CLASS.: 516
K76c
TOMBO: tese 906

SVE

MARIA DO CARMO MONTEIRO KOBAYASHI

A CONSTRUÇÃO DAS RELAÇÕES ESPAÇO-GEOMÉTRICAS EM CRIANÇAS DE EDUCAÇÃO INFANTIL: UM ESTUDO DE EPISTEMOLOGIA GENÉTICA.

t. 906

1410000906

Trabalho apresentado à UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - Faculdade de Filosofia e Ciências - Campus de Marília, para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Adrian Oscar Dongo Montoya

MARÍLIA
1998

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS
BIBLIOTECA
CAMPUS DE MARÍLIA

Agradecimentos

A apresentação final de um trabalho não mostra quantas pessoas foram importantes para sua realização, alguns palpites, muitas críticas, amigos com os mesmos anseios e medos, pessoas que são acionadas para uma infinidade de tarefas secundárias, mas que são fundamentais para a elaboração do trabalho.

Algumas são especiais e agradecemos mais particularmente, assim gostaria de começar meus agradecimentos às pessoas que trabalharam comigo na Rede Municipal de Educação de Bauru, professores, diretores, agentes pedagógicos e principalmente as crianças que me fizeram despertar para uma realidade totalmente nova, e não somente a elas mas a todos os meus alunos.

Agradeço à Márcia Di Flora e a Teresa Lopes Ricci, queridas amigas, às diretoras e professoras que, além de terem me dado a sua amizade, me abriram suas escolas para que esta pesquisa pudesse ser feita, Yoshiko Kamakura Imai (EMEI "Wilson Monteiro Bonato") e a Rita Virgínia Salles Munerato (EMEI "Francisco Gabrieli Neto"), bem como aos pais e as crianças que deram vida a este trabalho.

Agradeço à CAPES pela ajuda, o que me permitiu dispor de tempo para pesquisar.

Agradeço aos funcionários da Biblioteca da UNESP de Marília pela paciência e dedicação com que se empenharam nos levantamentos bibliográficos, nos pedidos de obras de outros lugares, especialmente à Ana Maria, Luzinete e a Vânia, bem como a todos funcionários do Campus de Marília.

Agradeço aos amigos do grupo de estudo Marcelo, Beatriz que leram as primeiras versões e me acompanharam até o final, Inaiara, Leonides, Rosemar, Rute, Marcos e Clélia. A Gláucia que tanto conversamos pois tínhamos os mesmos desafios, a Norma Gomide que me introduziu com muito carinho nos difíceis caminhos da língua francesa.

Agradeço ao Prof. Dr. Raul Aragão Martins pelos conselhos e palavras de carinho.

Agradeço à Prof.a. Ms. Léa Sylvia Braga de Castro Sá, minha querida amiga e professora de português, pela paciência e extremo carinho que dedicou na correção deste trabalho.

Agradeço especialmente ao Prof. Dr. Adrian Oscar Dongo Montoya, meu orientador, que, com sua amizade, carinho, respeito e competência, encaminha o trabalho de seus orientandos na difícil busca de entender a teoria de Piaget, e que, além de orientador, é um grande amigo.

Agradeço aos meus pais, Fernando e Christina, por terem me mostrado desde muito cedo o valor da dignidade e do trabalho; aos meus irmãos tão queridos Marcelo e Luciana, tão presente em todas as horas; ao Ricardo pela ajuda na devida utilização do micro.

Aos filhos tão amados, Fernando e Felipe e um dos motivos de toda busca de melhoria na vida e no trabalho.

O outro motivo foi deixado propositadamente para o final, ao Mário Kazuo, meu maior e melhor crítico e incentivador, para você todo o meu amor e carinho.

SUMÁRIO

RESUMO
LISTA DE FIGURAS 2
LISTA DE TABELAS 4
INTRODUÇÃO 5

I. O ESPAÇO GEOMÉTRICO NA HISTÓRIA 12

I.1 A GEOMETRIA GREGA 23
I.2 A GEOMETRIA EUCLIDIANA 29
I.3 O MUNDO ÁRABE E A GEOMETRIA 35
I.4 A GEOMETRIA PROJETIVA 41
I.5 TOPOLOGIA A GEOMETRIA DA BORRACHA 49

II. A CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO PELA CRIANÇA 59

II.1 O ESPAÇO SENSÓRIO-MOTOR E AS RELAÇÕES ESPAÇO-GEOMÉTRICAS 70
II.2 O ESPAÇO NA REPRESENTAÇÃO E AS RELAÇÕES ESPAÇO-GEOMÉTRICAS 99

III. METODOLOGIA E LEVANTAMENTO DOS DADOS 128

III.1 SUJEITOS 128
III.2 PROVAS 129
III.3 CRITÉRIOS ADOTADOS PARA A CLASSIFICAÇÃO DOS DADOS 143

IV. RESULTADO E ANÁLISE DOS DADOS 147

IV.1 RELAÇÕES TOPOLÓGICAS ELEMENTARES 147
IV.2 RESULTADOS E ANÁLISE DAS RELAÇÕES PROJETIVAS - A CONSTRUÇÃO DA RETA PROJETIVA 169
IV.3 RESULTADOS E ANÁLISE DAS RELAÇÕES EUCLIDIANAS OU MÉTRICAS - A COORDENADA HORIZONTAL E O NÍVEL DOS LÍQUIDOS 186

CONCLUSÃO 203
ANEXOS 213
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 214

KOBAYASHI, M. C. M. A construção das relações espaço-geométricas em crianças de educação infantil: um estudo de epistemologia genética. Marília, 1998. 216p. Dissertação (Mestrado em Educação) - UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - Faculdade de Filosofia e Ciências - Campus de Marília.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo averiguar a gênese das relações espaço-geométricas em crianças de educação infantil, fundamentada na teoria epistemológica de Jean Piaget. A presente pesquisa é composta de duas partes sendo, a primeira, teórica, buscando resgatar a história da Ciência Geométrica e o desenvolvimento da geometria infantil e a segunda, empírica, composta por três grupos de provas visando à confirmação do estudo teórico da geometria infantil. Na primeira prova foi utilizado o desenho da figura humana e a cópia de formas geométricas para averiguar quais são as relações geométricas que estão presentes no desenho da criança; na segunda, procurando avaliar as relações projetivas, foi utilizado, como recurso, a construção de retas projetivas em diferentes situações sobre duas formas de mesa - retangular e redonda; e, na terceira, a avaliação das relações euclidianas através da representação pela criança do nível dos líquidos, utilizando dois formatos de garrafas. Os resultados da pesquisa mostraram que: a) os dados obtidos com a pesquisa empírica apresentaram as faixas etárias e as características do pensamento infantil em cada estágio de desenvolvimento e suas respectivas faixas etárias muito próximas aos apresentados nas pesquisas Piaget, contrariando a ordem apresentada pela Ciência Geométrica, ou seja, euclidiana, projetiva e topológica; b) as relações topológicas são as primeiras utilizadas pelas crianças em idade de educação infantil, sendo necessárias à construção das projetivas e euclidianas, também encontradas por Piaget. Para este epistemólogo, as relações espaço-geométricas têm início em relações de caráter bastante primitivo que os geômetras chamam de topológicas e estão ligadas às vizinhanças, separação, ordem, circunscrição e continuidade. Tais relações topológicas são fundamentais e necessárias à construção das relações projetivas e euclidianas; c) a construção do espaço é fruto de um longo processo que se constitui com as operações e não fruto somente da experiência, nem tampouco encontra-se em estruturas formadas a priori.



KOBAYASHI, M. C. M. La construction des rapports espace-géométriques chez les enfants d'école maternelle: une étude d'épistémologie génétique. Marília, 1998. 216p. Dissertation (Maîtrise en Éducation) - UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - Faculdade de Filosofia e Ciências - Campus de Marília.

RÉSUMÉ

Cette recherche a eu comme but relever la gènese des rapports espace-géométriques chez l'enfant d'école maternelle, fondée sur la théorie épistémologique de Jean Piaget. La présente recherche est composée de deux parties, la première, théorique, cherche à récupérer l'histoire de la science géométrique et le développement de la géométrie enfantine et la seconde, empirique, se partage en trois épreuves qui visent la confirmation de l'étude théorique. La première épreuve a utilisé le dessin de la figure humaine et des copies de dessins géométriques pour rechercher quelles relations sont présentes dans le dessin de l'enfant; la deuxième épreuve a évaluée les relations projectives en faisant appel à la construction des droits projectives sur deux types de table - rectangulaire et redonde; et la troisième épreuve on a analysé les relations euclidiennes chez l'enfant à travers la représentation du niveau des liquides dans deux sortes de bouteilles. Les résultats de la recherche ont montré que: a) les données obtenues, selon les tranches d'âge et les caractéristiques de la pensée de l'enfant à chaque stade du développement, sont assez proches à celles présentées dans les recherches de Piaget - et vont contre l'ordre présenté par la science géométrique, c'est-à-dire euclidienne, projective et topologique; b) les relations topologiques sont les premières utilisées par les enfants à l'âge d'éducation enfantine et sont nécessaires à la constitution de celles projectives et euclidiennes, on y voit donc le même résultat retrouvé par Piaget - pour cet épistémologue, les rapports espace-géométriques commencent avec des relations de caractère assez primitif que les géomètres appellent topologiques et sont attachées à des relations de voisinage et proximité, de séparation, d'ordre, de circonscription et de continuité; telles relations sont fondamentales et nécessaires à la construction des relations projectives et euclidiennes; c) la construction de l'espace est un processus long et laborieux qui se forme avec les opérations, il n'est pas seulement le

résultat de l'expérience ni ne se trouve dans des structures formées a priori.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ícone religioso do século XII 40
Figura 2 - Obra prima do Renascimento "A criação de Adão" Michelangelo. 44
Figura 3 - As transformações topológicas que envolvem o genus. 51
Figura 4 - Poliedro de seis faces 55
Figura 5 - Pontes de Könisberg 55
Figura 6 - Banda de Möbius 56
Figura 7 e 8 - Eixo cartesiano - retas perpendiculares 60
Figura 9 - Desenho infantil estádio IB 107
Figura 10 - Nós a serem copiados 111
Figura 11 - Modelos a serem copiados 131
Figura 12 e 13 - Disposição dos palitos de fósforo na mesa retangular 133
Figura 14 e 15 - Disposição dos palitos na mesa redonda 134
Figura 16 - Disposição dos palitos em ziguezague 134
Figura 17 - Disposição dos palitos retificados 134
Figura 18 - Folha para marcar o nível do líquido em garrafa de bordas .. paralelas. 137
Figura 19 - Folha para marcar o nível do líquido em garrafa redonda 137
Figura 20 - Figuras das garrafas de bordas paralelas 139
Figura 21 - Figuras das garrafas redondas 139
Figura 22 - Cartões das garrafas de bordas paralelas 141
Figura 23 - Cartões das garrafas redondas. 142
Figura 24 - Garatuja 148
Figura 25 - Incapacidade sintética - girino. 149
Figura 26 - Incapacidade sintética - girino com braços 149
Figura 27 e 28 - Incapacidade sintética - badameco 150
Figura 29 - Relações de continuidade 151
Figura 30 - Realismo intelectual 153
Figura 31 - Realismo intelectual 154
Figura 32 - Realismo intelectual início das relações euclidianas 155
Figura 33 - Fases de desenvolvimento do desenho da figura humana 156
Figura 34 e 35 - Exemplo de desenhos da subfase 0 158
Figura 36 - Exemplo de desenhos da subfase IA 160
Figura 37 - Exemplo de desenhos da subfase IB 163



Figura 38 - Exemplo de desenho da subfase IIA 164
Figura 39 - Exemplo de desenho da subfase IIB..... 165
Figura 40 - Exemplo de desenho da fase III. 166
Figura 41 - Fases de desenvolvimento do desenho de formas geométricas 167
Figura 42 - Fases de desenvolvimento da construção da reta projetiva..... 179
Figura 43 - Construção da reta projetiva em IA..... 181
Figura 44 - Construção da reta projetiva em IB..... 182
Figura 45 - Construção da reta projetiva em IIA 183
Figura 46 - Construção da reta projetiva em IIA 184
Figura 47 - Construção da reta projetiva em IIB 185
Figura 48 - Representação do nível do líquido em IA 197
Figura 49 - Representação do nível do líquido em IB..... 198
Figura 50 - Representação do nível do líquido em IIA 199
Figura 51 - Representação do nível do líquido em IIB 200
Figura 52 - Fases de desenvolvimento da horizontalidade dos líquidos 203

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Classificação do desenho da "Figura Humana" (número de crianças por fase)..... 155
Tabela 2 - Fases de desenvolvimento do desenho da "Figura Humana" distribuição das crianças nas faixas etárias (%)..... 156
Tabela 3 - Classificação dos testes do desenho de formas geométricas (número de crianças por fases)..... 167
Tabela 4 - Fases de desenvolvimento do desenho de formas geométricas distribuição das crianças nas faixas etárias. 167
Tabela 5 - Classificação dos resultados obtidos nos testes da "Reta Projetiva" (número de crianças por fases)..... 178
Tabela 6 - Fases de desenvolvimento da construção da reta projetiva distribuição das crianças nas faixas etárias (%)..... 178
Tabela 7 - Classificação dos resultados obtidos com a horizontalidade dos líquidos (número de crianças por fases)..... 201
Tabela 8 - Fases de desenvolvimento da horizontalidade dos líquidos distribuição das crianças nas faixas etárias (%)..... 201

unesp

INTRODUÇÃO

Nosso interesse neste estudo teve início no contato direto com crianças em idade de escolaridade infantil (educação infantil), enquanto professora da Rede Municipal de Bauru.

A geometria infantil apresenta desafios que nós não conseguíamos responder. Corroborava para o fato, a dificuldade em encontrar pesquisas na área, produção literária e científica[1] que desse condições de estudo mais aprofundado para tal entendimento, principalmente nesta faixa etária tão carente de estudos. Em outras áreas, como a alfabetização e a aritmética, ano após ano multiplicam-se os estudos. Com relação à geometria, as possibilidades de intervenção são reduzidas e os manuais (livros didáticos e paradidáticos) não estão ligados às práticas infantis, repetindo na grande maioria os caminhos traçados pelos conteúdos pertinentes aos 1° e 2° Graus.

As publicações voltadas aos educadores das crianças desta faixa etária (2 e 6 meses a 7 anos) mostravam desconhecer a gênese da geometria infantil.

Para atender ao público infantil, as revistas, livros didáticos e paradidáticos mudavam a geometria que estava destinada aos alunos de 1° Grau, que recebiam uma "maquiagem nova" com a apresentação de figuras infantilizadas como animais, bonecas, carrinhos, brinquedos e jogos, e toda espécie de "artimanhas" que, aos olhos, parecem atender ao público infantil.

Apesar das tentativas de mudanças, elas demonstravam uma visão ingênua de que a criança necessita ser guiada por "belas imagens" adequadas à sua realidade infantil, que as conduzia ao aprendizado geométrico de forma associacionista, mito que vigora há muito tempo. Seria como se ensino facilitado por imagens e vocabulário conseguisse ensinar aos pequenos o que os maiores já "aprendiam".

Nos seus estudos, ARAÚJO (1994) afirma que os livros didáticos de matemática para o 1° Grau, (os mesmos conteúdos geométricos citados acima e que são "adaptados" para a educação infantil), na sua maioria, enfatizam temas aritméticos em detrimento

---

[1] As pesquisas de levantamento bibliográfico sobre o tema em questão foram realizadas junto às Universidades brasileiras e estrangeiras, onde somente foi encontrada o artigo **"Pesquisas pós-piagetianas sobre o desenvolvimento do conceito de espaço"**, as referências que faremos são relativas a este artigo que está citado na **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**, p:214.



dos geométricos, que são tratados de forma abstrata, descritiva e desarticulada, nas últimas páginas de cada volume.

Cita também as dificuldades encontradas entre os próprios professores da matemática de 1º Grau que confundem as figuras planas e tridimensionais (cubo com quadrado, sem identificar propriedades comuns entre quadrado e losango, mudam o conceito que têm de determinadas figuras geométricas etc...). Tais observações mostram que a percepção do espaço pelos professores é confusa e equivocada. Não tendo conhecimento suficiente sobre o assunto julga-o abstrato portanto "difícil", relegando-o a segundo plano, reservando-o para o final do ano letivo, mas, como dificilmente chegam ao término do programa, a geometria fica para uma "próxima oportunidade".

A busca de respostas às dificuldades encontradas pelas crianças ao desenhar, representar as formas geométricas, apresentar (verbalmente) e representar (no desenho, na construção da reta projetiva) o ponto de vista dos colegas sobre as posições dos objetos , o cálculo das distâncias, a conservação do nível dos líquidos, eram desafios a serem melhor entendidos.

Estas respostas estavam longe de ser obtidas, e foi somente após incessante busca que fomos descobrir, em Piaget, as respostas procuradas.

Em 1948, Piaget realizou uma minuciosa investigação sobre a natureza do pensamento geométrico infantil, sua ordem de sucessão e as explicações para tal ordem. Com a metodologia que lhe é peculiar, apresentou um tratado mostrando que o espaço infantil tem início com as relações topológicas, que serão básicas e vitais para as relações projetivas e euclidianas. No entanto essas últimas, apesar de terem em comum a topologia como sustentação, desenvolvem-se correlatas, apoiando-se uma na outra.

Nas suas obras, Piaget apresentou o desvelamento do pensamento infantil. Apesar das características específicas de cada conhecimento, eles possuem algo em comum, o processo ontogenético recria o processo filogenético, ou seja, cada ente reproduz a história de sua espécie.

Um paradoxo porém, até então inusitado, ocorre com a Ciência Geométrica, em muitas áreas como a aritmética, a física etc. O ser humano constrói seu conhecimento refazendo a história daquele conhecimento como ocorrido pela sua espécie; no entanto, a geometria infantil (sensório-motora e representativa) contraria a Ciência Geométrica.



A ordem de aparecimento das noções geométricas infantis tem início por relações muito elementares, tais como: vizinhança, separação, ordem, circunscrição ou envolvimento e, mais tardiamente, o contínuo. Tais relações são as que os geômetras denominam de topologia.

As relações que tratam do espaço de múltiplos pontos de vistas (relações projetivas), são mais complexas que as topológicas, pois tratam de coordenar os diversos pontos de vista sucessivos para relacionar os objetos, já que não há relações projetivas do objeto em si mesmo.

As relações projetivas englobam as topológicas e as enriquecem ao necessitarem de coordenações para representar não somente as características intrínsecas do objeto, mas a sua coordenação com os demais. Neste sentido requer relações muito mais complexas, que são as operações, que são as bases fundamentais na construção do espaço representativo.

As relações euclidianas e projetivas possuem em comum a necessidade da topologia e a correlatividade entre si, mas diferenciam-se basicamente porque as relações euclidianas requerem uma fidelidade quanto à magnitude de ângulos, de retas, permitindo poucas transformações no espaço. O que justamente lhe dá o caráter de conferir uma grandeza constante.

A Ciência Geométrica, por outro lado, traçou um caminho que inverte essa ordem de sucessão. Inicia pela geometria euclidiana que teve seu apogeu na Grécia no início da nossa civilização, onde os estudos geométricos estavam desvinculados da necessidade prática ou das experiências, mas eram análises dedutivas por abstrações.

A geometria projetiva teve seu início dedutivo por volta do século XIV-XV com o Renascimento, mas só tomou vulto entre os séculos XVII ao XIX, ao passo que a tolopogia tornou-se um ramo de estudos da geometria no final do século XIX . Assim realizamos uma investigação no sentido de estudar a construção histórica da ciência geométrica (Capítulo I).

Nossa pesquisa seguiu o mesmo caminho de Piaget, na busca da ordem que as relações geométricas ocorrem. Utilizamos alguma das provas apresentadas na obra relativa à geometria infantil *"La representation de l'espace chez l'enfant"* (PIAGET, 1948).

Apesar da repetição de um estudo anteriormente realizado, nosso trabalho difere ao explorar um universo meio século distanciado pelo



tempo, cuja realidade social é totalmente diferente, com criança de escola de educação infantil da periferia da cidade de Bauru.

O levantamento bibliográfico que muito nos frustrou, pois após incessante busca, encontramos somente dois títulos que falavam sobre o espaço, e somente um sobre o estudo do espaço infantil.

Para nosso espanto o artigo sobre o espaço infantil era justamente referente às pesquisas pós-piagetianas sobre o espaço, data da década de setenta, mais precisamente de 1977, intitulado "*Pesquisas pós-piagetianas sobre o desenvolvimento do espaço*" (BZUNECK). Apresenta críticas e elogios sobre as pesquisas genebrinas, e a sua realização em diversos países de língua inglesa e francesa, não registrando qualquer referência aos países de língua latina ou a estudos realizados na América do Sul e mais precisamente no Brasil.

Como o objetivo do artigo estava restrito a apresentar quais eram as pesquisas pós-piagetianas, pouco elucida como ocorre o desenvolvimento das relações espaciais, limitando a apresentar sua concordância ou não com as conclusões suíças. Críticas são apresentadas no sentido de que Piaget não explicitava os detalhes de condução das provas, o número de crianças entrevistadas, e a falta de estudos longitudinais.

No Brasil, não conseguimos até a presente data obter informações de possíveis trabalhos sobre as relações espaço-geométricas, ou mesmo sobre o espaço infantil, portanto acreditamos ser de grande importância averiguar tal assunto.

A pesquisa empírica teve início em fevereiro de 1997 e término em dezembro do mesmo ano.

A pesquisa teórica está divida em duas partes: a primeira, na qual buscamos levantar a construção da Ciência Geométrica (Capítulo I), do período histórico no qual aparecem os primeiros registros da nossa civilização, anteriores à geometria euclidiana, até a topologia no século XX. A segunda parte apresentará o estudo das relações espaço-geométricas infantil (Capítulo II), do período sensório-motor ao final do período pré-operatório[2]. A fase inicial do período sensório-motor

---

[2] Piaget denomina sensório-motor o período que começa com o bebê centrado no seu próprio "eu", sem ter consciência do fato, até a descentração do eu e com a objetivação e espacialização do mundo ao seu redor. Este período dura em média de dezoito a vinte e quatro meses e culmina com a elaboração da função semiótica ou simbólica. No que tange ao espaço, o bebê relaciona ao seu próprio corpo todos os acontecimentos vividos, relacinando tudo a ele, ou seja, tudo o que percebido pelo bebê fatalmente passou por suas ações.

será a porta de entrada do foco principal desta pesquisa - a construção das relações espaço-geométricas de crianças em idade de educação infantil.

A pesquisa empírica apresenta a metodologia para a coleta dos dados (Capítulo III), que teve, como objetivo, levantar a realidade das crianças de Bauru. Em seguida apresentaremos o resultados e a análise do dados levantados (Capítulo IV - Resultados e Análise dos dados).

Objetivamos, com a pesquisa empírica, levantar quando têm início as relações topológicas, projetivas e euclidianas e qual a sua ordem de sucessão. Usamos, para tanto, três provas que privilegiam questões topológicas e euclidianas (desenho da figura humana e de formas topológicas e geométricas), projetiva (construção da reta projetiva) e euclidiana (sistema de referência horizontal - o nível da água).

Foi avaliado o desenvolvimento da representação do espaço. Assim sendo, trata-se de uma pesquisa do desenvolvimento da inteligência aplicada às relações espaciais.

As provas realizadas tiveram como objetivo buscar a ordem de desenvolvimento da construção das relações espaciais geométricas nas crianças de duas escolas de educação infantil Municipal de Bauru.

As situações criadas para o levantamento dos dados foram:

A primeira prova avaliou as relações (intuições) topológicas (vizinhança, separação, ordem, envolvimento e contínuo, com o objetivo conhecer a própria geometria do objeto, em singular), que continuaram a ser avaliadas no decorrer das outras experiências.

A segunda prova avaliou as relações projetivas ou perspectivas (situar os objetos e suas configurações uns em relação aos outros, de uma fonte de observação pontual, (no caso a visão humana que é puntiforme e binocular), podendo-se dizer que estudamos o desenvolvimento da geometria do espaço exterior ao sujeito, que observa o mundo ao seu redor de uma certa distância de diferentes pontos de vista.

Finalmente, na terceira prova, foram avaliados as relações euclidianas ou métricas (tratou das grandezas como comprimento, tamanhos de ângulos, áreas, volumes, conservação das paralelas), pois aí estão contidos tanto os objetos como o sujeito móveis e a utilização de eixos referenciais.

O período pré-operatório compreende da aquisição da representação (função simbólica e imediatamente posterior ao sensório-motor) ao início das operações, por volta dos 7 - 8 anos anos, foco central da nossa pesquisa.

Os dados levantados a partir dos objetivos propostos na metodologia necessitavam de interpretação, de uma classificação, o que requereu instrumentos adequados para tanto. Esta foi uma das dificuldades maiores a serem vencidas, mas a partir da leitura dos textos básicos, pudemos elaborá-los.

Ao término da pesquisa empírica podemos afirmar que as dificuldades inicias de contato com as crianças foram superada, pois nos sentimos muito próximos (pesquisador, crianças e funcionários envolvidos), e poucas semanas foram suficiente para que as crianças habituassem às enfadonhas provas que se tornaram rotina durante o ano de 1997.

O mesmo não podemos afirmar quanto ao prosseguimento nos estudos teóricos sobre a psicogênese do espaço, que vão demandar muito mais esforços e dedicação. Quanto aos instrumentos para a avaliação dos dados coletados, a dificuldade encontrada foi muito grande, mesmo porque as obras que utilizamos como referência apresentam a metodologia a ser utilizada, mas não apresentam como foi realizada a categorização dos dados. (Os instrumentos elaborados para tanto encontram-se em III.3 - p:144)

Descobrimos que o espaço não é uma mera repetição de fatos ou associações consecutivas de imagens, como afirmavam algumas correntes. Pensamos hoje o espaço a ser constituído enquanto um longo processo operativo, que tem início muito precocemente nas ações do recém-nascido e passam no decorrer do desenvolvimento às operações baseadas em objetos contínuos fundados nas relações de vizinhanças e separações. Tais operações foram chamadas de "infralógicas", que são construídas paralelas às operações lógico-aritméticas e serão vitais às relações espaciais, temporais, cinemáticas etc.

As operações lógico-aritméticas partem dos elementos individuais considerados como constantes, classificando e seriando-os conforme suas semelhanças, sem a necessidade de colocá-los em relações espaço-temporais, não necessitando estarem colocados em relações de "vizinhança".

As operações infralógicas são relativas a um esquema único de objeto contínuo diferente das lógico-artiméticas que são relativas à conjuntos de objetos descontínuos.

A presente pesquisa buscou verificar a construção do espaço representativo, a gênese das relações espaço-geométricas em crianças



de 2 anos e 6 meses a 7 anos de idade. Estudamos a reconstrução[3] da ordem genética real do espaço representativo.

[3] Utilizamos o termo **reconstrução** do espaço representativo devido à reelaboração desta categoria de conhecimento após a constituição da função semiótica ou simbólica. Todo o conhecimento construído no período sensório-motor será reconstruído no plano representativo.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

I. O ESPAÇO GEOMÉTRICO NA HISTÓRIA

"Para um espírito científico todo conhecimento é uma pergunta. Se não existe pergunta não pode haver conhecimento científico. Nada vem sozinho, nada é dado. Tudo é construído."

Bachelard, *A formação do espírito científico.*

Estudar o espaço geométrico é estudar a história da geometria, é retornar às mais simples observações advindas da capacidade dos seres humanos de reconhecer configurações físicas e espaciais, comparar formas e tamanhos.

A Geometria e a Aritmética, segundo BERGAMINI (1969), são as vigas mestras da Matemática; a primeira, ciência das formas e das relações espaciais; a segunda, a ciência dos números.

A necessidade de utilização de cálculos mais complexos em que os valores em jogo eram desconhecidos, ampliou a Aritmética para Álgebra. Mas as transformações estão longe de terminar, este é apenas o começo. Por volta do século XVII, Aritmética, Álgebra e Geometria unem-se para surgir a Geometria Analítica, que:

"proporcionou uma técnica de representação de números por meio de pontos em um gráfico, para converter equações em formas geométricas e vice-versa." (BERGAMINI, 1969, p:11).

Os avanços advindos de tal fusão irão repercutir no tratamento analítico usado por esse novo tipo de geometria, traduzindo uma geometria em outra, onde formas geométricas podem ser tratadas por equações, e equações podem ser representadas em formas geométricas. As implicações de tal avanço são difíceis de serem pautadas, pois essa nova geometria vai abrir caminhos para a maioria das Matemáticas Superiores.

Uma das conseqüências mais importantes das Matemáticas Superiores será "Análise" de onde vai derivar o Cálculo, que vai traduzir movimento em termos de pontos ou de números encadeados em seqüência contínua, o que vai possibilitar entender a "queda de

unesp

maçãs", movimento dos planetas, enfim todos os fenômenos da natureza, momento em que, mais uma vez, Matemática e Física unem-se.

Quanto à Física gostaríamos de averiguar o desenvolvimento do espaço, - longe está nosso objetivo em realizar uma profunda pesquisa sobre tal questão, mas um breve relato. Dado que, por muito tempo, a geometria esteve ligada ao espaço físico (EVES, 1992, p:27), cremos ser necessário realizar uma breve incursão pela física, para que, em linhas gerais, possamos conhecer o desenvolvimento do conceito de espaço.

Para que teorias como de Galileu, Newton e Einstein pudessem brilhar na Ciência, houve a necessidade de que anteriormente se desenvolvessem as noções de espaço e de tempo, com rigor. Somente sob estas condições, tornou-se possível uma física que uniu ao mesmo tempo matemática e experimentação, mas para esta fundamentação devemos retornar em como foram as primeiras afirmações do conceito de espaço.

Seria impossível, dentro dos objetivos propostos do nosso trabalho, vasculhar através dos tempos as múltiplas definições do espaço. Assim, nos restringiremos àquelas que se tornaram marcantes, iniciando este estudo pelas idéias de Aristóteles.

Aristóteles é, incontestavelmente, de importância fundamental para o desenvolvimento de toda a cultura ocidental e dos conceitos científicos. Tal importância deve-se à extensão de sua obra, à abrangência e diversidade, bem como o rigor e a profundidade do tratamento dos diversos assuntos.

Seus estudos abrangeram quase todos os ramos da filosofia e ciência natural, e grande parte deles foi preservada. Sua obra está dividida em dois grupos: os escritos destinados à divulgação de sua teoria junto ao público, chamados *exotéricos*, e as anotações de cursos que circulavam entre seus discípulos, os escritos *acromáticos* (objeto de discussão e análise restritos aos iniciados).

Este conjunto de obras importantes que sobreviveram abrangem praticamente todos assuntos, e são conhecidos pelo nome genérico de *corpus aristotelicum*. É no *corpus aristotelicum* que encontraremos as obras dedicadas ao estudo da natureza, ao mundo físico.

Nestes escritos, Aristóteles apresenta o espaço como sendo constituído por lugares heterogêneos onde cada "coisa" tinha o seu "lugar", o que no decorrer da física será modificado totalmente, mas que são de enorme importância para a ciência, como diz Thuillier:



"Para Aristóteles, havia o centro absoluto do mundo e 'lugares' diferenciados, para os quais tendiam respectivamente o centro da terra, o elemento fogo etc. O novo espaço, ao contrário, não é mais qualitativo e heterogêneo: ele é sem limites e dotado de unidade, anterior aos objetos que nele encontrarão lugar." (THUILLIER, 1994, p:60-61)

Se, para Aristóteles, cada coisa tem o seu "lugar", o seu espaço, a física clássica ou newtoniana traz mudanças, e o espaço passa a ter outras características.

Para Newton, que tomou os *Elementos* de Euclides escrito vinte séculos antes como modelo para a organizar sua obra prima *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicado em 1687, e que teve papel fundamental no desenvolvimento da visão do mundo pós-renascentista. *Principia*, como ficou conhecida a obra, veio a ser palco da discussão da física do movimento, criou uma nova mecânica, não só dos movimentos na Terra mas também no céu.

A educação recebida por Newton no Trinity College da Universidade de Cambridge estava baseada no pensamento aristotélico, mas foi a descoberta dos filósofos franceses no verão de 1664, os quais pôs-se a ler insaciavelmente, que levantavam uma série de questões que o fustigavam, a leitura de René Descartes, Pierre Gassendi entre outros que propunham uma filosofia mecanicista com nova visão de mundo, deram um novo rumo aos seus estudos era um novo posicionamento em relação ao estudo das leis da natureza.

Newton mostrou que todos os movimentos observados na Natureza, desde a queda *"de uma simples maçã"* até a trajetória cósmica dos cometas, estão regidos e podem ser traduzidos em termos de equações, de leis de movimento, matematicamente dedutíveis. O rigor do método matemático uniu definitivamente a física e astronomia, passando a existir apenas uma física, cuja extensão vai até as estrelas.

Os anos entre 1665 e 1667 foram de grande calamidade pois a peste bubônica começou em Londres, e Cambridge foi fechada. Newton retorna à sua cidade natal. Segundo BERGAMINI (1969, p:105) de 1665 a 1666, justamente enquanto Newton[4] estava fora de Londres, ele produziu o que hoje é conhecido como Cálculo. Alguns historiadores chamam tal período de produção científica de *anni*

[4] Diversos autores, inclusive Bergamini, atribuem também a Gottfried W. von Leibniz a descoberta do Cálculo, publicado em 1648. Newton publicou sua descoberta em 1704, mas sua elaboração data de 1665. Coube a Leibniz a popularização do uso do S alongado como símbolo de integral ∫.

mirabilis ou "anos maravilhosos", e foi este o momento inesquecível da chamada "revolução científica do século XVII", que produziu a concepção moderna de mundo, que logo se expandiu para todos os ramos da ciência. A criação do Cálculo viabilizou pela primeira vez a possibilidade, aos matemáticos e físicos, da análise dos movimentos e de suas mudanças.

Combinando descobertas de tempos muito distantes - pois Newton juntou as técnicas dos gregos da divisão em diminutos elementos com as de Descartes dos sistemas de gráficos e da localização dos pontos por meio de um par de números que determinavam sua posição - foi possível chegar a equações dos infinitésimos. O Cálculo provou ser o instrumento necessário para elaborar as leis dos movimentos e da gravitação.

O estudo do movimento requereu um método para avaliar as mudanças de posição, que devem estar em relação a um ponto referencial, a um ponto fixo, e em um determinado intervalo de tempo (Δt). O movimento está diretamente relacionado à mudança de posição em um intervalo de tempo, mas, para o estudo do movimento, era inevitável que Newton adotasse definições rígidas de espaço e tempo.

Newton adotou o espaço como uma grade tridimensional onde todos os objetos estavam inseridos, e onde poderiam ser localizados. Sua crença era de que existia um espaço absoluto onde todos os corpos se moviam.

É no *Escólio* da *Definição VIII*, que Newton vai definir o tempo, o espaço, o lugar e o movimento:

> *"O espaço absoluto, por sua natureza, sem nenhuma relação com algo externo, permanece sempre semelhante e imóvel..."* (NEWTON, 1996, p:24)

Principia deu o caminho a ser percorrido pelas Ciências da Natureza, apresentou o espaço e o tempo absoluto. O tempo flui de modo contínuo sem ser interrompido e independe da sua marcação. Com absolutização do espaço e do tempo, Newton pode finalmente enunciar as suas três leis do movimento e da gravitação em equações que podem nos fornecer os dados necessários para descrever como os objetos se movimentam (em um espaço e tempo).

Newton construiu, com suas leis de movimento, um edifício sólido que explicava como todos os objetos se movem de "maçãs" a planetas ao redor do Sol. Nesta construção uniu a teoria de Galileu dos projéteis e as três leis de Kepler. A princípio, as leis de Kepler

unesp

restringiam-se às órbitas planetárias, e as de Galileu apresentavam o movimento dos projéteis restritos aos movimentos na Terra. Indiferente às distâncias que aparentemente possam ter essas idéias, Newton as unificou, identificando a órbita da Lua com a de um projétil.

A física newtoniana vai apresentar os mistérios do universo, e a gravidade é o elo que interliga o que ocorre na Terra e no espaço:

"A gravidade é o cimento universal, governando todos os movimentos na escala cósmica. O sistema do mundo transformou-se num livro aberto , desvelado, em sua magnífica beleza, pelo gênio do "rapaz pensador, sombrio e silencioso' de Woolsthorpe" (GLEISER, 1997, p:185)

A idéia de espaço e tempo absoluto foi aceita por um grande número de cientistas, apesar dos problemas apresentados quando os experimentos eram realizados com a luz e causavam um grau maior de dificuldade.

"Experimentos demonstravam que a luz parecia comportar-se como uma onda. Se ela fosse uma onda, precisaria de um meio para se propagar. Como poderia a luz cruzar o vazio do espaço absoluto ?" (SNEDDEN, 1996, p:23)

A resposta a esta questão intrigante viria muito tempo depois com as teorias de Albert Einstein, no século XX, mas as leis de Newton continuaram válidas[5]. A idéia de um espaço absoluto postulada por Newton teve a aceitação da maioria dos cientistas, mas teve alguns opositores como Leibniz.

Leibniz opôs-se radicalmente às teses newtonianas sobre o espaço e o tempo "absolutos". Alegava que Newton, ao adotar os espaço e tempo absoluto, estava recorrendo a crenças contraditórias que deveriam, portanto, ser rejeitadas[6]. Mas as críticas e os argumentos de Leibniz não foram suficientes para obscurecer as descobertas de Newton.

Lebrun define o espaço leibniziano:

---

[5] Para nós que vivemos e nos deslocamos com velocidades infinitésimamente inferiores à velocidade da luz as três leis do movimento regerão soberanamente, e onde a velocidade da luz, só terá utilização para as viagens interplanetárias ou para a descobertas da origem do universo.

[6] Em RAY, 1991, p:144.

"Segundo Leibniz, o espaço , que nos aparece como extensão divisível e mensurável, ***em realidade*** *é meramente uma ordem intelectual, conjunto das relações instituídas por Deus entre as mônadas* [7]*."* (LEBRUN, 1993, p:27)

Mas o espaço, palco de tantas discussões, continuará indefinidamente na base de teorias que envolvam os problemas do mundo físico, ou melhor, que necessitarão usá-lo como uma das suas variáveis, por exemplo, toda vez que um conceito envolver velocidade, seja ele físico ou epistemológico, o espaço será uma das variáveis, e será matéria para as reflexões da filosofia kantiana. Kant posicionar-se-á totalmente contrário a Leibniz :

"O espaço não é nada sem as coisas, senão a possibilidade de pô-las.... O espaço desapareceria inteiramente, pois, quando se suprimem as coisas, e só seria pensável nos atuais." (KANT in LEBRUN, 1993, p:27)

Mas, a publicação dos *Nouveaux Essais* de Leibniz, em 1765, só fez aumentar as diferenças entre este e Kant, que doravante passa a criticá-lo, passando a defender o espaço absoluto de Newton e dos geômetras, empreendendo uma crítica radical às teses do espaço de Leibniz.

Os problemas da física clássica repercutiram na Filosofia, e Lebrun aponta que:

"...a doutrina Kantiana do espaço nasce quando Kant se pergunta por que Leibniz não poderia ter razão e não porque Kant teria decidido que Leibiniz estava errado." (LEBRUN, 1993, p:28)

O posicionamento de Kant sobre o espaço newtoniano, influenciado ou não por Newton, irá repercutir em sua filosofia. Posteriormente retomaremos tais implicações.

As idéias de Newton reinaram sozinhas por muitos séculos, mais precisamente 200 anos. Em 1905 a Teoria Especial da Relatividade de Albert Einstein foi apresentada na revista alemã *Annalen der Physik* (Anais de Física), num conjunto de quatro artigos onde Einstein começava a questionar o sólido modelo da física clássica. Mas a Teoria Especial da Relatividade já estava sendo

---

[7] Segundo Lalande, a palavra mônada tornou-se célebre graças ao emprego dado por Leibniz, que a definiu como sendo "uma substância simples, quer dizer, sem partes, que entra nos compostos" ou "Estas mônadas são os verdadeiros átomos da natureza e, numa palavra, os elementos das coisas." Lalande, 1996, p:697.



elaborada dez anos antes do artigo bombástico ser publicado, mostrando ao mundo explicações convincentes sobre o funcionamento do universo.

As idéias principais de tal publicação eram basicamente enfáticas em dois pontos: primeiramente as leis da física eram válidas para todos os observadores em qualquer lugar do Universo e, posteriormente, a velocidade da luz no vácuo era sempre constante, mas espaço e tempo eram tidos como fixos onde os eventos se sucediam.

"Antes de 1915, espaço e tempo eram considerados como um palco fixo no qual os eventos ocorriam, sem que fossem afetados pelo que nele acontecesse. Isto era verdadeiro até mesmo para a teoria da relatividade especial....."
(HAWKING, 1988, p:60)

A Teoria da Relatividade Especial[8] não mencionava, no entanto, nada sobre a gravidade, o que implicava em objetos se movendo em velocidades constantes, sem aceleração, quer fosse para aumentar ou diminuir a velocidade, ignorando a força da gravidade exercida nos corpos que estão no campo gravitacional da Terra.

Somente após a Teoria da Relatividade Geral em 1916, tais conceitos foram questionados, e as explicações dadas por ele foram surpreendentes. Mais uma vez a polêmica envolvia o espaço e o tempo, mas, após os estudos de Einstein sobre a teoria da relatividade geral, o espaço passou a ser apresentado da seguinte maneira:

"A situação, entretanto, é bastante diferente na teoria da relatividade geral. Espaço e tempo são atualmente considerados quantidades dinâmicas: quando um corpo se move, ou uma força atua, afeta a curva do espaço e do tempo e, por sua vez, a estrutura do espaço-tempo afeta a forma como os corpos se movem e as forças atuam. Espaço e tempo não apenas afetam mas também são afetados por qualquer coisa que aconteça no universo. Assim como não se pode falar de eventos no universo sem as noções de espaço e tempo, também, na relatividade geral, torna-se sem sentido falar de espaço e tempo fora dos limites do universo." (HAWKING, 1988, p:60)

Mais uma vez a matemática e a física[9] se unem para explicar relações que envolvem todos os corpos que gravitam pelo Universo, e a

---

[8] Encontramos a teoria de Einstein de 1906 escrita de três maneiras: Teoria Especial da Relatividade, Teoria da Relatividade Especial e Teoria da Relatividade Restrita.

[9] Newton já havia "aplicado" a matemática à física, como afirma GLEISER, 1997, p:164, para elaborar a solução do problema do movimento dos corpos.



geometria não-euclidiana[10] é a ferramenta necessária para que Einstein pudesse explicar como a distância mais curta entre dois pontos não é necessariamente uma reta, mas um espaço curvo, e que o espaço-tempo é curvado pelos objetos que eles contêm. Apesar da dificuldade em entendermos a curvatura do espaço causada pelo campo gravitacional, quando pensamos na distância entre os pólos na Terra estamos pensando em um arco, ou seja, em um meridiano.

Um breve trajeto pela história do espaço na física foi o caminho para conduzir-nos à história do espaço na geometria. Com a criação das geometrias abstratas, espaço físico e espaço geométrico estão desvinculados. Aqui paramos o estudo do espaço na física e partimos para o objeto deste trabalho: a construção das relações espaço-geométricas pelas crianças de educação infantil.

Para iniciar um estudo sobre o espaço geométrico na história, uma pergunta nos é primordial: Por onde começar?

Pelas primeiras deduções sistemáticas atribuídas a Tales de Mileto (600 a.C.), devemos buscar as mensurações de terra na Mesopotâmia e Egito? Ou ainda, recuar mais, até ao Paleolítico onde o *homem* viveu um período de transição entre *pré-humano* para uma sociedade de caçadores humanos.

> *"Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem mostrou-se capaz de por seus registros e pensamentos em forma escrita."* (BOYER, 1974, p:4)

Assim, buscaremos iniciar este estudo onde a história guarda os primeiros registros que documentam os avanços da nossa civilização, em decorrência da sedentarização do homem nas férteis bacias aluviais dos principais rios do Oriente Médio e Norte da África.[11]

Das comunidades agrícolas que se estendiam das colinas para as planícies aluviais, talvez a primeira, por volta de 3.500 a.C., tenha sido

---

[10] *"Pela expressão geometria 'não-euclidiana' entendemos um sistema geométrico construído sem a ajuda da hipótese euclidiana das paralelas e contendo uma suposição sobre paralelas incompatível com a de Euclides."* (EVES, 1992, p:45).

[11] Na Ásia ocorreu tal processo, mas com a utilização do papel frágil feito de casca de árvore e bambu não resistiu ao tempo sendo os registros escassos. Nas Américas este fato também ocorreu mas em época posterior.

a Mesopotâmia, com influência identificada no Egito primitivo (Barker 1995, p:52).

A Mesopotâmia - que significa "*entre rios*" - situava-se onde ao que hoje corresponde ao Iraque juntamente com a área ao norte e a oeste, acompanhando a curvatura do rio Tigre em direção às costas da Síria, do Líbano e do Norte de Israel. Povoada pelos sumérios, por volta do ano 3.000 a.C., povo que se diferenciava dos nômades, e se vangloriava por estarem à frente do seu tempo.

Os sumérios habitavam a porção sul da Mesopotâmia, próximo ao Golfo Pérsico, região chamada Suméria.

Os rios Tigres e Eufrates possuíam as mais ricas e férteis áreas agrícolas, mas com um tênue equilíbrio que requeria a proteção da natureza e dos predadores. A escassez de chuvas e a violência das enchentes do Tigre a tudo destruía, o que demandava técnicas de engenharia para a construção de diques e canais para a contenção da fúria das águas, assim como o controle dos rios que faziam parte da sua bacia, e a drenagem dos pântanos. Tudo indica que o clima na região passava por grande contraste, entre o desértico e chuvoso.

O rio Nilo, - o alicerce da vida egípcia-, chamado por Sir Willian Willcocks *"o mais cavalheiro de todos os rios"* (STRUIK, 1987, p:52), por outro lado, mantinha suas enchentes em padrões que propiciavam a agricultura de forma mais previsível, não necessitando de cuidados como os da Mesopotâmia, ocorrendo suas inundações no mês de julho.

Apesar das características comuns entre as histórias da Mesopotâmia e do Egito, as primeiras cidade-Estado banhadas por rios que trouxeram a prosperidade, - politicamente são muito diferentes. Ambas faziam parte do que se chamou de Crescente Fértil do Próximo Oriente.

A Mesopotâmia, mesmo não possuindo uma vasta extensão de área fértil como o Egito, possuía matérias-primas como produtos agrícolas, animais, fontes de betume e de pedra calcária e, desde cedo, a indústria de junco necessitava do comércio, sendo, o sul, o principal centro de troca e de disseminação de idéias.

Situada nas rotas das caravanas, a Mesopotâmia estava sujeita a freqüentes invasões de nômades que geravam períodos confusos de turbulência. O Egito, por outro lado, mantinha-se isolado das invasões estrangeiras com governos de sucessivas dinastias ininterruptas e pacíficas, onde os faraós administravam um despotismo misturado com

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

ideais de responsabilidade com seus súditos e, ao que parece, zelavam para que eles tivessem uma vida feliz e razoavelmente confortável.

A Mesopotâmia, diferentemente do Egito, viveu uma série de lutas pelo poder, mas o brilhantismo dos sumérios resistiu até as invasões persas no século VI a.C.

As duas sociedades eram governadas por burocratas ricos e poderosos.

O excedente agrícola obtido com a irrigação propiciou a ascensão de uma classe rica de onde saiam os governantes e sacerdotes, e a criação de empregos em atividades diversificadas como a manufatura e o comércio.

A utilização das margens dos rios e de suas bacias para atividades de plantio foi a centelha para a revolução agrícola que determinou novas formas de organização política e social.

A escassez de chuvas e a necessidade de uso da água dos rios requeriam o desvio de seus cursos, a construção de canais para a irrigação e a construção de represas, o que implicava em obras de engenharia, onde o conhecimento geométrico é necessário.

A necessidade de preservação de registro das estações climáticas, dos períodos de inundações, dos cálculos de engenharia, demarcação de limites para as área de plantio, cálculo de impostos, colheitas e seu possível armazenamento, impunham a necessidade de uso da escrita. Com a escrita foi possível o registro dos acontecimentos não somente agrários mas da vida social, política e histórica que pulsava nestas civilizações.

Dentro deste panorama podemos afirmar que a matemática em sua fase inicial (segundo EVES, 1995, 3.000 a.C. - 260 d.C.) teve um objetivo iminentemente ligado à mensuração prática, onde a álgebra envolveu a aritmética e a geometria.[12]

A geometria egípcia necessitava dos mecanismos para a *"adjudicação de lotes quadrados de igual tamanho para todos"* (BERGAMINI ,1969, p:70), pelos quais todos pagavam aluguel. Os "estiradores de corda", como eram chamados os funcionários encarregados da demarcação das terras agriculturáveis, faziam uso das regras práticas, o que muito mais tarde viria a ser conhecido como teorema de Pitágoras. Usavam a regra "3-4-5", que permitia traçar ângulos retos com o auxílio de cordas com lados que mediam

---

[12] EVES, 1995, p:57, cita uma tese alternativa onde as origens da matemática estão ligadas aos rituais religiosos, sendo as necessidades agrícolas posteriores.

unesp

respectivamente 3, 4 e 5 unidades de medida. Sugere-se que para a construção de suas edificações necessitassem do valor de π (pi), que é a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, mas não existe nenhuma prova a esse respeito.

Na Babilônia, a geometria que segundo Eves (1995) já conhecia regras práticas para o área de diversas figuras tais como: retângulo, triângulo, triângulo isósceles; assim como o de volumes de paralelepípedo reto-ângulo e de prisma reto de base trapezoidal, está intimamente ligada à mensuração prática. É atribuído aos babilônios a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais, mas o valor encontrado para π (pi) era inferior ao encontrado pelos egípcios.

As construções monumentais dos templos, pirâmides e estátuas estavam alicerçadas sob o que se conhece hoje por princípios de mecânica, e ao que tudo indica não havia um conhecimento científico que norteasse os construtores. Os egípcios se baseavam numa sólida experiência prática em instintos para a engenharia estrutural. Este fato, a curto prazo, trouxe grandes resultados, mas, no decorrer dos tempos não encorajou a criação e especulação de idéias novas. Prova desta afirmação é a construção do templo de Carnac em 1350 a.C. e da pirâmide de Quéops cerca de treze séculos antes, ambos construídos nos mesmos padrões.

As construções magníficas dos zigurates atestam os conhecimentos arquitetônicos da Mesopotâmia. Os zigurates eram uma grande estrutura em forma de torre, composta por sucessivos terraços erguidos sobre uma plataforma e encimado por um santuário, que se atingia por uma meio de largas e altas escadarias.

As construções dos zigurates requeriam familiaridade com conhecimentos de coluna, arco, cúpula e abóbada. Para a construção dos muros ao seu redor requisitavam o conhecimento do que se chama hoje tecnicamente de "ênfase" ou bojo, que veio a ser conhecido quinze séculos mais tarde pelos arquitetos e construtores do Partenon de Atenas.

A riqueza de detalhes sobre a Babilônia e o Egito deve-se ao fato de seus registros terem sido confeccionados em materiais adequados ao clima e às condições destas suas regiões. O papiro confeccionado do cerne da planta ciperácea (*Cyperus papyrus)* era abundante nos pântanos ao redor do delta, material adequado ao clima seco do Egito.

Na Mesopotâmia, muito embora houvesse a abundância do junco, esta não era uma fibra que atendeu às necessidades para a

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

confecção de papiro. O inexaurível suprimento de barro e o fabrico de barras de argila, moldadas em formas de plaquetas, cilindros ou prismas, com escritos feitos por uma ponta afiada de junco, permitiu guardar ao mundo os segredos deste povo. Hoje podemos estudar com riqueza de detalhes estas culturas, graças aos documentos encontrados em papiros e nas plaquetas de barro cuneiformes que sobreviveram.

O conhecimento sobre a matemática egípcia tem como fonte principal o papiro de Rhind (ou Ahmes). Ahmes por ser seu escriba, e Rhind por ter sido comprado pelo arqueólogo Henri Rhind em 1858, num antiquário às margens do rio Nilo. Atualmente encontra-se no British Museum em Londres.

No papiro de Rhind encontram-se cento e dez problemas do cotidiano da vida dos egípcios, mas, dentre eles, vinte e seis são problemas geométricos, referentes à mensuração e cálculo das áreas de terra e volumes de grãos. Outros documentos como este estão espalhados em museus da Europa, mas Rhind é uma fonte primária.

Para estudar a cultura Suméria, Alcádia e Babilônia, há a coleção de vinte e cinco mil plaquetas em Nínive e as imensas coleções em Tell e el-Armana e Nipur, que permite a reconstituição de uma época muito remota.

I.1 A GEOMETRIA GREGA

Os últimos anos do segundo milênio a.C. foram marcados por mudanças decisivas na economia e política na bacia do Mediterrâneo, resultando, como conseqüência, a diminuição do poder exercido pelo Egito e a Babilônia, abrindo assim precedentes a outros povos que, mediante as invasões e guerras pela cobiça da riqueza do Crescente fértil, se puseram a invadir e saquear, na tentativa de conquistar esta parte do Mediterrâneo.

Pouco se sabe sobre este período, mas a substituição do bronze pelo ferro alterou a arte da guerra e, ao baixar os custo dos instrumentos de produção, aumentou significativamente o excedente social, o que veio a estimular o comércio e possibilitar uma participação dos cidadãos nas questões econômicas e de interesse público.



A substituição da escrita grosseira do antigo Oriente por um alfabeto fácil de aprender e a utilização de moeda foram outros dos fatores que impulsionaram o comércio.

Os desejos de conquistas que ocasionaram as guerras e mantiveram uma atmosfera de turbulência e desunião, ocasionou, no final deste período de revoluções, o desaparecimento dos povos minóico, micênico e hitita e o surgimento de outros povos dentre os quais podemos destacar os hebreus, assírios, fenícios e os gregos.

Para falarmos dos gregos é necessário retroagir no tempo e voltar aos povos que foram suas raízes. É falar de uma cultura fruto de mistura de povos que viveram centralizados no Egeu, limitados a oeste pela Grécia e a leste pela Turquia, os minuanos e micênicos (3.000 a 2.200 a.C.), contemporâneos dos sumérios e do Antigo Império egípcio. Traços e influências culturais marcantes também são notados dos egípcios e, posteriormente, dos mesopotâmicos.

A civilização minóica tomou este nome devido ao rei Minos, lendário rei de Cnossos, situada na ilha de Creta, montanhosa e fértil. Foi a primeira civilização em solo europeu. Atualmente é lembrada por ruínas e palácios, sendo o mais importante o de Cnossos e Mallia no norte, o de Festo no sul e o de Zakro no leste de Creta, construídos, ao que tudo indica, por volta de 2.000 a.C., e reconstruídos várias vezes devido a sucessivos terremotos e catástrofes.

Em contraste com a prosperidade e o desenvolvimento desta cultura, por volta de 1400 e 1150 a.C., a destruição do palácio de Cnossos pôs um fim a esta cultura, para nunca mais ser reconstruída. Após estes acontecimentos, o centro do poder Egeu transferiu-se para Micénias, na parte continental do Peloponeso, mas que por volta do século XIII a.C., sofreu invasões bárbaras, que vieram do norte e instalaram o colapso da civilização egéia.

Os micênicos, povo bélico que estão no poema épico de Homero "Ilíada" e participaram da guerra de Tróia, onde Agamenon de Micenas é o chefe supremo dos outros príncipes, habitavam a Grécia Continental. Possuíam costumes diferentes quanto às habitações e ao sepultamento de seus mortos. Foram destruídos pelos invasores bárbaros vindos da Ásia, os dórios, povo de aparência ariana que se instalou nas terras conquistadas e assumiu muito da cultura agrícola dos habitantes anteriores. Com a queda dos palácios micênicos, a Grécia ingressou na Idade Obscura que durou 400 anos e da qual só saiu no século 8 a.C.



Os dórios, apesar de terem assimilado bastante da cultura agrícola, trouxeram consigo novas formas de pensamento, como a cultura "protogeométrica", forma de cerâmica e arte, e apresentavam grande sensibilidade, particularmente para as formas e proporções:

"Isso foi, certamente, o princípio do que pensamos ser a arte clássica grega, e é evidência de uma perspectiva que iria ter, em breve, os efeitos mais importantes na ciência e filosofia grega." (RONAN, 1987, p:66)

Ao deixarem o sul da Península Balcânica e se fixarem às margens do Mediterrâneo, os gregos estabeleceram-se e tornaram-se herdeiros de um cabedal matemático de muitos séculos.

As características peculiares da geografia grega (território montanhoso, costas salpicadas de pequenas planícies separadas por montanhas, dificuldades de travessia em qualquer época do ano e principalmente no inverno, rios rasos, solo ressequido, recortados por longas cadeias de montanhas íngremes, terras entremeadas de afloramentos de rochas, terras estéreis) eram contrastantes com o Crescente Fértil do Próximo Oriente e foram determinantes para a sua unidade política natural.

As cidades que se formaram ao longo da costa da Ásia Menor e o continente grego eram iminentemente comerciais. Os antigos senhores feudais e proprietários de terras tinham que batalhar seus sustento com mercadores independentes e politicamente conscientes, sendo durante os séculos VII e VI a.C., o período que estes mercadores ganharam importância e tiveram que lutar com artesões e pequenos comerciantes locais, ocorrendo com isso a ascensão da "pólis".

A "pólis", ou cidade-estado, fruto desta geografia acidentada, foi a chave da história, independente, que exigia de seus moradores lealdade total. Esta nova organização criou um novo tipo de homem, independente, fruto de conquistas duras e constantes. Este período só terá precedentes nas descobertas do século XVI no Ocidente europeu e, com isso, os homens podiam gozar de tempo e lazer para filosofar acerca do mundo, o que estimulou o pensamento e o desenvolvimento do racionalismo e da visão científica do mundo.

A atmosfera que reinava na área comercial foi fecunda, as idéias novas advindas dos mais distantes lugares eram a solicitação ideal para estimular novas ideais, sendo Mileto o porto principal e o mais rico mercado, e onde irá ter, na sua história, uma das mentes mais brilhantes que irá guinar os rumos da ciência , filosofia e matemática.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Foram os gregos os primeiros a se interessarem pela matemática sem a necessidade prático-utilitária, mas como ciência a ser estudada. Pela primeira vez o homem começa a preocupar-se em formular questões sobre os *"porquês"* e não mais somente sobre o *"como"*. Os processos empíricos usados anteriormente não eram mais suficientes para dar respostas às suas indagações.

É surpreendente, mas contrastando com a riqueza de fontes primárias que demonstram como evoluiu a matemática dos antigos egípcios e babilônios, os primórdios da matemática e geometria grega se ressentem da falta de documentos, estando baseada em fragmentos de manuscritos e relatos escritos muitos séculos depois dos originais.

A mais preciosa fonte de informações deste período é o chamado *Sumário eudemiano* de Proclus. Este sumário constitui-se de páginas de abertura de comentários sobre os *Elementos*, Livro I, onde aparece um breve resumo sobre o desenvolvimento da geometria grega, de seus primórdios até Euclides. Muito embora Proclus tenha vivido no século V d.C., mais de um milênio depois do início da matemática grega, teve acesso a textos originais, numerosos trabalhos históricos e críticos que depois se perderam.

Entre os trabalhos perdidos, ao que tudo indica, existia um escrito por Eudemo, discípulo de Aristóteles, que contava a história completa da geometria grega, tendo o trabalho de Proclus recebido este nome (*Sumário Eudemiano de Proclus)* por estar baseado nestes escritos e ao que tudo indica o início das experiências com os métodos demonstrativos. Nasce assim a matemática moderna, numa atmosfera de racionalismo, que, segundo o *Sumário eudemiano* de Proclus, tem início com Tales de Mileto, durante a primeira metade do século VI a.C., considerado um dos "sete sábios" da Antigüidade.

Tales de Mileto, segundo parece, nasceu por volta de 624 a.C., e viveu como um ativo e bem sucedido negociante, trabalhou no litoral da Ásia Menor de 600 a 550 a.C., e depois de aposentado pôde dedicar-se ao estudo da matemática como passatempo.

Tales foi um ativo participante político e tentou persuadir as cidades jônicas a se unirem contra o poderio persa, o que lhe era apavorante.

Viajou pelo Egito onde viveu por algum tempo. Atribui-se a ele o cálculo da altura de uma pirâmide por meio de sombra, fato que não pode ser comprovado, mas que despertou grande respeito e admiração.

O cálculo da altura de uma pirâmide pela sombra tem duas versões. O relato mais antigo, efetuado por Hierônimos, discípulo de



Aristóteles, aponta para o fato de Tales anotar o comprimento da sombra no instante em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava.

Plutarco dá uma versão posterior: Tales teria usado a relação de semelhança de triângulos, para tanto utilizando da projeção da sombra da pirâmide formando um dos triângulos, o outro triângulo seria composto pela projeção da sombra de uma vara fincada verticalmente. Tais projeções (da pirâmide e da vara) proporcionariam dois triângulos semelhantes.

A Tales também são atribuídas as primeiras descobertas matemáticas que indicam grande simplicidade, mas onde ele tentou conscientemente tratar dos fundamentos da geometria em termos sólidos e inabaláveis. Sendo eles:

1. *"Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.*
2. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*
3. *Ângulos opostos pelo vértice são iguais.*
4. *Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais.*
5. *Um ângulo inscrito num semi-círculo é reto."* (EVES, 1996, p:95)

A simplicidade das idéias de Tales não podem obscurecer a importância de suas conseqüências e seu raciocínio não esteve guiado pela experimentação ou pela intuição, mas pelo raciocínio lógico.

É atribuído a ele o estabelecimento das bases inabaláveis da geometria ao realizar as cinco proposições clássicas.

"Pela primeira vez um estudioso da geometria se comprometeu com uma forma de raciocínio dedutivo, por mais imparcial e incompleto que fosse. Além do mais, o fato de o primeiro pensamento dedutivo ocorrer no campo da geometria (e não da álgebra, por exemplo) inaugurou uma tradição em matemática que se manteve até os tempos mais recentes." (EVES, 1994, p:8)

A ambição de Tales teve continuidade e materialização com Pitágoras, nascido em Samos, por volta de 560 a.C., na ilha do mar Egeu, a 50 km de Mileto.

Pitágoras, segundo geômetra citado no *Sumário eudemiano* de Proclus, teve características marcantes, homem insinuante, de personalidade magnética, e ao que tudo indica foi discípulo de Tales. Aconselhado por ele, passou anos conhecendo o Egito e a Babilônia. No seu retorno à Grécia encontrou a jônia sob domínio persa, e decidiu

unesp

imigrar para Crotona, situado no sul da Itália, um famoso porto marítimo, onde fundou a escola pitagórica.

A história de Pitágoras é envolta em um véu misterioso, mas os pitagóricos deram grande contribuição aos feitos matemáticos. A eles atribui-se a confiança irrefutável à matemática e aos números. Seus rituais místicos e secretos inviabilizaram que as conferências fossem conhecidas, pois eram separadas em duas categorias, as que se realizavam com acesso dos membros da irmandade e que não era do domínio público, e as que eram apresentadas aos não iniciados, que muito provavelmente são os feitos que chegaram até nós.

Os pitagóricos acreditavam na transmigração da alma, eram vegetarianos, possuíam um código rígido de conduta e confiavam no estudo da matemática e da filosofia como base moral.

A névoa de mistério que envolvia a irmandade não obscureceu os seus feitos e, durante muitos anos, as descobertas da escola pitagórica foram atribuídas ao seu mentor. Por isso não se pode precisar exatamente quais foram as descobertas a serem atribuídas ao próprio Pitágoras.

Os pitagóricos tinham o pentagrama como sinal de reconhecimento entre eles, tendo uma significação misteriosa. No prolongamento de seus lados a formação da estrela de cinco pontas, sendo que seus lados e as linhas, ao se cortarem, interceptam-se formando o "segmento áureo", aceito na antigüidade clássica como agradável à vista, sendo usado freqüentemente na arquitetura.

Do conhecimento atribuído aos pitagóricos[13], sem dúvida, podemos afirmar que o teorema de Pitágoras é o mais importante, não somente por suas aplicações, mas por suas implicações. O fato de que nem toda quantidade pode ser expressa por números inteiros gerou grande infelicidade nos filósofos primitivos, causando uma crise filosófica, pois eles concebiam os números como a mais perfeita criação. Esta fatalidade lhes proporcionou outra descoberta, os números irracionais.

