



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Presidente Prudente

Luan Baccar Fonseca Casarotto

**ANÁLISE BAYESIANA DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL-LOGARÍTMICA
COM PRESENÇA DE CENSURA À DIREITA SOB O USO DE INFORMAÇÃO
A PRIORI**

Revisado pelo Orientador

Assinatura do Orientador

Data ____ / ____ / 2025

Luan Baccar Fonseca Casarotto

**ANÁLISE BAYESIANA DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL-LOGARÍTMICA
COM PRESENÇA DE CENSURA À DIREITA SOB O USO DE INFORMAÇÃO
A PRIORI**

Projeto para Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística da FCT/Unesp para aproveitamento na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Moala.

PRESIDENTE PRUDENTE
2025

C335a

Casarotto, Luan

ANÁLISE BAYESIANA DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL-LOGARÍTMICA
COM PRESENÇA DE CENSURA À DIREITA SOB O USO DE INFORMAÇÃO A
PRIORI / Luan Casarotto. -- Presidente Prudente, 2025

47 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Estatística) - Universidade Estadual
Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientador: Fernando Antonio Moala Antonio Moala


1. Análise de risco e de sobrevivência. 2. Dados censurados à direita. 3. Distribuição
exponencial-logarítmica. 4. Simulação estatística em R. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Relatório de Final de Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito para obtenção de créditos na disciplina Trabalho de Conclusão do curso de graduação em Bacharelado em Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Unesp, pela seguinte banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **FERNANDO ANTONIO MOALA**
Data: 09/12/2025 01:12:41-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof Dr. Fernando Antonio Moala
ORIENTADOR(A)

Documento assinado digitalmente
 **RICARDO PUZIOL DE OLIVEIRA**
Data: 15/12/2025 19:47:16-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof Dr. Ricardo Puziol de Oliveira

Presidente Prudente, 09 de dezembro de 2025.

RESUMO

O presente trabalho investiga a distribuição Exponencial-Logarítmica (EL) no contexto da análise de sobrevivência, com ênfase em cenários envolvendo censura à direita e na comparação entre métodos de inferência clássica e bayesiana. A motivação surge da necessidade de modelos capazes de lidar com amostras pequenas e com a presença de dados censurados, situação comum tanto em estudos clínicos quanto em aplicações industriais.

Inicialmente, são apresentados conceitos fundamentais de sobrevivência, como tempo de falha, tipos de censura, função de sobrevivência e função de taxa de falha. Em seguida, descreve-se a distribuição Exponencial-Logarítmica, destacando suas propriedades, a forma da função de risco e a adequação para modelar tempos de vida com risco decrescente. Também são discutidas a função geratriz de momentos, medidas de assimetria e curtose, além de procedimentos para geração de amostras aleatórias e para o uso do estimador de Kaplan-Meier.

Na parte inferencial, são considerados três métodos principais: estimação clássica via Máxima Verossimilhança (EMV), Inferência Bayesiana com priori informativa e Inferência Bayesiana com priori não informativa. Para a abordagem bayesiana, emprega-se o algoritmo de Metropolis–Hastings, permitindo a obtenção de amostras da distribuição a posteriori dos parâmetros. Um estudo de simulação é conduzido sob diferentes tamanhos amostrais e níveis de censura (0%, 30% e 90%), avaliando o comportamento dos estimadores em termos de viés, variabilidade e erro quadrático médio.

Por fim, a metodologia é aplicada a dois conjuntos de dados reais: tempos de falha de peças eletrônicas, sem censura, e tempos de sobrevivência de pacientes com leucemia, com censura do tipo II. Os resultados mostram que a distribuição Exponencial-Logarítmica fornece ajustes coerentes em ambos os contextos e que os métodos bayesianos, em especial com priori informativa bem calibrada, apresentam maior estabilidade e intervalos de credibilidade mais consistentes do que o EMV.

Palavras-chave: análise de sobrevivência; censura à direita; inferência bayesiana; distribuição exponencial-logarítmica; MCMC.

ABSTRACT

This work investigates the Exponential-Logarithmic (EL) distribution in the context of survival analysis, focusing on right-censored data and on the comparison between classical and Bayesian inference methods. The motivation lies in the need for statistical models capable of handling small samples and censored observations, which are common in both clinical and industrial applications.

First, fundamental concepts of survival analysis are presented, such as failure time, censoring mechanisms, survival function, and hazard rate. The Exponential-Logarithmic distribution is then described, with emphasis on its mathematical properties, decreasing hazard behavior, and suitability for modeling lifetime data. Moment-generating function, skewness, kurtosis, random sample generation, and the Kaplan–Meier estimator are also discussed.

In the inferential part, three main approaches are considered: classical estimation via Maximum Likelihood Estimation (MLE), Bayesian inference with informative priors, and Bayesian inference with non-informative priors. For the Bayesian framework, the Metropolis–Hastings algorithm is employed to generate samples from the joint posterior distribution of the parameters. A simulation study is carried out under different sample sizes and censoring levels (0%, 30%, and 90%), assessing the behavior of the estimators in terms of bias, variability, and mean squared error.

Finally, the proposed methodology is applied to two real datasets: failure times of electronic components, without censoring, and survival times of leukemia patients, under type-II right-censoring. The results indicate that the Exponential-Logarithmic distribution provides coherent fits in both contexts and that Bayesian methods, especially with well-calibrated informative priors, yield more stable estimates and credibility intervals than MLE. It is concluded that, in scenarios with intense censoring or small samples, the Bayesian approach is more robust, producing more reliable estimates and interpretations that better reflect the underlying data.

Keywords: survival analysis; right-censoring; Bayesian inference; exponential-logarithmic distribution; MCMC.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Tabelas

Tabela 1 – Resultados EMV sem censura	28
Tabela 2 – Resultados EMV com censura Tipo I	28
Tabela 3 – Resultados EMV com censura Tipo II	29
Tabela 4 – Resultados Bayesianos com priori informativa – sem censura	30
Tabela 5 – Resultados Bayesianos com priori informativa – censura Tipo I	30
Tabela 6 – Resultados Bayesianos com priori informativa – censura Tipo II	30
Tabela 7 – Resultados Bayesianos com priori não informativa – sem censura	31
Tabela 8 – Resultados Bayesianos com priori não informativa – censura Tipo I	31
Tabela 9 – Resultados Bayesianos com priori não informativa – censura Tipo II	32
Tabela10 – Resultados para conjunto de dados Peças Sem Censura – EMV.....	36
Tabela11 – Resultados para conjunto de dados Peças Sem Censura – Priori Não Informativa.....	36
Tabela12 – Resultados para conjunto de dados Peças Sem Censura – Priori Informativa.....	36
Tabela13 – Critérios de ajuste de dados Peças Sem Censura -EMV.....	37
Tabela14 – Critérios de ajuste de dados Peças Sem Censura – Priori não.....	37
Tabela15 – Critérios de ajuste de dados Peças Sem Censura – Priori Informativa.....	37
Tabela16 – Kolmogorov Smirnov Peças.....	37
Tabela17 – Resultados para conjunto de dados Leucemia com Censura - EMV.....	37
Tabela18 – Resultados para conjunto de dados Leucemia com Censura – Priori Não Informativa.....	38
Tabela19 – : Resultados para conjunto de dados Leucemia Com Censura – Priori Informativa.....	38
Tabela20 – Critérios de ajuste de dados Leucemia Com Censura -EMV	38

Tabela21 – Critérios de ajuste de dados Leucemia Com Censura – Priori não Informativa.....	38
Tabela22 – Critérios de ajuste de Leucemia Com Censura – Priori Informativa	38
Tabela23 – Kolmogorov Smirnov Leucemia	39

Figuras

Figura 1 – Densidades da distribuição Exponencial-Logarítmica para $\beta = 2$ e $p = 0,2; 0,5; 0,8$	17
Figura 2 – Função de risco da distribuição Exponencial-Logarítmica para $\beta = 2$ e $p = 0,2; 0,5; 0,8$	18
Figura 3 – Kaplan Meier.....	40

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

EL – Distribuição Exponencial-Logarítmica

EMV – Estimação por Máxima Verossimilhança

MCMC – Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov

KS – Teste de Kolmogorov-Smirnov

LISTA DE SÍMBOLOS

$S(t)$ – Função de sobrevivência

$h(t)$ – Taxa de falha

$f(x)$ – Função densidade de probabilidade

β – Parâmetro de escala da EL

p – Parâmetro de forma da EL

$\hat{p}, \hat{\beta}$ – Estimadores dos parâmetros

δ_i – Indicador de censura

$\pi(\theta)$ – Distribuição a priori

$\pi(\theta | x)$ – Distribuição a posteriori

Sumário

1 Introdução	13
2 Conceitos Básicos	14
2.1 Tempo de falha	14
2.2 Censura	14
2.2.1 Censura do Tipo I	15
2.2.2 Censura do Tipo II	15
2.3 Função de Sobrevivência	15
2.4 Função de Taxa de Falha	16
3 Distribuição Exponencial Logarítmica	16
3.1 Função Densidade de Probabilidade	17
3.2 Função Acumulada	17
3.3 Função de Sobrevivência e Risco	17
3.4 Função Geratriz de Momentos	18
3.4.1 Coeficientes de Assimetria e Curtose	19
3.5 Geração de Amostras Aleatórias	19
3.6 Estimador de Kaplan-Meier	20
4 Métodos de inferência	21
4.1 Estimação por Máxima Verossimilhança	21
4.2 Dados Censurados Tipo I	22
4.3 Dados Censurados Tipo II	23
4.4 Priori Informativa	24
4.5 Priori Não Informativa	27
5 Método de Monte Carlo via cadeias de Markov	28
5.1 Algoritmo Metropolis Hastings	28
6 Simulação	29
6.1 EMV	29
6.2 Simulação priori informativa	31
6.3 Simulação priori não informativa	32
7 Aplicação	33
7.1 Priori Informativa – Aplicação em dados reais	35
7.2 Aplicação em dados não censurados	37
7.2.1 Critérios de ajuste para os dados de peças	38
7.2.2 P-valor KS dos dados de peças	38

7.3 Aplicação em dados censurados.....	38
7.3.1 Critérios de ajuste para os dados de Leucemia.....	39
7.3.2 P-valor KS do teste dados de Leucemia	40
7.3.3 Kaplan-Meier dados de Leucemia	40
8 Conclusões.....	42
Referências.....	44
Apêndice	
A.1.....	45
A.2.....	45
A.3.....	48

1 Introdução

No tempo em que vivemos, a sociedade se tornou imediatista, tem-se uma necessidade enorme de se gerar resultados, e muitas vezes com a falta de dados para comprovar empiricamente. Com o nascimento da Inferência Bayesiana facilitou pesquisas e testes, pelo fato de conseguirmos aplicar métodos em amostras pequenas, nos gerando resultados rapidamente.

