



Universidade Estadual Paulista
Câmpus de São José do Rio Preto Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

Gabriele Albano Barrera

Alguns aspectos da Teoria de Singularidades com
aplicações na Topologia e Geometria

São José do Rio Preto
2018

Gabriele Albano Barrera

Alguns aspectos da Teoria de Singularidades com aplicações na Topologia e Geometria

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática junto ao programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa.

São José do Rio Preto
2018

Barrera, Gabriele Albano.

Alguns aspectos da teoria de singularidades com aplicação na topologia algébrica / Gabriele Albano Barrera. -- São José do Rio Preto, 2018

65 p. : il.

Orientador: João Carlos Ferreira Costa

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Singularidades (Matemática) I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Gabriele Albano Barrera

Alguns aspectos da Teoria de Singularidades com aplicações na Topologia e Geometria

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática junto ao programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq.

BANCA EXAMINADORA

Orientador

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Aldício José Miranda UFU - Uberlândia

Segundo Examinador

Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
27 de março de 2018

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

Ao meu querido orientador Prof. Dr. João Carlos que teve muita paciência comigo, tirou minhas dúvidas e me deu grande apoio para a realização deste estudo.

À minha família que sempre torceu por mim. Em especial, à minha noiva Mariana que esteve ao meu lado em todos os momentos.

À minha grande amiga Paula, aos meus colegas de estudo, às minhas orientadoras durante o período da graduação e a Prof^a. Dra. Cleonice que, nos momentos mais difíceis, não me deixou desistir.

À OBMEP, que juntamente com seus professores e os programas PIC e PICME - CNPq, me influenciaram a seguir este caminho.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro, o qual foi essencial para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo da dissertação é estudar a equivalência de contato, ou $\mathcal{K}$ -equivalência, introduzida por John Mather como ferramenta da teoria de Singularidades para classificar seus objetos. Mostraremos como a equivalência de contato está relacionada com a Geometria e a Topologia. Com a Geometria, através do estudo do contato entre pares de certas subvariedades em $\mathbb{R}^n$. Com a Topologia, através da versão topológica da $\mathcal{K}$ -equivalência, a chamada C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalência, observando que o grau é um invariante completo no caso de germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

Palavras chaves: $\mathcal{K}$ -equivalência; equivalência de contato.

Abstract

The goal of this work is to study the notion of contact equivalence, or $\mathcal{K}$ -equivalence, introduced by John Mather in the Singularity theory. We will show how the contact equivalence is related to Geometry and Topology. With the Geometry through the study of the contact between pairs of certain submanifolds in $\mathbb{R}^n$. With the Topology through the topological version of $\mathcal{K}$ -equivalence, the called C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalence, observing that the degree is a complete invariant in the case of map germs $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

Keywords: $\mathcal{K}$ -equivalence; equivalence of contact.

Sumário

1	Motivação e preliminares	9
1.1	Variedades	11
1.2	Germes e jatos	16
1.3	Ação de grupos	19
1.3.1	Espaço tangente a uma órbita	24
1.4	Grupos de Mather	31
2	O Grupo $\mathcal{K}$ e a $\mathcal{K}$-equivalência	35
3	Contato entre subvariedades	45
4	Equivalência de contato topológica	50
4.1	Considerações Finais	63

Introdução

Em todas as áreas da Matemática, buscamos trabalhar com objetos e com maneiras de classificá-los. Na teoria de Singularidades, os objetos com os quais trabalhamos são os germes de aplicações e germes de conjuntos, devido o estudo ser local. Podemos classificar tais germes através de relações de equivalência apropriadas. Para germes de aplicações (diferenciáveis), a principal classificação refere-se à $\mathcal{A}$ -equivalência, ou seja, relação de equivalência dada por mudanças de coordenadas (difeomorfismos) na fonte e na meta do germe.

No entanto, o estudo da $\mathcal{A}$ -classificação é rígido, por se tratar de difeomorfismos. Para reduzir o problema da $\mathcal{A}$ -classificação dos germes de aplicações diferenciáveis para um problema mais “tratável”, John Mather [6] introduziu a noção de equivalência de contato, ou $\mathcal{K}$ -equivalência. A vantagem é que, para germes estáveis, a $\mathcal{A}$ -classificação reduz-se à $\mathcal{K}$ -classificação, que por sua vez pode ser caracterizada de uma maneira algébrica. Neste contexto, a $\mathcal{K}$ -classificação torna-se importante.

O trabalho está dividido em quatro capítulos.

O Capítulo 1 consiste numa base para os estudos que serão desenvolvidos nos demais capítulos. Começamos definindo variedades e suas propriedades. Como o nosso estudo é local utilizamos a linguagem de germes. Definimos o que consiste num germe de aplicação diferenciável entre duas variedades e apresentamos algumas propriedades. Em seguida, introduzimos o conceito de ação de grupos agindo em variedades, pois através da ação podemos definir uma relação de equivalência entre os germes. Na parte final do capítulo, definimos os grupos de Mather e as relações de equivalência de nosso interesse dadas a partir deles.

O Capítulo 2 é inteiramente dedicado ao estudo da equivalência de contato, ou $\mathcal{K}$ -equivalência. Apresentamos suas propriedades e invariantes, que são clássicos na Teoria de Singularidades. O objetivo do capítulo é apresentar ferramentas para decidir quando dois

germes são ou não $\mathcal{K}$ -equivalentes. Apresentamos resultados de classificação, mostrando como a $\mathcal{K}$ -equivalência contribui no estudo da $\mathcal{A}$ -equivalência. Além disso, uma caracterização algébrica da $\mathcal{K}$ -equivalência é dada, o que a torna de certa forma mais manejável que a $\mathcal{A}$ -equivalência. Esta caracterização algébrica é feita via os ideais das funções coordenadas ou também a partir de uma multiplicação matricial (por exemplo, Proposição 2.9).

O Capítulo 3 é baseado no artigo de James Montaldi [8]. Ele nos traz uma visão geométrica da $\mathcal{K}$ -equivalência que pode ser medida através do tipo de contato entre certas subvariedades do $\mathbb{R}^n$. O principal resultado é o Teorema de Montaldi (Teorema 3.2).

No Capítulo 4, introduzimos a versão topológica da $\mathcal{K}$ -equivalência, chamada de equivalência de contato topológica ou, simplesmente, C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalência. Este capítulo é baseado no belíssimo artigo de Takashi Nishimura [9]. O principal resultado mostra que o grau é um invariante completo para a C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalência de germes de $(\mathbb{R}^n, 0)$ em $(\mathbb{R}^n, 0)$.

Capítulo 1

Motivação e preliminares

Por que estudar teoria de Singularidades?

Esta questão é o ponto de partida de nossa motivação para este trabalho. Sabemos do Cálculo em várias variáveis, que dada uma aplicação diferenciável (que em nosso caso significa C^∞), $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, podemos definir sua diferencial em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, como sendo a transformação linear cuja matriz com relação às bases canônicas do $\mathbb{R}^n$ e do $\mathbb{R}^p$, é a matriz jacobiana de f em x_0 . Se x_0 é um ponto regular de f , segue que o posto da matriz jacobiana de f em x_0 é máximo se $n \neq p$, ou, no caso em que $n = p$, temos que o determinante da matriz jacobiana de f em x_0 é não nulo.

Desta forma, se x_0 é um ponto regular de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ temos os seguintes casos:

- Se $n = p$, então $\det(Jac f(x_0)) \neq 0$ e, portanto, $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.
- Se $n > p$, então o posto da matriz jacobiana de f em x_0 é p (máximo possível).
- Se $n < p$, então o posto da matriz jacobiana de f em x_0 é n (máximo possível).

Podemos definir, de maneira natural, a seguinte relação de equivalência no conjunto das aplicações diferenciáveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$:

Definição 1.1. *Duas aplicações $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são ditas **$\mathcal{A}$ -equivalentes** se existirem difeomorfismos $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que*

$$f = k \circ g \circ h^{-1}.$$

Neste caso, denotamos a $\mathcal{A}$ -equivalência entre f e g por

$$f \sim g.$$

Esta é uma relação de equivalência natural para aplicações diferenciáveis, pois preserva várias propriedades importantes das aplicações.

Relembrando os principais teoremas do Cálculo Avançado, podemos descrever o comportamento local de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em uma vizinhança de um ponto regular x_0 , a menos de $\mathcal{A}$ -equivalência, a partir da seguinte análise:

- Se $n = p$, vimos que $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, segue que f é um difeomorfismo local. Em outras palavras, segue que existe f^{-1} (o qual também é um difeomorfismo) tal que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$, onde $id_{\mathbb{R}^n}$ denota a aplicação identidade do $\mathbb{R}^n$. Note que podemos reescrever a expressão $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$ por

$$id_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}.$$

Isso nos diz que numa vizinhança de x_0 podemos afirmar que f é $\mathcal{A}$ -equivalente a aplicação identidade do $\mathbb{R}^n$, ou seja, $f \sim id_{\mathbb{R}^n}$.

- Se $n > p$, como o posto da matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em x_0 é p , segue do Teorema da Forma Local das Submersões que existe um difeomorfismo h definido numa vizinhança de x_0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $f \circ h^{-1}$ é uma projeção. Novamente, note que podemos reescrever a afirmação anterior colocando-a na forma,

$$id_{\mathbb{R}^p} \circ f \circ h^{-1} = \text{projecção}.$$

Em outras palavras, numa vizinhança de x_0 temos que f é $\mathcal{A}$ -equivalente a uma projeção.

- Se $n < p$, como o posto da matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em x_0 é n , segue do Teorema da Forma Local das Imersões, que existe um difeomorfismo k definido numa vizinhança de $f(x_0)$ em $\mathbb{R}^p$ tal que $k \circ f$ é uma inclusão. De modo análogo ao que fizemos nos itens anteriores, podemos reescrever na forma

$$k \circ f \circ id_{\mathbb{R}^n}^{-1} = \text{inclusão}.$$

Portanto, isso nos diz que f é $\mathcal{A}$ -equivalente a uma inclusão.

Desta análise acima fica claro que o comportamento local de uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ na vizinhança de um ponto regular está totalmente descrito. Então é natural perguntar o que acontece com as aplicações diferenciáveis numa vizinhança de um ponto que não é regular. É neste contexto que surge a teoria de Singularidades.

Como nosso estudo será local, introduziremos o conceito de germes e definiremos, de modo análogo, a $\mathcal{A}$ -equivalência entre dois germes de aplicações diferenciáveis. E daí veremos qual o papel que a equivalência de contato desempenhará frente ao problema da $\mathcal{A}$ -classificação.

Observe que apresentamos nossa motivação baseado nas aplicações diferenciáveis definidas em espaços euclidianos. No entanto, a teoria de Singularidades tem um caráter mais geral e pode ser desenvolvida no contexto mais amplo, das variedades diferenciáveis. Embora neste trabalho iremos nos restringir apenas aos espaços euclidianos ou algumas de suas subvariedades (como no Capítulo 2 onde abordaremos o aspecto geométrico da $\mathcal{K}$ -equivalência) iremos introduzir de forma mais precisa na seção a seguir algumas definições e propriedades da teoria de variedades diferenciáveis, num contexto mais geral, uma vez que existem na natureza objetos importantes semelhantes às superfícies e que não estão contidos em espaços euclidianos.

1.1 Variedades

Seja M um espaço topológico.

Definição 1.2. Um **sistema de coordenadas locais** em M é um homeomorfismo $\chi : U \rightarrow \chi(U)$, onde $U \subset M$ e $\chi(U) \subset \mathbb{R}^m$ são abertos. Chamamos $\varphi = \chi^{-1} : \chi(U) \rightarrow U$ de **carta local**. Dizemos que m é a **dimensão** de $\chi : U \rightarrow \chi(U)$.

Definição 1.3. Um **atlas** de dimensão m sobre M é uma coleção $\mathbb{A}$ de sistemas de coordenadas locais $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M cujos domínios cobrem M . Os domínios U dos sistemas de coordenadas $\chi \in \mathbb{A}$ são chamados **vizinhanças coordenadas de $\mathbb{A}$** .

Definição 1.4. Dados os sistemas de coordenadas locais $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $\chi^i = \chi^i(p)$ no sistema χ

e coordenadas $\varphi^i = \varphi^i(p)$ no sistema φ . A correspondência

$$(\chi^1(p), \dots, \chi^m(p)) \leftrightarrow (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\psi_{\chi\varphi} = \varphi \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$, chamado de **mudança de coordenadas**.

Definição 1.5. Um atlas $\mathbb{A}$ é **diferenciável de classe C^k** ($k \geq 1$) se todas as mudanças de coordenadas $\psi_{\chi\varphi}$, com $\chi, \varphi \in \mathbb{A}$, são aplicações de classe C^k . Escreve-se então $\mathbb{A} \in C^k$.

Seja $\mathbb{A}$ um atlas de dimensão m e de classe C^k sobre M . Um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M diz-se **admissível** relativamente a $\mathbb{A}$ se, para todo sistema de coordenadas locais $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ pertencente a $\mathbb{A}$, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\psi_{\chi z}$ e $\psi_{z\chi}$ são de classe C^k .

Um atlas $\mathbb{A}$ de dimensão m e classe C^k , sobre M , diz-se **máximo** quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a $\mathbb{A}$. Todo atlas de classe C^k em M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo de classe C^k : basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição 1.6. Uma **variedade diferenciável** de dimensão m e classe C^k é um par ordenado $(M, \mathbb{A})$, onde M é Hausdorff, com base enumerável e $\mathbb{A}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M .

Exemplo 1.7. Considere no espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ o atlas $\mathbb{A}$ contendo o único sistema de coordenadas $\chi = id_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. É claro que $\mathbb{A}$ é um atlas de classe C^∞ e dimensão m em $\mathbb{R}^m$. $\square$

Exemplo 1.8. Considere a esfera padrão S^2 com a topologia induzida pela topologia usual do $\mathbb{R}^3$. Temos que $U = S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ e $V = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$ são abertos nessa topologia. Considerando os sistemas de coordenadas (U, ϕ) e (V, φ) , onde

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x, y) \quad \text{e} \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{1+z}(x, y),$$

podemos verificar que S^2 é uma variedade diferenciável de dimensão 2. $\square$

Exemplo 1.9. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ é dito **homogêneo de grau d** se satisfaz

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^d f(x_1, \dots, x_n).$$

Denotamos por $H^d(n, p)$ o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau d de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$. O conjunto $H^d(n, p)$ é uma variedade diferenciável. $\square$

Outros exemplos menos triviais de variedades diferenciáveis são os espaços projetivos e as variedades Grassmanianas. Tais exemplos não estão contidos em espaços euclidianos. A grosso modo, a definição que apresentamos acima de variedades diferenciáveis nos diz que estes objetos se comportam como uma superfície, só que não precisa estar contida em um espaço euclidiano.

Como neste texto nosso interesse é por objetos que são subconjuntos de algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, iremos reescrever a definição de variedades neste contexto. Alguns textos utilizam a palavra superfícies de dimensão m em $\mathbb{R}^N$, mas aqui continuaremos chamando de variedades.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto qualquer. Uma vizinhança aberta de $x \in X$ é um conjunto da forma $U \cap X$ onde $x \in U$.

Definição 1.10. *Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é uma **aplicação diferenciável (isto é, de classe C^∞)** se para todo $x \in X$ existir uma vizinhança aberta U de x em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação diferenciável $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $F = f$ em $U \cap X$. Dizemos que f é um **difeomorfismo** se f é bijetora e f e f^{-1} são diferenciáveis. Neste caso, dizemos que X e Y são **difeomorfos**.*

Definição 1.11. *Uma **parametrização** (de dimensão n) de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^j$ é uma aplicação diferenciável $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^j$, com V um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ para o qual $\phi(V) = X$ e a aplicação $\phi : V \rightarrow \phi(V)$ é um difeomorfismo.*

*Dizemos que $N \subset \mathbb{R}^k$ é uma **variedade diferenciável de dimensão n** se todo $x \in N$ admite uma vizinhança aberta $U \cap N$, com U um aberto do $\mathbb{R}^k$ contendo x , e uma parametrização n -dimensional $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ com $\phi(V) = U \cap N$.*

Convencionaremos aqui que a notação N^n indica que N tem dimensão n .

