



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

SOBRE A DINÂMICA DE ROTAÇÃO DE UM PLANETA ATRAVÉS DE UM SISTEMA
MÉDIO

Leonardo Di Schiavi Trotta

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Rio Claro (SP)

2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

LEONARDO DI SCHIAVI TROTTA

SOBRE A DINÂMICA DE ROTAÇÃO DE UM PLANETA
ATRAVÉS DE UM SISTEMA MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel.

Rio Claro - SP
2013

520 Trotta, Leonardo Di Schiavi
T858s Sobre a dinâmica de rotação de um planeta através de um sistema médio / Leonardo Di Schiavi Trotta. - Rio Claro, 2013
33 f. : il., figs., gráfs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Tadashi Yokoyama

1. Astronomia. 2. Plutão. 3. Satélites. 4. Planetas. 5. Movimento rotacional. I. Título.

LEONARDO DI SCHIAVI TROTTA

SOBRE A DINÂMICA DE ROTAÇÃO DE UM PLANETA
ATRAVÉS DE UM SISTEMA MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel.

Comissão Examinadora

Tadashi Yokoyama (orientador)

Makoto Yoshida

Edson José Vasques

Rio Claro, 21 de Novembro de 2013.

Assinatura do(a) aluno(a) Leonardo Di Schiavi Trotta assinatura do(a)
orientador(a)



DEDICATÓRIA

À memória de meu pai Carlo Trotta, pelo amor incondicional e pela dedicação integral de sua vida à coisa mais importante que existia para ele, sua família.

AGRADECIMENTOS

À Tadashi Yokoyama, pela sua orientação e atenciosidade em todos esses meses de trabalho.

À minha namorada Larissa Berloff Belardin, por todo o apoio que tem me dado em todos os momentos nestes anos.

À minha mãe Sandra Di Schiavi Trotta, pela força e determinação diante de todas as dificuldades.

Aos meus avós, maternos e paternos, Giuseppa Pulcini Schiavi, Tommaso Di Schiavi, Serafino Trotta e Maria Del Padre Trotta pelo exemplo de luta, amor e união familiar.

Aos meus irmãos Stefano Di Schiavi Trotta e Giancarlo Di Schiavi Trotta, pela amizade e união.

Aos meus amigos da república Fábio Lourenço Alberguini, André Freitas Oliveira, Bruno Zucherato, João Guilherme Braga e também aos demais amigos, pelos bons momentos de descontração.

Aos professores do Departamento de Física, do DEMAC e do Departamento de Matemática, por terem contribuído com esta etapa da minha vida.

À agência de fomento CNPq pelo auxílio financeiro (Proc.152862/2012-9) em forma de bolsa de iniciação científica.

EPÍGRAFE

*"If you think we can't change the world,
It just means you're not one of those that will"*

-Jacque Fresco

RESUMO

Seja um corpo não-esférico (usualmente um planeta C1) que está em uma órbita kepleriana em relação a C3 (Sol). Considera-se também que um satélite massivo (C2) orbita o planeta alvo (C1). Nosso objetivo principal é investigar a dinâmica secular de rotação de C1. Como é sabido, além de outros fatores, a dinâmica secular do equador de um planeta está profundamente relacionada com as condições de clima e habitabilidade deste. Portanto, apresentamos um modelo simplificado do estudo do comportamento do equador de um planeta sobre tais perturbações. A fim de obter o movimento de longo período do problema, nós utilizamos as variáveis de Andoyer. Este conjunto de variáveis é extremamente eficaz e conveniente, uma vez que permite uma média no sistema de forma clara e rigorosa. De fato, quando C1 é um corpo axissimétrico, automaticamente as variáveis de Andoyer são variáveis ação ângulo do torque de rotação livre, assim a teoria da perturbação canônica clássica pode ser aplicada facilmente. Basicamente, a rotação de C1 é perturbada por C3 e C2. Enquanto que C3 está em uma órbita kepleriana, para o movimento translacional de C2 temos que considerar a perturbação de C3 e também o efeito do achatamento do corpo alvo. Todos esses detalhes estão incluídos em nosso código através da integração das equações variacionais de Lagrange. Nós testamos nossas equações seculares para o sistema Plutão-Caronte. Nossos resultados para o período e a amplitude para a variação do equador estão em pleno acordo com os obtidos anteriormente por Dobrovolskis *et al.* (1997). Testamos também diferentes inclinações iniciais para a órbita de Caronte. Enquanto aparecem algumas variações, elas não são significantes para o intervalo de tempo considerado. Nosso modelo pode também ser aplicado para o estudo da variação do equador de Urano ou Netuno, considerando a presença de um satélite massivo durante a migração planetária. Simulações preliminares forneceram resultados interessantes.

palavras-chave: Plutão. Satélites. Planetas. Rotação.

ABSTRACT

Let us consider a non-spherical body (usually a planet C1) which is in a keplerian orbit around C3 (Sun). We still consider a massive satellite (C2) around the target planet (C1). Our main task is to investigate the secular rotational dynamics of C1. As it is well known, among other conditions, the secular dynamics of the equator of a planet is deeply related to the climate and habitability conditions of this planet. Therefore, here we try to present a simplified model to study the behavior of the equator of a planet under these disturbers. In order to derive long period motion of the problem, we use Andoyer variables. This set of variables is very powerful and convenient as it allows the averaged system in a clear and rigorous way. In fact, when C1 is an axisymmetric body, Andoyer variables are automatically action-angle variables of the torque free motion, so that classical canonical perturbation theory can be applied very easily. Basically, the rotation of C1 is disturbed by C3 and C2. While C3 is in a keplerian orbit, for the translational motion of C2 we have to consider the perturbation of C3 and also the oblateness effect of the target body. All these details are included in our code through the integration of extra Lagrange's equations. We tested our secular equations to Pluto- Charon system. Our results for period and amplitude of the variation of the equator are in quite agreement with those obtained previously by Dobrovolskis *et al.* (1997). We also tested some different initial inclinations for Charon's orbit. While there appear some variations, they are not so significant for the considered time span. Our model can also be applied to study the variation of the equator of Uranus or Neptune, considering the presence of a massive satellite during the planetary migration. Preliminary simulations show interesting results.

Keywords: Pluto. Satellites. Planets. Rotation.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.	9
2 OBJETIVOS.	10
3 MÉTODOS	10
3.1 Sistema de Coordenadas	11
3.2 Rotação Livre e Potencial Perturbador.	12
3.3 Elementos Orbitais e Potencial Perturbador Médio.	13
3.4 Perturbações Seculares de C2 e C3.	16
3.5 Variáveis Não Singulares	23
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.	27
5 CONCLUSÃO	31
REFERÊNCIAS	32

1. Introdução

Com o avanço de modernas missões interplanetárias, as constantes físicas de planetas e satélites tem sido melhor determinadas. Isto tem impulsionado várias áreas, em especial o problema da rotação de objetos do sistema solar.

Sendo o planeta achatado, é importante conhecer a dinâmica da rotação deste corpo, em particular a variação da sua obliquidade (ou equador), uma vez que isto define condições específicas da variabilidade do clima do planeta e habitabilidade do mesmo.

A rotação também se faz presente nos satélites dos planetas: observa-se no nosso sistema solar que uma grande maioria dos satélites regulares, devido a efeitos dissipativos tais como a maré, se estabilizaram de tal forma que estes rotacionam em torno do seu eixo polar de forma síncrona com sua translação em torno do planeta hospedeiro.

Está prevista para 2015 a chegada da missão New Horizons ao sistema Plutão e seus satélites, onde será a primeira vez que uma sonda artificial visitará este sistema, desta forma, inúmeros dados poderão ser obtidos ou até melhorados, principalmente os mais básicos, como a massa dos satélites, seus raios médios, a atmosfera, os coeficientes clássicos J_2 , C_{22} e etc. Dentre muitas características peculiares, Plutão apresenta do ponto de vista dinâmico, três aspectos extremamente importantes.

