



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Presidente Prudente

Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas

DANIEL ARANA

**MODELOS GEOIDAIIS HÍBRIDOS PARA O
ESTADO DE SÃO PAULO:
DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO**

DISSERTAÇÃO

PRESIDENTE PRUDENTE
2016

DANIEL ARANA

**MODELOS GEOIDAIIS HÍBRIDOS PARA O
ESTADO DE SÃO PAULO:
DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO**

Dissertação de mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Ciências
Cartográficas da FCT/UNESP - Câmpus de
Presidente Prudente, para a obtenção do título
de Mestre em Ciências Cartográficas.

Orientador: Prof. Paulo de Oliveira Camargo
Co-orientador: Prof. Gabriel do Nascimento
Guimarães

PRESIDENTE PRUDENTE
2016

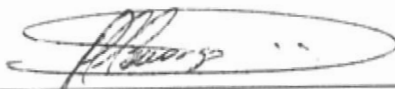
FICHA CATALOGRÁFICA

Arana, Daniel.
A679m Modelos Geoidais Híbridos para o estado de São Paulo : desenvolvimento e avaliação / Daniel Arana. - Presidente Prudente : [s.n.], 2016
167 f.

Orientador: Paulo de Oliveira Camargo
Coorientador: Gabriel do Nascimento Guimarães
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. GNSS. 2. Nivelamento. 3. Redes neurais artificiais. 4. MAPGEO2015. 5. GEOIDSP2014. 6. EGM08. I. Camargo, Paulo de Oliveira. II. Guimarães, Gabriel do Nascimento. III. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. IV. Título.

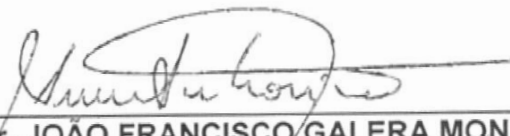
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. PAULO DE OLIVEIRA CAMARGO
(ORIENTADOR)



Prof. Dr. SERGIO FLORENCIO DE SOUZA
(UFRGS)



Prof. Dr. JOÃO FRANCISCO GALERA MONICO
(UNESP/FCT)



DANIEL ARANA

Presidente Prudente (SP), 22 de fevereiro de 2016.

Resultado: APROVADO.

DADOS CURRICULARES

Daniel Arana

Nascimento	25.08.1990 – Presidente Prudente – SP
Filiação	José Milton Arana Alba Regina Azevedo Arana
2009-2013	Graduação em Engenharia Cartográfica pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP, Campus de Presidente Prudente
2014-2016	Mestrado em Ciências Cartográficas pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP, Campus de Presidente Prudente

DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, Alba e José Milton, por todo
carinho e dedicação desde sempre e, por todo
apoio e ensinamento, fundamentais para a minha
formação.*

AGRADECIMENTOS

Um primeiro e carinhoso agradecimento a minha inspiração, ao meu professor, ao homem, ao exemplo que sigo desde o dia em que vim a esse mundo, meu orientador e conselheiro em momentos decisivos dessa graduação, meu pai, José Milton Arana, e sem dúvida à mulher que sempre me incentivou em meus estudos, que me mostrou a importância dele em minha vida, que mostrou quão longe podemos chegar quando temos garra e Deus no coração com toda sua experiência e paciência, minha mãe, Alba Regina Azevedo Arana.

O mais sincero agradecimento à toda minha família que me deu força, que esteve ao meu lado em todos os momentos, aos meus irmão de sangue André Arana e Paulo Arana, à minha estimada e amada avó Dirce de Oliveira Varela que sempre foi uma mulher exemplar, forte e muito carinhosa. Um singelo agradecimento a minha querida tia Jacira Arana que nunca escutou uma palavra, um som sequer, mas sempre foi capaz de sentir em cada abraço um “eu te amo”, deixando um grande vazio em nossos corações.

Aos companheiros e companheiras, Gabriel Gazoni, Lara Calvo, André Suckow, Juliana Ito, Thayane Castro, Gustavo Spolador, Tatiane Otiai e Anderson Ichiba, que escolhi para fazer parte desta travessia e me apoiaram incondicionalmente seja celebrando as alegrias seja sendo meu apoio nas tormentas, meu sincero obrigado

Aos meus orientadores, Paulo e Gabriel, por toda dedicação e principalmente por toda paciência durante o trabalho, além dos ensinamentos.

À UNESP, ao IBGE e ao IAG-USP pelo fornecimento dos dados utilizados nessa dissertação.

À agência de fomento CAPES pelo incentivo a esse trabalho.

A todos os professores e alunos do PPGCC e a todos os funcionários da FCT/UNESP que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização desse trabalho.

EPÍGRAFE

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton

RESUMO

A determinação da componente altimétrica por meio do GNSS (*Global Navigation Satellite System*) vem ganhando destaque e tem sido utilizada para fins de nivelamento com auxílio de modelos geoidais. Todavia, a desvantagem desse método está na qualidade dos modelos geoidais utilizados, que degradam as altitudes e limitam as aplicações do método. Com intuito de proporcionar ao nivelamento/GNSS uma melhor qualidade na transformação de altitudes, essa pesquisa objetiva o desenvolvimento de uma metodologia de hibridização dos modelos geoidais gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 para o Estado de São Paulo, proporcionando modelos mais consistentes com a tecnologia GNSS. As redes neurais RBF (*Radial Based Function*) foram utilizadas na obtenção das superfícies de distorção, baseadas nas diferenças entre as ondulações geoidais dos modelos e as ondulações obtidas por rastreamento em referências de nível. Para geração dos modelos híbridos foram considerados somente os pontos da Rede Altimétrica Fundamental Brasileira. A partir das distorções obtidas foi realizada uma filtragem, com objetivo de minimizar as inconsistências altimétricas. Os modelos geoidais híbridos HYDEGM, HYDMAPEO e HYDGEOIDSP foram gerados utilizando 319, 317 e 315 pontos, respectivamente. Os experimentos permitiram concluir que o interpolador mais indicado para modelagem das distorções é o RBF linear. Para validação dos modelos foi utilizado 10% dos pontos altimétricos, enquanto 90% dos dados foram utilizados na geração das superfícies de distorção. Os pontos de verificação indicam que os modelos geoidais híbridos apresentam RMS de $\pm 0,107$, $\pm 0,104$ e $\pm 0,098$ m, respectivamente. Os resultados dos modelos são promissores, uma vez que representam uma melhora das consistências de 30 à 40% em comparação com os geoides gravimétricos, proporcionando aos usuários uma melhor qualidade na transformação de altitudes geométricas para ortométricas.

Palavras-chave: GNSS, nivelamento, redes neurais artificiais, MAPGEO2015, GEOIDSP2014, EGM08.

ABSTRACT

Determination of the altimetric component using GNSS (Global Navigation Satellite System) is becoming better known and used for purposes of leveling with the aid of geoid models. However, the disadvantage of this method is the quality of the geoid models, which degrade heights and limit the application of the method. In order to provide better quality in transforming height using GNSS/leveling, this research aims to develop a hybridization methodology of gravimetric geoid models EGM08, MAPGEO2015 and GEOIDSP2014 for the State of São Paulo, providing more consistent models with GNSS technology. RBF (Radial Basis Function) neural networks were used to obtain the surface distortion, based on differences between geoid model undulations and the undulations obtained by GNSS tracking in benchmarks. Only points from the Altimetric Fundamental Brazilian Network were considered for the generation of hybrid geoids. Filtering was carried out from the offsets obtained in order to minimize altimetric inconsistencies. The hybrid geoid models HYDEGM, HYDMAPGEO and HYDGEOIDSP were generated using, respectively, 319, 317 and 315 points. The experiments showed that the most suitable interpolation for modeling distortions is the linear RBF. 10% of the altimetric points were used for validation of the models, while 90% of the data was used in offset surface generation. Checkpoints indicate that the geoid hybrid models feature $\text{RMS} \pm 0,107$, $\pm 0,104$ and $\pm 0,098$ m, respectively. The results are promising since they represent an improvement of 30 to 40% in consistencies compared with the gravimetric geoids, providing users better quality transformation of geometric to orthometric heights.

Keywords: GNSS, leveling, artificial neural networks, MAPGEO2015, GEOIDSP2014, EGM08.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Superfície equipotencial e linhas de força.....	34
Figura 2 – Aplicação da lei dos cossenos.	37
Figura 3 – Anomalias gravimétricas.....	42
Figura 4 – Gradiômetro triaxial da missão GOCE.	47
Figura 5 – Superfícies fundamentais na Geodésia.....	54
Figura 6 – Estações da Rede Maregráfica Permanente e Rede Altimétrica do SGB.....	59
Figura 7 – Evolução temporal da RAFB.	61
Figura 8 – Distribuição do desvio-padrão do ajustamento simultâneo da RAFB.	63
Figura 9 – Posicionamento por ponto.....	70
Figura 10 – Posicionamento Relativo.....	71
Figura 11 – Problema de Molodenskii.....	74
Figura 12 – Anomalias gravimétricas, em mGal, do modelo ITG-GRACE03S.	77
Figura 13 – Acurácias dos coeficientes dos harmônicos esféricos (esquerda) e matriz covariância (direita), ambos em escala logarítmica, do modelo ITG-GRACE03S.....	77
Figura 14 – Fonte dos dados das anomalias gravimétricas médias para um modelo de resolução de 5'.	78
Figura 15 – Disponibilidade dos dados das anomalias gravimétricas médias para um modelo de resolução de 5'.	79
Figura 16 – Histograma das discrepâncias de 844 pontos, entre as ondulações do nívelmaneto/GNSS e do EGM08 para o Brasil, em metros.	81
Figura 17 – Erro de comissão e omissão para ondulação geoidal do EGM08 com resolução de 5' (Nmax=2159).	82
Figura 18 – Dados gravimétricos terrestres utilizados na geração do MAPGEO2015, em azul são destacados os novos dados em relação do modelo da antecessor.	84
Figura 19 – Fluxograma da geração dos modelos MAPGEO2015 e GEOIDSP2014.....	85
Figura 20 – Modelo de ondulação geoidal nacional – MAPGEO2015 (SIRGAS 2000).	86
Figura 21 – Histograma das discrepâncias (esquerda) entre 844 pontos nivelamento/GNSS e MAPGEO2015 (SIRGAS 2000) e sua distribuição pontual (direita), em metros.	87

Figura 22 – Área de dados dos modelos para geração do GEOIDSP2014 (em vermelho, a área do modelo geoidal; em azul os dados de gravimetria; e em verde dados do DTM e DBM.....	89
Figura 23 – Dados gravimétricos terrestres utilizados na geração do GEOIDSP2014.....	89
Figura 24 – Modelo de ondulações geoidais do Estado de São Paulo – GEOIDSP2014 (SIRGAS2000), em metros.....	90
Figura 25 – Distribuição dos 168 pontos e suas discrepâncias entre o nivelamento/GNSS e o modelo GEOIDSP2014, em metros.....	91
Figura 26 – Fluxograma da elaboração de geoides híbridos.....	92
Figura 27 – Modelagem das distorções para geração do modelo geoidal híbrido.....	92
Figura 28 – Modelo de distorções interpolado para geração de um modelo geoidal híbrido.....	93
Figura 29 – Modelo de ondulação geoidal híbrido disponível na África do Sul – SAGEOID10.....	94
Figura 30 – Modelo de ondulação geoidal híbrido mais recente disponível nos Estados Unidos – GEOID12A.....	95
Figura 31 – Modelo de ondulação geoidal híbrido mais recente disponível no Japão – GSIGEO2011.....	95
Figura 32 – Representação tridimensional de um modelo de distorção de ondulações geoidais adequado para região.....	96
Figura 33 – Representação tridimensional de um modelo de distorção inadequado à realidade espacial dos dados.....	97
Figura 34 – Representação tridimensional de um modelo geoidal híbrido.....	98
Figura 35 – RMS (m) dos modelos de ondulação gravimétrico (azul) e híbrido (vermelho).....	100
Figura 36 – Diagrama da arquitetura de uma Rede MLP.....	103
Figura 37 – Exemplos gráficos de semivariogramas de redes RBF.....	104
Figura 38 – Diagrama da arquitetura de uma Rede RBF.....	105
Figura 39 – Treinamento para uma amostra de dados unidimensionais.....	107
Figura 40 – Exemplo das interpolações <i>thin-plate</i> com 1.000 pontos para a etapa de treinamento e 100 pontos para verificação (esquerda); e 2.000 pontos para o treinamento e 200 para verificação (direita).....	108
Figura 41 – Exemplo da interpolação linear com 1.000 pontos para a etapa do treinamento da RBF.....	109

Figura 42 – RMS (m) das redes RBF com base na quantidade de pontos utilizados no treinamento das redes.....	111
Figura 43 – Superfícies de distorção interpoladas (m) com base em 1.000 pontos na fase de treinamento.	112
Figura 44 – Superfícies de distorção interpoladas (m) com base em 2.000 pontos na fase de treinamento.	112
Figura 45 – Tempo de execução das redes RBF durante a fase de treinamento.....	113
Figura 46 – Exemplo da interpolação linear com 1.000 pontos na etapa	114
Figura 47 – RMS (m) das redes RBF pela quantidade de pontos utilizados no treinamento da rede para região de São Paulo (esquerda) e Peru (direita).....	117
Figura 48 – Dados de nivelamento/GNSS sobre referências de nível fornecidos pela UNESP, IBGE, IAG-USP e “Outros”.....	118
Figura 49 – Desvio-padrão (SD) das altitudes geométricas (h) e ortométricas (H).	119
Figura 50 – Histograma dos desvios-padrão das altitudes geométricas da UNESP (vermelho), IAG-USP (azul), IBGE (magenta).	120
Figura 51 – Histograma dos SD das altitudes geométricas (esquerda) e ortométrica (direita).	121
Figura 52 – Distorções (em metros) dos modelos geoidais EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação às referências de nível rastreadas, na forma de histograma (esquerda) e pontualmente (direita).....	123
Figura 53 – Distorções (em metros) dos modelos geoidais EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação às referências de nível rastreadas, na forma de histograma (esquerda) e pontualmente (direita), após a primeira etapa de filtragem.	126
Figura 54 – Distorções (em metros) dos modelos geoidais EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação às referências de nível rastreadas, na forma de histograma (esquerda) e pontualmente (direita), após a segunda etapa de filtragem.....	129
Figura 55 – RMS (m) das redes RBF com pontos aleatórios (10 à 90%) para fase de treinamento.....	132
Figura 56 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 10% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).	133

Figura 57 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 30% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).	134
Figura 58 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 50% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).	135
Figura 59 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 70% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).	136
Figura 60 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 90% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).	137
Figura 61 – Malha regular (magenta) e <i>buffer</i> (amarelo) para busca dos dados amostrais (preto).	139
Figura 62 – RMS (m) das redes RBF com escolha dos pontos regularmente espaçados.	141
Figura 63 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção (A) geradas utilizando pontos regularmente distribuídos, em vermelho, e para verificação os pontos restantes, em azul.	142
Figura 64 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção (B) geradas utilizando pontos regularmente distribuídos, em vermelho, e para verificação os pontos restantes, em azul.	143
Figura 65 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção (C) geradas utilizando pontos regularmente distribuídos, em vermelho, e para verificação os pontos restantes, em azul.	144
Figura 66 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção (D) geradas utilizando pontos regularmente distribuídos, em vermelho, e para verificação os pontos restantes, em azul.	145
Figura 67 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 90% dos pontos aleatoriamente escolhidos, em vermelho, e 10% dos pontos para verificação, em azul, com a rede RBF linear e três modelos geoidais gravimétricos.	148
Figura 68 – RMS (m) dos geoides gravimétricos (azul), dos geoides híbridos - RBF linear (vermelho) - e dos geoides híbridos - krigagem (amarelo), para os mesmos pontos de validação.	149

Figura 69 – Geoides híbridos HYDEGM (superior esquerdo), HYDMAPGEO
(superior direito) e HYDGEOIDSP (inferior) gerados por RBF linear..... 151

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Alguns dos modelos geoidais disponíveis no <i>International Centre for Global Earth Models</i> , juntamente com o número máximo de coeficientes do modelo e o <i>root mean square</i> (RMS).	48
Tabela 2 – Classificação do nivelamento geométrico do Sistema Geodésico Brasileiro.....	56
Tabela 3 – Precisão das técnicas de posicionamento.....	72
Tabela 4 – Estatísticas dos modelos geoidais híbridos de alguns países, quantidade de pontos utilizados na geração das distorções e validação do modelo, área do modelo e método utilizado na geração das distorções.	99
Tabela 5 – Estatísticas dos pontos de controle com base no número de pontos.....	109
Tabela 6 – Estatísticas (em metros) dos pontos de verificação, para cada uma das funções.	110
Tabela 7 – Estatísticas dos pontos de controle com base no número de pontos, para região de São Paulo.....	114
Tabela 8 – Estatísticas dos pontos de controle com base no número de pontos, para região do Peru.	114
Tabela 9 – Estatísticas (em metros) dos dados com base na quantidades de pontos utilizados no treinamento da RBF para cada uma das funções, na região de São Paulo.....	115
Tabela 10 – Estatísticas (em metros) dos dados com base na quantidades de pontos utilizados no treinamento da RBF para cada uma das funções, na região do Peru.	115
Tabela 11 – Quantidade de pontos de nivelamento/GNSS.....	119
Tabela 12 – Consistência (em metros) dos geoides gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação aos pontos de nivelamento rastreados, para o Estado de São Paulo.....	121
Tabela 13 – Proporção de valores esperados em função da média (μ) e desvio-padrão (σ) de um conjunto de dados, para uma amostra com distribuição normal.	124
Tabela 14 – Consistência (em metros) dos geoides gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação aos pontos de nivelamento rastreados, após a primeira etapa de filtragem dos dados	125

Tabela 15 – Porcentagem de pontos que possui uma quantidade mínima de vizinhos próximos, modificando o raio de busca entre 30' até 2°	127
Tabela 16 – Consistência (em metros) dos geoides gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação aos pontos de nivelamento rastreados, após a segunda etapa de filtragem dos dados.....	128
Tabela 17 – Quantidade de pontos restantes após cada etapa de filtragem para os modelo EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014.	129
Tabela 18 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos gerados a partir dos pontos aleatoriamente escolhidos em relação aos pontos de verificação.....	131
Tabela 19 – Quantidade de pontos altimétricos nas fases de treinamento e validação dos modelos com base nas estratégias A, B, C e D.	139
Tabela 20 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos gerados a partir dos dados regularmente distribuídos (casos A, B, C) em relação aos pontos de verificação.	140
Tabela 21 – Consistência (em metros) dos geoides gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação aos pontos de verificação.....	147
Tabela 22 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP gerados por redes RBF linear em relação aos pontos verificação.	147
Tabela 23 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos K-HYDEGM, K-HYDMAPGEO e K-HYDGEOIDSP gerados por krigagem (variograma linear) em relação aos pontos de verificação.....	149
Tabela 24 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP gerados por redes RBF linear em relação a um ponto de verificação a cada modelagem.....	150
Tabela 25 – Ruído (em metros) dos geoides híbridos HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP gerados por redes RBF linear.....	151
Tabela 26 – Ruído (em metros) dos geoides híbridos K-HYDEGM, K-HYDMAPGEO e K-HYDGEOIDSP gerados por krigagem (variograma linear).	152

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABNT	– Associação Brasileira de Normas Técnicas
ANN	– <i>Artificial Neural Network</i>
BD	– <i>Block-Diagonal</i>
CHAMP	– <i>CHallenging Minisatellite Payload</i>
CONUS	– <i>Contiguous United States</i>
DAE	– <i>Direct Atmospheric Effect</i>
DBM	– <i>Digital Bathymetric Model</i>
DC	– Divisão de Cartografia
DLR	– <i>Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt</i>
DORIS	– <i>Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite</i>
DOT	– <i>Dynamic Ocean Topography</i>
DTE	– <i>Direct Topographical Effect</i>
DTM	– <i>Digital Topographic Model</i>
EGM	– <i>Earth Gravitational Model</i>
EGNOS	– <i>European Geostationary Navigation Overlay Service</i>
EIGEN	– <i>European Improved Gravity model of the Earth by New techniques</i>
EPUSP	– Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
ESA	– <i>European Space Agency</i>
FAPESP	– Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
FCT	– Faculdade de Ciências e Tecnologia
FFT	– <i>Fast Fourier Transform</i>
GAGAN	– <i>GPS Aided GEO Augmented Navigation</i>
GBAS	– <i>Ground Satellite-Based Augmentation System</i>
GGM	– <i>Global Geopotential Model</i>
GLONASS	– <i>Global Orbiting Navigation Satellite System</i>
GNSS	– <i>Global Navigation Satellite System</i>
GOCE	– <i>Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer</i>
GPS	– <i>Global Positioning System,</i>
GPU	– <i>GeoPotential Unity</i>
GPZ	– <i>German Research Center for Geosciences</i>
GRACE	– <i>Gravity Recovery And Climate Experiment</i>
GRACE-FO	– <i>Gravity Recovery And Climate Experiment-Follow On</i>
GSFC	– <i>Goddard Space Flight Center</i>
IAG	– <i>International Association of Geodesy</i>
IAG-USP	– Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas,
IBGE	– Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ICGEM	– <i>International Centre for Global Earth Models,</i>
IGFS	– <i>International Gravity Field Service</i>

IGG	– Instituto Geográfico e Geológico
IONEX	– <i>IONosphere map EXchange format</i>
KBR	– <i>K-Band Ranging System</i>
LEO	– <i>Low Earth Orbit</i> - LEO
LSC	– <i>Least Square Colocation</i>
MCP	– <i>McCulloch-Pitts</i>
MLP	– <i>Multilayer Perceptron</i>
MSAS	– <i>MSAT Satellite-based Augmentation System</i>
NASA	– <i>National Aeronautics and Space Administration</i>
NGA	– <i>National Geo-spatial Intelligence Agency</i>
NRCAN	– <i>Natural Resources Canada</i>
PITE	– <i>Primary Indirect Topographical Effect</i>
PNT	– Previsão Numérica do Tempo
PPP	– Posicionamento por Ponto Preciso
PPS	– Posicionamento por Ponto Simples
PVC	– Problema de Valor de Contorno
RAFB	– Rede Altimétrica Fundamental Brasileira
RAFSP	– Rede Altimétrica Fundamental do Estado de São Paulo
RBF	– <i>Radial Based Function</i>
RBMC	– Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
RINEX	– <i>Receiver Independent Exchange Format</i>
RMPG	– Rede Maregráfica Permanente para Geodésia
RMS	– <i>Root Mean Square</i>
RMSD	– <i>Root Mean Square of Differences</i>
RN	– Referência de Nível
RRNN	– Plural de RN
RTK	– <i>Real-Time Kinematic</i>
SAB	– Sistema Altimétrico Brasileiro
SBAS	– <i>Satellite-Based Augmentation System</i> ,
SD	– <i>Standard Deviation</i>
SGB	– Sistema Geodésico Brasileiro
SHGEO	– <i>Stokes-Helmert Geoid Software</i>
SI	– <i>Système International d'unités</i>
SIRGAS	– Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas
SITE	– <i>Secondary Indirect Topographical Effect</i>
SLR	– <i>Satellite Laser Ranging</i>
SNi	– Seção de Nivelamento
SRTM	– <i>Shuttle Radar Topography Mission</i>
SST	– <i>Satellite-to-Satellite Tracking</i>

TEC	– <i>Total Electron Content</i>
UNESP	– Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"
WAAS	– <i>Wide Area Augmentation System,</i>
ZHD	– <i>Zenithal Hydrostatic Delay</i>
ZWD	– <i>Zenithal Wet Delay</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	Objetivos	25
1.2	Justificativa	25
1.3	Conteúdo da Dissertação	26
2	ATRAÇÃO GRAVITACIONAL	28
2.1	Potencial Gravitacional	28
2.1.1	Geopotencial	32
2.1.2	Campo de Gravidade Normal	35
2.1.3	Potencial Anômalo.....	36
2.2	Harmônicos Esféricos	36
2.2.1	Polinômios de Legendre	37
2.2.2	Geopotencial em Harmônicos Esféricos.....	39
2.2.3	Esferopotencial em Harmônicos Esféricos.....	40
2.2.4	Potencial Anômalo em Harmônicos Esféricos	41
2.3	Anomalias e Distúrbio de Gravidade	41
2.4	Missões Gravitacionais	44
2.4.1	Modelos Globais do Geopotencial.....	47
3	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO	50
3.1	Integral de Stokes	51
3.2	Sistema Altimétrico e Número Geopotencial.....	52
3.2.1	Superfícies de referência altimétrica.....	53
3.2.2	Nivelamentos tradicionais.....	55
3.2.3	Nivelamento por satélite	57
3.3	<i>Datum</i> Vertical	58
3.3.1	Rede Altimétrica Fundamental Brasileira.....	60
3.3.2	Ajustamento da RAFB.....	62
4	INTEGRAÇÃO DO POSICIONAMENTO GNSS COM MODELOS GEOIDAIIS	65
4.1	Conceitos do Posicionamento por Satélite	65
4.1.1	Fontes de erros do posicionamento.....	66
4.1.2	Estratégias de Processamento	68
4.1.3	Métodos de posicionamento GNSS	69

4.2	Modelos Geoidais.....	72
4.2.1	EGM08	76
4.2.2	MAPGEO2015	82
4.2.3	GEOIDSP2014	87
4.3	Geoides Híbridos.....	91
4.3.1	Superfície de Distorção.....	96
4.3.2	Qualidade do modelo híbrido	97
5	INTERPOLADORES.....	102
5.1	Redes Neurais.....	102
5.1.1	Radial Based Function	103
5.1.2	Treinamento	105
5.2	Experimentos com Dados Simulados.....	107
5.2.1	Experimento América Latina.....	108
5.2.2	Experimento sub-regiões	113
6	GEOIDES HÍBRIDOS PARA O ESTADO DE SÃO PAULO.....	118
6.1	Dados de nivelamento/GNSS.....	118
6.1.1	Filtragem das distorções altimétricas.....	123
6.2	Modelagem das Distorções e Validação	130
6.2.1	Treinamento da RBF com pontos aleatoriamente distribuídos.....	130
6.2.2	Treinamento da RBF com pontos regularmente distribuídos	138
6.3	HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP	146
7	CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES	153
	REFERÊNCIAS.....	156

1 INTRODUÇÃO

A tecnologia GNSS (*Global Navigation Satellite System*) engloba os sistemas: GPS (*Global Positioning System*), dos Estados Unidos; GLONASS (*Global Orbiting Navigation Satellite System*), da Rússia; Galileo, da União Europeia; Beidou, da China; e os sistemas de aumentos designados de GBAS (*Ground Satellite-Based Augmentation System*) e SBAS (*Satellite-Based Augmentation System*), tais como o norte-americano WAAS (*Wide Area Augmentation System*), o europeu EGNOS (*European Geostationary Navigation Overlay Service*), o MSAS (*MSAT Satellite-based Augmentation System*) do Japão e o GAGAN (*GPS Aided GEO Augmented Navigation*) da Índia (MONICO, 2008; SEEGER, 2003). Essa variedade de sistemas possibilita facilidade e praticidade no posicionamento em escala global.

A literatura descreve os diversos métodos de posicionamento com base na observável utilizada, no referencial adotado, no tratamento dos efeitos presentes na trajetória do sinal do satélite até o receptor, entre outras características (MONICO, 2008). Entretanto, qualquer um dos métodos de posicionamento por satélite proporcionará ao usuário suas coordenadas cartesianas (X , Y e Z) em um determinado sistema de referência. Essas coordenadas podem ser transformadas em coordenadas geodésica, latitude (φ), longitude (λ), e altitude geométrica (h). As observações altimétricas são medidas fundamentais para uma variedade de aplicações científicas e de engenharia, como aplicações em levantamentos geodésicos e/ou topográficos, estudos costais, projetos de engenharia, barragens, irrigação, entre outros.

As altitudes obtidas utilizando técnicas espaciais de posicionamento são referenciadas ao elipsoide, devido a esse fato são chamadas de altitudes elipsoidais ou geométricas. O elipsoide é definido matematicamente como uma superfície geométrica, portanto esse tipo de altura tem natureza geométrica (GEMAEL, 2012). A principal dificuldade em se trabalhar com a atitude geométrica é que este tipo de altitude não tem vinculação com o campo de gravidade da Terra, dessa maneira pode ocorrer valores iguais para esta grandeza em pontos situados em diferentes níveis ou valores desiguais da altitude podem ocorrer sobre a mesma superfície equipotencial do campo de gravidade (FREITAS e BLITZKOW, 1999)

O método de nivelamento que faz uso das tecnologias de posicionamento por satélite é conhecido por nivelamento por satélite ou nivelamento/GNSS. Este vem substituindo o nivelamento tradicional graças à simplicidade em sua utilização e menor custo de execução. Resumidamente o método consiste na conversão da altitude geométrica, obtida por rastreamento GNSS, em altitude ortométrica ou normal com base na ondulação geoidal ou quase-geoidal, dos pontos rastreados (KOTSAKIS e SIDERIS, 1999; FEATHERSTONE, 2000; CASTRO, 2002; SEEGER, 2003; SANTOS e SÁ, 2006; MONICO, 2008)

A obtenção de modelos geopotenciais que melhor representam a superfície equipotencial do campo de gravitacional da Terra tem despertado interesses específicos nas Ciências Geodésicas. Ao contrário de outras superfícies conhecidas nessa ciência, ela é uma superfície de nível do campo de gravidade que possui características físicas (BLITZKOW, 1996; GUIMARÃES, 2010).

Em determinados trabalhos geodésicos é indispensável a procura por métodos que proporcionem resultados mais acurados para os modelos geoidais. Tem-se mostrado uma grande tendência para a melhora de modelos geoidais a integração de diversos tipos dados, sejam terrestres, aéreos ou orbitais. A obtenção de modelos geoidais com melhor qualidade é feita por meio da utilização da integral de Stokes modificada e aproximações esféricas. Porém, alguns autores (MARTINEC e GRAFAREND, 1997; NAJAFI-ALAMDARI, EMADI e MOGHASED-AZAR, 2006) afirmam que essa metodologia ainda pode resultar em modelos com erros na escala do metro. Uma das soluções adotada por diversos países para melhora das precisões tem sido o aumento do volume de dados gravimétricos e altimétricos. Dessa maneira, as precisões de alguns modelos têm chegado ao nível do centímetro, como por exemplo, no Japão, onde o modelo geoidal possui RMS (*Root Mean Square*) de $\pm 0,075$ m, avaliado com 816 pontos de nivelamento/GNSS em referências de nível (ODERA e FUKUDA, 2014); e no caso americano, o modelo USGG2009 apresenta RMS $\pm 0,063$ m, observando 18.398 pontos de nivelamento/GNSS (WANG, SALEH, *et al.*, 2012).

Alguns usuários desses produtos, oceanógrafos e geofísicos, necessitam uma qualidade ao nível do decímetro (KUROIISHI, 2009); porém, determinadas aplicações geodésicas e cartográficas de alta acurácia, como nivelamento/GNSS, unificação global do sistema de altitudes e estudos de deglaciação, exigem uma qualidade próxima de 1 cm (PLAG e PEARLMAN, 2009).

As altitudes geométricas obtidas com o GNSS em referências de nível têm sido utilizadas para verificação da qualidade dos modelos geoidais. Porém, a integração dessas altitudes no modelo geoidal tem proporcionado melhores resultados na transformação de altitudes geométricas em ortométricas. Esse método dá origem aos modelos geoidais denominados híbridos.

Os modelos de geoide híbrido tem mostrado grande potencial para o melhoramento de geoides chegando ao nível do centímetro como é o caso do Japão, com RMS de $\pm 0,02$ m (MIYAHARA, KODAMA e KUROISHI, 2014); da China (Hong Kong e Shenzhen), com RMS de $\pm 0,01$ m (CHEN e YANG, 2001); dos Estados Unidos (CONUS - *contiguous United States*), com RMS de $\pm 0,014$ m (ROMAN, WANG, *et al.*, 2009); e da África do Sul, com RMS de $\pm 0,07$ m (CHANDLER e MERRY, 2010). Outros países também tem utilizado a hibridização, é o caso do Canadá (NRCAN, 2014), Coreia do Sul (LEE, YUN, *et al.*, 2012; LEE, YUN, *et al.*, 2013) e Austrália (FOTOPOULOS, FEATHERSTONE e SIDERIS, 2002; FEATHERSTONE, SPROULE, *et al.*, 2005).

No contexto brasileiro, o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) juntamente com outras instituições, com destaque para o IAG-USP (Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas), têm investido no estudo e melhoramento de um modelo geoidal para escala nacional, que em sua última versão, designada MAPGEO2015, apresenta um RMS de $\pm 0,17$ m, avaliado com 592 pontos de nivelamento/GNSS. Guimarães *et al.* (2015) apresentam um modelo para o Estado de São Paulo, denominado como GEOIDSP2014, de abrangência regional e caracterizado por um RMS de $\pm 0,21$ m, observado com 168 pontos de nivelamento/GNSS. Entretanto, no Brasil não são disponíveis para uso público geoides desenvolvidos a partir da metodologia de hibridização, ainda que o melhoramento de geoides gravimétricos por meio da integração do nivelamento/GNSS já tenha sido alvo de estudos (MAIA, 2003; KAVZOGLU e SAKA, 2005; REINKE, VERONEZ, *et al.*, 2007).

Avaliando os resultados obtidos no Japão, Estados Unidos, África, e em outros países, o conceito de modelos geoidais híbridos pode ser aplicado em um estudo de caso para o Brasil com a finalidade de melhorar a qualidade da transformação entre altitudes geométricas em ortométricas.

1.1 Objetivos

Esta dissertação tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma metodologia para obtenção de modelos geoidais híbridos para o Estado de São Paulo, limitado à região entre 19°S e 26°S em latitude e 44°O e 54°O em longitude, a partir da integração de dados de nivelamento/GNSS em referenciais de nível e um modelo geoidal gravimétrico. Sendo os objetivos secundários:

- Realizar um estudo sobre a altimetria e modelos geoidais no contexto nacional;
- Avaliar e definir o interpolador que promove melhor qualidade na modelagem de distorções entre os dados altimétricos utilizados na pesquisa;
- Realizar a integração das altitudes determinadas com o posicionamento GNSS, em uma rede de nivelamento, e os modelos do geopotencial nos Estado de São Paulo; e
- Validar o modelo geoidal híbrido desenvolvido para o Estado de São Paulo.

1.2 Justificativa

Uma importante finalidade dos modelos geoidais nas áreas de Engenharias e Geociências é fornecer uma transformação entre as altitudes geométricas e físicas, representando a superfície equipotencial do campo de gravidade. Contudo, essa transformação entre altitudes pode degradar consideravelmente a precisão do resultado se o modelo de ondulações geoidais não apresentar boa qualidade (nível centimétrico). De modo a compensar essa degradação, diversos são os esforços para obtenção de modelos geoidais mais acurados, tanto no Brasil (LOBIANCO, 2005; LOBIANCO, BLITZKOW e MATOS, 2005; FERREIRA, FREITAS e HECK, 2010), quanto no exterior (FEATHERSTONE, KIRBY, *et al.*, 2001; KUROIISHI, ANDO e FUKUDA, 2002; MCDONALD, 2004; ODERA e FUKUDA, 2014). Dentre esses esforços merece destaque a integração de modelos geoidais com o nivelamento/GNSS em pontos de uma rede altimétrica, de modo a modelar as distorções entre o modelo geoidal e o geoide considerado “real”. As literaturas

chamam essas superfícies geradas de modelos geoidais híbridos, e os resultados mais promissores apontam melhoramento ao nível centimétrico dos novos modelos (CHEN e YANG, 2001; KUROISHI, ANDO e FUKUDA, 2002; CHEN e LUO, 2004; ROMAN, WANG, *et al.*, 2004; ROMAN, WANG, *et al.*, 2009; LEE, YUN, *et al.*, 2012; LEE, YUN, *et al.*, 2013).

A nível nacional, o Brasil apresenta uma grande quantidade de dados altimétricos, como a Rede Altimétrica Fundamental Brasileira (RAFB), e um modelo geoidal para uso nacional, o MAPGEO2015. Alguns estados brasileiros também apresentam geoides específicos, é o caso do Paraná (GOLDANI, 2006; GOLDANI e QUINTAS, 2010) e Pernambuco (SANTOS, SEIXAS, *et al.*, 2012). O Estado de São Paulo se destaca pela quantidade de dados de nivelamento/GNSS disponível, pela forte presença de usuários do GNSS tendo em vista a densificação de redes de posicionamento (Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo e Rede GNSS-SP) na região, e também pela existência de diversos modelos geoidais, por exemplo: o GEOCOM (SÁ e MOLINA, 1995), o SPGEOID2002 (SILVA, 2002), o GEOIDSP2010 (GUIMARÃES, 2010), o GEOIDESP2014 (GUIMARÃES, MATOS e BLITZKOW, 2014).

A construção e o monitoramento de grandes projetos de engenharia que envolvem o manejo hídrico e/ou altimétrico exige a utilização dos modelos geoidais, devido a relação que o nível de água têm com o campo gravitacional. Essa íntima relação, além de possibilitar a utilização de métodos de posicionamento por satélite nesses estudos, enfatiza a importância de modelos geoidais com melhor qualidade. O Estado de São Paulo além de possuir grandes obras de engenharia, conta com a presença de grandes bacias hidrográficas: Rios Tietê, Pardo, Mogi-Guaçu e Paraíba do Sul.

Essa diversidade de fatores aliada à importância econômica e presença de grandes centros financeiros e industriais mostra que a metodologia de hibridização pode ser interessante se aplicada na região de São Paulo para obtenção de um modelo geoidal com melhor qualidade.

1.3 Conteúdo da Dissertação

Esta pesquisa está dividida em sete capítulos, onde o primeiro é destinado a uma introdução sobre o assunto pesquisado e desenvolvido. No segundo capítulo são discutidos aspectos fundamentais da atração gravitacional, como os potenciais

gravitacionais e seus desenvolvimentos em harmônicos esféricos, juntamente são apresentadas as anomalias e distúrbio de gravidade e também as missões gravitacionais. O terceiro capítulo contextualiza a relação entre o Problema de Valor de Contorno da Geodésia Física com os diferentes sistemas altimétricos e o conceito de altitude. A questão do *Datum* Vertical brasileiro também é apresentada. O principal foco da pesquisa é discutido no capítulo quatro, a integração dos sistemas globais de posicionamento por satélite com modelos de ondulação geoidais. Num primeiro momento mostram-se os conceitos fundamentais do posicionamento por satélite, com ênfase nas possíveis fontes de erro, estratégias de processamento e os possíveis métodos de posicionamento. Em seguida são citadas as principais metodologias utilizadas no desenvolvimento dos modelos geoidais e os modelos geopotenciais globais existentes, com maior destaque para o EGM2008. Também são apresentados os modelos MAPGEO2015 e GEOIDSP2014. O último item do capítulo mostra o conceito de geoides híbridos, onde são mostrados alguns exemplos de países que obtiveram modelos com sucesso. O quinto capítulo se destina à fundamentação e experimentação das Redes Neurais Artificiais na interpolação de distorções simuladas. O capítulo seguinte segue com experimentos utilizando os dados reais de distorção para geração dos modelos geoidais híbridos, onde uma metodologia de seleção de pontos e de interpolação é proposta e avaliada. Por fim, o sétimo capítulo é destinado às conclusões parciais e considerações sobre o andamento da pesquisa.

2 ATRAÇÃO GRAVITACIONAL

A Teoria do Potencial, originada com Laplace¹ no século XVIII, fundamenta e soluciona alguns problemas nas áreas de Mecânica Celeste, Hidrodinâmica, Eletricidade, Magnetismo, etc. As Ciências Geodésicas, por sua vez, almejando conhecer a estrutura do campo gravitacional e suas relações com problema da forma da Terra, também se apoiam nessa teoria, considerando que, sob condições particulares, este campo vetorial pode ser tratado como um campo escalar. Considerando a utilização de escalares suficiente para definição do valor de uma função no espaço, o tratamento matemático envolvido é simplificado. Ademais as funções harmônicas, um tipo de função potencial, são soluções da equação de Laplace que descrevem o potencial gravitacional. O desenvolvimento matemático das fórmulas a ser apresentado nesse capítulo poder ser encontrado com mais detalhes em Hofmann-Wellnhof e Moritz (2006) e Gemael (2012)

2.1 Potencial Gravitacional

Em 1687 foi publicada a Lei Universal da Gravitação pelo cientista Isaac Newton², em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Essa lei revela que uma partícula atrai outra partícula com uma força (F), cuja magnitude é diretamente proporcional ao produto de suas massas (m_1 e m_2), e inversamente proporcional ao quadrado da distância (l) que as separam:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}, \quad (2.1)$$

onde G é conhecido como a constante gravitacional de Newton, correspondente no SI (*Système International d'unités*) ao valor de $6,6742 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

A força exercida entre as partículas envolvidas é conhecida como Força Gravitacional, Força de Atração Gravitacional ou Força de Atração de Newton e pode ser entendida como uma propriedade intrínseca e geral das massas (GEMAEL, 2012). Deve-se destacar que, em termos rigorosos, essa lei é puramente teórica e ainda são desconhecidos os mecanismos de ação dessa força.

¹ Pierre-Simon, marqués de Laplace (1749-1827)

² Isaac Newton (1642-1717)

Visto que as partículas de massas m_1 e m_2 se atraem mutuamente de forma simétrica, é conveniente considerar uma delas como partícula atrativa e a outra como partícula atraída (GEMAEL, 2012). Simplificando, pode-se expressar a força exercida por uma partícula atrativa de massa m em uma partícula atraída de massa unitária:

$$F = G \frac{m}{l^2}. \quad (2.2)$$

O potencial gravitacional de atração ou newtoniano é uma função escalar dada por:

$$V = G \frac{m}{l}. \quad (2.3)$$

Introduzindo um sistema de coordenadas tridimensionais (x, y, z) , são definidas as coordenadas da partícula atrativa de massa m por ξ, η, ζ e as coordenadas do ponto atraído por x, y, z . Dessa maneira o vetor força de atração $\vec{F}$ possui magnitude escalar de suas componentes dadas por:

$$F_X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Obtendo as devidas diferenciais, tem-se (GEMAEL, 2012):

$$F_X = -Gm \frac{x - \xi}{l^3}, \quad F_Y = -Gm \frac{y - \eta}{l^3}, \quad F_Z = -Gm \frac{z - \zeta}{l^3}, \quad (2.5)$$

com:

$$l = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}. \quad (2.6)$$

A Equação (2.4) também pode ser explicitada usando a notação:

$$F = [F_X, F_Y, F_Z] = \text{grad } V. \quad (2.7)$$

Dessa forma tem-se que as derivadas do potencial gravitacional em relação aos eixos coordenados proporcionam as componentes da força de atração aos respectivos eixos.

Considerando um conjunto de partículas de massa $m_1, m_2 \dots m_n$, o potencial do sistema é dado pela soma individual de cada contribuição das partículas (GEMAEL, 2012):

$$V = G \frac{m_1}{l_1} + G \frac{m_2}{l_2} + \dots + G \frac{m_n}{l_n} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i}, \quad (2.8)$$

Admitindo um corpo sólido de volume v com densidade dada por:

$$\varrho = \frac{dm}{dv}, \quad (2.9)$$

onde: dv representa o elemento de volume e dm o elemento de massa, o somatório da Equação (2.8) resulta numa integral tripla, também chamada integral de Newton (GEMAEL, 2012):

$$V = G \iiint_M \frac{dm}{l} = G \iiint_V \frac{\varrho}{l} dv. \quad (2.10)$$

Sabendo que a densidade de cada partícula individual pode não ser a mesma, considera-se a integral em função da localização de cada partícula:

$$V(x, y, z) = G \iiint_V \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{l} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.11)$$

onde o elemento de volume é dado por:

$$dv = d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.12)$$

Obtendo as derivadas parciais, ou seja, as componentes da força de atração – Equação (2.4) – para um dado corpo sólido (GEMAEL, 2012):

$$\begin{aligned}
F_X &= \frac{\partial V}{\partial x} = -G \iiint_V \frac{x - \xi}{l^3} \varrho dv, \\
F_Y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -G \iiint_V \frac{y - \eta}{l^3} \varrho dv, \\
F_Z &= \frac{\partial V}{\partial z} = -G \iiint_V \frac{z - \zeta}{l^3} \varrho dv.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

As derivadas de primeira ordem são contínuas em todo espaço, porém esse fato não ocorre para a segunda derivada. As derivadas de segunda ordem são descontínuas entre as partículas que possuem densidades diferentes, ou seja no interior dos corpos sólidos (GEMAEL, 2012). Nesses casos o potencial V satisfaz a equação de Poisson:

$$\Delta V = -4\pi G \varrho, \tag{2.14}$$

onde o símbolo Δ representa o operador Laplaciano:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{2.15}$$

Porém, o potencial de atração no exterior do corpo sólido, no espaço vazio, a densidade ϱ é nula, resultando na Equação de Laplace:

$$\Delta V = 0. \tag{2.16}$$

Calculando as derivadas de segunda ordem, para o exterior do corpo sólido (GEMAEL, 2012):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -G \iiint_V \frac{-l^2 + 3(x - \xi)^2}{l^3} \varrho dv, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -G \iiint_V \frac{-l^2 + 3(y - \eta)^2}{l^3} \varrho dv, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -G \iiint_V \frac{-l^2 + 3(z - \zeta)^2}{l^3} \varrho dv,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

tem-se:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -G \iiint_V \frac{-3l^2 + 3[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]}{l^3} \rho dv. \quad (2.18)$$

Considerando a Equação (2.6) em (2.18), tem-se:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2.19)$$

Sabendo que uma função que satisfaz a Equação de Laplace (2.16) nos pontos em uma região no espaço, esta é dita harmônica, portanto tanto a própria função quanto suas derivadas são contínuas na mesma região. Pode-se concluir que o laplaciano do potencial gravitacional é zero no exterior das massas atrativas e devido a esse fato a função é denominada função harmônica.

2.1.1 Geopotencial

Conforme verificado na sessão anterior, a atração gravitacional, gerada por um corpo sólido sobre pontos exteriores, deriva de um potencial harmônico. Entretanto, para aplicações de estudo do campo de gravidade na determinação da superfície da Terra, outras considerações são necessárias. Esse campo gravitacional é formado pelo conjunto de vetores de gravidade na superfície terrestre, e cada um desses vetores $\vec{g}$ é formado pela soma vetorial da força de atração gravitacional $\vec{F}$ e força centrífuga $\vec{C}$ (GEMAEL, 2012):

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C}. \quad (2.20)$$

Indicando as coordenadas (x, y, z) da partícula de massa unitária e d a sua distância até o eixo de rotação, a expressão vetorial da força centrífuga por unidade de massa é dada por:

$$\vec{C} = \omega^2 \vec{d} = \omega^2 x \vec{i} + \omega^2 y \vec{j}, \quad (2.21)$$

onde ω representa a velocidade angular de rotação da Terra. Essa força pode ser obtida a partir do potencial centrífugo dado por:

$$Q = \frac{1}{2} \omega^2 d^2. \quad (2.22)$$

Portanto o geopotencial (W) é expresso pela composição do potencial de atração (V) e do potencial centrífugo (Q) (GEMAEL, 2012):

$$W = V + Q, \quad (2.23)$$

ou

$$W = G \iiint_M \frac{dm}{l} + \frac{1}{2} \omega^2 d^2. \quad (2.24)$$

Nota-se que:

$$\text{grad } W = \text{grad } V + \text{grad } Q, \quad (2.25)$$

Todavia, o potencial centrífugo apresenta laplaciano diferente de zero, logo o mesmo não pode ser representado por uma função harmônica (GEMAEL, 2012):

$$\Delta Q = 2\omega^2, \quad (2.26)$$

ainda, visto que o geopotencial (W) é composto por esse potencial centrífugo, o mesmo não é harmônico.

Para o caso geral, a aplicação do operador laplaciano resulta na equação de Poisson generalizada (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006):

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2, \quad (2.27)$$

O vetor gravidade ($\vec{g}$) pode ser obtido pelo gradiente do geopotencial, isto é:

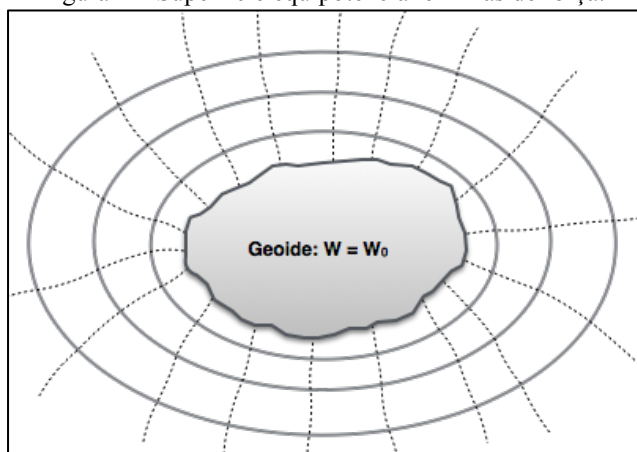
$$\vec{g} = [g_x, g_y, g_z] = \text{grad } W. \quad (2.28)$$

com:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = -G \iiint_V \frac{x - \xi}{l^3} \rho dv + \omega^2 x, \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = -G \iiint_V \frac{y - \eta}{l^3} \rho dv + \omega^2 y, \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = -G \iiint_V \frac{z - \zeta}{l^3} \rho dv. \end{aligned} \quad (2.29)$$

O geopotencial, contendo as informações do campo de gravidade terrestre, pode ser tratado na forma de superfícies equipotenciais e suas linhas de força. A superfície equipotencial que coincide com o nível médio dos mares não perturbados é conhecida como superfície geoidal ou simplesmente geoide (VANÍCEK e KRAKIWSKY, 1986; TORGE, 2001; GEMAEL, 2012). As linhas perpendiculares às superfícies equipotenciais são ditas linhas de força do campo de gravidade (Figura 1), podendo ser materializadas pelo “fio de prumo” de instrumentos de medição topográficos (teodolitos e estações totais).

Figura 1 – Superfície equipotencial e linhas de força.



Adaptado de GEMAEL, 2012.

Por definição em qualquer ponto das equipotenciais o vetor gravidade é tangente a linha de força no ponto, essa tangente é conhecida como vertical.

