

UNESP
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2010

RAFAEL AUGUSTO COUCEIRO CORREA

ESTUDO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES EM TEORIA DE
CAMPOS EM BAIXAS DIMENSÕES

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá
2010

C824e	Correa, Rafael Augusto Couceiro Estudo de sistemas não-lineares em teoria de campos em baixas dimensões / Rafael Augusto Couceiro Correa . – Guaratinguetá : [s.n.], 2010 75 f. : il. Bibliografia: f. 68-71 Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2010 Orientador: Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra 1. Teoria de campos (Física) 2. Solitons I. Título CDU 530.145
-------	---

RAFAEL AUGUSTO COUCEIRO CORREA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

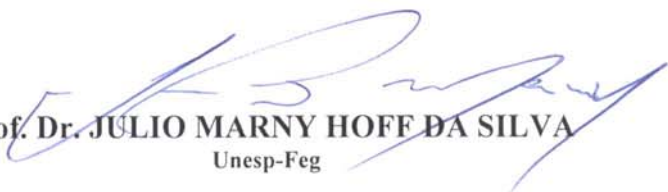
PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Silyia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ALVARO DE SOUZA DUTRA
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Unesp-Feg


Prof. Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR
IFT/SP

Agosto 2010

DADOS CURRICULARES

RAFAEL AUGUSTO COUCEIRO CORREA

NASCIMENTO	29.07.1983 – APARECIDA / SP
FILIAÇÃO	Santelmo Jorge Correa Célia Maria Couceiro Correa
2004/2008	Curso de Graduação em Bacharelado em Física Universidade Estadual Paulista - Campus de Guaratinguetá

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais e aos meus irmãos. Agradeço aos amigos e colegas que me acompanharam ao longo desse período, em especial aos amigos Luiz Augusto Guimarães Boldrin, Marcelo Gonçalves Garcia, Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes, Alessandro Luiz Ribeiro dos Santos, Elias Leite Mendonça e aos outros colegas. Agradeço a todos os professores do Departamento de Física e Química e do Departamento de Matemática, em especial agradeço aos professores Antonio Soares de Castro, Denis Dalmazi e Marcelo Batista Hott pela grande contribuição à minha formação. Agradeço especialmente ao professor Alvaro de Souza Dutra pela amizade, pela grande contribuição à minha formação e por seu grande esforço em passar toda sua experiência profissional.

Este trabalho contou com apoio da seguinte entidade

- CAPES

“Há três maneiras de agir sabiamente:
a primeira pela meditação, que é a mais sábia
a segunda pela imitação, que é a mais fácil
a terceira pela experiência, que é a mais amarga”

Confúcio

CORREA, R. A. C. **Estudo de sistemas não-lineares em teoria de campos em baixas dimensões**. 2010. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2010.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma breve introdução ao estudo dos sólitons. Além disso, introduzimos uma nova classe de configurações oscilantes do tipo lump e do tipo kink. Tais configurações são obtidas de forma analítica e exata, como consequência somos capazes de fazer a análise da estabilidade das soluções apresentadas. Por fim, apresentamos no último capítulo soluções de estados ligados de férmions na presença das novas configurações de campo que estamos apresentando neste trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Sólitons, lumps, férmions, paredes de domínio.

CORREA, R. A. C. **Study of nonlinear systems in field theory in low dimensions**. 2010. Dissertation (Master in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2010.

ABSTRACT

In this work we present a brief introduction to the study of solitons. Furthermore, we introduce a new class of oscillating Lorentz covariant configurations for the evolution of the domain walls which are analytically obtained in diverse dimensions. As a consequence, we are able to perform the analysis of the stability of the presented solutions. Finally, in the last chapter, we present analytical solutions of fermion bound states on the background of kinks of a class of asymmetrical scalar field.

KEYWORDS: Solitons, lumps, fermions, domain walls.

Lista de Figuras

FIGURA 1	26
FIGURA 2.....	28
FIGURA 3.....	31
FIGURA 4	33
FIGURA 5	34
FIGURA 6	37
FIGURA 7	39
FIGURA 8	41
FIGURA 9	45
FIGURA 10	46
FIGURA 11	49
FIGURA 12	50
FIGURA 13	50
FIGURA 14	53
FIGURA 15	58
FIGURA 16	58
FIGURA 17	65

Sumário

1	Uma breve introdução ao estudo dos sólitons	12
1.1	Introdução	12
1.2	Ondas solitárias e sólitons	13
1.3	Sólitons e ondas solitárias em $(1 + 1)$ dimensões	16
1.4	Pequenas oscilações e estabilidade	22
1.5	Carga topológica	23
2	Soluções flutuantes para a evolução de paredes de domínio	24
2.1	Introdução	24
2.2	Novos kinks em uma dimensão espacial	31
2.3	Novos lumps em uma dimensão espacial	34
2.4	Soluções flutuantes em duas dimensões	38
2.5	Soluções flutuantes em três dimensões	40
2.6	Soluções invariantes de Lorentz para configurações oscilantes	42
2.7	Conclusão	45
3	Estados ligados fermiônicos por kinks de modelos assimétricos	48
3.1	Introdução	48
3.2	Estados ligados fermiônicos na presença de kinks do modelo DQ	51
3.3	O caso do modelo DQA	59
3.4	Estados ligados fermiônicos para kinks do modelo $DQAG$	61
3.5	Conclusão	67

Capítulo 1

Uma breve introdução ao estudo dos sólitons

1.1 Introdução

O estudo de sistemas não-lineares tem sido alvo de grande interesse desde a década de 1960 [1, 2]. Atualmente a não-linearidade é encontrada em várias partes da Física, incluindo Física da Matéria Condensada, Teoria de Campos, Cosmologia e Física de Partículas [3]-[23]. Apesar deste crescente interesse ter sido iniciado a partir da década de 1960, foi em 1834 que John Scott Russell observando um barco que era puxado por um par de cavalos ao longo de um estreito canal entre as cidades escocessas de Edimburgo e Glasgow, notou que o barco ao ser freado bruscamente, produziu uma grande onda, bem definida e arredondada. Russell passou a seguir esta onda, e observou que ela continuava seu curso ao longo do canal mantendo sua forma e sem diminuir sua velocidade. É oportuno na presente seção fazer menção ao trecho descrito por Russell em 1844 [24], ao descrever o fenômeno observado.

"Eu estava observando o movimento de um barco que vinha sendo puxado rapidamente ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco, repentinamente, parou - Não apenas a massa de água no canal que havia sido colocada em movimento começou a se acumular em torno da proa da embarcação em estado de violenta agitação, mas de repente ela deixou-o para trás, deslizando para frente com grande velocidade, adquirindo a forma de uma grande elevação solitária, uma arredondada, suave e bem

definida “corcova” de água, a qual continuou seu curso através do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Eu a segui a cavalo e acompanhei seu avanço tranqüilo a uma taxa de cerca de oito ou nove milhas por hora, preservando sua forma original com algo como trinta pés de largura e um a um e meio pés de altura. Sua altura foi gradualmente diminuindo e, após uma caçada de uma ou duas milhas, eu a perdi nas bifurcações do canal. Esta, no mês de agosto de 1834, foi a minha primeira chance de contato com este singular e belo fenômeno, que decidi chamar de ondas de translação.”

Russell, passou a realizar várias experiências em laboratório, gerando o que ele chamou de *ondas de translação*, e conseguiu obter uma forma empírica para a velocidade da onda de translação. Em 1871, Boussinesq [25] e independentemente Lord Rayleigh [26] em 1876, passaram a estudar o problema matematicamente, mas foi apenas no ano de 1895 que Korteweg e De Vries [27] obtiveram uma expressão matemática para determinar a velocidade da onda observada por Russell.

Por outro lado, uma questão ainda chamava a atenção e não conseguia ser explicada, o fato que as ondas de translação, também chamadas de ondas solitárias, ao colidirem mantinham suas características, de modo que após a colisão permaneciam inalteradas preservando suas formas e velocidades. Tal fato, começou a ser melhor explicado apenas em 1965, por Zabusky e Kruskal [28]. Motivados pelo trabalho de Fermi, Pasta e Ulam [29] sobre a propagação de fônons em uma rede não-linear, Zabusky e Kruskal conseguiram explicar numericamente o problema, e em analogia aos prótons e fótons, sugeriram o nome de *sólitons* para as chamadas ondas não-lineares, também mostraram que as ondas solitárias observadas por Russell representam sóltons.

Atualmente, sóltons representam soluções de equações diferenciais não-lineares, com a característica de descrever fenômenos que apresentam densidades de energia localizadas e energias finitas e que após interagir, mantêm suas formas inalteradas.

1.2 Ondas solitárias e sóltons

Como apresentamos na primeira seção deste capítulo, os nomes ondas solitárias e sóltons fazem referência a uma classe de soluções de equações de onda não-lineares. Para

melhor entender as características dessas soluções, nessa seção iremos apresentar algumas propriedades da equação de onda

$$\square\phi(x, t) = \partial^\mu \partial_\mu \phi(x, t) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0, \quad (1.1)$$

onde $\phi(x, t)$ é um campo escalar real em $(1 + 1)$ dimensões e c é a velocidade da luz. A equação acima apresenta duas importante características, as quais devem ser discutidas, uma vez que são fundamentais para nossa melhor compreensão a respeito de ondas solitárias e sólitons.

A primeira característica vem do fato de que qualquer função da forma $f(x \pm ct)$ será solução da equação de onda (1.1), desde que seja real e bem comportada. Em particular, podemos construir um pacote de onda bem localizado que viaja com velocidade uniforme $\pm c$ e que mantém sua forma. Assim, podemos escrever a função $f(x \pm ct)$ em termos das funções de ondas planas do tipo $\sin(kx \pm \omega t)$ e $\cos(kx \pm \omega t)$, pois elas formam um conjunto completo de soluções para a equação de onda, portanto escrevemos

$$f(x \pm ct) = \int dk [a_\pm(k) \cos(kx \pm \omega t) + b_\pm(k) \sin(kx \pm \omega t)]. \quad (1.2)$$

O fato do pacote de onda $f(x \pm ct)$ viajar mantendo sua forma e sua velocidade, está relacionado ao fato que todos os seus componentes possuírem a mesma velocidade de onda ($c = \omega/k$).

Por outro lado, a segunda característica surge do fato de que a soma de dois pacotes de onda localizados, $f_1(x - ct)$ e $f_2(x + ct)$, também será uma solução

$$f_3(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (1.3)$$

Então, quando $t \rightarrow -\infty$, teremos dois pacotes de onda localizados que se encontram separados, e que estão se aproximando sem destruírem suas formas. Em um dado t finito, eles colidem. Após a colisão eles se afastam um do outro com $t \rightarrow \infty$, mas mantendo suas formas e velocidades originais. Destacamos que para a equação (1.1), esta propriedade será válida para mais de dois pacotes de onda.

As duas características que mencionamos acima, ou seja, a retenção da forma e velocidade de um pacote de onda mesmo após sofrerem colisões são características das soluções da equação (1.1), que é uma equação simples, sendo linear e não dispersiva. No entanto,

várias equações na Física são mais complicadas, podendo conter termos não-lineares, dispersivos, e com vários campos acoplados. A presença destes termos na equação (1.1), tende a destruir as características apresentadas, mesmo em $(1 + 1)$ dimensões. Como exemplo, podemos considerar a equação de Klein-Gordon em duas dimensões

$$(\square + m^2 c^2)\phi(x, t) = 0. \quad (1.4)$$

A equação acima é linear, e funções do tipo ondas planas formam um conjunto completo de soluções, mas agora diferentes comprimentos de onda viajam com diferentes velocidades. Então, o pacote de onda que tem a forma em $t = 0$ igual a

$$f(x) = \int dk [a(k) \cos(kx) + b(k) \sin(kx)], \quad (1.5)$$

irá se alargar com o tempo. Desta forma, a característica do pacote de onda ser não dispersivo é perdida, conseqüentemente não existem pacotes de onda que mantêm suas formas depois de sofrerem colisões.

Outro exemplo que podemos considerar é aquele em que adicionamos um termo não-linear na equação (1.1), como exemplo escrevemos

$$\square\phi + \phi^3 = 0, \quad (1.6)$$

esta equação possui apenas algumas soluções que são obtidas através de métodos numéricos ou aproximados.

No entanto, é possível que para algumas equações onde os termos não-lineares e dispersivos estão presentes, os efeitos médios de cada um deles se compensem, assim fazendo com que a característica do pacote de onda de manter sua forma e velocidade seja satisfeita, podendo ocorrer em uma, duas ou três dimensões espaciais. Quando isso ocorre, dizemos que as soluções são as chamadas ondas solitárias. Por outro lado, quando a característica dos pacotes de onda de manter suas formas após sofrer colisões também é mantida, as soluções são chamadas de sólitons.

Para utilizar uma definição mais precisa sobre ondas solitárias e sólitons, devemos utilizar o conceito de densidade de energia $\varepsilon(x, t)$, a qual é alguma função do campo $\phi(x, t)$. No caso da teoria clássica de campos em uma dimensão espacial e uma dimensão temporal a dinâmica da teoria é descrita pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (1.7)$$

onde μ é igual a 0 ou 1, onde $V(\phi)$ é uma função de ϕ , ou seja, é o potencial dependente do campo. Desta forma, a energia funcional de qualquer configuração de campo é dada por

$$E[\phi] = \int dx [(1/2)(\partial_0 \phi)^2 + (1/2)(\partial_1 \phi)^2 + V(\phi)]. \quad (1.8)$$

Se a energia é limitada inferiormente, $V(\phi)$ também deverá ser limitado inferiormente, neste caso sempre podemos adicionar uma constante ao potencial, tal que o valor mínimo de V seja zero. Note que, a partir da equação (1.8), o estado de mínima energia (estado fundamental) é aquele para o qual ϕ_i é, independentemente do tempo e do espaço, os zeros de V . Assim, se V tem vários zeros, a teoria tem vários estados de vácuo. Utilizamos a palavra "localizada", muitas vezes encontrada na literatura, para especificar as soluções de equações de campo com densidade de energia $\varepsilon(x, t)$ finita.

Com isso, uma onda solitária é definida como uma solução com densidade de energia localizada e não-singular de alguma equação de campo não-linear (ou acopladas, quando vários campos estão envolvidos) cuja densidade de energia tem uma dependência da forma

$$\varepsilon(\vec{x}, t) = \varepsilon(\vec{x} - \vec{u}t), \quad (1.9)$$

onde $\vec{u}$ é algum vetor velocidade. Em outras palavras, a densidade de energia deve se mover com velocidade constante e mantendo sua forma.

Por outro lado, sólitons são ondas solitárias cujo perfil da densidade de energia no limite assintótico ($t \rightarrow \infty$) recupera sua forma e velocidade originais mesmo após sofrerem colisões. Enquanto todos sólitons são ondas solitárias, o contrário não é verdade.

1.3 Sólitons e ondas solitárias em $(1 + 1)$ dimensões

Como mencionamos na seção anterior, sólitons são soluções de equações de campo não-lineares, que apresentam densidade de energia localizada (bem definida) e que após sofrerem colisões mantêm suas formas e velocidades originais. Assim, nesta seção apresentamos os fundamentos teóricos para encontrar soluções do tipo sóliton. Iniciamos com a

teoria ϕ^4 , a qual é muito familiar no contexto da Teoria Quântica de Campos, nesta teoria o potencial $V(\phi)$ pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}\phi^4 - \mu^2\phi^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda}, \quad (1.10)$$

com λ e μ^2 sendo parâmetros positivo definidos. Este potencial também pode ser escrito na forma

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - a^2)^2, \quad (1.11)$$

onde $a^2 \equiv \mu^2/\lambda$. Os dois mínimos do potencial estão localizados em $\phi = \pm a$.

Outro exemplo que também podemos utilizar é o da chamada teoria de Sine-Gordon, onde o potencial pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{\alpha}{\beta^2}[1 - \cos(\beta\phi)], \quad (1.12)$$

onde α e β são parâmetros reais. É interessante ressaltar que este tipo de sistema tem sido usado no estudo de um amplo número de fenômenos, incluindo a propagação de deslocamentos em cristais, condução de ondas em membranas, fluxo magnético nas linhas Josephson e em modelos em duas dimensões de partículas elementares [2, 35]. No modelo de Sine-Gordon as configurações de menor energia são aquelas nos quais ϕ é um múltiplo inteiro de $2\pi/\beta$.

Retornando à idéia desta seção, vamos procurar as soluções das equações de movimento. Para soluções independentes do tempo, o princípio de Hamilton se reduz a

$$\delta E = \delta \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_1 \phi)^2 + V(\phi) \right] = 0. \quad (1.13)$$

Porém, nem todas as soluções possuem energia finita. Para a integral (1.8) convergir é necessário que o campo $\phi(x)$ tenda aos zeros do potencial com $x \rightarrow \pm\infty$. Em outras palavras, é necessário que nos limites assintóticos ($x \rightarrow \pm\infty$) o campo ϕ seja um dos vácuos do potencial.

A discussão acima pode ser aplicada a modelos em que o potencial V tenha dois mínimos adjacentes, sendo a forma do potencial V entre os zeros irrelevantes. Além disso, o comportamento de V fora da região entre os zeros também é irrelevante.

Assim, podemos dizer que se o potencial V tem somente um zero, não existem soluções independentes do tempo com energia finita. Por outro lado, para potenciais que apresentam dois pontos de mínimo, a configuração do campo ϕ pode permanecer em um dos zeros do potencial com $x \rightarrow \pm\infty$, ou mover-se de um dos mínimos de V com $x \rightarrow -\infty$ para o outro mínimo com $x \rightarrow \infty$.

Para encontrar as configurações estáticas do campo escalar, utilizamos a equação de movimento, que se reduzirá a

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (1.14)$$

onde linha significa derivada em relação à coordenada espacial. Multiplicando a equação acima por ϕ' e integrando em x , temos

$$\int dx \phi' \phi'' = \int dx \phi' \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (1.15)$$

que poderá ser reescrita como

$$\int \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (\phi')^2 \right] dx = \int \frac{dV}{dx} dx, \quad (1.16)$$

desta maneira, encontramos

$$\frac{1}{2} (\phi')^2 = V(\phi) + C_0, \quad (1.17)$$

onde C_0 é uma constante arbitrária de integração.