O método de gerar resultados através do princípio Bayesiano iniciou-se com o teorema proposto por Thomas Bayes no século XVIII, ele nos permite criar um conhecimento sobre um assunto através de dados prévios, sejam conhecimentos ou suposições com dados coletados nos gerando uma posteriori, um conhecimento final sobre o assunto, essa metodologia permite a integração de conhecimento prévio com dados atuais para estimar parâmetros de interesse. O ponto central da inferência bayesiana é a distribuição a posteriori, que reflete a atualização das crenças sobre o parâmetro após a observação dos dados. Por outro lado, a Inferência Clássica depende de resultados assintóticos, que é o comportamento de uma estimativa ou procedimento estatístico à medida que o tamanho da amostra ou outras variáveis tendem ao infinito.

Dentro da diversificada área da Estatística, tem um campo que se destaca na comprovação empírica de falhas de equipamento e tempo de vida de organismos. A análise de sobrevivência e risco, essa busca analisar entender e modelar o tempo de sobrevivência, ou seja, o tempo até que o evento aconteça, sendo fundamental em áreas como medicina, engenharia, biologia e ciências sociais, entretanto os estudos por sua grande parte tem a presença de dados censurados, que representam observações em que o evento de interesse não ocorreu até o final do período de observação ou até um momento específico, aonde busca-se adaptar a precisão do estudo através de funções de distribuições de probabilidade.

A escolha de uma função distribuição de probabilidade é essencial para entrega de resultados, pois ela modela incertezas de fenômenos físicos, econômicos entre outros, quando não é adequada para o tipo de dados em estudo, acaba por levar a redução da precisão e escolhas equivocadas em suas conclusões. A distribuição proposta por Tahmasbi e Rezaei, denominada de Exponencial-Logarítmica, é frequentemente usada em estudos estatísticos que envolvem modelagens de tempos de eventos, uma área explorada em Análise

de sobrevivência e risco, que abrange diversas áreas de estudos, essencial principalmente para pesquisas médicas e previsões de falhas de máquinas, onde acaba por colocar a vida humana e bem-estar da sociedade em segurança.

2 Conceitos Básicos

2.1 Tempo de falha

Na Análise de Confiabilidade são realizados testes em equipamentos com o objetivo de determinar sua durabilidade e avaliar o tempo até a ocorrência de falhas. Esses estudos permitem não apenas identificar o período de vida útil dos produtos, mas também antecipar possíveis problemas que possam surgir durante o uso, auxiliando em melhorias técnicas ou orientando os consumidores.

Geralmente, utiliza-se o tempo cronológico como unidade de medida; contudo, outras escalas são aplicadas, tais como o número de ciclos de operação ou a quilometragem percorrida por veículos. Na área da saúde, por outro lado, o interesse está direcionado ao tempo até a cura, à sobrevivência de um paciente ou ao retorno de uma determinada doença.

2.2 Censura

A censura é um fenômeno amplamente presente em estudos de sobrevivência e confiabilidade, sendo caracterizada pela existência de observações incompletas. Essas observações incompletas acontecem por diversas causas e resultam na obtenção de informações parciais sobre os tempos de falha. Se forem desconsideradas, podem levar a resultados distorcidos ou conclusões equivocadas.

O tipo mais frequente de censura encontrado em pesquisas médicas é a censura à direita, na qual o tempo de falha real é superior ao período observado ou registrado. Este tipo de censura subdivide-se em três categorias principais: censura do tipo I, censura do tipo II e censura aleatória.

A censura tipo I acontece quando os indivíduos do estudo são acompanhados por um período fixado previamente; neste caso, o número de falhas observado será aleatório. Na censura tipo II, ao contrário, o acompanhamento dos indivíduos segue até que se atinja um número predefinido de eventos (falhas), fazendo com que o tempo total de acompanhamento seja variável. Por fim, a censura aleatória, muito comum na prática médica, ocorre

quando o indivíduo deixa de ser acompanhado por motivos não relacionados diretamente ao evento estudado, como óbito causado por outra doença ou interrupção voluntária do acompanhamento.

Além desses tipos, existem também a censura à esquerda e a censura intervalar. A censura à esquerda ocorre quando o momento exato do evento é desconhecido, porém se sabe que ele aconteceu antes do início da observação ou registro. Por exemplo, ao tentar identificar a idade em que crianças de uma comunidade aprenderam a ler.

A censura intervalar acontece quando se sabe apenas que o evento ocorreu dentro de um intervalo específico. Esse tipo de censura é comum quando avaliações são feitas periodicamente. Um exemplo clássico é o teste de durabilidade de lâmpadas, onde as avaliações são realizadas em intervalos regulares.

2.2.1 Censura do Tipo I

Na censura do tipo I, o período de acompanhamento dos experimentos é previamente determinado. Assim, o tempo exato da falha só será conhecido caso ela ocorra antes desse tempo limite estabelecido. Como consequência, o número total de falhas observadas torna-se aleatório. Este método é frequentemente aplicado em estudos de engenharia. Além disso, pode ocorrer que nem todas as unidades sejam colocadas simultaneamente sob observação, levando a tempos distintos de censura para cada uma.

2.2.2 Censura do Tipo II

Na censura do tipo II, o procedimento é inverso ao tipo anterior. Neste caso, define-se antecipadamente o número total de falhas desejadas entre as unidades testadas. Uma vez atingido esse número pré-fixado de falhas, o experimento é encerrado, fazendo com que o tempo de duração do teste seja uma variável aleatória.

2.3 Função de Sobrevivência

A função de sobrevivência, representada por $S(t)$, é amplamente utilizada em estudos sobre análise de sobrevivência. Ela representa a probabilidade de que uma unidade não apresente falha até um tempo específico t . Sendo $F(t)$ a

função de distribuição acumulada, a função de sobrevivência pode ser definida por:

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T \geq t)$$

Por outro lado, a função de distribuição acumulada $F(t)$ representa a probabilidade de que a falha ocorra até o tempo t :

$$F(t) = 1 - S(t)$$

Em situações em que as observações não possuem censura, é possível estimar empiricamente a função de sobrevivência da seguinte maneira:

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{número total de observações que não falharam até o tempo } t}{\text{número total de observações}}$$

2.4 Função de Taxa de Falha

Outra função amplamente empregada na análise de sobrevivência é a função de taxa de falha (ou função de risco). Essa função pode assumir diferentes formas, como crescente, decrescente, constante, unimodal ou até o formato conhecido como "curva da banheira".

Por possuir maior variabilidade que a função de sobrevivência, a função de taxa de falha carrega informações adicionais sobre o comportamento das falhas, tornando-se essencial para o processo de modelagem. Ela pode ser matematicamente expressa por:

$$\lambda(t) = li(t) = \lim_{\{\Delta t \rightarrow 0\}} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t}$$

Alternativamente, pode ser definida por:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

Podemos estimar através de:

$$\hat{h}(t) = \frac{\text{número de observações que falharam no intervalo}}{\text{número de observações que não falharam até } t}$$

3 Distribuição Exponencial Logarítmica

Em termos de modelagem estatística, a distribuição Exponencial-Logarítmica tem se mostrado útil em várias áreas, especialmente na análise de dados de sobrevivência. Esta distribuição foi proposta por Tahmasbi e Rezaei (2008) e possui uma taxa de risco decrescente, sendo utilizada para modelar a

sobrevivência de organismos, e tempo de falha de aparelhos e materiais. A EL consiste em uma distribuição com dois parâmetros p e β definida na análise de sobrevivência com taxa de falha decrescente.

3.1 Função Densidade de Probabilidade

A distribuição Exponencial-Logarítmica, é a combinação da distribuição Exponencial com a distribuição Logarítmica. Sua função densidade de probabilidade contém dois parâmetros (p parâmetro de forma, ($0 < p < 1$) e β parâmetro de escala, ($\beta > 0$), ela é expressa seguinte forma:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{\ln p}\right) \left(\frac{\beta(1-p)e^{-\beta x}}{1-(1-p)e^{-\beta x}}\right)$$

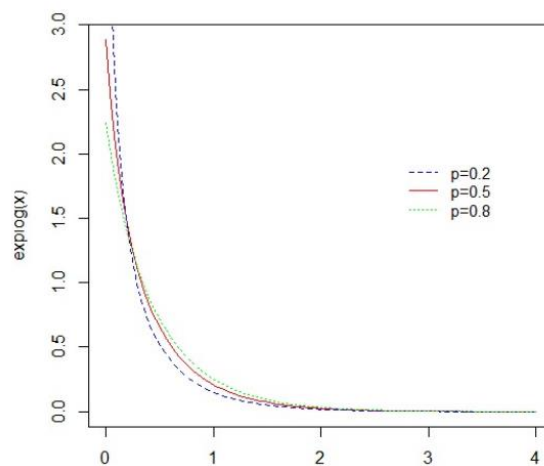


Figura 1: Densidades da Exponencial Logarítmica para $a = 2$ e $p = 0.2, 0.5$ e 0.8 .

3.2 Função Acumulada

A função acumulada pode ser descrita como:

$$F_{X(x; p, \beta)} = 1 - \frac{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x})}{\ln p}$$

3.3 Função de Sobrevivência e Risco

As funções de sobrevivência e taxa de falha podem ser apresentadas das seguintes formas:

$$S(x; p, \beta) = \frac{(1 - (1-p)e^{-\beta x})}{\ln p}$$

$$h(x; p, \beta) = \frac{(-\beta(1-p)e^{-\beta x})}{(1 - (1-p)e^{-\beta x}) \ln(1 - (1-p)e^{-\beta x})}$$

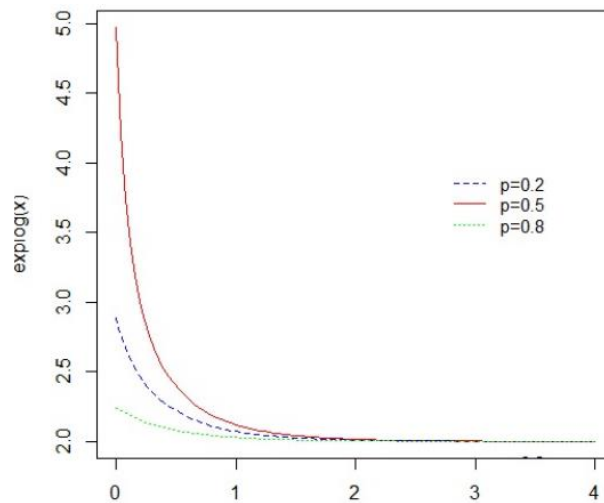


Figura 2: Função de Risco da distribuição Exponencial-Logarítmica para $\beta = 2$ e $p = 0.2, 0.5$ e 0.8 .