2.1.2 Campo de Gravidade Normal

A figura de referência adotada na Geodésia Física para representação da Terra “verdadeira” é conhecida como Terra normal. Esta é definida como um elipsoide de revolução que possui mesma massa (M) – incluindo as massas atmosféricas – com distribuição homogênea, igual período de rotação e com centro de massa coincidente ao centro de massa da Terra. Ademais, nessa figura de referência é injuncionada a condição de que de sua superfície limitante é equipotencial e o potencial (U_o) seja igual ao potencial (W_o) sobre a superfície geoidal (GEMAEL, 2012).

Da mesma maneira que a Terra tem vinculado a si o campo de gravidade (g) com seu geopotencial (W), a Terra normal possui o campo de gravidade normal (γ) e seu o potencial de gravidade normal ou esferopotencial (U).

$$\vec{\gamma} = [\gamma_X, \gamma_Y, \gamma_Z] = \text{grad } U, \quad (2.30)$$

A utilização dessa superfície teórica como aproximação do campo de gravidade real objetiva tratar matematicamente as diferenças entre a Terra “verdadeira” e sua aproximação ao invés de manipular valores absolutos do potencial.

Analogamente à definição de geopotencial, o esferopotencial (U) é gerado pela soma da força de atração gravitacional (Z) e força centrífuga (Q) da Terra normal:

$$U = Z + Q. \quad (2.31)$$

No exterior do elipsoide de referência, tem-se:

$$\Delta Z = 0, \quad (2.32)$$

$$\Delta Q = 2\omega^2. \quad (2.33)$$

Portanto, assim como o geopotencial, o esferopotencial não pode ser representado por uma função harmônica.

2.1.3 Potencial Anômalo

Também conhecido como potencial perturbador, o potencial anômalo (T) representa a diferença entre o potencial da Terra “verdadeira” (geopotencial) e o potencial da Terra normal (esferopotencial). Dessa maneira, o potencial anômalo é considerado o potencial produzido pelas massas que apresentam diferente distribuição da figura de referência, as massas anômalas.

$$T = W - U, \quad (2.34)$$

Visto que os potenciais centrífugos são considerados iguais, tem-se:

$$T = (V + Q) - (Z + Q), \quad (2.35)$$

e portanto, o potencial anômalo T é ser dado pela diferença entre os potenciais (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006):

$$T = V - Z, \quad (2.36)$$

o que garante a propriedade harmônica do potencial anômalo, possibilitando a determinação das ondulações geoidais através da fórmula de Bruns³ (apresentada na Seção 2.3).

2.2 Harmônicos Esféricos

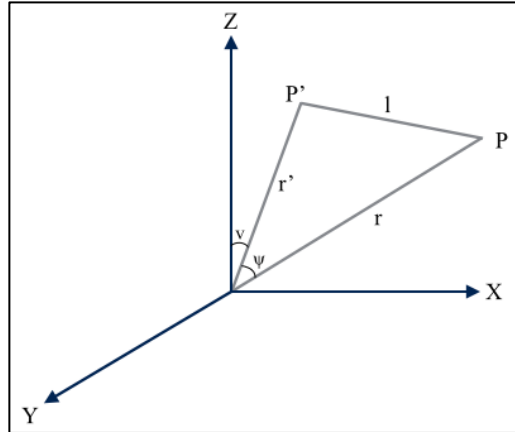
Uma das vantagens na utilização de funções harmônicas é que, sobre a superfície de uma esfera, estas funções podem ser desenvolvidas em séries de harmônicos esféricos. Isto é, os elementos do campo de gravidade de pontos de interesse podem ser determinados a partir de coeficientes da expansão em série e das coordenadas desses pontos.

³ Henrich Bruns (1848-1919)

2.2.1 Polinômios de Legendre

Em 1782, Legendre⁴ estudou um caso particular dos harmônicos esféricos, os harmônicos esféricos zonais, essa função, em sua homenagem, recebeu o nome de polinômios de Legendre de grau n . Sob determinadas condições esses polinômios são soluções da equação de Laplace (GEMAEL, 2012).

Figura 2 – Aplicação da lei dos cossenos.



Na Figura 2 a distância l , pode ser obtida pela lei dos cossenos:

$$\frac{1}{l} = (r^2 + r'^2 - 2 r r' t)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) t + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.37)$$

com $t = \cos(\psi)$.

Desenvolvendo a expressão binomial de (2.37), tem-se:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) t + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \frac{5}{2} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right) + \dots \right] \quad (2.38)$$

ou

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) P_1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 P_2 + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 P_3 + \dots \right], \quad (2.39)$$

⁴ Adrien Marie Legendre (1752-1833)

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n, \quad (2.40)$$

para $r' < r$; P_n representa o polinômio de Legendre de grau n :

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (2.41)$$

A generalização da Equação (2.41) para uma superfície esférica dá origem aos harmônicos esféricos de superfície S_n , expressos por:

$$S_n = \sum_{m=0}^n [a_{n,m} P_{n,m}(v) \cos m\lambda + b_{n,m} P_{n,m}(v) \sen m\lambda] \quad (2.42)$$

$$P_{n,m}(v) = \sin^m(v) \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \quad (2.43)$$

onde $a_{n,m}$ e $b_{n,m}$ são coeficientes; v e λ representam respectivamente a colatitude geocêntrica e a longitude do ponto; $P_{n,m} \sen m\lambda$ e $P_{n,m} \cos m\lambda$ são conhecidas como funções de Legendre associadas, de grau n e ordem m ; e $P_n(t)$ é dado pela Equação (2.41).

Na Equação (2.42) tem-se os harmônicos tesserais, para o caso de $n \neq m$, e os harmônicos setoriais, para $n = m$ (GEMAEL, 2012).

Ademais, a expressão geral que permite o cálculo de qualquer função de Legendre associada, seja zonal, setorial ou tesseral:

$$P_{n,m}(v) = \frac{\sin^2(v)}{2^n} \sum_{k=0}^I \frac{(2n-2k)! (-1)^k}{(n-m-2k)! (n-k)! k!} t^{n-m-2k} \quad (2.44)$$

sendo I o maior inteiro contido entre $(n-m)/2$.

Adotando o sistema de coordenadas esféricas polares, a expressão da equação de Laplace (2.19) toma a forma:

$$\frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial Z}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin(v)} \frac{\partial \left(\sin(v) \frac{\partial Z}{\partial v} + \frac{1}{\sin^2(v)} \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda^2} \right)}{\partial v} = 0 \quad (2.45)$$

no qual r é o raio vetor, v a distância polar e λ a longitude.

Os polinômios homogêneos em (v, λ) são soluções de (2.45). Estes polinômios constituem harmônicos esféricos de superfície de grau n . A soma dos harmônicos esféricos sólidos V também é uma solução da equação de Laplace (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006; GEMAEL, 2012):

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos m\lambda + b_{n,m} \sin m\lambda] P_{n,m}(v) \quad (2.46)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [a_{n,m} \cos m\lambda + b_{n,m} \sin m\lambda] P_{n,m}(v) \quad (2.47)$$

2.2.2 Geopotencial em Harmônicos Esféricos

Substituindo o inverso da distância entre dois pontos da Equação (2.40) na expressão do geopotencial (2.24), obtém-se (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006; GEMAEL, 2012):

$$W = \frac{G}{r} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \iiint_M \left(\frac{r'}{r} \right)^n [a_{n,m} \cos m\lambda + b_{n,m} \sin m\lambda] P_{n,m}(v) dm \right] + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2(v)}{2} \quad (2.48)$$

Fazendo:

$$A_{n,m} = G \iiint_M r'^n a_{n,m} dm, \quad (2.49)$$

$$B_{n,m} = G \iiint_M r'^n b_{n,m} dm, \quad (2.50)$$

tem-se:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n [A_{n,m} \cos m\lambda + B_{n,m} \sin m\lambda] P_{n,m}(v) + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2(v)}{2} \quad (2.51)$$

Fazendo $A_{n,m} = C_{n,m}^W GM a^n$ e $B_{n,m} = S_{n,m}^W GM a^n$ e admitindo a coincidência da origem do sistema cartesiano com o centro de massa terrestre e a do eixo de rotação como eixo principal de inércia, $C_{1,0} = C_{1,1} = S_{1,1} = 0$, resulta-se (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006; GEMAEL, 2012):

$$W = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n [C_{n,m}^W \cos m\lambda + S_{n,m}^W \sin m\lambda] P_{n,m}(v) \right] + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2(v)}{2} \quad (2.52)$$

Essa expressão representa o geopotencial em harmônicos esféricos para um ponto (v, λ) a partir dos coeficientes adimensionais $C_{n,m}^W$ e $S_{n,m}^W$.

2.2.3 Esferopotencial em Harmônicos Esféricos

A expressão do esferopotencial em harmônicos esféricos pode ser obtida analogamente à expressão (2.52), considerando os coeficientes adimensionais $C_{n,m}^U$ e $S_{n,m}^U$ (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006; GEMAEL, 2012).

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n [C_{n,m}^U \cos m\lambda + S_{n,m}^U \sin m\lambda] P_{n,m}(v) \right] + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2(v)}{2} \quad (2.53)$$

Devido à simetria do elipsoide de revolução, essa expressão também é considerada um caso particular de (2.52), podendo ser escrita:

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^U \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(v) \right] + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2(v)}{2}, \quad (2.54)$$

Nota-se que os harmônicos setoriais e os tesserais se anulam pela simetria de rotação, e os harmônicos zonais ímpares se anulam pela simetria equatorial.

2.2.4 Potencial Anômalo em Harmônicos Esféricos

Dada a definição do potencial anômalo (Seção 2.1.3), e considerando as expressões em harmônicos esféricos do geopotencial (2.52) e do esferopotencial (2.53), os harmônicos esféricos do potencial anômalo podem ser escritos (HOFMANN-WELLWYNHOF e MORITZ, 2006; GEMAEL, 2012):

$$T = \frac{GM}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{n,m}^T \cos m\lambda + S_{n,m}^T \sin m\lambda) P_{n,m}(v) \right], \quad (2.55)$$

onde $C_{n,m}^T$ e $S_{n,m}^T$ representam a diferença entre os coeficientes adimensionais do geopotencial com os respectivos coeficientes do esferopotencial:

$$\begin{aligned} C_{n,m}^T &= C_{n,m}^W - C_{n,m}^U \\ S_{n,m}^T &= S_{n,m}^W - S_{n,m}^U \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.3 Anomalias e Distúrbio de Gravidade

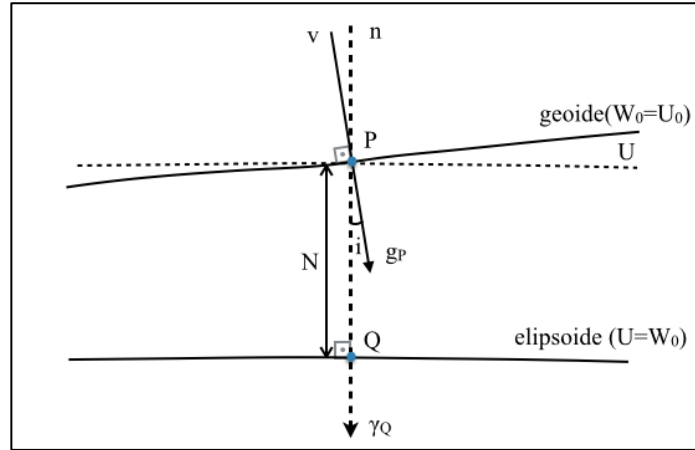
As anomalias gravimétricas são obtidas a partir dos vetores $\vec{g}$ e $\vec{\gamma}$, cujas as expressões foram vistas anteriormente (Seção 2.1), e de correções que dependem da altitude (ortométrica) e da densidade da crosta terrestre (GEMAEL, 2012).

Conforme a Figura 3, o vetor anomalia da gravidade é definido como a diferença entre a gravidade real no geoide (P) e a gravidade normal no elipsoide (Q):

$$\Delta\vec{g} = \vec{g}_p - \vec{\gamma}_Q. \quad (2.57)$$

Nota-se que, na Figura 3, n representa a normal ao elipsoide e v a normal ao geoide, ou linha vertical. Ainda a separação entre essas duas superfícies (elipsoide e geoide) é conhecida como ondulação geoidal (N), conceito que será mais aprofundado na Seções 3.2. e 4.2.

Figura 3 – Anomalias gravimétricas.



Adaptado de GEMAEL, 2012.

A diferença entre os vetores de gravidade real (g) e normal (γ) no mesmo ponto (P) é definida como distúrbio de gravidade:

$$\delta \vec{g} = \vec{g}_p - \vec{\gamma}_p, \quad (2.58)$$

cujo uso requer o conhecimento da ondulação geoidal, pois a gravidade teórica no ponto P é dada por:

$$\gamma_P = \gamma_Q + \frac{\delta \gamma}{\delta v} N, \quad (2.59)$$

onde γ_Q é a gravidade teórica na superfície do elipsoide

Nota-se que essa é uma grandeza diretamente relacionada com o potencial anômalo:

$$\delta \vec{g} = \text{grad}(W - U) = \text{grad } T, \quad (2.60)$$

O gradiente do geopotencial ao longo da vertical ($-\delta W/\delta v$) representa a gravidade (g) e, analogamente, o gradiente do esferopotencial sobre a normal ($-\delta U/\delta n$) indica a gravidade normal (γ). Considerando a normal coincidente com a vertical, tem-se a seguinte aproximação:

$$\gamma = -\frac{\delta U}{\delta n} \approx -\frac{\delta U}{\delta v} \quad (2.61)$$

Portanto, o distúrbio de gravidade pode ser escrito:

$$\delta \vec{g} = -\frac{\delta W}{\delta v} + \frac{\delta U}{\delta n} \approx -\frac{\delta W}{\delta v} + \frac{\delta U}{\delta v} \quad (2.62)$$

$$\delta \vec{g} = -\frac{\delta T}{\delta v} \quad (2.63)$$

ou ainda:

$$\vec{g}_p - \vec{\gamma}_p = -\frac{\delta T}{\delta v} \quad (2.64)$$

Considerando que o esferopotencial no geoide pode ser obtido a partir do esferopotencial no elipsoide, pela relação:

$$U_p = U_Q + \frac{\delta U}{\delta v} N, \quad (2.65)$$

ou seja:

$$U_p = U_Q - \gamma N. \quad (2.66)$$

Manipulando a expressão do potencial anômalo (2.34), o geopotencial num ponto P pode ser dado pela soma do esferopotencial com o potencial anômalo no mesmo ponto P:

$$W_p = U_p + T, \quad (2.67)$$

Substituindo a expressão (2.67) na (2.66):

$$W_p = U_Q - \gamma N + T. \quad (2.68)$$

Considerando a seguinte injunção para obtenção da equação (2.68):

$$W_p = U_Q = W_O, \quad (2.69)$$

obtém-se a fórmula de Bruns:

$$-\gamma N + T = 0, \quad (2.70)$$

$$N = \frac{T}{\gamma}. \quad (2.71)$$

Substituindo a expressão (2.59) em (2.64) :

$$\vec{g}_p - \vec{\gamma}_Q - \frac{\delta\gamma}{\delta v} N = -\frac{\delta T}{\delta v} \quad (2.72)$$

$$\Delta\vec{g} - \frac{\delta\gamma}{\delta v} N = -\frac{\delta T}{\delta v} \quad (2.73)$$

$$\Delta\vec{g} = -\frac{\delta T}{\delta v} + \frac{\delta\gamma}{\delta v} N \quad (2.74)$$

Utilizando a fórmula de Bruns (2.71) na expressão (2.74), obtém-se:

$$\Delta\vec{g} = -\frac{\delta T}{\delta n} + \frac{1}{\gamma} \frac{\delta\gamma}{\delta n} T, \quad (2.75)$$

Na equação (2.75) a anomalia de gravidade é representada pela por uma combinação linear do potencial perturbador e sua derivada normal. Essa combinação, expressa por uma equação diferencial, é conhecida como a “equação fundamental da Geodésia” (VANÍCEK e KRAKIWSKY, 1986).

2.4 Missões Gravitacionais

As missões gravitacionais são constituídas por satélites artificiais equipados com sensores que possibilitam a determinação do Campo Gravitacional Terrestre. Esses satélites trafegam em baixas órbitas (*Low Earth Orbit* - LEO), sendo bastante suscetível a perturbações causadas pela distribuição de massas terrestres, sejam correntes marítimas, atmosféricas ou distribuição sólida das rochas no interior da Terra. A detecção dessas perturbações nas orbitas dos satélites LEO por meio da técnica SST (*Satellite-to-Satellite Tracking*) combinada com dados de outros sensores possibilita a obtenção da variação do campo de gravidade e os longos comprimentos de onda (baixo grau) dos harmônicos esféricos. Dessa maneira é evidente a importância de tais satélites nos cálculos dos modelos de geopotencial (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006).

Entretanto, os satélites oriundos de missões gravitacionais apresentam outros objetivos específicos além do melhoramento dos modelos de geopotencial. De acordo com esses objetivos, os mesmos contêm os mais sofisticados instrumentos de coleta de dados, como GPS, DORIS (*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*), laser, gradiômetros, acelerômetros, entre outros.

A co-localização de diferentes tipos de sensores e de observação a bordo de satélites é extremamente importante para estabelecer conexões entre as diferentes técnicas de observação. Estas ligações e a complementaridade pode ser crucial para modelar corretamente determinados aspectos das observações (por exemplo, correção de forças não-gravitacionais com acelerômetros na determinação do campo de gravidade) e para separar os efeitos vindos de diferentes processos ou componentes do sistema Terra. Além disso, a disponibilidade de instrumentos complementares em um satélite (por exemplo, diferentes sistemas de rastreamento como GPS, SLR (*Satellite Laser Ranging*) e DORIS para determinação de órbitas precisas) permite a conexão de técnicas de medições em satélites e a detecção de tendências entre si.

Nesse contexto, três são as missões que merecem destaque devido às contribuições no campo da Geodésia Física: CHAMP (*CHAllenging Minisatellite Payload*), GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) e GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*).

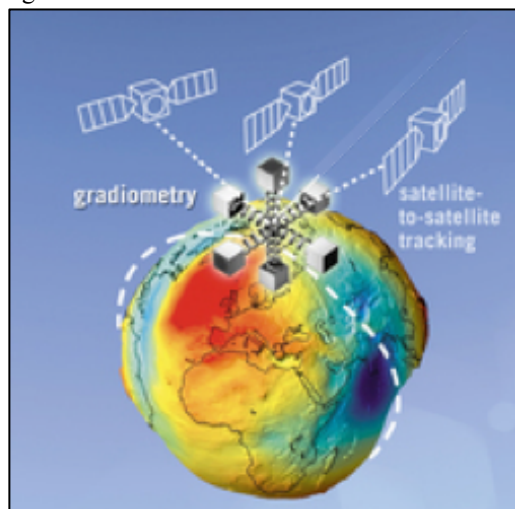
Desse conjunto, a missão CHAMP, gerenciada pela *German Research Center for Geosciences* (GPZ) é a mais antiga. Seu lançamento ocorreu em julho de 2000 no Cosmódromo de Plesetsk, Rússia. Sua altitude inicial foi de 454 km, e apesar da expectativa dessa missão ser de 5 anos, dados foram coletados até setembro de 2010, somando 10 anos de coleta de dados. Entre os objetivos específicos da missão, destaca-se a determinação dos longos comprimentos de onda do campo gravitacional estático e do campo magnético da crosta, juntamente com suas variações temporais, além de contribuir para estudos troposféricos e ionosféricos (temperatura, vapor d'água, conteúdo total de elétrons, etc.) pela técnica de radio ocultação GPS (SEEBER, 2003). Entre os equipamentos embarcados, destaca-se: receptores GPS de dupla frequência e sistema de múltiplas antenas, acelerômetros dispostos triaxialmente, refletores laser e magnetômetros (HOFMANN-WELLWYNHOF e MORITZ, 2006; SCHLIE, MURBÖCK e PAIL, 2014).

A missão GRACE surgiu de um projeto entre a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), organização americana, e a DLR (*Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt*), de origem alemã. Sua meta foi determinar o campo gravitacional da Terra com alta resolução e também suas variações temporais por um período de cinco anos. Adicionalmente, dados atmosféricos (troposfera e ionosfera) também são obtidos por radio-ocultação. Lançados simultaneamente em março de 2002 na mesma base de lançamento do CHAMP, os dois satélites gêmeos GRACE coletaram aproximadamente 13 anos de dados. Merece destaque o princípio de medição entre os satélites irmãos. Os satélites possuem um distanciamento de aproximadamente 220 km entre si. Visto que cada satélite é afetado individualmente por perturbações do campo gravitacional, um afastamento ou uma aproximação acontece entre os satélites irmãos, de acordo com essas perturbações. Com base em medições contínuas de distância com um alto nível precisão ($1\mu\text{m/s}$), fornecidas por um sistema de oscilador em banda-K (*K-Band Ranging System* - KBR), além dos dados fornecidos pelos acelerômetros, GPS e refletores laser embarcados, o campo gravitacional pode ser estimado (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006).

O satélite GOCE, a mais recente das missões, foi lançado em março de 2009 pela Agência Espacial Europeia (*European Space Agency* - ESA) e teve fim em novembro de 2013. O grande diferencial dessa missão é a expressiva melhora da qualidade dos modelos de campo gravitacional estáticos e modelos geoidais graças a maior precisão dos dados coletados. Dentre as metas do projeto, destaca-se a determinação das anomalias de gravidade com acurácia de 1 mGal, modelos geoidais com acurácia de 0,01 à 0,02 m e o armazenamento desses dados com resolução espacial menor que 100 km (SEEBER, 2003; HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006). Para representação do potencial gravitacional por meio de harmônicos esféricos com essa resolução é necessário a obtenção de todos os coeficientes pelo menos até o grau e ordem 200. Os principais instrumentos do satélite são receptores GNSS (rastreamento de GPS e GLONASS) de dupla frequência; refletores laser; e um gradiômetro triaxial.

Um detalhe interessante entre as medidas dos acelerômetros da missão GRACE se deve ao fato que elas podem ser tratadas como um gradiômetro unidimensional de base longa se considerada a distância entre os satélites irmãos (220 km). Em contraste, na missão GOCE o gradiômetro baseado em três pares de acelerômetros utiliza o conceito de bases curtas (0,50 m) em três direções ortogonais (Figura 4).

Figura 4 – Gradiômetro triaxial da missão GOCE.



Atualmente essas missões gravitacionais encontram-se inativas. Para a continuidade das medições temporais do Campo Gravitacional tem-se a previsão do lançamento da missão GRACE-FO (*Gravity Recovery And Climate Experiment-Follow On*) no ano de 2017 (CHRISTOPHE, BOULANGER, *et al.*, 2015). A continuidade desse tipo de missão é fundamental para o monitoramento das variações gravitacionais permitindo acompanhar a evolução geodinâmica da Terra, como o derretimento das camadas de gelo nos polos, variação do nível médio global de água, movimentação das placas tectônicas, monitoramento de fenômenos geológicos, etc.

2.4.1 Modelos Globais do Geopotencial

A função do potencial gravitacional desenvolvido em harmônicos esféricos pode ser expressa por coeficientes (Seção 2.2). Os Modelos Globais do Geopotencial (GGM - *Global Geopotential Model*) são formados por conjuntos de coeficientes dessa função harmônica e fornecem ao usuário diferentes produtos, dentre eles a ondulação geoidal.

Esses modelos são formados pela combinação de diferentes fontes de dados. Os primeiros GGMs surgiram na década de 60 (GUIER e NEWTON, 1965; LUNDQUIST e VEIS, 1966; WGS COMMITTEE, 1966; RAPP, 1968) com o surgimento dos primeiros satélites artificiais. Até a década de 80 os modelos apresentavam poucos coeficientes. Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento das missões gravitacionais – CHAMP, GRACE e GOCE – o grau e

ordem dos modelos aumentaram consideravelmente (SEEBER, 2003; PLAG e PEARLMAN, 2009).

O ICGEM (*International Centre for Global Earth Models*), um dos seis centros do IGFS (*International Gravity Field Service*) do IAG (*International Association of Geodesy*), disponibiliza aproximadamente 150 GGMs (BARTHELMES e KÖHLER, 2012). A comparação entre as ondulações de cada modelo e as ondulações obtidas por nivelamento/GNSS em referências de nível também é fornecida pelo ICGEM. A Tabela 1 apresenta alguns desses modelos, juntamente com seu o número máximo de coeficientes (Nº máx.) e o RMS (em metros) das diferenças obtidas para nos Estados Unidos, Canadá, Europa, Austrália, Japão e Brasil. Juntamente com os respectivos países encontra-se a quantidade de pontos utilizada na obtenção do RMS.

Tabela 1 – Alguns dos modelos geoidais disponíveis no *International Centre for Global Earth Models*, juntamente com o número máximo de coeficientes do modelo e o *root mean square* (RMS).

MODELO	Nº máx.	EUA (6169 pontos)	Canadá (2691 pontos)	Europa (1235 pontos)	Austrália (201 pontos)	Japão (816 pontos)	Brasil (1112 pontos)
EIGEN-6S2	260	0.405	0.322	0.393	0.337	0.476	0.512
EIGEN-6C3STAT	1949	0.247	0.129	0.212	0.213	0.078	0.447
EIGEN-6C2	1949	0.249	0.129	0.212	0.214	0.080	0.445
EIGEN-6C	1420	0.247	0.136	0.214	0.219	0.082	0.448
EIGEN-6S	240	0.446	0.392	0.449	0.397	0.520	0.539
EIGEN-51C	359	0.335	0.234	0.289	0.234	0.312	0.476
EIGEN-5C	360	0.341	0.278	0.303	0.244	0.339	0.524
EIGEN-CHAMP05S	150	0.784	1.045	1.215	0.660	1.613	0.777
EGM2008	2190	0.248	0.128	0.208	0.217	0.083	0.460
EIGEN-5S	150	0.630	0.671	0.737	0.475	0.909	0.714
EIGEN-GL04C	360	0.339	0.282	0.336	0.244	0.321	0.541
EIGEN-CG03C	360	0.346	0.373	0.355	0.260	0.326	0.534
EIGEN-CG01C	360	0.351	0.335	0.370	0.263	0.351	0.543
EIGEN-CHAMP03S	140	0.816	1.113	1.451	0.850	2.019	0.888
EIGEN-GRACE02S	150	0.739	0.727	0.828	0.538	1.027	0.744
EIGEN2	140	0.966	1.153	1.655	1.074	2.432	1.062
EIGEN1	119	0.973	1.152	1.793	1.397	2.538	1.225
EGM96	360	0.379	0.353	0.477	0.298	0.364	0.730
EGM96S	70	1.118	1.168	1.927	1.507	3.006	1.429
WGS72	28	2.971	2.248	3.529	2.984	7.610	3.721
WGS66	24	3.206	5.307	3.360	3.982	5.853	4.680

Fonte: ICGEM, 2015.

Entende-se que, em um aspecto global, pode-se adotar os modelos de geopotencial como um modelo geoidal do globo terrestre, uma vez que esses modelos fornecem as ondulações do geoide; porém, sem considerar os curtos comprimentos de onda. Com impossibilidade atual da adoção de um geoide único e com acurácia que atenda aplicações práticas em todo o globo terrestre, cada país tem

adotado um geoide oficial para a região, considerando mais fontes de dados no cálculo dos modelos.

3 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

A Teoria do Potencial admite um Problema Direto e um Problema Inverso. O primeiro resume-se na determinação do potencial considerando conhecida a distribuição das massas geradoras e o último trata-se literalmente do inverso do primeiro, ou seja, conhecendo-se a o potencial reconstrói-se a distribuição das massas geradoras. Partindo do pressuposto de uma determinada distribuição de esferas de mesma massa no interior de um objeto maior, obtém-se o exato potencial gerado pelas esferas; com a alteração da densidade de uma ou mais esferas, ainda com a mesma distribuição de esferas é possível obter o mesmo potencial anterior. Ainda, mantendo as densidades e alterando a distribuição dessas esferas é possível obter o potencial inicial. Portanto, infinitas distribuições de massa conduzem a um mesmo potencial soluções, ou seja, o Problema Inverso, de grande interesse para Geofísica, não possui solução única.

O Problema de Valor de Contorno (PVC) refere-se, tipicamente, a um problema governado por um sistema de equação diferencial ordinário ou parcial, definido sobre um domínio, onde são assumidas algumas restrições, as chamadas condições de contorno ou condições de fronteira. Uma solução para um problema de valor sobre o contorno é a solução do sistema de equações diferenciais que satisfaz as condições de contorno. O PVC na Geodésia busca determinar o campo de gravidade externo às massas por meio de uma função harmônica, sendo que a superfície limitante é desconhecida.

O Problema de Dirichlet⁵, ou o Primeiro PVC da Teoria do Potencial, é definido: dada uma função arbitrária em uma superfície S , para determinar a função harmônica V no interior ou no exterior da superfície S , considera-se conhecidos em S os valores da dada função V . Na Geodésia Física muitas aplicações utilizam a Integral de Poisson como solução para esse Primeiro Problema; porém, somente para o exterior da esfera.

Ainda existem outros dois PVC, um deles é o Problema de Neumann⁶, também chamado de Segundo PVC da Teoria do Potencial. Nesse caso, são conhecidos os valores da derivada normal $\partial V / \partial n$ na superfície S , ao invés da própria função harmônica V . No Terceiro PVC, Problema de Hilbert⁷, tem-se os valores de

⁵ Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1806-1859)

⁶ Neumann (1903-1957)

⁷ David Hilbert (1862-1943)

uma combinação linear entre os valores da função harmônica V e sua derivada normal $\partial V/\partial n$ ao longo da superfície S .

O terceiro problema mostra interessante aplicação prática na Geodésia Física, a determinação do geoide. Visto que o potencial perturbador pode ser expresso por uma equação diferencial (2.75), essa equação pode ser utilizada como condição de contorno para a superfície na qual a anomalia da gravidade está referida.

3.1 Integral de Stokes

A fórmula de Stokes ou integral de Stokes, publicada em 1949 por George Gabriel Stokes, possibilita a modelagem da superfície geoidal. Entretanto, essa fórmula somente deve ser aplicada sobre a Terra normal definida na Seção 2.1.2; ademais, deve-se considerar a injunção do geopotencial num ponto P na superfície do geoide (W_P) ser igual ao esferopotencial num ponto Q na superfície do elipsoide (U_Q), conforme a Equação (2.69).

A grande importância dessa integral para Geodésia Física está na solução do PVC em termos do potencial perturbador. Numa aproximação esférica, tem-se (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (3.1)$$

onde R representa o raio terrestre médio; Δg as anomalias de gravidade; $d\sigma$ o elemento infinitesimal de ângulo na superfície da Terra; ψ a distância esférica entre o ponto dado de anomalia de gravidade e o ponto a ser calculado; e $S(\psi)$ a função de Stokes:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos(\psi) - 3 \cos(\psi) \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (3.2)$$

Por meio da fórmula de Bruns (2.71), a expressão (3.1) pode ser escrita:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (3.3)$$

onde γ representa a gravidade normal no elipsoide.

Portanto, tem-se o cálculo da altura geoidal em função da anomalia gravimétrica, onde o núcleo de integração, a função de Stokes $S(\psi)$, proporciona aos dados mais próximos do ponto um peso maior.

3.2 Sistema Altimétrico e Número Geopotencial

A altitude de um ponto é genericamente definida como o comprimento da linha que projeta perpendicularmente determinado ponto à uma superfície de referência. Dessa forma três definições são essenciais:

- a superfície de referência;
- a linha de projeção que interliga o ponto à superfície; e
- o comprimento dessa linha.

O modo pelo qual são definidos tais elementos conduz a distintas conceituações de altitude. Ainda, segundo Freitas e Blitzkow (1999), o conceito de altitude está profundamente relacionado ao PVC da Geodésia Física, logo essa questão precisa ser assimilada, sobretudo, de um ponto de vista físico.

Basicamente existem dois sistemas altimétricos, um deles não leva em conta a distribuição de massa da Terra e conseqüentemente o campo de gravidade, são as altitudes geométricas; o outro, contrariamente, considera essa distribuição de massa, adicionando às altitudes um sentido físico, são conhecidas como altitudes físicas.

O fluxo d'água é governado essencialmente pelo campo gravitacional terrestre, portanto os projetos que envolvem mapeamento, distribuição de água, saneamento, recursos hídricos, entre outros, devem utilizar como sistema altimétrico as altitudes físicas para as aplicações práticas.

O número geopotencial (C) é um conceito que está intrínseco nos sistemas altimétricos físicos. Essa grandeza representa a diferença entre o potencial de gravidade gerado pela Terra em determinado ponto W_A e na superfície de referência do geopotencial W_0 , o geoide (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006).

$$C = \int_0^A g \, dn = W_A - W_0 \quad (3.4)$$

A unidade de medida do geopotencial é GPU (*GeoPotential Unity*), sendo 1 GPU correspondente à 1 kgal m, ou 1.000 gal m, ou então $10 \, \text{m}^2\text{s}^{-2}$. Ademais, o geopotencial do ponto é considerado positivo, nulo ou negativo se o ponto encontra-se respectivamente acima, sobre ou abaixo da superfície geoidal. Na prática, uma escala métrica é estabelecida por meio da divisão dessa grandeza (C) pelo valor de gravidade adequado (HOFMANN-WELLWNHOF e MORITZ, 2006):

$$H = \frac{C}{g} \quad (3.5)$$

Com o estabelecimento dessa escala métrica, surgem diferentes tipos de altitudes físicas, ou sistemas altimétricos que representam a relação hidrostática vinculada à diferença de nível entre o geopotencial de dois pontos. Desse modo, esses sistemas altimétricos podem ser utilizados com segurança para realização de uma rede vertical de referência ainda que eles apresentem diferentes escalas (FREITAS e BLITZKOW, 1999).

3.2.1 Superfícies de referência altimétrica

Vinculado a cada sistema altimétrico, tem-se uma dada superfície. Nas Ciências Geodésicas são consideradas basicamente cinco superfícies fundamentais, entretanto, nessa dissertação serão tratados somente três: a superfície física da Terra, sobre a qual são realizadas as operações geodésicas; a superfície geoidal, que é geralmente adotada como referência altimétrica; e a superfície elipsoidal, limitante do modelo geométrico adotado para a Terra, com o qual são efetuados os cálculos geodésicos. Nesse contexto, tem-se vinculadas a essas superfícies a altitude geométrica (h) e ortométrica (H), e ainda, a ondulação geoidal (N). Na Figura 5 são ilustradas essas três superfícies fundamentais e as altitudes envolvidas juntamente com as linhas vertical (v) e normal (n).

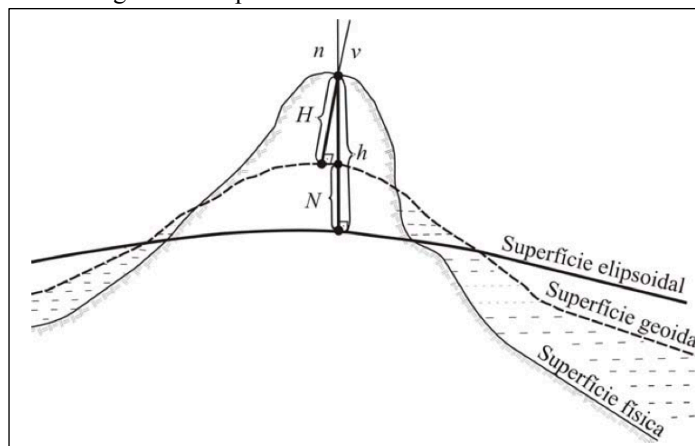
A altitude ortométrica é definida substituindo g na Equação (3.5) pelo valor médio de gravidade ($\bar{g}$) entre o ponto de interesse e o geoide, a superfície de referência do sistema, devido a esse fato, ela é considerada uma altitude física.

Metricamente, trata-se da distância contada ao longo da vertical entre a superfície geoidal e o ponto na superfície física (VANÍCEK e KRAKIWSKY, 1986; HOFMANN-WELLWYNHOF e MORITZ, 2006).

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \quad (3.6)$$

O cálculo de $\bar{g}$ exige o conhecimento dos valores de gravidade ou a distribuição de densidade ao longo da vertical, no interior da crosta, até o geoide. A impossibilidade de obtenção desses dados torna essa altitude de caráter teórico segundo estudiosos (RODRIGUES, 1988; FREITAS e BLITZKOW, 1999; GUIMARÃES, 2010).

Figura 5 – Superfícies fundamentais na Geodésia.



Fonte: CASTRO, 2002.

Além da ortométrica, existem outras altitudes físicas, por exemplo: altitude normal, se o valor da gravidade na expressão (3.5) for substituído pela gravidade normal média $\bar{\gamma}$ entre o elipsoide e o ponto na superfície física; altitude de Helmert, se o valor de gravidade for a gravidade média como obtida no ponto com altitude igual à metade do desnível bruto e a eliminar o platô de Bouguer; altitude Vignal, se utilizado o teorema de Clairaut para o cálculo da gravidade normal média; e altitude de Baranov, se consideras uma média entre a gravidade média real e normal. Mais detalhes podem ser vistos em Freitas e Blitzkow (1999).

A separação dada entre determinado ponto sobre a superfície da Terra e o elipsoide de referência é chamada de altitude geométrica, ou, no caso do GNSS, de altitude elipsoidal (h). Esse tipo de altitude pode ser facilmente calculado a partir das coordenadas cartesianas (X, Y, Z) referidas ao centro do elipsoide de referência.

Atualmente as tecnologias GNSS, além de outras técnicas como o nivelamento trigonométrico, podem ser facilmente empregadas para obtenção das altitudes geométricas. Diferentemente dos outros tipos de altitudes mencionados, a altitude geométrica não apresenta significado físico, pois, por exemplo, no caso do GNSS e do nivelamento trigonométrico, os modelos matemáticos envolvidos na obtenção da altitude desconsideram o campo de gravidade. Por consequência, pontos situados sobre a mesma superfície equipotencial podem apresentar altitudes diferentes, o caso inverso também pode ocorrer, tornando inviável sua utilização em atividades práticas que consideram o fluxo d'água.

Ainda a partir da Figura 5, pode-se obter uma relação entre essas altitudes se considerar a coincidência entre as linhas vertical (v) e normal (n) no ponto de interesse, possibilitando a conversão de altitudes (GEMAEL, 2012):

$$H \cong h - N. \quad (3.7)$$

Segundo Jekeli (2000) e Sjöberg (2006), a consideração da aproximação na Equação (3.7) pode levar a um erro de 0,00001% à 0,00002% na determinação da altitude ortométrica. Considerando um caso extremo onde a altitude chega à 8.000 m, com um erro de 0,00002%, essa aproximação causará um erro menor que 1,6 mm. Portanto, com a facilidade na obtenção da altitude geométrica a partir dos métodos de posicionamento GNSS, essa equação passou a ser bastante utilizada e o rastreamento por satélite passou a ser aplicado para fins de nivelamento, na obtenção de altitudes físicas. Essa técnica mais moderna passou a ser conhecida como “nivelamento por satélite”, nivelamento/GPS e, mais atualmente, nivelamento/GNSS.

Existem também outros métodos e instrumentos para a determinação das altitudes físicas, também conhecidos como “nivelamentos tradicionais”. Assim, em função da técnica e do instrumento utilizado esse processo pode ser classificado em: geométrico ou direto; trigonométrico; taqueométrico; e barométrico (ESPARTEL, 1980; PINTO, 1988).

3.2.2 Nivelamentos tradicionais

O nivelamento resume-se a um conjunto de operações e métodos para determinação de altitudes em pontos por meio da medição de desníveis em relação a um ponto inicial com altitude conhecida (MOREIRA, 2003; CASTRO, 2002).

Até a popularização das estações totais, o nivelamento geométrico era predominante utilizado nas atividades de engenharia as quais necessitavam de melhor acurácia, como o nivelamento de perfil em obras rodoviárias, saneamento, mineração, obras industriais, etc. Com os avanços tecnológicos o uso do nivelamento trigonométrico passou a ser mais frequente. A praticidade no armazenamento e processamento dos dados coletados em campo pelo próprio instrumento tornou-se bastante vantajosa, eliminando os erros de anotação e economizando tempo no cálculo das altitudes.

Entretanto, o método mais preciso para obtenção de altitudes ainda é o nivelamento geométrico. Pode ser usado, conforme ao nível de precisão desejada, para implantação de referências de nível de apoio altimétrico e determinação de altitudes em pontos de segurança e vértices de poligonais para projetos básicos executivos e obras de engenharia. O método é realizado com a utilização de níveis e miras verticais graduadas baseando-se na medida da diferença de nível entre pontos no terreno por meio de leituras correspondentes a visadas horizontais nas miras verticais localizadas nos pontos de interesse (ABNT, 1994). Para assegurar a alta precisão, o método exige cuidados técnicos para evitar a propagação de muitas fontes de erros sistemáticos, como por exemplo, as visadas entre as miras ré e vante equidistantes e de no máximo 100 m (IBGE, 1995). Trata-se de um processo lento, trabalhoso e oneroso. Ademais, para o contexto brasileiro, o IBGE classifica as linhas de nivelamento geométrico com base no erro obtido nas altitudes após o ajustamento entre o nivelamento e o contranivelamento, seção a seção, e acumulado na linha, conforme a Tabela 2.

Tabela 2 – Classificação do nivelamento geométrico do Sistema Geodésico Brasileiro.

O termo “k” representa o comprimento da linha nivelada, em quilômetros.

CLASSIFICAÇÃO:	Alta precisão	Precisão		Topográfico
	Fundamental	Áreas mais desenvolvidas	Áreas menos desenvolvidas	Local
Erro Padrão Máximo	$2 \text{ mm } \sqrt{k}$	$3 \text{ mm } \sqrt{k}$	$4 \text{ mm } \sqrt{k}$	$6 \text{ mm } \sqrt{k}$
Diferença máxima aceitável entre o nivelamento e o contranivelamento de uma secado	$3 \text{ mm } \sqrt{k}$	$6 \text{ mm } \sqrt{k}$	$8 \text{ mm } \sqrt{k}$	$12 \text{ mm } \sqrt{k}$
Diferença máxima aceitável entre o nivelamento e o contranivelamento de uma linha	$4 \text{ mm } \sqrt{k}$	$6 \text{ mm } \sqrt{k}$	$8 \text{ mm } \sqrt{k}$	$12 \text{ mm } \sqrt{k}$
Valor máximo para a razão entre a discrepância acumulada e o perímetro do circuito	0,5 mm / km	5 mm / km	5 mm / km	10 mm / km

Fonte: IBGE, 1995.

O nivelamento trigonométrico geralmente usado na determinação de altitudes em poligonais e levantamento de perfis para estudos preliminares. A medição da diferença de nível entre pontos no terreno é feita indiretamente por meio de teodolitos ou estações totais, a partir da medição de ângulos (verticais, zenitais ou nadirais) e da distância entre os pontos, considerando-se a altura do centro do limbo vertical do instrumento ao terreno e a altura sobre o terreno do sinal visada (ABNT, 1994). Esse método é mais utilizado em trabalhos topográficos locais ou na determinação da altura de pontos inacessíveis.

O nivelamento taqueométrico assemelha-se ao anterior, salvo que as distâncias são obtidas por taqueometria e a altura do sinal visado é obtida pela visada do fio médio do retículo da luneta do instrumento sobre uma mira no ponto de interesse. Dessa forma, a medida de desnível é obtida em relação à estação base. O método é mais utilizado em levantamentos de perfis para estudos expeditos (ABNT, 1994).

Quanto ao nivelamento barométrico, tem-se como princípio a diferença de pressão atmosférica entre dois pontos, obtida por meio de barômetro. Entretanto, pelo fato da pressão atmosférica ser influenciada pela temperatura do ambiente, umidade relativa e densidade do ar, esse método apresenta pouquíssima acurácia (CASTRO, 2002). Informações adicionais sobre esses métodos podem ser encontradas em Espartel (1980) ou em Pinto (1988).

3.2.3 Nivelamento por satélite

O nivelamento baseado em técnicas espaciais, tem mostrado vários benefícios em relação aos métodos tradicionais, como precisão, eficiência e economia (SEEBER, 2003; SANTOS e SÁ, 2006).

Objetivando a obtenção da altitude ortométrica, esse nivelamento inicialmente faz uso das tecnologias de posicionamento GNSS para obtenção inicial da altitude geométrica (h), baseando-se nas estratégias de processamento e métodos de posicionamento por satélite; em seguida, com o conhecimento da ondulação geoidal (N) dos pontos rastreados, por meio de um modelo geoidal, a transformação da altitude para ortométrica (H) é realizada pela relação $H \cong h - N$ (KOTSAKIS e SIDERIS, 1999; FEATHERSTONE, 2000; CASTRO, 2002; MONICO, 2008).

Visto que o nivelamento/GNSS se baseia na integração das tecnologias de posicionamento espaciais e os modelos de ondulação geoidal, as precisões das

altitudes ortométricas (σ_H) podem ser obtidas pela propagação de covariância, considerando as precisões iniciais das alturas geométricas (σ_h) e do modelo de ondulação (σ_N , discutidas na Seção 4.2):

$$\sigma_H = \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_N^2}. \quad (3.8)$$

A baixa qualidade dos modelos existentes leva a uma deterioração da precisão das altitudes ortométricas finais, mostrando uma desvantagem dessa técnica.

Existem diversos trabalhos que fazendo uso do método de nivelamento/GNSS para a validação de modelos geoidais, no Brasil (CASTRO, 2002; SILVA, 2002; LOBIANCO, 2005; SANTOS e SÁ, 2006; GUIMARÃES, 2010; MATOS, BLITZKOW, *et al.*, 2012) e no exterior (MARTINEC e GRAFAREND, 1997; NAJAFI-ALAMDARI, EMADI e MOGHTESED-AZAR, 2006; KUROISHI, 2009; WANG, SALEH, *et al.*, 2012; ODERA e FUKUDA, 2014).

O nivelamento/GNSS também pode contribuir para melhoramentos dos modelos geoidais. Basicamente as referências de nível e os demais vértices nivelados são ocupados com receptores GNSS adotando-se os métodos de posicionamento adequados. Dessa maneira, após os processamentos, tem-se disponível as coordenadas horizontais, altitudes ortométricas e geométricas das referências de nível, juntamente com a qualidade dessas informações. As ondulações geoidais das referências de nível podem ser obtidas por meio de um modelo geoidal disponível para região. Em seguida é feita a integração desses dados, usando um modelo matemático para a superfície, no caso da disponibilidade de vários pontos. No contexto local esse assunto é bem discutido por diversos autores. Detalhes dessa metodologia são mostrados em Monico (2008) e Featherstone *et al.* (1998).

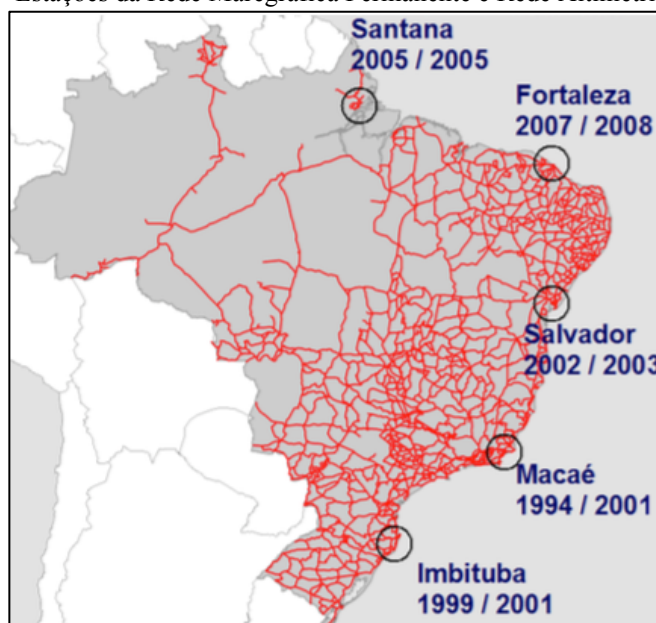
3.3 Datum Vertical

O *datum* vertical é definido como a origem da altitude, ou seja, a superfície de referência associada a um valor do potencial de gravidade sobre a mesma. Essa origem coincide com o nível médio dos mares local e pode ser materializada por meio de um marégrafo.

Desde 1958, a origem vertical das altitudes do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) é o nível médio dos mares materializado pelo marégrafo de Imbituba (SC)

durante o período de 1949 à 1957. Essa estação, além de outras quatro (Macaé - RJ, Salvador - BA, Santana - AP, Fortaleza - CE), faz parte da Rede Maregráfica Permanente para Geodésia (RMPG). A Figura 6 destaca o conjunto de marégrafos que fazem parte da RMPG juntamente com a RAFB, em vermelho. Estudos dessa rede maregráfica permitem o acompanhamento da evolução do *datum* vertical e também do nível médio em toda a costa brasileira (LUZ e GUIMARÃES, 2001).

Figura 6 – Estações da Rede Maregráfica Permanente e Rede Altimétrica do SGB.



Fonte: IBGE, 2013.

O sistema altimétrico também é fundamental na definição do *datum*, visto que esse relaciona um número com uma unidade à separação entre superfícies (GUIMARÃES, 2010). No contexto brasileiro a altitude ortométrica é “adotada” como altitude oficial, sendo empregada na solução de vários problemas cotidianos (saneamento, mapeamento, planejamento urbano, etc.).

Devido ao não paralelismo entre as superfícies equipotenciais, a realização somente da diferença de desníveis seja por qualquer método de nivelamento não proporciona diretamente a altitude ortométrica (GEMAEL, 2012), é necessário o acompanhamento de medições gravimétricas para o cálculo dessa correção (FREITAS e BLITZKOW, 1999; DREWES, SÁNCHEZ, *et al.*, 2002).

Entretanto as altitudes ortométricas do SGB não foram obtidas em concurso de medições de gravidade, dessa maneira o efeito sistemático do não paralelismo das equipotenciais é corrigido segundo a expressão (IBGE, 2011):

$$C_o = \frac{H_m(C_1 \sin(2\varphi_m) + 2C_2 \sin(4\varphi_m))\Delta\varphi}{(1 + C_1 \sin^2(2\varphi_m) + 2C_2 \sin^2(\varphi_m))}, \quad (3.9)$$

onde: H_m é a altitude média da seção de nivelamento considerada; φ_m é a latitude média da seção; $\Delta\varphi$ corresponde a diferença de latitudes entre os extremos da seção; C_1 e C_2 são os coeficientes do campo de gravidade normal, sendo para o sistema geodésico de referência GRS80, os valores: $C_1 = 0,0053023655$ e $C_2 = -0,0000059$.