Integrando a equação acima, chegamos em

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi) + C_0}}. \quad (1.18)$$

O parâmetro arbitrário ϕ_0 é o valor de ϕ em $x_0 = 0$, e pode ser qualquer valor entre os dois zeros adjacentes do potencial. É interessante destacar que a presença deste parâmetro ϕ_0 é apenas uma questão de invariância espacial translacional. Este fato pode ser visualizado dizendo que se $f(x)$ é solução de (1.18) com algum valor fixo ϕ_0 , então a solução geral com ϕ_0 arbitrário será

$$\phi = f(x - b), \quad (1.19)$$

onde b é arbitrário. Em outras palavras, o centro da solução pode ser qualquer. Com a equação (1.17), a expressão da energia total (1.8) pode ser simplesmente escrita como

$$E = \int dx (\partial_1 \phi)^2 = \int d\phi \sqrt{2V(\phi) + C_0}. \quad (1.20)$$

O método apresentado até aqui para encontrar soluções das configurações de campo, é usualmente conhecido na literatura. Como vimos, ele permite reduzir uma equação de segunda ordem a uma equação de primeira, independentemente da forma de $V(\phi)$. Entretanto, é interessante que o potencial seja uma função bem comportada do campo, além disso, deve ser positiva e limitada inferiormente.

No sentido de garantir que a energia seja bem definida nos limites assintóticos da configuração do campo, o valor da constante arbitrária de integração C_0 deve ser zero.

Um outro método, também encontrado na literatura, é o chamado método de Bogomol'nyi [22, 30]. Tal método consiste em reescrever a energia funcional total do sistema, de tal maneira que seja possível encontrar a equação (1.17). Para fazer isto, devemos manipular os termos da energia funcional de tal forma que possamos completar quadrado,

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\partial_1 \phi \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm \sqrt{2V} (\partial_1 \phi) \right]. \quad (1.21)$$

É interessante destacar que na equação acima o último termo, após ser integrado por partes, vai dar origem à contribuição da carga topológica para a energia.

Então, para valores fixos de ϕ com $x \rightarrow \pm\infty$, a energia será mínima se

$$\partial_0 \phi = 0, \quad (1.22)$$

ou seja, o campo escalar é estático. Além disso, devemos ter

$$\partial_1 \phi \mp \sqrt{2V(\phi)} = 0, \quad (1.23)$$

pois as possíveis configurações são aquelas em que nos limites assintóticos a configuração do campo se encontra em um dos mínimos do potencial, que neste caso é zero, por este motivo escolhemos $C_0 = 0$. Assim, escrevemos

$$\frac{1}{2} (\partial_1 \phi)^2 = V(\phi). \quad (1.24)$$

Portanto, o valor mínimo de energia será

$$E_{min.} = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} d\tilde{\phi} \sqrt{2V(\tilde{\phi})}. \quad (1.25)$$

É importante notar que o método de Bogomol'nyi possibilita obter a equação diferencial de primeira ordem, e também escrever a energia mínima, muitas vezes chamadas de energia BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Somerfield) [22, 30].

Agora, para ilustrar uma aplicação do método de obter soluções para a configuração do campo escalar, vamos utilizar os dois exemplos apresentados, modelo ϕ^4 e de Sine-Gordon.

No modelo ϕ^4 , a equação (1.18) ficará

$$x - x_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} \frac{1}{\tilde{\phi}^2 - a^2}. \quad (1.26)$$

Resolvendo a integral acima e invertendo a equação para obter ϕ em função de x , chegamos a

$$\phi(x) = \pm a \tanh[\mu(x - x_0)], \quad (1.27)$$

onde assumimos que $\phi_0 = 0$. Os sinais $+$ e $-$ na solução acima se referem aos chamados kinks e antikinks, respectivamente. As soluções para o kink e antikink conectam os dois mínimos do potencial, saindo de $\phi(x \rightarrow -\infty) = \mp a$ e terminando em $\phi(x \rightarrow \infty) = \pm a$.

Note que, o efeito da invariância translacional é observada explicitamente, ou seja, x_0 provoca um desvio espacial na solução. Outro fato interessante, é a simetria da densidade de lagrangiana sob a troca $x \leftrightarrow -x$ e separadamente sob a troca $\phi \leftrightarrow -\phi$, vemos que estas trocas refletem nas relações

$$\phi_{kink}(x) = -\phi_{antikink}(x) = \phi_{antikink}(-x), \quad (1.28)$$

onde fizemos $x_0 = 0$. Esta simetria de reflexão mantém invariante a lagrangiana sob a troca de $\phi \leftrightarrow -\phi$, esta simetria é chamada Z_2 . Por este motivo, alguns autores costumam denominar o kink de " Z_2 kink".

A densidade de energia da solução do kink é dada por

$$\varepsilon(x) = 4\mu^4 \lambda \{\text{sech}[\sqrt{2\lambda}\mu(x - x_0)]\}^4. \quad (1.29)$$

Assim, a energia total do kink, as vezes chamada massa clássica do kink $M_{cl.}$, fica sendo

$$E = M_{cl.} = \frac{4\mu^3}{3\lambda}. \quad (1.30)$$

Portanto, a energia total é finita e o kink é uma onda solitária. Através de cálculos numéricos, é possível mostrar que um kink e um antikink que estão se aproximando um do outro, não retêm suas formas após colidirem. Este fato, mostra que o kink é uma onda solitária, mas não um sólito.

Além de tudo, para sistemas com invariância relativística, uma vez conhecida a solução estática, soluções dependentes do tempo podem ser obtidas através de um boost de Lorentz (veja apêndice), isto é, passando para um sistema de coordenadas em movimento.

Então, a solução estática do kink pode ser transformada para a solução do kink em movimento através do boost de Lorentz, neste caso a solução será

$$\phi_v(x, t) = \pm a \tanh\{\mu\gamma[(x - x_0) - vt]\}, \quad (1.31)$$

com $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Agora, a solução dependente do tempo da energia total é

$$E_v = \gamma M_{cl.}. \quad (1.32)$$

onde $M_{cl.}$ é a massa clássica da configuração estática.

No caso do modelo de Sine-Gordon, encontramos que

$$\phi(x) = \frac{4}{\beta} \arctan[\exp(\sqrt{\alpha}x)], \quad (1.33)$$

e a correspondente energia, é dada por

$$E = M_{cl.} = \frac{8\sqrt{\alpha}}{\beta^2}. \quad (1.34)$$

Aplicando o boost de Lorentz, a solução do modelo de Sine-Gordon é escrita como

$$\phi(x) = \frac{4}{\beta} \arctan \left\{ \exp \left[\sqrt{\alpha}\gamma(x - vt) \right] \right\}. \quad (1.35)$$

A solução do modelo de Sine-Gordon, representa um sólito, uma vez que mesmo após sofrer colisões mantém sua forma inalterada, em contraste com a solução do kink da teoria

$\lambda\phi^4$.

1.4 Pequenas oscilações e estabilidade

Vimos nas seções anteriores que é possível para qualquer teoria que envolva um campo escalar em uma dimensão espacial e que possui mais de um estado de energia mínima (estado de vácuo), encontrarmos soluções independentes do tempo com energia finita.

No entanto, devemos verificar se estas soluções são estáveis sob pequenas perturbações [19, 23]. Neste sentido, vamos analisar este problema nesta seção. A equação de movimento para a densidade de lagrangiana (1.7) é dada por

$$\square\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (1.36)$$

consideremos a solução da forma

$$\phi(x, t) = \phi_{clas.}(x) + \eta(x, t), \quad (1.37)$$

onde a função $\phi_{clas.}(x) = \phi(x)$ é a solução clássica independente do tempo e $\eta(x, t)$ é o termo responsável pela perturbação. Inserindo a expressão (1.37) na equação de movimento (1.36) e tomando apenas os termos em primeira ordem na perturbação, chegamos a

$$\square\eta + \frac{d^2V(\phi_{clas.})}{d\phi^2}\eta = 0, \quad (1.38)$$

Esta equação é invariante sob transformações temporais, deste modo, podemos escrever o termo perturbativo $\eta(x, t)$ como uma superposição dos estados

$$\eta(x, t) = \text{Re} \sum_n a_n e^{i\omega_n t} \psi_n(x). \quad (1.39)$$

Então, teremos que

$$-\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + V''(\phi_{clas.})\psi_n = \omega_n^2\psi_n. \quad (1.40)$$

Observe que a equação acima é do tipo de Schrödinger, com o potencial sendo $V''(\phi_{clas.})$, onde linha representa a derivada em relação ao campo $\phi_{clas.}$. Com isso, dizemos que a

solução é estável se os auto-valores desta equação assumirem apenas valores positivos ou nulos, caso contrário a solução será instável.

1.5 Carga topológica

Uma maneira de caracterizar as soluções do tipo kink e do tipo lump, é notar a presença de uma corrente conservada do tipo

$$j^\mu = c \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (1.41)$$

onde $\nu, \mu = 0, 1$, $\varepsilon^{\mu\nu}$ é o tensor antisimétrico em duas dimensões ($\varepsilon^{01} = 1$) e c é uma constante conveniente, que pode ser escolhida de acordo com o modelo em estudo. Através da antisimetria de $\varepsilon^{\mu\nu}$, vemos que j^μ é conservada: $\partial_\mu j^\mu = 0$. Portanto,

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 = c [\phi(\infty) - \phi(-\infty)], \quad (1.42)$$

onde Q é a carga conservada, chamada de carga topológica do modelo sob análise. Para configurações em que o valor da carga topológica resulta em $Q \neq 0$, dizemos que a solução é topológica. Caso contrário, com $Q = 0$, dizemos que a solução é não-topológica. Por exemplo, na configuração do tipo kink (1.27) do modelo $\lambda\phi^4$, a carga topológica é

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 = \frac{1}{2a} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = 1, \quad (1.43)$$

então, dizemos que a configuração é topológica.

Capítulo 2

Soluções flutuantes para a evolução de paredes de domínio

2.1 Introdução

Como mencionamos no primeiro capítulo desta dissertação, o estudo de sistemas não-lineares tem sido alvo de grande interesse nos últimos anos [1]-[41]. Atualmente a não-linearidade é encontrada em várias áreas da Física, incluindo Física da Matéria Condensada, Teoria de Campos, Cosmologia e outras [42]-[68]. Particularmente, quando temos um potencial com dois ou mais mínimos degenerados, podemos encontrar diferentes vácuos para diferentes regiões do espaço. Assim, podemos encontrar paredes de domínio conectando tais regiões.

Em dois belos trabalhos, Coleman [58, 59] descreveu o que ele denominou "destino do falso vácuo" através de análises semi-clássicas de um modelo $\lambda\phi^4$ assimétrico. Em tal situação o processo de decaimento da configuração do campo a partir do vácuo local para o vácuo global é analisado. Em um trabalho recente apresentado por Dunne e Wang [60], foi mostrado que na presença de gravidade algumas soluções flutuantes do tipo bounce são possíveis, neste último trabalho esses bounces oscilantes foram encontrados numericamente. Em nosso trabalho, vamos mostrar que essas configurações aparecem para o caso sem interação gravitacional. Além disso, Dunne e Wang, analisaram o problema utilizando a ação euclidiana, deste modo encontrando soluções do tipo instanton ($\phi(t)$). Em nosso trabalho, vamos analisar o problema na métrica de Minkowski, sendo assim encontrando soluções do tipo kinks e lumps ($\phi(x)$) [61].

Como observado por Coleman [58], este tipo de sistema pode ser usado para descrever processos de nucleação em Física Estatística, de cristalização de uma solução supersaturada, de ebulição de um líquido superaquecido e até mesmo no caso da evolução dos modelos cosmológicos. Nesta última aplicação, pode-se supor que quando o universo foi criado ele estava próximo de algum estado de vácuo. Conforme se expandiu e se resfriou ele evoluiu primeiro para um vácuo falso em vez do verdadeiro. Assim, em tal cenário, com o passar do tempo o universo finalmente deve decair para o estado de vácuo verdadeiro.

Como veremos a seguir, uma consequência importante dessas soluções oscilantes é que o processo de decaimento pode ser retardado quando comparado com as configurações não-oscilantes. Além disso, considerando o caso de paredes de domínio estáticas, vemos que as configurações oscilantes apresentam estruturas mais largas quando comparadas com as paredes de domínio usuais.

Além disso, como veremos adiante, existem algumas configurações covariantes que são capazes de descrever a evolução de sistemas a partir de um vácuo falso para um vácuo verdadeiro. O tempo que a configuração leva para transitar de um vácuo para o outro, depende do número de oscilações [61]. Como observado anteriormente, este tipo de configuração pode ser usada para descrever alguns possíveis modelos de evolução cosmológica. Além disso, podemos pensar também em sistemas ferromagnéticos, que se iniciam com domínios magnéticos distribuídos aleatoriamente, ao aplicar um campo magnético externo os domínios que apresentam a orientação de sua magnetização na direção do campo externo podem ser considerados como vivendo no vácuo verdadeiro. O restante estará vivendo no vácuo falso, como consequência, devem tender a evoluir para o vácuo verdadeiro, alinhando-se com o campo magnético externo. Esse processo provavelmente não deve ocorrer repentinamente, eles podem oscilar antes de chegar ao verdadeiro vácuo. Desta forma, este processo iria demorar mais tempo para ocorrer, quando comparado com uma evolução direta do vácuo falso para vácuo verdadeiro.

Com o objetivo de encontrar soluções analíticas, trabalharemos com um modelo que corresponde a uma versão modificada do modelo introduzido por Horowitz, o qual seguindo uma sugestão de S. Aubry, quando estava estudando a presença de sólitons em cadeias discretas, Horowitz e colaboradores [63] introduziram o então chamado modelo duplo-quadrático (DQ) [64]-[67], cujo potencial é dado por

$$V(\phi) = \lambda^2 \left[\frac{1}{2} \phi^2 - v |\phi| + \frac{v^2}{2} \right]. \quad (2.1)$$

onde λ tem dimensão do inverso do comprimento. Neste caso, a ação para o modelo é escrita como

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right). \quad (2.2)$$

Se medirmos, x , y , z e t em unidades de $1/\lambda$, tomando $c = 1$, ϕ em unidades de v , e S em unidades de v^2/λ^2 , então a ação acima torna-se adimensional com

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2 - |\phi| + \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Este modelo foi introduzido por Stavros Theodorakis [66]. Ele permite obter soluções analíticas para as configurações de campo do tipo kink e do tipo lump, esta última configuração foi chamada no trabalho de Stavros Theodorakis de bolhas críticas. O modelo introduzido em [66] é uma versão assimétrica do modelo DQ o chamado modelo duplamente quadrático assimétrico (DQA), e está caracterizado pelo potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2 - |\phi| - \epsilon \phi + \frac{(\epsilon - 1)^2}{2}, \quad (2.4)$$

onde $0 < \epsilon < 1$. Lembramos que o potencial acima está escrito de forma a deixar a ação (2.2) adimensional. Na figura 1 encontra-se uma representação gráfica deste potencial. Um potencial semelhante foi utilizado para analisar o caso de misturas de água-óleo-surfactantes [70]. Então, as soluções descritas aqui também podem ter um importante impacto sobre este assunto.

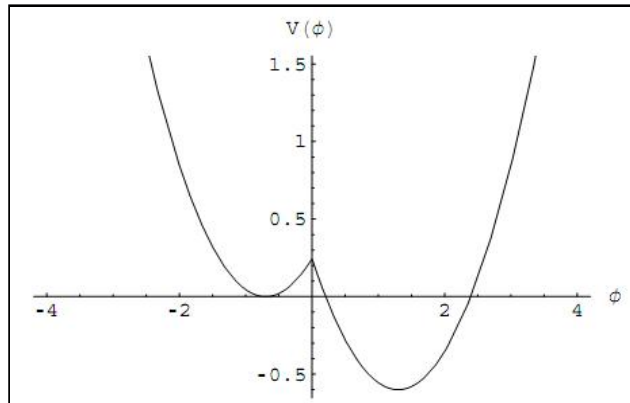


Figura 1: Potencial do modelo DQA com $\epsilon = 0.3$.

Como podemos ver, o modelo DQA é um tipo de modelo $\lambda\phi^4$ assimétrico, no qual o potencial possui uma derivada descontínua em $\phi = 0$, a qual foi chamada um "kink" em [66], em contraste com o significado da palavra utilizada usualmente no contexto da teoria de campos. Aqui vamos utilizar a palavra "kink" para a configuração de campo que interpola dois vácuos diferentes do modelo. Por outro lado, utilizaremos a palavra lump para a configuração de campo que conecta um vácuo a ele mesmo. Para o caso em estudo, existe um mínimo local do potencial em $\phi = \epsilon - 1$ e um global em $\phi = \epsilon + 1$. A equação de segunda ordem para o campo escalar deste modelo é dada por

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \phi + \phi - \frac{\phi}{|\phi|} - \epsilon = 0. \quad (2.5)$$

Note que quando fazemos $\epsilon = 0$, o potencial se transforma no potencial simétrico assumindo uma forma semelhante ao modelo $\lambda\phi^4$, como consequência podemos olhar para a configuração conectando os dois mínimos do potencial. Aqui, vamos considerar as configurações estáticas, uma vez que podemos recorrer as configurações não-estáticas simplesmente fazendo um boost de Lorentz. Isto significa que podemos definir um ponto arbitrário x_0 tal que, à esquerda dele o campo seja $\phi(x) < 0$ e à direita $\phi(x) > 0$. Além disso, quando $x \rightarrow \pm\infty$ devemos ter $\phi(x) \rightarrow \pm 1$. Assim, no caso em que $\epsilon = 0$, a equação (2.5) será

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \phi + \frac{\phi}{|\phi|} = 0, \quad (2.6)$$

de modo que as soluções em cada uma das regiões são dadas por

$$\phi(x) = 1 - A_1 e^{x_0 - x}, x > x_0 \quad (2.7)$$

$$\phi(x) = A_2 e^{x - x_0} - 1, x < x_0 \quad (2.8)$$

onde x_0 representa o centro da solução.

Note que, apesar do fato do potencial ter uma descontinuidade em sua derivada primeira, as soluções fisicamente aceitáveis para as configurações do campo devem ser contínuas, tanto para o campo quanto para a derivada primeira do campo. Esta re-

strição vem do fato que devemos procurar por configurações onde a densidade de energia seja contínua e não-singular. Assim, devemos impor que as soluções são tais que $\phi(x)$ e $d\phi(x)/dx$ são contínuas em todo o eixo espacial. Como consequência, as soluções (2.7) e (2.8) tornam-se

$$\phi(x) = 1 - e^{-(x-x_0)}, x > x_0 \quad (2.9)$$

$$\phi(x) = e^{(x-x_0)} - 1, x < x_0 \quad (2.10)$$

A solução acima foi apresentada em [66] para o caso do potencial simétrico ($\epsilon = 0$), e pode ser visualizado na figura 2.