3.4 Função Geratriz de Momentos

A função geratriz de momentos (FGM) é uma ferramenta fundamental para o estudo das propriedades probabilísticas de uma distribuição, pois permite, por diferenciação sucessiva, obter os momentos de qualquer ordem da variável aleatória.

É chamada de geratriz de momentos, pois todos os momentos da variável aleatória X podem ser encontrados realizando sucessivas derivadas de:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx ,$$

Com $t = 0$. Sendo o primeiro momento $E(X)$, e o segundo a $Var(x)$.

A função geratriz de momentos da distribuição Exponencial-Logarítmica (EL) é dada por:

$$M_X(t) = \frac{-\beta(1-p)}{\ln p (\beta - t)} \cdot \text{hipergeom}_{2,1} \left(\left[1, \frac{\beta - t}{\beta} \right], \left[\frac{2\beta - t}{\beta} \right], 1 - p \right)$$

Por meio da função geratriz é possível determinar os momentos da v.a. X considerando $t = 0$, sendo o primeiro momento a esperança, $E(X)$, e o segundo a variância, $Var(X)$:

$$E(X) = -\frac{\text{polilog}(2, 1-p)}{\beta \ln p}$$

$$\text{var}(X) = \frac{2\text{polilog}(3, 1-p)}{\beta^2 \ln p} - \frac{\text{polilog}^2(2, 1-p)}{\beta^2 \ln^2 p}$$

polilog é a função poli-logaritmo, definida em Lewin (1981) como:

$$\text{polilog}(a, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^a}$$

A demonstração dessa função está no **Apêndice A**.

3.4.1 Coeficientes de Assimetria e Curtose

A assimetria é uma medida que indica o grau de desvio da distribuição em relação à simetria. Na EL, a assimetria é sempre positiva, mostrando uma distribuição com cauda alongada à direita. O coeficiente de assimetria é obtido por:

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

Para a EL(p, β):

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad \mu_3 = \frac{6 \text{polilog}(4, 1-p)}{\beta^3 \ln p} - \frac{6 \text{polilog}(3, 1-p) \text{polilog}(2, 1-p)}{\beta^3 (\ln p)^2} + \frac{2 [\text{polilog}(2, 1-p)]^3}{\beta^3 (\ln p)^3}$$

A curtose mede o grau de achatamento das caudas de uma distribuição em comparação à normal. Para a distribuição EL, a curtose é elevada e positiva, indicando presença significativa de valores extremos nas caudas. O coeficiente de curtose excessiva é dado por:

$$\gamma_2 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} - 3$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

Para a EL(p, β):

$$\mu_4 = \frac{24 \text{polilog}(5, 1-p)}{\beta^4 \ln p} - \frac{24 \text{polilog}(4, 1-p) \text{polilog}(2, 1-p)}{\beta^4 (\ln p)^2} + \frac{12 \text{polilog}(3, 1-p) [\text{polilog}(2, 1-p)]^2}{\beta^4 (\ln p)^3} - \frac{3 [\text{polilog}(2, 1-p)]^4}{\beta^4 (\ln p)^4}$$

3.5 Geração de Amostras Aleatórias

Para gerar amostras aleatórias da distribuição Exponencial-Logarítmica (EL), utilizou-se o método da transformação inversa, considerando U como uma variável aleatória proveniente de uma distribuição uniforme no intervalo (0,1).

Esse método baseia-se no fato de que a função de distribuição acumulada (FDA) de qualquer variável aleatória contínua assume valores no intervalo (0,1). Assim, para determinar o valor de X , é necessário encontrar a inversa da função de distribuição acumulada $F_X(x; p, \beta)$, igualando-a ao valor de U :

$$\begin{aligned}
 F_X(x; p, \beta) &= U \\
 1 - \frac{\ln(1 - (1 - p)e^{-\beta X})}{\ln p} &= U \\
 \ln(1 - (1 - p)e^{-\beta X}) &= (1 - U) \ln p \\
 1 - (1 - p)e^{-\beta X} &= p^{1-U} \\
 1 - p^{1-U} &= (1 - p)e^{-\beta X} \\
 \ln\left(\frac{1 - p^{1-U}}{1 - p}\right) &= -\beta X \\
 X &= -\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1 - p^{1-U}}{1 - p}\right),
 \end{aligned}$$

Com isso, é possível gerar valores aleatórios da distribuição EL a partir de valores de U extraídos de uma distribuição uniforme no intervalo (0,1), utilizando essa expressão fechada da inversa da função de distribuição acumulada.

3.6 Estimador de Kaplan-Meier

Quando lidamos com dados de sobrevivência, é comum que nem todas as informações estejam completas, ou seja, temos dados censurados. Isso dificulta o uso de ferramentas estatísticas simples, como média, variância, histogramas ou boxplots, já que essas técnicas não consideram bem os casos incompletos. Se a gente simplesmente ignorar esses dados censurados, corremos o risco de tirar conclusões erradas. Por isso, é importante usar métodos que consigam aproveitar essas informações parciais. Um dos mais conhecidos é o estimador de Kaplan-Meier, que ajuda a estimar a probabilidade de sobrevivência ao longo do tempo mesmo quando nem todos os dados estão totalmente observados, definido por por Colosimo e Giolo (2006) como:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_j < t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right)$$

- $t_1 < t_2 \dots < t_k$, k é o tempo distinto e ordenado de falha.
- d_j é o número de falhas em t_j , $j = 1, \dots, k$.
- n_j o número de indivíduos sob risco em t_j .

4 Métodos de Inferência

4.1 Estimação por Máxima Verossimilhança para Dados Completos

Considere uma amostra aleatória completa X_1, X_2, \dots, X_n , proveniente da distribuição EL, em que os parâmetros p e β são desconhecidos. Nessa situação, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(p, \beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, p, \beta),$$
$$L(p, \beta) = \left(-\frac{1}{\ln p}\right)^n \frac{\beta^n (1-p)^n e^{-\beta \sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n [1 - (1-p)e^{-\beta x_i}]}$$

As estimativas de máxima verossimilhança (EMV) para p e β são valores que, a partir da amostra observada, tornam máximo o logaritmo da função de verossimilhança apresentado a seguir:

$$\log L(p, \beta) = -n \ln(-\ln p) + n \ln(1-p) + n \ln(\beta) - \beta \sum_{i=1}^n x_i$$
$$- \sum_{i=1}^n \ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})$$

Assim os estimadores de máxima verossimilhança (MLE) para os parâmetros p e β são obtidos como as soluções das derivadas de $\log L(p, \beta)$:

$$\frac{\partial}{\partial p} \log L(p, \beta) = -\frac{n}{p \log(p)} - \frac{n}{1-p} - \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}}$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log L(p, \beta) = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i - (1-p) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}}$$

Tahmasbi e Rezaei (2008) mostraram em detalhes que, para a distribuição EL, a matriz de informação de Fisher esperada é dada por:

$$I(p, \beta) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$$
$$I_{11} = \frac{-n(\ln p + 1)}{(p \ln p)^2} + \frac{n}{(1-p)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{e^{-2\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})^2}$$
$$I_{12} = I_{21} = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})^2}$$

$$I_{22} = \frac{n}{\beta^2} - (1-p) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\beta x_i}}{(1-(1-p)e^{-\beta x_i})}$$

Em amostras grandes, é possível construir intervalos de confiança aproximados para os parâmetros com base na distribuição assintoticamente normal dos estimadores obtidos por máxima verossimilhança, onde $I(p, \beta)$ é a matriz de informação de Fisher esperada ou seja:

$$(\hat{p}, \hat{\beta}) \sim N_2((p, \beta), I^{-1}(p, \beta)), n \rightarrow \infty.$$

4.2 Dados Censurados Tipo I

Considere uma amostra X_1, X_2, \dots, X_n de tamanho n , representando tempos de de vidas provenientes de uma distribuição com função $f(x | p, \beta)$. Na presença de observações censuradas ou não censuradas, introduz-se a variável indicadora δ , definida da seguinte maneira:

$$\delta_i = \begin{cases} 1; & T_i \leq L_i \\ 0; & T_i > L_i \end{cases}$$

Neste contexto, define-se $X_i = \min(T_i, C_i)$ como o tempo efetivamente observado, onde T_i representa o tempo de sobrevivência L_i é o tempo de censura previamente fixado para o i -ésimo indivíduo. A variável indicadora δ_j indica se foi censurada ou não:

$$L(p, \beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | p, \beta)^{\delta_i} S(x_i | p, \beta)^{1-\delta_i}$$

Considerando $r = \sum_{i=1}^n \delta_i$ como o número de tempos de vida observados,

os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros (p, β) da distribuição Exponencial-Logarítmica são obtidos ao maximizar a função de verossimilhança derivada de $L(p, \beta)$:

$$L(p, \beta) = \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{1}{\ln p} \right) \left(\frac{\beta(1-p)e^{-\beta x_i}}{1-(1-p)e^{-\beta x_i}} \right) \right]^{\delta_i} \prod_{i=1}^n \left[\frac{\ln(1-(1-p)e^{-\beta x_i})}{\ln p} \right]^{1-\delta_i}$$

o logaritmo da função de máxima verossimilhança é dado como:

$$\begin{aligned} \log L(p, \beta) &= -r \ln(-\ln p) + r \ln(1-p) + r \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^n \delta_i x_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \delta_i \ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) - (n-r) \ln(\ln p) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (1-\delta_i) \ln(\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})) \end{aligned}$$

Achando as derivadas de $\log L(p, \beta)$ em relação a relação a p e β , temos às equações de verossimilhança:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \log L(p, \beta) &= \frac{n}{p \log(p)} - \frac{r}{1-p} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} + \sum_{i=1}^n \frac{(1-\delta_i)e^{-\beta x_i}}{\log(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \log L(p, \beta) &= \frac{r}{\beta} - \sum_{i=1}^n \delta_i x_i - (1-p) \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i x_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} + (1-p) \sum_{i=1}^n \frac{(1-\delta_i)x_i e^{-\beta x_i}}{\log(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \\ \frac{\partial}{\partial p} \log L(p, \beta) &= 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \log L(p, \beta) = 0 \end{aligned}$$

Não podendo resolver as equações de verossimilhança, não conseguimos achar \hat{p} e $\hat{\beta}$, é necessário outro método. A matriz de informação de Fisher observada para os parâmetros p e β , da Exponencial-Logarítmica sob censura tipo I e Informação de Fisher é demonstrado no **Apêndice B**.