Seu eixo de rotação apresenta uma inclinação de aproximadamente 128° em relação à normal do plano orbital, caracterizando um movimento retrógrado. Este forma com Caronte (principal satélite), um sistema quase binário, ambos envolvidos numa dupla ressonância spin-órbita. A órbita heliocêntrica de Plutão apresenta excentricidade relativamente alta, de aproximadamente 0,2.

Os dois primeiros itens são desafios clássicos que perduram há muito tempo, assim se espera que com a missão New Horizons haja uma grande contribuição. Tal ressonância é bastante singular, pelo fato de Caronte apresentar aproximadamente um décimo da massa de Plutão, conseqüentemente, o centro de massa deste sistema está fora de Plutão, constituindo praticamente um par binário (CANUP, 2005).

Alguns parâmetros como J_2 e C_{22} são ainda pouco conhecidos, portanto há

uma dificuldade em se afirmar em termos quantitativos os resultados precisos desta dupla ressonância spin-órbita. Num recente artigo (BEAUVALET *et al.*, 2012), os autores utilizaram os mais recentes valores disponíveis para fazerem simulações numéricas, análise do estado atual dos dados e previsões do que se poderia esperar das melhorias que seriam obtidas com a missão New Horizons.

2. Objetivos

Modelar as equações de longo período que envolvem a dinâmica básica da rotação de um satélite (ou planeta), usando o moderno conjunto de variáveis canônicas de Andoyer.

O interesse foi o de obter a Hamiltoniana média que governa o comportamento do sistema, em particular da longitude do nodo do plano normal h e da variável H de Andoyer, que definem a dinâmica da obliquidade do corpo alvo.

3. Métodos

Seja um corpo $C1$ cuja rotação livre será perturbada por $C2$ (satélite de $C1$) e $C3$ (Sol ou estrela em torno do qual $C1$ está orbitando). O movimento orbital (translacional) do satélite em torno de $C1$ é perturbado pelo Sol e também pelo achatamento do planeta hospedeiro. O Sol também perturba a rotação de $C1$. Utilizamos as variáveis canônicas de Andoyer (somente variáveis canônicas tipo ação-ângulo permitem realizar as médias nas variáveis rápidas). As equações newtonianas são todas escritas num referencial inercial e incorporadas posteriormente na hamiltoniana da dinâmica rotacional, através de 5 rotações.

O potencial perturbador do achatamento também deve ser escrito nas variáveis de Andoyer, pois este é função da posição do equador do planeta.

A hamiltoniana de longo período foi obtida realizando médias nos ângulos rápidos. Estas médias diferem se $C1$ é tri-axial ou não.

3.1 Sistema de Coordenadas

Consideramos 3 sistemas de referência fixados no centro de massa do corpo $C1$: o primeiro $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ é tal que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ está no plano invariável do sistema solar. O segundo $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ é tal que $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ é perpendicular ao momento angular de rotação de $C1$. O terceiro $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ é tal que $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ está no plano equatorial de $C1$ (NOYELLES et al., 2008).

As coordenadas de Andoyer (DEPRIT, 1967) são baseadas em dois conjuntos dos ângulos de Euler. O primeiro h, K, g localiza a posição do momento angular no primeiro sistema $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, enquanto que o segundo g, J, I localiza o sistema $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ do sistema ligado ao momento angular.

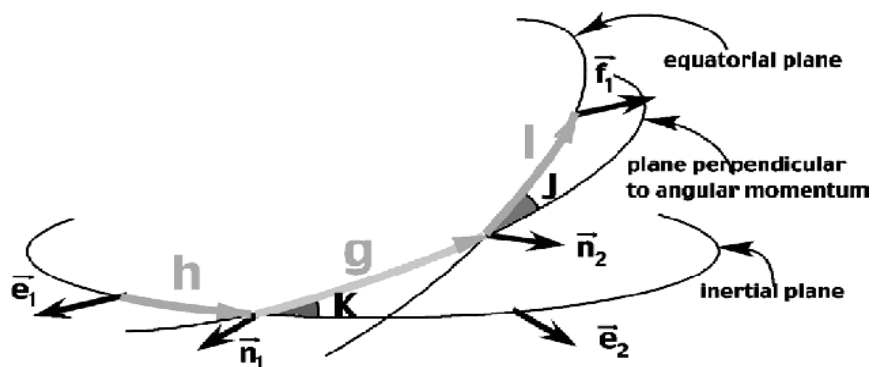


Figura 1. As variáveis de Andoyer (HENRARD, 2005a).

A matriz de inércia de $C1$ é:

$$I = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C} \end{pmatrix} \quad (1)$$

onde, no caso de simetria axial $\tilde{A} = \tilde{B} \neq \tilde{C}$.

As variáveis canônicas de Andoyer são compostas por 3 variáveis angulares I, g, h e seus respectivos momentos conjugados L, G e H , onde L e H são projeções do momento angular G , definidas por:

$$L = G \cos(J) \quad (2)$$

$$H = G \cos(K) \quad (3)$$

3.2 Rotação livre e Potencial Perturbador

A equação que define a energia de rotação livre de $C1$ pode ser escrita como (DEPRIT, 1967):

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{\tilde{A}} + \frac{\cos^2 l}{\tilde{B}} \right) (G^2 - L^2) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\tilde{C}} \quad (4)$$

A presença do corpo $C2$ ou $C3$ causará uma perturbação não integrável à dinâmica do problema. Tal perturbação sendo multiperódica, permite escrever seu potencial correspondente por uma série de Fourier cujos termos representam a figura elipsoidal de $C1$. Assim retendo apenas os termos principais podemos escrever o potencial perturbador assim:

$$V_i = \frac{-1.5k^2 M_p M_i R^2}{r_i^3} \{ J_2 (X_i^2 + Y_i^2) + 2C_{22} (X_i^2 - Y_i^2) \} \quad (5)$$

O índice i se refere a $C2$ ou $C3$ e X_i , Y_i são as coordenadas do corpo C_i referente ao sistema equatorial de $C1$. E também, k^2 se refere a constante gravitacional universal, M_p e R correspondem respectivamente à massa e ao raio equatorial de $C1$, M_i a massa do corpo i , r_i ao módulo do vetor que aponta de $C1$ ao corpo i e finalmente, J_2 e C_{22} são as constantes de achatamento de $C1$.

O potencial perturbador que define a atitude de $C1$ será:

$$V_T = V_{sat} + V_{\odot} \quad (6)$$

Para o problema em questão, será considerado que a órbita de $C2$ não será kepleriana. Isto porque, a órbita de $C2$ é perturbada pelo achatamento de $C1$ e pela presença de $C3$.

3.3 Elementos Orbitais e Potencial Perturbador Médio

O versor que aponta para o centro de massa do corpo C_i , referente ao sistema inercial fixo no centro de massa de C_1 é dado por:

$$\begin{aligned} x_i &= \cos(f_i + \omega_i) \cos(\Omega_i) - \sin(f_i + \omega_i) \sin(\Omega_i) \cos(I_i) \\ y_i &= \cos(f_i + \omega_i) \sin(\Omega_i) + \sin(f_i + \omega_i) \cos(\Omega_i) \cos(I_i) \\ z_i &= \sin(f_i + \omega_i) \sin(I_i) \end{aligned} \quad (7)$$

onde f_i representa a anomalia verdadeira, ω_i o argumento do periastro, Ω_i a longitude do nodo ascendente e I_i a inclinação do plano de órbita em relação ao plano fundamental. Estes parâmetros representam os elementos orbitais clássicos do problema de 2 corpos.

Da Figura 1, a partir de 5 rotações, relacionamos o sistema inercial com o equatorial e assim teremos as coordenadas do corpo perturbador visto de um sistema de eixos centrado no equador do perturbado. Isto é realizado envolvendo as variáveis de Andoyer e os elementos orbitais keplerianos.

