. O intuito desse estudo foi observar as alterações provocadas por uma perturbação constante a qual o mapa foi submetido visando uma maior semelhança com a realidade. O Mapa de Rede de Zaslavsky com essa perturbação constante é dado por

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + K \sin v_n) \cos \alpha + \beta v_n \sin \alpha \\ v_{n+1} &= -(u_n + K \sin v_n) \sin \alpha + \beta v_n \cos \alpha \end{aligned} \tag{3.1}$$

O mapa anterior possui perturbação constante pois a cada iteração as expressões de recorrência de u_n e v_n são alteradas pelo parâmetro β .

Na ausência da perturbação constante, temos $\beta = 1$. Alterando β por um incremento $\Delta\beta$ se obtém uma perturbação presente em todas as iterações do sistema dinâmico, onde o

parâmetro de perturbação é dado por $\beta = 1 + \Delta\beta$.

Foram estudadas as consequências dessa perturbação constante atribuindo diferentes valores para $\Delta\beta$. Nas figuras 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 é mostrado o efeito desse incremento sobre o sistema dinâmico, com parâmetros $K = 0.08$ e $q = 5$ e realizando 1000 iterações para condições iniciais u contidas no intervalo $[-20, 20]$ e v contidas no intervalo $[-20, 20]$, com passo $h = 2$.

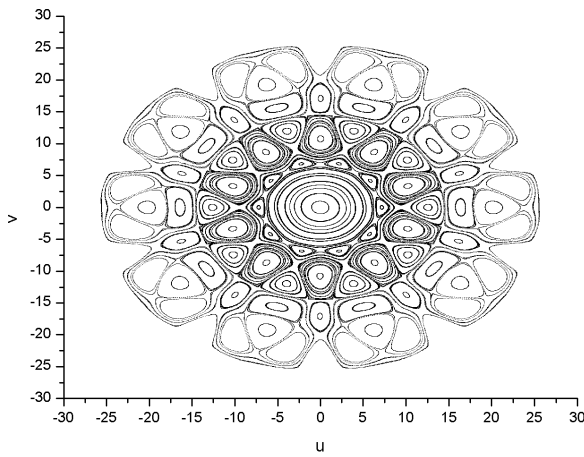


Figura 3.8: Espaço de fases $\Delta\beta = 0$

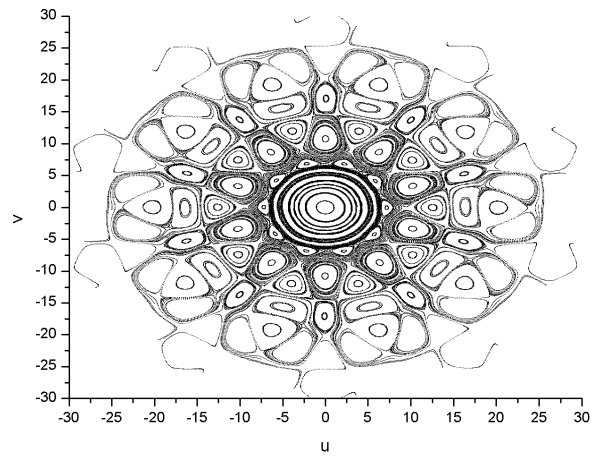


Figura 3.9: Espaço de fases $\Delta\beta = 1.10^{-4}$

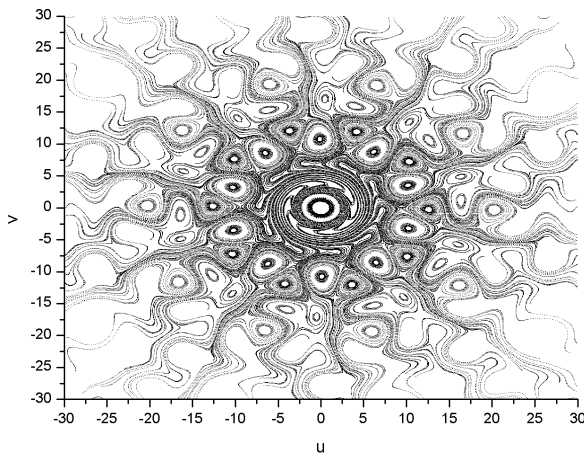


Figura 3.10: Espaço de fases $\Delta\beta = 1.10^{-3}$

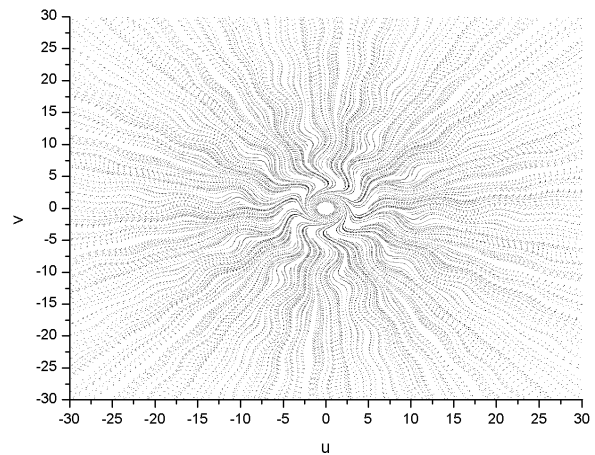


Figura 3.11: Espaço de fases $\Delta\beta = 1.10^{-2}$

Foi observado que o sistema dinâmico é extremamente sensível a esse tipo de per-

turbação, pois uma pequena alteração no valor de $\Delta\beta$ gera espaços de fases completamente diferentes.

3.4 Efeitos da Perturbação no Mapa de Rede de Zaslavsky

Vimos na seção anterior que o inserção de uma perturbação no sistema dinâmico provoca profundas alterações na dinâmica do sistema e por consequência em seus respectivos espaços de fases. Sendo assim, dada uma mesma condição inicial para dois sistemas dinâmicos idênticos, porém com perturbações diferentes, espera-se que após um número n de iterações, a sequência de pontos para cada sistema seja diferente.

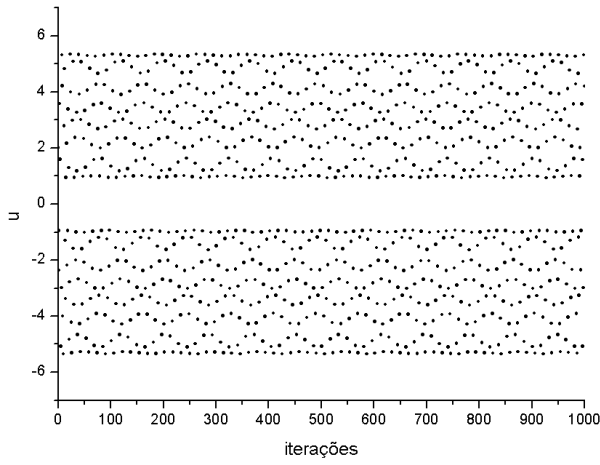
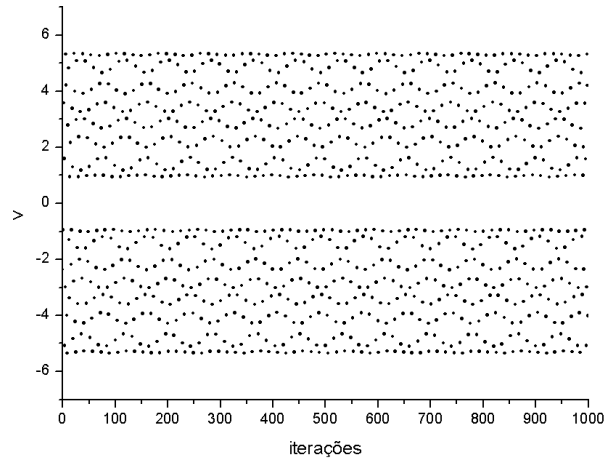
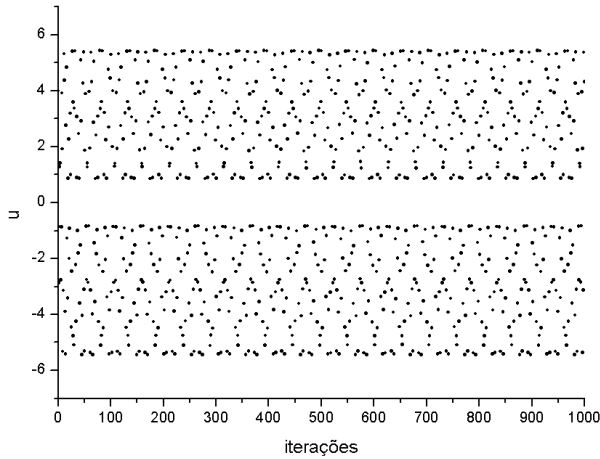
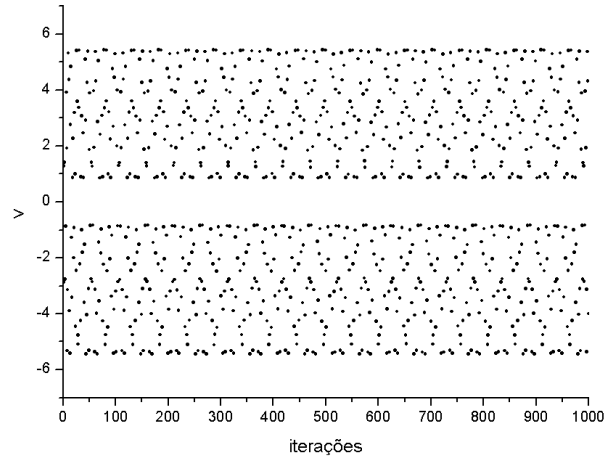
Esse comportamento foi analisado através da comparação dos valores das variáveis u e v entre um sistema A não perturbação ($\Delta\beta = 0$) e um sistema B , perturbado por $\Delta\beta = 1.10^{-8}$. O sistema A foi considerado com sistema de referência. Fixamos os valores de $K = 1.5$ e $q = 4$ para ambos os sistemas. Abitrary foram fornecidas 3 condições iniciais (1.0,2.0), (2.0,4.0) e (3.0,6.0) para cada sistema, e para cada uma dessas condições iniciais foram realizadas 200 iterações. Os resultados são mostrados na tabela 3.1.

Condição Inicial	$\Delta\beta = 0$		$\Delta\beta = 1.10^{-8}$	
	u_{200}	v_{200}	u_{200}	v_{200}
(1.0,2.0)	3.90894741007	-4.28931346116	3.90894675193	-4.28931565696
(2.0,4.0)	2.69496536565	-5.41279162563	2.69496640923	-5.41279141952
(3.0,6.0)	-0.571008956747	-1.86716062046	0.976776800156	-9.28039904530

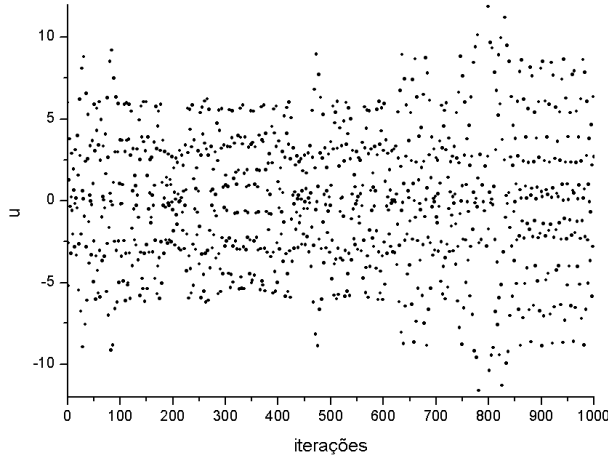
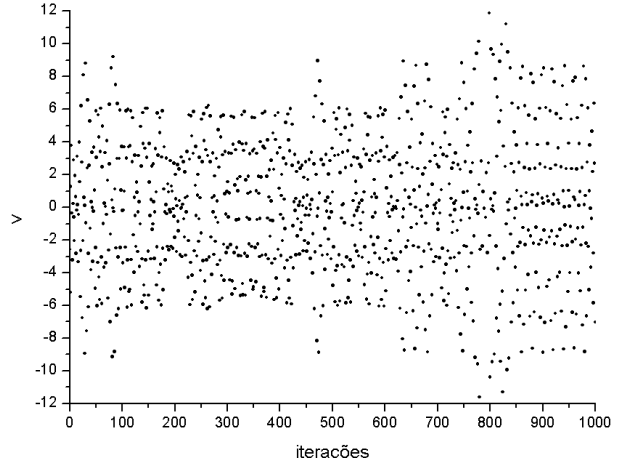
Tabela 3.1: Dados comparativos entre sistema perturbado e não perturbado

Da análise da tabela 3.1 é possível notar que as condições iniciais (1.0,2.0), (2.0,4.0)

quase não sofrem alterações com a perturbação, entretanto a condição inicial (3.0,6.0) mostra resultados completamente diferentes após 200 iterações. Essa não concordância entre as 3 condições iniciais nos levou a investigar a localização dessas condições iniciais sobre o espaço de fases. Foi determinado se as condições iniciais pertenciam à região caótica ou à região regular usando o método da seção 3.2. Os gráficos das figuras 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 mostram as evoluções temporais das variáveis u e v para cada condição inicial.

Figura 3.12: Gráfico de $u \times i$, (1.0,2.0)Figura 3.13: Gráfico de $v \times i$, (1.0,2.0)Figura 3.14: Gráfico de $u \times i$, (2.0,4.0)Figura 3.15: Gráfico de $v \times i$, (2.0,4.0)

Dos gráficos das figuras 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 verifica-se que condições

Figura 3.16: Gráfico de $u \times i$, (3.0,6.0)Figura 3.17: Gráfico de $v \times i$, (3.0,6.0)

iniciais (1.0,2.0), (2.0,4.0) estão localizadas em regiões regulares, enquanto que a condição inicial (3.0,6.0) está localizada na região caótica.

Dessa forma, fomos levados à seguinte hipótese:

Condições iniciais dadas nas regiões regulares sofrem pequenas alterações devido à perturbação constante aplicada ao sistema, e que condições iniciais dadas na região caótica sofrem grandes alterações.

Para verificar esta hipótese, foram checadadas não apenas 3 condições iniciais, mas sim um grande conjunto. Foi escolhido para estudo o espaço de fases da figura 2.9.