4.3 Dados Censurados Tipo II

Em um esquema de censura do tipo II, inicia-se o experimento com n unidades em teste, sendo este encerrado no momento em que ocorre a r -ésima falha, onde (r fixo, $0 \leq r \leq n$). A função de verossimilhança, neste caso, é construída com base nos r menores tempos de falha observados, denotados por x_1, x_2, \dots, x_r e é expressa por:

$$L(p, \beta) = \frac{n!}{(n-r)!} f(x_{(1)} | p, \beta) \dots f(x_{(r)} | p, \beta) [S(x_{(r)} | p, \beta)]^{n-r}$$

x_r é o tempo de vida correspondente à ocorrência da r -ésima falha.

A função de verossimilhança correspondente ao esquema de censura tipo II é dada por:

$$L(p, \beta) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r \left[\left(-\frac{1}{\ln p} \right) \left(\frac{\beta(1-p)e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} \right) \right] \left[\frac{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})}{\ln p} \right]^{n-r}$$

E o logaritmo da função de máxima verossimilhança $L(p, \beta)$, as suas respectivas derivadas e a de informação de Fisher é demonstrada no **apêndice C**.

4.4 Priori Informativa

Na elicitaco da confiabilidade $S(t)$, define-se um valor correspondente a uma determinada probabilidade. Ou seja, dada uma probabilidade p , determina-se o valor para o qual se acredita que $p\%$ dos produtos apresentam desempenho superior.

Portando, com n valores $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ so escolhidos, tem suas probabilidades $S_{t_1}, S_{t_2}, S_{t_3}, \dots, S_{t_n}$ com

$$S_{t_j} = P(T \geq t_j), \quad j = 1, \dots, k,$$

Que é a confiabilidade de S para os parâmetros p e β .

Admitindo distribuices a priori independentes Beta(a, b) para o parâmetro p e Gama (c, d) para β —, obt m-se a forma funcional da confiabilidade correspondente a essa elicitaco, construída diretamente a partir desses percentis.

$$\begin{aligned} P(T \geq t|a, b, c, d) &= \int_0^\infty \int_0^1 P(T \geq t|a, b, c, d)\pi(p, \beta)dpd\beta \\ &= -\frac{2\pi\Gamma(a+b)d^c}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \frac{\hat{\beta}^c(1-e^{-\hat{u}})^b}{\sqrt{(b-1)(c-1)}} \exp\left\{-\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)\hat{u}+d\hat{\beta}\right]\right\} \frac{1}{\hat{u}} \ln[1-(1-e^{-\hat{u}})e^{-\hat{\beta}t}] \\ \hat{u} &= \frac{\ln[a+b+1]}{2} \text{ e } \hat{\beta} = \frac{c-1}{d}, \text{ onde } a+b > 1 \text{ e } c > 1. \end{aligned}$$

Para demonstrando $P(T \geq t|a, b, c, d)$, seja $S(t|p, \beta)$ a funo de sobrevivência e $p \sim \text{Beta}(a, b)$ e $\beta \sim \text{gama}(c, d)$:

$$\pi(p|a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} \quad \text{e} \quad \pi(\beta|c, d) = \frac{d}{\pi(c)} (d\beta)^{c-1} e^{-d\beta}.$$

Sabendo que:

$$S(t) = \int_0^1 \int_0^\infty P(T > t|p, \beta)\pi(p, \beta)dpd\beta.$$

Supondo p e β independentes, $\pi = (p, \beta) = \pi(p)\pi(\beta)$, assim:

$$\pi(p, \beta) = \frac{\Gamma(a+b)d^c}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} p^{a-1}(1-p)^{b-1}\beta^{c-1}e^{-d\beta}.$$

Concluindo:

$$S(t) = \frac{\Gamma(a+b)d^c}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\ln[1 - (1-p)e^{-\beta t}]}{\ln p} p^{a-1} (1-p)^{b-1} \beta^{c-1} e^{-d\beta} dp d\beta.$$

Neste caso, a aproximação de Laplace torna-se muito útil pois é um método eficaz para aproximação de integrais complicadas. Para que se possa utilizar o Método de Laplace, é preciso fazer uma transformação em p para se obter limites 0 a ∞ .

Seja a transformação $u = -\ln p$ tal que $p \rightarrow 0$ implica que $u \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 1$ implica em $u \rightarrow 0$, $p = e^{-u} du$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\ln[1 - (1-p)e^{-\beta t}]}{\ln p} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp \\ &= - \int_0^\infty \frac{\ln[1 - (1-e^{-u})e^{-\beta t}]}{u} e^{-(a-1)u} (1-e^{-u})^{b-1} e^{-u} du. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\ln[1 - (1-p)e^{-\beta t}]}{\ln p} p^{a-1} (1-p)^{b-1} \beta^{c-1} e^{-d\beta} dp d\beta \\ &= - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\ln[1 - (1-e^{-u})e^{-\beta t}]}{u} (1-e^{-u})^{b-1} e^{-au} \beta^{c-1} e^{-d\beta} du d\beta. \end{aligned}$$

Com $f(u, \beta) = \frac{\ln p [1 - (1-p)e^{-\beta t}]}{u}$ e $n = 1$, pois não há dados em X , então:

$$\exp\{-h(u, \beta)\} = \exp\{-au + (b-1)\ln(1-e^{-u}) + (c-1)\ln\beta - d\beta\}$$

Implicando em $h(u, \beta) = au - (b-1)\ln(1-e^{-u}) + (c-1)\ln\beta - d\beta$.

$$\frac{\partial h(u, \beta)}{\partial u} = a - (b-1) \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h(u, \beta)}{\partial \beta} = d - \frac{(c-1)}{\beta}.$$

$$\frac{\partial h(u, \beta)}{\partial u} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial h(u, \beta)}{\partial \beta} = 0,$$

$$u = \ln\left[\frac{a+b-1}{a}\right] \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \frac{c-1}{d}.$$

$\hat{\beta}$ é a moda da distribuição Gama, próximo passo é calcular as derivadas segundas para obtermos a matriz Σ^{-1} , conhecida como Hessiana:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial \beta} & \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}$$

$$\det(\Sigma) = \frac{1}{\det(\Sigma^{-1})}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = \frac{(b-1)e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial \beta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2} = \frac{c-1}{\beta^2}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(b-1)e^{-u}}{(1-e^{-u})^2} & 0 \\ 0 & \frac{c-1}{\beta^2} \end{bmatrix}.$$

Vale ressaltar ainda que,

$$\det(\Sigma) = \frac{1}{\det(\Sigma^{-1})} = \left(\frac{(b-1)(c-1)e^{-u}}{\beta^2(1-e^{-u})^2} \right)^{-1} = \frac{\beta^2(1-e^{-u})^2}{(b-1)(c-1)e^{-u}}.$$

Considerando $\theta = (a, b, c, d)$, aplicando aproximação de Laplace temos:

$$S(t|\theta) = -\frac{\Gamma(a+b)d^c 2\pi}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \hat{\beta}^{c-1} e^{-d\hat{\beta}} e^{-a\hat{u}} (1-e^{-\hat{u}})^{b-1} \frac{\hat{\beta}(1-e^{-\hat{u}})}{\sqrt{(b-1)(c-1)}} e^{\frac{\hat{u}}{2}} \frac{1}{\hat{u}} \ln[1-(1-e^{-\hat{u}})e^{-\hat{\beta}t}]$$

$$S(t|\theta) = -\frac{2\pi\Gamma(a+b)d^c}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \frac{\hat{\beta}^c(1-e^{-\hat{u}})^b}{\sqrt{(b-1)(c-1)}} \exp \left\{ - \left[\left(a - \frac{1}{2} \right) \hat{u} + d\hat{\beta} \right] \right\} \frac{1}{\hat{u}} \ln[1-(1-e^{-\hat{u}})e^{-\hat{\beta}t}]$$

$$\hat{u} = \ln \left[\frac{a+b-1}{2} \right] \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \frac{c-1}{d}, \quad \text{de modo que } a+b > 1 \quad \text{e} \quad c > 1.$$

Portando, utilizando $S(t|\theta)$, é possível encontrar valores de (a, b, c, d) através dos quatro valores (t_1, t_2, t_3, t_4) , correspondentes aos quatro percentis 10%, 25%, 50% e 75%.

Procedimento para determinação dos hiperparâmetros a, b, c e d com base em informações prévias:

- Definem-se diferentes probabilidades para $S(t)$ e identificam-se os valores correspondentes de t ;
- Caso os quatro hiperparâmetros a, b, c, d sejam desconhecidos, será necessário fornecer quatro pares $(t, S(t))$ distintos;
- Se apenas a e b forem considerados desconhecidos c e d forem previamente definidos, bastam dois pares distintos $(t, S(t))$.

Simulação para a distribuição Exponencial-Logarítmica:

Fixam-se os valores dos parâmetros p e β ;

Considerar $S(t_1) = 0.90$, $S(t_2) = 0.75$, $S(t_3) = 0.50$ e $S(t_4) = 0.25$

Com base nesses valores, determinam-se os tempos t_i , $i = 1, 2, 3, 4$ através de $S(t_i)$, $S(t_i) = S_i$:

$$t_i = \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{1-p}{1-p^{S_i}} \right].$$

É importante destacar que, na prática, não se terá total certeza sobre os valores de t_i . No entanto, presume-se que a incerteza associada a essa estimativa seja pequena. Assim, neste trabalho, foi considerado um erro de 10% em relação ao valor verdadeiro de t_i , obtido por meio da equação correspondente.

