



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**ESTUDO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES COM
TECNOLOGIAS DIGITAIS**

Gabriel Cordelina

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

**RIO CLARO – SP
2025**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Gabriel Cordelina

ESTUDO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas do
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Elisangela Pavanelo

Rio Claro - SP
2025

C794e	Cordelina, Gabriel Estudo de autovalores e autovetores com tecnologias digitais / Gabriel Cordelina. -- Rio Claro, 2025 186 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro Orientadora: Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos 1. Formação inicial de professores. 2. Álgebra Linear. 3. GeoGebra. I. Título.
-------	---

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

Esta pesquisa relaciona-se diretamente com o ODS 4 - Educação de Qualidade, de modo que compreendemos um potencial de contribuir com as discussões sobre a formação inicial de professores de Matemática, seja em pesquisas futuras, discussões curriculares ou prática docente.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

This research is directly related to SDG 4 - Quality Education, we understand the potential to contribute to discussions on the initial training of Mathematics teachers, whether in future research, curricular discussions or teaching practice.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

GABRIEL CORDELINA

ESTUDO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos
FEG/UNESP/Guaratinguetá (SP)

Profa. Dra. Fabiane Mondini
ICTS/UNESP/Sorocaba (SP)

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
IME/UFF/Niterói (RJ)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 16 de dezembro de 2024.

Dedico este trabalho aos meus primeiros e
eternos educadores, meus pais, Luis Henrique
Cordelina e Alanna Aparecida Galo Borges
Cordelina.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por toda a trajetória até aqui, caminhos percorridos neste período de Pós-Graduação, pelas decisões tomadas e pelas bênçãos derramadas a todos os momentos;

Aos meus pais, Alanna Aparecida Galo Borges Cordelina e Luis Henrique Cordelina, por todo o incentivo em tudo o que diz respeito à minha formação, por me darem condições de seguir as escolhas feitas, por serem sempre meu porto seguro e por toda compreensão e apoio neste período;

À Isabela Piardi, por fazer parte da minha vida e por acompanhar mais essa etapa da minha formação, sempre com incentivo e carinho;

À Elisangela Pavanelo, por ter acreditado na proposta desde o início, por todo carinho, dedicação e atenção que me orientou neste período;

Aos cinco estudantes que participaram da pesquisa, pelo empenho e esforço, sem vocês isso não seria possível;

Aos professores do PPGEM, em especial aqueles que ministraram as disciplinas cursadas neste período de formação como professor e pesquisador: Fabiane Mondini, Lourdes de La Rosa Onuchic, Márcio Pironel, Jéssica Francis Shumway, Marcelo de Carvalho Borba, Marcus Vinicius Maltempi, Ole Skovsmose, Amanda Queiroz Moura, Renato Marcone José de Souza e Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva;

Aos colegas do PPGEM, com quem convivi nas disciplinas, comissões, eventos e outros ambientes da Pós-Graduação, em especial, ao Lucas Lopes Gueiros de Souza, pela companhia desde a graduação, por toda ajuda e parceria em diversos momentos;

Aos estudantes do curso de graduação em Física ingressantes em 2023, por fazerem parte deste período da minha formação docente, estar com vocês foi a realização de um sonho;

Aos funcionários do departamento de Matemática, em especial a Maria Elisa Leite de Oliveira de Moraes, Inajara Federsom de Moraes e José Ricardo de Lima Guimarães, que sempre estiveram dispostos a me auxiliar em diversas situações;

Aos membros da banca, Fabiane Mondini e Humberto Bortolossi, pela atenção, dedicação e considerações visando agregar ao trabalho;

A todos os funcionários da Unesp, que de maneira direta ou indireta contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho;

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Einstein, Darwin, Duchamp, Chaplin, Da Vinci
Inspirações pras gerações seguintes
Aristóteles, Platão, Copérnico, Galileu
E por que não você e eu?

(Brazza, 2014)

RESUMO

Pesquisas que tratam de questões relacionadas às Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) se fazem cada vez mais necessárias, uma vez que, devido ao avanço tecnológico, discute-se cada vez mais sua presença e seus impactos na sociedade, bem como nos ambientes educacionais. Concomitante a isso, as discussões sobre a formação inicial de professores de Matemática são passíveis de reflexões, como pensar a formação com tecnologias, o papel e o objetivo de cada disciplina na Licenciatura em Matemática. Nesse contexto, uma das disciplinas obrigatórias atualmente na formação do professor de Matemática é a Álgebra Linear, que contém os autovalores e autovetores como um de seus conteúdos. A partir da abordagem de pesquisa qualitativa sob uma perspectiva fenomenológica, investigamos a seguinte interrogação: “o que se revela em um estudo sobre autovalores e autovetores com TDICs, junto a alunos de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática?” A partir da literatura de trabalhos da Educação Matemática que trata da formação do professor, da disciplina de Álgebra Linear e da aprendizagem com TDICs, foram desenvolvidas três atividades que abordam o conteúdo de autovalores e autovetores. As atividades foram resolvidas principalmente com o GeoGebra, através dos cálculos realizados na janela de Cálculo Simbólico (CAS) e com a programação do que nomeamos como GeoGebra LOGO. Os dados foram produzidos a partir da resolução dessas atividades por cinco estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Unesp de Rio Claro. Essas discussões em grupos foram gravadas e posteriormente as expressões foram transcritas. Seguindo o rigor fenomenológico, a análise ocorreu em dois movimentos: a Análise Ideográfica e Análise Nomotética. Nesse movimento, constituíram-se duas categorias abertas que compõem a estrutura do fenômeno investigado: “O caráter investigativo do estudo” e “Uma formação que vai além do estudo do conceito: aspectos do passado, presente e futuro”. Compreendemos que o estudo deste conteúdo com TDICs incentiva o levantamento de hipóteses e a necessidade da interpretação das informações encontradas, relacionando-as à transformação linear e à situação problema, ao mesmo tempo que atribuem significado aos valores apresentados. Durante esse processo, os estudantes desenvolveram uma familiaridade com o *software* e discutiram o conteúdo sob uma nova ótica, tendo contato com aplicações e teoremas, sem perder de vista o objetivo da futura prática docente.

Palavras-chave: Formação inicial de professores; Álgebra Linear; GeoGebra.

ABSTRACT

Research addressing issues related to Digital Information and Communication Technologies (DICTs) is increasingly necessary, given that, due to technological advancements, their presence and impacts on society, as well as in educational environments, are being widely debated. Alongside this, discussions about the initial training of Mathematics teachers are open to reflection, such as rethinking teacher preparation with technologies and the role and purpose of each subject in a Mathematics Teacher Education program. In this context, one of the mandatory courses currently in the training of Mathematics teachers is Linear Algebra, which includes eigenvalues and eigenvectors as one of its topics. Using a qualitative research approach from a phenomenological perspective, we investigated the following question: “What is revealed in a study on eigenvalues and eigenvectors with DICTs, involving students from a Mathematics Teacher Education program?” Based on the literature in Mathematics Education that addresses teacher training, the Linear Algebra course, and learning with DICTs, three activities were developed focusing on the topic of eigenvalues and eigenvectors. These activities were primarily solved using GeoGebra, leveraging calculations performed in the Computer Algebra System (CAS) window and programming with what we called GeoGebra LOGO. Data were generated through the completion of these activities by five students enrolled in the Mathematics Teacher Education program at Unesp in Rio Claro. These group discussions were recorded, and the verbal expressions were later transcribed. Following phenomenological rigor, the analysis occurred in two stages: Ideographic Analysis and Nomothetic Analysis. During this process, two open categories were established, forming the structure of the investigated phenomenon: “The investigative nature of the study” and “Training that goes beyond studying the concept: aspects of the past, present, and future”. We understand that studying this content with DICTs encourages the formulation of hypotheses and the need to interpret the information obtained, relating it to linear transformations and the problem situation, while simultaneously assigning meaning to the values presented. Throughout this process, students developed familiarity with the software and discussed the content from a new perspective, engaging with applications and theorems, without losing sight of the goal of their future teaching practice.

Keywords: Initial teacher training; Linear Algebra; GeoGebra.

Title in english: Study of eigenvalues and eigenvectors with digital technologies.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CAS	Cálculo Simbólico
EAD	Ensino a Distância
JRME	Journal of Research in Mathematics Education
LACSG	Linear Algebra Curriculum Study Group
MIT	Instituto de Tecnologia de Massachusetts
NIED	Núcleo de Informática Aplicada à Educação
PET	Programa de Educação Tutorial
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SMEM	Seminários de Matemática e Educação Matemática
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TD	Tecnologias Digitais
TDICs	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Estrutura da dissertação	17
2	METODOLOGIA.....	19
3	LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, ÁLGEBRA LINEAR E TDICS: INVESTIGANDO POSSÍVEIS RELAÇÕES.....	27
3.1	Aspectos gerais sobre a formação inicial do professor de Matemática.....	27
3.2	A disciplina de Álgebra Linear.....	36
3.2.1	<i>Autovalores e Autovetores</i>	<i>46</i>
3.3	Álgebra linear e tecnologias.....	54
4	COMPREENSÕES E POSSIBILIDADES PARA O TRABALHO COM TDICS	61
4.1	GeoGebra	63
4.1.1	<i>Aprendizagem com GeoGebra.....</i>	<i>65</i>
4.2	A linguagem de programação LOGO	68
4.2.1	<i>O LOGO no processo de aprendizagem</i>	<i>74</i>
4.3	Apresentando o GeoGebra LOGO.....	77
4.3.1	<i>Primeiros passos.....</i>	<i>78</i>
4.3.2	<i>Aprendizagem com o GeoGebra LOGO.....</i>	<i>85</i>
4.3.3	<i>Algumas considerações sobre o GeoGebra LOGO.....</i>	<i>88</i>
5	PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	90
5.1	Produção dos dados.....	90
5.2	Análise dos dados.....	94
5.2.1	<i>Análise Ideográfica.....</i>	<i>96</i>
5.2.2	<i>Análise Nomotética</i>	<i>128</i>
6	DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS	141
6.1	O caráter investigativo do estudo.....	141
6.2	Uma formação que vai além do estudo do conceito: aspectos do passado, presente e futuro	151
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	164
	REFERÊNCIAS.....	168
	APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	176

APÊNDICE B – ATIVIDADE 1: TARTARUGAS E CROCODILOS	178
APÊNDICE C – ATIVIDADE 2: EXPLORANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS.....	180
APÊNDICE D – ATIVIDADE 3: OS QUADRADOS DO LEONARDO	184

1 INTRODUÇÃO

O texto desta dissertação trata das convergências de perspectivas e considerações feitas por mim e por minha orientadora sobre o tema proposto. Isso porque entendemos a pesquisa como um trabalho colaborativo, o que nos levou a redigi-la na primeira pessoa do plural, ainda que, nesta primeira seção, eu a tenha escrito na primeira pessoa do singular, visto que são apresentadas breves considerações sobre a minha trajetória. No decorrer do texto, seguimos a estrutura exposta nesse capítulo, com exceção de alguns momentos específicos na produção de dados, em que trato parte das experiências individuais.

Minhas primeiras lembranças com a Matemática como disciplina escolar são a partir do 5º ano do Ensino Fundamental, em 2011, com poucas lembranças do 6º e 7º anos, sendo elas conteúdos e experiências específicas. Entretanto, gosto de pensar que foi no 8º e 9º anos que o desejo pela carreira docente começou a despertar em mim, pois, durante esse período, enquanto meu interesse por ela crescia, vi a Matemática se tornar uma disciplina que apresentava muita dificuldade aos colegas de classe, o que fez com que eu ajudasse os mais próximos em vésperas de provas ou ao longo das aulas após realizar os exercícios.

Em 2016, começo o Ensino Médio em uma escola de período integral, com o ensino técnico em mecânica de usinagem integrado, etapa decisiva para meu ingresso na universidade, já que foi nela que me decidi pelo curso de Licenciatura em Matemática. Isso porque, como dito anteriormente, as dificuldades dos demais e meu interesse cresciam quase em conjunto. Além disso, tive professores que me incentivaram nos períodos de inscrições e preparações dos vestibulares, dentre eles, o professor de Matemática que acompanhou minha turma nestes três anos, o qual foi uma referência de docente para mim no período em que convivemos, sem contar o apoio da própria escola.