O conjunto de condições iniciais testado foi definida da seguinte forma: variando u de $[0,50]$ com passo de 0.01 sendo $v = 2$, essas condições iniciais são representadas pela linha da figura 3.18, que é uma ampliação do espaço de fases apresentado na figura 2.9. Essas condições iniciais foram fornecidas ao sistemas A e B . Após 200 iterações comparou-se os valores das variáveis u e v entre os dois sistemas, de modo análogo à tabela 3.1. As condições iniciais que apresentaram um desvio menor ou igual a 0.001 foram consideradas como não alteradas pela perturbação, ou seja, se $|u_{200}^A - u_{200}^B| \leq 0.001$ e $|v_{200}^A - v_{200}^B| \leq 0.001$

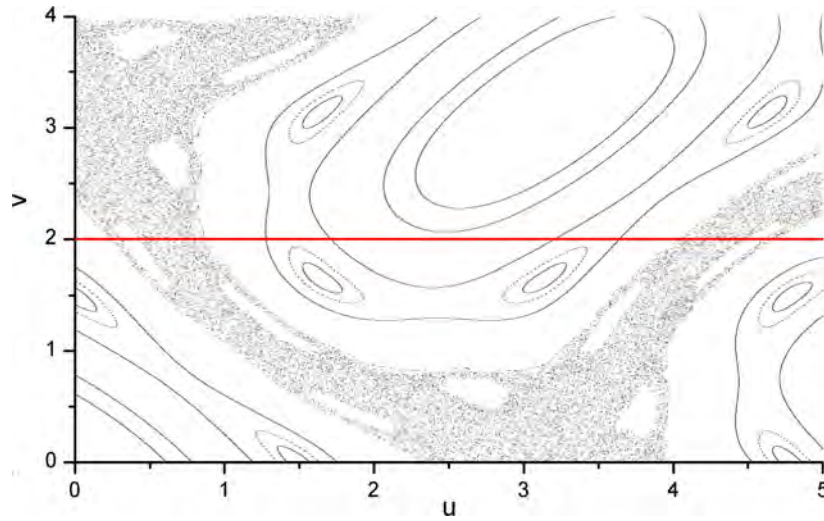


Figura 3.18: Linha de condições iniciais $v = 2$

a perturbação não é pronunciada nessa condição inicial. Quando isso acontecia, a condição inicial era plotada sobre a ampliação espaço de fases da figura 2.9, mostrada na figura 3.19.

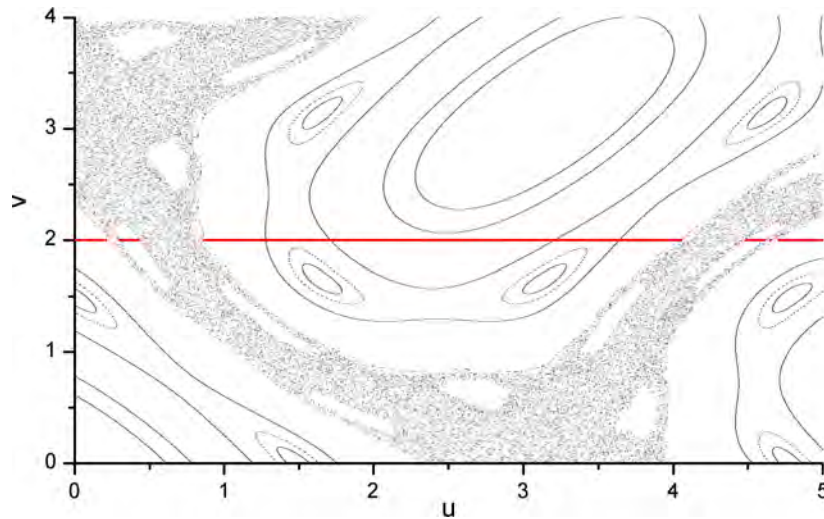


Figura 3.19: Condições iniciais que não são sofrem grandes alterações devido à perturbação

Observando a figura 3.19, é possível notar que a linha de condições iniciais tornou-se descontínua sobre a região preta. Portanto, condições iniciais dadas em regiões regulares

sofrem alterações muito pequenas (≤ 0.001) devido à perturbações quando comparadas com condições iniciais dadas na região caótica. Até mesmo as pequenas sub-ilhas contidas dentro da região caótica não apresentam alterações pronunciadas. Isso mostra que a hipótese feita anteriormente é plausível. Posteriormente, na seção (6.6) será mostrado que uma perturbação pode levar **algumas** trajetórias regulares para o comportamento caótico, resultando em transporte no espaço de fases.

Capítulo 4

Sincronização no Mapa de Rede de Zaslavsky

Sincronização é um fenômeno onde dois ou mais sistemas interagem entre si, resultando em uma simultaneidade entre as características desses sistemas [8].

O relato científico mais antigo sobre sincronização data de 1657, quando Christian Huygens estudou o movimento de dois pêndulos oscilando na mesma base de madeira. Ele observou que após transcorrido um período de tempo os pêndulos passavam a oscilar em fase, isto é, acabavam por acertar o ritmo das suas oscilações. Atualmente esse comportamento pode ser observado em diversos campos da ciência [9].

Sejam A e B dois sistemas dinâmicos desconectados, ou seja, sem nenhuma espécie de interação. Se de alguma forma A passa a interferir em B (vice-versa), dizemos que os sistemas estão acoplados, sendo esse acoplamento representado por uma função T.

A fim de estudar as possíveis propriedades da sincronização, foi tomado como base nesses estudos dois sistemas dinâmicos idênticos ao representado pelo Mapa de Rede de

Zaslavsky. Sejam A e B os seguintes sistemas, respectivamente:

$$\begin{cases} ua_{n+1} &= (ua_n + K \sen va_n) \cos \alpha + va_n \sen \alpha \\ va_{n+1} &= -(ua_n + K \sen va_n) \sen \alpha + va_n \cos \alpha \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} ub_{n+1} &= (ub_n + K \sen vb_n) \cos \alpha + vb_n \sen \alpha \\ vb_{n+1} &= -(ub_n + K \sen vb_n) \sen \alpha + vb_n \cos \alpha \end{cases} \quad (4.2)$$

de modo que (ua_0, va_0) seja a condição inicial do sistema A, e (ub_0, vb_0) a condição inicial do sistema B, não existindo nenhum tipo de interação entre A e B. Foram definidos dois acoplamentos $T_1 = C(vb_n - va_n)$ e $T_2 = C(va_n - vb_n)$, sendo T_1 o acoplamento do sistema A e T_2 o acoplamento do sistema B. C é chamada constante de acoplamento.

Uma vez determinado T_1 e T_2 , os mapas foram reescritos como:

$$\begin{cases} ua_{n+1} &= (ua_n + K \sen va_n) \cos \alpha + va_n \sen \alpha + C(vb_n - va_n) \\ va_{n+1} &= -(ua_n + K \sen va_n) \sen \alpha + va_n \cos \alpha \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} ub_{n+1} &= (ub_n + K \sen vb_n) \cos \alpha + vb_n \sen \alpha + C(va_n - vb_n) \\ vb_{n+1} &= -(ub_n + K \sen vb_n) \sen \alpha + vb_n \cos \alpha \end{cases} \quad (4.4)$$

Vale ressaltar que a escolha dos acoplamentos T_1 e T_2 foi arbitrária, bem como a forma com que os sistemas foram acoplados.

A partir dos mapas (4.3) e (4.4) foi possível analisar o comportamento de cada sistema através das evoluções temporais das variáveis $(ua_n, ub_n) \times t$, $(va_n, vb_n) \times t$.

4.1 Regimes de Sincronização

Os acoplamentos dos sistemas podem ser classificados como *unidirecionais* ou *bidirecionais*. O acoplamento é unidirecional quando um dos sistemas evolui livremente e impõe

sua dinâmica sobre um outro sistema, esse tipo de acoplamento é chamado “mestre-escravo”. Por outro lado, quando existe uma interação mútua entre os sistemas, temos o acoplamento bidirecional [10]. Portanto, o acoplamento utilizado em (4.3) e (4.4) é do tipo bidirecional.

Uma vez que os sistemas se encontram acoplados, é possível visualizar os regimes de sincronização em fase, contrafase, sincronização completa e incompleta.

4.1.1 Sincronização em fase

Quando acoplamos dois sistemas que inicialmente evoluíam sem nenhum contato, a dinâmica do(s) sistema(s) se altera(m). Se o acoplamento for suficientemente forte para causar modificações, tal que eventos comuns entre os sistemas passem a ocorrer ao mesmo tempo, temos uma sincronização em fase. Como exemplo, na figura 4.1 é representado o regime de sincronização em fase para duas variáveis quaisquer.

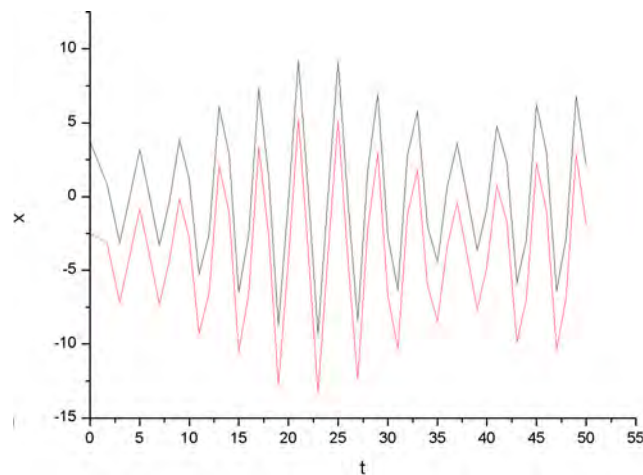


Figura 4.1: Sincronização em fase

4.1.2 Sincronização em contra-fase

Se após acoplados, os sistemas apresentem uma regularidade oposta entre eventos comuns, a sincronização é em contra-fase. Como exemplo, na figura 4.2 é representado o regime de sincronização em contra-fase para duas variáveis quaisquer.

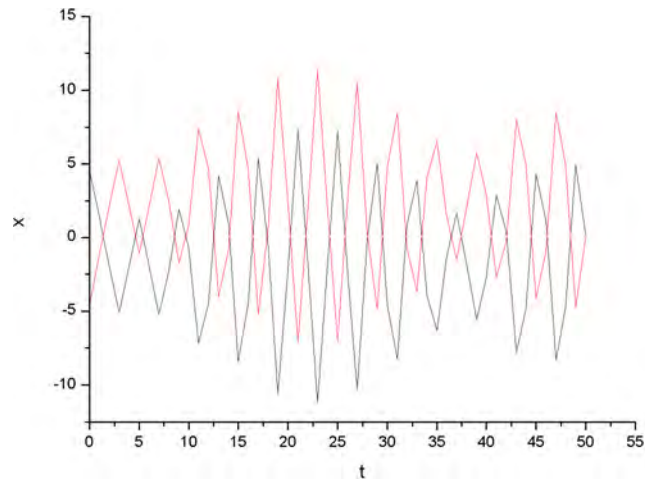


Figura 4.2: Sincronização em contra-fase

4.1.3 Sincronização completa

Sendo os sistemas A e B idênticos, é possível comparar os valores das variáveis dos dois sistemas, como por exemplo, as variáveis ua_n, ub_n dos mapas (4.3) e (4.4). Se o módulo da diferença entre os módulos dessas variáveis for nula, a sincronização é dita completa. A sincronização completa pode ser em fase ou contra-fase. Como exemplo, na figura 4.3 é representado o regime de sincronização completa e em fase para duas variáveis quaisquer.

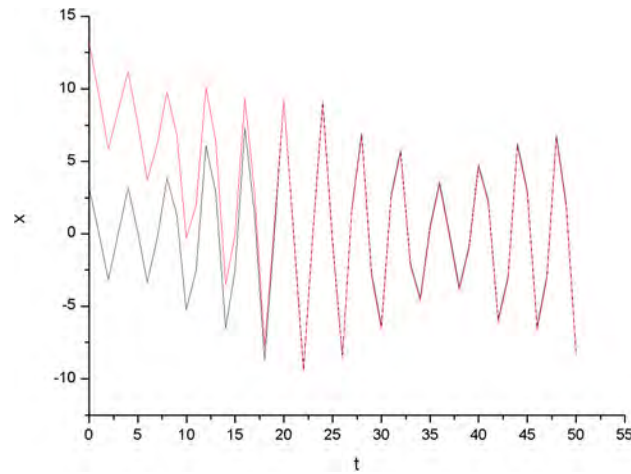


Figura 4.3: Sincronização completa e em fase

4.1.4 Sincronização incompleta

Um outro regime de sincronização acontece quando acoplamos dois sistemas dinâmicos. Se o módulo da diferença entre os módulos das variáveis ua_n, ub_n (ou va_n, vb_n) dos mapas (4.3) e (4.4) se tornar constante, a sincronização é dita incompleta. A sincronização incompleta pode ser em fase ou contra-fase [8]. Na figura 4.4 é representado o regime de sincronização incompleta e em fase para duas variáveis quaisquer.

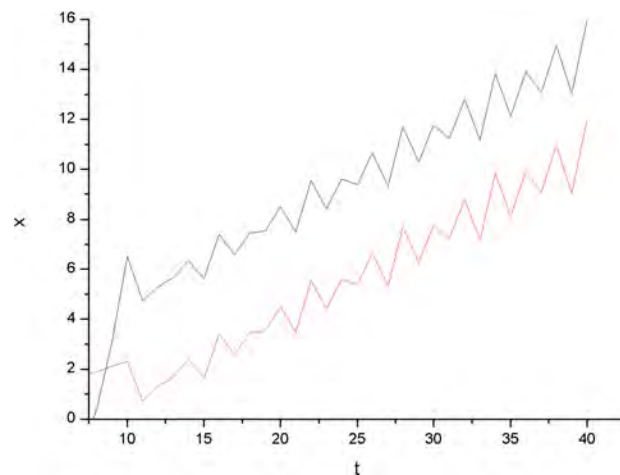


Figura 4.4: Sincronização incompleta e em fase

4.2 Análise do Regime de Sincronização

Acoplando dois mapas de Redes de Zaslavsky idênticos, definidos em (4.3) e (4.4), denotadas como sistema A e sistema B, obtivemos resultados que dependem das condições iniciais (ua_0, va_0) e (ub_0, vb_0) e da constante de acoplamento C .

Em cada instante, calculando a diferença entre as variáveis correspondentes, obtivemos $\Delta_u = ||ua_n| - |ub_n||$ e $\Delta_v = ||va_n| - |vb_n||$, com isso foi possível verificar se os sistemas sincronizavam quando $t \rightarrow \infty$. E ainda, comparando a evolução temporal de ua_n e ub_n , va_n e vb_n , foi possível classificar a sincronização quanto a fase.