Haverá, portanto, um sistema não-linear composto por quatro equações e quatro incógnitas (a, b, c, d), cujas equações são dadas por:

$$S(t|\theta) = -\frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(a+b)d^c}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \frac{\hat{\beta}^c(1-e^{-\hat{u}})^b}{\sqrt{(b-1)(c-1)}} \exp \left\{ - \left[\left(a - \frac{1}{2} \right) \hat{u} + d\hat{\beta} \right] \right\} \\ \frac{1}{\hat{u}} \ln[1 - (1 - e^{-\hat{u}})e^{-\hat{\beta}t}],$$

Onde $\hat{u} = \ln \left[\frac{a+b-1}{2} \right]$ e $\beta = \frac{c-1}{d}$, de modo que $a + b > 1$ e $c > 1$.

Os Valores achados estão presentes na dissertação da Livia, $a = 49,54704$, $b = 48,33053$, $c = 34,52137$ e $d = 18,44905$; ou seja, para a simulação foram utilizadas as distribuições a priori informativas Beta(49.54704,48.33053) para o parâmetro \hat{p} e Gama(34.52137,18.44905) para o parâmetro $\hat{\beta}$.

4.5 Priori Não Informativa

Priori não informativa é utilizada quando se deseja que a inferência Bayesiana seja guiada predominantemente pelos dados, assumindo-se o mínimo possível de conhecimento prévio sobre os parâmetros do modelo. Essa abordagem é particularmente útil em contextos em que não se dispõe de informações prévias confiáveis, ou quando se deseja realizar uma análise comparativa com o uso de priori informativa.

Neste trabalho adotou-se uma priori não informativa do tipo produto, assumindo independência a priori entre os parâmetros p e β :

$$\pi(p, \beta) = \pi(p) \pi(\beta), \quad p \sim \text{Beta}(c, d), \quad \beta \sim \text{Gama}(a, b),$$

Para p , a escolha é uma distribuição Beta, pois seu suporte é exatamente o intervalo (0,1) e a mesma é muito utilizada para probabilidades em abordagem Bayesiana.

Para β , a distribuição Gama é a opção usual em modelos de sobrevivência para parâmetros de escala positivos, com suporte $(0, \infty)$ e forma matemática conveniente para cálculos Bayesianos.

Os hiper parâmetros a, b, c, d tem o mesmo valor de 0,05, nos dois casos, a ideia foi ter priori com fraca informação prévia, de modo que os dados dominem a inferência.

Para $\beta \sim \text{Gama}(a, b)$, com $a = b = 0,05$, temos:

$$E[\beta] = \frac{a}{b} = 1, \quad \text{Var}(\beta) = \frac{a}{b^2} = \frac{0,05}{0,05^2} = 20.$$

Ou seja, a priori admite qualquer ordem de grandeza para β com a variância muito alta. Isso significa que, antes de observar os dados, praticamente não há informação sobre o valor de β .

Para $p \sim \text{Beta}(c, d)$ com $c = d = 0,05$, temos:

$$E[p] = \frac{c}{c+d} = 0,5, \quad \text{Var}(p) = \frac{cd}{(c+d)^2(c+d+1)} \approx 0,22.$$

Logo, a priori é simétrica em torno de 0,5, não favorecendo nenhum valor específico de p . A variância é alta para um parâmetro no intervalo (0,1) e o tamanho amostral efetivo da priori é $c + d = 0,1$, muito pequeno em relação ao tamanho das amostras reais. Portanto, essa escolha gera uma priori fraca, que exerce pouca influência sobre a posteriori.

5 Método de Monte Carlo via cadeias de Markov

Os Métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) são técnicas de simulação iterativa que utilizam cadeias de Markov para resolver problemas de inferência mais complexos. No contexto bayesiano, seu propósito é gerar amostras da distribuição a posteriori, permitindo obter estimativas que reflitam suas principais características. Neste trabalho, será empregado o algoritmo MCMC conhecido como Metropolis-Hastings.

De forma geral, esse método constrói um passeio aleatório no espaço dos parâmetros p e β , o qual, sob certas condições, converge para uma distribuição estacionária que coincide com a distribuição a posteriori de interesse.

5.1 Algoritmo Metropolis Hastings

O algoritmo Metropolis-Hastings está entre os procedimentos mais difundidos em amostragem MCMC. Sua versão original foi apresentada por Metropolis et al. (1953), considerando distribuições propostas simétricas, e posteriormente generalizada por Hastings (1970) para o caso não simétrico.

Por meio desse algoritmo, podemos gerar uma amostra dos parâmetros p e β a partir da distribuição a posteriori conjunta. No presente trabalho, o esquema MCMC adotado segue o algoritmo de Metropolis-Hastings, que pode ser descrito, de forma resumida, pelos seguintes passos.

- Escolha valores iniciais p_0 e β_0 ;
- No passo $i + 1$, é dado um novo valor p_{i+1} condicionado ao atual p_i da distribuição Beta $B\left(\frac{bp_i}{1-p_i}, b\right)$;
- O candidato p_{i+1} será aceito com probabilidade dada pelo algoritmo de Metropolis Hastings:

$$\alpha(p_i, p_{i+1}) = \min \left[1, \frac{B(bp_i/(1-p_i), b)p(p_{i+1}, \beta_i|x)}{B(bp_{i+1}/(1-p_{i+1}), b)p(p_i, \beta_i|x)} \right]$$

- Amostre o valor novo β_{i+1} da distribuição Gama $G\left(\frac{\beta_i}{d}, d\right)$;
- O candidato β_{i+1} também será aceito com probabilidade dada pelo algoritmo:

$$\alpha(\beta_i, \beta_{i+1}) = \min \left[1, \frac{G(\beta_i/d, d)p(p_{i+1}, \beta_{i+1}|x)}{G(\beta_{i+1}/d, d)p(p_{i+1}, \beta_i|x)} \right]$$

6 Simulação

Na etapa de simulação primeiramente foi desenvolvido um script em R para construir automaticamente a base de simulações utilizada em todos os estudos posteriores. O programa carrega os pacotes para manipulação de dados e arquivos Excel, fixa os parâmetros verdadeiros da distribuição ($p = 0,5, \beta = 2$), define os tamanhos amostrais $n \in \{10,20,30\}$, o número de réplicas $B = 1000$ por cenário e os níveis de censura considerados (30% e 90%).

Posteriormente os dados foram aplicados nos métodos inferência clássica via máxima verossimilhança (EMV) da distribuição exponencial-logarítmica sob diferentes esquemas de censura, assim como métodos de inferência bayesiana com priori informativa e não informativa.

6.1 EMV

Tabela 1: Resultados EMV- Sem Censura

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
0%	10	0,6662	0,3910	2,3176	1,0294	0,1802	1,1585
	20	0,5214	0,3439	2,0281	0,7884	0,1184	0,6205
	30	0,5213	0,3161	1,9904	0,5396	0,1002	0,2905

Tabela 2: Resultados EMV- Censura Tipo I

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
30%	10	0,4736	0,4244	1,9641	1,3772	0,1804	1,8934
	20	0,5064	0,4030	1,8353	1,0092	0,1621	1,0433
	30	0,4464	0,3677	1,7966	0,8815	0,1378	0,8165
90%	10	0,6588	0,4274	1,6605	2,4506	0,2075	6,1078
	20	0,5930	0,4595	1,3889	1,8483	0,2193	3,7818
	30	0,3439	0,4535	0,8411	1,4433	0,2295	3,4204

Tabela 3: Resultados EMV- Censura Tipo II

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
30%	10	0,6293	0,4225	2,4287	1,7237	0,1947	3,1466
	20	0,6773	0,3902	2,2673	1,0641	0,1833	1,2013
	30	0,6144	0,3743	1,9600	0,9150	0,1399	0,8365
90%	10	0,9973	0,0019	23,3873	201,1825	0,2473	40850,8702
	20	0,9539	0,1752	4,9384	6,6480	0,2366	52,7424
	30	0,7736	0,4002	4,5506	4,0821	0,2344	23,1081

De forma geral, os resultados da Tabela mostram que o EMV se comporta bem nos cenários sem censura e com censura moderada, mas se deteriora fortemente quando a censura é muito intensa, sobretudo do tipo II. Nos casos sem censura, à medida que o tamanho amostral aumenta de $n = 10$ para $n = 30$, as médias de \hat{p} e $\hat{\beta}$ aproximam-se dos valores verdadeiros ($p = 0,5$ e $\beta = 2$), com redução simultânea dos desvios-padrão e do EQM, indicando estimadores mais precisos e com menor viés.

Nos cenários de censura tipo I e tipo II com 30%, observa-se apenas um leve aumento na variabilidade e no EQM em comparação ao caso sem censura, sugerindo que uma censura moderada ainda preserva boa parte da informação sobre os parâmetros. Em contraste, a censura severa de 90% (principalmente do tipo II) produz estimativas fortemente enviesadas e extremamente instáveis, evidenciadas pelos altos desvios-padrão e pelos valores muito elevados de EQM, em especial para $\hat{\beta}$. Esses resultados indicam que o EMV para a

distribuição se torna pouco confiável quando a proporção de dados censurados é muito alta.

6.2 Simulação priori informativa

Tabela 4: Resultados Priori informativa – Sem Censura

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
0%	10	0,5002	2,0570	0,1457	0,5158	0,0013	0,1173
	20	0,4992	2,0394	0,1428	0,4258	0,0019	0,1182
	30	0,5066	2,0351	0,1404	0,3745	0,0019	0,0841

Tabela 5: Resultados Priori informativa – Censura Tipo I

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
30%	10	0,5016	2,0034	0,1452	0,5437	0,0012	0,1141
	20	0,4997	2,0315	0,1430	0,4715	0,0014	0,1191
	30	0,5010	2,0012	0,1423	0,4225	0,0015	0,0931
90%	10	0,5012	1,9936	0,1464	0,6636	0,0010	0,0471
	20	0,5032	1,9707	0,1454	0,6287	0,0011	0,0702
	30	0,5014	1,9935	0,1441	0,6079	0,0014	0,0891

Tabela 6: Resultados Priori informativa – Censura Tipo II

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
30%	10	0,4987	2,0441	0,1453	0,5563	0,0012	0,1121
	20	0,5029	2,0284	0,1433	0,4739	0,0013	0,0984
	30	0,5027	2,0335	0,1424	0,4299	0,0016	0,0944
90%	10	0,5003	2,0037	0,1468	0,6709	0,0009	0,0407
	20	0,4997	2,0047	0,1474	0,6686	0,0009	0,0417
	30	0,4985	2,0211	0,1461	0,6437	0,0011	0,0641

Para o método Bayesiano com priori informativa, observa-se que, em todos os cenários considerados, as médias das estimativas de \hat{p} e $\hat{\beta}$ ficam muito próximas dos valores verdadeiros utilizados na simulação ($p = 0,5$ e $\beta = 2$). Mesmo sob níveis elevados de censura (30% e 90%, tipos I e II), o viés médio é praticamente nulo, e os EQM de p permanecem em torno de 10^{-3} , indicando

excelente recuperação do parâmetro de forma. Para $\hat{\beta}$, os EQM variam entre aproximadamente 0,04 e 0,12, com leve redução à medida que n aumenta em vários cenários.