Exemplo 1.12. Qualquer conjunto aberto $N \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n (em particular o próprio $\mathbb{R}^n$ é uma variedade). Aqui, dado $x \in N$ considere o aberto $U = \mathbb{R}^n$, e então a inclusão $N \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de $U \cap N$ de dimensão n . $\square$

Exemplo 1.13. Qualquer subespaço vetorial $N \subset \mathbb{R}^k$ de dimensão n (como espaço vetorial) é uma variedade diferenciável de dimensão n . De fato, dado $x \in N$ tome $U = \mathbb{R}^k$

e então qualquer aplicação linear $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ com imagem N será uma parametrização n -dimensional de $U \cap N$. $\square$

Teorema 1.14. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^j$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ variedades diferenciáveis de dimensões m e n , respectivamente. Então, $M \times N \subset \mathbb{R}^{j+k}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $m + n$.*

Definição 1.15. *Seja $N^n \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade diferenciável. Uma **subvariedade diferenciável** de N é uma variedade $M^m \subset \mathbb{R}^k$ tal que $M \subset N$. Dizemos que $n - m$ é a codimensão de M em N .*

Definição 1.16. *Sejam $N^n \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade diferenciável, $x \in N$ e $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma parametrização de uma vizinhança aberta relativa de x em N tal que $\phi(0) = x$. Definimos o **espaço tangente** a N em x como sendo a imagem da diferencial $d\phi_0(\mathbb{R}^n)$ e o denotamos por $T_x N$.*

Observemos que $T_x N$ está bem definido, isto é, independe da escolha de ϕ . De fato, seja $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ outra parametrização aberta relativa de x em N tal que $\psi(0) = x$. Podemos supor $\psi(V) = \phi(U)$ (diminuindo U e V se necessário). Seja $h = \psi^{-1} \circ \phi$, temos assim que $d\phi_0(\mathbb{R}^n) = d\psi_0(dh_0(\mathbb{R}^n))$, daí $d\phi_0(\mathbb{R}^n) \subset d\psi_0(\mathbb{R}^n)$. Da mesma forma se $g = \psi^{-1} \circ \psi$, obtemos $d\psi_0(\mathbb{R}^n) \subset d\phi_0(\mathbb{R}^n)$.

O espaço tangente $T_x N$ de $N \subset \mathbb{R}^k$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^k$ de mesma dimensão n que N .

Há uma outra maneira de caracterizar o espaço tangente $T_x N$, como o conjunto de todos os vetores velocidades de curvas em N que no tempo zero passam por x . Ou seja,

$$T_x N = \{v = \alpha'(0) \mid \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N \text{ curva em } N \text{ com } \alpha(0) = x\}.$$

A maneira como o espaço tangente a uma variedade varia nos permite entender como é a geometria (diferencial) da variedade. Além disso, o espaço tangente é importante pois ele nos permite introduzir a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável num ponto, sem que o domínio seja necessariamente apenas um conjunto aberto.

Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^p$ e $N^n \subset \mathbb{R}^q$ variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Seja $x \in M$ e coloque $y = f(x)$. O fato de f ser diferenciável requer que existam $W \subset \mathbb{R}^p$ vizinhança aberta de x e $F : W \rightarrow \mathbb{R}^q$ uma aplicação diferenciável

tais que $f = F$ em $W \cap M$. É claro que a diferencial de F em x é a aplicação linear $dF_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Afirmamos que dF_x necessariamente aplica $T_x M$ no espaço tangente $T_y N$.

Proposição 1.17. *A partir das hipóteses acima temos que $dF_x(T_x M) \subset T_y N$.*

Demonstração: Sejam $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ parametrizações de vizinhanças abertas relativas de x em M e y em N respectivamente, tais que $\phi(0) = x$, $\psi(0) = y$. Tomando U suficientemente pequeno podemos supor $\phi(U) \subset W$ e que $(f \circ \phi)(U) \subset \psi(V)$. Então $g : U \rightarrow V$ dada por $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ é uma aplicação diferenciável bem definida. Como f coincide com F nesta vizinhança, obtemos então $g = \psi^{-1} \circ F \circ \phi$. Derivando, podemos obter $dF_x(d\phi_0(\mathbb{R}^m)) \subset d\psi_0(\mathbb{R}^n)$. Logo $dF_x(T_x M) \subset T_y N$. $\square$

A restrição da aplicação linear $dF_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ao conjunto $T_x M$, a qual escrevemos $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$, chamamos de **diferencial de f em x** .

Observe que df_x não depende da escolha de F . No caso particular em que M e N são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$, respectivamente, a diferencial df_x coincide com a noção usual de diferencial de f do Cálculo Avançado.

Definição 1.18. *Sejam V um espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaços vetoriais. Dizemos que U e W se **intersectam transversalmente** se $U + W = V$.*

Definição 1.19. *Sejam N_1 e N_2 duas subvariedades de N e $x \in N_1 \cap N_2$. Dizemos que N_1 e N_2 se **intersectam transversalmente em x** quando $T_x N_1$ e $T_x N_2$ se intersectam transversalmente em $T_x N$. Dizemos que N_1 e N_2 se **intersectam transversalmente em N** quando se intersectam transversalmente em todo $x \in N_1 \cap N_2$.*

Definição 1.20. *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e Q uma subvariedade diferenciável de P . Definimos o **gráfico de f** pelo conjunto*

$$\text{graf } f = \{(x, f(x)) | x \in N\}.$$

*Dizemos que f é **transversal a Q** se o gráfico de f e $N \times Q$ se intersectam transversalmente em $N \times P$.*

Proposição 1.21. *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e Q uma subvariedade de P . Então f é transversal a Q se, e somente se,*

$$df_x(T_x N) + T_y Q = T_y P$$

para todo $x \in N$ tal que $f(x) = y \in Q$.

Proposição 1.22. *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e Q uma subvariedade de P de dimensão q , tais que f é transversal a Q . Então $M = f^{-1}(Q)$ é uma subvariedade diferenciável de N de mesma codimensão que Q , ou vazio. Além disso, se $x \in N$ é tal que $y = f(x) \in Q$, então $T_x M = (df_x)^{-1}(T_y Q)$.*

Note que o resultado acima é uma generalização de um clássico resultado da Geometria Diferencial de superfícies em $\mathbb{R}^3$, no qual garante que imagem inversa de um valor regular caracteriza uma superfície regular. Vejamos como fica a definição de valor regular no contexto de variedades diferenciáveis.

Definição 1.23. *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e $y \in P$. Dizemos que y é **valor regular** de f se f for transversal a $\{y\}$. Se $x \in N$ é tal que $f(x)$ não é valor regular de f então dizemos que x é **ponto crítico** de f e $f(x)$ é chamado de **valor crítico**.*

Observação 1.24. Seja f como na Definição 1.23 e $Im f$ o conjunto imagem de f . Se y não pertence a imagem de f , então y é valor regular.

Teorema 1.25. (Teorema de Sard) *Seja $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável. O conjunto dos valores críticos de f tem medida nula.*

1.2 Germes e jatos

Como nosso estudo será local, usaremos a noção de germes. Os resultados dessa seção podem ser encontrados em [5].

Sejam N^n e P^p variedades diferenciáveis e $x \in N$. Consideremos o conjunto das aplicações diferenciáveis definidas numa vizinhança de $x \in N$ com valores em P . Neste conjunto vamos introduzir uma relação de equivalência. Sejam $f : U \rightarrow P$ e $g : V \rightarrow P$ neste conjunto. Dizemos que f é **equivalente** a g se existir uma vizinhança W de x em N tal que $f|_W = g|_W$.

Definição 1.26. *As classes de equivalência são chamadas de **germes de aplicações diferenciáveis** em x .*

Notação: $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$, onde $y = f(x)$. Dizemos que N é a **fonte** do germe e P é **meta** do germe.

Definição 1.27. Se $f : N \rightarrow P$ for um difeomorfismo local em x , dizemos que a classe de equivalência de f é um **germe de difeomorfismo**.

Definição 1.28. O **posto de um germe** $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ é o posto da diferencial $df_x : T_x N \rightarrow T_y P$. Se o posto de f for igual à dimensão de N dizemos que f é um **germe de uma imersão**. Se o posto de f for igual à dimensão de P dizemos que f é um **germe de uma submersão**. Dizemos que f é **singular** se posto de f é menor que $\min\{\dim N, \dim P\}$.

Uma **singularidade de uma aplicação diferenciável** $f : N \rightarrow P$ é um ponto $x \in N$ tal que o germe f em x é singular.

Observação 1.29. O posto independe do representante do germe.

Estamos interessados neste trabalho em estudar germes de aplicações diferenciáveis $f : (N, x) \rightarrow (\mathbb{R}, y)$. Tomando uma parametrização de N em x , podemos supor $N = \mathbb{R}^n$ e $x = 0$. Definimos o conjunto dos germes de funções por

$$\varepsilon_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}.$$

O conjunto ε_n tem estrutura de anel local. Denotamos por $\mathcal{M}_n$ o único ideal maximal de ε_n , formado pelos germes de funções f tais que $f(0) = 0$. Ou seja,

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \varepsilon_n \mid f(0) = 0\}.$$

O lema seguir é importante para a demonstração de alguns resultados que enunciaremos durante o decorrer de nosso trabalho.

Lema 1.30. (Lema de Hadamard) [5] Seja U uma vizinhança convexa de 0 em $\mathbb{R}^n$, e seja f uma função de classe C^r definida sobre $U \times \mathbb{R}^q$ que se anula em $0 \times \mathbb{R}^q$. Então existem funções $f_1, \dots, f_n$, de classe C^{r-1} , definidas em $U \times \mathbb{R}^q$ tais que $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$, onde $x_1, \dots, x_n$ são funções coordenadas em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.31. O conjunto $\mathcal{M}_n$ é um ideal gerado pelos monômios x_i , $i = 1, \dots, n$, onde $x_i(x) = x_i$ são germes das projeções $x_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{M}_n$. Aplicando o Lema de Hadamard para o caso $q = 0$, temos que existem $f_1, \dots, f_n$ tais que $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ e, assim, $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Logo $\mathcal{M}_n \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Por outro lado, seja $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, ou seja, $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Temos que $f \in \mathcal{M}_n$ pois $f(0) = 0f_1 + \dots + 0f_n = 0$. Logo $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \mathcal{M}_n$ e, portanto, $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. $\square$

Definição 1.32. Dado $f \in \varepsilon_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o **k -jato** de f (denota-se $j^k f(0)$) como sendo o desenvolvimento de Taylor de um representante de f de ordem k no ponto 0. Isto é,

$$j^k f(0) = \sum_{|\alpha|=0}^k \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = (\alpha_1!) \dots (\alpha_n!)$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Podemos também definir o jato infinito de f como sendo

$$j^\infty f(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha.$$

Exemplo 1.33. O 3-jato de $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por:

$$\begin{aligned} j^3 f(0) &= \sum_{|\alpha|=0}^3 \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha \\ &= f(0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) x_1 \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0) x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0) x_2^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(0) x_1^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(0) x_1^2 x_2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(0) x_1 x_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(0) x_2^3 \right). \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 1.34. Encontremos os k -jatos de $f(x, y) = x^3 + xy - y^2$.

$$j^1 f(0) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0)y = 0 + 0x + 0y = 0.$$

$$j^2 f(0) = j^1 f(0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)y^2 \right) = \frac{1}{2}(2xy - 2y^2) = xy - y^2.$$

$$j^3 f(0) = j^2 f(0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0)x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0)x^2 y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0)y^3 \right) = xy - y^2 + x^3.$$

$$j^4 f(0) = j^3 f(0) + 0 = x^3 + xy - y^2 = f(x, y).$$

Note que $j^k f(0) = f(x, y)$ para todo $k \geq 3$. Isso ocorre pois f é um polinômio finito e, portanto, seu desenvolvimento de Taylor é ele mesmo. $\square$

Definição 1.35. $\mathcal{M}_n^k = \mathcal{M}_n \dots \mathcal{M}_n$, k vezes, $k \in \mathbb{N}^*$.

A proposição a seguir é imediata, pois como vimos $\mathcal{M}_n$ é um ideal gerado pelos monômios x_i , $i = 1, \dots, n$:

Proposição 1.36. $\mathcal{M}_n^k = \langle x^\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| = k \rangle$.

Seja

$$\mathcal{F}_n^k = \left\{ f \in \varepsilon_n \mid \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) = 0, \text{ para } |\alpha| \leq k-1 \right\}.$$

Proposição 1.37. $\mathcal{M}_n^k = \mathcal{F}_n^k$.

Definição 1.38. *Seja $\mathcal{R} = \{h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \mid h \text{ é um germe de difeomorfismo}\}$.*

Observe que $\mathcal{R}$ com a operação usual de composição tem estrutura de grupo.

Se ao invés de germes de funções estivermos interessados em germes de aplicações diferenciáveis do tipo $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, denotamos o conjunto de todos os germes de aplicações diferenciáveis de $(\mathbb{R}^n, 0)$ em $(\mathbb{R}^p, 0)$ por $\varepsilon_{n,p}$. Este conjunto tem estrutura de ε_n -módulo. Note que $\varepsilon_{n,1} = \varepsilon_n$.

Definição 1.39. *Seja*

$$\mathcal{A} = \{(h, k) \mid h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \text{ germes de difeomorfismos}\}.$$

Observe que $\mathcal{A}$ com a operação usual de composição também tem estrutura de grupo.

Os grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$ serão usados para definir importantes relações de equivalência nos conjuntos dos germes ε_n e $\varepsilon_{n,p}$, respectivamente. Veremos mais adiante que eles fazem parte dos chamados grupos de Mather.

1.3 Ação de grupos

Definição 1.40. *Uma **ação de um grupo** G em uma variedade M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$, denotada por $\varphi(g, x) = gx$ tal que para todo $x \in M$ e $g, h \in G$, tem-se:*

- i) $1x = x$, onde 1 é o elemento neutro de G ;
- ii) $(gh)x = g(hx)$.

A definição acima induz uma relação de equivalência $\sim$ em G da seguinte forma:

$x, y \in M$ são equivalentes (e denotamos $x \sim y$) se existe $g \in G$ tal que $y = gx$.

De fato,

i) Para todo $x \in M$, existe $1 \in G$ onde $1x = x$. Portanto, $x \sim x$.

ii) Para todo $x, y \in M$, se $x \sim y$ então existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Logo, $g^{-1}y = x$. Portanto, existe $g^{-1} \in G$ tal que $x = g^{-1}y$, ou seja, $y \sim x$.

iii) Para todo $x, y, z \in M$ tais que $x \sim y$ e $y \sim z$, temos então que existem $g_1, g_2 \in G$ tais que $x = g_1y$ e $y = g_2z$. Logo, $x = g_1(g_2z) = (g_1g_2)z$, com $g_1g_2 \in G$. Portanto $x \sim z$, e vale a transitividade.

Denotaremos o conjunto das classes de equivalência de x (ou seja o conjunto dos elementos y de M tais que existe $g \in G$ satisfazendo $y = gx$) por

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

e chamaremos este conjunto de **órbita de x** .

Proposição 1.41. *Duas classes de equivalência como as acima são disjuntas ou iguais.*

Demonstração: Sejam x_1 e $x_2 \in M$, com $x_1 \neq x_2$, e G um grupo. Vamos considerar as órbitas Gx_1 e Gx_2 .