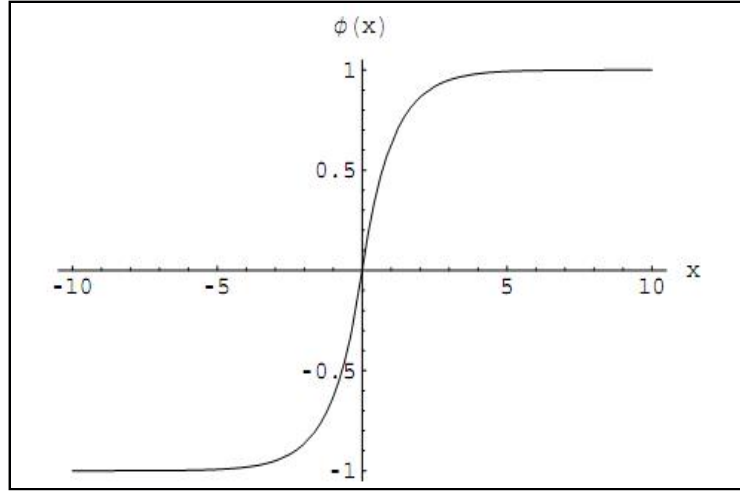


Figura 2: Kink do modelo DQ com $x_0 = 0$.

Observamos que, como esperado, para o caso onde $\epsilon = 0$ esta configuração de campo representa um kink, conectando os dois vácuos do potencial, o qual é muito semelhante ao kink do modelo $\lambda\phi^4$, que também possui solução analítica. Neste caso, mostraremos que é possível considerar uma classe de soluções analíticas do tipo kink e do tipo lump para o potencial proposto por Theodorakis [66]. Deste modo, estendendo amplamente as soluções quando comparadas com as soluções discutidas naquela referência. Além disso, podemos observar que a estabilidade das configurações não foram verificadas em [66]. Como parte do programa de nosso trabalho vamos verificar a estabilidade das soluções aqui apresentadas, o método que utilizaremos será o usual, o qual foi apresentado no primeiro capítulo desta dissertação.

Usualmente, soluções do tipo kink são estáveis, pelo menos quando estão relacionadas com a carga topológica como acontece com as soluções que são provenientes das equações de primeira ordem na abordagem BPS. Torna-se interessante destacar que nesta dissertação, e também no caso considerado em [66], estamos trabalhando com configurações não-topológicas, onde as soluções saem diretamente das equações diferenciais de segunda ordem, sendo assim não apresentando uma energia BPS associada a carga topológica. Portanto, a estabilidade não é garantida pela existência de cargas topológicas. Assim, para verificar a estabilidade das soluções utilizaremos o método apresentado no Capítulo 1, onde é feita uma pequena perturbação em torno da configuração estática clássica. Então, consideramos que

$$\phi(x, t) = \phi_{class}(x) + \eta(x, t). \quad (2.11)$$

Agora, fazendo uma expansão de Taylor para $V(\phi)$ em torno da solução estática clássica $\phi_{class.}(x)$, e mantendo os termos até a primeira ordem na perturbação $\eta(x, t)$, ficamos com

$$-\frac{d^2 n(x)}{dx^2} + V_{est}(x) n(x) = E n(x), \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + E T(t) = 0, \quad (2.12)$$

onde utilizamos o método de separação de variáveis, usando que $\eta(x, t) = n(x) T(t)$, e $V_{est} = d^2 V(\phi)/d\phi^2$. Para a equação dependente do tempo (2.12), temos a solução

$$T(t) = a e^{t \sqrt{-E}} + b e^{-t \sqrt{-E}}, \quad (2.13)$$

com a e b sendo constantes arbitrárias de integração. É simples concluir que, no sentido de sempre manter a solução finita e não nula, devemos impor que $E \geq 0$, tornando a solução do kink estável. Caso contrário a perturbação irá destruir a estabilidade com o passar do tempo.

Para o modelo aqui estudado o potencial de estabilidade é dado por

$$V_{est.} = 1 - 2 \delta[\phi_{class.}(x)], \quad (2.14)$$

e a correspondente equação de estabilidade é escrita como

$$\frac{d^2 n(x)}{dx^2} + 2 \delta[\phi_{class.}(x)] n(x) = (1 - E)n(x). \quad (2.15)$$

Agora, definindo que $\omega^2 = 1 - E$, encontramos a solução da parte homogênea

$$n(x)_+ = c_+ e^{-\omega x}, \quad x > x_0 \quad (2.16)$$

$$n(x)_- = c_- e^{\omega x}, \quad x < x_0. \quad (2.17)$$

Por outro lado, se reescrevermos a equação (2.15) como

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dn(x)}{dx} \right) - \omega^2 n(x) = -2 \delta(x) n(x) \quad (2.18)$$

e integrando em torno de x_0 , encontramos

$$\left(\frac{dn(x)}{dx} \right) \Big|_{x=x_0+\xi} - \left(\frac{dn(x)}{dx} \right) \Big|_{x=x_0-\xi} = - \frac{2n(x_0)}{\left| \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_0}}, \quad (2.19)$$

onde, por simplicidade, adotamos $x_0 = 0$, e tomamos o limite $\xi \rightarrow 0$, a qual leva a uma restrição sobre as constantes de integração, dada por

$$c_- = \frac{\omega}{2}(c_+ + c_-). \quad (2.20)$$

As equações (2.16) e (2.17) devem ser não-singulares no ponto x_0 , implicando em $c_- = c_+$. Usando este resultado, obtemos que $E = 0$, determinando que a configuração para a solução do campo escalar $\phi_{class}(x)$ é estável.

Os cálculos acima, mostram como é o procedimento geral para encontrar as soluções e verificar a estabilidade para este modelo de configuração de campo escalar. A seguir, usaremos o mesmo procedimento no sentido de construir algumas classes de configurações para a versão assimétrica deste modelo. Por exemplo, vamos construir uma solução conectando o vácuo falso em $\phi = \epsilon - 1$ e o vácuo verdadeiro em $\phi = \epsilon + 1$. Para fazer isto, olhamos para o conjunto de equações para as regiões onde $\phi < 0$ e $\phi > 0$ respectivamente

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \phi + 1 - \epsilon, \quad \phi < 0, \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \phi - 1 - \epsilon, \quad \phi > 0, \quad (2.21)$$

e, novamente, impomos que o campo e sua derivada são funções contínuas, então teremos

$$\phi(x) = e^{x-x_0} - (1 - \epsilon), \phi < 0, \quad \phi(x) = (1 + \epsilon) - e^{x_0-x}, \phi > 0 \quad (2.22)$$

lembramos que $0 < \epsilon < 1$. A solução acima aparece plotada na figura 3. Nesta solução temos novamente uma solução do tipo kink para o modelo *DQA*. Contudo, a presente solução conecta o vácuo falso quando $x \rightarrow -\infty$ ao vácuo verdadeiro quando $x \rightarrow \infty$.

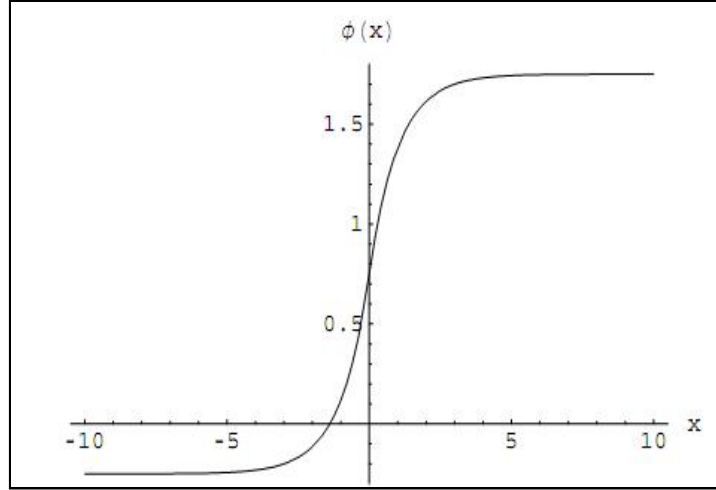


Figura 3: Kink do modelo *DQA* com o parâmetro $\epsilon = 0.3$.

Para análise da estabilidade, utilizamos o mesmo desenvolvimento do caso no qual $\epsilon = 0$, deste modo chegamos novamente no final com o valor $E = 0$, que determina uma solução estável, onde a configuração do kink não é destruída. No trabalho de Stavros [66] é feito o caso em que o potencial tem dois mínimos degenerados ($\epsilon = 0$). Nesta mesma referência é apresentada a discussão para o caso de $\epsilon \neq 0$, em que é afirmado que não podemos ter uma parede de domínio estática entre o vácuo verdadeiro e o falso, pois é impossível conectar uma região de falso vácuo com uma região de vácuo verdadeiro.

Contudo, em nosso trabalho mostramos que a afirmação apresentada em [66] não aplica-se para todos os casos, pois apresentamos a solução estática em uma dimensão espacial do tipo kink para o caso em que $0 < \epsilon < 1$, onde temos uma região de vácuo falso conectado a uma região de vácuo verdadeiro através de uma configuração do tipo kink.

2.2 Novos kinks em uma dimensão espacial

Nesta seção, apresentamos uma nova solução estática do tipo kink para o modelo *DQA*. Para isto, supomos que existem quatro regiões onde o campo apresenta alternância de

sinais. Especificamente, vamos olhar para soluções onde $\phi_I < 0$, $\phi_{II} > 0$, $\phi_{III} < 0$ e $\phi_{IV} > 0$. Como consequência, os pontos, x_1 , x_2 e x_3 os quais separam estas regiões, correspondem aos zeros do campo escalar $\phi(x)$. Utilizando as equações dadas em (2.21), obtemos as soluções

$$\phi_I(x) = A_I e^x + B_I e^{-x} - (1 - \epsilon), \quad (2.23)$$

$$\phi_{II}(x) = A_{II} e^x + B_{II} e^{-x} + 1 + \epsilon, \quad (2.24)$$

$$\phi_{III}(x) = A_{III} e^x + B_{III} e^{-x} - (1 - \epsilon), \quad (2.25)$$

$$\phi_{IV}(x) = A_{IV} e^x + B_{IV} e^{-x} + 1 + \epsilon. \quad (2.26)$$

A finitude da solução ao longo de todo o eixo espacial implica em uma restrição das constantes arbitrárias de integração, de tal forma que devemos impor que $B_I = 0$ e $A_{IV} = 0$. Por outro lado, devemos requerer que os campos se aproximem assintoticamente dos vácuos do modelo, dados por $\phi_I(-\infty) = -1 + \epsilon$ e $\phi_{IV}(\infty) = 1 + \epsilon$. Além disso, para os zeros de ϕ , vamos admitir que $\phi_I(x_1) = \phi_{II}(x_1) = 0$, $\phi_{II}(x_2) = \phi_{III}(x_2) = 0$ e $\phi_{III}(x_3) = \phi_{IV}(x_3) = 0$. Assim, chegamos a

$$\phi_I(x) = (1 - \epsilon)(e^{x-x_1} - 1), \quad (2.27)$$

$$\phi_{II}(x) = (1 + \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_1)}{\sinh(x_2 - x_1)} - \frac{\sinh(x_2 - x)}{\sinh(x_2 - x_1)} \right], \quad (2.28)$$

$$\phi_{III}(x) = -(1 - \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_2)}{\sinh(x_3 - x_2)} - \frac{\sinh(x_3 - x)}{\sinh(x_3 - x_2)} \right], \quad (2.29)$$

$$\phi_{IV}(x) = (1 + \epsilon)(1 - e^{x_3-x}). \quad (2.30)$$

A configuração acima é do tipo kink e está representada na figura 4.

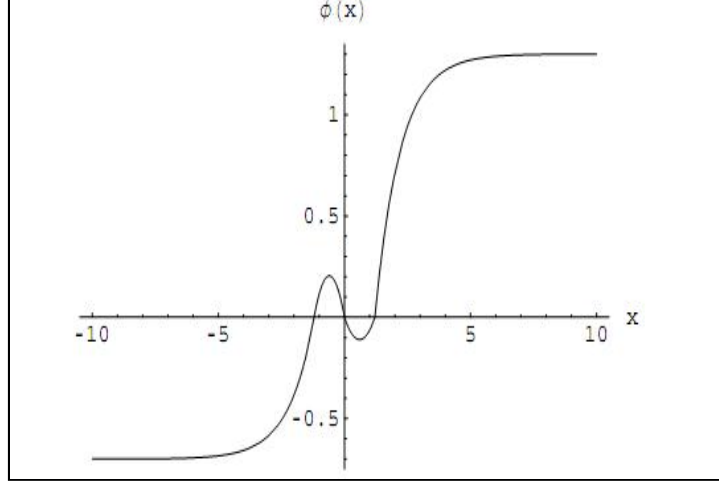


Figura 4: Solução do novo kink para $\epsilon = 0.3$.

Portanto, para que a primeira derivada da configuração do campo seja contínua em cada um dos pontos intermediários (x_1 , x_2 e x_3), devemos restringir que a distância entre estes pontos quando $0 < \epsilon < 1$ seja dada por

$$\frac{1 - \cosh(x_2 - x_1)}{\sinh(x_2 - x_1)} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} = \frac{1 - \cosh(x_3 - x_2)}{\sinh(x_3 - x_2)}, \quad (2.31)$$

a qual, depois de algumas manipulações algébricas é equivalente a requerer que

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \text{ArcCoth} \left[\frac{1 + \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right]. \quad (2.32)$$

É importante destacar que o caso onde $\epsilon = 0$ não pode ser recuperado a partir do caso com $0 < \epsilon < 1$, mas nessa situação particular podemos verificar que as diferenças $x_2 - x_1$ e $x_3 - x_2$ tendem a zero, então reproduzindo o caso considerado em [66].

Fazendo a análise da estabilidade desta nova solução, através do procedimento utilizado na seção anterior, encontramos a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \left[1 - \frac{1}{\omega(1 - \epsilon)} \right] e^{2\omega x_2} - \frac{1}{\omega(1 - \epsilon)} \left[1 - \frac{\alpha}{2} \right] + \\ & - \left(\frac{2 + \beta}{\beta} \right) \left\{ \frac{(\alpha + 2)}{2} \left[1 - \frac{1}{\omega(1 - \epsilon)} \right] + \frac{\alpha e^{-2\omega x_3}}{2\omega(1 - \epsilon)} \right\} e^{\omega x_3} = 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

com $\omega = \sqrt{1 - E}$, $\alpha \equiv -2/(\omega |d\phi_2/dx|_{x=x_2})$ e $\beta \equiv -2/(\omega |d\phi_3/dx|_{x=x_3})$. Por exemplo, analisando o caso em que $\epsilon = 0.367$, vemos que existem duas soluções com energias negativas $E = -10.7113$ e $E = -1.49798$, as quais implicam na instabilidade das soluções.

Mais uma vez, foi possível encontrar uma solução do tipo kink, mas desta vez apresentando uma região oscilante, a qual pode se tornar cada vez maior ao se introduzirem mais regiões oscilatórias, como veremos mais adiante.

Por outro lado, uma vez que o modelo apresenta estes dois vácuos, podemos apresentar outras soluções analíticas conectando um dado vácuo a ele mesmo. Na literatura da Teoria de Campos estas soluções são usualmente chamadas de lumps, no trabalho apresentado por Stavros [66] ele chamou esse tipo de configuração de bolha crítica. Na verdade, podemos construir duas destas soluções, uma localizada no vácuo verdadeiro e outra no vácuo falso. Assim, na próxima seção apresentaremos estas soluções com mais detalhes.

2.3 Novos lumps em uma dimensão espacial

Antes de mais nada, vamos determinar uma solução que apresenta três regiões, iniciando e terminando em um vácuo verdadeiro. Em certo sentido, esta solução completa o conjunto de lumps ou bolhas críticas introduzida por Stavros Theodorakis em [66] (iniciando e terminando no vácuo falso). Na figura 5, podemos ver cada uma das soluções.

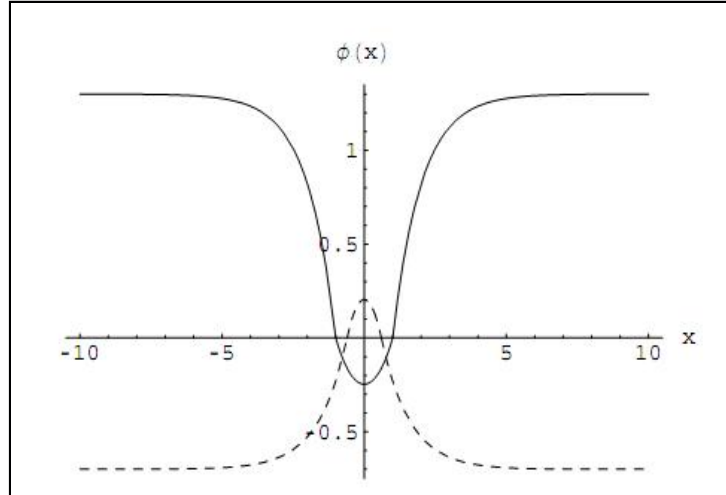


Figura 5: Soluções do tipo lump (bolha) em uma dimensão espacial para $\epsilon = 0.3$. A linha pontilhada é a solução apresentada por Theodorakis, a qual inicia e termina no vácuo falso e a linha sólida é a nossa solução, iniciando e terminando no vácuo verdadeiro.

Agora, o campo ϕ em cada uma das regiões deve se comportar respectivamente como $\phi_I > 0$, $\phi_{II} < 0$ e $\phi_{III} > 0$. Aplicando a condição segundo a qual cada função será nula nos pontos de zero, chegamos em

$$\phi_I(x) = (1 + \epsilon)(1 - e^{-x_1+x}), \quad (2.34)$$

$$\phi_{II}(x) = -(1 - \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_1) + \sinh(x_2 - x)}{\sinh(x_2 - x_1)} \right], \quad (2.35)$$

$$\phi_{III}(x) = (1 + \epsilon)(1 - e^{-x+x_2}). \quad (2.36)$$

Utilizando esta solução, podemos mostrar que ela é estável, em contraste com a solução apresentada por Stavros. Em outras palavras, o lump conectando o vácuo verdadeiro a ele mesmo é estável, e o lump conectando o vácuo falso a ele mesmo é instável.

Além disso, estamos interessados em construir soluções mais complexas, onde a largura da região entre o vácuo falso ou vácuo verdadeiro é maior. Para fazer isto, introduzimos uma nova classe de soluções, onde o campo entre os vácuos apresenta regiões alternadas. Assim, apresentamos um exemplo com cinco regiões, tal que $\phi_I < 0$, $\phi_{II} > 0$, $\phi_{III} < 0$, $\phi_{IV} > 0$ e $\phi_V < 0$. Novamente, os pontos x_1 , x_2 , x_3 e x_4 correspondem aos zeros de $\phi(x)$.