Nota-se ainda que os desvios-padrão de p mudam muito pouco com o tamanho amostral e com a censura (em torno de 0,14–0,15), evidenciando o forte peso da priori informativa sobre esse parâmetro. No caso de $\hat{\beta}$, há uma diminuição mais clara da variabilidade quando n aumenta, mas a influência da priori continua relevante. Em resumo, quando a priori informativa está bem calibrada com o modelo gerador, o método Bayesiano produz estimativas pouco viesadas e bastante estáveis, mostrando-se robusto mesmo em situações de alta censura.

6.3 Simulação priori não informativa

Tabela 7: Resultados Priori não informativa – Sem Censura

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
0%	10	0,5262	1,9745	0,2756	0,7892	0,0356	0,4399
	20	0,5441	1,9793	0,2578	0,5980	0,0387	0,2969
	30	0,5853	2,0254	0,2443	0,5040	0,0404	0,1865

Tabela 8: Resultados Priori não informativa – Censura Tipo I

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
30%	10	0,4787	1,7295	0,2835	0,8546	0,0376	0,5865
	20	0,4974	1,8424	0,2739	0,7231	0,0385	0,4567
	30	0,5086	1,8331	0,2633	0,6316	0,0404	0,3500
90%	10	0,4873	1,2638	0,2930	1,1087	0,0327	1,1635
	20	0,4896	1,3468	0,2928	1,0281	0,0337	0,9820
	30	0,4773	1,4932	0,2914	1,0162	0,0298	0,8150

Tabela 9: Resultados Priori não informativa – Censura Tipo II

cens	n	\hat{p}	$\hat{\beta}$	Dp \hat{p}	Dp $\hat{\beta}$	EQM \hat{p}	EQM $\hat{\beta}$
30%	10	0,5092	1,9047	0,2862	0,9372	0,0333	0,5094
	20	0,5131	1,8708	0,2742	0,7419	0,0356	0,3378
	30	0,5364	1,9320	0,2649	0,6559	0,0371	0,2821
90%	10	0,4629	1,5053	0,2921	1,3158	0,0367	0,6441
	20	0,4530	1,4730	0,2933	1,3097	0,0366	0,6620
	30	0,4574	1,6362	0,2881	1,2505	0,0361	0,5833

Para o método Bayesiano com priori não informativa, \hat{p} e $\hat{\beta}$ permanecem razoavelmente próximas dos valores verdadeiros $p = 0,5$, $\beta = 2$ quando não há censura ou quando a censura é moderada (30% nos tipos I e II). Nesses casos, observa-se apenas um leve viés para $\hat{\beta}$ com tendência a superestimar o valor verdadeiro) e uma subestimação moderada de $\hat{\beta}$, enquanto os EQM diminuem à medida que o tamanho amostral aumenta, mostrando ganho de precisão com n .

Em contrapartida, sob censura severa (90%), o método torna-se bem mais instável, $\hat{\beta}$ passa a ser fortemente o EQM aumenta de forma significativa, indicando perda acentuada de qualidade das estimativas. Além disso, os desvios-padrão de permanecem altos em todos os cenários, refletindo que, na ausência de informação prévia forte, a priori não informativa se comporta de forma semelhante ao EMV, com maior sensibilidade ao tamanho amostral e ao grau de censura, especialmente para níveis extremos.

7 Aplicação

Nesta seção é apresentada a aplicação da distribuição EL a conjuntos de dados reais, com o objetivo de comparar o desempenho do estimador de máxima verossimilhança (EMV) e das abordagens Bayesianas com priori não-informativa e informativa.

Foram considerados dois tipos de conjunto de dados, representativos de contextos distintos:

Neste trabalho foram analisados dois conjuntos de dados com naturezas distintas, permitindo avaliar o desempenho dos métodos clássicos e bayesianos de inferência sob diferentes cenários de censura.

- dados de confiabilidade, formados por tempos de vida de componentes industriais (peças), sem censura.
- dados de sobrevivência, constituídos por tempos até ocorrência de evento em pacientes com leucemia, sujeitos a censura à direita.

Dados de Teste de Peças Eletrônicas - Sem Censura

0.96, 4.15, 0.19, 0.78, 8.01, 31.75, 7.35, 6.50, 8.27, 33.91, 32.52, 3.16, 4.85, 2.78, 4.67, 1.31, 12.06, 36.71, 72.89.

Esses valores representam durações até a falha de componentes submetidos a testes laboratoriais controlados, cujo objetivo é estimar a confiabilidade dos equipamentos e identificar padrões de risco ao longo do tempo. Por não haver censura, este conjunto possibilita avaliar diretamente o ajuste de modelos paramétricos de sobrevivência e comparar o desempenho entre estimativas obtidas via Máxima Verossimilhança e métodos bayesianos.

Dados de tratamento de Leucemia – Aplicada censura Tipo II

1, 1, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 24, 26, 29, 31, 42, 45, 50, 57, 60, 71, 85, 91.

Nesse experimento clínico, o estudo é interrompido após um número predeterminado de falhas observadas, de modo que parte dos indivíduos tem seu tempo de sobrevivência apenas parcialmente conhecido. Esse tipo de dado é extremamente comum em estudos biomédicos, onde o acompanhamento possui limites éticos e operacionais.

A presença ou ausência de censura é essencial para a estatística de sobrevivência, pois afeta diretamente a forma como a função de verossimilhança é construída, a precisão das estimativas e a interpretação do comportamento do risco. Assim, trabalhar com dois cenários contrastantes — um conjunto totalmente observado e outro censurado reforça a robustez da metodologia proposta e evidencia a aplicabilidade dos modelos de sobrevivência tanto em contextos industriais quanto clínicos.

7.1 Priori informativa – Aplicação em dados reais

A especificação das prioris informativas para os dados reais de peças (sem censura) e leucemia (censura à direita) foi feita a partir dos próprios dados, por meio de uma abordagem empírico-bayesiana baseada na correspondência de momentos. Em particular, as estimativas de máxima verossimilhança (\hat{p}_{EMV} e $\hat{\beta}_{EMV}$) obtidas para cada conjunto de dados são utilizadas como valores centrais da informação prévia.

É importante destacar que não houve elicitacão subjetiva de especialistas: os hiperparâmetros foram construídos diretamente a partir das estimativas clássicas, de forma automática, de modo que as prioris reflitam razoavelmente o comportamento observado nas amostras, mas mantendo variâncias suficientemente grandes para que a distribuição a posteriori continue sendo fortemente influenciada pela verossimilhança.

Mantém-se a estrutura Beta–Gama já adotada para a distribuição Exponencial–Logarítmica: o parâmetro p , cujo suporte é o intervalo $(0,1)$, recebe uma priori do tipo

$$p \sim \text{Beta}(a_p, b_p),$$

enquanto o parâmetro $\beta > 0$ recebe uma priori do tipo

$$\beta \sim \text{Gama}(\alpha_\beta, \lambda_\beta).$$

Na distribuição $\text{Beta}(a_p, b_p)$, a média é dada por

$$\mathbb{E}[p] = \frac{a_p}{a_p + b_p}.$$

Neste trabalho, fixou-se um valor m_0 para a soma $a_p + b_p$, adotando-se $m_0 = 10$. Assim,

$$a_p + b_p = 10.$$

Para que a média da priori coincida com a estimativa de máxima verossimilhança \hat{p}_{EMV} , impõe-se

$$\frac{a_p}{a_p + b_p} = \hat{p}_{EMV} \Rightarrow a_p = 10 \hat{p}_{EMV}, b_p = 10 (1 - \hat{p}_{EMV}).$$

Dessa forma, os hiperparâmetros da priori de p tornam-se funções diretas dos estimadores clássicos. O valor fixado de m_0 controla o peso relativo da informação prévia: em uma amostra de tamanho n , essa “amostra fictícia” representa aproximadamente a fração

$$\frac{m_0}{m_0 + n}$$

do total de informação. Para os dados de peças, com $n = 19$, essa fração é $10/(10 + 19)$; para os dados de leucemia, com $n = 30$, é $10/(10 + 30)$. Em ambos os casos, a priori acrescenta uma quantidade moderada de informação, suficiente para estabilizar as estimativas sem dominar a contribuição da verossimilhança.

Para o parâmetro β , utiliza-se a distribuição Gama($\alpha_\beta, \lambda_\beta$), cuja média é

$$\mathbb{E}[\beta] = \frac{\alpha_\beta}{\lambda_\beta}.$$

Foi fixado um valor comum $\alpha_0 = 5$ para o parâmetro de forma (*shape*), refletindo uma quantidade moderada de informação prévia. Em seguida, define-se o parâmetro de taxa de modo que a média coincida com a estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\beta}_{EMV}$:

$$\frac{\alpha_0}{\lambda_\beta} = \hat{\beta}_{EMV} \Rightarrow \lambda_\beta = \frac{5}{\hat{\beta}_{EMV}}.$$

Assim, a priori de β é centrada em $\hat{\beta}_{EMV}$, e o valor de α_0 controla seu grau de concentração: quanto maior α_0 , mais estreita a priori em torno da média. O valor $\alpha_0 = 5$ produz variâncias ainda relativamente amplas, permitindo que a posteriori seja adequadamente moldada pelos dados observados, sobretudo em cenários com censura, nos quais a informação efetiva da verossimilhança é reduzida.