Início, em 2019, o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Paulista (Unesp) de Rio Claro, com a perspectiva de concluir o Bacharelado em seguida. Entretanto, essa ideia foi se alterando com o passar dos anos, com novos planos e interesses que ocorrem no próprio processo de formação e contato com a Universidade. Por exemplo, no segundo semestre de 2019, atuei por seis meses como voluntário no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) em uma escola estadual da cidade de Rio Claro, experiência que aumentou meu desejo de seguir a carreira docente, mesmo com uma nova visão sobre os seus desafios.

Os anos de 2020 e 2021 foram marcados pela pandemia mundial da Covid-19, cujas medidas emergenciais adotadas na tentativa de diminuir a contaminação demandaram a

suspensão das atividades presenciais na Unesp e o estabelecimento do ensino remoto para dar sequência à formação iniciada. Sem dúvidas, esse foi um período difícil para todos, em que cada um se adaptou a seu modo à nova realidade, visando a seguir com as atividades. No entanto, para mim, ele significou também o início das inquietações que me levaram a formular a interrogação da presente pesquisa, afinal, a maioria de nós estava desenvolvendo seu trabalho com computadores, celulares ou *tablets*. Então, comecei a refletir sobre como trabalhar com essas tecnologias poderia beneficiar a aprendizagem dos conteúdos que estávamos vendo, buscando priorizar o que somente o trabalho com elas seria capaz de possibilitar, ao invés de entendê-las como substitutas de algo que poderia ser feito de outra forma, como pegar um livro ou ler um pdf.

Nesta época, começo a conversar com alguns professores efetivos da Universidade, bem como com substitutos e bolsistas, sobre ideias e interesses futuros que começavam a despertar em mim. Isso porque, assim como tive interesse em ser professor da Educação Básica justamente por passar por essa fase educacional, surge em mim o desejo de atuar como professor no Ensino Superior, por gostar de suas disciplinas e também por me deparar tanto com minhas dificuldades quanto com as dos meus colegas e pensar em como eu poderia auxiliar nesse processo de formação de outras pessoas. Após várias conversas em que discuti minhas dúvidas entre seguir o Bacharelado ou uma Pós-Graduação em Matemática ou em Educação Matemática, optei por me inscrever no processo seletivo do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) do próprio *campus* em que eu já estava. Essa decisão foi tomada com base nas primeiras impressões que eu tive sobre as diferentes possibilidades que me eram oferecidas, escolhendo a Educação Matemática por compartilhar preocupações e interesses semelhantes.

No projeto proposto, busquei articular elementos que eram do meu interesse e faziam parte da minha inquietação, qual seja: trabalhar com uma disciplina do Ensino Superior com uma prática voltada às Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs). Assim, decidi atuar em uma das minhas disciplinas favoritas, Álgebra Linear, a qual, na época de graduação, despertou meu interesse de maneira a me levar a cursar também Álgebra Linear II, obrigatória somente para o curso de Bacharelado. A partir de conversas com professores sobre o Mestrado, optei, então, pelo tópico de Autovalores e Autovetores como foco do projeto, cujas principais motivações, de início, foram as aplicações que poderiam decorrer desta teoria. Isso porque, folheando diferentes livros de Álgebra Linear que apresentavam exemplos de aplicações, tive a ideia de que as discussões sobre elas poderiam ser o ponto de partida para o estudo destes conceitos e, desta forma, estaria conhecendo mais sobre a presença destes tópicos em situações reais, bem como poderia apresentá-los aos estudantes participantes da pesquisa, tomando minha

experiência na graduação como exemplo de que muitas vezes estes cenários nem sempre são estudados durante a disciplina. Outro fator que me levou a escolha deste conteúdo foi a compreensão, conforme apresento em seções posteriores, de que outros temas de Álgebra Linear poderiam ser discutidos enquanto se estuda o tópico em questão.

Após essa decisão, cursei, como aluno especial, a disciplina de Álgebra Linear, oferecida pelo PPGEM, uma vez que, dentre as várias conversas que tive com professores, muitos me recomendaram cursar nessa modalidade, destacando os benefícios que tal experiência poderia me trazer. Assim, participei da disciplina, a qual coincidiu com os horários que eu tinha disponível enquanto cursava o último semestre da graduação. Esse momento marca meu primeiro contato com pesquisas da área da Educação Matemática que tratam de Álgebra Linear, iniciando a leitura de trabalhos que investigam diferentes questões, seja ensino, seja aprendizagem ou ainda a parte histórica.

Feita a seleção do Programa, inicio a pós-graduação e a pesquisa sob orientação da Professora Doutora Elisangela Pavanelo, começando, nesse momento, os trabalhos colaborativos indicados anteriormente, os quais compartilham expectativas e interesses. Além de propor o que escrevi no projeto, ouvi da minha orientadora muitas sugestões, das quais destaco três: falarmos sobre a formação de professores, tendo em vista que os sujeitos do estudo seriam alunos da Licenciatura em Matemática; investigarmos mais sobre o LOGO no GeoGebra e desenvolvermos o trabalho sob uma perspectiva fenomenológica.

As três sugestões foram aceitas e exigiram muitos estudos e dedicação, especialmente as duas últimas, devido ao fato de serem algo “novo”, já que ambas me eram desconhecidas e busquei compreendê-las e aprofundá-las, de modo a constituírem a pesquisa aqui apresentada. Trabalhar com alunos da Licenciatura em Matemática foi mais confortável, haja vista minha formação e, semelhantemente às experiências tidas com o PIBID, essa escolha permitiu olhar a formação de um modo geral (e a minha) sob novas perspectivas, com diferentes visões, não mais como aluno, mas como um pesquisador iniciante.

Dentre os estudos exigidos para a realização da pesquisa decorrentes das sugestões aceitas, destaco uma experiência que posteriormente nomeamos como GeoGebra LOGO. Trata-se de um curso de formação *online*, nomeado “Linguagem LOGO no GeoGebra: um contributo para o desenvolvimento do pensamento computacional”, organizado e oferecido pelo Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática de Portugal, a qual oferece diferentes formações para professores da Educação Básica, como pode ser verificado em seu site¹. Tal

¹ <https://www.apm.pt/>

formação se deveu ao fato de terem sido encontrados poucos trabalhos e produções que tratavam deste recurso, conforme apresentamos na seção 4.3.2.

Tinha expectativas muito altas na formação e posso afirmar que participar dela foi uma experiência que gerou muitos resultados positivos. O curso teve impacto direto no desenvolvimento desta pesquisa, visto que apresento aqui a maior parte do que aprendi, pude tirar dúvidas com o professor do curso no tocante as atividades principais elaboradas para ela, bem como estabeleci contato com alguns participantes, todos professores da Educação Básica de Portugal, enquanto apresentava minhas ideias e ouvia novas possibilidades e abordagens. Assim, entendo essa experiência como parte importante não só para o estudo, mas também para minha formação.

Pesquisar também foi novidade para mim e, por isso, acompanhar os Seminários de Matemática e Educação Matemática (SMEMs) e as Jornadas de Avaliação, ambas atividades do PPGEM, foram essenciais para eu compreender melhor a pesquisa de modo geral, bem como o ato de pesquisar, de modo a, por fim, me pôr a realizar tais ações e investigações.

Tudo isso compõe, de maneira direta ou indireta, a totalidade deste trabalho. Estas e outras experiências também estão ligadas à interrogação da pesquisa, que, por fim, compreendemos ser: o que se revela em um estudo sobre Autovalores e Autovetores com TDICs, junto a alunos de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática?

Diante da interrogação, deparamo-nos com a necessidade de discutir questões referentes à formação inicial do professor de Matemática, à disciplina de Álgebra Linear e ao trabalho com TDICs. Além de discutir problemáticas específicas de cada um destes tópicos, buscamos explorar as relações que podem interligá-los.

1.1 Estrutura da dissertação

A partir das experiências e estudos desenvolvidos, organizamos o trabalho em 7 capítulos, iniciando com o de Introdução, no qual são apresentados brevemente alguns dos caminhos trilhados que constituem essa pesquisa.

No Capítulo 2, intitulado Metodologia, destacamos a postura fenomenológica adotada nesta pesquisa, além de trazer considerações sobre a pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Diante da interrogação deste trabalho, optamos por desenvolver o estudo como uma pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica, visto que buscamos as qualidades, a natureza da interação entre estudantes e TDICs a partir do vivenciado.

Já no Capítulo 3, nomeado “Licenciatura em Matemática, Álgebra Linear e TDICs:

investigando possíveis relações”, evidenciamos considerações sobre os cursos de Licenciatura, bem como sobre os modos de conceber e de estruturar os focos da formação. Em seguida, discorremos sobre a disciplina de Álgebra Linear e o tópico de autovalores e autovetores, conceito principal de investigação deste trabalho, encerrando com apontamentos sobre possíveis abordagens com tecnologias digitais nessa disciplina.

No Capítulo 4, “Compreensões e possibilidades para o trabalho com TDICs”, expomos reflexões sobre a perspectiva adotada quanto ao trabalho com tecnologias e sobre o GeoGebra, principal *software* articulado para o desenvolvimento das atividades propostas, indicando alguns recursos disponíveis, como o que nomeamos de GeoGebra LOGO.

No Capítulo 5, “Produção e análise dos dados”, mostramos como se deu a produção dos dados com os estudantes de Licenciatura em Matemática, detalhando as atividades que desenvolvemos e que foram discutidas com os discentes. Em seguida, trazemos considerações sobre o movimento de análise dos dados a partir da perspectiva fenomenológica, apresentando o primeiro movimento realizado, a análise Ideográfica, seguido da análise Nomotética.

No Capítulo 6, “Discussão das categorias”, explicitamos nossas compreensões quanto às categorias que compõem o fenômeno investigado, retomando as ideias nucleares que as constituem e dialogando com trabalhos da literatura em Educação Matemática.

No sétimo e último capítulo, apresentamos algumas considerações finais, retomando parte do desenvolvimento da pesquisa e indicando possíveis questões a serem investigadas. O Apêndice A é o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, aprovado pelo Comitê de Ética, e os Apêndices B, C e D são as atividades elaboradas para a pesquisa, as quais esperamos que sirvam de inspiração para outros docentes que queiram trabalhar de modo semelhante.

2 METODOLOGIA

Entendemos que “pesquisar” é o movimento de questionar e de buscar compreender o que se interroga. Esse movimento não é exclusivo da comunidade acadêmica, visto que, com o avanço das tecnologias digitais e do acesso à internet, é comum as pessoas pesquisarem sobre aquilo que desconhecem. Assim, entendemos que o que se busca compreender é do interesse do pesquisador, fruto de uma inquietação e um dos fatores-chaves para a formulação da interrogação da pesquisa e para o andamento da busca por uma sua melhor compreensão. Desta forma, a pesquisa é o resultado do movimento de pesquisar, a partir do qual se reúne parte das discussões já realizadas e o que o pesquisador apresenta de novo, com suas conclusões baseadas no que foi investigado. Para o desenvolvimento deste trabalho, optamos pela pesquisa qualitativa orientada por uma abordagem fenomenológica.

Conforme apresenta Bicudo (2011), a pesquisa qualitativa trabalha com a qualidade. A “qualidade” observada nesse modo de pesquisa faz referência não ao grau negativo ou positivo de algo, mas sim às características que determinam a essência ou a natureza do percebido, tal como destaca Abbagnano (2007). Desta forma, o qualitativo lida com o subjetivo, passível de expor sensações e opiniões, de modo a tratar de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, de acordo com Bicudo (2019). Entretanto, lidar com o subjetivo e passível de diferentes interpretações não significa que toda e qualquer interpretação é aceita. Contrariando esse tipo de pensamento, a pesquisa qualitativa também apresenta rigor e procedimentos de análise para se justificar e mostrar suas compreensões sobre o pesquisado.