A guerra do Peloponeso entre Atenas e Esparta deixou como conseqüência destruição e ruína, o enfraquecimento e a desunião dos estados gregos, o que possibilitou a conquista por Filipe da Macedônia,

---

[13] Muito provavelmente, os pitagóricos foram capazes de construir três dos cinco sólidos regulares, (sólidos regulares são aqueles em que todos os lados são iguais, assim como os ângulos formados por eles). Eram conhecedores do cubo, da pirâmide e do dodecaedro (sólido de doze lados). Podemos afirmar que a simetria destes sólidos, sem dúvida alguma, era um afã às suas almas místicas.

que estendeu seu poder para o sul. Mas este foi assassinado dois anos depois, subindo ao trono o seu filho Alexandre, discípulo de Aristóteles, que possuía uma sede de conquistas e anexou, aos seus domínios, extensas áreas civilizadas da época.

Por onde passava, Alexandre, o Grande, deixava um rastro de novas cidades em lugares rigorosamente escolhidos. Foi o próprio Alexandre quem escolheu o local para a construção de Alexandria, num entroncamento de importantes rotas comerciais, traçou um plano geral e comandou o processo de colonização da cidade. Alexandria, desde o início, dava mostras de seu destino promissor, enriqueceu e tornou-se o centro mais suntuoso e cosmopolita da época.

A morte precoce de Alexandre, em 323 a.C., fez com que seu império fosse dividido entre seus líderes militares. Suas conquistas disseminaram a língua e a cultura gregas e a disputa de seus generais fragmentou seu reino em três partes: a Macedônia de Antígono, a Ásia de Seleuco I e o Egito de Ptolomeu I. As disputas entre eles levou a guerras que os enfraqueceram até a conquista por Roma.

I.2 A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Ptolomeu começou a governar o Egito em 336 a.C.. Escolheu Alexandria como sua capital, atraiu os maiores sábios da época, e construiu a famosa Universidade de Alexandria, a primeira instituição do gênero. O fulcro da universidade era sua biblioteca, que durante muitos anos foi o depositário de registros culturais de todo o mundo. Seu funcionamento inicial data de 300 a.C., quando abriu suas portas para ser o templo intelectual dos gregos por quase um milênio.

Os anos iniciais da matemática grega podem ser distribuídos em três linhas de desenvolvimento:

1. organização do desenvolvimento do material que resultou em um todo organizado por Euclides.
2. desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos e infinitos processos de somatória que só puderam ser esclarecidos com a invenção do cálculo nos tempos modernos.
3. desenvolvimento da geometria superior ou geometria das curvas.



O terceiro geômetra citado por Proclus foi Euclides, que, sem dúvida alguma, obscureceu com a sua obra *Elementos* os trezentos primeiros anos da matemática grega.

A grandeza de *Elementos* , escrito por volta de 300 a.C., foi um divisor de águas na história da geometria. Sem dúvida alguma, apesar das realizações dos gregos nos primeiros trezentos anos da matemática grega, podemos afirmar que coube a Euclides organizar e sintetizar os conhecimentos de sua época.

Euclides, de quem verdadeiramente nada é conhecido, ousou ao partir de um número reduzido de axiomas, postulados e definições para construir, por via dedutiva, um conjunto de proposições geométricas.

Elementos constituiu-se, durante muitos séculos, como um paradigma não só para a matemática mas para todas as ciências, sendo de fato a primeira axiomatização na história da matemática.

Bergamini afirma que *Elementos*, com seus de treze livros ou capítulos, descreve e prova boa parte do que a raça humana conhece de pontos, linhas, círculos e figuras sólidas elementares.

Todo este conhecimento foi deduzido pela mais aguda lógica. Foi a partir de dez premissas simples, cinco postulados e cinco axiomas, que Euclides produziu sua obra memorável, que é uma cadeia dedutiva única de quatrocentos e sessenta e cinco proposições, compreendendo de forma clara e harmoniosa a geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega.

Segundo BARKER (1969), a diferença fundamental apresentada por Euclides entre axioma e postulado é que os postulados tratam especificamente de questões geométricas, e os axiomas não tratam de nada que se possa dizer específico de geometria, assumindo um caráter mais geral. Assim os axiomas dizem respeito a comparações de grandeza de qualquer natureza, sendo úteis não só à geometria mas a toda noção útil de qualquer matéria.

Euclides apresentou seus postulados da seguinte forma[14] :

1. *"Uma linha reta pode ser traçada de um para outro ponto qualquer.*
2. *Qualquer segmento finito de reta pode ser prolongado indefinidamente para se construir uma reta.*
3. *Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual a dada distância.*
4. *Todos os ângulos retos são iguais entre si.*

---

[14] Transcrito da obra "**Filosofia da matemática**", Stephen Barker, páginas 30 (postulados) e 33 (axiomas).

5. *Se uma reta cortar duas outra retas de modo que a soma dos dois ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos então as duas outras não se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos."*

Ao lermos os postulados percebemos que seu criador tem idéias bem diferentes das concepções indutivas e empíricas dos egípcios. Os três primeiros estão relacionados a "construções" permitidas na geometria. O quarto postulado é a princípio plenamente dispensável, pois parece evidente demais, mas Euclides necessitou apresentá-lo pois ele será utilizado em demonstrações futuras, por isso apresentou-o enquanto postulado.

O quinto postulado será motivo de estudos durante muitos séculos. Diferente dos quatro anteriores, sua redação, além de muito mais complexa, não possui o caráter de auto-evidência, que caracteriza os demais, é bem menos clara.

A insatisfação reinante com este quinto postulado levou, ao correr dos séculos, por diversas vezes, a sua substituição e tentativas de demonstração, mas todas resultaram inglórias, resistindo até o século XIX da nossa era.

Segundo STRUIK, o quinto postulado é equivalente ao chamado "axioma das paralelas". Essas tentativas de reduzir este axioma a um teorema levaram a descobertas das geometrias não euclidianas.

A produção escrita de Euclides não está somente reduzida aos *Elementos*. Ele é autor de pelo menos dez trabalhos, mas somente cinco chegaram até nós.

Sabemos, hoje, que nenhuma outra obra, exceto a Bíblia, foi tão lida, estudada, traduzida e publicada quanto *Elementos*, mas sua grandeza não foi condição suficiente para que chegasse até nossos dias uma cópia que datasse verdadeiramente da época de seu autor.

As edições modernas estão baseadas em duas obras: em uma revisão realizada por Teon de Alexandria, comentador grego de Euclides, que viveu 700 anos após os tempos de Euclides, e outra que data do século X, encontrada na biblioteca do Vaticano no começo do século XIX.

A primeira tradução latina de *Elementos* foi feita do árabe, em 1120, pelo erudito inglês Adelardo de Bath; duas outras versões foram feitas também do árabe, de Gerardo de Cremona (1114-1187) e Johannes Campanus, cento e cinqüenta anos após Cremona. A primeira

impressão data de 1482 em Veneza, com a tradução de Campanus. Foi a primeira obra matemática importante a ser impressa.

Se Euclides é considerado o "Pai da Geometria", Arquimedes é considerado o "Pai da Física Matemática", o maior matemático do período helenístico e de toda antigüidade; foi geômetra, matemático e engenheiro.

Arquimedes (287-212 a.C.) nasceu em Siracusa e pertenceu à escola alexandrina. É um dos poucos cientistas da antigüidade e é mais do que um nome. Seus trabalhos são obras-primas de exposição matemática, têm grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações e estão redigidos em uma linguagem objetiva e acabada. Cerca de dez trabalhos chegaram aos nossos dias .

Muitos são seus feitos, mas é atribuída a Arquimedes a frase:

"Dai-me um ponto de apoio e levantarei o mundo."

Tal afirmação era um sinal de júbilo. Ao descobrir as leis matemáticas de alavancas, descobriu também as leis das polias e dos centros de gravidade, princípios utilizados até hoje na construção de pontes e edifícios.

Para a matemática podemos apresentar as mais importantes contribuições de Arquimedes como os teoremas das áreas de figuras planas e sobre o volume dos corpos sólidos, as contribuições para o que é chamado hoje de "cálculo integral", as leis dos corpos flutuantes e muitas outras utilizações. O cálculo da relação entre a circunferência de um círculo e o seu diâmetro [π (pi)], com uma precisão sem precedente, também é um feito de Arquimedes.

Foi graças a Arquimedes que Siracusa resistiu bravamente por três anos ao assédio romano com a construção de espelhos que refletiam a luz do sol e incendiavam as velas dos navios à distância. Esta e outras engenhocas, infelizmente, não foram suficientes para poupar a Grécia da invasão romana e, apesar das recomendações do general romano Marcelo, para que sua vida fosse poupada, Arquimedes, absorvido na resolução de um problema, não percebeu que a cidade havia sido tomada. Foi decapitado por um soldado romano que provavelmente não reconheceu aquele septuagenário que traçava formas geométricas na areia de uma praça. Para Arquimedes aos 75 anos pouca diferença faria viver mais alguns anos, feito que sua genialidade já havia sido assegurada para a humanidade. Para os romanos, talvez pudesse deflagrar a genialidade criadora em algum deles.



A morte de Arquimedes levou aos romanos os seus engenhos de guerra, mas as suas descobertas matemáticas ficaram intocadas.

Apolônio foi outro membro da escola de Alexandria, nascido em Perga ao sul do que é a Turquia atualmente, entre 262 a 221 a.C. Assim como Euclides, é lembrado pelo seu livro *Cônicas*, um trabalho sobre uma série graciosa de curvas e estudos sobre a interseção do cone com uma superfície plana. Foi ele quem introduziu os nomes de elipse, parábola, e hipérbole para as cônicas.

As secções cônicas de Apolônio são resultantes de cortes efetuados em cones por um plano de vários modos. Assim, um corte paralelo à base do cone resulta em um círculo e o corte oblíquo resulta em uma elipse. Ao cortar uma fatia paralela a uma reta do cone forma uma parábola, que muito tempo depois seria usada nos lançamentos dos projéteis. Já o corte realizado no vértice resulta de duas curvas que se interceptam. A imagem refletida em um espelho consiste em uma hipérbole ou curva dupla.

Euclides, Arquimedes e Apolônio foram o três grandes gênios da matemática do século III a.C.. Após eles outros matemáticos de menor grandeza tentaram manter a idade de ouro da matemática, mas não conseguiram. Dentre eles podemos citar Papus, nascido em Alexandria, cerca de 500 anos após Apolônio, que escreveu comentários sobre *Elementos* e *Os Dados* de Euclides, mas seu grande trabalho foi a obra intitulada *Coleção*, composta de oito livros, que forneceu registros históricos da matemática grega e completa as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu.

A *Coleção* é o último tratado da matemática antiga de grande importância, e parece ter sido um presságio da decadência matemática do ocidente. Mil anos deverão se passar para que o mundo Ocidental volte a rever os feitos matemáticos dos gregos, pois, o mundo Árabe será o grande depositário destes conhecimentos, os incorporará em parte à sua cultura e se incumbirá de divulgá-la ao mundo, quando os feitos gregos ressurgirem no Renascimento.

A escola de Alexandria foi gradativamente acompanhando a desagregação da sociedade antiga e o cristianismo impôs restrições aos conhecimentos pagãos da antigüidade. Um dos últimos representantes desta escola foi Hypatia, bela e sábia matemática, que escreveu comentários sobre os matemáticos clássicos, lecionou na Universidade de Alexandria por volta do ano 400, atraia multidões de jovens para suas aulas, mas infelizmente morreu linchada por um grupo de cristãos

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

possessos seguidores de São Cirilo em 415 d.C., teve a carne esfolada dos ossos e as vísceras jogada as chamas. BERGAMINI afirma:

"A agonizante matemática grega exalava o último suspiro. Passar-se-iam 1.000 anos antes que seu espírito luzisse novamente." (BERGAMINI, 1964, p:50)

A Academia em Atenas teve o mesmo destino, foi considerada pagã pelo imperador Justiniano em 529 d.C., mas, por esta época, Constantinopla e Jundisapur, já se constituíam como escolas, e tornaram-se centros de perpetuação da memória da ciência e filosofia grega.

A divisão do império Macedônio e as lutas internas resultaram no enfraquecimento político que possibilitou a conquista romana nos séculos I e II a.C.. O domínio do Oriente pelo império romano reduz a Grécia a uma simples colônia governada por administradores romanos. Os centros gregos, mediante a ofensiva romana, vão se curvando um após o outro: Siracusa em 212 a.C., Cártago em 146 a.C., Mesopotâmia em 64 a.C. e o Egito em 30 a. C..

Os romanos, ao invadirem a Grécia, fizeram de seu povo seus escravos, mas a cultura e os valores gregos foram adotados em todos os sentidos.

O Império Romano estava alicerçado em uma estrutura econômica baseada na agricultura e na ampla utilização do trabalho escravo. O solo bastante fértil permitia uma intensa atividade agrícola, com características que o dividiam em duas partes: uma Ocidental, onde a agricultura e o mercado de escravos se equacionavam, e a Oriental onde a agricultura não utilizava o trabalho escravo, mas estes, eram empregados nos trabalhos domésticos e públicos.

A expansão da economia baseada na agricultura e no amplo emprego das relações escravocratas foi inversamente proporcional ao trabalho científico.

A utilização de escravos implicava na utilização de instrumentos muito rudimentares, que não estimulavam a especulação científica e era uma forma barata de produzir. Nestas condições, o trabalho científico e a criatividade não se faziam necessários e não tinham patrocinadores para as experiências científicas. Em contra partida o respeito dos romanos pelo mundo grego era impressionante.

O século III correspondeu a um período de anarquia militar. Os conflitos armados se sucediam, o que comprometia seriamente a

produção agrícola e o comércio de escravos. O caos militar, econômico e administrativo reinante facilitou a penetração dos povos bárbaros hostis do norte da Europa, que aproveitaram sua decadência e aceleram a sua ruína.

A decadência do Império Romano no Ocidente, em 476 d.C., dá início a um novo período que se estendeu até 1453 - a Idade Média, com características de um novo sistema de vida, na economia, na sociedade e na cultura: o feudalismo.

A combinação de múltiplos fatores históricos relacionados com as invasões bárbaras, culminou com o feudalismo e podemos destacar: a substituição do escravismo pela servidão, pois as populações necessitavam de proteção junto aos donos de terras, a união do que restou da civilização romana com a cultura bárbara e o desmantelamento da atividades comercial e da vida urbana.

A Idade Média apresentou duas fases distintas: a Alta Idade Média compreendida entre os séculos V e X, período de consolidação do feudalismo e a Baixa Idade Média que vai do século XI ao século XV e que corresponde à decadência do sistema feudal.

A Alta Idade Média viveu o predomínio da economia agrária que objetivava a subsistência, cabendo aos servos realizar tais atividades em troca de proteção. Os senhores feudais eram a autoridade local, devendo os servos dedicarem-lhes obediência e pagamento de tributos.

A igreja cristã, com sua riqueza incalculável, era uma fonte de poder, onde o domínio eclesiástico cunhou uma visão teocêntrica, que impregnou toda a produção cultural da época. Durante este período a Europa Ocidental viveu um fase de absoluta falta de civilização e o saber grego quase desapareceu. O ensino deixou de existir. A atitude cristã é de descaso com as ciências, a matemática passa por uma fase de latência e o estudo do Evangelho de Jesus Cristo é o centro das atenções

Para a Geometria nada se produziu de importante, muito embora os hindus estivessem desenvolvendo o sistema de numeração que vigora até nossos dias. Os povos do Oriente, hindus e árabes, foram os grandes depositários da matemática.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

I.3 O Mundo Árabe e a geometria

A união do mundo árabe em torno de Maomé, constitui-se em um episódio marcante para a história. Antes de Maomé, os árabes, povo de origem semita, achavam-se dispersos e desunidos no deserto escaldante da Península Arábica.

A dispersão dos povos nômades e iletrados começou a se alterar com o fervor religioso desencadeado por Maomé, filho de mercadores, que nascido por volta de 570 d.C.. Ele assumiu para si o papel de profeta de Alá, deus único e verdadeiro e, como fundador da religião islâmica, levou a consolidação de uma nação poderosa com um ideal religioso comum.

Maomé, ao deixar Meca em 622 em decorrência de uma conspiração para matá-lo, dirigindo-se à Medina, provocou o que foi chamado de Hégira, fato que será de cabal importância para a história do mundo árabe e também para a matemática.

Segundo Boyer, Maomé, em 632, planejava atacar o império Bizantino, mas morreu em Medina. Seus seguidores não se abateram com tamanha perda e levaram a fim esse ideal. Em poucos anos, os islâmicos conquistaram Damasco e Jerusalém e grande parte do vale da Mesopotâmia.

O ataque ao Império Bizantino em 641 atingiu diretamente Alexandria, o centro cultural da antigüidade e parte fundamental da matemática. A queima do acervo foi devastador, mas, alguns autores como Struik e Boyer (p:165) divergem desta afirmação, atribuindo estes prejuízos a períodos anteriores, quando a biblioteca de Alexandria já teria sido alvo de aniquilações de fanáticos militares e religiosos, pouco sobrando do acervo.

Por mais de um século (650-750), viveu-se um período conturbado de luta entre os próprios árabes e com seus inimigos, o que levou a uma grande confusão política e cultural, sendo este, um período destituído de realizações científicas.

Após o período de transição e lutas (em 750), a paz voltou a reinar e Bagdá passou a ser centro do conhecimento.

Passado um século, a força árabe aumentou e, com ela, a expansão dos seus territórios. A cultura árabe prosperou. O comércio, através do Mediterrâneo, com a África e a Índia trouxe muita riqueza, mas, por volta de 755, as disputas internas levaram à divisão leste - oeste do império.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Como nas invasões romanas, o mundo árabe se curvou à cultura bizantina. A segunda metade do século VIII trouxe um alento ao conhecimento matemático com estudiosos convidados da Síria e Mesopotâmia, inclusive judeus e cristãos nestorianos. Por estes tempos, surgem três califas que foram os arquitetos do renascimento árabe al-Mansur, al-Rachid e al-Mamum.

Al-Mamum (809-833), tendo sonhado com Aristóteles, ordenou que todas as obras gregas que fossem encontradas deveriam ser traduzidas para o árabe. Fundou em Bagdá a Bayat al-Hikmah, ou Casa da Sabedoria e foi por este tempo que obras como *Elementos*, de Euclides e *Almajesto* de Ptolomeu foram traduzidas dentre muitas outras obras que foram trazidas de Bizâncio.

Por estes feitos, o século IX foi glorioso para a matemática árabe, e para a matemática como um todo de conhecimento histórico e científico.

Podemos citar os trabalhos feitos por Abû'l Wefa com compassos enferrujados ou com compassos de abertura fixa; Omar Khayam, com a solução das equações cúbicas e Nasîr ed-dîn sobre o postulado das paralelas de Euclides. As considerações de Nasîr ed-dîn, intituladas *Discussão da dificuldades de Euclides*, foram provavelmente a primeira consideração do que será uma das três alternativas que Saccheri, séculos depois, chamaria de ângulo agudo, de ângulo obtuso e de ângulo reto.

A morte de Omar Kayam (1050-1122), um dos maiores poetas persa, irá coincidir com o declínio da ciência árabe.

Para a geometria, os árabes foram de importância fundamental. As traduções realizadas por eles dos clássicos gregos e sua preservação, fez com que nós nos curvássemos diante de tal feito, caso contrário, certamente muito teria se perdido mediante a fúria dos cristãos.

"O modo como os árabes se apropriaram do saber grego e hindu teve importância considerável para a preservação de grande parte da cultura do mundo. Numerosos trabalhos gregos e hindus nas áreas da medicina, astronomia e matemática foram diligentemente traduzidos para a língua árabe e, assim, foram salvos até que eruditos europeus posteriormente tivessem condições de retraduzi-los para o latim e outra línguas. Não fora o trabalho dos eruditos árabes uma grande parte da ciência árabe e hindu se teria perdido irremediavelmente ao longo da Idade Média." (EVES, 1992, p:13)

A Baixa Idade Média trouxe para o Ocidente grandes alterações. O processo de urbanização, o renascimento comercial a partir do século XI, transformou o saber em algo essencial para a vida, passando a educação para uma questão de grande importância.

O início do século XI recria uma situação muito parecida com a vivida no mundo Árabe no século IX: não se pode conhecer a ciência de um povo sem se dominar a sua língua. Os muçulmanos romperam a barreira da língua que os separava dos gregos no século IX e os europeus latinos vieram a realizar o mesmo em relação aos árabes no século XII. Assim, todo europeu que se aventurasse a ser um matemático ou astrônomo tinha como condição inicial o domínio da língua árabe.

O final do século XII marcou a volta dos clássicos gregos da ciência e da matemática. A retomada de Toledo (1085) pelos cristãos possibilitou a ida de intelectuais àquela cidade em busca do saber muçulmano.

O século XII ficou conhecido como "o século das traduções". Repetindo o ocorrido no século anterior, muitos intelectuais buscavam o saber muçulmano. É atribuído a Adelardo de Bath a tradução de *Elementos* de Euclides, em 1120, mas o mais atuante dos tradutores foi Gerardo de Cremona (1114-1187), que traduziu para o latim mais de noventa trabalhos árabes, entre eles o *Almagesto* de Ptolomeu. Pela quantidade de trabalhos traduzidos podemos perceber que Cremona contou com a colaboração de membros da Escola de Tradutores, fundada logo após a queda de Toledo.

A posição privilegiada da Sicília, na rota das relações comerciais entre o Ocidente e Oriente, possibilitou aos mercadores italianos visitarem o Oriente e travarem conhecimento com a sua civilização. O mesmo aconteceu nos séculos XII e XIII com Gênova, Pisa, Veneza, Milão e Florença, as primeiras cidades a estabelecerem relações mercantis com o mundo árabe.

O renascimento comercial, ocorrido a partir do século XI, fez do saber, do conhecimento, um instrumento fundamental, e as escolas monásticas já não atendiam as necessidades da época. Mas foi somente no século XIII que nasceram as *universitates*, as quais os alunos e professores associaram-se em busca do conhecimento e da pesquisa. Data deste século a fundação das universidades de Paris, Oxford, Cambridge, Pádua e Nápoles.

O século XIV foi marcado pela intensa crise econômica e social e muitos fatores são apontados pelos historiadores como os

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

responsáveis por este refluxo do desenvolvimento econômico: a Peste Negra, a Guerra dos Cem Anos e as revoltas populares.

A Peste Negra, originária da China e do Turquestão, foi trazida pelos navios mercantes genoveses, encontrando, como ambiente propício para sua propagação, a população em péssimas condições de vida, a falta de higiene e saúde, ocasionadas pelo aglomeramento desordenado das casas em espaços estreitos, em decorrência do inchaço dos burgos. Assim, as cidades tornaram-se focos da epidemia e, no ímpeto da fuga para outra regiões, a peste ia se alastrando, atingindo quase que a totalidade da Europa, deixando um rastro sinistro de morte e destruição por onde passava.

A Guerra das Rosas e dos Cem Anos foram altamente destrutivas e explicam a mudança nos rumos do conhecimento matemático para a Itália e Alemanha, girando em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria.

A mortalidade de um terço da população com a peste negra e as guerras refletiu no declínio demográfico e a falta de mão-de-obra, devido à morte maciça dos camponeses, gerou a desorganização da produção e disseminou a fome e o empobrecimento dos senhores feudais, que impunham aos que sobreviveram uma carga de trabalho e impostos maiores. Nestas condições, as revoltas populares estremeceram a Inglaterra , França e Itália.

As condições vigentes após a peste e as guerras depauperaram a economia feudal. Com o empobrecimento, os senhores feudais viram-se obrigados a recorrer a empréstimos e a venderem suas propriedades, o que agravou a situação da nobreza.

Por outro lado, a burguesia abastada necessitava de um poder centralizado e forte, pois, só desta maneira, poderia ter a unificação do mercado interno e seu desenvolvimento. Mas, para isso, necessitavam do poder do rei na luta contra os senhores feudais. O auxílio da burguesia traduzia-se em empréstimos monetários e em contrapartida o monarca padronizou os sistemas de pesos e medidas e a cunhagem de moeda, que facilitou o desenvolvimento da economia.

Nestas condições, perante uma nova ordem social, ocorre a ruptura com as antigas estruturas sociais, promove-se a liberação do indivíduo.

O Renascimento significou uma fase de alargamento dos limites humanos, a fé na racionalidade. Este espírito de pesquisa de busca investigatória foi a mola propulsora dos progressos técnicos e conceituais, além dos questionamentos religiosos que abriram caminhos



para as reformas religiosas, mas, a rápida difusão das idéias revolucionárias deveu-se a vários outros fatores.

A tomada de Constantinopla em 1453 ante os turcos, foi o culminar da queda do Império Bizantino. Verificou-se um afluxo de refugiados para a Itália e, com eles, jóias raras da civilização grega entraram no Ocidente e o que só se conhecia de traduções árabes pôde ser acessível em fontes originais. O século XV viveu o início do Renascimento Europeu na arte e no saber.

A invenção da imprensa no século XV, que foi um fator de barateamento e produção em maior quantidade dos livros, possibilitou alcançar um maior número de leitores e a divulgação dos ideais renascentistas.

A expansão marítima direcionou os avanços técnicos e científicos para o desenvolvimento de navegação e elaboração de mapas.

O patrocínio dos artistas pelos mecenas contribuiu para o avanço das artes, muito embora alguns buscassem a promoção pessoal e outros a propagação e difusão dos novos hábitos, valores e comportamentos.

O mecenato foi uma forma da nova camada burguesa impor-se socialmente, e, era combatendo a arte medieval onde eles eram retratados como uma porção inferior e sem importância da sociedade da época, que a produção artística tornou-se um dos pontos nevrálgicos deste confronto. Mas, nesta disputa, quem lucrou foi a arte que se tornou objeto de estudo e pesquisa aprofundada, ligada à filosofia, à religião, à técnica e à ciência.

A arte renascentista vai acompanhar os progressos da física, da matemática, da anatomia, da engenharia, da filosofia e da geometria.

"Em meio ao fascínio matemático da Renascença, os pintores tiveram maior consciência do papel vital da Geometria na obtenção da perspectiva óptica que dá à pintura seu efeito tridimensional. Até então, a pintura tinha sido primariamente 'conceitual', com o objeto mais importante recebendo tratamento destacado, mesmo que isso distorcesse a representação. Durante a renascença, foi dado amplo uso não somente à perspectiva em si própria como a própria palavra, que vem da expressão latina 'ver através de' - refletindo o conceito que a pintura com foco óptico era realmente uma 'janela para o espaço' governada geometricamente." (BERGAMINI, 1969, p:99)





De acordo com a tradição, o primeiro **ícone** representava a Virgem e o Menino, e teria sido pintado por São Lucas Evangelista. Este famoso exemplo, a *Virgem de Vladimir*, foi provavelmente trazido de Constantinopla para a Rússia por volta de 1130. Tornou-se o ícone russo mais venerado (Galeria Tretyakov, Moscou).

Figura 1 - Ícone religioso do século XII Fonte: NOVA Enciclopédia, p:471.

I.4 A GEOMETRIA PROJETIVA

Foi na busca de produzir quadros mais realistas que artistas e arquitetos renascentistas passaram a interessar-se pelo estudo das leis que regem a construção de projeções sobre uma tela. Assim ciência e arte caminharam juntas.

"A perspectiva linear parece-nos hoje um instrumento matemático de fácil manejo. E a idéia de que as linhas paralelas possam se encontrar 'no infinito' praticamente dispensa explicações... Mas não foi sempre assim, muitas etapas foram preciso para que, pouco a pouco, uma geometrização coerente da representação espacial fosse assegurada, com base nos princípios enunciados claramente. Foi em Florença no século XIV (o Quatrocento*) que pintores e arquitetos formularam a primeira teorização que teria mais tarde inúmeras repercussões sobre o pensamento científico. Ela não só tornava possível a geometria projetiva, como 'preparava' o conceito de espaço sobre o qual se apoiaria a mecânica clássica. A geometrização do espaço deve ser compreendida do ponto de vista histórico, em relação a um contexto cultural extremamente rico."* (THRUILLIER 1994, p:55)[15]

É unânime a aceitação de que foi o pintor e arquiteto italiano Giotto de Bondone (1267-1337) o primeiro artista a utilizar-se da profundidade para retratar a tridimensionalidade do espaço. Giotto na obra *Núpcias de Canãa* (1304-1306) rompeu com a tradicional arte bizantina, e a pintura dos ícones sagrados[16], introduziu novos e convincentes conceitos do espaço pictórico, apesar de não ter usado das técnicas da perspectiva de modo sistemático, mesmo porque seus princípios fundamentais serão consolidados no século posterior, e segundo THUILLIER (1994) será necessário aguardar até o século XV, mais precisamente 1435 com Leon Battista Alberti, para a perspectiva tornar-se um procedimento preciso e sistemático.

Foi Felippo Brunelleschi (1377-1446), arquiteto florentino, quem concentrou atenção neste problema e pôs-se a realizar verdadeiras experiências ópticas. Tomou como base para sua técnica o teorema de Euclides que estabelece uma relação de proporcionalidade entre o objeto e sua representação pictórica, chamada de "olho fixo". Esta técnica exige que o pintor use do artifício de enxergar os objetos e o espaço como que através de um objeto óptico monocular, mas foi Leon Batista Alberti (1404-1472), num trabalho intitulado *Della pictura,* quem inicia o estudo das reduções proporcionais descrevendo um

---

[15] Como anteriormente citado (INTRODUÇÃO) o espaço na Geometria caminhou junto com a Física por muitos séculos, havendo a sua emancipação com a criação das geometrias não-euclidianas, a partir de quando rompe com os moldes convencionais, ganhando a possibilidade de criar geometrias puramente artificiais desvinculando assim o espaço geométrico de espaço físico.

[16] Os artistas bizantinos respeitavam regras rígidas para realizar suas obras de arte, as poses, os gestos, mesmo as cores do vestuário eram indicadas com exatidão. Os artistas bizantinos eram na maioria das vezes religiosos e permaneciam no anonimato, as inovações eram proibidas. As obras retratavam figuras religiosas ou ícones (imagens de santos ou personagens sagrados) pintados em pequenos para a devoção ou uso de ritual.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

método para isso. (Alberti é chamado por THUILLIER como "primeiro teórico da perspectiva).

No século XVI, podemos destacar Luca Pacioli (1445-1514) e Albrecht Dürer (1471-1528). Pacioli, frade que escreveu a *Summa de Arthmetica, Geometrica, Proportioni et Proportionalita*, serviu de preparo para uma geração de algebristas, mas é a obra *De divina proporcione*, publicada em 1509, que mais contribuiu para a perspectiva, com suas belas figuras com poliedros estrelados, polígonos sólidos e regulares, razão pela qual mais tarde seria chamada "secção áurea", e atribuídas a Leonardo da Vinci.

Albrecht Dürer, gravador e pintor alemão, foi a maior figura da arte do Renascimento do Norte da Europa. Imaginou a tela como uma cortina transparente onde visualizava o mundo. Foi o primeiro nome de expressão da perspectiva, possuía um interesse geométrico pela matemática, apesar de ser o primeiro a usar o quadrado mágico no Ocidente. Seu livro mais importante foi *Investigação sobre a medida com círculos e retas de figuras planas e sólidas.*

Os matemáticos puros da época de Dürer não puderam avaliar as utilizações de sua obra nas conquistas marítimas, onde a necessidade de confecção de mapas, para as explorações geográficas era fundamental. A perfeição de seus trabalhos é comparável ao de seus contemporâneos Leonardo da Vinci, Michelangelo Buonarroti.

Leonardo da Vinci (1452-1519) é a mais segura tradução dos cientistas do Renascimento. Com conhecimento sobre tudo, não produziu nada escrito, exceto seus cadernos de notas, onde demonstrou estar muito à frente do seu tempo. São suas obras que demonstram o quanto conhecia da geometria projetiva. Em obras como: Monalisa, Santa Ceia, A dama com o arminho e tantas outras, apresenta o rompimento com os padrões da pintura medieval, dando leveza e graça a sua obra.

Opondo-se aos padrões da arte bizantina, e fortemente influenciado por seus mestres, Giotto e Masaccio, Michelangelo Buonarroti (1475-1564), italiano, escultor, pintor, arquiteto, desenhista, poeta, foi uma das grandes figuras do renascimento. Sua primeira obra, *La Pieta* (1496-1499), é motivo de encanto e admiração, mas são suas pinturas no teto da Capela Sistina que, realizadas a convite do papa Julio II, onde Michelangelo mostrou uma resistência física quase heróica, pode apresentar sua genialidade artística inigualável.

unesp



Figura 2 - Obra prima do Renascimento "A criação de Adão" Michelangelo. Fonte: http://mcs.csuhayward.edu

A partir do século XVII, mais precisamente durante o segundo terço, a França assume o centro dos estudos. Há um grande florescimento da Matemática e da Física, surgindo verdadeiras revoluções nas idéias já existentes. Um grupo de matemáticos franceses, cujo motivador foi Gerard Desargues, dá continuidade ao estudo da geometria projetiva. O estudo das *Cônicas* de Apolônio será a pedra de toque necessária para inspirar Desargues na sua caminhada.

Desargues (1593-1662), nascido em Lyon, engenheiro militar e arquiteto, homem prático, só seria reconhecido muitos anos após sua morte. A dificuldade em entender sua obra *Brouillon Projet d'une Atteinte aux Événements des Recontres d'un Cone avec un Plan* (Esboço de projeto de Tentativa de Lidar com Casos Possíveis de Intersecção de um Cone com um Plano), publicada em 1639, foi motivo de zombaria sendo uma das obras menos bem sucedida de todos os tempos.

Ao inspirar-se nas *Cônicas* de Apolônio, e mesmo contrastando com a simplicidade de seu título, Desargues realizou um estudo que derivou da perspectiva utilizada na arte renascentista e no princípio de continuidade de Kepler. O tratamento de Desargues nas cônicas é belíssimo mas a utilização de uma linguagem pouco convencional,

transportada da botânica e os novos métodos em geometria por ele utilizados foram fatores de rejeição da obra, obscureceram seu trabalho e desencorajavam aqueles que se aventuraram a conhecer seus resultados. A publicação da geometria analítica de Descartes, dois anos antes, foi outro fator que eclipsou totalmente seu "esboço".

Descartes, ao publicar *Discour de la Méthode pour bien Conduire la Raison et Chercher la Verité à Travers les Sciences*, em francês, o que pode ser considerado uma novidade para a época, pois as obras filosóficas e científicas desde a Idade Média eram escritas em latim, incluiu um apêndice chamado *Géométrie* onde apresentou um método de locar pontos e linhas, através de números ou, algebricamente, por letras. Tal notação é muito semelhante à usada por cartógrafos na confecção de mapas.

Por sua vez, Desargues não escreveu para estudiosos matemáticos que poderiam ter alçado vôos mais altos baseados no seu trabalho, mas sim para mecânicos e matemáticos práticos que, por outro lado, não poderiam entender a peculiaridade da linguagem. Mas, o prestígio da álgebra na época era tamanho que, por quase dois séculos, passou desapercebida.

A todos fatores já anteriormente mencionados junta-se o fato de Desargues ter publicado um número muito pequeno de exemplares que não seriam vendidos, mas ofertado a seus amigos. Seu trabalho foi tão desprestigiado que os poucos exemplares existentes, durante muitos anos, foram dados como desaparecidos. Michel Chasles (1793-1880), dois séculos após escrever a história da geometria, expôs a validade e importância do trabalho de Desargues. Mas, por uma felicidade do destino, Philippe de la Hire (1640-11718), discípulo de Desargues havia feito uma cópia do "esboço", que veio a ser encontrada por Chasles em 1845, fato que mudou consideravelmente a aceitação de Desargues, passando a ser considerado como um clássico dos primórdios da geometria projetiva.

Hoje Desargues é reconhecido pelo teorema que leva seu nome, publicado por um amigo, Abraham Bosse em 1648, na obra *Manière universelle de S. Desargues pour pratiquer la perspective*. As repercussões de tal teorema ressonariam no século XIX, sendo uma das proposições fundamentais da geometria perspectiva que seria alvo de outro geômetra e historiador iminente: Michel Chasles.

É necessário ressaltar que Descartes e Desargues escreveram em campos diferentes e que ambos são básicos para o conhecimento matemático, cada um com sua importância conforme Eves:



"Enquanto Desargues e Pascal abriam um novo campo, a geometria projetiva, Descartes e Fermat concebiam as idéias da geometria analítica moderna. Há uma diferença fundamental entre as duas matérias, pois enquanto a primeira é um ***ramo*** *da geometria a segunda é um* ***método*** *da geometria."* (EVES, 1995, p:382*)*

A ardente atividade matemática do século XVIII, período em que não havia revistas científicas, propiciou o surgimento de círculos de discussões e grupos científicos que tentavam se organizar e gerou uma extensa atividade de troca de correspondência entre eles.

A criação das academias como as Accademia dei Lincei e del Cimento na Itália, Invisibile College na Inglaterra e o Cabinet Du Puy na França, exprimia um novo espírito investigatório. Eram formadas por homens cultos, que surgiram opondo-se às universidades que se mantinham no espírito escolástico.

Marin Mersenne, padre do convento da Anunciação em Paris, ganhou notoriedade ao ser um divulgador das idéias de seu tempo. Manteve correspondência com Descartes, Fermat, Desargues, Pascal e muitos outros cientistas.

STRUIK, em nota de rodapé, dá idéia da importância do *"le bon père Mersenne"*:

"Informer Mersenne d'une decouverte, c'etait la publier par l'Europe entiére." (STRUIK, 1989, p:169, nota 97)[17]

A retomada da geometria projetiva nos anos finais do século XVIII por Gaspard Monge (1746-1818) que, como Descartes e Desargues, irá criar outro ramo da geometria; a geometria descritiva.

Monge, nascido em Beaunne na França, ao desenhar a planta de sua cidade natal, realizada com primazia, garantiu o emprego de desenhista na escola militar de Mézières, começo de uma carreira promissora.

O estabelecimento das escolas e academias militares no século XIX marca um novo período na história da matemática francesa. Estas escolas davam uma importância considerável à formação de engenheiros militares e a invasão da França pelos exércitos realistas veio reforçar esta necessidade.

---

[17] "Informar Mersenne de uma descoberta significa publicá-la por toda a Europa."



A dificuldade de Monge desenhar as plantas das instalações dos fortes com os possíveis lugares de seus artefatos bélicos, foi contornada usando um outro procedimento, o da representação e análise de objetos tridimensionais por meio de projeções sobre certos planos. Foi o início do que chamamos hoje de geometria descritiva, mas, a sua obra principal *Géometrie descriptive* (1795-1799) demorou a ser publicada por ser classificada pelos seus superiores como do interesse da defesa nacional, assim considerada secreta por um bom tempo.

Diferente de outros matemáticos, Monge se envolveu na campanha de Napoleão, foi ministro da Marinha, mas, a desorganização da marinha francesa não ofereceu condições para realizar um trabalho significativo. Sua capacidade de organização o fez responsável pela criação, em 1794, de uma Comissão de Obras Públicas. Seu interesse em instituições de ensinos avançados resultou na famosa École Polytechnique de Paris (Escola Politécnica), onde se tornou professor e administrador, participando ativamente de seus acontecimentos.

A dificuldade de criar textos para as escolas técnicas exigia um novo tipo de livros. Os tratados eruditos teriam que ser suplementados pelos manuais mais adequados às escolas politécnicas e os melhores livros preparados no século XIX com esta finalidade eram aqueles destinados à École Polytechnique de Paris e outras instituições parecidas.

> *"Com a influência de Monge, a geometria começou a florescer na École Polytechnique. Na geometria descritiva de Monge está o núcleo da geometria projectiva e a sua maestria em métodos algébricos e analíticos na aplicação a curvas e superfícies contribuiu muito para a geometria diferencial e analítica."* (STRUIK, 1989, p:235)

A École Polytechnique de Paris foi palco para as novas gerações de matemáticos e geômetras, todos pupilos de Monge.

As aulas dadas, com brilhantismo, eram motivo de adesão de muitos jovens que se tornavam matemáticos e geômetras que iriam contribuir para esta ciência.

Monge foi considerado criador da geometria diferencial, expondo seus conceitos fundamentais na obra *Apllication de l'Analyse à la Geometrie,*mas, foi com Victor Poncelet, um de seus alunos mais



ilustres, que a geometria diferencial e projetiva se tornou um campo da maior importância na matemática.

O século XIX marca grandes progressos na geometria. A geometria não-euclidiana e a geometria projetiva incorporaram um conhecimento impressionante e altamente producente.

Desargues, Monge e outros iniciaram o estudo da geometria projetiva, mas sua independência e desenvolvimento coube a Poncelet.

Jean Victor Poncelet (1788-1867) nasceu em Metz, iniciou seus estudos no liceu local, mas foi na École Polytechinique, onde esteve de 1807 a 1810, que recebeu formação como matemático e engenheiro militar e foi aluno de Monge.

Na campanha fatal de Napoleão na Rússia, Poncelet, aluno da academia militar de Metz, foi convocado em 1812 como tenente de engenharia. Na derrota francesa nos campos de Krasnoi, Poncelet é dado como morto, e deixado no campo de batalha. Marchou durante cinco meses até Sratoff, no Volga, onde teve oportunidade para pensar sobre a geometria projetiva, ficando prisioneiro de 1813 a 1814.

Os anos de cárcere em Moscou, onde Poncelet não possuía nenhuma obra para leitura foi o tempo suficiente para arquitetar o tratado de geometria analítica *Applications d'Analyse et de Géométrie,* fruto do conhecimento adquirido nos anos de estudo na École Polytechinique e do empenho de seu professor Monge.

Applications d'Analyse et de Géométrie, foi publicado somente cerca de meio século depois em dois volumes, mas sua importância estava na intenção de Poncelet, em ser a introdução ao seu mais importante trabalho *Traité des Propriétes Projectives des Figures,*em 1822. Esta obra, um marco na geometria projetiva, inaugurou o que Boyer chamou de *Idade Heróica na Geometria.*

Poncelet utilizou dois instrumentos nos seus trabalhos para o desenvolvimento da geometria projetiva: o princípio de dualidade e o princípio de continuidade. (EVES, 1995, p:591-593)

"Uma característica importante da geometria da segunda metade do século XIX era o entusiasmo com que eram estudadas as transformações de tipos variados. Um dos mais populares entre esses era um grupo de transformações formando o que agora se chama de geometria projetiva. Esta fora anunciada na obra de Pascal e Desargues, mas só no começo do século XIX é que foi sistematicamente desenvolvida, especialmente por Poncelet." (BOYER, 1994, p:389)

unesp

O impulso dado na geometria arrebanhou uma legião de matemáticos que passou a estudar este campo, dentre eles podemos citar Chasles que iria dar continuidade ao estudo da geometria projetiva.

Michel Chasles (1793-1880), foi aluno de Monge na École Polytechinique nos seus últimos dias. Em 1841 tornou-se professor da mesma escola e durante muitos anos foi o principal representante da geometria na França. Em 1846 foi para Sorbonne na cátedra de Geometria Superior, onde foi professor por muitos anos.

Chasles trilhou os mesmos caminhos de Poncelet, quanto ao uso do método "enumerativo". A história da matemática e mais especificamente da geometria fascinavam-no. Seu livro *Aperçu historique sur l'origine et developpement des méthodes en géométrie*, publicado em 1837, é um marco da história moderna e é uma obra escrita por um cientista produtivo sobre a história da matemática. Escreveu em 1852 o *Traité de Géométrie Superieure*, mas foi pela obra *Traité des Sections Coniques*, publicado em 1865, que foi premiado com a medalha de Copley da Royal Society.

I.5 TOPOLOGIA A GEOMETRIA DA BORRACHA

As idéias topológicas estão presentes nas mais diversas áreas da matemática. Podemos considerar, a grosso modo, a topologia como um tipo especial de geometria, relativo às formas e às maneiras que as superfícies podem assumir ao serem puxadas, esticadas, amassadas, sofrer múltiplas transformações, de uma aparência para outra, mas com a restrição, de que não sejam rompidas suas fronteiras.

Chinn e Steenrod (1975) resumem magnificamente as desvantagens em que se encontram os topólogos ao serem alvejados por não-matemáticos com perguntas tais como: O que é a topologia ? ou Para que serve?

As respostas a serem dadas por vezes decepcionam os interlocutores, diferentemente da trigonometria, cujas respostas versam sobre a resolução de triângulos e o empenho em resolver problema de Topografia, Navegação e Astronomia.

O topólogo não pode dar respostas diretas atestando corretamente que a topologia é uma classe de pensamento geométrico vital para muitas áreas da matemática superior, e na prática restinge-se

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

em sacar de uma folha de papel e "criar" a banda de Möbius, ou então levar horas a fio para explicar como tirar o colete sem ter retirado anteriormente o paletó, mas estes procedimentos são insignificantes se comparados às aplicações da topologia na matemática superior e em outras áreas como a economia, a eletricidade etc.

Pode uma rosquinha transformar-se em uma xícara de café ? Um óculos no número oito?

A resposta a essas duas questões sobre as transformações topológicas está ligada à propriedade de *genus:*

> *"... genus é definido conforme o número de buracos que tem um objeto ou, como dizem os topólogos, pelo número de cortes fechados ou completamente circulares, que não se interceptam que podem ser feitos na superfície sem dividi-la em dois pedaços."* (BERGAMINI, 1964, p:178)

Quando nós estamos frente a um espelho deformante e visualizamos nossa silhueta distorcida, estamos altos e magros ou atarracados e gordos, apesar das enormes diferenças visuais entre nosso corpo e a visão refletida no espelho, ambos são topologicamente a mesma coisa. Um ponto do nosso corpo corresponde a um e somente um ponto no espelho. Isto é o que se chama de correspondência biunívoca.

Os exemplos acima são referências a pontos pitorescos da topologia, que se tornou um ramo da matemática necessário e vital para muitas áreas, e que devido à sua necessidade de conhecimento veio a transformar-se numa das partes que mais se desenvolveu no século XIX e XX.

A necessidade crescente de definições mais precisas sobre o significado de alguns termos tais como vizinhança, proximidade, continuidade e várias propriedades dos espaços matemáticos, fez com que, a partir do segundo quartel do século XX, a topologia, inicialmente tida como ramo da geometria, viesse a se tornar ao seu lado, ao lado da álgebra e da análise, parte independente e fundamental da matemática.

A palavra topologia etimologicamente falando, é o estudo da posição, do lugar. Advinda dos radicais gregos τοποζ que significa lugar e λογια que significa estudo, em certa época foi chamada de *Analysis Situs.* Hoje poderíamos descrevê-la como o estudo das transformações que conservam, invariáveis, certas propriedades.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

As pesquisas na topologia seguiram dois caminhos: um conforme enfatizou Möbius, Riemann e Poincaré chamado "topologia combinatória" ou "algébrica" e o outro da "topologia conjuntiva" ou dos conjuntos de pontos, de Cantor. Tal divisão, segundo EVES, está mais alicerçada na conveniência do que na lógica.
A topologia conjuntiva está ligada ao:

> *"conceito cantoriano de um conjunto arbitrário de pontos reconhecendo-se que qualquer conjunto de objetos seja um conjunto de números, de entes algébricos, funções ou objetos matemáticos pode constituir, em algum sentido, um espaço topológico."* (EVES, 1996, p:668)

Enquanto que a topologia combinatória está ligada:

> *"a noção de figura geométrica como formada por um conjunto finito de partes fundamentais ligadas entre si,..."* (EVES, 1996, p:668)

Os objetos geométricos e o seu comportamento em relação às transformações é a parte que iremos estudar. A topologia combinatória que é popularmente denominada de "geometria da borracha", nome que pode ser sugestivo se formos à sua definição, de maneira simplista pode ser tida como o estudo da continuidade.

A topologia, se comparada à geometria euclidiana ou à geometria projetiva, é uma ciência recente, que data do século XX, mas existem pesquisas isoladas no século XVII. Como campo de estudos autônomo, não data de antes da metade do século XIX, tendo como primeiro trabalho relativo aos aspectos topológicos os estudos de Jules Henri Poincaré (1854-1912) em 1895.

As raízes dos aspectos especificamente geométricos da topologia remontam ao século XVII com Leonard Euler (1707-1783). Euler, que chamava a Leibniz, de mentor da *Analysis Situs*. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filósofo, matemático, inventor e conselheiro alemão, utilizou este termo para designar um tipo de matemática qualitativa que hoje seria parte integrante da topologia.

As previsões de Leibniz, quanto à fertilidade deste "campo", demoraram a se realizar, mas o vigor que atingiu no século XX superaram suas previsões e se infiltraram nas mais diversas áreas. Podemos exemplificar com a teoria das redes que tem suas aplicações nos circuitos elétricos e na economia.

unesp

O GENUS DE OBJETOS COMUNS



Genus 0 | Genus 1 | Genus 2 | Genus 3 ou mais

A grande variedade de objetos comuns cuja superfície pode ser considerada topològicamente a mesma é ilustrada nesta página. Na fila acima, da esquerda para a direita, vemos superfícies de genus 0, 1, 2 e 3 ou mais. Abaixo, grande quantidade de formas aparentemente diferentes nas quais cada uma das superfícies acima pode ser transformada. As superfícies do mesmo genus estão na mesma côr.



Figura 3 - As transformações topológicas que envolvem o genus. Fonte: BERGAMINI, 1969, p:181.

Leonard Euler pode ser considerado o criador da teoria das redes. Nascido na Basiléia, Suíça, em 1707, inicialmente pensou em estudar teologia, mas Johann Bernoulli percebeu seu talento e o encaminhou para a matemática. Perdeu-se um teólogo mas ganhou-se o matemático mais prolífico do século XVII senão de todos os tempos.

Leonard teve instrução ampla, estudou além da matemática e teologia, física, astronomia, medicina e línguas orientais. Em 1727, graças à gama de conhecimentos que possuía e a recomendação de Bernoulli que havia descoberto seu talento matemático e foi seu professor, foi indicado para a cadeira de Filosofia Natural na Academia de São Petesburgo, assumindo este cargo em 1730.

O estabelecimento da revista de matemática *Commentarii Academiae Scientiarum Imperilis Petropolitanae*, na Academia de São Petesburgo e a facilidade de Euler em escrever fazia a tranqüilidade dos editores e logo de início contribuiu com um volume enorme de artigos matemáticos. Enquanto a pena de Euler continuasse trabalhando não haveria falta de material.

Em 1735, o excesso de trabalho, muito provavelmente, tenha provocado a perda de visão do olho direito, mas não a causa suficiente para desmotivá-lo na produção científica.

"Conta-se que ele disse que ao que parecia seu lápis o superava em inteligência, tão facilmente fluíam os artigos..." (BOYER, 1994, p:325)

Em 1741, a convite de Frederico, o Grande, transferiu-se para a Academia de Berlim onde se estabeleceu por vinte e cinco anos, mas, mesmo assim, estando em Berlim, não deixou de escrever para a Academia de São Petesburgo e para a Academia da Prússia.

Euler, na corte de Frederico, não tinha o reconhecimento merecido nem o calor constante dos russos. Frederico regozijava-se em ter em sua corte sábios como Voltaire, o que ofuscava e entristecia Euler, pois o monarca valorizava mais os filósofos do que os geômetras e, com o passar dos anos, as relações na corte foram se tornando intoleráveis.

Foi nesta época que Catarina, a Grande, estava ansiosa pela volta de seu prolífico matemático. Voltando a São Petesburgo em 1766, Euler percebeu que estava ficando cego mas sua produtividade surpreendente não foi prejudicada. Possuidor de uma memória



extraordinária e um poder de concentração incomum, tinha nos seus alunos e filhos o auxílio para continuar suas pesquisas.

Na Academia de São Petesburgo ficou por mais dezessete anos, até seus últimos dias, e morreu mansamente aos setenta e seis anos.

Segundo EVES, durante sua vida publicou 530 trabalhos, mas após sua morte, as publicações inéditas continuaram a se realizar na Academia de São Petesburgo por mais quarenta e sete anos. Dada a grandiosidade de sua obra a Sociedade Suíça de Ciências Naturais, a partir de 1909, iniciou a publicação de sua obra completa, compreendendo o total de 886 trabalhos, entre livros e artigos.

Euler percorreu todos os campos da matemática, da pura à aplicada, escrevia em latim, francês e alemão, em uma linguagem e notação como utilizamos atualmente. Nenhum outro matemático foi tão responsável pela forma da matemática estudada atualmente nas universidades.

Talvez, o marco que merece ser considerado como o início da topologia seja atribuído a Euler. Dois problemas práticos que envolviam redes de linhas ligando vários pontos, suscitaram sua mente criadora. O primeiro envolvia as sete pontes de Könisberg, cidade prussiana, próxima ao rio Pregel, que possuía um anel fluvial que dividia a cidade em quatro áreas que eram interligadas pelas sete pontes. As sete pontes de Könisberg possuíam um enigma: Seria possível passear pela cidade e retornar ao ponto de partida de forma a percorrer as sete pontes só e tão somente uma vez cada ponte ?

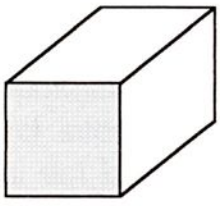
Euler, ao ouvir falar sobre as pontes de Könisberg, percebeu tratar-se de um princípio importante, e pôs-se a resolvê-lo matematicamente, demonstrando por que tal empreita seria impossível.

O segundo problema que Euler investigou foi a relação entre as faces, vértices e arestas dos poliedros. Poliedros são figuras geométricas planas e fechadas, cujos lados são retos, encontrando-se em vértices. Descartes em 1640, já conhecia esta relação, mas Euler é quem realizou sua demonstração.

O problema das relações dos lados dos poliedros, que podem ser transformados em redes de pontos em três dimensões, de onde Euler tirou a relação de que por maior que seja o número de faces que tenham a figura é possível estabelecer uma fórmula para calcular o número de seus vértices arestas e lados. Esta relação ficou conhecida como "fórmula de Euler".

A fórmula de Euler se aplica a qualquer figura de várias faces, como o exemplo:





$$a + 2 = v + f$$

Sendo: a número de arestas
v número de vértices
f número de faces
No cubo ao lado seria:

$$a = 8 + 6 - 2$$
$$a = 12$$

Figura 4 - Poliedro de seis faces, que segundo a fórmula de Euler possui 12 arestas e 8 vértices.

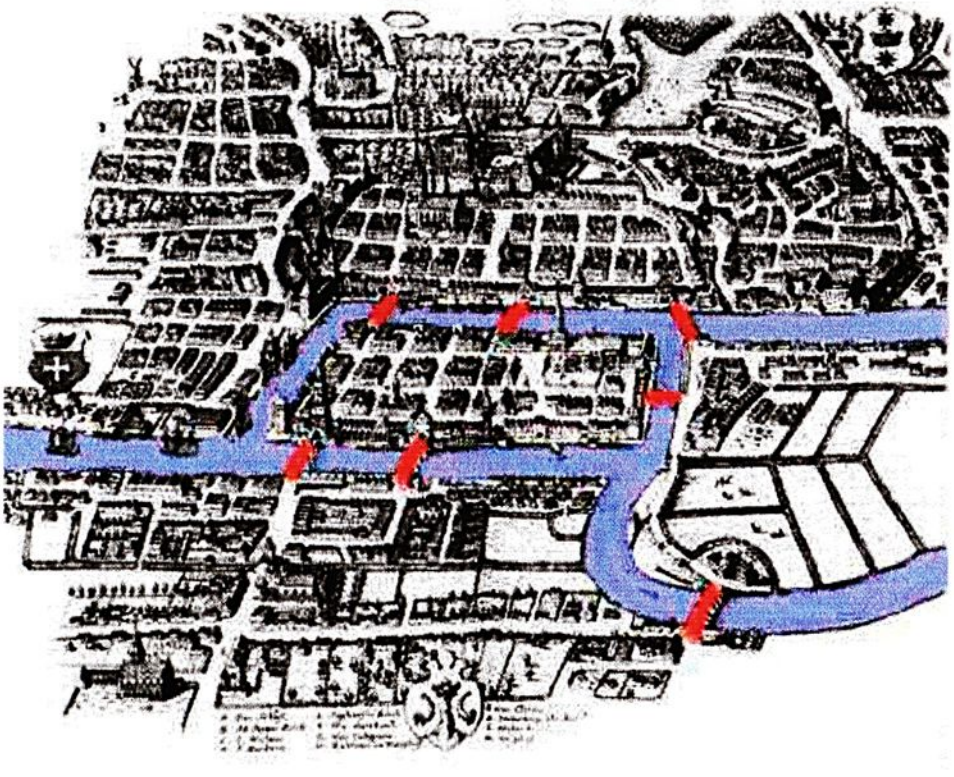


Figura 5 - Pontes de Könisberg Fonte: http//-groups.dcs.st.and.ac.uk./~history

O termo topologia foi utilizado pela primeira vez por Johann Benedict Listing (1808-1882), como título da obra *Vorstudien zur Topologie*, (Estudos Introdutórios em Topologia) em 1847, mas o

marco inicial coube a Henri Jules Poincaré em 1895 com a publicação de *Analysis Situs*, quando ocorreu o primeiro desenvolvimento sistemático da topologia.

Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868) tornou-se conhecido na topologia por ter escrito um artigo em que escreveu sobre uma notável superfície de papel como uma fita, (Möbius band), que só possui um lado. Difícil de se imaginar, mas extremamente fácil de se fazer, a faixa de Möbius atrai a curiosidade de todos que a conhecem, mas, por trás desta quase brincadeira, Möbius criou uma superfície de uma só face, e de uma aresta, que levou ao conceito de 2-complexo em topologia.

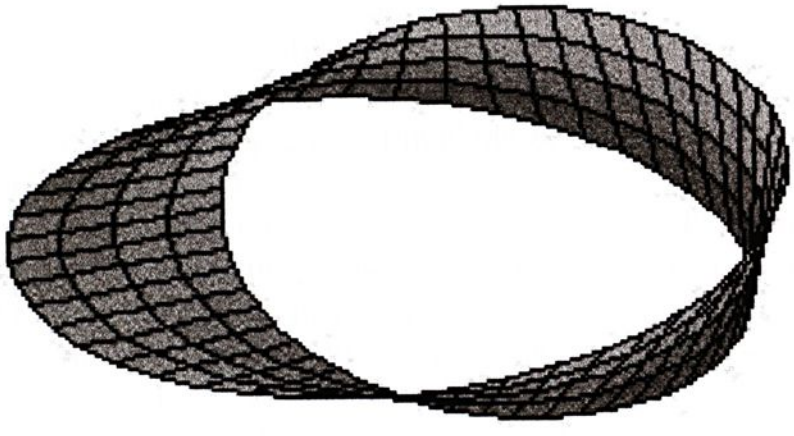


Figura 6 - Banda de Möbius. Fonte:
http://-groups.dcs.st.and.ac.uk./~history

Dos matemáticos que contribuíram para a topologia, sem dúvida alguma, Poincaré tem lugar de relevo neste cenário, pois seus estudos foram de vital importância não só para a topologia mas para diversas áreas da matemática, da física e da ciência.

Jules Henri Poincaré nasceu em Nancy, local que acolheria muitos matemáticos no século XX. Filho de família proeminente tendo sido seu primo, Raymond Poincaré, presidente da França no período da Segunda Guerra Mundial.

Míope e ambidestro, era possuidor de uma inabilidade física, a qual seria ponto de brincadeira dos amigos. Conta-se que sua dificuldade em desenhar valeu-lhe um rotundo zero e tal acontecimento

desfechou num episódio hilário, pois seus amigos de escola montaram uma exposição com suas "obras de arte" e sob cada desenho escreveram do que se tratava em grego: "Isto é uma casa", "Isto é ...."

Aluno da famosa École Polytechinique, diplomou-se em engenharia de minas em 1875, e esteve ligado ao Departamento de Minas por toda a vida. Doutorou-se em 1879 na Universidade de Paris em Ciência onde teve diversos postos de professor de matemática e ciência.

Professor na Sorbonne, Poincaré não se demorava muito em cada campo. Lecionava a cada ano um tópico diferente e se aprimorava neles. Logo, suas lições que eram de uma clareza e brilhantismo foram editadas pelos seus alunos. Escreveu sobre os mais diversos campos tais como a teoria do potencial, luz, eletricidade, condução de calor, capilaridade, eletromagnetismo, hidrodinâmica, mecânica celeste, termodinâmica, probabilidade etc...

Em cada uma delas Poincaré surpreendeu. Suas idéias tornaram-se pesquisas iniciais para continuidade de diversos trabalhos de outros matemáticos e físicos.

A facilidade na escrita, somente comparada a Euler, propiciou obras populares e semi-populares, as quais propiciaram a apresentação da ciência, quer seja matemática ou física aos não iniciados e do "problema" da ciência foi outro alvo de seus escritos. Podemos exemplificar com *La Science et l'Hypothèse (1902), Le Valeur de la Science (1905), Science et Méthode (1908), Dernières pensées (1912).* Essas obras foram traduzidas para todas as línguas que têm importância na ciência e são, ainda clássicos e modelos.

Poincaré antecipou-se ao seu tempo e ao estudo da topologia, podendo mesmo ser considerado o último universalista na matemática. Seu nome está ligado aos *"Grupos de Poincaré"* da topologia combinatória.

"Pode ser que Poincaré seja a última pessoa a respeito da qual se possa sustentar que o seu campo de atuação seja toda a matemática. Pois a matemática vem crescendo a uma taxa tão incrível nos tempos modernos que se acredite ser bastante impossível possa alguém alcançar novamente essa distinção." (EVES, 1996, p:618)

Para falarmos hoje, nos anos finais do século XX, sobre os progressos na matemática, ou em qualquer ciência, é muito difícil. A história necessita de tempo para *"assimilar"* e compreender os fatos.

Num período ainda inacabado, onde as obras que estruturam um trabalho de pesquisa científica estacionam seus registros nos anos finais da década de 40, é quase que impossível ir muito além dos idos do início do século. Apontar em que situação encontram-se os progressos da geometria hoje requereria muito mais do que uma pesquisa bibliográfica. Seria necessário uma *bola de cristal*, e conforme EVES inicia o panorama do século XX, no seu livro *A História da Matemática:*

> *"Quem quer que se disponha a escrever sobre o século XX defrontará com problemas muito especiais. O século XX, ao contrário de outra épocas ainda não terminou; logo, não podemos saber com certeza ele o que terá quando completo."* (EVES, 1996, p:652)

unesp

II. A CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO PELA CRIANÇA

"Pergunto-me às vezes como pode ser que tenha sido eu o único a desenvolver a teoria da relatividade. O motivo, penso, é que um adulto normal não se atormenta com problemas colocados pelo espaço e o tempo. Ele acha que já sabe de tudo o que se precisa saber a esse respeito. Eu, pelo contrário, me desenvolvi tão devagar que só comecei a me fazer perguntas sobre o espaço e o tempo depois de crescido [18] *".*

Albert Einstein

A proposição deste capítulo é apresentar o desenvolvimento das relações espaciais geométricas nas crianças de dois anos e meio a sete anos.

Um breve relato do conceito espaciais na geometria introduz este estudo, o qual será a porta de entrada do nosso texto.

O desenvolvimento do espaço infantil antes da representação não poderia ser deixada para outra oportunidade e serve de guia para o estudo da ordem de sucessão das relações geométricas.

Quando falamos de espaço, logo imaginamos o espaço que está ao redor do nosso planeta, esta estrada rumo ao desconhecido, que se apresenta na imensidão da noite como uma janela salpicada de luzes e que, no decorrer dos tempos, tem instigado a todos que levantam seus olhos para o céu. Este quadro, que desponta ora cheio de luz, ora todo salpicado de pontos distantes, pode ter sido a raiz do nosso desejo de compreender e ordenar todos os conhecimentos.

Mas o que é o espaço?

Se formos consultar um dicionário teremos como resposta algo muito próximo a distância entre dois pontos; área ou volume entre limites determinados ou ainda a extensão entre planetas, sistema solar ou galáxias etc... Se buscarmos ainda em um dicionário de filosofia encontraremos dados mais específicos tais como:

"Meio ideal, caracterizado pela exterioridade das suas partes, no qual se localizam os nossos perceptos e que contém, por conseqüência todas as extensões finitas.