Definimos as matrizes de rotação:

$$\begin{aligned} M_3(h) &= \begin{bmatrix} \cos(h) & \sin(h) & 0 \\ -\sin(h) & \cos(h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & M_3(g) &= \begin{bmatrix} \cos(g) & \sin(g) & 0 \\ -\sin(g) & \cos(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M_1(K) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(K) & \sin(K) \\ 0 & -\sin(K) & \cos(K) \end{bmatrix} & M_1(J) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(J) & \sin(J) \\ 0 & -\sin(J) & \cos(J) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$$M_3(l) = \begin{bmatrix} \cos(l) & \sin(l) & 0 \\ -\sin(l) & \cos(l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da Figura 1 pode-se ver que os versores (X_i, Y_i, Z_i) se conectam com os versores (x_i, y_i, z_i) referidos no sistema inercial através de:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = M_3(l) M_1(J) M_3(g) M_1(K) M_3(h) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

Desta forma V_i já está explicitamente dado nas variáveis adequadas, após as rotações acima mencionadas. Agora se elimina os termos de curto período da parte rotacional fazendo as médias em forma exata, sempre que possível. Definimos:

$$\langle \tilde{H} \rangle = \langle V_{sat} \rangle + \langle V_\circ \rangle \quad (10)$$

onde os $\langle V_i \rangle$ são funções das variáveis $L, G, H, l, g, h, a, e, I, f, \omega, \Omega, a_\circ, e_\circ, I_\circ, f_\circ, \omega_\circ$ e Ω_\circ . Neste momento fez-se a hipótese de $\tilde{A} = \tilde{B}$, neste caso l desaparece, logo podemos fazer a média em g e na anomalia média M_i (curto período).

Primeiramente, o potencial médio pode ser obtido via:

$$\langle V_i \rangle = -1.5 k^2 M_p M_i R^2 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{J_2 (X_i^2 + Y_i^2) + 2C_{22} (X_i^2 - Y_i^2)}{r_i^3} \right] dM_i dg \quad (11)$$

Fica claro que $\langle V_i \rangle$ não é função explícita de M_i , variável na qual deve ser efetuada a média, portanto a anomalia verdadeira f_i teria que ser expandida em potências da excentricidade e_i em função da anomalia média. No entanto para fazer a média não será preciso tal expansão (BROUWER & CLEMENCE, 1961).

$$\frac{1}{r_i^3} dM_i = \frac{1}{a_i^3} \left[\frac{1 + e_i \cos(f_i)}{(1 - e_i^2)^{\frac{3}{2}}} \right] df_i \quad (12)$$

Realizando as devidas substituições, ficamos com a seguinte expressão:

$$\langle V_i \rangle = \frac{-3k^2 M_p M_i R^2}{2a_i^3 (1-e_i)^{3/2}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{2 \cdot 2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+e_i \cos(f_i)) [J_2(X_i^2+Y_i^2)+2C_{22}(X_i^2-Y_i^2)] df_i dg \quad (13)$$

A hamiltoniana média se reduz a uma forma relativamente simples.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H} \rangle &= \langle V_{sat} \rangle + \langle V_{\odot} \rangle \\ \langle V_{sat} \rangle &= \frac{-3k^2 m M_p R_p^2 J_2}{2a^3 (1-e^2)^{(3/2)}} \{ \alpha_1 \cos(2h-2\Omega) + \beta_1 \cos(h-\Omega) + \delta_1 \} \\ \langle V_{\odot} \rangle &= \frac{-3k^2 M_{\odot} M_p R_p^2 J_2}{2a_{\odot}^3 (1-e_{\odot}^2)^{(3/2)}} \{ \alpha_2 \cos(2h-2\Omega_{\odot}) + \beta_2 \cos(h-\Omega_{\odot}) + \delta_2 \} \end{aligned} \quad (14)$$

Onde α_1 , β_1 , δ_1 , α_2 , β_2 e δ_2 são funções de I, I_{\odot}, J e K . $\langle V_{sat} \rangle$ e $\langle V_{\odot} \rangle$ representam o potencial perturbador médio que atua em $C1$ devido, respectivamente, à presença do satélite e do Sol, e m é a massa do satélite. Temos que $\langle \tilde{H} \rangle$ determina a dinâmica de longo período de rotação de $C1$.

É importante explicitar os parâmetros do resultado obtido:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{8} [1 + \cos^2 I_i + \cos^2 J + \cos^2 J \cos^2 I_i] \\ &+ \frac{1}{8} \cos^2 K [1 + \cos^2 J \cos^2 I_i + 4 \sin^2 J \sin^2 I_i + \cos^2 J \cos^2 I_i] \\ &+ \frac{1}{4} \sin^2 K [\sin^2 I_i + \sin^2 J \cos^2 I_i + \cos^2 J \sin^2 I_i \sin^2 J]_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$\beta_i = \frac{1}{8} [-2 \sin^2 J \sin^2 I_i + 1 + \cos^2 J - \cos^2 I_i - \cos^2 J \cos^2 I_i] \sin^2 K \quad (16)$$

$$\delta_i = \frac{1}{4} [-2 \sin^2 J + \cos^2 J + 1] \sin 2I_i \sin K \cos K \quad (17)$$

Como agora a Hamiltoniana não depende de l e g então é óbvio que L e G são constantes.

$$\frac{d}{dt}L = \frac{-\partial}{\partial l}\langle\tilde{H}\rangle \quad \frac{d}{dt}G = \frac{-\partial}{\partial g}\langle\tilde{H}\rangle \quad (18)$$

De (2), vê-se facilmente que J deve ser constante no tempo.

3.4 Perturbações Seculares de C2 e C3

Como ficou evidente na função Hamiltoniana \tilde{H} , a atitude de C1 dependerá dos elementos orbitais tanto de C2 (satélite perturbador) quanto de C3 (estrela ou Sol perturbador). Por outro lado, do ponto de vista translacional, C2 será perturbado pelo achatamento de C1 (planeta) e também pela presença de C3 (estrela).

Num sistema de coordenadas fixado no centro de massa do planeta e considerando o plano invariável do sistema solar (SOUAMI & SOUCHAY, 2012) como plano de referência, a equação de um satélite perturbado pelo achatamento do Planeta e pelo Sol é (YOKOYAMA, 2002):

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{-k^2 M_p}{r^3} - k^2 M_\odot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot|^3} + \frac{\mathbf{r}_\odot}{r_\odot^3} \right) + \mathbf{P}_{J_2} \quad (19)$$

onde:

- M_p, M_\odot : massa do planeta e do Sol, respectivamente.
- $\mathbf{r}, \mathbf{r}_\odot$: vetor posição do satélite e do Sol.
- k^2, J_2 : constante gravitacional e coeficiente de achatamento.
- \mathbf{P}_{J_2} : perturbação devido a achatamento do Planeta.

Os componentes do último termo da equação (19) são:

$$\begin{aligned} P_x &= -GM_p J_2 R_p^2 \left[\frac{3x}{2r^5} - \frac{15}{2} \frac{z^2 x}{r^7} \right] \\ P_y &= -GM_p J_2 R_p^2 \left[\frac{3y}{2r^5} - \frac{15}{2} \frac{z^2 y}{r^7} \right] \\ P_z &= -GM_p J_2 R_p^2 \left[\frac{9z}{2r^5} - \frac{15}{2} \frac{z^3}{r^7} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Devido o enorme tempo computacional necessário, vamos trabalhar com as equações de longo período. Para tanto escrevemos a função potencial em função dos elementos orbitais (BROUWER & CLEMENCE, 1961), para podermos realizar as médias. Inicialmente, para a perturbação devida a presença do Sol, temos:

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\odot} = \frac{k^2 M_{\odot} r^2}{r_{\odot}^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2(S) \right) \quad (21)$$

e para o achatamento do Planeta:

$$\tilde{\mathcal{R}}_{J_2} = \frac{k^2 M_p R_p^2}{r^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2(\varphi) \right) \quad (22)$$

onde φ é a latitude do satélite e S é a distância angular entre Sol-satélite.