A pesquisa qualitativa se opõe à pesquisa quantitativa, a qual segue modelos estatísticos e busca uma generalização das conclusões feitas. Na pesquisa qualitativa, não se quer a mensuração e a transferibilidade dos resultados, mas entende-se que as ações efetuadas nela podem ser encontradas em outros cenários, com a possibilidade de se identificar características semelhantes. Neste sentido, Bicudo (2011, p. 17) afirma que “o que muda entre a pesquisa quantitativa e qualitativa, no que concerne à generalização e à transferibilidade, é a concepção de certeza e a de repetição exata, ainda que probabilística, de ocorrências”. Enquanto na pesquisa quantitativa se busca lidar com um grande número de sujeitos, busca essa relacionada diretamente à validação da abordagem estatística, na metodologia qualitativa, permite-se olhar para grupos “menores”, com vistas a analisar e a interpretar o discurso dos sujeitos, sendo eles participantes ligados à interrogação norteadora da pesquisa a qual se procura investigar e compreender.

A pesquisa qualitativa está presente principalmente nas Ciências Humanas, como é o caso

da área de Educação. Por isso, em um primeiro momento, é possível que a relação entre Educação Matemática e pesquisa qualitativa cause questionamentos ao ingressarmos neste campo, afinal, qual “área” prevalecerá? A Educação, uma ciência humana e com pesquisas qualitativas, ou a Matemática, uma ciência exata que lida com números, contagem, mensuração, fórmulas, aproximando-se, assim, de características da pesquisa quantitativa?

Uma possível explicação para essa pergunta é justamente compreender a Educação Matemática como uma ciência humana, que parte de preocupações, como o ensino, a aprendizagem, a avaliação, dentre outras, relacionadas à Matemática, uma ciência entendida como exata. Deste modo, vale destacar que:

A pesquisa em Educação Matemática não é uma pesquisa em Matemática, nem é uma pesquisa em Educação, embora trate de assuntos pertinentes a ambas, trabalhe com a Matemática e utilize-se de procedimentos concernentes ao modo de pesquisar próprios da Educação. (Bicudo, 1993, p. 19)

Assim, a Educação Matemática como área de conhecimento em si (e não como junção de duas áreas) pode agregar nas duas vertentes: tanto pela relação de proximidade que pode estabelecer com ambas, de modo a auxiliar na compreensão de como é construída a Matemática, de seus significados no mundo, de como presta serviço à Educação, quanto pelo auxílio na ação político-pedagógica, conforme aponta Bicudo (1993). Por compartilhar procedimentos de pesquisa em Educação, a Educação Matemática hoje tem uma prevalência de pesquisas qualitativas, as quais destacam o sujeito contextualizado social e culturalmente, buscando compreender suas ações e seu discurso. Entretanto, nem sempre ocorreu essa prevalência.

No prefácio de Araújo e Borba (2019), D’Ambrósio discorre sobre os movimentos da Educação Matemática no século passado e suas relações com a pesquisa qualitativa. Um exemplo é a criação do *Journal of Research in Mathematics Education* (JRME) que, dentre os critérios iniciais para a publicação de artigos, privilegiava a metodologia quantitativa. No entanto, as pesquisas da comunidade de Educação Matemática e a formação de diferentes grupos de pesquisa indicavam que a abordagem qualitativa seria mais apropriada para as preocupações expressas, de modo que:

Todos esses desenvolvimentos estimularam a pesquisa de natureza qualitativa. A própria JRME estimula, hoje, a publicação de artigos baseados em pesquisa qualitativa. A aceitação dessa modalidade de pesquisa, nas suas inúmeras variantes, é notável. O exame das publicações, nos principais periódicos de pesquisa em Educação Matemática, permite dizer que a pesquisa quantitativa está em declínio. (D’Ambrósio, 2019, p. 19)

Deste modo, com a pesquisa qualitativa mais consolidada e com os avanços da comunidade de Educação Matemática, surgem diferentes modos de se realizar esse tipo de estudo, dentre eles, a abordagem fenomenológica.

Edmund Husserl (1859-1938) é referenciado como o precursor da Fenomenologia e é um dos principais autores dessa área, que contempla não só uma abordagem de pesquisa, mas também uma escola filosófica, assumindo um modo de compreensão do mundo e do conhecimento. A esse respeito, Bicudo (2011, p. 29-30) apresenta que:

Fenomenologia é uma palavra composta pelos termos *fenômeno* mais *lógos*. Fenômeno diz do que se mostra na intuição ou percepção e *lógos* diz do articulado nos atos da consciência em cujo processo organizador a linguagem está presente, tanto como estrutura, quanto como possibilidade de comunicação e, em consequência, de retenção em produtos culturais postos à disposição no mundo-vida.

Segundo a abordagem fenomenológica, consciência é compreendida como um ato intencional, é o estar atento a..., dirigido para... Ela vem do verbo latino *intendo, tendi, tentum, ere*, que quer dizer tender em uma direção, estender, tender para, dentre outros significados (Bicudo, 1999). Por sua vez, mundo-vida é interpretado como um mundo que tem vida (Bicudo, 2011), pois é a partir dele que olhamos para a totalidade, do modo como somos, e compreendemos o mundo e o outro (que faz parte desse cenário tanto quanto nós), de modo que ele se estende nessa totalidade que muda, por ser temporal, cultural e espacializado.

O fenômeno, o que se mostra, não está dado e pronto para ser observado pelo observador. Essa é a principal diferença entre a abordagem qualitativa fenomenológica e a qualitativa natural (ou positivista), posto que, enquanto a atitude natural compreende que o objeto está dado, pronto para ser observado, sendo possível analisar um antes e um depois, delimitar causa e consequência, a fenomenologia foca no que foi expresso pelos sujeitos nas vivências da investigação, o que faz com que o dito constitua o fenômeno interrogado. O par fenômeno/percebido indica que a qualidade do que é observado parte da percepção do sujeito observador. Entretanto, essa percepção não pode conter pressupostos e resultados esperados e, por essa razão, deve-se ficar atento ao que se mostra.

Tal fenômeno investigado parte da interrogação da pesquisa, como dito anteriormente, a qual se busca compreender. Assim, é a interrogação que direciona o olhar do pesquisador para aquilo que se mostra, procurando conhecê-lo, de forma, então, que “a interrogação é correlata ao interrogado e a quem interroga” (Bicudo, 2011, p. 22). Por conseguinte, o interrogado (fenômeno) deve ser interpretado pelo pesquisador à medida que se mostra na vivência.

Assumida a postura fenomenológica, devemos ter em mente que:

A interrogação é diferente da pergunta, que indaga, solicitando esclarecimentos e explicitações; do problema, que explicita a pergunta, problematizando uma situação de maneira mais discursiva ou colocando as variáveis já determinadas que o constitua sob a forma de uma equação algébrica; da hipótese colocada sob suspeita, cuja confirmação ou negação fica por conta da pesquisa efetuada. Compreendemos que a interrogação subjaz a essas modalidades e que formular problemas, hipóteses e perguntas são maneiras de assumir perspectivas a partir das quais a interrogação será perseguida. Ela diz da perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta buscando, perquirindo, não se conformando com respostas quaisquer. As formas pelas quais a interrogação é explicitada são múltiplas e têm a ver com a própria formação do pesquisador e com sua concepção de mundo e de ciência. (Bicudo, 2012, p. 21)

Assim, a interrogação constitui o norte por meio do qual o pesquisador se orienta, não se assemelhando à postura de pesquisa naturalista, em que perguntas e problemas tratam de respostas e soluções, mas sim busca a compreensão das características nucleares do que se mostra na vivência, do que é investigado.

O vivenciado pelos sujeitos da pesquisa é expresso a partir da descrição das experiências por meio da linguagem, de modo que “uma vez expressado e comunicado, o percebido já não é do sujeito, mas está apresentado (dado) à comunidade, solicitando, então, procedimentos de análise e interpretação” (Bicudo, 2011, p. 19). Essa expressão pode ocorrer em diferentes modalidades de linguagem, como a falada e a escrita, a gestual, dada a ver por figuras, sons, entre outras possibilidades de se externalização. Desta forma, a descrição e a linguagem são fundamentais para a compreensão do fenômeno.

A descrição, como o próprio significado da palavra descreve, diz sobre o ocorrido, mas não de um modo axiomático, inquestionável, que compreende uma verdade absoluta, que traz consigo julgamentos interpretativos, mas sim de maneira que o pesquisador entenda que a sua descrição trata do seu subjetivo, do que foi percebido por ele, que não necessariamente poderia ser evidenciado por outro do mesmo modo, que outra pessoa poderia descrever diferentes concepções do que lhe foi percebido. Deste modo, tem-se como princípio que:

O pesquisador deve dispor de muita atenção para com as descrições, pois elas revelam falas, opiniões, expectativas, gestos, interações, decepções, dúvidas e questionamentos que emergem da experiência dos sujeitos. Assim, ao voltar-se para essa experiência, deve dirigir-se para ela buscando descrevê-la de forma livre de interpretações ou julgamentos prévios, com a finalidade de compreender o fenômeno na forma como ele se nos mostrou. (Santos; Venturin, 2010, p. 4)

Assim, a análise das descrições parte do interrogado e da consciência do pesquisador. Desta forma, entendemos que:

[...] a preocupação da fenomenologia não é se deter na descrição da experiência focando as nuances da sua individualidade, mas visa mostrar as estruturas em que a experiência relatada se dá, deixando transparecer, nessa descrição, as suas estruturas universais. (Bicudo, 2011, p. 46)

Com a descrição, a experiência vivida se torna conhecida através da linguagem. Conforme define Bicudo (1999, p. 37) “linguagem, na fenomenologia, é entendida como comunicação entre os sujeitos mas também, e sobretudo, como organizadora e estruturante do pensar”. Desta forma, a partir dela, mostra-se a organização do pensamento e a exposição da compreensão sobre o que se discute. Assim, temos que:

Ao trabalhar com as manifestações da coisa na percepção de quem percebe, a Fenomenologia coloca em evidência a linguagem, entendida como expressão do sentir, e o discurso, entendido como articulação daquilo que faz sentido. Trabalha, desse modo, com o sentido e com o significado, com o “fazimento de sentido” e com a significação. Daí a importância que, para ela, assumem tanto a análise estrutural quanto a análise hermenêutica. A primeira se debruça sobre os aspectos da realidade presentes na manifestação. Trata-se dos invariantes, aos quais se chega pela redução, dos aspectos descritos exhaustivamente pelos sujeitos investigados ao serem interrogados pelo pesquisador. (Bicudo, 2019, p. 117)

Deste modo, o fenômeno se manifesta por meio da percepção que se tem das descrições das experiências vividas pelos sujeitos. Nesse sentido, a análise fenomenológica recai sobre essas percepções do dito e do percebido, buscando constituir o fenômeno que é investigado a partir do que foi expresso pelos sujeitos na vivência do que é estudado, em conjunto com a descrição, por parte do pesquisador, do contexto de investigação.

A abordagem fenomenológica busca a compreensão do fenômeno a partir das descrições e do discurso dos sujeitos, o que faz com que o número de sujeitos esteja diretamente relacionado com o número de expressões dispostas para a interpretação. No entanto, mais sujeitos não implicam em mais categorias ou melhor compreensão do fenômeno, visto que a análise se volta à convergência do que forma as características do fenômeno, implicando, então, que a definição do número de sujeitos não siga uma norma, conforme aponta Bicudo (2011).