Vamos mostrar que $Gx_1 \cap Gx_2 = \emptyset$.

Suponha que existe $y \in M$, tal que $y \in Gx_1 \cap Gx_2$. Assim,

$$y \in Gx_1 \Rightarrow y = g_1x_1 \quad \text{e} \quad y \in Gx_2 \Rightarrow y = g_2x_2.$$

Então,

$$g_1x_1 = g_2x_2 \Rightarrow x_1 = (g_1^{-1}g_2)x_2 \Rightarrow x_1 \in Gx_2.$$

Assim, $Gx_1 = Gx_2$

Portanto, as órbitas coincidem, de onde conclui-se que duas órbitas ou coincidem ou são iguais. $\square$

Exemplo 1.42. Considere o grupo $G = Gl(n)$ das matrizes inversíveis $n \times n$, e seja $M = \mathbb{R}^n$. Considere a ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ dada por $(A, x) \mapsto A \cdot x$, onde $A \in Gl(n)$. As únicas classes de equivalência neste caso são $\{0\}$ e $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

De fato, tome $0 \in \mathbb{R}^n$. Para todo $A \in G$, temos que $A \cdot 0 = 0$. Logo, $G0 = \{0\}$ é uma classe de equivalência.

Agora, considere Gx outra classe de equivalência. Assim, $Gx \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ pois $x \neq 0$ e o resultado segue da proposição anterior.

Agora, basta mostrar o outro lado da inclusão. Mostremos para $n = 2$, pois para n qualquer pode ser feito de maneira análoga.

Seja $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $x_0 \neq 0$.

Assim,

$$G(x_0, y_0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}; ad - bc \neq 0 \right\} = \\ \{(ax_0 + by_0, cx_0 + dy_0); ad - bc \neq 0\}.$$

Tome $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e considere o sistema $\begin{cases} ax_0 + by_0 = u \\ cx_0 + dy_0 = v \end{cases}$

Então:

- Se $u = 0$ e $v \neq 0$, basta tomar $a = \frac{-y_0}{x_0}$, $b = 1$, $c = \frac{v}{x_0}$ e $d = 0$.
- Se $u \neq 0$ e $v = 0$, basta tomar $a = \frac{u}{x_0}$, $b = 0$, $c = \frac{-y_0}{x_0}$ e $d = 1$.
- Se $u, v \neq 0$, basta tomar $a = \frac{u - y_0}{x_0}$, $b = 1$, $c = \frac{v}{x_0}$ e $d = 0$.

Ou seja, o sistema tem solução para quaisquer $(u, v) \neq (0, 0)$.

Logo, $(u, v) \in G(x_0, y_0)$ e, portanto, $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \subset G(x_0, y_0)$.

E, assim, o resultado segue. $\square$

Definição 1.43. Um **grupo de Lie** é um grupo G (multiplicativo) que é uma variedade e as operações de multiplicação e inversão são diferenciáveis.

Exemplo 1.44. O grupo $G = Gl(n)$ é um grupo de Lie.

De fato, considere $A \in G$. Como A é uma matriz inversível, segue que $\det(A) \neq 0$.

Vamos identificar o conjunto das matrizes reais $n \times n$ com $\mathbb{R}^{n \times n}$ e considerar a função contínua $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(A) = \det(A)$.

Como $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}$, temos que $\mathbb{R} - \{0\}$ é aberto.

Como f é contínua, então $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = G$ é aberto. Portanto G é uma variedade.

Agora, note que a multiplicação de matrizes é uma aplicação polinomial, e, portanto, diferenciável. A operação de inversão é uma aplicação racional com denominador não nulo, já que $\det(A) \neq 0$. Dessa forma, também é diferenciável.

Portanto, podemos concluir que $Gl(n)$ é um grupo de Lie. $\square$

Proposição 1.45. *O produto cartesiano de grupos de Lie também é um grupo de Lie.*

Demonstração: Sejam G e H grupos de Lie.

Como ambos são variedades (vamos supor de dimensão m e n , respectivamente), dado um ponto $(x, y) \in G \times H$, existem $\varphi : U \rightarrow G$ e $\phi : V \rightarrow H$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, cartas de x em G e de y em H . Logo, basta definirmos a carta $\chi : U \times V \rightarrow G \times H$, dada por $\chi(u, v) = (\varphi(u), \phi(v))$, o que nos garante que $G \times H$ é variedade.

Como por hipótese a multiplicação é diferenciável em ambos os grupos, temos que as aplicações

$$\begin{aligned} f_1 : G \times G &\rightarrow G & e & & f_2 : H \times H &\rightarrow H \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 & & & (h_1, h_2) &\mapsto h_1 \cdot h_2 \end{aligned}$$

são diferenciáveis.

Portanto, a aplicação

$$\begin{aligned} f : (G \times H) \times (G \times H) &\rightarrow G \times H \\ (g_1, h_1) \times (g_2, h_2) &\mapsto (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2) \end{aligned}$$

é diferenciável.

As inversões em G e H que são dadas por

$$\begin{aligned} i_1 : G &\rightarrow G & e & & i_2 : H &\rightarrow H \\ g &\mapsto g^{-1} & & & h &\mapsto h^{-1} \end{aligned}$$

são diferenciáveis por hipótese.

Portanto, a operação inversão em $G \times H$ definida por

$$\begin{aligned} i : G \times H &\rightarrow G \times H \\ (g, h) &\mapsto (g^{-1}, h^{-1}) \end{aligned}$$

também é diferenciáveis.

Logo, $G \times H$ é um grupo de Lie. □

Definição 1.46. *Uma **ação de um grupo de Lie** G em uma variedade M é uma ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$, onde φ é suave.*

Exemplo 1.47. Considere a variedade $H^2(2, 1)$ formada pelos polinômios homogêneos de grau 2, de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. A ação

$$\begin{aligned} \varphi : Gl(2) \times H^2(2, 1) &\rightarrow H^2(2, 1) \\ (M, f) &\mapsto f \circ M^{-1} \end{aligned}$$

é uma ação de um grupo de Lie em uma variedade.

De fato, considere

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } f = f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2.$$

Temos que

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$M^{-1}(x, y) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} f \circ M^{-1}(x, y) &= f \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{dx - by}{ad - bc} \right)^2 + \beta \left(\frac{(dx - by)(-cx + ay)}{(ad - bc)^2} \right) + \gamma \left(\frac{-cx + ay}{ad - bc} \right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $f \circ M^{-1}$ é uma função polinomial, ou seja, φ é diferenciável. $\square$

Proposição 1.48. Seja $\varphi : [Gl(n) \times Gl(p)] \times H^d(n, p) \rightarrow H^d(n, p)$ definida por

$$\varphi((H, K), f) = K \circ f \circ H^{-1}.$$

A aplicação φ é uma ação de um grupo de Lie em uma variedade.

Demonstração: Pela Proposição 1.45 temos que $Gl(n) \times Gl(p)$ é um grupo de Lie.

Considere $1 = (id_{\mathbb{R}^n}, id_{\mathbb{R}^p})$. Assim,

$$1f = id_{\mathbb{R}^p} \circ f \circ id_{\mathbb{R}^n} = f.$$

Além disso, sejam $g = (H_1, K_1), h = (H_2, K_2) \in Gl(n) \times Gl(p)$. Logo,

$$\begin{aligned} (gh)f &= (H_1 \circ H_2, K_1 \circ K_2)f \\ &= (K_1 \circ K_2) \circ f \circ (H_1 \circ H_2)^{-1} \\ &= K_1 \circ K_2 \circ f \circ H_2^{-1} \circ H_1^{-1} \\ &= K_1 \circ (K_2 \circ f \circ H_2^{-1}) \circ H_1^{-1} \\ &= K_1 \circ ((H_2, K_2)f) \circ H_1^{-1} \\ &= (H_1, K_1)((H_2, K_2)f) = g(hf). \end{aligned}$$

Como φ é uma composição de aplicações diferenciáveis, ela também é diferenciável. Portanto, φ é uma ação de um grupo de Lie em uma variedade. $\square$

1.3.1 Espaço tangente a uma órbita

Em geral, as órbitas de uma ação de um grupo de Lie em uma variedade são subvariedades imersas e não subvariedades propriamente ditas. Mas, se supormos que as órbitas são subvariedades, o seguinte resultado descreve o espaço tangente a uma órbita:

Teorema 1.49. *Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade e $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação de um grupo de Lie em uma variedade. Suponha que as órbitas desta ação são subvariedades de M . Então, para qualquer $x \in M$ a aplicação $\varphi_x : G \rightarrow Gx$, definida por $\varphi_x(g) = gx$ é uma submersão.*

Demonstração: De início, vamos mostrar que φ_x tem posto constante para todo $h \in G$. Para isso, basta mostrar que o posto dessa aplicação em h é o mesmo que em $1 \in G$, onde 1 é o elemento neutro de G .

Considere os difeomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} \theta : G & \rightarrow & G \quad e \quad \psi : Gx & \rightarrow & Gx \\ g & \mapsto & hg & & y & \mapsto & hy \end{array}$$

Assim temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_x} & Gx \\ \theta \downarrow & & \downarrow \psi \\ G & \xrightarrow{\varphi_x} & Gx \end{array}$$

Aplicando a regra da cadeia temos:

$$\begin{array}{ccc} T_1G & \xrightarrow{d(\varphi_x)_1} & T_1Gx \\ d\theta_1 \downarrow & & \downarrow d\psi_x \\ T_hG & \xrightarrow{d(\varphi_x)_h} & T_hGx \end{array}$$

Como θ e ψ são difeomorfismos, elas possuem posto máximo. Assim, podemos concluir que o posto de φ_x em $1 \in G$ e em $h \in G$ é o mesmo para todo $h \in G$.

Falta garantir que φ_x é submersão em algum ponto de G .

O Teorema de Sard garante que existe pelo menos um valor regular na imagem de φ_x , pois o conjunto de valores críticos na imagem da aplicação tem medida nula.

Portanto, φ_x é uma submersão. $\square$

Observação 1.50. Da demonstração anterior temos que o espaço tangente a uma órbita Gx em x , denotado por T_xGx , é dado pela imagem da diferencial $d(\varphi_x)_1 : T_1G \rightarrow T_xM$. Ou seja,

$$T_xGx = d(\varphi_x)_1(T_1G).$$

A seguir, temos um exemplo onde aplicamos o Teorema 1.49 para calcular o espaço tangente a uma órbita Gf , onde $f \in H^d(n, p)$ e $G = Gl(n) \times Gl(p)$.

Exemplo 1.51. Considere a variedade $M = H^d(n, p)$ e o grupo de Lie $G = Gl(n) \times Gl(p)$. Então,

$$T_fGf = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j \right\rangle + \langle (0, \dots, f_j, \dots, 0) \rangle,$$

onde na segunda parcela da soma de ideais todas as componentes f_j de f , $j \in \{1, \dots, p\}$, aparecem em todas as entradas.

De fato, segue do Teorema 1.49, que $T_fGf = d(\varphi_f)_1(T_1G)$, onde $\varphi_f : G \rightarrow Gf$ é definida por $(H, K) \mapsto K \circ f \circ H^{-1}$.

Defina $I_n = id_{\mathbb{R}^n}$ e $I_p = id_{\mathbb{R}^p}$.

Assim,

$$\begin{aligned} d(\varphi_f)_1(T_{(I_n, I_p)}(Gl(n) \times Gl(p))) &= d(\varphi_f)_1(T_{I_n}Gl(n) \times T_{I_p}Gl(p)) \\ &= d(\varphi_f)_1(T_{I_n}Gl(n) \times \{0\}_p) \times d(\varphi_f)(\{0\}_n \times T_{I_p}Gl(p)). \end{aligned}$$

Definimos agora as aplicações $\phi : Gl(n) \rightarrow Gf$ tal que $\phi(H) = f \circ H$ e $\psi : Gl(p) \rightarrow Gf$ tal que $\psi(K) = K \circ f$.

Sabemos que o espaço tangente de $Gl(n)$ em I_n pode ser caracterizado por

$$T_{I_n}Gl(n) = \{v = \lambda'(0) \mid \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Gl(n) \text{ com } \lambda(0) = I_n\},$$

onde λ é diferenciável.

Considere agora Λ_{ij} a matriz onde o elemento na linha i e coluna j é 1 e as outras entradas é zero.

Seja $\lambda_{ij} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Gl(n)$ o caminho dado por

$$t \mapsto I_n + t\Lambda_{ij}.$$

Note que $\lambda'_{ij}(t) = \Lambda_{ij}$, para todo t e $\lambda_{ij}(0) = I_n$.

Vamos agora calcular $d\phi_{I_n}(\lambda'(0))$:

$$d\phi_{I_n}(\lambda'(0)) = (\phi \circ \lambda_{ij})'(0) = \frac{d}{dt}(f \circ (I_n + t\Lambda_{ij}))'(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\frac{d}{dt}f(x_1, \dots, tx_j + x_i, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)x_j.$$

$$\text{Portanto, } d(\varphi_f)_1(T_{I_n}Gl(n)) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}x_j \right\rangle.$$

Como $Gl(p)$ é um aberto no conjunto das matrizes $p \times p$, $M_p(\mathbb{R})$, temos $T_{I_p}Gl(p) = M_p(\mathbb{R})$.

Podemos ver também que $\{\Lambda_{ij}\}_{ij}$ é uma base para $M_p(\mathbb{R})$. Disso e do fato que ψ é linear, temos que

$$d\psi_1(T_{I_p}Gl(p)) = \psi(\Lambda_{ij})_{ij} = \langle (0, \dots, f_j, \dots, 0) \rangle.$$

Portanto,

$$T_f Gf = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j \right\rangle + \langle (0, \dots, f_j, \dots, 0) \rangle$$

como queríamos. □

Exemplo 1.52. Aplicando o exemplo anterior, podemos calcular $T_f Gf$ para

$$f(x, y) = x^2 y$$

em $H^3(2, 1)$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$, então

$$\begin{aligned} T_f Gf &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} x, \frac{\partial f}{\partial x} y, \frac{\partial f}{\partial y} x, \frac{\partial f}{\partial y} y \right\rangle + \langle x^2 y \rangle \\ &= \langle 2x^2 y, 2xy^2, x^3, x^2 y \rangle + \langle x^2 y \rangle \\ &= \langle x^2 y, 2xy^2, x^3 \rangle. \end{aligned}$$

□

Observação 1.53. Em $H^d(n, p)$, quando $p = 1$, temos $T_f Gf = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j \right\rangle$.

De fato, seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $f \in H^d(n, 1)$. Sabemos, pela fórmula de Euler para polinômios homogêneos que podemos escrever

$$f = \frac{1}{d} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i.$$

Então, $\langle f \rangle \subset \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j \right\rangle$.

Portanto, $T_f Gf = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j \right\rangle$.

Exemplo 1.54. Considere a ação de $G = Gl(n)$ em $M = H^d(n, 1)$ definida por $(H, f) \mapsto f \circ H^{-1}$. Vamos determinar todas as órbitas de M para $d = 1$.

Como $p = 1$, temos $T_f Gf = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j \right\rangle$. Além disso, como $f \in H^1(n, 1)$, temos que $f = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.

Logo, $T_f Gf = \langle a_1 x_1, \dots, a_1 x_n, \dots, a_n x_1, \dots, a_n x_n \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = H^1(n, 1)$.

Considere os seguintes conjuntos:

$$N_i^+ := \{f \in H^1(n, 1); a_i > 0\} \text{ e } N_i^- := \{f \in H^1(n, 1); a_i < 0\},$$

onde $i \in \{1, \dots, n\}$.

Assim, identificamos cada conjunto N_i^+ e N_i^- com semiplanos abertos de $\mathbb{R}^n$. Logo, N_i^+ e N_i^- são abertos de $H^1(n, 1)$ e, portanto,

$$T_f N_i^+ = T_f N_i^- = H^1(n, 1) = T_f Gf.$$

Considere $f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ e $\bar{f}_i(x_1, \dots, x_n) = -x_i$.