Deste modo, não é difícil concluir que a solução é dada por

$$\phi_I(x) = (1 - \epsilon)(e^{x-x_1} - 1), \quad (2.37)$$

$$\phi_{II}(x) = (1 + \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_1)}{\sinh(x_2 - x_1)} - \frac{\sinh(x_2 - x)}{\sinh(x_2 - x_1)} \right], \quad (2.38)$$

$$\phi_{III}(x) = -(1 - \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_2)}{\sinh(x_3 - x_2)} - \frac{\sinh(x_3 - x)}{\sinh(x_3 - x_2)} \right], \quad (2.39)$$

$$\phi_{IV}(x) = (1 + \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_3)}{\sinh(x_4 - x_3)} - \frac{\sinh(x_4 - x)}{\sinh(x_4 - x_3)} \right] \quad (2.40)$$

$$\phi_V(x) = (\epsilon - 1)(1 - e^{x_4-x}). \quad (2.41)$$

Este é o caso onde aplicamos a idéia para o caso explorado por Stavros, quando foi considerado a bolha crítica no vácuo falso. A diferença é que, agora, a configuração de

campo inicialmente está no vácuo falso, evoluindo e retornando novamente à configuração inicial. Neste processo de evolução, a configuração do campo oscila entre regiões em que ele assume valores positivos e negativos.

Agora, verificaremos a estabilidade desta nova solução. Neste caso, vemos na equação (2.12), que o potencial de estabilidade $V_{est} = 1 - 2\delta[\phi(x)]$ é dado por

$$\delta[\phi(x)] = \frac{\delta(x - x_1)}{\left| \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_1}} + \frac{\delta(x - x_2)}{\left| \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_2}} + \frac{\delta(x - x_3)}{\left| \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_3}} + \frac{\delta(x - x_4)}{\left| \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_4}}. \quad (2.42)$$

Desta vez a equação usada para encontrar as energias dos estados relacionados com a perturbação é escrita como

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta[1 - (1 + \gamma)]e^{2\omega x_4} - \gamma(1 - \beta) \right\} \left\{ \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left[\frac{1}{\omega(\epsilon - 1)} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\alpha}{2} \left[1 + \frac{1}{\omega(\epsilon - 1)} \right] e^{2\omega x_2} \right\} - \{ (\beta + 1)(\gamma + 2)e^{2\gamma\omega x_4} - \beta\gamma e^{2\gamma\omega x_3} \} \\ & \times \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left[\frac{1}{\omega(\epsilon - 1)} \right] + \frac{\alpha}{2} \left[1 + \frac{1}{\omega(\epsilon - 1)} \right] e^{2\omega x_2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

com

$$\alpha \equiv -\frac{2}{\omega \left| \frac{d\phi_2}{dx} \right|_{x=x_2}}, \quad \beta \equiv -\frac{2}{\omega \left| \frac{d\phi_3}{dx} \right|_{x=x_3}} \quad \text{and} \quad \gamma \equiv -\frac{2}{\omega \left| \frac{d\phi_4}{dx} \right|_{x=x_4}}.$$

A partir da equação (2.43), encontramos um valor negativo para a energia, sinalizando que esta configuração, e também a encontrada por Stavros, são instáveis.

A correspondente configuração iniciando e terminando no vácuo verdadeiro é

$$\phi_I(x) = (1 + \epsilon)(1 - e^{x-x_1}), \quad (2.44)$$

$$\phi_{II}(x) = -(1 - \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_1)}{\sinh(x_2 - x_1)} - \frac{\sinh(x_2 - x)}{\sinh(x_2 - x_1)} \right], \quad (2.45)$$

$$\phi_{III}(x) = (1 + \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_2)}{\sinh(x_3 - x_2)} - \frac{\sinh(x_3 - x)}{\sinh(x_3 - x_2)} \right], \quad (2.46)$$

$$\phi_{IV}(x) = -(1 - \epsilon) \left[1 - \frac{\sinh(x - x_3)}{\sinh(x_4 - x_3)} - \frac{\sinh(x_4 - x)}{\sinh(x_4 - x_3)} \right] \quad (2.47)$$

$$\phi_V(x) = (1 + \epsilon)(1 - e^{x_4-x}). \quad (2.48)$$

Cada uma destas soluções estão plotadas na figura 6.

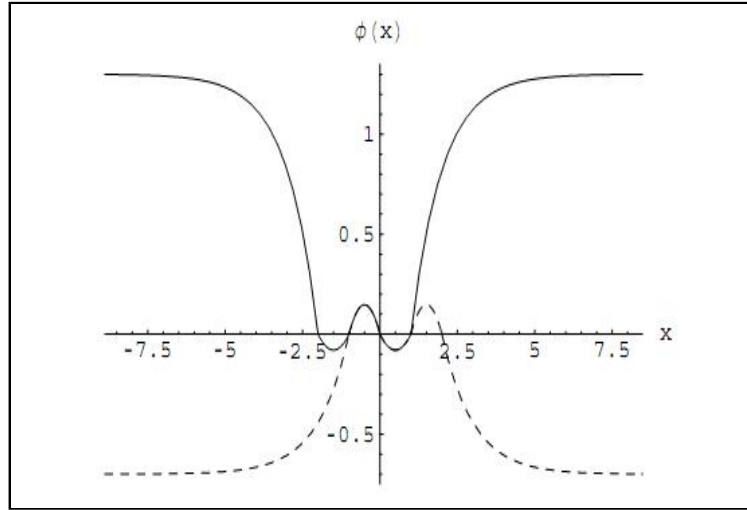


Figura 6: Soluções do tipo lump com duas oscilações para $\epsilon = 0.3$.

Comparando as soluções do tipo lump dadas pelas figuras 5 e 6, vemos que a configuração apresentada na figura 6 possui duas oscilações, o que não ocorre na figura 5, onde o retorno para o vácuo original acontece de forma direta.

2.4 Soluções flutuantes em duas dimensões

Em duas dimensões espaciais, as configurações estáticas esfericamente simétricas do modelo DQA , devem obedecer a seguinte equação

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = \phi - \frac{\phi}{|\phi|} - \epsilon, \quad (2.49)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, quando $r \rightarrow \infty$ o campo $\phi \rightarrow \epsilon - 1$.

Agora, iremos construir uma solução com quatro regiões distintas. Estas regiões são caracterizadas por $0 \leq \phi_1 \leq r_1$, $r_1 \leq \phi_2 \leq r_2$, $r_2 \leq \phi_3 \leq r_3$, $r_3 \leq \phi_4$, com $\phi_1 > 0$, $\phi_2 < 0$, $\phi_3 > 0$ e $\phi_4 < 0$. Então, obtemos

$$\phi_1(r) = A_1 I_0(r) + (1 + \epsilon), \quad (2.50)$$

$$\phi_2(r) = A_2 I_0(r) + B_2 K_0(r) - (1 - \epsilon), \quad (2.51)$$

$$\phi_3(r) = A_3 I_0(r) + B_3 K_0(r) + (1 + \epsilon), \quad (2.52)$$

$$\phi_4(r) = B_4 K_0(r) + (\epsilon - 1), \quad (2.53)$$

onde $I_0(r)$ e $K_0(r)$ são as funções de Bessel modificadas [71, 73].

Deste modo, impondo a condição de continuidade do campo em cada ponto de transição (em cada um de seus zeros), temos

$$\phi_1(r) = (1 + \epsilon) \left[1 - \frac{I_0(r)}{I_0(r_1)} \right], \quad (2.54)$$

$$\phi_2(r) = (1 - \epsilon) \left\{ \frac{[K_0(r_1) - K_0(r_2)]I_0(r) + [I_0(r_2) - I_0(r_1)]K_0(r)}{K_0(r_1)I_0(r_2) - K_0(r_2)I_0(r_1)} - 1 \right\}, \quad (2.55)$$

$$\phi_3(r) = (1 + \epsilon) \left\{ \frac{[K_0(r_2) - K_0(r_3)]I_0(r) + [I_0(r_3) - I_0(r_2)]K_0(r)}{K_0(r_3)I_0(r_2) - K_0(r_2)I_0(r_3)} + 1 \right\}, \quad (2.56)$$

$$\phi_4(r) = (\epsilon - 1) \left[1 - \frac{K_0(r)}{K_0(r_3)} \right]. \quad (2.57)$$

A solução deste kink oscilante está representada na figura 7.

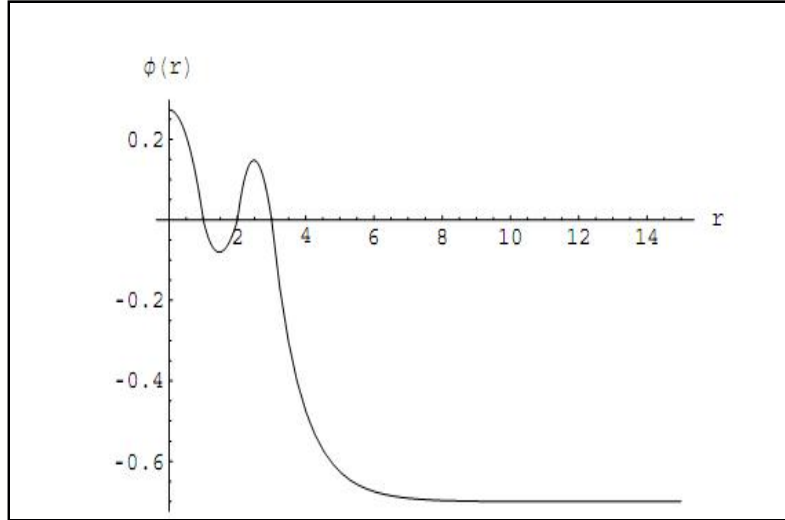


Figura 7: Soluções do kink em duas dimensões espaciais para $\epsilon = 0.3$.

A equação de estabilidade nesta dimensão é escrita como

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + V_{est.} \right) \Theta(r) = E\Theta(r), \quad (2.58)$$

onde as perturbações também são esfericamente simétricas e $V_{est} = 1 - 2 \delta[\phi(r)]$.

Resolvendo a equação (2.58), encontramos um valor positivo para o valor da energia de estabilidade, indicando que esta configuração em duas dimensões é estável, tal que, para uma pequena perturbação inicial na solução, ela permanecerá estável com o passar do tempo. Por exemplo, o valor do estado fundamental de energia da solução de (2.58) para esta configuração é $E_0 = 0.324452$ ($\epsilon = 0.3$). É interessante destacar que no caso da solução apresentada por Stavros, a solução também é estável com o valor de energia igual

a $E = 0.592$.

2.5 Soluções flutuantes em três dimensões

Nesta seção, vamos considerar o caso em três dimensões. Neste caso, as configurações estáticas de campo esfericamente simétricas devem obedecer à equação

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = \phi - \frac{\phi}{|\phi|} - \epsilon, \quad (2.59)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Abaixo construiremos uma solução que apresenta as mesmas características da solução discutida na seção anterior, mas agora em três dimensões. Assim, após aplicarmos a condição de continuidade, encontramos que a solução da equação acima é

$$\phi_1(r) = (1 + \epsilon) \left[1 - \frac{r_1 \sinh(r)}{r \sinh(r_1)} \right], \quad (2.60)$$

$$\phi_2(r) = (\epsilon - 1) \left\{ \frac{(r_1 e^{r_1} - r_2 e^{r_2}) e^r}{(e^{2r_2} - e^{2r_1}) r} + \frac{(r_2 e^{r_1} - r_1 e^{r_2})}{2r e^r} \operatorname{csch}(r_2 - r_1) + 1 \right\}, \quad (2.61)$$

$$\phi_3(r) = (\epsilon + 1) \left\{ \frac{(r_3 e^{r_3} - r_2 e^{r_2}) e^r}{(e^{2r_2} - e^{2r_3}) r} + \frac{(r_3 e^{r_2} - r_2 e^{r_3})}{2r e^r} \operatorname{csch}(r_3 - r_2) + 1 \right\}, \quad (2.62)$$

$$\phi_4(r) = (1 - \epsilon) \left[\frac{r_3}{r} e^{r_3 - r} - 1 \right]. \quad (2.63)$$

Esta solução está representada na figura 8. Objetivando verificar a estabilidade da configuração, a equação a ser resolvida em três dimensões espaciais agora é dada por

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + V_{est.} \right) \Theta(r) = E \Theta(r), \quad (2.64)$$

com $V_{est} = 1 - 2 \delta[\phi(r)]$.

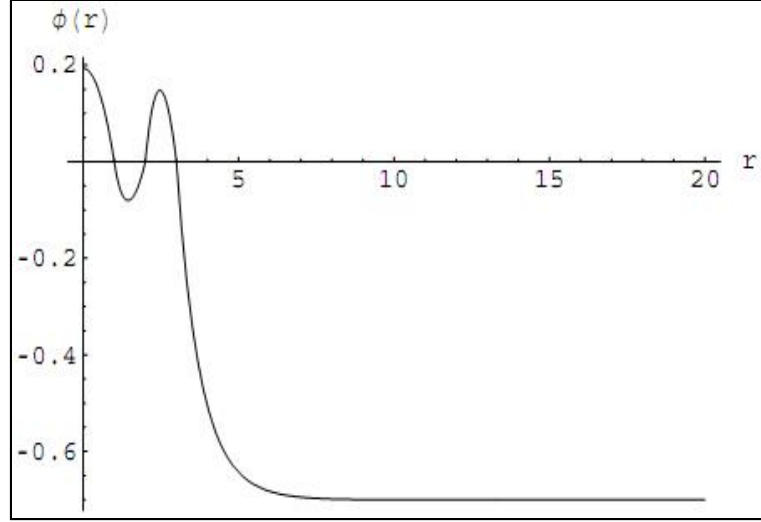


Figura 8: Soluções do kink em três dimensões espaciais para $\epsilon = 0.3$.

Neste caso, encontraremos a solução para cada um dos lados dos pontos de transição da seguinte equação

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Theta}{dr} + (E - 1)\Theta = 0 \quad (2.65)$$

então, obtemos

$$\Theta_1(r) = C_1 r^{-1} \sin(r\sqrt{1-E}), \quad (2.66)$$

$$\Theta_2(r) = C_2 r^{-1} \sin(r\sqrt{1-E}) + D_2 r^{-1} \cos(r\sqrt{1-E}), \quad (2.67)$$

$$\Theta_3(r) = C_3 r^{-1} \sin(r\sqrt{1-E}) + D_3 r^{-1} \cos(r\sqrt{1-E}), \quad (2.68)$$

$$\Theta_5(r) = C_5 r^{-1} \sin(r\sqrt{1-E}). \quad (2.69)$$

Por outro lado, a descontinuidade para cada um dos pontos apresenta uma função delta de Dirac, implicando que

$$r \frac{d\Theta}{dr} \Big|_{r=r_1+\xi} - r \frac{d\Theta}{dr} \Big|_{r=r_1-\xi} = \frac{2r_1\Theta_1(r_1)}{\left| \frac{d\phi_1}{dr} \right|_{r=r_1}}, \quad (2.70)$$

$$r \frac{d\Theta}{dr} \Big|_{r=r_2+\xi} - r \frac{d\Theta}{dr} \Big|_{r=r_2-\xi} = \frac{2r_1\Theta_2(r_2)}{\left| \frac{d\phi_2}{dr} \right|_{r=r_2}}, \quad (2.71)$$

$$r \frac{d\Theta}{dr} \Big|_{r=r_3+\xi} - r \frac{d\Theta}{dr} \Big|_{r=r_3-\xi} = \frac{2r_1\Theta_3(r_3)}{\left| \frac{d\phi_3}{dr} \right|_{r=r_3}}, \quad (2.72)$$

onde tomamos que $\xi \rightarrow 0$.

Usando a continuidade para cada um dos pontos de transição para as funções (2.66)-(2.69) e utilizando as três condições acima, obtemos uma equação transcendental que possibilita encontrar um valor negativo de energia. Desta forma, a configuração clássica é instável .

2.6 Soluções invariantes de Lorentz para configurações oscilantes

Como a lagrangiana do sistema em estudo é um invariante de Lorentz, podemos determinar as soluções que serão funções do tempo. Assim, vamos escrever o campo ϕ como sendo uma função de $x_\mu x^\mu = t^2 - r^2$, onde $r^2 = \sum_{i=1}^N x_i x_i$, com N representando o número de dimensões espaciais. Procuramos uma solução que represente uma transição entre o vácuo falso e o vácuo verdadeiro. Deste modo, o campo ϕ tende para $\epsilon + 1$ quando $x_\mu x^\mu \rightarrow \infty$, pois quando $t \rightarrow \infty$ o campo deverá se aproximar do vácuo verdadeiro, por outro lado, o campo ϕ tenderá para $\epsilon - 1$ com $x_\mu x^\mu \rightarrow -\infty$. Como estamos interessados em escrever uma família de novas soluções, propomos para o campo ϕ quatro regiões, onde $\phi_I < 0$, $\phi_{II} > 0$, $\phi_{III} < 0$ e $\phi_{IV} > 0$, semelhante ao caso da seção (2.2) onde discutimos o caso do novo kink.

Faremos a princípio a definição $s = t^2 - r^2$ de forma que $s = x_\mu x^\mu$. No entanto, podemos ter as regiões $t^2 - r^2 > 0$ e $t^2 - r^2 < 0$. Para $t^2 - r^2 > 0$, a equação de campo fica escrita como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi^2} + \frac{N}{\chi} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} + \phi - \frac{\phi}{|\phi|} - \epsilon = 0, \quad (2.73)$$

onde $\chi = \sqrt{t^2 - r^2} = \sqrt{s}$. Por outro lado, para $t^2 - r^2 < 0$ temos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{N}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \phi + \frac{\phi}{|\phi|} + \epsilon = 0, \quad (2.74)$$

com $\rho = \sqrt{r^2 - t^2} = \sqrt{-s}$.

As equações (2.73) e (2.74) fornecem as soluções

$$\phi(\chi) = \chi^{-p} [a_1 J_p(\chi) + a_2 Y_p(\chi)] + 1 + \epsilon, \text{ se } \phi > 0, t^2 - r^2 > 0 \quad (2.75)$$

$$\phi(\chi) = \chi^{-p} [b_1 J_p(\chi) + b_2 Y_p(\chi)] - 1 + \epsilon, \text{ se } \phi < 0, t^2 - r^2 > 0 \quad (2.76)$$

$$\phi(\rho) = \rho^{-p} [c_1 K_p(\rho) + c_2 I_p(\rho)] + 1 + \epsilon, \text{ se } \phi > 0, t^2 - r^2 < 0 \quad (2.77)$$

$$\phi(\rho) = \rho^{-p} [d_1 K_p(\rho) + d_2 I_p(\rho)] - 1 + \epsilon, \text{ se } \phi < 0, t^2 - r^2 < 0 \quad (2.78)$$

onde K_p , I_p são as funções de Bessel modificadas de ordem p [71, 73], com $p = (N + 1)/2$.