Para a equação (21), dado um plano inercial arbitrário, a parcela $\cos(S)$ é dada por (YOKOYAMA, 1999):

$$\begin{aligned} \cos S &= \frac{1}{4} (1 + \cos I) (1 - \cos I_{\odot}) \cos(f + \omega + f_{\odot} + \omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) + \frac{1}{4} (1 - \cos I) (1 + \cos I_{\odot}) \\ &\quad \times \cos(f + \omega + f_{\odot} + \omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) + \frac{1}{4} (1 + \cos I) (1 + \cos I_{\odot}) \\ &\quad \times \cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) + \frac{1}{4} (1 - \cos I) (1 - \cos I_{\odot}) \\ &\quad \times \cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) + \frac{1}{2} \sin I \sin I_{\odot} [\cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot}) \\ &\quad - \cos(f + \omega + f_{\odot} + \omega_{\odot})] \end{aligned} \quad (23)$$

Assim, a média (na anomalia média) da função perturbadora Solar será dada por:

$$\langle \mathcal{R}_\odot \rangle_M = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\odot dM \quad (24)$$

Em Yokoyama (2002), é apresentada a função perturbadora solar média que afeta um satélite. É fácil notar que tal função vale para o caso de um plano arbitrário de referência (no artigo citado, tomou-se o equador). Então podemos usá-la aqui, porém agora todas as inclinações estarão referidas a um plano arbitrário.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_\odot \rangle_{variables} = & \frac{3}{2} P \left(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2 - \frac{2}{3} \right) + \frac{3}{2} A^2 Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \\ & + \frac{3}{2} B^2 Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \frac{3}{2} C^2 Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \\ & + \frac{3}{2} D^2 Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \frac{3}{2} Z (E^2 + 2CD) \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot) \\ & + \frac{3}{2} Z (E^2 + 2AB) \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot) + 3Z (-E^2 + AD + BC) \cos 2\omega \\ & + 3P (-E^2 + AC + BD) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot) + 3P (AB + CD) \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot) \\ & + 3ACZ \cos(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + 3ADP \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \\ & + 3EP (A - D) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + 3EP (-A - B + C + D) \cos(\Omega - \Omega_\odot) \\ & - 3EZ (A - C) \cos(2\omega + \Omega - \Omega_\odot) + 3AEZ \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) \\ & + 3BCP \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + 3BDZ \cos(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_\odot) \\ & + 3EP (B - C) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + 3EZ (B - D) \cos(2\omega - \Omega + \Omega_\odot) \\ & - 3BEZ \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + 3CEZ \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) \\ & + 3DEZ \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\langle \mathcal{R}_\odot \rangle_M = \frac{k^2 M_\odot a^2}{2 a_\odot^3} \left(\frac{a_\odot}{r_\odot} \right)^3 \langle \mathcal{R}_\odot \rangle_{variables} \quad (26)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4}(1 + \cos I)(1 - \cos \varepsilon) \\
 B &= \frac{1}{4}(1 - \cos I)(1 + \cos \varepsilon) \\
 C &= \frac{1}{4}(1 + \cos I)(1 + \cos \varepsilon) \\
 D &= \frac{1}{4}(1 - \cos I)(1 - \cos \varepsilon) \\
 E &= \frac{1}{2} \sin I \sin \varepsilon \\
 P &= 1 + \frac{3}{2} e^2 \\
 Z &= \frac{5}{2} e^2
 \end{aligned} \tag{27}$$

Falta agora obter a anomalia verdadeira do sol f_{\odot} . Primeiramente temos que a anomalia média pode ser obtida diretamente de:

$$M_{\odot}(t) = M_{\odot}(0) + n_{\odot} t \tag{28}$$

Onde $M_{\odot}(0)$ é a anomalia média inicial e n_{\odot} é o movimento médio do Sol, dado por:

$$n_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\odot}} = \sqrt{\frac{k^2 (M_p + M_{\odot})}{a_{\odot}^3}} \tag{29}$$

Sendo T_{\odot} o período do movimento translacional do Sol. Agora podemos obter a anomalia verdadeira f_{\odot} através da expansão em potências da excentricidade e_{\odot} (BROUWER & CLEMENCE, 1961):

$$\begin{aligned}
 f_{\odot} = M_{\odot} &+ \left(2e_{\odot} - \frac{1}{4}e_{\odot}^3\right) \sin(M_{\odot}) + \left(\frac{5}{4}e_{\odot}^2 - \frac{11}{24}e_{\odot}^4\right) \sin(2M_{\odot}) + \frac{13}{12}e_{\odot}^3 \sin(3M_{\odot}) \\
 &+ \frac{103}{96}e_{\odot}^4 \sin(4M_{\odot})
 \end{aligned} \tag{30}$$

Observa-se pela equação (26) que outra expansão é necessária:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_\circ}{r_\circ}\right)^3 = & 1 + 3\cos(M_\circ)e_\circ + \left(\frac{9}{2}\cos(2M_\circ) + \frac{3}{2}\right)e_\circ^2 + \left(\frac{27}{8}\cos(M_\circ) + \frac{53}{8}\cos(3M_\circ)\right)e_\circ^3 \\ & + \left(\frac{7}{2}\cos(2M_\circ) + \frac{77}{8}\cos(4M_\circ) + \frac{15}{8}\right)e_\circ^4 \end{aligned} \quad (31)$$

Em Yokoyama (1999) é dada a expressão do potencial perturbador de achatamento secular referido a um plano arbitrário (vide Figura 2):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_M = & \frac{k^2 M_p R^2 J_2}{8 a^3 (1-e^2)^{(3/2)}} [1 - 3\cos^2 \tilde{I} + 9\cos^2 \tilde{I} \cos^2 I - 3\cos^2 I \\ & + 3BB_3 + 3BB_4] \end{aligned} \quad (32)$$

As últimas duas parcelas são:

$$\begin{aligned} BB_3 = & \sin^2 \tilde{I} \cos(2\Omega - 2\tilde{\Omega}) \sin^2 I \\ BB_4 = & \sin 2\tilde{I} \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) \sin 2I \end{aligned} \quad (33)$$

Onde $\tilde{I}, \tilde{\Omega}$ são respectivamente, a inclinação do equador e a longitude do nodo do equador do planeta em relação ao sistema inercial. Os demais Ω, I, a, e são os já definidos elementos orbitais do satélite.

A geometria do problema é melhor visualizada através da figura a baixo:

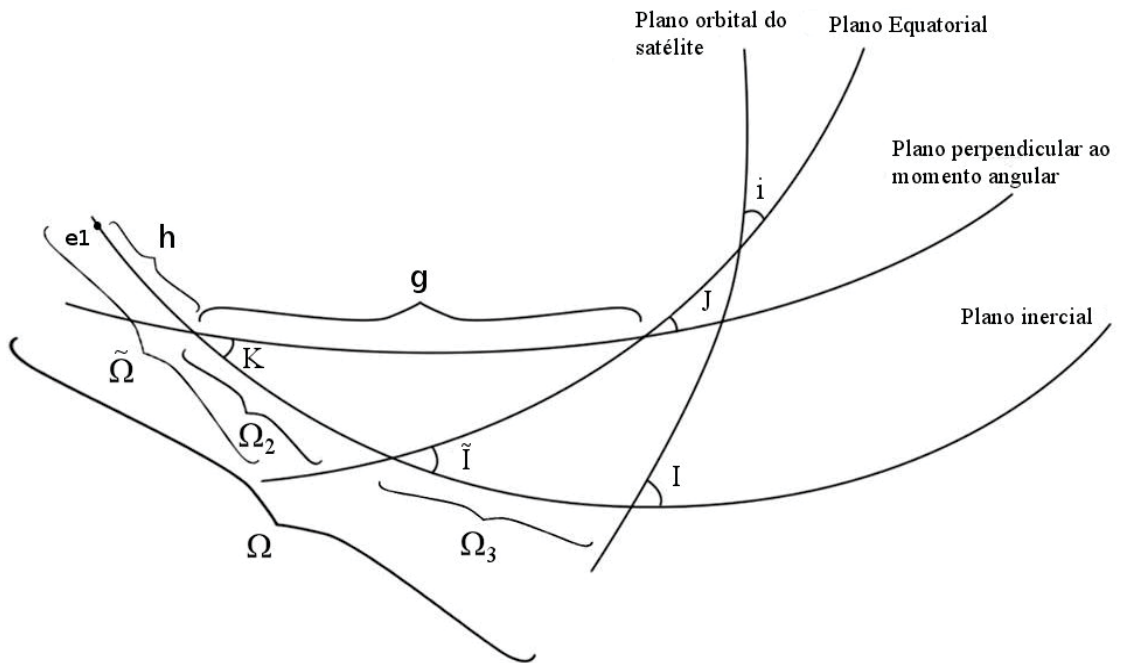


Figura 2. Plano orbital do satélite e os ângulos de Andoyer.

Observe que devemos escrever $\tilde{I}, \tilde{\Omega}$ em termos das variáveis de Andoyer. Vamos mostrar brevemente esta tarefa. Note primeiramente que:

$$\tilde{\Omega} = h + \Omega_2 \quad (34)$$

De acordo com a Figura 2, as seguintes relações da trigonometria esférica permitem escrever:

$$\sin \Omega_2 \sin \tilde{I} = \sin J \sin g \quad (35)$$

$$\sin \tilde{I} \cos \Omega_2 = \cos J \sin K + \cos K \sin J \cos g \quad (36)$$

$$\cos \tilde{I} = \cos K \cos J - \sin K \sin J \cos g \quad (37)$$

Assim, reescrevemos as parcelas BB_3 e BB_4 da seguinte forma:

$$BB_3 = \sin^2 \tilde{I} \{ \cos(2\Omega - 2h) \cos(2\Omega_2) + \sin(2\Omega - 2h) \sin(2\Omega_2) \} \sin^2 I$$

$$BB_3 = \sin^2 I \left[\cos(2\Omega - 2h) \left[\sin^2 \tilde{I} (\cos^2 \Omega_2 - \sin^2 \Omega_2) \right] \right. \\ \left. + \sin(2\Omega - 2h) \left[2\sin \tilde{I} \sin \Omega_2 \sin \tilde{I} \cos \Omega_2 \right] \right] \quad (38)$$

$$BB_4 = 2\sin \tilde{I} \cos \tilde{I} \{ \cos(\Omega - h) \cos \Omega_2 + \sin(\Omega - h) \sin \Omega_2 \}$$

$$BB_4 = 2\cos \tilde{I} \{ \cos(\Omega - h) \sin \tilde{I} \cos \Omega_2 + \sin(\Omega - h) \sin \tilde{I} \cos \Omega_2 \} \quad (39)$$

Agora somos capazes de escrever a função $\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_M$ em termos das coordenadas de Andoyer e ainda podemos realizar a média em g . Explicitando a função em termos das novas coordenadas:

$$\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_M = \frac{k^2 M_p R^2 J_2}{8(1-e^2)^{(3/2)} a^3} \left[1 - 3\cos^2 K \cos^2 J + 6\cos J \sin K \cos K \sin J \cos g - 3\sin^2 K \sin^2 J \cos^2 g \right. \\ \left. 9\cos^2 I \cos^2 K \cos^2 J - 18\cos^2 I \cos J \sin K \cos K \sin J \cos g \right. \\ \left. + 9\cos^2 I \sin^2 K \sin^2 J \cos^2 g - 3\cos^2 I + 3\sin^2 I \cos(-2\Omega + 2h) \cos^2 J \sin^2 K \right. \\ \left. + 6\sin^2 I \cos(-2\Omega + 2h) \cos J \sin K \cos K \sin J \cos g \right. \\ \left. + 3\sin^2 I \cos(-2\Omega + 2h) \cos^2 K \sin^2 J \cos^2 g - 3\sin^2 I \cos(-2\Omega + 2h) \sin^2 J \sin^2 g \right. \\ \left. - 6\sin^2 I \sin(-2\Omega + 2h) \sin J \sin g \cos J \sin K - 6\sin^2 I \sin(-2\Omega + 2h) \sin^2 J \sin g \cos K \cos g \right. \\ \left. + 6\cos K ((\cos J \sin K + \cos K \sin J \cos g)(\cos(-\Omega + h) - \sin(-\Omega + h))) \right. \\ \left. \cos J ((\cos J \sin K + \cos K \sin J \cos g)(\cos(-\Omega + h) - \sin(-\Omega + h))) \right. \\ \left. - 6\sin K ((\cos J \sin K + \cos K \sin J \cos g)(\cos(-\Omega + h) - \sin(-\Omega + h))) \sin J \right. \\ \left. \times ((\cos J \sin K + \cos K \sin J \cos g)(\cos(-\Omega + h) - \sin(-\Omega + h))) \right. \\ \left. \times \cos g ((\cos J \sin K + \cos K \sin J \cos g)(\cos(-\Omega + h) - \sin(-\Omega + h))) \right] \quad (40)$$

Efetuada a média na variável g , obtemos:

$$\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_{M,g} = \frac{k^2 M_p R^2 J_2}{16(1-e^2)^{(3/2)} a^3} \left[9\cos^2 I \sin^2 J \sin^2 K + 2 - 6\sin 2I \sin^2 J \sin K \cos K \cos(-\Omega + h) \right. \\ \left. - 6\cos^2 I + 18\cos^2 I \cos^2 J \cos^2 K - 6\cos^2 J \cos^2 K \right. \\ \left. + 3\sin^2 I \sin^2 J \cos^2 K \cos(-2\Omega + 2h) + 6\sin^2 I \cos^2 J \sin^2 K \cos(-2\Omega + 2h) \right. \\ \left. - 3\sin^2 I \sin^2 J \cos(-2\Omega + 2h) - 3\sin^2 J \sin^2 K + 12\sin 2I \cos^2 J \cos K \sin K \cos(-\Omega + h) \right] \quad (41)$$

3.5 Variáveis Não Singulares

Agora vamos realizar uma transformação canônica h, H para Y_1, Y_2 de forma a eliminar a singularidade para o caso $K=0$.

As variáveis não singulares são:

$$Y_1 = -\sqrt{2G-2H} \sin h \quad (42)$$

$$Y_2 = \sqrt{2G-2H} \cos h \quad (43)$$

Temos que Y_1 representa a nova coordenada e Y_2 seu respectivo momento conjugado. As seguintes relações são possíveis de ser obtidas usando a definição de Y_1 e Y_2 e a equação (3), definição de H :

$$\begin{aligned} \sin K &= \sqrt{\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{4G^2}} & \cos K &= 1 - \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2G} \\ \cos(h - \Omega) &= \frac{1}{Y_1^2 + Y_2^2} [Y_2 \cos \Omega - Y_1 \sin \Omega] \\ \cos(2h - 2\Omega) &= \left(\frac{Y_2^2 - Y_1^2}{Y_1^2 + Y_2^2} \right) \cos 2\Omega - 2 \left(\frac{Y_1 Y_2}{Y_1^2 + Y_2^2} \right) \sin 2\Omega \end{aligned} \quad (44)$$