Se $\Delta_u \rightarrow 0$ e $\Delta_v \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, temos o regime de sincronização completa para as variáveis u e v . Analisando a evolução temporal das variáveis numa mesma iteração verificamos se a sincronização é em fase ou em contra-fase.

Quando $\Delta_u \rightarrow cte$ e $\Delta_v \rightarrow cte$, quando $t \rightarrow \infty$ os sistemas sincronizam, porém, a sincronização não é completa para as variáveis u e v . Assim como na primeira situação, determinamos se a sincronização é em fase ou em contra-fase analisando a evolução temporal das variáveis [9].

No caso de sistemas dinâmicos bidimensionais como o Mapa de Rede de Zaslavsky, as variáveis u e v podem apresentar regimes diferentes de sincronização para um mesmo parâmetro de acoplamento C . As variáveis v podem entrar em sincronismo completo e em contra fase enquanto que as variáveis u podem não sincronizar, por exemplo.

Qualquer outra situação para Δ_u e Δ_v foi encarada como não sincronização quando $t \rightarrow \infty$.

4.3 Resultados

Para o estudo da sincronização dos Mapa de Rede de Zaslavsky foram escolhidas as condições iniciais, $(3.0, 5.0)$ e $(2.0, 1.7)$, e fornecidas aos sistemas A e B, mostrado nas equações (4.3) e (4.4) , respectivamente.

O parâmetro C foi escolhido como sendo 0.1. Os parâmetros q e K são comuns a ambos os sistemas e valem $q = 4$ e $K = 1.5$. As condições iniciais e o parâmetros foram escolhidos arbitrariamente.

Realizando iterações para ambos os sistemas obtivemos as evoluções temporais das variáveis $(u_a, u_b) \times t$, $(v_a, v_b) \times t$, mostradas nas figuras (4.5) e (4.6).

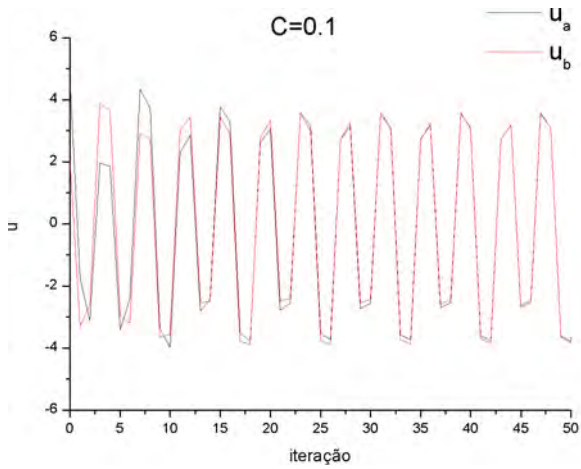


Figura 4.5: Gráfico de $u \times t$

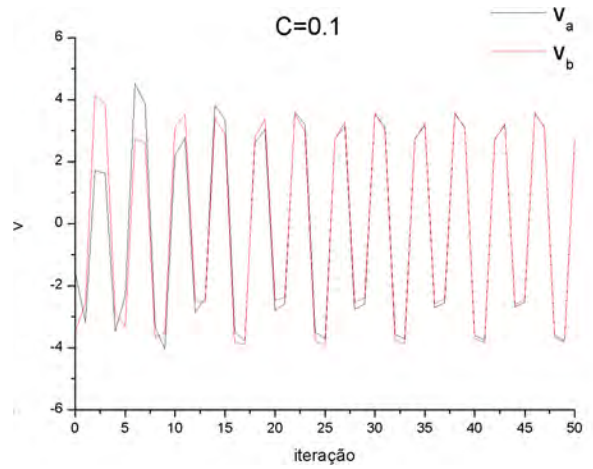
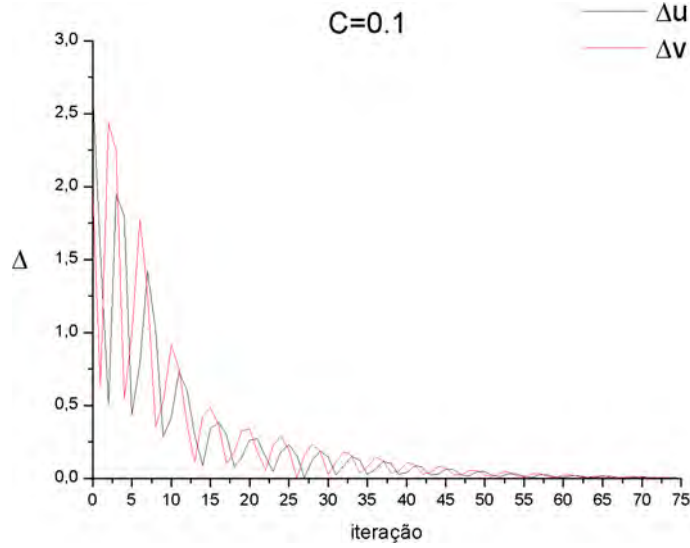


Figura 4.6: Gráfico de $v \times t$

Usando a análise descrita na seção (4.2) calculamos as diferenças Δ_u e Δ_v para cada iteração, a evolução dessas diferenças é mostrada na figura (4.7).

Analisando a figura (4.7) concluímos que as diferenças entre as variáveis, Δ_u e Δ_v decrescem com o transcorrer do tempo, indicando que, depois de aproximadamente 70 iterações, $u_{a70} \approx u_{b70}$ e $v_{a70} \approx v_{b70}$, ou seja, os sistemas A e B se encontram sincronizados. Nesse

Figura 4.7: Gráfico de $\Delta \times t$

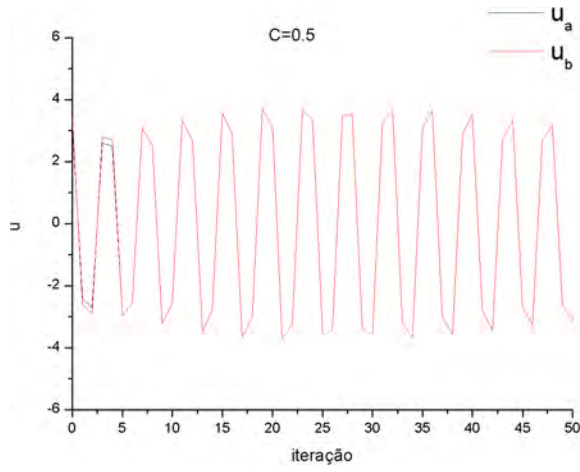
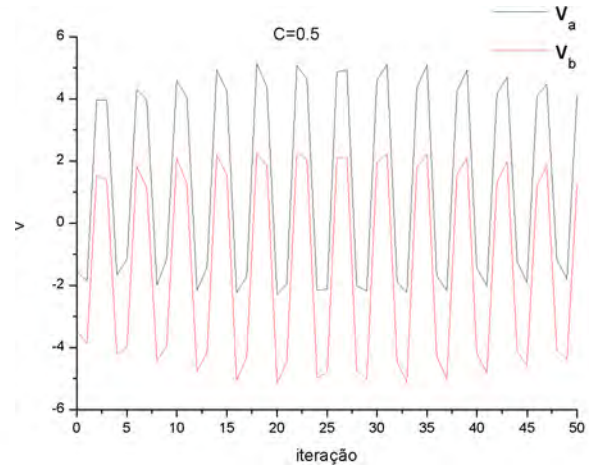
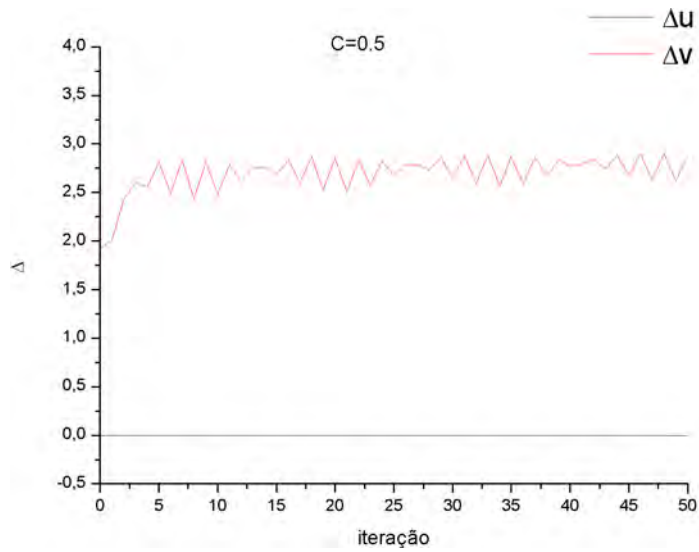
caso a sincronização é dita completa em u e v . Através das figuras (4.5) e (4.6) concluímos que a sincronização é em fase.

Portanto, para dois Mapas de Rede de Zaslavsky, tal como em (4.3) e (4.4), com condições iniciais (3.0, 5.0) e (2.0, 1.7), e com parâmetros $q = 4$, $K = 1.5$ e $C = 0.1$ ocorre a sincronização completa e em fase após 70 iterações.

Mantendo as condições iniciais e os parâmetros q e K , e alterando o parâmetro de acoplamento C para 0.5, obtivemos as evoluções temporais das variáveis $(ua_n, ub_n) \times t$, $(va_n, vb_n) \times t$, mostradas nas figuras (4.8) e (4.9).

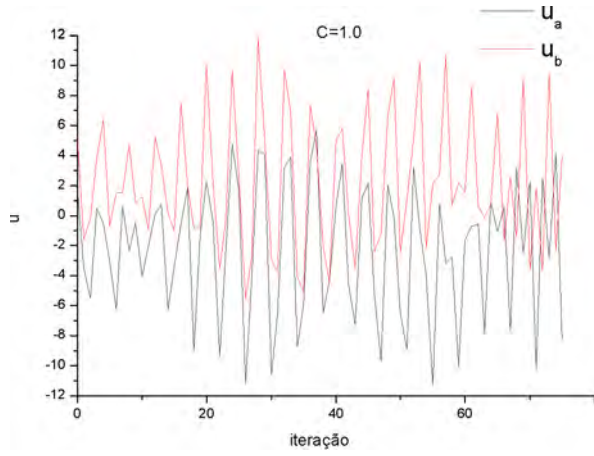
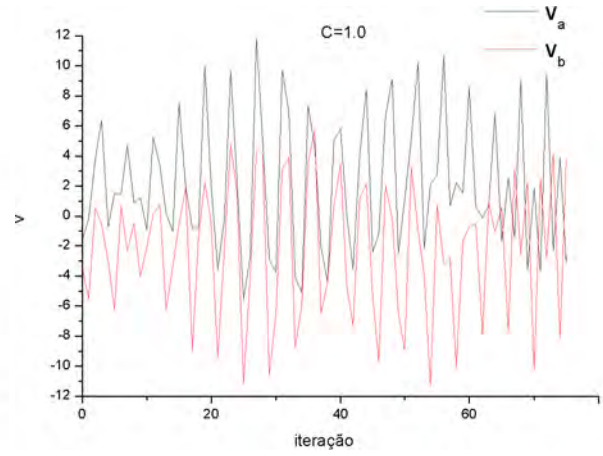
Calculando as diferenças Δ_u e Δ_v para cada iteração obtivemos a evolução dessas diferenças, que é mostrada na figura (4.10).

Analisando a figura (4.10) concluímos que para $C=0.5$ as variáveis u sincronizam-se de forma completa e em fase muito rapidamente, enquanto que as variáveis v não apresentam sincronismo. Apesar de representamos apenas um pequeno intervalo de iterações na figura

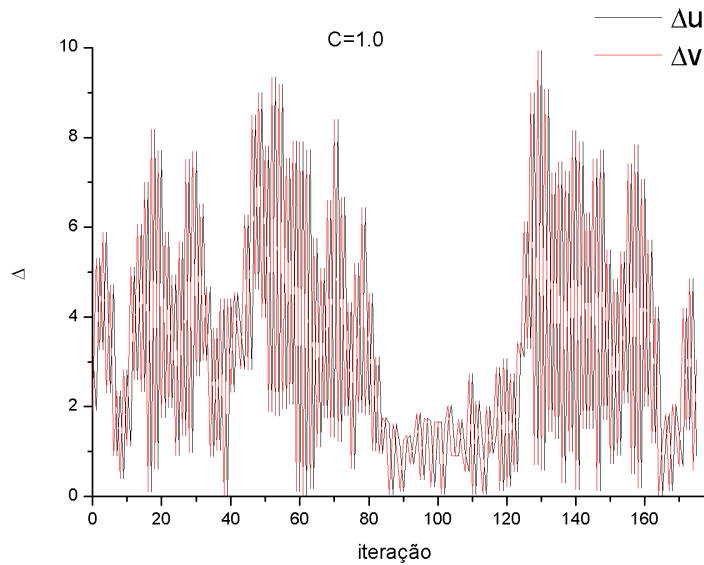
Figura 4.8: Gráfico de $u \times t$ Figura 4.9: Gráfico de $v \times t$ Figura 4.10: Gráfico de $\Delta \times t$

(4.10), foram realizadas mais de 2000 iterações não se observando nenhuma tendência à sincronização das variáveis v .

Alterando o parâmetro de acoplamento C para 1.0, obtivemos as evoluções temporais das variáveis $(u_a, u_b) \times t$, $(v_a, v_b) \times t$, mostradas nas figuras (4.11) e (4.12).

Figura 4.11: Gráfico de $u \times t$ Figura 4.12: Gráfico de $v \times t$

Calculando as diferenças Δ_u e Δ_v para cada iteração obtivemos a evolução dessas diferenças, que é mostrada na figura (4.13).

Figura 4.13: Gráfico de $\Delta \times t$

Analisando as figura (4.13) concluímos que as diferenças entre as variáveis, Δ_u e Δ_v não apresentam nenhum dos comportamentos descritos na seção (4.1.3) ou (4.1.4), ou seja, a sincronização não é completa e nem incompleta para nenhuma das variáveis, logo,

dizemos que os sistemas não entram em sincronismo para $C=1.0$. Novamente, apesar de estar representado na figura (4.13) apenas um pequeno intervalo de iterações, foram realizadas mais de 2000 iterações não se observando nenhuma tendência à sincronização das variáveis u e v .

Alterando o parâmetro de acoplamento C para 1.5, obtivemos as evoluções temporais das variáveis $(u_a, u_b) \times t$, $(v_a, v_b) \times t$, mostradas nas figuras (4.14) e (4.15).