Aplicando essa metodologia empírico-bayesiana a cada conjunto de dados, obtêm-se os seguintes hiperparâmetros numéricos. Para os dados de peças, cuja estimativa clássica é aproximadamente $\hat{p}_{EMV} \approx 0,0982$, a priori Beta resulta em

$$p_{peças} \sim \text{Beta}(0,98, 9,02),$$

e, para $\hat{\beta}_{EMV} \approx 0,03934$, a priori Gama correspondente é

$$\beta_{peças} \sim \text{Gama}(5, 127,10).$$

Para os dados de leucemia, com $\hat{p}_{EMV} \approx 0,1393$, obtém-se

$$p_{leucemia} \sim \text{Beta}(1,39, 8,61),$$

e, para $\hat{\beta}_{EMV} \approx 0,01811$, a priori Gama específica é

$$\beta_{leucemia} \sim \text{Gama}(5, 276,07).$$

7.2 Aplicação em dados não censurados

Tabela 10: Resultados para conjunto de dados Peças Sem Censura - EMV

Parâmetro	Estimativa	Dp	IC 95% INF	IC 95% SUP
\hat{p}	0,0981	0,1229	-0,1427	0,3390
$\hat{\beta}$	0,0393	0,0186	0,0027	0,0759

Tabela 11: Resultados para conjunto de dados Peças Sem Censura – Priori Não Informativa

Parâmetro	Estimativa	Dp	IC 95% INF	IC 95% SUP
\hat{p}	0,2949	0,2833	0,0160	0,9720
$\hat{\beta}$	0,0467	0,0186	0,0166	0,0847

Tabela 12: Resultados para conjunto de dados Peças Sem Censura – Priori Informativa

Parâmetro	Estimativa	Dp	IC 95% INF	IC 95% SUP
\hat{p}	0,10042762	0,07252919	0,01458298	0,29451939
$\hat{\beta}$	0,03758287	0,01122612	0,01813946	0,06124994

Nos dados sem censura, o método de máxima verossimilhança (EMV) mostrou limitações importantes, o intervalo de confiança de \hat{p} incluiu valores negativos, algo incompatível com o suporte do parâmetro, indicando baixa precisão e instabilidade do estimador clássico. Em contraste, os métodos Bayesianos produziram estimativas sempre dentro do domínio válido, com menor variabilidade. A priori não informativa apresentou desempenho intermediário com desvio padrão baixo porém intervalos de confiança altos, enquanto a priori informativa forneceu os intervalos mais estreitos e estimativas mais precisas, evidenciando superioridade em relação ao EMV.

7.2.1 Critérios de ajuste para os dados de peças

Tabela 13: Critérios de ajuste de dados Peças Sem Censura -EMV

BIC
141,871749

Tabela 14: Critérios de ajuste de dados Peças Sem Censura – Priori não Informativa

DIC
138,808331

Tabela 15: Critérios de ajuste de dados Peças Sem Censura – Priori Informativa

DIC
138,15476

O critério BIC indicou o ajuste clássico como referência, enquanto o DIC revelou melhor desempenho dos modelos Bayesianos. Entre eles, a priori informativa apresentou o menor valor de DIC, sendo o método de melhor ajuste global para os dados de peças sem censura. Embora as diferenças sejam pequenas, o modelo Bayesiano com priori informativa se destacou como o mais adequado

7.2.2 P-valor KS dos dados de Peças

Tabela 16: Kolmogorov Smirnov Peças

P VALOR
0,813670091

O teste de Kolmogorov para o ajuste clássico apresentou p-valor elevado $p > 0,05$, indicando que não há evidências para rejeitar o modelo EL sob o EMV. Assim, o modelo clássico é compatível com os dados, reforçando a validade da comparação com os métodos Bayesianos.

7.3 Aplicação em dados censurados

Tabela 17: Resultados para conjunto de dados Leucemia com Censura - EMV

Parâmetro	Estimativa	Dp	IC 95% INF	IC 95% SUP
\hat{p}	0,13934787	0,16190124	-0,1779786	0,45667431
$\hat{\beta}$	0,01811141	0,00885368	0,00075821	0,03546462

Tabela 18: Resultados para conjunto de dados Leucemia com Censura – Priori Não Informativa

Parâmetro	Estimativa	Dp	IC 95% INF	IC 95% SUP
\hat{p}	0,32827731	0,2661486	0,02066297	0,93901898
$\hat{\beta}$	0,02176592	0,00897531	0,00639376	0,04067935

Tabela 19: Resultados para conjunto de dados Leucemia Com Censura – Priori Informativa

Parâmetro	Estimativa	Dp	IC 95% INF	IC 95% SUP
\hat{p}	0,1505205	0,09181722	0,03029525	0,38617427
$\hat{\beta}$	0,01796154	0,00489432	0,00969323	0,02814266

Nos dados com censura à direita, o método clássico (EMV) novamente apresentou limitações, pois o intervalo de confiança do parâmetro p abrange valores negativos, o que evidencia instabilidade do estimador em situações de perda de informação. Os métodos Bayesianos, por outro lado, mantiveram estimativas dentro do suporte correto e apresentaram maior precisão. A priori não informativa forneceu resultados mais estáveis que o EMV, mas foi a priori informativa que se destacou com as menores incertezas e intervalos de credibilidade mais estreitos. Assim como se espera teoricamente, na presença de censura a abordagem Bayesiana com priori informativa exibiu desempenho superior, beneficiando-se da incorporação de conhecimento prévio para compensar a redução de informação nos dados observados.

7.3.1 Critérios de ajuste para os dados de Leucemia

Tabela 20: Critérios de ajuste de dados Leucemia Com Censura -EMV

BIC
224,872473

Tabela 21: Critérios de ajuste de dados Leucemia Com Censura – Priori não Informativa

DIC
221,256051

Tabela 22: Critérios de ajuste de Leucemia Com Censura – Priori Informativa

DIC
220,2918

A comparação entre BIC e DIC mostra que os modelos Bayesianos apresentam melhor ajuste global aos dados censurados. O DIC da priori não informativa já é inferior ao BIC clássico, indicando desempenho superior ao EMV.

Entretanto, o menor valor foi obtido com a priori informativa, evidenciando que, diante da censura e conseqüente perda de informação, a incorporação de conhecimento prévio melhora significativamente o ajuste do modelo. Assim, o método Bayesiano com priori informativa se destaca como o mais adequado para os dados censurados.

7.3.2 P-valor KS do teste dados de Leucemia

Tabela 23: Kolmogorov Smirnov Leucemia

P VALOR
0,26502503

O teste de Kolmogorov aplicado ao ajuste clássico (EMV) resultou em p-valor elevado 0,26, indicando que não há evidências para rejeitar o modelo ajustado. Isso confirma que a distribuição Exponencial-Logarítmica é compatível com os tempos de leucemia e fornece uma base válida para a comparação com os métodos Bayesianos.

7.3.3 Kaplan-Meier dados de Leucemia

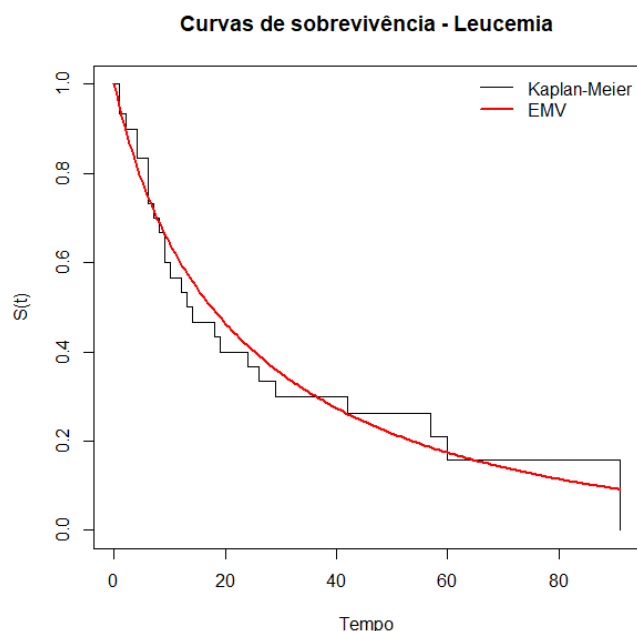


Figura 3: Kaplan Meier

Nos dados referentes ao tratamento de leucemia, parte dos indivíduos não apresentou o evento de interesse durante o período de observação, caracterizando um cenário de censura à direita. Para tratar adequadamente essa

estrutura, aplicou-se o estimador de Kaplan–Meier, que permite estimar a função de sobrevivência considerando tanto os tempos observados de falha quanto os tempos censurados. A partir dos tempos de sobrevivência e do indicador de censura, foi ajustada a curva empírica de sobrevivência, representada graficamente por uma função em degraus, na qual as quedas ocorrem exclusivamente nos instantes de falha observados.

Em seguida, a curva de Kaplan–Meier foi comparada à função de sobrevivência teórica da distribuição Exponencial–Logarítmica ajustada via Máxima Verossimilhança. Essa comparação permite avaliar visualmente a aderência do modelo paramétrico aos dados reais. Observa-se que a curva ajustada acompanha adequadamente o comportamento geral da curva empírica, sobretudo na região inicial, onde há maior número de indivíduos em risco. Pequenas diferenças tornam-se mais evidentes nos tempos maiores, o que é esperado devido à maior variabilidade associada aos poucos indivíduos remanescentes e à presença de censuras.

Assim, a aplicação do estimador de Kaplan–Meier, aliada à comparação com o modelo Exponencial–Logarítmico, fornece evidências de que esse modelo é apropriado para descrever os tempos de sobrevivência do conjunto de dados de leucemia, justificando sua utilização nas análises inferenciais subsequentes, tanto no contexto clássico quanto no bayesiano.

8 Conclusões

Os resultados obtidos ao longo deste trabalho evidenciam que o desempenho dos métodos de inferência para a distribuição Exponencial–Logarítmica depende fortemente do nível de censura e do tipo de abordagem adotada. Nas simulações, o estimador de máxima verossimilhança apresentou bom comportamento apenas nos cenários sem censura ou com censura moderada, com redução de viés e do EQM à medida que o tamanho amostral aumenta. Em situações de censura severa, especialmente do tipo II, o EMV tornou-se claramente instável, produzindo estimativas afastadas dos valores verdadeiros, desvios-padrão elevados e EQM muito altos, o que evidencia forte sensibilidade à perda de informação.