Note que $f_i \sim \bar{f}_i$, uma vez que, tomando $h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$, temos $f_i \circ h = \bar{f}_i$. Logo $Gf_i = G\bar{f}_i$.

Analogamente, $g(x_1, \dots, x_n) = x_i \sim f(x_1, \dots, x_n) = x_j$, basta tomar

$$h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Logo, podemos concluir que só existem duas órbitas, $G0$ e Gf , onde $f \neq 0$. $\square$

O resultado a seguir é muito utilizado em problemas de classificação das órbitas de uma determinada relação de equivalência. Novamente usaremos a hipótese de que as órbitas são subvariedades.

Lema 1.55. (*Lema de Mather*) *Seja φ uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M e seja N uma subvariedade conexa de M . Então N está contida em uma única órbita se, e somente se:*

- i) $T_y N \subset T_y G y$, para todo $y \in N$;
- ii) $\dim T_y G y$ é constante para todo $y \in N$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Vamos supor que N está contida em uma única órbita. Ou seja, suponha $N \subset Gx$ para algum $x \in M$. Então $T_y N \subset T_y Gx$.

Como $y \in N$ e $N \subset Gx$, segue que $y \in Gx$. Logo, $y \in Gx \cap Gy$. Como duas órbitas são iguais ou disjuntas, temos $Gx = Gy$. Assim, $T_y Gx = T_y Gy$.

Portanto, $T_y N \subset T_y Gy$, para todo $y \in N$.

Já vimos que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} T_1 G & \xrightarrow{d(\varphi_x)_1} & T_x Gx \\ d\theta_1 \downarrow & & \downarrow d\psi_x \\ T_h G & \xrightarrow{d(\varphi_x)_h} & T_h Gx \end{array}$$

onde θ e ψ são difeomorfismos como já apareceram antes no Teorema 1.49 e φ_x é submersão. Então, temos

$$\dim d(\varphi_x)_1(T_1 G) = \dim d(\varphi_x)_h(T_h G).$$

Logo, $\dim T_x Gx = \dim T_{hx} Gx$.

Como $N \subset Gx$, temos que se $y \in N$, então $y = hx$ para algum $h \in G$. Assim, $\dim T_x Gx = \dim T_y Gy$, para todo $y \in N$, então $\dim T_y Gy$ é constante, para todo $y \in N$.

($\Leftarrow$) Temos que $N = \bigcup_{y \in N} (Gy \cap N)$. Note que esta união é disjunta pois as órbitas são disjuntas.

Logo, como N é conexa, basta mostrarmos que $Gy \cap N$ é aberta.

Considere a aplicação $\varphi : G \times N \rightarrow M$ e o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G \times N & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \theta \downarrow & & \downarrow \psi \\ G \times N & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

Assim temos

$$d\varphi_{(g,x)} : T_g G \times T_x N \rightarrow T_{\varphi(g,x)} M$$

e

$$d\varphi_{(1,y)}(T_1 G \times T_y N) = d\varphi_{(1,y)}(T_1 G \times \{0\}) + d\varphi_{(1,y)}(\{0\} \times T_y N) = T_y Gy + T_y N.$$

Mas, como hipótese, $T_y N \subset T_y Gy$, para todo y , segue que $d\varphi_{(1,y)}(T_1 G \times T_y N) = T_y Gy$.

Se considerarmos $\dim T_y Gy = k$, concluímos que $d\varphi_{(1,y)}$ tem posto k , para todo $y \in N$.

Considere agora $g_0 \in G$. Queremos mostrar que $\dim d\varphi_{(g_0,y)}(T_{(g_0,y)}(G \times N)) = k$, para todo $g_0 \in G$.

Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times N & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ G \times N & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

onde α e β são difeomorfismos.

Usando o mesmo argumento que anteriormente, temos

$$\dim d\varphi_{(g_0,y)}(T_{(g_0,y)}G \times N) = \dim d\varphi_{(1,y)}(T_{(1,y)}G \times N) = k,$$

e assim está provado ii).

Agora, queremos mostrar que $Gy \cap N$ é aberto em N .

Seja $z \in Gy \cap N$, ou seja, $z = gy$, para algum $g \in G$. Considere também $\chi : U \rightarrow G \times N$ uma parametrização de uma vizinhança de (g, y) , onde U é aberto de $\mathbb{R}^l$, com $l = \dim G \times N$, de modo que $\chi(0) = (g, y)$. Considere também $\xi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ uma parametrização de uma vizinhança de $z = gy \in M$, com $\xi(0) = gy$.

Como χ e ξ são difeomorfismos, segue que $H = \xi^{-1} \circ \varphi \circ \chi : U \rightarrow V$ tem posto constante igual ao posto de φ , ou seja, k .

Do Teorema do Posto, temos que existem difeomorfismos $\bar{\chi}$ e $\bar{\xi}$ tais que:

$$\zeta(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l) = \bar{\xi} \circ \xi^{-1} \circ \varphi \circ \chi \circ \bar{\chi}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

Note que $z \in \varphi(\chi(U))$. Pela estrutura do cartesiano $G \times N$, temos que $\varphi(\chi(U))$ contém uma parte da órbita de gy em uma vizinhança de z .

Analisando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times N & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \chi \uparrow & & \uparrow \xi \\ U \subset \mathbb{R}^l & \xrightarrow{H} & V \subset \mathbb{R}^m \\ \bar{\chi} \uparrow & & \uparrow \bar{\xi} \\ U \subset \mathbb{R}^l & \xrightarrow{\zeta} & V \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

podemos concluir que $\varphi(\chi(U))$ tem dimensão k . Como gy também tem dimensão k , concluimos que Gy e $\varphi(\chi(U))$ coincidem em uma vizinhança de z .

Seja W um aberto contido nessa vizinhança tal que $z \in W$ e $\widetilde{W} = W \cap N$. É imediato que W é aberto em M e $\widetilde{W} \subset Gy \cap N$, concluindo a demonstração. $\square$

Exemplo 1.56. Sejam $f_t : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_t(x, y) = x^3 + y^4 + ty^8$ e $N = \{f_t | t \in \mathbb{R}\}$.

Temos que N é um conjunto conexo.

Podemos escrever $f_t(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + \dots + a_{14}xy^3 + a_{15}y^4 + a_{16}x^5 + \dots + a_{44}xy^7 + a_{45}y^8$, onde $a_i = 0$, para $i \neq \{7, 15, 45\}$, $a_7 = a_{15} = 1$ e $a_{45} = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Assim, cada f_t , $t \in \mathbb{R}$, é um polinômio de grau menor ou igual a 8 em x e y . Logo, $N \subset P_8(2, \mathbb{R})$ (espaço dos polinômios).

Sabemos que $\dim_{\mathbb{R}} P_8(2, \mathbb{R}) = 45$.

Logo, em $\mathbb{R}^{45}$, consideremos o espaço afim

$$V = \{(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, t) | t \in \mathbb{R}\},$$

onde as coordenadas de valor 1 ocupam as posições 7 e 15 da 45-upla de V .

Temos que $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ e, portanto, V é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{45}$ tal que $\phi(t) = f_t$. Como ϕ é contínua e $\mathbb{R}$ conexo, segue que a imagem de ϕ é o espaço afim V que é isomorfo a $\mathbb{R}$. Portanto, N é conexo.

Além disso, $f_t(x, y) = x^3 + y^4 + ty^8 = x^3 + y^4(1 + ty^4) = x^3 + (y^4 \sqrt[4]{1 + ty^4})^4 = g \circ \varphi(x, y)$, onde $g(x, y) = x^3 + y^4$ e $\varphi(x, y) = (x, y^4 \sqrt[4]{1 + ty^4})$ é um difeomorfismo local.

Logo, f_t pertence à mesma órbita de g , para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, N está contida em uma única órbita e podemos aplicar o Lema de Mather. Aqui está implícita a equivalência:

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{R} \mid f = g \circ h,$$

Segue que N está contida em uma única órbita. onde a variedade é $P_8(2, \mathbb{R})$ e o grupo é $\mathcal{R}$. $\square$

1.4 Grupos de Mather

Já vimos na Seção 1.2 a definição dos grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$. Estes grupos fazem parte dos chamados grupos de Mather. Os grupos de Mather, clássicos na Teoria de Singularidades, são os seguintes:

- $\mathcal{R}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^n, 0)$, ou seja,

$$\mathcal{R} = \{h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \mid h \text{ é germe de difeomorfismo}\}.$$

- $\mathcal{L}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^p, 0)$, ou seja,

$$\mathcal{L} = \{k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \mid k \text{ é germe de difeomorfismo}\}.$$

- $\mathcal{A}$ é o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$, ou seja,

$$\mathcal{A} = \{(h, k) \mid h \in \mathcal{R} \text{ e } k \in \mathcal{L}\}.$$

- $\mathcal{K} = \{H = (h, \theta), \text{ onde } h \in \mathcal{R}, H \text{ é um germe de difeomorfismo em } (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \text{ dado por } H(x, y) = (h(x), \theta(x, y)) \text{ onde } \theta : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \text{ satisfaz } \theta(x, 0) = 0\}.$
- $\mathcal{C} = \{H = (h, \theta) \in \mathcal{K}, \text{ com } h = id_{\mathbb{R}^n}\}.$

Embora os grupos de Mather na realidade não sejam grupos de Lie e $\varepsilon_{n,p}$ não seja uma variedade diferenciável no sentido que definimos aqui, é possível seguir o modelo finito de grupos de Lie agindo em variedades e definir objetos que são chamados de espaços tangentes às órbitas dos germes em $\varepsilon_{n,p}$, com respeito a ação de um destes grupos.

Assim, considerando o que já foi visto na Seção 1.3, e considerando inicialmente os germes de funções diferenciáveis (isto é, germes em ε_n) definimos a seguinte ação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{R} \times \varepsilon_n &\rightarrow \varepsilon_n \\ (h, f) &\mapsto hf := f \circ h^{-1}. \end{aligned}$$

Esta ação gera uma relação de equivalência que particiona o conjunto ε_n em órbitas. Denotaremos tais órbitas por $\mathcal{R}f$. A relação de equivalência em questão é definida da seguinte forma:

Definição 1.57. Dizemos que dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são **$\mathcal{R}$ -equivalentes**, se existir um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $f = g \circ h^{-1}$.

Notação: $f \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} g$.

Seguindo o que fizemos na Seção 1.3.1 para obtenção do espaço tangente a uma órbita proveniente de uma ação de um grupo de Lie em uma variedade diferenciável, nossa ideia aqui é reproduzir as ideias no modelo finito e definir o espaço tangente a uma $\mathcal{R}$ -órbita, isto é,

$$T_f \mathcal{R}f = d(\varphi_f)_1(T_1 \mathcal{R}).$$

Para isso vamos determinar $d(\varphi_f)_1(T_1 \mathcal{R}) = \text{Im}(d(\varphi_f)_1)$.

Note que aqui $1 = id_{\mathbb{R}^n}$ e podemos escrever $T_1 \mathcal{R} = \{\lambda'(0) \mid \lambda = 1 + t\phi, \phi \in \varepsilon_{n,n}\}$. Pela Regra da Cadeia, temos

$$d(\varphi_f)_1(\lambda'(0)) = (\varphi_f \circ \lambda)'(0) = \phi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \phi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

onde ϕ_i são as coordenadas de ϕ , $i = 1, \dots, n$.

Assim,

$$\text{Im}(d(\varphi_f)_1) = \left\{ \phi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \phi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \phi \in \varepsilon_{n,n}^0 \right\}.$$

Seja $J(f)$ o ideal jacobiano de f em ε_n , gerado pelas derivadas parciais de f , isto é,

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

Como cada $\phi_i \in \mathcal{M}_n$, $i = 1, \dots, n$, temos que $\text{Im}(d(\varphi_f)_1)$ é o produto dos ideais $\mathcal{M}_n$ e $J(f)$.

Assim, definiremos o espaço tangente da seguinte forma:

Definição 1.58. *O **espaço tangente** à órbita de $f \in \varepsilon_n$ segundo a ação do grupo $\mathcal{R}$ é definido por $\mathcal{M}_n J(f)$.*

Notação: $T_f \mathcal{R}f = \mathcal{M}_n J(f)$.

Observação 1.59. Na Observação 1.53, vimos que quando $M = H^d(n, 1)$ e $G = Gl(n) \times Gl(1)$, o espaço tangente $T_f Gf = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \cdot \langle x_j \rangle = J(f) \mathcal{M}_n$.

A partir dos grupos de Mather podemos definir, de modo análogo, as outras relações de equivalência envolvendo estes grupos, ou seja, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}$ equivalências.

Dentre essas relações de equivalência, a mais natural para estudar os germes de funções sob a ótica da Teoria de Singularidades clássica é a $\mathcal{R}$ -equivalência, enquanto para estudar os germes de aplicações em $\varepsilon_{n,p}$ é a $\mathcal{A}$ -equivalência:

Definição 1.60. Dizemos que dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são **$\mathcal{A}$ -equivalentes**, se existirem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tais que $f = k \circ g \circ h^{-1}$.

Notação: $f \overset{\mathcal{A}}{\sim} g$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ h \downarrow & \curvearrowright & k \downarrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Existem muitos textos/artigos da Teoria de Singularidades que estudam as propriedades, invariantes, espaços tangentes e classificações com respeito a $\mathcal{R}$ e a $\mathcal{A}$ -equivalências (ver por exemplo, [5, 13]).

No entanto, o problema de determinar se dois germes são $\mathcal{A}$ -equivalentes não é fácil. No intuito de reduzir este problema para um problema mais “manejável”, John Mather introduziu também o grupo de contato $\mathcal{K}$. Por meio do grupo $\mathcal{K}$ definiremos a $\mathcal{K}$ -equivalência, que nos ajudará nesta tarefa. O próximo capítulo desta dissertação é dedicado a este estudo.

Capítulo 2

O Grupo $\mathcal{K}$ e a $\mathcal{K}$ -equivalência

Seja $\mathcal{K} = \{H = (h, \theta), \text{ onde } h \in \mathcal{R} \text{ e } H \text{ é um germe de difeomorfismo em } (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \text{ dado por } H(x, y) = (h(x), \theta(x, y)), \text{ com } \theta : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \text{ tal que } \theta(x, 0) = 0\}$.

O grupo $\mathcal{K}$ age em $\varepsilon_{n,p}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{K} \times \varepsilon_{n,p} &\rightarrow \varepsilon_{n,p} \\ (H, f) &\mapsto Hf := \theta \circ (id_{\mathbb{R}^n}, f) \circ h^{-1} \end{aligned}$$

A partir desta ação podemos definir a equivalência de contato por:

Definição 2.1. Dizemos que os germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são **$\mathcal{K}$ -equivalentes** se existir $H \in \mathcal{K}$ tal que $g = Hf$. Em outras palavras, se existirem germes de difeomorfismos $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ e $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tais que o seguinte diagrama é comutativo:

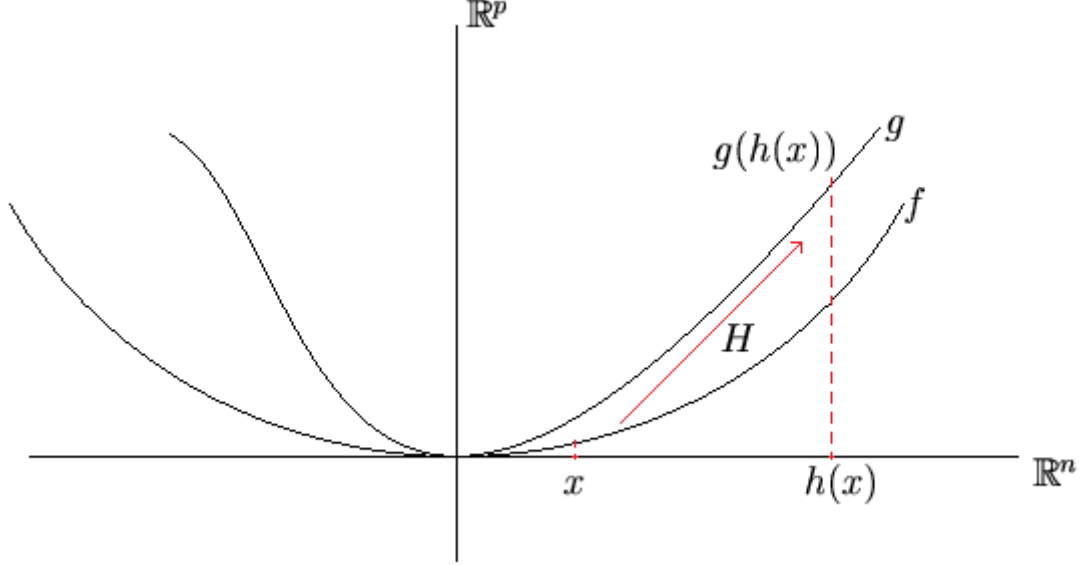
$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id_{\mathbb{R}^n}, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & h \downarrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id_{\mathbb{R}^n}, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

onde $id_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é o germe de identidade no $(\mathbb{R}^n, 0)$ e $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é o germe de projeção.