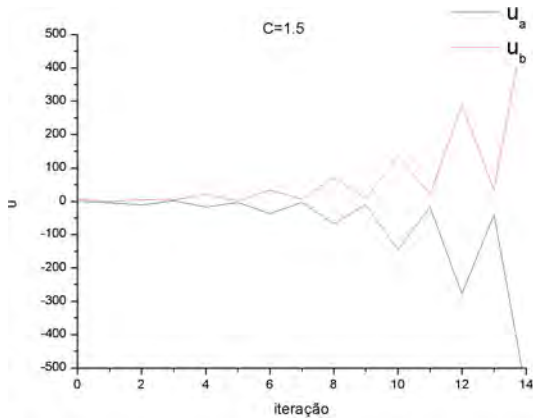


Figura 4.14: Gráfico de $u \times t$

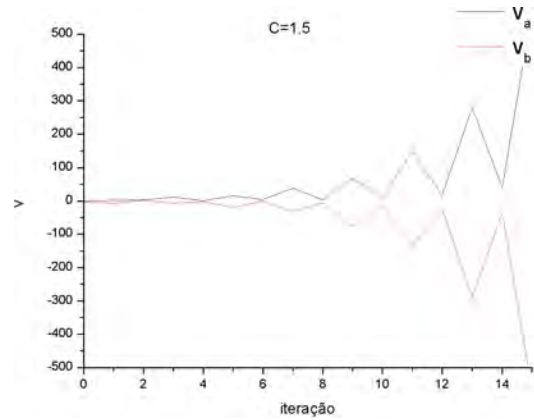
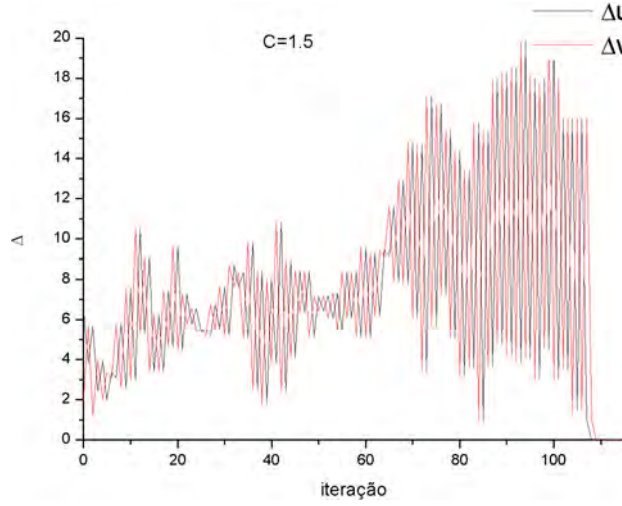


Figura 4.15: Gráfico de $v \times t$

Calculando as diferenças Δ_u e Δ_v para cada iteração obtivemos a evolução dessas diferenças, que é mostrada na figura (4.16).

Analisando a figura (4.16) concluímos que para $C=1.5$ as variáveis u e v sincronizam-se de forma completa após 110 iterações. Através das evoluções temporais das figuras (4.14) e (4.15) classificamos o regime de sincronização como sendo em contra-fase. Portanto, para $C=1.5$ as variáveis u e v sincronizam-se de forma completa e em contra-fase.

Portanto, os Mapas de Rede de Zaslavsky podem apresentar sincronização dependendo do valor do parâmetro de acoplamento C . Nessa seção foram apresentados alguns dos possíveis regimes de sincronização encontrados durante o estudo desse mapa.

Figura 4.16: Gráfico de $\Delta \times t$

4.4 Regiões de sincronização

Na seção anterior foi mostrado que dois Mapas de Rede de Zaslavsky sincronizavam-se após um número n de iterações dependendo do parâmetro de acoplamento C . Foram fixadas duas condições iniciais e variando o parâmetro de acoplamento C determinamos se ocorria a sincronização entre os mapas.

Concluimos, através da figura (4.7), que as condições iniciais $(3.0, 5.0)$ e $(2.0, 1.7)$ resultavam na sincronização dos mapas, quando $C = 0.1$. A partir desse resultado fomos levados as seguintes questões:

As condições iniciais $(3.0, 5.0)$ e $(2.0 + \Delta u, 1.7 + \Delta v)$ também resultam em algum regime de sincronização entre os mapas quando Δu e Δv são pequenos? E quando Δu e Δv são grandes?

Para responder essas perguntas procedemos da seguinte maneira: Fixando o parâmetro de acoplamento $C = 0.1$ e a condição inicial do sistema A em $(3.0, 5.0)$, varremos a região delimitada por $-10 < u < 10$ e $-10 < v < 10$ em intervalos de 0.05, tomando

esses pontos como as condições iniciais do sistema B . Assim, para cada uma dessas condições iniciais do sistema B verificamos se ocorria a algum regime de sincronização com a condição inicial do sistema A .

Com todas as condições iniciais do sistema B que sincronizaram com o sistema A construímos o espaço de condições iniciais mostrado na figura (4.17).

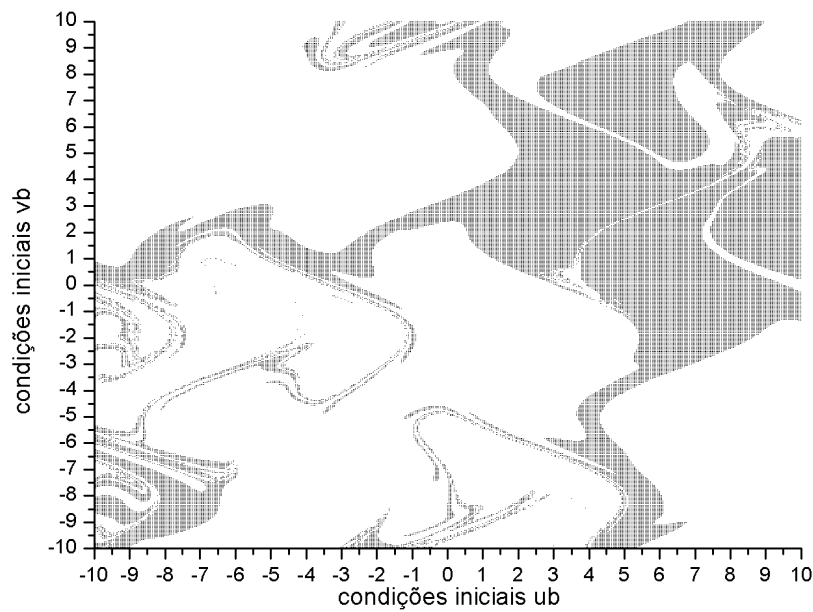


Figura 4.17: Condições iniciais do sistema B que sincronizam com o sistema A

A região escura da figura (4.17) indica as condições iniciais fornecidas ao sistema B que resultam em sincronização com o sistema A . Se uma condição inicial escolhida na região clara da figura (4.17) for fornecida ao sistema B não será observado nenhum regime de sincronização com o sistema A .

Portanto, analisando a figura (4.17) podemos saber quais condições iniciais do sistema B resultam em sincronização com o sistema A , cuja condição inicial é $(3.0, 5.0)$.

Capítulo 5

Ruído no Mapa de Rede de Zaslavsky

Na seção (3.3) consideramos que β assumia o mesmo valor em todas as iterações. Isso foi realizado através de um incremento $\Delta\beta$ adicionado de 1. Essa perturbação foi chamada de perturbação constante, e o seu efeito foi mostrado nas figuras 3.8, 3.9, 3.10, 3.11. Além da perturbação de valor constante, foi estudado o efeito de uma perturbação cujo valor variava no tempo. Essa perturbação foi chamada de perturbação aleatória e se assemelha a um ruído. Isso foi possível variando o valor do incremento $\Delta\beta$ a cada iteração realizada no mapa.

A escolha do valor de $\Delta\beta$ a cada iteração foi feita baseada em uma sequência de números aleatórios γ_i . Para tal procedimento, foi desenvolvido um algoritmo que gerava um valor randômico γ a cada iteração. Tal algoritmo fez o papel de um sorteador de números. Com isso estudamos a resposta do sistema frente a uma perturbação randômica.

O algoritmo implementado gerou valores aleatórios no intervalo $[0, 1]$. Esse intervalo não era aplicável às nossas necessidades uma vez que o estudo da seção (3.3) indicou que o sistema era muito sensível a grandes perturbações. Isso foi corrigido da seguinte forma: sendo γ o valor sorteado dentro do intervalo $[0, 1]$, multiplicou-se tal valor por um fator de

redução H . Assim, $\Delta\beta$ assumiu um valor diferente em cada iteração realizada

$$\Delta\beta_i = H\gamma_i \quad (5.1)$$

A figura (5.1) mostra uma seqüência de valores aleatórios gerado pelo algoritmo em função das iterações.

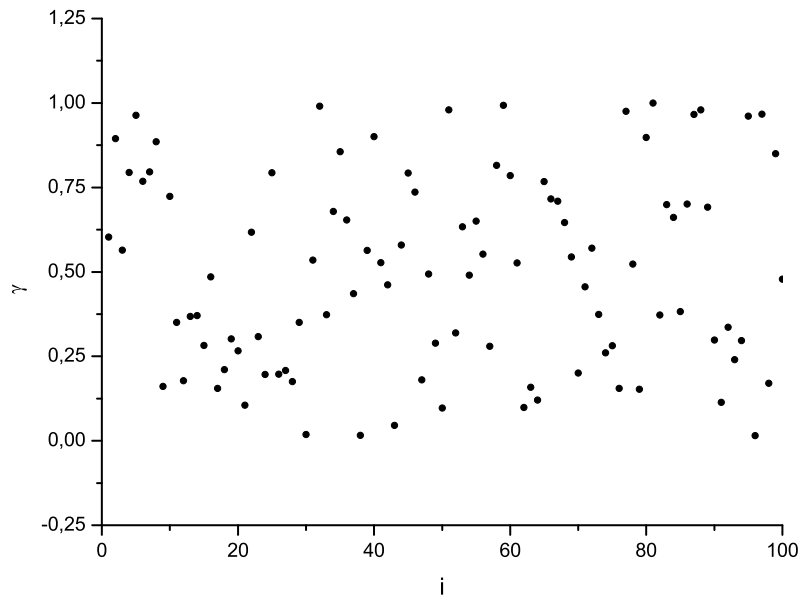


Figura 5.1: Valores de γ sorteados

Para que fosse possível comparar os efeitos da perturbação aleatória com os efeitos da perturbação constante foi necessário caracterizar a seqüência aleatória. Isso foi feito calculando a média entre os valores da seqüência. Na figura (5.1) o valor médio entre os pontos sorteados tende a 0,5 quando o numero de sorteios tende ao infinito. Assim, podemos nos referir à seqüência da figura (5.1) como a seqüência de média 0,5. Usando esse algoritmo de sorteio, criamos seqüências com médias diferentes de 0,5 através de “transformações” do

tipo:

$$\Delta\beta_i = H.(\phi + \varphi\gamma_i) \quad (5.2)$$

onde ϕ e φ são escolhidos de forma a transformar a média da sequência num valor desejado, γ é o valor do numero sorteado no intervalo $[0,1]$, e H um fator de redução. Por exemplo, para $\phi = -1$ e $\varphi = 3$ é gerada uma sequência de média 0, como mostra a figura (5.2)

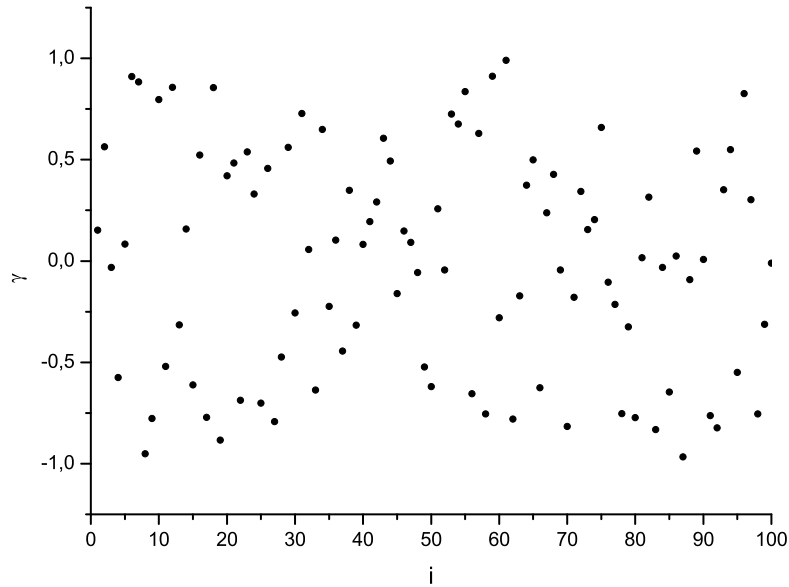


Figura 5.2: Valores de γ sorteados

Dispondo de seqüências com valores médios conhecidos foi possível comparar o efeito de perturbações devido a um $\Delta\beta_i$ aleatório com relação a um $\Delta\beta_i$ constante. Essa comparação foi realizada da seguinte forma:

- Definimos um sistema A , o qual serviu de controle para as nossas comparações. Esse sistema não possui perturbação constante e nem perturbação aleatória, $\Delta\beta = 0$, então

$$\beta = 1;$$

$$\begin{aligned} ua_{i+1} &= (ua_i + K \text{ sen } va_i) \cos \alpha + va_i \text{ sen } \alpha \\ va_{i+1} &= -(ua_i + K \text{ sen } va_i) \text{ sen } \alpha + va_i \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.3)$$

- Definimos um sistema B , o qual possui perturbação constante controlada por um parâmetro $\Delta\beta = \text{constante}$, então $\beta = 1 + \Delta\beta = 1 + \text{constante}$;

$$\begin{aligned} ub_{i+1} &= (ub_i + K \text{ sen } vb_i) \cos \alpha + \beta vb_i \text{ sen } \alpha \\ vb_{i+1} &= -(ub_i + K \text{ sen } vb_i) \text{ sen } \alpha + \beta vb_i \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.4)$$

- Escolhemos o valor da perturbação fixa $\Delta\beta = \text{constante}$ que queríamos estudar;
- Definimos um sistema C , o qual possui perturbação aleatória controlada por um parâmetro aleatório $\Delta\beta_i$, onde $\beta_i = 1 + \Delta\beta_i$;

$$\begin{aligned} uc_{i+1} &= (uc_i + K \text{ sen } vc_i) \cos \alpha + \beta_i vc_i \text{ sen } \alpha \\ vc_{i+1} &= -(uc_i + K \text{ sen } vc_i) \text{ sen } \alpha + \beta_i vc_i \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.5)$$

- Escolhemos uma transformação do tipo (5.2) de forma que a sequência aleatória resultante possuisse um valor médio igual a $\Delta\beta$ do sistema B;
- Definiu-se arbitrariamente os valores dos parâmetros de controle K, Q bem como um número i de iterações. Esses parâmetros foram fornecidos aos três sistemas;
- Foi escolhida uma condição inicial u_0, v_0 comum aos três sistemas;

- As variáveis semelhantes dos sistemas foram comparadas a cada iteração em relação ao sistema de controle A da seguinte forma:

$$\Delta ub_i = ub_i - ua_i \quad \Delta uc_i = uc_i - ua_i \quad (5.6)$$

$$\Delta vb_i = vb_i - va_i \quad \Delta vc_i = vc_i - va_i \quad (5.7)$$

- Os resultados das comparações anteriores foram plotados em relação o tempo i .