Pela própria formação de Husserl, reconhecido como um filósofo e matemático, não é de se espantar que a abordagem qualitativa fenomenológica esteja presente em pesquisas da

Educação Matemática, afinal, ele mesmo desenvolveu pesquisas sobre a Aritmética e Geometria. Como dito anteriormente, trabalhar com a fenomenologia é não só um método de análise, mas um modo de compartilhar de uma visão de mundo e de conhecimento. Em outras palavras:

Assumir uma postura fenomenológica ao trabalhar-se com *Educação Matemática* significa buscar sentido daquilo que se faz ao ensinar e ao aprender matemática; dos conteúdos matemáticos veiculados na cultura, quer sejam aqueles do senso comum e do cotidiano vivido pelos sujeitos, quer sejam os veiculados em livros, revistas especializadas e na academia; das ideologias que permeiam as redes de significados das concepções matemáticas, das percepções pedagógicas, da prática educacional. É buscar compreender o sentido que o mundo faz para cada participante de um processo específico de ensino e de aprendizagem, procurando pontos de interseção de horizontes de compreensão; é ficar atento ao *outro*, cossujeito do *mundo-vida*, interlocutor do compreendido e presença nuclear no processo de autoconhecimento. É proceder constante e sistematicamente a análise, a reflexão e a crítica das verdades aceitas. (Bicudo, 1999, p. 31, grifos do autor)

Compreendemos, então, que a Matemática não pode ser tomada como um fato, dado ou evidência científica, mas sim vista em convergência com a busca de sentido e atribuição de significado, cerne da Fenomenologia. Deve-se buscar o sentido desse fato e sua compreensão pode se dar em níveis diferenciados da experiência vivida, nos próprios atos realizados, bem como nos seus desdobramentos e expressões, como aponta Bicudo (2009).

Deste modo, os objetos matemáticos no enfoque fenomenológico são entendidos como objetos ideais, “constituídos na intuição essencial ou eidética, portanto na subjetividade psíquica” (Bicudo, 1999, p. 38), mas que transcendem essa esfera e se fazem presente no mundo-vida e na consciência. Assim, os objetos matemáticos, apresentados a diferentes culturas, temporalidades e espacialidades através da linguagem, principalmente da linguagem escrita, estão sujeitos a interpretações de novos aprendizes que busquem o sentido e o fundamento do que foi escrito, com a percepção perspectival que se concretiza nessa cultura, nessa temporalidade e nessa espacialidade, agora do sujeito que os interpreta.

Assim, um ato presente tanto na pesquisa fenomenológica quanto na ação pedagógica baseada nessa perspectiva é a reflexão. A reflexão é entendida como ato intencional, um movimento de dar um passo atrás e olhar o feito (Bicudo, 1999) se faz presente na análise das descrições e nos discursos da pesquisa, bem como no cotidiano escolar que se volta para as ações individuais e coletivas, para compreender, analisar e criticá-las. Deste modo, temos que:

Em aulas de matemática, essas atividades abrangem a exposição dos

raciocínios operados, a análise do seu ponto de partida, da sua sequência e da antecipação de outras possibilidades, por meio da imaginação. Ou abrangem a apresentação de figuras que representam o pensado, movimentando-as na profundidade que o ver em perspectiva permite, lançando luz e sombra e contando o visto. Abrangem a análise de textos, de programas de informática etc. (Bicudo, 1999, p. 42)

Esse momento de reflexão se faz presente em diferentes investigações, as quais podem interrogar textos historicamente situados ou pesquisas que focam o *o quê* ou o *como* do fenômeno em questão. No entanto, independentemente do foco, os relatos das experiências são o centro da análise e são registrados através de depoimentos falados, gravados e transcritos ou por meio de filmagens em vídeo de um cenário mais amplo, dentre outras possibilidades. A partir das descrições dessas experiências dadas a ver por depoimentos falados, gravados e transcritos:

[...] o pesquisador se debruça sobre o texto escrito oriundo da fala (gravada, escrita) e procede mediante leituras atentas, com a intenção de destacar o que de importante, em relação à interrogação, está sendo dito. Desdobra a pesquisa em análises de sentidos/significados que se doam à compreensão mediante idas e vindas ao que o depoente diz, ao seu contexto de vida, à polissemia das palavras, de maneira que no movimento das reduções efetuadas, ocorre a abertura para a complexidade dos significados, preparando a análise hermenêutica. (Bicudo, 2012, p. 23)

Assim, inicia-se a análise das falas dos sujeitos, retomando o texto com as transcrições e buscando os significados do que foi dito. Com isso, há a convergência das ideias expressadas a partir da vivência, de modo que essas expressões, com os significados analisados não sob uma percepção momentânea, mas sob uma reflexão que retoma as falas diversas vezes, caracterizam o fenômeno investigado.

Diante do estudo desenvolvido, retomamos a interrogação deste trabalho, a saber: “O que se revela em um estudo sobre Autovalores e Autovetores com TDICs, junto a alunos de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática?”.

Deste modo, entendemos que a abordagem qualitativa seja adequada, visto que buscamos as qualidades e a natureza da interação entre estudantes e TDICs durante o estudo de um tópico referente à Matemática acadêmica, justificando, assim, o porquê de realizarmos essa investigação no âmbito da Educação Matemática.

A interrogação busca por compreensões² dos significados produzidos e revelados em uma

² Compreender é tomar o objeto investigado em sua totalidade, a dizer, buscar mais e mais peculiaridades, perspectivas, andar em torno daquilo que procuro, indagando, mantendo sempre viva, e

ação conjunta entre alunos, professor e as tecnologias envolvidas no processo. Assim, buscamos o sentido do conceito que queremos discutir e compreender o sentido que, por sua vez, ele faz para o sujeito. Interessa-nos igualmente, enquanto se discute, atentar para como as tecnologias trabalham para a compreensão desse conhecimento.

Tendo em vista que o fenômeno é o que é visto disso que se mostra (Bicudo, 2010), entendemos que o fenômeno investigado neste trabalho trata das nossas compreensões a partir do estudo de autovalores e autovetores com TDICs realizado pelos alunos. Voltamo-nos, então, para ele, tomando o objeto investigado em sua totalidade, intentando verificar peculiaridades e perspectivas, indagando, mantendo viva e dinâmica a interrogação inicial, ou seja, buscando a compreensão do fenômeno. Assim, seguimos com uma abordagem fenomenológica para compreender tais inquietações, cujos passos e procedimentos serão apresentados no capítulo sobre análise e discussão dos dados.

dinâmica, a interrogação inicial, que movimenta e deixa curioso, o pesquisador. (Bicudo, 1993; Bicudo; Martins, 2005).

3 LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, ÁLGEBRA LINEAR E TDICS: INVESTIGANDO POSSÍVEIS RELAÇÕES

Trazemos, no presente capítulo, considerações específicas sobre a formação inicial do professor de Matemática e a compreensão da ideia de forma/ação nos cursos de Licenciatura. Discutimos questões relacionadas à didática e à prática pedagógica, bem como questões relativas à formação Matemática e como elas se relacionam. Também apresentamos reflexões sobre o avanço tecnológico e sobre como tanto os espaços de formação docente quanto os ambientes educacionais foram afetados por eles.

Ademais, dentre as disciplinas obrigatórias para a formação em Matemática, discutimos sobre a Álgebra Linear, seu histórico, os motivos de sua oferta e seu papel na formação docente, além de tecer comentários sobre pesquisas em Educação Matemática que investigam questões dessa disciplina como as principais dificuldades dos estudantes. Compreendemos a necessidade de empreender essa discussão sobre as dificuldades desta temática, uma vez que nos propomos a investigar o estudo de um de seus conteúdos.

Em seguida, tratamos sobre os autovalores e autovetores, tópico central desta investigação. A partir de um recorte histórico acerca desse conteúdo, apresentamos sua definição e questões semelhantes às exibidas anteriormente sobre a disciplina de um modo geral, mas agora investigando as peculiaridades destes conceitos.

Encerramos este capítulo discutindo como o avanço tecnológico impacta a disciplina de Álgebra Linear, além de como esses conceitos também impactam o desenvolvimento tecnológico. Ao abordarmos a aprendizagem desses conceitos com TDICs, evidenciamos algumas pesquisas, com vistas a trazer uma diversidade de programas e de conteúdos, inclusive o de autovalores e autovetores.

3.1 Aspectos gerais sobre a formação inicial do professor de Matemática

No Brasil, a formação do profissional que atuará na Educação Básica acontece por meio dos cursos de Pedagogia e de Licenciatura, oferecidos por instituições públicas ou privadas de ensino. Podemos afirmar que essa formação do professor ganhou destaque após a expansão das redes de ensino na década de 90, em um curto espaço de tempo e, desde então, busca-se acompanhar com maior atenção esse processo.

De acordo com os dados divulgados pelo Censo da Educação Superior de 2022 (Brasil, 2022), dos 789,1 mil alunos ingressantes em cursos de Licenciatura naquele ano (o que

corresponde a 17% dos ingressantes na graduação), 81% foram na modalidade de ensino a distância. Nas instituições privadas, 93,7% dos alunos de licenciatura que ingressaram foram nessa modalidade, enquanto que, nas instituições públicas, foram 22,2 %. Essa diferença não é atual, pois, conforme é possível destacar:

Na sequência temporal 2001-2011 há uma visível migração dos cursos de licenciatura para o regime a distância, o que não ocorre na mesma proporção com outros cursos de graduação. Por exemplo, entre os cursos de bacharelado, 73% eram de oferta presencial em 2011, enquanto apenas 17% das licenciaturas assim se caracterizavam. As licenciaturas a distância oferecidas por instituições privadas detêm 78% das matrículas em cursos de formação de professores. Esse dado é notável, uma vez que, em 2001, havia apenas matrículas em licenciaturas a distância em instituições públicas, e, em 2002, a proporção era de 84% de matriculados em EAD nessas instituições, e 16% nas instituições privadas. (Gatti, 2013, p. 36)

A partir do exposto, identificamos o avanço da modalidade a distância desde o início do século até agora, ocasionando a diminuição da procura por cursos presenciais. De acordo com Gatti (2013), a inversão nesses dados está associada a políticas que desde 2005, favorecem a expansão do Ensino a Distância nesse segmento de instituições. Ressaltamos que as considerações que faremos serão apresentadas tendo em mente a formação presencial, de modo que não abordaremos as preocupações específicas referentes ao Ensino a Distância. Assim, os dados anteriores visam somente a nos auxiliar na compreensão do cenário atual dos cursos de formação de professores.

O Censo de 2022 também apresenta o número de matriculados em diferentes modalidades de Licenciatura, sendo o curso com maior número de inscritos o de Pedagogia, com 49,2 %, seguido pelo curso de Educação Física, com 6,9 %. O curso de Licenciatura em Matemática fica com a terceira posição, com 5,6 %, referente a 94.318 matriculados.

O curso de Licenciatura em Matemática tem como principal objetivo formar o professor que atuará na Educação Básica, mais especificamente nos Anos Finais e no Ensino Médio. Desta forma, para estruturar a formação desse profissional, os cursos nas universidades organizam as disciplinas de modo a tratarem tanto de conteúdos matemáticos (também chamados de domínio específico) quanto das metodologias de ensino, sendo possível abordar diferentes temas relacionados a esses dois aspectos da formação.

Tal estruturação do currículo advém do início deste século, pois, em anos anteriores, era organizada uma base curricular chamada de “3+1”, na qual o estudante cursava, em três anos, somente as disciplinas de conteúdos matemáticos e, no último ano, as disciplinas com caráter pedagógico, obtendo, então, o título de Licenciado. Com a alteração, iniciada com a publicação

das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores (Brasil, 2002), surge, então, essa nova estrutura, segundo a qual as disciplinas pedagógicas não devem ser trabalhadas apenas no último ano, mas sim durante toda a formação do futuro professor. Além disso, as disciplinas de conteúdos matemáticos devem trazer também discussões sobre práticas de ensino relacionadas à Educação Básica.

A partir de então, iniciam-se as discussões sobre a formação do professor diante deste novo cenário. Por exemplo, Fiorentini (2005) aborda e problematiza a formação matemática e didático-pedagógica do futuro professor nas diferentes disciplinas do Curso de Licenciatura, evidenciando que mesmo aquelas cujos objetivos são distintos podem se relacionar e até mesmo agregar uma à outra.