Após análise da condição $\phi \longrightarrow \epsilon \pm 1$ para $x_\mu x^\mu \rightarrow \pm\infty$ e também considerando que a função ϕ deve ser finita na origem, concluimos que as raízes da função ϕ deverão assumir valores negativos, assim ficamos com

$$\phi(\rho) = \epsilon - 1 + d_1 \rho^{-p} K_p(\rho), \quad t^2 - r^2 < s_1 \quad (2.79)$$

$$\phi(\rho) = \rho^{-p} [c_1 K_p(\rho) + c_2 I_p(\rho)] + 1 + \epsilon, \quad s_1 < t^2 - r^2 < s_2 \quad (2.80)$$

$$\phi(\rho) = \rho^{-p} [d_3 K_p(\rho) + d_4 I_p(\rho)] - 1 + \epsilon, \quad s_2 < t^2 - r^2 < s_3 \quad (2.81)$$

$$\phi(\rho) = 1 + \epsilon + c_3 \rho^{-p} I_p(\rho), \quad s_3 < t^2 - r^2 < 0 \quad (2.82)$$

$$\phi(\chi) = 1 + \epsilon + a_1 \chi^{-p} J_p(\chi), \quad t^2 - r^2 > 0. \quad (2.83)$$

Através do uso da condição de que cada ponto s_1, s_2, s_3, s_4 e s_6 representa uma raiz de ϕ e que em $s = 0$ a solução seja contínua, encontramos

$$\phi(\rho) = (\epsilon - 1) \left\{ 1 - \rho^{-p} (\rho_1)^p \frac{K_p(\rho)}{K_p(\rho_1)} \right\}, \quad t^2 - r^2 < s_1 \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = (\epsilon + 1) \left\{ \rho^{-p} \left[- \left(\rho_1^p + I_p(\rho_1) \frac{\rho_1^p K_p(\rho_2) - \rho_2^p K_p(\rho_1)}{I_p(\rho_2) K_p(\rho_1) - I_p(\rho_1) K_p(\rho_2)} \right) \frac{K_p(\rho)}{K_p(\rho_1)} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\rho_1^p K_p(\rho_2) - \rho_2^p K_p(\rho_1)}{I_p(\rho_2) K_p(\rho_1) - I_p(\rho_1) K_p(\rho_2)} \right) I_p(\rho) \right] + 1 \right\}, \quad s_1 < t^2 - r^2 < s_2 \quad (2.85) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = (\epsilon - 1) \left\{ \rho^{-p} \left[\left(\rho_2^p + I_p(\rho_2) \frac{\rho_2^p K_p(\rho_3) - \rho_3^p K_p(\rho_2)}{I_p(\rho_3) K_p(\rho_2) - I_p(\rho_2) K_p(\rho_3)} \right) \frac{K_p(\rho)}{K_p(\rho_2)} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\rho_2^p K_p(\rho_3) - \rho_3^p K_p(\rho_2)}{I_p(\rho_3) K_p(\rho_2) - I_p(\rho_2) K_p(\rho_3)} \right) I_p(\rho) \right] - 1 \right\}, \quad s_2 < t^2 - r^2 < s_3 \quad (2.86) \end{aligned}$$

$$\phi(\rho) = (\epsilon + 1) \left\{ 1 - \rho^{-p} (\rho_3)^p \frac{I_p(\rho)}{I_p(\rho_3)} \right\}, \quad s_3 < t^2 - r^2 < 0 \quad (2.87)$$

$$\phi(\chi) = (\epsilon + 1) \left\{ 1 - \chi^{-p} (\rho_3)^p \frac{J_p(\chi)}{I_p(\rho_3)} \right\}, \quad t^2 - r^2 > 0. \quad (2.88)$$

Com $\rho_1 = \sqrt{-s_1}$, $\rho_2 = \sqrt{-s_2}$ e $\rho_3 = \sqrt{-s_3}$.

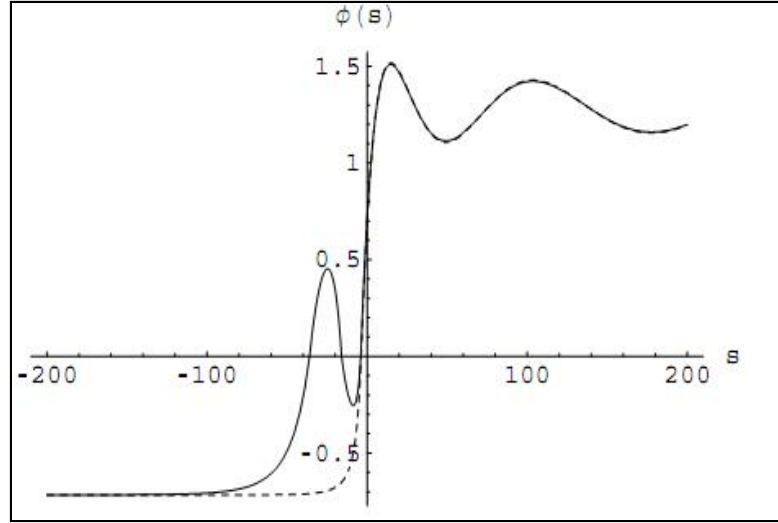


Figura 9: Soluções invariante de Lorentz para $\epsilon = 0.2828225$. A linha pontilhada é a solução apresentada por Stavros Theodorakis, a linha sólida é a nossa solução.

Na figura 9, apresentamos uma comparação entre a solução apresentada por Stavros [66] e a encontrada em nosso trabalho [61].

2.7 Conclusão

Finalmente, podemos encontrar uma configuração do tipo kink em uma dimensão espacial com um número de regiões arbitrário, neste caso, a configuração é escrita como

$$\begin{aligned} \phi(x) = & S(-x + x_{n/n})(\epsilon - 1)(1 - e^{x - x_{n/n}}) + S(x - x_{n-1})(\epsilon + 1)(1 - e^{x_{n-1} - x}) \\ & + \sum_{m=2}^{n-1} \{S(x - x_{m-1})S(-x + x_m)[\epsilon + (-1)^m] \\ & \times [1 - \frac{\sinh(x - x_{m-1}) + \sinh(x_m - x)}{\sinh(x_m - x_{m-1})}]\}, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Na generalização da solução do tipo kink, dada acima, $S(x)$ é a função de Heaviside e n representa o número de regiões. Agora, para o caso do lump (bolha) iniciando e terminando no vácuo falso, nossa solução geral é representada por

$$\begin{aligned}
\phi(x) = & S(-x + x_{n/n})(\epsilon - 1)(1 - e^{x - x_{n/n}}) + S(x - x_{n-1})(\epsilon - 1)(1 - e^{x_{n-1} - x}) \\
& + \sum_{m=2}^{n-1} \{ S(x - x_{m-1})S(-x + x_m)[\epsilon + (-1)^m] \\
& \times [1 - \frac{\sinh(x - x_{m-1}) + \sinh(x_m - x)}{\sinh(x_m - x_{m-1})}] \}, \quad n \geq 3.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Por outro lado, a correspondente generalização para a configuração iniciando e terminando no vácuo verdadeiro também pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\phi(x) = & S(-x + x_{n/n})(\epsilon + 1)(1 - e^{x - x_{n/n}}) + S(x - x_{n-1})(\epsilon + 1)(1 - e^{x_{n-1} - x}) \\
& + \sum_{m=2}^{n-1} \{ S(x - x_{m-1})S(-x + x_m)[\epsilon + (-1)^{m-1}] \\
& \times [1 - \frac{\sinh(x - x_{m-1}) + \sinh(x_m - x)}{\sinh(x_m - x_{m-1})}] \}, \quad n \geq 3.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

As soluções (2.89) e (2.90) estão representadas na figura 10.

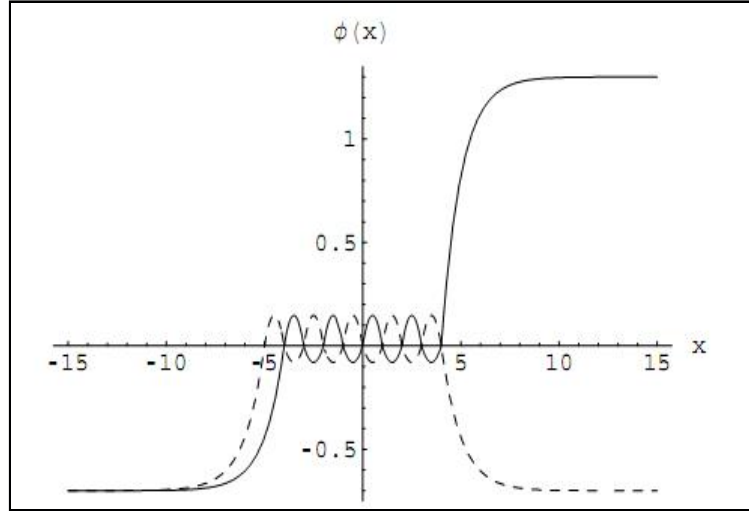


Figura 10: Generalização das soluções do tipo kink e do tipo lump com $\epsilon = 0.3$.

O caso em duas dimensões é escrito como

$$\begin{aligned}
\phi(r) = & S(r)S(-r + r_{n/n})(\epsilon + 1) \left[1 - \frac{I_0(r)}{I_0(r_1)} \right] \\
& + S(r - r_{n-1})(\epsilon - 1) \left[1 - \frac{K_0(r)}{K_0(r_{n-1})} \right] \\
& + \sum_{m=2}^{n-1} S(r - r_{m-1})S(-r + r_m)[\epsilon + (-1)^{m-1}] \{ (-1)^{m-1} \\
& + \frac{[K_0(r_{m-1}) - K_0(r_m)]I_0(r) + [I_0(r_m) - I_0(r_{m-1})]K_0(r)}{K_0(r_m)I_0(r_{m-1}) - K_0(r_{m-1})I_0(r_m)} \}, \quad n \geq 3. \quad (2.92)
\end{aligned}$$

Finalmente, o caso da configuração em três dimensões é tal que

$$\begin{aligned}
\phi(r) = & S(r)S(-r + r_{n/n})(\epsilon + 1) \left[1 - \frac{r_n}{r} \frac{\sinh(r)}{\sinh(r_{n/n})} \right] \\
& + S(r - r_{n-1})(1 - \epsilon) \left(\frac{r_{n-1}e^{r_{n-1}-r}}{r} - 1 \right) \\
& + \sum_{m=2}^{n-1} \left\{ S(r - r_{m-1})S(-r + r_m)[\epsilon + (-1)^{m-1}] \left[-\frac{(r_me^{r_m} - r_{m-1}e^{r_{m-1}})e^r}{(e^{2r_m} - e^{2r_{m-1}})} \frac{e^r}{r} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(r_me^{r_{m-1}} - r_{m-1}e^{r_m})}{2re^r} \right] \cosh(r_{m-r_{m-1}}) + 1 \right\}, \quad n \geq 3. \quad (2.93)
\end{aligned}$$

Em resumo, neste capítulo, uma ampla classe de novas configurações estáticas do tipo kink e do tipo lump foram apresentadas. Estas soluções são tais que a largura das paredes de domínio entre duas regiões de um dado vácuo dependem do número de oscilações do campo. Além disso, estudamos a estabilidade de cada uma das soluções, quando ficou determinado que a configuração do kink em duas dimensões e do lump em uma dimensão conectando o vácuo verdadeiro a ele mesmo, são estáveis. Os demais casos estudados são instáveis. Contudo, as soluções oscilantes são responsáveis pela largura das paredes de domínio correspondentes, as quais se tornam mais largas à medida que acrescentamos mais oscilações. Por fim, analisando as soluções invariantes de Lorentz, vemos que o tempo necessário para ocorrer a transição do vácuo falso para o verdadeiro torna-se maior para as configurações oscilantes.

Capítulo 3

Estados ligados fermiônicos por kinks de modelos assimétricos

3.1 Introdução

O estudo dos modos zero em estruturas topológicas apareceu pela primeira vez no trabalho de Caroli, Gennes and Matricon [43] e, depois no trabalho de Jackiw e Rossi [44]. Depois desses trabalhos iniciais, um amplo número de trabalhos relacionando os modos zero e as estruturas topológicas surgiram na literatura. Na verdade, a presença de modos zero em tais estruturas tem um importante impacto sobre o estudo dos números quânticos fracionários [45], e nas cordas cósmicas [46]. Recentemente, Chu e Vachaspati [47] se dedicaram ao problema dos modos zero de férmions em estruturas do tipo kink-antikink. Eles mostraram que existem estados ligados na presença de kink-antikink cuja energia vai exponencialmente a zero de acordo com a separação entre o kink e o antikink, em contraste com a que foi obtida por Postma e Hartmann [48]. Isto foi feito estudando as soluções analíticas para os sólitons do modelo $\lambda\phi^4$ [49, 50]. Depois, Brihaye e Delsate [51] consideraram o caso dos modos fermiônicos na presença de estruturas do tipo lump. Usualmente, estruturas do tipo lump são instáveis [51, 52]. Apesar disso, estruturas não-estáveis podem ser fisicamente relevantes como no caso dos então chamados *spharelons* que aparecem no modelo eletrofraco [53], o qual pode ser importante para explicar a assimetria bariônica do universo [54]. Outra questão interessante é a do confinamento de férmions nos cenários de branas [55, 56].

Por outro lado, como observado por Coleman e Callan [58, 59], potenciais assimétricos

são importantes para descrever diversos processos em vários setores da Física. Além disso, essas classes de modelos apresentam algumas soluções flutuantes como observado recentemente [60]-[61], as quais são responsáveis pelo retardamento dos processos de decaimento quando comparadas com as configurações não-flutuantes [61]. Considerando a possibilidade que nosso Universo possa apresentar tais tipos de estruturas, é importante estudar a possibilidade da existência de estados ligados de férmions e modos zeros na presença de kinks de potenciais dependentes de campos escalares assimétricos. Aqui mostramos através de cálculos analíticos, que estes tipos de potenciais podem suportar estados ligados de férmions na presença de estruturas do tipo kink. Contudo, não é simples falar em kinks para estes modelos assimétricos e certamente, é mais difícil ainda verificar a possibilidade da existência de estados ligados fermiônicos. Assim, no sentido de contornar este problema, tratamos com alguns potenciais que são contínuos por partes os quais apresentam uma descontinuidade em sua derivada. Apesar disso, suas soluções apresentam densidade de energia contínua. A vantagem é que em cada região o modelo é exatamente solúvel. Como sabemos, foi em [63] que um modelo com estas características foi proposto pela primeira vez. Depois, o então chamado modelo duplo-quadrático foi introduzido em [64]-[67]. Lembramos que este potencial está dado por (2.3). Mais recentemente uma versão assimétrica deste modelo, modelo assimétrico duplamente quadrático (*DQA*), foi estudada em [66, 61].

Neste capítulo, vamos introduzir uma versão generalizada do modelo *DQA*, o qual batizamos de modelo *DQAG*. Ele tem a vantagem de recuperar os modelos previamente apresentados. Além disso, ele pode ser usado para estudar sistemas nos quais a curvatura do potencial de cada um dos lados é diferente. E ainda, o vácuo do modelo pode ser escolhido para representar um potencial do tipo *slow-roll* (veja a figura 11), o qual é encontrado em modelos cosmológicos de inflação.

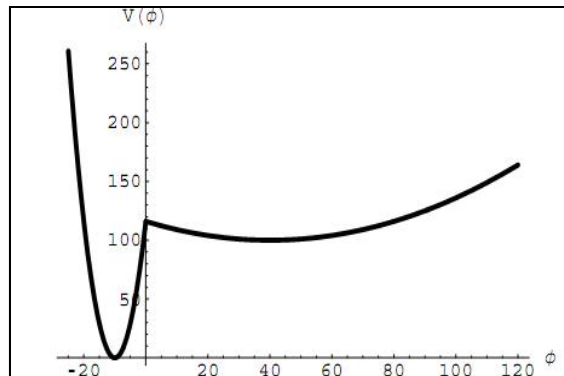


Figura 11: Potencial Slow-Roll para $V_1 = 0$, $V_2 = 1000$, $\phi_1 = 10$, $\phi_2 = 40$ e $\lambda = 0.01$.

Destacamos que um modelo semelhante foi usado para o estudo de misturas surfactantes de água e óleo [70]. O modelo é tal que

$$V(\phi_{DQAG}) = \begin{cases} \lambda[(\phi_{DQAG} - \phi_2)^2 + V_2], & \phi \geq 0 \\ \lambda \left(\frac{\phi_2^2 + V_2}{\phi_1^2 + V_1} \right) [(\phi_{DQAG} + \phi_1)^2 + V_1], & \phi \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde λ , ϕ_1 , ϕ_2 , V_1 e V_2 são parâmetros constantes os quais obedecem as seguintes restrições

$$\phi_2 > 0, \quad \phi_1 > 0, \quad V_2 > -\phi_2^2 \quad \text{e} \quad V_1 > -\phi_1^2. \quad (3.2)$$

Todos os três potenciais estão representados na figura 12 e os kinks correspondentes estão plotados na figura 13.

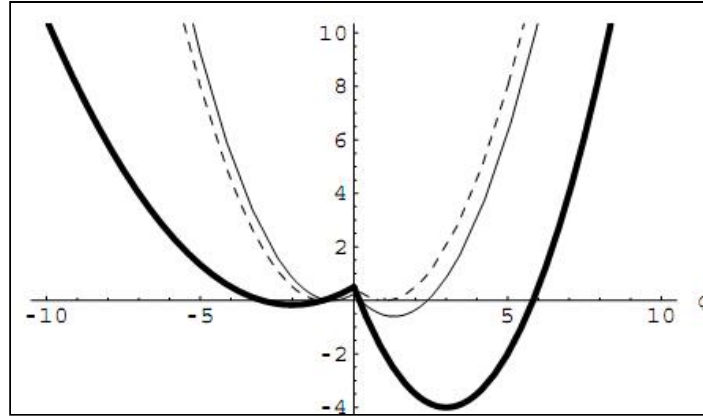


Figura 12: Potenciais contínuos por partes. A linha pontilhada representa o potencial do modelo DQ , a linha fina o potencial do modelo DQA para $\epsilon = 0.3$ e a linha grossa é o potencial do modelo $DQAG$ com Slow-Roll para $V_1 = -1$, $V_2 = -8$, $\phi_1 = 2$, $\phi_2 = 3$ e $\lambda = 0.5$.