Notação: $g \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} f$.

Segue da definição acima que H atua no gráfico de f aplicando-o no gráfico de g , pois

$$H(x, f(x)) = (h(x), g(h(x))).$$



Proposição 2.2. *Se $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes, então eles são $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

Demonstração: Se f e g são $\mathcal{A}$ -equivalentes então existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tais que $g = k \circ f \circ h^{-1}$.

Tomemos então $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ definida por

$$H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) = (h(x_1, \dots, x_n), k(x_{n+1}, \dots, x_{n+p})).$$

Assim, H pode ser escrita na forma $H = (h, \theta)$ com $\theta(x, \bar{x}) = k(\bar{x})$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\bar{x} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+p})$.

Além disso,

$$H(x, 0) = (h(x), k(0)) = (h(x), 0)$$

e

$$H(x, f(x)) = (h(x), k(f(x))) = (h(x), g(h(x))).$$

Portanto, $g \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} f$.

□

Observação 2.3. Observe que f e g são $\mathcal{R}$ -equivalentes, então eles são $\mathcal{A}$ -equivalentes. Assim, o seguinte resultado segue como um corolário imediato da Proposição anterior.

Corolário 2.4. Se $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes, então eles são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Uma das vantagens de se trabalhar com a $\mathcal{K}$ -equivalência é que ela possui algumas caracterizações que facilitam os cálculos para decidir se dois germes são ou não equivalentes. A proposição a seguir fornece caracterização da $\mathcal{K}$ -equivalência através dos gráficos dos germes.

Proposição 2.5. Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Então $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$ se, e somente se, existe $H \in \mathcal{K}$ tal que $H(\text{graf}(f)) = \text{graf}(g)$.

Demonstração: Se $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$ segue da definição que $H(\text{graf}(f)) = \text{graf}(g)$.

Por outro lado, suponha que existe $H \in \mathcal{K}$ tal que $H(\text{graf}(f)) = \text{graf}(g)$.

Como $H \in \mathcal{K}$ segue que $H = (h, \theta)$ com $\theta(x, 0) = 0$. Logo temos as duas partes do diagrama comutativo da Definição de $\mathcal{K}$ -equivalência. Portanto $g \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} f$. $\square$

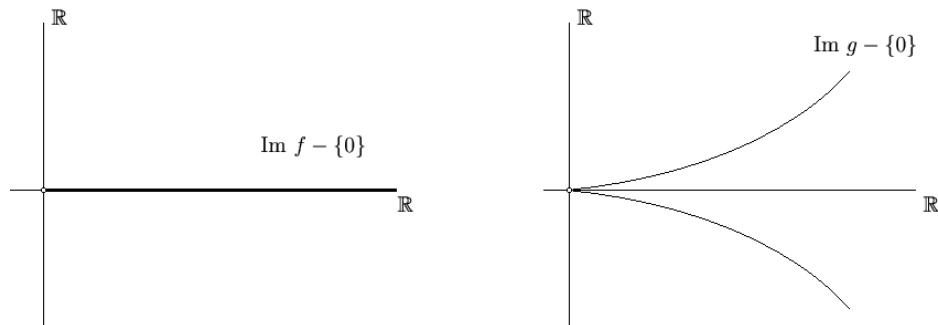
Observação 2.6. A $\mathcal{K}$ -equivalência não implica necessariamente na $\mathcal{A}$ -equivalência.

Exemplo 2.7. Considere os germes $f(x) = (x^2, 0)$ e $g(x) = (x^2, x^3)$, de $(\mathbb{R}, 0)$ em $(\mathbb{R}^2, 0)$.

Neste caso, $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$, pois basta tomarmos os difeomorfismos $h(x) = x$ e $H(x, y, z) = (x, y, z + xy)$.

Suponhamos que existam germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $k : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tais que $g \circ h = k \circ f$.

Logo, temos $k(\text{Im } f - \{0\}) = \text{Im } g - \{0\}$, onde $\text{Im } f$ é o conjunto imagem da f .



Como k é contínua, pois é difeomorfismo, e $\text{Im } f - \{0\}$ é conexa, temos $k(\text{Im } f - \{0\})$ conexa. Mas, $k(\text{Im } f - \{0\}) = \text{Im } g - \{0\}$ é desconexo. Portanto, um absurdo. Logo os germes não são $\mathcal{A}$ -equivalentes. $\square$

Definição 2.8. *Dois germes f e g são ditos **$\mathcal{C}$ -equivalentes** quando são $\mathcal{K}$ -equivalentes via (h, H) , onde $h = id_{\mathbb{R}^n}$ é a aplicação identidade do $\mathbb{R}^n$.*

Obviamente que $\mathcal{C}$ -equivalência implica em $\mathcal{K}$ -equivalência.

O próximo resultado nos fornece um critério algébrico para f e g serem $\mathcal{C}$ -equivalentes e, conseqüentemente, $\mathcal{K}$ -equivalentes. Denotaremos o ideal em ε_n gerado pelas componentes de $f = (f_1, \dots, f_p)$ por I_f ou $\langle f_1, \dots, f_p \rangle$.

Proposição 2.9. *Dados germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, temos que as seguintes afirmações são equivalentes.*

- i) *Os germes f e g são $\mathcal{C}$ -equivalentes;*
- ii) *Os ideais I_f e I_g são iguais;*
- iii) *Existe uma matriz $p \times p$ inversível (u_{ij}) com entradas em ε_n , tal que $f_i = \sum u_{ij}g_j$, para todo $1 \leq i \leq p$.*

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) Suponhamos que f e g sejam $\mathcal{C}$ -equivalentes.

Assim, existe um germe de difeomorfismo H para o qual $H(x, g(x)) = (x, f(x))$ com $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$, onde $\theta(x, 0) = 0$.

Como $\theta(x, 0) = 0$, segue que cada componente $\theta_1, \dots, \theta_p$ de θ satisfaz $\theta_i(x, 0) = 0$. Pelo Lema de Hadamard podemos escrever

$$\theta_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j \theta_{ij}(x, y),$$

com θ_{ij} funções diferenciáveis.

Assim, para $y = g(x)$,

$$f_i(x) = \theta_i(x, g(x)) = \sum_{j=1}^p g_j(x) \theta_{ij}(x, g(x)) = \sum_{j=1}^p g_j(x) a_{ij}(x),$$

$i = 1, \dots, p$.

Portanto, $f_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}g_j$, $i = 1, \dots, p$, e então $I_f \subset I_g$.

Analogamente mostramos que $I_g \subset I_f$.

Portanto, $I_f = I_g$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Suponhamos $I_f = I_g$, então podemos escrever

$$g_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} f_j \quad e \quad f_i = \sum_{j=1}^p b_{ij} g_j,$$

onde a_{ij} e $b_{ij} \in \varepsilon_n$, $i = 1, \dots, p$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sejam A_x e B_x matrizes reais $p \times p$ com entradas $a_{ij}(x)$ e $b_{ij}(x)$, respectivamente.

Segue da Álgebra Linear, que podemos obter uma matriz real C_0 , $p \times p$, tal que $U_0 = C_0(I - A_0 B_0) + B_0$ é inversível. Além disso, a matriz $U_x = C_0(I - A_x B_x) + B_x$ também é inversível para x próximo de 0.

Sejam u_{ij} as entradas de U_x . Daí, $f_i = \sum_{j=1}^p u_{ij} g_j$, $i = 1, \dots, p$, como queríamos.

iii) $\Rightarrow$ i) Suponhamos que exista uma matriz inversível $p \times p$, (u_{ij}) , com a propriedade de iii).

Vamos definir o germe $\theta : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com as componentes dadas por $\theta_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j u_{ij}(x)$, para todo $i = 1, \dots, p$.

Note que $\theta(x, 0) = 0$. Agora defina o germe $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ por $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$. A matriz jacobiana de H é dada por

$$Jac(H) = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times p} \\ *_{p \times n} & (u_{ij})_{p \times p} \end{pmatrix}$$

onde $I_{n \times n}$ é a matriz identidade e $*_{p \times n}$ é uma matriz $p \times n$.

Assim, como $\det(Jac(H(0, 0))) \neq 0$, H é um difeomorfismo.

Por construção, $\theta_i(x, g(x)) = f_i(x)$, $\theta(x, g(x)) = f(x)$ e $H(x, g(x)) = (x, f(x))$ o que implica que f e g são $\mathcal{C}$ -equivalentes. $\square$

Exemplo 2.10. Considere novamente os germes $f(x) = (x^2, 0)$ e $g(x) = (x^2, x^3)$.

Já vimos que $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$. Além disso, como utilizamos $h = id_{\mathbb{R}^n}$, na verdade provamos que estes germes são $f \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$.

Pela Proposição 2.9 poderíamos chegar a essa mesma conclusão sem necessitar explic-

itar o difeomorfismo que realiza a $\mathcal{C}$ -equivalência. De fato, basta notar que neste exemplo

$$I_f = \langle x^2 \rangle = \langle x^2, x^3 \rangle = I_g,$$

e, portanto, $f \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$. □

Exemplo 2.11. Considere o germe $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(0) \neq 0$$

onde $\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0)$ representa a i -ésima derivada de f em 0. Pelo Lema de Hadamard, $f(x) = x^{k+1}g(x)$ para algum $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $g(0) \neq 0$.

Como g é inversível em ε_1 , então $\langle f \rangle = \langle x^{k+1} \rangle$. Portanto, $f \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} x^{k+1}$ e, consequentemente, $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} x^{k+1}$. □

Exemplo 2.12. Os germes $f(x, y) = (x^2, y^2)$ e $g(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes mas não são $\mathcal{C}$ -equivalentes.

De fato, tome $h(x, y) = (x + y, x - y)$ e $k(x, y) = (2x + 2y, x - y)$ germes de difeomorfismos.

$$\text{Temos } \begin{cases} g(h(x, y)) = g(x + y, x - y) = (2x^2 + 2y^2, x^2 - y^2) \\ k(f(x, y)) = k(x^2, y^2) = (2x^2 + 2y^2, x^2 - y^2) \end{cases}$$

Portanto, $g \circ h = k \circ f$, ou seja, $g \stackrel{\mathcal{A}}{\sim} f$ e portanto $g \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} f$.

Mas, note que xy não pertence ao ideal $\langle x^2, y^2 \rangle = I_f$.

Assim, $I_f \neq I_g$. Logo $f \not\stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$. □

Proposição 2.13. O germe f é $\mathcal{K}$ -equivalente a g se, e somente se, existe um germe inversível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ para o qual $f \circ h \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$. Então existe um par de germes de difeomorfismos $\tilde{h}$ e $\tilde{H}$, com $\tilde{H} = (\tilde{h}, \tilde{\theta})$ e tal que $\tilde{\theta}(x, 0) = 0$ e $\tilde{H}(x, f(x)) = (\tilde{h}(x), g(\tilde{h}(x)))$.

Considere $h = \tilde{h}^{-1}$ e $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$ com $\theta(x, y) = \tilde{\theta}(h(x), y)$. Então, H é um germe de difeomorfismo com a identidade na componente do $\mathbb{R}^n$, $\theta(x, 0) = \tilde{\theta}(x, 0) = 0$ e

$$H(x, f \circ h(x)) = (x, \theta(x, f(h(x)))) = (x, \tilde{\theta}(h(x), f(h(x)))) = (x, g(x)).$$

Portanto, $f \circ h \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$. A última igualdade veio do fato de que, como

$$\tilde{H} \circ (id_{\mathbb{R}^n}, f) = (id_{\mathbb{R}^n}, g) \circ \tilde{h},$$

então $\tilde{H}(x, f(x)) = (\tilde{h}(x), g(\tilde{h}(x)))$, ou seja,

$$\tilde{\theta}(x, f(x)) = g(\tilde{h}(x)) \Rightarrow \tilde{\theta}(h(x), f(h(x))) = g(\tilde{h}(h(x))) = g(x).$$

($\Leftarrow$) Suponha $(f \circ h) \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$. Então existe um germe de difeomorfismo H , $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$, com $\theta(x, 0) = 0$ e tal que $H(x, f \circ h(x)) = (x, g(x))$.

Defina $\tilde{H} = (h^{-1}, \theta)$. Então, h^{-1} e $\tilde{H}$ é um par de germes de difeomorfismo que satisfaz

$$\tilde{H} \circ (id_{\mathbb{R}^n}, f) \circ h = (h^{-1}, \theta) \circ (id_{\mathbb{R}^n}, f) \circ h = (id_{\mathbb{R}^n}, \theta \circ f \circ h) = (id_{\mathbb{R}^n}, g).$$

Portanto $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$. □

Definição 2.14. *Sejam I e J dois ideias em ε_n . Dizemos que I e J são **isomorfos** quando existe um isomorfismo $\varphi : \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$, tal que $\varphi(I) = J$.*

Definição 2.15. *Sejam I e J dois ideias em ε_n . Dizemos que I e J são **isomorficamente induzidos** quando existe um isomorfismo $h^* : \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$, para algum germe inversível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, onde $h^*(f) = f \circ h$, tal que $h^*(I) = J$.*

Proposição 2.16. *Dois germes f e g são $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se, I_f e I_g são isomorficamente induzidos.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$. Então existe um germe inversível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ para o qual $f \circ h \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$.

Então temos que $I_{f \circ h} = I_g$. Assim, cada componente $f_i \circ h$ de $f \circ h$ se escreve da seguinte forma: $f_i \circ h = \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j$, com $a_{ij} \in \varepsilon_n$, $i = 1, \dots, p$.

Vamos mostrar que $h^*(I_f) = I_g$.

Por definição de h^* , temos que $h^*(f_i) = f_i \circ h$. Então $h^*(f_i) = \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j \in I_g$, uma vez que $a_{ij} g_j \in I_g$. Assim, $h^*(I_f) \subset I_g$.

Agora, seja $k \in I_g$. Como $I_g = I_{f \circ h}$, segue que $k \in I_{f \circ h}$. Logo

$$\begin{aligned}
k &= \sum_{i=1}^p a_i(f_i \circ h) \\
&= a_1(f_1 \circ h) + \dots + a_p(f_p \circ h) \\
&= h^*(a_1 f_1) + \dots + h^*(a_p f_p) = h^*(a_1 f_1 + \dots + a_p f_p) \\
&= h^*\left(\sum_{i=1}^p a_i f_i\right) \in h^*(I_f).
\end{aligned}$$

Assim $I_g \subset h^*(I_f)$ e, portanto, $h^*(I_f) = I_g$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que I_f e I_g são isomorficamente induzidos, ou seja, existe um isomorfismo induzido $h^* : \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$ para algum germe inversível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, o qual $h^*(I_f) = I_g$.