Tratando sobre a formação matemática do futuro professor, ele afirma que:

Por isso, para ser professor de Matemática não basta ter um domínio conceitual e procedimental da Matemática produzida historicamente. Sobretudo, necessita conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da Matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático. (Fiorentini, 2005, p. 110)

Significa dizer que não se trata de uma Matemática simplificada ou inferior àquela da formação do Bacharel, mas deve-se ter em mente que as preocupações serão diferentes para grupos diferentes. Para o licenciando, a capacidade de estabelecer relações entre a matemática acadêmica, a matemática escolar e a matemática do cotidiano não-formal são exemplos dessas preocupações, conforme define Fiorentini (2005). Mais adiante, sobre a formação pedagógica do docente nas disciplinas matemáticas, concordamos quando o autor afirma que:

A maioria dos professores de Cálculo, de Álgebra, de Análise, de Topologia etc. acredita que ensina apenas conceitos e procedimentos matemáticos. Embora alguns professores tenham consciência e busquem deliberadamente desenvolver uma prática que reproduza ou cultive suas crenças e valores, outros – e provavelmente em maior número – não percebem que, além da Matemática, ensinam também um jeito de ser pessoa e professor, isto é, um modo de conceber e estabelecer relação com o mundo e com a Matemática e seu ensino. Ou seja, há um *currículo oculto* subjacente à ação pedagógica desse professor, pois ele ensina muito mais do que pensa estar ensinando. O futuro professor não aprende dele apenas uma Matemática, internaliza também um modo de concebê-la e de tratá-la e avaliar sua aprendizagem. (Fiorentini, 2005, p. 110-111, grifo do autor)

Assim, a formação desse profissional ocorre o tempo inteiro nos dois saberes citados. Isso porque ao mesmo tempo que hoje está na sala de aula, já esteve lá por muitos anos antes, já

lidou e lida com sua futura profissão durante todo o tempo de seus estudos, diferente de outras áreas em que é possível distinguir o perfil profissional e o perfil professor. Deste modo, os formadores de futuros professores devem ter ciência de que seu impacto na formação pode ser maior do que apenas tratar as questões curriculares, visto que a própria experiência que o estudante teve durante a Educação Básica pode fazer parte do seu modo de ser quando estiver atuando como docente.

Ao mesmo tempo, vale ressaltar que as disciplinas pedagógicas podem sim influenciar a formação matemática. Adiante, Fiorentini (2005, p. 112) expõem que:

Elas podem, também, contribuir para alterar a visão e a concepção de Matemática, principalmente se o foco passa a ser não mais o conhecimento pronto e acabado, como geralmente aparece em alguns manuais didáticos, mas, o saber em movimento em seu processo de significação e elaboração, tendo a linguagem simbólica como mediadora desse processo de significação. O saber matemático passa a ser visto como um saber sócio-cultural que é produzido nas relações e práticas sociais, e pode expressar-se de múltiplas formas, sendo uma delas a forma acadêmica formal.

Assim, as disciplinas deste grupo podem permitir uma ressignificação de conceitos e de procedimentos já conhecidos, sendo esse conhecimento prévio ou como ele se faz presente nas salas de aula atualmente também objeto de estudo e de discussão entre a classe, a partir das experiências práticas dos estudantes.

Esse modo de compreender a formação inicial tendo como base diferentes saberes também pode ser apresentado pelos próprios estudantes da Licenciatura. A partir de uma abordagem fenomenológica, Paulo, Amaral e Santiago (2011) discutem em sua pesquisa a interrogação: “Para você, o que é importante para a formação de professores?”, feita a quatro estudantes da Licenciatura em Matemática de uma Universidade do Estado de São Paulo, e, após a análise, expõem duas categorias expressas pelos sujeitos: o conhecimento didático e o conhecimento científico. As autoras abordam a compreensão de que o conhecimento didático:

refere-se ao conjunto de ideias, conteúdos e concepções acerca do ensino e da aprendizagem que compõem o que denominamos de prática pedagógica do professor. Essa prática é influenciada tanto por pressupostos científicos aprendidos nos cursos de formação de professor quanto pela vivência desse futuro professor ou aluno dos cursos de graduação no processo de atuação ou formação que tem em vista as exigências sentidas no âmbito da escola e da sociedade. (Paulo; Amaral; Santiago, 2011, p. 78)

Por essa razão, o estudante deve ter contato com estratégias de ensino e de avaliação,

além de modos de seleção e de preparação dos conteúdos. Quanto a esses conhecimentos, os sujeitos da pesquisa relatam o conflito entre teoria e prática, quer sejam conceitos matemáticos ou pedagógicos, expondo a falta de explicitação de como realizar sua abordagem em uma sala de aula.

Eles compreendem o conhecimento científico como o conhecimento matemático que lhes possibilita serem professores, fazendo referência aos conteúdos disciplinares, mas também a métodos de cálculo ou técnicas específicas. Entretanto, os estudantes “deixam transparecer que o conhecimento teórico aparece, mas não conseguem relacioná-lo com a sua prática docente, com o seu futuro ser-professor nem com o conhecimento prévio que tem sobre o que está sendo aprendido” (Paulo; Amaral; Santiago, 2011, p. 81). Deste modo, ressaltam a importância da formação acadêmica, mas também evidenciam a necessidade de refletir e de planejar a atuação docente, tal como farão na prática, caso contrário:

[...] o seu “ser professor” não se manifesta ou não se constitui. O presente vivido com o conhecimento científico da sala de aula não resgata o conhecido e não leva à projeção de possibilidades. Não lhe é dada a possibilidade de um pensar o seu “ser professor” que permita que o que nos vem ao encontro, no aprender matemática, seja presente, carregando o passado e abrindo possibilidades de projeções futuras, pois os alunos são “guiados” pelo conhecimento científico em que é pressuposto como válido apenas o conhecimento que é provado, ou derivado de pressupostos e conclusões. (Paulo; Amaral; Santiago, 2011, p. 81)

Observando estes dois aspectos considerados importantes para sua formação, as autoras ressaltam que os estudantes não reconhecem a associação entre eles, fazendo com que os considerem como preocupações distintas, o que, para elas, ocorre devido à falta de estímulo do pensamento criativo ou de atribuição de significados aos conhecimentos da área.

As considerações expostas por Fiorentini (2005) e por Paulo, Amaral e Santiago (2011) evidenciam o cenário em que o discente ainda compreende sua formação dividida em duas áreas distintas que não se associam, uma delas relacionada ao conhecimento matemático e a outra ao pedagógico, exigindo que o formador de professores apresente as possíveis conexões entre esses diferentes saberes. Desse modo, uma mesma disciplina pode contribuir com esses dois aspectos, pois, enquanto instiga o estudante a refletir sobre o que lhe foi mostrado, visando algo além do conceito discutido, traz também possibilidades de ensino, tornando exequível ao futuro docente refletir sobre seu escopo de ser professor de Matemática.

De maneira geral, é comum que, nos cursos de Matemática, sejam oferecidas duas modalidades de formação, a Licenciatura e o Bacharelado, o que ocasiona também o

oferecimento de uma mesma disciplina para esses dois grupos na mesma turma. Nesse sentido, verifica-se a existência de uma interseção entre as duas formações, a qual não deve ser desprezada. Contudo, deve-se igualmente ter em mente que uma mesma disciplina oferecida a esses dois grupos requer momentos que tratem das características e dos objetivos de cada formação, de modo que uma não se sobressaia à outra. Assim, precisamos nos atentar às articulações entre as disciplinas de formação específica e as de formação pedagógica, para que não aconteça uma formação “3+1” nem implicitamente, nem de forma a isolar as disciplinas do currículo. Concordamos que:

dessa forma, se considerarmos que o propósito da Licenciatura em Matemática é, fundamentalmente, formar o profissional que irá atuar na educação básica, e que essa atuação envolve uma prática docente escolar em matemática, torna-se essencial articular todo o curso, todas as disciplinas e atividades de modo coerente com tal perspectiva. Isso não significa que disciplinas e atividades optativas não sejam bem vindas, tendo em vista a formação do licenciado de modo mais amplo. Contudo, trata-se de ressaltar o que deve ser tratado prioritariamente no curso. (Sbem, 2013, p.7)

Assumindo uma postura fenomenológica, Paulo, Santiago e Amaral (2013) analisam as Diretrizes Curriculares Nacionais de diferentes cursos de Licenciatura, dentre eles, o de Matemática e, a partir de sua interpretação, apresentam três categorias acerca do perfil esperado dos futuros professores: formação para a ação em sala de aula, formação para a construção do conhecimento pedagógico, científico e cultural e formação para análise e participação crítica na autoformação e na gestão educacional.

Quanto à formação para ação em sala de aula, entendem que este é o foco dos cursos de Licenciatura, mas também consideram que o professor sempre está em formação. Deste modo, este perfil trata do conhecer, do vivenciar, do elaborar e do avaliar propostas e projetos de ensino na área do “fazer” e do “como fazer”. Assim, fica evidente que a abordagem de diferentes conteúdos da formação pode ser o momento em que os estudantes se deparam também com novas possibilidades de ensino.

No tocante à necessidade de formar professores para a construção do conhecimento pedagógico, científico e cultural, expõem preocupações referentes ao “conhecimento de questões contemporâneas para o entendimento do contexto global e social”, à “importância social da profissão como possibilidade de desenvolvimento social” e à “visão crítica do papel social da Ciência”.

Além disso, por considerarem que a participação na gestão é uma pauta importante quando se trata de gestão democrática, a partir da organização escolar, as autoras compreendem

a necessidade de uma formação para análise e participação crítica na autoformação e na gestão educacional, de modo que o professor esteja apto a fazer parte das tomadas de decisões que ocorrem coletivamente, priorizando uma gestão democrática por meio de um trabalho coletivo e participativo.

Seguindo ainda em uma perspectiva fenomenológica para tratar a formação de professores, temos como possibilidade de compreender, nos cursos de Licenciatura, a concepção de forma/ação. Essa expressão foi cunhada por Bicudo em seu trabalho publicado em 2003, “para dar ênfase ao significado de forma como manifestação de algo que assume uma configuração por meio de um ato atualizador em ação” (Orlowski, 2023, p. 20). Inferimos, então, que uma ação impacta em um modo de ser, em uma forma que carrega consigo concepções de mundo, de educação, de Matemática, entre outras, as quais se materializam e, sob a reflexão do que foi realizado, retomam uma ação modificada, que vai se concretizar em uma forma, compondo, assim, um espiral que não se finda. Dessa forma:

ao solicitar que se compreenda as dimensões da forma e da ação na palavra formação, em entrelaçamento, unindo-as, expressa no sinal gráfico </> um aceno para atenção à dinâmica formativa, cuja condição de possibilidade se realiza em esforço reflexivo de dar-se conta de si, em ação de formar e formar-se com o outro. (Orlowski, 2023, p. 22)

Destacamos que “forma/ação não é um constructo, muito menos uma pré-concepção assumida, mas modos de ser que anunciam a possibilidade de investigar o movimentar-se humano intencional, em condições de abertura às dinâmicas formativas” (Orlowski, 2023, p. 22).

As ações de aprender-ensinar Matemática podem constituir os momentos de atualização do (futuro) professor. No caso dos estudantes de Licenciatura, podemos compreender que aprendem Matemática, seja por um aprofundamento de conceitos seja pela apresentação de outros até então desconhecidos e, neste movimento, a concepção de ensinar Matemática também pode se fazer presente, através da revisão de conteúdos, da discussão sobre o ensino de diferentes tópicos ou até mesmo do entendimento acerca de como o modo como algo foi aprendido pode fazer parte do seu modo de ensinar esse mesmo assunto. Assim, não estamos olhando para dois processos, o de ensino e o de aprendizagem, mas sim para o:

[...] aprender-ensinar Matemática com o hífen, como entrelaçamento de ambos, [o que] significa um compromisso assumido consigo e com o outro, de cuidado ao formar-se e formar, em uma perspectiva crítica e reflexiva,

tendo em vista a Matemática enquanto possibilidade formativa de pessoas. (Orlowski; Mocrosky; Bicudo, 2023, p. 9)

Consideramos que o modo de ensinar caracteriza a forma, isto é, um modo de ser, de agir. Por isso, não podemos perder de vista que:

as formas, como as ideias, carregam ideais e valores. Vão sendo produzidas historicamente no contexto histórico, cultural, social e político no qual se caracterizam as concepções sobre educação, Matemática e as pessoas, de modo que a forma vai sendo nutrida nesse contexto material de concepções e valores que indicam direções (práxis, relações sociais, pessoas que têm expectativas, modos de ser e de compreender, dos conhecimentos produzidos, preservados e comunicados pela linguagem e pela tecnologia disponível). (Orlowski, 2023, p. 21)

Assim, para que a forma/ação se concretize, é imprescindível a reflexão sobre o que foi realizado, sobre os modos como as coisas aconteceram, no âmbito individual e coletivo, a qual deve impactar uma mudança de agir e de ser. Compreendendo desse modo, temos a ideia de que:

[...] nunca estamos formados, mas estamos sempre em condição de *vir-a-ser*, ou seja, estamos sempre em forma/ação. Tal condição aberta nos indica também que não há etapas ou limites cronológicos, uma vez que vai se dando ao longo da vida do docente, enlaçando as vivências em que o fazer matemático ocorre, bem como com as expressões matemáticas. (Orlowski, 2023, p. 21-22, grifo do autor)

Diante da ideia de *vir-a-ser*, temos a concepção de um movimento que tende a ser, de forma que o professor nunca estará formado, no sentido de completamente pronto, como se não houvesse mais nada para alterar em sua prática ou algo novo para aprender, pelo contrário, considera-se que cada mudança gerada por uma reflexão sobre seu modo de agir se aproxima de novos modos à medida que aprende e ensina.