Esse modelo matemático apenas considera o não paralelismo das superfícies equipotenciais do campo da gravidade normal (GEMAEL, 2012), corrigindo os efeitos das variações da gravidade somente em função da latitude, causando assim um acúmulo de possíveis erros.

Dessa maneira, diversos autores (FREITAS e BLITZKOW, 1999; LUZ e GUIMARÃES, 2001; GEMAEL, 2012) consideram o sistema altimétrico do SBG como “pseudo-ortométrico” ou normal-ortométrico.

3.3.1 Rede Altimétrica Fundamental Brasileira

O Sistema Altimétrico Brasileiro (SAB) é constituído pelo conjunto de pontos materializados no terreno, denominados como Referência de Nível (RN). Estas RRNN (plural de RN) são constituídas por peças de bronze chumbadas em blocos de concreto, na soleira de igrejas, monumentos, plataforma de estações ferroviárias, etc. O objetivo dessa rede de pontos é proporcionar a base altimétrica para os trabalhos de nivelamento referidos ao *datum* altimétrico.

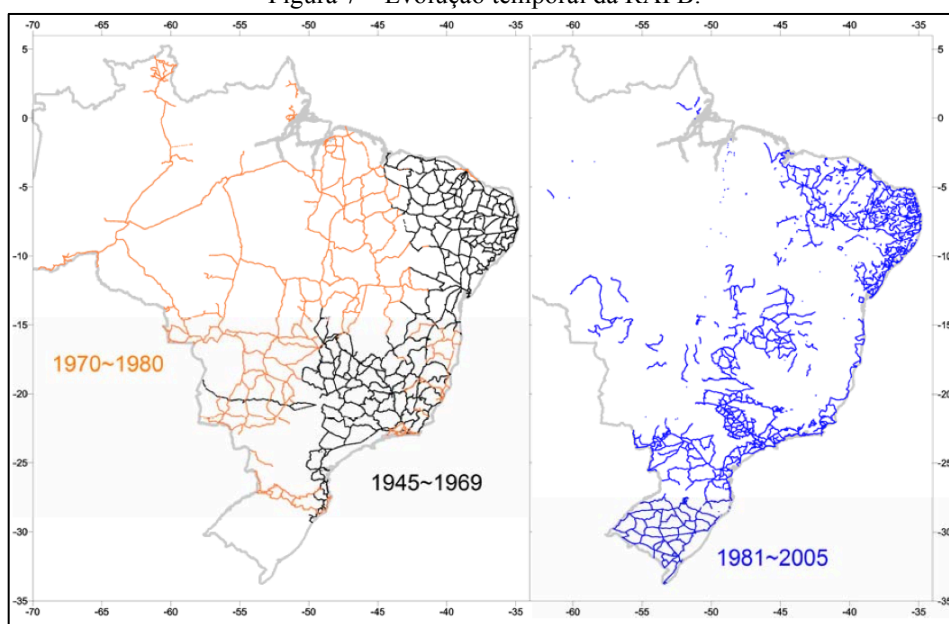
No ano de 1945, foram-se iniciados os levantamentos por nivelamento geométrico de alta precisão do IBGE, realizados pela Seção de Nivelamento (SNI) da Divisão de Cartografia (DC) e como consequência acabaram gerando a Rede Altimétrica do SGB. Os primeiros trabalhos aconteceram na localidade de Cocal, município de Urussanga, em Santa Catarina, onde se localiza a Referência de Nível RN 1 A (ALENCAR, 1990). Posteriormente, em 1946, os nivelamentos realizados foram conectados à estação maregráfica de Torres (RS), dessa maneira, possibilitando o cálculo das altitudes das RRNN implantadas.

No ano de 1958, contendo a Rede Altimétrica aproximadamente 30.000 km de linhas de nivelamento, o *Datum* Torres da rede foi substituído pelo *Datum* Imbituba, definido pela Estação Maregráfica de Imbituba, município de Imbituba (ALENCAR, 1990). Entre 1957 e 1958, devido à impossibilidade de estabelecimento

de RRNN no entorno do baixo Rio Amazonas uma pequena porção da Rede Altimétrica não pode ser conectada ao *Datum* de Imbituba. Logo, houve a necessidade do estabelecimento de outro *datum* para essa porção da rede, o *Datum* de Santana, no Porto de Santana (AP) (LUZ e GUIMARÃES, 2001).

Observando o quadro direito da Figura 7, as novas linhas de nivelamento constituem um conjunto espacialmente heterogêneo, somente em poucas regiões essas linhas formam redes com geometria adequada. Com isso, na seleção de linhas da RAFB para formação de sub-redes voltadas a estudos específicos, a heterogeneidade temporal é um resultado quase inevitável.

Figura 7 – Evolução temporal da RAFB.



Fonte: LUZ, 2008.

No decorrer dos anos o IBGE incorporou na RAFB dados de linhas de nivelamento de algumas instituições. Na região Sudeste do Brasil destaca-se as RRNN da Rede Altimétrica Fundamental do Estado de São Paulo (RAFSP) pertencentes ao Instituto Geográfico e Geológico (IGG) (IGG, 1962).

A rigor os dados da RAFSP têm ligação com o marégrafo em Santos (SP), o qual apresenta uma discrepância de aproximadamente +0,05 m com o marégrafo de Imbituba (ALENCAR, 1990; LUZ e GUIMARÃES, 2001; SÁ e VIEIRA, 2006). Dessa forma, uma incorporação de dados sem um ajustamento global, ou seja, a desconsideração da diferença entre *Datum*, pode prejudicar a qualidade das RRNN.

No último ajustamento global, o IBGE rejeitou cerca de 8.000 pontos em todo território brasileiro devido a ausência ou incoerência de informações nos memoriais descritivos. Portanto esses pontos não participaram do último ajustamento

da rede e consequentemente sua utilização pode acarretar em inconsistências ou numa piora da qualidade dos produtos proveniente desses dados.

3.3.2 Ajustamento da RAFB

A RAFB tem sofrido diversos ajustamento juntamente com sua evolução. O último ajustamento se destaca por apresentar uma característica essencial para a rede, a simultaneidade. Esse ajustamento foi realizado com um processamento simultâneo das mais de 74.000 observações de diferenças de nível coletadas no país desde 1945 (IBGE, 2011). O ajustamento foi executado pela Coordenação de Geodésia da Diretoria de Geociências, sob responsabilidade do IBGE, e gerou novos valores de altitudes consistentes em todo o território nacional, com suas respectivas estimativas de precisão para as 69.590 referências de nível que compõem a Rede Altimétrica Brasileira.

Para a análise dos resultados do ajustamento, o IBGE seguiu a metodologia e os procedimentos apresentados por Steeves e Fraser (1987). Todavia, o ajustamento possui algumas limitações, como: a sua dependência em apenas duas estações fixas, a ausência de injunções, a falta de redundância nas observações, característica do tipo de levantamento realizado e, principalmente, a aceitação de observações com qualidade regular no intuito de não perder vinculações ou consistência na rede.

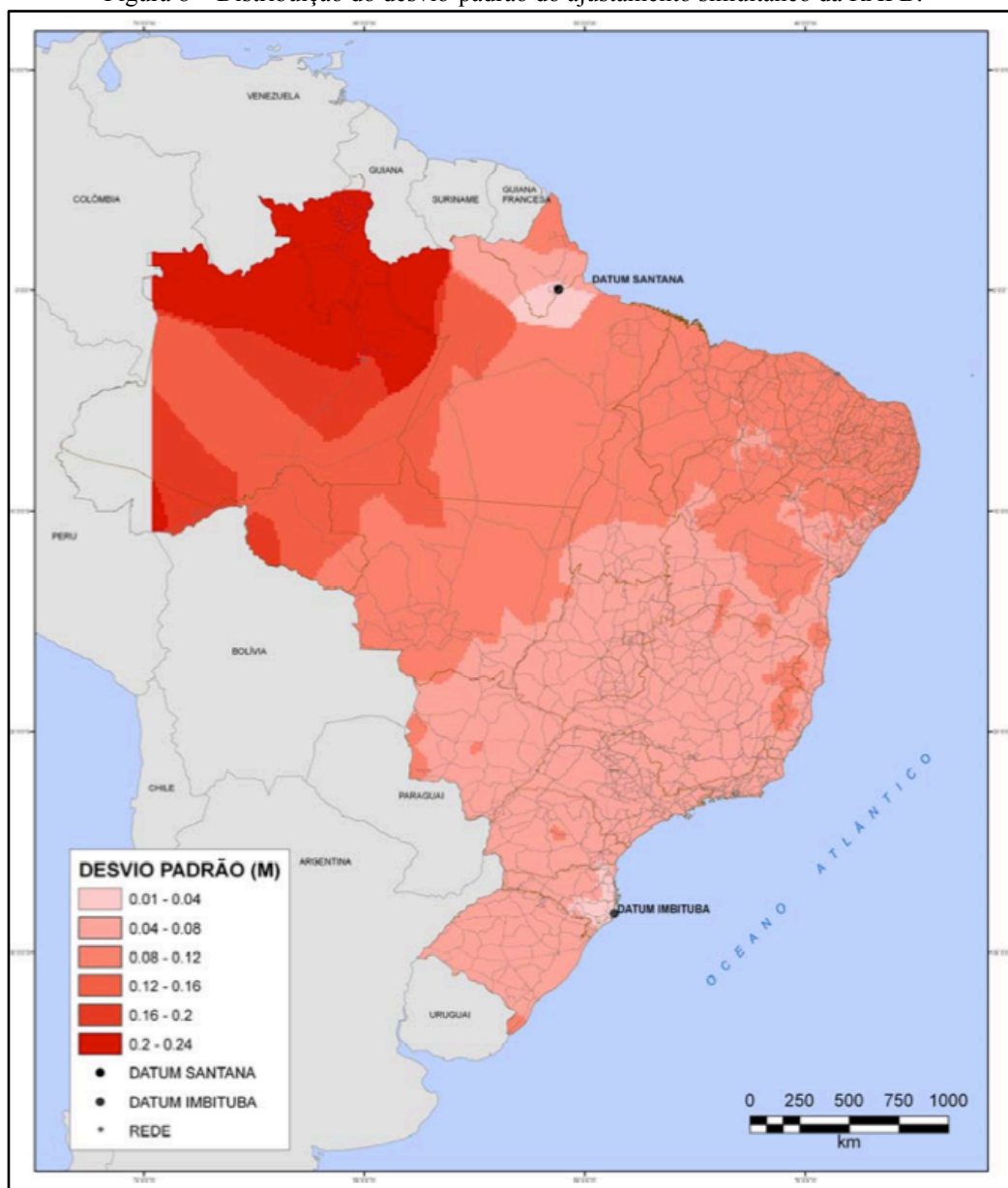
Os dados de entrada apresentaram as características:

• Estações de ajustamento	69.590
• Estações fixas	2
• Desníveis observados	74.169
• Graus de liberdade do ajuste	4.579
• Estações de ajustamento	69.590

Conforme (IBGE, 2011), o desvio-padrão das estações varia entre $\pm 0,001$ e $\pm 0,242$ m com média de 0,080 m, o mesmo disponibiliza a distribuição espacial dos desvios-padrão (Figura 8) variando de $\pm 0,01$ à $\pm 0,24$ m. A região que apresenta desvio entre $\pm 0,12$ e $\pm 0,24$ m possui 2.445 pontos, aproximadamente 3,5% do total de pontos da rede. Nessa região, a propagação de variância para transformação de

altitudes degrada muito a precisão dos dados, representando um grave problema ainda sem solução.

Figura 8 – Distribuição do desvio-padrão do ajustamento simultâneo da RAFB.



Fonte: IBGE, 2011.

Destaca-se que os dados indicam que 99,7% dos pontos estão com os resíduos do desnível entre estações de $\pm 0,01$ m e um pouco mais de 76% tem os resíduos dos desníveis de $\pm 0,001$ m.

Visto que uma rede de nivelamento altimétrica desse porte, envolve uma grande quantidade de observações, realizadas em condições heterogêneas (variações na topografia, nos instrumentos, e nos operadores), é possível que alguns erros grosseiros sejam presentes mesmo após o ajustamento.

Segundo (IBGE, 2011), a componente altimétrica do SGB ainda não esta completa, devido ao desconhecimento com alta precisão da superfície equipotencial que mais se aproxima do nível médio dos mares não perturbados, ou seja, o geoide. Portanto é de extrema importância a concentração de esforços em atividades de nivelamento geodésico, de maregrafia e de gravimetria para um melhor conhecimento do geoide.

4 INTEGRAÇÃO DO POSICIONAMENTO GNSS COM MODELOS GEOIDAIIS

A integração das tecnologias de posicionamento por satélite com os diversos modelos geoidais existentes apresenta diferentes finalidades, uma delas dá origem à técnica de nivelamento/GNSS, já descrita anteriormente (Seção 3.2.3), e outra resulta nos modelos geoidais híbridos. Para o desenvolvimento dessas técnicas é fundamental o conhecimento dos métodos e conceitos do posicionamento GNSS para obtenção da componente altimétrica e dos modelos geoidais para cálculo das ondulações geoidais.

4.1 Conceitos do Posicionamento por Satélite

O posicionamento geodésico ganhou destaque com o desenvolvimento dos satélites artificiais, resumidamente o GNSS, no qual engloba os sistemas GPS, GLONASS, Galileo, mais recentemente o BeiDou e os diversos sistemas de aumento. Essa tecnologia permitiu uma maior praticidade e redução de custos se comparada aos métodos convencionais de posicionamento

Os satélites GNSS são sistemas unidirecionais de emissão, isto é, os sinais são transmitidos somente pelos satélites. Suas órbitas variam em torno de 20.000 km acima da superfície terrestre, de acordo com o sistema de posicionamento (GPS, GLONASS, Galileo, etc). Os sinais se propagam das antenas dos satélites até as antenas dos receptores. Durante a propagação, os sinais estão sujeitos a diversos efeitos, por exemplo o atraso de propagação na ionosfera, atraso de propagação na troposfera, multicaminhamento, efeitos marginais de sinais, etc.

Os parâmetros obtidos por qualquer método de posicionamento GNSS proporciona as coordenadas cartesianas (X , Y e Z) de uma ou várias estações. Esses parâmetros podem ser convertidos de modo iterativo ou diretamente, a certo nível de precisão, no terno geodésico: latitude (φ) e longitude (λ) e altitude (h). A transformação entre coordenadas cartesianas e curvilíneas são mais detalhadas em Monico (2008). A componente vertical (h) apresenta fundamental interesse nessa pesquisa para integração de técnicas e métodos propostos.

4.1.1 Fontes de erros do posicionamento

Os erros existentes nas observáveis são inevitáveis e suas origens são adversas, podem ser classificados de acordo com sua natureza em sistemáticos, aleatórios e grosseiros. Falhas humanas, imperfeições no equipamento e condições ambientais são exemplos das fontes de erros. Os erros grosseiros são oriundos de falhas humanas e em alguns casos são facilmente detectáveis, por exemplo, injeção de coordenadas com Algarismos trocados, ou troca de sinais nos dados de entrada. Os erros cujas causas são conhecidas e, portanto, minimizados, são ditos erros sistemáticos. As fontes de erros que não podem ser modeladas ou apresentam causas desconhecidas classificam o erro como aleatório (GEMAEL, 1994).

Monico (2008) ainda classifica os erros sistemáticos do posicionamento GNSS em função de sua origem: satélite, propagação do sinal, receptor/antena e estação.

Os satélites podem apresentar erro de órbita, do relógio, atraso de fase do *hardware*, o efeito da relatividade e também o atraso das duas portadoras. O sinal pode sofrer influência da refração troposférica, refração ionosférica, perdas de ciclo, atraso de fase do *hardware*, rotação da Terra e o multicaminho do sinal. O receptor apresenta erro do relógio, erro entre canais e centro de fase da antena. A estação pode apresentar erro das coordenadas, multicaminho, marés terrestres, movimento do polo, cargas dos oceanos e pressão atmosférica.

Atualmente o atraso do sinal ionosférico é a maior fonte de erros no posicionamento GNSS. Esse atraso é influenciado basicamente pelo TEC (*Total Electron Content*) presente na ionosfera e a frequência do sinal. Como a frequência é um fator variante desse erro, receptores de dupla frequência possibilitam o processamento minimizando esse efeito utilizando como observável uma combinação linear (L1 e L2) livre da ionosfera (*ionosphere-free*). Contudo, essa observável elimina somente os efeitos de primeira ordem da ionosfera (MONICO, 2008).

Para os usuários com receptores de simples frequência, sem possibilidade de realizar uma combinação linear, a quantificação dos efeitos ionosféricos pode ser feita por meio dos coeficientes transmitidos nas mensagens de navegação, utilizando o modelo de Klobuchar (KLOBUCHAR, 1987), ou utilizando os arquivos IONEX (*IONosphere map EXchange format*) (SCHAER, 1999).

A influência da troposfera na propagação dos sinais GNSS varia basicamente em função do ângulo de elevação do satélite e da densidade da atmosfera. Dentre os efeitos que essa camada pode causar no sinal GNSS, destaca-se atenuações na potência do sinal GNSS, oscilações na amplitude da onda eletromagnética e um atraso do sinal (SPILKER Jr, 1996).

Basicamente, o atraso troposférico pode ser dividido em duas componentes: hidrostática e úmida. A primeira componente representa cerca de 90% do atraso troposférico e é gerada pela influência da atmosfera hidrostática (ZHD – *Zenithal Hydrostatic Delay*). Entretanto, o erro dessa componente é facilmente modelável, devido a sua pouca variação. A atmosfera úmida (ZWD – *Zenithal Wet Delay*), que representa o vapor d'água atmosférico, é responsável pela segunda componente do atraso troposférico. Esse, com menor influência no atraso troposférico, cerca de 10%, apresenta uma variação temporal e espacial muito maior, o que torna impossível uma previsão adequada a partir de medidas da umidade na superfície (SPILKER JR, 1996).

As componentes atmosféricas, em especial a ZWD, podem ser estimadas por meio de dados meteorológicos e de *softwares* adequados, como, por exemplo, o *Gipsy Oasis*. Outra possibilidade é a utilização de modelos empíricos, esse modelos descrevem o comportamento aproximado dos atrasos com base em dados medidos localmente e adequadas funções de mapeamento. Ainda, pode-se utilizar os modelos de Previsão Numérica do Tempo (PNT). Nessas as componentes ZWD e ZHD são calculados especificamente para cada dia e localização geográfica, além de possuírem variação no decorrer do dia (ALVES, ABREU e SOUZA, 2013).

Um dos métodos de posicionamento mais utilizados na atualidade é o posicionamento relativo, devido principalmente a sua praticidade e agilidade em meio a boas qualidades dos resultados (MONICO, 2008). Com a utilização desse método a maior parte dos erros é minimizada, principalmente para linhas de base curtas, entretanto, algo que permanece é o efeito do multicaminho (SOUZA, 2008). O multicaminho é de difícil modelagem, pois depende das condições físicas específicas de cada local, devido à correlação espacial presente entre o receptor e os objetos próximos. Para fins de posicionamento tenta-se, sempre que possível, a minimização desse efeito. Existem algumas possibilidades de atenuação como, por exemplo, o uso de antenas especiais do tipo *chocke ring* ou tecnologia *pinwheel*, e até mesmo métodos de processamento no receptor ou dados (SOUZA, 2008; ALVES, ABREU e SOUZA, 2013).

Basicamente, o efeito de multicaminho pode ser explicado pela a multi-reflexão dos sinais em uma ou mais superfícies antes de atingir a antena do receptor. Um ponto interessante desse efeito é seu estudo em outras áreas além do posicionamento, como monitoramento do nível de neve, de água e estudos de biomassa (NIEVINSKI, 2013). Para entender esse efeito é necessário considerar não apenas as relações entre o satélite, receptor e geometria do ambiente, mas também as propriedades eletromagnéticas dos sinais GPS e as características de propagação do local.

Apesar da tecnologia GNSS ficar mais acurada com o desenvolvimento de novos modelos de minimização de erros, ainda é tarefa do usuário planejar as estratégias para minimização desses efeitos com base nas estratégias e técnicas de processamento dos dados GNSS.

A seguir são tratadas principais estratégias de processamento de dados e os principais métodos de posicionamento GNSS que podem ser utilizadas para obtenção da componente altimétrica dos pontos de interesse.

4.1.2 Estratégias de Processamento

As observações efetuadas simultaneamente e continuamente durante uma coleta de dados GNSS são chamados de sessões e essa pode durar somente alguns minutos ou várias horas, dependendo do método utilizado e precisão desejada. Seeber (2003) destaca as principais estratégias utilizadas no processamento de dados GNSS:

- a) processamento de somente uma única estação (absoluto);
- b) processamento por linha de base simples e subsequente processamento em rede;
- c) processamento multi-estações; e
- d) combinação de diversas soluções para combinação em rede.

O ajustamento utilizando somente uma única estação (a) resulta em coordenadas da estação referenciadas ao elipsoide do sistema de referência, necessitando, dependendo das exigências do usuário, de uma transformação entre referenciais. Entretanto, utilizando somente observações do código, esse método pode apresentar baixa acurácia posicional, apresentando pouco interesse para aplicações geodésicas, mas com utilidade no sensoriamento remoto ou em projetos

de prospecção geofísica (SEEBER, 2003). Entretanto resultados mais acurados podem ser obtidos se modelados os efeitos sistemáticos existentes, aumentado o tempo de coleta das observáveis e utilizadas as observáveis mais precisas (fase da onda portadora) ou uma combinação entre observáveis.

O conceito de processamento de linhas de base simples (b) se baseia no ajustamento simultâneo de duas estações, geralmente utilizando a dupla diferença entre observações (SEEBER, 2003). Os resultados desse processamento são os componentes ΔX , ΔY e ΔZ , que compõem a linha de base, e a matriz covariância (MONICO, 2008). Posteriormente, é feito o processamento em rede, ainda considerando as linhas de base entre as estações. Deve-se destacar que no processamento em rede devem ser consideradas somente as linhas de base independentes, as linhas de base “não-triviais” devem ser descartadas.

O ajustamento de múltiplas estações (c) pode ser feito quando todos os dados GNSS são observados simultaneamente com três ou mais receptores. Não são determinadas as linhas de base, mas sim coordenadas da rede com a matriz covariância completa entre as estações. Para fins geodésicos, o ajuste multi-estação tem vantagens em relação à abordagem conceptual da linha de base, pois a acurácia potencial do GNSS é completamente explorada. Se as observações resultam de uma sessão, fala-se de uma solução sessão.

Várias sessões podem ser combinadas em um ajuste multi-sessões (d). A condição básica é que cada sessão seja ligado a pelo menos uma outra sessão de rede por meio de um ou mais estações idênticas onde as observações foram realizadas em ambas as sessões. Esse tipo de solução é rigoroso, se as matrizes covariâncias das soluções das sessões individuais são usadas corretamente (SEEBER, 2003).

4.1.3 Métodos de posicionamento GNSS

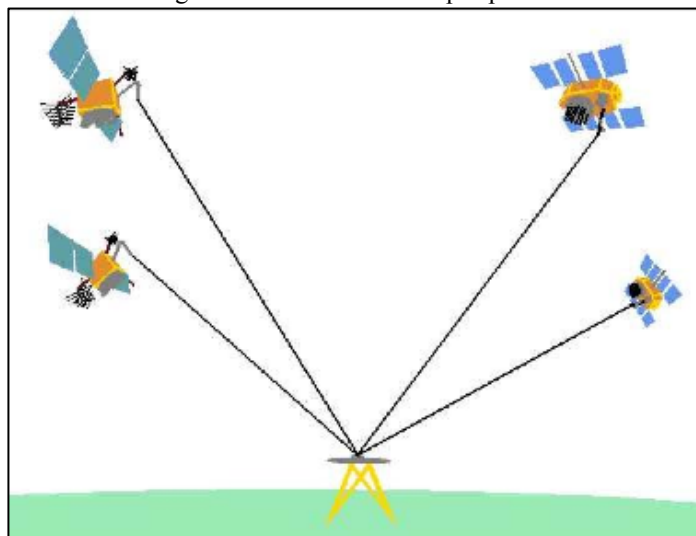
Diversos são as técnicas de obtenção da componente altimétrica, entre elas destacam-se as baseadas nos métodos de posicionamento por satélite. A literatura descreve diversos métodos de posicionamento GNSS com base na observável utilizada, no referencial adotado, no tratamento dos efeitos presentes na trajetória do sinal do satélite até o receptor, entre outras características (MONICO, 2008).

O conhecimento da posição de um objeto em relação a um dado referencial remete ao conceito de posicionamento. O referencial das coordenadas classifica o posicionamento em dois grupos. O posicionamento é classificado como absoluto (Figura 9) se as coordenadas são referenciadas ao geocentro; e quando as

coordenadas são dadas em relação a um referencial materializado por um ou mais pontos, o posicionamento recebe a classificação de relativo (Figura 10).

Em relação ao primeiro grupo, destaca-se: o PPS (Posicionamento por Ponto Simples), o qual considera a pseudodistância como observável GNSS, somente um único receptor e a utilização de efemérides transmitidas. Experimentos recentes desse método têm mostrado precisões variantes de ± 5 à ± 15 m (KRUEGER, HUINCA e MAIA, 2010; VANI, MONICO e SHIMABUKURO, 2013).

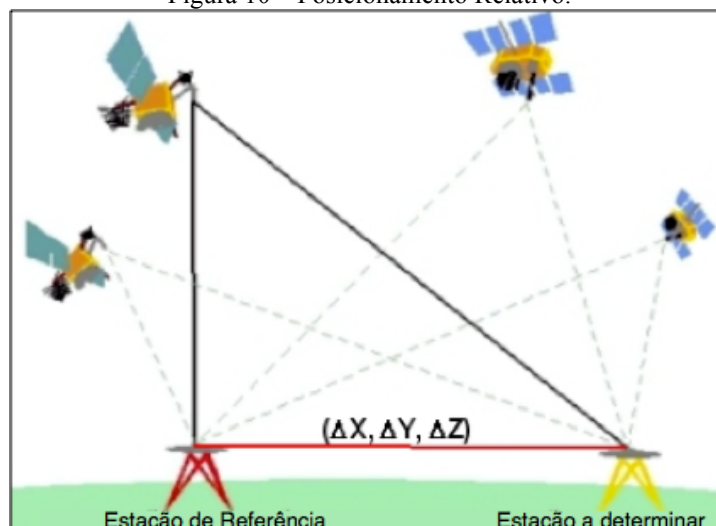
Figura 9 – Posicionamento por ponto.



Fonte: IBGE, 1983

Ainda do primeiro grupo, o PPP (Posicionamento por Ponto Preciso) é semelhante ao PPS, porém sua observável fundamental é a fase da onda portadora ou uma combinação dessa observável com a pseudodistância. Também são utilizadas as efemérides precisas junto com as correções para os erros dos relógios dos satélites, além das correções de todos os efeitos sistemáticos envolvidos, como movimento do polo, rotação da Terra, troposfera, ionosfera, etc. Um comparativo entre diversos *softwares* mostra uma variação nas coordenadas, indicando precisões de $\pm 0,02$ à $\pm 0,08$ m considerando uma coleta de dados de 24 horas (GAKSTATTER, 2013).

Figura 10 – Posicionamento Relativo.



Fonte: IBGE, 1983

Referente ao segundo grupo, o posicionamento relativo, utiliza-se duas ou mais estações, obtendo os elementos que compõem a linha de base (ΔX , ΔY e ΔZ) em relação a uma estação de referência. Esse método se baseia na Dupla-Diferença (da fase da onda portadora, pseudodistância ou combinação entre elas) entre dois receptores e um satélite em comum. Esses parâmetros após serem estimados, são adicionados às coordenadas da estação base, proporcionando as coordenadas da estação desejada. Ainda, o posicionamento relativo pode ser classificado em estático, estático-rápido, semicinemático ou pseudo-cinemático (*stop and go*), cinemático e cinemático em tempo real (*Real-Time Kinematic* - RTK) (MONICO, 2008).

Basicamente no posicionamento relativo estático dois ou mais receptores rastreiam simultaneamente os satélites visíveis por um período de tempo que pode variar de dezenas de minutos, mínimo de 20 minutos, até algumas horas. Os casos de posicionamento relativo que envolvem períodos de ocupação de até 20 minutos são considerados estático-rápidos, sendo interessante em termos de produtividade, porém indicado somente para linhas de base de até 10 km.

O posicionamento semicinemático considera a coleta de dados continuamente na estação de referência e por pelo menos dois curtos períodos na estação em que se pretende determinar as coordenadas. O intervalo entre esses períodos de ocupação deve ser suficiente para alteração da geometria dos satélites, ou seja, de 20 a 30 minutos. O método exige que o receptor continue rastreando os satélites durante as visitas às estações, entretanto a trajetória percorrida não é interesse de determinação.

Quanto ao posicionamento cinemático, pode ser pós-processado ou em tempo real, se as coordenadas do usuário são determinadas ao mesmo tempo em que a coleta é realizada. Entretanto, é necessário que o usuário aguarde o receptor na estação de referência solucionar o vetor da ambiguidade, o chamado período de inicialização, que pode variar de 20 à 30 minutos. Durante a coleta é necessário que os receptores mantenham uma conexão entre si. Destaca-se que para o caso do posicionamento em tempo real, chamado de RTK, deve-se utilizar, além de uma conexão entre receptores, uma conexão que permita a obtenção da previsão das orbitas dos satélites e as correções dos erros dos relógios dos satélites. Neste caso, utiliza-se uma conexão via internet ou via rádio, dessa maneira os receptores podem manter uma conexão entre si e o órgão responsável por enviar as previsões e correções.

A Tabela 3 mostra um comparativo das precisões obtidas com base no método de posicionamento GNSS e na observável utilizada, segundo o manual de Recomendações para Levantamentos Relativos Estáticos – GPS (IBGE, 1995).

Tabela 3 – Precisão das técnicas de posicionamento.

Método		Observação	Precisão (nível de confiança de 68,2%)
Por Ponto	Simples	Pseudodistância	15,3 m
	Preciso	Pseudodistância e fase	0,02 m
Relativo	Estático	DD pseudodistância e fase	0,01 à 1 ppm
	Estático-rápido	DD pseudodistância e fase	1 à 10 ppm
	Semi-cinemático	DD pseudodistância e fase	1 à 10 ppm
	Cinemático	DD pseudodistância e fase	1 à 10 ppm

Fonte: IBGE (1995).

Destaca-se que no posicionamento relativo a precisão das coordenadas é relacionada principalmente com o tipo de observável utilizada, na combinação entre as observáveis, o comprimento da linha de base entre as estações e o tempo de coleta das observações. Mais detalhes podem ser vistos em Monico (2008) e Seeber (2003).

4.2 Modelos Geoidais

Os modelos geoidais ou modelos de ondulação geoidais são responsáveis por representar a separação entre o modelo de referência, o elipsoide, e a superfície

equipotencial do campo da gravidade que mais se aproxima do nível médio dos mares não perturbados. Essa separação é conhecida como ondulação geoidal.

O método mais comum de validação dos modelos geoidais é a comparação das ondulações obtidas no nivelamento/GNSS em referências de nível, já discutido na seção 3.2.3, com as ondulações obtidas pelo modelo em estudo. A partir dessas diferenças são calculadas as estatísticas para estimação da consistência entre o modelo e o posicionamento GNSS, também vistas como a acurácia do modelo. Segundo Mikhail e Ackermann (1976) o conceito de acurácia leva em consideração os erros aleatórios e sistemáticos do modelo. A estatística mais utilizada como medida de acurácia dos modelos geoidais (σ_N) é o RMS, também visto como RMSD (*Root Mean Square of Differences*). O cálculo desse estimador pode ser realizado pela expressão (MIKHAIL e ACKERMAN, 1976):

$$RMS = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2} \cong \sqrt{\sum \frac{(N_{ref} - N_{mod})^2}{n}}, \quad (4.1)$$

onde μ e σ representam, respectivamente, a tendência e a dispersão. No caso, o RMS é dado pelas diferenças entre N_{ref} , que são os valores conhecidos das ondulações nas referências de nível, e N_{mod} , que representam os valores das ondulações geoidais nos mesmos pontos calculados pelo modelo de ondulação, sendo n o número total de discrepâncias.

Dentre os métodos de determinação dos modelos de ondulação geoidal pode-se citar a integração numérica da fórmula de Stokes e FFT (*Fast Fourier Transform* – Transformada Rápida de Fourier), LSC (*Least Square Collocation* - Colocação por Mínimos Quadrados), desenvolvimento em séries das funções harmônicas esféricas, obtenção direta da ondulação geoidal por nivelamento/GNSS, altimetria radar e as combinações entre elas (LOBIANCO, 2005; FEATHERSTONE e SIDERIS, 1998; BLITZKOW, 2003).

A ondulação geoidal de forma abreviada é expressa (BLITZKOW, 1996):

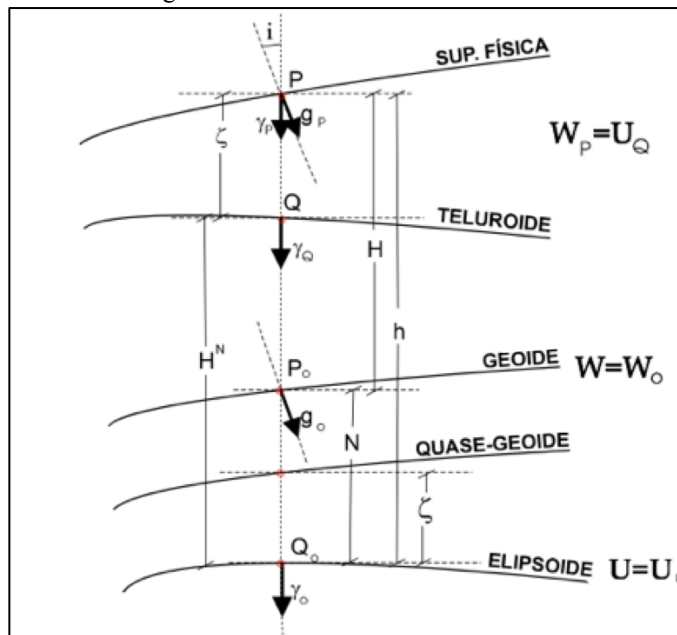
$$N(\theta, \lambda) = N_L(\theta, \lambda) + \delta N_L(\theta, \lambda), \quad (4.2)$$

onde primeiro termo (N_L) representa a componente da ondulação geoidal de longo comprimento de onda, que geometricamente é a separação entre o elipsoide e o

esferoide de referência representado pelo modelo do geopotencial; e o termo (δN_L) a componente de comprimento de onda mais curto, representado pela separação entre o esferoide e o geoide. Nesse contexto, os GGMs contribuem por meio dos longos comprimentos de onda, enquanto que os dados gravimétricos proporcionam os curtos comprimentos de onda.

A fórmula de Stokes, apresentada na Seção 3.1, considera o pressuposto da inexistência de massas externas ao geoide. Segundo a concepção de Molodenskii⁸, para fins de determinação dos modelos geoidais é necessário a realização da redução das medidas de gravidade à essa superfície geoidal (Seção 2.3). Reduções desse tipo causam uma redistribuição das massas, dando origem a uma Terra fictícia e alterando o potencial de gravidade. Dessa maneira a ondulação obtida pela expressão (3.3) representa a anomalia de altitude (ζ), ou seja, a separação entre o “geoide de Molodenskii”, conhecido como co-geoide ou quase-geoide, e o elipsoide de referência. Duas novas superfícies estão envolvidas na determinação do geoide, o co-geoide e o teluroide, esse é considerado como a superfície do campo da gravidade que possui esferopotencial igual geopotencial do ponto ($W_P = U_Q$). A anomalia de altitude (ζ) também pode ser obtida pela distância entre a superfície física e o teluroide ao longo da normal (Figura 11).

Figura 11 – Problema de Molodenskii.



Fonte: Blitzkow, 1996.

⁸ Mikhail Sergeevich Molodenskii (1909–1991)

A separação entre a superfície geoidal e co-geoide é conhecida como efeito indireto, o qual deve ser minimizado ao máximo na determinação dos modelos de ondulação.

Em teoria, a integral de Stokes deve ser estendida à todo globo terrestre. Entretanto, ao fazer uso dos modelos de geopotencial para obtenção dos longos comprimentos de onda da ondulação geoidal $N_L(\theta, \lambda)$, o cálculo da integral pode ser estendido somente a uma região próxima ao ponto. Assim o valor ψ_0 é utilizado como distância limite da integral para cada ponto. Nesse sentido, o núcleo de integração $S(\psi)$ da fórmula de Stokes original (3.3) deve ser modificada e os longos comprimentos de onda devem ser retirados das anomalias. A integral modificada pode ser escrita (BLITZKOW, 1996):

$$\delta N_L(\theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\psi=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g_L(\alpha, \psi) \delta S_L^m(\psi) \sin\psi \, d\psi \, d\alpha, \quad (4.3)$$

onde ψ representa a distância esférica entre o ponto de interesse e os pontos utilizados na integração; e Δg_L se refere a anomalia de gravidade onde estão presentes somente os curtos comprimentos de onda. O núcleo modificado de Stokes δS_L^m é expresso por:

$$\delta S_L^m(\psi) = \delta S_L(\psi) - \overline{\delta S_L}(\psi). \quad (4.4)$$

O termo $\delta S_L(\psi)$ é calculado segundo a expressão:

$$\delta S_L(\psi) = S(\psi) - S_L(\psi) \quad (4.5)$$

considerando $S(\psi)$ obtido pela expressão (3.2) e $S_L(\psi)$ ser expresso por expansão em série:

$$S_L(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\psi) \quad (4.6)$$

Ademais, $\overline{\delta S_L}(\psi)$ é obtido por:

$$\overline{\delta S_L}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(\psi_0) P_n(\cos \psi), \quad (4.7)$$

onde n é a ordem do polinômio de Legendre P_n , Equação (2.41); e $Q_n(\psi_0)$ representa os coeficientes de truncamento, expressos por:

$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (4.8)$$

A limitação da utilização dos longos comprimentos de onda dos GGM pode acarretar no erro de truncamento do modelo, entretanto, esse erro é uma função dos coeficientes de truncamento que, por sua vez, é função do núcleo de integração (FEATHERSTONE, EVANS e OLLIVER, 1998). A modificação atribuída ao núcleo da integral por meio de uma redução da magnitude ou aumento da taxa de convergência dos coeficientes de truncamento $Q_n(\psi_0)$ tem por consequência a minimização desse erro (LOBIANCO, 2005).

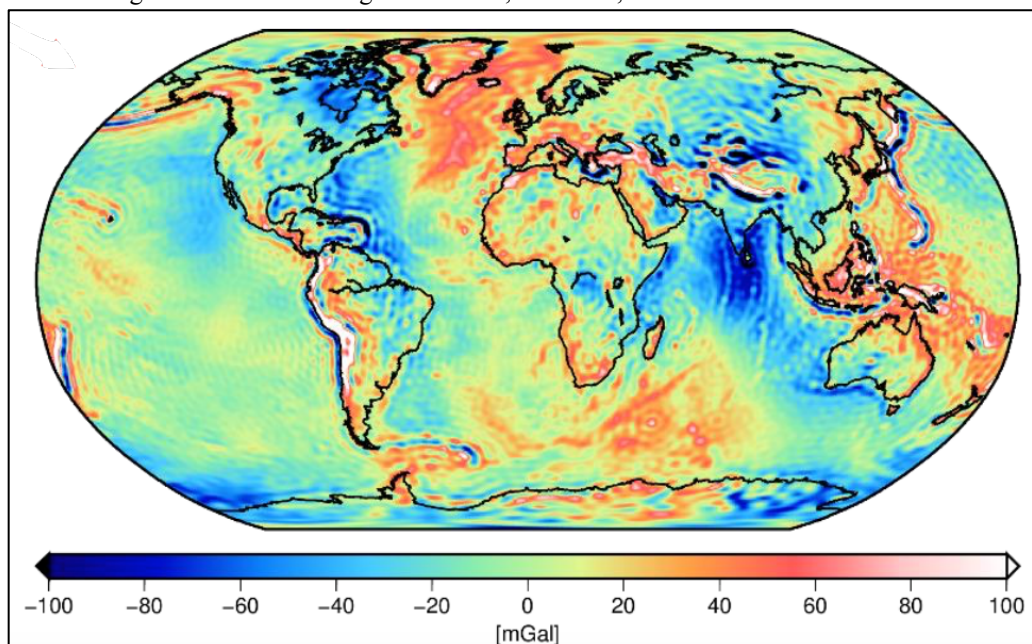
4.2.1 EGM08

Dentre os diversos modelos geoidais já publicados, merece destaque a série EGM (*Earth Gravitational Model*), sendo o EGM96 foi o primeiro modelo da série. Realizado pelo NGA (*National Geo-spatial Intelligence Agency*) em parceria com a GSFC (*Goddard Space Flight Center*) na metade da década de 90, esse modelo global apresenta resolução de 30' e uma precisão de $\pm 0,50$ à $\pm 1,00$ m. Conforme apresentado na Tabela 1 (Seção 2.4.1) seu grau e ordem chegam à 360.

O modelo mais recente dessa série, o EGM08, atingiu o grau 2190 e ordem 2159 dos coeficientes das funções harmônicas esféricas, com uma resolução de 5' e precisão em torno de $\pm 0,15$ m. Considera-se que esse GGM obteve uma grande melhora em relação ao modelo anterior (PAVLIS *et al.*, 2012).

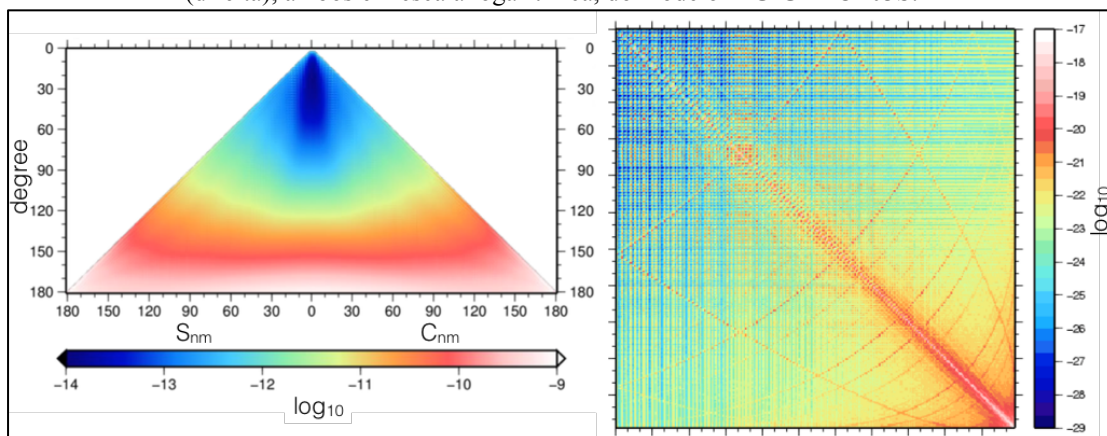
Para geração desse modelo de alta resolução foram cruciais os dados gravitacionais oriundos do satélite GRACE juntamente com sua matriz covariância, dando origem a um modelo global de anomalia médias com resolução de 5'; e um Modelo Digital de Terreno (*Digital Topographic Model* - DTM) de alta resolução.

Figura 12 – Anomalias gravimétricas, em mGal, do modelo ITG-GRACE03S.



Fonte: MAYER-GÜRR, 2007.

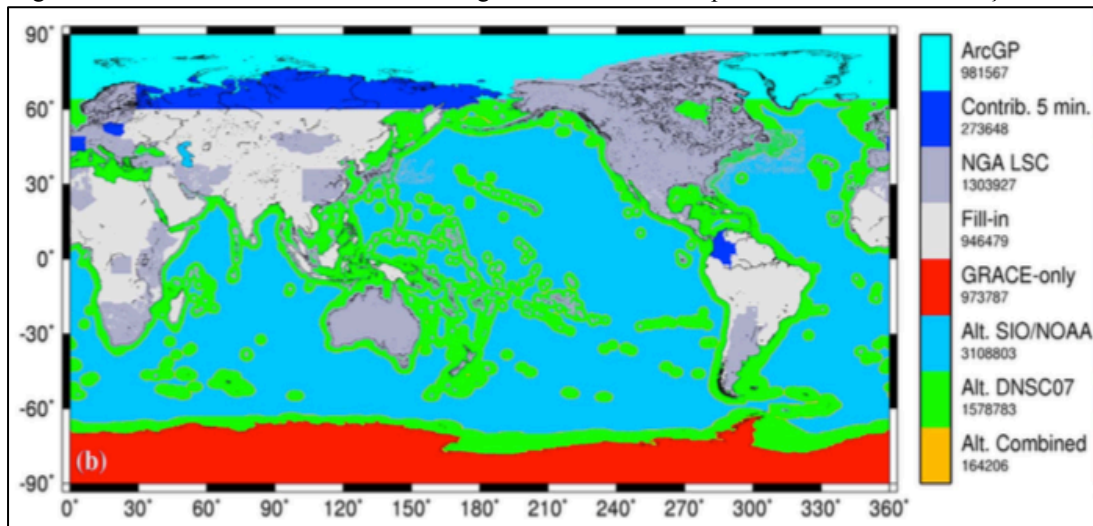
Figura 13 – Acurácias dos coeficientes dos harmônicos esféricos (esquerda) e matriz covariância (direita), ambos em escala logarítmica, do modelo ITG-GRACE03S.



Fonte: MAYER-GÜRR, 2007.

Os dados topográficos contribuíram para que o modelo obtivesse coeficientes até grau e ordem de 2160. No caso do EGM08, foi utilizado o DTM2006.0, no qual foi gerado pela junção dos dados da missão SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*) e seu modelo antecessor, o DTM2002 (SALEH e PAVLIS, 2002). Nesse DTM foram adicionados dados da missão ICESat na Groelândia e dados do projeto “BEDMAP” Antártica.

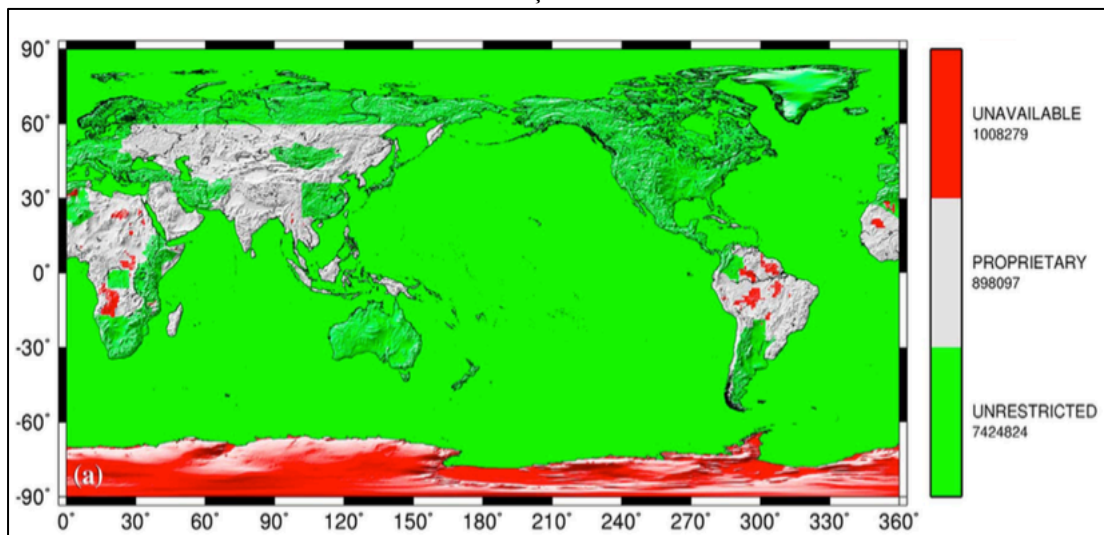
Figura 14 – Fonte dos dados das anomalias gravimétricas médias para um modelo de resolução de 5'.



Fonte: PAVLIS *et al.*, 2012.

As anomalias médias utilizada no GGM originaram de medidas terrestres (aéreas e marítimas) para as regiões continentais e satélites altimétricos (regiões oceânicas). Ambos os tipos de dados são interessantes contribuições de longos e curtos comprimentos de onda para o GGM. Dessa maneira a homogeneização dos dados é um fator relevante e influenciável na precisão do modelo. A Figura 14 fraciona as porções do globo pelas fontes de dados para o modelo digital de anomalias gravimétricas médias utilizadas no EGM08. As anomalias providas dos satélites altimétricos apresentam uma distribuição homogênea dos dados, entretanto os dados terrestres não partilham da mesma característica, apesar da cooperação envolvendo diversos países e órgãos de pesquisas na disponibilidade dos dados terrestres.

Figura 15 – Disponibilidade dos dados das anomalias gravimétricas médias para um modelo de resolução de 5'.



Fonte: PAVLIS *et al.*, 2012.

Estima-se que 12% do modelo global de anomalia não apresente dados de gravimetria terrestre. Na Figura 15 destaca-se em vermelho as regiões com ausência desse tipo de dado, na Antártica, Ásia, América do Sul e África. Em cinza, representando 42,9% do modelo, tem-se as regiões onde o modelo digital apresenta limitações com a resolução das anomalias de 15', resultando em harmônicos esféricos até grau e ordem 720. O restante do modelo, 45,1%, não apresenta restrições com a resolução das anomalias (PAVLIS *et al.*, 2008).