O espaço tal como considera a intuição é caracterizado pelo fato de ser homogêneo (os elementos que nele se podem distinguir aí através do pensamento

---

[18] THUILLIER ,1994, p:244.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

são qualitativamente indiscerníveis), isótropo (em todas as direções têm as mesmas propriedades), contínuo e ilimitado". (LALANDE, 1996, p:322)

Teremos ainda a acrescentar que, se falarmos do espaço geométrico euclidiano, como o próprio Lalande menciona, ainda teremos mais duas características: ser tridimensional e homoloidal. Para aqueles que estão pouco familiarizados com as definições geométricas ser tridimensional é ter três dimensões, onde por um ponto no espaço podem passar três retas perpendiculares entre si e tão somente três (Figura 7 e 8). Homoloidal porque no espaço podemos construir figuras semelhantes em qualquer escala, de pequenos prismas hexagonais como flocos de gelo a prismas hexagonais de muitos metros ou quilômetros, e que independente das diferenças de tamanho mantêm relações de semelhança.

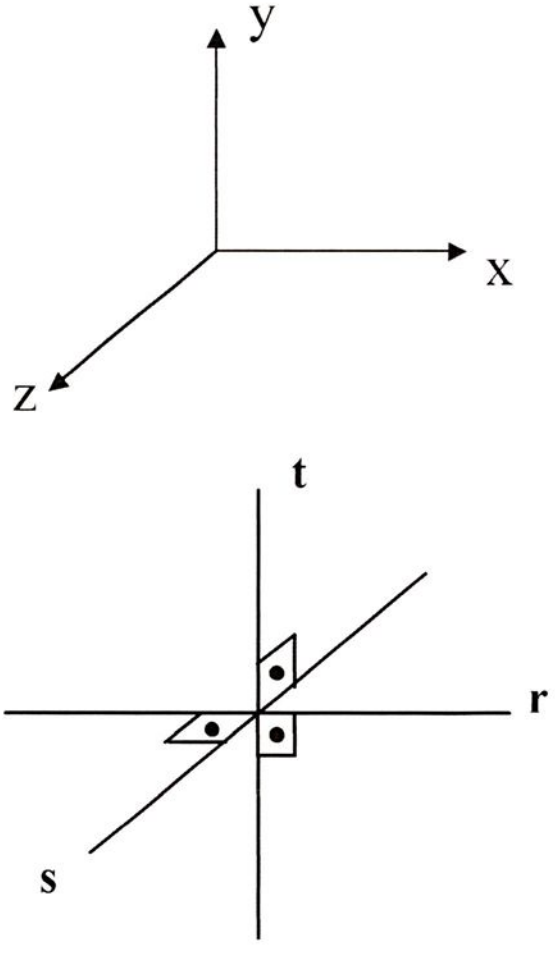


Figura 7 e 8 - Eixo ortogonal onde estão retratadas as referências do espaço tridimensional, conhecido como eixo cartesiano. Três retas perpendiculares (r, s e t) que se encontram no ponto O.

A elaboração dos conceitos da física e da matemática dão mostra de como o ser humano conseguiu construir explicações científicas aos fatos que lhe causava perplexidade. Dando coerência às explicações dos fenômenos que despertavam sua imaginação, como por exemplo o movimento dos corpos na superfície da Terra e distante dela, criando teorias para o seu entendimento onde astros e planetas comportam a lógica dos movimentos.

O brilho de tais conquistas é tão grande quanto o da elaboração do universo infantil, mesmo porque para ser um adulto pensante foi necessário que processos cognitivos se efetuassem.

Euclides, Copérnico, Kepler, Galileu, Newton, Einstein e tantos outros contribuíram para desvendar os mistérios do universo, que causavam tanto espanto. Tamanha grandeza também se encontra quando acompanhamos o desvelar dos mistérios da elaboração do mundo pela criança, mesmo porque o conhecimento das teorias tem como base um cientista que percorreu um processo de desenvolvimento cognitivo. Copérnico, Kepler, Newton, Einstein, todos foram crianças e o processo de desenvolvimento da inteligência passa pelas mesmas etapas, podendo ocorrer com defasagens cronológicas diferentes mas na mesma ordem de sucessão.

Na busca de conhecer as origens do universo, o homem procura saber como tudo surgiu, as explicações mítico-fenomenistas após séculos foram sendo substituídas por explicações cada vez mais científicas e mais objetivas. Homens como Copérnico colocaram a Terra no seu devido lugar, como um corpo a mais no sistema solar, e não mais o "Centro de tudo", o que foi chamado de "Revolução Copernicana"; o universo infantil faz um movimento muito parecido com esse.

O conhecimento das origens do universo tem como condição a capacidade humana de refletir, de pensar, de engendrar hipóteses, de representar os acontecimentos, e estabelecer relações que levem a explicações para as questões que tanto intrigaram o homem. Tais capacidades não são exclusividade da curiosidade para entender o universo, qualquer conhecimento do mais simples ao mais elaborado requer os "mecanismos" de funcionamento geral da inteligência. As questões que provocaram espanto no homem, desde sempre, são algumas delas, podendo ser questões maiores ou menores, tais como as questões cosmológicas, ao se perguntarem sobre a origem do universo, se terá um fim, ou questões menores como a queda livre de um corpo, ou mesmo a dissolução do açúcar na água que se constitui em um

unesp

processo químico. Todas as resoluções de problemas requerem seres pensantes, mas como nos tornamos tais seres? Como ocorre esta gênese dos conhecimentos?

As explicações dadas de como chegamos a conhecer o mundo ao nosso redor, ou seja, de explicar como a gênese dos conhecimentos vem ocorrendo por muitos séculos, num antigo debate entre o empirismo tradicional e formas variadas de apriorismo e inatismo.

Entendemos o empirismo tradicional como uma forma de receber as informações como sendo emanadas dos objetos, onde o papel do sujeito é de receptor de informações. Por outro lado, o apriorismo ou inatismo desloca o eixo de informação para o sujeito que, mediante estruturas endógenas "prontas", se apropria das qualidades do objeto. Fica claro que ambas as explicações colocam o alvo do conhecimento no objeto ou no sujeito.

O espaço, objeto do nosso trabalho nesta discussão de empirismo tradicional versus formas variadas de apriorismo e inatismo, aparece mais cristalizado nas teorias filosóficas de dois expoentes do pensamento ocidental, que bem retratam tais concepções. São eles David Hume e Immanuel Kant.

Para o empirismo, aqui expresso por Hume, todo conhecimento provém da experiência. A experiência é a matéria bruta sem a qual o intelecto não teria como trabalhar (matéria sobre a qual elabora o conhecimento). O espaço é um dos "princípios de conexão das idéias", sendo:

"Quanto a mim, creio existirem apenas três princípios de conexão entre as idéias, a saber: a ***semelhança,*** *a* ***contigüidade*** *de tempo ou lugar* (espaço), *e a* ***causa*** *ou* ***efeito.***" (HUME, 1984, p:141)

Hume divide os objetos da razão ou da investigação humana em *"relações de idéias e questões de fato"*. As relações de idéias são auto-evidentes. Seu exemplo clássico são as verdades demonstradas por Euclides, pois, mesmo que não existissem triângulos e retângulos na natureza, as verdades demonstradas pelo geômetra grego teriam sempre sua certeza e evidência. Já as questões de fato *"parecem fundar-se na relação de* ***causa e efeito****"*, sendo somente possíveis a partir de *"nossa memória e de nossos sentidos"*.

Sendo o espaço uma "questão de fato" (questão física), não podemos conhecer de outra "forma" a não ser pela experiência. É ela que fornece o conhecimento sobre tais questões (fato). Sobre o espaço

(relações espaciais), não é possível conhecê-las independente da experiência. É esta (a experiência) que nos fornece as relações entre as coisas.

Kant, professor de metafísica, que, ao ler o escocês cético, foi despertado de seu "sono dogmático", confirma inicialmente as afirmações de Hume, assumindo momentaneamente que todo conhecimento começa com a experiência, para depois refutá-la no decorrer de suas argumentações, concluindo que apesar do conhecimento ter início na experiência, não implica em estar nela (na experiência) sua origem.

Para a teoria kantiana o espaço é uma forma *a priori* da sensibilidade que existe em nós, sendo uma forma subjetiva (do sujeito), não sendo encontrada fora dele. Opondo-se aos empiristas, Kant, postula o espaço como sendo uma forma de representação das coisas externas, uma intuição inerente à natureza subjetiva da nossa mente que possibilita dar predicados aos objetos.

"O espaço não é um conceito empírico abstraído da experiência externa. Pois a representação de espaço já tem que estar subjacente para certas sensações se referirem a algo fora de mim (isto é, a algum lugar do espaço diverso daquele em que me encontro), e igualmente para eu representá-las fora de mim e uma ao lado da outra e por conseguinte não simplesmente como diferentes, mas situadas em lugares diferentes. Logo, a representação do espaço não pode ser tomada emprestada, mediante a experiência, das relações do fenômeno[19] *externo, mas esta própria experiência externa é primeiramente possível só mediante referida representação)* (KANT, 1987, p:41. B, p:38)

O espaço para Kant é uma forma de recepção dos objetos, uma forma a priori, onde os objetos são representados inicialmente, sendo ele necessário para a representação dos objetos na nossa mente. Sem espaço não há objetos.

Kant, com seu apriorismo espacial, inova em relação às outras teorias do conhecimento, mas peca por partir de sujeitos onde o espaço está constituído e já possui representação. O espaço em Kant é uma forma própria de organização das coisas.

No decorrer das apresentações de como o conhecimento ocorria, outras explicações, além das já anteriormente mencionadas, foram

[19] Segundo a teoria Kantiana, fenômeno é o que se apresenta à nossa forma humana de conhecer, de representar, conhecemos o objeto segundo nossa sensibilidade, o que nos leva a ter a representação segundo o que atribuimos ao objeto, e não aquilo que ele realmente o é (coisa em si), e que jamais teremos a possibilidade de conhecer.

unesp

dadas no sentido de unir as duas concepções antagônicas (empirismo tradicional, apriorismo ou de inatismo) e superar tal impasse, para que em uma perspectiva dialética a solução fosse a mais próxima do modelo real. Mas tais explicações, ao adotarem a perspectiva dialética, partiam do conhecimento em indivíduos prontos, e perderam-se nas explicações de como era a gênese do conhecimento.

Piaget, mediante as explicações anteriormente dadas sobre a gênese do conhecimento, e tidas até então como sendo iminentemente filosóficas, inova ao estudá-las realizando observações de modo empírico e estabelecendo a epistemologia como uma ciência separada da filosofia, mas unida a outras ciências humanas sem se desvincular da biologia, naturalmente. Piaget afirmou que não existem conhecimentos absolutos, o que o levou a elaborar uma nova teoria, que reposicionava o papel do sujeito e do objeto de conhecimento:

"*De um lado, o conhecimento não procede, em suas origens, nem de um sujeito consciente de si mesmo nem de objetos já constituídos (do ponto de vista do sujeito) que lhe imporiam: resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre sujeito e objeto, e que dependem, portanto, dos dois ao mesmo tempo mas em virtude de uma indiferenciação completa e não trocas entre formas distintas. Por outro lado, e por conseqüência, se não existe no começo sujeito nem objeto, no sentido epistêmico do termo, nem objetos concebidos como tais, nem, sobretudo, instrumentos invariantes de troca, o problema inicial do conhecimento será, portanto, o de construir tais mediadores: partindo da zona de contato entre o próprio corpo e as coisas, eles progredirão então, cada vez mais, nas duas direções complementares do exterior e do interior, e é dessa dupla construção progressiva que depende a elaboração solidária do sujeito e dos objetos.*" (PIAGET: 1990, p:7-8)

Piaget, no decorrer de seus estudos, propôs uma teoria em que o conhecimento não era a percepção dos objetos, nem tampouco estava determinada pelo sujeito consciente que se apropriava deles, não sendo propriedade dos objetos nem dos sujeitos, mas produto das relações que o sujeito estabelece com os objetos, que são fruto da passagem de um conhecimento menor para um estado mais completo. Mas se o conhecimento não precede dos sujeitos nem dos objetos e sim de interações entre eles que ocorrem no decorrer deste processo, qual é o liame que existe entre eles (sujeito e objeto) ?

Para tal resposta, Piaget apresenta uma solução até então esquecida pelos epistemólogos, recorrendo à psicologia infantil, onde realizou suas observações, e à biologia para explicar os primórdios

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

funcionais (gênese) do conhecimento. Apresenta, então, as ações do recém-nascido, como sendo o elo de ligação entre o sujeito e o objeto, e o início do processo de conhecer. É necessário ressaltar que, ao nascer, o lactente vive o que foi caracterizado de "adualismo", ou seja, não existe um sujeito consciente de si nem fronteiras que o separam do mundo ao seu redor. O bebê não tem consciência dos limites do seu corpo nem tão pouco da materialidade dos objetos.

Mas, se as ações são a fonte de todo o conhecimento, como elas surgem?

São os movimentos aparentemente "descoordenados", a quem os olha sem a lupa de epistemólogo, o início de todo o processo de conhecimento. Neste começo, sujeito e objeto são um todo indiferenciado onde o elo de ligação que relaciona o mundo e o bebê é o seu corpo, à medida que o bebê "age" sobre os objetos tocando-os acidentalmente, dado que ainda não existe intencionalidade, ou que é tocado por eles, desencadeando mecanismos hereditariamente montados que possibilitam a adaptação inicial ao meio (reflexo[20]). É no exercício destes mecanismos fechados, que não comportam qualquer conhecimento e que estão dotados de um "fazer prático" de uma inteligência prática pela ação, que está todo o início do conhecimento mas que já está subordinado a um esquematismo, que atribui certa "materialidade" aos objetos na ação prática, quase orgânica.

O exercício dos reflexos é que acarretará sua melhor adaptação, seu melhor funcionamento. É no exercício que os reflexos se consolidarão. Alguns reflexos se extinguirão por falta de exercício, como é o caso do reflexo da marcha que, por mais bem equipado que seja, depende de exercício para sua adaptação. É no funcionamento do reflexo que um conhecimento "novo" exterior, que não destrói, conserva o ciclo de organização anterior coordenando os dados do meio externo de modo a incorporá-los nesse ciclo. O conhecimento "novo" passará a integrar esta estrutura anterior (reflexo) e a essa integração de um elemento "novo" que passará doravante a fazer parte, de uma totalidade anterior, denominamos assimilação. Assimilar é dar significado às coisas, mesmo que seja um significado na ação senso-

---

[20] *"reflexo deve ser concebido como uma totalidade organizada cuja característica própria é conservar-se em funcionamento, por conseqüência , funcionar mais cedo ou amis tarde por si mesmo (repetição), incorporando os objetos favoráveis a esse funcionamento (assimilação generalizadora) e discriminando as situações necessárias a certos modos especiais de sua atividade (reconhecimento motor)."* (PIAGET,1975, p:47)

motora. Assimilar significa incorporar aos seus quadros algo externo, novo, sem que deixe de existir o que já havia.

Quando dizemos adaptação, estamos nos referindo a uma transformação do organismo em função do meio, sendo esta transformação o equilíbrio entre dois processos ou invariantes funcionais: assimilação e acomodação. A construção da inteligência é a estabilidade, é o equilíbrio, mesmo que momentâneo entre esses dois processos opostos e complementares, um que tenta integrar as informações do objeto, sem modificá-lo, nos esquemas já constituídos (incorpora o dado novo vindo da experiência), o outro que leva em conta as propriedades do objeto que não podem ser incorporadas diretamente (assimiladas) e modificam os esquemas de assimilação (pois modificam incessantemente os esquemas para ajustá-los aos dados novos).

Ao nascer, o bebê inicia o processo de adaptação ao mundo real. O mundo dos primeiros dias e meses é uma totalidade caótica que lhe impõe estímulos múltiplos, sonoros, luminosos, corporais etc. Equipado de um aparato orgânico hereditário, o bebê tenta organizá-lo, e o faz na ação prática. É no funcionamento dos reflexos que o bebê organiza esta realidade a princípio caótica: o que é "para sugar", "para prender", "para olhar", "para ouvir" etc.

"Com efeito, tanto no terreno do espaço quanto no das diversas escalas perceptivas em construção, o bebê relaciona tudo ao seu próprio corpo como se fosse o centro do mundo, mas um centro que se ignora . Em outras palavras, a ação primitiva é testemunho simultâneo de uma indiferenciação completa entre o subjetivo e o objetivo, e de uma centração fundamental, embora radicalmente inconsciente porque vinculada a essa indiferenciação." (PIAGET, 1990, p:9)

A construção das relações espaciais, procede da mesma forma, o que é para "prender", "olhar", "ouvir" etc. É a própria estruturação de espaços. Assim, no início, o espaço é uma totalidade centrada inteiramente na sua própria atividade, cada comportamento é resultante de um feixe perceptivo que constitui um espaço próprio, puramente prático e mais ou menos estável, a ação cria o espaço, espaço tátil, espaço visual, espaço auditivo etc. É essa totalidade pouco coordenada que se organizará ao término de alguns meses (por volta de doze a dezoito meses), possibilitando ao indivíduo situar-se num meio ordenado onde ele é parte incluída como um elemento do conjunto. Como diz Piaget:

unesp

"O problema a resolver é, pois, o da passagem do espaço fisiológico ao espaço percebido e concebido ou, se se preferir, a transição do ***a priori*** *funcional para o* ***a posteriori*** *estrutural."* (PIAGET, 1975, p:195)

O espaço é condição imprescindível da representação[21] . Mas, o que é dado ao recém-nascido do espaço?

"... ao nascer, à criança nada mais é dado do espaço do que a percepção da luz e a acomodação própria dessa percepção (reflexo pupilar à iluminação e reflexo palpebral ao deslumbramento luminoso). Tudo o mais[22], isto é, a percepção das formas, dimensões, distâncias, posições etc., elabora-se pouco a pouco, simultaneamente com os próprios objetos." (PIAGET, 1975, p:94)

É a partir de esquemas muito primitivos (palpebral e pupilar), quase puramente orgânicos, que irão se desenvolver as relações espaciais. De início subordinado à propriedade da ação, irá desenvolver-se à medida que a criança for estabelecendo coordenações.

Para GÁLVEZ (1996), Piaget realizou uma investigação minuciosa e detalhada, para entender como ocorre o desenvolvimento das relações espaciais, tomando como base duas hipótese elaboradas por Poincaré em sua análise da noção de espaço:

"Localizar um objeto quer dizer simplesmente apresentar os movimentos que seria preciso fazer para alcançá-lo." (POINCARÉ, 1995, p:53)

e:

"Para um ser completamente imóvel, não haveria nem espaço nem geometria." (POINCARÉ, 1995, p:54)

Piaget faz uso dessas duas hipóteses que lhe são fundamentais para o estudo do espaço sensório-motor, que envolvem a diferenciação entre mudança de estado, mudança de posição que culminarão

---

[21] Representação, representar segundo Piaget é dar significado as coisas, quer seja nas ações práticas (sensório-motor), ou no período da representação simbólica.

[22] "a percepção das formas, dimensões, distâncias, posições etc.,", são relações geométricas relativas à topologia, geometria projetiva e euclidiana, que estarão evidenciadas no término da análise de cada "grupo" (prático ou heterogêneo, subjetivo, objetivo e representativo).

principalmente no conceito de grupo de deslocamento[23] . O conceito de grupo, como afirma Poincaré, será o fio condutor que apresentará todo o desenvolvimento do espaço sensório-motor, segundo Piaget:

"A gênese do espaço, na inteligência senso-motora, é dominada inteiramente pela organização progressiva dos movimentos, e estes tendem efetivamente para uma estrutura de 'grupo'." (PIAGET, 1958, p:149)

Ao utilizar-se do conceito de grupo, Piaget faz uma ressalva quanto às afirmações de Poincaré que, ao descrever a diferença entre mudança de estado e de posição, tinha como objetivo apresentar o que era advindo da experiência e o que era fruto do espírito humano, na análise da noção do espaço[24] . Mas, para Piaget, tal diferença (mudança de estado e de posição) era considerada erroneamente como sendo *à priori*, e provavelmente Poincaré ignorava que tais construções fossem decorrentes de um processo longo e progressivo.

Para Poincaré, as mudanças que se apresentam no mundo exterior passíveis de correção com movimentos corporais são denominadas de mudança de posição. As mudanças que ocorrem no mundo externo e não são passíveis de correção com movimentos corporais são denominadas mudanças de estado. Para um sujeito que não se desloca espacialmente e que não tem constituída a conservação dos objetos, é impossível fazer tal diferenciação. Qualquer mudança de posição acarreta uma mudança de estado, portanto quando um corpo se desloca deixa de ser o que anteriormente era, perdendo suas propriedades físicas.

Podemos exemplificar tais afirmações com o exemplo dado pelo próprio Poincaré:

"Suponhamos, por exemplo, uma esfera que tenha um hemisfério azul e o outro vermelho; ela nos apresenta primeiro o hemisfério azul; depois ela gira sobre si mesma, de modo a nos apresentar o hemisfério vermelho. Seja agora um recipiente esférico contendo líquido azul que se torna vermelho em conseqüência de uma reação química. Nos dois casos , a sensação de vermelho substituiu o azul; nossos sentidos experimentaram as mesmas impressões, que se sucederam na mesma ordem, e contudo essas mudanças são vistas por nós como sendo

---

[23] Piaget define: *"'grupo' é todo e qualquer sistema de operações fechado em si próprio, isto é, um sistema tal que possibilite retornar ao ponto de partida mediante uma operação que faça parte do sistema."* (PIAGET, 1975b, p:194)

[24] Poincaré faz uma análise detalhada da noção de espaço na obra **O valor da ciência,** principalmente nos capítulos III "A noção de espaço" e IV "O espaço e suas três dimensões".

diferentes; a primeira é um deslocamento, a segunda uma mudança de estado. Por quê?

Porque, no primeiro caso, basta-me rodar em torno da esfera para me colocar em frente ao hemisfério azul." (POINCARÉ, 1995, p:55)

Poincaré, por ser um matemático, e provavelmente conhecer mais logicamente do que psicologicamente a construção inicial do espaço, atribui muito precocemente o poder de diferenciar tais mudanças, fato que constatamos como pouco prováveis nas observações feitas por Piaget, pois tal diferenciação ocorrerá quase ao findar o segundo ano, quando a criança passa a considerar o objeto desaparecido como sendo o mesmo ao tê-lo reencontrado, e levar em consideração que o objeto permaneceu o mesmo. O que houve durante o seu desaparecimento foi apenas um deslocamento no espaço. Tais inferências são fruto de um longo processo que implicará em outras formas de organização.

"A única ressalva a fazer à interpretação do célebre matemático é que tal organização não é inata, mas representa a forma de equilíbrio terminal de uma elaboração mental que abrange vários meses do primeiro ano." (PIAGET, 1973, p:120)

Para que haja a diferenciação entre mudança de estado e de posição é necessário que haja conservação do objeto, fato improvável nesta fase de desenvolvimento, posto que o objeto só existe em função da ação realizada pelo sujeito, quadro que irá modificar-se por volta da quarta fase, na transição do grupo subjetivo para objetivo, como veremos a seguir.

"É pois evidente que, sem a conservação dos objetos, não poderia haver 'grupos', pois que tudo seria 'permuta de estado': o objeto e o grupo dos deslocamentos são pois indissociáveis; um constitui o aspecto estático, o outro, o aspecto dinâmico da mesma realidade." (PIAGET, 1958, p:151)

Dada a utilização de tal conceito algébrico é necessário recorrermos à sua definição. A noção de grupo na lógica algébrica[25] é de um conjunto dos elementos que podem ser de qualquer natureza desde que exista, definido entre seus elementos, uma operação específica realizada entre eles e possua as seguintes características:

[25] Álgebra - parte da matemática que estuda as leis e processos formais de operações com entidades abstratas.

composição, associatividade, identidade, e reversibilidade. Na linguagem matemática tal definição fica assim traduzida:

*"Um grupo é um conjunto de elementos não-vazios G sobre o qual está definida uma operação binária * satisfazendo as seguintes condições:*

G1: Para quaisquer a, b e c em G, (a b) * c =a * (b * c)*

*G2: Existe um elemento i em G tal que, para todo a em G, a * i = a*

G3: Para cada elemento a de G existe um elemento a^{-1} de G tal que $a * a^{-1} = i$. (O elemento a^{-1} é chamado de elemento inverso de a.)" (EVES, 1995, p:569)

A descrição dos grupos[26] resume o desenvolvimento do espaço e principalmente do espaço sensório-motor[27]. Para o estudo deste desenvolvimento analisaremos o que Piaget denominou de espaços: prático, subjetivo, objetivo e representativo.

"A gênese do espaço, na inteligência senso-motora, é dominada inteiramente pela organização progressiva dos movimentos, e estes tendem efetivamente para uma estrutura de 'grupo.'"(PIAGET, 1958, p:149)

II.1 O ESPAÇO SENSÓRIO-MOTOR E AS RELAÇÕES ESPAÇO-GEOMÉTRICAS

No período sensório-motor a ação constituí-se na origem da formação de todos os conhecimentos, e é certo que existe um fator organizador desde os primeiros reflexos do bebê após o nascimento.

Os conhecimentos geométrico e físico, por exemplo, que estarão constituídos no adulto, começam com relações muito simples decorrentes de uma construção longa e laboriosa que tem início nos primeiros anos de vida, sendo que a possibilidade de conquista do espaço encontra-se nos movimentos e nas percepções.

---

[26] A maioria dos grupos do período sensório-motor parece ser não-abelino, ou seja, não se aplica a comutatividade. [Se A°B°C=A°C°B, B°A°C etc. for verdadeiro para quaisquer elementos do grupo é considerado abelino; se não é aplicada a comutatividade é considerado grupo não-abelino]

[27] Piaget classificou o desenvolvimento das estruturas da inteligência em períodos, estágios (estádios). Tal classificação não foi aleatória e levou em conta critérios como: a ordem de sucessão das aquisições, o caráter integrativo dos estágios, tal que cada estágio comporta preparações para o posterior e uma finalização para aquele que se finda etc..

unesp

Ao coordenar em ações os movimentos de seu corpo e dos objetos que estão ao seu redor, o bebê atinge o conhecimento sensório-motor que será a estrutura para que num futuro próximo (por volta dos doze aos dezoito meses) surja a representação, fundamental para a evolução da inteligência. Piaget denominou de função semiótica ou simbólica a função que possibilita evocar em pensamento os acontecimentos passados, os objetos ausentes, diferenciação de significantes de significados etc. Para este estudo, a importância da função representativa está no fato de possibilitar a estruturação das operações geométricas do pensamento.

Para apresentar como ocorre a construção das relações espaço-geométricas antes da representação, é necessário reconstruir os estudos dos grupos, pois, segundo Piaget, o processo de desenvolvimento das relações espaciais anteriores à representação está na lógica dos grupos.

O grupo prático ou heterogêneo[28], comporta as características relativas à primeira e segunda fase do desenvolvimento sensório-motor, onde ocorre o exercício dos reflexos que culmina com as primeiras adaptações adquiridas e a reação circular primária característica da segunda fase. Cronologicamente abrange o bebê desde o nascimento até por volta dos quatro meses.

O grupo subjetivo[29] comporta as características relativas aos comportamentos da terceira e início da quarta fase do desenvolvimento sensório-motor. A coordenação dos grupos práticos possibilita início da elaboração dos grupos subjetivos. A característica marcante deste grupo é a coordenação dos múltiplos espaços[30], e tem como fato crucial o progresso da visão e da preensão, que resultará na aquisição das reações circulares secundárias marcando a transição dos grupos práticos em subjetivos. Abrange, em média, os lactentes entre os quatro e dez ou onze meses .

O grupo subjetivo será uma transição entre o grupo prático e o grupo objetivo. Se no grupo prático, o sujeito e o objeto estão ligados pelo poder da ação reflexa; no grupo objetivo, o objeto irá constituir-se

---

[28] Grupo prático é um conjunto de deslocamento que o bebê realiza sem que tenha consciência da ação que realizou nem tão pouco do objeto ao qual está agindo, existe uma indiferenciação entre sujeito e objeto.

[29] Grupo subjetivo: *"o grupo subjetivo nada mais é do que um grupo de movimentos aparentes, o qual não dissocia ainda os deslocamentos do próprio sujeito e dos objetos. O grupo das operações reversíveis constitui, pelo contrário, um grupo objetivo, mas limitado às relações elementares entre o sujeito e o objeto."* (PIAGET, 1975b, p:170)

[30] *"o espaço* (da terceira fase) *ainda não contém o sujeito todo e permanece na dependência da ação em curso."* (PIAGET, 1975b, p:125)

como independente da ação do sujeito. O grupo subjetivo é a projeção dos grupos práticos, sendo necessário ressaltar que o objeto depende ainda da ação do sujeito e o espaço "ainda não contém o sujeito", necessitando da ação em curso para criá-lo. Embora a coordenação preensão-visão possibilite que o objeto inicie a sua mostra no espaço (o bebê se vê pegando, e pega-se vendo o objeto), ele continua a estar limitado pela sua zona de ação, sendo ainda um agregado de relações centradas no sujeito.

O grupo objetivo comporta as características relativas ao final da quarta fase, que compreende a coordenação dos esquemas secundários (coordenação de esquemas conhecidos) e sua aplicação às novas situações e quinta fase com a reação circular terciária e as "descobertas de novos meios por experimentação ativa" (conduta de suporte, do barbante e da vara). Para a criança é um período no qual o espaço experimental está constituído, falta-lhe levar em conta os deslocamentos que ocorrem fora do seu campo visual, *"o sujeito não se representa pelos seu próprios movimentos de conjunto, fora da percepção direta que deles tem."* (PIAGET, 1975b, p:188). Para constituir-se em grupo representativo falta-lhe a representação das relações espaciais entre os objetos e a representação do deslocamentos do seu próprio corpo.

O grupo representativo comporta as características da sexta fase, na qual se concretizam as relações espaciais, a construção do espaço que esteve direcionada das estruturas orgânicas internas para a exterioridade com o processo de assimilação. Neste momento dá-se a coroação de uma elaboração progressiva, que permite a supressão do espaço sensório-motor, conferindo mobilidade, chegando-se a um término que, na verdade, é um início para outro período infinitamente mais longo que abrangerá a representação em um nível superior.

No tocante às relações espaço-geométricas nos grupos práticos ou heterogêneos, as únicas relações possíveis são as topológicas.

Nos grupos subjetivos, na medida em que a coordenação visão-preensão permite o início da conservação dos objetos, pois o que é pego pode ser visto e vice-versa mesmo que somente durante a ação, tal coordenação possibilita numerosos esquemas de manipulação que são controlados pela visão inicialmente (3ª fase) e a coordenação das ações entre si posteriormente (4ª fase), o que vai possibilitar o início da conservação das formas e grandezas e, portanto, início das relações projetivas e euclidianas.

No que tange aos grupos objetivos, os objetos já se encontram constituídos. O bebê gira a mamadeira que não apresenta nenhum

indício que possa deflagrar pela ação reflexa a descoberta do objeto em função de seu uso. Os movimentos do bebê começam a diferenciar-se dos movimentos dos objetos. A uma mudança de posição não corresponde uma mudança de estado, o que mostra que as constâncias de forma e de grandeza são avaliadas mais ou menos corretamente, avançando com relação aos grupos subjetivos, o que indica uma melhor estruturação das relações projetivas e euclidianas.

Os grupos representativos serão aplicados cada vez mais em estabelecer as relações dos objetos entre si, onde a criança está inserida enquanto um objeto entre outros, o espaço torna-se representativo onde há constância de formas e grandezas dos objetos.

Piaget classifica as relações espaciais mais elementares denominadas de topológicas como sendo: **vizinhança, separação, ordem, circunscrição** e **continuidade**. Esta ordem se apresenta pelo grau de complexidade das relações.

A relação de **vizinhança** ou de **proximidade** é a mais elementar dentre todas as demais. Desde de que nasce, o bebê consegue perceber o mamilo que toca os seus lábios virando a boca na sua direção, bem como prender entre sua mão um objeto que a toque, o mesmo ocorre nos primeiros hábitos. Tais comportamentos, por mais simples que sejam, já comportam as relações de vizinhança. Segundo Piaget, quanto menor a criança maior é a aplicabilidade da relação de vizinhança em relação as outros fatores de organização. Com o desenvolvimento, as outras relações vão suplantar a vizinhança.

A relação de **separação** está diretamente ligada às de **vizinhança.** Dois objetos podem estar muito próximos, interpenetrados e estarem confundidos como um único elemento. Realizar a separação entre eles é dissociá-los ou mesmo distingui-los. O bebê ao perceber ao redor do seu berço pessoas a mirá-lo, encostadas ou sobrepostas umas às outras, para distinguir e separar suas silhuetas estará estabelecendo relações de separação. Inicialmente há uma percepção de conjunto confusa, sincrética. Na evolução com a idade e a melhora na organização das relações espaciais, os objetos irão se dissociando.

A relação de **ordem** implica em sucessão espacial. Objetos distribuídos em seqüência, que vão estar subordinados às duas relações anteriores simultaneamente, **vizinhança** e **separação**, estão subordinados às relações de **ordem**, pois para ordenar no espaço os objetos estão vizinhos e separados ao mesmo tempo. Quando o bebê vê as grades de seu berço, percebe-as próximas porém separadas e em



seqüência uma após a outra. Outros comportamentos como por exemplo olhar ou tocar os objetos seguidamente requerem as relações de ordem no espaço e no tempo.

A relação de **envolvimento** ou **circunscrição** dada na percepção elementar pode ser realidade a uma, duas e três dimensões. Quando em uma seqüência ordenada, o elemento B é percebido entre os seus vizinhos A e C, a relação de circunscrição ou envolvimento apresenta-se a uma dimensão. Em duas dimensões, tal relação pode ser exemplificada quando o bebê olha no rosto das pessoas que lhes são próximas: o nariz, a boca os olhos estão circunscritos nos limites do rosto. A terceira dimensão vai implicar em relações de interioridade, para tanto requer as três relações constituídas anteriormente (**vizinhança, separação** e diversos tipos de **ordem**). Apesar de ser dada perceptivamente a circunscrição na terceira dimensão (relação de interioridade) é mais complexa que a uma e duas dimensões justamente por isso. Um objeto dentro de uma caixa fechada, por exemplo, vai demandar organizações mais elaboradas, como veremos quando o bebê, na 4ª fase, não vê o bico da mamadeira, não realiza o giro para sugá-la. É como se o objeto fosse reabsorvido por uma realidade totalmente diferente, pois enquanto não houver a conservação da forma e da grandeza (na 4ª e 5ª fases) o objeto dentro de uma caixa deixa de existir.

A relação de **continuidade** é uma síntese das relações anteriores. Quando uma série de elementos encontram-se dispostos um seguido do outro, A, B, C D etc...os elementos vizinhos, separados, ordenados, circunscritos a uma dimensão podem estabelecer relações como: A = B, B = C, C = D etc..., mas onde A e B podem ser confundidos, assim como B com C, C com D etc..., mas onde A difere de C, B difere de D etc... o sujeito só terá a percepção de continuidade através do deslocamento realizado.

PIAGET (1975) adota a hipótese de que a conservação da forma e da grandeza não é dada desde a percepção inicial, mas construída. O que é dado são as relações acima citadas, tais relações são as classificadas pelos geômetras como as mais elementares e denominadas topológicas.

II.1.1 Os grupos práticos e heterogêneos

O grupo prático reúne os comportamentos observados na primeira e segunda fase do desenvolvimento sensório-motor, que é caracterizado por constituir-se como um espaço prático (no sentido de ser criado na e durante a ação, ou seja, no decorrer que durar a ação, fora dela nada existe), engloba uma coleção de múltiplos espaços (bucal, visual, auditivo, corporal etc...), ainda pouco coordenados, ao invés de constituir-se como uma totalidade comum onde os demais estão incluídos.

"No nível dos primeiros estados (reflexo e hábitos elementares), não poderíamos falar de um espaço comum aos diversos domínios perceptivos, pois há tantos espaços heterogêneos entre si quantos campos qualitativos distintos (bucal, visual, tátil etc...)." (PIAGET, 1958 , p:150)

Fazem parte deste grupo prático três tipos de comportamentos: o exercício dos reflexos (característicos da 1ª fase), as primeiras adaptações adquiridas e a reação circular primária.

Os primeiros comportamentos que apresentam as características de grupo são relativos ao espaço bucal, o deslocamento da boca, o ajustamento do polegar e da boca, os ajustamentos dos objetos e da sucção.

No exercício dos reflexos temos a criação de uma coleção de diferentes espaços desligados e organizados em torno das diferentes áreas sensório-motoras de atividade, que são frutos de feixes perceptivos. É no exercício e na repetição (funcionamento) que estes irão se consolidar e se reforçar, o que possibilitará o processo de adaptação. Ocorre inicialmente a assimilação funcional que irá possibilitar a incorporação (assimilação) dos objetos em conseqüência de seu funcionamento, sugar o seio materno implica na repetição constante de sugar. Mas a necessidade de repetição é apenas um dos lados de um processo muito mais geral que é a assimilação. A assimilação é a propensão do reflexo em incorporar nele todo e qualquer objeto que lhe seja um excitante externo. Dois fenômenos são de importância básica para os progressos da assimilação: a assimilação generalizadora e a assimilação recognitiva.

"a 'assimilação generalizadora', isto é, a incorporação de objetos cada vez mais variados ao esquema do reflexo." (PIAGET, 1975a, p:43)

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Podemos assim perceber que o reflexo tenta incorporar qualquer estímulo externo que o excitar. A criança suga tudo o que roçar as cercanias dos seus lábios: lençol, travesseiro, as próprias mãos etc...

O segundo fenômeno referente ainda às assimilações das primeiras semanas é a assimilação recognitiva, que assinala um pequeno progresso em relação à generalizadora no sentido de realizar um "reconhecimento prático", por exemplo: quando o bebê está faminto não adianta tentar "iludi-lo" com outros tegumentos que não o mamilo (ele os recusará); com isso não estamos dotando-o do poder de reconhecimento do mamilo dentre outros objetos:

"o bebê descobre, simplesmente , um complexo sensório-motor e postural específico (sucção e deglutição combinadas), entre os complexos análogos que constituem o seu universo e são testemunho de uma indiferenciação total entre o sujeito e o objeto. Por outras palavras, esse reconhecimento elementar consiste, na mais estrita acepção da palavra, numa 'assimilação' do conjunto de dados presentes numa organização definidas, tendo já um funcionado e só dando lugar a uma discriminação atual graças ao seu funcionamento passado. Mas isso basta para explicar em que medida a repetição reflexa leva, por si mesma, a uma assimilação recognitiva que por muito prática que seja, constitui o início do conhecimento." (PIAGET, 1975a, p:46)

Ao observador estes comportamentos se apresentam como avalizando o conceito de grupo. Ao sugar a pele ao redor do mamilo, por exemplo, e refutá-la, dá-se a nítida impressão de que o lactente está realizando uma operação passível de corresponder aos quesitos de um grupo, mas ao bebê sabemos que são reconhecimentos devido às ações de assimilação e acomodação ao seio e aos objetos que ele suga, o que se constitui num grupo prático. Mesmo que dentro de sua praticidade elementar já se apresente como característica de grupo a quem os observa.

Aos comportamentos caracterizados anteriomente como sendo dos reflexos superpõem-se por volta do segundo e terceiro meses novos elementos do meio, que são incorporados aos esquemas reflexos já consolidados, não sendo associações impostas pelo meio, mas relações que o lactente descobre e cria no decorrer de suas explorações:

unesp

"... na acepção restrita de Wallon: exercício funcional que culmina na manutenção ou redescoberta de um novo resultado interessante." (PIAGET, 1975a, p:63-64)

Essas novas adaptações são chamadas reações circulares: a protusão da língua e a sucção dos dedos são exemplos que apresentam o prolongamento do exercício dos reflexos, que comportam a aquisição de algum elemento exterior, pois não existe o reflexo de sugar os dedos, mas simplesmente o reflexo de sugar. Tais aquisições implicam em um elemento de atividade do sujeito que retém algo exterior a ela e transforma-se em função de sua experiência.

"A reação circular é, pois, um exercício funcional adquirido, que prolonga o exercício reflexo e tem por efeito alimentar e fortificar não já um mecanismo inteiramente montado, apenas, mas um conjunto, sensório-motor de novos resultado, os quais foram procurados com a finalidade, pura e simples, de obtê-los." (PIAGET, 1975a, p:73)

O deslocamento da boca, o ajustamento ao polegar, o ajustamento dos objetos apanhados com vistas à sucção se encaixam em tais características, e para o observados vão constituir-se em grupos, mas para o bebê é um prolongamento da assimilação e da acomodação que começam a se diferenciar.

"De modo geral, todo conjunto coordenado de deslocamentos suscetível de retorno ao seu ponto de partida e cujo estado final não dependa do caminho percorrido constitui um grupo; as acomodações simples da boca ao mamilo e as coordenações elementares da boca e das mãos encontram-se, pois, neste caso." (PIAGET, 1975b, p:102)

O mesmo ocorre com relação ao espaço visual: o lactente muito precocemente segue com o olhar uma fonte luminosa, ou a mãe que está ao redor do seu berço. O que se apresenta como "seguir com o olhar" comporta a mesma lógica do espaço bucal, a acomodação aos movimentos percebidos dá margem ao observador para o enquadramento de tais fatos no conceito de grupo, pois de fato tais atividades se ordenam como tal, mas é necessário lembrar que a criança nesta fase não se concebe enquanto sujeito a olhar, não percebe o movimento dos seus olhos, mas percebe as impressões perceptivas sensoriais mais ou menos estáveis que prolongam a acomodação.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Feitas tais considerações podemos apresentar três operações que se encaixam ao conceito de grupo prático: seguir os movimentos de translação, reencontrar a posição dos objetos e avaliar as distâncias em profundidade.

Os movimentos de translação que o bebê segue podem ser analisados a seguir:

"Obs. 30. - Laurent, até 0;0 (21), é capaz de realizar apenas movimento mal coordenados da cabeça, notados há pouco a respeito da percepção de luzes e testemunhando, simplesmente, uma busca para fazer perdurar a excitação. Ao 0; 0 (21), pelo contrário, segue pela primeira vez com olhar um fósforo que se desloca a 20 cm dos seus olhos, na penumbra. Ao 0;0 (23), está deitado, a cabeça repousando sobre a face direita: mostro-lhe os meus dedos a 20 cm e segue-os até voltar todo para a esquerda. - Ao 0;0 (25), a mesma experiência faço a sua cabeça descrever um ângulo de 180°, num sentido e no seu inverso enquanto acompanha atentamente o movimento do objeto." (PIAGET, 1975a, p:71)

O bebê que acompanha o deslocamento do fósforo aceso não tem consciência do que realiza; ele segue o que estiver no prolongamento do movimento de acomodação imediatamente anterior. Caso o objeto seguido desviasse um pouco da trajetória original, o quadro visual seguido não seria reencontrado, nem tampouco seria realizada qualquer tentativa no sentido de procurá-lo.

A assimilação primitiva e inicial do objeto à própria atividade do olhar do lactente irá converter-se, paulatinamente, em projeção no espaço, e em visão do objeto. Por hora, consiste em exercício funcional e o objeto é assimilado à atividade do sujeito. As explorações realizadas quando o bebê olha demoradamente ao seu redor são da mesma ordem; tal exercício consiste nas reações circulares, o que legitima as características de grupo prático, posto que só existe em função da ação do sujeito.

No tocante à localização dos objetos desaparecidos, sabemos que eles são por hora fruto da ação prática sem representação mental: o objeto existe enquanto a ação se realiza, portanto fora do seu campo e ação visuais, o objeto não existe e não há espaço visual, ocorrendo novamente o prolongamento do movimento de acomodação: o bebê volta à posição inicial do objeto. Se para quem observa tal fato (o lactente "procurar" o objeto desaparecido) representa ser um grupo, para o bebê é mais uma vez uma simples assimilação reprodutora, não tendo o objeto "uma posição", mas sendo a sua própria posição inicial que é o que vai ser olhado.

unesp

No tocante à avaliação das distâncias em profundidade, elas requerem, além de condições puramente perceptivas, uma relação recíproca dos movimentos dos objetos, que fornecem uma estimativa prática das suas distâncias respectivas. Sabemos que tais relações ainda não estão constituídas, pois os grupos de deslocamento ainda não estão formados e são eles que possibilitarão a comparação do movimento aparente de um corpo distante contra um fundo ainda mais distante quando visualizado a partir de duas posições diferentes, que é o conceito de paralaxe[31] . Neste período o lactente não tem noção de perspectivas do tipo "atrás" e "em frente", que serão uma conquista da próxima fase, ou seja, uma aquisição da coordenação visão e preensão que dará início à constituição do grupo subjetivo.

Estes fatos nos levam a concluir que, quanto à avaliação de profundidade, ocorre o mesmo comportamento que os anteriores: o bebê realiza acomodações orgânicas, no momento da ação visual e isoladas em profundidade, mas onde não ocorre qualquer consciência de profundidade, o que pode ocorrer é uma percepção da profundidade na ação. Outro fato a ser citado é a convergência binocular que pode ocorrer até mais ou menos 9 meses, fato que atesta a dificuldade do bebê em acomodar seus olhos nos objetos para as relações recíprocas de perspectiva.

O estudo dos grupos práticos e heterogêneos nos apresenta um panorama onde a criança cria o espaço em função das ações que ela realiza, o que à vista de um observador atesta a condição de grupos, pois o lactente perde e encontra uma imagem visual, desloca a boca para ajustar-se ao mamilo etc.. Essas adaptações (reações circulares primárias) são a preparação para os fatos que irão caracterizar a fase posterior, onde a coordenação crescente entre os esquemas e conseqüentemente dos espaços devido principalmente a coordenação visão e preensão, vão transformar o espaço heterogêneo das fases iniciais em um espaço onde a criança começa a ter consciência parcial do papel que suas próprias ações desempenham nos resultados obtidos. Por exemplo: quando a criança aproxima e afasta um objeto do seu rosto, esse resultado é compreendido no limite da atividade

---

[31] *"Seja, por exemplo, uma montanha a 3 km de mim, árvores a 30 metros e a minha mesa de trabalho a 30 cm, que percebo como objetos sobreposto; ao menor dos meus movimentos laterais da cabeça, vejo a minha escrivaninha deslocar-se ao máximo, as árvores um pouco menos e a montanha quase nada, donde poderia concluir que a montanha é o mais distante desses três objetos e a mesa o menos, mesmo que eu não tivesse qualquer outra experiência à minha disposição no tocante às distâncias relativas."* (PIAGET,1975b, p:104)

unesp

momentânea, mas tal comportamento é referente à 3ª fase e aos grupos subjetivos.

Como vimos, a falta de coordenação dos diversos espaços e particularmente visão-preensão impossibilitam uma totalidade de espaços coordenados, portanto inviabilizam a permanência de objetos assim como de suas formas e grandezas.

Piaget afirma que as relações espaciais perceptivas mais elementares dos grupos práticos são as relações topológicas[32] sendo as primeiras que o bebê estabelece.

Ao buscar o "lado bom" para a sucção, ao virar na direção da fonte sonora ou luminosa, após deflagrada as ações reflexas por um estímulo, as relações de vizinhança ou proximidade, interioridade e exterioridade dos elementos percebidos são estabelecidas (principalmente o espaço bucal). Ainda que sendo uma busca na ação prática, as relações estabelecidas (**vizinhança, proximidade, envolvimento** etc) são características da topologia, não havendo possibilidade alguma de serem de conservação de formas ou de grandezas, relações projetivas nem tampouco euclidianas.

A falta de objetos permanentes e de um espaço homogêneo atesta a primazia topológica das relações espaciais, pois os objetos percebidos são quadros deformados sem formas e grandezas definidas (relações geométrica euclidiana[33]), que não estão situados em profundidade uns em relação aos outros (relações geométricas projetivas[34]).

A definição das formas ocorre quando, estando perto ou distante de um objeto, percebe-se que suas formas reduzidas são devido ao distanciamento do observador e do objeto (paralaxe), o que o lactente desta fase não faz ainda. Por outro lado o distanciamento dos objetos pode ser percebido em relação ao número de objetos que se impõe

---

[32] Segundo LOVELL, 1988, as relações topológicas são relações mantidas quando figuras são esticadas, dobradas, comprimidas, e que persistem sem romper relações de vizinhança ou proximidade, separação,ordem ou sucessão espacial, circunscrição ou cercania ou fechamento e continuidade de linhas ou superfícies. Perde-se as relações de extensão, ângulo, área, volume, ponto, linha etc.

[33] Segundo Lovell relações euclidianas são relações que envolvem as figuras quanto à sua magnitude , como comprimento, tamanho de ângulos, áreas, volume etc. Quando uma figura é deslocada mantém exatamente a mesma forma, podendo alterar somente sua posição, mas não sua mensuração.

[34] Segundo Lovell as relações projetivas são intermediárias entre as topológicas e euclidianas, nas transformações projetivas, os comprimentos e ângulos são distorcidos até certo ponto, dependendo da posição relativas aos objetos desenhados. Não obstante, as estruturas geométricas do original podem ser reconhecidas na pintura ou na visão distanciada, pois certas propriedades são mantidas invariantes.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

entre o observador e o objeto em questão, dado que o bebê não se reconhece enquanto sujeito nem objeto: as relações projetivas e euclidianas são inviáveis.

"Em conclusão, o espaço do período I[35] *parece não comportar senão relações pré-projetivas e pré-euclidianas, que se assemelham às relações topológicas elementares. Mas trata-se de uma topologia perceptiva e motriz, e sobretudo radicalmente egocêntrica no sentido de que as relações percebidas não se dissociam da atividade do sujeito: quer as figuras se modifiquem por razões exteriores (movimento dos objetivos) ou por razões ligadas ao corpo próprio, não há, para ele, meio algum de distingui-lo."* (PIAGET, 1993, p:26)

II.1.2 Os grupos subjetivos

A crescente coordenação visão e preensão possibilitará um novo mundo, uma nova composição entre os espaços, onde a coordenação dos grupos será a fonte para a reestruturação do real. Agindo sobre as coisas com as mãos, o bebê estará iniciando o estabelecimento de relações entre os "objetos"[36] .

Os progressos da preensão e da visão levam a criança a ver-se agindo com as mãos sobre as coisas, a manipular ativamente os objetos, o que irá se constituir nas reações circulares secundárias, que se iniciam quando a criança percebe que um efeito casual resultou desta ação, tentando repeti-lo. Para "agir" ela se utiliza das relações entre as coisas, o que anteriormente se resumia em uma relação entre as coisas e o funcionamento de órgãos. Tal avanço marca a evolução das reações circulares primárias que estavam circunscritas à relação coisa e o funcionamento dos órgãos (sugar por sugar, olhar por olhar etc.), passando a ser a relação entre coisas o que caracteriza as reações circulares secundárias.

"A única diferença entre as reações secundárias e as primárias é, por conseguinte, que o interesse está centrado, doravante, no resultado exterior e já não na atividade como tal, pura e simplesmente." (PIAGET, 1975 a, p:174)

---

[35] Piaget, na obra citada, classifica o espaço perceptivo ou sensório-motor em três períodos: o primeiro (I) referente ao primeiro e segundo estádios do desenvolvimento sensório-motor, o segundo (II) ao terceiro e quarto estádios, e o terceiro (III) quinto e sexto estádios.

[36] É necessário salientar que durante os grupos subjetivos, como o próprio nome sugere, na terceira fase, os objetos ainda estão presos às ações do bebê, há um começo de permanência prolongando os movimetos de acomodação, e permanência graças à própria ação do sujeito.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

A própria ação do bebê sobre os objetos é fator de projeção dos grupos práticos em grupos subjetivos, mas apesar do progresso destas coordenações o sujeito não reconhece suas ações para além dos limites do imediato, independente do objeto. A limitação da presente fase está justamente na organização que ela realiza, por se tratar de uma organização onde a criança não diferencia a ação do objeto, não organizando assim o espaço de forma objetiva como um continente onde estão os objetos e o próprio bebê enquanto um outro objeto.

"... o objeto seria concebido como sendo uma espécie de prolongamento da ação e sua própria trajetória seria assimilada à que é seguida pelas mãos da própria criança: semelhante grupo está situado a meio caminho entre o grupo prático e o grupo objetivo que designaremos de grupo 'subjetivo'." (PIAGET, 1975b, p:111)

A projeção dos grupos semipráticos e semi-subjetivos, decorrentes do progresso da preensão coordenada com a visão, são revelados em quatro comportamentos que são analisados para mostrar como ocorre o progresso gradativo da organização espacial: a preensão interrompida, acomodação do olhar aos movimentos de translação, posições dos objetos e movimentos e rotação.

Piaget descreve a transição dos grupos práticos e heterogêneos que, a partir da coordenação preensão e visão, possibilitarão um grande avanço para o desenvolvimento das relações espaciais.

A preensão interrompida constitui-se em movimentos de pegar e largar o objeto repetidas vezes, mas este objeto só é pego se estiver no prolongamento dos movimentos de acomodação e se sua trajetória estiver assimilada à trajetória da mão, ou seja, se a criança já esboçou a ação de pegar o objeto ocorre a preensão; ao contrário, no caso de ter que realizar uma busca no espaço circundante, cessará a preensão. Assim o objeto está constituído como um prolongamento da ação, um "quadro à disposição" das ações que prolongam a atividade do bebê, e não um "objeto real" localizado no espaço independente da sua (do bebê) trajetória, que se constitui num agregado de relações realizadas pelo sujeito.

O segundo grupo analisado é da acomodação do olhar aos movimentos de translação. Tal comportamento já foi descrito no grupo prático, mas realiza um progresso em relação ao anterior: o bebê reencontra o objeto, mesmo que este objeto esteja animado de

unesp

movimento rápido, o que não ocorria anteriormente. Tal avanço é fruto do prolongamento do próprio ato da acomodação do olhar.

No tocante aos comportamentos das posições dos objetos, o mesmo fato se repete, ou seja, ao observador menos informado os comportamentos apresentados demonstram que a criança se diferencia dos objetos, atribuindo-lhes objetividade e conseqüente espacialidade, que são características dos grupos objetivos, pois os olha para em seguida olhar outros objetos e volta a olhá-los novamente, o que configura tais características:

"Aos 0;6 (1), durante uma viagem de automóvel, ele examina um limão situado numa rede, sobre sua cabeça. Sacode a cabeça para um lado e outro lado, enquanto olha o objeto etc. Incontestavelmente distraído pela paisagem, pelos ruídos etc., reencontra contudo, sem hesitação, o lugar do limão, desde que não esteja com sua atenção ocupada por outros incidentes." (PIAGET, 1975b, p:116)

Mas a aparente diferenciação dos objetos e sua espacialização é na verdade uma memória das posições ligadas à atividade do sujeito, sendo a própria característica da reação circular que prolonga um esquema pré-existente, portanto, essencialmente conservadora e assimiladora, mas prática, sendo concebida só na ação do sujeito.

As duas primeiras condutas analisadas apresentam as mesmas características, apesar de estarem relacionadas a espaços diferentes. Devido ao prolongamento do próprio ato da acomodação, quanto às posições dos objetos que a criança volta a reencontrar após ter direcionado seu olhar para outros objetos, reencontra-os graças à memória da posição, e o que a criança reencontra é somente sua própria ação inicial em relação ao objeto, e não a relatividade entre eles. Podemos concluir, portanto, que tais grupos existem em função da ação do bebê, o que atesta a sua subjetividade.

O quarto comportamento traz uma riqueza ímpar de situações a serem analisadas, pois os movimentos de rotação irão caracterizar mais fielmente os avanços e limites da 3ª fase de desenvolvimento do espaço.

Os movimentos de rotação que o bebê imprime aos objetos quando os passa de uma mão à outra revela-se como uma oportunidade sem precedentes para a análise dos avanços da coordenação entre os múltiplos espaços (tátil, visual e gustativo), e fonte de exercício para

unesp

que o bebê possa incorporar novo dados aos seus esquemas já existentes.

Os movimentos aplicados aos objetos para a rotação na presente fase apresentam um domínio no plano da ação motora, pois o objeto colocado no contato com os lábios terá determinada face que apresentará uma posição favorável à sucção, uma posição privilegiada em relação as realizadas anteriormente, a qual o bebê irá encontrar novamente sem intencionalidade. O bebê não imagina como encontrou a "boa" posição, limitando-se a reencontrá-la ao acaso, pela acomodação motora do objeto aos seus esquemas já constituídos.

O exemplo da mamadeira, quando o bebê realiza várias correções para que possa chegar à sucção constitui-se em uma situação em que se pode constatar os avanços e limites do presente grupo, pois implica vários espaços coordenando-se simultaneamente. O bebê vê-se a realizar ações, ao mesmo tempo que limitado pela falta de coordenação dos deslocamentos do objeto independente da sua ação, bastando o objeto sair do campo de percepção para deixar de existir, ou mesmo que seus movimentos sejam diferentes dos habituais para deixar de ser coordenados e compreendidos. As correções que o bebê realiza são referentes àquelas dos seus próprios movimentos e não correções dos movimentos do objeto, portanto tal grupo permanece dentro da subjetividade do sujeito que as realiza.

Piaget demonstrou que é necessário esperar até os 0; 9 meses para que o bebê consiga, sem ver o bico, virar a madeira, pois até então na falta da visão do bico a inversão não se realiza.

Ao ver a mamadeira, Laurent entre 0;7 e 0;8 (24) consegue puxá-la para si. A mamadeira é apresentada por diversas vezes: na vertical, na horizontal inclinada, sendo que ele deve rodá-la à esquerda e à direita simultaneamente, com uma pequena parte do bico visível etc. Todas estas posições apresentam a mesma particularidade: o bico ou uma pequena parcela dele é visível, isto basta para o sucesso da rotação. Estas rotações levam, após a correção, a sucção, e assim o pequeno alcança seu objetivo que é mamar. Em uma outra abordagem, a mamadeira é apresentada pelo fundo, e o bico fica oculto. O bebê não a reconhece, se aborrece e chega a sugar o fundo da mamadeira (o vidro), e por momento algum tenta reverter tal posição, o que nos leva a constatar que o objeto existe enquanto é percebido a parte que deve ser alcançada com a boca, o que atesta o caráter subjetivo do grupo.



"Esse comportamento é típico da não-conservação do objeto, leva, assim, a uma não conservação das próprias partes da mamadeira, isto é, a uma não conservação da forma." (PIAGET, 1958, p:147)

O bebê não apresenta dificuldade motora para reverter o objeto, bastando que uma parte do bico esteja no seu campo visual. Tal rotação deve-se a permanência da mamadeira (ou de qualquer outro objeto), graças à própria ação do bebê, muito embora a preensão habilite uma solidez superior a do "objeto primitivo" das primeiras fases.

As correções manuais de posição efetuadas (girar à esquerda ou à direita) são derivadas das próprias ações da criança. Mesmo tendo características aparentes de uma rotação, o bebê não entende como realizou tal tarefa, mas a sua necessidade em repetir resultados exteriores com seus atos já implica em uma permanência e regularidade cinemática para que se dê conta dos próprios objetos, e já ocorra um início de objetivação e transposição da própria ação para os deslocamentos percebidos nas coisas, o que ocorrerá na próxima fase, e que implicará na objetivação inicial do espaço:

"os movimentos estão centrados num resultado produzido no meio exterior e a ação tem como única finalidade manter esse resultado." (PIAGET, 1975b, p:154)

Mas, restando qualquer dúvida quanto ao caráter subjetivo dos grupos apresentados, a análise das relações espaciais entre os objetos se põe como decisiva. Para que os grupos se constituam em objetivos duas condições devem ser atendidas: os objetos devem ordenar-se entre si em profundidade, ou seja, na terceira dimensão, e devem ter adquirido simultaneamente forma e grandeza constante.

No que concerne à profundidade, o progresso da visão - preensão equipa a criança para que ela realize uma diferenciação de ordem prática nas relações de profundidade[37], onde o espaço próximo é o dos objetos de formas e dimensões normais, no qual os movimentos da mão podem realizar "experiências"[38], e o espaço que está fora do seu campo de atuação é o espaço das dimensões e formas distorcidas, e

---

[37] Será somente quando a criança coordenar os deslocamentos que ela irá atribuir profundidade ao espaço.

[38] PIAGET, 1975b, p:136.

unesp

que se iguala ao espaço prático das duas fases iniciais, com a ausência de planos de profundidade e de grupos subjetivos.

Diz Piaget:

"o 'espaço longínquo' mantém-se análogo ao que o céu significa para a percepção imediata, enquanto o 'espaço próximo' se apresenta a nossa percepção do meio terrestre, no qual os planos de profundidade se ordenam em função da ação. Porém o céu concebe-se, nesse caso, como algo que envolve de perto o sujeito e que só muito progressivamente vai recuando. Antes da preensão dos objetivos visuais, a criança está no centro de uma espécie de esfera móvel e colorida, cujas imagens a aprisionam sem que possa exercer qualquer ascendência sobre elas, salvo fazendo-as reaparecer graças aos movimentos da cabeça e dos olhos. Depois, quando começa a agarrar o que vê, a esfera dilata-se pouco a pouco, e os objetos agarrados ordenam-se em profundidade, relativamente ao corpo da própria criança; então, o "espaço longínquo" surge, simplesmente como uma espécie de zona neutra onde a preensão ainda não se aventurou, enquanto o 'espaço próximo' já é o domínio dos objetos de agarrar." (PIAGET, 1975b, p:137)

Os grupos subjetivos suplantam os grupos práticos das fases anteriores, pois implicam uma tomada de consciência em relação ao objeto que o bebê vê-se agindo. São intermediários entre os grupos práticos e os grupos objetivos, mas ainda estão revestidos de permanência relativa às ações da criança, muito embora tenham conquistado uma permanência maior em relação à do objeto primitivo confinado à ação dos reflexos das fases anteriores.

Na ausência do contato para deflagrar a repetição do resultado interessante voltam a ser "atos mágico-fenomênicos"[39], descaracterizados de qualquer caráter físico e espacial.

A percepção dos objetos mesmo na ação já prenuncia a passagem à categoria de grupo objetivo, mas faltam-lhe três condições fundamentais para a efetivação: a existência de objetos substanciais, diferenciação dos deslocamentos externos e dos próprios deslocamentos do bebê e a exteriorização das relações espaciais onde o sujeito possa situar-se ele próprio no espaço.

A manipulação dos objetos que passam de uma mão a outra e cruzam o espaço visual possibilitam a análise das formas. Como visto anteriormente, os objetos na 3ª fase possuem permanência no prolongamento dos movimentos de acomodação, e sofrem rotações

---

[39] *"a 'reação circular secundária' prolonga-se assim, simplesmente, em atos mágico-fenomenistas destituídos de todo e qualquer caráter físico e espacial."* (PIAGET,1975b,p:126)

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

acidentais. O bebê descobre por acaso um lado favorável à sucção. Não existe propriamente uma rotação, mas uma posição privilegiada, a qual a criança reencontra sem imaginar como aconteceu tal fato. Se não ocorre uma rotação intencional, assim mesmo ela possibilita a percepção dos diferentes aspectos sucessivos, e a busca do lado favorável à sucção, à visão ou ao tato.

O objeto que passa de uma mão à outra, e é visto, difere do objeto distante ou tocado sem ser visto (da fase anterior): o primeiro é um objeto que adquire constância e solidez, enquanto o segundo é um objeto plástico e deformável.

A distinção entre um espaço próximo e o espaço longínquo apresenta o início de relações projetivas e euclidianas, no sentido de que os objetos que são pegos implicam em noções de profundidade, a percepção dos movimentos do objeto e da mão que opera sobre o objeto implica em tais relações.

A repetição de experiências para pegar objetos cada vez mais distantes, mas no alcance da criança já que ela ainda não se locomove sozinha, leva a uma melhor avaliação das distâncias dos objetos próximos, enquanto o espaço longínquo é o dos objetos distorcidos sem formas e grandezas constantes análogo à fase anterior, e sem relações projetivas e euclidianas.

"a criança descobre, no decurso da terceira fase, o distanciamento dos objetos e sua ordenação em profundidade, em relação ao seu próprio corpo." (PIAGET, 1975b, p:142)

A 4ª fase marca o início da permanência objetiva e, em conseqüência, a aquisição da grandeza constante dos sólidos da perspectiva das relações em profundidade e da busca do objeto oculto por uma cortina; é uma fase intermediária entre os grupos subjetivos e objetivos.

Neste período a criança põe-se a experimentar a aproximação de objetos que avançam e recuam nos limites do seu rosto, de efetuar movimentos lentos com a cabeça para examinar as diferentes perspectivas, a revirar os objetos por si mesma adquirindo a noção de reverso o que implica em forma constante.

É durante esta fase que o bebê se torna capaz de imprimir rotações à mamadeira que lhe é apresentada pelo reverso, *"A rotação 'objetiva' foi, portanto, adquirida, assim como a noção de 'reverso' do objeto"* (PIAGET, 1975b, p:153), o que atesta a aquisição da forma constante



de um sólido que, mesmo visto sem nenhum indício que acarreta sua busca, é reconhecido atestando também a noção de reverso.