A abordagem Bayesiana com priori informativa mostrou desempenho consistentemente superior em praticamente todos os cenários simulados. Quando a priori é bem calibrada em relação ao processo gerador, as estimativas de \hat{p} e $\hat{\beta}$ permanecem próximas dos valores verdadeiros, mesmo sob altos níveis de censura, com variabilidade reduzida e excelente precisão. A priori não informativa ocupou uma posição intermediária: apresentou resultados adequados na ausência de censura ou com censura moderada, mas perdeu estabilidade e aumentou a dispersão das estimativas em cenários de censura mais intensa, refletindo a maior dependência exclusiva dos dados quando a informação observada é limitada.

Na aplicação a dados reais, verificou-se um padrão compatível com o observado nas simulações. Para os dados de peças, sem censura, todas as abordagens forneceram ajustes aceitáveis, mas o EMV apresentou intervalos de confiança para p que chegaram a incluir valores negativos, o que é incompatível com o suporte do parâmetro e indica limitação do método clássico em pequenas amostras.

Os modelos Bayesianos, por sua vez, produziram estimativas dentro do domínio correto, com menor incerteza, e o critério de informação DIC apontou leve preferência pelo modelo com priori informativa em relação à priori não informativa e ao EMV. No caso dos dados de leucemia, sujeitos à censura à direita, essas diferenças tornaram-se mais nítidas: embora o teste de Kolmogorov não rejeite o ajuste clássico, o EMV exibiu grande variabilidade e

novamente intervalos de confiança para p que ultrapassam o suporte, enquanto os modelos Bayesianos – em especial aquele com priori informativa calibrada para os dados reais apresentaram estimativas coerentes, estáveis e com intervalos de credibilidade estreitos, além de menores valores de DIC em comparação ao EMV e à priori não informativa.

De modo geral, conclui-se que a inferência Bayesiana, sobretudo quando utiliza informação prévia bem especificada e compatível com o fenômeno em estudo, oferece maior precisão, robustez e coerência inferencial do que o EMV e do que a versão Bayesiana com priori não informativa. Em particular, na presença de censura e amostras pequenas, a incorporação de conhecimento prévio por meio de priori informativas mostrou-se fundamental para melhorar o ajuste e a estabilidade das estimativas na distribuição Exponencial Logarítmica, configurando essa abordagem como a alternativa mais adequada para aplicações práticas em contextos reais com elevado grau de censura.

Referências

ACHCAR, J.; MOALA, F.; BOLETA, J. Generalized exponential distribution: A bayesian approach using mcmc methods. **International Journal of Industrial Engineering Computations**, v. 6, n. 1, p. 1–14, 2015.

COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. **Análise de Sobrevivência Aplicada**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

LAWLESS, J. F. **Statistical models and methods for lifetime data**. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2011.

MOALA, F. A.; GARCIA, L. M. A bayesian analysis for the parameters of the exponential-logarithmic distribution. **Quality Engineering**, v. 25, n. 3, p. 282–291, 2013.

SHIROMA, A. J. **Análise bayesiana da distribuição exponencial-logarítmica com presença de Censura**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Estatística) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente, 2018.

SHIROMA, A. J.; MOALA, F. A.; OIKAWA, S. M. Distribuição exponencial logarítmica com presença de censura do tipo 1 e tipo 2. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 14, p. 269-290, 2019.

Disponível em:
<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v14a21-distribuicao-exponencial-logaritmica-com.pdf>. Acesso em: 31 out. 2024.

TAHMASBI, R.; REZAEI, S. A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 52, n. 8, p. 3889–3901, 2008.

ZELLNER, A. Maximal data information prior distributions. **New developments in the applications of Bayesian methods**, v. 1, n. 1, p. 211-232, 1977.

Apêndice A1:

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}, \quad s, z \in \mathbb{C}.$$

Usando a identidade de Euler–Gama:

$$\frac{1}{k^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-kt} dt, \quad \Re(s) > 0.$$

$$\text{Li}_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (z e^{-t})^k \right] dt.$$

Para $|z e^{-t}| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z e^{-t})^k = \frac{z e^{-t}}{1 - z e^{-t}} = \frac{1}{e^t/z - 1}.$$

Aplicando:

$$\boxed{\text{Li}_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t/z - 1} dt} \quad (\Re(s) > 0, |z| \leq 1, z \neq 1).$$

Apêndice A2:

$$I(p, \beta) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{bmatrix}$$

$$I_{1,1} = -\frac{r}{(1-p)^2} + \frac{r}{(p)^2 \ln p} + \frac{r}{(p \ln p)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i e^{-2\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(1 - \delta_i) e^{-\beta x_i}}{\log(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) (1 - (1-p)e^{-\beta x_i})}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \left((1 - \delta_i) \left(-\frac{(e^{-\beta x_i})^2}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})^2 \ln(p)} \right. \right. \\
& - \frac{2e^{-\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) \ln(p)^2 p} + \frac{2 \ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})}{\ln(p)^3 p^2} \\
& \left. \left. + \frac{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})}{\ln(p)^2 p^2} \right) \ln(p) \right) \\
I_{11} = & -\frac{r}{(1-p)^2} + \frac{r}{p^2 \ln(p)} + \frac{r}{p^2 \ln(p)^2} - \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\delta_i (e^{-\beta x_i})^2}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})^2} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \left((1 - \delta_i) \left(-\frac{(e^{-\beta x_i})^2}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})^2 \ln(p)} \right. \right. \\
& - \frac{2e^{-\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) \ln(p)^2 p} + \frac{2 \ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})}{\ln(p)^3 p^2} \\
& \left. \left. + \frac{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})}{\ln(p)^2 p^2} \right) \ln(p) \right) \\
& - \frac{(1 - \delta_i) \left(\frac{e^{-\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) \ln(p)} - \frac{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})}{\ln(p)^2 p} \right) \ln(p) e^{-\beta x_i}}{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})^2 (1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \\
& + \frac{(1 - \delta_i) \left(\frac{e^{-\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) \ln(p)} - \frac{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})}{\ln(p)^2 p} \right)}{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) p} \\
I_{12} = I_{21} = & - \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\delta_i x_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} - \frac{\delta_i (e^{-\beta x_i})^2 (1-p) x_i}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})^2} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \left((1 - \delta_i) \left(-\frac{x_i e^{-\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) \ln(p)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(e^{-\beta x_i} \right)^2 (1-p)x_i}{\left(1 - (1-p)e^{-\beta x_i} \right)^2 \ln(p)} - \frac{(1-p)x_i e^{-\beta x_i}}{\left(1 - (1-p)e^{-\beta x_i} \right) \ln(p)^2 p} \Bigg) \ln(p) \Bigg) \\
& - \frac{1}{\ln\left(1 - (1-p)e^{-\beta x_i} \right)^2 \left(1 - (1-p)e^{-\beta x_i} \right)} \left(1 \right. \\
& \left. - \delta_i \right) \left(\frac{e^{-\beta x_i}}{\left(1 - (1-p)e^{-\beta x_i} \right) \ln(p)} - \frac{\ln\left(1 - (1-p)e^{-\beta x_i} \right)}{\ln(p)^2 p} \right) \ln(p) (1-p)x_i e^{-\beta x_i} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial p^2} \log L(p, \beta) = \\
&= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{n}{p \log(p)} - \frac{r}{1-p} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{(1-\delta_i)e^{-\beta x_i}}{\log(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) (1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= I_{21} = \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial p} \log L(p, \beta) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{n}{p \log(p)} - \frac{r}{1-p} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{(1-\delta_i)e^{-\beta x_i}}{\log(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) (1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log L(p, \beta) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{r}{\beta} - \sum_{i=1}^n \delta_i x_i - (1-p) \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i x_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} \right. \\
&\quad \left. + (1-p) \sum_{i=1}^n \frac{(1-\delta_i)x_i e^{-\beta x_i}}{\log(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) (1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \right)
\end{aligned}$$

Apêndice A3:

$$\begin{aligned} \log L(p, \beta) &= -r \ln(-\ln p) + r \ln(1-p) + r \ln(\beta) - \beta \sum_{i=1}^r x_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) \\ &\quad + (n-r) \sum_{i=1}^{n-r} \ln(\ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})) - (n-r) \ln(\ln(p)) \end{aligned}$$

As derivadas do $\log L(p, \beta)$ em relação a p e β , obtêm-se obtemos as equações de verossimilhança:

$$\frac{\partial}{\partial p} \log L(p, \beta) = -\frac{r}{1-p} - \frac{r}{p \ln(p)} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} \right) + (n-r) \left(\sum_{i=1}^{n-r} \frac{e^{-\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) \ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \right) - \frac{n-r}{p \ln(p)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log L(p, \beta) = \frac{r}{\beta} - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{(1-p)x_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p)e^{-\beta x_i}} \right) + (n-r) \left(\sum_{i=1}^{n-r} \frac{(1-p)x_i e^{-\beta x_i}}{(1 - (1-p)e^{-\beta x_i}) \ln(1 - (1-p)e^{-\beta x_i})} \right)$$

E os estimadores por meio das derivadas do $\log L(p, \beta)$ sob esquema de censura tipo II:

$$\frac{\partial}{\partial p} \log L(p, \beta) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \log L(p, \beta) = 0$$

A matriz de informação de Fisher observada para os parâmetros (p, β) com dados censurados tipo II é:

$$I(p, \beta) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
I_{11} = & -\frac{r}{(1-p)^2} + \frac{r}{p^2 \ln(p)} + \frac{r}{p^2 \ln(p)^2} - \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\left(e^{-\beta x_i} \right)^2}{\left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)^2} \right) \right) + (n \\
& - r) \left(\sum_{i=1}^{n-r} \left(-\frac{\left(e^{-\beta x_i} \right)^2}{\left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)^2 \ln \left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\left(e^{-\beta x_i} \right)^2}{\left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)^2 \ln \left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)^2} \right) \right) + \frac{n-r}{p^2 \ln(p)} + \frac{n-r}{p^2 \ln(p)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{12} = I_{21} = & - \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{x_i e^{-\beta x_i}}{1 - (1-p) e^{-\beta x_i}} - \frac{\left(e^{-\beta x_i} \right)^2 (1-p) x_i}{\left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)^2} \right) \right) + (n-r) \left(\sum_{i=1}^{n-r} \left(\right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{x_i e^{-\beta x_i}}{\left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right) \ln \left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\left(e^{-\beta x_i} \right)^2 (1-p) x_i}{\left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)^2 \ln \left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\left(e^{-\beta x_i} \right)^2 (1-p) x_i}{\left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)^2 \ln \left(1 - (1-p) e^{-\beta x_i} \right)^2} \right) \right)
\end{aligned}$$