A determinação dos coeficientes de expansão em harmônicos esféricos que compõe o EGM08 foi realizada por um processo iterativo de ajustamento por mínimos quadrados:

- Passo 1. Um MSS (*Mean Sea Surface* – Nível Médio dos Mares) e um modelo gravitacional do GRACE é usado para obter os coeficientes de baixo grau e ordem dos harmônicos esféricos do DOT;
- Passo 2. As anomalia de ar livre são estimadas para os oceanos utilizando dados de altimetria por satélite e o modelo DOT estimado;
- Passo 3. As anomalias ar livre derivadas de altimetria por satélite são mescladas a seus respectivos valores na região continental. As anomalias médias são calculadas para uma malha de espaçamento de 5', onde os espaçamentos vazios são preenchidos com dados de gravimetria terrestre;

- Passo 4. A malha de anomalias ar livre é reduzida analiticamente para a superfície do elipsoide de referência;
- Passo 5. As anomalias reduzidas e seus erros estimados são dados de entrada para um estimador de mínimos quadrados em “bloco diagonal” (*Block-Diagonal* – BD), calculando uma estimação “terrestre” dos coeficientes de potencial gravitacional acompanhados de um conjunto de equações normais BD;
- Passo 6. A matriz de equações normais de dados GRACE, também aproximada, segue o mesmo padrão que foi usado nas equações normais BD de gravidade “terrestre”, adicionando valores nulos nos elementos fora da diagonal da matriz de interesse. Ambas matrizes BD de dados “terrestres” e GRACE são combinadas e invertidas para obter os coeficientes do potencial de soluções combinadas e seus erros estimados;
- Passo 7. O MSS obtido no Passo 1 e a solução combinada do Passo 6 são usadas para estimar um novo modelo DOT. A partir desse modelo DOT, o processo iterativo recomeça no Passo 2.

Tem-se a necessidade de uma aproximação das equações normais BD devido a grande quantidade de parâmetros da expansão em harmônicos esféricos para completar grau e ordem 2.159, envolvendo aproximadamente 4,7 milhões de coeficientes. Destaca-se que, segundo Pavlis *et al.* (2008), esse processo iterativo é muito econômico com respeito às necessidade de recursos computacionais. Entretanto, uma desvantagem do processo é a impossibilidade da estimativa simultânea do modelo DOT junto aos coeficientes de potencial gravitacional.

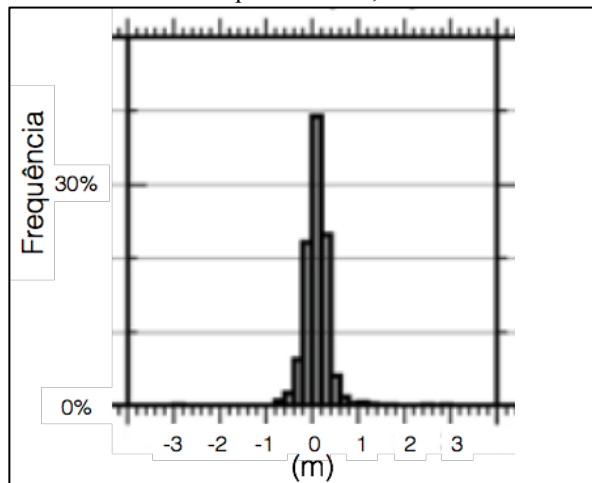
A principal vantagem desse ajustamento por mínimos quadrados é a obtenção de um modelo gravitacional combinado, juntamente com uma estimativa dos erros do modelo.

Uma análise global feita por Pavlis *et al.* (2008) das ondulações do EGM08 em comparação com as ondulações obtidas por nivelamento/GNSS em 12.305 referencias de nível revela um RMS de $\pm 0,103$ m. Resultados discrepantes foram obtidos pelo ICGEM (2015), fazendo uso de 12.036 pontos na comparação, nesse caso o RMS obtido foi de $\pm 0,2395$ m.

Para o caso brasileiro, as estatísticas obtidas por Matos *et al.* (2012) também divergem do ICGEM (2015). O primeiro, utilizando 844 pontos de

nivelamento/GNSS, obtém um RMS de $\pm 0,330$ m (Figura 16), enquanto que o ICGEM, com 1.112 pontos, apresenta um RMS de $\pm 0,460$ m (Tabela 1, seção 2.4.1).

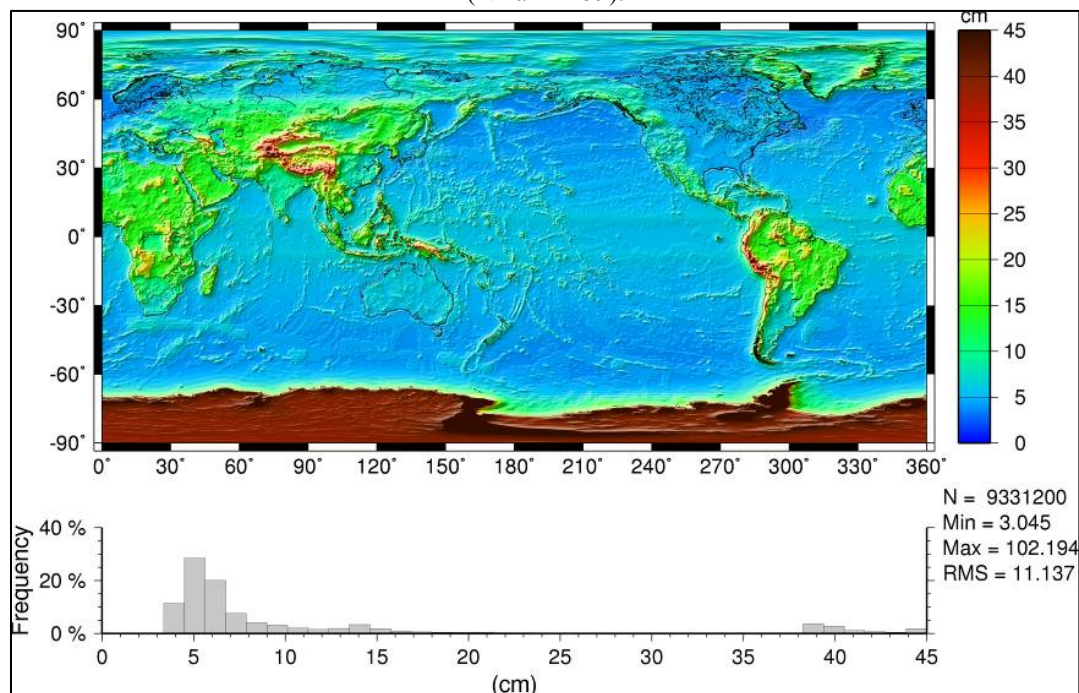
Figura 16 – Histograma das discrepâncias de 844 pontos, entre as ondulações do nivelamento/GNSS e do EGM08 para o Brasil, em metros.



Adaptado de MATOS *et al.*, 2012.

O EGM08 oferece diversos produtos aos usuários além da ondulação geoidal. Destaca-se os mapas de anomalia gravimétrica, anomalias de altitude, deflexão vertical e topografia dinâmica do oceano (*Dynamic Ocean Topography – DOT*). Dentre os erros inevitáveis no modelo global, pode-se citar os erros relacionados com a utilização de interpoladores, durante a obtenção de valores específicos em pontos de interesse; e os erros devido ao uso dos coeficientes em harmônicos esféricos. Esses ainda podem ser diferenciados em erros de comissão e erros de omissão. Resumidamente, os erros de comissão, também conhecidos como erros de propagação do modelo, correspondem ao fato que os coeficientes apresentam um erro inerente da qualidade dos dados medidos; os erros de omissão, chamados também de erro de truncamento, estão relacionados ao fato de que os coeficientes são limitados a um número máximo, esse erro depende basicamente da resolução dos dados utilizados (PAVLIS *et al.*, 2012).

Figura 17 – Erro de comissão e omissão para ondulação geoidal do EGM08 com resolução de 5' (Nmax=2159).



Fonte: PAVLIS *et al.*, 2012.

Um estudo de Pavlis (2009) baseado na comparação de dados do EGM08 com dados independentes do modelo estima que os erros da ondulação geoidal inerentes a utilização dos coeficientes dos harmônicos esféricos (comissão e omissão) em todo o globo seja de $\pm 0,111$ m, com $\pm 0,183$ m para os continentes e $\pm 0,061$ m para os oceanos (Figura 17). Destaca-se que o erro obtido pela comparação do nivelamento/GNSS ($\pm 0,103$ m) é menor que os erros de comissão e omissão, pois essas discrepâncias não puderam ser calculadas em regiões como Antártida, devido à inexistência de referenciais de nível.

4.2.2 MAPGEO2015

No Brasil, uma das primeiras versões existentes de modelos de ondulação geoidal foi o MAPGEO92. Esse apresentava precisão da ordem de $\pm 3,0$ m (BLITZKOW, CINTRA, *et al.*, 1993). Posteriormente, surgiu o MAPGEO98, com precisão da ordem de $\pm 1,5$ m (DINIZ, SOUZA, *et al.*, 2004). Entre as primeiras versões são desconhecidos os dados utilizados para geração dos modelos. A partir do MAPGEO2004, com precisão de $\pm 0,68$ m (MATOS, BLITZKOW, *et al.*, 2012), os dados passaram a ser melhor divulgados. Nesse, destaca-se a utilização do EGM96 até grau e ordem 180, um DTM de 1' desenvolvido pela Escola Politécnica da

Universidade de São Paulo (EPUSP), anomalias de Helmert com resolução de 10' e utilização da técnica FFT (LOBIANCO, BLITZKOW e MATOS, 2005).

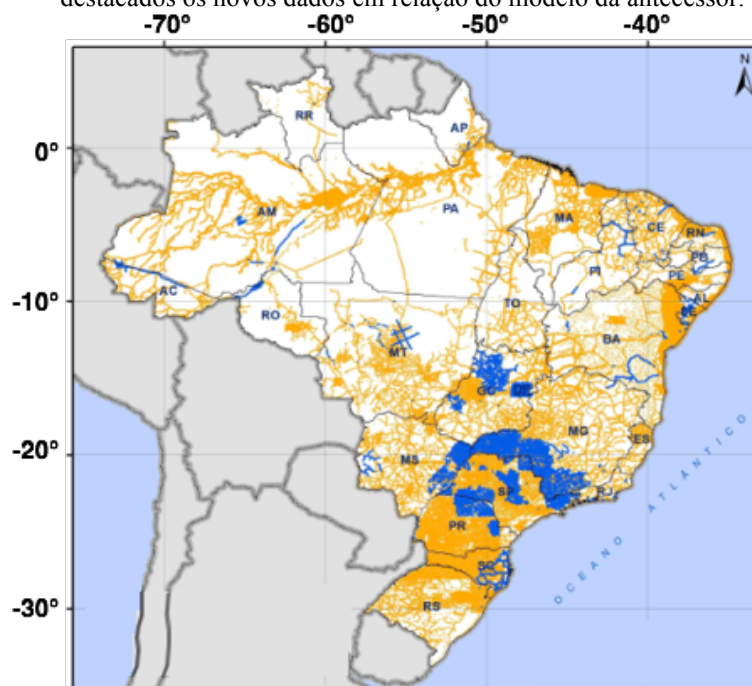
Em seguida, o modelo sucessor da série foi lançado em 2010, nomeado MAPGEO2010, com resolução de 5'. Tal modelo foi gerado utilizando o EGM08 até grau e ordem 150, 925.878 pontos gravimétricos e também o DNSC08GRA (ANDERSEN *et al.*, 2009) para obtenção das anomalia médias de ar livre.

Essa série de modelos de escala nacional foram desenvolvidos entre parcerias IBGE e EPUSP e o mais recente modelo geoidal desenvolvido foi lançado em novembro de 2015, denominado MAPGEO2015. Esse apresenta igual resolução espacial, porém uma melhora do RMS de aproximadamente 20% em relação à seu modelo antecessor (IBGE, 2015). Entre os dados utilizados para obtenção do modelo, destaca-se:

- nas regiões continentais as anomalias ar livre foram obtidas por meio de 947.953 pontos gravimétricos localizados em toda América do Sul e dados do pacote oferecido pelo *software* SHGEO;
- para as regiões oceânicas, as anomalias médias de ar livre foram obtidas por meio do modelo DTU10 (ANDERSEN *et al.*, 2010) para uma malha de 5';
- as anomalias completas de Bouguer e de Helmert, o efeito topográfico direto (*Direct Topographical Effect* - DTE), o efeito topográfico indireto primário (*Primary Indirect Topographical Effect* - PITE), o efeito topográfico indireto secundário (*Secondary Indirect Topographical Effect* - SITE) e o efeito atmosférico direto (*Direct Atmospheric Effect* - DAE) foram calculadas por meio do *software* canadense SHGEO (*Stokes-Helmert Geoid Software*);
- o DTM utilizado foi o SAM3s_v2 de resolução de 3" (BLITZKOW, MATOS, *et al.*, 2008), gerado a partir de dados da missão altimétrica SRTM3 juntamente com dados do modelo DTM2002 (SALEH e PAVLIS, 2002); e
- o modelo geopotencial *European Improved Gravity model of the Earth by New techniques* (EIGEN-6C4) de grau e ordem 200 foi usado para obtenção dos médios e longos comprimentos de onda (IBGE, 2015).

A distribuição espacial dos dados gravimétricos é mostrada na Figura 18, onde são destacados em azul 18.485 pontos que foram acrescentados somente no território brasileiro em relação ao seu modelo antecessor. Nota-se que a região de São Paulo foi favorecida pela adição desses dados. Dentre as novidades desse modelo, merece destaque a utilização Redes Neurais Artificiais (ANN – *Artificial Neural Network*), nas regiões Sul e Sudeste do Brasil, para obtenção de anomalias de Helmert em regiões com vazios gravimétricos (MACHADO, BLITZKOW e MATOS, 2013).

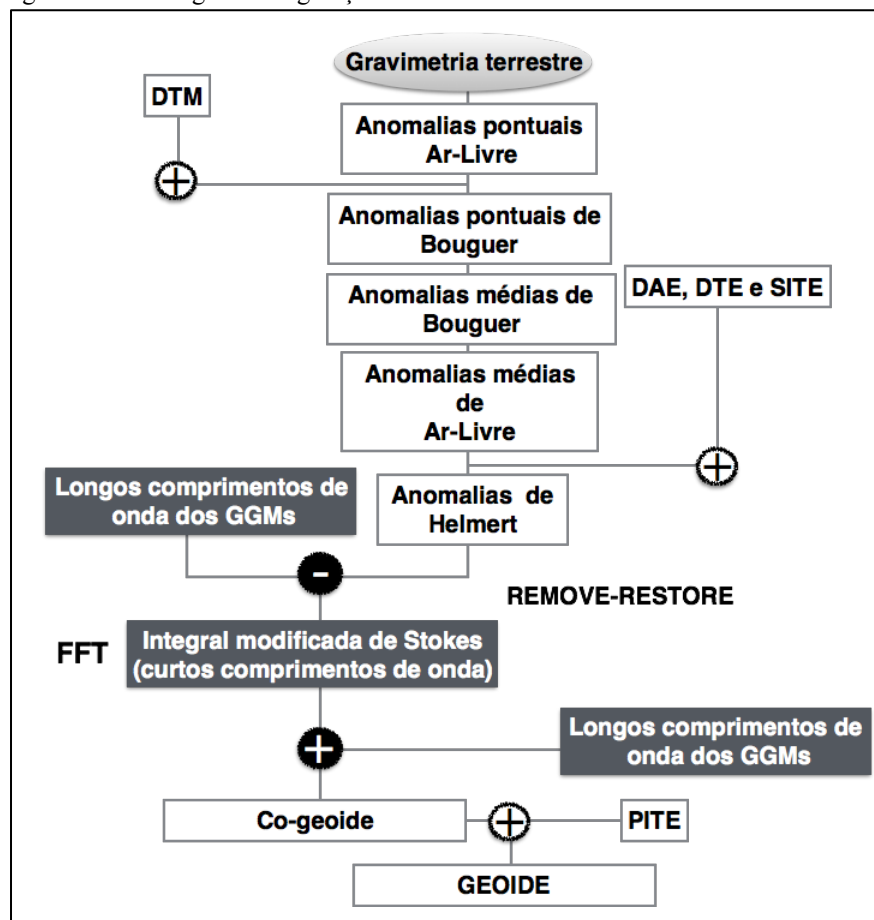
Figura 18 – Dados gravimétricos terrestres utilizados na geração do MAPGEO2015, em azul são destacados os novos dados em relação do modelo da antecessor.



Adaptado de IBGE, 2015.

O processo de geração do MAPGEO2015, que também foi utilizado no desenvolvimento do GEOIDSP2014, é mostrado na Figura 19. Destaca-se no processo o uso da FFT e a integral modificada de Stokes, juntamente com uso da técnica *Remove-Restore*.

Figura 19 – Fluxograma da geração dos modelos MAPGEO2015 e GEOIDSP2014.

Adaptado de Guimarães *et al.*, 2013.

O esquema para a determinação desses modelos geoidais pode ser resumido em 5 etapas (BLITZKOW, 2003; GUIMARÃES, MATOS e BLITZKOW, 2013):

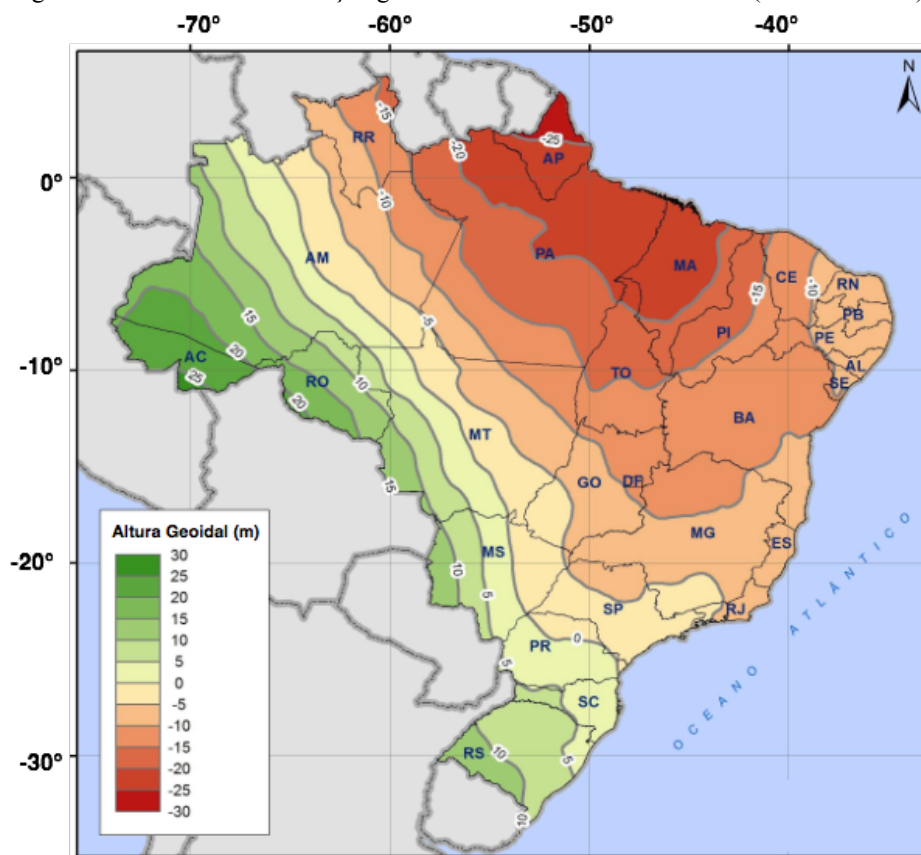
- Etapa 1. Obtenção das anomalias de gravidade ar livre pontuais através de dados gravimétricos terrestres (coordenadas, altitude ortométrica e aceleração da gravidade);
- Etapa 2. Cálculo das anomalias pontuais de Bouguer completa a partir das anomalias ar livre pontuais e o DTM. Em seguida, as anomalias de Bouguer médias são obtidas para uma malha regular.
- Etapa 3. Cálculo das anomalias de gravidade de Helmert na superfície da Terra considerando as anomalias ar livre na malha regular, o DTE, o DAE, e o SITE (ELLMANN e VANÍCEK, 2007);
- Etapa 4. *Remove-Restore*: Os longos comprimentos de onda são removidos do GGM e tem-se a utilização da integral modificada de Stokes (FEATHERSTONE, 2003) utilizando a técnica FFT.

Em seguida, são adicionados os longos comprimentos de onda, dando origem ao co-geoide.

Etapa 5. Adição do PITE no modelo do co-geoide dá origem às ondulações do modelo geoidal.

No resultado desse processo, a Figura 20 mostra os valores das alturas geoidais do MAPGEO2015 referenciadas em SIRGAS (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas) 2000 sobre o território brasileiro.

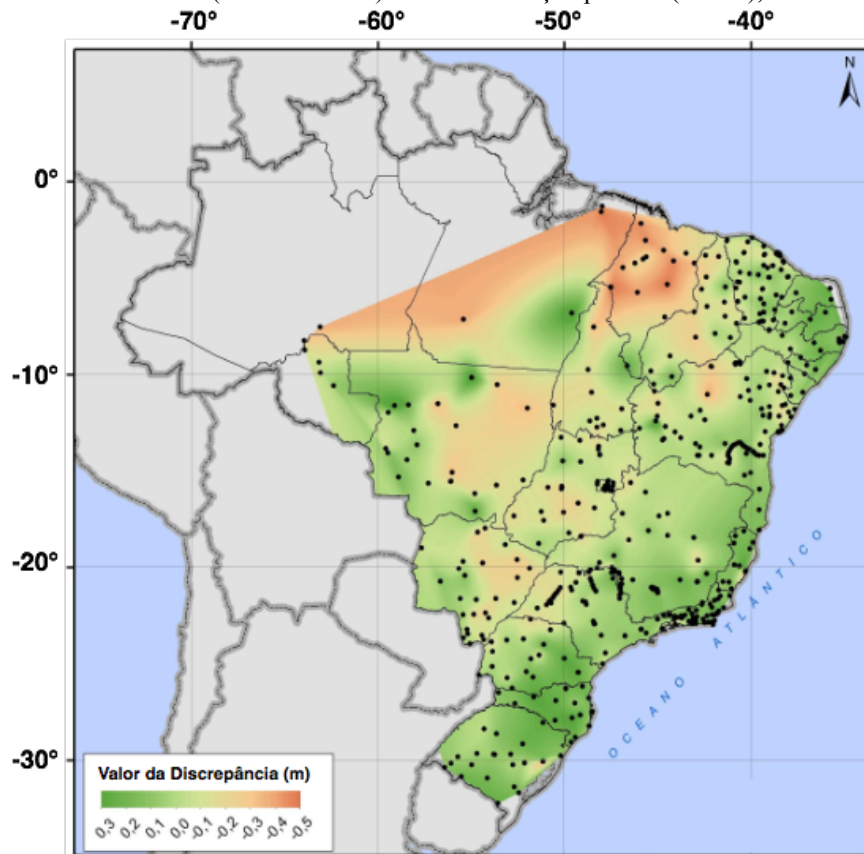
Figura 20 – Modelo de ondulação geoidal nacional – MAPGEO2015 (SIRGAS 2000).



Fonte: IBGE, 2015.

O relatório técnico elaborado pelo IBGE (2015), utilizando 592 pontos de nivelamento/GNSS, indicam que o modelo apresenta uma acurácia (RMS) de $\pm 0,17$ m. Os valores pontuais das discrepâncias podem ser vistos na Figura 21. Nota-se tendências regionais positivas para regiões próximas ao litoral brasileiro e no interior do estado, tendências negativas principalmente no Estado do Maranhão.

Figura 21 – Histograma das discrepâncias (esquerda) entre 844 pontos nivelamento/GNSS e MAPGEO2015 (SIRGAS 2000) e sua distribuição pontual (direita), em metros.



Fonte: IBGE, 2015.

As instituições envolvidas no desenvolvimento desse modelo geoidal continuam coletando dados gravimétricos desde a última atualização.

4.2.3 GEOIDSP2014

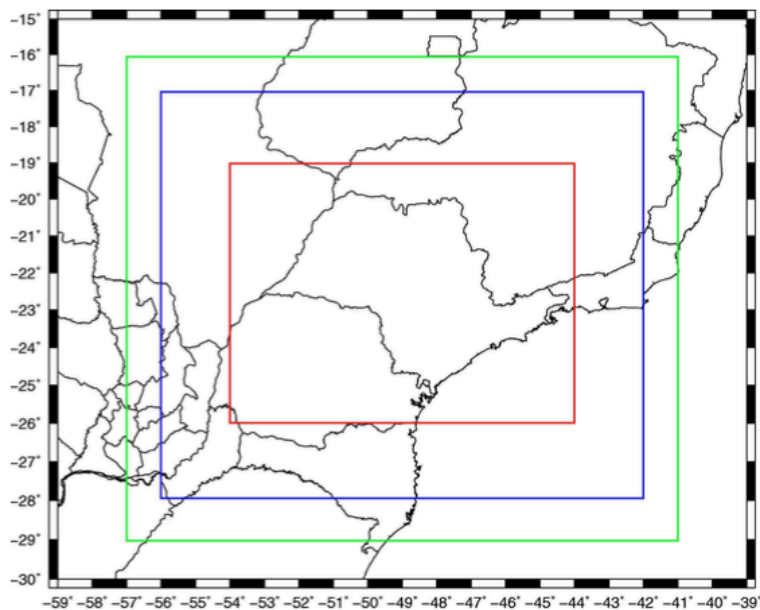
Dentre os diversos modelos geoidais disponíveis para o Estado de São Paulo, merece destaque o GEOIDSP2010 (GUIMARÃES, 2010). Esse modelo foi gerado com base em 6.753 estações gravimétricas provenientes de diferentes fontes: projeto temático FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), empresas públicas e privadas, além da contribuição do IAG-USP. Uma análise do modelo, utilizando 199 pontos de nivelamento/GNSS, mostra uma acurácia de $\pm 0,21$ m (GUIMARÃES, 2010).

A versão mais atualizada do GEOIDSP foi gerada no ano de 2014 (GUIMARÃES, DE MATOS e BLITZKOW, 2015). Dentre os dados utilizados para obtenção do GEOIDSP2014 destaca-se:

- as anomalias ar livre para as regiões continentais do modelo foram calculadas utilizando 9.788 pontos gravimétricos localizados dentro e no entorno do Estado de São Paulo;
- para as regiões continentais, as anomalias completas de Bouguer foram geradas para uma malha de 5' a partir das anomalias médias ar livre dos dados gravimétricos, nos oceanos, essas anomalias foram obtidas com o modelo DTU10 (ANDERSEN, 2010) com resolução de 1';
- as anomalias de Helmert, o DTE, o DAE, o SITE e o PITE foram calculadas por meio do *software* SHGEO.
- sobre o continente, o DTM utilizado foi o SAM3s_v2 (BLITZKOW, MATOS, *et al.*, 2008), para os oceanos o DBM (*Digital Bathymetric Model*) foi o ETOPO2v2c;
- o modelo geopotencial EIGEN-6C3STAT (FÖRSTE, BRUINSMA, *et al.*, 2011) até grau e ordem 200 serviu de base para obtenção dos médios e longos comprimentos de onda.

Analogamente ao MAPGEO2015, a técnica FFT com modificação do núcleo de Stokes (FEATHERSTONE, 2003) foi utilizada para obtenção das ondulações do GEOIDSP2014. Uma comparação entre esses modelos mostra que a diferença entre os modelos não é a metodologia, mas sim os dados de entrada dos modelos. Devido a região de abrangência, o MAPGEO2015 fez uso de todos dados disponíveis para América Latina enquanto que o GEOIDSP2014 se concentrou na região de São Paulo. A Figura 22 mostra a área de abrangência dos principais modelos utilizados no GEOISP2014.

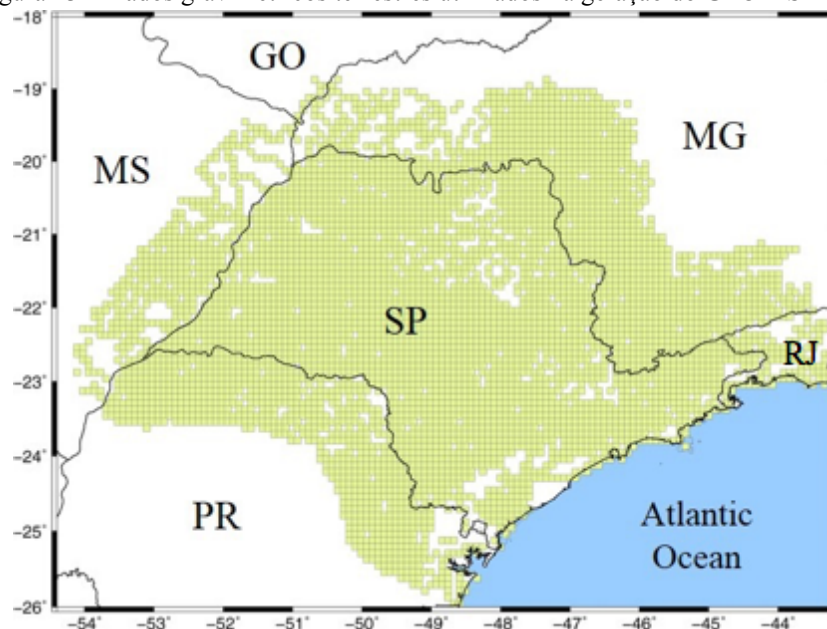
Figura 22 – Área de dados dos modelos para geração do GEOIDSP2014 (em vermelho, a área do modelo geoidal; em azul os dados de gravimetria; e em verde dados do DTM e DBM).



Fonte: GUIMARÃES, 2013.

Na Figura 23 são mostrados os dados gravimétricos terrestres transformados em grade de 5' utilizados na elaboração do GEOIDSP2014. Fica evidente alguns vazios anteriormente mencionados no sul do Estado de São Paulo.

Figura 23 – Dados gravimétricos terrestres utilizados na geração do GEOIDSP2014.



Fonte: GUIMARÃES *et al.*, 2014.

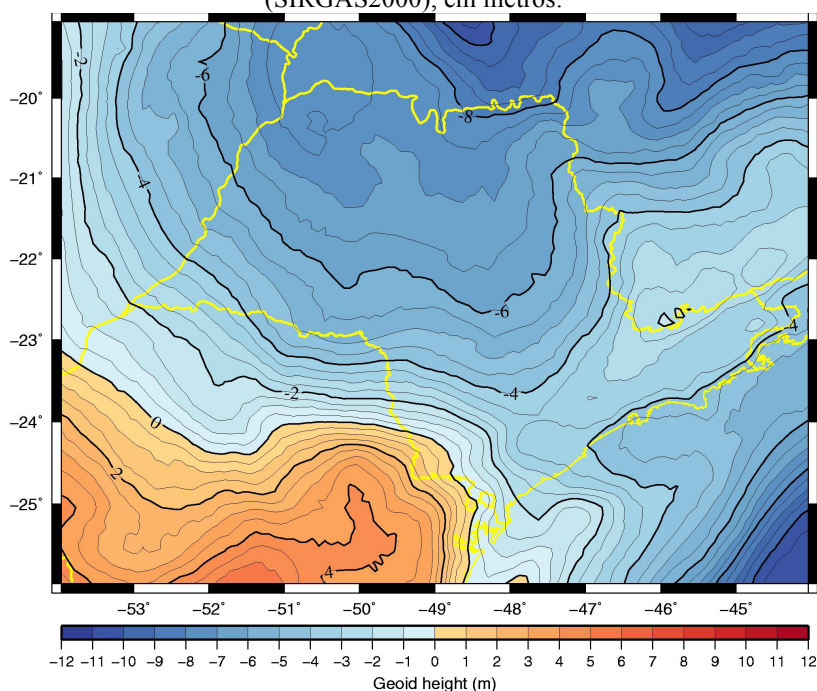
Apesar da utilização de modelos digitais que englobam uma área maior que a região de estudo, os dados gravimétricos terrestres abrangem o interior do Estado e uma região de fronteira. Nesse cenário nota-se que o modelo GEOIDSP2014

representa melhor o geóide no interior do Estado de São Paulo, ainda que o modelo seja desenvolvido para região de 19°S e 26°S e 44°O e 54°O.

Guimarães *et al.* (2015) realizaram a validação do GEOIDSP2014 por meio de 168 pontos de nivelamento/GNSS localizados dentro do Estado de São Paulo, dos quais 139 foram coletados pelo Laboratório de Geodésia e Topografia da USP e 29 pelo IBGE. O RMS das diferenças, representando a acurácia absoluta do modelo, foi de $\pm 0,21$ m, calculado com a expressão (4.1), onde a medida de tendência utilizada foi a média (0,11 m) e a dispersão foi o desvio-padrão ($\pm 0,18$ m) das diferenças.

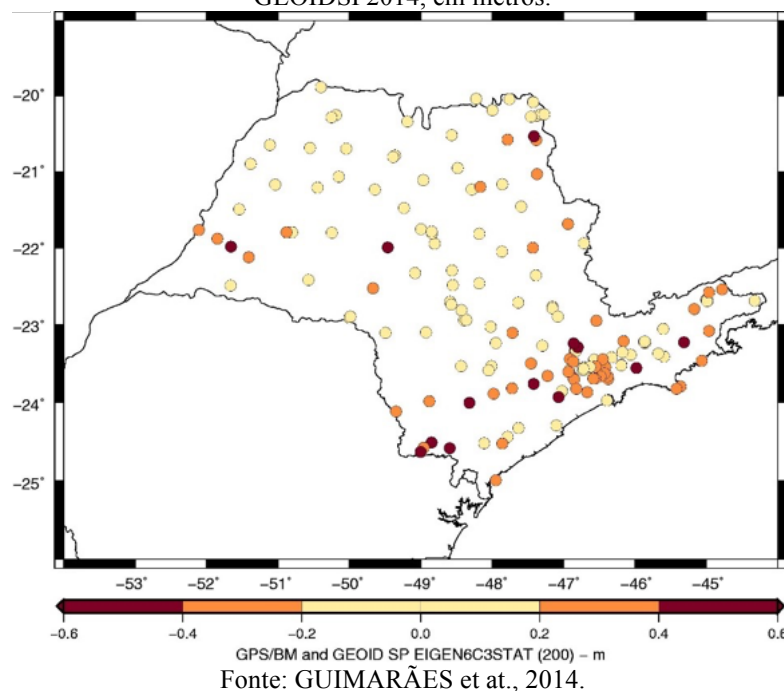
Na Figura 24, são mostradas as alturas geoidais do modelo da região de estudo, referenciadas em SIRGAS 2000. Referente à Figura 25, contendo as discrepâncias pontuais entre o modelo e o nivelamento/GNSS, nota-se a maior inconsistência nas regiões próximas ao litoral de São Paulo. O sul do estado apresenta alguns vazios gravimétricos devido a dificuldade de coleta de dados na região. Esse fato juntamente com própria inconsistência entre o nivelamento geométrico e o posicionamento GNSS prejudicaram a acurácia do modelo.

Figura 24 – Modelo de ondulações geoidais do Estado de São Paulo – GEOIDSP2014 (SIRGAS2000), em metros.



Fonte: GUIMARÃES, 2014.

Figura 25 – Distribuição dos 168 pontos e suas discrepâncias entre o nivelamento/GNSS e o modelo GEOIDSP2014, em metros.

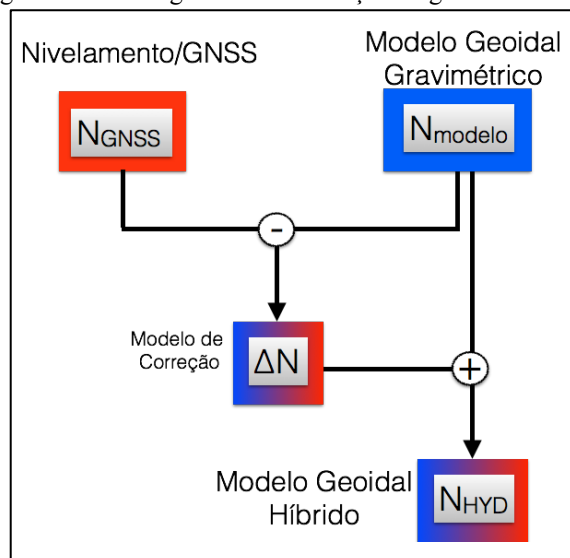


As novas atualizações do GEOIDSP estão previstas com o surgimento de mais dados gravimétricos ao entorno do Estado de São Paulo.

4.3 Geoides Híbridos

O rastreamento GNSS em uma rede de nível possibilita conhecer a separação mais realística entre o geóide e os modelos de ondulação geoidal. Se essa separação for tratada como distorções do modelo geoidal, elas podem ser modeladas dando origem a um geóide híbrido. Esse geóide apresenta como característica uma maior consistência com nivelamento/GNSS, possibilitando uma maior qualidade na conversão de altitudes. A Figura 26 resume os processos de combinação e os modelos envolvidos na geração de geoides híbridos.

Figura 26 – Fluxograma da elaboração de geoides híbridos.

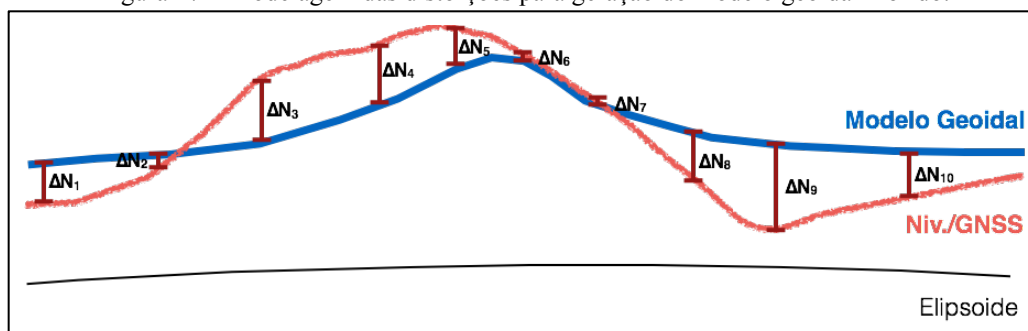


Inicialmente os geoides híbridos dependem de dados de nivelamento/GNSS em referências de nível e um modelo geoidal gravimétrico. As discrepâncias entre as ondulações do modelo geoidal (N_{modelo}) e as ondulações determinadas a partir do rastreamento com GNSS em pontos pertencentes a uma rede de nivelamento (N_{GNSS}), utilizadas para validação dos modelos convencionais, caracterizam distorções do modelo geoidal:

$$\Delta N(\theta, \lambda) = N_{GNSS}(\theta, \lambda) - N_{modelo}(\theta, \lambda). \quad (4.9)$$

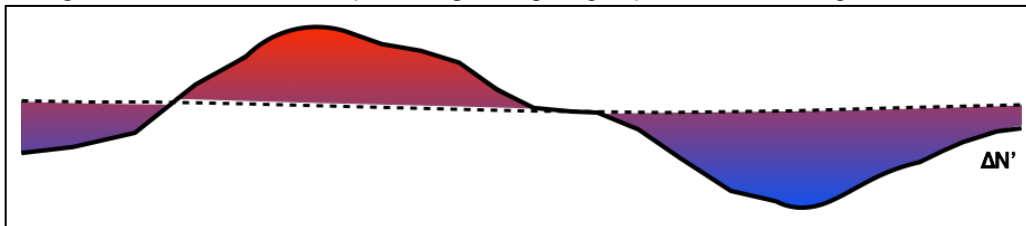
Numa rede de pontos, a modelagem de distorções pode ser realizada por meio de interpolações, estimando as distorções próximas aos pontos com distorções conhecidas. A Figura 27 ilustra essas interpolações, onde em vermelho é representado um modelo de ondulações obtido pelo nivelamento/GNSS, em azul tem-se representado um modelo geoidal, e ΔN_1 à ΔN_{10} são as distorções pontuais.

Figura 27 – Modelagem das distorções para geração do modelo geoidal híbrido.



Na Figura 28 tem-se a exemplificado um modelo distorção ($\Delta N'$) obtido por interpolações das distorções ΔN_1 à ΔN_{10} para uma malha de interesse. As distorções podem indicar uma tendência positiva, negativa ou nenhuma tendência para um conjunto de pontos. De acordo com a expressão (4.9), valores positivos para as distorções indicam que o modelo geoidal tem uma tendência positiva e distorções negativas indicam uma tendência negativa na região.

Figura 28 – Modelo de distorções interpolado para geração de um modelo geoidal híbrido.



A correção das distorções, ou tendências, do modelo gravimétrico é realizada pela soma das correções interpoladas para uma malha de interesse superfície gerada com o modelo geoidal gravimétrico:

$$N_{HYD}(\theta, \lambda) = N_{modelo}(\theta, \lambda) + \Delta N'(\theta, \lambda), \quad (4.10)$$

onde $\Delta N'$ são as distorções interpoladas.

Esse método de integração híbrido é semelhante ao método de obtenção das ondulações geoidais descrita por Blitzkow (1996), mostrado na expressão (4.2). Genericamente, escreve-se:

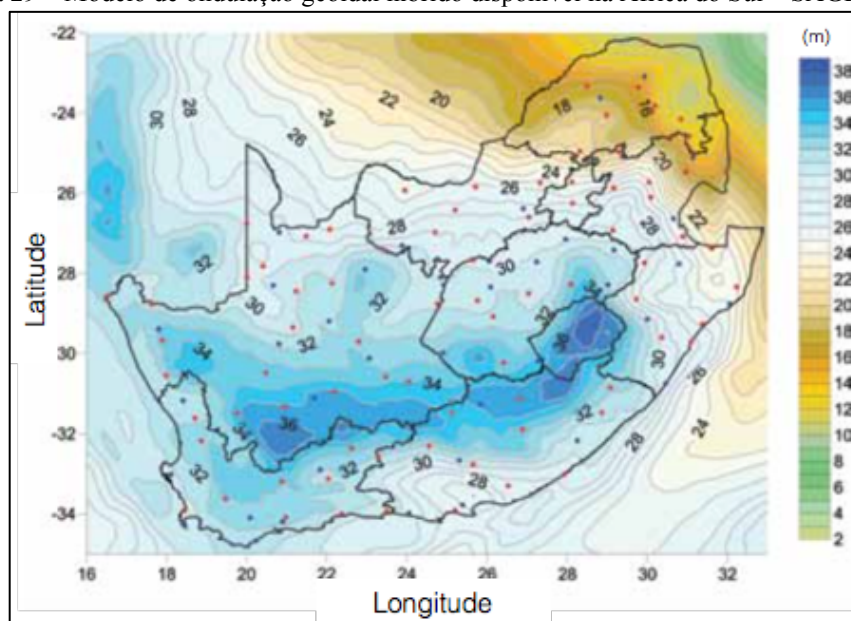
$$N_{HYD}(\theta, \lambda) = N_L(\theta, \lambda) + \delta N_L(\theta, \lambda) + \Delta N'(\theta, \lambda). \quad (4.11)$$

Alguns autores podem utilizar outra nomenclatura aos geoides resultantes dessa metodologia. Geralmente em contextos locais o melhoramento ou “refinamento” do geoide não gera uma superfície de distorções separadamente e superfícies mais simples são utilizadas para descrever o modelo híbrido. Featherstone, Dentith e Kirby (1998) se referem à esses modelos como “geoides combinados”, visto que é proposto um ajustamento por Mínimos Quadrados dos dados de origem gravimétrica com os dados de nivelamento/GNSS. Esse tipo de combinação em regiões entre 1.000 e 3.000 km² têm gerado RMS entre $\pm 0,01$ e $\pm 0,05$ m.

Diversos países têm adotado essa proposta de geoides híbridos em escala nacional obtendo resultados mais consistentes com os métodos de posicionamento. Fica evidente a importância e a preocupação mundial para os usuários do GNSS na conversão de altitudes com melhor qualidade. Entre os países que já adotam essa proposta, destacam-se: Estados Unidos – CONUS – (ROMAN, WANG, *et al.*, 2004; ROMAN, WANG, *et al.*, 2009; NGS, 2015), Canadá (NRCAN, 2014), Austrália (FOTOPOULOS, FEATHERSTONE e SIDERIS, 2002; FEATHERSTONE, SPROULE, *et al.*, 2005), Coreia do Sul (LEE, YUN, *et al.*, 2012; LEE, YUN, *et al.*, 2013), Japão (KUROISHI, ANDO e FUKUDA, 2002; MIYAHARA, KODAMA e KUROISHI, 2014); China (CHEN e YANG, 2001; CHEN e LUO, 2004; BLITZKOW, CINTRA, *et al.*, 1993) e África do Sul (CHANDLER e MERRY, 2010).

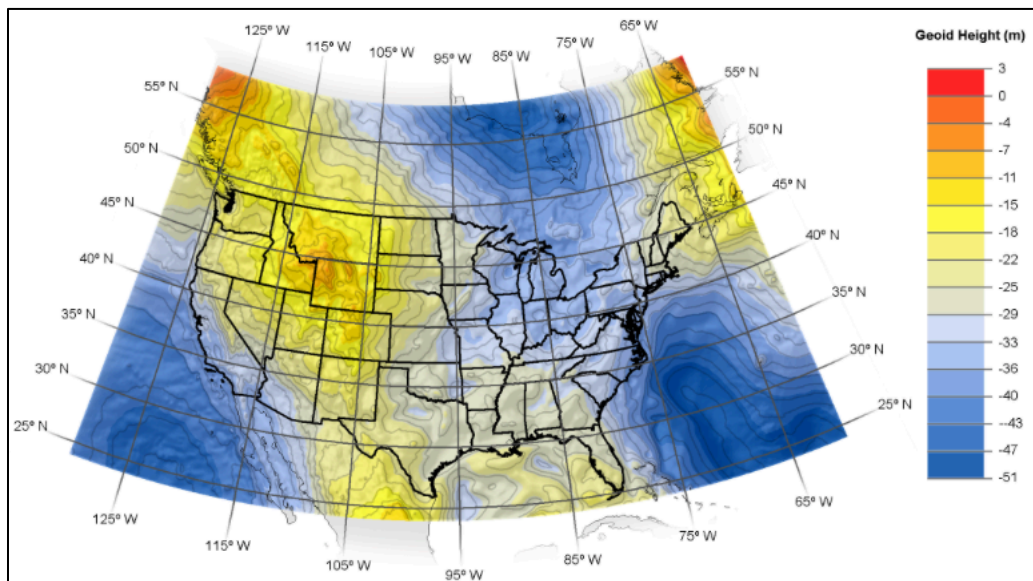
A Figura 29, Figura 30 e Figura 31 mostram respectivamente as ondulações geoidais dos modelos mais recentes da África do Sul (SAGEOID10), dos Estados Unidos (GEOID12A) e do Japão (GSIGEO2011), os quais já estão disponíveis para uso civil.

Figura 29 – Modelo de ondulação geoidal híbrido disponível na África do Sul – SAGEOID10.



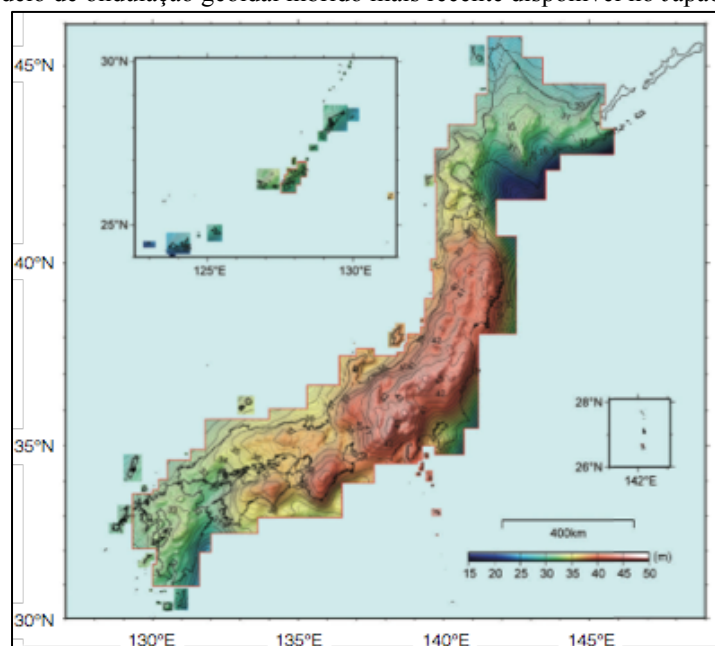
Fonte: CHANDLER e MERRY, 2010

Figura 30 – Modelo de ondulação geoidal híbrido mais recente disponível nos Estados Unidos – GEOID12A.



Fonte: NGS, 2012.

Figura 31 – Modelo de ondulação geoidal híbrido mais recente disponível no Japão – GSIGEO2011.



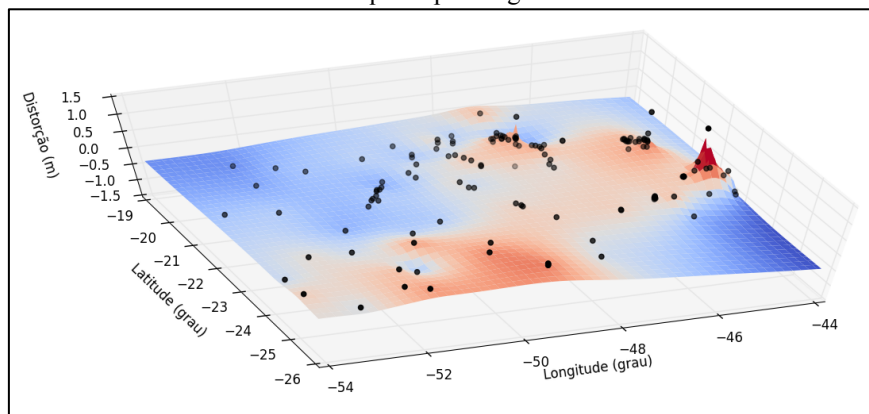
Fonte: MIYAHARA *et al.*, 2014.

O Brasil ainda não possui geoide híbrido em escala nacional disponível para uso civil. Goldani (2006) já apresentou um modelo geoidal desenvolvido somente com dados altimétricos de referências de nível para o estado do Paraná, o GEOIDERAAP, onde o RMS obtido foi de $\pm 0,10$ m, ficando evidente a melhora do modelo em relação ao geoide nacional quando utilizado esse tipo de dados no modelo. O Estado de São Paulo já foi alvo de diversos estudos para melhoramento do geoide por meio de métodos alternativos com integração do nivelamento/GNSS (MAIA, 2003; KAVZOGLU e SAKA, 2005; REINKE, VERONEZ, *et al.*, 2007).

4.3.1 Superfície de Distorção

O refinamento do geoide convencional é realizado por meio da superfície de distorção ($\Delta N'$), portanto a escolha da representação adequada dessa superfície é de crucial para uma boa qualidade do modelo híbrido. A Figura 32 ilustra um modelo de distorção para uma região obtido com base numa distribuição irregular de pontos com distorção conhecida.