Como exemplo, as figuras (5.3) e (5.4) mostram a comparação entre os três sistemas onde $K=1.5$, $Q=4.0$, $i=1000$, $u_0=2.0$, $v_0=3.0$, $\Delta\beta = 5.10^{-5}$, uma sequência aleatória de média 0,5 e um fator de redução $H = 1.10^{-4}$.

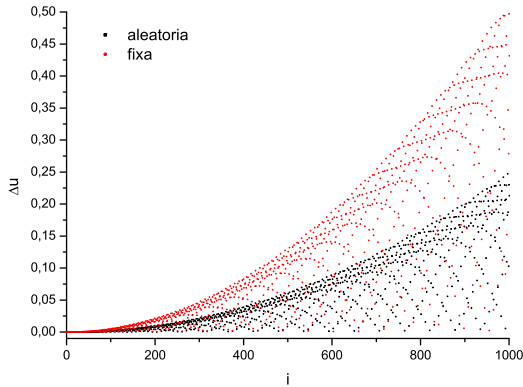


Figura 5.3: Gráfico de $\Delta u \times t$

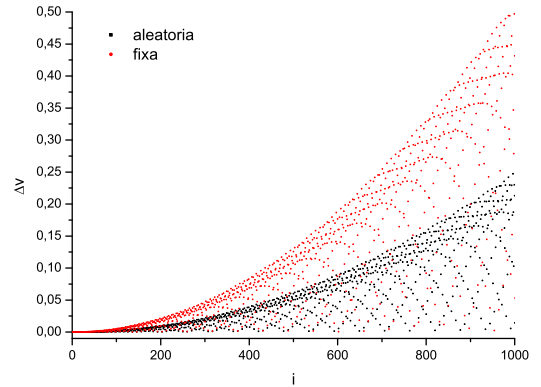
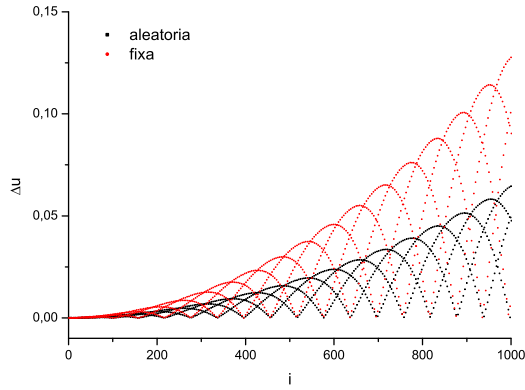
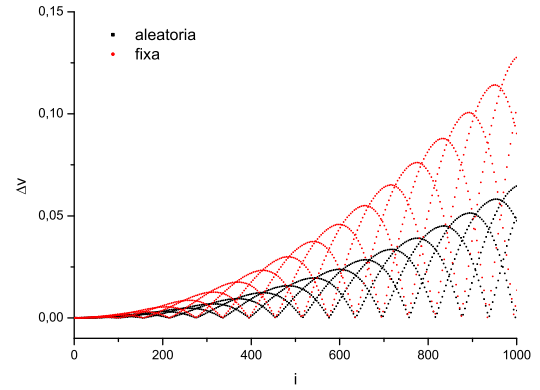


Figura 5.4: Gráfico de $\Delta v \times t$

Como exemplo, as figuras (5.5) e (5.6) mostram a comparação entre os três sistemas onde $K=1.5$, $Q=4.0$, $i=1000$, $u_0=6.0$, $v_0=6.0$, $\Delta\beta = 5.10^{-5}$, uma sequência aleatória de média 0.5 e um fator de redução $H = 1.10^{-4}$.

A justificativa para a escolha do fator de redução $H = 1.10^{-4}$ se dá através de fato de que a comparação dos efeitos entre um ruído e uma perturbação constante só tem sentido quando ambas as perturbações possuem a mesma intensidade. Sendo o valor médio do ruído

Figura 5.5: Gráfico de $\Delta u \times t$ Figura 5.6: Gráfico de $\Delta v \times t$

igual a 0.5, e $H = 1.10^{-4}$, cujo produto é equivalente a intensidade da perturbação constante escolhida, $\Delta\beta = 5.10^{-5}$.

Os gráficos das figuras (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6) indicam que o sistema com perturbação constante B apresenta uma divergência mais rápida em relação ao sistema de controle A do que o sistema com perturbação aleatória C, ou seja, o efeito da perturbação se pronuncia mais rapidamente quando a perturbação empregada é do tipo constante.

Portanto, foi concluído que se existe o interesse em perturbar um sistema, a perturbação que oferece resultado mais rapidamente é a perturbação constante.

Capítulo 6

Periodicidade de Perturbação

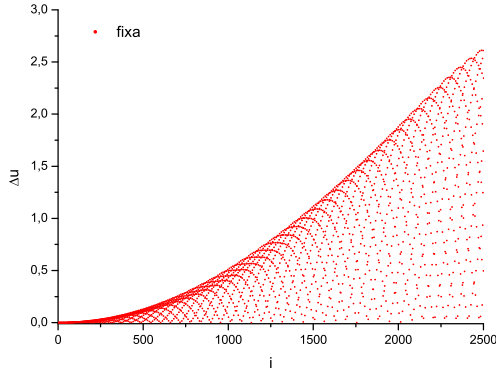
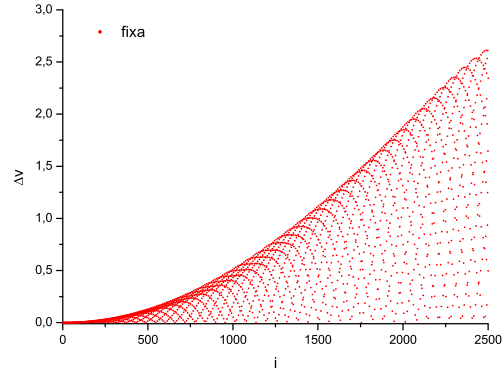
Na seção anterior foram mostrados os resultados provocados por perturbações fixas e aleatórias. Durante o estudo de tais resultados foi encontrada uma particularidade não esperada que despertou grande interesse. Essa particularidade, a qual denominamos “Periodicidade de Perturbação” será descrita detalhadamente no decorrer dessa seção.

6.1 Considerações Sobre as Perturbações

Dados dois sistemas idênticos (diferindo apenas pelo valor de $\Delta\beta$) como os apresentados nas equações (5.3) e (5.4), com condição inicial e parâmetros comum a ambos os sistemas, era esperado que as trajetórias divergissem com o passar do tempo. As figuras (6.1) e (6.2) mostram as comparações $\Delta ub_i = ub_i - ua_i$ e $\Delta vb_i = vb_i - va_i$, para $\Delta\beta = 0$ no sistema A e $\Delta\beta = 5.10^{-5}$ no sistema B .

As figuras (6.1) e (6.2) sugerem que Δub_i e Δvb_i assumem valores cada vez maiores com o passar do tempo. Assim, fomos levados a seguinte hipótese:

Uma perturbação fixa provoca uma divergência entre a trajetória do sistema não per-

Figura 6.1: Gráfico de $\Delta u \times t$ Figura 6.2: Gráfico de $\Delta v \times t$

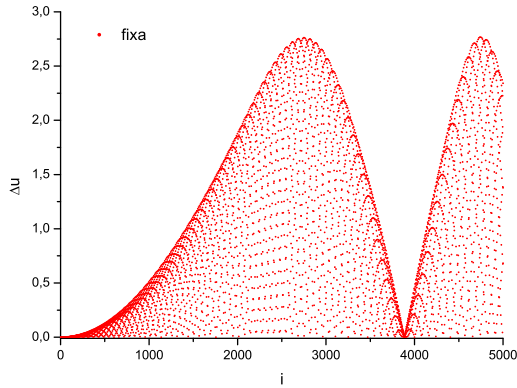
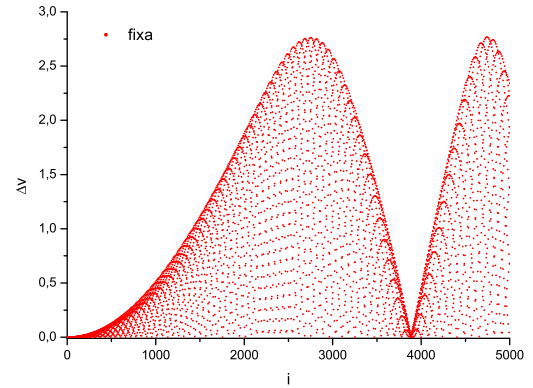
turbado A e a trajetória do sistema perturbado B, e essa divergência é crescente no tempo.

Porém, foi verificada uma estranha característica que discorda de nossa hipótese. Durante o estudo, arbitrariamente convencionou-se que relizar 1000 iterações era suficiente para observar o comportamento da divergência das trajetórias, e que nas iterações seguintes o comportamento seria mantido. Porém, isso não foi observado.

6.2 Análise da Divergência Depois de Muitas Iterações

Considerando os mesmos parâmetros e condição inicial que originaram os gráficos das figuras (6.1) e (6.2), realizamos um número muito grande de iterações, resultando num comportamento inesperado. As figuras (6.3) e (6.4) ilustram o ocorrido

Observando as figuras (6.3) e (6.4), concluímos que a hipótese anterior é incorreta. A divergência é crescente até um ponto máximo e em seguida a divergência tende a um valor mínimo, e depois novamente a um máximo, indicando um comportamento repetitivo.

Figura 6.3: Gráfico de $\Delta u \times t$ Figura 6.4: Gráfico de $\Delta v \times t$

Dessa forma, claramente a divergência entre as trajetórias não é crescente no tempo como era esperado. O comportamento encontrado foi chamado de “Periodicidade de Perturbação”, e intitula esse capítulo. Observando as figuras (6.3) e (6.4) vemos que não existe exatamente um período característico, ou seja, a distância entre dois máximos consecutivos não é fixa.

6.3 Periodicidade com Perturbação Aleatória

Na seção anterior foi mostrada a existência de um comportamento “periódico” para a diferença entre as variáveis semelhantes de um sistema não perturbado e um não perturbado. Naquela situação a perturbação empregada no estudo foi uma perturbação fixa, do tipo $\beta = 1 + cte$. Nessa seção será mostrado que o mesmo ocorre empregando uma perturbação aleatória.

Novamente consideramos dois sistemas idênticos, com condição inicial e parâmetros comum a ambos os sistemas. Foi escolhida uma sequência aleatória cujo valor médio era igual a perturbação do tipo constante da seção anterior. As figuras (6.5) e (6.6) mostram as

comparações $\Delta ub_i = ub_i - ua_i$ e $\Delta vb_i = vb_i - va_i$, para $\Delta\beta = 0$ no sistema A e $\Delta\beta_{med} = 5.10^{-5}$ no sistema B .

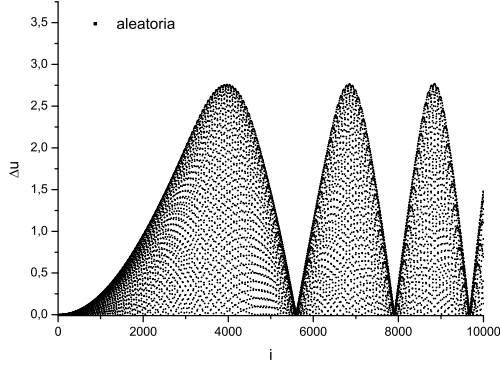


Figura 6.5: Gráfico de $\Delta u \times t$

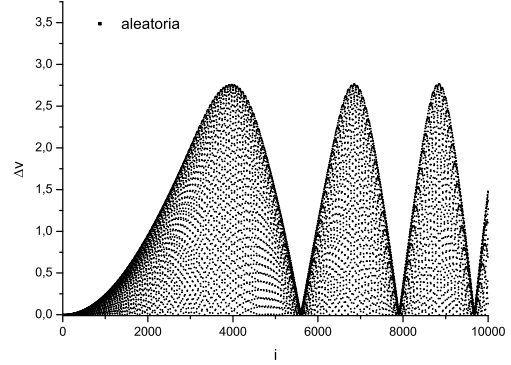


Figura 6.6: Gráfico de $\Delta v \times t$

Da análise das figuras (6.5) e (6.6) concluímos que o comportamento “periódico” não é devido ao tipo de perturbação empregado, tanto uma perturbação constante quanto uma perturbação aleatória conduzem a resultados semelhantes. O tipo de perturbação empregada apenas modifica a rapidez com que o comportamento “periódico” acontece. Ou seja, de acordo com as figuras (6.3) e (6.4) vemos que o primeiro pico máximo quando a perturbação é constante ocorre por volta de 2900 iterações, enquanto que empregando uma perturbação constante o mesmo pico máximo só acontece por volta de 4000 iterações.

6.4 Estudo da Periodicidade

Na seção anterior foi mostrado que o comportamento “periódico” acontece independentemente do tipo de perturbação empregada. O objetivo dessa seção é analisar a relação

entre os parâmetros e o comportamento “periódico”.

Vimos que os gráficos de $\Delta u \times i$ daquela seção são muito semelhantes aos gráficos de $\Delta v \times i$, por isso, de agora em diante serão apresentados apenas os gráficos de $\Delta u \times i$.