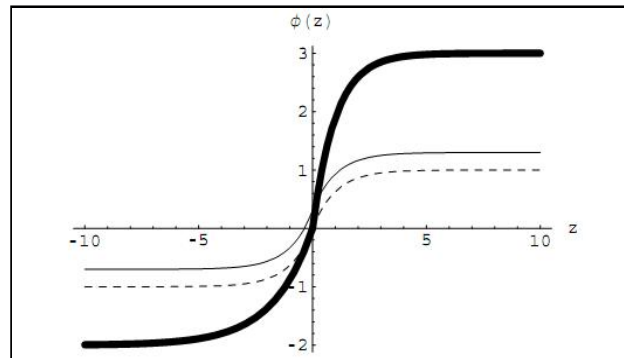


Figura 13: Kinks dos três modelos considerados aqui. Novamente, a linha pontilhada representa o kink do modelo DQ , o kink do modelo ADQ está representado pela linha fina e o kink do modelo $GADQ$ para $V_1 = 0$, $V_2 = 1000$, $\phi_1 = 10$, $\phi_2 = 40$ e $\lambda = 0.01$ é a linha mais grossa.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na próxima seção calculamos com alguns detalhes o modo zero e os outros estados ligados para o férmion na presença do kink do modelo DQ . As outras duas seções são destinadas às soluções dos modelos DQA e $DQAG$. Finalmente, nas conclusões traçamos os comentários sobre a consequência destes estados ligados.

3.2 Estados ligados fermiônicos na presença de kinks do modelo DQ

A densidade de lagrangiana, em 1+1 dimensões, para o campo fermiônico acoplado com um campo escalar, a qual é utilizada no trabalho de Chu e Vachaspati [47], é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - g \phi \bar{\psi}\psi, \quad (3.3)$$

onde $\mu = 0, 3$, $V(\phi)$ é o potencial, dado em termos de um campo escalar real, definindo o setor bosônico do modelo específico sob análise, ψ é um espinor de duas componentes, g é a correspondente constante de acoplamento de Yukawa e γ representa as matrizes de Dirac, neste capítulo elas são escritas como

$$\gamma^t = \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^z = i\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

No caso particular do modelo DQ , as equações de movimento para as quais surgem as configurações do tipo kink e os modos fermiônicos, são respectivamente escritas como

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi_{DQ} + \phi_{DQ} - \frac{\phi_{DQ}}{|\phi_{DQ}|} = 0, \quad (3.5)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - g\phi_{DQ})\psi = 0. \quad (3.6)$$

Note que, nas equações acima, estamos supondo que o *backreaction* devido ao acoplamento de Yukawa entre o campo de Dirac e o campo escalar pode ser abandonado [44, 47], em outras palavras, o campo escalar clássico se comporta como um campo de fundo [68]. Nesta situação, não é difícil obter a configuração estática do campo ϕ_{DQ} , a qual está

apresentada em (2.9) e (2.10), aqui ela é dada por

$$\phi_{DQ}(z) = 1 - e^{-z+z_0}, \quad z > z_0, \quad (3.7)$$

$$\phi_{DQ}(z) = e^{z-z_0} - 1, \quad z < z_0. \quad (3.8)$$

onde escolhemos um ponto arbitrário z_0 tal que, para a esquerda $\phi_{DQ}(z) < 0$ e a direita $\phi_{DQ}(z) > 0$. Assim, quando $z \rightarrow \pm\infty$, temos que $\phi_{DQ}(z) \rightarrow \pm 1$. Além disso, foi garantido que o campo e sua derivada fossem contínuas em cada ponto de transição.

Agora, no sentido de resolver a equação de Dirac (3.6), é conveniente escolher a representação utilizada em [47] para as componentes do espinor ψ , a qual é escrita como

$$\psi = \frac{e^{-iEt}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \chi_+ - \chi_- \\ \chi_+ + \chi_- \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

e a correspondente constante de normalização é encontrada através de

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dz (|\chi_+|^2 + |\chi_-|^2) = 1. \quad (3.10)$$

Em termos dos campos $\chi_{\pm}$, as equações acopladas para as componentes são

$$(\partial_z + g\phi_{DQ})\chi_+ = -E\chi_-, \quad (3.11)$$

$$(\partial_z - g\phi_{DQ})\chi_- = +E\chi_+. \quad (3.12)$$

Elas podem ser desacopladas, por exemplo, isolando a função χ_- em (3.11) e substituindo-a em (3.12), e vice-versa. Depois de aplicar este procedimento, ficamos com uma equação do tipo da de Schrödinger em uma dimensão. Com as manipulações descritas acima, chegamos a

$$-\partial_z^2 \chi_{\pm} + g(g\phi_{DQ}^2 \mp \partial_z \phi_{DQ})\chi_{\pm} = E^2 \chi_{\pm}, \quad (3.13)$$

onde o potencial efetivo $V_{\pm}(\phi_{DQ}) \equiv g(g\phi_{DQ}^2 \mp \partial_z \phi_{DQ})$ pode ser escrito na forma

$$V_{\pm}(z) = g[g(e^{-2|z|} - 2e^{-|z|} + 1) \mp e^{-|z|}], \quad (3.14)$$

no presente caso. Por simplicidade, adotamos $z_0 = 0$, significando que o centro do kink se encontra na origem do sistema de coordenada. É importante destacar que, no intervalo $0 < g \leq 1/2$, o potencial efetivo $V_{\pm}(z)$ apresenta a forma de uma barreira e, como uma consequência, não há presença de estados ligados. Além disso, com a finalidade de garantir a existência de pelo menos um estado ligado, podemos aplicar o teorema introduzido por Simon [69], onde subtraímos g^2 do $V_{\pm}(z)$ e integramos em todo o eixo real z . O resultado da integração deve ser menor ou igual a zero para que exista pelo menos um estado ligado. No caso do modelo DQ , fica estabelecido que para $g \geq 2/3$ os estados ligados são garantidos. O perfil do potencial efetivo do modelo DQ está representado na figura 14.

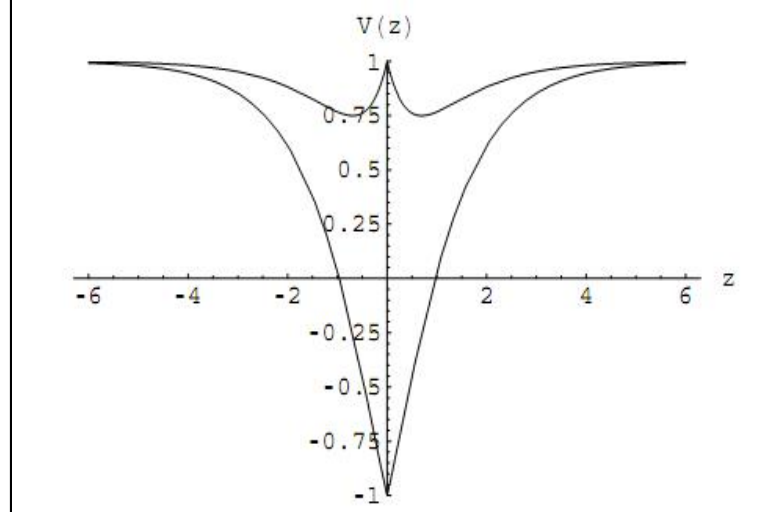


Figura 14: Potencial efetivo do modelo DQ para $g = 1$.

Vemos que, para pequenos valores da constante de acoplamento g , o potencial efetivo apresenta a forma de um poço duplo, e quando g assume grandes valores, o potencial se transforma em um poço simples.

A partir das análises acima, podemos ver que no intervalo $0 < g < 2/3$, existem somente os estados de modo zero, onde $\chi_{-}(z) = 0$ e $E = 0$. Assim, a equação (3.11) fica

$$\partial_z \chi_{+} + g\phi \chi_{+} = 0, \quad (3.15)$$

e as soluções normalizadas com $z_0 = 0$, são dadas por

$$\chi_{+}^{(0)}(z) = c \exp[-g(|z| + e^{-|z|})], \quad (3.16)$$

com $c \equiv c \equiv \frac{(2g)^g}{\sqrt{2[\Gamma(2g) - \Gamma(2g, 2g)]}}$. Aqui, $\Gamma(2g)$ é a função gama e $\Gamma(2g, 2g)$ é uma função gama incompleta [71]. Isto conduz ao seguinte espinor do estado de modo zero

$$\psi^{(0)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \chi_+^{(0)}(z) \\ \chi_+^{(0)}(z) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Agora, a fim de obter mais estados ligados, deve-se trabalhar com $g \geq 2/3$. Neste caso, a equação diferencial efetiva assume a forma

$$-\partial_z^2 \chi_\pm + V_\pm \chi_\pm = E^2 \chi_\pm, \quad (3.18)$$

onde foi utilizado que

$$\chi_\mp = \mp \frac{1}{E} \left[\frac{d\chi_\pm}{dz} \pm g \phi \chi_\pm \right], \quad (3.19)$$

de modo a desacoplar o par de equações diferenciais de primeira ordem. É interessante destacar que o potencial $V_\pm(z)$ apresenta diferentes formas em cada um dos lados do ponto $z = 0$. Assim, podemos escrever o par de equações (3.18) como

$$-\chi_{<}''(z) + V_{<}(z)\chi_{<}(z) = E^2 \chi_{<}(z), \quad z < 0, \quad (3.20)$$

$$-\chi_{>}''(z) + V_{>}(z)\chi_{>}(z) = E^2 \chi_{>}(z), \quad z > 0, \quad (3.21)$$

onde o primo significa derivada com respeito a z , e $\chi(z) = \chi_+(z)$ ou $\chi_-(z)$, $V(z) = V_+(z)$ ou $V_-(z)$. Neste ponto podemos escolher, sem perda de generalidades das soluções, uma das funções $\chi_\pm$ para gerar o conjunto completo de auto-estados. Escolhendo χ_+ , construiremos o espinor

$$\psi(z, t) = \frac{e^{-iEt}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \chi_+(z) + \chi_-(z) \\ \chi_+(z) - \chi_-(z) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

O potencial efetivo em cada um dos lados da equação diferencial acima é escrito como

$$V_{<}(z) = Ae^{2z} + Be^z + A, \quad z \leq 0, \quad (3.23)$$

$$V_{>}(z) = Ae^{-2z} + Be^{-z} + A, \quad z \geq 0, \quad (3.24)$$

com $A \equiv g^2$, $B \equiv -2g^2 - g$. Então, reescrevemos as equações (3.20) e (3.21) como

$$\chi_{<}''(z) - (Ae^{2z} + Be^z + \omega^2)\chi_{<}(z) = 0, \quad z < 0 \quad (3.25)$$

$$\chi_{>}''(z) - (Ae^{-2z} + Be^{-z} + \omega^2)\chi_{>}(z) = 0, \quad z > 0 \quad (3.26)$$

com $\omega^2 \equiv A - E^2$.

Agora, vamos começar nossa busca por uma solução na região na qual $z < 0$. É interessante notar que esta expressão é semelhante à equação de Schrödinger envolvendo o potencial de Morse [72]. Com a finalidade de eliminar os termos exponenciais em (??), fazemos a transformação

$$y = Be^z. \quad (3.27)$$

Então, temos

$$y^2 \frac{d^2 \chi_{<}(y)}{dy^2} + y \frac{d\chi_{<}(y)}{dy} - \left(\frac{A}{B^2} y^2 + y + \omega^2 \right) \chi_{<}(y) = 0. \quad (3.28)$$

Neste ponto, fazemos uma redefinição da função

$$\chi_{<}(y) = y^\omega e^{\alpha y} f_{<}(y) \quad (3.29)$$

onde α é uma constante positiva. Neste caso, impondo que $\alpha \equiv -\sqrt{A}/B$, e recordando que $B \equiv -2g^2 - g$ e $g \geq 2/3$, chegamos à equação diferencial

$$y \frac{d^2 f_{<}(y)}{dy^2} + [(2\omega + 1) - 2\sqrt{A}y/B] \frac{df_{<}(y)}{dy} - [(2\omega + 1)\sqrt{A}/B + 1] f_{<}(y) = 0. \quad (3.30)$$

Finalmente, fazendo $y = B\tilde{y}/(2\sqrt{A})$, encontramos

$$\tilde{y} \frac{d^2 f_{<}(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} + (b - \tilde{y}) \frac{df_{<}(\tilde{y})}{d\tilde{y}} - a f_{<}(\tilde{y}) = 0, \quad (3.31)$$

onde definimos

$$b \equiv 2\omega + 1, \quad a \equiv \omega + \frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{A}}. \quad (3.32)$$

A equação (3.31) pode ser reconhecida como uma equação hipergeométrica confluyente [71], também conhecida como a equação de Kummer [74], cuja solução completa pode ser escrita na forma

$$f_{<}(\tilde{y}) = \tilde{C}^{(1)} M(a, b; \tilde{y}) + \tilde{C}^{(2)} (\tilde{y})^{1-b\pm} M(1+a-b, 2-b; \tilde{y}), \quad (3.33)$$

com as definições

$$\tilde{C}^{(1)} \equiv C^{(1)} + \frac{C^{(2)}\pi}{\sin(\pi b)} \frac{1}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)}, \quad \tilde{C}^{(2)} \equiv -\frac{C^{(2)}\pi}{\sin(\pi b)} \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)}. \quad (3.34)$$

Então, voltando para as variáveis originais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \chi_{<}(z)_{DQ} = & N_1 \exp[\omega z - ge^z] M(a, b; 2ge^z) + \\ & + W_1 \exp(-\omega z - ge^z) M(1+a-b, 2-b; 2ge^z), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde

$$N_1 \equiv \tilde{C}^{(1)}(B)^\omega, \quad W_1 \equiv \tilde{C}^{(2)}(B)^\omega (2g)^{1-b}. \quad (3.36)$$

Aqui, é interessante destacar que devido ao comportamento assintótico da função de Kummer $M(\alpha, \beta; 2ge^z) = 1$ quando $z \rightarrow -\infty$, e a presença de $\exp(-\omega z)$ no segundo termo da expressão acima, concluímos que para garantir uma solução normalizada, devemos escolher $W_1 = 0$.

Assim, ficamos com o conjunto de soluções

$$\chi_{<}(z)_{DQ} = N_1 \exp(\omega z - ge^z) M(a, b; 2ge^z). \quad (3.37)$$

A solução na região onde $z > 0$ pode ser obtida através do procedimento apresentado anteriormente. Deste modo, a solução normalizável é escrita como

$$\chi_{>}(z)_{DQ} = N_2 \exp \left[-\omega z - g e^{-z} \right] M \left(a, b; 2g e^{-z} \right). \quad (3.38)$$

Note que é sempre necessário impor a condição de continuidade da função e da sua derivada primeira na origem. É importante destacar que somente o espinor original ψ precisa ser contínuo, não necessitando possuir sua derivada primeira contínua, isso se deve ao fato que a corrente de probabilidade não depende da derivada do espinor (em contraste com o que ocorre no caso não-relativístico). Assim, para que o espinor seja contínuo e uma vez que cada uma das componentes do espinor ψ dependem de $\chi_{\pm}$ (veja a equação (3.22)) e da correspondente derivada, cada componente de χ e de sua derivada devem ser contínuas simultaneamente. Como consequência devemos impor a continuidade da função e da sua derivada na origem.

$$\chi_{<}(0)_{DQ} = \chi_{>}(0)_{DQ}, \quad \chi'_{<}(0)_{DQ} = \chi'_{>}(0)_{DQ}. \quad (3.39)$$

Deste modo, a solução será

$$\chi_{<}(z)_{DQ} = N_1 \exp(\omega z - g e^z) M(a, b; 2g e^z), \quad z \leq 0, \quad (3.40)$$

$$\chi_{>}(z)_{DQ} = \pm N_1 \exp \left[-\omega z - g e^{-z} \right] M(a, b; 2g e^{-z}), \quad z \geq 0. \quad (3.41)$$

Portanto, vemos que os auto-valores são determinados pelas condições

$$\chi'_{<}(0)_{DQ} = \chi'_{>}(0)_{DQ} = 0 \quad \text{ou} \quad \chi_{<}(0)_{DQ} = \chi_{>}(0)_{DQ} = 0, \quad (3.42)$$

isto é, obtemos os auto-valores de energia das soluções pares ($N_1 = N_2$) impondo que a derivada primeira da solução em $z = 0$ se anule. Por outro lado, os auto-valores das soluções ímpares ($N_1 = -N_2$) são encontrados impondo que a solução se anule em $z = 0$. Assim, temos

$$M(a+1, b; 2g) = 0, \quad \text{para } N_1 = N_2, \quad (3.43)$$

$$M(a, b; 2g) = 0, \quad \text{para } N_1 = -N_2,$$

com estas restrições podemos encontrar numericamente os valores de energia dos estados ligados do modelo DQ . Ressaltamos que a equação efetiva do tipo Schrödinger é invariante sob a transformação $z \rightarrow -z$, e as correspondentes soluções apresentam paridade definida. Os autovalores de energia do sistema são encontrados a partir das condições acima, as quais definem os zeros das funções de Kummer. Devemos lembrar que os valores de energia para cada uma das componentes dos estados do férmion são iguais, ou seja, $a = \omega - g$ e $b = 2\omega + 1$. Finalmente, os valores de energia para os estados ligados não devem estar abaixo do mínimo do potencial efetivo, nem acima dos valores assintóticos do potencial, este fato implica na restrição para os autovalores $g - \frac{1}{4} \leq E^2 \leq g^2$. Na figura 15, apresentamos uma comparação dos valores exatos de energia dos estados ligados dos modelos DQ e $\lambda\phi^4$. Na figura 16 plotamos as componentes dos espiniores $\chi_{\pm}$ para o modelo DQ para os dois primeiros níveis de energia com $g = 2$.

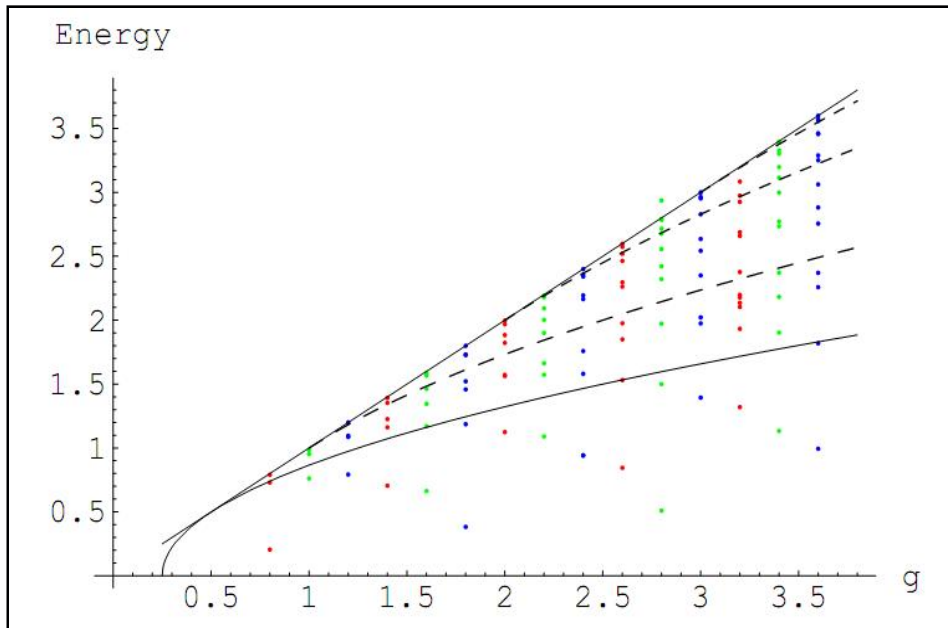


Figura 15: Valores numéricos dos estados ligados do modelo DQ (pontos). As linhas tracejadas correspondem aos valores de energia do modelo $\lambda\phi^4$. Os valores aceitáveis de energia se encontram dentro das duas linhas sólidas.