"É assim que a construção das constâncias perceptivas atesta a existência de toda a elaboração espacial ao mesmo tempo projetiva e euclidiana no único plano da ação motora." (PIAGET, 1993, p:27)

Apesar dos avanços dos grupos subjetivos será somente com a quinta fase, já nos grupos objetivos, que o bebê irá procurar os objetos considerando seus deslocamentos sucessivos, e que o grupo estará constituído enquanto objetivo.

II.1.3 A transição entre os grupos subjetivos e os grupos objetivos

A 4ª fase é caracterizada por comportamentos intermediários entre os grupos subjetivos e os grupos objetivos. Durante este período o bebê torna-se capaz de realizar operações reversíveis, tais como: esconder e encontrar objetos atrás de uma cortina, descobrir a grandeza constante dos sólidos e a constância das formas, a perspectiva das relações em profundidade e a permanência do objeto escondido. Tais conquistas apresentam um grande progresso em relação às fases anteriores, mas ainda não ocorre a generalização das descobertas para a construção de grupos com maior complexidade, pois a criança não considera os deslocamentos sucessivos do objeto, estando presa aos deslocamentos que ela presencia e, que de certa forma, ainda dependa de sua ação.

A novidade dos comportamentos apresentados está na "aplicação de meios conhecidos a novas situações", o que se constitui em aplicar e combinar de nova maneira os esquemas já existentes. Ao se defrontar com novos problemas o bebê utiliza-se de esquemas já adquiridos, ajustando-os isoladamente ou subordinando-os em atos complexos.

O grupo mais primitivo observado na 4ª fase é referente ao comportamento de esconder e encontrar objetos sob uma cortina, mesmo que não haja nenhum indício do objeto, nem tão pouco prolongue qualquer movimento já esboçado como nas fases anteriores.

O esconder e encontrar o objeto atende às exigências do conceito de grupo, pois responde à reversibilidade, mas como classificar tal grupo? É um grupo objetivo, pois já existe uma

unesp

permanência substancial. O bebê procura o objeto sob a cortina mas em contrapartida basta que o objeto seja deslocado de sua posição inicial para que já não seja encontrado, voltando a ser procurado no local depositado primeiramente, sem levar em conta o deslocamento efetuado posteriormente, o que atesta a necessidade de estar ligado a ação do sujeito, portanto um grupo subjetivo.

"Obs. 85 - Lucienne, aos 0;10 (3), esconde os pés num cobertor, depois levanta-o, olha de novo para os pés, volta a escondê-los etc.

A mesma observação aos 0;10 (5), com o chocalho que ela mete sob um tapete, para logo o retirar, voltar a meter etc. um sem número de vezes." (PIAGET, 1975b, p:144)

A descoberta da constância das formas[40] e dimensões está muito próxima ao comportamento anterior (esconder e encontrar um objeto), a criança aproxima e afasta um objeto do seu rosto, como se realizasse "explorações", pois, ao aproximar e afastar os objetos do rosto, estes mudam de tamanho e de forma, opondo-se a invariabilidade das dimensões táteis.

"Obs. 86 - Lucienne, aos 0;10 (7) e dias seguintes, aproxima lentamente o rosto dos objetos que segura nas mãos (chocalhos, bonecas, etc.) até encostar no nariz contra eles. Depois afasta-se observando-os com maior atenção, e recomeça sucessivas vezes.

Aos 0;10 (12), faz o mesmo, mas acercando e afastando com a mão um boneco (pintinho), uma vara, um chocalho etc." (PIAGET, 1975b, p:146)

Outro avanço da 4ª fase é a "descoberta da perspectiva ou da mudança de forma resultante das diferentes posições da cabeça": a criança ao realizar certos movimentos reversíveis com a cabeça descobre a perspectiva ou mudança de forma resultante de tais posições. Se retornarmos à fase anterior, a criança já exercia tal comportamento para olhar os quadros visuais que estavam ao seu redor, mas eram movimentos rápidos sem distinção entre os movimentos que ela realizava e os movimentos dos objetos exteriores. Na presente conduta, os deslocamentos são lentos e sistemáticos e a

---

[40] A 4ª fase marca o início da permanência dos objetos e conseqüentemente das formas, volumes e figuras assim como sua grandeza. Tal aquisição implica no início das relações euclidianas e projetivas, a primeira é construída sob a coordenação da perspectiva do objeto (por exemplo virar a mamadeira mesmo sem ter visto o bico), a segunda constrói-se nas constâncias das dimensões do objeto (que guarda as magnitudes como comprimento, tamanho de ângulos, áreas e volumes).

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

criança parece estudar o resultado interessante dos seus movimentos em relação à forma dos objetos.

A diferença entre os dois comportamentos nos parece ser de que na 3ª fase (reações circulares secundárias) eram essencialmente ações sobre os objetos reproduzindo pura e simplesmente os resultados obtidos por acaso; já na quarta são experiências para "compreensão" das novas propriedades do objeto, "aplicações de meios conhecidos a novas circunstâncias", característico das reações circulares terciárias, há um esforço para coordenar os diferentes esquemas e não um esforço de aplicação de um esquema.

"Obs. 91 - Jacqueline, aos 0;11 (23), está na sua cadeira de balanço e vê seus pés saindo por uma das aberturas do assento por onde se enfiam as pernas. Observa-os com muito interesse e um espanto visível, depois desvia os olhos desse espetáculo para se debruçar sobre a borda da cadeira e reencontrar seu pé visto do lado de fora. Após retorna à abertura e observa o mesmo pé segundo esta perspectiva. Alterna, assim, cinco a seis vezes, os dois pontos de vista." (PIAGET, 1975b, p:150)

Mas apesar do progresso em relação aos comportamentos anteriores, o grupo apresentado mesmo tendo características de grupo objetivo, quando o sujeito põe-se a olhar alienadamente para um lado, para o outro e volta à posição inicial, não ultrapassa o nível das operações reversíveis. O movimento lateral da cabeça ainda que encontre em cada posição uma particularidade do objeto não ordena os seus deslocamentos entre si, e as reações circulares terciárias são característica do esforço para apreender as novidades em si mesmas, da fase posterior.

"...não se pode ainda falar de grupos objetivos na plena acepção do termo, tanto mais que a consciência dos movimentos laterais da cabeça ainda não implica a dos movimentos de avanço e recuo, ***a fortiori,*** *a dos movimentos do corpo (se uns e outros devem ser concebidos, efetivamente, como deslocamentos no espaço e não só como esforços musculares)."*(PIAGET, 1975b, p:152)

A observação de um mesmo objeto sob ângulos visuais diferentes remete-nos à análise das rotações: na 3ª fase a criança reencontra o "lado bom" por acomodação, ao perceber por acaso o lado privilegiado para a sucção, preensão etc. sem que haja intencionalidade ou consciência da rotação em si. Na presente fase, a

unesp

criança aprende a revirar o objeto, o que constitui a noção de reverso e, por conseguinte, a sua forma constante.

Ao estar dotado de reverso, o objeto adquire o caráter tridimensional, portando altura, largura e comprimento (e portanto projetivo e euclidiano), *"doravante dotado de um 'reverso' invisível, o qual completa intelectualmente os dados imediatos da percepção, situando-o numa 'forma' constante e, portanto, inteligível."* (PIAGET, 1975b, p:154).

Os avanços são notáveis: o grupo passou de subjetivo, porque estava subordinado à ação do sujeito que encontra o lado bom, a "objetivo" porque relativo aos lados do próprio objeto. Apesar da aquisição do caráter objetivo do móvel, este continua preso à mão que segura o objeto, o que reduz o grupo a um sistema de operações reversíveis, pois falta à criança inverter os objetos em relação recíproca com outros, característico dos grupos objetivos.

Os movimentos de translação estudados na fase anterior progridem agora em parte devido ao sujeito que já se conhece melhor e em parte ao sujeito que atribui uma maior permanência aos objetos, o que implica em uma maior diferenciação entre mudança de posição e de estado. Se nas fases anteriores a criança seguia os movimentos rápidos de translação no prolongamento dos movimentos esboçados, ao perder o objeto do seu campo visual este estaria aniquilado, uma mudança de posição resultaria em mudança de estado, os objetos eram evanescentes (apareciam e desapareciam).

Na 4ª fase, a criança segue os movimentos rápidos e, ao perder de vista o objeto, procura-o fora da trajetória inicial, independendo da direção do movimento em curso (movimento inicial de acomodação), uma mudança de posição não implica mudança de estado.

A diferenciação entre mudança de posição e mudança de estado é conseqüência da aquisição na presente fase da permanência e constância das formas e da atribuição de trajetória autônoma e independente da ação do sujeito aos movimentos do objeto. Tais aquisições culminam com a constituição dos grupos objetivos, mas apesar dos avanços continuam reduzido às operações reversíveis, bem como os comportamentos anteriores. Será somente na 5ª fase que a criança vai estabelecer relações de relatividade entre e sobreposição dos objetos em séries de deslocamentos sucessivos.

"De uma parte, com efeito, o objeto da quarta fase tornou-se permanente e de forma constante. De outra parte, as explorações da criança sobre os movimentos de rotação e de translação mostram bem que ela considera os móveis suscetíveis

de percorrerem trajetórias autônomas e independentes da ação do sujeito. O grupo 'objetivo' está pois constituído." (PIAGET, 1975b, p:157)

No tocante à profundidade, o espaço da terceira fase estava dividido em espaço próximo e longínquo. O espaço próximo é aquele onde a criança exerce o poder da preensão, o que nesta fase determina o início da existência dos objetos e da espacialidade[41] . É nos limites da preensão que os objetos possuem dimensões e formas constantes, mas tal diferenciação é meramente de ordem prática. O espaço longínquo é aquele em que os objetos são vistos encolhidos e deformados, estando submetido às mesmas características das fases iniciais, "uma massa fluida sem profundidade", mas tal diferenciação está longe de ser imediata, e será sobretudo uma diferenciação prática.

As várias aquisições da 4ª fase transformaram bipartição do espaço, a coordenação da preensão possibilita uma avaliação melhor das distâncias (em profundidade) e, mesmo não tendo conquistado a mobilidade de poder andar, a criança acerca-se de objetos, o que dinamiza os domínios da profundidade.

A busca dos objetos escondidos (uns atrás dos outros) possibilita a ordenação nos diferentes planos de profundidade, e os objetos não estão mais "à frente" ou "atrás", passando a estar à frente ou atrás de um ponto de referência, e subsistem mesmo quando ocultos por uma cortina.

Os progressos no espaço próximo se estendem ao espaço longínquo. As experiências que a criança realiza com a preensão bem como os progresso com a mobilidade aniquilam a separação entre dois espaços, e a criança atinge objetos cada vez mais distantes, o que implica em uma noção distância maior. Os objetos inacessíveis tornam-se distantes efetivamente, não sendo mais como na terceira fase deformados ou distorcidos, com dimensões permanentes apesar da aparente redução de tamanho pelo distanciamento, e que para alcançá-los é necessário "procedimentos" que demandam formas mais apropriadas de inteligência ("descoberta de novos meios por experimentação ativa conduta do suporte, condutas do barbante e da vara) e que se constituirão posteriormente na quinta fase.

Quanto à profundidade dos planos do espaço próximo e longínquo, os objetos começam a ordenar-se como o fazem para o adulto, segundo uma sucessão de planos na terceira dimensão.

---

[41] Na 3ª fase há o início da permanência dos objetos no prolongamento dos movimentos de acomodação, graças à ação da própria criança.

unesp

A criança descobre que a uma mudança de forma é fruto de uma mudança de suas próprias posições, o que propicia uma nova forma de avaliar a posição dos objetos em profundidade segundo a lei de paralaxe, ou seja, um deslocamento de lateral da cabeça implica em um reposicionamento dos objetos, um deslocamento lateral do nosso campo visual vai repercutir em uma mudança de posição dos objetos, diretamente proporcional à distância que os objetos se encontram de nós; quanto mais próximo estiver o objeto em questão maior será a ilusão de mudança, quanto mais distante menor é a ilusão de mudança.

Para a criança tal avaliação é meramente prática não havendo qualquer consciência das relações envolvidas.

As aquisições da 4ª fase estão longe de dotar o espaço de objetividade, e torná-lo um meio homogêneo, segundo Piaget:

"o espaço está longe de formar um meio homogêneo de tal natureza que os corpos possam nele deslocar-se em relação recíproca; consiste ainda em feixes qualitativos ordenados em função da ação e em quadros de conjunto objetivados como tais e não em seus elementos respectivos. O corpo do sujeito continua desempenhando, pois, um papel ilegítimo, visto que privilegiado." (PIAGET, 1975b, p:163)

A posição privilegiada em que se encontra a criança da 4ª fase com os objetos gravitando ao seu redor, mas ainda dependentes de sua ação, tem como conseqüência a incapacidade do sujeito perceber os seus próprios deslocamentos fora das operações reversíveis, não conseguindo realizar movimentos de conjunto, nem tão pouco compreende e utiliza as operações reversíveis que tem domínio para relativizar seus movimentos próprios e o dos objetos.

O estudo dos objetos sobrepostos elucida tal questão: quando um objeto é colocado sobre um suporte grande o suficiente para apresentar-se enquanto um fundo neutro, o objeto sobreposto é apanhado pela criança ao contrário, quando o objeto é colocado sobre um suporte com dimensões próximas à do objeto a ser apanhado, a criança pega o suporte, ficando o objeto inacessível, em uma relação onde o suporte e o objeto são constituídos como um todo objeto-suporte, e não enquanto objetos em posições relativas entre eles. Tais fatos mostram-nos as limitações que são marcas entre esta e a próxima fase.

No tocante `a constância das grandezas que não ocorre nos grupos práticos ou heterogêneos e começa a constituir-se nos grupos

unesp

subjetivos e sobretudo nos grupos objetivos, o bebê aproxima e afasta os objetos como se estivesse "estudando" seu comportamento mediante esta ação, o que mostra as experimentações referentes às relações projetivas e euclidianas.

II.1.4 Os grupos objetivos

A 5ª fase é marcada pela experimentação e pela pesquisa. A criança adquire a noção de deslocamento dos objetos em suas relações recíprocas e passa a considerar os deslocamento segundo a ordem de sucessão efetuada no seu campo de visão (o que não ocorria na fase anterior, posto que a criança buscava os objetos em uma posição privilegiada).

Nas fases anteriores, a criança conhecia as relações entre ela e os objetos, colocava seus braços e suas mãos a agir. Doravante todo o seu corpo estará inserido no espaço e irá participar da descoberta das inter-relações objeto, criança e espaço.

Presenciamos, na fase anterior, a busca do objeto em posições privilegiadas: a criança procurava o objeto no primeiro lugar que havia tido sucesso, mesmo que presenciasse os deslocamentos efetuados pelo objeto, a ordem de sucessão era ignorada. Na presente fase, a criança organiza os deslocamentos considerando-os em uma relação de sucessividade, situando os deslocamentos em um sistema de conjunto que garante a homogeneidade do espaço.

Os grupos mais simples da 5ª fase prolongam as operações reversíveis, característica da fase anterior: a criança esconde objetos atrás das suas costas para voltar a encontrá-lo, segue objetos móveis que passam atrás de suas costas e avançam quando ela passa a procurar objetos atrás de outra pessoa.

A busca dos objetos atrás de outra pessoa é um avanço, pois utiliza relações mais complexas entre os próprios objetos, ultrapassando a relação sujeito-objeto e os deslocamentos reversíveis.

A criança realiza toda sorte de experiência no espaço próximo para organizá-lo, transfere objetos de um lugar para outro, joga-os por terra para pegá-los novamente e reiniciar o estudo, aproxima-os e afasta-os uns dos outros.

Na 4ª fase a criança iniciava a busca do objeto atrás de uma cortina, mas ainda restritos às operações reversíveis, pois a cortina é percebida em relação ao sujeito e não ao objeto oculto; e, na presente

unesp

fase, a relação continente-conteúdo lembra tal comportamento: a criança põe e tira objetos de dentro de recipientes e descobre as inter-relações espaciais.

A descoberta das inter-relações espaciais tem início muito primitivamente, mas com o decorrer das experimentações complica-se: a criança introduz os objetos um a um em um recipiente e, com uma única operação dentre outras possíveis, gira o recipiente retirando todos os objetos num só golpe.

A retirada dos objetos do recipiente em um único golpe faz com que a criança gire o recipiente, o que nos leva a outro conjunto de grupos: o das rotações ou inversões, que na fase anterior estava limitado a rotações ou inversões desde que os objetos estivessem nas mãos da criança, ou seja, estavam limitadas às inversões relativas ao corpo da criança, agora são relações recíprocas entre objetos.

Resta-nos falar sobre os avanços que estão no limite da constituição dos grupos representativos característicos da 6ª fase, que são relativos à tomada de consciência dos seus próprios movimentos como deslocamentos de conjunto e considerar os deslocamentos que ocorrem fora do seu campo de percepção.

A criança, na 5ª fase, realiza percursos múltiplos trocando o trajeto realizado, vai por um caminho e volta por outro, mas essa troca de trajeto está subordinada a um caminho que a criança percebe diretamente, o que caracteriza os grupos objetivos, mas falta-lhe duas aquisições. Primeiro considerar os deslocamentos que não lhe são visíveis: a criança só considera os deslocamentos que ocorreram no seu campo de percepção (mesmo que ela perceba os seus resultados); segundo representar seus próprios movimentos de conjunto como se fosse possível olhá-los como uma outra pessoa, como se os visse do exterior, falta-lhe imaginar os seus próprios deslocamentos como se os visse de fora.

A constituição do espaço experimental está concluída, tudo o que a percepção assegura à criança está ordenado espacialmente, mas uma outra fase é necessária para a constituição do espaço. Falta-lhe a representação.

II.1.5 Os grupos representativos

Duas conquistas marcam as aquisições da 6ª fase, da representação espacial. A primeira conquista capacita a criança para

que ela possa controlar seus movimentos no espaço, representando mentalmente seus próprios deslocamentos antes dos deslocamentos de outros corpos, *"os deslocamentos do seu próprio corpo não a impedem de situar-se incessantemente num universo que se tornou imóvel e em que ela própria está contida"* (PIAGET, 1975b, p:192). A segunda conquista está ligada à constituição do objeto. Sabemos que na sexta fase o objeto já está constituído (existe fora da ação da criança), a criança é capaz de representar os deslocamentos que ocorrem com o objeto fora do seu campo de percepção.

A representação dá coerência e compreensão ao universo infantil, e capacita a criança a inventar meios alternativos "desvios", para apanhar objetos que estão fora do seu campo de percepção e que necessita de "novos meios por experimentação mental" para atingi-los, como veremos:

"Obs. 123 - Ao 1;6 (8), Jaqueline atira uma bola para debaixo de um sofá. Mas, em vez de baixar-se logo e procurá-la no chão, ela observa o lugar, compreende que a bola deve ter atravessado o espaço situado sob o sofá e caminha de pé para ir procurá-la atrás do móvel. Porém, tendo uma mesa à sua direita e estando o sofá encostado a uma cama, do lado esquerdo, Jaqueline começa por voltar as costas ao lugar onde a bola desapareceu, depois contorna a mesa e, finalmente, chega atrás do sofá, atingindo diretamente o bom lugar. Por conseguinte, ela fechou o círculo por um itinerário diferente do que foi coberto pelo objeto e elaborou desarte um 'grupo', mediante representação do deslocamento invisível da bola e do 'desvio' a efetuar para reencontrá-la." (PIAGET, 1975b, p:190)

Os desvios que a criança realiza estão dotados de uma grande complexidade, longe dos caminhos realizados na quinta fase quando a criança estava limitada a percorrer os caminhos percebidos diretamente, e mesmo na superação de obstáculos estava limitada a refazer o percurso que o objeto desaparecido havia realizado.

A conduta atual (desvio) leva em consideração as duas aquisições da 6ª fase: a representação dos movimentos de conjunto do próprio corpo e a representação das relações espaciais.

A representação espacial e a capacidade de elaborar os grupos representativos culminam na constituição do espaço: a criança pela primeira vez está situada em um meio imóvel.

"o universo deixou de estar centrado num eu que se ignora e passou a conter em si o corpo do sujeito, consciente de seus deslocamentos na série infinita de sólidos

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

permanentes com movimento independentes do sujeito." (PIAGET, 1975b, p:190)

As duas últimas fases do período sensório-motor apresentam atividades de pesquisa e explorações, que tiveram início na 4ª fase. O bebê aproxima e afastava os objetos do seu rosto. Essas "pesquisas" eram relativas à forma e às dimensões dos objetos. A criança aproximava-os sob diferentes ângulos, mas a relação era restrita à criança-objeto.

A busca de objetos, que estavam ocultos por um anteparo, estava restrita a essa relação bebê-objeto. Nas fases finais (grupo objetivo e representativo) a criança põe-se a experimentar as relações dos objetos entre si.

No grupo objetivo (5ª fase), a experimentação é relativa à transferência dos objetos que a criança muda de lugar, ao equilíbrio dos corpos sobrepostos, à aproximação, ao afastamento, ao jogar e deixar cair no chão os objetos para apanhá-los e reiniciar tudo de novo. Com esses procedimentos, a criança tenta organizar toda gama de experiências possíveis no espaço próximo e distante, e nas relações entre os objetos.

Piaget apresenta as diferenças das aquisições da 5ª e 6ª fase, dos grupos objetivos aos representativos como sendo:

"É precisamente nesses dois pontos que se registram os progressos da sexta fase: representação das relações espaciais entre as coisas e representação dos deslocamentos do próprio corpo." (PIAGET, 1975b, p:189)

Quando a criança elabora os grupos representativos e o espaço sensório-motor passa à categoria de representativo, coordena interiormente ações e realiza atos de plena inteligência. A criança, doravante, pode evocar acontecimentos.

A constituição do espaço representativo evolui da indiferenciação inicial entre os movimentos do bebê e os dos objetos (grupos práticos), passando a uma diferenciação parcial entre a percepção dos seus movimentos e dos objetos (grupos subjetivos), e culminando com a diferenciação da percepção entre os movimentos dos objetos e os dos movimentos da criança (grupos objetivos e representativos). Ao estudarmos a construção do espaço estaremos estudando também a construção do objeto, pois não existe espaço sem

unesp

objetos nele inseridos. Para tanto, estaremos buscando a elaboração da constância de forma[42] e de grandeza (dimensão[43]) dos objetos.

O processo construtivo do espaço realizado durante o sensório-motor será objeto de reelaboração durante a fase posterior. Todos os progressos efetivados serão reconstruídos novamente em relações mais abrangentes e complexas, fato que irá demandar um tempo muito maior (em média dos 2 aos 7 anos).

A intuição espacial reelaborará, na representação em oposição à percepção direta e atual (característica do sensório-motor), as relações geométricas mas, apesar dos avanços, terá em comum com o período anterior a fonte das operações que é motricidade.

Como iniciamos o estudo do espaço infantil com o estudo do espaço na física e na geometria, resta-nos voltar a eles, como diz o próprio Piaget:

"Se nos for permitida uma comparação um pouco audaciosa, a realização final do universo prático objetivo assemelha-se às conquistas de Newton em comparação do egocentrismo da Física aristotélica, mas o tempo e o espaço absolutos do newtonismo também são ainda egocêntricos do ponto de vista da relatividade einsteiniana, pois só admitem uma perspectiva do universo entre outras igualmente possíveis e reais. Pelo contrário, a partir do momento em que a criança procura não mais agir, somente, sobre as coisas, mais também representá-las em si próprias e independente da ação imediata, essa perspectiva única, em cujo seio a criança logrará introduzir a objetividade e a relatividade, deixa de ser suficiente e ela trata de coordená-la com as demais." (PIAGET, 1975b, p:342)

A construção do espaço representativo no período denominado de pré-operatório ocorrerá com a reelaboração de todas as conquistas no período anterior, diz Piaget:

"Em resumo, se encaramos neste capítulo o longuíssimo período que vai de 2-3 a 11-12 anos, em lugar de destacar um período pré-operatório; até cerca dos 7-8 anos, do período ulterior das operações concretas, é que a primeira dessas duas grandes fases, embora dure 4 ou 5 anos, não passa, de fato, de um

---

[42] *"De fato, a constância das formas resulta de sua construção sensório-motriz quando da conservação das perspectivas. ...isto é atribuir uma forma constante a um sólido permanente."* (PIAGET, 1993, p:26)

[43] *"Quanto à constância das grandezas, ela está ligada à coordenação dos movimentos controlados perceptivamente.... É em função desse agrupamento de movimentos e dessa permanência atribuída ao objeto que ele adquire* ***dimensões*** *constantes e que sua grandeza é avaliada mais ou menos corretamente em suas diferentes posições, próximas ou afastadas."* (PIAGET, 1993, p:26)

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

período de organização e preparação, comparável aos estádios I a III (ou IV) do desenvolvimento sensório-motor, enquanto que o período de 7-8 a 11-12 é o remate das operações concretas, comparável aos estádios IV ou V e VI da construção dos esquemas sensório-motores." (PIAGET, 1994, p:83-84)

II.2 O ESPAÇO NA REPRESENTAÇÃO E AS RELAÇÕES ESPAÇO-GEOMÉTRICAS

A reconstrução das relações espaciais no período pré-operatório[44] será de organização e de preparação (de 2 a 7 anos), onde as conquistas e avanços ocorrerão em um processo muito semelhante ao ocorrido nos grupos práticos e subjetivos, com uma característica inovadora que fará grande diferença, a representação, e que terá um período posterior que receberá seu arremate com as operações (7 - 8 a 11 -12 anos)[45].

Para que Piaget pudesse afirmar o primado no período pré-operatório das relações topológicas sobre as projetivas e euclidianas, muitos estudos foram realizados, e grande parte deles estão contidos na obra tema da obra *"A representação do espaço na criança."*, que tem como objetivo o estudo das relações espaço-geométricas.

Contrariando a ordem de sucessão da ciência geométrica, que teve início com a geometria de Euclides que está baseada na geometria métrica e nas semelhanças, a geometria projetiva foi firmar-se entre os séculos XIV e XIX e, finalmente, a *Analysis situs* ou topologia é uma concepção muito mais recente do que as anteriores já quase no nosso século, que trata das relações internas aos objetos. A criança realiza uma inversão nesta ordem de sucessão, e tem na topologia as primeiras relações das quais vai servir-se para organizar os objetos no espaço.

---

[44] *"A análise de um grande número de fatos mostrou-se definitiva. Até cerca de sete anos a criança permanece pré-lógica e suplementa a lógica pelo mecanismo da intuição, é uma simples interiorização das percepções e dos movimentos sob a forma de imagens representativas e de 'experiências mentais' que prolongam, assim, os esquemas senso-motores sem coordenação propriamente racional."* (PIAGET, 1997, p:34).

[45] A teoria de desenvolvimento psicogenética apresenta suas fases (estádios ou estágios) como tendo uma ordem invariável, por exemplo: o sensório-motor é sucedido pelo pré-operatório, mas as faixas etárias que compreendem tais fases são apresentadas tomando uma média de idades, podendo ocorrer entre um intervalo que não é marcado pela rigidez, no caso o período pré-operatório compreende crianças entre 2 - 3 a 7 - 8 anos.

Neste sentido, seguiremos os caminhos trilhados por Piaget para melhor entender um fato que parece tão distante de pais e professores.

II.2.1 A construção das relações topológicas

O estudo do espaço representativo[46] tem início com a averiguação do papel da imagem no espaço. Piaget valeu-se da *"intuição das formas e da percepção estereognóstica"*[47] para descobrir como são traduzidas as percepções tátil-cinestésicas em percepções visuais. Para tanto, criou situações em que as crianças tivessem que construir uma imagem visual que apresentasse os dados táteis percebidos com a atividade exploratória do objeto.

Para atingir os objetivos propostos eram apresentados às crianças quatro séries de objetos sendo uma série de objetos conhecidos ou usuais (tesoura, lápis, chave, bala, pente, colher etc.), cartões recortados com formas geométricas (círculos, elipses, quadrados, retângulos, losangos, triângulos, cruzes, meios círculos simples ou com recortes ao longo da corda etc.), formas assimétricas de bordas retas (trapezóides de diferentes formas) e formas de caráter tipicamente topológico (superfícies irregulares com um ou dois furos, anéis de papelão fechados ou abertos, anéis entrelaçados).

Os experimentos tinham início quando a criança era colocada em uma situação limite na qual tivesse que, a partir da manipulação sem a visão dos objetos, encontrar sua duplicata, descrevê-los nomeando-os caso já os conhecesse ou ainda representá-los graficamente. A criança era colocada atrás de um anteparo que impossibilitava a visão do objeto que tinha nas mãos e precisava descobrir e representar, quer seja escolhendo em objetos duplicatas, cartões que apresentassem o desenho do objeto, desenhando ou ainda descrevendo o objeto em questão. Assim, o experimentador acompanhava o método de exploração tátil que as crianças empregavam para poder avaliar o seu desenvolvimento, fato de importância essencial para entender o papel da imagem e da atividade perceptiva.

---

[46] O estudo do papel da imagem no espaço encontra-se no Capítulo 1 "Espaço perceptivo, Espaço representativo e intuição das formas (percepção estereognóstica)" na "Seção II - A intuição das formas 'percepção estereognóstica' "), página 32 da obra tema.

[47] O estudo da percepção estereognóstica vai apresentar as relações de **vizinhança** como sendo a relação mais elementar na constituição do espaço.

Os objetos conhecidos, dada a facilidade de descoberta, ficaram restritos às crianças menores.

Os resultados obtidos somam quatro estádios, o primeiro com crianças de menos de 2 anos e 6 meses (estádio 0), grupo este que apresentou uma impossibilidade de realização de qualquer tipo de experimento devido às dificuldades de entendimento do que era pedido, bem como a dificuldade de colocá-las atrás do anteparo.

As crianças que se encontram no estádio I reconhecem os objetos familiares e as formas topológicas, mas fracassam com as formas euclidianas. Nesta classificação, devido às características encontradas, as crianças puderam ser subdivididas entre dois subgrupos IA e IB, os quais analisaremos mais detidamente.

O estádio IA apresenta crianças com idades que variam de 2 anos e 6 meses a 3 anos e 6 meses. Elas compreendem as perguntas e fazem o reconhecimento somente dos objetos conhecidos. O fato a ser destacado é a falta de atos exploratórios, pois a criança limita-se a pegar o objeto entre as mãos, passa-o de uma mão à outra , mas não realiza uma exploração baseada em um método procedendo de um ponto inicial e retornando a ele, há uma desorganização na atividade exploratória.

O reconhecimento dos objetos usuais necessita de uma atividade exploratória diferente das formas geométricas. Para o reconhecimento dos objetos usuais são necessários movimentos de preensão, de passar o objeto de uma mão à outra, apalpar, como no caso da tesoura, passar a mão no prolongamento da lâmina, ou tocar o contorno arredondado onde os dedos são colocados para o movimento de corte.

O reconhecimento das formas geométricas requer um outro "método exploratório", como o acompanhamento de todo o contorno, percepção dos ângulos, as bordas retilíneas etc., ao passo que nos objetos conhecidos ao serem passados de uma mão a outra são percebidas particularidades como por exemplo: a argola da chave, a ponta do lápis etc.

A falta de atividade exploratória ou de atividade perceptiva por este grupo de crianças, irá repercutir nos seus desenhos[48] que estão restritos a garatuja, pois, por não conseguirem organizar as percepções, representam esta confusão inicial, que é a sua característica (um

[48] O próximo experimento "As relações espaciais elementares e o desenho: o "espaço gráfico", Cap 2 da obra tema, irá falar especificamente do desenho, será apresentado com mais detalhes nas próximas páginas, e na apresentação dos dados colhidos na pesquisa de campo, recebendo maiores informações (p: 147 deste trabalho).



emaranhado de fios). São fios que se cruzam por vezes em formas cíclicas em outras retas, que são na verdade fruto de movimentos rítmicos descoordenados, mas que apresentam formas circulares e retilíneas, sendo que as formas retilíneas apresentam o cruzamentos de retas com formações iniciais de ângulos.

Por não explorarem os objetos que têm em suas mãos, de maneira organizada, a criança não consegue desenhá-lo, tampouco consegue reconhecê-la quando colocada frente a sua duplicata.

A importância da constatação anterior (falta de atividade exploratória) está no fato de que a abstração das formas geométricas não é a simples extração da qualidade dos objetos como ocorre com as qualidades físicas, tais como a cor, peso etc.. Há uma abstração correlata à atividade, à ação da criança, há a necessidade de coordenação das ações realizadas que é fundamental e que explica por que as crianças de mais idade ultrapassam a experiência.

"De este modo, contrariamente a las estruturas lógico-matemáticas, las estruturas espaciales dependem de dos tipos de experiencia, física y lógico-matemática (por esa razón, sin duda, la imagem visual desempeña um papel privilegiado en la intuición geométrica), y de dos tipos de abstraccion, simple y reflexiva". (PIAGET, 1971, p:6)

No estádio IB, as primeiras formas geométricas reconhecidas são as formas cíclicas, e o que impressiona às crianças é o caráter fechado ou aberto, os furos, os anéis, o que leva a afirmar que são as formas topológicas com relações de **vizinhança**, **separação** etc. que propiciam o reconhecimento exato.

As formas geométricas euclidianas simples como quadrados, retângulos e triângulo também são fechadas mas possuem um agente dificultador que são as retas, as paralelas e os ângulos. Em contrapartida, o círculo e a elipse não possuem tal agente, o que é confirmado pelos desenhos.

O estádio II avança em relação ao anterior por ocorrer um reconhecimento progressivo das formas euclidianas. Tal progresso é devido à atividade exploratória que se torna mais ativa apesar de ser global, incompleta e de ainda não estar guiada por um método de exploração, mas, na medida em que explora o objeto, a criança descobre ocasionalmente índices dos quais guarda o significado.

A representação gráfica não mais está restrita à garatuja como anteriormente, e já corresponde à forma que foi avaliada tátil-

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

cinestesicamente, principalmente nas formas euclidianas simples. A importância de tais representações gráficas está no fato de que há uma percepção do ângulo e não das retas laterais das figuras geométricas. Várias crianças falam sobre a característica do ângulo de "ponta" ou de "fincar", o que apresenta a ação motora como direcionando a descoberta das formas.

A diferença entre o estádio IIA e IIB está no fato de que, no segundo, a análise dos dados percebidos torna-se mais completa em relação ao primeiro, mas será somente por volta dos 7 anos, com as operações que irão permitir a organização necessária à atividade de exploração, possibilitando a imagem mental do objeto que a criança tem em suas mãos.

A definição dada por Piaget a uma operação é definitiva:

"Uma operação é uma ação suscetível de voltar ao seu ponto de partida e de fazer composição com outras segundo esse duplo modo direto e inverso." (PIAGET, 1993, p:51)

É por volta dos 7 - 8 anos que a criança consegue realizar explorações organizadas que possibilitam a descoberta das formas pela percepção tátil-cinestésica. A exploração a partir destas ações organizadas possibilitam o agrupamento dos dados percebidos em termos de um plano geral e, a partir de um ponto fixo utilizado como referência, é que a criança retorna freqüentemente a ele. É neste nível que a forma está distinta da sua percepção e de sua representação gráfica. Cada forma percebida será assimilada a um esquema de ações coordenado e necessário à sua reconstrução.

As experiências estereognósticas realizadas por Piaget e seus colaboradores mostraram que as primeiras relações geométricas descobertas pela criança são as topológicas, apesar das relações projetivas não estarem sendo avaliadas nesta experiência, pois é vedado a percepção visual. Já as relações euclidianas surgem muito mais tarde e tornam-se efetivas somente com o início do pensamento operatório.

O estudo da ordem genética real do espaço representativo a partir da percepção visual[49] é o próximo objetivo de Piaget. O desenho ou "espaço gráfico" é recurso escolhido para tal projeto.

---

[49] Cap. 2 da obra tema " As relações espaciais elementares e o desenho: o 'Espaço Gráfico' ", o referido recurso (desenho), foi utilizado na coleta de dados (parte empírica desta pesquisa), os resultados são apresentamos no Capítulo IV, como mencionado na nota anterior (48).

unesp

Piaget coloca o desenho como uma das formas da função semiótica ou representativa, pois ele encontra-se entre o jogo simbólico e a imagem mental, tendo em comum com esta segunda o fato de ser uma imitação interiorizada do real.

Diz Piaget:

"... o desenho (e isso é bem conhecido do desenho espontâneo ao nível do 'realismo falho'[50] *e do 'realismo intelectual' de Luquet), como a imagem mental, não prolonga a percepção pura, mas o conjunto dos movimentos, antecipações e reconstituições, comparações etc. que acompanham a percepção e que chamamos atividade perceptiva. Tanto o desenho como a imagem são imitações, exteriores ou interiores, do objeto e não fotografias perceptivas, e a imitação em si mesma um prolongamento dos movimentos de acomodação implicados pela atividade perceptiva."* (PIAGET, 1993, p:49)

Baseando-se na obra *Le dessin enfantin*, de Luquet, Piaget estuda o desenho espontâneo infantil e apresenta três níveis de classificação.

O primeiro destes níveis "incapacidade sintética", como denomina Luquet, está subordinado segundo Piaget às relações topológicas. O próprio nome "incapacidade sintética" explica as características destes desenhos, ou seja, uma incapacidade de síntese, de registrar no desenho os dados percebidos visualmente, e a criança apresenta no desenho a dificuldade de organizar as diversas partes do que está representando.

Os girinos, por exemplo, tão comuns nas representações gráficas das crianças menores que ultrapassam a simples garatuja, estão carregados de significados que nos levam às relações topológicas. São apresentados como uma grande cabeça, munida internamente de olhos, nariz e boca e inicialmente encontramos desenhos nos quais a ordem de colocação não está retratada com realidade, mas já contêm seus componentes e a relação de envolvimento ou interioridade. Os braços e pernas são representados com pares de linhas que por vezes apresentam, na sua continuidade, os dedos.

A análise destes desenhos não deixa margem de dúvidas. As relações topológicas estão explícitas e podemos perceber nitidamente as relações de **vizinhança, proximidade, separação, ordem, envolvimento** e relações elementares de **continuidade**. Por outro lado

---

[50] PIAGET, 1994, p:57 apresenta como sinônimo os termos realismo "gorado" ou de "incapacidade sintética".

há uma ausência total das relações referentes às proporções e às distâncias que são tipicamente euclidianas bem como as relações projetivas.

O estádio que se segue, a do "realismo intelectual", apresenta desenhos onde a criança coloca tudo o que ela sabe sobre o que está representando, não somente o que vê, mas são representados atributos que a percepção visual não detecta. Assim, os desenhos apresentam pontos de vista justapostos como por exemplo, um motorista desenhado sentado dentro do veículo com sua silhueta visível apesar de a porta estar fechada. Outro exemplo muito freqüente é o desenho do rosto de perfil, mas apresentando ao mesmo tempo os dois olhos de um mesmo lado da face.

Estes exemplos são indícios de que as relações projetivas e euclidianas, apesar de confusas, começam a aparecer.

É por volta de 8 a 9 anos que o desenho infantil apresenta-se muito próximo do que é no real, e é denominado de "realismo visual". As relações de perspectiva, proporções e medidas ou distância são representadas adequadamente.

Três aspectos chamam a atenção. Primeiramente, o aspecto tardio de tal construção pois as relações projetivas e euclidianas requerem uma organização de maior complexidade do que as topológicas. Em segundo lugar, reiterando os dados apresentados pela percepção estereognóstica, as relações projetivas e eucliadianas são posteriores às topológicas, e desenvolvem-se solidariamente apoiando-se uma na outra.

O terceiro aspecto aparece quando comparamos as diferenças entre o realismo visual e o realismo intelectual. No realismo visual, as relações projetivas e euclidianas mostram-se mais organizadas. O desenho é realizado com a preocupação de apresentar, simultaneamente, os objetos em diferentes planos de profundidade, com tamanhos e medidas proporcionais a outros objetos que estejam representados no mesmo desenho, opondo-se às relações topológicas que são restritas a um determinado objeto sem relacioná-lo a outros objetos que são maiores ou menores, que estão em planos frontais ou posteriores etc.

"o realismo visual mostra, por suas próprias diferenças com o realismo intelectual, a natureza das relações projetivas e euclidianas, em oposição às relações topológicas. Estas procedem progressivamente e permanecem ligadas à figura considerada como um todo sem relação com as outras. As projetivas, ao



contrário, determinam e conservam as posições reais das figuras, uma em relação às outras (e isto diferentemente da 'mistura de ponto de vista', dos pseudo-achatamentos etc., próprios do estádio anterior) e as relações euclidianas determinam e conservam suas distâncias recíprocas (coordenadas). Trata-se, pois, nos dois casos, de sistemas de conjunto em oposição à construção progressiva." (PIAGET, 1993, p:68)

Os estudos anteriores sobre o desenho espontâneo infantil e as hipóteses de Luquet foram complementadas pelos levantamentos realizados por Piaget com o desenho da figura humana e de figuras geométricas. Na intenção de certificar-se do nível do desenho infantil e a título de desinibir a criança, era pedido que desenhasse "um homem" de memória. Após modelos de formas que apelavam a certas relações topológicas, formas euclidianas simples e formas mistas (enlaçamento total ou parcial das formas euclidianas), eram apresentadas em modelos e pedia-se que a criança as copiassem[51].

Os resultados, como já esperados, apresentaram três estádios. Um estádio inicial composto por crianças entre 2 anos e 6 meses e 2 anos e 11 meses, em que foi impossível realizar o experimento da estereognosia que resultou em desenhos classificados como da pura garatuja, onde a criança não era influenciada de maneira alguma mediante os modelos que lhes era apresentado, ou nem tão pouco tinha intenção de desenhá-los. Este grupo foi classificado como estádio 0.

O estádio I foi subdividido em dois grupos IA e IB. O grupo classificado como IA, composto por crianças entre 3 anos e 6 meses e 3 anos e 10 meses, apresenta uma modificação dos seus desenhos em relação ao grupo citado anteriormente. A garatuja mostra nitidamente a diferença entre formas abertas e fechadas, mesmo sem conseguir reproduzir as cruzes estas apresentam-se diferentes dos círculos.

O grupo IB, que compreende crianças entre 3 anos e 6 meses e 4 anos em média, apresenta o que podemos considerar como desenhos e não mais um emaranhado de riscos que se cruzam e tentam apresentar algo do que é pedido mesmo que somente restrito às relações topológicas que são nitidamente marcadas e precisas, como, por exemplo, uma figura topológica com um pequeno círculo que todos copiam precisamente: o círculo próximo, o círculo interno à forma topológica e o círculo sobre a linha que demarca os limites da forma topológica.

---

[51] Os modelos propostos encontram-se na Figura - 11 , p:132 deste trabalho.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

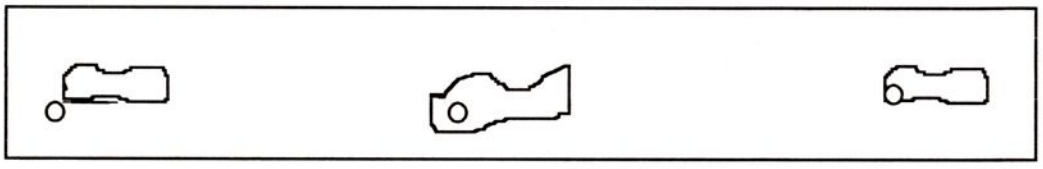


Figura 9 - As primeiras relações que se apresentam com precisão no desenho infantil estádio IB.

Contrária às relações topológicas da figura, as formas euclidianas mesmo as mais simples como é o caso do retângulo (que será a primeira a ser desenhada com precisão), quadrado e triângulo são representadas como formas circulares. As cruzes têm ponto de cruzamento perfeitamente marcado assim como as figuras topológicas que são desenhadas com habilidade. As figuras compostas por duas formas euclidianas, tendo uma forma interna inscrita, são desenhadas de forma que a criança perceba e represente as duas figuras com a relação de interioridade, mas são duas formas circulares, não conseguindo ainda desenhar retas e ângulos. Isso leva a concluir o primado da relações topológicas.

Piaget afirma que a representação gráfica da criança neste estágio está em atraso com relação à percepção, pois as relações perceptivas já são desde muito tempo (5ª fase do sensório-motor) projetivas e euclidianas. Conseqüentemente a este fato, a "abstração das formas" ocorre pelas ações que permitem a reconstituição do objeto em sua estrutura espacial (que já havia sido estudado com a percepção estereognóstica), e as formas topológicas por serem realizadas por coordenações muito simples que são realizadas sobre as ações de onde serão abstraídas as formas. Por outro lado, as relações euclidianas necessitam de regulações motoras muito mais elaboradas.

No estádio II, as crianças encontram-se entre 4 anos e 6 anos e 6 meses e tem como característica principal a diferenciação das formas euclidianas, o desenho do retângulo e do quadrado inicialmente, e o progresso com a descoberta dos ângulos e das inclinações.

O subestádio IIA tem, como patamar diferencial do estádio anterior, a representação das inclinações desconhecidas até então e, conseqüentemente, a diferenciação entre o quadrado e triângulo, e a representação das diagonais, mas esbarra no desenho do losango, que só será possível no subestádio seguinte.

A representação gráfica das formas euclidianas requer muito mais do que a simples percepção visual, pois se o caso fosse de

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

percepção visual a criança seria capaz de desenhar o losango, posto que a diferença entre este e o quadrado é de encurtamento de uma das diagonais do quadrado e girá-lo um pouco, mas isso é impossível, diz Piaget:

"a construção de uma forma euclidiana supõe outra coisa além da percepção visual correta, mas implica um jogo singularmente complexo de ações." (PIAGET, 1993, p:91)

O subestádio IIB é marcado pelo desenho do losango e com a representação das figuras inscritas que eram desenhadas como dois "quase" círculos circunscritos. A partir de então os problemas de contato ou separação, interioridade e exterioridade são de agora em diante resolvidos.

As operações que proporcionam mobilidade e reversibilidade ao pensamento infantil, que surgem por volta dos 7 anos, repercutem nos desenhos onde todos os modelos apresentados são realizados corretamente, os pontos de contato são precisos e as dimensões e proporções são mantidas em relação aos modelos a serem copiados.

O desenvolvimento da relação de **ordem**[52] ou **seqüência**, a terceira intuição topológica a partir da **vizinhança** e de **separação** que são as mais elementares, tem um lugar especial no estudo do espaço representativo. Para tanto, Piaget utilizou-se da montagem da ordem linear e cíclica e propôs cinco questões principais neste estudo: a reprodução de uma ordem linear direta, tradução de ordem cíclica em linear simples, estabelecimento da a ordem inversa, ordem de empilhamento direto e inverso e cópia de um colar disposto em ∞. O procedimento utilizado para tanto consistiu em usar grandes contas de madeira coloridas passadas por um fio rígido para que fossem copiadas. Somente no empilhamento foi utilizado um recurso diferente, uma coleção de pequeninas peças de roupas de boneca.

O primeiro grupo, que tem por volta de 3 a 4 anos e encontra-se no subestádio IA, monta as seqüências de contas de madeira e das roupas de boneca com elementos iguais ao modelo mas sem preocupação alguma com a ordem. Um grupo mais jovem, com crianças entre 2 e 3 anos, que foram classificados como estádio 0, restringe-se apenas a passar o fio pelas contas coloridas, e a realizar o

---

[52] Capítulo III da obra tema, "A ordem linear e a ordem cíclica", p:96.

unesp

empilhamento das peças de vestuário infantil. O mesmo ocorria nas cópias dos modelos topológico e euclidiano.

As correspondências parciais marcam o subestágio IB, que dão início à construção da "ordem", se percebe a tentativa da criança de montar pequenas seqüências não coordenadas entre si, podendo apresentar a mudança da ordem dos elementos colocados vizinhos (por exemplo AB e BA), e também a dificuldade de agrupar muitos elementos. Segundo Piaget, esta incapacidade de montar a ordem que não avança a muitos elementos é a mesma que ocorre na incapacidade sintética no desenho.

No estádio II, que apresenta crianças entre 4 e 6 anos, a correspondência da ordem torna-se possível inicialmente em IIA, mas só ocorre a construção da ordem quando os objetos estiverem em simetria. Caso haja um deslocamento do modelo inviabilizando correspondência por simetria, a criança não consegue concretizar a ordem.

No subestádio IIB as crianças conseguem traduzir a ordem cíclica em ordem simples, mas ainda não realizam a operação inversa, ou seja, anular a ação anteriormente realizada invertendo a colocação das contas. Em IIA a correspondência intuitiva era rígida e limitada à direta percepção do modelo a ser copiado. Na fase IIB, esta situação apresenta-se mais móvel chegando em algumas oportunidades a ultrapassar a percepção visual[53], mas ainda esbarra na falta de operatividade que inviabiliza a ordem inversa e a cópia do 8 em ordem linear.

A passagem do estádio IIB para III é marcada pelo sucesso na realização da ordem inversa, o que ocorre por sucessivos ensaios. A criança monta a ordem inversa recorrendo, durante a montagem, ao modelo, passa os dedos sobre as contas e realiza a construção inversa. Esta construção ocorre por regulações intuitivas e não pela operação, prova é que a criança recorre constantemente ao modelos. Apesar de a criança compreender a ordem inversa na colocação das contas, efetua numerosos enganos.

A construção do empilhamento das roupas de boneca apresenta intuições quase exatas e a criança neste estádio compreende que o que estava "em cima" em uma ordenação estará "em baixo" quando ocorrer

[53] Estas limitações aos movimentos para a realização da construção da ordem já foi vivida na quarta fase, nos grupos subjetivos, onde os objetos eram procurados onde fossem vistos, os movimentos não percebidos eram ignorados, o mesmo com a quinta fase e os grupos objetivos em que o bebê já considerava os objetos e seus deslocamentos.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

a inversão. Isto constitui-se de certo modo em uma relativização, passando o termo "entre", tão difícil para a criança, a ser invariante enquanto termo mediano.

A aquisição destas operações por volta dos 7 anos altera significativamente o quadro até agora apresentado. As construções de ordem passam a ser imediatamente resolvidas no início do estádio III com alguns ensaios e erros na montagem da ordem cíclica com o semi-envolvimento (8), mas que são superadas.

"Não mais do que as relações topológicas elementares de vizinhança separação, etc., que estudamos a propósito da estereognosia e do desenho, a representação da ordem não resulta, pois, de uma simples abstração a partir do objeto: é a coordenação crescente das ações que consistem em seguir, deslocar (transportar mentalmente) e recolocar aos poucos, que a ordem é abstraída. A ordem é, assim, o produto de uma reconstrução do objeto por meio das ações ordenadas e não uma qualidade diretamente extraída do objeto como tal, cuja ordem física é simplesmente reconstruída graças a uma acomodação dessas ações que são fontes da ordem geométrica." (PIAGET, 1993, p: 119)

A quarta relação topológica a ser estudada é o **envolvimento** ou **circunscrição**[54], mais complexas que as anteriores, pois têm implicações em dimensões diferentes. A uma dimensão estaremos retornando ao que foi estudado anteriormente, a ordem e sucessão, que implica na relação de mediação ou "entre", a posição de um ponto que se encontra entre dois outros caracterizando uma linha, a relação de interioridade ou exterioridade de um ponto em relação a uma figura fechada e plana, que define uma superfície, e a três dimensões as relações de interioridade e exterioridade de um objeto "dentro" de uma caixa fechada sem nenhum furo que irá caracterizar um movimento a três dimensões, definindo o espaço.

Para este estudo, o recurso utilizado foi recorrer a vários formatos de nós (trevos). Os nós são um capítulo muito elementar no estudo da topologia pois estão isentos de retas, ângulos, distâncias etc., e onde não há rupturas por serem realizados em corpos elásticos e deformáveis, atendendo portanto as características da topologia. Por outro lado, os nós são da vivência das crianças muito precocemente, sendo, objeto de estudo, as relações que as crianças estabelecem frente aos nós mais simples sob a ação de "rodear" (envolvimento ou

[54] O estudo sobre as relações de envolvimento encontram-se no Cap. 4 da obra tema "Os nós e as relações de envolvimento."

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

enlaçamento) e as correspondências, ou não, homeomórficas entre as formas elementares que podem ser feitas com um barbante grosso.

A técnica utilizada foi apresentar, às crianças, nós em diversas condições como o apresentado na figura 10.

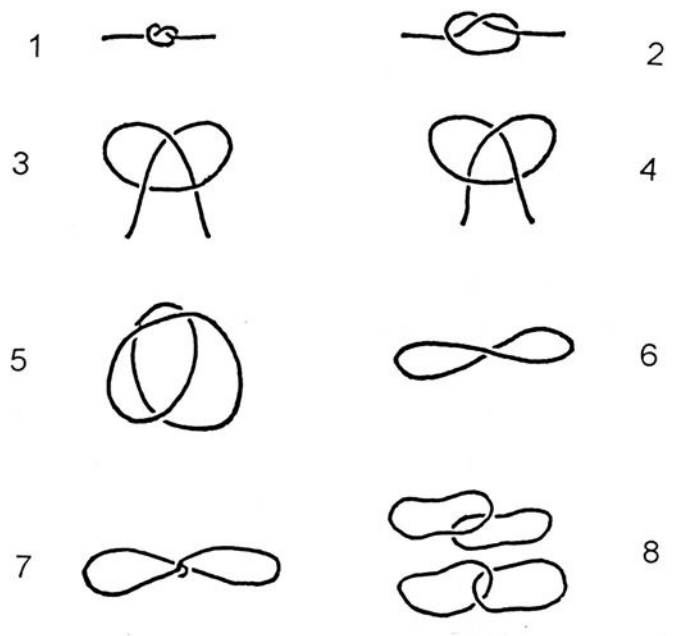


Figura 10 - nó apertado (1), nó ampliado (2), nó à esquerda [trevo (3)], nó à direita [trevo (4)], falso nó homeomorfo a um círculo (5), um 8 homeomorfo ao círculo (6), um falso 8 (7) e dois pares de círculo sendo um dois círculos superpostos e o outro dois círculos superpostos e outros dois círculos entrelaçados (8). Reproduzido da obra *"La représentation de l'espace chez l'enfant"* p: 132.

Nas entrevistas, as questões giravam em torno de comparações dos nós de diferentes tipos, tamanhos e com diferentes apertos no envolvimento, mais apertados, apertados, frouxos, com o barbante passado a parte externa à esquerda, à direita, falsos nós, figuras de oito verdadeiros e falsos, e perguntava-se às crianças o que aconteceria se as pontas do barbante fossem puxadas.

As investigações apresentaram três níveis. O primeiro (I) subdividido em dois subestádios IA e IB. O subestádio IA apresenta crianças de mais ou menos 4 anos, incapazes de fazer nós, justamente por não compreenderem a relação de enlaçamento, pois não conseguem montar o arco e passar "dentro" dele a extremidade do fio. A

impossibilidade de realização dos nós persiste mesmo frente às explicações verbais e à construção à vista de confecção do modelo.

O subestádio IB apresenta crianças que conseguem aprender a fazer os nós, mas não conseguem seguir com o próprio dedo ou com uma conta passada pelo barbante, acompanhar sua continuidade, nem tão pouco conseguem distinguir nós verdadeiros dos falsos.

O segundo estádio compreende crianças com idades entre 4 e 6 anos subdividido em dois subestádios. O primeiro IIA apresenta as generalizações das conquistas anteriores e as crianças fazem nós sozinhas, sem modelos e explicações, mas, o que realizam na ação não é reconstruído na representação. Mesmo sabendo fazer um nó apertado e um nó afrouxado, não reconhecem que ambos são iguais, ou homeomorfos. Esta dificuldade é pela impossibilidade de considerar o nó como uma formação "móvel", consideram-no com algo estático.

Em IIA, as crianças olham os nós como figuras planas não conseguindo realizar a correspondência entre a segunda e a terceira dimensão. Não conseguem estabelecer relação entre o nó apertado e frouxo que necessita apenas da "ação de puxar" para que fiquem iguais (homeomorfos).

A correspondência entre os nós antes da representação está fixa às percepções visuais. A impossibilidade de considerar as modificações passíveis da ação de puxar as extremidades ou de tornar o nó mais largo, considerando somente o estado momentâneo, inviabiliza qualquer transformação pelo movimento, impede a criança de conseguir antecipar os resultados da ação.

Piaget aponta que o mesmo acontece com a construção do número. A criança neste estádio consegue realizar a correspondência entre os objetos sob condição de estarem submetidos à mesma configuração espacial percebida visualmente, onde as fileiras de objetos correspondem termo a termo. A qualquer alteração espacial dos objetos não haverá conservação da quantidade. Apenas uma ressalva deve ser realizada: o número inteiro trata de correspondência descontínua, que tem por objetivo o número, e o nó trata de correspondências contínuas apoiadas nas relações de ordem e de sucessão e nos envolvimentos de segmentos religados de modo contínuo.

O subestádio IIB é marcado pelo reconhecimento da igualdade entre o nó apertado e o ampliado (2). Após assimilar os nós apertados aos nós ampliados conseguem seguir com o dedo o barbante de modo contínuo, o que representa um avanço em relação à fase anterior, mas

unesp

ainda não fazem a diferenciação entre os falsos e verdadeiros nós, somente com a percepção visual.

A igualdade entre os nós pela antecipação motriz, quando a criança explica que puxando o barbante os nós tornar-se-ão iguais é devido ao desprendimento da pura percepção e graças à atividade motriz, pensando não mais o nó como uma estrutura estática mas mais móvel nas suas transformações. Tanto é que a criança já consegue seguir com o dedo considerando as relações de vizinhança e envolvimento não mais só em relação às vizinhanças aparentes.

Diz Piaget:

"Essa vizinhança entre as partes sucessivas do cordão, separadas pela análise devida ao percurso do dedo, e os enlaçamentos são produto de uma 'intuição articulada', isto é, que ultrapassa a configuração perceptiva através de antecipações e reconstituições representativas que são atividades virtuais esboçadas em pensamento." (PIAGET, 1993, p:135)

Os avanços conseguidos tangenciam a operação, mas a intuição articulada está limitada às transformações curtas e restritas, pois está ligada à imagem, não sendo ainda generalizada pois o nó à esquerda (3 trevo) não é ainda reconhecido como homeomorfo ao nó comum (1) que, por falta de mobilidade, não é considerado como igual. Este fato repercute na indiferenciação entre os nós verdadeiros e falsos que apresentarem a aparência de um meio-anel, e o verdadeiro e o falso 8.

O estádio III culmina com a generalização da intuição articulada por volta dos 7 anos. A mobilidade e reversibilidade é o que permite a criança realizar sem dificuldade as correspondências entre as diferentes formas de nós, falsos e verdadeiros, 8 falsos e verdadeiros. Com a operação conseguem prever todos os tipos de transformações, exceto algumas crianças que não conseguem distinguir imediatamente os nós à esquerda e à direita, realizando esta diferenciação após tateios.

A conclusão das relações topológicas elementares ocorre com o estudo do **contínuo**[55], quinta e última relação topológica apontada por Piaget.

As primeiras relações estudadas, **vizinhança** e **separação**, são muito primitivas e gerais, pois encontram-se constituídas previamente a qualquer construção operatória do espaço. Já as relações de **ordem** e **envolvimento** dependem de operações que coloquem os elementos uns após os outros simultaneamente, contornados ou envolvidos. São

[55] Cap. V da obra tema "As noções de ponto e do contínuo", p:140.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

extensões e prolongamentos das relações de proximidade e vizinhança e que vão continuar com as operações de subdividir e reunir as partes separadas, que conduzirão a um esquema final operatório e reversível.

As relações de **ordem** ou **envolvimento** requerem operações aditivas e multiplicativas. A primeira irá gerar as seqüências ordenadas e a segunda (multiplicativas) irá gerar as homeomorfias qualitativas elementares (estudadas nos nós). Mas, tanto as operações aditivas quanto as multiplicativas estão apoiadas nas relações de **vizinhanças** e o estudo do **contínuo**, por outro lado vai, demandar o estudo das operações de partição e de reunião que prolongam as "separações" iniciais.

Mas, como o *"espírito não salta, de modo algum de uma só vez, da noção perceptiva"* do **contínuo** a um esquema conceitual constituído para expresssá-lo, Piaget investigou como ocorre tal construção interrogando as crianças pautado em quatro eixos principais:

O primeiro, relativo às hipóteses que a criança tem quando seccionada uma figura ou uma linha até seus limites últimos. Era apresentado à criança primeiramente o desenho de um quadrado numa folha em branco e pedido para que ao seu lado fosse desenhado o menor quadrado possível. Após esse procedimento era pedido para que, em uma folha quadrada e em branco, fosse desenhado o maior quadrado possível. Com isso era avaliada a capacidade da criança de seriar ou encaixar as grandezas e, para realizar tal façanha, a criança deveria por antecipação, baseada em um esquema operatório de seriação, desenhar o quadrado, tanto o maior como o menor possível.

O segundo, referente ao seccionamento de uma figura (quadrado, retângulo, triângulo etc.) e de uma reta aos limites mínimos possíveis, pela subdivisão de suas partes até atingir tamanho tão pequeno que não seja mais possível a divisão.

O terceiro ponto está direcionado para a "forma" do elemento residual último da partição contínua a ser concebido como um ponto (sem forma) ou se o elemento residual terá mesmo que muito pequeno a forma da figura que o originou.

A quarta e última questão, diz respeito à reconstrução da linha ou de uma figura a partir de seus elementos essenciais. Perguntava-se à criança se seria possível conceber uma figura ou uma reta com um conjunto de pontos.

Baseado nestas investigações Piaget distinguiu quatro estádios, que se prolongarão até o nível formal por volta de 11 a 12 anos. O primeiro período, de crianças até os 7 - 8 anos, engloba o estádio I e II reunidos. O estádio III compreende crianças dos 7 - 8 anos até 11 - 12 anos, e o estádio IV que tem início por volta de 11 - 12 anos vai concretizar as conquistas do espaço topológico representativo.

Para esta pesquisa, estaremos restringindo a evolução dos estádios até o término do período pré-operatório, por volta de 7 - 8 anos, limite da idade do grupo de crianças estudado.

As crianças que estão classificadas no estádio I admitem a existência do que é perceptível e, no que se refere aos desenhos de maior e menor quadrado após a terceira tentativa crescente ou decrescente, perdem de vista seu objetivo e o revertem sem se a perceber do fato. As crianças que conseguem algum progresso em relação às demais deste grupo, constróem progressões por tateios muito próximos, lentos e sucessivos e são classificadas no estádio II. Estas crianças, porém, não conseguem realizar o desenho por antecipação, fato este que ocorrerá por volta dos 7 - 8 anos com as operações.

Falta a este grupo de crianças (7 - 8 anos) os esquemas antecipadores, pois estes propiciariam, por antecipação, um esboço da solução do problema que lhes foi colocado. Por outro lado, na falta destes esquemas, a criança põe-se a resolver o problema por tentativas que são ações que se tornarão posteriormente em esquemas antecipadores, mas que por hora inviabilizam a seriação.

A seriação que a criança desta fase ainda não realiza, como já constatado anteriormente na elaboração da "ordem linear e cíclica" e estudos dos "nós e as relações de **envolvimento**", é fonte do esquema antecipador necessário nesta experiência (derivado das operações de **ordem** e de **envolvimento**).

A falta das operações de **ordem** e **envolvimento** inviabilizam a seriação das grandezas, pois para desenhar o quadrado menor ou maior é necessário comparar com o anterior, o que impossibilita o esquema antecipador.

Piaget salienta a dificuldade encontrada pela criança no seccionamento da linha ou de uma superfície, pois a criança não compreende a subdivisão da "metade da metade", e, mesmo quando ela realiza as divisões, o máximo que consegue é chegar a linhas e

quadrados de 2-3 mm que é bem visível e poderia ser diminuído, mas a criança aponta-o como elemento último da divisão.

As dimensões mínimas questionáveis para o experimentador e elemento indivisível para a criança são apontadas como fator de "ligação irredutível da intuição à percepção", pois, para eles, os menores elementos necessitam ser vistos, sem o que deixariam de existir. A criança está presa à percepção direta.

Quanto à forma do elemento residual, último da partição, nos parece ocorrer um paralelismo com o desenvolvimento do atomismo na física infantil. Na dissolução do torrão de açúcar na água[56], a criança afirma que a forma das partículas que ainda são visíveis, são iguais às do torrão e o mesmo ocorre com a partição da linha e das figuras. Os elementos residuais últimos terão necessariamente a forma geradora inicial, o menor quadrado a ser desenhado será um "quadradinho" e a menor linha será "uma linha bem pequena", o que foi chamado de isomorfismo.