Escreve-se agora o potencial perturbador médio (14) que define a dinâmica de rotação do Planeta em função das novas coordenadas Y_1 e Y_2 :

$$\begin{aligned}
\langle V_i \rangle_{variables} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \left(\sqrt{4 \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2}} \sin I_i \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} \right) \cos^2 J \right. \\
&\quad \left. \times \cos I_i (Y_2 \cos(\Omega_i) - Y_1 \sin(\Omega_i)) \right) + \frac{1}{4} \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{1}{16} \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \\
&\quad - \frac{3}{32} \frac{1}{Y_1^2 + Y_2^2} \left(\cos^2 J (Y_2 \cos(2\Omega) - 2Y_2 Y_1 \sin(2\Omega_i) - Y_1^2 \cos(2\Omega_i)) \left(4 \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \sin^2 I_i \right) + \frac{1}{2} \cos^2 J + \frac{1}{4} \sin^2 I_i - \frac{3}{4} \sin^2 I_i \cos^2 J + \frac{9}{32} \cos^2 J \left(4 \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right) \sin^2 I_i \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{Y_1 + Y_2}} \sqrt{4 \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2}} \sin I_i \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right) \times \cos I_i (Y_2 \cos(\Omega_i) - Y_1 \sin(\Omega_i)) \\
&\quad - \frac{3}{32} \left(4 \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right) \sin^2 I_i - \frac{3}{16} \cos^2 J \left(4 \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right) \\
&\quad - \frac{3}{32} \frac{1}{Y_1^2 + Y_2^2} \left((Y_2^2 \cos(2\Omega_i) - 2Y_2 Y_1 \sin(2\Omega_i) - Y_1^2 \cos(2\Omega_i)) \right. \\
&\quad \left. \times \left(4 \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right) \sin^2 I_i \right)
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\langle \dot{H} \rangle = \sum_{i=1,2} \langle V_i \rangle = \sum_{i=1,2} \frac{-3k^2 M_i M_p R^2 J_2}{2a_i^3 (1-e_i^2)^{(3/2)}} \langle V_i \rangle_{variables} \tag{46}$$

De fato estamos trabalhando num sistema Hamiltoniano, portanto a dinâmica de rotação será obtida das equações de Hamilton:

$$\frac{d}{dt} Y_1 = \frac{\partial}{\partial Y_2} \langle \dot{H} \rangle \quad \frac{d}{dt} Y_2 = -\frac{\partial}{\partial Y_1} \langle \dot{H} \rangle \tag{47}$$

Portanto, podemos obter de forma indireta a variação da obliquidade do corpo C1. Da definição de Y_1 e Y_2 :

$$H = G - \frac{1}{2} (Y_1^2 + Y_2^2) \tag{48}$$

Da equação (2):

$$K = a \cos\left(\frac{H}{G}\right) \tag{49}$$

Seja a figura abaixo:

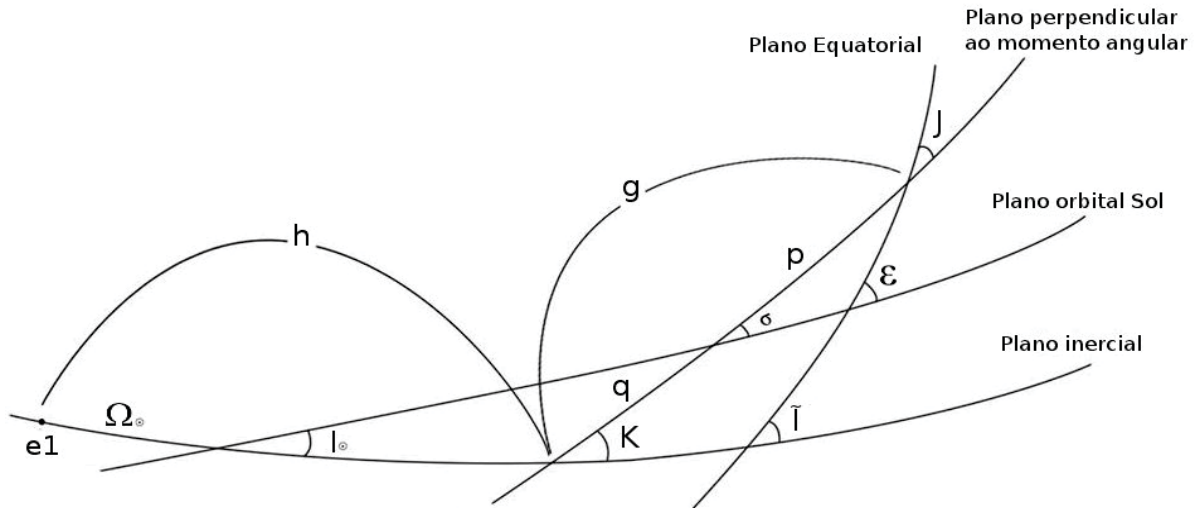


Figura 3. Órbita do Sol e os ângulos de Andoyer.

Das relações da trigonometria esférica podemos escrever:

$$\cos \varepsilon = \cos J \cos \sigma - \sin J \sin \sigma \cos p \quad (50)$$

$$\sin \sigma \sin q = \sin(h - \Omega_{\odot}) \sin I_{\odot} \quad (51)$$

$$\sin \sigma \cos q = \frac{1}{\sin K} (\cos I_{\odot} - \cos K \cos \sigma) \quad (52)$$

$$\sin \sigma \cos p = \sin \sigma \cos(g - q) = \sin \sigma (\cos g \cos q + \sin g \sin q) \quad (53)$$

$$\cos \sigma = -\cos K \cos I_{\odot} + \sin K \sin I_{\odot} \cos(h - \Omega_{\odot}) \quad (54)$$

Substituindo (51) e (52) em (53) obtemos:

$$\sin \sigma \cos p = \cos g \left[\frac{\cos I_{\odot} - \cos K \cos \sigma}{\sin K} \right] + \sin g [\sin(h - \Omega_{\odot}) \sin I_{\odot}] \quad (55)$$

E depois, aplicando (54):

$$\sin \sigma \cos p = \cos g [\cos \Omega_{\odot} \sin K - \cos K \sin I_{\odot} \cos(h - \Omega_{\odot})] + \sin g \sin I_{\odot} \sin(h - \Omega_{\odot}) \quad (56)$$

Aplicando-se (54) e (56) em (50) e desprezando os termos de curto período g :

$$\cos \varepsilon \approx \cos J [\cos K \cos I_{\odot} + \sin K \sin I_{\odot} \cos(h - \Omega_{\odot})] \quad (57)$$

Desta forma, obtemos a obliquidade em função de parâmetros conhecidos.

Realizando as devidas substituições, obtemos para a função perturbadora devido ao achatamento a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_2 \rangle_{M,g} = & \frac{k^2 M_p R^2 J_2}{(1-e^2)^{(3/2)} \pi a^3} \left[A_1 \left(\frac{9}{16} \cos^2 I \sin^2 J - \frac{3}{16} \sin^2 J \right) - \frac{6}{16} \cos^2 I \right. \\ & + A_2 \left(\frac{18}{16} \cos^2 I \cos^2 J - \frac{3}{16} \sin^2 I \sin^2 J \right) - \frac{3}{16} \sin^2 I \sin^2 J A_4 [A_3 \cos(2\Omega) - 2Y_1 Y_2 \sin(2\Omega)] \\ & + \frac{6}{16} \sin^2 I \cos^2 J A_4 [A_3 \cos(2\Omega) - 2Y_1 Y_2 \sin(2\Omega)] \\ & \left. - \frac{6}{16} \sin(2I) \sin^2 J \sqrt{A_4 A_2} (Y_2 \cos(\Omega) - Y_1 \sin(\Omega)) + \frac{18}{16} \right. \\ & \left. + \frac{12}{16} \sin(2I) \cos^2 J \sqrt{A_4 A_2} (Y_2 \cos(\Omega) - Y_1 \sin(\Omega)) \right] \quad (58) \end{aligned}$$

Onde A_1, A_2, A_3, A_4 são funções das novas variáveis canônicas. Segue que:

$$A_1 = \left(\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} - \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{4G^2} \right) \quad A_2 = \left(1 - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{2G} \right)^2 \quad (59)$$

$$A_3 = (Y_2^2 - Y_1^2) \quad A_4 = \left(\frac{1}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G^2} \right) \quad (60)$$

Note que para a função perturbadora devido a presença do Sol, não foi necessário realizar esta mudança, uma vez que não aparecem os elementos de Andoyer.