Figura 32 – Representação tridimensional de um modelo de distorção de ondulações geoidais adequado para região.



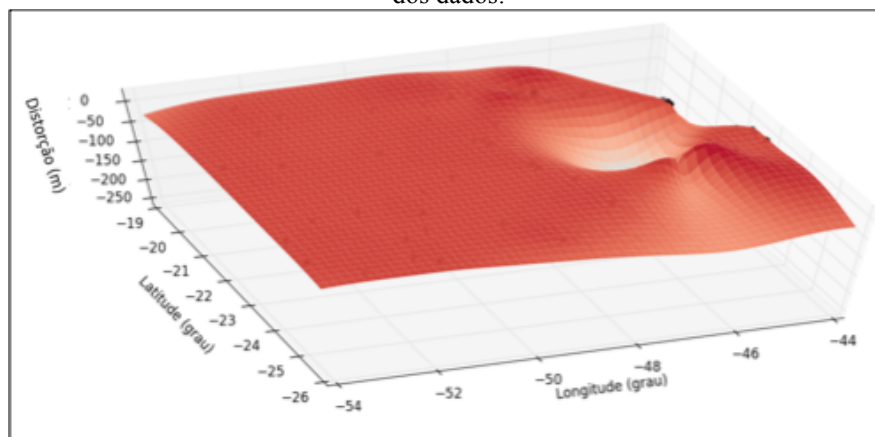
Diversos são os métodos de interpolação encontrados nas literaturas para modelagem de distorções de modelos geoidais, destaca-se o multiquádrico (HARDY, 1975), média ponderada (CHEN e LUO, 2004), bilinear e bicúbico (FEATHERSTONE, 2000), superfícies polinomiais (FOTOPOULOS, FEATHERSTONE e SIDERIS, 2002); *shepard* (CHEN e LUO, 2004); e krigagem (CHANDLER e MERRY, 2010). Entretanto o método de interpolação mais utilizado é o LSC (FUKUDA, KURODA, *et al.*, 1997; FEATHERSTONE, 2000; FOTOPOULOS, FEATHERSTONE e SIDERIS, 2002; FEATHERSTONE, SPROULE, *et al.*, 2005; KUROIISHI, ANDO e FUKUDA, 2002; CHEN e LUO, 2004; ROMAN, WANG, *et al.*, 2004; ROMAN, WANG, *et al.*, 2009; MIYAHARA, KODAMA e KUROIISHI, 2014). Um ponto interessante desse interpolador é que ele considera a distribuição espacial dos erros de observação, dessa maneira o método exige uma matriz covariância dos dados.

Alguns autores vêm utilizando as Redes Neurais Artificiais, para obtenção das ondulações geoidais, (MAIA, 2003; KAVZOGLU e SAKA, 2005; REINKE, VERONEZ, *et al.*, 2007). Com os resultados obtidos, esse tipo de interpolador apresenta grande potencial na modelagem de distorções. Ademais, Fazio (2013)

comprova matematicamente que esses interpoladores apresentam resultados equivalentes ao método de krigagem e podem produzir resultados idênticos se configurados adequadamente. Em particular, as redes neurais RBF (*Radial Based Function*) são bem mais rápidas que o método de krigagem, pois na interpolação RBF os pesos não precisam ser recalculados para cada ponto interpolado.

Todavia, a seleção do método de interpolação para representação da superfície de distorção deve ser realizada empiricamente, pois interpoladores específicos podem representar melhor a realidade espacial dos dados e do local de estudo (CHEN e LUO, 2004).

Figura 33 – Representação tridimensional de um modelo de distorção inadequado à realidade espacial dos dados.



Na Figura 33 tem-se representado um modelo de distorção obtido com os mesmos pontos do modelo representado na Figura 32, porém com outro método de interpolação. Nota-se que esse modelo não se ajusta a realidade espacial dos dados. Nesse caso o interpolador estima valores de distorção “irreais”, prejudicando o modelo geoidal híbrido gerado a partir dessa superfície.

4.3.2 Qualidade do modelo híbrido

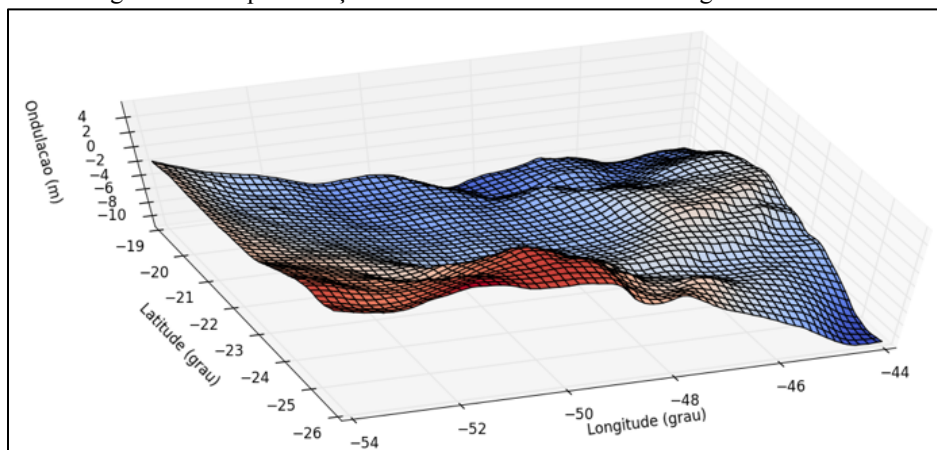
A hibridização do modelo geoidal pode reduzir consideravelmente as inconsistências entre o nivelamento/GNSS e os modelos geoidais gravimétricos, entretanto alguns erros permanecem presentes. Parte desses erros pode ser visto por meio da análise das distorções regionais. Geralmente uma região apresenta sistematicamente distorções positivas ou negativas, a existência de ambas distorções em pontos muito próximos podem indicar a existência de erros no nivelamento

geométrico e/ou no posicionamento GNSS. Nesses casos, os pontos devem ser verificados, se possível, corrigidos e/ou excluídos.

A acurácia dos modelos híbridos está relacionada basicamente à qualidade dos dados de entrada do modelo e ao método de interpolação da superfície de distorções.

A qualidade do nivelamento/GNSS depende de uma boa rede de referência altimétrica, para o contexto brasileiro esses dados são discutidos na seção 3.3.2, e escolha de adequadas estratégias de processamento e métodos de posicionamento GNSS, apresentadas na seção 4.1. Quanto aos modelos geoidais, sua qualidade depende da resolução espacial dos dados gravimétricos, coeficientes dos GGMs e DTM utilizados, visto nas seções 2.4.1 e 4.2.

Figura 34 – Representação tridimensional de um modelo geoidal híbrido.



A Figura 34 ilustra tridimensionalmente um modelo geoidal híbrido obtido a partir do modelo de distorções da região, mostrado na Figura 32. Entre a fase de geração das distorções e validação dos modelos, devem ser separados pontos de controle e pontos de verificação. Os pontos com distorção conhecida e utilizados no modelo de distorção são ditos pontos de controle, e os pontos não utilizados são chamados de pontos de verificação. A validação desses modelos pode ser feita analogamente aos geoides convencionais, com atenção para não utilização dos pontos de controle nessa etapa, ou empiricamente considerando dados independentes.

A análise das discrepâncias (ondulações do nivelamento/GNSS e modelo geoidal gravimétrico) existentes nos pontos de controle indicam um erro ou ruído do interpolador em virtude de suas características matemáticas, enquanto as discrepâncias dos pontos de verificação mostram a qualidade do modelo geoidal híbrido considerando todos erros envolvidos.

Na Tabela 4 são resumidos alguns geoides híbrido encontrados em literaturas internacionais, onde são destacados os países, os RMS obtidos, a quantidade de pontos para controle e verificação, o tamanho do país e método para obtenção das distorções. Cada país adota uma metodologia para geração das distorções e validação. Os geoides da África do Sul e China foram avaliados pelo método convencional de análise da qualidade. Os outros países não utilizam o método convencional de validação pois a metodologia LSC fornece estimativas realísticas do erro do modelo híbrido.

Tabela 4 – Estatísticas dos modelos geoidais híbridos de alguns países, quantidade de pontos utilizados na geração das distorções e validação do modelo, área do modelo e método utilizado na geração das distorções.

Geoides Híbridos	País	RMS (m)	Pontos Controle.	Pontos Verific.	Área (km²)	Método
HKGEOID-2000 (CHEN e LUO, 2004)	China	0,017	55	1	1.000	Superfície (3 parâmetros)
SZGEOID- 2001 (CHEN e LUO, 2004)	China	0,014	65	1	2.000	Superfície (3 parâmetros)
GSIGEO2000 (KUROISHI, ANDO e FUKUDA, 2002)	Japão	0,040	816	*	377.944	LSC
GSIGEO2011 (MIYAHARA, KODAMA e KUROISHI, 2014)	Japão	0,020	971	*	377.944	LSC
SAGEOID10 (CHANDLER e MERRY, 2010)	África do Sul	0,070	79	39	1.221.037	Krigagem
AUSGeoid98 comb. (FEATHERSTONE, SPROULE, <i>et al.</i> , 2005)	Austrália	0,118	254	-	7.692.024	LSC
GEOID03 (ROMAN, WANG, <i>et al.</i> , 2004))	Estados Unidos (CONUS)	0,024	14.185	-	7.824.535	LSC
GEOID09 (ROMAN, WANG, <i>et al.</i> , 2009)	Estados Unidos (CONUS)	0,014	18.398	-	7.824.535	LSC

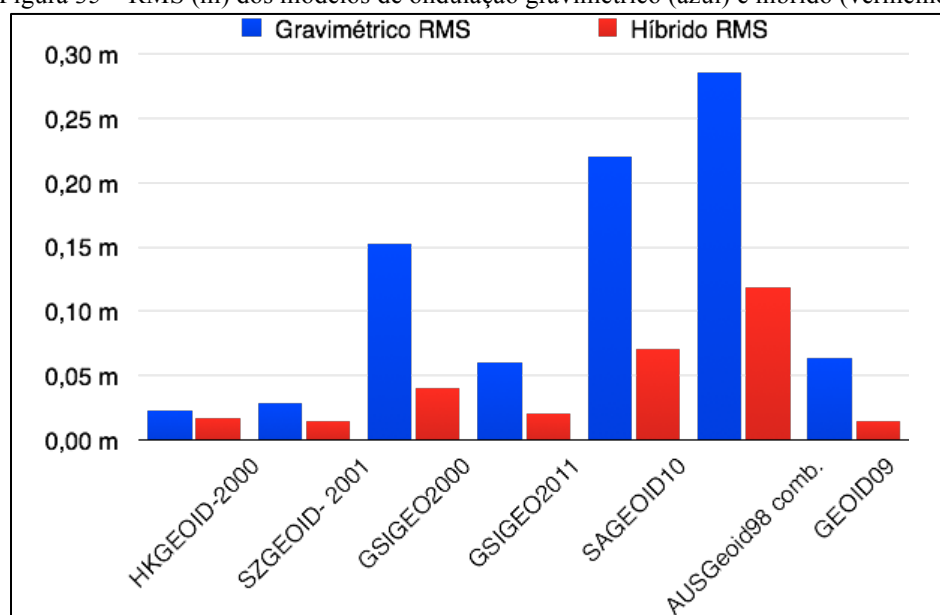
*Validação empírica

O interpolador LSC fornece uma estimação formal dos erros presentes nos modelos híbridos considerando uma matriz de covariância dos dados de entrada. Esse estimador pode ser entendido com uma aproximação do RMS referido na Tabela 4, porém a rigor trata-se do *Standard Deviation* (SD). Esse parâmetro mostra o ruído gerado nas interpolações dos dados no processo de geração das distorções, que na prática é muito próximo ao erro do modelo híbrido. No caso do modelo japonês, um método empírico de validação é feito considerando a independência dos

dados e os valores obtidos confirmam que o SD obtido é compatível com o RMS estimado do modelo. Mais detalhes podem ser vistos em Kuroishi *et al.* (2002) e Miyahara *et al.* (2014)

Adiante, na Figura 35 é possível observar o RMS das diferenças entre as ondulações geoidais obtidas por nivelamento/GNSS em referências de nível e as ondulações dos modelos gravimétricos (azul) e o RMS calculado para seus respectivos geoides híbridos (vermelho).

Figura 35 – RMS (m) dos modelos de ondulação gravimétrico (azul) e híbrido (vermelho).



Notadamente são observadas significativas melhoras com a utilização da metodologia de hibridização. Entretanto, os geoides chineses (HKGEOID-2000 e SZGEOID-2001) apresentam um melhora relativa inferior aos outros geoides pois a metodologia empregada considera uma superfície com poucos parâmetros para modelar as distorções entre os pontos, apesar das regiões de estudo serem menores pequenas.

Ainda, a qualidade dos modelos híbridos apresentam dependência da qualidade inicial dos modelos gravimétricos utilizados na hibridização. Geoides de menor qualidade necessitam de uma maior quantidade de pontos para modelagem das distorções, é o caso dos geoides africano (SAGEOID10) e australiano (AUSGeoid-combined) que chegaram a um RMS de $\pm 0,07$ e $\pm 0,118$ m, respectivamente. O geoide japonês (GSIGEO2011) e norte americano (GEOID09) apesar de estarem localizados em regiões com características tectônicas diferentes apresentam resultados muito semelhantes na melhora dos modelos híbridos, os

fatores que influenciaram nesses resultados são a alta qualidade dos geoides gravimétricos, a mesma metodologia para o cálculo das distorções (LSC) e a densidade de pontos da região, ou seja, a quantidade de pontos por área.

5 INTERPOLADORES

O processo de geração de mapas ou de malhas a partir de dados amostrais para representação de uma variável espacial em muitos casos necessita do processo de interpolação. Numa coleta de dados pontualmente georreferenciados com dados de precipitação, tipo de solo ou, no caso dessa pesquisa, de dados altimétricos, os métodos de interpolações indicam uma estimativa das variáveis em estudo nas regiões próximas aos pontos coletados, onde a coleta não foi realizada. A distribuição contínua das variáveis é resultado da interpolação dos dados. Esse tipo de produto pode facilitar e influenciar a tomada de decisões na realização de planejamentos.

São diversos os métodos para obtenção de interpolações espaciais, cada um com suas características, vantagens e desvantagens. Dentre esse métodos destacam-se: *nearest neighbour*, conhecido como “vizinho mais próximo”; ponderação pelo inverso da distância; *splines*; Séries de Fourier; krigagem; e redes neurais artificiais. Mais informações podem ser obtidas em Li e Heap (2008), Haykin (2008) e Wang (2003).

As Redes Neurais Artificiais foram escolhidas para um dos focos em estudo nessa pesquisa devido à facilidade de aplicação, habilidade de aprender com exemplos, robustez e rapidez de processamento (TUBB, 1993). Ainda, nesse capítulo, serão apresentados alguns experimentos realizados com a utilização de dados simulados para testar a eficiência dessas redes neurais na modelagem de distorções.

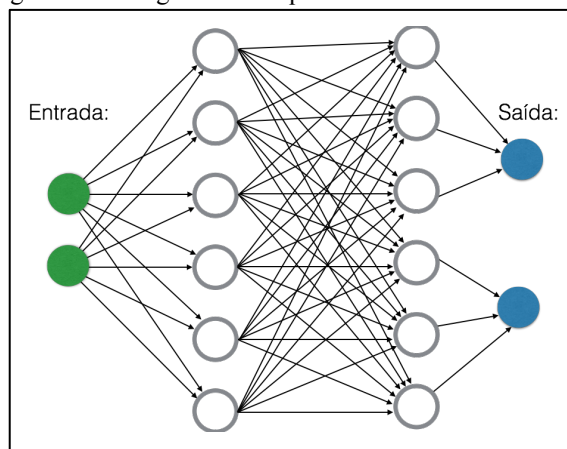
5.1 Redes Neurais

A Rede Neural Artificial é uma técnica computacional que apresenta o modelo matemático inspirado na estrutura neural de organismos inteligente, adquirindo conhecimento por meio de experiências, como reconhecimento de padrões, interpolações e classificações (WANG, 2003).

O primeiro modelo de redes neurais foi proposto por McCulloch e Pitts (1943) e recebeu o nome MCP (*McCulloch-Pitts*), tal modelo apresentava uma única camada de nós. Em seguida surgiu o modelo MLP (*Multilayer Perceptron*), ou em múltiplas camadas. Esse tipo de modelo com pesos ajustáveis aumenta a capacidade

da rede de aprendizado. Um modelo de rede MLP consiste de uma camada de entrada, uma ou mais camadas ocultas (intermediárias) e uma camada de saída.

Figura 36 – Diagrama da arquitetura de uma Rede MLP.



Adaptado de HAYKIN, 2008.

Na Figura 36 tem-se representado um exemplo de arquitetura MLP com duas camadas ocultas, onde as esferas em verde representam os sinais de entrada, em branco os neurônios e em azul os sinais de saída. As redes neurais funcionam num sistema *feedforward*, ou seja, nenhuma saída de um neurônio de uma camada será sinal de entrada para um neurônio de uma camada anterior ou da mesma camada, cada neurônio fornece sua saída para cada unidade da camada seguinte (BRAGA, 2000).

A escolha do tipo de rede em se tratando dessa arquitetura restringe o tipo de problema tratado. A escolha de redes MCP é indicada na solução de problemas linearmente separáveis. As redes MLP são mais apropriadas para resolver problemas que envolvem processamento temporal.

As Redes RBF são redes neurais que apresentam uma concepção semelhante ao modelo de redes MLP, entretanto elas utilizam a distância entre os pontos para a interpolação dos dados e somente uma camada oculta. Uma característica muito interessante dessas redes é a velocidade e eficiência.

5.1.1 Radial Based Function

As Redes RBF utilizam funções de base radial como neurônios, distribuídos espacialmente. Essas funções têm como dados de entrada uma distância, a partir dessa variável são ativados uma quantidade de neurônios (WRIGHT, 2003; HAYKIN, 2008). Alguns exemplos de funções de base radial são mostrados abaixo:

$$\text{Multiquádrica:} \quad \phi(r) = \sqrt{(r/\mu)^2 + 1} \quad (5.1)$$

$$\text{Multiq. Inversa:} \quad \phi(r) = \sqrt{(r/\mu)^2 + 1}^{-1} \quad (5.2)$$

$$\text{Gaussiano:} \quad \phi(r) = e^{-(\frac{r}{\mu})^2} \quad (5.3)$$

$$\text{Linear:} \quad \phi(r) = r \quad (5.4)$$

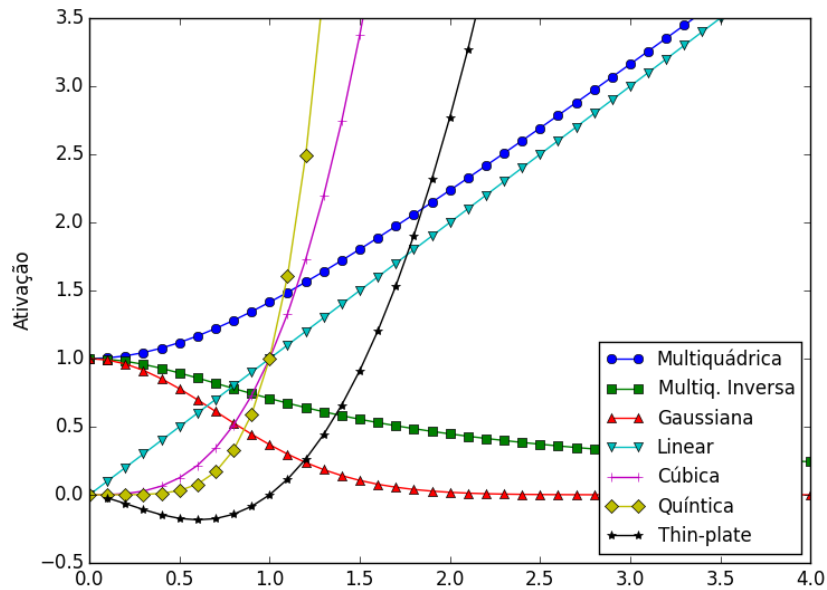
$$\text{Cúbica:} \quad \phi(r) = r^3 \quad (5.5)$$

$$\text{Quíntica:} \quad \phi(r) = r^5 \quad (5.6)$$

$$\text{Thin-Plate} \quad \phi(r) = r^2 \log r \quad (5.7)$$

onde r representa uma distância; e μ é um parâmetro de suavização adicional que precisa ser estimados em cada função de acordo com os dados. Esses modelos de funções são representados na Figura 37.

Figura 37 – Exemplos gráficos de semivariogramas de redes RBF.

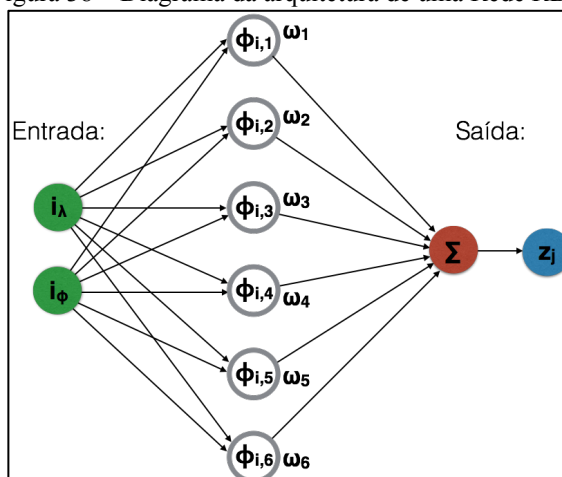


A distância ($\phi_{(i,j)}$) entre o ponto (i) e o centro da função de base radial de cada neurônio (j) durante o processo de interpolação das Redes RBF pode ativar mais ou menos os neurônios, resultando em uma maior ou menor contribuição do neurônio para o resultado final. Dessa maneira, o neurônio é mais ativado quanto mais próximo o ponto interpolado está do centro da função de base radial do neurônio, e menos ativado quando o ponto está mais distante do centro de base

radial, até chegar em zero de ativação. A ativação dos neurônio é medida por meio das funções de base radial e das distâncias distância ($\phi_{(i,j)}$), expressões de (5.1) à (5.7).

A Figura 38 representa a arquitetura da Redes RBF, onde em verde são representados os dados de entrada pontuais bidimensionais, em latitude (φ) e longitude (λ); em vermelho tem-se a somatória (Σ) dos neurônios ativados, multiplicados por seus respectivos pesos (ω_i); e em azul a saída (z_j).

Figura 38 – Diagrama da arquitetura de uma Rede RBF.



Adaptado de HAYKIN, 2008.

$$z_j = \sum_i \omega_i \phi_{(i,j)} \quad (5.8)$$

Os parâmetros da função de base radial, a posição do centro de cada neurônio da função de base radial, a quantidade de neurônios utilizados e os pesos ω da Equação (5.8) são definidos por meio do treinamento das Redes RBF.

5.1.2 Treinamento

Durante o processo de treinamento as Redes RBF estabelecem uma única função para o conjunto de dados a partir do centro da função de base radial. A definição do centro das funções de base radial pode ser feita basicamente por três métodos (FAZIO, 2013).

O primeiro método se baseia na proximidade entre os dados, nesse caso os dados são agrupados por meio de algoritmos como *K-means* (HARTIGAN e WONG, 1979), onde são criados grupos aleatórios e iterativamente os dados são separados

por sua aproximação espacial. Em outro método os dados são agrupados de maneira aleatória deixando que o ajuste dos pesos e os parâmetros da função sejam suficientes para adequação da interpolação. O terceiro método, esse utilizado durante a dissertação, também é conhecido como Rede RBF Exatas, nesse, o centro da função de base radial é posicionado sobre os dados amostrais, formando um neurônio por dado amostral. Nesse último método, o cálculo dos pesos é mais simples, bastando resolver um sistema de equações lineares, pois a quantidade de dados amostrais e variáveis a serem estimadas é igual. Cada uma das equações em (5.8) é uma interpolação para um dos dados amostrais, ou seja:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \omega_i \phi_{(1,j)} &= z_1 \\
 \sum_i \omega_i \phi_{(2,j)} &= z_2 \\
 &\vdots \\
 \sum_i \omega_i \phi_{(n,j)} &= z_n
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde o subíndice n representa o número de neurônios e dados amostrais.

Escritos na forma matricial, tem-se:

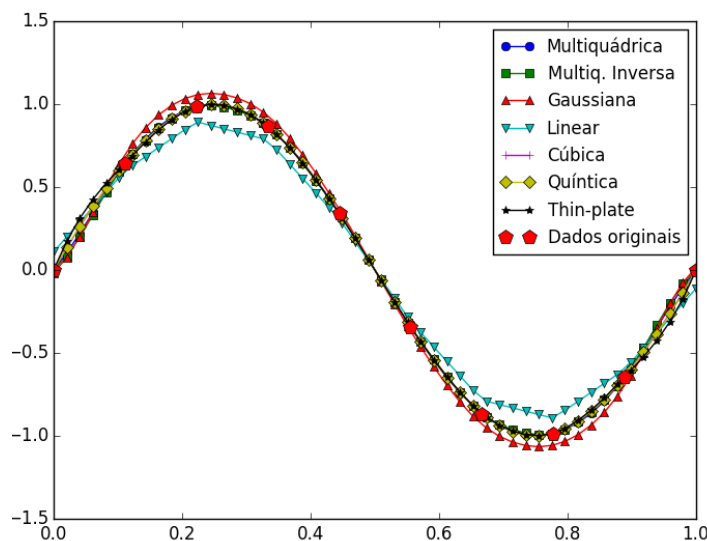
$$\begin{array}{ccc}
 \Phi & \Omega_r & Z \\
 \hline
 \begin{bmatrix} \phi_{(1,1)} & \phi_{(1,2)} & \cdots & \phi_{(1,n)} \\ \phi_{(2,1)} & \phi_{(2,2)} & \cdots & \phi_{(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{(n,1)} & \phi_{(n,2)} & \cdots & \phi_{(n,n)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}
 \end{array} \tag{5.10}$$

onde os símbolos Φ , Ω_r e Z representam os elementos da equação de forma simplificada. Os pesos são calculados com a manipulação das matrizes:

$$\Omega_r = \Phi^{-1}Z \tag{5.11}$$

A Figura 39 mostra um exemplo de treinamento dos dados, onde além dos dados originais, representados em pentágonos vermelhos, tem-se os resultados das interpolações utilizando as redes RBF de (5.1) à (5.7).

Figura 39 – Treinamento para uma amostra de dados unidimensionais e resultados das interpolações por meio das funções (5.1) à (5.7).



O resultado do processo de treinamento são os neurônios das funções de base radial com determinados graus de ativação para uma malha de neurônios. A partir dessa malha é possível realizar uma verificação da qualidade da interpolação, considerando uma outra amostra de pontos em que são conhecidos os valores da variável interpolada, dentro da malha de neurônios. A partir das discrepâncias entre a superfície gerada e os pontos de verificação pode-se obter a média e dispersão dos dados, refletindo a qualidade do interpolador para malha de interesse. Essa qualidade, expressa em RMS, mostra a adaptação ou a capacidade da rede RBF em representar as reais distorções. Portanto, os menores RMS indicam funções mais adaptadas às distorções em análise.

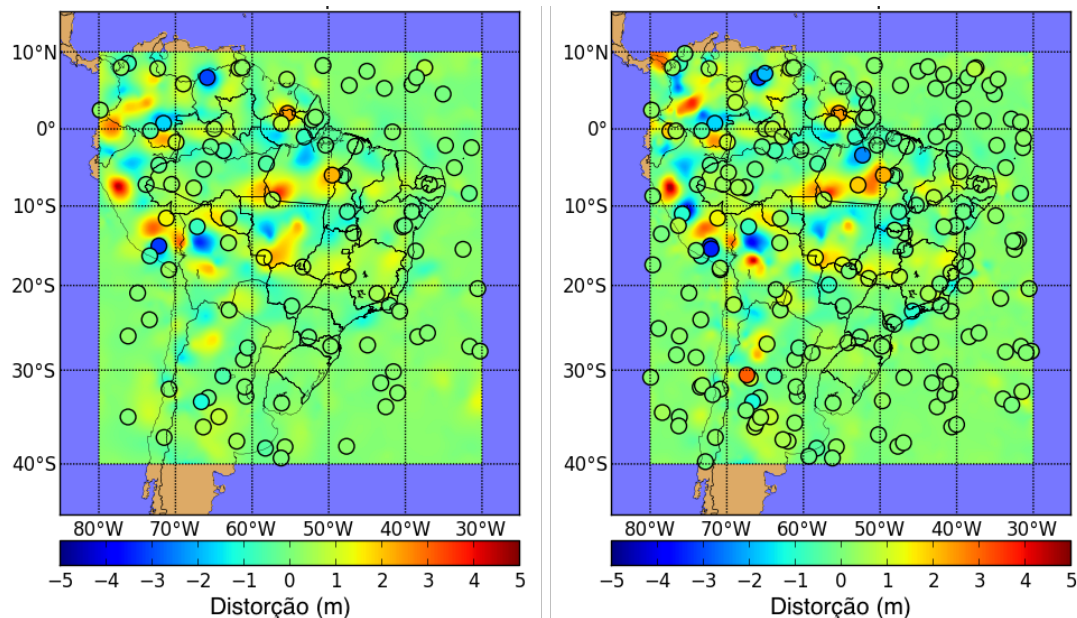
5.2 Experimentos com Dados Simulados

Com intuito de melhor compreender o comportamento das redes RBF na modelagem de distorções foram realizados alguns experimentos com dados simulados. As distorções entre os modelos EGM96 e EGM08 foram utilizadas nessa etapa como dados de entrada das interpolações RBF.

Em cada experimento houve uma etapa de treinamento da RBF e em seguida uma etapa verificação da qualidade das superfícies interpoladoras, com base numa amostra de 10% de pontos que não foram usados durante o treinamento. Exemplificado na Figura 40 com uso da função *thin-plate*: com 1.000 pontos para o treinamento, outros 100 pontos são utilizados para verificação, totalizando 1.100

pontos no processo; com 2.000 pontos para o treinamento, outros 200 pontos são para verificação, totalizando 2.200 pontos no processo; e assim sucessivamente.

Figura 40 – Exemplo das interpolações *thin-plate* com 1.000 pontos para a etapa de treinamento e 100 pontos para verificação (esquerda); e 2.000 pontos para o treinamento e 200 para verificação (direita).



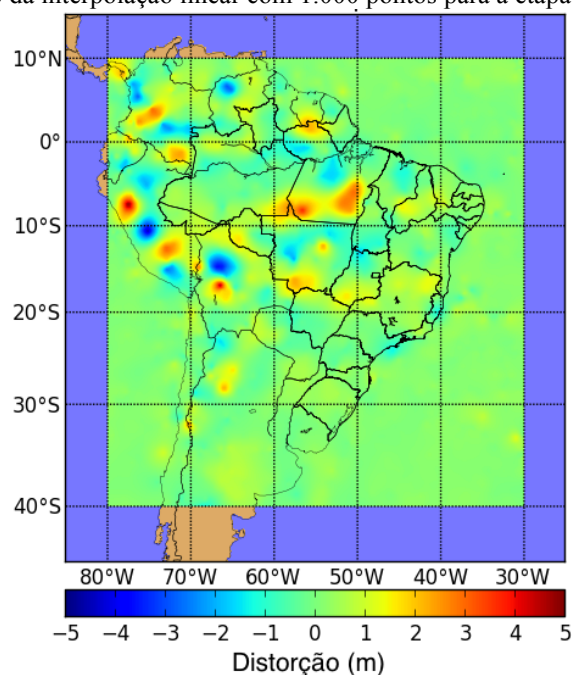
Portanto, duas amostras de pontos aleatoriamente localizados dentro da região de estudo foram geradas, uma com 10.000 pontos para fase de treinamento das funções RFB, esses pontos são considerados pontos de controle, e outra amostra com 1.000 pontos para fase de verificação das interpolações. As ondulações geoidais dos GGM foram geradas por meio das aplicações disponíveis na página do NGA (2015) com a utilização dos arquivos de coeficientes de harmônicos esféricos e dos arquivos de correção dos coeficientes dos respectivos modelos. A partir desses dados, os experimentos foram realizados com a plataforma *Python 2.7.9*, onde as redes RBF estão implementadas na biblioteca *SciPy 0.15.1*, disponível gratuitamente.

5.2.1 Experimento América Latina

Regiões de grande extensão podem apresentar diferentes escalas de distorções no sentido de possuir sub-regiões com estatísticas diferentes, como tendência e dispersão. Esse experimento objetivou testar o desempenho das Redes RBF na modelagem de distorções nesse tipo de região, portanto as distorções entre os modelos EGM96 e EGM08 foram analisadas para a região da América Latina, limitada à 10°N e 40°S em latitude e 30°O e 80°O em longitude e correspondendo à

uma área de aproximadamente 28.919.000 km². A Figura 41 mostra a região de estudo, onde é possível observar as diferentes escalas de distorções.

Figura 41 – Exemplo da interpolação linear com 1.000 pontos para a etapa do treinamento da RBF.



A quantidade de dados de treinamento inicial foi de 1.000 pontos e seguiram à progressão adicional de 1.000 pontos até 10.000 pontos. As médias, desvios-padrão (SD), RMS e valores absolutos máximos (MAX) dos dados foram calculados por meio de outros pontos de verificação, correspondendo à 10% da quantidade de dados utilizados na interpolação. Foram utilizadas as funções radiais: multiquádrica (5.1), multiquádrica inversa (5.2), linear (5.4), cúbica (5.5), quártica (5.6) e *thin-plate* (5.7). As estatísticas das distorções dos pontos de controle, usados na fase de treinamento, são mostradas na Tabela 5, em metros.

Tabela 5 – Estatísticas dos pontos de controle com base no número de pontos.

Nº pts Controle:	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
Média (m):	0,106	0,119	0,110	0,114	0,113	0,113	0,111	0,112	0,118	0,114
SD (m):	0,643	0,682	0,689	0,702	0,710	0,704	0,705	0,707	0,721	0,723
Max. (m):	4,520	4,854	4,854	5,353	5,353	5,556	5,556	5,556	5,556	5,556

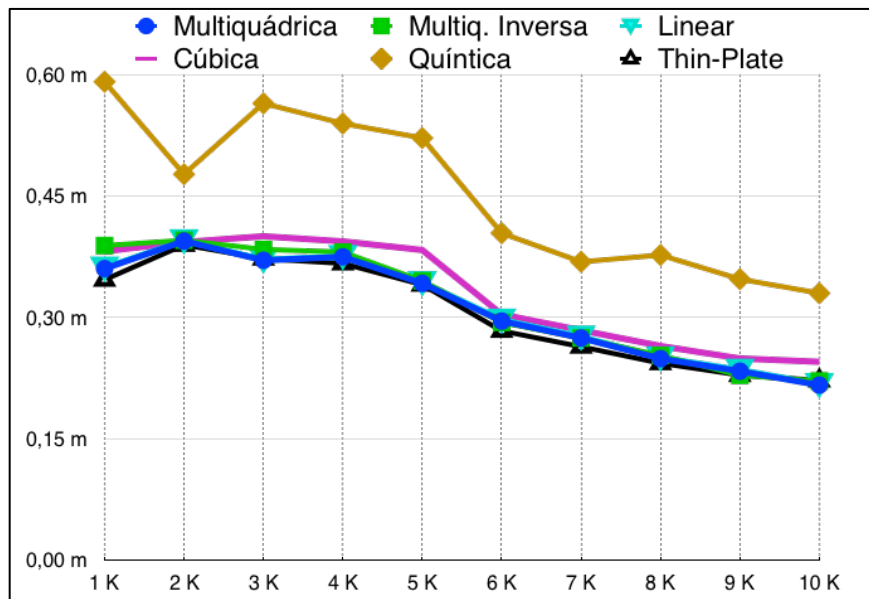
Na Tabela 6 são mostradas as estatísticas (MÉDIA, SD, RMS e MAX), em metros, para os pontos de verificação, em cada uma das redes RBF.

Tabela 6 – Estatísticas (em metros) dos pontos de verificação, para cada uma das funções.

Nº pts Controle:		1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
Multiq.	Média	0,046	-0,011	-0,026	0,005	-0,014	-0,004	-0,001	0,007	0,005	-0,000
	SD	0,357	0,394	0,370	0,375	0,342	0,295	0,275	0,249	0,234	0,216
	RMS	0,360	0,394	0,371	0,375	0,342	0,296	0,275	0,249	0,234	0,216
	Max.	1,495	3,236	3,235	3,947	2,872	2,260	2,364	2,329	2,064	1,984
Muitiq. Inversa	Média	0,032	-0,004	-0,026	0,006	-0,008	-0,001	0,005	0,011	0,008	0,000
	SD	0,388	0,395	0,383	0,381	0,345	0,294	0,275	0,253	0,228	0,221
	RMS	0,389	0,395	0,384	0,381	0,345	0,294	0,275	0,253	0,228	0,221
	Max.	1,845	3,083	3,111	3,464	2,694	2,124	2,182	2,130	2,002	1,974
Linear	Média	0,046	-0,011	-0,027	0,005	-0,014	-0,004	-0,002	0,007	0,005	-0,000
	SD	0,358	0,395	0,370	0,376	0,343	0,297	0,276	0,250	0,235	0,217
	RMS	0,361	0,395	0,371	0,376	0,343	0,297	0,276	0,250	0,235	0,217
	Max.	1,516	3,237	3,235	3,950	2,883	2,273	2,376	2,342	2,115	2,024
Cúbica	Média	0,040	-0,013	-0,023	-0,002	-0,023	-0,003	0,000	0,006	0,006	-0,003
	SD	0,380	0,393	0,400	0,394	0,383	0,304	0,284	0,265	0,249	0,245
	RMS	0,382	0,393	0,400	0,394	0,383	0,304	0,284	0,265	0,249	0,245
	Max.	1,601	2,839	2,499	3,389	2,675	2,023	2,015	1,900	1,991	2,008
Quínti-ca	Média	0,051	0,013	-0,010	-0,025	-0,037	0,000	0,002	0,002	0,009	0,001
	SD	0,589	0,477	0,565	0,539	0,521	0,404	0,369	0,377	0,347	0,330
	RMS	0,591	0,477	0,565	0,540	0,522	0,404	0,369	0,377	0,347	0,330
	Max.	3,280	3,070	3,283	6,246	3,686	2,628	2,607	4,167	4,122	3,280
Thin-Plate	Média	0,044	-0,016	-0,025	0,004	-0,017	-0,004	-0,000	0,007	0,005	-0,002
	SD	0,344	0,389	0,372	0,367	0,340	0,283	0,264	0,243	0,229	0,222
	RMS	0,347	0,390	0,373	0,367	0,340	0,283	0,264	0,243	0,229	0,222
	Max.	1,555	3,093	3,130	3,780	2,432	2,015	2,034	1,848	1,986	1,972

Como já era esperado, constata-se uma diminuição do RMS com o aumento do número de pontos utilizados na fase de treinamento. Com uma maior quantidade de pontos, melhor as distorções são representadas e, conseqüentemente, maior será a consistência da nova superfície corrigida das distorções. Ainda, para esse conjunto de 10.000 pontos na fase de treinamento a função quártica apresentou RMS de $\pm 0,330$ m (destacado em vermelho – Tabela 6) enquanto o restante das funções mostraram comportamento semelhante na modelagem de distorções, onde os RMS variaram entre 0,216 e 0,245 m (destacados em verde – Tabela 6).

Figura 42 – RMS (m) das redes RBF com base na quantidade de pontos utilizados no treinamento das redes.



A Figura 42 representa graficamente os valores dos RMS obtidos para cada função com base no número de pontos utilizados na etapa de treinamento, ficando evidente a maior consistência entre as funções multiquádrica, multiquádrica inversa, linear, cúbica e *thin-plate*. Apesar do comportamento mais adverso da função quártica, as funções apresentaram uma diminuição mais evidente dos RMS com uma quantidade de 6.000 pontos para fase de treinamento.

Considerando as amostras de 10% de pontos (Tabela 6), nota-se que as estatísticas dos dados (Tabela 5) foram reduzidas indicando que as distorções foram corretamente modeladas. Com 1.000 pontos, na fase de treinamento, o RMS das distorções reduziu em 50% e com 10.000 pontos a melhora foi ainda maior, apresentando uma redução de aproximadamente 70%.

A Figura 43 e Figura 44 representam as superfícies geradas por cada uma das funções utilizadas com respectivamente 1.000 e 2.000 pontos para o treinamento das Redes RBF. Nota-se o surgimento de novas distorções com o aumento do número de pontos, representado melhor as distorções reais entre o EGM08 e EGM96. Confirmando os resultados da Tabela 6, a função quártica mostrou uma exagerada modelagem da superfície de distorções em relação as outras funções, indicando resultados menos consistentes. Por outro lado, a função multiquádrica inversa representou as distorções de maneira mais suave e a *thin-plate* apresentou visualmente resultados semelhantes às funções linear e multiquádrica.

Figura 43 – Superfícies de distorção interpoladas (m) com base em 1.000 pontos na fase de treinamento.

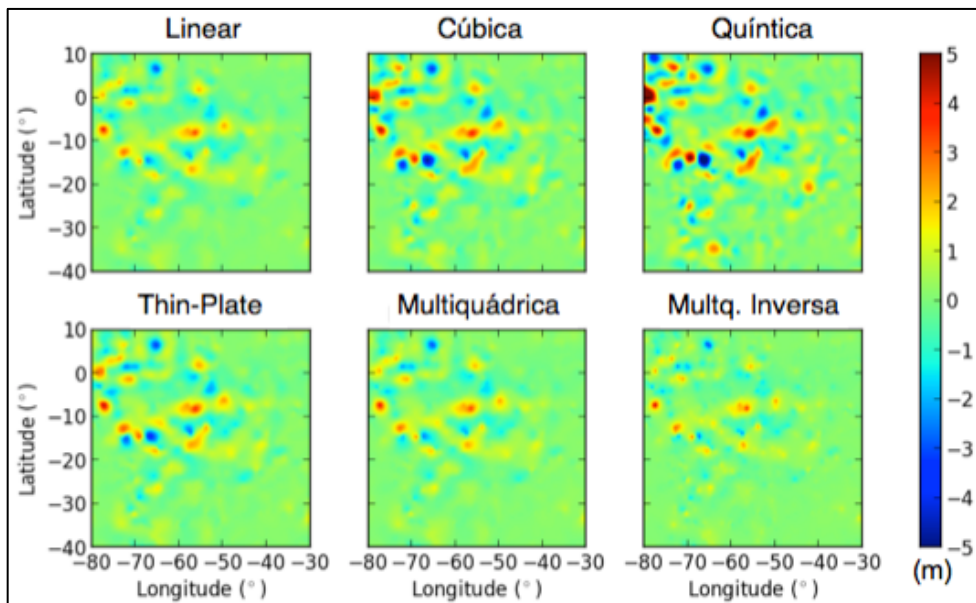
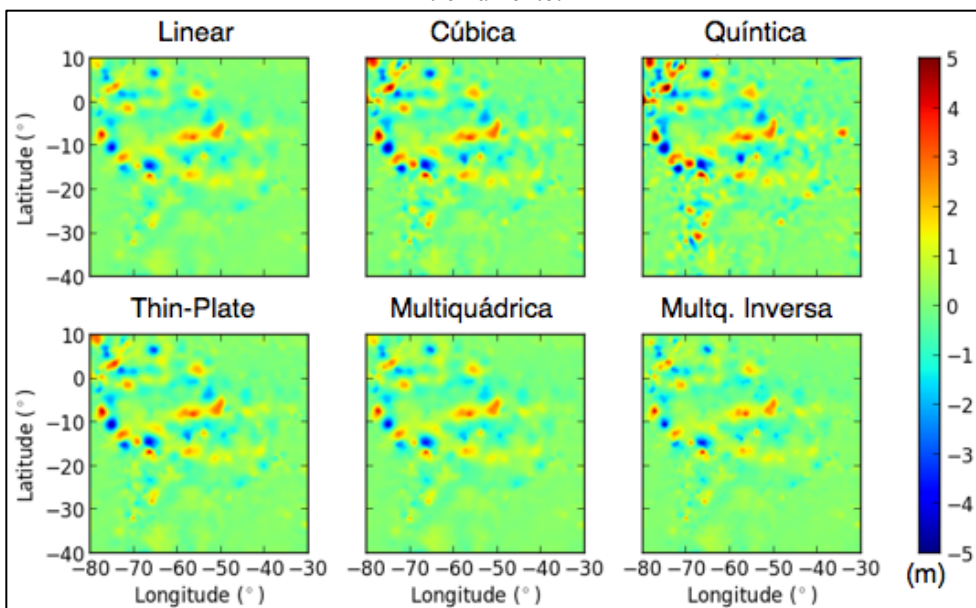
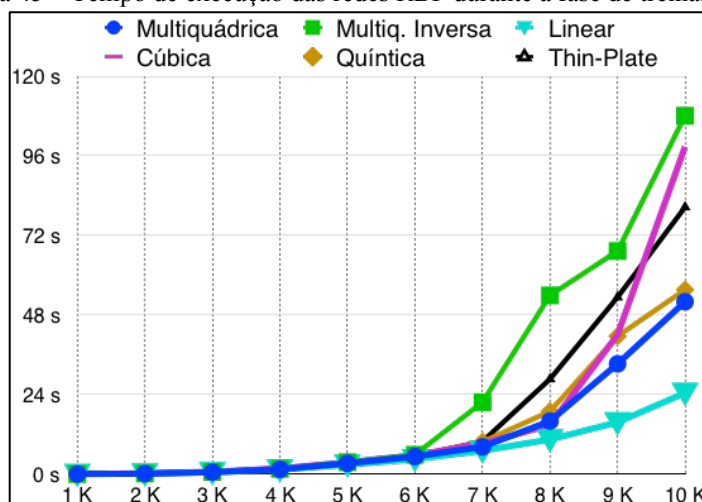


Figura 44 – Superfícies de distorção interpoladas (m) com base em 2.000 pontos na fase de treinamento.



A modelagem das distorções entre os GGM para região da América Latina necessita de uma grande quantidade de pontos para fase de treinamento e nota-se uma limitação da Rede RBF Exatas quanto a essa capacidade. O centro de cada função de base radial coincide com os dados amostrais, com o aumento de dados amostrais mais centros a RBF terá, exigindo uma maior memória do computador e maior tempo de resposta. Na Figura 45 mostra-se o tempo de execução da fase de treinamento das redes RBF. Com o aumento da quantidade de pontos é possível observar o um aumento exponencial do tempo de execução.

Figura 45 – Tempo de execução das redes RBF durante a fase de treinamento.



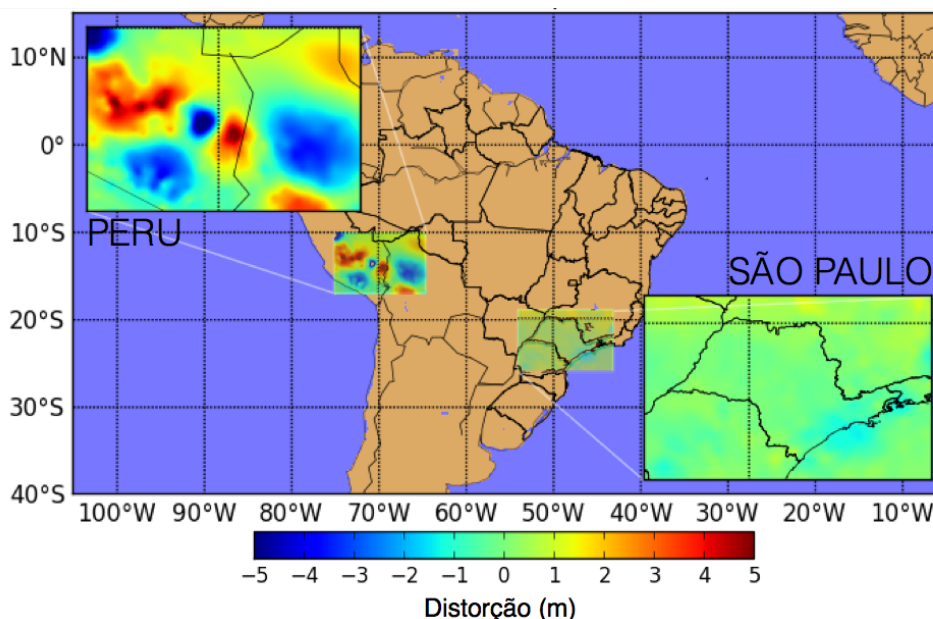
Tendo em vista essa limitação quanto a quantidade de pontos e os resultados dos RMS das distorções entre os modelos EGM96 e EGM08 chegando à $\pm 0,216$ m com 10.000 pontos na fase de treinamento da RBF, outros experimentos foram realizados diminuindo a área de estudo, ainda considerando os mesmos GGMs, focando em sub-regiões com escalas de distorção diferentes.

5.2.2 Experimento sub-regiões

Duas sub-regiões da América Latina foram escolhidas de maneira a obter regiões com estatísticas de distorções diferentes, uma contendo distorções mais evidentes, região do Peru, e outra apresentando distorções menos sinuosas, região do Estado de São Paulo. A região do Peru foi limitada à 10°S e 17°S em latitude e 64°30'O e 75°O em longitude e a região de São Paulo foi limitada em 19°S e 26°S de latitude e 43°O e 54°O de longitude. Ambas as regiões apresentam a extensão de 879.030 km².

Na Figura 46 tem-se evidente as distorções características de cada região de estudo, onde são mostrados exemplos das superfícies RBF utilizando a função linear com 1.000 pontos para fase do treinamento das redes para as regiões do Peru, à esquerda, e São Paulo, à direita..

Figura 46 – Exemplo da interpolação linear com 1.000 pontos na etapa de treinamento para região do Peru (esquerda) e São Paulo (direita).



Analogamente ao experimento anterior (Seção 5.2.1), foram utilizados 1.000 pontos com progressão adicional de 1.000 pontos até 10.000 pontos e as estatísticas (Média, SD, RMS, Max.) foram calculados por meio de outros pontos de verificação, correspondendo à 10% da quantidade de dados utilizados na interpolação. Na Tabela 7 e Tabela 8 são mostradas as estatísticas das distorções dos pontos de controle, utilizados na fase de treinamento das RBFs, para região de São Paulo e Peru, respectivamente.

Tabela 7 – Estatísticas dos pontos de controle com base no número de pontos, para região de São Paulo.