A razão para que o elemento residual último tenha a mesma forma do inicial é a mesma que impossibilita uma divisão indefinida do contínuo e do isomorfismo (o menor quadrado possível é ainda um quadradinho). Nos dois casos são relativos à necessidade do caráter perceptivo da intuição inicial. Se é impossível buscar elementos além do perceptível, o todo não poderia ser dividido em partes tão pequenas como "pontos" que são redondos e descontínuos, pois um todo contínuo e não-circular não poderia jamais ser diferente de sua forma básica (o quadrado por exemplo, para a criança desta fase, não poderia assemelhar-se às características de um ponto).

Quanto à recomposição do todo a partir das partes, situação oposta à anterior, a criança até a constituição das operações não acredita que seja possível, pois se os pontos permanecem visíveis, eles não são outra coisa senão pontos. Portanto, "se eles são pontos não poderão ser uma linha", e o mesmo ocorre com as superfícies onde, se os pontos se tocam de modo contínuo (perceptivamente falando), não são mais pontos.

"Vê-se, pois, a que resultado chega a intuição inicial fundada na imagem que copia a percepção: heterogeneidade radical entre o contínuo e os pontos; decomposição do contínuo em elementos isomorfos ao todo, mas com o perigo de que essas partes sejam alteradas durante o seccionamento, caso em que eles se

---

[56] O atomismo da física infantil é objeto da obra "O desenvolvimento das quantidades físicas na criança."

deslocam precisamente em pontos que tornam impossível a sua recomposição, bem como a do todo." (PIAGET, 1993, p:153)

Isto nos leva a afirmar que a criança neste estádio só acredita no que vê, por não possuir uma estrutura operatória que permita colocar os diferentes elementos num sistema coerente e reversível. A necessidade da percepção distorce a realidade, sendo impossível o seccionamento e a recomposição da linha ou das figuras formadas por pontos, pois, ao serem divididas, deixam de se constituir e o mesmo ocorre com a recomposição. A criança necessita de "analogias emprestadas do concreto", restrito aos limites do visível e do manipulável que a percepção lhe fornece.[57]

A aquisição da continuidade coroa o desenvolvimento das relações topológicas sobre a qual está apoiada a representação do espaço infantil, diz Piaget:

"Em suma, a construção do contínuo, à qual nos fazem assistir os sujeitos do estádio IV[58], acaba numa síntese das relações topológicas elaboradas durante o estádios I a III. Enquanto separação intelectual (e não mais perceptiva ou intuitiva) dos pontos de vizinhos, as operações de divisão encontram no contínuo sua expressão generalizada e realizam a conciliação entre as relações de vizinhança e de separação. Enquanto preenchendo as vizinhanças de cada ponto, o contínuo permite às operações de ordem e de envolvimento encontrar também sua forma geral aplicável às linhas, superfícies e espaços a três dimensões, e fornece igualmente o fundamento racional às suas manifestações intuitivas, das quais vimos a sua precocidade a propósito das relações de fronteira, de abertura e fechamento. Resulta daí que o contínuo, que termina muito mais tardiamente sua elaboração do que todas essas outras relações, já que constitui a síntese delas, acaba a construção das noções topológicas próprias à representação infantil do espaço..." (PIAGET, 1993, p:163)

II.2.2 A construção do espaço projetivo e a construção da reta projetiva.

Para passarmos do estudo das relações topológicas às projetivas e euclidianas, é necessário que façamos a distinção entre elas.

---

[57] A necessidade do dado perceptivo nesta fase de desenvolvimento do espaço apresenta-se tal como na passagem dos grupos subjetivos aos objetivos, o bebê só conserva o objeto na medida em que sua percepção lhe permite, a criança só atribui conservação ao objeto que foi subdividido, ou que é recomposto à medida que vê alguma característica com o objeto inicial.

[58] O estádio IV tem início por volta dos 11 a 12 anos, é quando o pensamento se libera das limitações dos desenhos e manipulações reais.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

A diferença marcante entre as relações topológicas, projetivas e euclidianas está na maneira como elas coordenam as figuras entre si.

As relações topológicas, já estudadas anteriormente, tratam de relações de **vizinhança**, de **separação**, de **ordem**, de **envolvimento** e de **continuidade**. São relativas a uma mesma figura ou a uma mesma configuração estruturada por ela e é interna à figura que ao ser puxada, apertada ou comprimida, sua forma e sua grandeza podem ser alteradas sem haver nenhum prejuízo às suas propriedades. A única alteração que as figuras não podem ter para manter suas relações topológicas é o rompimento de suas fronteiras.

Uma bexiga pode sofrer várias alterações quanto a sua forma e a sua grandeza. Pode ser inflada até limites muito próximos do rompimento de sua superfície, pode também ser esticada, comprimida, o ar que a mantém "cheia" pode ser retirado, mas, para que mantenha suas propriedades topológicas, sua superfície não pode ser rompida (não pode ocorrer o menor furo em sua superfície).

Assim, as alterações sofridas por uma figura, contração ou expansão que ocorra durante as mudanças em suas formas, não conservam traços como distâncias, linhas retas e ângulos, e inviabilizam qualquer tipo de relações que possibilitem aos sistemas totalizadores ligarem diferentes figuras entre si, quer seja em relação à perspectiva (conservação da forma) ou a eixos coordenados que localizem os objetos à esquerda, à direita, em cima, em baixo etc.

"... o espaço topológico inicial é interior a cada figura, da qual ele exprime as propriedades intrínsecas em oposição às relações espaciais que as situariam em relação às outras figuras." (PIAGET, 1993, p:167)

O estudo do espaço projetivo e euclidiano[59] defronta-nos com uma situação até então inusitada, pois trata-se de localizar os objetos em suas configurações em relações mútuas, segundo sistemas de perspectiva geral e de acordo com eixos coordenados (horizontais e verticais). Decorre deste fato serem as relações projetivas e euclidianas

[59] O estudo do desenvolvimento infantil das relações projetivas e euclidianas, que irão constuir-se somente após o período pré-operatório, será analisado nesta pesquisa por dois procedimentos, o primeiro referente ao Capítulo 6 "A reta projetiva e a perspectiva", p:169, o segundo relativo às relações euclidianas referente ao Capítulo 13 "Os sistemas de referência e as coordenadas: a horizontal e a vertical", p:393, da obra tema. Como tais relações se concretizarão após as operações o que ocorrerá a partir dos 7 - 8 anos, fora do nosso grupo de pesquisa, mas que foram objetos de investigação para levantamento dos dados empíricos, sendo apresentado a partir da p:129 deste trabalho, METODOLOGIA E LEVANTAMENTO DE DADOS e RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS, (CAPÍTULO III E IV).

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

muito mais complexas tanto na sua organização quanto no seu desenvolvimento.

As estruturas projetivas e euclidianas requerem, na sua constituição, a conservação de linhas retas, ângulos, curvas, distâncias etc. e estas estruturas implicam em um sistema geral de organização:

> *"Com o espaço projetivo e o espaço euclidiano, o problema é, ao contrário, situar os objetos e suas configurações uns em relação aos outros , segundo sistemas de conjunto que consistem, seja em projeções ou perspectivas, seja em 'coordenadas' que dependem de certos eixos, e é por isso que as estruturas projetivas e euclidianas são mais complexas e de elaboração mais tardia."* (PIAGET, 1993, p:168)

A primeira conduta analisada por Piaget no estudo do desenvolvimento das relações projetivas é referente à construção, pela criança, da reta projetiva. A construção da reta projetiva requer relações muito específicas, pois há de se considerar a coordenação de pontos que estejam subordinados a uma característica, a de estarem todos sobre uma reta compreendida entre dois pontos. Tal construção está longe de ser elementar, mas longe está também de ser novidade para a criança, pois desde muito precocemente, o bebê percebe e segue, com os olhos e com as mãos, formas retilíneas.

A mamadeira, que por volta dos 10 meses constitui-se em um objeto que possui forma e grandeza, apresenta retas que a criança vê desde muito pequena, mesmo que estas retas sejam parte de um conjunto de características implícitas a um objeto (a mamadeira), mas, perceber perceptivamente uma reta é uma coisa, representá-la ou construí-la é outra.

O estudo da reta projetiva mediante a ação de mirar[60] é o recurso que Piaget utilizou para estudar a construção de perspectivas elementares.

Para os experimentos que se seguem foi utilizada uma mesa quadrada ou retangular e outra redonda e palitos de fósforo com massa na base para sua fixação sobre a superfície da mesa.

Pedia-se às crianças entrevistadas que construíssem uma reta onde cada palito de fósforo era um *"poste de eletricidade"* e que

---

[60] *"A operação de 'mirada' não é pois, uma ação simples, mas produto de uma diferenciação e , em conseqüência, de uma coordenação dos diversos pontos de vista em jogo."* (PIAGET, 1993, p:179)

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

deveriam distribuí-los para que formassem *"uma linha bem reta ao lado de um caminho reto."*

O início das provas ocorria sobre a mesa de bordas paralelas, com o "poste" inicial e final fincados (distanciados entre si de 20 a 40 cm, dependendo de cada caso e a distâncias iguais da borda da mesa) sobre a mesa.

As questões propostas eram duas: a primeira, construção da reta paralela à borda, mas nenhum comentário era realizado neste sentido, e a segunda, construção da reta oblíqua sem nenhum paralelismo com as bordas da mesa.

Quanto à mesa redonda, três questões eram propostas, a construção da reta diametral, da reta com os pontos referenciais próximos à borda o que favorecia a montagem de um arco de círculo e, finalmente, a reconstrução de uma reta onde todos os palitos inicialmente eram colocados formando um ziguezague.

As crianças classificadas no estádio mais elementar (até 4 anos) são incapazes de realizar a construção da reta projetiva, mesmo que paralela à borda da mesa. Suas construções estão restritas a colocação de um palito seguido do outro sem qualquer preocupação com a retidão da reta construída, sendo os palitos posicionados uns muito próximos aos outros, mantendo uma característica iminentemente topológica (de **vizinhança** e **proximidade**). Esta construção não deixa dúvidas e leva a afirmação da ausência da representação da reta, apesar de seu conhecimento perceptivo e o primado das relações topológicas.

O estádio II (crianças de 4 a 7 anos) tem como característica a construção da reta projetiva paralela à borda da mesa, e também o fracasso quando o paralelismo é abolido. Piaget, devido às características apresentadas por esse grupo de crianças, divide em dois subestádios: IIA e IIB.

O grupo IIA (crianças até os 6 anos) é caracterizado pelo reconhecimento perceptivo da reta. A criança sabe o que é uma construção retilínea e diferencia curvas de retas, apontando exemplos, mas só consegue montá-la na posição em que o sugestionamente da borda é uma forma de auxiliar na construção da reta paralela à borda.

Em duas situações as crianças deste grupo conseguem a construção da reta: na posição onde a reta é paralela à borda da mesa retangular ou quadrada e, com um pouco mais dificuldade, na reta diametral (mesa redonda), mas a construção da reta que forma um ângulo com a borda retangular revela-se intransponível.



As crianças deste estádio de desenvolvimento consideram a configuração perceptiva como sendo a mais importante e não se preocupam com o ângulo ocupado pelas fileiras de postes (palitos).

A construção da reta paralela à borda em parte atinge os objetivos propostos, pois a criança constrói a reta unindo os pontos extremos com uma certa retidão, mas, mesmo que a criança seja colocada no prolongamento da reta, não percebe a posição privilegiada para a correção dos "postes" utilizando a conduta de "mirar". Há um alinhamento aproximativo entre os palitos e a borda .

A construção da reta sobre um campo neutro, ou seja, onde a percepção da borda não se torna um obstáculo à construção, como é o caso da reta diametral na mesa redonda (Figura 15), apesar de apresentar um grau de dificuldade maior que a anterior, é superável e a criança consegue montar, realizar a montagem da reta.

O paralelismo com a borda transforma-se em obstáculo quando a reta a ser montada forma um ângulo em relação à borda da mesa. A criança realiza várias tentativas mas acaba por desistir desta construção, afirmando a sua total impossibilidade.

A construção da reta oblíqua mostra a impossibilidade de montagem da reta o que contraria os dados fornecidos pela percepção. Não se trata, como anteriormente, de utilizar a imitação interiorizada, mas de conciliar novas relações em uma nova configuração, onde a operação de "mirar"[61] ou o procedimento euclidiano da menor distância entre dois pontos seria a solução ao problema proposto. Esses procedimentos só serão utilizados com as operações (aos 7 - 8 anos).

A falta das operações, neste estádio de desenvolvimento, impossibilita a diferenciação entre a "figura" (reta a ser construída) e o "fundo" (o canto da mesa). Na falta das operações a criança tenta substituí-las por um apelo à configuração perceptiva, o que aparece quando a criança constrói duas retas paralelas aos lados do canto da mesa, formando um "L" .

A impossibilidade de construir a reta projetiva demonstra a incapacidade da criança de representar a imagem da reta sem o auxílio da percepção, pois esta construção depende da operação e não da percepção. Essas operações, ainda não adquiridas pela criança neste estágio, são as operações projetivas fundadas na ação de mirar ou as euclidianas fundadas nos deslocamento dos pontos (postes).

---

[61] THUILLIER, 1994, p:81 fala sobre "As mirada dos artilheiros e dos marujos", no sentido de ser uma reta que liga dois pontos, na artilharia a saída do canhão da arma de encontro ao alvo, com o mesmo recurso da construção da reta projetiva entre dois pontos referenciais.

unesp

Para Piaget existem duas espécies de representação espacial: uma intuitiva e outra operativa. A intuitiva é restrita à imitação interior (imagem mental) sobre os dados da percepção, podendo ser favorecida ou desfavorecida pelas configurações perceptivas atuais, como por exemplo na reta paralela à borda da mesa, e desfavorecida no caso da reta que forma um ângulo com a borda, pois a reta a ser construída está em oposição aos dados fornecidos pela percepção. A representação operativa libera-se da configuração perceptiva, pois está fundada nas operações, fato que não ocorre no presente estádio.

Na falta das operações não há liberação dos dados perceptivos. A operação de "mirar" não é única, mas é necessária à construção da reta oblíqua que é resultado da diferenciação e da coordenação dos diversos pontos de vista (esquemas) possíveis, por isso mais tardia.

O estádio IIB é marcado pelo início da liberação gradual dos dados fornecidos pela percepção das formas circundantes e eventualmente pela montagem de retas independentes da borda da mesa.

Nesta fase de desenvolvimento, o papel do gesto é muito importante, pois mesmo sem empregar a mirada, o que ocorrerá no estádio III com as operações, a criança por tateios sucessivos alinha os objetos em função do olhar ou das mãos que as juntam posicionando os palitos de fósforo na mesma direção, reduzindo a distância entre eles (procedimento euclidiano), mas que realiza sem estar consciente do procedimento utilizado.

Os procedimentos euclidiano e projetivo são solidários, e Piaget aponta esta união entre o olhar e o gesto das mãos como sendo um exemplo de interdependência das construções projetiva e euclidiana.

Os avanços em relação à fase anterior estão no fato de a criança tentar conciliar os dois pontos de referência. A construção da reta oblíqua mostra este fato e a criança tenta construir a reta, mas o que realiza é uma "curva" que permanece "atraída" pelo canto da mesa.

O estádio IIB é um período de transição entre a representação intuitiva e a representação operatória do espaço, quando a criança por ensaios sucessivos chega a descobrir a construção da reta projetiva pela "mirada". No momento em que percebe que os pontos de referência devem ser situados numa mesma reta, opondo-se à reta perceptiva, constitui-se a representação operatória da reta.

Tendo estado presa à configuração da borda (IIA), a criança consegue a partir desse estádio (IIB) ligar os pontos referenciais quer por procedimento euclidiano (unir os pontos pela menor distância

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

mantendo a mesma direção) ou pelo projetivo com o auxílio da "mirada". Esta necessidade de alinhar todos os pontos numa mesma reta requer centração a uma única possibilidade a ser descoberta, independente do ponto de vista da criança, que submetendo-se ao que foi pedido constrói a reta entre os dois pontos referenciais, o que é bem mais difícil e ocorrerá com as operações a partir dos 7 a 8 anos.

II.2.3 O espaço euclidiano e desenvolvimento dos sistemas de referência e as coordenadas horizontal e vertical.

O estudo realizado por Piaget das coordenadas horizontal e vertical busca descobrir se a criança faz uso espontâneo de sistemas de referência e, se os faz, como isso ocorre.

Piaget tinha como objetivo verificar como as crianças pequenas percebem os objetos em uma rede euclidiana de coordenadas horizontais e verticais.

A construção das retas, dos ângulos e das inclinações, são etapas preparatórias à construção do espaço tridimensional, onde os objetos se deslocam em relações recíprocas. Esses deslocamentos ocorrem em relações simultâneas esquerda-direita, acima x abaixo e frente x atrás. Mas esta constituição do espaço tridimensional onde os objetos se deslocam não é dada a criança, não é inata.

A construção do espaço tridimensional é conseqüência de construção espontânea e dos movimentos dirigidos no espaço, sendo por isso, como vimos anteriormente na construção da reta projetiva, um longo processo elaborado pela criança que evoluirá para formar um conjunto que se transformará no espaço tridimensional.

Para o estudo referente ao desenvolvimento evolutivo do espaço euclidiano analisaremos construção dos eixos horizontal e vertical.

O estudo do eixo horizontal foi realizado utilizando o nível dos líquidos. Já o estudo do eixo vertical foi realizado utilizando vários recursos, o fio de prumo, o mastro de um barco e a maquete de uma montanha.

O estudo do eixo horizontal foi realizado com garrafas retangulares e esféricas com ¼ de seu volume de líquido colorido. Pedia-se às crianças previsão do nível do líquido quando a garrafa era inclinada e que registrassem no desenho. Com as crianças menores de 5 anos, o pedido de desenho era feito mostrando as garrafas inclinadas com líquido.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Para as crianças maiores de 5 anos, essa avaliação era complementada com a escolha de cartões que continham vários desenhos de garrafas, alguns com o nível marcado corretamente, outros incorretamente. As crianças deveriam separar os cartões em que o nível estivesse marcado corretamente daqueles que estivessem incorretos. Para os cartões com o nível apresentado incorretamente deveria apresentar formas de corrigi-los bem como a justificativa para a correção.

No tocante ao eixo vertical, o flutuador com o mastro era colocado sobre a superfície líquida das garrafas usadas anteriormente e o mesmo procedimento anterior era adotado. Pedia-se o desenho antecipador do mastro nas diversas inclinações da garrafa passando ao desenho à vista da experiência.

Um segundo procedimento adotado foi usando as garrafas de lados paralelos sem água e onde era colocado um peixe suspenso no gargalo por meio de um fio. O mesmo método de registro anterior era adotado.

Um último procedimento era realizado, com uma montanha feita em massa de modelagem ou areia. Era pedido para que a criança colocasse postes bem retos, no cume, no lado ou nas encostas. Após a colocação dos postes, era pedido às crianças para que desenhassem a montanha com os postes.

Os resultados apresentados por essas diversas técnicas permitiram classificar a evolução do desenvolvimento do espaço euclidiano em três estádios.

No primeiro grupo classificado por Piaget de estádio I (até 4 - 5 anos), a experiência não exerceu qualquer influência sobre as crianças, pois elas não conseguiam representar, nem por gestos nem nos desenhos, a superfície da água como sendo plana. Seus desenhos eram garatujas que passavam fora dos limites da garrafa. Outras que se encontravam mais evoluídas desenhavam o líquido dentro da garrafa como se fosse uma "mancha circular" ou mesmo uma pequena bola interna à garrafa. Nos desenhos da montanha, as árvores foram colocadas paralelas à montanha.

Os dados apresentados nos desenhos foram classificados como sendo topológicos e não há nenhuma característica que apresente qualquer relação euclidiana, pois, predominam as relações de **vizinhança** e **envolvimento**, mas nenhuma forma de reta ou plano, nem tão pouco direções no espaço.

unesp

No segundo estádio II (entre 4 - 5 e 7 - 8 anos) não há a descoberta da horizontal nem da vertical. No subestádio IIA, apesar dos avanços em relação ao estádio I, a experiência não exerce qualquer influência no desenho das crianças que concebem o nível do líquido como um reta (no desenho ou na representação com a mão), mas esta concepção não atinge a horizontalidade permanente. A superfície do líquido é desenhada como paralela ao fundo da garrafa mesmo quando a garrafa é inclinada em diversos ângulos.

Mesmo concebendo o nível do líquido como paralelo ao fundo da garrafa, já existe nestas crianças o início da intuição das paralelas, o que constitui o início da percepção do espaço tridimensional, com a coordenação dos objetos separados mesmo que a curtas distâncias (o líquido e a garrafa).

A inclinação da garrafa provoca o deslocamento do líquido, mas para a compreensão deste fato é necessário reunir elementos móveis (a superfície da água) a um sistema de referência externo imóvel (a mesa ou o chão). Este relacionamento da superfície do líquido com um referencial externo imóvel é o que se constitui nas operações geométricas geradoras de um sistema de coordenadas. É justamente a falta destas operações que impossibilitam a leitura dos dados fornecidos pela experiência neste estádio.

Com relação ao eixo vertical, as crianças desenham os postes perpendiculares à encosta da montanha, mas são incapazes de prever a direção do fio de prumo.

No subestádio IIB, a criança faz a previsão do deslocamento e do nível do líquido corretamente. Afirma que o líquido se desloca mas falha nos desenhos que, por falta de "uma leitura geométrica" e da utilização de eixos externos, fica restrito a linhas oblíquas presas ao canto da garrafa, não tirando nenhum proveito do que foi presenciado. Apesar da previsão acertada do nível do líquido nas diversas inclinações da garrafa, a criança não procura um sistema externo de orientação e por isso prende-se ao canto da garrafa.

No tocante à verticalidade, a criança coloca os postes e as casas verticalmente, mas, no desenho, o que ela apresenta é a colocação de objetos perpendiculares à encosta da montanha, o que mostra que a criança ainda está restrita a um sistema de referência parcial. Pode-se afirmar que, no estádio IIB, não há generalização das coordenadas horizontal e vertical.

O desenvolvimento dos sistemas de referência apresenta uma descentração progressiva do espaço infantil, sendo que a primeira

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

busca deste sistema ocorre com a criança utilizando-se do fundo da garrafa (IIA), ocasião na qual a criança marca o nível do líquido paralelo ao fundo, depois, os lados da garrafa assumem tal referencial (IIB), mas tanto o primeiro como o segundo são sistemas interiores ao objeto que contém o líquido que se desloca, sendo considerado um sistema único, portanto, não havendo uma relação com qualquer referencial externo.

A descoberta da horizontalidade dos líquidos, no estádio III, é produto do relacionamento do líquido com sistemas de referências externos à garrafa. Inicialmente limitado a situações particulares como é o caso da garrafa virada de boca para baixo e deitada (IIB) que necessita somente de relações de paralelismo e de perpendicularidade, e fracassando nas situações onde há inclinação da garrafa, mas as operações concretas é que possibilitarão a generalização das noções de horizontalidade e verticalidade.

Piaget diz:

"... graças ao desenvolvimento das operações concretas, que prolongam e completam as intuições articuladas do estádio II, torna-se possível o relacionamento entre os elementos das configurações consideradas, os sistemas da referência móveis interiores a essa configuração e os sistemas de referência imóveis exteriores a esta.." (PIAGET, 1993, p:425)

Essa conquista ocorrerá diferente de noções mais elementares que terminam em um sistema total, como é o caso das retas e paralelas, que ocorrem por volta dos 7 ou 8 anos. As coordenadas horizontal e vertical supõem um conjunto de objetos em um campo de ação, o que vai ocorrer em duas etapas, que são os subestádios IIIA e IIIB. Em IIIA ocorre a generalização progressiva da horizontalidade e da verticalidade, e em IIIB ocorre a aplicação a todas as situações, o que será, segundo Piaget, por volta dos 9 anos em média.

Nada nos parece mais elementar do que a constituição do espaço tridimensional. Os objetos dispostos em seus "lugares", os corpos que se movimentam, mas, para chegarmos a esta estruturação, o caminho é longo e demorado:

"Nada parece mais simples, à primeira vista, do que um espaço estruturado a partir de tal princípio[62]*. Olhando os objetos que nos rodeiam, nós*

[62] O princípio citado por Piaget é o sistema tridimensional de coordenadas ortogonais, que se encontra representado na Figura 7, p:60 deste trabalho.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

os vemos dispostos no interior de um entrelaçado de retas paralelas, que se cortam perpendicularmente segundo três dimensões. E se essa visão das coisas nos parece clara, é porque a experiência física parece nos impor tal estruturação, em função de todas as verticais que percebemos paralelas entre si e de todas as horizontais que reconhecemos igualmente paralelas e cortando as primeiras em ângulos que parecem retos. Em resumo, um sistema de coordenadas é comparável a uma tabela com dupla ou tripla entrada, na qual todos os objetos do espaço são ordenados em correspondência biunívoca uns com os outros segundo diversos compartimentos previstos, e nada parece mais elementar do que tal coordenação." (PIAGET, 1993, p:434-435)

unesp

III. METODOLOGIA E LEVANTAMENTO DOS DADOS

Este capítulo apresenta como foi desenvolvida a pesquisa empírica, seus objetivos e resultados.

III.1 SUJEITOS

Para a pesquisa, foram escolhidas crianças que vivem em bairro periférico de baixo poder aquisitivo da cidade de Bauru, Estado de São Paulo, matriculadas em escolas municipais de educação infantil.

O levantamento de dados ocorreu no período de fevereiro a dezembro de 1997, mas a solicitação para a aplicação do projeto data de novembro de 1996.

Estivemos nas escolas por um período de dois meses antes que a coleta de dados tivesse início. Tal propósito tinha como objetivo conseguir a familiarização das crianças, ocasião em que aplicamos os testes-pilotos, a fim de que pudéssemos deixá-las mais à vontade com os trabalhos que foram desenvolvidos, e que pudéssemos fazer a opção das provas que atenderiam melhor os objetivos propostos neste estudo.

As entrevistas foram realizadas nos dois períodos (matutino e vespertino), tendo, as duas unidades escolares, locais reservados para a aplicação das provas.

Foram escolhidos, para a pesquisa, crianças com as seguintes faixas etária:

GI - entre 2 anos e 6 meses a 4 anos (2;06 a 4;00)
GII - entre 4 anos a 5 anos e 6 meses (4;00 a 5;06)
GIII - entre 5 anos e 6 mês a 7 anos (5;06 a 7;00)

Essas faixas etárias foram mantidas para todo o levantamento dos dados. Para o primeiro grupo de provas (das relações topológicas), foram entrevistados 100 sujeitos assim distribuídos:

- 32 entre 2 anos e 6 meses a 4 anos (2;06 a 4;00)
- 34 entre 4 anos a 5 anos e 6 meses (4a a 5;06)
- 34 entre 5 anos e 6 mês a 7 anos (5;06 a 6;07)

unesp

Para a segunda (relações projetivas) e terceira (relações euclidianas) partes das entrevistas, devido à complexidade e extensão da pesquisa, optamos por selecionar por sorteio 12 crianças de cada grupo do universo já anteriormente pesquisado (relações topológicas).

Foram entrevistadas trinta e seis crianças, para o levantamento de dados. As provas ocorreram sucessivamente por partes. Primeiro foram entrevistados todos os indivíduos dos três grupos objetivando levantar os dados das relações projetivas (construção da reta) e após, iniciamos as provas das relações euclidianas (horizontalidade do nível da água).

III.2 PROVAS

As provas utilizadas para estudarmos as relações espaço-geométricas foram aplicadas em sessões individuais nas quais tínhamos como objetivo observar como as crianças resolviam as questões propostas, bem como quais eram seus argumentos frente às dificuldades impostas pelo real. Foram realizadas em três grupos.

O primeiro grupo de provas teve como objetivo avaliar as relações topológicas. Para tanto, utilizamos como recurso a imagem gráfica (desenho). O primeiro procedimento era do desenho espontâneo da figura humana. A cada criança era pedido para desenhar, de memória, um homem.

Em complemento ao desenho espontâneo, fazíamos as crianças copiarem uma série de modelos (Figura 11), que eram compostos de formas topológicas, euclidianas e a combinação das duas.

O segundo grupo de provas, referente às relações projetivas, foi realizado visando à construção da reta projetiva. O pedido era feito para que a criança construísse sobre uma mesa primeiramente retangular e depois redonda, com uma série de palitos que, presos à superfície por massa de modelagem, montariam a reta projetiva utilizando possivelmente a conduta de mirar (Figuras 12 a 17).

O terceiro e último grupo de provas era referente às relações euclidianas. Tinha como objetivo levantar a horizontalidade dos líquidos e a possível utilização de um sistema externo de referencial. Foram utilizadas garrafas de lados paralelos e redondos (Figuras 18 a 23).



III.2.1 Levantamento de dados das relações topológicas elementares

Através das provas do desenho da figura humana e da cópia dos modelos apresentados às crianças, investigamos a sucessão das relações espaciais geométricas, como resultado de percepção visual, buscando levantar quais as relações que são construídas inicialmente no espaço representativo. Assim, começamos nosso levantamento empírico pelas relações topológicas. *"Trata-se de reconstituir a ordem genética real do espaço representativo, de dissociar cuidadosamente a percepção e a representação"* (PIAGET, 1994, p:61)

As relações topológicas são as relações mais elementares da geometria, sendo intrínsecas aos objetos, estando relacionadas com **vizinhança** ou **proximidade**, **separação**, **ordem** (os elementos são vizinhos e estão separados ao mesmo tempo), **circunscrição** ou **envoltório** e **continuidade**. As relações topológicas permitem uma flexibilidade muito grande de transformações nos corpos (desenhos, formas etc.), sendo possível: torcer, comprimir, esticar, tracionar os objetos, mas possui uma restrição: não pode ocorrer rompimento de seus limites de suas fronteiras. Podemos comparar as transformações topológicas sofridas por um objeto a uma caricatura que, por mais distorcida que seja, guarda relações (**proximidade**, **vizinhança**, **envolvimento**, **ordem** e **continuidade**) com o objeto desenhado. A topologia é conhecida como a geometria elástica ou da borracha.

- **1ª Prova - O desenho da figura humana**

O levantamento de dados tinha início com o pedido para que a criança desenhasse "a figura humana".

- *"Você gosta de desenhar? Será que você poderia desenhar um homem?"*

Tal estratégia tinha dupla função: familiarizar a criança com a situação presente e investigar as características de seu desenho segundo os estudos de G. H. Luquet na obra *"Le dessin infantin"*.

A prova foi realizada através de uma entrevista individual, dando-se à criança papel sulfite de formato A4 e lápis preto.

- **2ª Prova: O desenho das formas geométricas**

Apresentamos à criança uma série de modelos de formas geométricas, (Figura 11) escolhidos justamente para avaliar em que ordem aparecem as relações espaciais como resultado da percepção visual. Percebemos que Piaget escolheu os desenhos deliberadamente com tal função, de forma a destacar particularidades das formas topológicas e euclidianas, a fim de poder comprovar sua tese de que as relações topológicas são anteriores às projetivas e euclidianas e que, devido às suas especificidades, ocorrem quase que simultaneamente.

A prova consistiu na apresentação de cartões, um de cada vez, sucessivamente, solicitando que a criança os copiasse. Era fornecido papel e lápis.

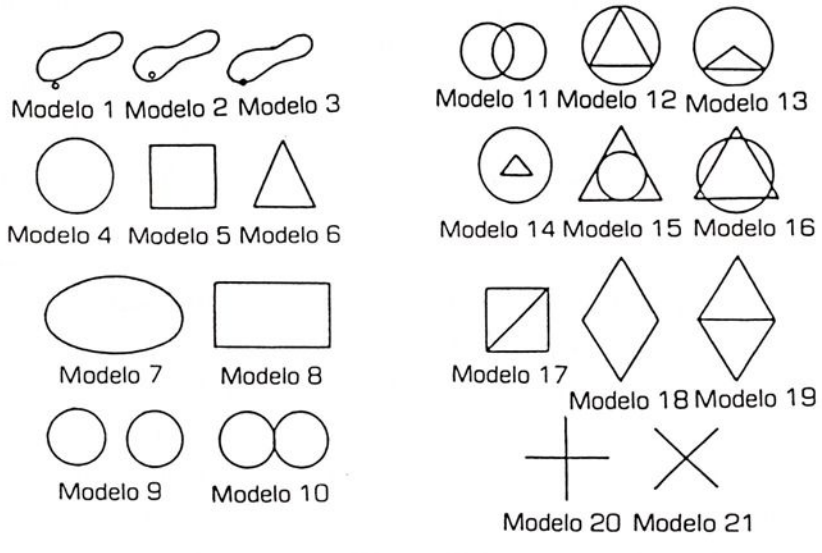


Figura 11 - Modelos a serem copiados (21 formas), reproduzidos da obra *"La représentation de l'espace chez l'enfant"*, (PIAGET, 1948, p:73).

III.2.2 Levantamento de dados das relações projetivas

O levantamento dos dados desenvolveu-se em duas partes: a primeira realizada em uma mesa retangular, e a segunda em uma mesa redonda, onde foram colocados dois palitos de fósforos, plantados pela cabeça com massa de modelagem, para que eles ficassem fixos, deixando entre o primeiro e o último palito um espaço de aproximadamente 30 cm.

Analisamos com esses procedimentos a gênese da conduta de "mirar" (colocar-se no prolongamento da reta projetiva para avaliar seu alinhamento), o que constitui em um procedimento tipicamente projetivo.

- **1ª Prova: A construção da reta projetiva sobre a mesa retangular**

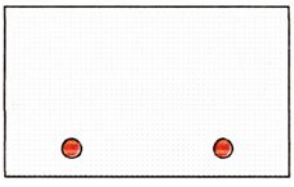
Iniciou-se a experiência com a mesa retangular sendo os palitos colocados aproximadamente a 7 cm da borda (Figura 12). Nada foi mencionado em relação ao paralelismo entre a reta a ser construída e a borda da mesa. Foi pedido ao sujeito que efetuasse a localização de 8 outros palitos entre o primeiro e o último já fixados, a fim de construir uma "linha telefônica" ou de linha de "transmissão de energia", ao lado de uma estrada completamente reta ou, ainda, uma fila bem reta para tomar lanche ou qualquer atividade que os professores pedem a sua formação. Tal analogia é devido à dificuldade em usar com crianças de pouca idade, termos técnicos da geometria.

Para as crianças menores usamos o artifício de que são "árvores uma ao lado da outra", ou ainda "irmãos de mãos dadas", mas notamos que a formação da fila é uma prática diária nas escolas para a organização das atividades, e foi a melhor solução. Tomamos o cuidado de verificar que era mantido o espaçamento entre as crianças na formação da fila, e mencioná-lo, pois, ao fazer a analogia entre a fila diária e a colocação dos palitos de fósforos, este era um dado que não poderia interferir nos resultados, dado que, como verificaremos, nos resultados, as relações de **proximidade** e **vizinhança** (crianças muito próximas - palitos muito próximos) são características da crianças menores, sendo tais relações de ordem topológicas.

Após a primeira construção (reta projetiva paralela à borda da mesa retangular) retirávamos os palitos e recolocávamos de forma a abolir qualquer tipo de paralelismo ou diagonal com a borda da mesa (retirava-se o provável referencial que possibilitasse a construção), ficando o primeiro palito de um dos lados da borda e o outro ao longo do lado adjacente, o que formava um ângulo com a borda da mesa e a reta solicitada, (Figura 13).

Pedimos à criança que, entre os extremos, situasse oito palitos, usando da mesma analogia do procedimento anterior.





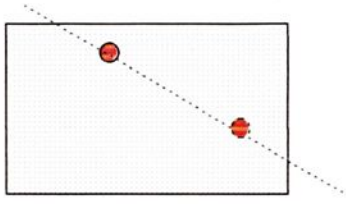


Figura 12 e 13 - Disposição dos palitos de fósforo na mesa retangular, construção da reta paralela à borda da mesa, construção da reta projetiva com ângulo de inclinação com a borda.

- **2ª Prova: A construção da reta projetiva sobre a mesa redonda**

A segunda parte foi realizada utilizando uma mesa de tampa redonda de 65 centímetros de diâmetro, e mantido o mesmo procedimento anterior. Esta segunda parte foi subdivida em três subitens para a avaliação da construção de retas paralelas à borda da mesa, retas radiais e a retificação da reta em ziguezague.

Foram apresentados, às crianças, os palitos locados em dois pontos da mesa redonda, situados a aproximadamente 6 centímetros da borda e com um espaço de 30 centímetros entre o primeiro e o último, (Figura 14), de forma que a construção realizada tivesse a mesma orientação de um arco de circunferência, ou mesmo de uma corda simples. Após, foi pedida a construção da reta projetiva esperando que eles se utilizassem da conduta de mirar para tal construção.

Depois desta solicitação realizamos o levantamento da construção da reta projetiva próximo à borda da mesa redonda, (Figura 14), utilizando as mesmas estratégias anteriores.

Aos procedimentos anteriores a avaliação das relações projetivas terminaram com terceira situação-problema para as crianças, quando a reta projetiva foi apresentada pronta mas em forma de ziguezague ou curva (Figura 16), para a possível retificação, (Figura 17).

unesp



Figura 14 e 15 - Disposição dos palitos na mesa redonda, construção da reta projetiva próxima à borda da mesa, e construção da reta projetiva diametral .

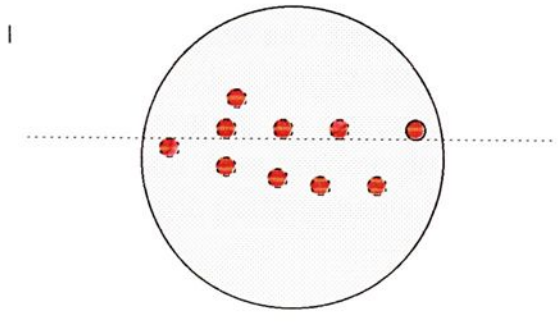


Figura 16 - Disposição dos palitos em ziguezague na mesa redonda para a retificação da reta.

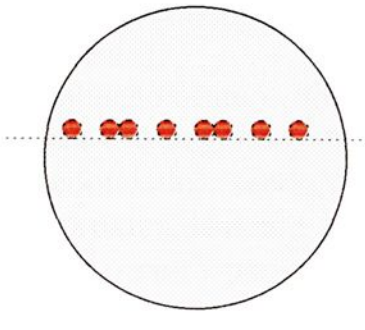


Figura 17 - Disposição dos palitos retificados

Desenvolvimento: A conduta analisada reflete a atitude de posicionar-se sob um ponto de vista particular, e diferente da perspectiva da criança estudada nesta faixa etária. Apesar do processo de descentração do seu próprio "eu"[63], a criança pré-operatória olha o mundo com seus "olhos", sendo o nosso objetivo buscar quando a criança é capaz de construir a reta projetiva.

III.2.3 Levantamento de dados das relações euclidianas ou métricas - A coordenada horizontal e o nível dos líquidos

Buscamos levantar com que idade a criança utiliza-se dos sistemas de referenciais cartesianos. Para tanto, fizemos uso de um fenômeno físico, o nível horizontal dos líquidos. É necessário salientar que o nível do líquido não retrata perfeitamente o eixo de coordenadas horizontal, pois tal conceito depende da força da gravidade o que determina a curvatura da superfície dos oceanos, mas que, devido à pequena extensão da superfície do líquido em questão, consideraremos tal superfície como perfeitamente reta.

- **A horizontalidade dos líquidos**

Para avaliar a construção do espaço euclidiano, que tem como característica as paralelas, os ângulos, as semelhanças etc., fizemos uso do nível dos líquidos, procurando investigar as constância da forma assumida pelo nível dos líquidos, qualquer que fosse a inclinação dos recipientes (continente).

Para tal avaliação usamos dois pares de garrafas. O primeiro par, de parede paralela e o segundo, de parede arredondada com gargalo (retangular e arredondado), sendo colocado, em um exemplar de cada um dos pares, aproximadamente ¼ de seu volume de água colorida com tinta guache e o outro permaneceu vazio para que fosse utilizado

[63] O período pré-operatório, foco desta pesquisa, caracteriza-se por um pensamento espacial egocêntrico, onde o espaço é referente às relações que a criança estabelece entre ela e os objetos ao seu redor, portanto a perspectiva é relativa aos objetos como a criança os vê, no caso específico da construção da reta projetiva com dois pontos demarcando um ponto de vista particular é um desafio ao pensamento infantil.

unesp

nas explicações infantis que demandavam imaginar antecipadamente as questões propostas.

A utilização da tinta teve como finalidade colocar em destaque o limite ocupado pelo líquido (conteúdo) e o recipiente (continente).

A condução do experimento prosseguiu no sentido de investigar quais são as hipóteses infantis possíveis de como o nível da água (conteúdo) se comporta com a inclinação a ângulos variados das garrafas (continente).

Para as crianças menores de 5 anos, o levantamento de dados teve início com a solicitação para demonstrar com a mão (representação gestual - RG) e verbalmente (representação verbal - RV) como o líquido se comporta dentro do garrafa, quando este é inclinado. Para que tivéssemos a certeza do seu entendimento sobre a questão colocada, e para nos certificarmos que elas concebem o nível da água como um plano inclinado ou horizontal, foi pedido em seguida que desenhasse (representação por meio de desenho RD) o que estava sendo presenciado (tendo os vidros com água e inclinados à sua frente).

O registro gráfico foi realizado pela criança mediante a visão da experiência (imagem reprodutora IR) e o desenho foi feito em uma folha previamente preparada com as garrafas desenhadas nas inclinações correspondentes à ordem em que eram efetuadas.

Pedia-se à criança para que apontasse na folha de registro qual era a garrafa a ser pintada, para que nos certificássemos se ela realmente havia entendido que o vidro havia sido girado (formando 45, 90, 125 e 180°, tomados no sentido anti-horário, e não necessariamente nesta ordem) com o desenho dos vidros nas diferentes inclinações, apoiados em um suporte horizontal (Figura 18), na ordem em que ia sendo apresentado à criança, tendo o cuidado de variar a ordem das posições de forma a evitar perseverações ou erros sistemáticos.



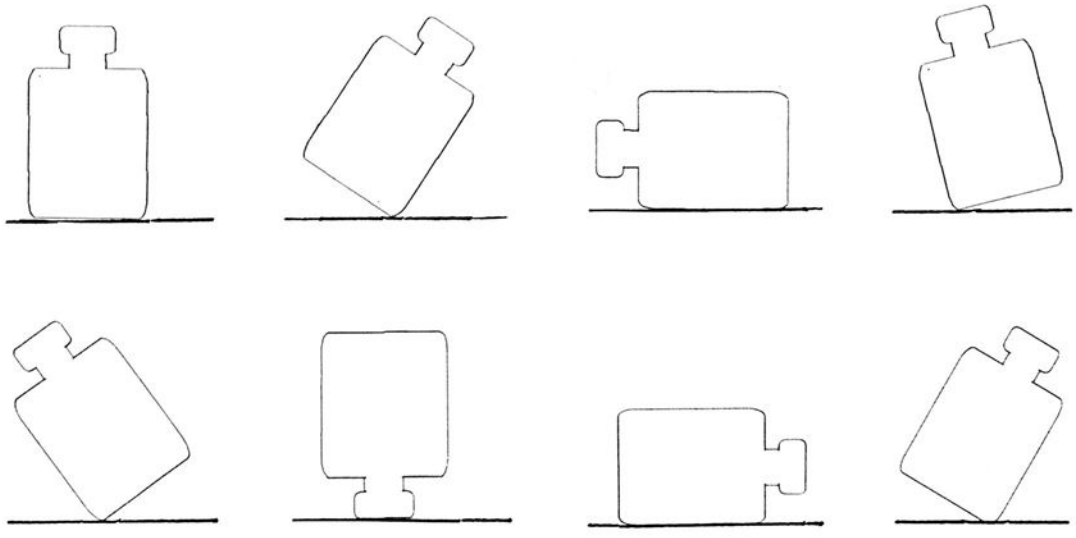


Figura 18 - Folha para marcar o nível do líquido em garrafa de bordas paralelas.

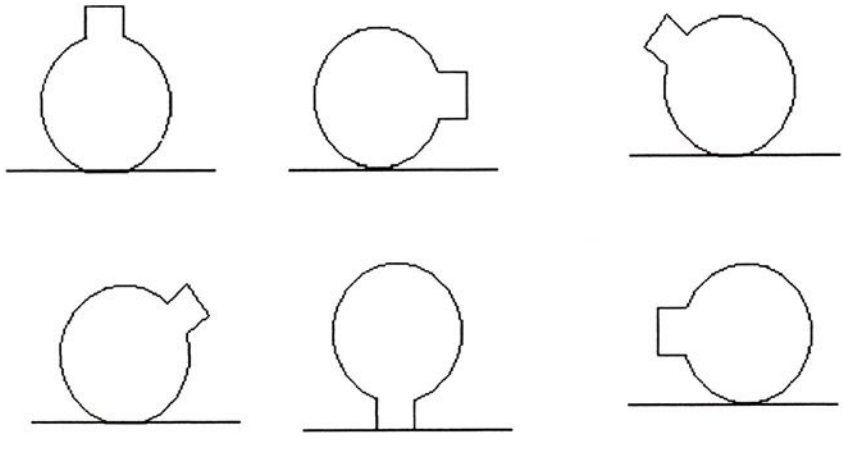


Figura 19 - Folha para marcar o nível do líquido em garrafa redonda

Para as crianças maiores de 5 anos utilizamos a mesma técnica com pequenas alterações. Acrescentamos aos procedimentos anteriores um desenho antecipador (imagem antecipadora de transformação - RAT), que retratasse a previsão do nível do líquido com a inclinação da garrafa antes da realização da experiência. Portanto, a criança teve que

antecipar a situação-problema e antever (imaginar) qual seria o nível da água após a inclinação da garrafa devido à mudança de posição. Após o desenho antecipador, a criança presenciou a experiência, e desenhou novamente à vista do fato (representação reprodutiva). Foi tomado o cuidado de colocar o nível da água na altura dos olhos dos entrevistados para que percebessem a horizontalidade do nível do líquido.

Para uma maior segurança dos resultados obtidos, optamos por completar tais dados com a utilização de mais dois procedimentos, além das perguntas já mencionadas.

O primeiro procedimento colocava, à criança, a necessidade de escolher a posição "ideal" para colar figuras de garrafas previamente preparadas, com o conteúdo líquido apresentando o nível da água com inclinações diferentes, (para tanto a criança teve que utilizar de imagens antecipadoras de transformação RT) e utilizamos uma folha com traços horizontais, simulando a superfície de apoio para a colagem do desenho das garrafas, onde a criança apresentou sua hipótese de nível dos líquidos.



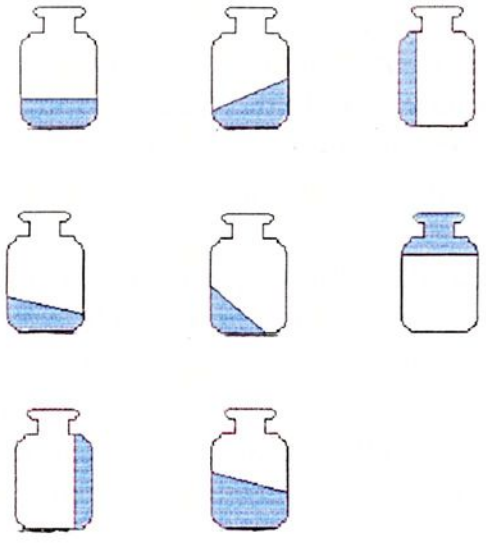


Figura 20 - Figuras das garrafas de bordas paralelas com o líquido a serem coladas sobre reta-suporte.

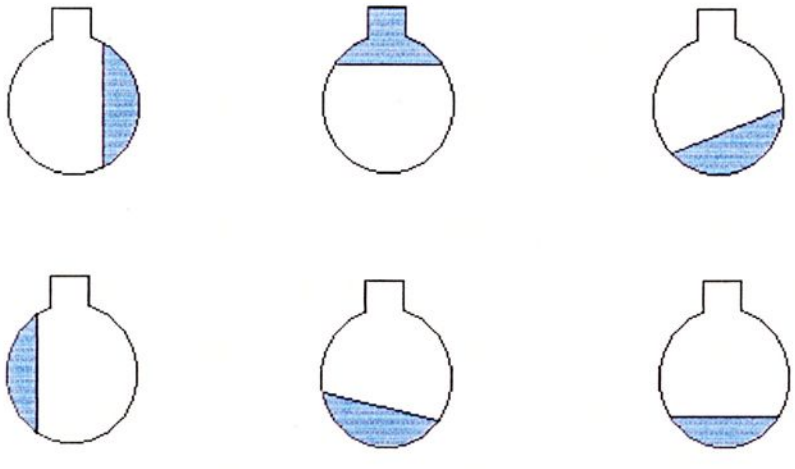


Figura 21 - Figuras das garrafas redondas a serem coladas pelas crianças sobre reta-suporte.

O segundo procedimento diz respeito a cartões quadrados de 10x12 cm (Figura 22 e 23), onde estavam desenhados e pintados os vidros em diversos ângulos de inclinação. As opções apresentadas foram compostas de 5 cartões corretos, com o nível retratado corretamente e 5 cartões, em que o nível foi propositalmente representado incorreto. Tal procedimento colocava a criança em uma situação em que ela deveria classificar e separar os cartões em dois grupos: aqueles onde o nível estava representado corretamente e o outro, incorretamente.

Ao término da escolha, a criança era questionada a justificar o porquê da escolha, e qual deveria ser a posição correta necessária para corrigir o cartão incorreto.

A prova transcorreu de maneira a avaliar primeiramente todas as situações com a garrafa de lados paralelos. Após o término deste levantamento, o mesmo ocorria com a garrafa redonda.

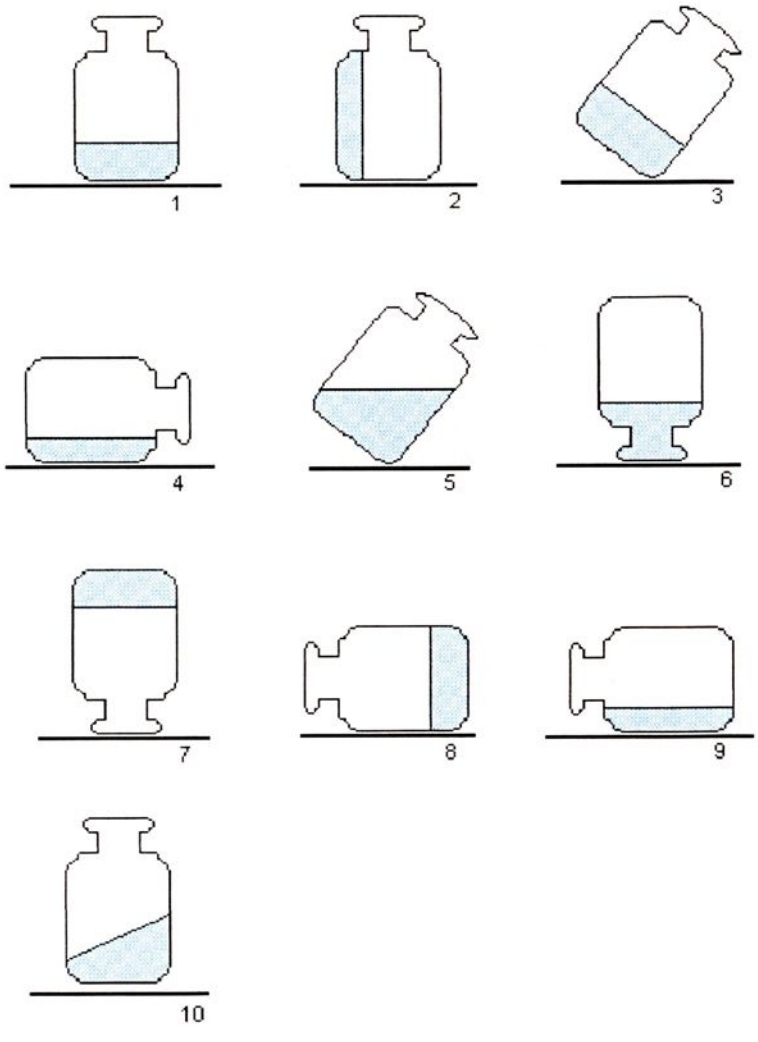


Figura 22 - Cartões (9x11cm) a serem separados segundo os níveis marcados correta e incorretamente.

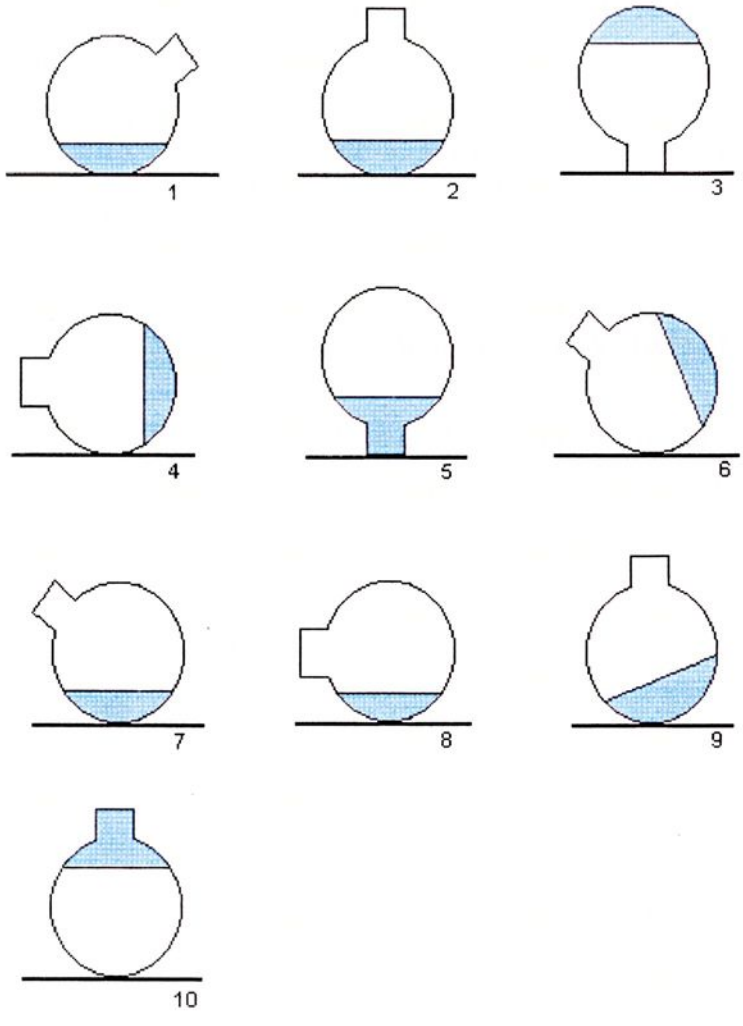


Figura 23 - Cartões (9x11cm) a serem separados segundo os níveis marcados correta e incorretamente.

III.3 CRITÉRIOS ADOTADOS PARA A CLASSIFICAÇÃO DOS DADOS

Para a classificação dos dados levantados foram utilizados alguns critérios específicos para cada prova:

III.3.1 Critérios classificatórios para o desenho da figura humana

Para a classificação dos desenhos da figura humana utilizamos as classificações apresentadas por LUQUET na obra "*Le dessin enfantin*".

Os desenhos foram classificados segundo os seguintes estágios:

- Garatuja ou "realismo fortuito"
- Incapacidade sintética ou "realismo gorado"
- Realismo intelectual
- Realismo visual

III.3.2 Critérios classificatórios para o espaço gráfico (desenho de modelos apresentados)

- Estádio 0 - a criança não considera o modelo apresentado e, indiferente às suas características, exerce o poder de marcar o papel com o lápis sem nenhuma intencionalidade com seu desenho, que está restrito à pura garatuja.
- Estádio I - Em IA a criança considera o modelo apresentado e tenta reproduzi-lo, há a diferenciação da pura garatuja com o aparecimento de formas abertas e fechadas, sem propriamente realizar a cópia das cruzes mas já aparecem alguns desenhos onde há um ponto de cruzamento na tentativa de desenhá-las. Em IB, as relações topológicas são precisas (modelos de 1 a 3 da Figura 11), os círculos apresentam-se realmente como figuras fechadas mas ainda falta-lhes regularidade métrica. Já é possível distinguir o círculo do quadrado e do triângulo que algumas crianças começam a marcar os ângulos com filamentos.

unesp

- Estádio II - diferenciação das formas topológicas e euclidianas, com a diferença bem marcada entre formas curvilíneas e retilíneas devido ao aparecimento dos ângulos que, deste estágio em diante, passam a vigorar, sendo que característica marcante de IIA. Todas as crianças deste estágio desenham o quadrado e o losango com a diagonal, mesmo com as dificuldades apresentadas no losango que marcará a passagem para o estádio IIB. Os losangos são desenhados pelas crianças que se encontram no início de IIB como tendo "orelhas", como se fosse uma forma de marcar os ângulos laterais da figura. Em IIB, os modelos compostos, que possuem encaixes por duas figuras geométricas (modelos de 11 a 15), são desenhados corretamente com exceção do triângulo inscrito no círculo (modelo 16).
- Estádio III - os modelos são desenhados com fidelidade e perfeição, tanto na proporção de seus lados e formas como nos pontos de tangência

III.3.3 Critérios classificatórios para a construção da reta projetiva

Para a classificação dos dados levantados na construção da reta projetiva montamos um instrumento para a classificação dos dados:

Avaliação da construção da reta projetiva

IA IB IIA IIB III

Nome: Idade: ; Grupo: **I, II, III**
Data: / / 97
Critérios para classificação:
1. só realiza relações topológicas
2. só considera um ponto de referência
3. considera os dois pontos de referência
4. entende e considera o pedido de construção
5. difere curva de reta
6. desenha círculo, triângulo, quadrado e reta
7. sabe o que é uma reta
8. quanto à proximidade dos palitos:
   colados

próximos
espaçados

9. posição da criança na construção da reta:
   frontal
   prolongamento
   alternada
10. não percebe a curvatura da construção
11. percebe a curvatura da construção e não reposiciona os palitos
12. percebe a curvatura da construção e reposiciona os palitos
13. posição para a correção
   frontal
   prolongamento
   alternada
14. reconstrói a reta projetiva com procedimentos euclidianos
15. não descobre a mirada
16. descobre a mirada por sugestão do entrevistador
17 descobre a mirada por sugestão do entrevistador e passa a utilizá-la
   de um lado
   nos dois lados (generalização)
18. descobre a mirada sozinho
19. descobre a mirada sozinho e passa a utilizá-la
   de um lado
   nos dois lados
20. pertinência das respostas (Por que você acha que está reto? Qual é o melhor lugar para ver se está bem reto? ...)
   porque sim
   respostas legalistas
   respostas coerentes
21. constrói a reta projetiva
   de forma perceptiva
   de forma intuitiva
   de forma operativa

unesp

III.3.4 Critérios classificatórios para a horizontalidade dos líquidos[64]

Avaliação do desenvolvimento da horizontalidade dos líquidos T3

IA IB IIA IIB III

Nome: Idade: ; Grupo: **I, II, III**
Data: / / 97
Critérios para classificação:

1. Como representa com a mão o nível da água (RG).
   previsão do nível (RD)
   mediante a experiência (RR)
2. Se eu mexo a garrafa, o que acontece com a água? (previsão mediante a experiência) Explicações do fato físico e geométrico pela criança.
3. No caso de representações de desenhos diferentes para o mesmo fato (IA e IR) comparação e explicação pela criança para o fato da divergência do dado.
4. Como é o desenho antecipador das garrafas de bordas paralelas e redondas para as crianças com mais de 5 anos - GII e III.
5. Como é o desenho à vista da experiência (garrafa de bordas paralelas e redondas)
6. Colagem das figuras de garrafas de bordas paralelas e redondas sobre reta suporte.
7. Apresentação dos 10 cartões (Figura 22-23) com os níveis de líquido desenhados, sendo 5 cartões marcados corretamente e 5 marcados incorretamente em garrafas de bordas paralelas e garrafas redondas para a classificação, separação, possível correção e explicações dadas para a possível correção no nível da água.

---

[64] Abreviaturas utilizadas: RG - representação gestual, RV - representação verbal, RD - representação pelo desenho, RAT - imagem antecipadora de transformação com o desenho antecipador, IR - imagem reprodutora à vista da experiência utilizada no desenho, RT - imagens antecipadoras de transformação.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

IV. RESULTADO E ANÁLISE DOS DADOS

IV.1 RELAÇÕES TOPOLÓGICAS ELEMENTARES [65]

IV.1.1 Resultado e análise do desenho espontâneo

Os resultados obtidos com os desenhos infantis da figura humana feitos pelas cem crianças entrevistadas, foram classificados segundo os estudos de Luquet, para ele:

"Um desenho é um conjunto de traços cuja execução foi determinada pela intenção de representar um objecto real, quer a semelhança procurada seja ou não obtida." (LUQUET, 1979, p:135)

Luquet classificou os desenhos infantis em quatro fases de acordo com as características apresentadas. Na primeira fase, denominada de "desenho involuntário" ou de garatuja, a criança sabe que os desenhos realizados por outras pessoas representam objetos[66], mas não está consciente de que as linhas por ela traçadas podem representar algo além de linhas emaranhadas que parecem novelos de lã embaraçados ou traços que apresentam um movimento rítmico e frenético do ir e vir de sua mão (Fase 0).

A mudança fundamental no desenho infantil, para passar às demais fases, é justamente saber que as linhas traçadas podem significar e representar os objetos. Este fato dá, à criança, o poder de representar pelo desenho o que ela vê, pensa e vive.

A partir do momento em que a criança consegue representar com seu desenho, este ganha intencionalidade, deixando a casualidade que Luquet chamou de "realismo fortuito" da primeira fase (garatuja) para passar a um "realismo voluntário" das demais fases. O termo realismo é usado por Luquet pela opção que a criança faz ao desenhar. Os motivos e os temas retratam o que vê, o que vive, o que a impressiona.

---

[65] Uma síntese do trabalho de Piaget que serve de suporte teórico para este item encontra-se em **II.2.1 - A construção das relações topológicas.** p:100 deste trabalho.

[66] Tal fato pode ser comprovado com as inúmeras solicitações feitas pelas crianças pequenas para que os adultos ou mesmo outras crianças maiores "desenhem tal coisa", a criança sabe que o que é visto, pensado, contado no caso das estórias, pode ser representado de forma figurativa no desenho.

unesp

Muitos detalhes de suas representações gráficas não são importantes para os adultos e não são por eles percebidos, mesmo as "formas de beleza", como fala Luquet referindo-se às formas geométricas, têm menor interesse do que as "formas da vida" (LUQUET, 1979, p:125)

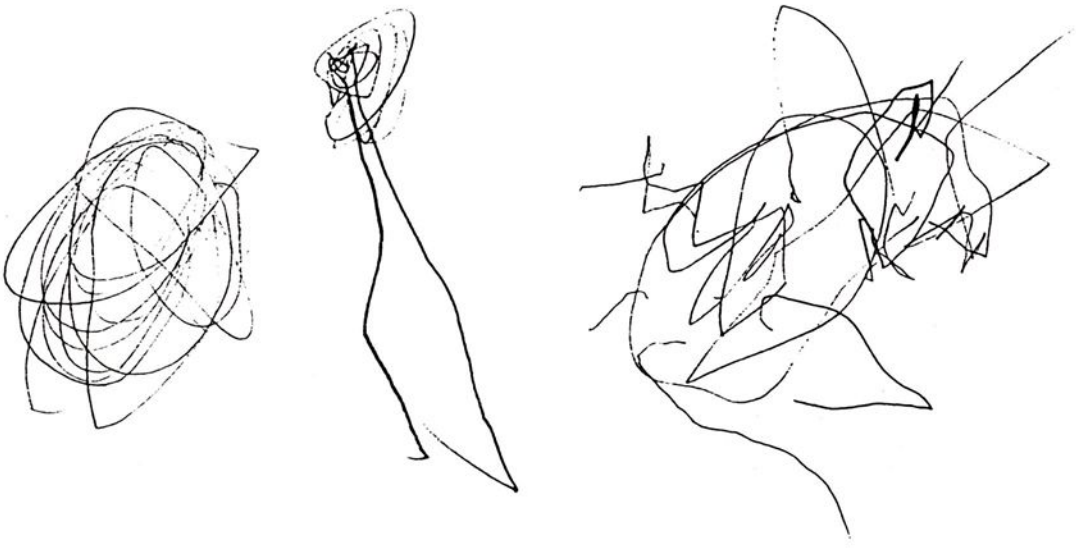


Figura 24 - Garatuja JOR 3;05 e SAM 3;08

As fases que se seguem, apesar das dificuldades que a criança encontra para colocar nos seus desenhos as características dos objetos, apresentam traços no sentido de dar aos desenhos uma intenção realista. Na fase da "incapacidade sintética", nome dada à segunda fase do desenho, ela tenta apresentar nos seus desenhos as características do objeto, mas não as consegue sintetizar (por exemplo, a figura humana é retratada com nos desenhos dos badamecogirinos - Figura 25 e depois dos badamecos Figura 26) num conjunto com coerência os diversos aspectos do que quer representar. Esta fase, ("incapacidade sintética"), devido às características apresentadas nos desenhos, foi subdividida por nós em duas subfases: a do "girino" e a do "badameco". Os girinos apresentam a figura humana como uma grande cabeça de onde saem os braços e pernas, em algumas vezes só um par de membros é desenhado (de 26 desenhos, 9 apresentam somente um par de membros 35%).