A variação temporal dos elementos orbitais do satélite são obtidas integrando as equações variacionais de Lagrange usando $\langle \mathcal{R}_2 \rangle_{M,g}$ e $\langle \mathcal{R}_0 \rangle_M$.

Resta agora obter a variação temporal de $C3$. Em geral, para isto precisamos da teoria do movimento planetário de $C1$ em torno da estrela.

As condições iniciais e a constante de achatamento polar J_2 de Plutão foram retiradas, respectivamente, de Dobrovolskis *et al.* (1997) e Beauvalet *et al.* (2012). Demais parâmetros como massas, raios equatoriais e as condições iniciais de Caronte foram retiradas do link: <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>.

4. Resultados e Discussão

Objetivamos a dinâmica de rotação de Plutão. O movimento translacional do Sol visto de Plutão será dada conforme (DOBROVOLSKIS *et al.*, 1997):

$$\begin{aligned}
 e_{\odot} &= 0.244 + 0.022\cos(\psi) + 0.005\cos(3\psi) \\
 \omega_{\odot} &= -[90.0^{\circ} + 24.0^{\circ}\sin(\psi)] \\
 I_{\odot} &= 15.91^{\circ} - 1.04\cos(\psi) \\
 \Omega_{\odot} &= 111.428^{\circ} - 97.209^{\circ}t - 1.5^{\circ}\sin(\psi) \\
 \psi &= 72.8^{\circ} + 91.0^{\circ}t
 \end{aligned} \tag{61}$$

Onde t é dado em milhões de anos. Note que os elementos são referentes ao plano invariável do sistema solar, onde tal sistema inercial está fixado no centro de massa de Plutão (portanto não precisamos de nenhuma transformação de coordenadas).

Basicamente vamos integrar as equações canônicas. Note que a hamiltoniana média é função dos elementos orbitais do Sol (dado acima) e também do satélite, cujos elementos são obtidos integrando as equações variacionais de Lagrange, já citadas.

Várias simulações foram realizadas tomando diferentes problemas de rotação de satélites ou planetas. Um interesse em especial foi o problema da variação do equador (obliquidade), tanto de planetas e satélites. Obteve-se resultados muito interessantes para variação do equador, especialmente quando o perturbador se encontra em órbita bastante inclinada.

Embora no caso Plutão-Caronte a variação da amplitude da obliquidade não seja muito pronunciada, em problemas como Urano-satélite, as simulações mostram que grandes variações da excentricidade tem papel muito importante nos valores máximos e mínimos da obliquidade.

Para o problema Plutão-Caronte, usando o presente modelo, isto é,

considerando Caronte (C2) e o Sol (C3) os perturbadores de Plutão (C1), reproduzimos a dinâmica da variação da obliquidade de Plutão. Tanto a amplitude como o período de variação foram calculados e a abordagem permite separar o efeito isolado de Caronte sobre Plutão. Os resultados estão em pleno acordo com os de Dobrovolskis *et al.* (1997).

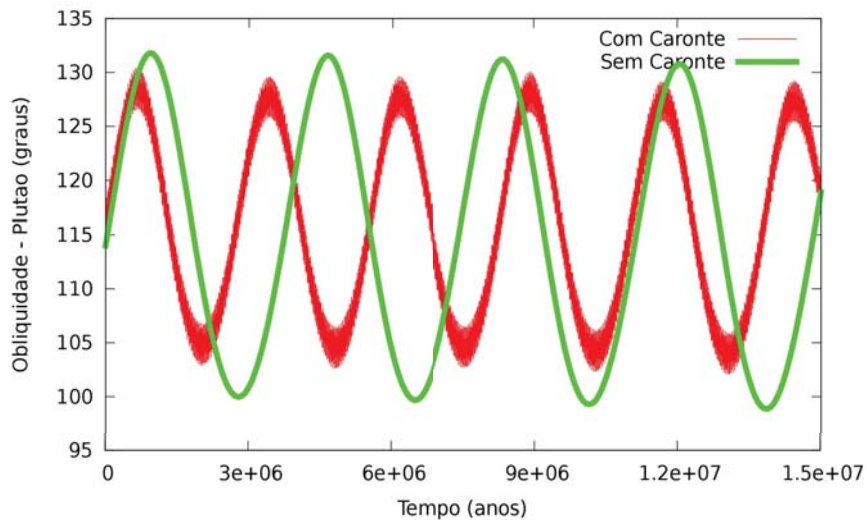


Figura 4. Variação da obliquidade de Plutão no tempo.

Evidentemente, a presença de Caronte causa uma pequena perturbação na amplitude da obliquidade de Plutão e uma sensível mudança no período da oscilação. Podemos demonstrar ainda que, se considerarmos excentricidades maiores para a órbita de Caronte, aumenta-se a frequência das pequenas oscilações.

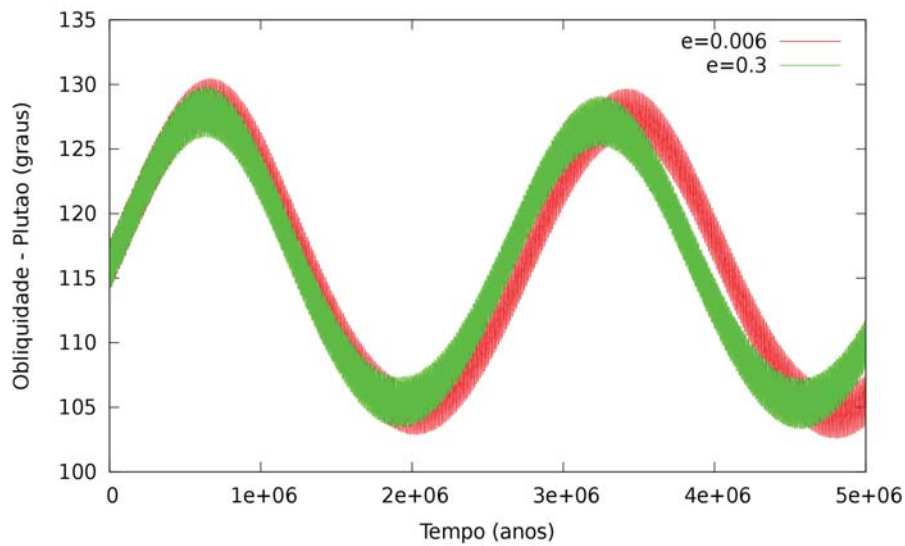


Figura 5. Variação da Obliquidade para diferentes excentricidades da órbita de Caronte.