Primeiramente, desejava-se conhecer qualitativamente a relação entre a intensidade da perturbação $\Delta\beta$ (ou $\Delta\beta_{med}$ no caso aleatório) e o comportamento “periódico” da comparação entre as variáveis semelhantes de dois sistemas. Para tal estudo foram escolhidos os valores dos parâmetros como $K = 1.5$ e $Q = 4.0$, e uma condição inicial $(2.0, 3.0)$ comum a ambos os sistemas. O sistema A não foi perturbado ($\beta = 1$) e o sistema B recebeu uma perturbação constante de diferentes intensidades ($\beta = 1 + \Delta\beta$). As figuras (6.7), (6.8), (6.9) e (6.10) mostram o comportamento de Δu em função do número de iteração para diferentes $\Delta\beta$.

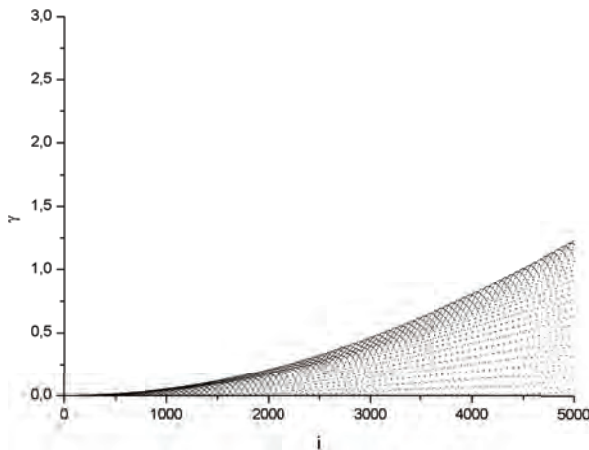


Figura 6.7: Gráfico para $\Delta\beta = 5.10^{-7}$

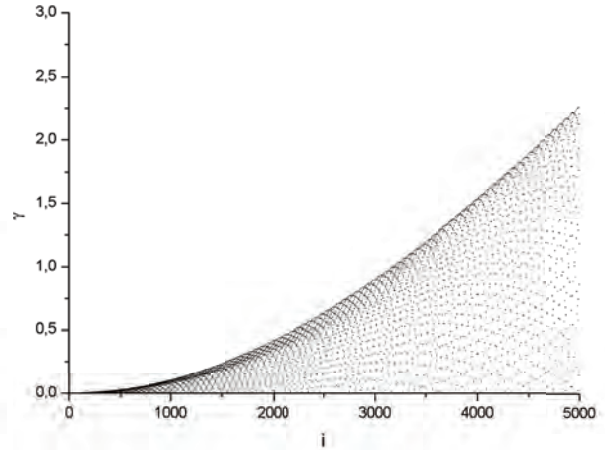
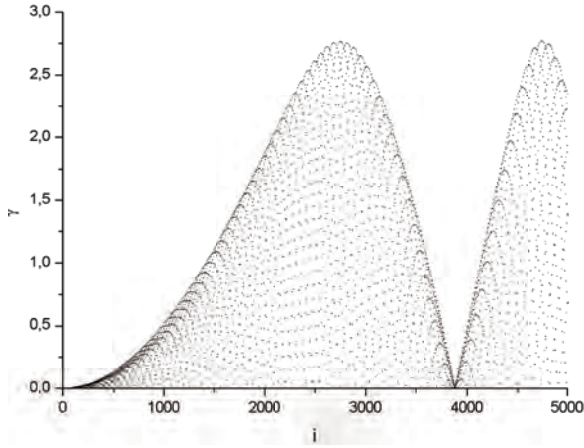
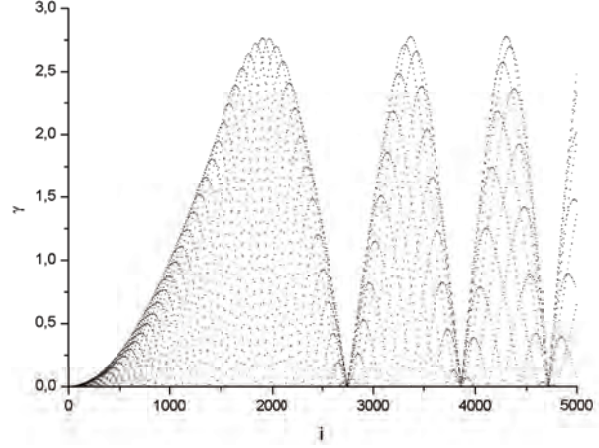


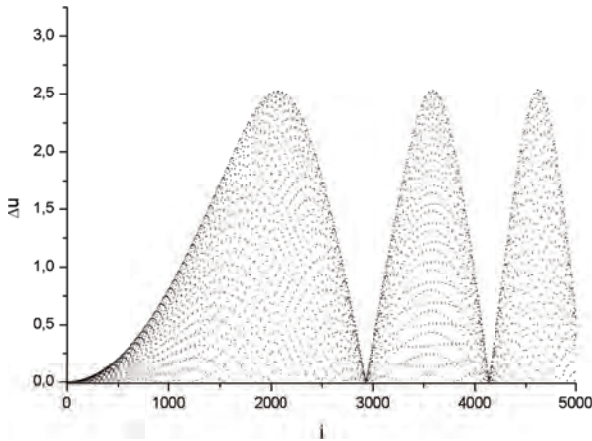
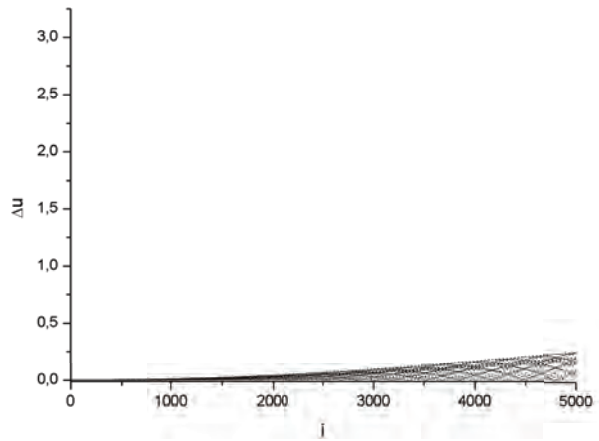
Figura 6.8: Gráfico para $\Delta\beta = 1.10^{-6}$

Analisando as figuras (6.7), (6.8), (6.9) e (6.10) concluímos que a intensidade da perturbação não modifica o valor máximo de Δu , ou seja, o distanciamento máximo entre as trajetórias (picos dos gráficos) independe do valor de $\Delta\beta$. Foi também observado que quanto maior a perturbação mais rápido o comportamento “periódico” aparece.

Uma vez que a intensidade da perturbação não alterou a máxima distância entre as trajetórias, fomos levados à acreditar que o distanciamento máximo estava relacionado com

Figura 6.9: Gráfico para $\Delta\beta = 5 \cdot 10^{-6}$ Figura 6.10: Gráfico para $\Delta\beta = 1 \cdot 10^{-5}$

a condição inicial fornecida aos sistemas. Isso foi verificado mantendo fixa a intensidade da perturbação e variando-se a condição inicial. As figuras (6.11), (6.12), (6.13) e (6.14) mostram o comportamento de Δu em função do número de iteração para diferentes condições iniciais.

Figura 6.11: Gráfico para $(u_0, v_0) = (0.5, 0.5)$ Figura 6.12: Gráfico para $(u_0, v_0) = (1.5, 0.1)$

Nas figuras (6.11), (6.12), (6.13) e (6.14) vemos que o afastamento máximo entre as trajetórias está diretamente ligado à condição inicial fornecida aos sistemas. Julgou-se interessante conhecer a localização dessas condições iniciais sobre o espaço de fases, e isso é

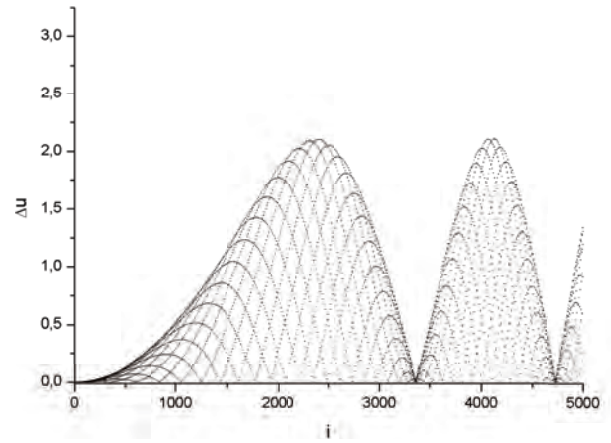
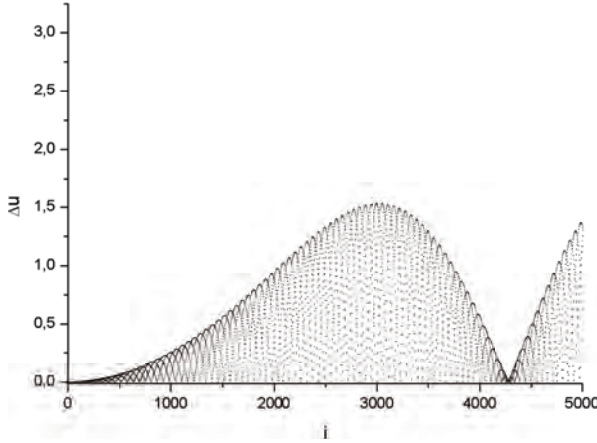


Figura 6.13: Gráfico para $(u_0, v_0) = (6.0, 6.0)$ Figura 6.14: Gráfico para $(u_0, v_0) = (-4.0, 3.0)$

mostrado na figura (6.15).

Comparando a localização das condições iniciais sobre o espaço de fases com a amplitude máxima de separação entre trajetórias observou-se que as condições iniciais que levam a um maior distanciamento são aquelas localizadas nas maiores curvas invariantes dentro das regiões regulares. A condição inicial $(1.5, 0.1)$ representada em azul na figura (6.15) está localizada dentro de uma pequena ilha, de modo que a excursão máxima entre a trajetória não perturbada e a trajetória perturbada é menor que no caso $(0.5, 0.5)$, representada em vermelho.

Portanto, concluímos que a perturbação do Mapa de Rede de Zaslavsky produz um comportamento não esperado que consiste na aproximação e afastamento entre a trajetória perturbada e a trajetória não perturbada. Foi verificado que o afastamento máximo entre as trajetórias não depende da intensidade da perturbação, mas da condição inicial, e que o distanciamento máximo é tanto maior quanto a curva invariante do espaço de fases que contém a condição inicial.

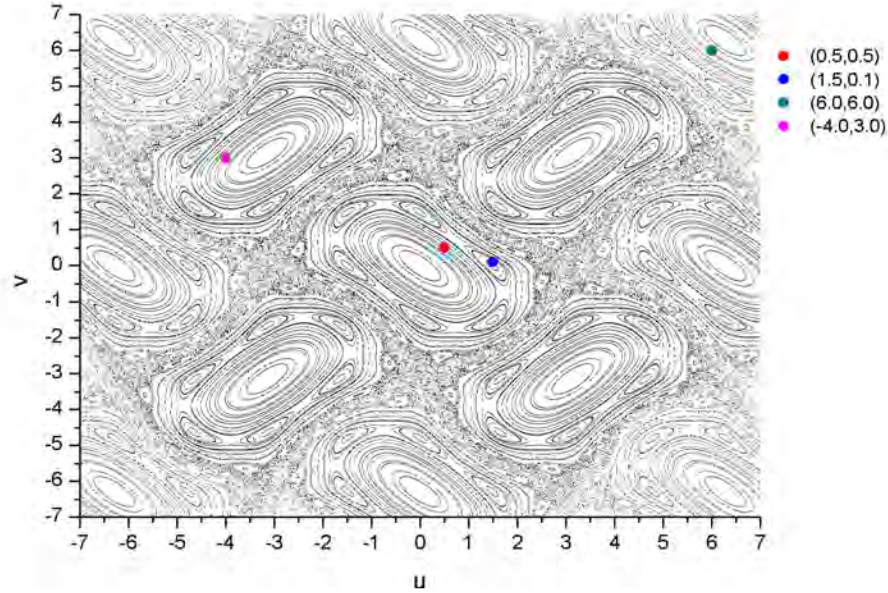


Figura 6.15: Exemplo de condições iniciais de máximo distanciamento

6.5 Periodicidade de Perturbação no Mapa de Chirikov

As conclusões da seção (6.4) despertaram o interesse sobre o comportamento “periódico” encontrado na perturbação do Mapa de Rede de Zaslavsky. Restava saber se esse comportamento era uma característica estritamente particular desse mapa ou era encontrada em outros mapas. Para sanar essa curiosidade foi aplicado no Mapa de Chirikov exatamente o mesmo estudo usado no Mapa de Rede de Zaslavsky, ou seja, consideramos dois sistemas idênticos com os mesmos parâmetros e condições iniciais, diferindo apenas no valor de β . O sistema não perturbado possui $\beta = 1$ e o sistema perturbado possui $\beta = 1 + cte$.

6.5.1 Mapa de Chirikov

O mapa mais amplamente estudado é o Mapa de Chirikov, ou ainda mapa Padrão. Originalmente descrevia um modelo de interação de um plasma com um campo magnético, mas seu modelo é aplicado em outros processos dinâmicos como o movimento de partículas carregadas em aceleradores, e pêndulos sem gravidade [11]. O Mapa de Chirikov é dado por

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + v_{i+1} \\ v_{i+1} &= v_i + \kappa \sin u_i \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde κ é um parâmetro adimensional que controla a intensidade da não linearidade. A figura (6.16) mostra o espaço de fases do Mapa de Chirikov para $\kappa = 1$.