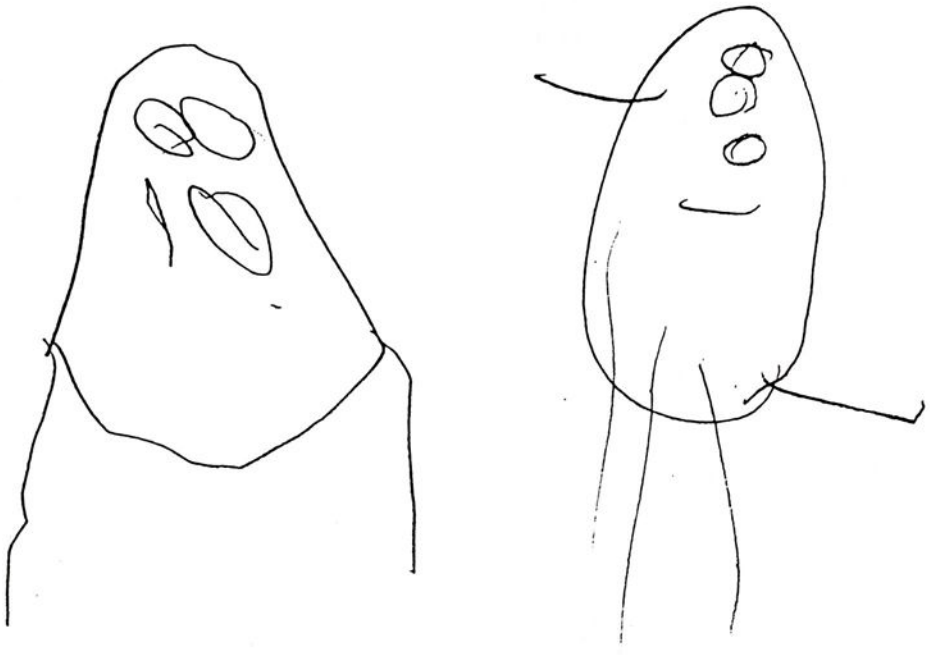


Figura 25 - Incapacidade sintética - girino JOS 3;07 e JES 3;08, relações de interioridade, mas confusão na ordem dos olhos e nariz.

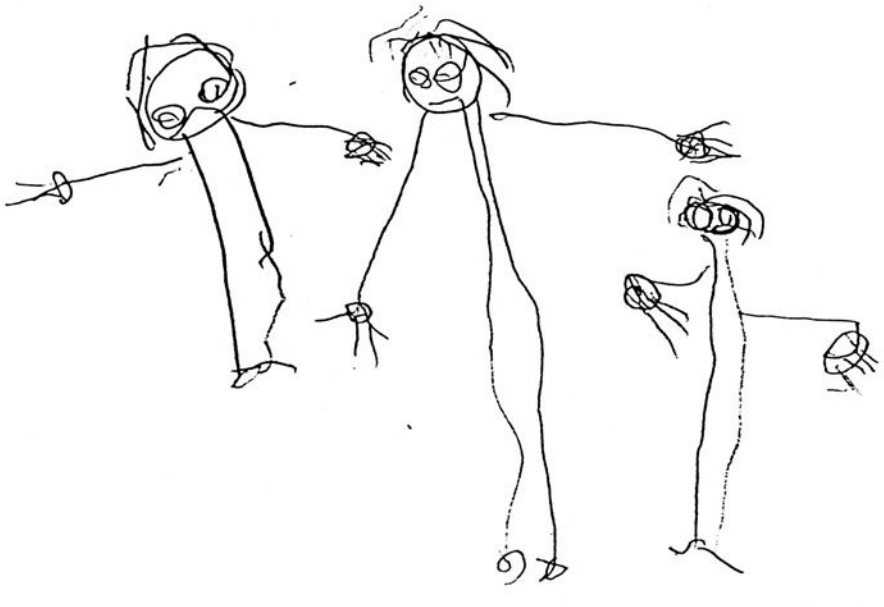


Figura 26 - Incapacidade sintética - girino GAB 3;11 com braços

Os badamecos ou badamecogirinos, como fala Luquet, avançam no sentido da figura humana aparecer com o tronco, em alguns casos retratado com um traço reto de onde saem os braços e pernas com dedos nas mãos e com pés (de 31 desenhos 13 apresentam o tronco

como um traço reto 42%), em outros aparecem em forma retangular ou circular apresentando a segunda dimensão (58%).



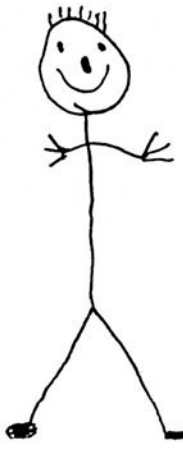


Figura 27 e 28 - Incapacidade sintética - badameco FEL 6;02 com corpo arredondado, ANT 6;06 corpo em linha.

As relações geométricas que dominam nesta fase de "incapacidade sintética", a partir da ultrapassagem da garatuja, são as relações topológicas.

Os girinos e badamecos apresentam nítidas as relações tais como os olhos, boca, nariz dentro da face, os fios de cabelo sobre a cabeça, os dedos no prolongamento dos braços, os braços e pernas próximos à cabeça (girino), os membros no prolongamento do tronco (badameco) e uma infinidade de características que podem ser percebidas.

A **vizinhança**, relação mais elementar do espaço, pode ser vista desde os primeiros desenhos. As crianças que se encontram na subfase dos girinos apresentam esta relação em todos os desenhos, onde as **separações** estão bem marcadas, e os elementos desenhados aparecem distintos uns dos outros. As relações de **ordem**, que se configuram na síntese das **vizinhanças** e das **separações**, começam a aparecer no girino e se solidificam nos badamecos (5 casos nos desenhos de 26 de girinos apresentam falta de ordem entre os olhos e o nariz, 19%).

As relações de **envolvimento** apresentam um grau de dificuldade um pouco maior que as anteriores mas já se apresentam, ficando

bastante visível na representação da face com os olhos, nariz e boca que, apesar de aparecem meio confusas, estão devidamente posicionadas.

A última das relações topológicas a ser analisada - a **continuidade** - apresenta o maior grau de complexidade, e configura-se como uma das características desta fase ("incapacidade sintética"), pois os desenhos apresentam dificuldades em manter a continuidade de algumas partes do desenho. Por exemplo, não há uma precisão entre o contato dos fios de cabelos e a cabeça (Figura 29), bem como o posicionamento dos dedos nas mãos (MAI 4;04), uma justaposição das partes a serem representadas e não uma continuidade.



Figura 29 - Relações de continuidade MAI 4;04.

Os desenhos apresentados mostram que as relações desta fase estão desprovidos de quaisquer relações projetivas e euclidianas, estando restritas às relações topológicas, fato que aponta o primado destas relações.

Passadas as primeiras dificuldades com relação à incapacidade sintética, os desenhos passam à terceira fase, onde há uma explosão no desenho infantil. A criança passa a "colocar" no desenho o que ela sabe do que está desenhando e não o que vê. Decorre deste fato, o nome dado por Luquet de "realismo intelectual".

A presente fase, "realismo intelectual", é particularmente rica e importante para o nosso trabalho, pois é quando a criança inicia o registro das primeiras relações projetivas e euclidianas.

As relações topológicas são aplicadas a todos os desenhos e as crianças apresentam um cuidado especial nos pontos de contato das

partes e do todo. Se na fase anterior havia uma justaposição das partes e do todo, desta fase em diante há um critério para colocar os braços, pernas, cabelo e dedos, e uma preocupação com detalhes nas peças do vestuário onde podemos perceber utensílios masculinos e femininos. Se até a fase anterior as crianças apresentavam um desenho essencialmente marcado pelas relações topológicas de **proximidade**, **vizinhança**, **ordem**, **interioridade** e **exterioridade**, a partir de agora passam a tentar, mesmo sem êxito, apresentar os objetos segundo as leis de perspectiva e profundidade, quer pelo tamanho, ou pela própria disposição dos objetos desenhados na folha de papel.

As crianças apresentam técnicas muito interessantes que Luquet denominou de transparência[67] e de rebatimento[68], mostrando o início das relações projetivas.

A transparência, técnica adotada por BRU, 4;10, para apresentar o motorista conduzindo seu veículo, aponta para uma realidade em que a criança representa graficamente não o que ela vê, mas o que sabe que existe dentro do veículo, como se estivesse simultaneamente dentro e fora dele, o que confere uma confusa relatividade ao ponto de vista do desenhista, que ainda não consegue escolher corretamente uma única posição para retratar a cena.

---

[67] *"Um outro processo relativamente simples para pôr em evidência os elementos invisíveis de um objeto é o que muito naturalmente se pode chamar de transparência, representação desses elementos como se aqueles que os ocultam, tornados transparentes, permitissem vê-los"* LUQUET, 1979, p:166.

[68] *"Mas chegamos a uma perspectiva absolutamente impossível com o novo processo a que damos o nome de rebatimento, processo aplicado sobretudo ao que poderíamos chamar os suportes dos objetos (pés de animais ou de móveis, rodas de viaturas), e que consiste em rebatê-los de cada lado do corpo como se lhe tivessem unidos por um eixo, à volta do qual se poderia fazê-los girar"*. LUQUET, 1979, p:172.

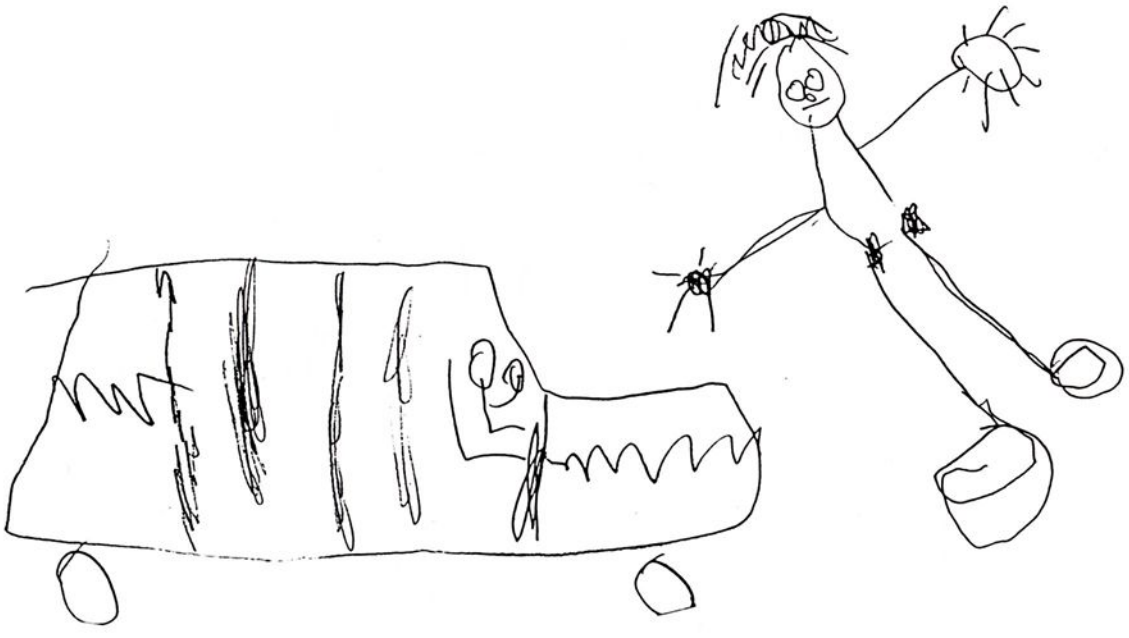


Figura 30 - Realismo intelectual - BRU 4;10 - transparência no desenho, o motorista é visto dentro do carro.

O desenho de LUI 4;10, apresenta a técnica de rebatimento. Ao desenhar uma mesa, não se contenta em apresentar somente os pés que ficam voltados para quem está à frente do móvel, e apresenta um segundo ponto de vista fadado àqueles que estão do lado oposto do desenhista. Portanto a mesa, vista de frente, apresenta duas possibilidades simultaneamente "de frente" e de "trás".

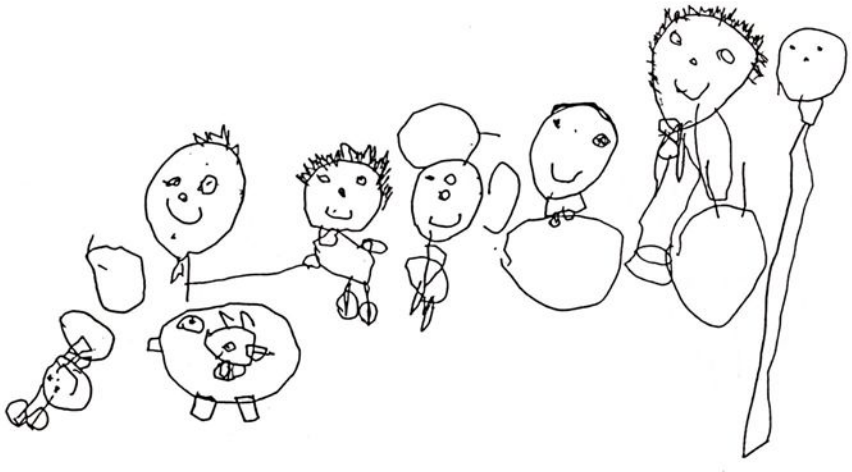


Figura 31 - Realismo intelectual - LUI 4;10 - rebatimento da perna da mesa que não está à vista e a criança representa no desenho (este desenho está reduzido a 50 % do tamanho original para adequar-se melhor a apresentação da página).

Quanto às relações euclidianas, nesta fase aparecem os ângulos, as retas e as formas geométricas simples mesmo que sem simetria e proporções (corpos dos badamecos, seus braços, roupas, mobiliário e casas). Apesar de começarem a aparecer as relações euclidianas elas ainda não estão constituídas em um sistema de coordenadas a serem respeitados pela criança e onde os objetos estão inseridos, tanto que no desenho as leis de horizontalidade e verticalidade, como é o caso do desenho de LUC, estão justapostas, e a chaminé independe da real posição vertical e aparece perpendicular ao telhado[69] .

[69] O mesmo ocorre com o nível dos líquidos como veremos no item **IV.3. RESULTADOS E ANÁLISE DAS RELAÇÕES EUCLIDIANAS OU MÉTRICAS - A COORDENADA HORIZONTAL E O NÍVEL DOS LÍQUIDOS.** p:186.

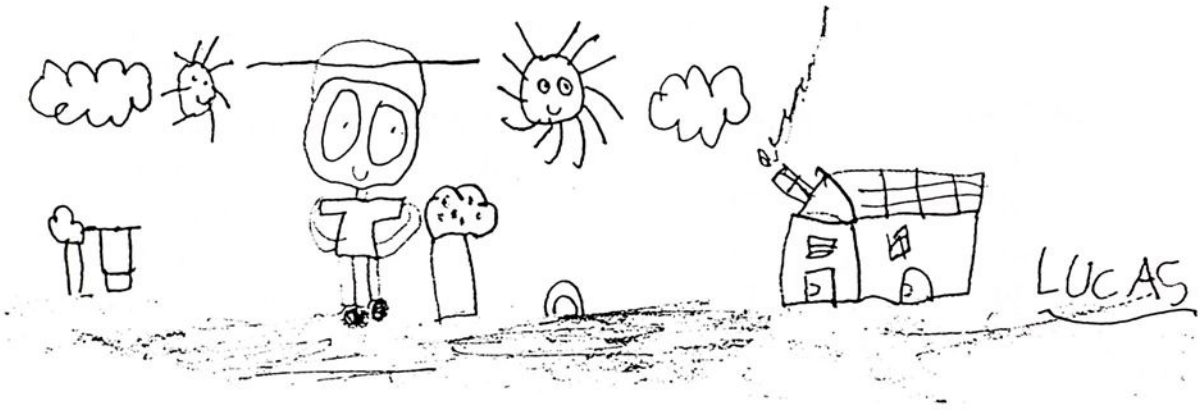


Figura 32 - Realismo intelectual LUC 7;00 - início das relações euclidianas, ausência de eixo vertical como referência, mas uso do telhado como eixo de referência próximo à chaminé, mantendo os dois relações de perpendicularidade

A quarta fase do desenho infantil classificada por Luquet é denominada de "realismo visual". A partir desta fase, os desenhos apresentam um realismo que retrata mais fielmente o que é visto ou pensado, sendo marcado pela renúncia do realismo intelectual como forma de representação gráfica. Doravante, os desenhos apresentam um propósito de estar mais voltados para o real do que para o imaginário, estando subjugado à aparência do que se quer representar. Nas cem crianças por nós entrevistadas não encontramos nenhuma representação gráfica que atendesse tais critérios.

Tabela 1 - Classificação do desenho da "Figura Humana" (número de crianças por fase)

Fases/Idade	2;06-4;00	4;00-5;06	5;06-7;00	Total %
Garatuja	12	0	0	12
Girino	13	11	2	26
Badameco	7	13	11	31
Intelectual	0	10	21	31
Visual	0	0	0	0
Total	32	34	34	100

Tabela 2 - Fases de desenvolvimento do desenho humano - distribuição das crianças nas faixas etárias (%).

Fases/Idade	2;06-4;00	4;00-5;06	5;06-7;00
Garatuja	100	0	0
Girino	50	42	8
Badameco	22	42	36
Intelectual	0	32	68
Visual	0	0	0

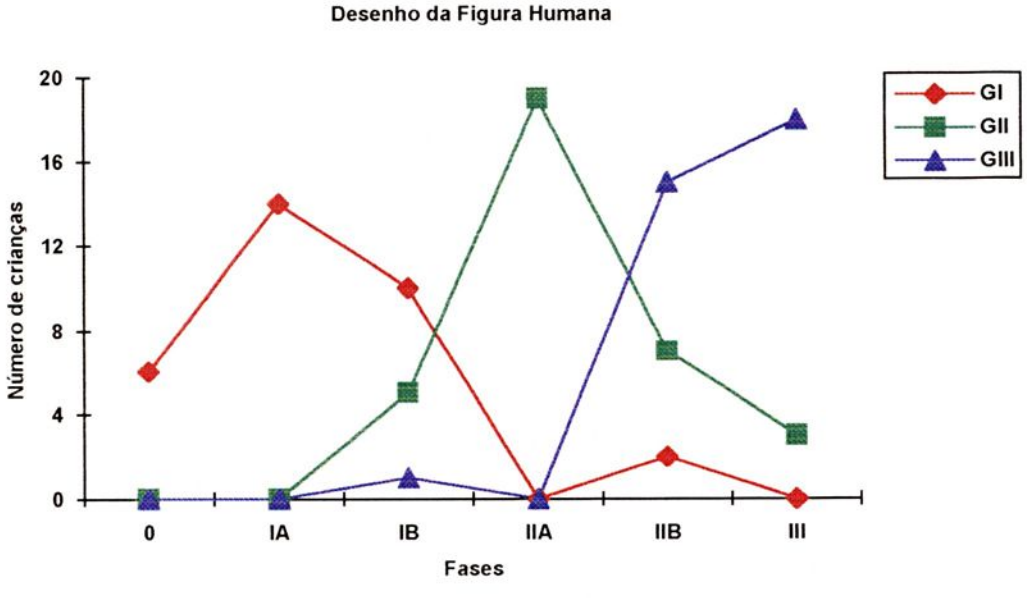


Figura 33 - Fases de desenvolvimento do desenho da figura humana.

Os dados analisados apresentaram os seguintes resultados:

- Não encontramos nenhuma criança no grupo pesquisado que se encontra na fase do "realismo visual".
- 31% dos desenhos infantis estão na fase do "realismo intelectual", iniciando uma forma de representação espacial que começam a apresentar a utilização das relações projetivas e euclidianas, no entanto as relações topológicas são utilizadas em todas as figuras. Deste grupo de crianças, 68% pertencem à faixa etária de 5;06 a

7;00 anos e 32% de 4;00 a 5;06 anos, não sendo encontrada nenhuma criança de 2;06 a 4;00 anos.

- 57% dos desenhos infantis estão na fase do "realismo sintético" sendo subdividida em duas subfases: do badameco com 31% e do girino com 26% do total de desenhos analisados. Os badamecos apresentam a seguinte distribuição nas faixas etárias: 22% de 2;06 a 4;00 anos, 42% de 4;00 a 5;06 anos e 36% de 5;06 a 7;00 anos. Os girinos estão distribuídos em: 50% das crianças de 2;06 a 4;00 anos, 42% de 4;00 a 5;06 e 8% de 5;06 a 7;00 anos. O "realismo sintético" apresenta a supremacia das relações topológicas, que são as únicas empregadas nesta fase.
- 12% dos desenhos estão na fase da "garatuja". Todas as crianças classificadas nesta fase são pertencentes à faixa etária de 2;06 a 4;00 anos.

Podemos concluir com tal levantamento que as relações topológicas aparecem primeiro e são fundamentais às relações projetivas e euclidianas.

IV.1.2 Resultados e análise do espaço gráfico das formas geométricas (desenho)

Após a análise dos desenhos pudemos classificá-los, segundo suas características, em quatro fases de desenvolvimento e pudemos perceber as particularidades de cada fase.

A primeira fase, classificada como 0, tem características muito peculiares. As crianças não conseguem reproduzir nenhum dos modelos apresentados, não se influenciando por qualquer modelo ou solicitação verbal.

Podemos classificar esses desenhos como simples garatujas compostas por riscos rítmicos, formados por movimentos de ir e vir contínuos da mão, caracterizando um jogo motor que irá aparecer nos primeiros ensaios de desenho dos indivíduos das fases posteriores (Fase I).

unesp

Os movimentos rítmicos ininterruptos circulares ou retilíneos que a criança realiza ao "desenhar" apresentam formas de novelos de lã muito denso, fechando o espaço como se fossem emaranhados de fios. Outros são riscos contínuos que chegam a formar ângulos e são retas que por vezes se cruzam ou espalham-se na folha e papel (Figura 34 - 35).



Figura 34 e 35 - Exemplo de desenhos da subfase 0 JUL 3;08 e SAM 3;08.

Os desenhos apresentados pelas crianças desta fase nos interessam por dois aspectos: o primeiro, pelo fato de que os desenhos produzidos pelos movimentos contínuos são, na verdade, movimentos que irão diferenciar-se gradualmente nas formas retilíneas e curvilíneas, devido a uma série de regulações perceptivo-motoras e intuitivas que serão acompanhadas nas fases posteriores. O segundo é que a garatuja já contém, mesmo em estado indiferenciado, os ângulos, as retas e as formas circulares, muito embora, as crianças não consigam diferenciá-las.

Os dados coletados apresentam a composição desta fase de seis indivíduos (6), todos pertencentes ao do GI [70], que compreende as crianças entre 2;06 a 4;00 anos. As idades estão assim distribuídas: um de 2;06; um de 3;04; três de 3;08 e um de 3;10.

A segunda fase possui características que possibilitaram classificá-la em duas subfases, as quais denominamos de IA e IB.

A marca que diferencia estes desenhos dos da fase anterior está relacionadas à intencionalidade. Longe deste grupo de crianças conseguir representar as figuras que lhe apresentamos, percebemos nos desenhos uma diferenciação da simples garatuja. São agora apresentadas formas abertas e fechadas mas sem conseguir copiar cruzes ou círculos.

A fase IA inicia com a garatuja nas primeiras tentativas e passam à tentativa de reproduzir cópias dos modelos apresentados. A criança parece dividir os modelos em formas abertas e fechadas, pois tenta freiar o ritmo ininterrupto dos movimentos sobre o papel para tentar marcar as características do modelo, o que fica somente na intencionalidade.

O desenhos realizados avançam em relação à fase anterior e a quebra do ritmo parece ser para dar as características apresentadas pelos modelos a serem copiados.

Ao tentar desenhar a forma, a criança procura realizar uma extração a partir do ritmo inicial, tanto nos modelos fechados (círculos) quanto nos abertos (cruzes). Os desenhos apresentados são essencialmente topológicos, envolvendo a abertura e o fechamento dos seus limites ou de suas fronteiras. É nítido nas formas circulares que a criança desenha o ponto de interseção dos traços. O fechamento é o fator que vai determinar a diferença entre as formas abertas e fechadas, mas deve ser observada também a interioridade, exterioridade e envolvimento (Figura 36).

Quando presenciávamos os desenhos tomando corpo no papel, notávamos que a criança voltava a olhar por repetidas vezes a figura representada no cartão, e parecia que a "mão teimava em não obedecer" o que a percepção oferecia.

A fase IB tem início com os primeiros círculos realmente fechados, mas podemos perceber, na grande maioria, o seu ponto de

---

[70] Para designarmos os grupos a que pertence cada criança nos utilizamos da nomenclatura GI, GII e GIII, nos quais já estão especificados as faixas etárias que compõem cada um destes grupos, estando explícito o total de indivíduos bem como suas idades no Capítulo **III - METODOLOGIA E LEVANTAMENTO DOS DADOS, III.1 SUJEITOS**, p:128.

interseção. Apesar da similaridade com a fase anterior, o cruzamento entre as linhas é muito mais sutil, embora ainda não ocorra uma regularidade métrica, o que atesta a dificuldade de obter o controle motor na grafia de uma forma euclidiana mesmo que a mais elementar.

Podemos notar que, nesta fase, as crianças começam a registrar no desenho os modelos compostos (12 ao 16 da figura). Este fato apresenta grande progresso se comparado à fase anterior, onde a preocupação parecia residir em criar formas circulares sem perceber se eram simples ou se eram compostas.



Figura 36 - Exemplo de desenhos da subfase IA PAL 3;06.

As primeiras cruzes onde o ponto de interseção são marcados e bem sucedidos, as figuras topológicas (1 a 3) passam, a partir desta fase, a ser muito bem sucedidas. Algumas das crianças começam a marcar nos desenhos filamentos para determinar o aparecimento dos ângulos. Fato intrigante é o porquê do sucesso das formas topológicas (1 a 3) apresentadas pelas crianças desta fase IB (Figura 37).

A respostas para tal fato é fácil de ser encontrada. Os desenhos das formas de 1 a 3, alvo de sucesso, estão restritos às relações de vizinhança , separação e interioridade, que são as mais elementares e as primeiras a serem compreendidas.

Os desenhos que apresentam os grandes círculos separados, contíguos e interferentes (9 a 11), apesar da similaridade com os topológicos (1 a 3) apresentam um maior grau de dificuldade. Acreditamos que a precisão métrica e o tamanho igual das duas formas transforma-as em desenhos diferentes dos topológicos e dão a impressão de serem dois, todos diferentes, a serem unidos.

A fase II apresenta características que demonstram a progressiva diferenciação das formas topológicas e euclidianas.

No limiar da fase IB para IIA são notados traçados curvilíneos e retilíneos, mas com a indiferenciação das formas entre si. O ponto marcante do início da fase II é a diferenciação gráfica entre o quadrado e o triângulo.

A diferença entre as formas representadas de difícil reconhecimento (a maioria dos desenhos apresentam-se como círculos fechados) da fase IB opõe-se à precisão do traçado do retângulo. A facilidade de visualização das diferenças dos pares de lados e o paralelismo parecem ser um fator desta precisão, pois são marcantes tais características. Mas, fato importante desta fase IIA é a diferenciação dos ângulos, que doravante passam a figurar.

Todos os indivíduos classificados na fase IIA apresentaram o registro das figuras divididas ao meio (quadrado e do losango), mesmo com dificuldade de representação foi grafada a figura com um segmento de reta, ainda que não dividindo corretamente ao meio.

O quadrado com a diagonal é a ocasião propícia para o estudo das inclinações que aparecem na formação do triângulo que é característico desta fase (IIA). (Figura 38)

A representação do losango tem início na fase IIB. Os indivíduos que estão na fase de transição iniciam com representações que mais parecem triângulos esticados e os outros mais avançados retratam com

alguma freqüência o losango com aparatos que parecem "orelhas", como num intuito de reforçar os ângulos horizontais (Figura 39).

Os modelos compostos que possuem encaixes são representados graficamente com suas formas, mas não havendo uma rigidez quanto aos pontos de contato, exceto os modelos de 9 a 11 que são precisos. A dificuldade em desenhar o losango é superada, havendo uma progressão sucessiva das figuras compostas (12 a 15)

As crianças que estão no limiar da fase III, desenham o losango com precisão, o mesmo acontecendo com as figuras dos modelos de 12 a 15, com exceção da forma 16 (círculo que ultrapassa o triângulo nos três vértices) que é o parâmetro que caracteriza os indivíduos pertencentes à fase III.

A fase III apresenta como característica o desenho com precisão nos pontos de contato das figuras compostas (12 a 16). (Figura 40)

Fato interessante é a utilização do papel, pois esses sujeitos, diferente dos das fases anteriores, salvo algumas exceções, tinham a necessidade de duas ou mais folhas para poderem representar todas as 21 figuras. Já nesta fase, há uma organização do espaço para o desenho sendo feita uma seqüência da esquerda para a direita e de cima para baixo na totalidade dos casos e a escolha da posição do papel que, na maioria dos casos, é na horizontal (19 no total de 22).

A ocupação do papel dá uma possibilidade de interpretação o início da escrita, visto que há, atualmente, uma forte tendência à alfabetização na educação infantil, sendo a última série deste grau um grande apelo à alfabetização.



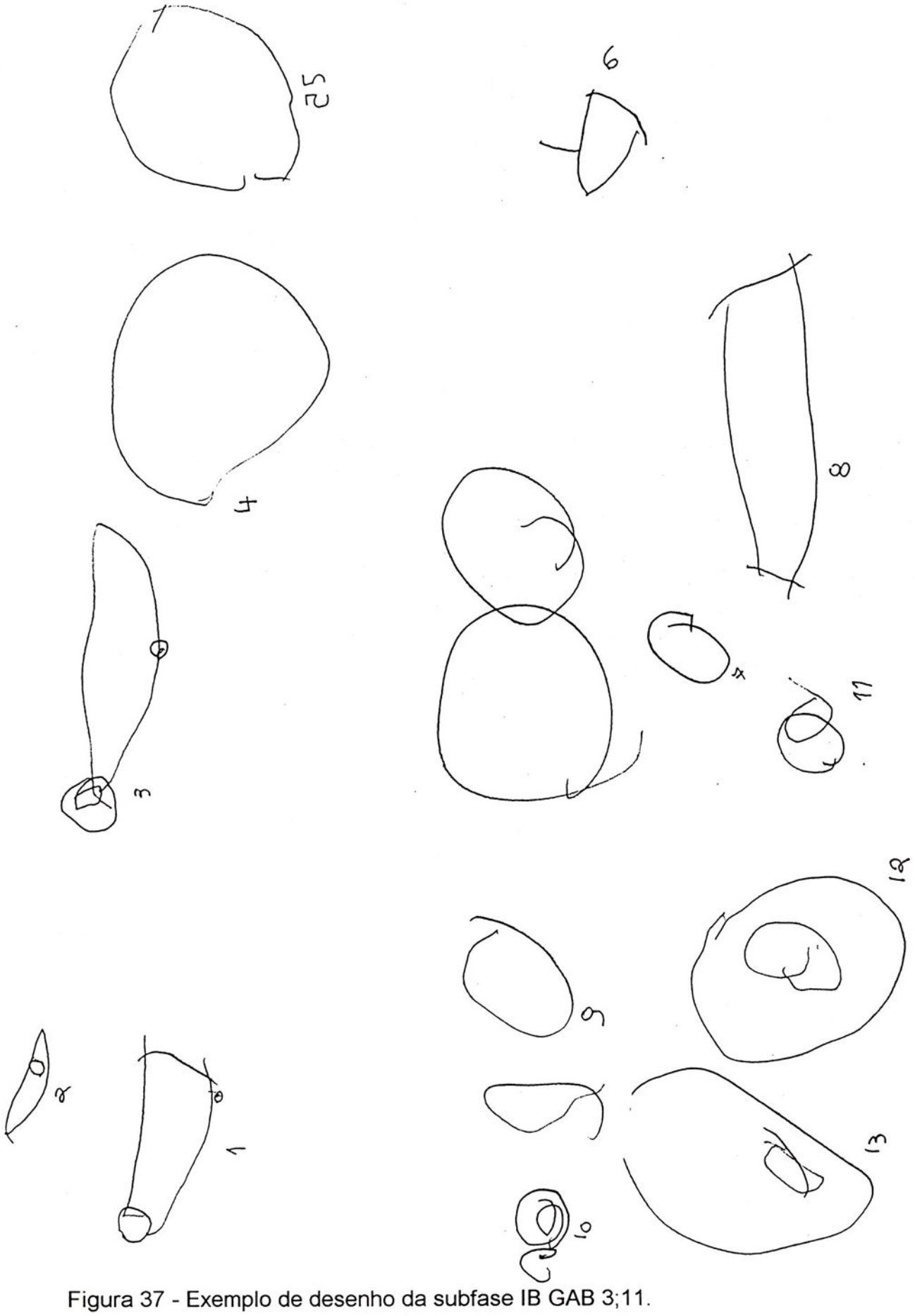


Figura 37 - Exemplo de desenho da subfase IB GAB 3;11.

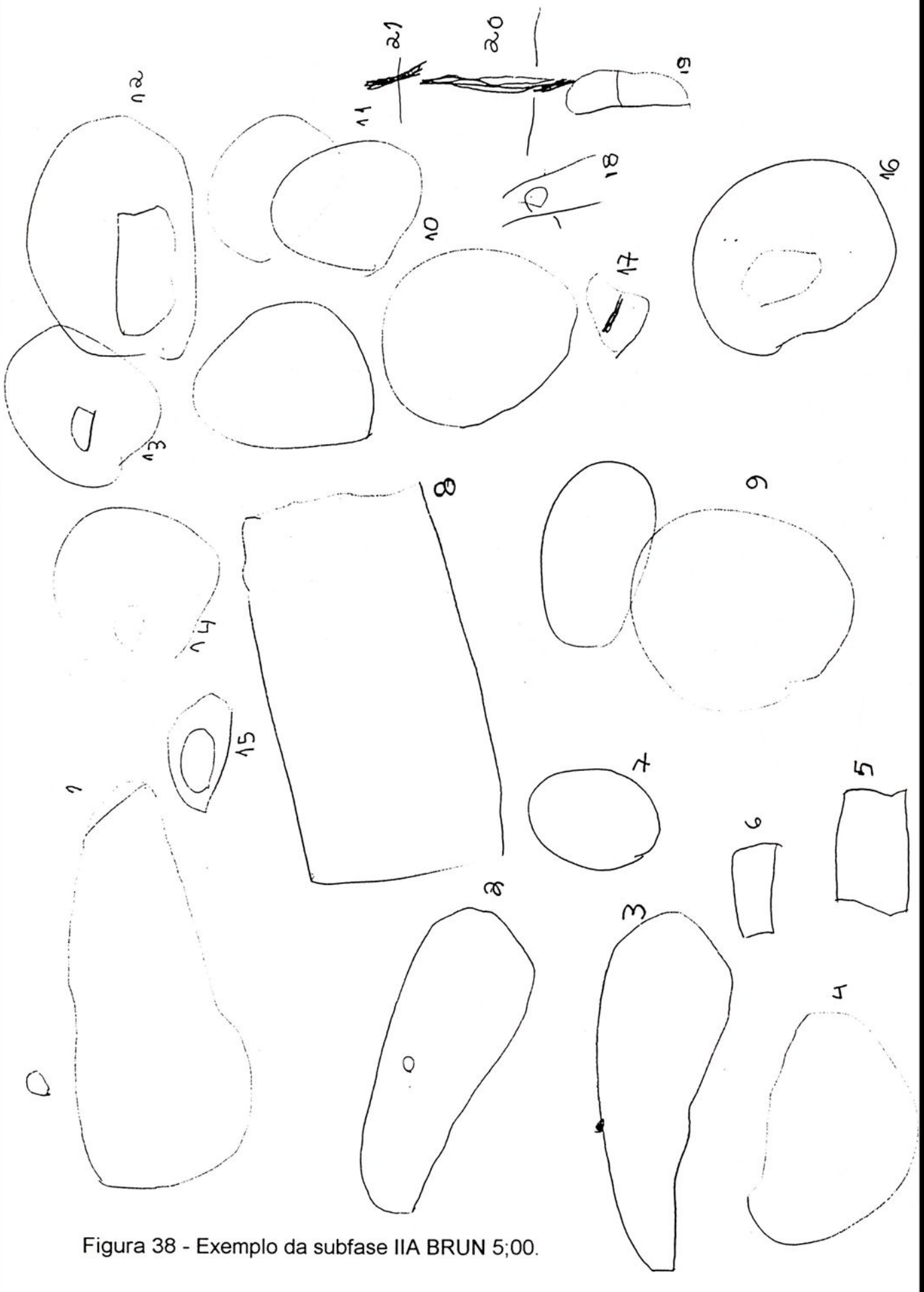


Figura 38 - Exemplo da subfase IIA BRUN 5;00.

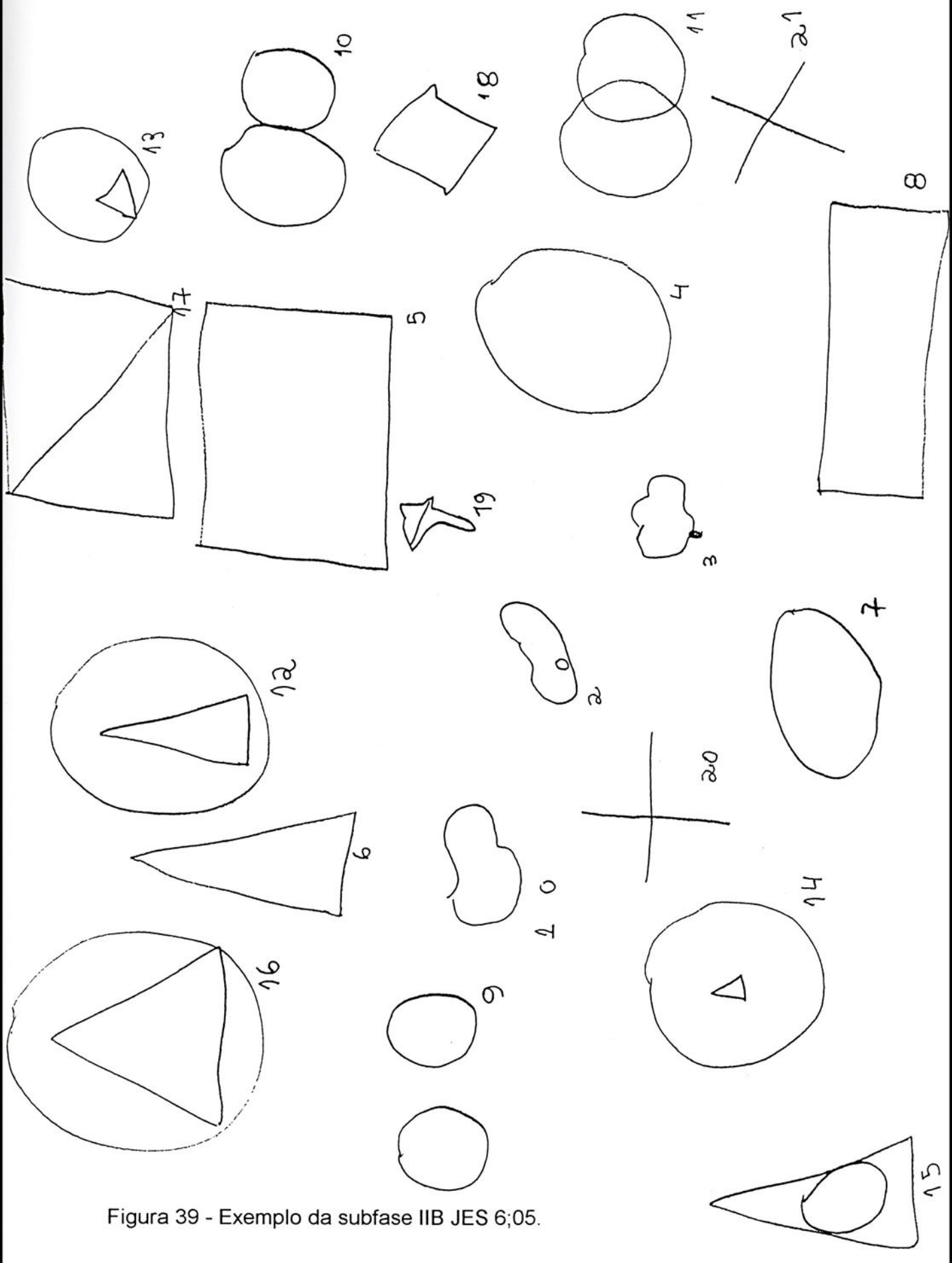


Figura 39 - Exemplo da subfase IIB JES 6;05.

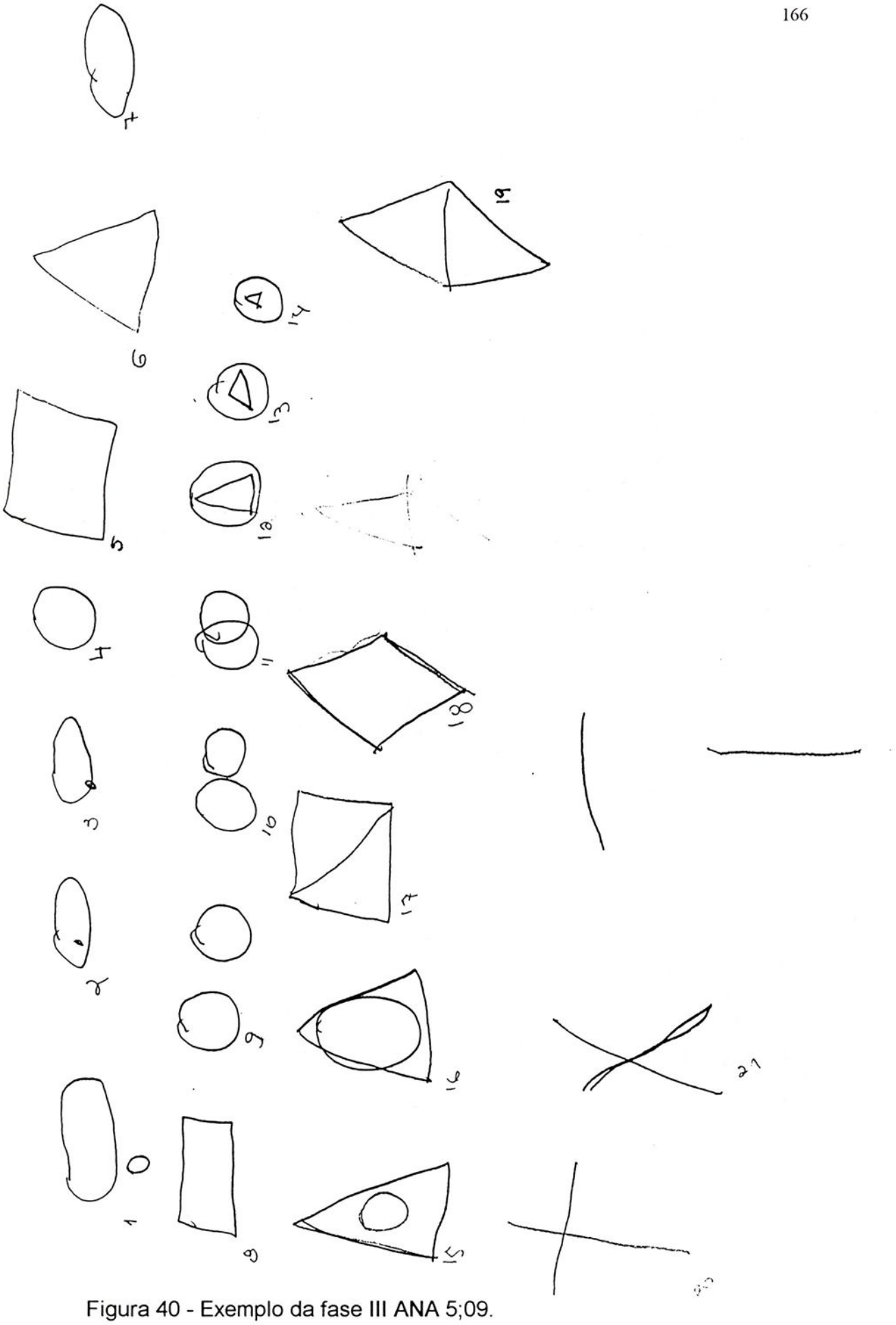


Figura 40 - Exemplo da fase III ANA 5;09.

Tabela 3 - Classificação dos testes do desenho de formas geométricas (número de crianças por fases).

Fases/Idade	2;06-4;00	4;00-5;06	5;06-7;00	TOTAL	%
0	6	0	0	6	6
IA	14	0	0	14	14
IB	10	5	1	16	16
IIA	0	19	0	19	19
IIB	2	7	15	24	24
III	0	3	18	21	21

Tabela 4 - Fases de desenvolvimento do desenho de formas geométricas - distribuição das crianças nas faixas etárias. (%)

Fases/Idade	2;06-4;00	4;00-5;06	5;06-7;00
0	100	0	0
IA	100	0	0
IB	62	32	6
IIA	0	100	0
IIB	8	29	63
III	0	14	86

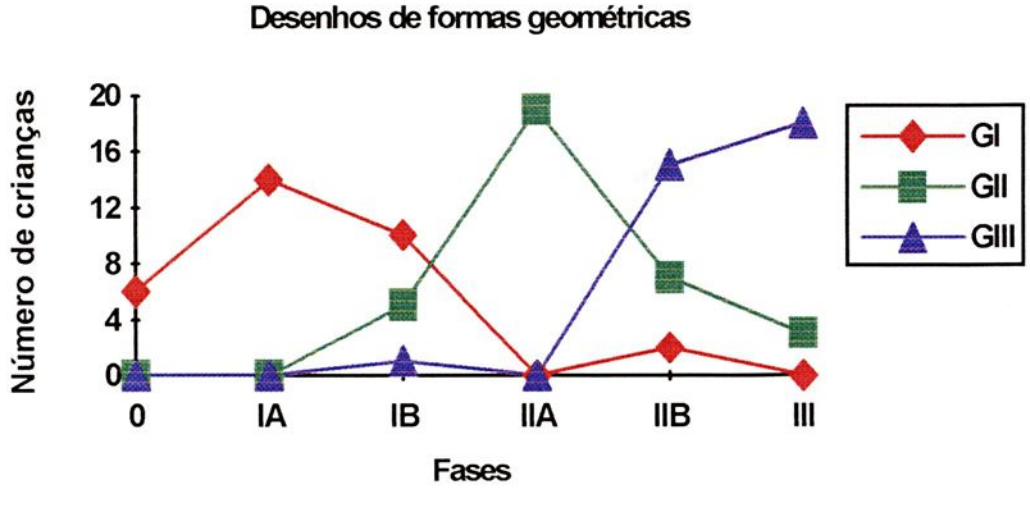


Figura 41 - Fases de desenvolvimento do desenho de formas geométricas.

Os dados coletados apresentaram os seguintes resultados:

Na fase III encontramos 21% do total das crianças pesquisadas, elas conseguiram copiar as formas geométricas corretamente, apresentando as relações euclidianas. Deste grupo de crianças (Fase III) 85% pertencem à faixa etária de 5,06 a 7,00 anos, e 15% pertencem à faixa etária de 4;00 a 5;06, não apresentando nenhuma criança de 2;06 a 4;00 anos.

Na fase II encontramos 43% do total das crianças pesquisadas. Estas crianças apresentam as relações euclidianas nas cópias dos modelos quase precisas. Deste grupo de crianças (Fase II) 56% copiaram corretamente as formas simples e composta com exceção da figura onde o ponto de contato é simétrico e está ao mesmo tempo interno e externo ao desenho (Subfase IIB), estando distribuídas em 8% na faixa de 2;06 a 4;00 anos; 29% de 4;00 a 5;06 e 63% de 5;06 a 7;00 anos. O outro grupo de crianças (Subfase IIA), 44% são bem sucedidos nas formas geométricas mas não conseguem desenhar o losango (Subfase IIA) totalizando 100% de crianças na faixa de 4;00 a 5;06.

Na fase I encontramos 30% do total de crianças pesquisadas. Deste grupo de crianças (Fase I) 54% são bem sucedidos na cópias das formas topológicas mas têm dificuldade em desenhar as formas euclidianas (Subfase IB), e estão distribuídas em 62% de 2;06 a 4;00 anos, 32% de 4;00 a 5;06 e 6% de 5;06 a 7;00 anos. As demais crianças (Fase I) 46%, diferenciaram as formas abertas das formas fechadas o que envolve puramente relações topológicas (IA) pertencendo em 100% dos casos à faixa etária de 2;06 a 4;00 anos.

Na fase 0 encontramos 6% do total das crianças pesquisadas. Estas crianças encontram-se na fase da garatuja, portanto só realizam "desenhos com relações topológicas de vizinhança e proximidade, pertencendo em 100% dos casos à faixa etária de 2;06 a 4;00 anos.

Podemos concluir com os dados apresentados na cópia dos modelos topológicos e euclidianos a anterioridade das relações topológicas às euclidianas, bem como a dificuldade e impossibilidade que as crianças mais jovens apresentam ao tentar desenhar as formas métricas, rígidas e de proporções exatas das formas euclidianas. Em outro extremo (Fase III), podemos conferir a precisão na coordenação para a cópia de desenhos que envolvem as relações euclidianas, só possíveis a um grupo de crianças de mais idade (86% de 5;06 a 7;00, 14% de 4;00 a 5;06 e 0% de 2;06 a 4;00).

unesp

IV.2 RESULTADOS E ANÁLISE DAS RELAÇÕES PROJETIVAS - A CONSTRUÇÃO DA RETA PROJETIVA[71]

A análise dos dados coletados apresentou duas fases distintas e progressivas (Fases I e II). Apesar das peculiaridades de cada fase, percebe-se que os avanços ocorridos dependem das relações anteriormente construídas (topológicas).

A primeira fase de desenvolvimento (Fase I) está centrada nas relações topológicas. No início, a criança utiliza-se somente das relações de **proximidade**, **vizinhança**, **sucessão**, **ordem** e **continuidade** (Subfase IA), avançando quando começa a espaçar os palitos que irão constituir a reta projetiva, mas que continua com características visivelmente topológicas.

A subfase IB avança em relação à IA quando levantamos os dados da construção das retas paralelas às bordas das mesas, quer seja retangular ou redonda (exceto em poucos casos na mesa redonda). Há um início de construção imitativa e o sugestionamento da borda é parâmetro decisivo para o sucesso "total" da construção. As retas são constituídas de palitos bem espaçados, mas a grande maioria não considera os dois pontos de referência ao mesmo tempo, deixando sempre um espaço entre os últimos palitos colocados e o ponto de referência mais distante (reta angular, radial e ziguezague) fato que será resolvido nas fases posteriores (Subfases IIA e IIB).

A segunda fase II (Subfases IIA e IIB) apresenta uma organização espacial onde os objetos começam a estruturar-se projetivamente, inicialmente pela imitação (da borda da mesa) que vai demandar da criança uma complexidade maior nas relações que ela estabelece entre os objetos (palitos de fósforo), que na fase precedente, depois liberando-se da percepção que se impõe para tentar construir uma reta segundo os critérios da geometria projetiva, com um palito sucedido pelo outro de tal forma que, olhando o primeiro, este esconde os demais.

---

[71] Uma síntese do trabalho de Piaget que serve de suporte teórico para este item encontra-se em **II.2.2 A construção do espaço projetivo e a construção da reta projetiva.** p:117 deste trabalho.

unesp

- **IA - A construção da reta projetiva com características topológicas**

A fase IA tem, como característica, o domínio das relações topológicas. As crianças não entendem ainda o que seja uma reta mas, ao serem perguntados sobre o que é uma fila, dão explicações coerentes com seu estágio de desenvolvimento.

No decorrer das entrevistas, e mesmo na categorização dos dados, pudemos perceber que, dentro das características da mesma fase, algumas crianças já apresentam um certo avanço nas respostas e na montagem da reta e, apesar de não ter as características para estar na fase posterior, avança em relação às demais do seu grupo. Podemos citar alguns exemplos:

KEY 3;06 Pergunto sobre o que é uma reta, mas ela não responde e brinca com a massa de modelagem que fixa o palito à mesa. Pergunto quem está no começo da fila, ela diz o nome do amigo e sua posição na fila, mas é visível a primazia da topologia (Foto 3).

CAR 3;10 Pergunto o que é uma "coisa bem reta ? - *É assim* (mostra um palito dos que estão sobre a mesa para a formação da reta e passa os dedos no sentido do comprimento, passa as mãos pela borda da mesa). Quando pergunto se sua "fila" está reta ela me diz que sim. Quando pergunto como ela sabe que está reta ela dá uma explicação legalista. - *Porque sim!* (Foto 1 e 2).

Podemos afirmar que a maioria das crianças desta fase prendeu-se somente às relações topológicas (JOR, SAM, DAN, KEY, CAR, LUA, PAM, PAL). As demais (AMA, KAR, FER, WEN) entendiam o pedido para construir uma fila bem reta e mostravam objetos ou parte deles que eram retas, as bordas da mesa, as pernas da cadeira, o palito etc. e espaçavam os palitos, mas a colocação dos palitos sobre a mesa entre os dois pontos de referência parecia não existir, pois as crianças posicionavam-se na borda da mesa e punham-se a colocar os palitos um ao lado do outro, o que apresentava curvas e ziguezague o fator comum era ordem de sucessão e a proximidade entre eles.

Todas as crianças fizeram construções perceptivas e algumas delas pareciam estar sugestionados com a borda da mesa (AMA, DAN, SAM), posicionando-se frontalmente durante a construção e, mesmo

unesp

que questionadas sobre a retidão da "fila", não efetuavam qualquer mudança.

Sugerimos ao DAN (3;11), que é muito falante, para que se colocasse no prolongamento da "fila" para ver se estava mesmo bem "reta", mas ele, como já era esperado, não entendeu o procedimento e colocou-se em baixo da mesa.[72]

- **IB - A construção da reta projetiva início de imitação da borda**

A subfase IB apresenta avanços em relação à IA no sentido de as crianças conseguirem construir retas paralelas às bordas (Foto 4), a totalidade delas na mesa retangular e quase todas na mesa redonda, as demais (reta angular que forma inclinação com a borda da mesa retangular, reta radial e correção da reta em ziguezague na mesa redonda) têm um início de construção mas esbarram nas dificuldades encontradas em espaçar os palitos e em considerar os dois pontos de referência (primeiro e último palito da reta a ser construída Foto 5).

Ao olharmos o processo de construção pela criança tínhamos a impressão de que existia uma força de atração que a impedia de espaçar os palitos entre o espaço do primeiro e último palito, mesmo porque a construção sucedia-se com a criança colocando os palitos preferencialmente do ponto que se encontrava mais próximo a ela, colocando uns após os outros, o que é uma característica da subfase anterior, o predomínio das relações topológicas.

Todas as crianças que compõem esta subfase conseguem desenhar quadrados, retângulos e triângulos (já avaliados na prova da cópia dos modelos topológicos e euclidianos). A dificuldade encontrada para poder classificar as crianças segundo as construções apresentadas torna-se maior nesta subfase, pois elas estabelecem diálogos que nos dão a falsa impressão de que a criança está quase apta à construção operatória, o que é um engano. Passaremos a analisar dois casos que mostram as características e os extremos da fase:

VIC 4;11 Monta reta paralela à borda da mesa com desembaraço, guiado pela percepção (da borda).Quando inicio as perguntas sobre se

---

[72] Após a construção continuávamos perguntando sobre a retidão da "fila", e como veremos nas fases posteriores este será um fator decisivo para entendermos como a criança articulou sua construção, e para a possível descoberta da "mirada"e sua utilização,mas nestas fases iniciais (IA e IB) nenhum efeito surtia, era como se as crianças estivessem alheias às próprias evidências e às perguntas.

está reto, qual o melhor lugar para olhar etc., sugiro o prolongamento da reta para que ele arrume alguns palitos, retira-os reposicionando-os, segura os palitos pela base num procedimento euclidiano (que analisaremos melhor no próximo exemplo) arrumando alguns palitos que estão desalinhados, mas não percebe o privilégio da posição, nem tão pouco realiza qualquer gesto que possibilite efetuar a "mirada". Pergunto pelo melhor lugar para observar a reta e ele responde que é a posição frontal . De onde você vê melhor que a sua fila está bem reta? - "*Não sei.*" Quando pergunto o que é uma reta ele responde - "*É assim ó...*" e com um gesto sobre a mesa efetua de fora a fora uma trajetória totalmente retilínea. Como se explica a criança saber o que é e não conseguir aplicar tal conceito em uma situação real? A falta da coordenação dos esquemas inviabiliza à criança o poder utilizar a "mirada" como uma conduta-suporte efetiva para alinhar os palitos uns após os outros, tendo como referência o primeiro e o último palito.

GAB 3;11 Explica por gestos o que é uma fila reta, estende os braços para frente e afirma com veemência o que é reto. Após as explicações dadas põe-se a construir a reta paralela à borda da mesa retangular. Os palitos são colocados espaçadamente um após os outros. Apesar da distribuição quase uniforme no distanciamento, a fila apresenta sinuosidade. Convido-a a andar ao redor da mesa para apontar o melhor lugar para avaliar a retidão da reta (quer seja pela posição escolhida ou pelas explicações) - De onde você vê melhor que sua fila está bem reta? Ela coloca-se no prolongamento e faz algumas correções, inclusive usa do procedimento euclidiano[73] por duas vezes, apesar de em momento algum ter sido mencionado, foi por ela utilizado. GAB junta as palmas das mãos e arruma os palitos para que fiquem retos[74]. Circula ao redor da mesa e faz correções que pouco

---

[73] Piaget 1948 nota 1, p:198 "*Il est à noter que rien, dans nos consignes initiales, n'impose à l'enfant le choix des procédés projectifs (visée) plutôt que l'utilisation des rapports euclidiens (plus court chemin ou maintienaint d'unemême direction). Ce sont les réactions spontanées des sujects de ce niveau qui nous montré le synchronisme de l'apparition de ces deux méthodes de construction de la droite.*"

[74] O procedimento euclidiano de construção da reta prioriza a menor distância entre dois pontos, diferente do projetivo onde os objetos são colocados uns após os outros de tal forma que o primeiro elemento tampe os demais, aqui espacialmente que estamos analisando o aparecimento da conduta de "mirar", o primeiro palito e o último devem estar enquadrados na mesma direção a ponto de que todos os demais palitos estejam acompanhando a trajetória entre os pontos inicial e final.

unesp

alteram a constituição da reta, aponta o prolongamento como o melhor lugar, mas como continuamos a perguntar qual o motivo de tal melhora ela não responde, e diz que a posição frontal é melhor para olhar naquele momento. Anda em torno da mesa para postar-se finalmente no prolongamento e afirmar com certeza que é aquele o melhor lugar. Mas, o inusitado está no fato de a criança, como que numa reação inesperada, abaixar-se configurando a "mirada". Por que você abaixou para olhar? - *"É mais melhor abaixada"*. - Por que você abaixou? - *"É... para ver como tá certo"*. Continuamos a investigação e comprovamos que foi um simples acaso, pois a GAB se perde em explicações legalistas. A construção da reta angular ocorre de forma sem a criança considerar os dois pontos de referência, o mais próximo do seu corpo é considerado e a colocação dos palitos ocorre sem preocupação em construir uma reta, mas uma sucessão de palitos em ordem, um após o outro, com espaçamento regular. A reta a ser construída na mesa redonda, com os pontos de referência próximos à borda, apresenta um resíduo da fase anterior. A criança realiza uma construção tal como a da reta angular, sem considerar os pontos de referência, por relações topológicas.

A construção da reta radial por outro lado nos dá a certeza da classificação da criança nesta subfase, pois ela dá explicações que comprovam a simples coincidência da criança em assumir o prolongamento como o melhor lugar para verificar a retidão da "fila". A reta construída possui encurvamentos que, após as perguntas, vão sendo arrumados, mas mesmo assim falta-lhe a retidão. Usamos as mesmas perguntas realizadas anteriormente de onde vê melhor e o porquê, usando do expediente de abaixar-se para arrumar, retomo as perguntas - Por que você abaixou? - *"Porque em pé não dá para ver direito."* - Qual é a diferença entre olhar em pé e agachado? - *"Porque em pé é melhor e agachado também"*. - Mas quem falou para você que agachado é melhor? - *Porque sim.* - Mas quem falou para você que agachado é melhor? - *"Minha mãe."* Insisto mais um pouco e a resposta soa com irritação. - *"Minha mãe"*.

- **IIA - A construção da reta projetiva e a imitação das bordas da mesa.**

A construção da reta projetiva por este grupo de crianças tem como ponto marcante a influência que elas sofrem nas construções onde a borda está mais próxima e impõe-se como modelo e referencial.

A criança desta subfase não consegue libertar-se da imagem do fundo (borda da mesa) e fixar-se à figura (a reta a ser construída ligando os dois pontos referenciais). Substitui o que é pedido pelo que a percepção lhe oferece. Mesmo percebendo o erro na construção, não consegue corrigi-la, o que nos leva a afirmar que é uma construção de imagem intuitiva e não perceptiva. O que a criança vê não é o que ela retrata. O mesmo acontece na fase de realismo visual no desenho, no qual a criança aplica, à sua representação gráfica, atributos que o objeto retratado não possui com vista à percepção visual.

Os fatos acima mencionados levam-nos a reconhecer que a construção da reta pela criança com estas características é de ordem intuitiva, pois, encontra-se favorecida mesmo sugestionada pela configuração perceptiva da borda da mesa, ou seja, não passa pela imitação interior (imagem mental), que está baseada nas operações para poder operar livre de sugestionamentos. Esta fase intuitiva é necessária e anterior à constituição das operações espaciais, é uma fase intermediária que vai necessitar da interiorização das ações para modificar a percepção e que dependerá de uma organização progressiva para a formação das operações.

Em três situações percebemos nitidamente a influência da borda da mesa. São elas: a construção da reta paralela à borda da mesa retangular, que já ocorria na subfase anterior (IB); a construção da reta angular em que os referenciais formam um ângulo com a borda (Figuras 12-13-14) e a construção da reta onde os pontos referenciais estão próximos à borda da mesa redonda (Foto 10).

KAR 5;06 Constrói a reta paralela à borda da mesa de forma intuitiva, circula ao seu redor e corrige os desvios que existem. Ora as correções ocorrem frontalmente, ora no prolongamento da reta, terminando a construção com precisão. Quando questionado sobre qual o melhor lugar para olhar a retidão da reta, olha-a minuciosamente, arruma os palitos, anda em torno da mesa, ensaia a atividade de mirar (mas não usa da visão monocular que favorece a apreciação da reta) e, finalmente, posiciona-se afirmando que a melhor posição é a frontal do

unesp

lado oposto onde se encontra. - *"Eu acho que é aqui de novo."* Isto porque já havia me dito que aquela era a melhor posição antes de abaixar-se e corrigir os palitos. Notamos que de nada adiantou a posição no prolongamento. É como se a criança não desse conta do fato. A construção da reta angular resulta em um arco simétrico com seu ponto médio na direção do canto da mesa, como se houvesse um ímã tracionando os palitos para o vértice da mesa (Foto 7). Pergunto se está certo -*"Está um pouco torto, mas está bom assim."* Pergunto novamente se ela deseja fazer alguma alteração, e responde resoluta que está bom daquele jeito. A construção da reta na borda da mesa redonda dá margem a conversar com a criança. Quando pergunto como pode ser uma reta, Kar mostra com gesto passando o dedo indicador sobre a mesa apontando a trajetória retilínea entre os dois pontos referenciais, mas, na construção, malogra e realiza um arco onde cada palito está a uma mesma distancia da borda, configurando um arco. A reta diametral apresenta um processo de construção em que a criança progride no sentido de poder corrigi-la, pois o último palito estava fora da trajetória e ela, espontaneamente, percebe e o arruma, mas nesta ação usa do procedimento euclidiano: une as mãos e arruma vários palitos em uma única intervenção, fazendo isto mais uma vez para terminar a tarefa. A reconstrução da reta em ziguezague foi um verdadeiro problema, pois, depois de muito arrumar, conclui que só pode terminar a construção, deslocando o último palito que está fora da trajetória dos demais.