Compreender essa característica como algo presente ao longo da carreira docente inclui considerar os cursos de Licenciatura, momento no qual se inicia a preparação direcionada à ação docente. Os estudantes da Licenciatura podem desenvolver essa concepção acerca da necessidade de se manter em forma/ação diante da percepção de diferentes conhecimentos, modos de ser, de ensinar, de aprender, fazendo com que entendam a importância de refletir sobre sua ação e sobre a necessidade de se manter sempre nesse movimento de um tender a ser.

Assim, percebemos que as discussões sobre a formação inicial do professor são constantes e necessitam de revisões, com vistas a acompanhar tanto as mudanças da sociedade, de um

modo geral, quanto os resultados das pesquisas educacionais que tratam deste tema.

Podemos considerar que os últimos anos foram marcados por um grande avanço tecnológico e, cada vez mais, discute-se a presença e os impactos, nos ambientes educacionais, de computadores, calculadoras, *tablets* e *smartphones*, presentes nas escolas, seja por uma ação pedagógica seja pelos próprios estudantes. Entretanto, a presença das TDICs em diversos afazeres no meio urbano não implica, necessariamente, em mudanças nas ações pedagógicas (Paulo; Pereira; Pavanelo, 2020), de modo que o estudante de Licenciatura deve vivenciar modos de ensinar e de aprender com as tecnologias para sua formação.

O trabalho docente com TDICs também é recomendado por documentos nacionais, como as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica (Brasil, 2002, p. 1), que ressalta a necessidade do preparo para “o uso de tecnologias da informação e da comunicação e de metodologias, estratégias e materiais de apoio inovadores” nos Referenciais Curriculares Nacionais dos cursos de Bacharelado e Licenciatura (Brasil, 2010, p. 79), os quais apontam as “tecnologias da informação e comunicação aplicadas ao ensino de matemática” como tema a ser abordado na formação e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017), que incentiva o trabalho dos estudantes com tecnologias em todo o período da Educação Básica.

Discute-se a formação para o uso de TDICs a partir de diferentes concepções. Entre elas, compartilhamos da visão proposta por Mocrosky, Mondini e Orlovski (2018). Segundo as autoras, para que o professor trabalhe com TDICs, é necessário que elas estejam nos espaços de formação, como a universidade e a escola, local de sua atuação e continuação de sua formação. Entretanto, apenas sua presença não é suficiente, é preciso que o professor saiba como agir diante dessa possibilidade, isto é:

não negamos a importância de ações que visem a familiarização, bem como indicações de atividades pedagógicas inspiradoras para professores, mas entendemos que, mais do que compreender a tecnologia, **é preciso compreender-se com ela**, tanto o professor como o aluno. É preciso ir além do ter e do saber usar. (Mocrosky; Mondini; Orlovski, 2018, p. 42, grifo dos autores)

Assim, o momento da formação inicial pode fazer com que o futuro professor compreenda possibilidades de agir, de ser e de estar com TDICs enquanto vivencia esse período, mas também se projeta para a futura prática docente.

Nacarato (2006) aponta alguns avanços, desafios e lacunas destacadas por pesquisas que tratam da formação inicial. Dentre os desafios e lacunas, aponta, respectivamente, os saberes e

o papel do professor formador e as poucas transformações a partir das pesquisas.

Dentre os avanços, a autora sublinha as experiências em disciplinas com caráter pedagógico que possibilitam a produção de saberes sobre determinados tópicos da Matemática escolar, a criação de novos cursos de Licenciatura com atividades em que o licenciando esteja inserido na prática pedagógica desde o início de sua formação, o papel desempenhado pela Prática de Ensino e pelo Estágio Supervisionado, o trabalho coletivo nas instituições e, por fim, destaca:

as contribuições que as atividades extracurriculares e espaços institucionais paralelos ou marginais trazem para a formação docente. Esses espaços compreendem: disciplinas extracurriculares, cursos de extensão, uso de laboratórios de ensino, grupos de estudos, dentre outros. (Nacarato, 2006, p. 134)

Assim, compreendemos que as atividades extracurriculares não complementam a formação inicial, mas fazem parte dela tanto quanto outras experiências vivenciadas pelos estudantes, desde que proporcionem reflexões compatíveis com os objetivos da formação, conforme apontado pela SBEM (2013), referenciada anteriormente.

Desta forma, entendemos que propostas semelhantes às do presente trabalho beneficiam não somente o pesquisador e a pesquisa, mas também os participantes, haja vista que, nelas, são discutidos tópicos da prática futura, podendo marcar igualmente um contato mais próximo com investigações educacionais, bem como com a possibilidade de uma Pós-Graduação, lidando com o futuro profissional em diferentes aspectos para além da prática em sala de aula.

É consenso a necessidade de se ter atenção aos saberes trabalhados na formação, já expostos anteriormente. Neste sentido, podemos destacar a publicação dos Referenciais Curriculares Nacionais para Cursos de Licenciatura em Matemática (Brasil, 2010), especificamente em sua página 79, em que ressalta a importância de o professor ter um sólido conhecimento da Matemática e de estratégias de ensino. Adiante, apresentam os temas de formação do futuro professor e, dentre eles, encontramos a disciplina de Álgebra Linear.

3.2 A disciplina de Álgebra Linear

O primeiro curso de Matemática no Brasil foi organizado pela Universidade de São Paulo (USP) em 1934 e visava a formar professores para o ensino secundário (hoje compreendido como Anos Finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio) e também pesquisadores. Entretanto, a disciplina de Álgebra Linear aparece pela primeira vez no currículo

deste curso em 1965, ainda que já existisse desde 1961 nos cursos de Engenharia da Escola Politécnica de São Paulo, conforme relatam Lima e Gomez (2018). Mesmo que a disciplina somente tenha aparecido depois de mais de 30 anos da fundação do curso, há registros de que alguns tópicos que hoje fazem parte dela, já constassem nas ementas de outras matérias oferecidas, como discussões acerca de espaços vetoriais e transformações lineares.

Com o oferecimento dessa disciplina em 1965 pela USP, outras universidades também buscaram ofertá-la ao longo do tempo, no entanto, conforme relata Traldi Junior (2020, p. 85):

A obrigatoriedade do oferecimento de conteúdos de Álgebra Linear nos cursos de licenciatura em matemática teve amparo legal, na homologação, em 2003, das Diretrizes Curriculares para os Cursos de Bacharelado e Licenciatura, que destaca a presença obrigatória dessa disciplina entre as subáreas de conhecimento que deveriam estar presentes na formação do professor de matemática.

A oficialização da disciplina na década de 60 não foi exclusividade do Brasil, uma vez que, na mesma década, houveram os primeiros cursos oferecidos nas universidades dos Estados Unidos. Contudo, as questões que envolvem a Álgebra Linear só foram ganhar mais atenção das pesquisas em Educação Matemática a partir de 1985, com os estudos de pesquisadores da França e dos Estados Unidos, como Jean-Luc Dorier e Guershon Harel, sendo que anteriormente o principal foco era a disciplina de Cálculo, conforme relata Hillel (2000).

Nos Estados Unidos, em 1990, um grupo de educadores matemáticos formaram o *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG), Grupo de Estudos do Currículo de Álgebra Linear, em tradução livre, um movimento que indica a importância de discussões e pesquisas sobre essa área. A partir do diálogo com professores responsáveis por essa disciplina em diferentes cursos de diferentes universidades norte-americanas, o grupo publica 5 recomendações para um primeiro curso de Álgebra Linear (Carlson et al., 1993).

Considerando que diferentes formações costumam ter apenas uma disciplina de Álgebra Linear, como cursos de Engenharia, a primeira recomendação foi a de que a disciplina trabalhasse as necessidades específicas da formação da turma em questão. A segunda recomendação tratou da abordagem da disciplina e, de modo geral, sugeriu que o trabalho fosse orientado para matrizes, com menos foco na abstração e mais foco na resolução de problemas e aplicações. Ainda no tocante a esta recomendação, houve a apresentação de uma sugestão de ementa com os principais conteúdos e tópicos específicos definidos. Os conteúdos eram: Adição e Multiplicação de Matrizes, Sistemas de Equações Lineares, Determinantes, Propriedades do $\mathbb{R}^n$, Autovalores e Autovetores e Ortogonalidade, com cada conteúdo evidenciando os tópicos

que consideravam principais. Por fim, apresentaram alguns tópicos suplementares, que poderiam ser abordados a depender do tempo e do curso de formação em questão.

A terceira recomendação tratava de considerar as necessidades e os interesses dos estudantes, de modo que apresentasse exemplos práticos e permitisse um ambiente de interação, em que houvesse comunicação e o desenvolvimento de conjecturas. A quarta se referia ao incentivo para o trabalho com tecnologias nesta disciplina, com computadores ou calculadoras. Por fim, a última recomendação é que houvesse um segundo curso de Álgebra Linear para os cursos de Matemática, com duas possíveis abordagens, sendo uma que trabalhasse a abstração dos espaços vetoriais e outra que focasse em aspectos numéricos, aplicações de matrizes e nos resultados estudados.

No Brasil, as pesquisas se voltaram para essa disciplina a partir da década de 90, o que é coerente dado o cenário nacional da Educação Matemática, com o primeiro Programa de Pós-Graduação iniciado em 1984, na Unesp, na cidade de Rio Claro. Além disso, a importância e a presença da disciplina de Álgebra Linear em diferentes formações também fazem parte das pesquisas realizadas, haja vista que o ensino e a aprendizagem destes conceitos foram e são investigados por diferentes estudantes, em diferentes cursos, como os de Engenharia, Física, Ciências da Computação e Matemática, tanto Bacharelado quanto Licenciatura.

Vale destacar que os assuntos que hoje entendemos como conteúdos da disciplina não datam de uma mesma época e nem partem das mesmas motivações. Por exemplo, o estudo de sistemas lineares tem registros desde a Antiguidade, surgindo posteriormente a notação de matrizes e as discussões sobre determinantes para a resolução delas, bem como o avanço da Álgebra Moderna no século passado, que apresenta ideias de espaços vetoriais quando discute estruturas algébricas, como *Corpos* e *Anéis*. No Brasil, essas discussões eram trabalhadas principalmente pelos membros do grupo Bourbaki, que faziam parte do grupo de professores da USP e abordavam esses assuntos na década de 50, fazendo com que suas publicações atingissem outros países (Lima; Gomez, 2018).