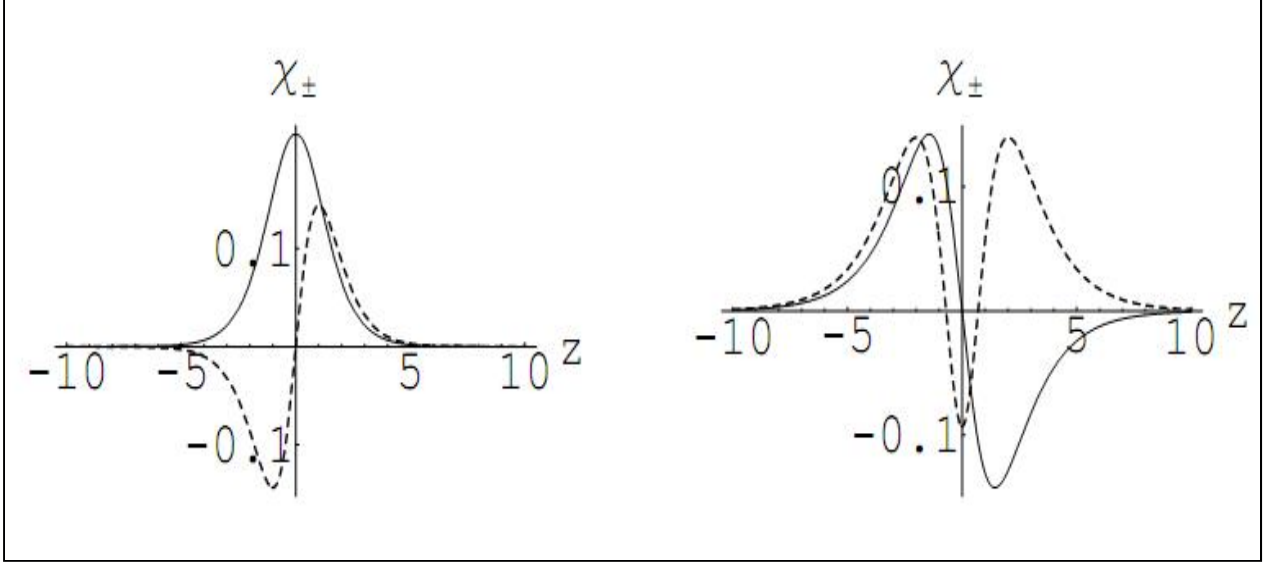


Figura 16: Componentes dos espinores $\chi_{\pm}$ para os dois primeiros autovalores de energia e para $g = 2$. A componente χ_{+} está representada pela linha sólida e χ_{-} está representada pela linha tracejada.

Na figura 15, pode-se observar que o número de estados ligados fermiônicos do modelo DQ é maior que no caso do modelo $\lambda\phi^4$. Isto pode ser explicado devido ao fato dos dois modelos apresentarem o mesmo limite assintótico (g^2) para a energia do potencial, mas o valor de mínimo do potencial efetivo do modelo DQ ($g - 1/4$) é menor quando comparado com o potencial do modelo $\lambda\phi^4$, que tem valor mínimo igual a g . Por exemplo, no caso onde $g = 1$, além do estado de energia zero (modo zero), o modelo DQ apresenta mais dois estados ligados, com energias $E_1 = 0.952837$ e $E_2 = 0.984584$, enquanto o modelo $\lambda\phi^4$ permite apenas o estado de energia zero. Como esperávamos, a partir da análise dos potenciais efetivos, os estados ligados dos férmions se tornam próximos uns dos outros quando se aproximam do topo do potencial, enquanto no fundo a diferença aumenta.

3.3 O caso do modelo DQA

Considerando o potencial definido na equação (2.4), o kink conectando o vácuo em $\phi_{DQA} = -1 + \epsilon$ com o vácuo $\phi_{DQA} = 1 + \epsilon$ (veja figura 13), do modelo DQA [66, 61], pode ser expresso como

$$\phi_{DQA}(z) = \begin{cases} e^z - (1 - \epsilon), & z \leq 0 \\ (1 + \epsilon) - e^{-z}. & z \geq 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Neste modelo o correspondente modo zero é escrito como

$$\begin{aligned}\chi_+^{(0)}(z) &= c_0 \exp \{ -g[e^z - (1 - \epsilon)z] \}, \quad z \leq 0, \\ \chi_+^{(0)}(z) &= c_0 \exp \{ -g[e^{-z} + (1 + \epsilon)z] \}, \quad z \geq 0,\end{aligned}\tag{3.45}$$

onde

$$c_0 = \frac{(2g)^g}{\sqrt{(2g)^{-2g\epsilon}\Gamma[2g(1 + \epsilon), 0, 2g] - (2g)^{2g\epsilon}\Gamma[-2g(\epsilon - 1), 2g, 0]}},\tag{3.46}$$

com $\Gamma(a, z_0, z_1)$ representando a função gama generalizada.

Mais uma vez utilizamos a representação onde o espinor é dado por (3.9). Assim, depois de cálculos semelhantes ao apresentado para o modelo DQ , encontramos a seguinte equação diferencial efetiva para o caso do modelo DQA

$$\chi_{<}''(z) - \{g^2 e^{2z} + [-2(1 - \epsilon)g^2 \mp g]e^z + g^2(1 - \epsilon)^2 - E^2\} \chi_{<}(z) = 0, \quad z < 0,\tag{3.47}$$

$$\chi_{>}''(z) - \{g^2 e^{-2z} + [-2(1 + \epsilon)g^2 \mp g]e^{-z} + g^2(1 + \epsilon)^2 - E^2\} \chi_{>}(z) = 0, \quad z > 0,\tag{3.48}$$

Assim, aplicando novamente o teorema de Simon, verificamos que os estados ligados são garantidos mais uma vez para $g \geq 2/3$. Neste caso, encontramos as seguintes soluções

$$\chi_{<}(z)_{ADQ} = N_1 \exp[z\sqrt{g^2(1 - \epsilon)^2 - E^2} - ge^z] M(a_{<}, b_{<}; 2ge^z), \quad z < 0\tag{3.49}$$

$$\chi_{>}(z)_{ADQ} = N_2 \exp\{-[z\sqrt{g^2(1 + \epsilon)^2 - E^2} + ge^{-z}]\} M(a_{>}, b_{>}; 2ge^{-z}), \quad z > 0$$

onde

$$a_{<} = \omega_{<} - (1 - \epsilon)g, b_{<} = 2\omega_{<} + 1, \omega_{<} = \sqrt{g^2(1 - \epsilon)^2 - E^2},$$

$$a_{>} = \omega_{>} - (1 + \epsilon)g, b_{>} = 2\omega_{>} + 1, \omega_{>} = \sqrt{g^2(1 + \epsilon)^2 - E^2}.$$

A partir da continuidade da função na origem ($\chi_{<}(0)_{ADQ} = \chi_{<}(0)_{ADQ}$), temos que

$$N_1 = \frac{M(a_{>}, b_{>}; 2g)}{M(a_{<}, b_{<}; 2g)} N_2. \quad (3.50)$$

Além disso, pela condição de continuidade da derivada primeira da função na origem ($\chi'_{<}(0)_{ADQ} = \chi'_{<}(0)_{ADQ}$), teremos

$$N_1 = - \left[\frac{\epsilon g M(a_{>}, b_{>}; 2g) + a_{>} M(a_{>} + 1, b_{>}; 2g)}{-\epsilon g M(a_{<}, b_{<}; 2g) + a_{<} M(a_{<} + 1, b_{<}; 2g)} \right] N_2. \quad (3.51)$$

Desta forma, encontramos a condição que determinará os valores de energia. Neste caso, os valores de energia são obtidos substituindo a relação (3.50) em (3.51), conduzindo a

$$a_{<} M(a_{<} + 1, b_{<}; 2g) M(a_{>}, b_{>}; 2g) + a_{>} M(a_{>} + 1, b_{>}; 2g) M(a_{<}, b_{<}; 2g) = 0 \quad (3.52)$$

onde foi definido que: $a^< \equiv a_+^<$; $a^> \equiv a_+^>$ e ainda $b_+^> \equiv b^>$; $b_+^< \equiv b^<$.

Observando o potencial efetivo, podemos concluir que as energias dos estados ligados fermiônicos se encontram no intervalo $g(1 - \epsilon) - 1/4 \leq E^2 \leq g^2(1 - \epsilon)^2$. Como deve ser, os resultados do modelo DQ são recuperados tomando-se $\epsilon = 0$.

3.4 Estados ligados fermiônicos para kinks do modelo

$DQAG$

Como mencionado na introdução deste Capítulo, o modelo $DQAG$ (Eq.(3.1)) comparado com os dois modelos anteriormente apresentados, tem como vantagem o fato de poder ser ajustado para o estudo de sistemas nos quais as distâncias entre os dois pontos de

mínimo são diferentes. Além disso, os dois modelos anteriores são casos limites do modelo *DQAG*.

Não é difícil mostrar que a solução do tipo kink (veja a figura 13), conectando os dois vácuos do modelo, é dado por

$$\phi_{GDQA} = -\phi_1 + \delta e^{az}, \quad z \leq 0 \quad (3.53)$$

$$\phi_{GDQA} = \phi_2 - \Delta e^{-bz}, \quad z \geq 0 \quad (3.54)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \delta &\equiv \left[\frac{(\phi_2 + \phi_1) \sqrt{\phi_1^2 + V_1}}{\sqrt{(\phi_1^2 + V_1)} + \sqrt{(\phi_2^2 + V_2)}} \right], & \Delta &\equiv \left[\frac{(\phi_2 + \phi_1) \sqrt{(\phi_2^2 + V_2)}}{\sqrt{(\phi_1^2 + V_1)} + \sqrt{(\phi_2^2 + V_2)}} \right], \\ a &\equiv \sqrt{2\lambda(\phi_2^2 + V_2)/(\phi_1^2 + V_1)} & \text{e} & \quad b \equiv \sqrt{2\lambda}. \end{aligned}$$

É interessante neste ponto fazer a verificação da estabilidade da configuração do kink do modelo *DQAG*. No Capítulo anterior, mostramos que a estabilidade linear é verificada realizando-se uma pequena perturbação em torno da configuração clássica estática. Assim, consideramos que

$$\phi(z, t) = \phi_{class}(z) + \eta(z, t). \quad (3.55)$$

Dessa forma, obtemos as equações

$$-\frac{d^2 n(z)}{dx^2} + V_{st}(z) n(z) = E_{st} n(z), \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + E_{st} T(t) = 0, \quad (3.56)$$

onde utilizamos a separação de variáveis com $\eta(z, t) = n(z) T(t)$, e $V_{st} = d^2 V(\phi)/d\phi^2|_{\phi=\phi_{class}}$. Para a equação dependente do tempo (3.56), encontramos a solução

$$T(t) = c e^{t \sqrt{-E}} + d e^{-t \sqrt{-E}}, \quad (3.57)$$

com c e d representando as constantes arbitrárias de integração. É simples concluir que, no

sentido de sempre garantir que a solução seja finita e não-singular, deveremos ter $E \geq 0$, tornando o kink estável. Caso contrário, a perturbação destruirá a configuração com o passar do tempo.

Para o modelo $DQAG$, podemos escrever o potencial como

$$V(\phi) = \lambda \left\{ [(\phi - \phi_2)^2 + V_2] S(\phi) + \left(\frac{\phi_2^2 + V_2}{\phi_1^2 + V_1} \right) [(\phi + \phi_1)^2 + V_1] S(-\phi) \right\}, \quad (3.58)$$

onde $S(\phi)$ é a função de Heaviside. Assim, o potencial de estabilidade é dado por

$$\begin{aligned} V_{st.} = & \lambda \left\{ 2S[\phi(z)] + 2 \left(\frac{\phi_2^2 + V_2}{\phi_1^2 + V_1} \right) S[-\phi(z)] + \right. \\ & \left. + \left[-2\phi_2 - 4\phi_1 \left(\frac{\phi_2^2 + V_2}{\phi_1^2 + V_1} \right) + \frac{2\phi_2^2\phi_1}{\phi_1^2 + V_1} + \frac{2V_2\phi_1}{\phi_1^2 + V_1} \right] \delta[\phi(z)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

e a correspondente equação de estabilidade é escrita como

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 n(z)}{dx^2} + \lambda \left\{ 2S[\phi(z)] + 2 \left(\frac{\phi_2^2 + V_2}{\phi_1^2 + V_1} \right) S[-\phi(z)] + \right. \\ \left. + \left[-2\phi_2 - 4\phi_1 \left(\frac{\phi_2^2 + V_2}{\phi_1^2 + V_1} \right) + \frac{2\phi_2^2\phi_1}{\phi_1^2 + V_1} + \frac{2V_2\phi_1}{\phi_1^2 + V_1} \right] \delta[\phi(z)] \right\} n(z) = E_{st.} n(z) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Resolvendo a equação acima, obtemos

$$E_{st.} = \frac{2\lambda \left\{ 4c_0 - [1 + c_0 + (\phi_2 V_1 + \phi_1 V_2)^2 / \phi_2^2]^2 \right\}}{4[2 + 2c_0 + (\phi_2 V_1 + \phi_1 V_2)^2 / \phi_2^2]}, \quad (3.61)$$

com $c_0 = 2\lambda(\phi_2^2 + V_2)/(\phi_1^2 + V_1)$. Utilizando este resultado, obtemos $E_{st.} = -10.0304$ para $\lambda = 1/2$, $\phi_2 = 3$, $\phi_1 = 2$, $V_2 = -8$ e $V_1 = -1$, indicando que esta é uma solução não estável. Por outro lado, para o caso que $\lambda = 1/2$, $\phi_2 = 1$, $\phi_1 = 1$, $V_2 = 0$ e $V_1 = 0$, concluímos que o estado fundamental da solução da equação de estabilidade tem $E_{st} = 0$, o que indica que a configuração é estável.

A solução para o modo zero, no caso do modelo ADQG, é dado por

$$\chi_+^{(0)}(z) = c_0 \exp \left(g\phi_1 z - \frac{g\delta}{a} e^{az} \right), \quad z \leq 0, \quad (3.62)$$

$$\chi_+^{(0)}(z) = c_0 \exp \left[g \left(\frac{\Delta}{b} - \frac{\delta}{a} \right) \right] \exp \left(-g\phi_2 z - \frac{g\Delta}{b} e^{-bz} \right), \quad z \geq 0,$$

com $c_0 = \frac{1}{\sqrt{I_1 + I_2 \exp \left[g \left(\frac{\Delta}{b} - \frac{\delta}{a} \right) \right]}}$, e

$$I_1 = \frac{1}{a} (4)^{-g\phi_1/a} \left(\frac{g\delta}{a} \right)^{-2g\phi_1/a} [\Gamma(2g\phi_1/a) - \Gamma(2g\phi_1/a, 2g\delta/a)], \quad (3.63)$$

$$I_2 = \frac{1}{b} (4)^{-g\phi_2/b} \left(\frac{g\Delta}{b} \right)^{-2g\phi_2/b} [\Gamma(2g\phi_2/b) - \Gamma(2g\phi_2/b, 2g\Delta/b)],$$

o qual é normalizável se $g > 0$. Aplicando novamente o teorema de Simon, encontramos a restrição sobre os parâmetros do modelo a qual é necessária para garantir a existência de pelo menos um estado ligado. Neste caso, temos

$$g \geq \frac{4 a b \gamma}{b [4 \gamma^2 - (\phi_1 - 2 \gamma)^2] + a [4 \gamma^2 - (\phi_2 - 2 \gamma)^2]}. \quad (3.64)$$

onde $\gamma \equiv (\phi_2 + \phi_1) \sqrt{\phi_1^2 + V_1} / \left[\sqrt{(\phi_1^2 + V_1)} + \sqrt{\phi_2^2 + V_2} \right]$.