N° pts Controle:	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
Média (m):	-0,019	-0,002	0,008	0,005	0,004	0,002	0,003	0,004	0,003	0,004
SD (m):	0,398	0,402	0,406	0,411	0,412	0,411	0,411	0,409	0,409	0,409
Max. (m):	1,473	1,473	1,480	1,492	1,492	1,492	1,492	1,492	1,492	1,492

Tabela 8 – Estatísticas dos pontos de controle com base no número de pontos, para região do Peru.

N° pts Controle:	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
Média (m):	0,111	0,148	0,139	0,153	0,171	0,160	0,166	0,173	0,162	0,165
SD (m):	1,873	1,868	1,862	1,860	1,864	1,851	1,847	1,842	1,847	1,856
Max. (m):	6,704	6,704	7,364	7,620	7,717	7,717	7,717	7,813	7,813	7,885

A Tabela 9 e Tabela 10 são análogas à Tabela 6, porém mostram as estatísticas (MÉDIA, SD, RMS e MAX), obtidas para a região de São Paulo e Peru, respectivamente.

Tabela 9 – Estatísticas (em metros) dos dados com base na quantidades de pontos utilizados no treinamento da RBF para cada uma das funções, na região de São Paulo

N° pts Controle:		1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
Multiq.	Média	0,002	0,008	0,002	0,000	-0,000	-0,000	-0,001	-0,001	-0,001	-0,000
	SD	0,081	0,054	0,037	0,023	0,022	0,020	0,016	0,014	0,012	0,012
	RMS	0,081	0,054	0,038	0,023	0,022	0,020	0,016	0,014	0,012	0,012
	Max.	0,468	0,299	0,241	0,205	0,214	0,221	0,096	0,088	0,069	0,077
Muitiq. Inversa	Média	0,004	0,009	0,002	0,000	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,000
	SD	0,095	0,062	0,046	0,028	0,025	0,022	0,018	0,016	0,014	0,014
	RMS	0,095	0,063	0,046	0,028	0,025	0,022	0,018	0,016	0,014	0,014
	Max.	0,499	0,334	0,314	0,213	0,218	0,223	0,136	0,123	0,099	0,109
Linear	Média	0,003	0,011	0,004	0,001	0,001	0,000	0,000	-0,000	-0,000	-0,000
	SD	0,094	0,064	0,052	0,035	0,031	0,026	0,022	0,020	0,018	0,017
	RMS	0,094	0,065	0,053	0,035	0,031	0,026	0,022	0,020	0,018	0,017
	Max.	0,515	0,350	0,341	0,224	0,221	0,219	0,157	0,156	0,113	0,116
Cúbica	Média	0,000	0,006	0,001	0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,001	-0,001	-0,000
	SD	0,073	0,053	0,034	0,022	0,020	0,018	0,014	0,012	0,011	0,010
	RMS	0,073	0,053	0,034	0,022	0,020	0,018	0,014	0,012	0,011	0,010
	Max.	0,383	0,337	0,183	0,175	0,190	0,195	0,084	0,076	0,063	0,064
Quínti-ca	Média	-0,001	0,005	0,000	-0,001	-0,001	-0,000	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001
	SD	0,071	0,059	0,036	0,027	0,024	0,022	0,017	0,014	0,013	0,012
	RMS	0,071	0,059	0,036	0,027	0,024	0,022	0,017	0,014	0,013	0,012
	Max.	0,272	0,381	0,209	0,187	0,204	0,238	0,124	0,113	0,087	0,093
Thin-Plate	Média	0,001	0,008	0,002	0,001	0,000	0,000	-0,000	-0,001	-0,000	-0,000
	SD	0,080	0,053	0,038	0,024	0,022	0,019	0,015	0,013	0,012	0,011
	RMS	0,080	0,054	0,038	0,024	0,022	0,019	0,015	0,013	0,012	0,011
	Max.	0,452	0,302	0,232	0,177	0,186	0,185	0,089	0,084	0,084	0,085

Tabela 10 – Estatísticas (em metros) dos dados com base na quantidades de pontos utilizados no treinamento da RBF para cada uma das funções, na região do Peru.

N° pts Controle		1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
Multiq.	Média	-0,002	-0,003	0,004	0,004	0,002	0,001	-0,000	-0,001	0,001	0,000
	SD	0,243	0,108	0,081	0,052	0,039	0,038	0,032	0,026	0,030	0,024
	RMS	0,244	0,108	0,081	0,052	0,039	0,038	0,032	0,026	0,030	0,024
	Max.	1,078	0,842	0,846	0,399	0,281	0,318	0,308	0,228	0,529	0,376
Muitiq. Inversa	Média	-0,010	-0,005	0,001	0,002	0,001	0,000	-0,000	-0,001	0,001	0,000
	SD	0,238	0,122	0,094	0,065	0,048	0,041	0,035	0,029	0,033	0,028
	RMS	0,238	0,122	0,094	0,065	0,048	0,041	0,035	0,029	0,033	0,028
	Max.	1,196	0,635	0,827	0,657	0,589	0,351	0,338	0,301	0,561	0,412
Linear	Média	-0,009	-0,005	-0,001	0,002	0,000	0,001	0,000	-0,001	-0,000	-0,001
	SD	0,269	0,132	0,120	0,084	0,069	0,066	0,057	0,050	0,044	0,039
	RMS	0,269	0,132	0,120	0,084	0,069	0,066	0,057	0,050	0,044	0,039
	Max.	1,163	0,879	1,197	0,735	0,400	0,371	0,347	0,352	0,296	0,267

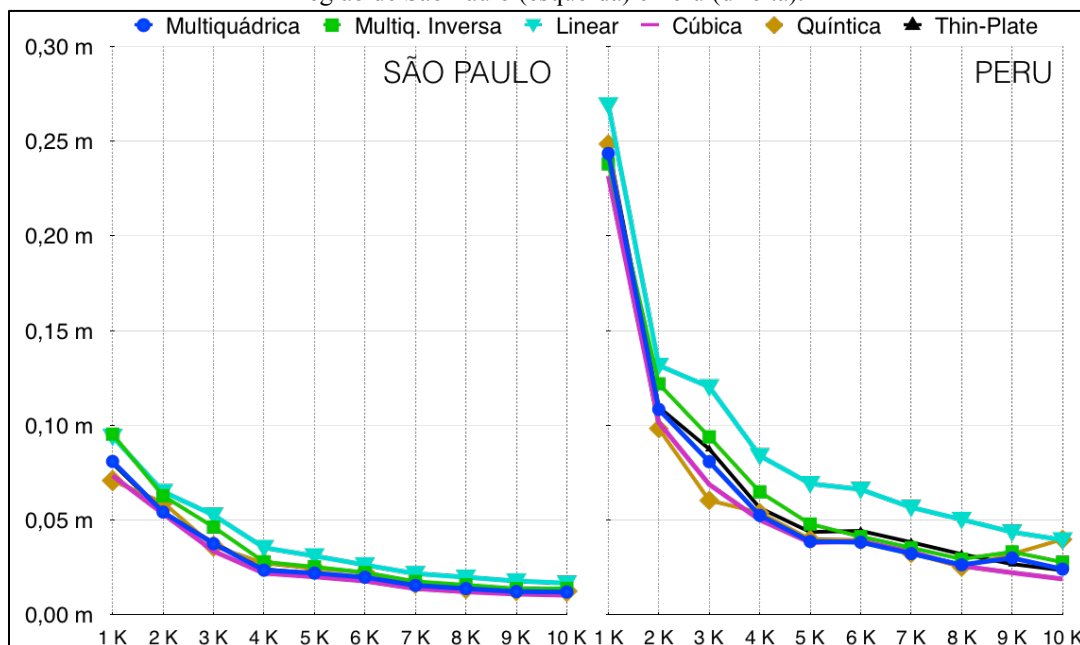
Tabela 10 – Continuação.

N° pts Controle:		1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
Cúbica	Média	0,005	-0,005	0,005	0,004	0,002	0,002	0,000	-0,001	-0,001	-0,001
	SD	0,232	0,101	0,069	0,050	0,038	0,039	0,033	0,026	0,022	0,019
	RMS	0,232	0,102	0,069	0,050	0,038	0,039	0,033	0,026	0,022	0,019
	Max.	0,894	0,879	0,685	0,373	0,297	0,331	0,322	0,204	0,189	0,189
Quínti- ca	Média	0,003	-0,009	0,001	0,005	0,002	0,001	0,001	-0,001	-0,001	0,007
	SD	0,248	0,098	0,060	0,054	0,040	0,039	0,032	0,025	0,032	0,039
	RMS	0,248	0,098	0,060	0,054	0,040	0,039	0,032	0,025	0,032	0,040
	Max.	1,139	0,854	0,574	0,425	0,422	0,390	0,340	0,302	0,530	0,638
Thin- Plate	Média	0,002	-0,004	0,004	0,003	0,001	0,002	0,000	-0,001	-0,001	-0,001
	SD	0,247	0,110	0,087	0,056	0,044	0,044	0,038	0,032	0,027	0,023
	RMS	0,247	0,110	0,088	0,056	0,044	0,044	0,038	0,032	0,027	0,023
	Max.	1,053	0,865	0,970	0,468	0,312	0,319	0,329	0,230	0,208	0,208

Novamente observa-se a diminuição dos RMS com o aumento do número de pontos utilizados na fase de treinamento. Os resultados desse experimento mostram que a modelagem das distorções apresentou comportamento semelhante para todas as funções no caso de uma região como São Paulo. As funções nessa escala de estudo utilizando 10.000 pontos durante o treinamento mostraram RMS entre $\pm 0,010$ e $0,017$ m (destacado em verde – Tabela 9). Os experimentos na região do Peru mostraram menor consistência, pois as distorções modeladas têm maior sinuosidade em relação a região anterior. Para 10.000 pontos na fase de treinamento o RMS das funções da segunda região variou entre $\pm 0,019$ e $0,028$ m (destacado em verde - Tabela 10) e chegou à $\pm 0,039$ e $0,040$ m (destacado em vermelho – Tabela 10) respectivamente para a função linear e quíntica.

Na Figura 47, observa-se os valores dos RMS obtidos para cada função com base no número de pontos utilizados na etapa de treinamento. Para obtenção de um RMS de aproximadamente $\pm 0,10$ m na região de São Paulo foram necessários 1.000 pontos na fase de treinamento, enquanto para região do Peru foram necessários 3.000 pontos. Portanto, a região do Peru com SD para as distorções de $\pm 1,856$ m nos 10.000 pontos mostra necessidade de maior quantidade de pontos para modelagem das distorções em comparação à região de São Paulo, com SD para as distorções de $\pm 0,409$ m em 10.000 pontos. Porém utilizando a quantidade máxima de 10.000 pontos na modelagem das distorções os resultados foram semelhantes, com RMS entre 0,01 e 0,02 m.

Figura 47 – RMS (m) das redes RBF pela quantidade de pontos utilizados no treinamento da rede para região de São Paulo (esquerda) e Peru (direita).



Relativo às amostras de 10% de pontos para região de São Paulo (Tabela 7), nota-se que as estatísticas dos dados (Tabela 9) foram reduzidas em torno de 80%, com 1.000 pontos para fase de treinamento, e 97%, com 10.000 pontos para fase de treinamento. Para região do Peru, em relação às amostras de 10% de pontos (Tabela 8) essa melhora foi mais expressiva, representando 87% de redução das estatísticas (Tabela 10), para 1.000 pontos na fase de treinamento, e 99%, com 10.000 pontos na fase de treinamento. Nota-se que refletiram no RMS dos pontos de verificação os erros referentes à cada um dos GGM individualmente e os erros do próprio interpolador.

Nesses experimentos foram interessantes os resultados obtidos com relação às diferentes escalas utilizadas. A dispersão das distorções (SD) iniciais mostrou ser um parâmetro influenciável na modelagem, juntamente com a quantidade de pontos utilizados. Entretanto os resultados não permitem concluir qual é a função ideal para modelagem de distorções de maneira geral. São necessários experimentos para escolha mais adequada da função RBF de acordo com as características dos dados. Uma comparação entre o experimento para região da América Latina, onde a função linear apresentou alta consistência, e o segundo experimento para a região do Peru, onde a mesma função apresentou baixa consistência, permite concluir que nem sempre a mesma função será a mais adequada para todos os casos. Para o caso de distorções suaves e uma grande quantidade de pontos, as funções RBF apresentam resultados semelhantes.

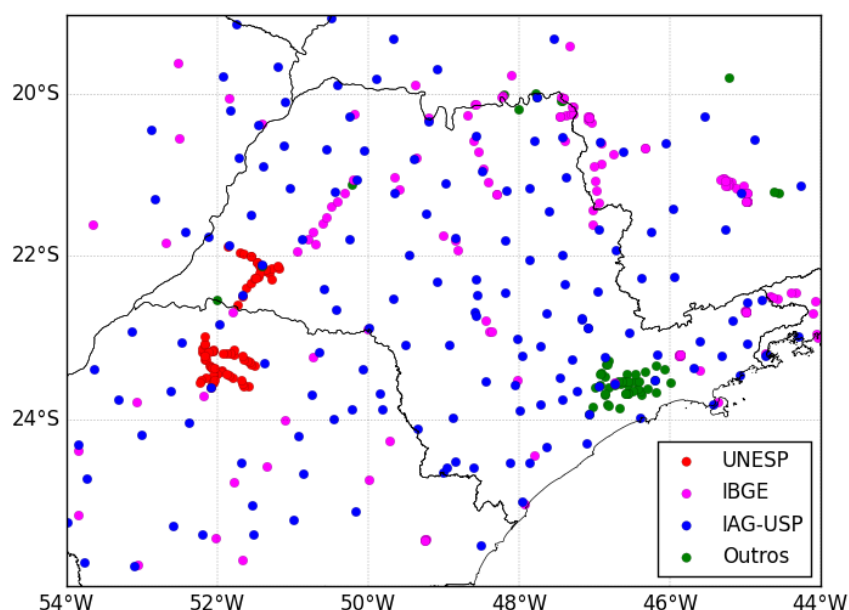
6 GEOIDES HÍBRIDOS PARA O ESTADO DE SÃO PAULO

Nesse capítulo é dado destaque às peculiaridades dos dados altimétricos de nivelamento/GNSS. Ademais, são realizados alguns experimentos para análises do comportamento das redes RBF com utilização dos dados reais de distorção, os quais contribuem para geração dos geoides híbridos para o Estado de São Paulo. Os experimentos realizados seguiram com a mesma plataforma *Python 2.7.9* e biblioteca *SciPy 0.15.1*.

6.1 Dados de nivelamento/GNSS

Um total de 425 pontos de nivelamento/GNSS foram disponibilizados por organizações públicas, como órgãos nacionais e universidades estaduais, e privadas, como empresas particulares. A Figura 48 mostra a distribuição dos pontos sobre a área de estudo, onde cada cor representa uma das fontes fornecedoras e responsável pelo levantamento dos dados: UNESP (Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"), IBGE, IAG-USP e outras instituições. Nota-se que o IBGE e o IAG-USP apresentam os dados bem distribuídos, entre a UNESP e “Outros” há uma concentração de dados, respectivamente, na região de Maringá (PR) e na região metropolitana de São Paulo.

Figura 48 – Dados de nivelamento/GNSS sobre referências de nível fornecidos pela UNESP, IBGE, IAG-USP e “Outros”.



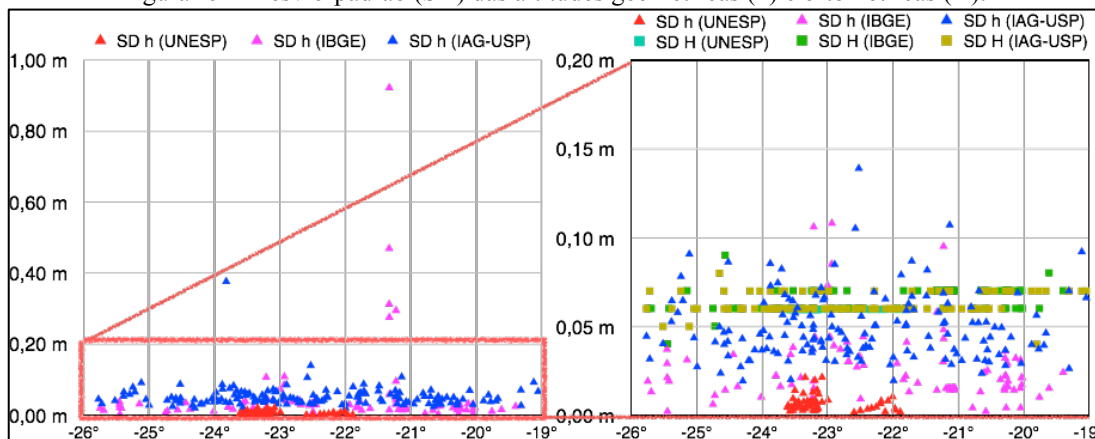
Referente a essa quantidade de pontos, 226 pontos estão localizados no interior do Estado de São Paulo e 199 nos estados ao entorno, dentre eles Paraná, Mato Grosso do Sul, Minas Gerais e Rio de Janeiro. A Tabela 11 resume a distribuição dos dados de nivelamento/GNSS com relação à organização fornecedora dos dados.

Tabela 11 – Quantidade de pontos de nivelamento/GNSS por fonte dos dados no Estado de São Paulo.

Fonte	Nº de pontos
UNESP	71
IAG-USP	156
IBGE	144
Outros	54
TOTAL	425

Um ponto interessante na análise dos dados GNSS é sua qualidade. Os desvios-padrão (SD) das altitudes geométricas (h) são fornecidas por algumas organizações que realizaram o levantamento (ARANA, 2000; SÁ e VIEIRA, 2006) e memoriais descritivos disponibilizados no Banco de Dados do IBGE. O SD das altitudes ortométricas (H) referenciadas à RAFB foram calculados no último ajustamento altimétrico do IBGE (2011) e obtidas também por meio dos respectivos memoriais descritivos. A Figura 49 ilustra os SDs das altitudes geométricas com base na fonte dos dados (UNESP, IBGE e IAG-USP) e das altitudes ortométrica de suas respectivas fontes. Observa-se a presença de seis *outliers* nas precisões de pontos do IBGE e IAG-USP.

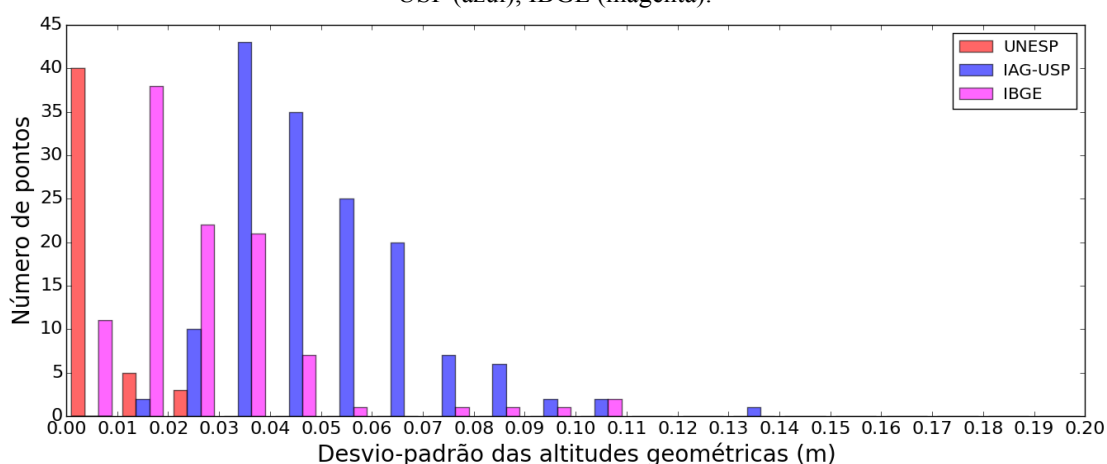
Figura 49 – Desvio-padrão (SD) das altitudes geométricas (h) e ortométricas (H).



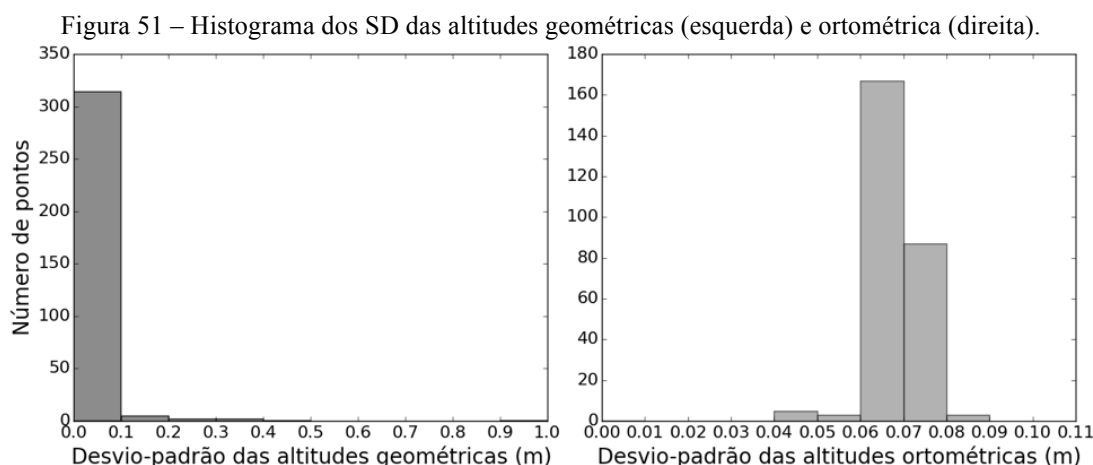
A presença de pontos com desvios-padrão maior que $\pm 0,10$ m pode prejudicar o modelo híbrido final. Porém, outro fator também deve ser levado em consideração: o comportamento das distorções em meio ao conjunto de dados. Pontos que apresentam distorções inconsistentes com a tendência local indicam a presença de erros incompatíveis, sejam provenientes do ajustamento nas altitudes das RRNN, de inconsistência de *Datum* ou mesmo do no rastreamento GNSS. Portanto uma filtragem desses pontos faz-se necessária e será apresentada no tópico seguinte.

No histograma da Figura 50 tem-se uma comparação entre os SD fornecidos pelas diferentes instituições. Observa-se que a maioria dos pontos fornecidos pela UNESP apresentam precisão milimétrica das altitudes, com relação ao IBGE tem-se predominância de precisões de 0,02 à 0,03 m e para o IAG-USP as altitudes encontram-se em maioria com precisão de 0,04 até 0,05 m.

Figura 50 – Histograma dos desvios-padrão das altitudes geométricas da UNESP (vermelho), IAG-USP (azul), IBGE (magenta).



A Figura 51 mostra os histogramas dos desvios-padrão das altitudes geométricas independente da fonte fornecedora dos dados (esquerda) e altitude ortométricas (direita). Observa-se a predominância de uma precisão decimétrica (0,0 à 0,10 m) nas altitudes geométricas e centimétrica (0,06 e 0,07 m) nas ortométricas.



Outro ponto importante deve ser destacado. Entre os dados fornecidos, constatou-se que o rastreamento GNSS realizado foi feito sobre pontos da RAFB e também outras redes, entre elas, a RAFSP. Uma análise dos dados mostrou que nem todos os pontos da RAFB possuíam a altitude ortométrica atualizada com relação ao último ajustamento (IBGE, 2011). As altitudes foram então substituídas com base nos memoriais descritivos do IBGE, entretanto as RRNN não pertencentes à RAFB não puderam ser atualizadas. Do total de pontos disponibilizados, 87 RRNN não foram atualizadas, representando aproximadamente 20% dos dados. Esses dados foram descartados; pois, a rigor não são pertencentes ao mesmo *datum*.

As estatísticas das distorções, isto é, das discrepância entre os dados de nivelamento/GNSS, considerando somente os 338 pontos com altitudes ortométricas ajustadas segundo IBGE (2011), e os modelos geoidais em estudo (EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014) são apresentadas na Tabela 12.

Tabela 12 – Consistência (em metros) dos geoides gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação aos pontos de nivelamento rastreados, para o Estado de São Paulo.

	EGM08	MAPGEO2015	GEOIDSP2014
Média:	0,108	0,056	0,057
Desvio-Padrão:	0,240	0,229	0,237
RMS:	0,263	0,236	0,244
Máximo abs.:	1,677	1,388	1,386
Assimetria:	0,242	0,021	-0,009
Curtose:	13,504	12,148	11,503

A dispersão (SD) dos dados entre os modelos é semelhante, entretanto o fator de acurácia (RMS) do EGM2008 é prejudicado devido a maior tendência encontrada no modelo. O MAPGEO2010 e o GEOIDSP2014 apresentam uma

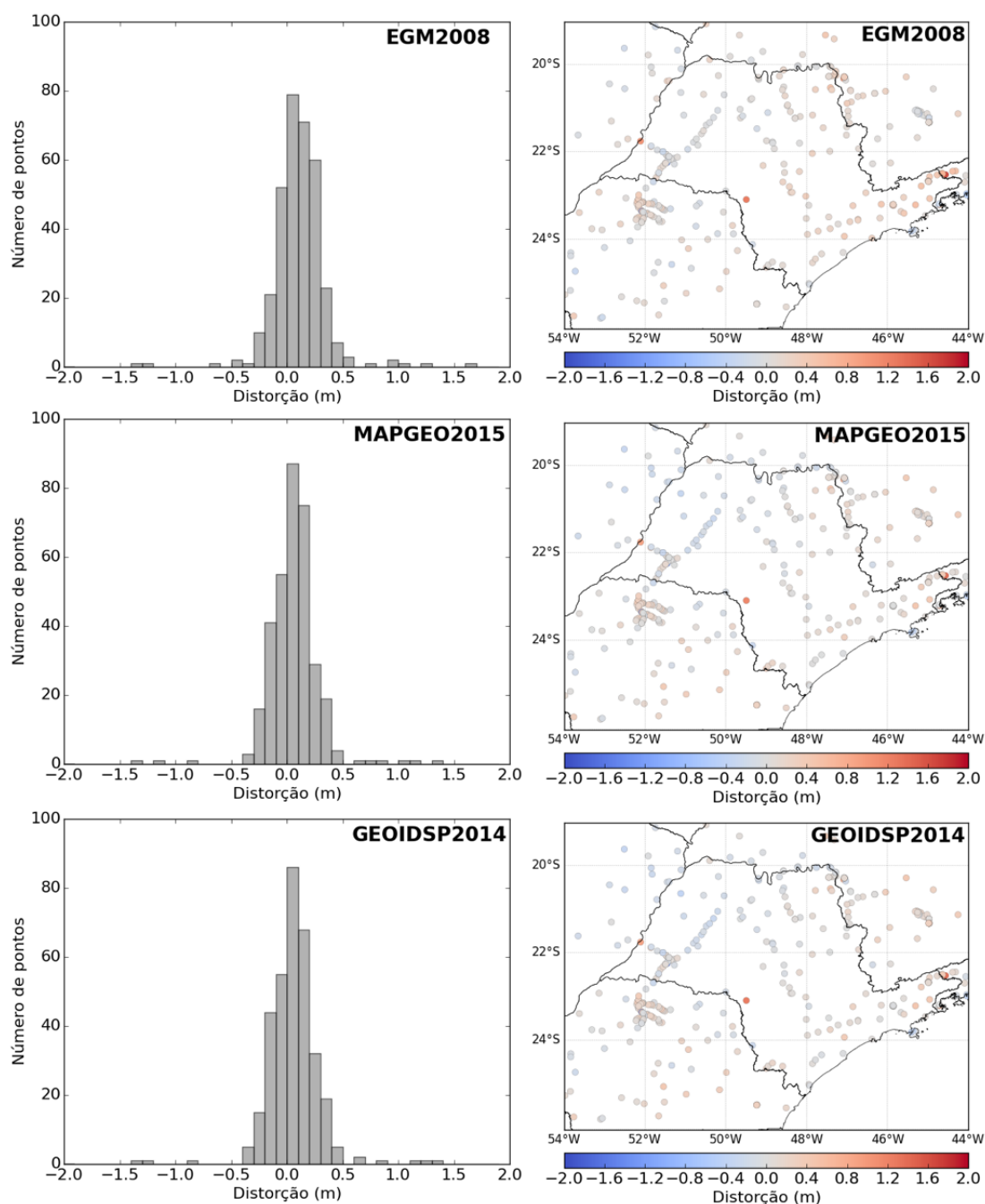
consistência semelhante, graças à utilização da mesma metodologia de obtenção do modelo e dos longos e médios comprimentos de onda também serem fornecidos por um modelo de geopotencial da mesma série, o EIGEN.

Os coeficientes de assimetria e curtose apresentados indicam a proximidade que as distorções apresentam em relação a uma distribuição normal. No caso dos valores obtidos, os coeficientes de assimetria próximos de valores nulos indicam distribuições das distorções simétricas, para as distorções do EGM2008 o valor mostra uma distribuição menos simétrica em relação aos outros modelos. O coeficiente de curtose, por sua vez, indica o “grau de achatamento” da distribuição de frequência. As discrepâncias obtidas com os modelos EGM2008; MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 mostraram um comportamento platicúrtico.

A Figura 52 mostra as distorções entre nivelamento e os modelos geoidais respectivamente EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014, na forma de histograma (esquerda) e pontualmente (direita). Nota-se a presença de distorções distantes da média dos dados. Esses pontos indicam a presença de erros nas altitudes ortométricas ajustadas da rede altimétrica ou nas altitudes geométricas.

Para obtenção de um modelo geoidal híbrido com melhor qualidade possível, a eliminação de erros grosseiros, ou *outliers*, nas fontes de dados altimétricos se faz essencial. No tópico seguinte é apresentada uma metodologia de filtragem dos dados altimétricos para seleção de dados de validação de modelos geoidais gravimétricos e consequente geração de geoides híbridos.

Figura 52 – Distorções (em metros) dos modelos geoidais EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação às referências de nível rastreadas, na forma de histograma (esquerda) e pontualmente (direita).



6.1.1 Filtragem das distorções altimétricas

Nessa etapa deve ficar claro que não é proposto um método para minimização dos erros presentes nas altitudes, ou nos dados de distorções altimétricas, e sim a desconsideração dos pontos que apresentam altitudes inconsistentes, de maneira a eliminar os erros inesperados no conjunto de dados. Entretanto essa metodologia parte do pressuposto que as distorções entre os modelos

geoidais e os dados de nivelamento/GNSS deveriam apresentar uma distribuição normal (N). Nesse tipo de distribuição, a proporção de valores dentro de um intervalo é dada em função da média ($\hat{\mu}$) e desvio-padrão ($\hat{\sigma}$) amostral dos dados. A Tabela 13 mostra a relação entre o intervalo e a proporção de valores esperados de uma amostra de distribuição normal $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$.

Tabela 13 – Proporção de valores esperados em função da média ($\hat{\mu}$) e desvio-padrão ($\hat{\sigma}$) de um conjunto de dados, para uma amostra com distribuição normal.

Intervalo	Proporção
$\hat{\mu} \pm 1\hat{\sigma}$	68,27%
$\hat{\mu} \pm 2\hat{\sigma}$	95,45%
$\hat{\mu} \pm 3\hat{\sigma}$	99,73%

A utilização de um desses intervalos para filtragem de dados implica no descarte de uma parte da amostra, que pode não ser *outliers*. Considerando a quantidade de pontos amostrais, o uso do intervalo $[\hat{\mu} \pm 3\hat{\sigma}]$ proporciona estatisticamente o descarte de 0,27% dados sem erros, equivalente a aproximadamente 1 ponto altimétrico. A partir desse ideia, as filtrações dos dados de distorção foram realizadas adotando esse intervalo.

Ainda, para as filtrações dos erros altimétricos são propostas duas etapas. A primeira consiste na seleção dos dados em relação a amostra total dos dados e na segunda etapa tem-se a desconsideração de pontos que apresentam distorções inconsistentes com um grupo de pontos vizinhos, isto é, geometricamente próximos.

Etapas 1:

Nessa etapa os intervalos são calculados com base nas estatísticas do conjunto total de dados (Tabela 12), isto é, os 338 pontos rastreados. A característica dessa filtragem é a eliminação das distorções mais afastados da média dos dados, como consequência as estatísticas apresentam consideráveis reduções. A Tabela 14 apresenta as estatísticas das distorções, analogamente à Tabela 12, após a filtragem dos dados. Observando essas valores nota-se que as médias das distorções apresentaram redução de 0,002 à 0,005 m, os SD e RMS reduziam entre 0,065 e 0,075 m e os valores máximos foram atenuados de 0,683 à 0,972 m. Outro ponto que deve ser destacado é a variação dos coeficientes de assimetria e curtose. A assimetria das distorções para o EGM2008, em relação ao total de pontos, reduziu 0,257 m, indicando maior simetria dos dados, para os modelos MAPGEO2015 e

GEOIDSP2014 esse coeficiente sofreu um aumento de respectivamente 0,228 e 0,233 m, revelando menor simetria em relação às distorções anteriores à filtragem. Em relação à curtose, apesar da redução de aproximadamente 12,0 m, as distorções dos modelos ainda mostraram um comportamento platicúrtico.

Tabela 14 – Consistência (em metros) dos geoides gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação aos pontos de nivelamento rastreados, após a primeira etapa de filtragem dos dados

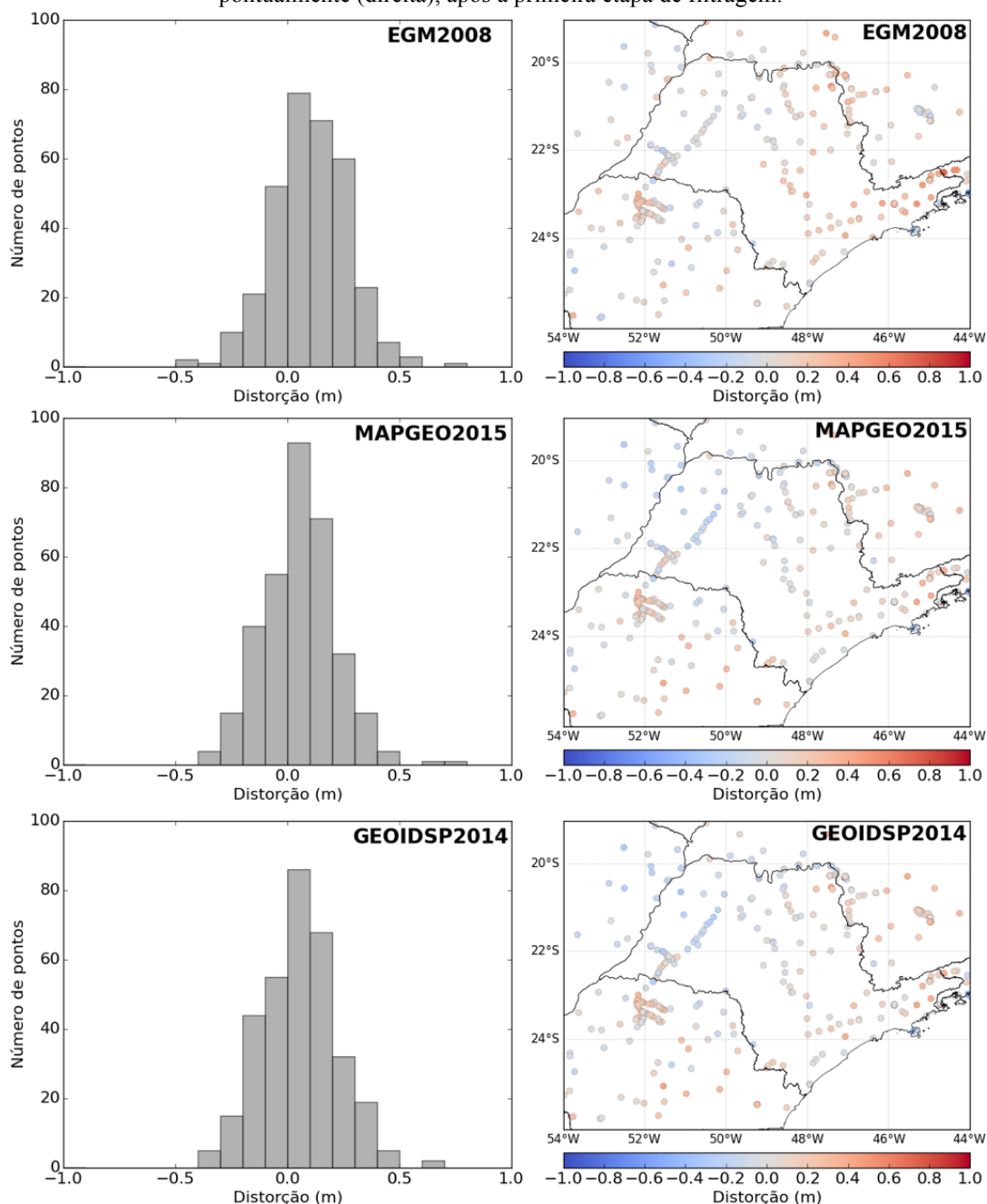
	EGM08	MAPGEO2015	GEOIDSP2014
Média:	0,103	0,054	0,054
Desvio-Padrão:	0,165	0,162	0,169
RMS:	0,195	0,171	0,178
Máximo abs.:	0,705	0,705	0,686
Assimetria:	-0,015	0,249	0,224
Curtose:	0,727	0,633	0,399

Destaca-se que nessa etapa foram eliminados os mesmos 7 pontos para avaliação dos modelos MAPGEO2015 e GEOIDSP2014, onde 2 pontos são originados de levantamentos da UNESP, 2 do IAG-USP e 3 do IBGE. Para o modelo EGM2008 essa filtragem eliminou adicionalmente 1 ponto, pertencente ao IBGE, além dos 7 anteriores e comuns aos outros modelos geoidais.

A Figura 53 apresenta na forma de histogramas (esquerda) e pontualmente (direita) as distorções, analogamente à Figura 52, após a primeira etapa de filtragem dos dados. Com a redução do intervalo das distorções, após a filtragem, nota-se tendências locais, isto é, a predominância de distorções positivas, negativas e nulas em regiões da área de estudo. Por exemplo o noroeste do Estado de São Paulo mostra uma grande quantidade de distorções negativas, indicando uma tendência local negativa.

Entretanto é possível observar que alguns pontos apresentam distorções contrastantes em relação à tendência local. A segunda etapa é então proposta com intuito de eliminar esses pontos com distorções distantes da média local, novamente presumindo que essas distorções locais apresentam distribuição normal.

Figura 53 – Distorções (em metros) dos modelos geoidais EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação às referências de nível rastreadas, na forma de histograma (esquerda) e pontualmente (direita), após a primeira etapa de filtragem.



Etapa 2:

Para a segunda etapa de filtragem também são utilizados as médias e desvios-padrão, porém locais, verificando pontualmente se cada distorção está dentro do novo intervalo $[\hat{\mu} \pm 3\hat{\sigma}]$. Entretanto, a seleção dos pontos próximos exige a definição de alguns parâmetros: a quantidade de pontos mínima ou máxima que se deve levar em consideração e/ou a distância mínima ou máxima para busca dos pontos geometricamente próximos. Tendo em vista que a distribuição dos dados é

irregular, definições desses parâmetros podem levar a uma filtragem exagerada dos dados. O objetivo principal dessa etapa é uma suavização dos dados sem comprometer as estatísticas do conjunto global de distorções.

A Tabela 15 mostra a quantidade relativa de pontos que possuem uma quantidade mínima de vizinhos próximos (30, 20 e 10 pontos) a partir de determinado raio de busca.

Tabela 15 – Porcentagem de pontos que possui uma quantidade mínima de vizinhos próximos, modificando o raio de busca entre 30' até 2°.

Raio de busca	30 pts	20 pts	10 pts
30' (55 km)	12%	33%	43%
1° (110 km)	35%	59%	86%
1°30' (167 km)	75%	89%	98%
2° (222 km)	94%	97%	100%

Uma análise da tabela mostra que considerando uma amostra para cálculo das estatísticas locais de 30 pontos, aproximadamente 10% da quantidade de dados da área de estudo total, o raio de busca máximo dos pontos de 2° é suficiente para 94% dos dados. Os pontos nas bordas da área de estudo estão mais isolados, apresentando maior dificuldade para encontrar pontos vizinhos. Consequentemente esses pontos precisam ultrapassar o raio de busca para atender a certa quantidade mínima de pontos. Uma solução é a redução da quantidade de pontos para os cálculos das estatísticas. Diminuindo essa quantidade para 20 pontos vizinhos, nota-se que 97% dos dados totais contemplam esse requisito. Reduzindo novamente para 10 pontos a busca da quantidade de pontos, com um raio ainda de 2°, todos os pontos conseguem atender a quantidade mínima de pontos.

Uma análise espacial dos dados evidencia que a utilização somente do raio de busca para seleção dos pontos vizinhos implicaria na utilização de uma exagerada quantidade de pontos para os cálculos das estatísticas, ultrapassando até 100 pontos vizinhos. Por outro lado, o uso de uma quantidade mínima de pontos vizinhos muito grande pode causar a seleção de pontos muito distantes, estes não representando de fato as distorções locais. Para o caso de estudo, foi observado que o uso de uma quantidade mínima de 10 pontos para busca dos pontos vizinhos não ultrapassa o raio máximo de 2° e ainda em 86% dos pontos os dados são encontrados a uma distância de no máximo 1°.

Após a filtragem dos dados pela Etapa 2, as novas estatísticas das distorções foram calculadas (Tabela 16). As médias das distorções reduziram entre 0,001 e 0,007 m, os SD e do RMS foram atenuados de 0,008 à 0,015 m e os valores máximos

sofreram redução de 0,168 à 0,262 m. Novamente nota-se uma variação dos coeficientes de assimetria e curtose. Em relação ao valores da primeira etapa de filtragem os coeficientes de assimetria das distorções dos modelos EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 reduziram, respectivamente, 0,119 m, 0,337 m e 0,282 m. Os coeficientes de curtose desses modelos também apresentaram uma diminuição de 0,190 m, 0,777 m e 0,601 m para os mesmos respectivos modelos. Entretanto, as distorções do EGM2008 mantiveram um comportamento platicúrtico, enquanto as distribuições das distorções dos outros modelos passaram a apresentar um comportamento leptocúrtico.

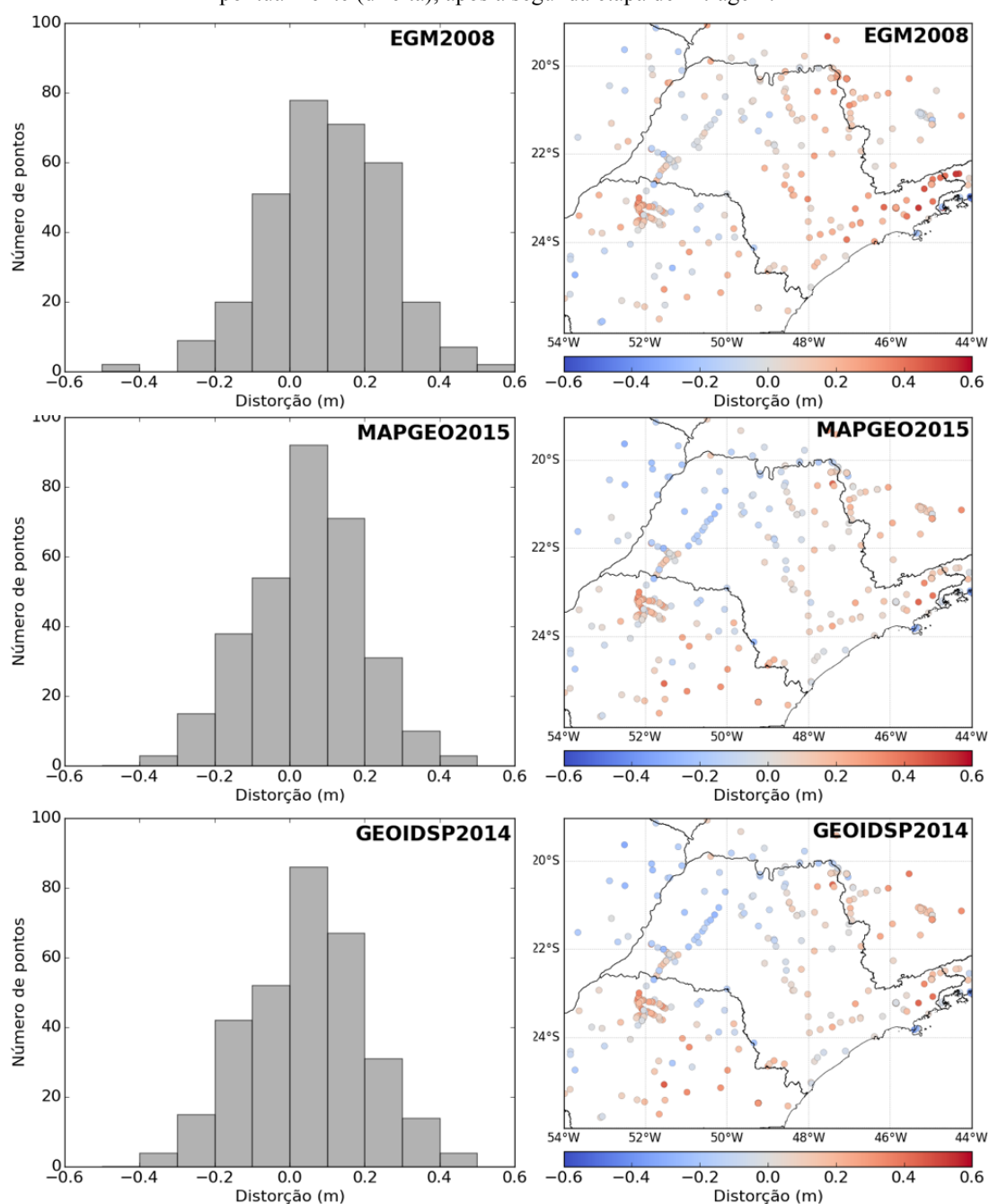
Tabela 16 – Consistência (em metros) dos geoides gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação aos pontos de nivelamento rastreados, após a segunda etapa de filtragem dos dados.

	EGM08	MAPGEO2015	GEOIDSP2014
Média:	0,102	0,047	0,047
Desvio-Padrão:	0,157	0,149	0,156
RMS:	0,187	0,156	0,163
Máximo abs.:	0,537	0,443	0,454
Assimetria:	-0,134	-0,088	-0,058
Curtose:	0,537	-0,144	-0,202

Essa etapa apresentou variação em relação a quantidade de pontos rejeitados para os diferentes modelos. Para o MAPGEO2015 a filtragem eliminou 16 pontos: 2 pertencentes à UNESP, 10 ao IAG-USP e 4 ao IBGE; para o GEOIDSP2014, 14 pontos foram desconsiderados: 2 pertinentes aos levantamentos da UNESP, 8 do IAG-USP e 4 do IBGE. Entre esses modelos 13 pontos eliminados são em comum. Para o EGM2008, 10 pontos foram desconsiderados com a filtragem realizada, onde 1 é concernente à UNESP, 3 ao IAG-USP e 6 ao IBGE. Somente 4 pontos eliminados são comuns aos 3 modelos geoidais.

Na Figura 54 são apresentadas as distorções na forma de histogramas (esquerda) e pontualmente (direita) as distorções após a segunda etapa de filtragem dos dados.

Figura 54 – Distorções (em metros) dos modelos geoidais EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação às referências de nível rastreadas, na forma de histograma (esquerda) e pontualmente (direita), após a segunda etapa de filtragem.



Um resumo da quantidade de pontos restantes após cada etapa de filtragem é mostrado na Tabela 17.

Tabela 17 – Quantidade de pontos restantes após cada etapa de filtragem para os modelo EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014.

	EGM08	MAPGEO2015	GEOIDSP2014
Inicialmente	338	338	338
Após Etapa 1	330	331	331
Após Etapa 2	319	317	315

Nas seções seguintes são detalhados alguns experimentos para escolha dos pontos de controle e da função radial mais adequada para modelagem das distorções. Ao final dos experimentos são apresentados os geoides híbridos gerados utilizando cada um dos modelos.

6.2 Modelagem das Distorções e Validação

Inicialmente, existem dois pontos fundamentais na modelagem das distorções: a escolha dos pontos para geração e verificação da superfície de distorção e a função de interpolação RBF para obtenção dessa superfície. Nesse sentido, foram realizados experimentos onde a escolha dos pontos para obtenção da superfície de distorção foi feita aleatoriamente, variando quantidade de pontos de 10% à 90% do total disponível; e por meio da utilização de uma grade regular. Ao decorrer dos experimentos foram utilizadas as funções linear, cúbica, *thin-plate*, multiquádrica inversa e multiquádrica. Somente o GEOIDSP2014 foi utilizado nesses experimentos como modelo gravimétrico.

6.2.1 Treinamento da RBF com pontos aleatoriamente distribuídos

Esse experimento foi realizado de maneira que os pontos na fase de treinamento das redes RBF fossem escolhidos aleatoriamente entre todos os dados disponíveis. O objetivo desse experimento foi testar se a escolha dos pontos de maneira aleatória é suficiente para determinar um modelo geoidal híbrido mais consistente com o nivelamento/GNSS a partir da rede neural RBF. A quantidade de pontos escolhidos para geração das superfícies de distorção foi progressivamente de 10% à 90% do total de pontos disponíveis.