O principal motivo do surgimento da disciplina, que fez com que assuntos que antes eram discutidos em outros momentos fossem reunidos, dando-lhes um destaque e um espaço específico, foi a percepção da diversidade de aplicações que eles poderiam ter em diversas áreas, como na Economia, na Física e na Matemática Aplicada. Essa visão pode justificar o fato de que, no Brasil, essa disciplina foi oferecida primeiro para cursos de Engenharia e, posteriormente, para o curso de Matemática. Mesmo nessa perspectiva, alguns autores veem a disciplina como um momento de transição, como relata Santos (2018), posto que, a partir dela, é possível tanto apresentar a Matemática da universidade, lidando com ideias mais “avançadas”

e empregando novos conceitos, quanto justificar e trabalhar com assuntos já vistos na Educação Básica, como por exemplo, questões da Geometria Euclidiana, já conhecida dos estudantes ou também de outras geometrias, como a Projetiva. Com essa justificativa em mente, pode-se entender o porquê de a disciplina ser oferecida nos dois primeiros anos de formação.

Após a publicação dos Referenciais Curriculares Nacionais para Cursos de Licenciatura em Matemática (Brasil, 2010), a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em conjunto com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), escreveu um boletim, publicado pela SBEM em 2013, com o objetivo de apresentar uma análise crítica do documento nacional, de modo a evidenciar as visões de ambas sobre a formação presencial do professor de Matemática no Brasil. Nele, listaram o que chamam de temas essenciais da formação do futuro professor, dentre os quais está a Álgebra Linear, tal como é exposto abaixo:

A Álgebra Linear constitui não apenas uma das ideias e ferramentas básicas da Matemática, mas sistematiza uma estrutura algébrica que está presente em muitas aplicações dentro e fora da Matemática, por exemplo, em problemas contextualizados em áreas distintas como das ciências exatas, biológicas, sociais ou da economia. Apesar dessa importância, é necessário focar seu escopo quando consideramos um currículo de licenciatura em Matemática para preparar um professor de Ensino Médio que reflita as necessidades atuais, tendo em vista o contexto escolar. (Sbem, 2013, p. 29)

No decorrer das considerações, apresentam a necessidade de o futuro professor ter um domínio dos elementos que fazem parte da disciplina e que são trabalhados na Educação Básica, principalmente no Ensino Médio, como matrizes, determinantes, o conceito de linearidade, relações de transformações lineares com geometria, entre outros. O texto considera que muitos dos conteúdos trabalhados por essa disciplina não fazem parte do currículo da Educação Básica, mas defendem a necessidade da boa compreensão dos licenciandos, a fim de que consigam fazer conexões entre esses conteúdos e outros conceitos já conhecidos, trazendo exemplos da Matemática e de outras áreas.

Dorier (2002) aponta dois principais modos de abordar os conteúdos da disciplina, sendo um deles o foco no estudo formal dos espaços vetoriais e o outro o foco analítico a partir de estudos dos espaços $\mathbb{R}^n$ e do cálculo matricial. Ainda que as recomendações do LACSG sejam para a disciplina de um modo geral, presente em diferentes formações, sugerem-lhe uma abordagem com foco em matrizes (Carlson et al., 1993). A partir da leitura das considerações feitas pela SBEM e pela SBM, é possível concluir que também há uma orientação para a segunda abordagem, pois ela permite mais conexões com os conteúdos da Educação Básica.

Sugerimos o trabalho com exemplos visualmente concretos de objetos e conceitos lineares, que pode ser uma ponte para uma abordagem adequada de um curso de Álgebra Linear para a licenciatura. Além disso, é desejável que a conexão entre a geometria e a álgebra seja contemplada, trazendo significados para os conceitos teóricos da disciplina, de modo a capacitar o professor no tratamento adequado do conteúdo curricular do Ensino Médio. (Sbem, 2013, p. 29)

Além desta publicação, podemos observar o que dizem algumas pesquisas da Educação Matemática sobre essa disciplina na formação do futuro professor. Prado (2016), em sua tese de doutorado, apresenta algumas contribuições dela na formação inicial: estudo da estrutura algébrica espaço vetorial; estudo das transformações lineares; estudo do processo de demonstração e relações com outras disciplinas.

Sobre as contribuições acerca do estudo da estrutura algébrica espaço vetorial, Prado (2016) defende o momento oportuno de fazer com que o estudante perceba que o que antes compreendia como casos isolados, agora faz parte de algo mais amplo, com os espaços vetoriais unificando e generalizando conceitos, objetos e métodos de diferentes contextos. Tratando sobre o estudo das transformações lineares, explicita a importância desse conteúdo, dado que pode ser utilizado em disciplinas do Ensino Superior, a exemplo da de Cálculo, assim como em tópicos relacionados à geometria da Educação Básica. No estudo do processo de demonstração, argumenta que o licenciando tem a oportunidade de vivenciar o uso do rigor dedutivo desse processo, desde que ele seja seu protagonista, de modo que possa justificar os resultados estudados. Por fim, discorrendo sobre a relação com outras disciplinas, afirma que os conceitos estudados são utilizados no decorrer da formação, como em disciplinas como Equações Diferenciais, Teoria dos Conjuntos, entre outras, mas também permitem relações com tópicos da Educação Básica, como conjuntos numéricos, matrizes, sistemas de equações lineares, função, vetores e transformações no plano e no espaço.

Nesse mesmo sentido, Traldi Junior (2020) expõe seis justificativas para a presença da disciplina no currículo da Licenciatura quando aborda algumas possibilidades de ampliar e de aprofundar discussões de conteúdos e procedimentos na Educação Básica. Para tanto, cita alguns exemplos, como:

Permite argumentar a razoabilidade de definições apresentadas na Educação Básica, a partir do conceito de base. Por exemplo, a identidade de polinômios. A estratégia de comparar dois polinômios pode ser justificada pela unicidade das coordenadas em relação a uma dada base do espaço vetorial. [...] Outro tópico importante da Álgebra Linear é o de produto interno que generaliza o produto escalar e amplia os conceitos de distâncias, norma de um vetor, medida de ângulos, ortogonalidade, projeções ortogonais e de bases

ortonormais, possibilitando assim a aplicação destes conceitos, principalmente em problemas elementares de Física, estudados na Educação Básica. Além disto, estes conceitos possibilitam o estudo das geometrias não-euclidianas. (Traldi Jr, 2020, p. 89-90)

Vale ressaltar que o último trecho supracitado está de acordo com as considerações feitas pela SBEM e SBM, apontadas anteriormente, e também consoante a uma das motivações de formalização da disciplina, ao destacar a possibilidade de se abordar diferentes Geometrias.

Além dessas justificativas, o autor discute a importância de compreender a estrutura matemática espaço vetorial, lidando com objetos que, na Educação Básica, eram vistos como sendo de naturezas distintas, e ressalta a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico. Também aponta para as possíveis articulações entre as transformações lineares rotação e translação, vistas na Educação Básica, e as relações com o estudo de matrizes. Deste modo, é possível afirmar que tais considerações estão de acordo com os apontamentos feitos por Prado (2016).

Além dessas, destaca também que os conceitos de combinação linear e de dependência linear estudados em Álgebra Linear viabilizam a justificativa das operações utilizadas ao resolver os sistemas lineares por escalonamento, presente na Educação Básica, e ressalta que o domínio deste conceito permite lidar com todas as possibilidades de posição entre planos quando se estuda sistemas lineares de três equações e três incógnitas.

Mais adiante, o autor ressalta que a maioria dos livros utilizados na disciplina não contempla em sua proposta atividades e discussões específicas acerca da formação do professor e destaca o papel do formador na apresentação das possíveis conexões entre os conteúdos vistos e os que são abordados na Educação Básica, de modo que:

para que o curso de AL [Álgebra Linear] tenha a real importância na formação do professor de matemática, é fundamental que os formadores de professores e os materiais didáticos dessa disciplina explicitem essas relações, não deixando para o futuro professor fazer essas articulações, pois nem sempre são articulações fáceis de serem percebidas. (Traldi Jr, 2020, p. 91)

No mesmo sentido, na tentativa de compreender melhor a disciplina na formação docente, Alves (2013) busca levantar as características de um curso de serviço de Álgebra Linear voltado a alunos da Licenciatura em Matemática. A autora define curso de serviço como um curso que esteja preocupado em desenvolver a parte teórica da disciplina, mas também em discutir a prática profissional do futuro professor. Ao final do trabalho, defende que “as características metodológicas devem ser conduzidas de modo a possibilitar a aprendizagem deste aluno e

proporcionar a ele uma postura de sala de aula que lhe direcione a embasar sua futura prática em sala de aula” (Alves, 2013, p. 79), o que condiz com as considerações feitas por Fiorentini (2005), segundo as quais a disciplina de Álgebra Linear é um momento em que o estudante também compreende um modo de ser professor.

Mesmo que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017) não traga especificamente o conteúdo de matrizes e determinantes, é possível que eles sejam abordados durante o estudo de resolução de um sistema de equações lineares, recomendado na habilidade EM13MAT301, por exemplo. Além disso, outros conceitos da Álgebra Linear também podem se fazer presentes na Educação Básica, como o estudo das transformações isométricas, translação, reflexão, rotação, referentes à habilidade EM13MAT105. Vale destacar que ambas as habilidades exemplificadas são referentes ao Ensino Médio.

Apesar também de grande parte dos conteúdos dessa disciplina não estarem presentes nos currículos da Educação Básica, entendemos que as considerações feitas sobre a importância do estudo da Álgebra Linear para a formação do futuro professor ainda são válidas, pois tratam, além de questões curriculares, do próprio processo de formação do estudante, compreendendo, validando e estabelecendo conexões entre diferentes conceitos.

Na disciplina de Álgebra Linear, assim como em todas as outras do currículo das universidades, os alunos podem apresentar dificuldades durante o seu estudo, partindo de diversos motivos e variando o nível para cada indivíduo, dificuldades essas que impactam diretamente a aprendizagem. Hillel e Sierpinska (1994, p. 65) destacam que:

tanto o ensino como a aprendizagem da álgebra linear no nível universitário são quase universalmente considerados uma experiência frustrante. A álgebra linear é geralmente o primeiro curso em que os estudantes têm contato com uma teoria matemática madura, edificada sistematicamente de baixo para cima, com toda a sua preocupação exagerada de tornar as suposições explícitas, justificando afirmações por referências às definições e fatos já provados. (Tradução nossa)³

Deste modo, um cenário possível de se deparar é que mesmo que os estudantes sejam aprovados, podem não apresentar uma compreensão básica dos conteúdos estudados, principalmente quando se fazem presentes novamente em outras disciplinas (Carlson et al.,

³ Both the teaching and learning of linear algebra at the university level is almost universally regarded as a frustrating experience. Linear algebra is generally the first course that students encounter which is a full-fledged mathematical theory, built systematically from the ground up, with all its fuss about making all assumptions explicit, justifying statements by reference to definitions and already proved facts.

1993).

Dito isso, entendemos que se faz necessário buscarmos compreender quais considerações foram feitas a partir de pesquisas que tiveram como foco investigar esses impasses. Essas dificuldades são diversas e podem variar de contextos mais gerais, fora da sala de aula, como adaptação à rotina do semestre ou problemas pessoais no momento em que cursa a disciplina, até contextos mais específicos, dentro da sala de aula, como apresentar dificuldade com a formalização e com a argumentação da Matemática acadêmica, em geral, ou específica de um conteúdo, seja de conteúdo atual seja antigo, por não ter conhecimento prévio de certos assuntos.

Buscando identificar algumas das fontes de dificuldades conceituais específicas dessa disciplina, Hillel (2000) apresenta três casos: a existência de vários modos de descrição, o problema das representações e a aplicabilidade da teoria geral. O autor considera que a dificuldade com provas e demonstrações também pode ser identificadas, mas compreende que essa não é específica dessa disciplina.

Abordando os diferentes modos de descrever os conceitos da disciplina, o autor apresenta três linguagens e aprofunda os desafios de cada uma delas, ressaltando que essa diversidade faz parte do estudo da temática, afirmando ser importante que se destaque que essas maneiras coexistem, são intercambiáveis, mas não equivalentes. Elas são identificadas pelo autor como:

1. O *modo abstrato* - usando a linguagem e os conceitos da teoria geral formalizada, incluindo: espaços vetoriais, subespaços, espaço gerado, dimensão, operadores, núcleos.
 2. O *modo algébrico* - usando a linguagem e os conceitos da teoria mais específica, incluindo: n-útiplas, matrizes, posto de uma matriz, soluções de sistemas de equações, espaço de linha.
 3. O *modo geométrico* - usando a linguagem e conceitos de 2- e 3-espaço, incluindo: segmentos de linha direta, pontos, linhas, planos, transformação geométrica.
- (Hillel, 2000, p. 192, grifo do autor, tradução nossa)⁴

Tratando sobre o que nomeia como o problema das representações, o autor afirma que se tornou comum apresentar o conteúdo com o modo geométrico e, em seguida, dar sequência com $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ e outros espaços vetoriais, usando as diferentes linguagens já mencionadas.