AMA 6;01 Inicia a prova desenhando figuras geométricas planas com desenvoltura, círculo, triângulo e quadrado e termina os desenhos riscando no papel uma reta longa e sem curvas. Monta a reta projetiva inicialmente encurvada. Quando sugerimos que se desloque ao redor da mesa, anda ao redor da mesa fazendo correções que possibilitam uma construção bem paralela à borda. Sabe o que são "coisas" retas como ela própria afirma, dá exemplos e aponta objetos (Foto 6). A construção da reta angular na mesa retangular apresenta um alinhamento dos palitos quase retos, mas, por falta da mirada, não atinge o desafio proposto. Já que na ausência de um fundo adequado (como a borda da mesa na situação anterior) a criança vê-se impossibilitada de atingir o objetivo. As construções na mesa redonda vão reforçar o que foi anteriormente afirmado. A reta projetiva, onde os pontos referenciais estão próximos à borda da mesa, é feita colocando os palitos sucessivamente um palito após o outro, sem qualquer

planejamento das ações ou mesmo sem qualquer parada para verificar a retidão almejada. Questionamos sobre o melhor lugar para olhar a construção e a criança afirma ser no prolongamento, mas não tira nenhum proveito da local estratégico em que se posiciona. Constrói um arco de circunferência, e, quanto mais quer melhorar a retidão do arco, aumenta a sua curvatura. AMA faz com a mão como seria uma trajetória reta entre o primeiro e o último palito do arco de circunferência construído, mas não dá conta da curvatura da sua construção. O mesmo ocorre com a construção da reta diametral. A falta de referenciais confere neutralidade, o que possibilita uma construção mais "reta", e a criança posiciona-se no prolongamento e mostra com gestos uma reta.

- **IIB - A construção pré-operatória da reta projetiva**

A diferença marcante desta subfase IIB e as anteriores está na forma como se dá a construção da reta. As crianças entendem as solicitações e colocam-se prontamente no seu prolongamento, sem que haja a necessidade de sugestão, exceto o EDI, que descobre a mirada espontaneamente, durante as explorações para verificar a retidão da construção. Tanto na construção quanto na verificação da retidão, percebem os palitos que estão fora do alinhamento e os arrumam, têm explicações coerentes para as perguntas e, mesmo os mais tímidos (ING, ANT, LUC), conseguem justificar as decisões tomadas.

A inclusão dos dois pontos de referência é outro avanço em relação às fases anteriores, bem como a reta angular que é do domínio de todos, exceto para EDI que, estando prestes a terminar a construção da reta angular, volta atrás e afirma que não pode construir uma reta assim, em contrapartida explica com detalhes a mirada.

Este grupo de criança executa a construção de forma intuitiva. Não podemos ainda classificá-las de operativa, pois, na construção, na verificação e nas explicações deveriam colocar-se nos dois lados alternadamente, e quando conduzíamos as perguntas eles apresentavam somente um dos lados do prolongamento como o melhor para olhar a retidão da "fila". Sabemos que a operação dar-lhes-ia condições para apontarem "tanto este quanto este como bons lados" para verificar se a reta obedecia aos critérios solicitados. Para que se realize a operação, é

unesp

necessário que haja a reversibilidade. Operar é realizar operações que componham e decomponham uma determinada situação ou um fato.

Fato a ser registrado é a explicação dada por EDI na construção da reta diametral. Quando perguntado por que ele abaixou para olhar sua reta, ele respondeu: - "*Eu fiquei embaixo da mesa e fechei um olho e deixei o outro aberto, como a minha irmã. Ela tem um brinquedo que chama Peteleco, a gente mira assim* (fecha o olho e projeta o braço como se fosse arremessar o tal brinquedo) *e joga, minha irmã não acerta, mas eu acerto.*"

LUC 6;04 A conversa com LUC começa quando peço para que ele me mostre o que é bem reto. Sem titubear, ele desliza a mão sobre a beirada da mesa. Inicia a construção da reta paralela à borda da mesa no seu prolongamento mas sem uso da mirada. O uso da mirada passa a ser um instrumento fundamental a partir do momento em que pergunto qual o melhor lugar para que ele veja se está reto e, no mesmo instante, sem ter sido feita qualquer sugestão, a criança posiciona-se e usa do olhar monocular (Foto 11 e 12). A impressão que nos dá é que a criança descobre uma "coisa" muito importante. Ele olha com curiosidade e confere a retidão da construção, usa a oportunidade para acertar milimetricamente qualquer palito que teime em estar pouca coisa fora da trajetória já anteriormente traçada pelos demais palitos. As construções na mesa redonda não apresentam dificuldade e LUC vai arrumando os palitos conforme foi pedido: uma construção reta. Na reconstrução da reta onde os palitos foram colocados em ziguezague, ele a realiza com a mirada, faz as correções na trajetória e organiza todos os palitos, mas quando pergunto o melhor lugar para olhar se está reto, é quando ele se coloca na posição frontal e diz que é o melhor, mas é necessário salientar que toda a construção ocorreu no prolongamento da reta e com a visão biocular.

ANT 6;11 Inicia a construção da reta paralela à borda usando a atividade de mirada, começa a colocar os dois primeiros palitos e instantaneamente já faz tal uso. Podemos considerar que se encontra em um estágio mais avançado que às demais crianças por construir todas as retas com visão monocular, e não coloca nenhum palito sem que esteja amparado pela projeção dos palitos pela miragem. - Por que você olha deste jeito? - "*Prá ver se esta tudo certo*". - Por que você olha agachado deste jeito? - "*Porque vejo melhor*". A construção da reta angular procede da mesma forma, orienta-se pela mirada e com

facilidade termina a construção. Quando pergunto como é uma estrada reta ele responde com gesto, como é comum a maioria das crianças questionadas, estica os braços e as mãos o mais reto possível alongando-o para frente como se quisesse esticar o máximo. Por outro, lado quando pergunto sobre uma estrada curva as mãos fazem gestos circulares dando ligeiras voltas. As construções na mesa redonda também não trazem nenhuma dificuldade, os pontos colocados próximos à borda são ligados uns após os outros tendo a mirada como procedimento habitual (Foto 13), não sendo o fundo fator de influência na construção como era o caso da subfase IIA. A reta diametral e a reconstrução da reta em ziguezague têm a mesma técnica já utilizada anteriormente. - *"É para ver se está reto"*. Quando pergunto por que você olha (mira) a cada palito que coloca na reta? Ele responde: - *"É fácil eu peguei, tirei daqui todos os que estavam torto e pus aqui"*. - Conta para mim, como você faz ? - *"Eu olho* (mostra um olho só) *se tiver tudo retinho eu paro, senão eu ponho um atrás do outro"*. - O que é reto? Ele mostra com gesto e aproveita para usar as mãos unidas, procedimento euclidiano, para dar mais precisão ainda aos palitos colocados simetricamente espaçados.

Tabela 5 - Classificação dos resultados obtidos nos testes da "Reta Projetiva". (número de crianças por fases)

Fases/Idade	2;06-4;00	4;00-5;06	5;06-7;00	TOTAL	%
IA	11	1	0	12	33
IB	1	6	1	8	22
IIA	0	4	7	11	31
IIB	0	1	4	5	14
III	0	0	0	0	0

Tabela 6 - Fases de desenvolvimento da construção da reta projetiva - distribuição das crianças nas faixas etárias (%).

Fases/Idade	2;06-4;00	4;00-5;06	5;06-7;00
IA	92	8	0
IB	12,5	75	12,5
IIA	0	36	64
IIB	0	20	80
III	0	0	0

unesp

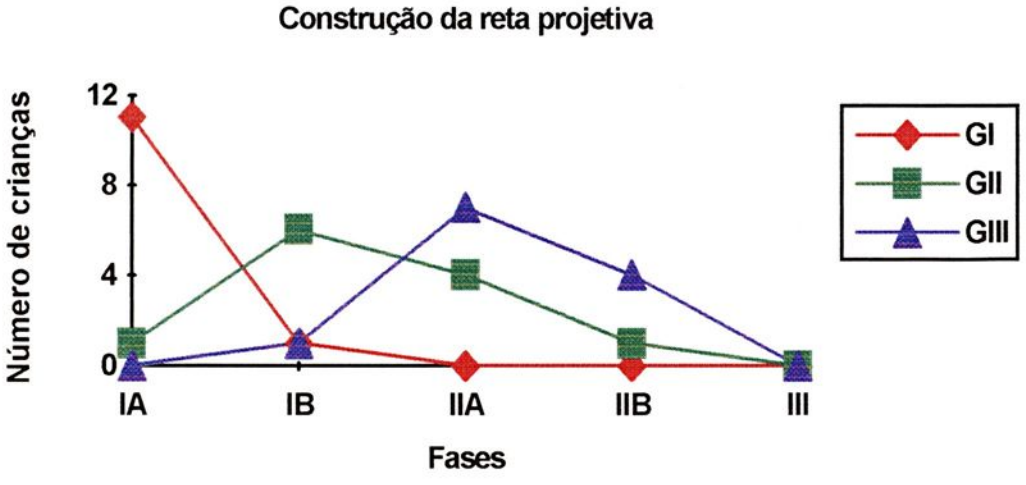


Figura 42 - Fases de desenvolvimento da construção da reta projetiva.

Observa-se claramente que, nos três grupos etários, nenhuma criança consegue construir a reta projetiva operatoriamente pela conduta de mirar, nem pelo procedimento euclidiano, o que mostra que as relações projetivas não estão constituídas.

O grupo que apresentou o maior sucesso na construção da reta projetiva, totalizando 14% das crianças entrevistadas, encontra-se na subfase IIB, sendo a grande maioria 80% composta por crianças de 5;06 a 7;00 anos, 20% pertence ao grupo etário de 4;00 a 5;06 anos, não apresentando nenhuma criança de 2;06 a 4;00 anos.

Na subfase IIA encontramos 31% do total das crianças entrevistadas. Observa-se um quadro muito parecido ao anterior em relação ao predomínio do grupo de 5;06 a 7;00 anos que detém 64% das crianças desta fase, 36% pertencem ao grupo etário de 4;00 a 5;06, não apresentando nenhuma criança de 2;06 a 4;00.

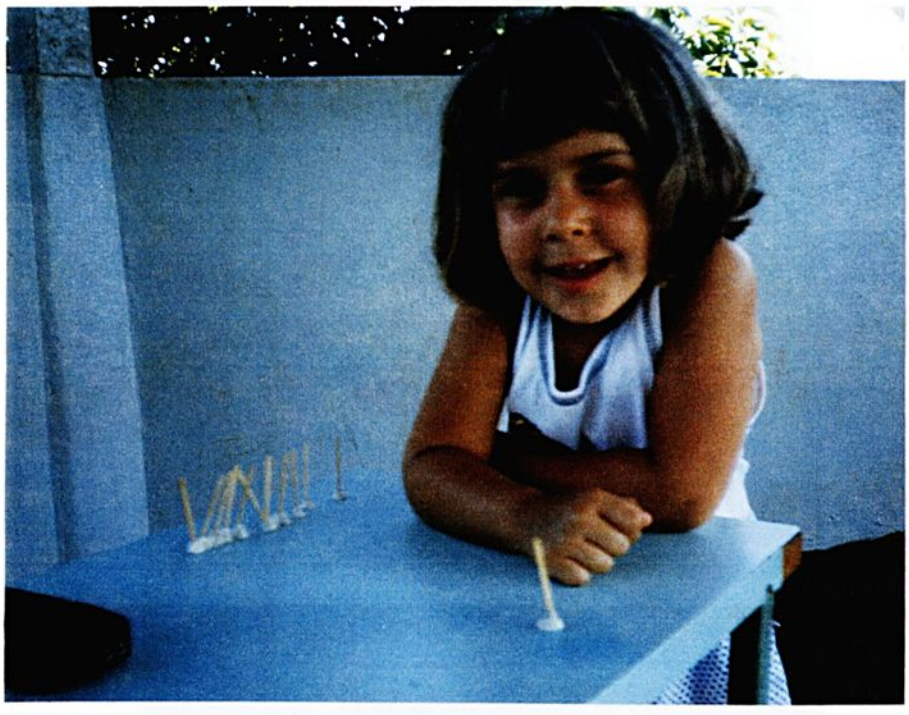
Na fase I encontramos 55% do total das crianças entrevistadas, distribuídas em 22% na subfase IB e 23% em IA.

Na subfase IB observa-se um avanço em relação a IA pela construção da reta por imitação da borda (mesa retangular). Este grupo está constituído por 12,5% do grupo etário de 5;06 a 7;00 anos, 75% de 4;00 a 5;6 e 12,5% de 2;06 a 4;00 anos. É necessário afirmar que as relações topológicas prevalecem nesta construção.

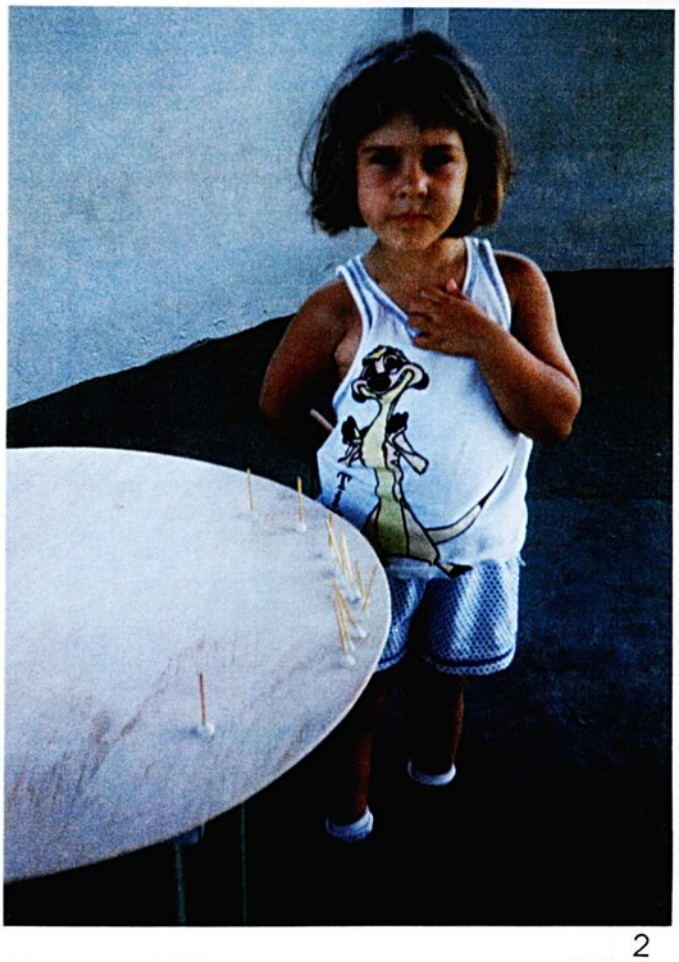
A subfase IA apresenta uma distribuição de 8% das crianças de 4;00 a 5;06 anos e a grande maioria 92% composta por crianças de

2;06 a 4;00 anos, não sendo encontrada nenhuma criança de 5;06 a 7;00 anos.

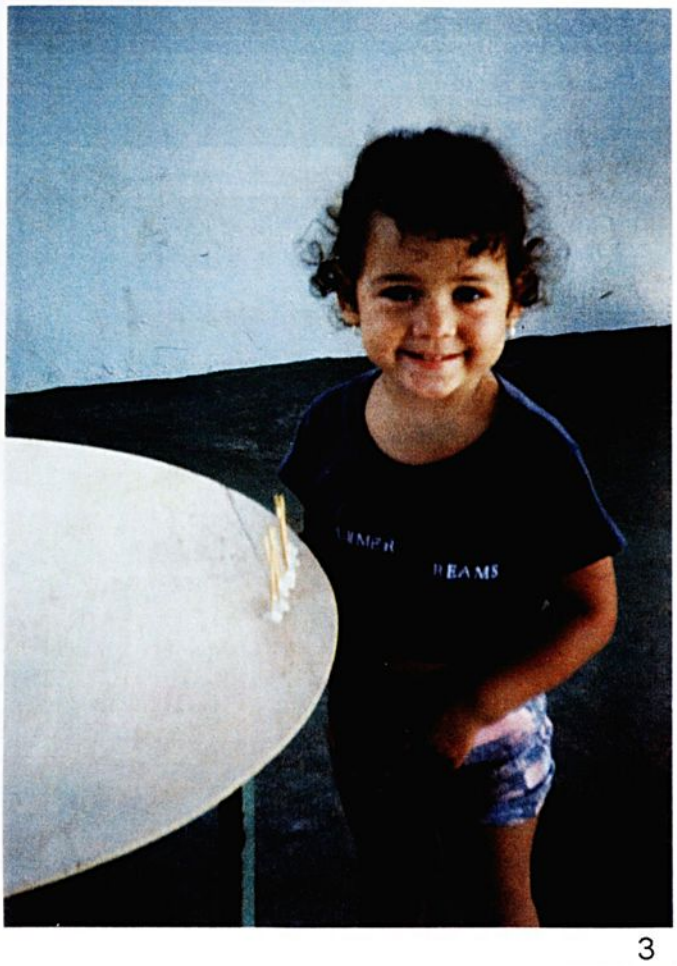
A análise dos dados nos permite afirmar o primado das relações topológicas no universo pesquisado, com 55% dos casos incidindo em características tipicamente topológicas (Fase I), sendo que destas crianças 60% pertencem aos grupos de 2;06 a 4;00 e 35% de 4;00 a 5;06 anos e somente 5% pertencem aos de faixa etária 5;06 a 7;00 anos (na subfase IB).



1

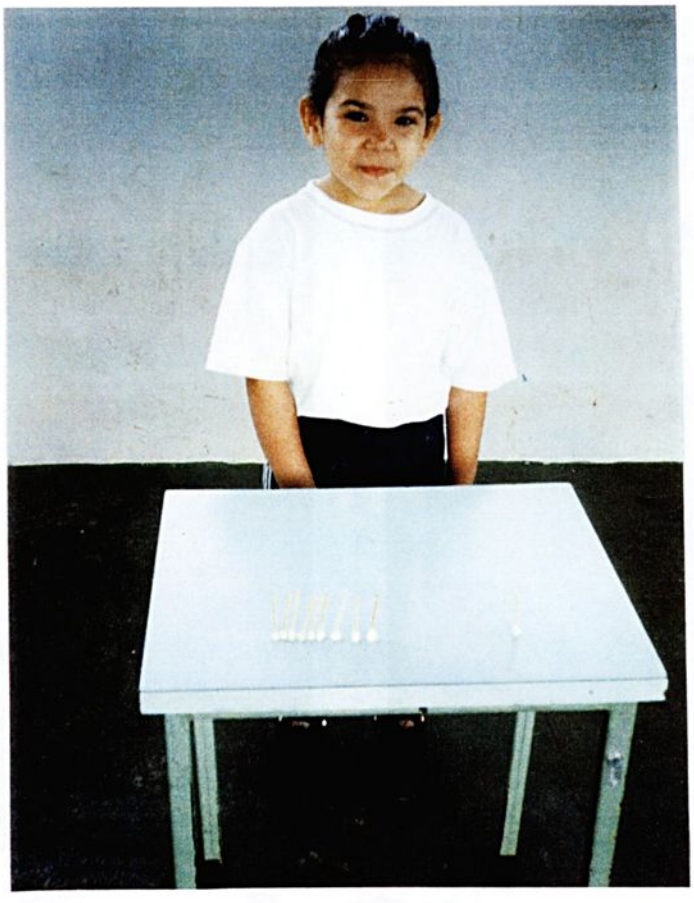


2



3

Figura 43 - Fase de Desenvolvimento da construção da reta projetiva subfase IA, foto 1 mesa retangular KAR 3;06 , foto 2 e 3 mesa redonda KEY 3;06 e KAR 3;06.

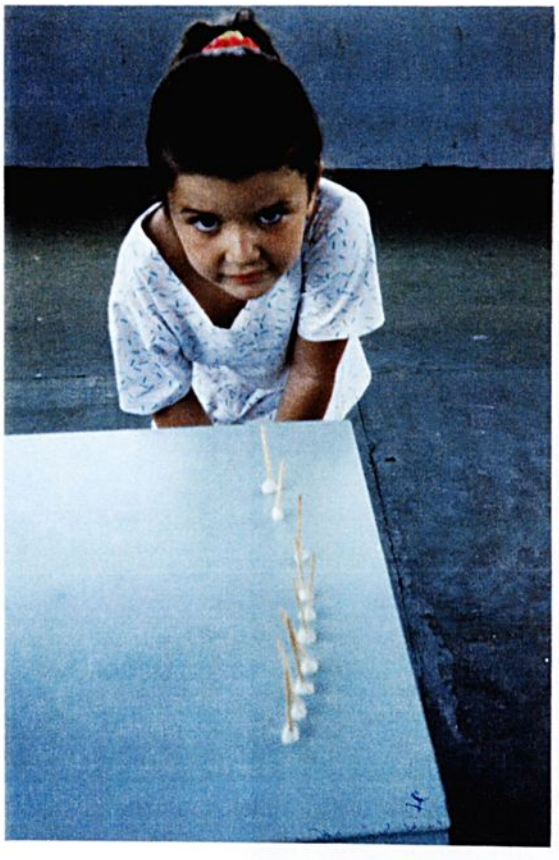


4

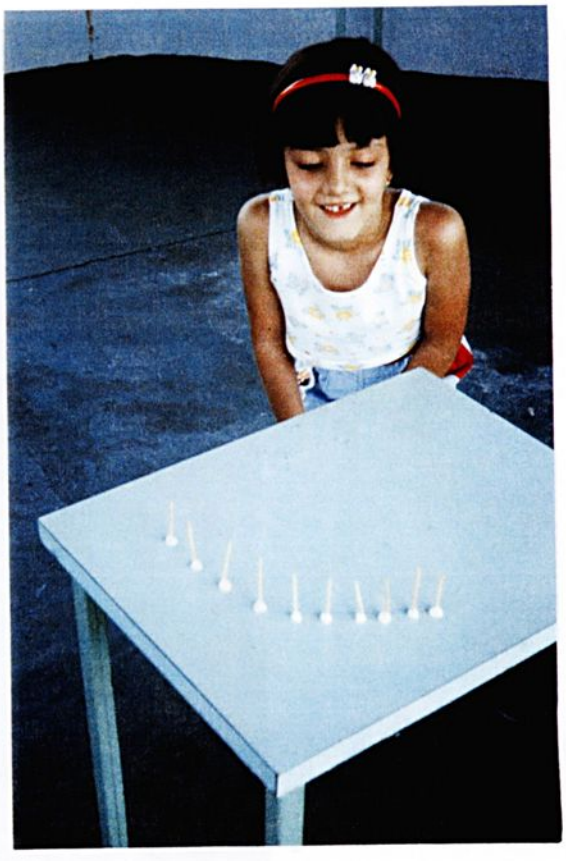


5

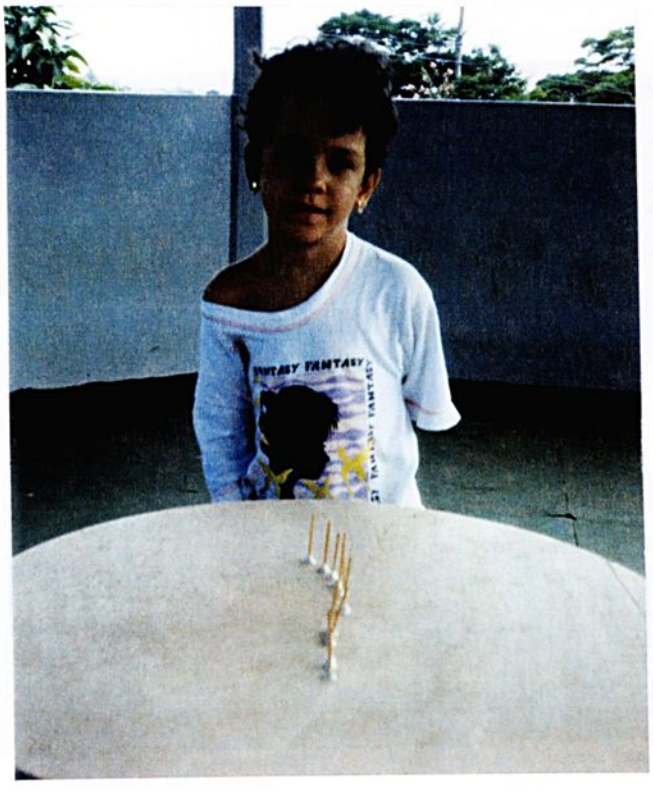
Figura 44 - Fase de Desenvolvimento da construção da reta projetiva subfase IB, foto 4 mesa retangular reta paralela à borda TAT 5;03 , foto 5 na mesa redonda reta próxima à borda ANA 6;02 .



6

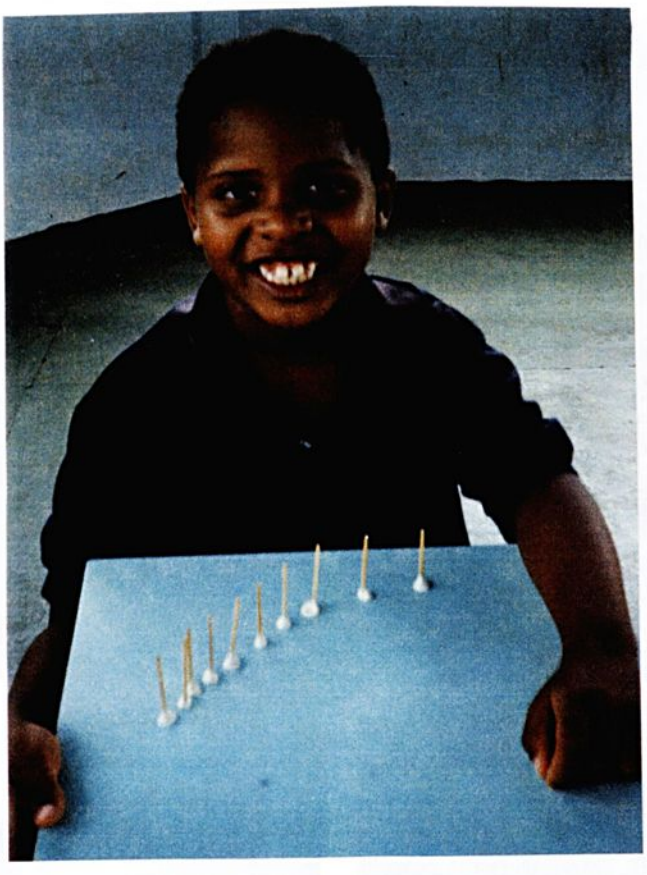


7



8

Figura 45 - Fase de Desenvolvimento da construção da reta projetiva subfase IIA, foto 6 mesa retangular paralela à borda AMA 6;00 , foto 7 na mesa retangular reta inclinada em relação à borda KAR 5;06 , foto 8 reta diametral na mesa redonda LUI 4;10 .

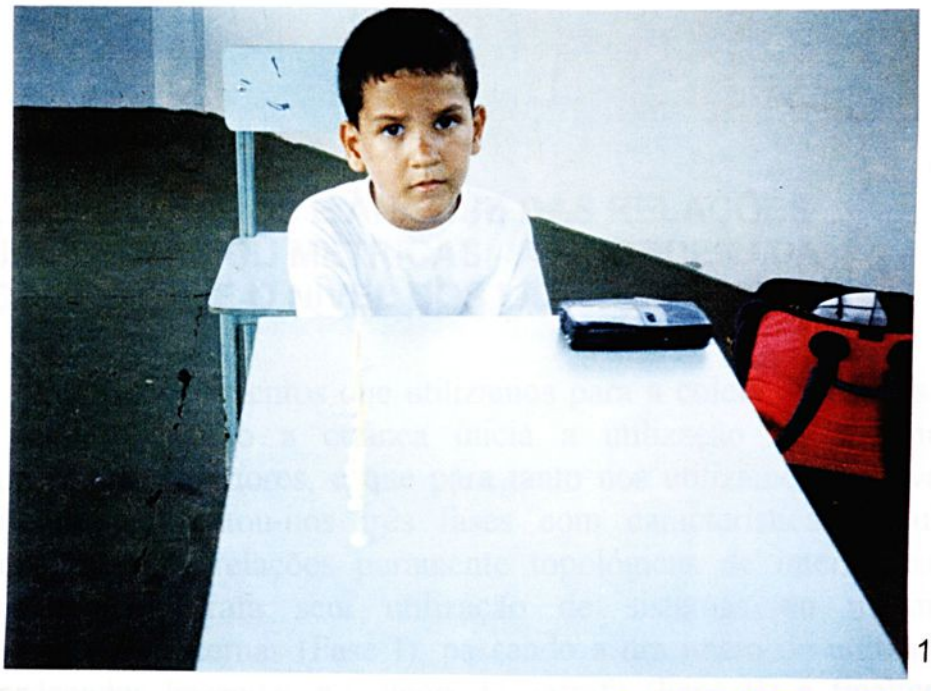


9

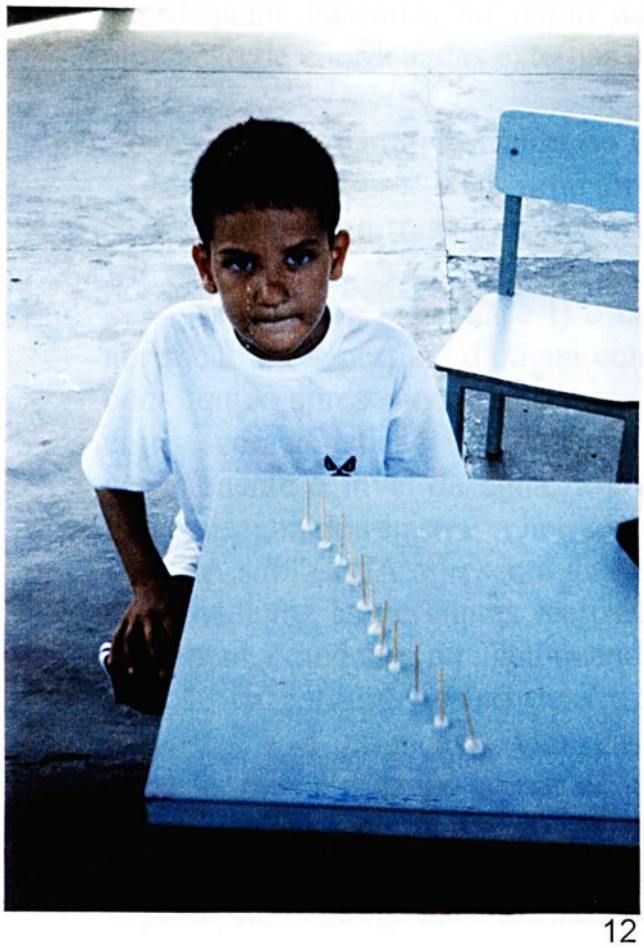


10

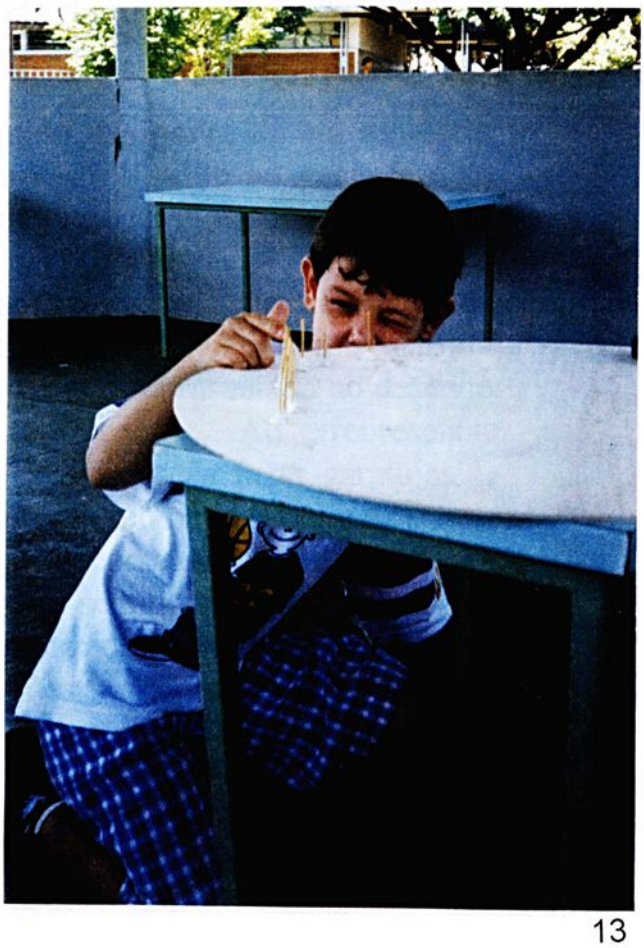
Figura 46 - Fase de Desenvolvimento da construção da reta projetiva subfase IIA, foto 9 mesa retangular AND 6;10 , foto 10 na mesa redonda CAR 6;11 .



11



12



13

Figura 47 - Fase de Desenvolvimento da construção da reta projetiva subfase IIB, foto 11 e 12 na mesa retangular reta paralela à borda e reta com inclinação em relação à borda LUC 6;4 , foto 13 construção da reta próxima à borda da mesa redonda ANT 6;11 .

IV.3 RESULTADOS E ANÁLISE DAS RELAÇÕES EUCLIDIANAS OU MÉTRICAS - A COORDENADA HORIZONTAL E O NÍVEL DOS LÍQUIDOS[75]

Os procedimentos que utilizamos para a coleta dos dados a fim de avaliar quando a criança inicia a utilização de sistemas de coordenadas exteriores, e que para tanto nos utilizamos do nível dos líquidos, apresentou-nos três fases com características peculiares, iniciando pelas relações puramente topológicas de interioridade do líquido na garrafa sem utilização de sistemas ou mesmo de coordenadas externas (Fase I), passando a um início de utilização de coordenadas baseadas no fundo da garrafa (Fase II) e finalmente à utilização de coordenadas externas à garrafa (Fase III).

- **Fase I: IA A interioridade do líquido nas garrafas e a ausência de nível da água. IB a interioridade do líquido na garrafa e as primeiras tentativas de representação do nível da água**

A primeira fase (Fase I) é caracterizada pela ausência total de abstração da superfície da água como uma superfície plana. A garrafa com líquido apresentada às crianças é por elas representada no desenho com características puramente topológicas. Ao representar graficamente o nível da água, a criança limita-se a fazer garatujas[76], não conseguindo registrar a horizontalidade do líquido (Figura 48).

A subfase IA apresenta as respostas características das crianças que, mediante as perguntas realizadas no sentido de saber como elas percebem a mudança da água quando realizado qualquer movimento de rotação na garrafa, - salvo duas exceções - , foram evasivas ou sem respostas (10 crianças). Um caso particularmente chamou-nos a atenção, pois a criança, apesar de não conseguir desenhar até então os níveis das garrafas apresentadas, ao presenciar a garrafa de bordas paralelas posicionada com um ângulo de 180° em relação ao eixo suporte, ficou indignada e afirmou ser igualzinho à sua mamadeira.

---

[75] Uma síntese do trabalho de Piaget que serve de suporte teórico para este item encontra-se em **II.2.3 O espaço euclidiano e o desenvolvimento dos sistemas de referência e as coordenadas horizontal e vertical.** p:123, deste trabalho.

[76] Garatuja - desenho primitivo caracterizado por movimentos rítmicos circulares ou de ir e vir, já citados anteriormente **IV.1.1 Resultado e análise do desenho espontâneo.** p:147 deste trabalho.

unesp

JOR 3;10 Apresentamos a garrafa com o líquido e inclinamos um pouco (140°), ocasião em que perguntamos o que acontecia com a água quando se mexia com a garrafa - *"Ela morre!"* Mas por que ela morre? *"Porque ela morre e cai."* Inclino mais a garrafa (180°) para que o líquido se desloque bastante, fazemos novamente a mesma pergunta e a resposta é inusitada e surpreendente: -*"Oh, igual a minha mamadeira quando eu mamo. Quando eu viro assim* (deita a cabeça) *a mamadeira vira assim. Tá reto."*

Para nosso espanto ele marca acertadamente o nível da água, mas é um caso único, tanto no que tange às demais crianças da sua faixa etária quanto aos demais desenhos do nível da água, que está restrita a meras relações de vizinhança, interioridade e ordem, que são características desta fase.

DAN 3;11 À vista da garrafa de lados paralelos com água perguntamos: O que acontece com a água quando eu mexo a garrafa? - *"Ela mexe."* - Como ela mexe ? -*"Com a mão"* Mostra com a mão esticada acertadamente a superfície do líquido em todas as mudanças ocorridas pela rotação da garrafa. - Por que a água mexe? - *"Porque ela é água!"* - O que faz a água mexer? - *"Porque ela tem álcool."* - Mas o que tem o álcool que faz a água mexer? - *"Tem água"* Como podemos perceber, são respostas puramente tautológicas.

SAM 4;01 O que acontece com a água quando eu mexo a garrafa? - *"Ela fica assim."* Mostra com a mão o deslocamento da água. - E quando eu faço assim? (inclino a garrafa redonda quase a 45°) -*"Cai tudo no papel"* - E se eu viro para cá? - *"Ela vem para cá."* E se eu viro para lá? *"Ela vira para cá."* A criança apresenta os níveis da água acertadamente com as mãos, e atribui ações que não ocorreram, que é o caso da água que SAM, ao ver a garrafa inclinar-se, afirma que irá derramar, mas longe estava a possibilidade de derramamento do líquido.

Todas as crianças desta fase percebem que a água se desloca, muda de lugar mediante a experiência, mas nenhuma delas conseguiu prever o nível do líquido quando foi apresentada a garrafa vazia. Outra característica desta fase é a forma de preenchimento do volume da garrafa, pois, as crianças preenchiam-na muito acima do limite apresentado pela experiência.

unesp

A subfase IB avança em relação à anterior (Subfase IA) pelo fato de as crianças apresentarem os desenhos com as mesmas características (topológicas), mas conseguem preencher o espaço dentro da garrafa com riscos mais ritmados, dominando a força que imprime, realizando traços retos que, apesar de não conseguir registrar o nível da água como plano, avança em relação à simples garatuja e demonstra uma preocupação excessiva com os espaços vazios, preenchendo quase todo o volume da garrafa, mesmo que ela tenha mostrado a superfície da água (linha divisória aparente no lado transparente da garrafa) inferior ao que representa no desenho. (Figura 49).

Opondo-se à falta de abstração do nível da água na fase I, a característica marcante da fase II está justamente na abstração da superfície da água como um plano, podendo estar representado no desenho por uma linha única ou várias linhas.

- **Fase II - Início de representação gráfica da horizontalidade do nível da água: IIA paralelismo com o fundo da garrafa, IIB o conflito entre o paralelismo com o fundo e os dados apresentados pela experiência.**

A fase II, devido às características apresentadas, foi subdividida em IIA e IIB. A subfase IIA apresenta várias peculiaridades mas a mais perceptível é o paralelismo do nível do líquido com o fundo da garrafa (Figura 50). Na subfase IIB o nível da água é representado, não somente paralelo ao fundo da garrafa, mas em relação às suas paredes ou por linhas oblíquas presas às bordas da garrafa (Figura 51).

A riqueza de detalhes e de informações dadas pelas crianças desta fase favorecem o entendimento da forma como elas pensam as relações geométricas e principalmente as euclidianas. As explicações são mais consistentes e ricas em detalhes.

A fase I é marcada pela falta total do uso de qualquer referencial para a representação do nível da água, que está restrita às relações topológicas. A presente fase (II) avança no sentido de as crianças conseguirem utilizar o fundo da garrafa como referencial.

O nível da água é, a partir desta fase, apresentado como uma reta no desenho e como um plano na representação gestual e, em diversas vezes, utiliza o lápis que está pintando para mostrar o limite da água, como no caso de NAT, que chama a superfície da água de "listrinha".

unesp

NAT 5;00 - Ao mostrarmos a garrafa de bordas paralelas com água, esta criança chama a superfície de *"listrinha"*. Quando pedimos para mostrar como a água fica quando a garrafa é inclinada nas diversas posições, ele mostra com a mão os deslocamentos da água devido à inclinação da garrafa acertadamente, mas, quando passamos ao desenho do nível da água, a representação gráfica é igual nas várias inclinações: paralela ao fundo e com o nível bem acima que o real. - O que acontece com a água quando eu mexo a garrafa? - *"A água vem com a listrinha"* - E no seu desenho está certo? - *"Tá certinho, não tem nada errado."* - E se eu deito a garrafa o que acontece com a água? - *"Ela fica pingando"* (mas no desenho é paralelo ao fundo). - E no seu desenho está certo (pois ele representou o nível da água paralelo ao fundo mesmo com a garrafa posicionada a 180° do suporte)? - *"Tá"*... - E se eu viro a garrafa de ponta cabeça o que acontece com a listinha? - *" Vai ficar pingando."* (no desenho a mesma coisa paralelo ao fundo) - Mas você falou que estava pingando e no seu não está? - *"Porque aí é um pote e tem buraco e aqui não"* A visão da regularidade do nível da água em oposição à mudança da garrafa não muda em nada os desenhos nem a hipótese da criança. E mesmo a diferença entre a visão da garrafa com água pingando altera a opinião da criança sobre o paralelismo entre o nível da água e o fundo da garrafa.

Apesar dos avanços as crianças desta subfase IIA continuam totalmente impermeáveis à experiência. As contradições, que às vezes ocorrem quando comparados os desenhos antecipadores e os desenhos à vista da experiência, são reveladoras. As crianças não conseguem justificar as diferenças e, para o desempate, recorremos à vista da garrafa com água, mas as poucas vezes que elas percebem as disparidades entre o real e a representação gráfica não conseguem explicar o fato ou não aceitam as diferenças, continuando fiéis às suas hipóteses, pois parecem ter uma hipótese anteriormente elaboradas que não conseguem ou não querem colocar em questão.

Podemos perceber que há uma perseveração do que a criança observou inicialmente (sucesso na primeira busca e não-estruturação das posições posteriores do nível da água)[77]. A impermeabilidade à

[77] Este fato "perseveração" em uma primeira situação que a criança remete-nos às reações da IV fase do período sensório-motor, onde a criança não considera os deslocamentos realizados pelos objetos, buscando-os sempre no primeiro lugar onde encontrou-o pela primeira vez. Vemos aqui uma ocasião de atestar a reconstrução dos conceitos de um período anterior, onde as consquistas ocorreram na ação e são reelaborados na representação.

unesp

experiência mostra uma incapacidade de relacionar o nível da água com um sistema de referência quer seja pela falta de ligar o nível da água a um objeto exterior, como a superfície da mesa por exemplo, ou perceber a mudança incessante do fundo da garrafa e o nível da água.

A criança tem dificuldade em relacionar o que a experiência lhe propicia e a sua própria hipótese. A dificuldade está em coordenar a sucessão dos deslocamentos da garrafa e do nível da água que é um referencial móvel a um referencial externo fixo. No caso, o suporte da garrafa, ou o chão que são fixos, e tal relacionamento demanda que já estejam constituídas as operações geométricas (deslocamento do nível da água, conservação do líquido, comparação do nível do líquido e referenciais externos etc.) geradoras de um sistema de coordenadas, mas é justamente o que falta à criança desta subfase: operações geométricas que viabilizem a leitura da experiência.

Apesar de as operações geométricas não estarem constituídas e da impermeabilidade à experiência, a subfase IIA apresenta um progresso que até então não havia nada comparável, pois já ocorre a utilização do fundo da garrafa como de um referencial e a criança já percebe o nível da água como uma superfície plana que apresenta um limite rígido entre a água e o espaço livre sobre a superfície.

O avanço é notável mas insuficiente para a constituição do sistema de coordenadas, sendo uma etapa necessária e preliminar, que não garante o que irá constituir-se na finalização do espaço euclidiano.

A representação pela criança do nível da água paralelo à base ou ao fundo da garrafa é sintoma de que a criança inicia o domínio e a utilização de retas paralelas e de planos. Devemos sublinhar que esse domínio está atrelado a situações particulares. No caso, o plano da superfície da água e a base da garrafa, o mesmo já havia ocorrido na construção da reta projetiva paralela à borda da mesa retangular, fato que configura a base comum das relações projetivas e euclidianas nas relações topológicas e sua correlatividade no desenvolvimento.

Podemos afirmar que, por mais simples que sejam essas intuições espaciais, elas constituem-se em um início da conquista do espaço, no sentido de coordenar objetos que estão separados a certa distância.

A conquista do espaço opõe-se justamente aos desenhos presenciados na fase anterior (I), quando a criança tinha necessidade de pintar quase totalmente o interior da garrafa , mesmo tendo mostrado com a mão o nível da água muito mais próximo à base do que

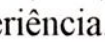
unesp

propriamente do bocal, já que o volume de líquido contido não ultrapassava a ¼ da capacidade total da garrafa.

O paralelismo empregado para retratar o nível da água (paralelo ao fundo) só é aplicado a esta situação particular, o que traduz na utilização de um eixo de referência do nível da água em relação a um referencial próximo: o fundo da garrafa. O conjunto garrafa e água constitui um objeto único sem, considerar os demais objetos ao seu redor. Tanto é que a criança afirma que a água está "torta" quando a garrafa é que está inclinada, ou seja, a água está inclinada em relação à garrafa que é o referencial único, absoluto.

A subfase IIB constitui-se num período intermediário entre o paralelismo da superfície da água e o fundo da garrafa (Subfase IA) e a generalização da horizontalidade do nível dos líquidos (Fase III).

Os desenhos característicos desta subfase apresentam o nível da água como linhas oblíquas presas às paredes da garrafa onde um dos lados está mais alto (onde realmente é o nível da água na maioria dos desenhos que as crianças fazem).

As crianças que se encontram na subfase IIB apresentam os desenhos das garrafas posicionadas paralelas ao eixo horizontal () com o nível marcado corretamente no desenho à vista da experiência. Não mais por um paralelismo imitativo da borda, mas pela maior flexibilidade atribuída ao nível da água. Alguns erros são cometidos no desenho antecipador (KAR, EDI, AND). Na subfase anterior (IIA), algumas crianças já percebiam e representavam corretamente o nível da água nas garrafas "deitadas" e algumas crianças, a partir da visão da experiência, alteravam seus desenhos (LEO, TAT, REN, AND). A criança passa a compreender que se, a garrafa encontra-se *"deitada"*, como elas próprias afirmam, em uma aplicação a própria forma de entenderem o mundo com as ações que elas realizam, estar na horizontal é estar deitada, o nível da água está também *"deitado"*.

A presente subfase (IIB) apresenta o avanço das crianças em realizarem uma oposição entre o nível da garrafa *"deitada"* e *"de ponta cabeça"*. Presenciamos os avanços a partir da fase I quando a criança desconsiderava o dado empírico, na fase II passa a buscar uma forma de encontrar uma lógica para a explicação e o registro do nível da água. Em IIA recorre ao fundo da garrafa, e dela tira uma regra que utiliza, mas está impermeável ao dado fornecido pela constatação de que uma mudança de posição na garrafa invariavelmente acarreta uma mudança no nível do líquido. Em IIB essa mesma regra (paralelismo entre o fundo da garrafa e o nível da água) passa a não vigorar mais, e

unesp

as crianças passam a desenhar a garrafa de "ponta cabeça" com o nível na parte inferior. Doravante, a criança constata o dado experimental e passa a considerá-lo. Considerar o dado experimental é conseguir fazer uma leitura do que a experiência forneceu, organizando e ordenando as ações umas em relação às outras, seriando os resultados obtidos pela percepção ou encaixando os dados aos esquemas uns nos outros.

A necessidade de uma coordenação das ações pela criança avaliza o fato de que só a experiência é insuficiente para a construção da noção de horizontalidade. Constatamos que somente a experiência não é responsável para fazer a criança realizar as coordenações dos dados empíricos. Caso fosse possível, a criança tiraria das experiências diárias a noção da horizontalidade, pois desde de muito pequena bebe água várias vezes ao dia, banha-se diariamente, nada[78] etc...

KAR 6;02 As previsões do nível da água com a garrafa inclinada são inicialmente fator de insegurança, a criança vacila mediante o pedido para representá-la com a mão. - *"Eu acho que vai ficar assim"* A mão fica paralela à lateral da garrafa inclinada, mas o registro no papel é realizado com o nível da água paralelo ao fundo da garrafa. Exceto em duas situações de oito propostas (garrafa deitada com o bocal para a direita e inclinada a 135°), a criança desenha o nível paralelo ao fundo da garrafas. Em posições que a criança tem conhecimento, ri como que zombando da evidência da pergunta, mas são nas posições em que as garrafas estão inclinadas que surgem as dificuldades. O desenho à vista da experiência, no entanto, apresenta outro quadro: KAR refaz totalmente os níveis e apresenta exceto um (o mesmo que havia representado a superfície da água paralela ao lado da garrafa inclina no suporte) em oposição ao que o dado visual lhe apresenta. Após marcar os níveis nas garrafas, pergunto o que acontece com a água quando mexo na garrafa - *"Ela balança"* - O que muda quando eu mexo a garrafa? - *"Ela fica de um lado para outro."* - Por que você acha que ela fica de um lado para o outro? - *"Porque a água está balançando."* - A água fica reta ou fica torta? - *"Torta."* (em relação à garrafa que está inclinada) KAR afirma "Torta" com indignação, como se fosse uma certeza óbvia. *"Reta"* (quando o nível da água está paralelo ao fundo da garrafa). - A água fica sempre reta ou as vezes? - *"Uma hora ela fica reta, uma hora ela fica torta."* Quando comparamos os níveis

[78] Nas escolas onde a pesquisa foi realizada as crianças, no verão, têm atividades aquática, com jogos e utilização de piscina.

da garrafa que estão em desacordo, pois antes da experiência foi marcado paralelo ao lado e após paralelo à reta suporte, KAR não vacila e opta pelo nível que está marcado paralelo ao lado da garrafa. Refazemos a pergunta mas a resposta é a mesma. O desenho antecipador e o desenho à vista da experiência na garrafa redonda são idênticos, e as garrafas que estão inclinadas são marcadas do nível da água paralela ao lado da garrafa. Nas colagens o êxito é total, nas duas formas de garrafas. Os cartões para separação e reparo dos que estão errados reafirmam os dados colhidos com os procedimentos anteriores. A criança fica em dúvida em relação àquele onde o nível da água está inclinado e a garrafa está colocada em pé sobre o suporte, ( ) ela olha, nos pergunta se está certo ou errado, devolvemos a pergunta e ela coloca acertadamente do lado dos cartões que já havia separado como incorretos. Aos cartões onde o nível está marcado errado, propõe correções adequadas. As colagens das garrafas redondas repetem os dados anteriores onde as inclinações são fator de dúvidas e as colagens confirmam o fato. Quanto aos cartões das garrafas redondas o mesmo fato se repete vindo a reforçar os dados anteriores. As garrafas inclinadas são uma dificuldade a ser vencida.

EDI 6;09 A previsão do nível da água na garrafa de lados paralelos é de paralelismo com o fundo. As exceções são a garrafa de "ponta cabeça" onde o nível é apresentado corretamente considerando a gravidade e uma das garrafas "deitadas" . Após a experiência: O que acontece quando eu mexo a garrafa? - *"A água mexe."* - A água fica sempre reta? - *"Não, algumas vezes. Como o guaraná."* A previsão indicada com a mão do nível da água na garrafa redonda inclinada de 90° é contrária ao desenho da criança, ocasião que perguntamos: Ué, mas você falou me falou que estava de outro jeito. - "*I eu errei.* - Você errou quando? - "*Eu falei que tava assim,* (paralelo ao fundo), *mas tá assim,* (paralelo à reta suporte). - Mas você tem certeza? - *"Tenho porque a garrafa tá deitada. Quando a garrafa tá deitada a água fica embaixo".* - A água fica sempre embaixo? - *"Não."* À vista da experiência EDI marca apenas um nível errado, o nível onde a garrafa está inclinada a 45°. A classificação e correção dos cartões repete as mesmas situações anteriores. Nas garrafas de lados paralelos EDI, acerta 90% dos cartões, errando somente o que apresenta a água inclinada em relação à garrafa que estava "em pé", afirmando estar correto, nos demais faz as correções devidas e as justifica de forma coerente. Quanto aos cartões das garrafas redondas, confunde o nível

da água inclinada bem como as garrafas inclinadas e o nível marcado correto, propondo a correção de tal maneira que a água apresentaria paralelo a um eixo central à garrafa. ⊘

- **Fase III - A consideração dos dados fornecidos pela experiência e a descoberta da horizontalidade.**

Na subfase anteriormente analisada (IIB) pudemos perceber que as crianças não mais concebiam o nível da água como unicamente paralela ao fundo da garrafa, e passam a considerar os dados da experiência, falta-lhes no entanto considerar o nível dos líquidos paralelos a uma coordenada exterior à garrafa.

A fase III vai constituir-se no acabamento das relações euclidianas com a utilização de eixos de coordenadas exteriores ao sistema considerado (garrafa com água).

As crianças analisadas nesta pesquisa (2;06 a 7;00 anos) não apresentaram as características que demonstrassem tal condição (consideração de eixo de coordenadas exterior), mas apresentaram características intermediárias que apresentam os termos de passagem de uma subfase (IIIA) vital à constituição das relações euclidianas. A partir das conquistas realizadas anteriormente, a criança passa a afirmar a horizontalidade incondicional dos líquidos e o início dos eixos externos, no caso a mesa, quando da manipulação das garrafas com água e na representação com a reta suporte dos desenhos das garrafas.

O grupo de crianças classificado nesta subfase (IIIA) apresentou, no desenho antecipador e à vista da experiência (Figura 51), comportamentos que podemos afirmar avançam em relação aos da subfase anterior (IIB). Esses avanços são avalizados pela representação gestual, pela colagem das garrafas marcadas com diversos níveis de inclinação, pelas respostas frente às perguntas realizadas e finalmente pelos cartões para classificação e correção.

As colagens atestam tais avanços, são realizadas com extremo cuidado fazendo a base das garrafas retangulares e redondas encostarem sobre a reta-suporte (CAR e ANT quando mostram o nível da água no desenho antecipador e na classificação dos cartões). No entanto, ainda falta-lhes a generalização do conceito, condição da constituição das relações euclidianas

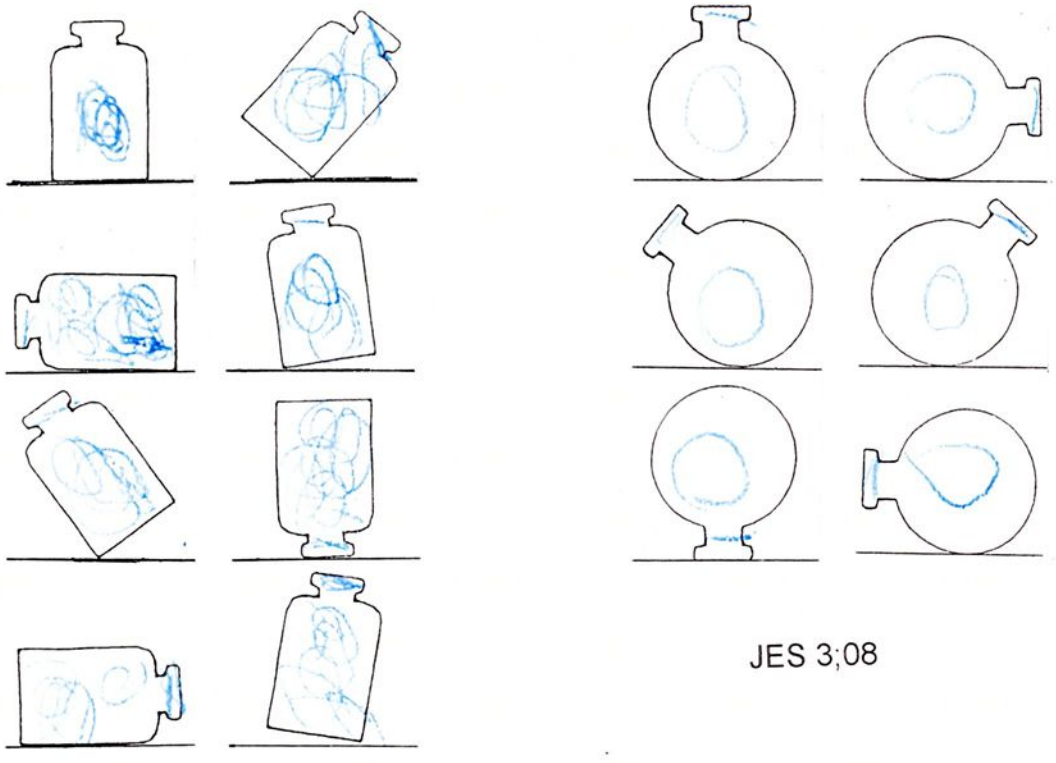
CAR 6;10 A previsão do nível da água nas garrafas retangulares e redondas é correta. O que acontece com a água quando mexo a garrafa? - *"A água mexe."* Tal afirmação parece ser uma característica de IIA o que implica ainda em uma consideração do nível da água em relação à garrafa, mas CAR mostra a superfície da água com a mão como sendo reta, utiliza-se também do lápis para afirmar a horizontalidade do líquido. Apesar das características da fase anterior (a água relativa à garrafa), CAR avança no sentido de apresentar os níveis marcados corretamente no desenho antecipador e à vista da experiência e a relatividade do nível a uma coordenada externa o lápis. As colagens das garrafas que são entregues em diversos ângulos para que não haja perseveração ou uma generalização quanto à posição a ser entregue culminam com êxito total nos dois tipos de garrafa. Os cartões de classificação e correção confirmam o sucesso da colagem, mostrando que a criança passa a considerar a reta-suporte como ponto de referência para descobrir o nível da água. As correções das garrafas de lados paralelos sem exceção são realizadas tomando por base a reta suporte. Nas garrafas redondas de cinco correções, quatro são realizadas relativas à reta-suporte.

O exemplo anterior mostra os avanços em relação à subfase IIB, mas tais conquistas ainda são insuficientes para a generalização da horizontalidade bem como para a constituição das relações euclidianas. As garrafas inclinadas ainda constituem um desafio a ser vencido e, para tanto, há necessidade da generalização do uso de um referencial externo que sirva de parâmetro.

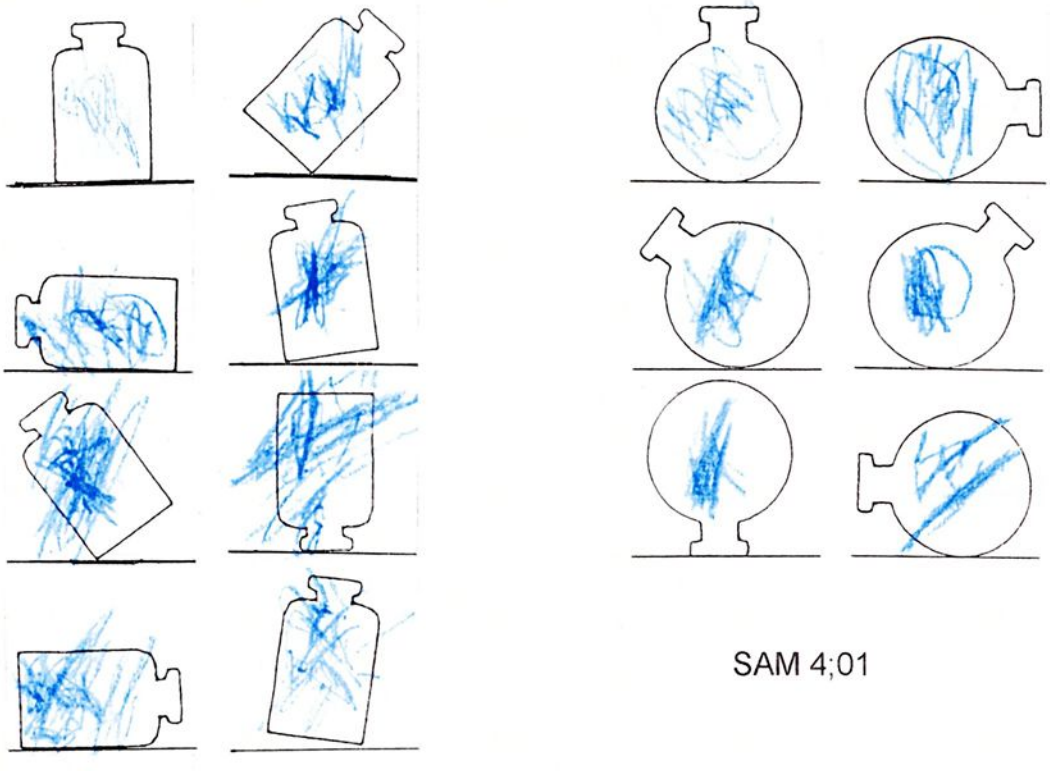
Dentre as crianças analisadas, ANT é o exemplo em que as relações geométricas apresentam-se mais avançadas, mas ainda necessitam de outras coordenações que possibilitem as operações geométricas.

ANT 6;06 As previsões antes da experiência são corretas: O que acontece com a água quando eu mexo com a garrafa? (a garrafa está na minha mão) - *"A água entorta mas continua reta."* - Como assim? - "*O que entorta é só o vidro. É assim,* (pega o vidro) *o vidro está aqui quando eu mexo o vidro a água fica parada.* Enquanto ANT mexe o vidro que está nas suas mãos nos diversos ângulos de giro, mantém a outra palma da mão paralela à superfície da água. Passa a desenhar o nível da água Quando inclino o vidro e volto a perguntar como é o nível da água, ele volta a reafirmar a sua horizontalidade. Mostro a garrafa

invertida e a criança me mostra com a mão onde está a água. - *"Tá assim* (mostra o nível da água mas não afirma se está acima ou abaixo da palma da sua mão, ocasião em que perguntamos se a água está para cima ou para baixo). *"Fica para cima."* - Para cima de onde (pois poderia ser uma reação residual de manter a água paralela ao fundo da garrafa)? - *" Para cima da tampa"* Todos os desenhos são realizados corretamente e com precisão, apresentando o nível da água e sua proporção em relação à quantidade contida na garrafa (constância da forma e da grandeza). As colagens são realizadas com precisão, mas os cartões para classificação e correção são fator conclusivo, pois a criança propõe a correção do nível inclinado na garrafa "em pé" corrigindo o nível da água em relação à reta-suporte e não fazendo correção em relação ao cartão como sugerimos. A correção do nível da água em que a garrafa está de "ponta cabeça" dá margem à mesma situação, a criança faz as correções em relação à reta-suporte. O mesmo acontece com a garrafa redonda.



JES 3;08



SAM 4;01

Figura 48 - Exemplo da representação do nível de líquido em IA JES 3;08 e SAM 4;01.