Na Tabela 18 constam as estatísticas das discrepâncias entre os modelos geoidais híbridos, obtidos com os pontos aleatoriamente escolhidos, e o nivelamento/GNSS dos pontos não utilizados no treinamento das redes neurais, para cada RBF, progressivamente com o aumento do número de pontos na fase de treinamento de 10% à 90% dos dados disponíveis. Na mesma tabela são destacados em verde os RMS menores que $\pm 0,186$ m, representando uma maior consistência do geoide híbrido avaliado em relação ao GEOIDSP2014 (Tabela 16). Na cor vermelha tem-se os RMS que chegaram à escala do metro, nesses casos nota-se um problema

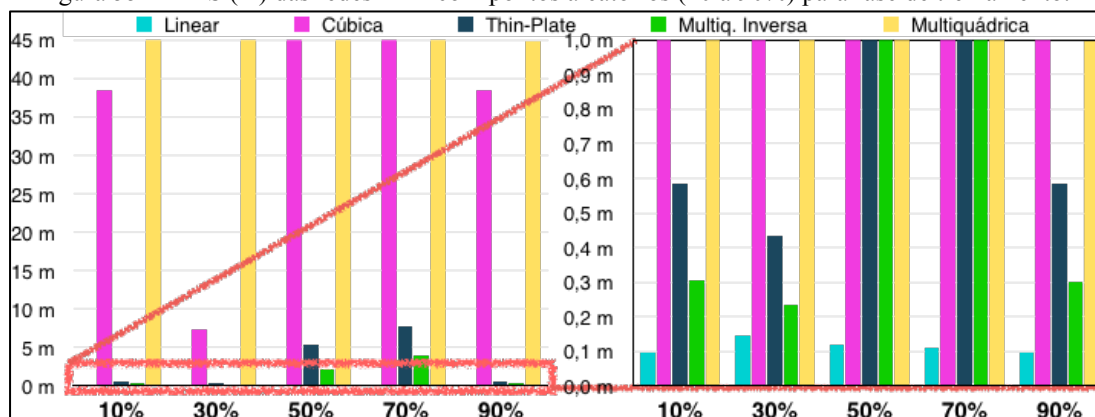
na geração das superfícies de distorção. Ainda, essas estatísticas apresentam uma variação com a repetição no experimento devido a aleatoriedade dos dados.

Tabela 18 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos gerados a partir dos pontos aleatoriamente escolhidos em relação aos pontos de verificação.

		Linear	Cúbica	Thin-Plate	Inversa Multiq.	Multiq.
10% dos pts.	Média	0,018	0,021	0,029	-0,000	0,031
	SD	0,136	0,276	0,179	0,432	0,148
	RMS	0,137	0,277	0,181	0,432	0,152
	Máximo abs.	0,514	1,195	0,858	1,899	0,433
30% dos pts.	Média	-0,001	-0,210	-0,063	64,177	0,053
	SD	0,144	7,315	0,428	843,756	0,228
	RMS	0,144	7,318	0,433	846,193	0,234
	Máximo abs.	0,505	61,385	2,722	6925,498	1,786
50% dos pts.	Média	0,004	-2,062	-0,356	47,761	-0,086
	SD	0,121	57,261	5,355	581,694	2,200
	RMS	0,121	57,298	5,367	583,651	2,201
	Máximo abs.	0,413	492,288	61,283	4048,525	22,917
70% dos pts.	Média	0,025	-2,326	-0,019	65,539	0,319
	SD	0,107	57,352	7,847	1067,070	4,037
	RMS	0,110	57,399	7,847	1069,081	4,049
	Máximo abs.	0,311	492,626	66,225	9605,925	23,052
90% dos pts.	Média	-0,014	0,422	-0,072	-307,779	0,029
	SD	0,097	38,491	0,579	4806,193	0,302
	RMS	0,098	38,493	0,584	4816,038	0,303
	Máximo abs.	0,267	158,844	2,217	23148,773	1,134

A Figura 55 mostra os RMS (m) obtidos em cada uma das funções aumentando a quantidade de pontos para a superfície de distorção. A escala dos gráficos foram fixadas em 45,0 m (esquerda) e 1,0 m (direita). Nota-se que a partir da escolha de 50% dos pontos, os RMS dos experimentos extrapolaram a escala do metro. A função linear mostrou uma modelagem das distorções mais adequada em todos os experimentos, obtendo maior consistência com os dados de nivelamento/GNSS e resultados mais estáveis. As outras funções mostram menor consistência. A partir da escolha de 50% dos dados altimétrico os valores máximos absolutos apresentaram redução. Em grande parte dos experimentos os RMS e valores máximos absolutos chegaram à valores que vão da ordem do metro ao quilômetro.

Figura 55 – RMS (m) das redes RBF com pontos aleatórios (10 à 90%) para fase de treinamento.



As figuras 57, 58, 59, 60 e 61 apresentam os histogramas das validações e as suas respectivas superfícies de distorções geradas pela utilização das redes RBF, onde as discrepâncias entre nivelamento/GNSS e o geóide gravimétrico dos pontos em vermelho foram utilizados na fase de treinamento das redes neurais e em azul para validação do geóide híbrido.

Figura 56 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 10% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).

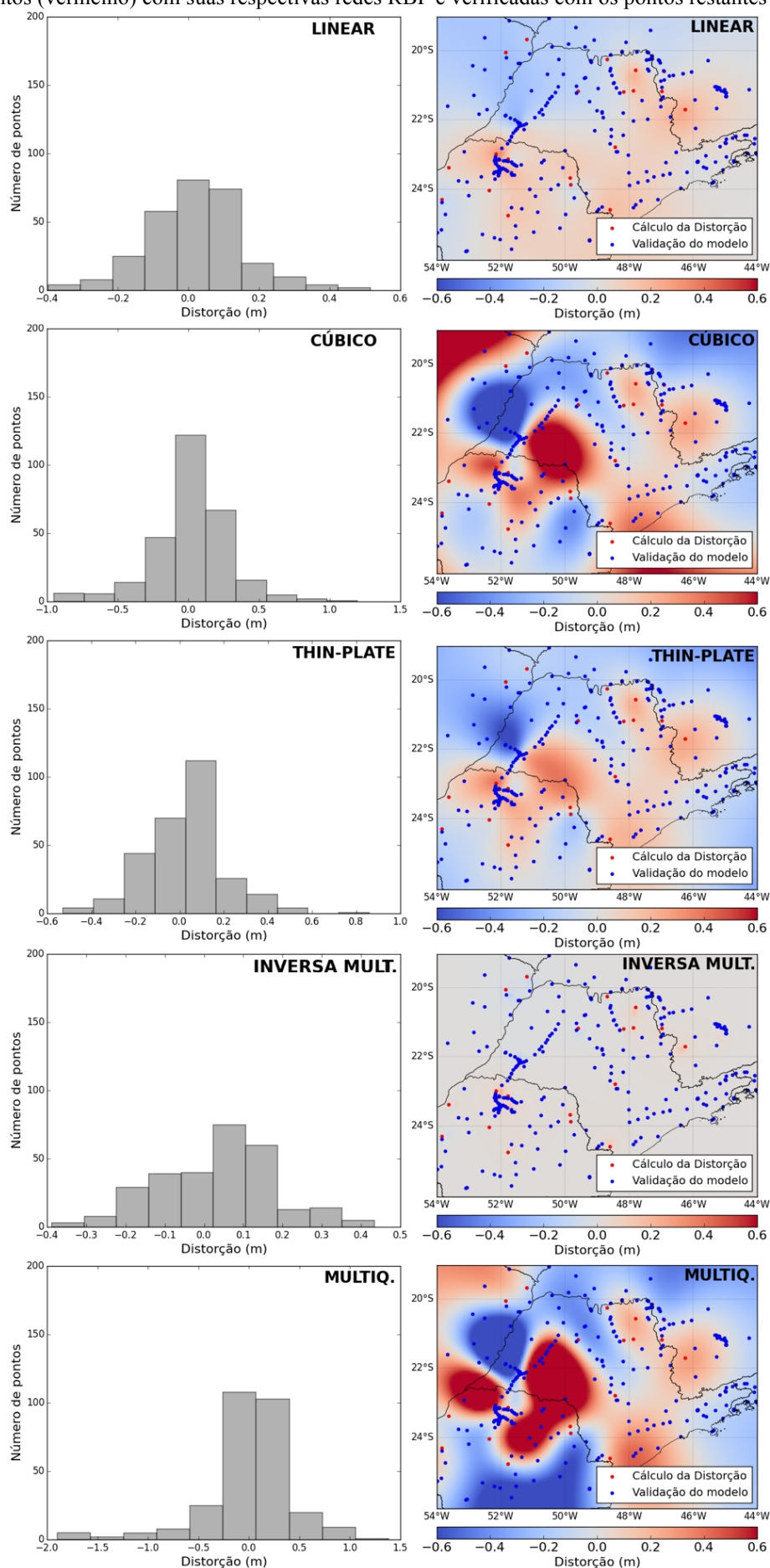


Figura 57 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 30% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).

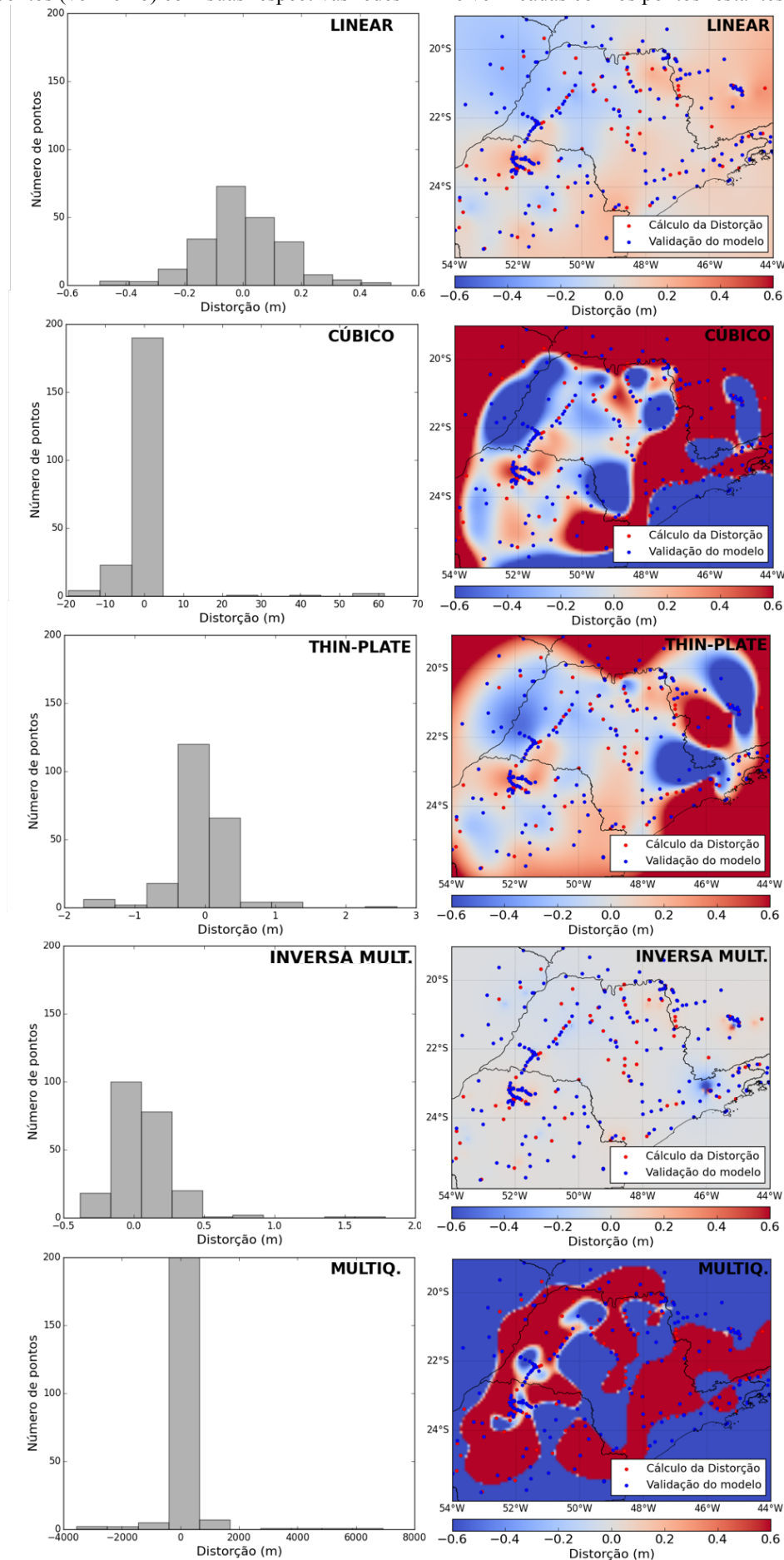


Figura 58 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 50% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).

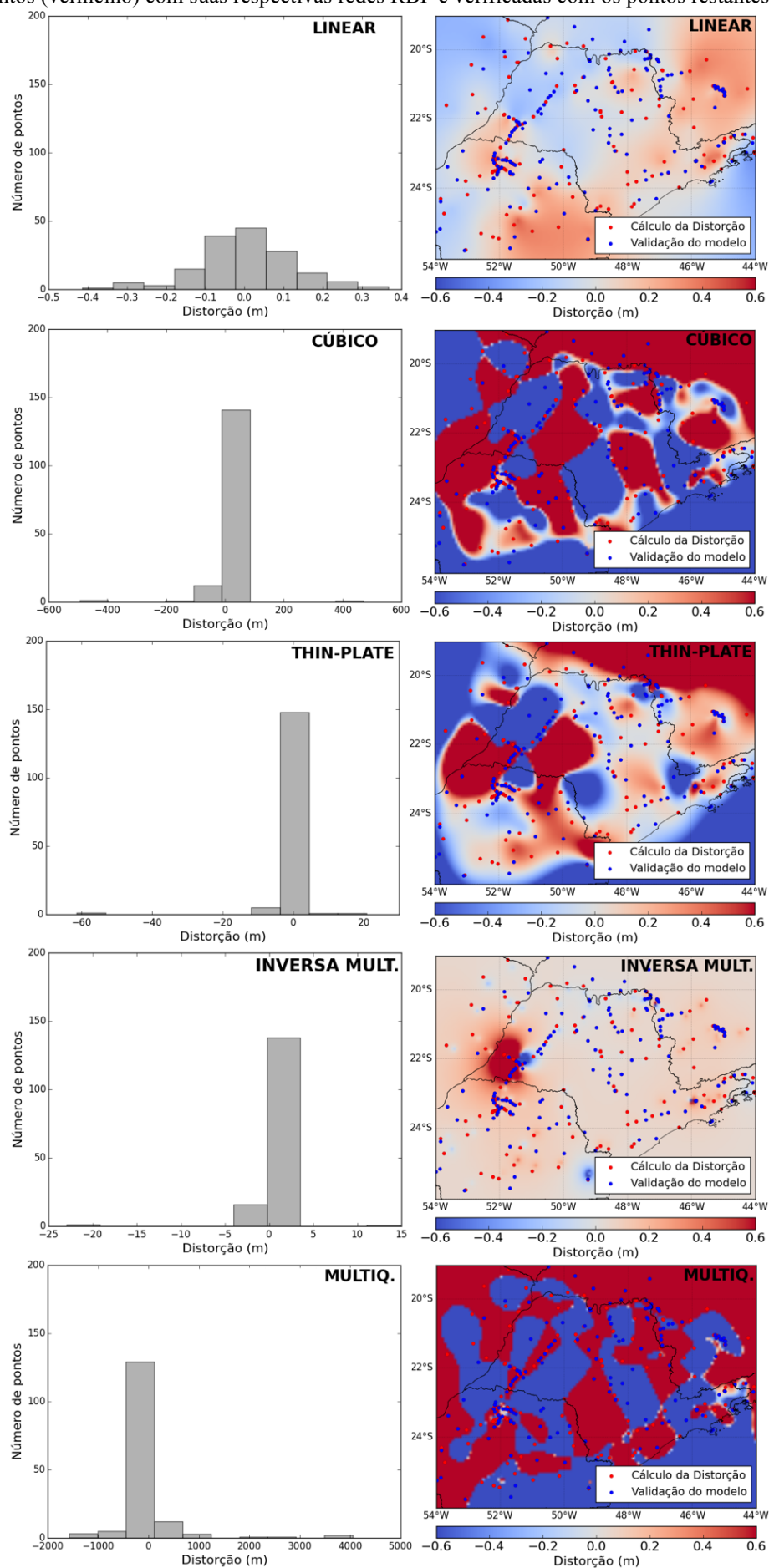


Figura 59 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 70% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).

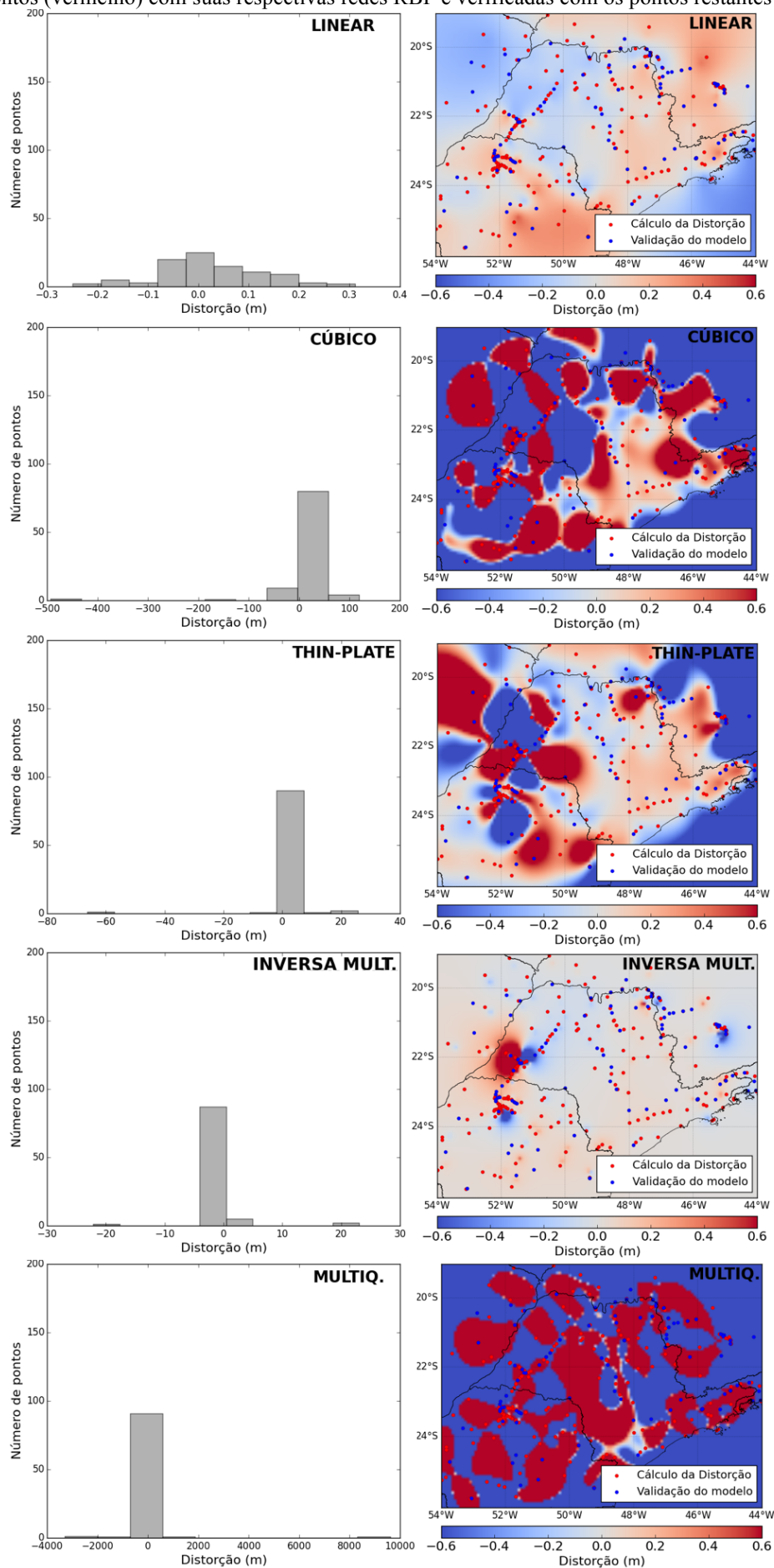
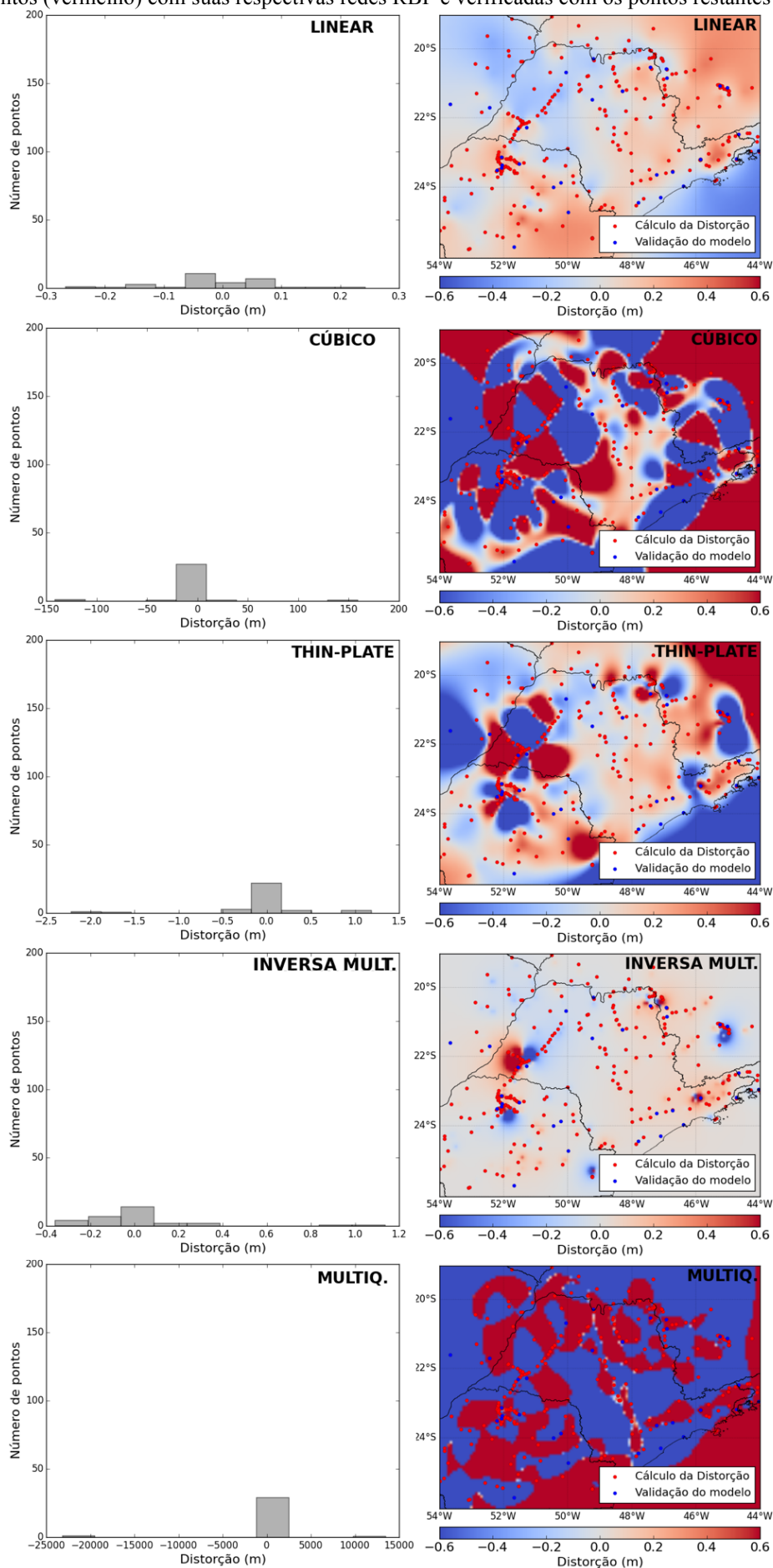


Figura 60 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 90% dos pontos (vermelho) com suas respectivas redes RBF e verificadas com os pontos restantes (azul).



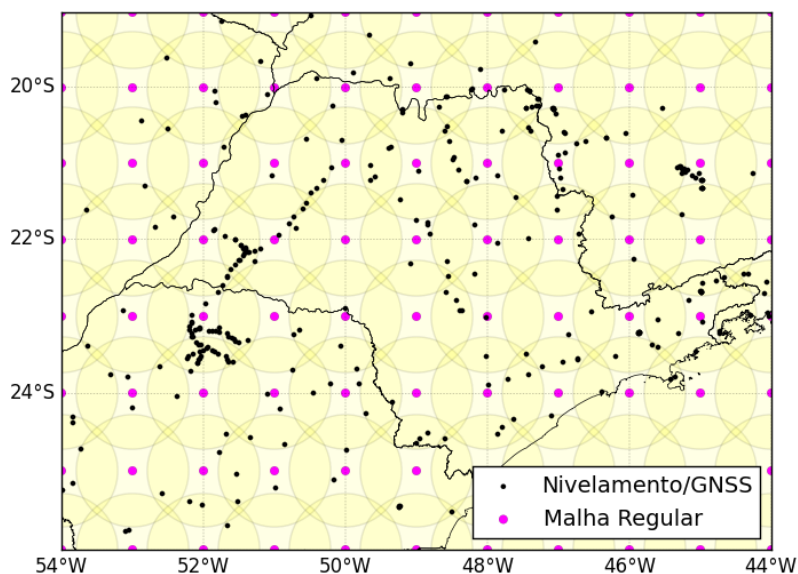
Nota-se que cada rede RBF apresentou um comportamento característico de sua respectiva função. A função linear mostra uma representação mais suave em relação às outras funções.

Com esses experimentos a escolha aleatória dos pontos para o cálculo das distorções apresenta uma geometria irregular. Este tipo de geometria causa maior dificuldade na modelagem das distorções principalmente nas funções cúbica, *thin-plate* e multiquádrica. A sensibilidade que essas funções têm em relação a esse fator geométrico pode ter causado uma menor consistência com os dados de nivelamento/GNSS. Entretanto a escolha de 90% dos dados para os cálculos das distorções juntamente com a escolha da função RBF linear mostrou ser a metodologia ideal para obtenção das distorções, quando a escolha é feita de maneira aleatória dos pontos.

6.2.2 Treinamento da RBF com pontos regularmente distribuídos

Com a constatação de um influente fator nos resultados das redes RBF, a geometria dos dados, novos experimentos foram realizados para definir uma metodologia de escolha dos pontos aproximadamente regulares na geração das superfícies de distorção. A distribuição regular dos dados pode amenizar o fator de sensibilidade geométrico das funções, portanto a escolha dos dados foi feita com a utilização de uma malha regular e um *buffer* com raio definido. A malha regular sobrepõe a região de estudo e o *buffer* realiza uma busca em cada ponto dessa malha onde é escolhido o ponto mais próximo ao ponto da malha, com a limitação do raio de busca. Na Figura 61 mostra-se uma malha regular (magenta) e o *buffer* (amarelo) em cada pontos da malha, representando o método de escolha dos pontos amostrais para o treinamento das redes RBF.

Figura 61 – Malha regular (magenta) e *buffer* (amarelo) para busca dos dados amostrais (preto).



A partir do espaçamento da malha e do raio de busca do *buffer*, tem-se diversas possibilidades, no contexto da região de estudo foram utilizadas quatro estratégias:

- A. Espaçamento da malha de 1° e *buffer* de 30' (~110 km);
- B. Espaçamento da malha de 30' e *buffer* de 15' (~27 km);
- C. Espaçamento da malha de 15' e *buffer* de 12'30'' (~14 km); e
- D. Espaçamento da malha de 15' e *buffer* de 15' (~27 km).

A partir das metodologias de escolha dos pontos, conforme estratégias estabelecidas, foram realizados os treinamentos das redes RBF para obtenção para obtenção das superfícies de distorção; o restante dos pontos foram utilizados para validação do modelo híbrido. A Tabela 19 resume a quantidade de pontos utilizados nas duas fases do modelo geoidal híbrido com base nas metodologias de seleção dos pontos.

Tabela 19 – Quantidade de pontos altimétricos nas fases de treinamento e validação dos modelos com base nas estratégias A, B, C e D.

Fases	A	B	C	D
Treinamento	54	112	156	223
Validação	261	203	159	92
TOTAL	315	315	315	315

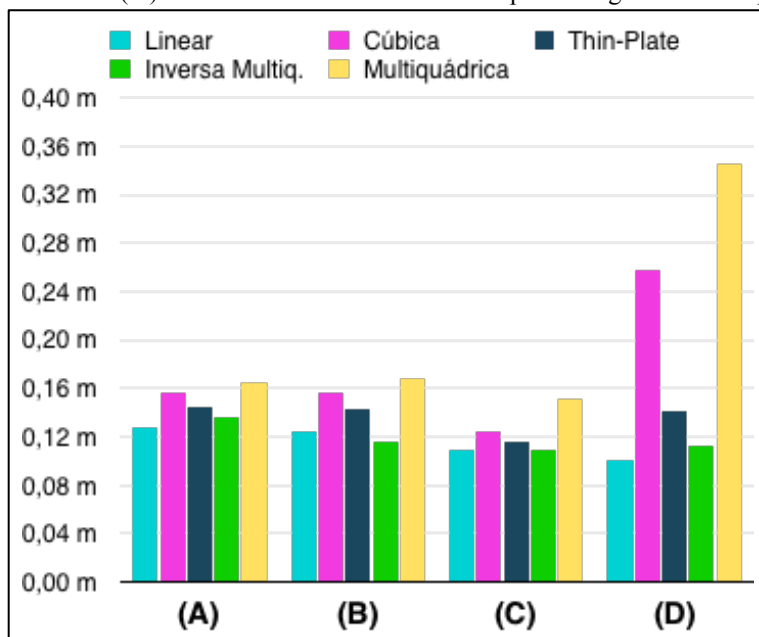
Na Tabela 20 são mostradas as estatísticas das discrepâncias entre os modelos geoidais híbridos, obtidos com as metodologias de escolha de pontos regulares (A, B, C e D), e o nivelamento/GNSS dos pontos não utilizados no treinamento das redes neurais, para cada RBF.

Tabela 20 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos gerados a partir dos dados regularmente distribuídos (casos A, B, C) em relação aos pontos de verificação.

		Linear	Cúbica	Thin-Plate	Inversa Multiq.	Multiq.
(A) Malha: 1° Buffer: 30'	Média	-0,018	-0,041	-0,032	0,031	-0,043
	Desvio-Padrão	0,127	0,152	0,142	0,134	0,159
	RMS	0,128	0,157	0,145	0,137	0,165
	Máximo abs.	0,468	0,598	0,558	0,414	0,627
(B) Malha: 30' Buffer: 15'	Média	-0,019	-0,006	-0,012	0,014	-0,002
	Desvio-Padrão	0,124	0,156	0,143	0,115	0,169
	RMS	0,125	0,156	0,143	0,116	0,169
	Máximo abs.	0,457	0,622	0,556	0,382	0,702
(C) Malha: 15' Buffer: 12'30"	Média	0,008	0,008	0,009	0,016	0,007
	Desvio-Padrão	0,110	0,124	0,116	0,109	0,151
	RMS	0,110	0,124	0,116	0,110	0,151
	Máximo abs.	0,380	0,375	0,358	0,343	0,770
(D) Malha: 15' Buffer: 15'	Média	0,020	-0,029	0,006	0,033	-0,069
	Desvio-Padrão	0,098	0,257	0,142	0,108	0,339
	RMS	0,100	0,258	0,142	0,113	0,345
	Máximo abs.	0,264	1,616	0,696	0,291	2,022

A Figura 62 mostra os RMS (m) obtidos em cada uma das funções com as respectivas metodologias de escolha dos pontos regulares (A, B, C e D). Observa-se que nos experimentos A, B e C a regularidade dos pontos trouxe uma maior estabilidade para os resultados; pois, os RMS apresentaram uma diferença de até 0,053 m. No experimento D as funções apresentaram uma variação entre os RMS de 0,245 m, indicando uma perda da geometria regular dos pontos. Ademais nota-se que as funções cúbica, *thin-plate* e multiquádrica geraram os geoides híbridos menos consistência com os dados de nivelamento/GNSS e as funções linear e multiquádrica inversa contribuíram para obtenção dos geoides mais consistentes.

Figura 62 – RMS (m) das redes RBF com escolha dos pontos regularmente espaçados.



Nas figuras 63, 64, 65 e 66 são mostrados os histogramas das validações e das superfícies de distorções geradas pela utilização das redes RBF respectivamente para os experimentos conforme estratégias: A, B, C e D, onde as discrepâncias entre nivelamento/GNSS e o geoide gravimétrico dos pontos em vermelho foram utilizados na fase de treinamento das redes neurais e em azul para validação do geoide híbrido.

Mesmo com RMS entre as funções muito próximos, uma diferença inferior à 0,02 m, na Figura 63 e Figura 64 é possível observar que as superfícies de distorções (linear e cúbica) apresentam diferenças principalmente com o aumento do número de pontos para obtenção dessas superfícies. Portanto, com o aumento da quantidade de pontos tem-se diminuição da regularidade espacial dos dados, prejudicando as funções mais sensíveis à esse fator geométrico.

Figura 63 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção (A) geradas utilizando pontos regularmente distribuídos, em vermelho, e para verificação os pontos restantes, em azul.

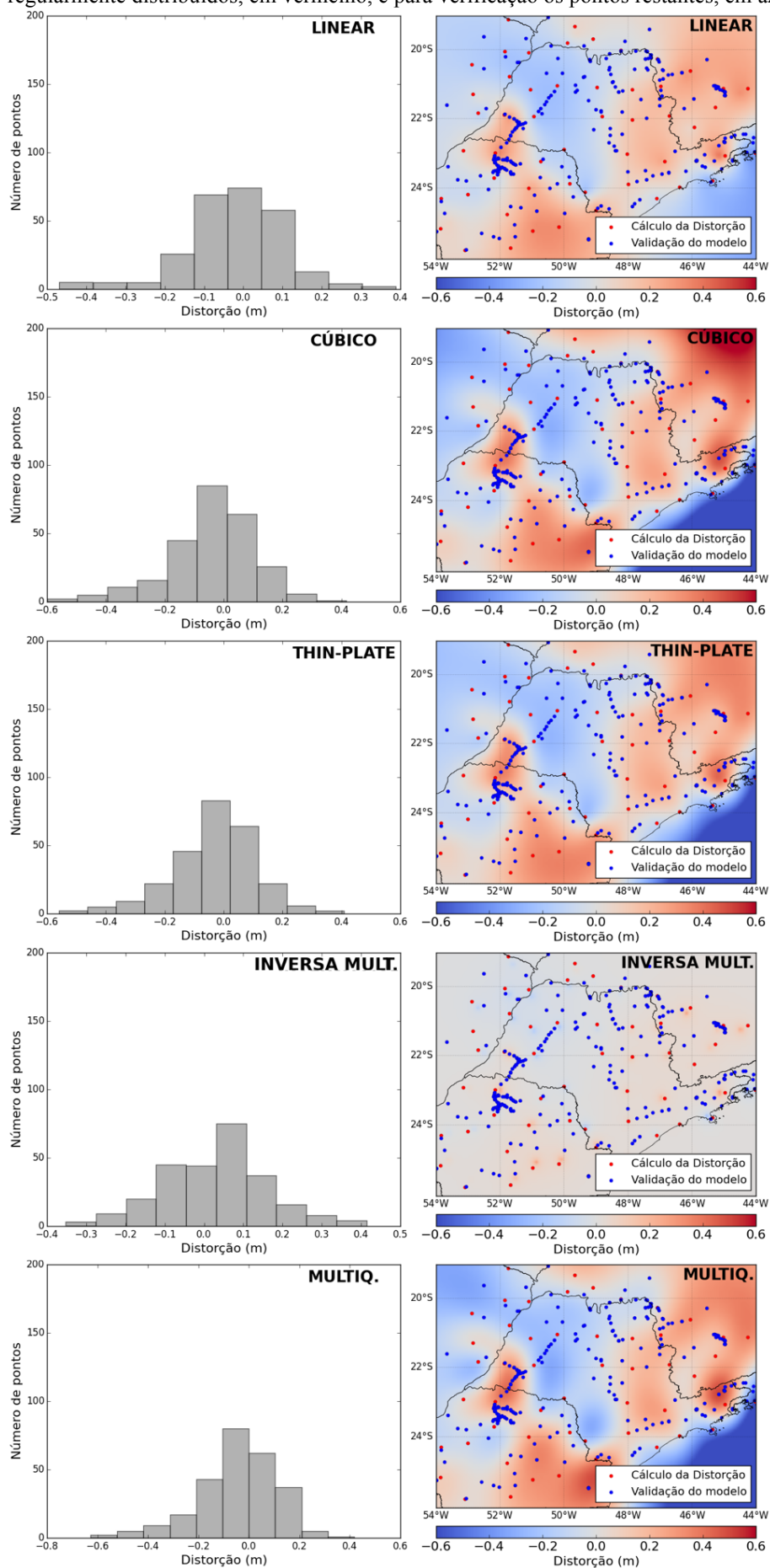


Figura 64 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção (B) geradas utilizando pontos regularmente distribuídos, em vermelho, e para verificação os pontos restantes, em azul.

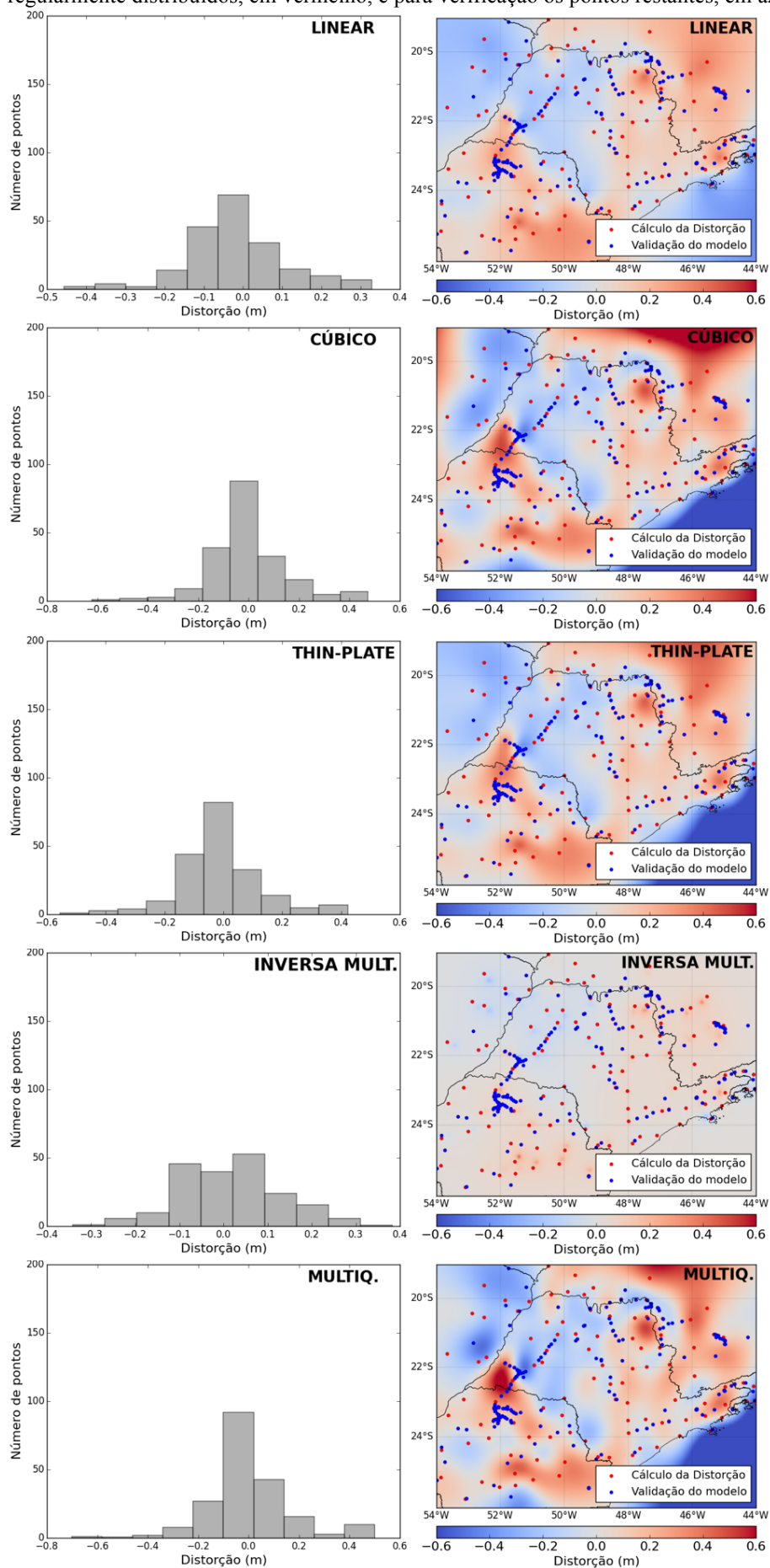


Figura 65 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção (C) geradas utilizando pontos regularmente distribuídos, em vermelho, e para verificação os pontos restantes, em azul.

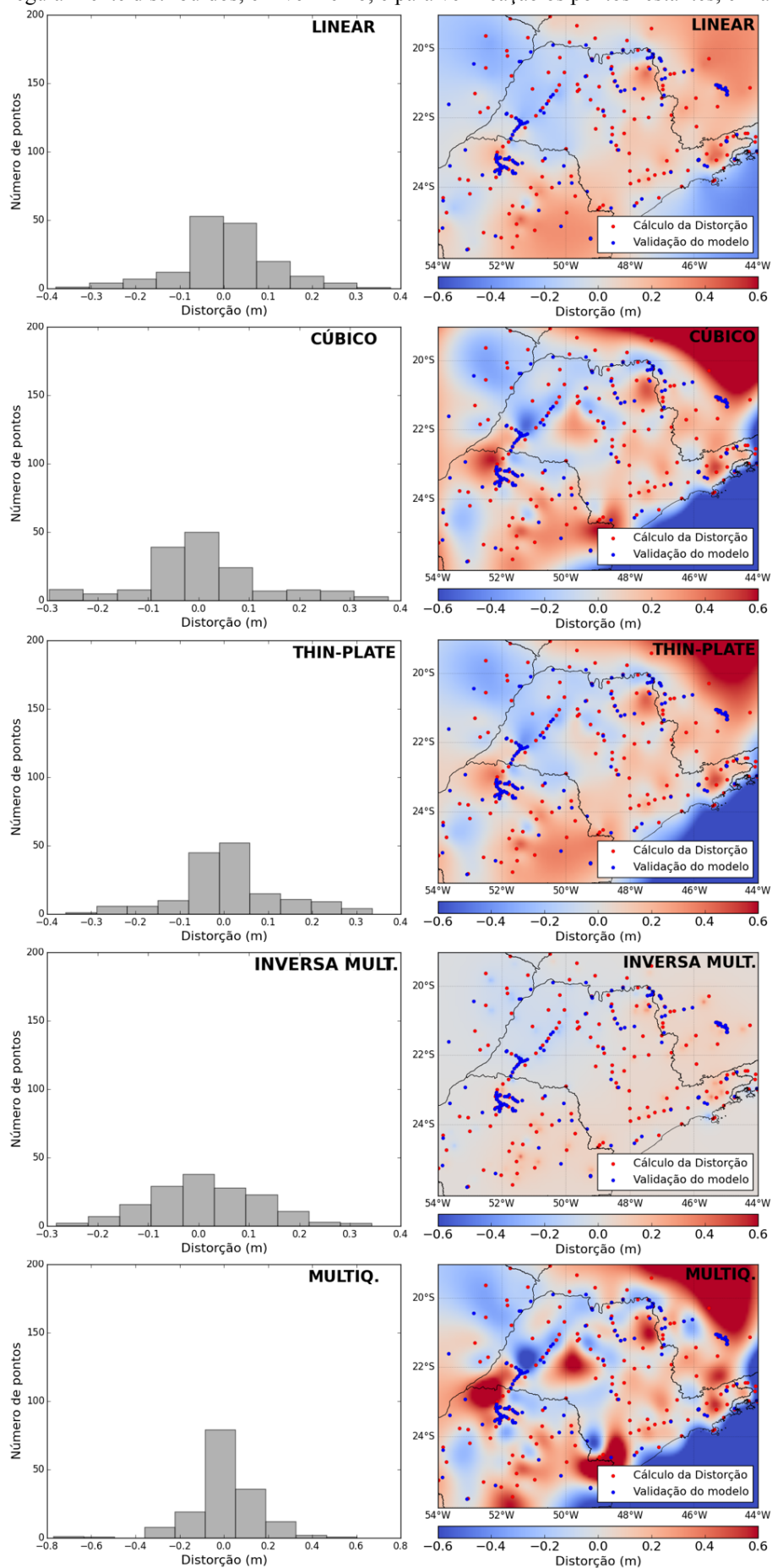
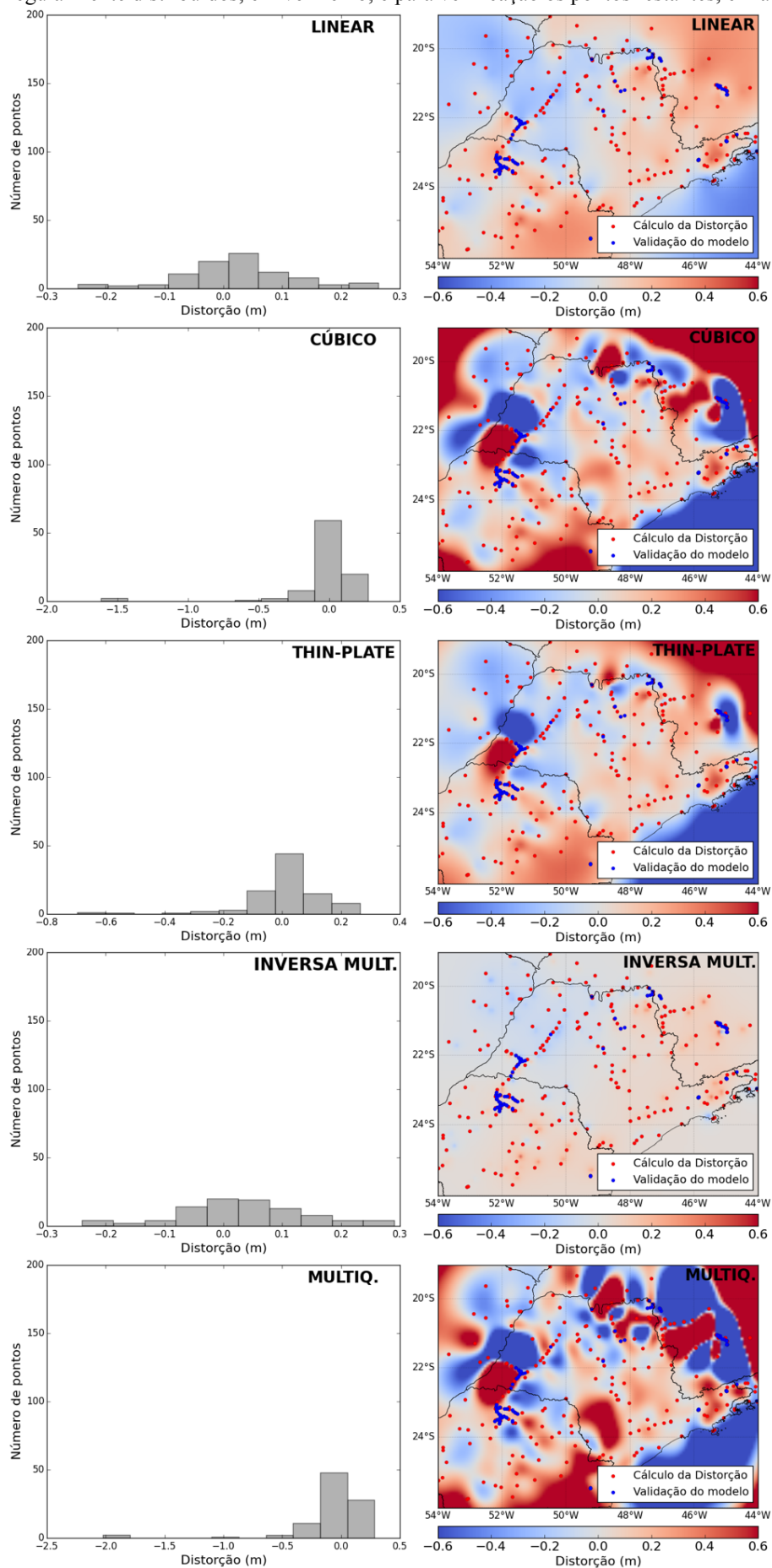


Figura 66 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção (D) geradas utilizando pontos regularmente distribuídos, em vermelho, e para verificação os pontos restantes, em azul.



Os experimentos A, B, C e D solucionaram o problema da geometria dos pontos para obtenção das superfícies de distorção. Entretanto, o último experimento (D) mostrou uma perda da regularidade dos dados, dificultando a modelagem das distorções para as funções mais sensíveis a esse fator, e uma avaliação dos modelos híbridos concentrada em algumas regiões. Uma solução para esse problema é coleta de novos pontos de nivelamento/GNSS.

6.3 HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP

Com base nos experimentos realizados utilizando pontos altimétricos aleatoriamente e regularmente distribuídos, conclui-se que a função mais adequada para modelagens da distorção é RBF linear, uma vez esta no conjunto de experimentos proporcionou maior consistência nos resultados. Em meio a essa escolha, o experimento com dados aleatórios utilizando 90% dos pontos de nivelamento/GNSS, num total de 287, 284 e 283, respectivamente para cada modelo, mostra ser o mais adequado para validação do modelo devido a melhor distribuição dos pontos de verificação do modelo híbrido, num total de 32, 33, 32, respectivamente. Além disso, uma comparação entre esses geoides híbridos obtidos com a RBF linear foi realizada com outros três geoides híbridos obtidos por krigagem. Outro experimento também foi realizado, no qual foram obtidas uma quantidade de distorções equivalente a quantidade de pontos altimétricos para cada modelo. Por fim, as versões finais dos modelos híbridos foram obtidos utilizando todos os dados altimétricos disponíveis e seus respectivos modelos geoidais gravimétricos.

Os geoides híbridos foram obtidos a partir dos três modelos geoidais gravimétricos. O primeiro foi gerado a partir do EGM2008 com grau e ordem 2160 (HYDEGM), o segundo modelo foi modelado com uso do MAPGEO2015 (HYDMAPGEO) e o terceiro modelo com o GEOIDSP2014 (HYDGEOIDSP). As distorções entre as ondulações dos modelos híbridos e os pontos de nivelamento/GNSS que não participaram na geração do modelo (10%) foram utilizadas para a validação do mesmo. Para fins comparativos, na Tabela 21 são mostradas as estatísticas dos pontos de validação para os geoides gravimétricos.

Tabela 21 – Consistência (em metros) dos geoides gravimétricos EGM08, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 em relação aos pontos de verificação.