Neste caso, após alguns cálculos, encontramos as seguintes equações diferenciais efetivas para os estados ligados fermiônicos interagindo com esta configuração do tipo kink

$$-\partial_z^2 \chi_{\pm} + (\mu^< e^{2az} + \xi_{\pm}^< e^{az} + \nu^<) \chi_{\pm} = E^2 \chi_{\pm}, \quad z < 0 \quad (3.65)$$

$$-\partial_z^2 \chi_{\pm} + (\mu^> e^{-2bz} + \xi_{\pm}^> e^{-bz} + \nu^>) \chi_{\pm} = E^2 \chi_{\pm}, \quad z > 0 \quad (3.66)$$

Novamente, simplificamos o problema resolvendo somente as equações (3.20) e (3.21), onde definimos

$$V_{<}(z) \equiv (\mu^{<}e^{2az} + \xi^{<}e^{az} + \nu^{<}), \quad V_{>}(z) \equiv \mu^{>}e^{-2bz} + \xi^{>}e^{-bz} + \nu^{>},$$

$$\xi^{<} \equiv -g\delta(2g\phi_1 + a), \xi^{>} \equiv -g\Delta(2g\phi_2 + b), \nu^{<} \equiv \phi_1^2 g^2, \nu^{>} \equiv \phi_2^2 g^2$$

$$\mu^{<} \equiv g^2 \delta^2, \quad \mu^{>} \equiv g^2 \Delta^2.$$

Repetindo o mesmo procedimento utilizado nos casos DQ e ADQ , chegamos à solução

$$\chi_{<}(z)_{GADQ} = N_1 \exp(k^{<}az - ge^{az}/a) M(\Lambda_{\pm}^{<}, 2\omega^{<} + 1; 2ge^{az}/a), \quad z < 0 \quad (3.67)$$

$$\chi_{>}(z)_{GADQ} = N_2 \exp(-k^{>}bz - ge^{-bz}/b) M(\Lambda_{\pm}^{>}, 2\omega^{>} + 1; 2ge^{-bz}/b), \quad z > 0$$

onde foi definido que $(k^{<})^2 \equiv (\omega^{<}/a)^2$, $(k^{>})^2 \equiv (\omega^{>}/b)^2$, $\Lambda^{<} \equiv k^{<} + 1/2 + \xi^{<}/(2g\phi_1 a)$ e $\Lambda^{>} \equiv k^{>} + 1/2 + \xi^{>}/(2g\phi_2 b)$. Usando a condição de continuidade da solução na origem, ficamos com

$$N_1 = \frac{e^{-g/b} M(\Lambda^{>}, 2\omega^{>} + 1; 2g/b)}{e^{-g/a} M(\Lambda^{<}, 2\omega^{<} + 1; 2g/a)} N_2, \quad (3.68)$$

Novamente, devemos impor a condição que $\chi'_{<}(0)_{GADQ} = \chi'_{>}(0)_{GADQ}$. Assim, encontramos

$$N_1 = -\frac{e^{-g/b}[(k^{>}b - g - b\Lambda^{>})M(\Lambda^{>}, 2\omega^{>} + 1; 2g/b) + b\Lambda^{>}M(\Lambda^{>} + 1, 2\omega^{>} + 1; 2g/b)]}{e^{-g/a}[(k^{<}a - g - a\Lambda^{<})M(\Lambda^{<}, 2\omega^{<} + 1; 2g/a) + a\Lambda^{<}M(\Lambda^{<} + 1, 2\omega^{<} + 1; 2g/a)]} N_2. \quad (3.69)$$

Finalmente, usando a relação (3.68) em (3.69) ou vice-versa, verificamos que a condição para os auto-valores dos estados ligados do $GADQ$ é dada por

$$\begin{aligned}
& M(\Lambda^<, 2\omega^< + 1; 2g/a)[(-k^>b - g - \Lambda^>b)M(\Lambda^>, 2\omega^> + 1; 2g/b) + \Lambda^>bM(\Lambda^> + 1, 2\omega^> + 1; 2g/b)] \\
& + M(\Lambda^>, 2\omega^> + 1; 2g/b)[(-k^<a - g - \Lambda^<a)M(\Lambda^<, 2\omega^< + 1; 2g/a) + \\
& + \Lambda^<aM(\Lambda^< + 1, 2\omega^< + 1; 2g/a)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Note que $\omega^<$ e $\omega^>$ estão definidos como $\omega^< \equiv \sqrt{(g\phi_1)^2 - E^2}$ e $\omega^> \equiv \sqrt{(g\phi_2)^2 - E^2}$, uma vez que a energia deve ser a mesma para as duas componentes do espinor. Na figura 17, os valores numéricos de alguns níveis de energia do *DQAG* estão plotados para um valor fixo da constante de acoplamento e um valor também fixo do parâmetro de assimetria ϕ_2 . Neste gráfico, vemos que os níveis de energia tendem a desaparecer quando os vácuos se aproximam um do outro.

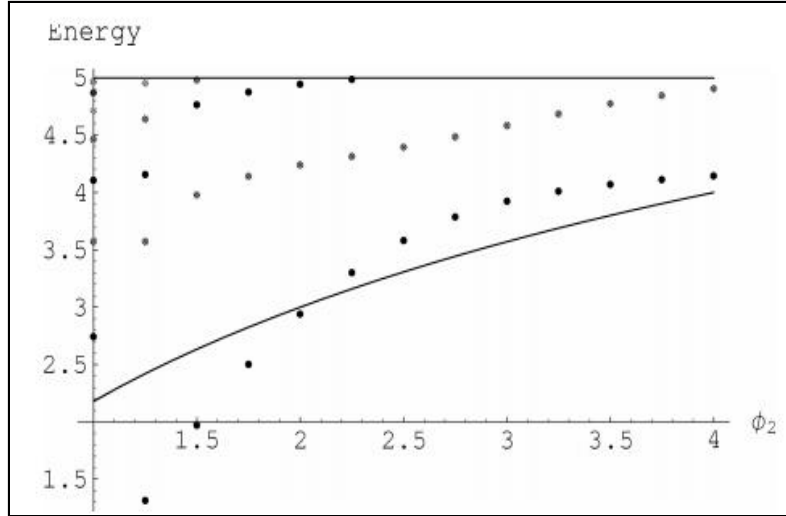


Figura 17: Valores numéricos de energia dos estados ligados fermiônicos do modelo *DQAG* com $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 0.5$ e $g = 5$. Os valores válidos de energia estão localizados entre as duas linhas sólidas.

Como sempre podemos controlar os parâmetros do vácuo do modelo *DQAG*, o correspondente potencial efetivo é afetado a cada escolha de parâmetro. Então, o mínimo global do potencial efetivo pode estar à direita ou à esquerda do ponto de descontinuidade da derivada primeira. Considerando o caso onde $V_{eff-}^< \leq V_{eff-}^>$, os autovalores de energia devem estar no intervalo

$$\nu^< - \xi_-^< \left(1 + \frac{\xi_-^<}{2\nu^<}\right) \leq E^2 \leq \nu^<, \quad (3.71)$$

Como nos exemplos anteriores, as configurações do férmion do modelo *DQAG* podem recuperar os casos *DQ* e *DQA* anteriormente apresentados, simplesmente ajustando os parâmetros do potencial. Assim, mostramos que um modelo com uma estrutura de vácuo, o qual apresenta um vácuo verdadeiro e um vácuo falso, pode suportar modos zero fermiônicos e estados ligados, e que o caso usual para o qual temos um potencial simétrico com mínimos degenerados é um caso particular deste modelo mais geral.

3.5 Conclusão

Neste capítulo, mostramos que férmions na presença de kinks de modelos com um vácuo falso exibem modos zeros e estados ligados. Isto foi feito através da construção das configurações dos férmions na presença das configurações do tipo kink do setor bosônico. A partir de uma análise dos resultados provenientes do modelo *DQ*, em comparação com o modelo $\lambda\phi^4$, podemos verificar que sob certas condições estes modelos apresentam soluções próximas, esta afirmação fica evidente no limite assintótico do potencial efetivo dos dois modelos, qual seja quando $V_{ef.} \rightarrow g^2$. Este fato é importante, pois como sabemos não existem soluções exatas para uma versão assimétrica do modelo $\lambda\phi^4$, mas podemos construir soluções exatas no caso do modelo *DQAG*. Além do mais, a existência de estados ligados fermiônicos na presença de kinks assimétricos apresenta importantes consequências para sistemas cosmológicos e sistemas de matéria condensada, especialmente em sistemas onde o universo apresenta um limite de evolução não-trivial [53, 54].

Referências Bibliográficas

- [1] G. B. Whitham, *Linear and Non-Linear Waves*, John Wiley e Sons, Nova Iorque (1974).
- [2] A. C. Scott, F. Y. F. Chiu e D. W. Mclaughlin, Proc. I.E.E.E. **61** (1973) 1443.
- [3] R. Rajaraman e E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **11** (1975) 2950.
- [4] H. Arodz, Phys. Rev. D **52** (1995) 1082; Nucl. Phys. B **450** (1995) 174; H. Arodz e A. L. Larsen, Phys. Rev. D **49** (1994) 4154.
- [5] A. Strumia e N. Tetradis, Nucl. Phys. B **542** (1999) 719.
- [6] C. Csaki, J. Erlich, C. Grojean e T. J. Hollowood, Nucl. Phys. B **584** (2000) 359.
- [7] M. Gremm, Phys. Lett. B **478** (2000) 434.
- [8] A. de Souza Dutra e A. C. Amaro de Faria, Jr., Phys. Rev. D **72** (2005) 087701.
- [9] M. A. Shifman e M. B. Voloshin, Phys. Rev. D **57** (1998) 2590.
- [10] D. Bazeia, M. J. dos Santos e R. F. Ribeiro, Phys. Lett. A **208** (1995) 84; D. Bazeia, W. Freire, L. Losano e R. F. Ribeiro, Mod. Phys. Lett. A **17** (2002) 1945.
- [11] A. Campos, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 141602.
- [12] A. Melfo, N. Pantoja e A. Skrzewski, Phys. Rev. D **67** (2003) 105003.
- [13] A. de Souza Dutra, Phys. Lett. B **626** (2005) 249.
- [14] A. de Souza Dutra e A. C. F. de Amaral Jr. , Phys. Lett. B **642** (2006) 274.
- [15] V. I. Afonso, D. Bazeia e L. Losano, Phys. Lett. B **634** (2006) 526.
- [16] M. Giovannini, Phys. Rev. D **75**, 064023 (2007); Phys. Rev. D **74** (2006) 087505.

- [17] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University, Cambridge (1994).
- [18] M. Cvetič e H. H. Soleng, Phys. Rep. **282** (1997) 159.
- [19] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [20] R. Rajaraman, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 200.
- [21] L. J. Boya e J. Casahorran, Phys. Rev. A **39** (1989) 4298.
- [22] M. K. Prasad e C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760.
- [23] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North Holland, Amsterdam (1982).
- [24] J. S. Russel, Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., John Murray, London (1844) 311.
- [25] J. Boussinesq, *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire*, **C. R.** **72** (1871) 755.
- [26] L. Rayleigh (J. W. Strutt), Philos. Mag. **1** (1876) 257.
- [27] D. J. Korteweg e G. De Vries, Philos. Mag. **39** (1895) 422.
- [28] N. J. Zabusky e M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **15** (1965) 240.
- [29] E. Fermi, J. Pasta e S. M. Ulam, *Studies in nonlinear problem*, Tech. Rep. **LA-1940**, Los Alamos Sci. Lab. (1955).
- [30] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.
- [31] T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. A **247** (1958) 260.
- [32] D. Finkelstein e C. Misner, Ann. Phys. **6** (1959) 230.
- [33] D. Finkelstein, J. Math. Phys. **7** (1966) 1218.
- [34] S. Coleman, *Classical lumps and their Quantum Descendants*, Plenum Press, Nova Iorque (1977).

- [35] A. Barone, F. Esposito, C. J. Magee e A. C. Scott, *Nuovo Cim.* **1** (1971) 227.
- [36] J. Liouville, *J. Math. Phys. App.* **18** (1953) 71.
- [37] E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 121.
- [38] A. C. Amaro de Faria Jr., *Equivalência Clássica e Quântica entre Sólitons*, Dissertação de Mestrado, UNESP, Guaratinguetá (2005).
- [39] S. Kar e A. Khare, *Am. J. Phys.* **68** (2000) 1128.
- [40] D. M. Greenberger, *Am. J. Phys.* **46** (1978) 394.
- [41] A.C. Scott, F. Y. F. Chiu e D. W. Mclaughlin, *Proc. I.E.E.E.* **61** (1973) 1443.
- [42] H. Arodz, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 1082; *Nucl. Phys. B* **450** (1995) 174; H. Arodz e A. L. Larsen, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 4154; H. Arodz, *Acta Phys. Pol. B* **29** (1998) 3725; S. J. Kolitch e D. M. Eardley, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 4651.
- [43] C. Caroli, P. G. de Gennes e J. Matricon, *Phys. Rev. Lett.* **9** (1964) 307.
- [44] R. Jackiw e P. Rossi, *Nucl. Phys. B* **190** (1981) 681.
- [45] R. Jackiw e C. Rebbi, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 3398.
- [46] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **249** (1985) 557.
- [47] Y-Z. Chu e T. Vachaspati, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 025006.
- [48] M. Postma e B. Hartmann, arXiv: 0706.0416 [hep-th].
- [49] R. F. Dashen, B. Hasslacher e A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 4130.
- [50] J. Goldstone e R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **11** (1975) 1486.
- [51] Y. Brihaye e T. Delsate, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 025014.
- [52] A. T. Avelar, D. Bazeia, L. Losano e R. Menezes, *Eur. J. Phys. C* **55** (2008) 133.
- [53] F. Klinkhamer e N. Manton, *Phys. Rev. D* **30** (1984) 2212.
- [54] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov e M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **155** (1985) 36.
- [55] Y. X. Liu, L. D. Zhang, L. J. Zhang e Y. S. Duan, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 065025.

- [56] C. A. S. Almeida, R. Casana, M. M. Ferreira e A. R. Gomes, Phys. Rev. D **79** (2009) 125022.
- [57] J. C. Hackworth e E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **71** (2005) 044014.
- [58] S. Coleman, Phys. Rev. D **15** (1977) 2929.
- [59] C. G. Callan, Jr. e S. Coleman, Phys. Rev. D **19** (1977) 1762.
- [60] G.V. Dunne e Q.H. Wang, Phys. Rev. D **74** (2006) 024018.
- [61] A. de Souza Dutra e R. A. C. Couceiro, Phys. Lett. B **679** (2009) 138.
- [62] R.G. Cai, B. Hu e S. Koh, Phys. Lett. B **671** (2009) 181.
- [63] B. Horovitz, J. A. Krumhansl e E. Domany, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 778.
- [64] S. E. Trullinger e R. M. DeLeonardis, Phys. Rev. A **20** (1979) 2225.
- [65] H. Takayama e K. Maki, Phys. Rev. B **20** (1979) 5009.
- [66] S. Theodorakis, Phys. Rev. D **60** (1999) 125004.
- [67] D. Bazeia, A. S. Inácio e L. Losano, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004) 575.
- [68] E. C. G. Sudarshan e U. A. Yajnik, Phys. Rev. D **33** (86) 1830.
- [69] B. Simon, Ann. Phys. (NY) **97** (1976) 279.
- [70] G. Gompfer e S. Z. Zschocke, Phys. Rev. A **46** (1992) 4836.
- [71] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, Toronto, 1965).
- [72] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1999).
- [73] Eugene Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Nova Iorque (1968).
- [74] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, INC., California, 1985).
- [75] M. A. Lohe, Phys. Rev. D **20** (1979) 3120.

APÊNDICE

Com o objetivo de familiarizar aqueles que não estão acostumados com a notação relativística, decidimos fazer este apêndice. Nele, apresentamos de maneira simples a transformação de Lorentz, a qual desempenha um importante papel nas soluções apresentadas ao longo desta dissertação. Mostramos também como são escritos os operadores diferenciais em termos da notação relativística.

A1) Transformação de Lorentz

Com a finalidade de encontrar uma transformação que preserve invariantes as equações de Maxwell ao passar de um referencial inercial para outro, vamos considerar dois referenciais S e S' , cujos eixos são paralelos e as origens coincidem em $t = t' = 0$. O referencial S' possui velocidade v e move-se paralelamente ao eixo Ox . No referencial S , uma fonte de luz emite um pulso de luz em $t = 0$, este pulso de luz se propagará em forma de uma onda esférica. Para um observador em S , a onda esférica de raio ct se propaga a partir de O . Para o observador em S' , a onda terá raio ct e estará se propagando a partir de O' . Assim, as frentes de onda em cada um dos referenciais serão dadas por

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (3.72)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (3.73)$$

Lembremos que a transformação de Galileu (TG) é dada por

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \text{ e } t = t'. \quad (3.74)$$

Portanto, se aplicarmos a TG à equação da frente de onda no referencial S' , teremos

$$x^2 - 2xvt + v^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (3.75)$$

a equação acima é diferente da equação (3.72) que descreve a frente de onda no referencial S .

Nosso objetivo é encontrar uma transformação que mantenha a equação da frente de onda invariante ao passarmos de um referencial inercial para outro e que recupere a TG quando $v/c \rightarrow 0$. Como o movimento é ao longo do eixo x , as componentes y e z não sofrem modificações. Deste modo, vamos tentar a transformação

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z = z' \quad \text{e} \quad t' = t + \lambda x. \quad (3.76)$$

onde λ é uma constante. Agora, aplicamos a transformação acima na equação da frente de onda no referencial S' . Deste modo, teremos

$$(1 - c^2\lambda^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(v + \lambda c^2)xt = (1 - v^2/c^2)c^2t^2. \quad (3.77)$$

Para a equação acima assumir a forma da equação da frente de onda dada pela equação (3.72), devemos fazer $\lambda = -v/c^2$. Assim, ficamos com

$$(1 - v^2/c^2)x^2 + y^2 + z^2 = (1 - v^2/c^2)c^2t^2, \quad (3.78)$$

agora para eliminar o fator $(1 - v^2/c^2)$, devemos escrever a transformação dada pelas equações (3.76) como

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z = z' \quad \text{e} \quad t' = \gamma[t - (v/c^2)x]. \quad (3.79)$$

onde $\gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}$. A transformação dada acima é denominada transformação de Lorentz (TL), com ela a equação da onda esférica se mantém invariante ao passar do referencial inercial S para o referencial inercial S' . Destacamos que a transformação de Lorentz conserva invariantes as leis do eletromagnetismo ao passar de um referencial para outro.

A2) Notação relativística

Vamos considerar dois eventos no espaço-tempo, (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Desta forma, dizemos que o intervalo entre estes dois eventos é dado por

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.80)$$

onde ds será o mesmo para todos observadores inerciais, além disso ds será invariante sob TL. Através da definição de intervalo dada acima, os eventos em que $ds^2 > 0$ são chamados

do tipo-tempo, aqueles em que $ds^2 < 0$ são chamados do tipo-espaco e aqueles em que $ds^2 = 0$ são ditos do tipo-luz. Em três dimensões espaciais (x, y, z) são as componentes de um vetor, e $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ é invariante sob rotações. Note que há termos negativos na expressão de ds^2 , isto significa que o espaço não é estritamente euclidiano. Portanto, definimos

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (3.81)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z),$$

com a definição acima podemos escrever o intervalo invariante com

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3.82)$$

O quadrivetor x^μ é chamado de vetor contravariante, e o quadrivetor x_μ é chamado de vetor covariante. O produto interno entre um vetor contravariante e um vetor covariante é um invariante. Por simplicidade, vamos adotar a convenção da soma, onde a soma de um subíndice repetido indica um somatório sobre ele. Assim, temos

$$\sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = dx^\mu dx_\mu. \quad (3.83)$$

A relação entre x^μ e x_μ é feita através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, de tal maneira que

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3. \quad (3.84)$$

Observando (3.84), vemos que $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$ e $x_3 = -x^3$. Portanto, escrevemos $g_{\mu\nu}$ como

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Para $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$, observamos que

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

No caso dos operadores diferenciais, definimos

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \\ \partial^\mu &\equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Deste modo, o operador diferencial de segunda ordem é um invariante de Lorentz, sendo escrito como

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (3.88)$$

onde $\square$ é o chamado operador d'Alembertiano. Além disso, o quadrivetor energia-momento de uma partícula será $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ e $p_\mu = (E/c, -\vec{p})$, resultando no invariante

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2. \quad (3.89)$$

Também podemos utilizar a notação para $p_\mu x^\mu$, que ficará

$$p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{r}. \quad (3.90)$$

É interessante destacar que ao longo desta dissertação estamos utilizando $c = 1$.