Logo $I_{f \circ h} = I_g$, e assim $f \circ h \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$. Daí, pela proposição anterior, $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$. $\square$

O grupo $\mathcal{K}$ pode ser visto como o produto semi-direto dos grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$. Desta forma, o espaço tangente a uma $\mathcal{K}$ -órbita pode ser definido da seguinte maneira:

Definição 2.17. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. O espaço tangente ao grupo $\mathcal{K}$ em f é definido por*

$$T_f \mathcal{K} := \mathcal{M}_n J(f) + f^*(m_p) \cdot \varepsilon_{n,p}$$

onde $f^*(m_p) \cdot \varepsilon_{n,p}$ é o módulo formado por p cópias do ideal gerado pelas funções coordenadas de $f = (f_1, \dots, f_p)$. Quando não fixamos a origem, definimos o **espaço tangente estendido de $\mathcal{K}$ em f** por

$$T_f \mathcal{K}_e := J(f) + f^*(m_p) \cdot \varepsilon_{n,p}.$$

Recorde que $J(f)$ denota o ideal jacobiano de f .

A **$\mathcal{K}$ -codimensão de f** é definida como a dimensão (como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial) do quociente $\frac{\mathcal{M}_n \cdot \varepsilon_{n,p}}{T_f \mathcal{K}}$ e a **$\mathcal{K}_e$ -codimensão de f** é definida como a dimensão do quociente $\frac{\varepsilon_{n,p}}{T_f \mathcal{K}_e}$.

Muitas vezes a classe dos germes que estudamos é a daqueles que podem ser representados pelo seu polinômio de Taylor de alguma ordem. A linguagem básica para isto envolve o conceito de determinação finita. Muitos trabalhos são dedicados à caracterização da

determinação finita e outros buscam encontrar estimativas para a ordem de determinação, com respeito às várias relações de equivalência. Como neste capítulo estamos interessados particularmente no grupo $\mathcal{K}$, introduzimos o conceito de germes $\mathcal{K}$ -finitamente determinados. Para os outros grupos de Mather a definição é análoga. A referência básica para este assunto é [13].

Definição 2.18. *Um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é r - $\mathcal{K}$ -determinado se para todo germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com $j^r f(0) = j^r g(0)$ então f é $\mathcal{K}$ -equivalente a g .*

Se f é r - $\mathcal{K}$ -determinado para algum $r < \infty$, então f é $\mathcal{K}$ -finitamente determinado ou $\mathcal{K}$ -finito e r (o menor possível) é o grau de determinação de f .

A propriedade de $\mathcal{K}$ -determinação finita é aberta, ou seja, se consideramos $f : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com $f(0, t) = 0$ e $f(x, 0) = f_0(x)$ um germe $\mathcal{K}$ -finito, então $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é $\mathcal{K}$ -finito para todo t suficientemente pequeno.

Os teoremas de determinação finita permitem que classificações de germes possam ser realizadas. A seguir reproduzimos alguns dos principais critérios e estimativas para a $\mathcal{K}$ -determinação finita dos germes de aplicações diferenciáveis.

Teorema 2.19. *(Critério Infinitesimal para Determinação Finita [13]) São equivalentes:*

- a) f é $\mathcal{K}$ -finitamente determinado;
- b) a $\mathcal{K}$ -codimensão de f é finita;
- c) a $\mathcal{K}_e$ -codimensão de f é finita.

O teorema a seguir é um resultado devido a Mather e Tougeron (ver [11], [12]) e estabelece que a categoria dos germes $\mathcal{K}$ -finitamente determinados é ampla.

Teorema 2.20. *Germes de aplicação são $\mathcal{K}$ -finitamente determinados em geral.*

Os resultados a seguir apresentam caracterizações e invariantes conhecidos para a $\mathcal{K}$ -equivalência.

Teorema 2.21. *(Mather [7]) Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes $\mathcal{K}$ -finitamente determinados. Então, f é $\mathcal{K}$ -equivalente a g se, e somente se, as $\mathbb{R}$ -álgebras locais $Q(f) = \frac{\varepsilon_n}{I_f}$ e $Q(g) = \frac{\varepsilon_n}{I_g}$ são isomorfas.*

Exemplo 2.22. Considere os germes em uma variável real $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$. Claramente as $\mathbb{R}$ -álgebras locais $Q(f)$ e $Q(g)$ não são isomorfas, pois apresentam dimensões diferentes como $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais. Além disso, pela Definição 2.17, as $\mathcal{K}$ -codimensões também são diferentes. $\square$

O teorema a seguir mostra a importância da $\mathcal{K}$ -equivalência no problema inicial da classificação de germes de aplicações diferenciáveis:

Teorema 2.23. (*Mather [7]*) *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes estáveis. Então, f é $\mathcal{A}$ -equivalente a g se, e somente se, eles são $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

Aqui a noção de estabilidade significa, a grosso modo, que todo germe suficientemente próximo a f tem uma estrutura parecida com a de f (isto é, pequenas perturbações de f não alteram o tipo “diferenciável” do germe). Em outras palavras, f é **estável** se existe uma vizinhança V de f (na topologia C^∞ - Whitney) tal que para todo $g \in V$, g é $\mathcal{A}$ -equivalente a f .

Capítulo 3

Contato entre subvariedades

Neste capítulo daremos uma aplicação da equivalência de contato em termos da ideia de contato entre dois pares de subvariedades. Este capítulo é baseado na referência [8].

Definimos o tipo de contato entre subvariedades de maneira bem intuitiva:

Definição 3.1. Dizemos que dois pares de germes de subvariedades na origem em $\mathbb{R}^n$, (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , têm o **mesmo tipo de contato** se existe um germe de difeomorfismo $H : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $H(X_1) = X_2$ e $H(Y_1) = Y_2$.

Denotaremos o tipo de contato entre as subvariedades X e Y por $K(X, Y)$.

Nosso objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.2. (Montaldi [8]) Para $i = 1, 2$, sejam $g_i : (X_i, x_i) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ germes de imersão e $f_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de submersão, com $Y_i = f_i^{-1}(0)$. Então (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) têm o mesmo tipo de contato se, e somente se, $f_1 \circ g_1 \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} f_2 \circ g_2$.

O seguinte exemplo nos dá uma noção de como queremos aplicar esse teorema.

Exemplo 3.3. Sejam $g_1(x) = (x, x^2)$, $g_2(x) = (x, x^3)$, $f_1(x, y) = y$ e $f_2(x, y) = y$. Neste caso, temos

$$f_1 \circ g_1(x) = x^2 \quad \text{e} \quad f_2 \circ g_2(x) = x^3.$$

Note que $\langle x^2 \rangle \neq \langle x^3 \rangle$ e, pela Proposição 2.9, temos que $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ não são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Portanto, os pares (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , onde $X_1 = \text{Im}(g_1)$, $X_2 = \text{Im}(g_2)$, $Y_1 = f_1^{-1}(0)$ e $Y_2 = f_2^{-1}(0)$, não têm o mesmo tipo de contato. $\square$

Mas, antes de demonstrarmos esse teorema, precisamos de alguns resultados preliminares.

Definição 3.4. Dado $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, definimos um **desdobramento de g** como sendo uma aplicação $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$ dada por $G(x, z) = (\tilde{G}(x, z), z)$, com $\tilde{G}(x, 0) = g(x)$.

O espaço $\mathbb{R}^r$ é chamado de **espaço de parâmetros**.

Sejam $g : (X, x) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe de imersão e $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de submersão, com $Y = f^{-1}(0)$. Chamamos $f \circ g$ de **aplicação de contato** entre X em Y .

Proposição 3.5. ([8]) Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dois germes de aplicações contínuas e sejam $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, 0)$ desdobramentos de f e g , respectivamente. Se f e g são $\mathcal{K}$ -equivalentes, então F e G são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Lema 3.6. (Lema de Simetria [8]) Sejam X e Y germes de subvariedades de $\mathbb{R}^n$ em 0. Sejam $g_1 : (X, x) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $g_2 : (Y, y) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ germes de imersão e $f_1 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ e $f_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de submersão, com $X = f_2^{-1}(0)$ e $Y = f_1^{-1}(0)$. Então $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Demonstração: Considere o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} (X, x) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^q, 0) \\ g_1 \downarrow & & \uparrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\chi=(f_1, f_2)} & (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \\ g_2 \uparrow & & \downarrow \\ (Y, y) & \xrightarrow{\psi} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

onde $\chi(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $\phi = f_1 \circ g_1$, $\psi = f_2 \circ g_2$ e as aplicações definidas em $(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$ são as aplicações projeções óbvias. .

Agora, se expressamos $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}^n \simeq X \times \mathbb{R}^p$ então podemos assumir que $g(x) = (x, 0)$ e $f_2(x, z) = z$ (o que é possível desde que $f_2 \circ g_1 = 0$). Assim,

$$\chi(x, z) = (f_1(x, z), z) \quad \text{e} \quad \chi(x, 0) = (f_1 \circ g_1(x), 0).$$

Portanto χ pode ser visto como um desdobramento de ϕ .

A suspensão de ϕ é dada por $\hat{\phi}(x, z) = (\phi(x), z)$.

Então $\widehat{\phi}$ também pode ser vista como um desdobramento (trivial) de ϕ .

Portanto χ e $\widehat{\phi}$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Analogamente, podemos mostrar que χ é $\mathcal{K}$ -equivalente à suspensão $\widehat{\psi}$ de ψ . Logo, ϕ é $\mathcal{K}$ -equivalente a ψ . $\square$

Corolário 3.7. *Para qualquer par de germes de subvariedades do $\mathbb{R}^n$, a $\mathcal{K}$ -classe de contato independe da escolha da aplicação de contato. Depende apenas dos germes de subvariedades.*

Lema 3.8. *([8]) Seja a um inteiro positivo e sejam $X'_i = X_i \times \mathbb{R}^a$, $Y'_i = Y_i \times \{0\}$ subvariedades em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a$. Então $K(X_1, Y_1) = K(X_2, Y_2)$ se, e somente se, $K(X'_1, Y'_1) = K(X'_2, Y'_2)$.*

Lema 3.9. *([8]) Sejam X_i, Y_i, g_i, f_i como no lema anterior, $i = 1, 2$. Sejam a, b inteiros positivos. Considere os germes de subvariedades de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a$ na origem:*

$$X'_i = X_i \times \mathbb{R}^a \times \{0\} \quad \text{e} \quad Y'_i = Y_i \times \{0\} \times \mathbb{R}^b.$$

Sejam g'_i germes de imersão com imagem X'_i e f'_i germes de submersão com conjunto de zeros Y'_i . Então, $f'_1 \circ g'_1$ e $f'_2 \circ g'_2$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se, $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Demonstração: Pelo Corolário 3.7, podemos escolher g'_i e f'_i sem afetar a $\mathcal{K}$ -classe das aplicações composição. Então, fazemos a seguinte escolha:

$$g'_i(x, u) = (g_i(x), u, 0) \quad \text{e} \quad f'_i(y, u, v) = (f_i(y), u).$$

Portanto $f'_i \circ g'_i(x, u) = (f_i \circ g_i(x), u)$ e então a afirmação segue. $\square$

Demonstração do Teorema 3.2: $(\Rightarrow)$ Esta implicação é a mais direta e não utiliza os resultados anteriores. Seja H um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ aplicando X_1 e Y_1 em X_2 e Y_2 , respectivamente. Note que H restrito a X_1 é difeomorfismo sobre X_2 e, portanto, existe um difeomorfismo $h : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $H \circ g_1 = g_2 \circ h$. Temos também que $(f_2 \circ H)^{-1}(0) = f_1^{-1}(0)$, então pelo Lema de Hadamard podemos escrever

$$(f_2 \circ H)(y) = \sum_{i=1}^p f_{1i}(y) a_i(y),$$

onde $f_1 = (f_{11}, \dots, f_{1p})$ e para cada i , $a_i(y) \in \mathbb{R}^p$.

Agora, $f_2 \circ H$ é uma submersão e então tem posto máximo p , o que implica que a matriz $[a_1(y), \dots, a_p(y)]_{p \times p}$ é inversível.

Defina $\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ por

$$\theta(y, z) = \sum_{i=1}^p z_i a_i(y),$$

e $\theta' : X \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ por

$$\theta'(x, z) = \theta(g_1(x), z).$$

Então

$$\theta'(x, f_1 \circ g_1(x)) = f_2 \circ g_2 \circ h(x).$$

Portanto, $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

($\Leftarrow$) Vamos tratar primeiro do caso de mesma dimensão e depois usaremos os lemas para estender o resultado.

Suponha $\dim X_i = \dim Y_i = k$. Queremos expressar cada X_i como sendo o gráfico de uma aplicação $\phi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$ e Y_i como o gráfico de uma aplicação nula de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^p$. Para isso, escolha coordenadas no $\mathbb{R}^n$ tais que $f_1(x_1, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, portanto $Y_1 = \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Escolha um subespaço V_1 de dimensão p , transversal a X_1 e Y_1 e escreva $\mathbb{R}^n = Y_1 \times V_1$.

Seja $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow Y_1$ a projeção na primeira coordenada. Então $\pi|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y_1$ é um difeomorfismo que induz um sistema de coordenadas em X_1 . Com respeito a essas coordenadas, Y_1 é o gráfico da aplicação nula de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^p$ e X_1 é o gráfico da aplicação $f_1 \circ g_1$.

Uma construção análoga pode ser feita entre X_2 e Y_2 . Então, qualquer difeomorfismo $H : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ preservando o gráfico da aplicação nula e levando o gráfico de $f_1 \circ g_1$ no gráfico de $f_2 \circ g_2$ é então um difeomorfismo aplicando X_1 em X_2 e Y_1 em Y_2 , o que conclui a prova no caso de mesma dimensão.

No caso onde $\dim X_i \neq \dim Y_i$, podemos excluir os casos de dimensão menor que $\mathbb{R}^d$, onde d é a diferença entre as dimensões, para dar X'_i e Y'_i em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ e definir de maneira apropriada g'_i e f'_i .

Temos a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{ccc} K(X, Y) & \xrightarrow{(a)} & \mathcal{K}(f \circ g) \\ (d) \uparrow & & (c) \downarrow \\ K(X', Y') & \xleftarrow{(b)} & \mathcal{K}(f' \circ g') \end{array}$$

onde (a) foi provado em $(\Rightarrow)$; (b) segue de $(\Leftarrow)$; (c) segue do Lema 3.8 e (d) segue do Lema 3.9 ($(a) = (d)$, $(b) = 0$ para $\dim Y > \dim X$ e $(b) = (d)$, $(a) = 0$ para $\dim Y < \dim X$). $\square$

Capítulo 4

Equivalência de contato topológica

A menos de menção contrária, este capítulo é baseado no artigo do Takashi Nishimura [9].

Nosso objetivo neste capítulo é relacionar a equivalência de contato com uma aplicação na Topologia. Para isso, definiremos a equivalência de contato topológica e mostraremos como essa relação de equivalência está relacionada com ingredientes da Topologia, como é o caso do grau.

Para isso, vamos introduzir algumas noções preliminares.

Definição 4.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é **homotópica** a g se existir uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que, para todo $x \in X$, tem-se $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, onde $I = [0, 1]$. A aplicação H é chamada de **homotopia** entre f e g .*

Para cada $t \in I$ fixo, temos uma aplicação contínua $H_t : X \rightarrow Y$ dada por $H_t(x) = H(x, t)$. A coleção $(H_t)_{t \in I}$ é uma família de funções contínuas.

Observação 4.2. A relação de homotopia é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow Y$ contínuas.