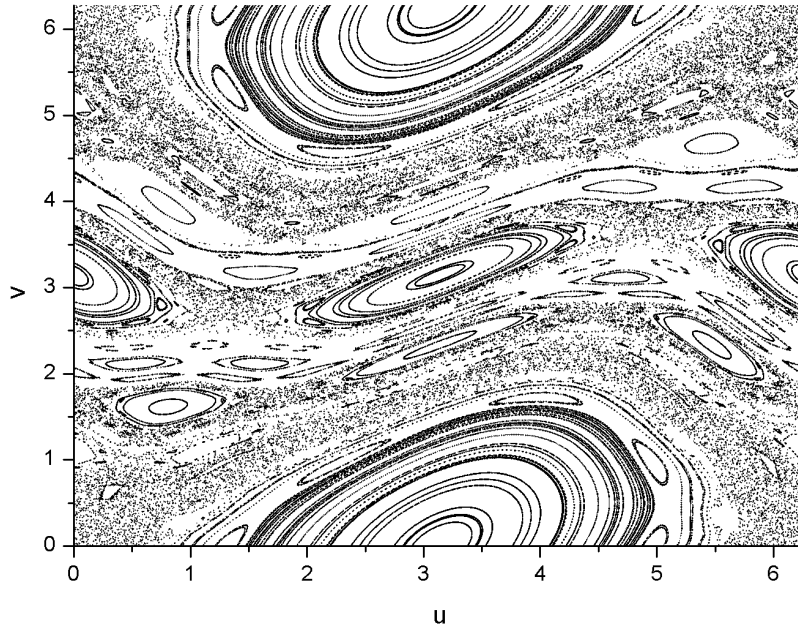


Figura 6.16: Sincronização em fase

6.5.2 Perturbação no Mapa de Chirikov

Foram definidos dois sistemas idênticos, A e B

$$ua_{i+1} = ua_i + va_{n+1} \quad (6.2)$$

$$va_{i+1} = va_i + \kappa\beta_a \sin ua_i$$

$$ub_{i+1} = ub_i + vb_{i+1} \quad (6.3)$$

$$vb_{i+1} = vb_i + \kappa\beta_b \sin ub_i$$

No sistema A o parâmetro $\beta_a = 1$, esse sistema serviu de controle. Para o sistema B o parâmetro $\beta_b = 1 + 1.10^{-3}$ foi escolhido arbitrariamente. Assim como na seção (5) foram definidas as seguintes comparações

$$\Delta u_i = ub_i - ua_i \quad \Delta v_i = vb_i - va_i \quad (6.4)$$

As iterações para as comparações (6.4) são mostradas nas figuras (6.17) e (6.14).

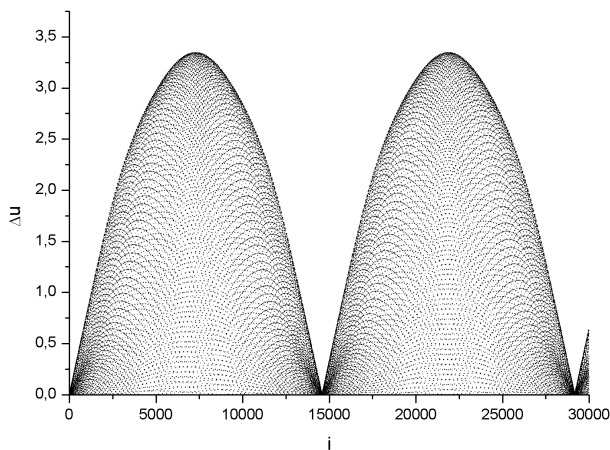


Figura 6.17: Gráfico de $\Delta u \times t$

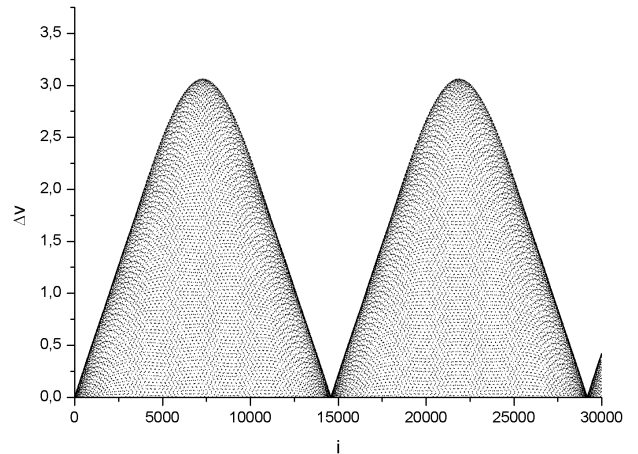


Figura 6.18: Gráfico de $\Delta v \times t$

Analisando as figuras (6.17) e (6.14) concluímos que a aproximação e afastamento entre a trajetória perturbada e a trajetória não perturbada que ocorria no Mapa de Rede

de Zaslavsky também ocorre do Mapa de Chirikov. Portanto, aparentemente essa pode ser uma característica geral também presente em outros mapas.

6.6 Mudança de Região Regular para Região Caótica

Vale ressaltar que o comportamento “periódico” observado tanto no mapa de Zaslavsky quanto no mapa de Chirikov, ocorre apenas para condições iniciais dentro das regiões regulares ou sobre as curvas invariantes do espaço de fase.

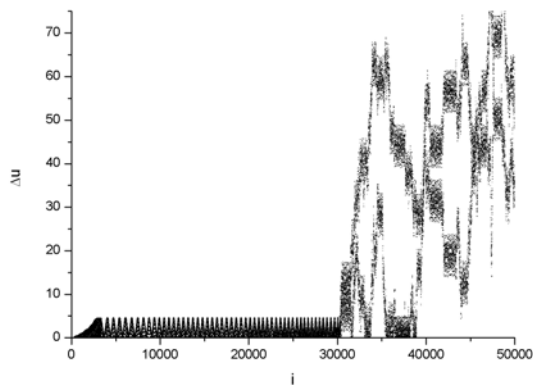
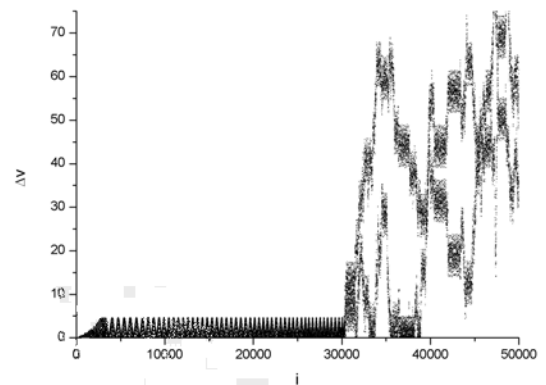
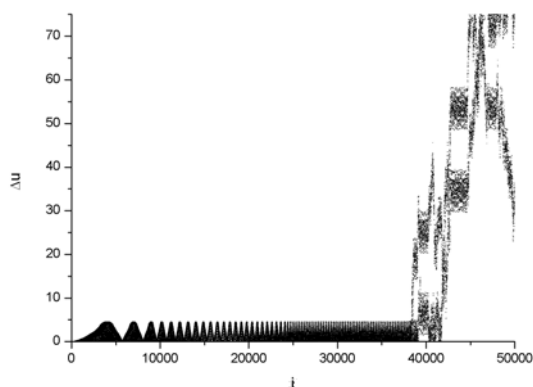
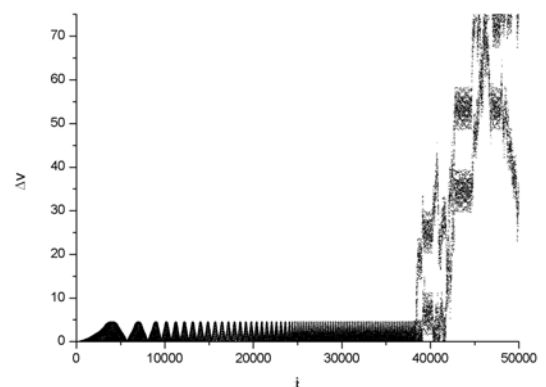
Condições iniciais localizadas no mar de caos resultam em trajetórias diferentes muito rapidamente, fazendo com que Δu e Δv “explodam”.

Durante os estudos foi notado que para algumas condições iniciais na região regular, Δu e Δv também crescem indefinidamente após um certo número de iterações. Essas condições iniciais situam-se muito próximas da fronteira entre uma região regular e o mar de caos.

Nas figuras (6.19), (6.20) e (6.21), (6.22) vemos o crescimento de Δu e Δv para duas dessas condições iniciais.

Foi observado que o comportamento “periódico” se extingue em um determinado momento, indicando que a trajetória do sistema perturbado escapa da região regular para o mar de caos, enquanto que a trajetória do sistema não perturbado continua sobre uma curva invariante da região regular. Na literatura, esse comportamento é denominado *stickiness* [12].

Dessa forma, é possível concluir que uma trajetória inicialmente regular pode apresentar comportamento caótico devido uma perturbação, como por exemplo um ruído. Essa transição entre as regiões é conhecida como transporte no espaço de fases, sendo possível

Figura 6.19: Gráfico de $\Delta u \times t$ Figura 6.20: Gráfico de $\Delta v \times t$ Figura 6.21: Gráfico de $\Delta u \times t$ Figura 6.22: Gráfico de $\Delta v \times t$

facilitar ou dificultar esse comportamento através da intensidade da perturbação e pela ca-
oticidade do sistema, como mostrado nas figuras

Capítulo 7

Expoentes de Lyapunov

Expoente de Lyapunov é um conjunto de números que são utilizados como um método para detectar a presença do caos em sistemas dinâmicos, este expoente fornece uma medida sensível às condições iniciais. O expoente de Lyapunov tem sido um dos diagnósticos mais utilizados na análise de sistemas dinâmicos caóticos.

7.1 Expoentes de Lyapunov

Num sistema unidimensional de tempo discreto (Mapas 1-d) o expoente de Lyapunov é definido considerando um mapa da seguinte forma

$$X_{n+1} = F(X_n) \tag{7.1}$$

Sejam duas condições iniciais X_0 e $X_0 + \Delta X_0$. Admitindo que depois de uma iteração a

nova distância é ΔX_1 , e que ΔX_1 é dado por

$$(\Delta X_1)^2 = (F(X_0 + \Delta X_0) - F(X_0))^2 + (\Delta X_0)^2 \quad (7.2)$$

e que se o distanciamento entre as trajetórias se dá de forma exponencial, temos

$$|\Delta X_1| = e^\lambda |\Delta X_0|. \quad (7.3)$$

Então λ mede a taxa exponencial de expansão da distância ΔX_0 até a distância ΔX_1 como resultado de uma única iteração.

Uma vez que ΔX_0 é muito pequeno quando comparado com $F(X_0 + \Delta X_0) - F(X_0)$, a eq. (7.2) pode ser reescrita como

$$\Delta X_1 \approx F(X_0 + \Delta X_0) - F(X_0). \quad (7.4)$$

Assim temos que

$$|F(X_0 + \Delta X_0) - F(X_0)| = |\Delta X_0| e^\lambda. \quad (7.5)$$

Iterando o mapa N vezes tem-se que $|F^N(X_0 + \Delta X_0) - F^N(X_0)| = |\Delta X_0| e^{N\lambda}$, que pode ser reescrita como

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(X_0 + \Delta X_0) - F^N(X_0)}{\Delta X_0} \right|. \quad (7.6)$$

Considerando uma distância inicial infinitesimal ($\Delta X_0 \rightarrow 0$) e que depois de um número infinito de iterações ($N \rightarrow \infty$), temos

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\Delta X_0 \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(X_0 + \Delta X_0) - F^N(X_0)}{\Delta X_0} \right|. \quad (7.7)$$

Lembrando a definição de derivada, temos o expoente característico de Lyapunov do mapa.

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N(X)}{dX} \right|_{X=X_0} \quad (7.8)$$

Aplicando a regra da cadeia para o cálculo dessa derivada, obtem-se que

$$\left. \frac{dF^N(X)}{dX} \right|_{X_0} = \left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X_{N-1}} \left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X_{N-2}} \cdots \left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X_0}$$

Assim, λ pode ser calculado pela expressão

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \prod_{j=0}^{N-1} \left| \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X=X_j} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X=X_j} \quad (7.9)$$

ou ainda

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln |F'(X)|_{X=X_j} \quad (7.10)$$

Isto nos dá uma medida quantitativa da estabilidade do sistema, permitindo observar como a distância entre condições iniciais distintas convergem ou divergem no tempo. Quando o expoente de Lyapunov é **negativo**, as condições iniciais convergem para o atrator (no caso dissipativo) e indica que a órbita está sobre uma superfície invariante (no caso conservativo), e nesse caso o sistema não é sensível às condições iniciais. Quando o expoente é **positivo**, o sistema apresenta comportamento caótico, ou seja, ocorre o aumento da distância entre os pontos iniciais em virtude da iteração. Quando o expoente de Lyapunov é nulo, o sistema está no limite dos casos anteriores, e é conhecido como ponto de bifurcação [13].

A função F que define o mapa depende em geral de um parâmetro de controle μ . Então, o valor de λ dependerá desse parâmetro. Ao construir o gráfico de λ em função de μ pode-se identificar para quais valores de μ tem-se dependência em relação às condições iniciais ($\lambda > 0$) e, portanto, saber em quais condições o sistema é caótico.

Uma outra maneira de reescrever a equação (8.10) pode ser feita considerando que

$$\left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X_0} = F'(X)|_{X_0} = \frac{F(X_0 + \Delta X_0) - F(X_0)}{\Delta X_0} \quad (7.11)$$

e que portanto

$$\left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X_j} = F'(X)|_{X_j} = \frac{F(X_j + \Delta X_j) - F(X_j)}{\Delta X_j} \quad (7.12)$$

Através da relação (8.4) conclui-se que

$$F'(X)|_{X_j} = \frac{\Delta X_{j+1}}{\Delta X_j} \quad (7.13)$$

Então, o expoente de Lyapunov de uma mapa unidimensional é dado por

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\Delta X_{j+1}}{\Delta X_j} \right|_{X=X_j} \quad (7.14)$$

A generalização para o caso bidimensional é feita considerando um mapa dado por

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X, Y) \\ Y_{n+1} = G(X, Y) \end{cases}$$

A matriz jacobiana desse mapa é

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial Y} \end{pmatrix}$$

A divergência entre as trajetórias é dada agora por $\Delta R = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$, logo um dos expoentes de Lyapunov é

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\Delta R_{j+1}}{\Delta R_j} \right|_{R=(X_0, Y_0)} \quad (7.15)$$

onde $\Delta R_{j+1} = \sqrt{(\Delta X_{j+1})^2 + (\Delta Y_{j+1})^2}$ e $\Delta R_j = \sqrt{(\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2}$.