	EGM08	MAPGEO2015	GEOIDSP2014
Média:	0,103	0,048	0,048
Desvio-Padrão:	0,161	0,146	0,160
RMS:	0,191	0,153	0,167
Máximo abs.:	0,546	0,443	0,454

A Tabela 22 mostra as estatísticas obtidas para os modelos geoidais híbridos, avaliados com os mesmos pontos utilizados na validação de seus respectivos geoides gravimétricos. Pode-se observar uma pequena variação das estatísticas do HYDGEOIDSP com relação ao calculado nos experimentos com os pontos escolhidos aleatoriamente (Tabela 18).

Tabela 22 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP gerados por redes RBF linear em relação aos pontos verificação.

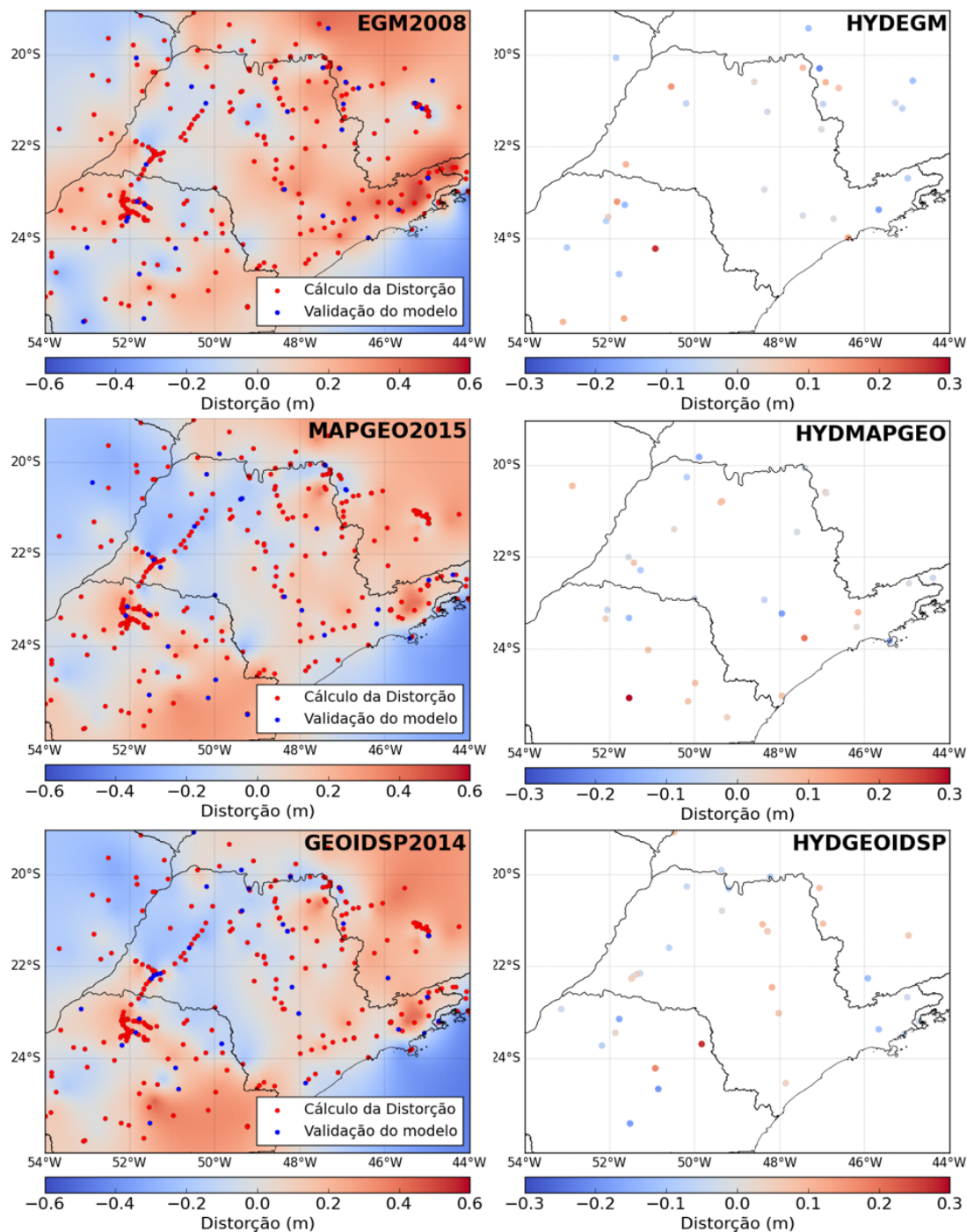
	HYDEGM	HYDMAPGEO	HYDGEOIDSP
Média:	-0,001	0,013	0,001
Desvio-Padrão:	0,107	0,103	0,098
RMS:	0,107	0,104	0,098
Máximo abs.:	0,276	0,314	0,272

Comparando as estatísticas dos modelos gravimétricos e híbridos é possível notar uma redução das tendências: o modelo HYDEGM apresentou uma redução de 0,104 m; o HYDMAPGEO mostrou uma redução de 0,035 m; e o HYDGEOIDSP indicou uma atenuação de 0,047 m. Em relação aos desvios-padrão, os modelos híbridos mostram uma redução de 0,054, 0,043 e 0,062 m, respectivamente. Consequentemente, com a aplicação da metodologia proposta, os RMS dos modelos híbridos diminuíram entre 30 e 40% em relação aos modelos gravimétricos, indicando uma melhora do modelo. Outro fator que merece destaque é a diminuição dos valores máximos das distorções.

À esquerda, na Figura 67, podem ser representadas as superfícies de distorção dos geoides gravimétricos EGM2008, MAPGEO2015 e GEOIDSP2014 (de cima para baixo). As distorções do geoide gravimétrico em relação ao nivelamento/GNSS representadas pelos pontos em vermelho foram utilizados na fase de treinamento da RBF linear e em azul para validação do geoide híbrido. Ao lado direito na mesma figura são mostrados pontualmente as discrepâncias dos pontos de

validação dos geoides híbridos gerados a partir de seus respectivos modelos gravimétricos.

Figura 67 – Histogramas e suas respectivas superfícies de distorção geradas utilizando 90% dos pontos aleatoriamente escolhidos, em vermelho, e 10% dos pontos para verificação, em azul, com a rede RBF linear e três modelos geoidais gravimétricos.



Afim de avaliar a utilização das redes neurais RBF para modelagem das distorções outro método de interpolação foi utilizado mantendo a mesma metodologia de escolha dos pontos para geração das superfícies de distorções. A

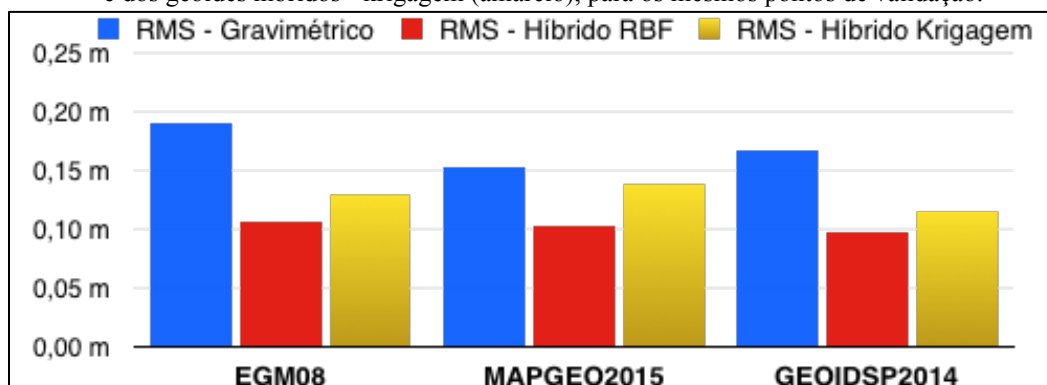
krigagem foi escolhida como método de interpolação uma vez que, segundo Fazio (2013), esse método apresenta resultados equivalentes aos das redes RBF. Na Tabela 23 são mostradas as estatísticas para mesmos pontos de validação referentes à três geoides híbridas gerados com método de interpolação krigagem por variogramas lineares.

Tabela 23 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos K-HYDEGM, K-HYDMAPGEO e K-HYDGEIODSP gerados por krigagem (variograma linear) em relação aos pontos de verificação.

	K-HYDEGM	K-HYDMAPGEO	K-HYDGEIODSP
Média:	0,006	0,022	0,003
Desvio-Padrão:	0,131	0,136	0,116
RMS:	0,131	0,138	0,116
Máximo abs.:	0,379	0,338	0,352

Na Figura 68 é possível observar graficamente os RMS dos pontos de validação, em azul dos geoides gravimétricos, em vermelho dos geoides híbridos, obtidos com redes RBF lineares, e em amarelo dos geoides híbridos, gerados por uso da krigagem. As diferenças entre as médias dos modelos híbridos HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEIODSP por RBF linear e krigagem chegam à 0,008 m; em relação aos RMS tem-se as respectivas diferenças de 0,024, 0,034 e 0,018 m; e para os valores máximos as diferenças são entre 0,024 e 0,104 m. Portanto, os modelos híbridos por RBF linear mostram RMS de 15 à 25% menores em relação aos modelos híbridos por krigagem. Tendo em vista que um dos objetivos dessa dissertação também é definir o interpolador que promove melhor qualidade na modelagem de distorções entre nivelamento/GNSS e modelos gravimétricos, essa comparação permite concluir que as redes neurais RBF linear são mais adequadas para a região de estudo.

Figura 68 – RMS (m) dos geoides gravimétricos (azul), dos geoides híbridos - RBF linear (vermelho) - e dos geoides híbridos - krigagem (amarelo), para os mesmos pontos de validação.



Ainda visando a validação dos modelos híbridos por RBF linear foram obtidas uma quantidade de distorções equivalente a quantidade de pontos altimétricos para cada modelo. Durante esse processo foram realizadas repetições considerando somente um ponto para verificação e o restante dos pontos para modelagem das distorções, ou seja, a distorção obtida no teste representa a diferença entre um único ponto altimétrico, o qual não participou do processo de hibridização, e o modelo híbrido obtido utilizando o restante dos dados altimétricos. As estatísticas para os três modelos híbridos são mostradas na Tabela 24.

Tabela 24 – Consistência (em metros) dos geoides híbridos HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP gerados por redes RBF linear em relação a um ponto de verificação a cada modelagem.

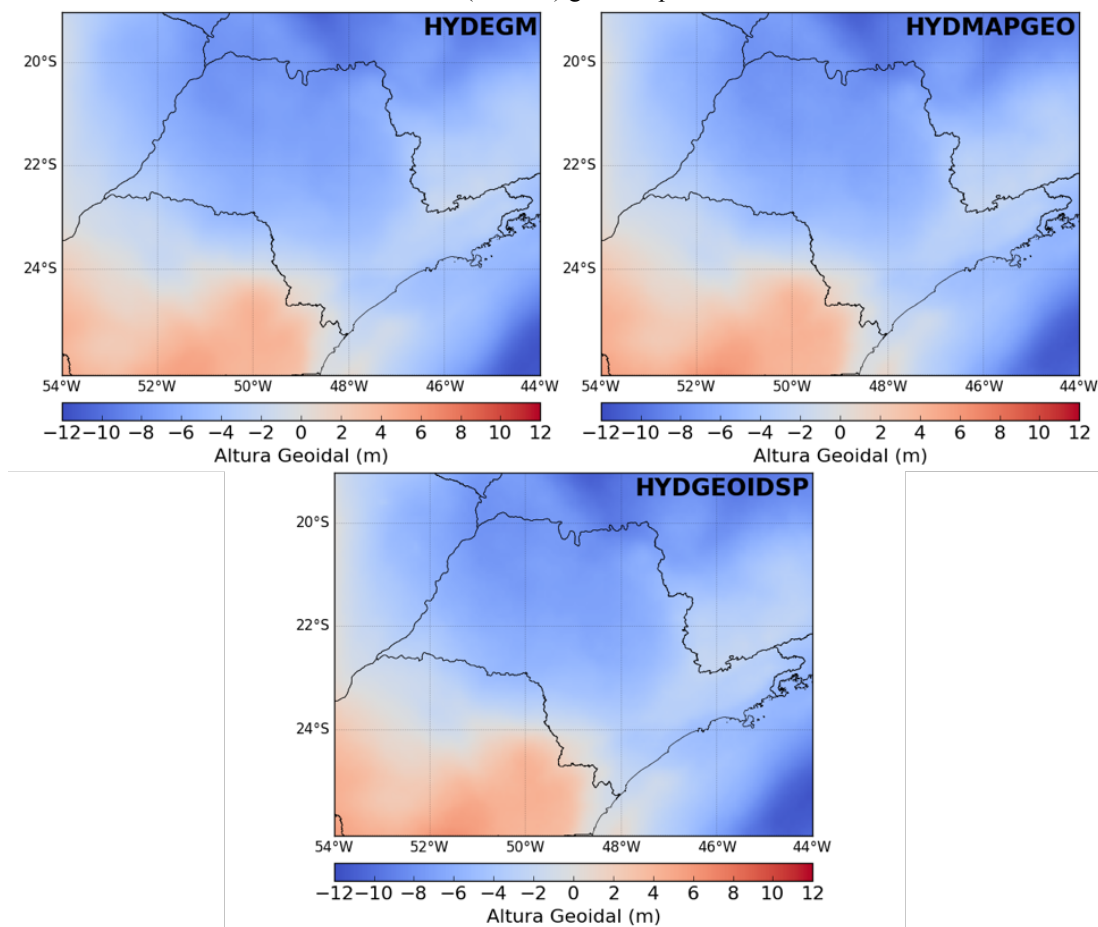
	HYDEGM	HYDMAPGEO	HYDGEOIDSP
Média:	-0,001	0,003	0,004
Desvio-Padrão:	0,125	0,108	0,110
RMS:	0,125	0,108	0,110
Máximo abs.:	0,642	0,448	0,448

Observa-se que as diferenças entre as médias dos modelos híbridos HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP avaliados com 10% (Tabela 22) e o último teste de validação chegaram à 0,010 m; em relação aos RMS tem-se as respectivas diferenças de 0,018 m, 0,004 m e 0,012 m; e para os valores máximos as diferenças foram de 0,366 m, 0,134 m e 0,176 m. O HYDEGM08 apresentou um aumento do valor máximo absoluto de 0,10 m em relação ao EGM08 enquanto os outros modelo híbridos não apresentaram variação para com seus respectivos modelos gravimétricos.

As diferenças entre os resultados são atribuídas às características específicas de cada modelo gravimétrico. Tendo em vista à mesma metodologia empregada nos cálculos dos modelos MAPGEO2015 e GEOIDSP2014, os resultados são semelhantes, o que já eram esperados e são justificáveis. Ademais, visto que o modelo híbrido gerado com o uso do EGM08 apresentou resultados menos consistentes em relação aos outros modelos, caso o leitor se interesse pela utilização de um dos modelos para fins práticos aconselha-se o uso do HYDMAPGEO ou HYDGEOIDSP.

Os três modelos híbridos propostos para região do Estado de São Paulo obtidos com todos os pontos altimétricos, exceto os que não foram selecionados nas etapas 1 e 2 da filtragem, utilizando redes RBF lineares são mostrados na Figura 69.

Figura 69 – Geoides híbridos HYDEGM (superior esquerdo), HYDMAPGEO (superior direito) e HYDGEOIDSP (inferior) gerados por RBF linear.



A interpolação das distorções a partir de uma grade regular acarreta um erro, também chamado de ruído, do interpolador. Objetivando avaliar esse erro, as distorções dos modelos híbridos gerador com RBF linear foram recalculadas para todos os pontos altimétricos utilizados no processo de hibridização, cujas estatísticas são apresentadas na Tabela 25. Comparativamente, o mesmo processo foi realizado para o método de krigagem, mostrado na

Tabela 26.

Tabela 25 – Ruído (em metros) dos geoides híbridos HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP gerados por redes RBF linear.

	HYDEGM	HYDMAPGEO	HYDGEOIDSP
Média:	-0,001	0,002	0,002
Desvio-Padrão:	0,053	0,045	0,046
RMS:	0,053	0,045	0,046
Máximo abs.:	0,364	0,228	0,232

Tabela 26 – Ruído (em metros) dos geoides híbridos K-HYDEGM, K-HYDMAPGEO e K-HYDGEOIDSP gerados por krigagem (variograma linear).

	K-HYDEGM	K-HYDMAPGEO	K-HYDGEOIDSP
Média:	-0,001	0,000	0,000
Desvio-Padrão:	0,108	0,122	0,121
RMS:	0,108	0,122	0,121
Máximo abs.:	0,399	0,426	0,434

Observa-se que o RMS no processo de interpolação por meio de uma grade regular utilizando o interpolador RBF linear é até 50% menor em relação ao método de krigagem. Ainda que o processo de interpolação por redes neurais RBF seja mais interessante observa-se uma limitação quanto a capacidade dos interpoladores na obtenção de resultados mais acurados.

7 CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Nesta dissertação a fundamentação teórica abordada foi essencial para compreensão dos problemas relacionados à modelagem de distorções de diferentes tipos de dados, como os geoides gravimétricos, os dados de posicionamento e de nivelamento geométrico.

Para melhor compreensão das redes neurais RBF, diversos experimentos foram realizados com dados simulados. Durante os experimentos a melhora da modelagem das distorções ficou evidente com o aumento da quantidade de pontos para todas as escalas de distorções. Ademais, constatou-se que a presença de distorções com alto desvio-padrão dificulta a modelagem, uma vez que o interpolador mostra menor eficiência na previsão do valor interpolado e o valor real da deformação, nesses casos uma maior quantidade de dados é necessária. Ainda, foi observada uma limitação quanto ao uso da quantidade de pontos e tempo de execução das redes RBF Exatas, pois cada núcleo das funções coincide com a quantidade de pontos utilizadas, exigindo maior memória computacional com o aumento de núcleos das funções. Nos experimentos simulados, um para América Latina e outro para duas sub-regiões, nota-se um comportamento variável de cada função RBF de acordo com as características das distorções. Dessa maneira é fundamental a experimentação e comparação entre diversas funções para a escolha mais adequada na representação da superfície de distorção.

Em vista às necessidades atuais de um modelo de ondulação geoidal de melhor qualidade para conversão de altitudes geométricas do posicionamento GNSS em altitudes ortométricas foi elaborado a partir dos modelos gravimétricos EGM08, MAPG2015 e GEOIDSP2014 outros três modelos geoidais fazendo uso de uma metodologia de hibridização para a região do Estado de São Paulo, respectivamente: o HYDEGM, o HYDMAPGEO e o HYDGEOIDSP. Além dos modelos gravimétricos, o uso dos dados de nivelamento/GNSS é essencial no processo de hibridização. Dos 425 pontos disponíveis para região de estudo, foram consideradas aptas 338 referências de nível, estas ajustadas pelo IBGE (2011). Porém, realizando filtragem nos dados, restaram 319, 317 e 315 para geração dos modelos híbridos, respectivamente, HYDEGM, HYDMAPGEO e HYDGEOIDSP.

Para modelagem das distorções dos modelos gravimétricos foi utilizada a RBF linear. A validação dos modelos híbridos foi feita considerando 10% dos pontos altimétricos que não participaram da hibridização (90%), escolhidos aleatoriamente.

Entre os valores obtidos para os modelos híbridos destaca-se tendências entre -0,001 e 0,013 m, desvios-padrão de $\pm 0,098$ à $\pm 0,107$ m e valores máximos para as distorções de 0,272 à 0,314 m. Os modelos híbridos proporcionaram uma melhora das consistências da ordem de 30 à 40% em comparação com os geoides gravimétricos. Com relação aos resultados anteriores, a validação dos modelos híbridos com uma quantidade de distorções equivalente a quantidade de pontos altimétricos indicou diferenças no RMS entre 0,004 e 0,018 m e nos valores máximos de 0,134 e 0,366 m. Mesmo assim, esses resultados proporcionam aos usuários uma transformação de altitudes geométricas para ortométricas de melhor qualidade em relação aos modelos geoidais gravimétricos.

Os resultados dos desvios-padrão das distorções entre os geoides híbridos e os dados de nivelamento/GNSS refletem a consistência entre o posicionamento GNSS e nivelamento geométrico dos pontos de referência de nível utilizados na validação dos modelos. Portanto, os erros dos métodos de posicionamento e nivelamento geométrico limitam a precisão dos geoides híbridos.

Uma comparação entre a modelagem das superfícies de distorções obtidas com as redes neurais RBF linear e o método de interpolação krigagem por variogramas lineares mostrou equivalência em termos de RMS de aproximadamente 0,02 à 0,03 m. Por outro lado os RMS dos pontos de validação dos modelos híbridos por RBF linear foram entre 15 e 25% menores em relação aos obtidos por krigagem. Portanto, as redes RBF Lineares mostraram maior eficiência na modelagem das distorções para região de estudo.

Como recomendações para trabalhos futuros sugere-se estudos voltados para estimação de erros propagados pelos interpoladores, uma vez que o último experimento indicou diferenças significantes entre o RBF linear e o método de krigagem. Ademais, a metodologia de hibridização pode facilmente ser aplicada em outras regiões do Brasil e também em todo território nacional. Porém, os estudos para escolha do interpolador deve feita para área de interesse.

Não foi considerado nos modelos geoidais híbridos os erros advindos dos modelos geoidais e do nivelamento/GNSS. Isso pode levar a uma interpretação errônea da real qualidade dos modelos. Dessa forma, recomenda-se a aplicação da hibridização com outro método de interpolação que possibilite a propagação dos erros. Diversos países têm feito uso do LSC na obtenção das superfícies de distorção, visto que por meio desse método pode-se considerar a precisão dos dados.

Visto que uma das limitações dos geoides híbridos se deve à qualidade dos dados envolvidos, advindo do GNSS, redes de nivelamento e dos modelos geoidais, é interessante o desenvolvimento de estudos que aprimorem as definições e realizações dos *datum* verticais.

REFERÊNCIAS

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 13133: Execução de levantamento topográfico**, Rio de Janeiro, p. 35, 1994.

ALENCAR, J. C. M. **Datum altimétrico brasileiro**. IBGE, Cadernos de Geociências. Rio de Janeiro, p. 5. 1990.

ALVES, D. B. M.; ABREU, P. A. G.; SOUZA, J. S. GNSS: status, modelagem atmosférica e métodos de posicionamento. **Revista Brasileira de Geomática**, Pato Branco, PR, Brasil, v. 1, n. 1, p. 8-13, 2013.

ANDERSEN, O. B. **The DTU10 Gravity field and Mean sea surface**. Second international symposium of the gravity field of the Earth (IGFS2). Fairbanks, Alaska: DTU Space, Technical University of Denmark. 2010.

ANDERSEN, O. B.; KNUDSEN, P.; PHILIPPA, A. M. B. The DNSC08GRA global marine gravity field from double retracked satellite altimetry. **Journal of Geodesy**, v. 84, n. 3, p. 191-199, nov. 2009. ISSN 1432-1394.

ARANA, J. M. **O uso do GPS na elaboração de Carta Geoidal**. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas). Curitiba, PR, Brasil: Universidade Federal do Paraná (UFPR). 2000. p. 164.

BARTHELMES, F.; KÖHLER, W. International Centre for Global Earth Models (ICGEM). **Journal of Geodesy**, v. 86, n. 10, p. 932-934, out. 2012.

BLEWITT, G. GPS data processing methodology. In: TEUNISSEN, P. J. G.; KLEUSBERG, A. **GPS for Geodesy**. 2. ed. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1998. p. 231-270. ISBN 978-3-642-72011-6.

BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C.; CAMPOS, I.O.; ELLMAN, A.; VANICEK, P.; SANTOS, M. C. An attempt for an Amazon geoid model using Helmert gravity anomaly. **Observing our Changing Earth**, v. 133, p. 187-194, 2008.

BLITZKOW, D.; CINTRA, J.P.; FONSECA JÚNIOR, E.S. **Mapa Geoidal do Brasil: 1992**. IBGE - Diretoria de Geociências. Rio de Janeiro, RJ, p. 4. 1993.

BLITZKOW, D. **O problema de valor de contorno da geodésia**: resultados práticos para a América do Sul. Tese (Livre-Docência). São Paulo, SP: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 1996. p. 166.

BLITZKOW, D. **Sistemas de altitudes e a determinação do geóide**. Curso proferido no Instituto Oceanográfico da Armada (INOCAR). Quiaquil, Equador: [s.n.]. 2003.

BRAGA, A. P.; CARVALHO, A. C. P. L. F.; LUDEMIR, T. B. **Redes Neurais**

Artificiais: Teoria e Aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos (LTC), 2000. 262 p.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

CARRADORI, R. G.; RAMOS, P. S. Avaliação de testes de normalidade implementados no programa R por simulação Monte Carlo. **Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto**, v. 3, n. 2, p. 33-41, 2014.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical inference**. CA: Duxbury: Pacific Grove, 2012. ISBN 978-0-534-24312-8.

CASTRO, A. L. P. **Nivelamento através do GPS:** avaliação e proposição de estratégias. 2002. p. 174. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) - Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciência e Tecnologia, Presidente Prudente (SP).

CHANDLER, G.; MERRY, C. L. The South African geoid 2010: SAGEOID10. **Position IT**, p. 29-33, 2010.

CHEN, Y.; LUO, Z. A hybrid method to determine a local geoid model – Case study. **Earth Planets and Space**, v. 56, n. 4, p. 419–427, 2004.

CHEN, Y.; YANG, Z. **A hybrid method to determine the Hong Kong Geoid**. FIG Working Week 2001. South Korea: [s.n.]. 2001.

CHRISTOPHE, B. BOULANGER, D.; FOULON, B.; HUYNH, P. A.; LEBAT, V.; LIORZOU, F.; PERROT, E. A new generation of ultra-sensitive electrostatic accelerometers for GRACE Follow-on and towards the next generation gravity missions. **Acta Astronautica**, v. 117, p. 1-7, 2015.

D'AGOSTINO, R. B.; PEARSON, E. S. Testing for departures from normality. I. Fuller empirical results for the distribution of b_2 and $\sqrt{b_1}$. *Biometrika*, v. 60, p. 613-622, 1973.

DINIZ, E. A.; SOUZA, G. H. B.; JUNIOR, J. P. M.; DALAQUA, R. R.; PASTORIM, R. V. **Atualização do sistema cadastral da cidade de Ribeirão dos Índios – SP**. Universidade Estadual Paulista – UNESP Faculdade de Ciências e Tecnologia– FCT. [S.l.]: [s.n.]. 2004.

DREWES, H.; SÁNCHEZ, L.; BLITZKOW, D.; FREITAS, S. **Scientific Foundations of the SIRGAS Vertical Reference System**. Vertical Reference Systems. IAG Symposia. [S.l.]: Springer. 2002. p. 297-301.

ELLMANN, A.; VANÍCEK, P. UNB applications of Stokes-Helmert's approach to geoid computation. **Journal of Geodynamics**, v. 43, n. 2, p. 200-213, 2007. ISSN 0264-3707.

ESPARTEL, L. **Curso de Topografia**. Porto Alegre: Editora Globo, 1980. 655 p.

FAZIO, V. S. **Interpolação espacial**: Uma comparação analítica entre redes RBF e Krigagem. 2013. p. 109. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (SC).

FEATHERSTONE, W. E.; KIRBY, J. F.; KEARSLEY, A. H. W.; GILLILAND, J. R.; JOHNSTON, G. M.; STEED, J.; FORSBERG, R.; SIDERIS, M. G. The AUSGeoid98 geoid model of Australia: data treatment, computations and comparisons with GPS-levelling data. **Journal of Geodesy**, v. 75, n. 5-6, p. 313-330, ago. 2001. ISSN 1432-1394.

FEATHERSTONE, W. E.; SPROULE, D. M.; GOOS, J. M.; KIRBY, J. F.; KUHN, M.; CLAESSENS, S. J. Towards the new AusGeoid model, **Proceedings of SSC 2005 Spatial Intelligence**, Innovation and Praxis: The national biennial conference of the Spatial Sciences Institute, September, 2005. Melbourne: Spatial Sciences Institute. ISBN 0-9581366-2-9

FEATHERSTONE, W. E. Refinement of a gravimetric geoid using GPS and levelling data. **Journal of Surveying Engineering**, v. 126, n. 12, p. 27-56, maio 2000. ISSN 1943-5428.

FEATHERSTONE, W. E. Software for computing five existing types of deterministically modified integration kernel for gravimetric geoid determination. **Computer & Geosciences**, v. 29, n. 2, p. 183-193, mar. 2003. ISSN 0098-3004.

FEATHERSTONE, W. E.; DENTITH, M. C.; KIRBY, J. F. Strategies for the accurate determination of orthometric heights from GPS. **Survey Review**, v. 34, n. 267, p. 278-296, jan. 1998.

FEATHERSTONE, W. E.; EVANS, J. D.; OLLIVER, J. G. A Meissl-modified Vanícek and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations. **Journal of Geodesy**, v. 72, p. 154-160, mar. 1998. ISSN 1432-1394.

FEATHERSTONE, W. E.; SIDERIS, M. G. Modified Kernels in Spectral Geoid Determination: First Results from Western Australia. In: FORSBERG, R. A. F. M. A. D. R. **Geodesy on the Move**. International Association of Geodesy Symposia. ed. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, v. 119, 1998. p. 188-193. ISBN 0939-9585.

FERREIRA, V. G.; FREITAS, S. R. C.; HECK, B. Determinação da Diferença de Geopotencial do Datum Vertical Brasileiro relativa ao Earth Gravity Model 2008. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 63, n. 3, 2010. ISSN 0560-4613.

FÖRSTE, C.; BRUINSMA, S. L.; SHAKO, R.; KÖNIG, R. EIGEN-6 - A new combined global gravity field model including GOCE data from the

collaboration of GFZ-Potsdam and GRGS-Toulouse. **Geophysical Research Abstracts**, v. 13, 2011.

FOTOPOULOS, G.; FEATHERSTONE, W. E.; SIDERIS, M. G. Fitting a gravimetric geoid model to the Australian Height Datum via GPS data. **Gravity and Geoid**, p. 173-178, 2002.

FREITAS, S. R. C.; BLITZKOW, D. **Altitudes e Geopotencial. International Geoid Service**. International Geoid Service, Special Issue for South America. Italy: [s.n.]. 1999. p. 47-61.

FUKUDA, Y.; KURODA, J.; TAKABATAKE, Y.; ITOH, J.; MURAKAMI, M. Improvement of JGEOID 93 by the geoidal heights derived from GPS/leveling surveys. In: SEGAWA, J.; FUJIMOTO, H.; OKUBO, S. **Gravity, Geoid and Marine Geodesy**. Tokyo: Springer Berlin Heidelberg, v. 117, 1997. p. 589-596. ISBN 0939-9585.

GAKSTATTER, E. A Comparison of Free GPS Online Post-Processing Services. **GPSWorld**, out. 2013. Disponível em: <<http://gpsworld.com/a-comparison-of-free-gps-online-post-processing-services/>>. Acesso em: 14 ago. 2014.

GEMAEL, C. **Introdução a Geodésia Física**. Edição atualizada. ed. Curitiba: Editora UFPR, 2012. 304 p. ISBN 8573350296.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Editora da UFPR, 1994. 319 p.

GOLDANI, D. **Modelo geoidal de alta resolução para o Estado do Paraná: aplicação da Transformada Rápida de Fourier – Stokes e do valor do potencial do geoide na definição da superfície de referencia vertical**. Curitiba, PR, p. 129. 2006.

GOLDANI, D.; QUINTAS, M. C. L. Um modelo geoidal para o Estado do Paraná: aplicações da integral de stokes e de um valor do geopotencial. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, PR, v. 16, n. 1, p. 105-124, 2010. ISSN 1982-2170.

GUIER, W. H.; NEWTON, R. R. The Earth's gravity field deduced from the Doppler tracking of five satellites. **Journal of Geophysical Research**, v. 70, n. 18, p. 4613-4626, 1965.

GUIMARÃES, G. N. **A Altimetria e o Modelo Geoidal no Estado de São Paulo**. 2010. p. 119. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo (SP).

GUIMARÃES, G. N.; DE MATOS, A. C. O. C.; BLITZKOW, D. New Geoid Model in the State of São Paulo. **International Association of Geodesy Symposia**, p. 1-7, 2015. ISSN 0939-9585.

GUIMARÃES, G. N.; MATOS, A. C. O. C.; BLITZKOW, D. Gravimetric densification in the State of São Paulo aiming a Geoid Model. **Revista Brasileira de Geofísica**, v. 31, n. 4, p. 631-642, 2013. ISSN 0102-261X.

GUIMARÃES, G. N.; MATOS, A. C. O. C.; BLITZKOW, D. **Quasi-Geoid Model in the State of São Paulo**. The 3rd International Gravity Field Service (IGFS 2014) - General Assembly. Shanghai, China.: [s.n.]. 2014.

HARDY, R. L. Research results in the application of multi-quadric equations to surveying and mapping problems. **Surveying and Mapping**, v. 35, n. 12, p. 321-332, 1975.

HARTIGAN, J. A.; WONG, M. A. Algorithm AS 136: A K-Means Clustering Algorithm. **Journal of Royal Statistical Society**, v. 28, n. 1, p. 100-108, 1979.

HAYKIN, S. **Neural Networks and Learning Machines**. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2008. 936 p. ISBN 978-0131471399.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; WASLE, E. **GNSS Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo & more**. Graz: Springer-Verlag Wien, 2008. 516 p. ISBN 978-3-211-73012-6.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. 2. ed. Viena: Springer-Verlag Wien, 2006. 403 p. ISBN 978-3-211-33544-4.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Ajustamento Simultâneo da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro**: Relatório, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <<ftp://geofp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/relatorioajustamento.pdf>>. Acesso em: 2014 dez. 2014.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Dez Anos de Monitoramento do Nível do Mar no IBGE**. III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas. Curitiba, PR, 2003.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Especificações e normas gerais para levantamentos geodésicos: coletâneas das normas vigentes**. XVII Congresso Brasileiro de Cartografia, Salvador, BA, 1995. Disponível em: <<http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv25313.pdf>>. Acesso em: 12 out. 2015. RESOLUÇÃO – PR n° 22.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **O novo modelo de ondulação geoidal do Brasil: MAPGEO2015**. Rio de Janeiro, RJ, nov. 2015. Disponível em: <ftp://geofp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/rel_mapgeo2015.pdf>. Acesso em: 07 dez. 2015.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Plano Estratégico 2012-2015**. Rio de Janeiro, RJ, p. 95. 2015.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Relatório de Monitoramento da Variação do Nível Médio do Mar nas Estações da Rede Maregráfica Permanente para Geodésia – 2001-2012**. 2013. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/RMPG/relatorio/relatorio_RMPG_2001_2013_GRRV.pdf>. Acesso em: 2015 maio 29.

ICGEM - International Centre for Global Earth Models. **Root mean square (RMS) about mean of GPS/levelling minus gravity field model derived geoid heights [m]**: Evaluation of the models, 2015. Disponível em: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>. Acesso em: 10 fev. 2015.

IGG - Instituto Geográfico e Geológico. **Nivelamento Geral do Estado – Altitudes de Precisão: São Paulo**, Secretaria de Agricultura do Estado de São Paulo. [S.l.], p. 101. 1962. Boletim 36.

JEKELI, C. **Heights, the geopotential, and vertical data**. Ohio State University. Ohio, p. 34. 2000. Technical Report, No. 459.

KAVZOGLU, T.; SAKA, M. H. Modelling local GPS/levelling geoid undulations using artificial neural networks. **Journal of Geodesy**, v. 78, n. 9, p. 520-527, 2005.

KLOBUCHAR, J. A. Ionospheric time-delay algorithm for single-frequency GPS users. **Aerospace and Electronic Systems**, v. AES-23, n. 3, p. 325-331, 1987. ISSN 0018-9251.

KOTSAKIS, C.; SIDERIS, M. G. On the adjustment of combined GPS/levelling/geoid networks. **Journal of Geodesy**, v. 73, n. 8, p. 412-421, 1999.

KRUEGER, C. P.; HUINCA, S. C. M.; MAIA, O. C. **Método de posicionamento absoluto, qual precisão pode ser obtida atualmente?** III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife, PE: UFPE. 2010.

KUROISHI, Y. Improved geoid model determination for Japan from GRACE and a regional gravity field model. **Earth, Planets and Space**, v. 61, n. 7, p. 807-813, 2009. ISSN 1880-5981.

KUROISHI, Y.; ANDO, H.; FUKUDA, Y. A new hybrid geoid model for Japan, GSIGEO2000. **Journal of Geodesy**, v. 76, n. 8, p. 428-436, 2002. ISSN 1432-1394.

LEE, D.H.; YUN, H.S.; SUH, Y.C.; HWANG, J.S.; MIN, B.I. **KGEOID10: A New Hybrid Geoid Model in Korea**. EGU General Assembly Conference Abstracts. Vienna, Austria: Geophysical Research Abstracts. abr. 2012. p. 7383.

LEE, D.H.; YUN, H.S.; JUNG, H.; CHO, J.M.; CHO, J.H.; JUNG, W.C.; HWANGT, J.S. Transformation of Vertical Datum Surface in the Coastal Area

using Hybrid Geoid Models. **Journal of Coastal Research**, n. Special Issue No. 65, p. 1427-1432, mar. 2013.

LI, J.; HEAP, A. D. A review of comparative studies of spatial interpolation methods in environmental sciences: Performance and impact factors. **Ecological Informatics**, v. 6, n. 3-4, p. 228-241, 2011. ISSN 1574-9541.

LOBIANCO, M. C. B. **Determinação das Alturas Geoidais no Brasil**. (Tese de Doutorado). São Paulo, SP: Escola Politécnica da USP. 2005. p. 165.

LOBIANCO, M. C. B.; BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C. **O Novo modelo geoidal para o Brasil**. IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas. Curitiba, PR: [s.n.]. 2005.

LUNDQUIST, C. A.; VEIS, G. **Geodetic Parameters for 1966 Smithsonian Institution Standard Earth**. [S.l.]. 1966.

LUZ, R. T. **Estratégias para modernização da componente vertical do Sistema Geodésico Brasileiro e sua integração ao SIRGAS**. Universidade Federal do Paraná (UFPR). Curitiba, PR, p. 207. 2008.

LUZ, R. T.; GUIMARÃES, V. M. **Realidade e Perspectivas da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro**. II Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas. Curitiba, PR: [s.n.]. 2001. p. 8.

MACHADO, W. C.; BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C. **Interpolação de anomalias de gravidade através de Redes Neurais visando o cálculo do modelo geoidal de Santa Catarina**. VIII Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Curitiba, 2013.

MAIA, T. C. B. **Utilização de redes neurais na obtenção de modelos geoidais**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil: Transportes). São Carlos, SP: Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. 2003. p. 130.

MARTINEC, Z.; GRAFAREND, E. W. Solution to the Stokes Boundary-value problem on an Ellipsoid of Revolution. **Studia Geophysica et Geodaetica**, v. 41, n. 2, p. 103-129, abr. 1997. ISSN 1573-1626.

MATOS, A. C. O. C.; BLITZKOW, D.; GUIMARÃES, G. N.; LOBIANCO, M. C. B.; COSTA, S. M. A. Validação do MapGeo2010 e comparação com modelos do geopotencial recentes. **Boletim Ciências Geodésicas**, Curitiba, PR, v. 18, n. 1, p. 101-122, mar. 2012.

MATOS, A. C. O. C.; BLITZKOW, D. **Modelagem Digital de Terrenos (MDT) de 3" para a América do Sul**. [S.l.]. 2008.

MAYER-GÜRR, T. ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bon. **Institut für Geodäsie und Geoinformation**, Potsdam, Germany, 2007. Disponível em: <<http://www.igg.uni->

bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace03>. Acesso em: 20 jun. 2015.

MCCULLOCH, W. E. P. W. A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity. **Bulletin of Mathematical Biology**, v. 5, n. 4, p. 115-133, dez. 1943. ISSN 1522-9602.

MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. **The bulletin of mathematical biophysics**, v. 5, n. 4, p. 115-133, dez. 1943. ISSN 1522-9602.

MCDONALD, A. J. **Which Geoid Model Should Be Used For GPS Heighting On The Toowoomba Bypass Project?** 2004. p. 311. Dissertation (Masters) Faculty of Engineering and Surveying. [S.l.]: University of Southern Queensland.

MIKHAIL, E.; ACKERMAN, F. **Observations and Least Squares**. IEP series in civil engineering. ed. New York, NY: Harper and Row, 1976. 497 p.

MIYAHARA, B.; KODAMA, T.; KUROISHI, Y. Development of new hybrid geoid model for Japan, "GSIGEO2011". **Bulletin of the Geospatial Information Authority of Japan**, v. 62, p. 12, dez. 2014.

MONICO, J. F. G.; PÓZ, A. P. D.; GALO, M.; SANTOS, M. C.; OLIVEIRA, L. C. Acurácia e precisão: revendo os conceitos de forma acurada. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, PR, v. 15, n. 3, p. 469-483, 2009.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: Descrição, fundamentos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: [s.n.], 2008. 472 p. ISBN 9788571397880.

MOREIRA, A. S. B. **Nivelamento Trigonométrico e Nivelamento Geométrico Classe IIN da NBR 13.133: Limites e condições de compatibilidade**. 2003. p. 103. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos (SP).

NAJAFI-ALAMDARI, M.; EMADI, S. R.; MOGHTESED-AZAR, K. The ellipsoidal correction to the Stokes kernel for precise geoid determination. **Journal of Geodesy**, v. 80, n. 12, p. 675-689, 2006. ISSN 1432-1394.

NGA. WGS 84 Earth Gravitational Model. **National Geospatial Intelligence Agency**, abr. 2013. Disponível em: <<http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/>>. Acesso em: 15 jan. 2015.

NGS. The NGS Geoid Page. **National Geodetic Survey**, 2015. Disponível em: <<http://www.ngs.noaa.gov/GEOID/>>. Acesso em: 23 ago. 2015.

NIEVINSKI, F. G. **Forward and Inverse Modeling of GPS Multipath for Snow Monitoring**. Thesis (Doctor of Philosophy Department of Aerospace Engineering Sciences). [S.l.]: University of Colorado. 2013. p. 154.

NRCAN. Tools and Applications. **Natural Resources Canada**, 2014. Disponível em: <<https://www.nrcan.gc.ca/earth-sciences/geomatics/geodetic-reference-systems/tools-applications/10925>>. Acesso em: 20 jul. 2015.

ODERA, P. A.; FUKUDA, Y. Improvement of the geoid model over Japan using integral formulae and combination of GGMs. **Earth, Planets and Space**, v. 66, n. 22, p. 7, dez. 2014. ISSN 1880-5981.

PAVLIS, N. K. HOLMES, S. A.; KEYON, S. C.; FACTOR, J. K. **An Earth gravitational model to degree 2160: EGM2008**. General Assembly of the European Geosciences Union. Vienna, Austria: [s.n.]. 2008.

PAVLIS, N. K.; HOLMES, S. A.; KEYON, S. C.; FACTOR, J. K. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). **Journal of Geophysical Research**, v. 117, n. B4, abr. 2012.

PAVLIS, N. K. **The Global Gravitational Model EGM2008: Overview of its Development and Evaluation**. 9th International IGeS Geoid School The Determination and Use of the Geoid. La Plata, Argentina: [s.n.]. 2009.

PINTO, L. E. K. **Curso de Topografia**. Salvador: Centro editorial e didático da Universidade Federal da Bahia, 1988. 344 p.

PLAG, H. P.; PEARLMAN, M. **Global Geodetic Observing System: Meeting the Requirements of a Global Society on a Changing Planet in 2020**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 332 p. ISBN 978-3-642-02687-4.

RAPP, R. H. Gravitational potential of the Earth determined from a combination of satellite, observed, and model anomalies. **Journal of Geophysical Research**, v. 73, n. 20, p. 6555-6562, 1968.

REINKE, M.; VERONEZ, M. R.; THUM, A. B.; SOUZA, G. C.; SEGANTINE, P. C. L. Determinação da superfície geoidal através de redes neurais artificiais. **Gaea-Journal of Geoscience**, v. 3, n. 1, p. 27-36, 2007. ISSN 1983-3628.

RODRIGUES, V. **O nivelamento trigonométrico como apoio altimétrico a densificação gravimétrica**. 1988. p. 81. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná, Curitiba (PR).

ROMAN, D. R.; WANG, Y. M.; HENNING, W.; HAMILTON, J. **Assessment of the New National Geoid Height Model, GEOID03**. Conference and Technology Exhibition. Nashville, Tennessee: ACSM/TAPS. 2004. p. 14.

ROMAN, D. R.; WANG, Y. M.; SALEH J.; LI, X. **National Geoid Height Models for the United States: USGG2009 and GEOID09**. ACSM-MARLS-UCLS-WFPS Conference. Salt Lake City, UT: [s.n.]. 2009.

SÁ, N. C.; MOLINA, E. C. . O geóide gravimétrico no Estado de São Paulo: resultados preliminares. **XVII Congresso Brasileiro de Cartografia**, Salvador,

BA, Anais 1, 1995. 124-133.

SÁ, N. C.; VIEIRA, C. **Rede GPS do estado de São Paulo: aprimoramento de modelos geoidais e apoio básico local**. Relatório científico final FAPESP (Processo: 99/012691-9),. São Paulo, SP: Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo (USP). 2006. p. 90.

SALEH, J.; PAVLIS, N. K. **The development and evaluation of the global digital terrain model DTM2002**. 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission. Thessaloniki, Greece: [s.n.]. 2002. p. 26-30.

SANTOS, M. A.; SEIXAS, A.; MOTTA, J. A.; SANTOS, A. A. Determinação do modelo geoidal local preliminar da RMR e parte do agreste de Pernambuco por meio de GPS/nivelamento. **IV Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação**, Recife, PE, 6-9 maio 2012. 1-8.

SANTOS, M. S. T.; SÁ, N. C. O uso do GPS em levantamentos geofísicos terrestres. **Revista Brasileira de Geofísica**, v. 24, n. 1, p. 63-80, fev. 2006. ISSN 0102-261X.

SCHAER, S. **Mapping and predicting the earth's ionosphere using the Global Positioning System**. 1999. p. 205. (Ph.D. Dissertation) - University of Bern, Suíça.

SCHLIE, J.; MURBÖCK, M.; PAIL, R. Feasibility Study of a Future Satellite Gravity Mission Using GEO-LEO Line-of-Sight Observations. In: MARTI, U. **Gravity, Geoid and Height Systems**. [S.l.]: Springer International Publishing, v. 141, 2014. p. 123-130. ISBN 0939-9585.

SEEBER, G. **Satellite Geodesy: foundations, methods and applications**. 2. ed. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2003. 589 p. ISBN 3-11-017549-5.

SEVERO, T. C. **Estudo das altitudes físicas aplicado à Rede Altimétrica Fundamental do Brasil no estado do Rio Grande do Sul**. 2013. P. 96. Dissertação (Mestrado em Sensoriamento Remoto). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS).

SIDERIS, M. G. Geoid Determination by FFT Techniques. In: SIDERIS, F. S. M. G. **Geoid Determination: Theory and Methods**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, v. 110, 2013. p. 453-516. ISBN 2193-8571.

SILVA, M. A. **Obtenção de um modelo geoidal para o Estado de São Paulo**. 2002. p. 90. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo (SP).

SJÖBERG, L. E. A refined conversion from normal height to orthometric height. **Studia Geophysica et Geodaetica**, v. 50, n. 4, p. 595-606, out. 2006. ISSN 1573-1626.

SJÖBERG, L. E. A refined conversion from normal height to orthometric height. **Studia Geophysica et Geodaetica**, v. 50, n. 4, p. 595-606, out. 2006. ISSN 1573-1626.

SOUZA, D. V.; SÁ, N. C. Identificação de distorções em Redes Altimétricas usando Geoide e GPS. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 59, n. 3, 2007. ISSN 1808-0936.

SOUZA, E. M. **Análise de Wavelets para Detecção e Correção do Multicaminho no Posicionamento Relativo GNSS Estático e Cinemático**. Tese (Doutorado em Ciências Cartográficas). Presidente Prudente, SP: Universidade Estadual Paulista (UNESP). 2008. p. 171

SPLIKER JR, J. J. Tropospheric Effects on GPS. In: PARKINSON, B. W. **Global Positioning System: Theory and Applications**. Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 1, 1996. p. 781. ISBN 1-56347-107-8.

STEEVES, R. R.; FRASER, C. S. **Statistical Post-Analysis of Least Squares Adjustment Results**. Papers for the CISM Adjustment and Analysis Seminars. Krakiwsky, E.J.: Canadian Institute of Geomatics. 1987.

TENZER, R.; VANÍČEK, P.; SANTOS, M.; FEATHERSTONE, W. E.; KUHN, M. Rigorous determination of the orthometric height. **Journal of Geodesy**, v. 79, n. 1, p. 82-92, jun. 2005. ISSN 1432-1394.

TORGE, W. **Geodesy: Third completely revised and extended edition**, Berlin, p. 416, 2001. ISSN 3-11-017072-8.

TUBB, N. R. A Development Path to Success in Neural Computing. **Expert Systems Applications**, v. 9, n. 5, p. 5-9, 1993.

VANI, B. V.; MONICO, J. F. G.; SHIMABUKURO, K. H. Fundamentos e Aspectos Computacionais para Posicionamento por Ponto GPS. **Revista Brasileira de Geomática**, Pato Branco, PR, v. 2, n. 1, p. 13-24, 2013. ISSN 2317-4285.

VANÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. **Geodesy: The Concepts**. Holland: North-Holland, 1986. 697 p. ISBN 978-0-444-87775-8.

WANG, S. C. Artificial neural network. In: SUN-CHONG WANG **Interdisciplinary Computing in Java Programming**. [S.l.]: Springer US, v. 743, 2003. p. 81-100. ISBN 0893-3405.

WANG, Y. M.; SALEH, J.; LI, X.; ROMAN, D. R. The US Gravimetric Geoid of 2009 (USGG2009) model development and evaluation. **Journal of Geodesy**, v. 86, n. 3, p. 165-180, mar. 2012. ISSN 1432-1394.

WGS COMMITTEE. **The Department of Defense World Geodetic System**.

Defense Mapping Agency. Washington, D.C. 1966.

WRIGHT, G. B. **Radial basis function interpolation:** numerical and analytical developments. 2003. p. 147. (Ph.D. Thesis) - Department of Applied Mathematics. Boulder, University of Colorado at Boulder, USA.