De fato, são válidas as seguintes propriedades:

- Reflexiva: Para toda função $f : X \rightarrow Y$ contínua, a aplicação $H : X \times I \rightarrow Y$ dada por $H(x, t) = f(x)$, é uma homotopia entre f e f .

- Simétrica: Seja $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Definindo $K : X \times I \rightarrow Y$ por $K(x, t) = H(x, 1 - t)$ obtemos uma homotopia entre g e f .
- Transitiva: Sejam $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g e $K : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre g e h . Definimos $L : X \times I \rightarrow Y$ como

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(x, 2t - 1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

E fácil ver que a aplicação L é uma homotopia entre f e h .

Box

Antes de apresentarmos exemplos, veremos alguns resultados sobre homotopia de aplicações.

Proposição 4.3. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações constantes, tais que $f(x) = p$ e $g(x) = q$, para todo $x \in X$. As aplicações f e g são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos do espaço Y .*

Demonstração: Suponha que f e g são homotópicas por uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Seja $x_0 \in X$ fixado. Definimos um caminho $\alpha : I \rightarrow Y$ tal que $\alpha(t) = H(x_0, t)$, para todo $t \in I$ e temos $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Segue que p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos de Y .

Reciprocamente se p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos de Y , então existe um caminho $\alpha : I \rightarrow Y$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Definimos uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, t) = \alpha(t)$, para todo $(x, t) \in X \times I$. Assim, para todo $x \in X$, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ e portanto f e g são homotópicas. $\square$

Proposição 4.4. *Sejam $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$, $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ contínuas. Se f_1 é homotópica a f_2 e g_1 é homotópica a g_2 , então $g_1 \circ f_1$ e $g_2 \circ f_2$ são homotópicas.*

Demonstração: Por hipótese, existem homotopias $H_1 : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H_1(x, 0) = f_1(x)$ e $H_1(x, 1) = f_2(x)$, para todo $x \in X$, e $H_2 : Y \times I \rightarrow Z$ tal que $H_2(y, 0) = g_1(y)$ e $H_2(y, 1) = g_2(y)$, para todo $y \in Y$.

Definimos uma aplicação $K : X \times I \rightarrow Z$ por $K(x, t) = H_2(H_1(x, t), t)$. Essa aplicação é contínua pois H_1 e H_2 são e temos

$$K(x, 0) = H_2(H_1(x, 0), 0) = H_2(f_1(x), 0) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$$

e

$$K(x, 1) = H_2(H_1(x, 1), 1) = H_2(f_2(x), 1) = g_2(f_2(x)) = (g_2 \circ f_2)(x).$$

Portanto, $(g_1 \circ f_1)(x)$ e $(g_2 \circ f_2)(x)$ são homotópicas. $\square$

Exemplo 4.5. Considere E um espaço vetorial normado, $Y \subset E$ e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas.

Suponhamos que para todo $x \in X$ o segmento de reta

$$[f(x), g(x)] = \{(1-t)f(x) + t.g(x) | t \in I\}$$

esteja contido em Y .

Então f é homotópica a g pois

$$H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x),$$

com $x \in X$ e $t \in I$, é uma homotopia entre f e g .

A aplicação H assim definida é chamada de homotopia linear. Em particular, se $Y = E$, quaisquer aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow E$ são homotópicas. Disso segue então que toda aplicação contínua $f : X \rightarrow E$ é homotópica à aplicação constante nula. $\square$

Exemplo 4.6. Seja E um espaço vetorial normado e considere $f, g : X \rightarrow E - \{0\}$ aplicações contínuas. Se $\|f(x) - g(x)\| < \|f(x)\|$, para todo $x \in X$, então f é homotópica a g .

Pelo exemplo anterior basta mostrar $[f(x), g(x)] \subset E - \{0\}$, para todo $x \in X$.

De fato, se $0 \in [f(x), g(x)]$ para algum $x \in X$ então existe $t_0 \in I$ tal que $0 = (1-t_0)f(x) + t_0g(x)$ e seque que $\|f(x)\| = \|f(x) - g(x)\|$ o que contradiz a hipótese.

Portanto temos f homotópica a g . $\square$

Exemplo 4.7. Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n -dimensional. Dadas duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow S^n$, se $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$, então f é homotópica a g .

De fato, nestas condições 0 não pertence ao segmento de reta $[f(x), g(x)]$ para todo $x \in X$, e podemos definir $H : X \times I \rightarrow S^n$ por

$$H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + g(x)}{\|(1-t)f(x) + g(x)\|}.$$

Claramente H é uma homotopia entre f e g . $\square$

Definição 4.8. Dizemos que dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são **topologicamente $\mathcal{K}$ -equivalentes** (ou $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes) se existirem germes de homeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ satisfazendo a propriedade $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ e tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id_{\mathbb{R}^n}, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & h \downarrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id_{\mathbb{R}^n}, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

onde $id_n : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é a aplicação identidade do $\mathbb{R}^n$ e $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é a projeção canônica.

Em particular, temos que f e g são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{C}$ -equivalentes, quando h acima é a identidade.

Notação: $f \stackrel{\mathcal{C}^0-\mathcal{K}}{\sim} g$.

De maneira análoga podemos definir as noções de $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalência e $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{R}$ -equivalência. Basta substituímos a palavra “difeomorfismo” por “homeomorfismo” nas respectivas definições.

A $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência é a versão topológica da $\mathcal{K}$ -equivalência estudada no Capítulo 2.

Exemplo 4.9. Considere os germes em uma variável, $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$.

Tomando os homeomorfismos $h = id : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $H : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0)$ dado por $H(x, y) = (x, y^3)$ temos que f e g são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{C}$ -equivalentes e, portanto, $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. $\square$

Observação 4.10. Claramente, se f e g são $\mathcal{K}$ -equivalentes, então f e g são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes, entretanto a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 4.11. Considere os mesmos germes dados no Exemplo 4.9. Estes germes são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes, mas não são $\mathcal{K}$ -equivalentes, uma vez que $I_f = \langle x \rangle \neq \langle x^3 \rangle = I_g$. $\square$

Do mesmo modo como antes, continuamos interessados na classe dos germes que podem ser representados pelo seu polinômio de Taylor de alguma ordem. Assim, introduzimos o conceito de $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita. No caso complexo, Wall [13] provou que germes $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitos são também $\mathcal{K}$ -finitos. Mas a classe dos germes $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitos contém estritamente a classe dos germes $\mathcal{K}$ -finitos, no caso real. Por isso, em muitos resultados

adotamos a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita para classificar nossos objetos. Os aspectos básicos da Teoria de Singularidades que dizem respeito ao estudo da $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação são bem conhecidos e para maiores detalhes citamos como referência [13].

Definição 4.12. *Um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é r - $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -**determinado** se para todo germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com $j^r f(0) = j^r g(0)$ então f é $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a g .*

Se f é r - $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinado para algum r , então f é $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado ou $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finito e r (o menor possível) é o grau de determinação de f .

Uma propriedade interessante dos germes $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitos é a seguinte:

Proposição 4.13. [10] *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $n > p$, um germe r - $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinado. Então existe um germe g , com $j^r g(0) = j^r f(0)$, $\mathcal{K}$ -finito e $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a f .*

Um critério (geométrico) para a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita de germes de aplicação na categoria analítico real é a seguinte:

Proposição 4.14. [13] *O germe f é $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado se, e somente se, $(f^{-1}(0) \cap \Sigma f) - \{0\} = \emptyset$ como germes, onde Σf é o conjunto singular de f .*

Observação. A implicação

$$\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}\text{-finitamente determinado} \Rightarrow (f^{-1}(0) \cap \Sigma f) - \{0\} = \emptyset$$

é sempre verdadeira, mesmo o germe não sendo analítico real.

Ao contrário do que ocorre com o grupo $\mathcal{K}$, a propriedade de $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita não é necessariamente aberta, isto é, deformações arbitrariamente próximas de um germe $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado podem não ser $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinadas. Por exemplo, considere o germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dado por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2.$$

Como $f^{-1}(0) = \{0\}$, $(f^{-1}(0) \cap \Sigma f) - \{0\} = \emptyset$ e, portanto, $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado. Mas a deformação de f dada por $f_\varepsilon(x, y) = (x^2 + y^2 - \varepsilon x)^2$ não é $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinada para ε próximo de zero, pois $(f_\varepsilon^{-1}(0) \cap \Sigma f_\varepsilon) - \{0\} \neq \emptyset$.

Alguns invariantes conhecidos para a $\mathcal{K}$ -equivalência, como a $\mathcal{K}$ -codimensão e os símbolos de Boardman (ver [5]), não são invariantes para a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. Além

disso, outros possíveis candidatos como, por exemplo, $\mathbb{R}$ -álgebra local, a multiplicidade e a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita, também não são invariantes para a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 4.15. Considere os germes $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$. Vimos no Exemplo 4.9 que f e g são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. Claramente as $\mathbb{R}$ -álgebras locais $Q(f)$ e $Q(g)$ não são isomorfas, pois apresentam dimensões diferentes como $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais. Logo estes objetos não são invariantes para a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. $\square$

Exemplo 4.16. Considere $f(x, y) = xy$ e $g(x, y) = xy^3$. Estes germes são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalentes (e portanto, $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes). Além disso, f é $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finito (pois $f^{-1}(0) \cap \Sigma f = \{0\}$) mas o mesmo não ocorre com g , pois $g^{-1}(0) \cap \Sigma g = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \neq (0, 0)$. Portanto, a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita não é um invariante para a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. $\square$

Exemplo 4.17. A propriedade do germe ser não singular, não é um invariante para a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. De fato, considere os germes $f, g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, dados por

$$f(x, y, z) = (x, y) \text{ e } g(x, y, z) = (x, y^3).$$

O germe f é não singular, f e g são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes, mas g é singular. $\square$

Na tentativa de buscar invariantes para a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência, Takashi Nishimura [9] foi o primeiro a encontrar um invariante completo. Este invariante é apenas para o caso equidimensional (isto é, $n = p$).

O lema e o teorema a seguir são ferramentas fundamentais para a demonstração do principal resultado deste capítulo, o Teorema 4.23.

Lema 4.18. *Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações contínuas onde U é uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$. Suponha que exista uma família de aplicações contínuas $F_t : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, $t \in [0, 1]$, tal que as seguintes condições são satisfeitas*

- i) $F_0 = f$ e $F_1 = g$ ou $\bar{g} = (g_1, \dots, g_{p-1}, -g_p)$;*
- ii) $F_t^{-1}(0) = f^{-1}(0)$ para todo $t \in [0, 1]$;*
- iii) para qualquer $t \in [0, 1]$, o vetor $F_t(x)$ não pertence ao conjunto $\{\alpha F_0(x) | \alpha < 0\}$, para qualquer $x \in U - f^{-1}(0)$.*

Então, F_t é $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a $F_{t'}$, quaisquer que sejam $t, t' \in [0, 1]$. Em particular, f é $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a g .

Demonstração: Faremos a prova em etapas.

Passo 1. Fixe $t \in [0, 1]$. Vamos construir uma família de homeomorfismos $\tilde{h}_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ dada por $\tilde{h}_x(y) = \alpha_x(\|y\|)y$ dependendo continuamente das variáveis x de U , onde $\alpha_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua da norma $\|y\|$ ($\neq 0$).

De acordo com a relação entre $\|F_0(x)\|$ e $\|F_t(x)\|$ para $x \in U$, temos três casos:

Caso I: $\|F_0(x)\| = \|F_t(x)\|$.

Neste caso, tome $\alpha_x(\|y\|) = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}^p - \{0\}$. Note que o caso $x \in F_0^{-1}(0) = F_t^{-1}(0)$ está incluso neste caso.

Caso II: $0 < \|F_t(x)\| < \|F_0(x)\|$.

Neste caso, tome α_x da seguinte maneira:

$$\alpha_x(\|y\|) = \begin{cases} \frac{\|F_t(x)\|}{\|F_0(x)\|} & \text{se } 0 < \|y\| \leq \|F_0(x)\|, \\ \frac{2(\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|)}{\|y\|} + \frac{2(\|F_0(x)\| - \|F_t(x)\|)}{\|F_0(x)\|} & \text{se } \|F_0(x)\| \leq \|y\| \leq 2\|F_0(x)\|, \\ 1 & \text{se } 2\|F_0(x)\| \leq \|y\|. \end{cases}$$

Caso III: $0 < \|F_0(x)\| < \|F_t(x)\|$.

Neste caso, tome α_x da seguinte maneira:

$$\alpha_x(\|y\|) = \begin{cases} \frac{\|F_t(x)\|}{\|F_0(x)\|} & \text{se } 0 < \|y\| \leq \|F_0(x)\|, \\ \frac{2\|F_t(x)\|(\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|)}{2\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|} \frac{1}{\|y\|} + \frac{\|F_t(x)\|}{2\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|} & \text{se } \|F_0(x)\| \leq \|y\| \leq 2\|F_t(x)\|, \\ 1 & \text{se } 2\|F_t(x)\| \leq \|y\|. \end{cases}$$

Se tomarmos a função contínua α_x como acima, então $\tilde{h}_x$ é um homeomorfismo para todo $x \in U$. Além disso, podemos ver que $\tilde{h}_x$ depende continuamente de $x \in \mathbb{R}^n$.

Passo 2. Construa também outra família de homeomorfismos $\bar{h}_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ dependendo continuamente de $x \in U$.

De acordo com a relação entre $\tilde{h}_x(F_0(x))$ e $F_t(x)$ para $x \in U$, temos dois casos:

Caso I: $\tilde{h}_x(F_0(x)) = F_t(x)$.

Neste caso, tome $\bar{h}_x$ como a aplicação identidade.

Caso II: $\tilde{h}_x(F_0(x)) \neq F_t(x)$.

Observe que, neste caso, temos $||\tilde{h}_x(F_0(x))|| = ||F_t(x)|| > 0$ pela construção de $\tilde{h}_x$. Pela condição iii) sobre F_t e a forma de $\tilde{h}_x$, temos que os vetores $\tilde{h}_x(F_0(x))$ e $F_t(x)$ do $\mathbb{R}^p$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

Considere $V_x = \mathbb{R} \cdot \{\tilde{h}_x(F_0(x))\} \oplus \mathbb{R} \cdot F_t(x)$.

Seja θ_x o ângulo entre $\tilde{h}_x(F_0(x))$ e $F_t(x)$, que é determinado exclusivamente no intervalo $(0, \pi)$. Usando o ângulo θ_x , construímos uma função angular $\Theta_x : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\Theta_x(s) = \begin{cases} \theta_x & \text{se } 0 \leq s \leq ||F_t(x)||, \\ -\frac{\theta_x}{||F_t(x)||}s + 2\theta_x & \text{se } ||F_t(x)|| \leq s \leq 2||F_t(x)||, \\ 0 & \text{se } 2||F_t(x)|| \leq s. \end{cases}$$

Decomponha $\mathbb{R}^p$ na soma direta $\mathbb{R}^p = V_x \oplus \tilde{V}_x$.

Dê ao espaço vetorial de dimensão 2 V_x a orientação a qual o isomorfismo linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_x$ da forma $L(\vec{e}_1) = \tilde{h}_x(F_0(x))$ e $L(\vec{e}_2) = F_t(x)$ induz para V_x de $\mathbb{R}^2$ a orientação padrão. Usando a função angular acima Θ_x , construímos a aplicação $\bar{h}_x : V_x \oplus \tilde{V}_x \rightarrow V_x \oplus \tilde{V}_x$ dada por

$$\bar{h}_x(y_1, y_2) = (\phi_{\Theta_x(||y_1||)}(y_1), y_2),$$

onde $\phi_{\Theta_x(||y_1||)}$ é a aplicação rotação de ângulo $\Theta_x(||y_1||)$, isto é,

$$\phi_{\Theta_x(||y_1||)} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_x(||y_1||)) & -\sin(\Theta_x(||y_1||)) \\ \sin(\Theta_x(||y_1||)) & \cos(\Theta_x(||y_1||)) \end{pmatrix}.$$

Então segue que $\bar{h}_x$ é um homeomorfismo para todo $x \in U$ e depende continuamente de x .