Aplicando no mapa o conceito de derivada total do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \Delta X_{j+1} &= \Delta X_j \frac{\partial F(X, Y)}{\partial X} + \Delta Y_j \frac{\partial F(X, Y)}{\partial Y} \\ \Delta Y_{j+1} &= \Delta X_j \frac{\partial G(X, Y)}{\partial X} + \Delta Y_j \frac{\partial G(X, Y)}{\partial Y} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Substituindo os elementos da matriz Jacobiana nas equações anteriores temos

$$\begin{aligned}\Delta X_{j+1} &= a\Delta X_j + b\Delta Y_j \\ \Delta Y_{j+1} &= c\Delta X_j + d\Delta Y_j\end{aligned}\tag{7.17}$$

Assim ΔR_{j+1} pode ser reescrito como

$$\Delta R_{j+1} = \sqrt{(a\Delta X_j + b\Delta Y_j)^2 + (c\Delta X_j + d\Delta Y_j)^2}\tag{7.18}$$

Substituindo (8.18) e $\Delta R_j = \sqrt{(\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2}$ em (8.15), temos

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\sqrt{(a\Delta X_j + b\Delta Y_j)^2 + (c\Delta X_j + d\Delta Y_j)^2}}{\sqrt{(\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2}} \right| \tag{7.19}$$

Multiplicando e dividindo o argumento do logaritmo natural por ΔX_j temos

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\sqrt{(a + b\frac{\Delta Y_j}{\Delta X_j})^2 + (c + d\frac{\Delta Y_j}{\Delta X_j})^2}}{\sqrt{1 + (\frac{\Delta Y_j}{\Delta X_j})^2}} \right| \tag{7.20}$$

Fazendo $\frac{\Delta Y_{j+1}}{\Delta X_{j+1}}$ nas equações de (8.17) temos

$$A_{j+1} = \frac{\Delta Y_{j+1}}{\Delta X_{j+1}} = \frac{a + b\frac{\Delta Y_j}{\Delta X_j}}{c + d\frac{\Delta Y_j}{\Delta X_j}} \Rightarrow A_j = \frac{\Delta Y_j}{\Delta X_j} = \frac{a + b\frac{\Delta Y_{j-1}}{\Delta X_{j-1}}}{c + d\frac{\Delta Y_{j-1}}{\Delta X_{j-1}}}\tag{7.21}$$

O expoente de Lyapunov fica então determinado por

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \ln \left| \frac{(a + bA_j)^2 + (c + dA_j)^2}{1 + (A_j)^2} \right| \tag{7.22}$$

onde

$$A_j = \frac{a + b\frac{\Delta Y_{j-1}}{\Delta X_{j-1}}}{c + d\frac{\Delta Y_{j-1}}{\Delta X_{j-1}}}\tag{7.23}$$

Os coeficientes a, b, c e d correspondem aos elementos da matriz Jacobiana.

Uma vez que o mapa em questão é um mapa bidimensional, são necessários dois expoentes de Lyapunov para caracterizar o comportamento do mapa. O primeiro expoente de Lyapunov é dado por (8.22), o segundo expoente pode ser determinado em função do primeiro através de

$$\lambda_2 = \ln |ad - bc| - \lambda_1 \quad (7.24)$$

Se a condição inicial escolhida para o cálculo do expoente de Lyapunov situar-se em uma região regular, não haverá uma divergência entre trajetórias, e portanto, a determinação do expoente de Lyapunov perde o sentido. Para contornar esse problema, é necessário escolher um conjunto de condições iniciais, calcular os expoentes de Lyapunov para cada uma dessas condições iniciais e realizar uma média entre os valores dos expoentes de Lyapunov [13].

Para determinar os expoentes de Lyapunov de um sistema bidimensional foi desenvolvido um algoritmo como segue:

- Atribuir o valor de interesse para o parâmetro de controle;
- Impor um valor muito pequeno para as distâncias iniciais ΔX_0 e ΔY_0 . Em nossos cálculos foram usadas distâncias iniciais igual a 10^{-10} ;
- Escolher uma condição inicial X_0 e Y_0 dentre um conjunto sobre o espaço de fases;
- Iterar o mapa muitas vezes (por exemplo, 100000), determinando em cada iteração o valor de A_j ;
- Determinar o valor de λ_1 e λ_2 ;

- Escolher outra condição inicial e repetir os passos anteriores;
- Calcular o valor médio $\lambda_{1_{med}}$ e $\lambda_{2_{med}}$;

7.2 Expoentes de Lyapunov no Mapa de Rede de Zaslavsky

O Mapa de Rede de Zaslavsky apresentado na equação (1.7) é um mapa bidimensional, e portanto, existem dois expoentes de Lyapunov.

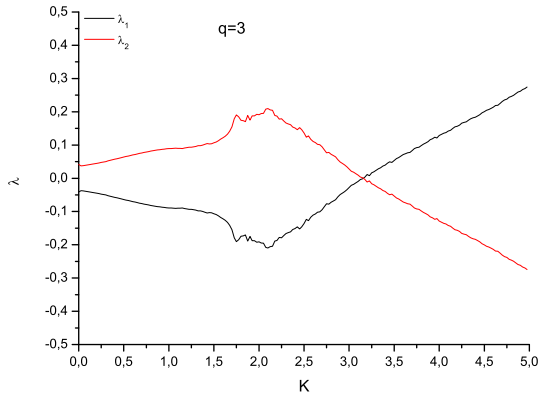
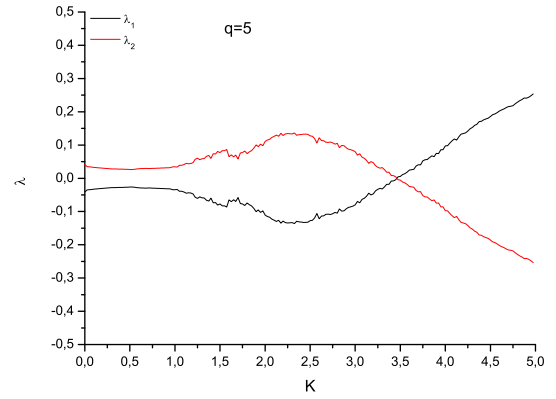
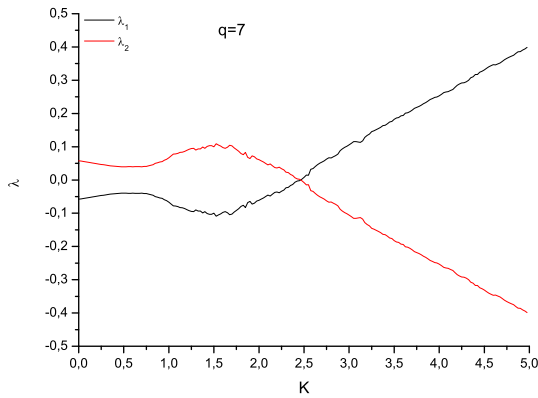
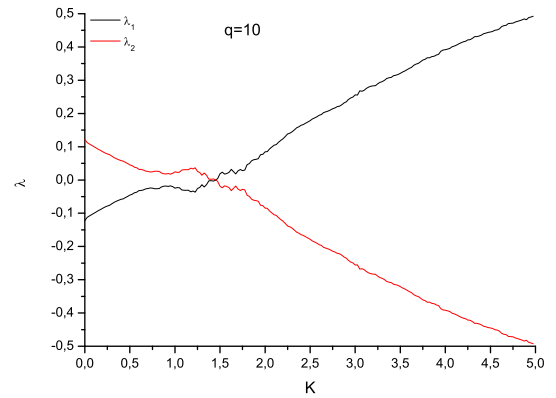
O Mapa de Rede de Zaslavsky é controlado por dois parâmetros, K e q . No capítulo (2), verificou-se que K é responsável pelo grau de caoticidade do sistema, e que q é a ordem de ressonância. A alteração no valor de q ocasionou a completa modificação do espaço de fases devido à variação do número de regiões regulares. Assim, o estudo dos expoentes de Lyapunov foi realizado variando K e mantendo q constante.

As figuras (7.1), (7.2), (7.3) e (7.4) mostram os dois expoentes de Lyapunov do Mapa de Rede de Zaslavsky para K variando no intervalo $[0.0, 5.0]$, com diferentes valores de q .

O comportamento caótico é caracterizado pela divergência exponencial de trajetórias vizinhas. Isso acontece quando há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, o que implica dependência sensível com as condições iniciais.

Nas figuras (7.1), (7.2), (7.3) e (7.4) é possível notar que $\lambda_1 = -\lambda_2$. Esse resultado é correto uma vez que o mapa em questão é conservativo.

Considerando inicialmente um elemento de área S_0 , após algumas iterações temos um novo elemento de área S_1 . Se o sistema apresenta dependência sensível das condições iniciais, então, $S_1 = S_0 e^{\lambda_1} e^{\lambda_2}$. No caso de um sistema conservativo, $S_1 = S_0$, implicando que

Figura 7.1: Expoentes de Lyapunov $q = 3$ Figura 7.2: Expoentes de Lyapunov $q = 5$ Figura 7.3: Expoentes de Lyapunov $q = 7$ Figura 7.4: Expoentes de Lyapunov $q = 10$

$$\lambda_1 = -\lambda_2.$$

Através das figuras (7.1), (7.2), (7.3) e (7.4), nota-se que a intensidade dos expoentes é crescente em relação ao parâmetro K , isso confirma a conclusão dada na seção (2.2), onde foi observado que o parâmetro K está intimamente ligado com a caoticidade do sistema.

É possível notar também que para alguns valores de K , ambos os expoentes se anulam. Nessa situação, temos os pontos de bifurcação. Os pontos de bifurcação indicam o

“momento” em que ocorre a transição da regularidade para o caos. Porém, no Mapa de Rede de Zaslavsky, o ponto de bifurcação indica o valor do parâmetro K no qual ocorre a inversão dos expoentes, pois imediatamente antes do ponto de bifurcação o sistema já era caótico.

Capítulo 8

Conclusões

Neste trabalho de conclusão de curso, primeiramente foi realizada uma revisão bibliográfica abordando alguns conceitos fundamentais da dinâmica não-linear como a classificação de um sistema dinâmico, existência de pontos fixos e espaços de fase. Usando esses conceitos, posteriormente foram estudadas as propriedades da dinâmica caótica de um sistema dinâmico que representa o movimento de uma partícula em um campo magnético constante com uma onda eletromagnética propagando-se perpendicularmente ao campo magnético, conhecido como Mapa de Rede de Zaslavsky.

Através da observação do espaço de fases do mapa, foi possível concluir que o número de regiões regulares visitadas por uma condição inicial localizada em uma dessas regiões regulares, corresponde numericamente ao valor do parâmetro de ressonância α do mapa. Outra interessante conclusão corresponde ao fato de que o tamanho das regiões regulares depende da intensidade da perturbação K . Para pequenos valores de K o espaço de fases é dominado por regiões regulares, as quais diminuem com o aumento de K . Em outras palavras, é possível exercer controle sobre a caoticidade do sistema.

Com a classificação do espaço de fases em regiões regulares e caóticas foi observado que as iteradas das condições iniciais permanecem nessas regiões, nunca adentrando em ou-

tra região de comportamento diferente. Em outras palavras, os pontos iterados a partir de uma condição inicial localizada na região regular permanecem nessa região independentemente do tempo transcorrido, e vice-versa. Posteriormente foi verificado que a inserção de uma perturbação no sistema faz com que uma condição inicial localizada na *interface* das regiões caótica e regular escape para o mar de caos. Esse comportamento é conhecido como transporte no espaço de fases, podendo ser controlado pela intensidade da perturbação e pelo parâmetro K do mapa.

Com relação a sincronização do mapa, foi realizado uma breve revisão bibliográfica abordando os principais regimes de sincronização e as classificação quanto ao tipo de acoplamento. Após testes e observações foi escolhida uma forma de acoplamento que seria estudada (eq. (4.3) e (4.4)). Com isso observou-se que dois Mapas de Rede de Zaslavsky acoplados podem exibir regimes de sincronização completa e em fase, ou completa em contra-fase, dependendo da intensidade do acoplamento imposto. Também foram encontradas algumas situações onde não se observou nenhuma evidência de sincronização.

Através da inserção de uma pequena perturbação constante (seções 3.3 e 3.4), observou-se que o mapa em questão é extremamente sensível frente a variações nos parâmetros de controle. Na literatura, é bem difundido que esse tipo de comportamento é uma evidência para a existência de caos. Estendendo o estudo das perturbações para outro tipo de interferência, foi possível concluir que uma perturbação aleatória (ruído) provoca efeitos menos pronunciados que uma perturbação constante, mesmo tendo as duas perturbações a mesma intensidade.

Um resultado inesperado foi encontrado durante o estudo envolvendo perturbações. Era esperado que a divergência entre as trajetórias perturbada e não perturbada fosse crescente no tempo, de modo que após muitas iterações seria observada um grande afastamento entre as trajetórias. Porém, foi observado uma espécie de comportamento “periódico”, no qual, as trajetórias se afastam e se aproximam com uma certa regularidade. Esse compor-

tamento também foi observado no mapa de Chirikov, indicando que essa regularidade no afastamento e na aproximação das trajetórias não é uma particularidade do Mapa de Rede de Zaslavsky, e conseqüentemente pode ser observada em outros modelos.

Finalmente foi implementado um algoritmo para o cálculo dos expoentes de Lyapunov do Mapa de Rede de Zaslavsky, o qual forneceu uma ilustração do comportamento do sistema em função da intensidade da perturbação K . Observou-se que por se tratar de um mapa conservativo os expoentes possuem mesmo módulo e sinais contrários.

Portanto, o Mapa de Rede de Zaslavsky apresenta uma dinâmica muito rica. Isso possibilitou o estudo de transporte, estudo dos efeitos de perturbações e a sincronização de dois mapas.

Referências Bibliográficas

- [1] VILLATE, JAIME E. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Porto: Universidade do Porto, 2007.
- [2] ARFKEN, G. B. *Métodos matemáticos para físicos*. Elsevier, 2007.
- [3] N, FIELDER-FERRARA; PRADO, C.P.C. *Caos: Uma Introdução*. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.
- [4] MONTEIRO, LUIZ H.A. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, 2002.
- [5] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Reading: Perseus Books Publishing, 1994.
- [6] HILBORN, ROBERT C. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. New York: Oxford University Press, 1994.
- [7] ZASLAVSKY, GEORGE M. *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*. New York: Oxford University Press, 2005.
- [8] BLEKHMEN, EUGENE I.; RIVIN, I. I. *Synchronization in Science and Technology*. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1988.
- [9] PIKOVSKY A.; ROSENBLUM M.; KURTHS, J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. London: Cambridge University Press, 2001.

-
- [10] OSIPOV G.; VALLADARES D.L.; ZHOU C.S. BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366:1–101, 2002.
 - [11] YORKE, J. A.; ALLIGOOD, K. T. ; SAUER, T. D. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. New York: Springer-Verlag, 1996.
 - [12] DVORAK, R; CONTOPOULOS, G.; EFTHYMIPOULOS, CH.;VOGLIS, N. Stickiness in mappings and dynamical systems. *Planetary and Space Science*, v.46, issues 11-12:1567-1578,1998.
 - [13] SPROTT, JULIEN C. *Chaos and Time-Series Analysis*. New York: Oxford University Press, 2003.