A figura abaixo mostra de forma mais clara o efeito, como a diminuição do período das oscilações:

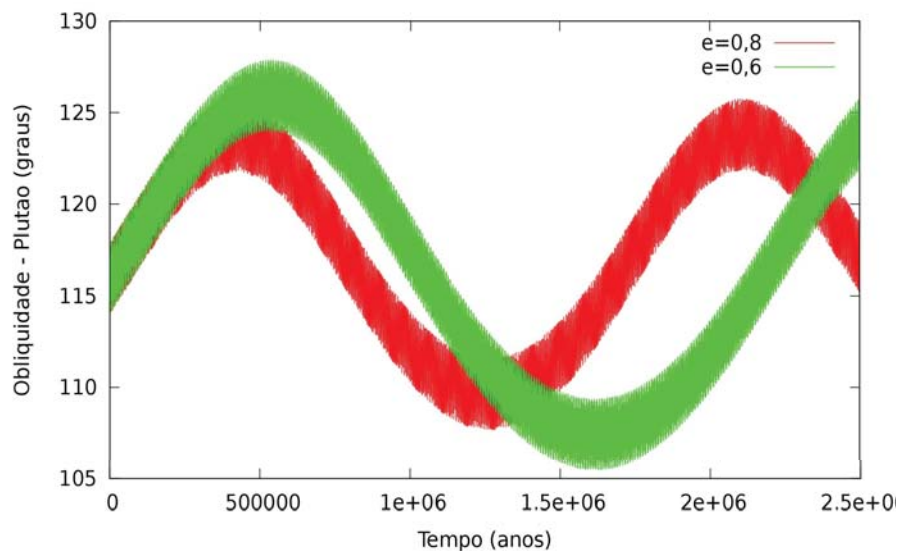


Figura 6. Variação da obliquidade para altas excentricidades.

Para altas inclinações a diferença da variação da obliquidade é ainda mais evidente. Nota-se um aumento significativo tanto da amplitude das oscilações quanto da amplitude máxima atingida.

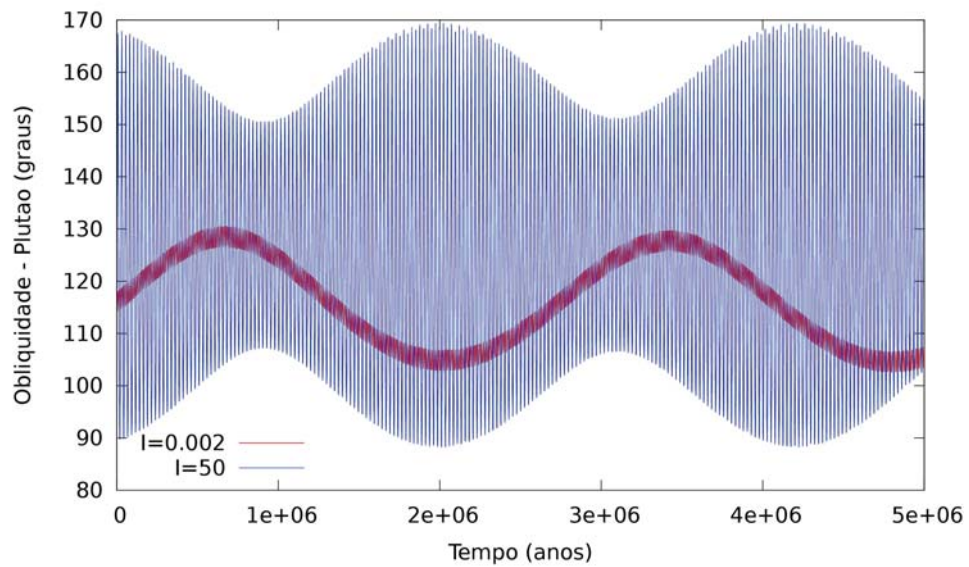


Figura 7. Variação da obliquidade para diferentes inclinações do plano orbital de Caronte.

Estes exemplos com alta excentricidade ou inclinação mostram variações muito mais agudas do que aquelas produzidas no caso circular e plano, o que comprova que o efeito dissipativo da maré que circulariza o movimento orbital, também se reflete na dinâmica de rotação, atenuando a variação da obliquidade.

Utilizando o sistema médio, realizamos também simulações para o sistema Urano-satélite e Sol, considerando a massa do satélite sendo da ordem de 0,67% da massa de Urano e uma inclinação orbital inicial de 60° em relação ao equador de Urano.

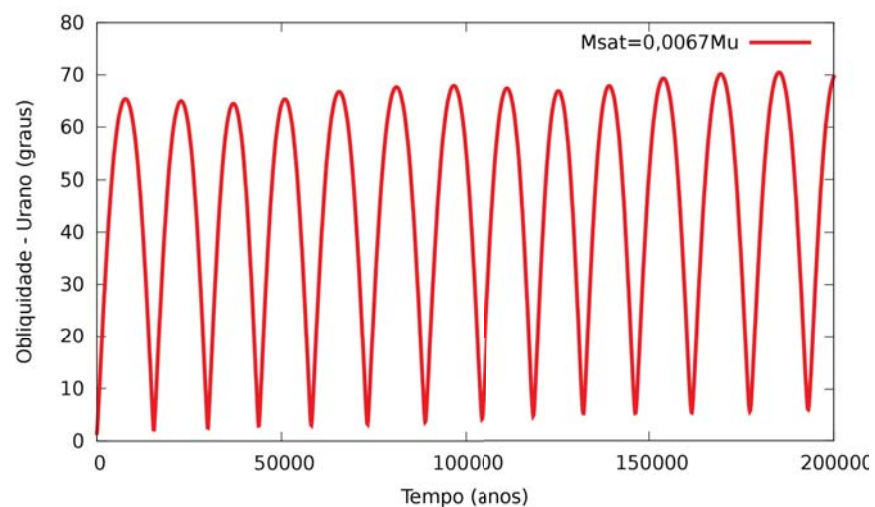


Figura 8. Variação da obliquidade de Urano.

5. Conclusão

Com o método utilizado, foi possível isolar o efeito específico de Caronte sobre Plutão, além de que foi verificado, para o caso em estudo, que se o perturbador tem alta inclinação e/ou alta excentricidade, efeitos extremamente fortes serão observados na obliquidade do perturbado.

Embora os cálculos não estejam aqui completamente apresentados, o atual estudo reproduz perfeitamente os resultados obtidos em Boué-Laskar (2011), sobre o aumento da obliquidade de Urano através de um satélite de grande massa. Com uma pequena variação, incluindo a migração planetária também podemos mostrar a presente obliquidade de Netuno, através de uma sequência de encontros próximos de planetesimais ou ainda de um único encontro de um super-Tritão .

O caso de $C1$ tri-axial, também está sendo analisado, sendo que obtivemos 2 critérios muito simples de selecionar todos os termos ressonantes que derivam de $C22$.

6. Referências

Beauvalet, L.; Lainey, V.; Arlot, J. -E.; Binzel, R. P. Dynamical parameter determinations in Pluto's system* Expected constraints from the New Horizons mission to Pluto. *A&A*; V. 540, p. 1-9, 2012.

Brouwer, D.; Clemence, G.M. *Methods of Celestial Mechanics*. New-York Academic Press; V. 1, 1961.

Deprit, A. Free Rotation of a Rigid Body Studied in the Phase Plane. *American Journal of Physics*; V. 35, p. 424-428, 1967.

Dobrovolskis, A. R.; Peale, S. J.; Harris, A. W. Pluto and Charon, p. 159-190, 1997.

G. Boué e J. Laskar, A Collisionless Scenario for Uranus Tilting. *Astrophysical Journal Letters*; V. 712, p. L44-L47, 2010.

Henrard, J. The rotation of Io. *Icarus*; V. 178, p. 144-153, 2005a.

HORIZONS System <<http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>> acessado em: 26 de novembro de 2013.

Noyelles, B.; Lemaître, A.; Vienne, A. Titan's Rotation A 3-dimensional theory. *A&A*; V. 478, p. 959-970, 2008.

Souami, D.; Souchay, J. The solar system's invariable plane. *A&A*; V. 543, p. 1-11, 2012.

Yokoyama, T. Dynamics of some fictitious satellites of Venus and Mars. *Planetary and Space Science*; V. 47, p. 619–627, 1999.

Yokoyama, T. Possible effects of secular resonances in Phobos and Triton. *Planetary and Space Sciences*; V. 50, p. 63-77, 2002.

Yokoyama, T.; Frouard, J. H.; Deienno, R. Effect of High Inclined and Eccentric Disturbances on the Dynamics of the Equator of an Axy-Symmetric Body. *American Astronomical Society*, 2013.