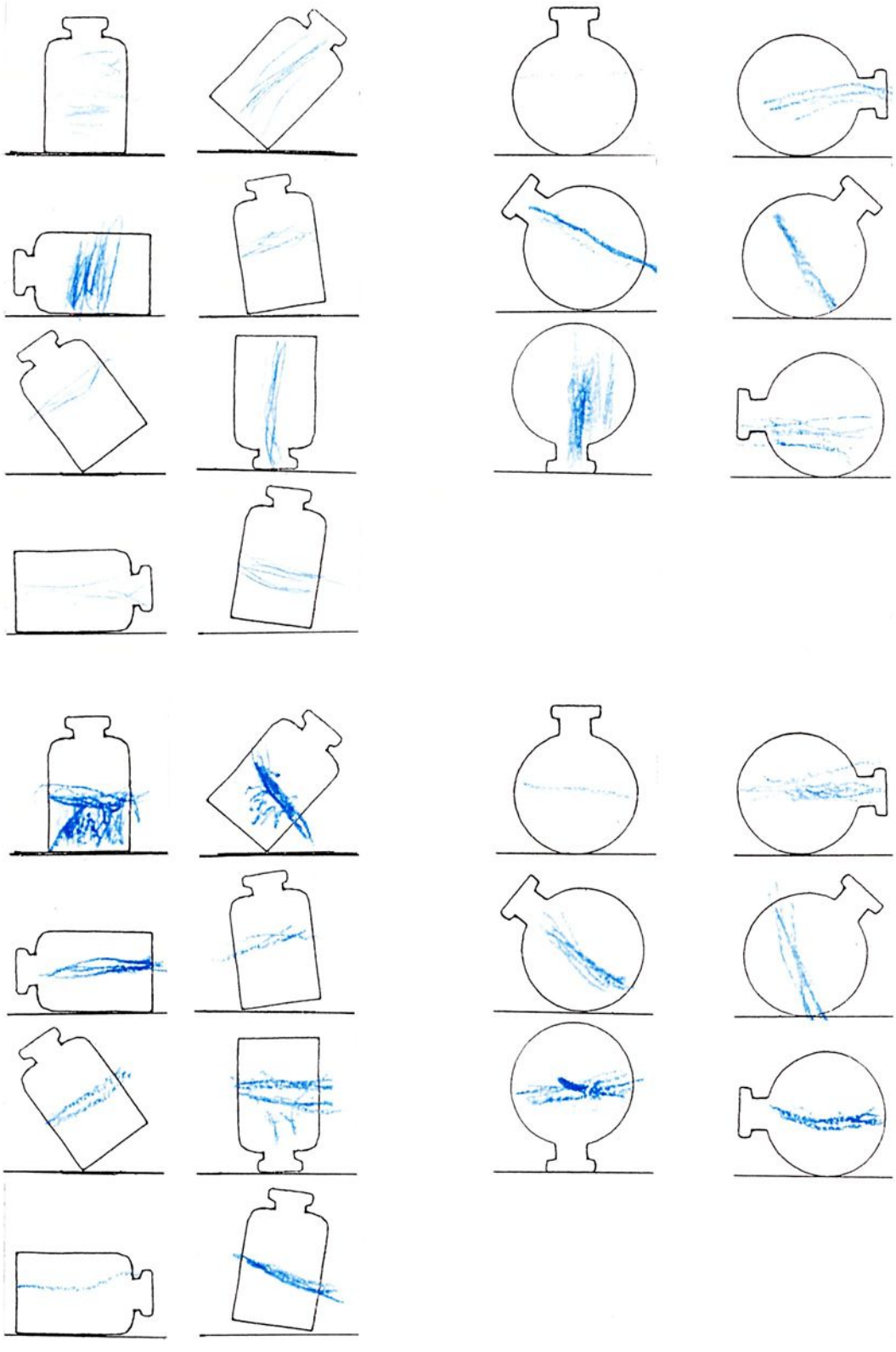
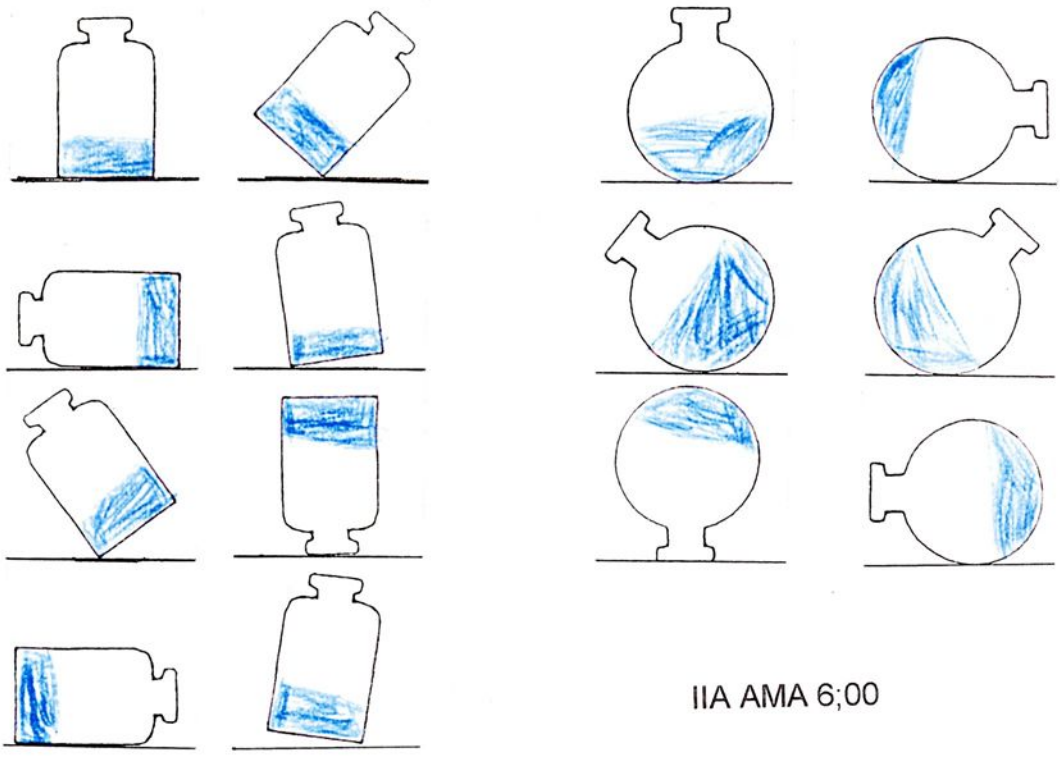
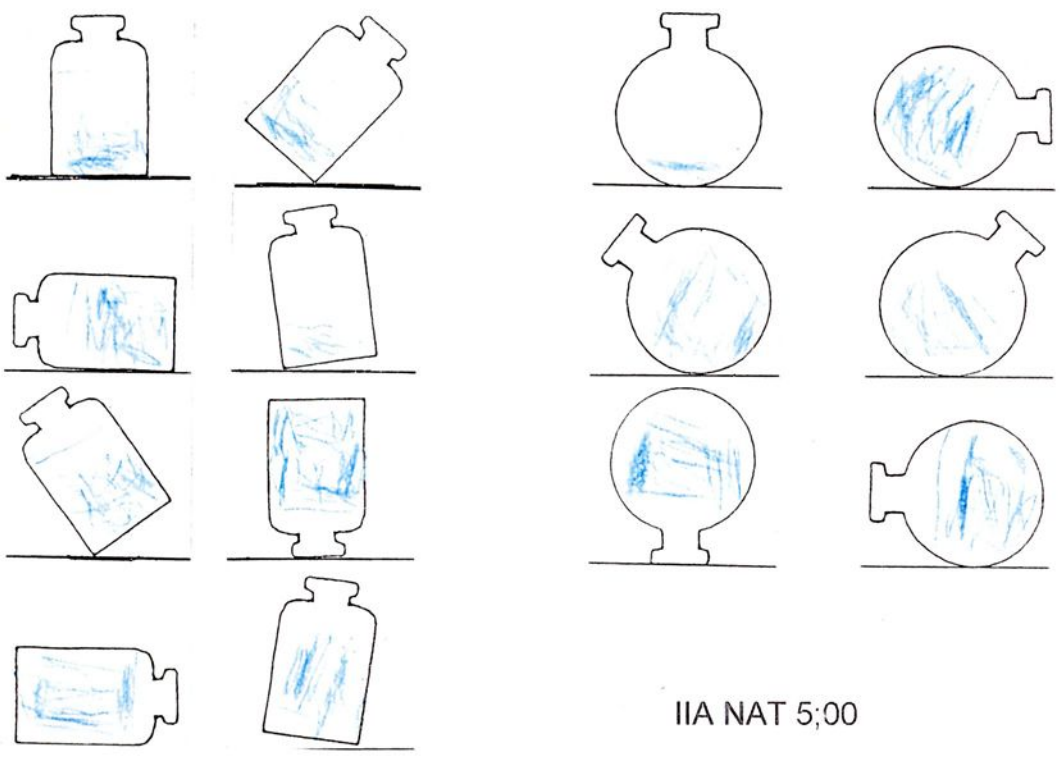


Figura 49 - Exemplo de representação do nível do líquido em IB VIC 4;11 antecipador e à vista da experiência.

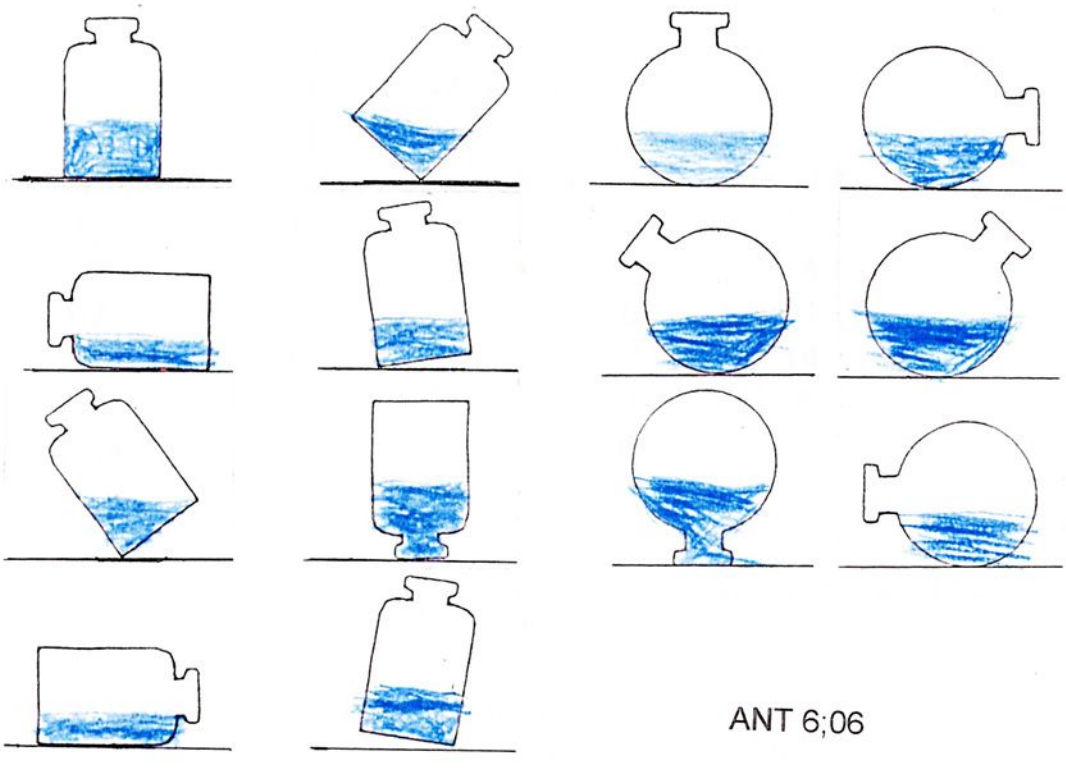


IIA AMA 6;00



IIA NAT 5;00

Figura 50 - Exemplo de representação do nível do líquido em IIA AMA 6;00 e NAT 5;00 à vista da experiência.



ANT 6;06

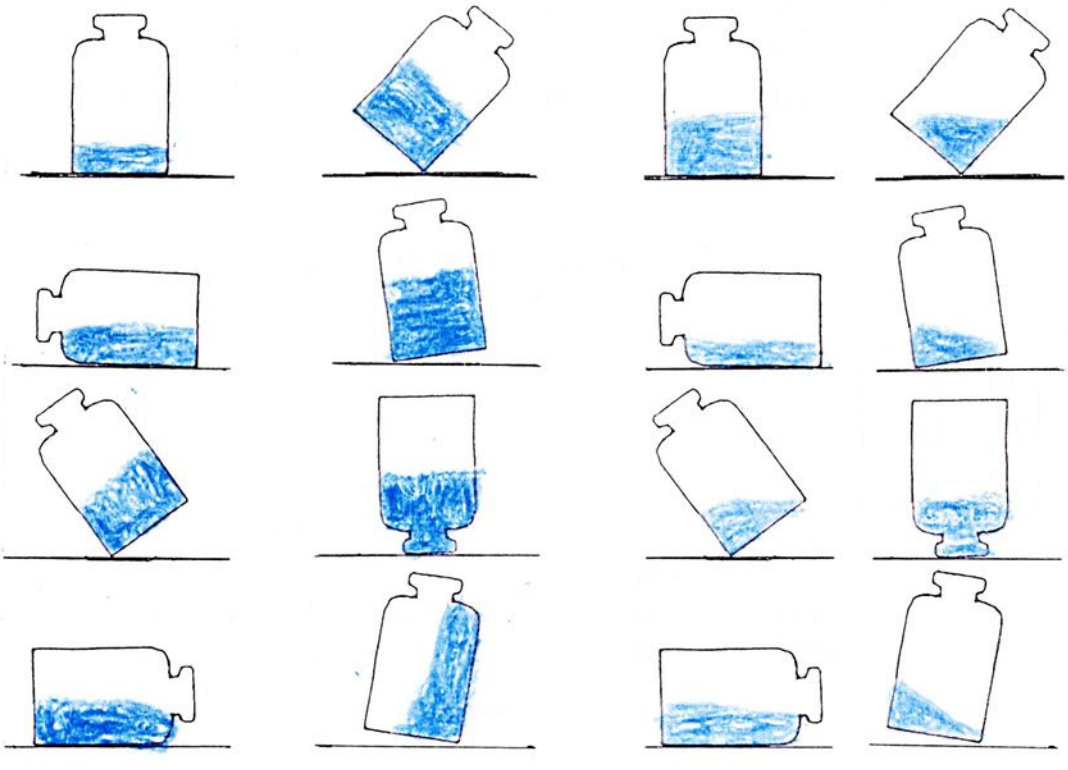


Figura 51 - Exemplo de representação do nível do líquido em IIB KAR 5;06 e III ANT 6;06 antecipador.

Tabela 7 - Classificação dos resultados obtidos com a horizontalidade dos líquidos. (número de crianças por fases)

Fase/Idades	2;06-4;00	4;00-5;06	5;06-7;00	Total %
IA	11	1	0	33
IB	1	4	0	14
IIA	0	5	6	31
IIB	0	2	3	14
IIIA	0	0	3	8
Total	12	12	12	

Tabela 8 - Fases de desenvolvimento da horizontalidade dos líquidos - distribuição das crianças nas faixas etárias (%).

Fases/Idade	2;06-4;00	4;00-5;06	5;06-7;00
IA	92	8	0
IB	20	80	0
IIA	0	45	55
IIB	0	40	60
IIIA	0	0	100

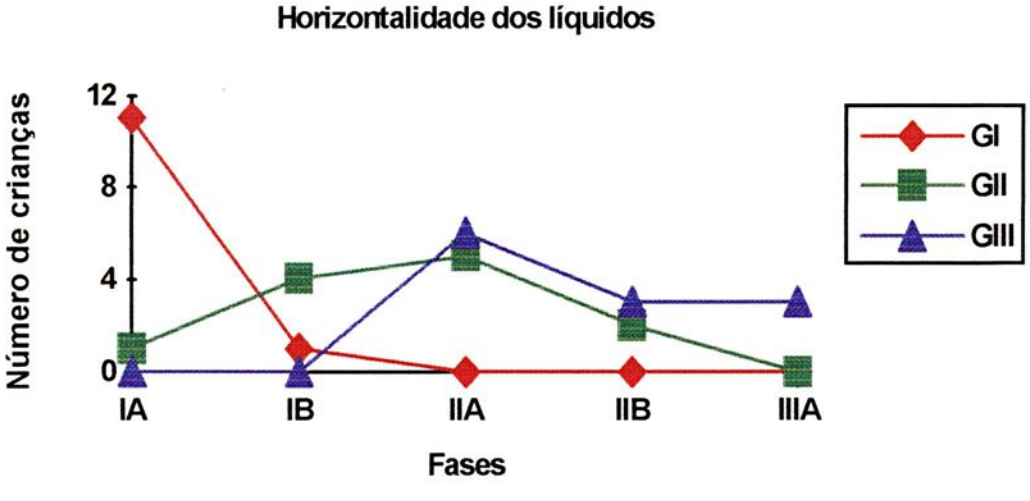


Figura 52 - Fases de desenvolvimento da horizontalidade dos líquidos.

Os dados levantados apresentam-nos uma realidade: das trinta e seis crianças entrevistadas nenhuma delas utiliza referenciais externos para marcar o nível do líquido operatoriamente, portanto não constituiu as relações euclidianas, fato que não nos causa espanto, pois já nas relações projetivas tal quadro estava delineado.

Podemos afirmar que: 8% das crianças encontram-se prestes a constituir as relações euclidianas (Subfase IIIA) e iniciaram a utilização de coordenadas exteriores intuitivamente. Todas as crianças que se encontram nesta subfase pertencem à faixa etária dos 5;06 a 7;00 anos.

Na fase II temos 45% do total das crianças pesquisadas, que estão distribuídas em: 14% na subfase IIB e 31% em IIA. A subfase IIB é caracterizada pelo conflito entre os dados da experiência e a hipótese da subfase IIA na qual a criança acredita que o nível da água é sempre paralelo ao fundo da garrafa. A Subfase IIB apresenta a seguinte distribuição: 60% das crianças na faixa etária de 5;06 a 7;00 , 40% de 4;00 a 5;06 anos e nenhuma criança de 2;06 a 4;00 anos. Na subfase IIA a distribuição mantém o mesmo quadro das faixas etárias, havendo uma pequena alteração nas proporções: 55% estão entre 5;06 a 7;00 anos, 45% entre 4;00 a 5;06 e nenhuma criança entre 2;06 a 4;00 anos.

Na fase I temos 47% do grupo pesquisado distribuído em: 14% da subfase IB e 33% da subfase IA. Na subfase IB 80% das crianças são pertencentes à faixa etária de 4;00 a 5;06, 20% de 2;06 a 4;00 anos e nenhuma criança de 5;06 a 7;00 anos. O mesmo ocorre na subfase IA com uma alteração nas proporções: 8% na faixa de 4;00 a 5;06 e 92% na faixa de 2;06 a 4;00 anos.

Os fatos são evidentes quanto ao caráter topológico do grupo pesquisado.

unesp

CONCLUSÃO

Ao término deste trabalho podemos afirmar que atingimos nosso objetivo principal: o de buscar quais as relações geométricas estão na gênese do espaço infantil.

Os dados levantados na pesquisa empírica apresentaram os seguintes resultados:

Na prova que avaliou o desenho da figura humana os resultados são bastante esclarecedores, pois não encontramos nenhuma criança no "realismo visual", ou seja, a forma de desenho que utiliza adequadamente as relações projetivas e euclidianas. Na fase do "realismo intelectual", composto por 31% de todas as crianças entrevistadas, encontramos 68% de pertencentes a maior faixa etária (5;06 a 7;00 anos), 32% pertence ao grupo da faixa etária intermediária (4;00 a 5;06), e nenhuma criança pertencente à faixa etária menor (2;06 a 4;00). Os desenhos classificados nesta fase apresentam as relações projetivas e euclidianas mas ainda de maneira muito confusa, o que pode ser constatado nos protocolos (rebatimentos, multiplicidade de pontos de vista, não utilização de eixos referenciais externos etc.).

Os desenhos classificados na fase do "realismo sintético" (57% do total de crianças entrevistadas), pelas suas características, foram divididos em duas subfases: girino e badameco. A subfase do badameco (31% do total de todas as crianças entrevistadas) apresentou uma distribuição, sem grandes variações no número de crianças, nas faixas etárias (36% de 5;06 a 7;00 anos, 42% de 4;00 a 5;06 e 22% de 2;06 a 4;00). O mesmo não podemos falar da subfase do girino (26% de todas as crianças entrevistadas), cuja distribuição nas faixas etárias aparece com um número pequeno de crianças da faixa de maior idade (8%), e um número próximo entre as crianças da faixa intermediária (42%) e as mais jovens (50%).

Os desenhos mais primitivos, ou seja, a fase da garatuja (12% de todas as crianças entrevistadas), que é representada por desenhos desprovidos de relações projetivas e euclidianas, mostrando somente as relações topológicas, apresentou, na sua totalidade (100%), crianças do grupo mais jovem.

Na prova do desenho das formas geométricas, os resultados avalizam os dados anteriores, os desenhos classificados na fase III

unesp

(21% de todas as crianças entrevistadas) são compostos na sua maioria (86%) por crianças da maior faixa etária e uma pequena parte (14%) das crianças da faixa intermediária, não sendo encontrada nenhuma criança do grupo mais jovem. As relações euclidianas estão presentes e as cópias das formas geométricas são bem precisas.

Na fase II (43% de todas as crianças entrevistadas), as relações euclidianas já não são tão precisas. Esta fase foi subdividida em IIA e IIB, sendo que na subfase IIB (24% de todas as crianças entrevistadas) a faixa etária predominante é a das criança da maior faixa etária (63%), seguidas pelas criança da faixa etária intermediária (29%) e um número reduzido (8%) de crianças da menor faixa etária. Na subfase IIA (19% de todas as crianças entrevistadas), há o predomínio total das criança da faixa etária intermediária (100%), não sendo encontrada nenhuma criança das outra faixas etárias.

Na fase I (30% de todas as crianças entrevistadas), os desenhos mostram as dificuldades em retratar as formas euclidianas mas apresentam precisão nas formas topológicas. Esta fase foi subdividida em IIA e IIB. Em IIB (16% de todas as crianças entrevistadas), encontram-se poucas crianças do grupo de maior faixa etária (6%), um número maior da faixa intermediária (32%) e um número bem maior das criança mais jovens (62%). A subfase IA (14% de todas as crianças entrevistadas) é esclarecedora pois apresenta a totalidade de crianças de menor faixa etária (100%) e o mesmo ocorrendo com a fase 0 (6% de todas as crianças entrevistadas). É necessário ressaltar que esta fase apresenta desenhos somente com relações topológicas.

Na prova da construção da reta projetiva pela conduta de mirar, na qual a criança deve posicionar todos os palitos retilineamente entre dois pontos referenciais, utilizando-se da conduta de mirar (visão monocular), classificado como fase III, não encontramos nenhuma crianças que utilizasse a mirada operatoriamente.

A fase II (55% de todas as crianças entrevistadas) foi subdividida em subfase IIA e IIB. Na subfase IIB, que mais se aproximou dos objetivos propostos (14% das crianças entrevistadas), as crianças constróem a reta projetiva sem ainda utilizarem a conduta de mirar sistematicamente nos dois extremos. Portanto, não utilizam o procedimento de mirada operatoriamente. Esta subfase é composta pelas crianças de maior faixa etária (80%) e pelas crianças da faixa etária intermediária (20%).

A subfase IIA, na qual as crianças constróem a reta projetiva em situações em que a borda da mesa seja paralela à reta a ser construída

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18

ou no meio da mesa redonda (situações nas quais a mesa serve como um modelo a ser copiado ou que não se opõe à construção), é composta por crianças da maior faixa etária (64%) e crianças da faixa etária intermediária (36%). Podemos comprovar que houve uma alteração na distribuição do número de crianças, mas com a predominância de crianças da maior faixa etária e nenhuma da menor faixa etária.

A fase I (55% de todas as crianças entrevistadas), na qual as relações topológicas são as utilizadas, foi subdividida em IA e IB. Na subfase IB (22% de todas as crianças entrevistadas), a distribuição apresenta a maioria pertencente à faixa intermediária (75%) e números iguais das crianças de maior e menor faixa etária (12,5%). Na subfase IA (33% de todas as crianças entrevistadas), o quadro é alterado e a maioria é de crianças da menor faixa etária (92%) e algumas crianças que pertencem à faixa intermediária (8%).

Na prova da horizontalidade dos líquidos, o mesmo fato pode ser observado. As crianças mais evoluídas na representação do nível dos líquidos, mas ainda intuitivamente, classificadas na subfase IIIA (8% de todas as crianças entrevistadas), pertencem ao grupo de maior faixa etária (100%).

Na fase II (45% do total de crianças entrevistadas), as crianças principiam a representação do nível da superfície do líquido, portanto as relações euclidianas, mas ainda de forma distorcida. Esta fase está subdividida em IIA e IIB. Em IIB (14% de todas as crianças entrevistadas), encontramos crianças que pertencem à faixa etária intermediária (40%) e a maior faixa etária (60%). O mesmo fato se repete em IIA com uma pequena alteração na distribuição das faixas etária (45% do grupo intermediário e 55% do grupo de maior faixa etária). É interessante notar que na fase III e II não encontramos nenhuma criança de menor faixa etária.

Na fase I (47% do total de crianças entrevistadas), há uma mudança no quadro até então apresentado. As relações utilizadas são unicamente topológicas e, no que se refere às faixas etárias, em IB encontramos a maioria de crianças da faixa intermediária (80%) e o restante da menor faixa etária (20%). Em IA, o quadro se torna mais delineado com um número expressivo das crianças de menor faixa etária (92%) e um pequeno número das crianças da faixa intermediária (8%).

Analisando esses dados, podemos afirmar que as relações topológicas são as primeiras a serem utilizadas pelo grupo de crianças

pesquisadas e as únicas utilizadas pelo grupo mais jovem (2;06 a 4;00 anos). As relações projetivas e euclidianas começam a aparecer nas representações (desenho, gestual, nas explicações, na construção da reta e na horizontalidade dos líquidos) do grupo intermediário mas muito discretamente para firmar-se nas representações, na construção da reta projetiva e na horizontalidade dos líquidos pelas crianças de maior faixa etária, mas ainda de forma intuitiva, devido à falta das operações.

A partir destes dados podemos concluir que:

- Primeiro, o resultados encontrados no estudo das crianças da cidade de Bauru (1997), mesmo com a diversidade cultural daquelas estudadas por Piaget, apresentaram grande proximidade com os dados apresentados na obra *"La representation de l'espace chez l'enfant"* (1948).
- Segundo, a geometria infantil contraria a ordem apresentada pela Ciência Geométrica, pois podemos constatar, com os nossos estudos, que as relações utilizadas pelas crianças são inicialmente topológicas seguidas das projetivas e euclidianas. Já a Ciência Geométrica apresenta a geometria euclidiana como sendo a primeira, seguidas muitos séculos depois pela projetiva e, alguns séculos após, pela topológica.
- Terceiro, a construção do espaço infantil não é mera repetição de fatos ou associação consecutiva de imagens, nem tampouco encontra-se pronto em estruturas pré-formadas, como respectivamente tentaram explicar os empiristas e aprioristas, mas, é fruto de um longo e laborioso trabalho da inteligência, que tem início nas ações do recém-nascido (esquemas sensório-motores), que irá ser ***reconstruído*** no plano da representação, passando por um período intuitivo necessário e preparatório de reconstrução do que foi realizado no sensório-motor, e que irá concretizar-se com as operações.

"Entretanto, o processo de interiorização ou conceptualização não é simples para a criança. Para Piaget, seria muito mais simples admitir que a interiorização das ações consistisse em refazer o percurso ou em imaginar por meio de símbolos ou de signos os objetos e acontecimentos, sem os modificar ou enriquecer. Em realidade, essa interiorização é a transformação dos esquemas sensório-motores em noções propriamente ditas, daí ser ela uma verdadeira conceptualização. Com efeito, como o esquema não constitui o objeto de pensamento, pois ele é a estrutura interna das ações sensório-motoras, senão o conceito, este sim manipulado pela representação e pela linguagem, segue-se que a internalização

das ações pressupõe uma ***reconstrução*** *num plano superior, em conseqüência, a elaboração de uma série de novidades irredutíveis aos instrumentos do plano inferior."* (MONTOYA, 1996, p:40)

Vamos discorrer sobre a primeira conclusão. No decorrer deste trabalho nos baseamos nos estudos de Piaget (1948) e repetimos algumas das provas por ele empregadas, com o objetivo justamente de analisar as fases do desenvolvimento com suas características e as faixas etárias em crianças de uma cultura diferente, mas até que os dados fossem totalmente analisados esperávamos encontrar variações, tanto nas faixas etárias quanto nas características das fases de desenvolvimento. Após a análise da pesquisa teórica (Capítulo II.2) e análise dos dados da pesquisa empírica (Capítulo IV), qualquer dúvida está descartada. As semelhanças são bastante evidentes e não necessitam de argumentos complementares, somente os dados apresentados são suficientes. Independente das diversidades culturais, nossas crianças apresentaram o mesmo desenvolvimento das crianças genebrinas.

BZUNENECK (1977) realizou um levantamento sobre as pesquisas pós-piagetianas referentes ao conceito de espaço, mas nenhuma delas é referente às crianças latino-americanas nem tampouco às crianças brasileiras. Neste artigo ele faz um longo percurso buscando testar as conclusões originais de Piaget e Inhelder, no qual apresenta as críticas de diversos pesquisadores (Lovell, Peel, Dodwell e outros), que apontam as possíveis lacunas na metodologia, na falta de maiores detalhes sobre as circunstâncias da aplicação das provas, número de crianças, ou mesmo a dificuldade em classificar os resultados obtidos.

O importante deste trabalho é que, apesar das críticas recebidas por Piaget, a conclusão lhe é favorável pois:

"Smedslund (1963), Shantz e Smock (1968), Ford (1970), Shantz (19970), Shantz e Watson (1971), Mottram e Faulds (1973) concluem igualmente a favor das estruturas e não desmentem, em linha gerais, os postulados de pré-requisitos sugeridos por Piaget e Inhelder". (BZUNENECK, 1977, p:14)

No que se refere à segunda e terceira conclusões, a inversão na ordem da geometria infantil (Capítulo II) e a Ciência Geométrica (Capítulo I) e a construção do espaço como um processo operatório, é necessário apresentar um breve histórico do desenvolvimento destas

duas geometrias, e na história da geometria infantil vislumbraremos por que este é um processo operatório. Assim, começaremos pela Ciência Geométrica, para depois passarmos à geometria infantil.

A Ciência geométrica tem início no interior do pensamento filosófico que surge com a civilização e cultura grega, na qual o homem passa a indagar não somente *"como"* mas o *"por quê"* das coisas, mas, para isso, os conhecimentos práticos e empíricos anteriores tornam-se insuficientes. Na matemática, estes *"porquês"* repercutem na geometria e requerem muito mais do que os processos empíricos. Requerem uma geometria dedutiva, abstrata e desvinculada de qualquer aplicação prática.

O período marcado pelo pensamento dedutivo na matemática tem como precursor Tales de Mileto (600 a. C.) a quem são atribuídas as primeiras descobertas da geometria dedutiva (EVES, 1995, p:95), mas coube a Euclides (300 a. C.) montar *"uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo, de maneira clara e harmoniosa, geometria plana e espacial, teoria de números e álgebra geométrica grega"* (EVES, 1992, p:9).

As descobertas geométricas deste período só iriam ser comparadas com a revolução causada pelas idéias renascentistas no século XV, vieram a repercutir na revolução na representação do espaço tridimensional para o espaço plano ou bidimensional.

Historicamente a geometria projetiva sucede a geometria euclidiana, que surge da necessidade de produzir obras mais realistas e fiéis e que retratem melhor o espírito do Renascimento. As primeiras tentativas ocorreram em Florença no século XV, o que levou a produzir leis formais que pudessem reger a representação de objetos e pessoas sobre uma tela. A teoria projetiva teve sua ampliação no século XVII por um grupo de estudiosos franceses motivados por Gérard Desargues.

A topologia, ramo mais novo da geometria, surgiu no segundo quartel do século XX, mas, devido a sua importância, é considerada atualmente como parte fundamental da matemática, podendo ser considerada *"como o estudo matemático da continuidade"* (EVES, 1992, p:22)

A geometria infantil repete os feitos da Ciência Geométrica?

Ao nascer, o bebê possui alguns reflexos (pupilar e palpebral especialmente em relação ao espaço) que lhe possibilitam organizar o mundo ao seu redor de forma prática, na ação em curso, por seus movimentos e pela sua percepção. A geometria deste período inicial (1ª

unesp

e 2ª fase) é essencialmente topológica e as relações utilizadas pelo bebê são muito primitivas, estando relacionadas com a vizinhança e proximidade, separação, circunscrição e continuidade, mas estas relações não levam à constância de formas e de grandezas. As figuras percebidas são estruturas elásticas e deformáveis e não estão inseridas em relação de conjunto com outros objetos.

A coordenação visão e preensão (3ª e 4ª fase) altera o espaço prático e heterogêneo anterior. A possibilidade de ver o que é pego ou pegar o que é visto, torna o espaço infantil mais rico onde os objetos começam a ter forma e tamanho definidos (relações projetivas e euclidianas). Segundo Piaget, é neste período que:

"os movimentos do sujeito e os do objeto começam a diferenciar-se, dando um início de reversibilidade nos deslocamentos e de procura do objeto desaparecido. É em função desse agrupamento de movimentos e dessa permanência atribuída ao objeto que ele adquire dimensões constantes e que a grandeza é avaliada mais ou menos corretamente em suas diferentes posições, próximas ou afastadas." (PIAGET, 1993,p:26)

Este período mostra os progressos relativos à forma e às dimensões dos objetos e o início das relações projetivas e euclidianas. As próximas fases apresentam as condutas dirigidas e de experimentação ativa ou tateante (5ª fase) que possibilitam ao bebê estabelecer as relações espaciais dos objetos entre si, mas ainda sem considerar os deslocamentos que ocorrem fora do seu campo visual, o que ocorrerá na próxima fase.

Os progressos que se seguem dos "atos completos de inteligência prática por coordenação interna das relações" (6ª fase) vão possibilitar "a representação das relações espaciais entre as coisas e a representação dos deslocamentos do próprio corpo". Doravante, o bebê está inserido no espaço como um corpo entre os demais, posicionado em relações recíprocas e é neste ponto que o espaço passa de perceptivo a representativo, no qual as relações projetivas e euclidianas estão constituídas do ponto de vista prático.

O espaço representativo ou simbólico vai ampliar e coordenar as conquistas da inteligência sensório-motora, com a reorganização sobre um plano novo e mais complexo. As relações adquiridas no plano prático da inteligência que visam ao êxito vão progredir no sentido de conquistar a verdade. Para que isso ocorra será necessário a elaboração de um sistema de relações de conjunto que permita relações espaciais

unesp

reversíveis com início, como no período sensório-motor, pelas relações mais simples que são as de vizinhança, para depois construírem as demais relações que só serão estabelecidas após um longo período até que as operações possibilitem a representação do mundo objetivo.

"A vizinhança como tal não é construída, mas dada desde as intuições iniciais e serve de ponto de partida para o espaço operatório." (PIAGET, 1993, p:482)

O grupo de crianças pesquisadas apresentou um conhecimento das relações espaço-geométricas que não atingiu as relações projetivas e euclidianas por falta das operações constitutivas do espaço.

A análise dos dados coletados (Capítulo IV) aponta para o fato de que as relações projetivas não atingiram a sua plenitude (utilizamos a construção da reta projetiva). As crianças não conseguiram generalizar a conduta de mirada que expressa a necessidade de realizar deslocamentos espaciais operatórios. Elas conseguiam, na ação prática, atingir o objetivo da prova, mas as explicações se resumiam a pontos de vista particulares característicos do pensamento intuitivo, pouco reversível e restrito a situações particulares.

A construção da reta projetiva requer deslocamento recíprocos podendo ser a criança a deslocar-se para ficar em uma posição mais adequada que a possibilite colocar os palitos na mesma reta ou deslocar os palitos uns em relação aos outros, fatos que sem as operações ocorrem por tateios sucessivos, dificilmente chegando a retidão almejada.

Quanto às relações euclidianas, que foram estudadas pela horizontalidade dos líquidos e a utilização de eixos exteriores, os dados confirmam as provas anteriormente realizadas. As previsões do nível do líquido, quando a garrafa com o líquido é inclinada, é confusa. Falta, às crianças, esquemas assimilatórios para a leitura dos dados apresentados à vista da experiência. Somente 8% das crianças pesquisadas atingiram um nível muito próximo às operações, mas ainda faltava-lhes generalizar a descoberta da horizontalidade dos líquidos.

Nosso interesse neste estudo está em apresentar que a geometria infantil é inicialmente topológica e, que para que o espaço se constitua na sua objetividade, necessita das relações projetivas e euclidianas, mas estas requerem uma construção bem mais elaborada, onde a inteligência é necessária.

Se acompanharmos a evolução do desenho do quadrado no grupo pesquisado, podemos observar que, a partir da indiferenciação

unesp

total dos traços (garatuja), o quadrado passa a ser desenhado como uma curva fechada, que pode evoluir à curva com filamentos que representariam os ângulos, mas estes desenhos estão restritos às relações topológicas, que são as únicas ainda empregadas. Estes desenhos mostram a diferenciação entre formas fechadas e abertas, mas ainda não há a diferenciação entre linhas retas e curvas entre as proporções de lados, o que podemos confirmar com a indiferenciação entre retângulo e quadrado. Após esta confusão inicial, a criança passa a diferenciar figuras curvilíneas e retilíneas. O quadrado é diferenciado do círculo, mas ainda não há diferenciação entre quadrado e triângulo. A criança desconhece os ângulos e negligencia as dimensões. A próxima conquista será a diferenciação entre o triângulo, quadrado e retângulo.

Esta diferenciação contínua mostra como ocorre a construção das relações geométricas, na qual cada nova conquista depende dos esquemas anteriores, que vão constituir-se por diferenciação e novas coordenações.

Para que estas diferenciações e novas coordenações ocorram é necessário que a criança realize pesquisas exploratórias prévias. Será na pesquisa que a criança, assim como o homem de ciência, terá a possibilidade do progresso do pensamento. Se no início as ações são muito limitadas, como podemos comprovar nas provas de percepção estereognóstica (Capítulo II.2.1), a criança por falta de um método exploratório não consegue identificar visualmente e apontar um objeto duplicata ao que tem em suas mãos (quando o que tem em mãos está oculto por um anteparo), pois só a percepção tátil sem coordenação de ações não possibilita a identificação da igualdade. Isto só será possível quando a pesquisa se tornar dirigida pela atividade perceptiva, devido a um sistema de coordenação sensório-motriz que permitirá tal descoberta, para se concretizar com as operações.

As operações constitutivas do espaço são denominadas operações infralógicas, paralelas às operações lógico-aritméticas baseadas em objetos individuais ou discretos em diferenças e semelhanças dos entes pertencentes a essa classe de objetos. As operações infralógicas, por outro lado, são diretamente ligadas ao espaço e ao tempo e requerem os objetos colocados em espaços contínuos e únicos, por isso, estão confinadas ao espaço e ao tempo:

"Piaget distingue las operaciones lógico-aritméticas, que se refieren a una coletion de objetos y establecen entre estos objetos vínculos de clases, de

relaciones o de números, independientemente de sus posiciones espaciotemporales, y las operaciones infralógicas o espaciotemporales, que consisten en vincular entre sí las diferentes partes de un objeto único, es decir, en construir el objeto propiamente dicho." (BANG, 1971, p:171)

Tendo apresentado a evolução da Geometria Científica e da geometria infantil, podemos afirmar que o paradoxo entre elas existe e também ocorre no "ensino" da geometria, no tratamento dado à geometria escolar, pois a escola desconhece a gênese das relações geométricas, e considera a Ciência Geométrica como sendo um guia para o aprendizado.

Se a história da geometria nos apresenta uma geometria dedutiva, abstrata e euclidiana, para chegar a este ponto de abstração, houve necessariamente uma fase intuitiva de conhecimentos muito simples que versavam sobre necessidades momentâneas de proximidades, vizinhanças, separações, ordem etc. É justamente esta fase, a topológica de relações menos complexas, que a escola deixa de lado e parte já no princípio com conhecimentos convencionais[79], como por exemplo das formas geométricas bidimensionais (retângulo, triângulo, círculo, quadrado etc.), formas geométricas tridimensionais (cubo, esfera, cone etc.), ponto, reta e planos, acreditando que são passíveis de conhecer por meio de um aprendizado por transmissão. É neste ponto que a geometria escolar peca e adota a Ciência Geométrica como um método a ser seguido.

A geometria não se ensina, ela é construída pela criança que organiza suas experiências, e que atribui significado (assimila) às formas e às grandezas e na qual ela se insere como um corpo entre outros em deslocamentos recíprocos.

A criança em idade escolar (de educação infantil e séries iniciais do 1° Grau), de posse da representação, tem a possibilidade de expressar seu pensamento, de ser solicitada a realizar trocas simbólicas, a contar como são os lugares, os objetos, as pessoas, de representá-las por imagens, por desenhos ou gestos. Isto é o que a escola perde ao optar pela geometria da dedução. É justamente pela topológica que a escola deveria começar a construção geométrica.

---

[79] Convencionais no sentido de serem estabelecidos por uma pessoa ou um grupo de pessoas, no caso a definição de ponto sem dimensão, mas representado como sendo um pingo de tinta no papel. *"Un punto es lo que no tiene partes."*, definição dada por Euclides (BANG, 1971, p:65).

unesp

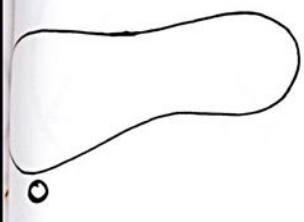
ANEXOS

Anexo A - Modelos de figuras geométricas a serem copiadas pelas crianças (21 modelos).

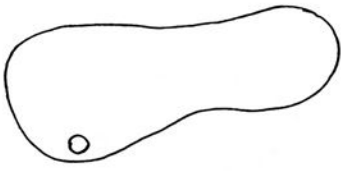
Anexo B - Folha para as crianças marcarem o nível do líquido (previsão do nível do líquido e à vista da experiência) - garrafa de bordas paralelas e redonda.

Anexo C - Folha de avaliação das provas de horizontalidade dos líquidos.

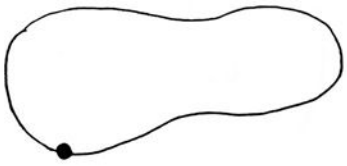
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18



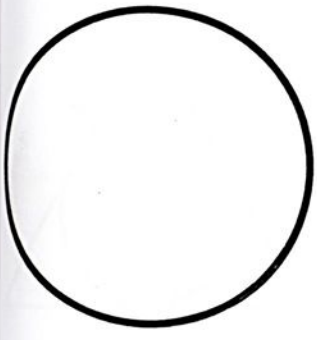
1



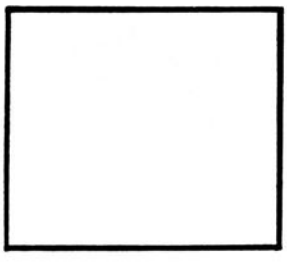
2



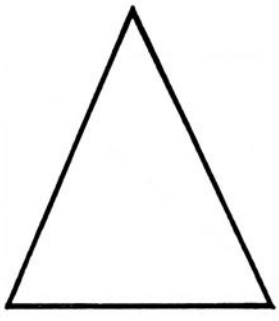
3



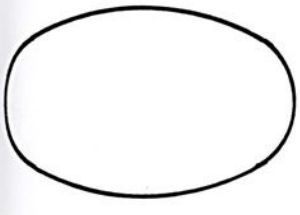
4



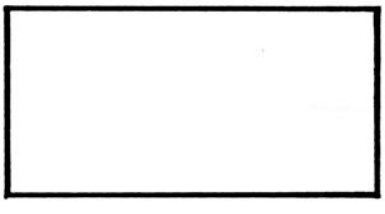
5



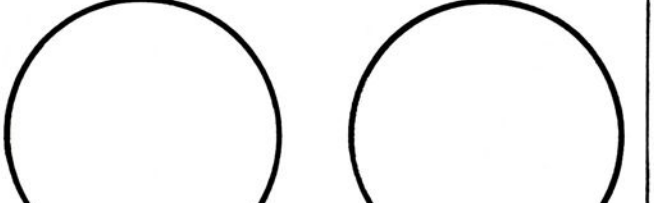
6



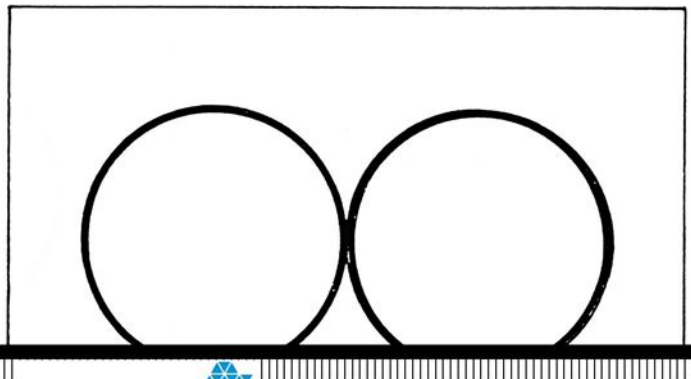
7



8

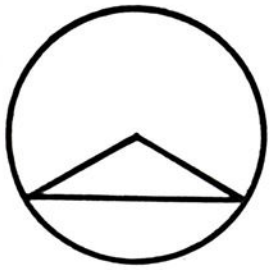


9 9

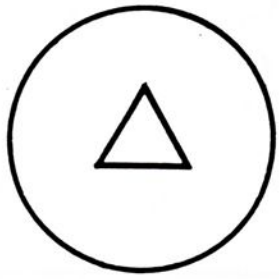




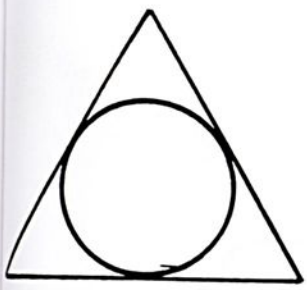
12



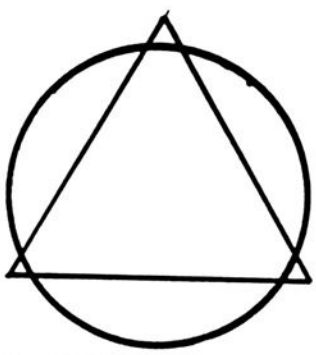
13



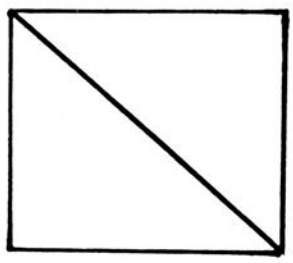
14



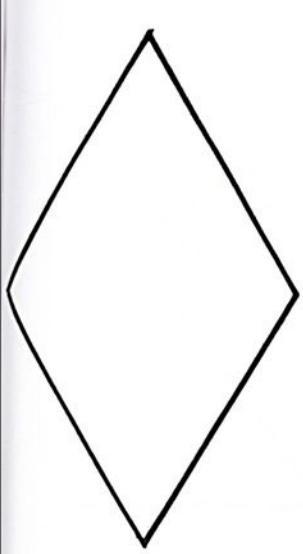
15



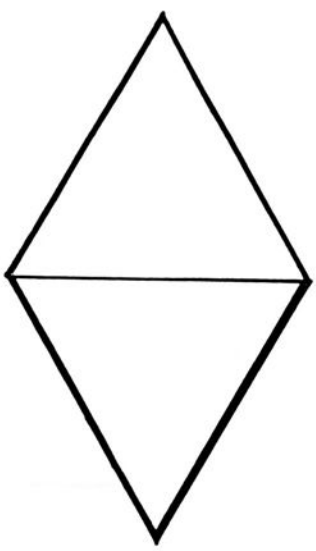
16



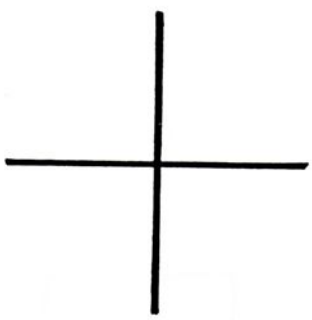
17



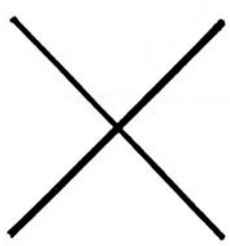
18



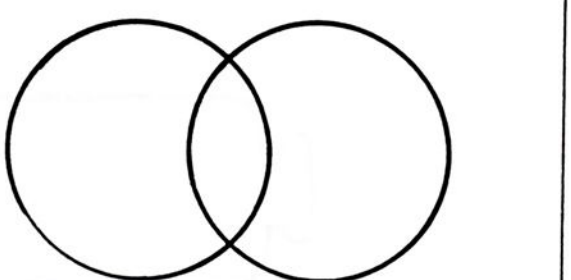
19



20

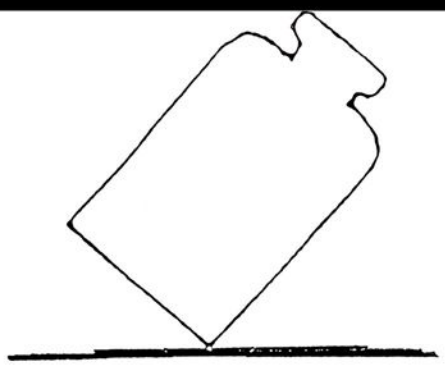


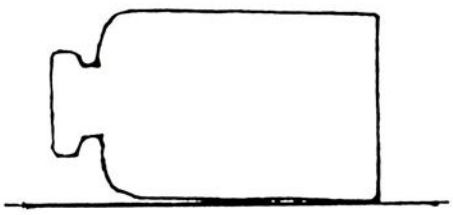
21



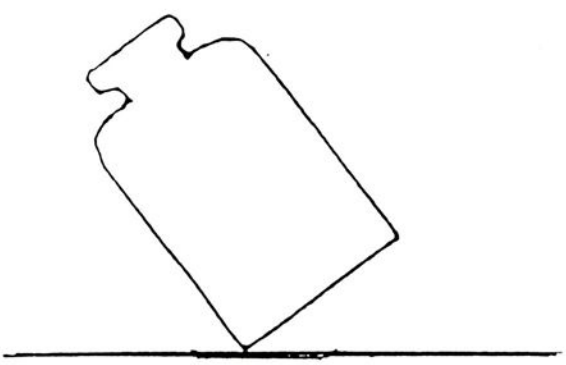
11

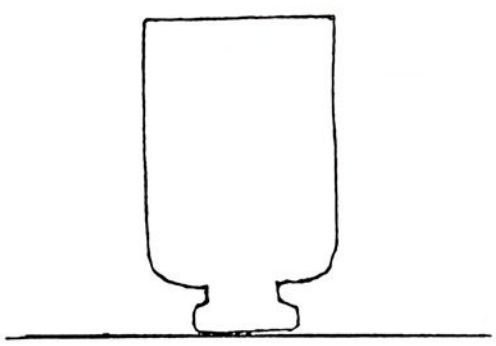


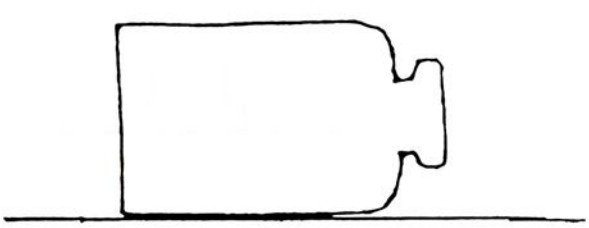






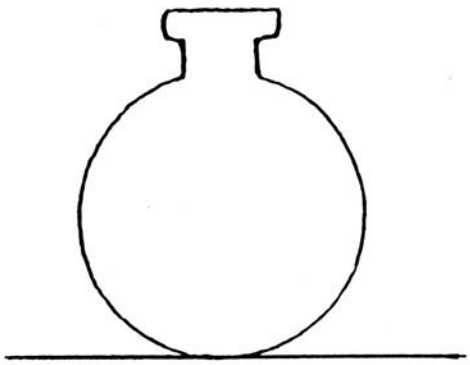


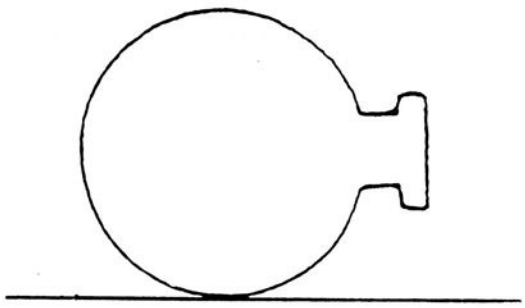


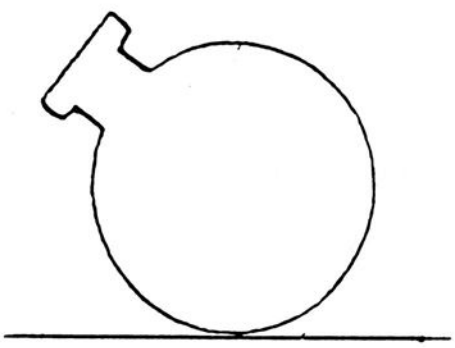


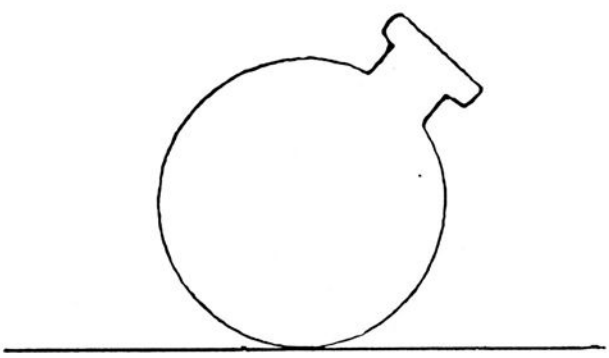


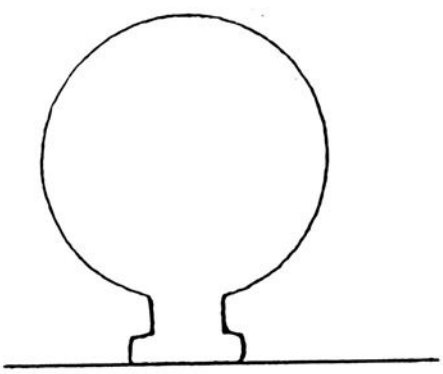
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

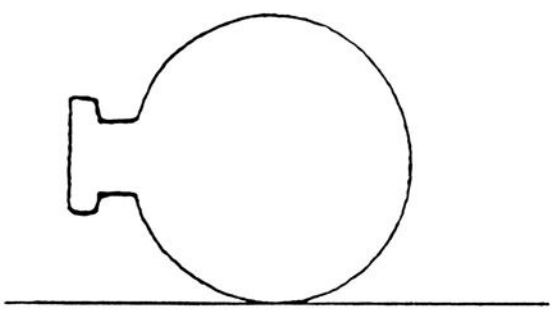












cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

IA IB IIA IIB III

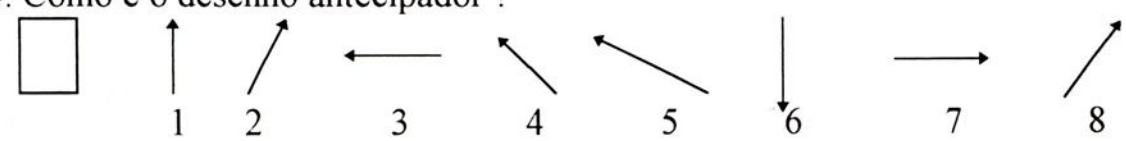
Nome: Idade: , Grupo : I, II, III
Data:

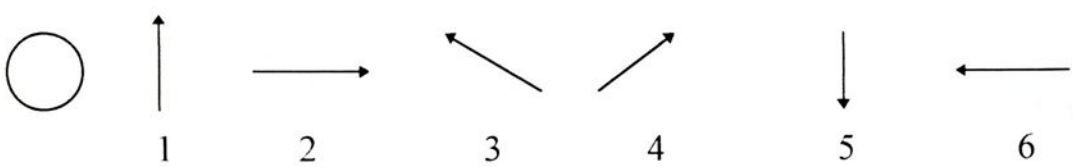
Critérios para classificação:
1. Como representa o nível da água com a mão ?

2. Se eu mexo a garrafa o que acontece com a água (previsão)?

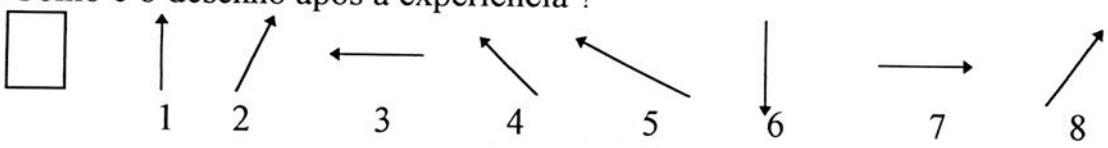
3. Se eu mexo a garrafa o que acontece com a água (após a experiência)?

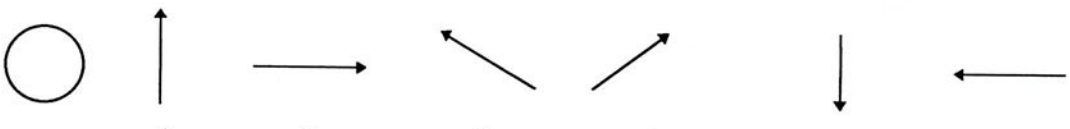
4. Como é o desenho antecipador ?



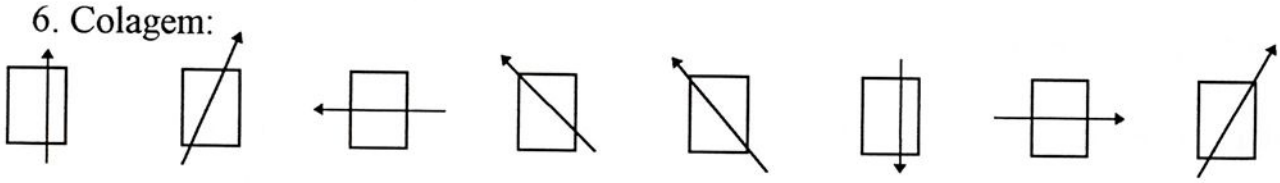


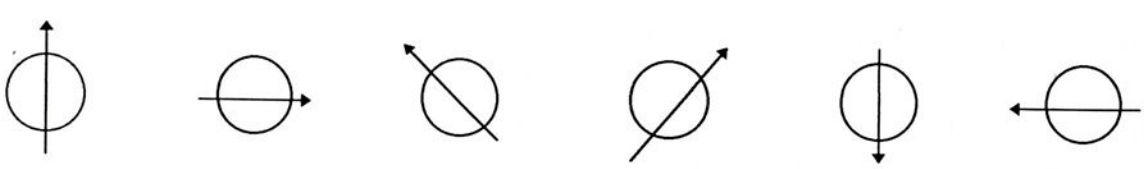
5. Como é o desenho após a experiência ?





6. Colagem:





cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AEBLI, Hans. *Didática psicológica.* Aplicação à didática da psicologia de Jean Piaget. São Paulo: Editora nacional, 1974.

ARAÚJO, M. A. S. Porque ensinar Geometria nas séries iniciais de 1o Grau". *A Educação Matemática em revista*, Soc. Brasileira de Ed. Matemática (SEBEM), ano II, n. 3, p:12-16, 1994.

BANG, V. et al. *La epistemologia del espacio.* Dirección de Jean Piaget. Buenos Aires: El Ateneo, 1975.

BARKER, S. *Filosofia da Matemática.* Rio de Janeiro: Zahar, 1969. Trad. Leónidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota

BERGAMINI, D. *As Matemáticas.* Rio de Janeiro: José Olympio, 1969. Biblioteca Científica Life.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Bücher/UNESP, 1974. trad. Elza F. Gomide.

BZUNECK, José Aloyseo. Pesquisas pós-piagetianas sobre o desenvolvimento do espaço. *Boletim de Psicologia.* 1977-XXIX-72-73, p.5-15

DIENES, Z. P., GOLDING E. W. *Topologia, Geometria Projetiva e Afim.* São Paulo: Herder, 1971

DIENES, Z. P., GOLDING E. W. *Grupos e coordenadas.* São Paulo: EPU, 1975

DIENES, Z. P., GOLDING E. W. *Geometria euclidiana.* São Paulo: Herder, 1971

DOLLE, J. *Para compreender Piaget.* Rio de Janeiro: Guanabara Koogan S.A., 1991.

ERNST, B. *The magic mirrow of M. C. Escher.* New York: Ballantines Book, 1976.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática.* Campinas: UNICAMP, 1995. Trad. Hygino H. Domingues.

EVES, H. *Geometria.* São Paulo: Atual, 1992. Trad. Hygino H. Domingues.

GÁLVEZ, G. A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In: PARRA, C., SAIZ, I (et al.). *Didática da Matemática. Reflexões psicopedagógicas.* Porto Alegra: Artes Médicas, 1996. p.236-258.

GLEISER. Marcelo. *A Dança do Universo.* Dos mitos da criação ao Big Bang. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

unesp

GOODNOW, J. *Desenho de criança.* Lisboa: Edições Salamandra, (sem data)

HAWKING, S. W. *Uma breve história do tempo do Bing bang aos buracos negros.* Rio de Janeiro: Rocco, 1988.

HUME, D. *Investigação sobre o entendimento humano.* São Paulo: Abril Cultural, 1984.

KANT, I. *Crítica da razão pura.* São Paulo: Nova Cultural, 1987.

LACEY, H. M. *A linguagem do espaço e do tempo.* São Paulo: Perspectiva, 1972

LEBRUN, G. *Sobre Kant.* São Paulo: Editora Universidade de São Paulo: Iluminuras, 1993.

LOVELL, Kurt. *O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

KESSERLRING, T. *Jean Piaget.* Petrópolis: Vozes, 1993.

MÈREDIEU, F. *O desenho infantil.* São Paulo: Cultrix, 1974.

MONTOYA, A. O. D. **De que modo o meio social influi no desenvolvimento cognitivo da criança marginalizada? Busca de uma explicação através da concepção epsitemológica de Jean Piaget.** São Paulo, Dissertação (Mestrado em psicologia) - Instituto de Psicologia - Instituto de psicologia, Universidade de São Paulo. 1983.

MONTOYA, A. O. D., **Da possibilidade de intervenção visando à reconstrução da capacidade representativa de crianças marginalizadas: Um estudo de epistemologia genética.** São Paulo, Tese (Doutorado em psicologia escolar) - Instituto de Psicologia - Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo. 1988.

MONTOYA, A. O. D., A criança marginalizada e a reconstrução do real. *Educação e Realidade.* (Porto Alegre). n.19. 1994.

MONTOYA, A. O. D., Sobre as raízes do pensamento e da linguagem: Piaget e Vygotsky. *Cadernos de Pesquisa.* (São Paulo).n.92. 1995.

MONTOYA, A. O. D., *Piaget e a criança favelada.* Rio de Janeiro: Vozes, 1996.

NEWTON, I. *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.* São Paulo: Nova Cultural, 1996.

NORMAS para publicações da UNESP. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1994.

NOVA enciclopédia ilustrada da folha. São Paulo: Folha de São Paulo, 1996.

PIAGET, J. *O nascimento da inteligência na criança.* Rio de Janeiro: Zahar, 1975a.



PIAGET, J. *A construção do real.* Rio de Janeiro: Zahar, 1975b.
PIAGET, J. *Psicologia e epistemologia.*. Por uma teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Forense, 1973.
PIAGET, J. *Psicologia da inteligência.* Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1958.
PIAGET, J., INHELDER, B. *A psicologia da criança.* São Paulo: Bertrand Brasil, 1994.
PIAGET, J., INHELDER B. *O desenvolvimento das quantidades físicas na criança.* Rio de Janeiro: Zahar, 1975.
PIAGET, J., INHERLDER, B., SZEMINSKA, A. *La géometrie spontanée de l'enfant.* Paris: Presse Universitaires de France, 1948.
PIAGET, J., INHELDER, B. *La representation de l'espace chez l'enfant.* Paris: Presse Universitaires de France, 1948.
PIAGET, J., INHERLDER, B. *A representação do espaço na criança.* Artes Médicas: Porto Alegre, 1993.
PIAGET, J. *A formação do símbolo na criança, imitação, jogo e sonho, imagem mental e representação.* Rio de Janeiro: LTC, 1990.
PIAGET, J. *A noção de tempo na criança.* Rio de Janeiro: Record, 1946.
PIAGET, J. *Epistemologia genética.* São Paulo: Martins Fontes, 1990.
PIAGET, J. *Seis estudos.* Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1997.
PIAGET, J. *As formas elementares de dialética.*São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996.
PIETTRE, B. *Filosofia e ciência do tempo.* Bauru: EDUSC, 1997.
POINCARÉ, H. *La valeur de la science.* Paris: Flammarion, 1948
POINCARÉ, H. *La science et la hypothèse.* Paris: Flammarion, 1906.
RAY, C. *Tempo, espaço e filosofia.* Campinas: Papirus, 1991.
RONAN, C. A. *História ilustrada da ciência.* Rio de Janeiro: Zahar, 1994. 4v.
STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas.* Lisboa: Gradiva, 1989.
THUILLIER, P. *De Arquimedes a Einstein*: a face oculta da invenção científica. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1994.