Passo 3. Do Passo 1 e do Passo 2, temos

$$\bar{h}_x \circ \tilde{h}_x \circ F_0(x) = F_t(x)$$

para todo $x \in U$. Defina a aplicação $H : U \times \mathbb{R}^p \rightarrow U \times \mathbb{R}^p$ como

$$H(x, y) = (x, \bar{h}_x \circ \tilde{h}_x(y)).$$

Então, pelos Passos 1 e 2, H é bijetora e contínua. Pelo Teorema da Invariância do

Domínio, H é um homeomorfismo. Da construção, o par de aplicações (id, H) satisfaz a condição de (h, H) na definição de C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalência.

Portanto, F_t e $F_{t'}$ são C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalentes para todo $t, t' \in [0, 1]$.

Desde que g e $\bar{g} = (g_1, \dots, g_{p-1}, -g_p)$ são trivialmente $\mathcal{A}$ -equivalentes, podemos concluir que f e g são C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalentes. $\square$

Para provar o teorema principal também precisamos do seguinte resultado devido a T. Fukuda:

Teorema 4.19. (Fukuda [3]) *Seja $n \neq 4$. Então, para qualquer conjunto semialgébrico W de $J^r(n, n)$, existe um inteiro s , dependendo apenas de n e r , e um subconjunto semialgébrico fechado $\sum_W$ de $(\pi_r^s)^{-1}(W)$ com codimensão ≥ 1 tais que para qualquer aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $j^s f(0) \in (\pi_r^s)^{-1}(W) - \sum_W$, existe um número positivo ε_0 tal que para qualquer número ε com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ temos:*

i) *O conjunto $f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1})$ é uma subvariedade diferenciável sem bordo, que é homeomorfa a esfera unitária padrão S_1^{n-1} ;*

ii) *A restrição $f : f^{-1}(D_\varepsilon^n) \rightarrow D_\varepsilon^n$ é C^0 - $\mathcal{A}$ -equivalente ao cone*

$$c(f) : f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \times [0, \varepsilon] / f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \times \{0\} \rightarrow S_\varepsilon^{n-1} \times [0, \varepsilon] / S_\varepsilon^{n-1} \times \{0\},$$

da restrição $f : f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \rightarrow S_\varepsilon^{n-1}$, definido por $c(f)(x, t) = (f(x), t)$.

iii) *A aplicação $f : f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \rightarrow S_\varepsilon^{n-1}$ é topologicamente estável (resp. C^∞ -estável nas boas dimensões de Mather).*

Um germe f para o qual existe ε_0 e um representante f satisfazendo i) e ii) é chamado de **topologicamente de tipo cone**.

O conjunto dos germes finitamente determinados satisfaz a hipótese do Teorema 4.19. Então, em termos práticos, podemos dizer que se um germe é finitamente determinado então ele admite uma estrutura do tipo cone, como mostra o teorema.

Definição 4.20. *Dada uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um valor regular y de f , definimos o **grau diferenciável da aplicação f em y** por*

$$\text{grau}(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sin}(\det \text{Jac } f(x)),$$

$$\text{onde } sinal(\star) = \begin{cases} 1 & \text{se } \star > 0; \\ -1 & \text{se } \star < 0. \end{cases}$$

O grau de f independe do valor regular escolhido, então denotaremos $\text{grau}(f, y)$ apenas por $\text{grau}(f)$.

Exemplo 4.21. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Note que $\det Jac f(x, y) = 4x^2 + 4y^2$. Assim segue que o ponto $(0, 0)$ é o único ponto singular de f . Daí, dado $\varepsilon > 0$, o ponto $(0, \varepsilon)$ é um ponto regular de f e $f(0, \varepsilon) = (-\varepsilon^2, 0)$ é um valor regular de f .

Portanto, $f^{-1}(-\varepsilon^2, 0) = \{(0, \varepsilon), (0, -\varepsilon)\}$. Com isso temos

$$\text{grau}(f) = \sum_{(x,y) \in f^{-1}(-\varepsilon^2, 0)} sinal(\det Jac f(x, y)) = 1 + 1 = 2.$$

□

Observação 4.22. 1. Dadas duas aplicações f e g , temos

$$\text{grau}(f \circ g) = \text{grau}(f) \cdot \text{grau}(g).$$

De fato, sabemos que

$$Jac (f \circ g) = Jac (f) \cdot Jac (g).$$

Assim,

$$\det Jac (f \circ g) = \det Jac (f) \cdot \det Jac (g).$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{grau}(f \circ g) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} sinal(\det Jac (f \circ g)) \\ &= \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} sinal(\det Jac (f)) \right) \cdot \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} sinal(\det Jac (g)) \right) \\ &= \text{grau}(f) \cdot \text{grau}(g). \end{aligned}$$

2. Na prática usaremos o grau diferenciável que é mais fácil de calcular, devido nossas aplicações serem de classe C^∞ . No entanto, o grau topológico pode ser definido de uma

forma mais geral usando apenas argumentos topológicos, para aplicações contínuas. No caso diferenciável, estas noções de grau (diferenciável e topológico) coincidem.

O teorema a seguir, principal resultado desse capítulo, mostra que o valor absoluto do grau é um invariante completo para a $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência, no caso equidimensional:

Teorema 4.23. (*Nishimura [9]*) *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ germes $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados e $n \neq 4$. Então, f e g são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se, $|\text{grau}(f)| = |\text{grau}(g)|$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Esta é a implicação mais trivial. Suponhamos que $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. Então existe um germe de homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e uma família de germes de homeomorfismos $H_x(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) tais que $H_x(f(x)) = g(h(x))$.

Seja $F_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, com $t \in [0, 1]$, uma homotopia da forma

$$F_t(x) = H_{(1-t)x}(f(x)).$$

Então temos que $F_0(x) = H_x(f(x))$ e $F_1(x) = H_0(f(x))$. Como f é um germe $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, então $f^{-1}(0) = \{0\}$ como germe. Além disso, $H_{(1-t)x} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é um germe de homeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$ e $x \in \mathbb{R}^n$, portanto $F_t^{-1}(0) = \{0\}$. Assim, a noção de grau está bem definida para todo F_t .

Como $F_0(x)$ e $F_1(x)$ são homotópicas, temos

$$\text{grau}(F_0) = \text{grau}(F_1).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\text{grau}(f)| &= |\pm 1| |\text{grau}(f)| \\ &= |\text{grau}(H_0)| |\text{grau}(f)| \\ &= |\text{grau}(H_0 \circ f)| \\ &= |\text{grau}(F_1)| \\ &= |\text{grau}(F_0)| \\ &= |\text{grau}(g \circ h)| \\ &= |\text{grau}(g)| |\text{grau}(h)| \\ &= |\text{grau}(g)|. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Para essa parte da demonstração, vamos usar o Teorema 4.19 e o Lema 4.18. Suponha que $|grau(f)| = |grau(g)|$. Como por hipótese f (resp. g) é um germe $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, então pelo Teorema 4.19, existe um germe de aplicação $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $\tilde{g}$) topologicamente do tipo-cone e tal que f e $\tilde{f}$ (resp. g e $\tilde{g}$) são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Logo, da hipótese $|grau(f)| = |grau(g)|$, segue pelo que já mostramos (condição ($\Rightarrow$)), que $|grau(\tilde{f})| = |grau(\tilde{g})|$.

Vamos considerar algum representante de $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{g}$), mas continuaremos usando a mesma notação $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{g}$) para esse representante.

Segue do Teorema 4.19 i) que existe um homeomorfismo

$$\phi_f : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \rightarrow \tilde{f}(S_{\varepsilon_0}^{n-1}) \quad (\text{resp. } \phi_g : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \rightarrow \tilde{g}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})).$$

Agora defina a aplicação $F : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1}$ por

$$F(x) = \tilde{f} \circ \phi_f(x) \quad (\text{resp. } G(x) = \tilde{g} \circ \phi_g(x)).$$

Como ϕ_f (resp. ϕ_g) é um homeomorfismo, temos

$$|grau(F)| = |grau(\tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})})|$$

$$(\text{resp. } |grau(G)| = |grau(\tilde{g}|_{\tilde{g}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})})|).$$

Seja $c(\tilde{f})$ (resp. $c(\tilde{g})$) o cone de

$$\tilde{f} : \tilde{f}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1}) \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1} \quad (\text{resp. } \tilde{g} : \tilde{g}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1}) \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1}).$$

Temos,

$$|grau(\tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})})| = |grau(c(\tilde{f}))|$$

$$(\text{resp. } |grau(\tilde{g}|_{\tilde{g}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})})| = |grau(c(\tilde{g}))|).$$

Pela parte ii) do Teorema 4.19 e pelo que já mostramos (condição ($\Rightarrow$)), segue que

$$|grau(c(\tilde{f}))| = |grau(\tilde{f})| \quad \text{e} \quad |grau(c(\tilde{g}))| = |grau(\tilde{g})|.$$

Usando as igualdades obtidas anteriormente, podemos concluir que

$$|\text{grau}(F)| = |\text{grau}(G)|.$$

Pelo Teorema do Grau de Brouwer, temos que existe uma homotopia $H_t : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1}$ ($t \in [0, 1]$) tal que $H_0 = F$ e $H_1 = G$ ou $\overline{G}$.

Considere $c(H_t) : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times [0, 1] / S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times \{0\} \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times [0, 1] / S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times \{0\}$ o cone desta homotopia, ou seja, $c(H_t)(x, s) = (H_t(x), s)$. Então,

$$c(H_0) = c(F) \text{ e } c(H_1) = c(G) \text{ ou } \overline{c(G)};$$

e ainda

$$c(H_t)^{-1}(0) = \{0\} \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Identifique, de forma canônica, o conjunto $S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times [0, 1] / S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times \{0\}$ com o disco $D_{\varepsilon_0}^n$. Como $c(H_t)$ é o cone de H_t , pela compacidade do intervalo $[0, 1]$ segue que existe um subconjunto finito $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ de $[0, 1]$ tal que $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ e para qualquer inteiro i com $0 \leq i \leq k-1$ e qualquer $t \in [t_i, t_{i+1}]$, o vetor $c(H_t)(x)$ não pertence ao conjunto $\{\alpha c(H_{t_i})(x) | \alpha \in \mathbb{R}_-\}$ para todo $x \in D_{\varepsilon_0}^n$.

Logo, pelo Lema 4.23, $c(F)$ e $c(G)$ são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Visto que o cone $c(\phi_f)$ (resp. $c(\phi_g)$) é um homeomorfismo, $c(F)$ e $c(\tilde{f})$ (resp. $c(G)$ e $c(\tilde{g})$) são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{R}$ -equivalentes.

Portanto, deduzimos que:

$$f \stackrel{\mathcal{C}^0-\mathcal{K}}{\sim} \tilde{f} \stackrel{\mathcal{C}^0-\mathcal{A}}{\sim} c(\tilde{f}) \stackrel{\mathcal{C}^0-\mathcal{R}}{\sim} c(F) \stackrel{\mathcal{C}^0-\mathcal{K}}{\sim} c(G) \stackrel{\mathcal{C}^0-\mathcal{R}}{\sim} c(\tilde{g}) \stackrel{\mathcal{C}^0-\mathcal{A}}{\sim} \tilde{g} \stackrel{\mathcal{C}^0-\mathcal{K}}{\sim} g.$$

Logo, f e g são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. □

Exemplo 4.24. Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dadas por

$$f(x, y) = (x^2, y^2) \text{ e } g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy),$$

germes $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados.

Como $|\text{grau}(f)| = 0 \neq 2 = |\text{grau}(g)|$, segue do Teorema 4.23 que estes germes não são $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. □

Observação 4.25. 1. A hipótese de C^0 - $\mathcal{K}$ -determinação finita no Teorema 4.23 é fundamental para que o grau das aplicações esteja bem definido, pois ela acarreta que $f^{-1}(0) = \{0\}$.

2. Aqui reproduzimos a versão original do resultado de Nishimura, excluindo a condição $n \neq 4$. Esta restrição devia-se na época à Conjectura de Poincaré que ainda era um problema em aberto.

4.1 Considerações Finais

Com relação ao estudo da equivalência de contato topológica, outros resultados surgiram complementando o caso não equidimensional. Inicialmente, Costa [1] provou que para germes finitamente determinados $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com $n < p$, existe apenas uma classe de C^0 - $\mathcal{K}$ -equivalência. Assim, o interesse maior se voltaria ao caso em que $n > p$.

A hipótese fundamental para o caso $n \leq p$, feito por Nishimura e Costa, é a de que f admite uma estrutura cônica, fato este baseado no Teorema 4.19. Na verdade aqui usamos a versão do Teorema de Fukuda para o caso de interesse $n = p$. Mas o resultado de Fukuda no qual é baseado o Teorema 4.19 do artigo [3] vale para o caso $n \leq p$. Há ainda outro resultado de Fukuda para o caso $n > p$, o qual pode ser encontrado em [4]. No entanto, para $n > p$, Fukuda não deixa explícita a estrutura cônica.

Costa e Nuno-Ballesteros [2] adaptaram a construção de Fukuda dada no Teorema 4.19 de tal modo que agora a aplicação restrição

$$f : f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \rightarrow S_\varepsilon^{n-1}$$

chamada (link de f) não era mais requerida estável (como no item iii) do Teorema 4.19. Os autores provaram que o link está bem definido a menos de homotopia e sua classe de homotopia é usada para determinar a C^0 - $\mathcal{K}$ -classe de f . Os resultados obtidos em [2] por Costa e Nuno-Ballesteros generalizam os resultados parciais de Nishimura [9] e de Costa [1].

Referências Bibliográficas

- [1] J.C.F. Costa, *A note on topological contact equivalence*, Real and Complex Singularities. Edited by M. Manoel, M. C. Romero Fuster, C. T. C. Wall (Org.) London Math. Soc. Lecture Notes Series 380 - Real and Complex Singularities. 1 ed. New York: Cambridge University Press, v. 380 (2010) 114-124.
- [2] J.C.F. Costa, J.J. Nuño-Ballesteros, *Topological $\mathcal{K}$ -classification of finitely determined map germs*, Geom. Dedicata 166 (2013) 147-162.
- [3] T. Fukuda, *Local Topological Properties of Differentiable Mappings I*, Inventiones Math. 65, no. 2 (1981) 227-250.
- [4] T. Fukuda, *Local Topological Properties of Differentiable Mappings II*, Tokyo J. Math. 8, no. 2 (1985) 501-520.
- [5] C.G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Research Notes in Math. 25, Pitman, London (1979).
- [6] J. Mather, *Stability of $\mathcal{C}^\infty$ -mappings, III: finitely determined map-germs*, Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1969) 127-156.
- [7] J. Mather, *Stability of $\mathcal{C}^\infty$ -mappings, IV: classification of stable map-germs by $\mathbb{R}$ -algebras*, Publ. Math. I.H.E.S. 37 (1970) 223-248.
- [8] J. Montaldi, *On contact between submanifolds*, Michigan Math. J. 33 (1986) 195-199.
- [9] T. Nishimura, *Topological $\mathcal{K}$ -equivalence of smooth map-germs*, Stratifications, Singularities and Differential Equations, I (Marseille 1990, Honolulu, HI 1990), Travaux en Cours, 54, Hermann, Paris (1997) 82-93.

- [10] M.J. Saia, *Poliedros de equisingularidade de germes pré-quase-homogêneos*, Tese de Doutorado, ICMC-USP (1991).
- [11] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables I*, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) 177-240.
- [12] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse, Band 71, Springer-Verlag (1972).
- [13] C.T.C. Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bull. London Math. Soc. 13 (1981), no. 6, 481-539.