⁴ 1. The *abstract mode* - using the language and concepts of the general formalized theory, including: vectos spaces, subspaces, linear span, dimension, operators, kernels. 2. The *algebraic mode* - using the language and concepts of the more specific theory of , including: n-tuples, matrices, rank, solutions of systems of equations, row space. 3. The *geometric mode* - using the language and concpet of 2- and 3-space, including: direct line segments, points, lines, planes, geometric transformation.

Ressalta que, em abordagens assim, pode não ficar claro que a descrição geométrica foi usada para ilustrar um caso específico ou para exemplificar um caso geral. Assim, como as representações não são sempre únicas e dependem de escolhas, como base ou sistema de coordenadas, é importante entender essa dependência das escolhas particulares e suas consequências.

Ao final, evidencia a dificuldade da aplicabilidade da teoria em geral, como compreender o isomorfismo entre espaços vetoriais, o que aponta como um resultado importante da disciplina, ou até mesmo problemas de natureza mais teórica, como explorar as consequências de definições, dando alguns exemplos que devem ser avaliados segundo a necessidade de dar tamanha profundidade aos assuntos, a depender dos conteúdos da disciplina, como, por exemplo, ter como objetivo tratar sobre operadores lineares nilpotentes futuramente, os quais nem sempre são vistos em um primeiro curso de Álgebra Linear.

Discorrendo igualmente sobre possíveis dificuldades, Artigue, Chartier e Dorier (2000) afirmam que parte delas advém da não preparação prévia na Educação Básica para lidar com a matemática formal, tratando-se, então, de um campo totalmente novo. Identificam ainda outros desafios, como o novo vocabulário, com novas palavras (comparado até a uma língua estrangeira), os novos métodos de exposição e de demonstração, destacando também a natureza “universal” dos conteúdos, de modo similar à última consideração de Hillel.

Em seguida, introduzem algumas sugestões que podem diminuir tais dificuldades, como limitar o vocabulário e os símbolos somente para os mais adequados e necessários, iniciar usando exemplos já vistos pelos estudantes, como exemplos geométricos e equações, depois passar para funções e polinômios e integrar os resultados das pesquisas relacionadas à disciplina na didática da sala de aula.

Furtado (2010) busca investigar algumas dessas dificuldades que os estudantes relatam como conceitos abstratos dessa disciplina. A autora assevera que os alunos entrevistados demonstram dificuldades com a abstração dos conteúdos e entendem que a falta de exemplos de aplicação corrobora para que essa dificuldade seja apresentada. Ao final, aponta possíveis desdobramentos para investigar tais dificuldades ou modos de buscar diminuí-las, como relacionar as dificuldades dos alunos em Álgebra Linear com o ensino que tiveram na Educação Básica e trabalhar com *software* interativo, de modo a facilitar a visualização das operações.

Philot e Bianchini (2020) realizam uma pesquisa bibliográfica sobre as dissertações acadêmicas e teses feitas no Brasil, cuja temática é o ensino e a aprendizagem da disciplina de Álgebra Linear no Ensino Superior, publicadas entre os anos de 2011 a 2018, com o objetivo de identificar as principais tendências e as lacunas não investigadas. Os trabalhos

foram selecionados a partir de uma busca no banco de teses da CAPES. Depois da leitura e análise dos 20 trabalhos escolhidos, as autoras os distribuíram em 6 categorias: Utilização de Recursos Tecnológicos no Ensino e na Aprendizagem; Formação de Professores; Ensino a Distância - EAD; Análise de Livros Didáticos; Currículo e Sequências Didáticas (Philot; Bianchini, 2020, p. 98). As autoras ressaltam que, seguindo a análise empreendida por elas, um mesmo trabalho pode pertencer a mais de uma categoria.

Nesse sentido, a categoria que mais apresenta trabalhos, contando com a metade dos investigados, é aquela sobre a “Utilização de Recursos Tecnológicos no Ensino e na Aprendizagem”, seguida da categoria “Sequências Didáticas”, com 8 trabalhos. Entretanto, as autoras evidenciam a importância das pesquisas que pertencem a outras categorias.

Compreendemos que a investigação apresentada neste trabalho articula 3 das categorias descritas pelas autoras. O trabalho com tecnologias se dá em atividades desenvolvidas para a pesquisa e com considerações específicas sobre a formação do futuro professor.

O início deste século apresenta um crescimento das pesquisas em Educação Matemática. Com isso, a disciplina de Álgebra Linear passa a ser mais consolidada e presente em diferentes formações, além de haver mudanças tecnológicas e sociais consideráveis nas últimas duas décadas. Neste cenário, um grupo de educadores matemáticos, tendo em vista as mudanças e avanços supracitados, reúnem-se para reavaliar e atualizar as sugestões feitas pelo LACSG em 1993, formando, então, o LACSG 2.0 e publicando, após quase 30 anos da primeira versão, recomendações para a disciplina de Álgebra Linear (Stewart et al., 2022).

O referido grupo inicia suas recomendações indicando a necessidade de orientar as habilidades fundamentais a diferentes profissões relacionadas a empresas e a indústrias, considerando as demandas dessas profissões e a importância de se ter os conhecimentos teóricos e numéricos dos conteúdos. A segunda recomendação aborda as pesquisas realizadas que investigam o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear, tendo em vista que seus resultados devem ser levados em conta, de modo que “aprender sobre os resultados das pesquisas pode ajudar os professores de álgebra linear a estarem atentos aos processos de pensamento dos alunos e necessidades e possíveis desafios com determinados conceitos” (Stewart et al., 2022, p. 815, tradução nossa)⁵, além de incentivar a continuação de pesquisas deste tipo.

Assim como nas recomendações feitas em 1993, o grupo sugere alguns tópicos para um primeiro curso de Álgebra Linear, sendo eles: Sistemas de Equações Lineares, Propriedades do

⁵ [...] learning about research findings can help linear algebra instructors be mindful of students' thought processes and needs and possible challenges with certain concepts.

$\mathbb{R}^n$, Álgebra matricial, Multiplicação de matrizes, Matrizes invertíveis, Autovalores e autovetores, Determinante de uma matriz, o produto escalar em $\mathbb{R}^n$, Matrizes simétricas e diagonalização ortogonal, Matrizes definidas ortogonais e positivas. Ele indica ainda que, na formação de professores de Matemática, haja pelo menos uma disciplina de Álgebra Linear e que ela não necessariamente deve ser realizada contando as disciplinas de cálculo como pré-requisito, mas que pode (e recomenda) que seja ofertada no primeiro ano, junto com Cálculo.

Consideram que uma segunda disciplina se faz necessária apenas para alunos do Bacharelado em Matemática ou para profissões que lidem com análises quantitativas. Também apresentam uma sugestão de ementa, com espaços vetoriais complexos e um maior foco em demonstrações, entre outras indicações.

Incentivam a realização de pesquisas por estudantes da graduação, considerando a existência de tópicos e problemas de pesquisa para este grupo de alunos. Inferem que a diversidade de aplicações é algo a se levar em conta, com vistas a incentivar, contextualizar e introduzir o estudo de alguns conceitos, indicando algumas possibilidades:

Isso pode incluir o algoritmo de classificação de páginas do Google, programação linear, fluxo de tráfego/rede, previsões esportivas, modelos de predadores/presas, imagens médicas, balanceamento de equações de reação química, Cadeias de Markov, o modelo de entrada-saída de Leontief, etc. Claro, quais aplicações serão empregadas dependerá dos interesses do professor e/ou das necessidades/interesses dos alunos em aula. (Stewart et al., 2022, p. 817, tradução nossa)⁶

Consideram a importância dos conteúdos para o desenvolvimento de outras disciplinas e incentivam a continuação das pesquisas que investigam questões relacionadas à Álgebra Linear. Assim como a primeira versão, recomendam também que haja um trabalho com tecnologias durante os estudos dos conceitos desta disciplina. Este é um tópico fundamental do presente trabalho, de modo que as observações sobre Álgebra Linear e tecnologias serão feitas na seção 3.3, específica para este assunto, ainda neste capítulo.

3.2.1 Autovalores e Autovetores

O que entendemos hoje como tópicos de Álgebra Linear foram desenvolvidos em um

⁶ These might include the Google Page Rank Algorithm, linear programming, traffic/network flow, sports bracketology/predictions, predator/prey models, medical imaging, balancing chemical reaction equations, Markov chains, the Leontief Input-Output Model, etc. Of course, which applications are employed will depend on instructor interests and/or on the needs/interests of the students in class.

longo período de tempo e podemos dizer até bem espaçado. É possível entender que isso se dá devido ao início da constituição da disciplina, que buscou reunir tópicos antes vistos separadamente. Deste modo, temos registros de métodos de resolução de sistemas de equações lineares 3×3 desenvolvidos por chineses por volta de 200 a.C, enquanto que o conceito e a teoria do que conhecemos como determinante de uma matriz surge com os trabalhos de Leibniz no começo do século XVIII e é desenvolvido por outros matemáticos, como Cramer e Gauss, que procuram relações entre os determinantes, as matrizes e também sistemas de equações lineares. Posteriormente, a disciplina reúne também resultados advindos do desenvolvimento da Álgebra Abstrata (ou Moderna), ocorrido nos séculos XIX e XX. Vale destacar a presença de problemas relacionados a sistemas de equações lineares como ponto de partida para outros conceitos e, com o tópico de autovalores e autovetores⁷, não seria muito diferente, já que seus resultados iniciais são marcados pelo estudo de sistemas de equações diferenciais.

Os registros sobre alguns resultados iniciais dos autovalores e autovetores advém do século XIX, por exemplo, quando Augustin-Louis Cauchy publica seus estudos sobre Mecânica Celeste, denominado “Sur l’équation à l’aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes” (Cauchy, 1829), em tradução livre, “Sobre a equação com a ajuda da qual determinamos as desigualdades seculares dos movimentos dos planetas”.

Essa área de estudo é um ramo da astronomia, campo de destaque desde o século XVIII, o qual trata do movimento dos corpos celestes. Naquela época, astrônomos e matemáticos faziam observações detalhadas dos planetas para validar os modelos matemáticos herdados das leis do movimento de Kepler e Newton (Tou, 2018). Ainda sobre Mecânica Celeste, estuda-se principalmente dois tipos de perturbações, a saber, as periódicas e as seculares. As perturbações seculares a que Cauchy se refere em seu trabalho não são periódicas e aumentam gradualmente ao longo do tempo. Entretanto, o interesse original de Cauchy neste assunto não era a perturbação secular, mas sim os eixos de movimento para certas superfícies no espaço tridimensional.

Discutindo sobre a determinação dos eixos principais e sobre o momento de inércia de um corpo sólido, Cauchy ressalta sua dependência direta a partir das raízes de um polinômio de terceiro grau e afirma serem todas reais, o que é efetivamente demonstrado três anos depois. Com o conhecimento que temos, diríamos que Cauchy foi o primeiro a afirmar que uma matriz simétrica tem autovalores reais.

⁷ Existem diferentes modos de nomear estes tópicos, como valores próprios e valores característicos para autovalores, vetores próprios e vetores característicos para autovetores.

Sabe-se que a determinação dos eixos de uma superfície de segundo grau ou dos eixos principais e momentos de inércia de um corpo sólido depende de uma equação de terceiro grau, cujas três raízes são necessariamente reais. No entanto, os geômetras conseguiram demonstrar a realidade das três raízes apenas por meios indiretos... A questão que me propus consiste em estabelecer a realidade das raízes diretamente... (Cauchy⁸ *apud* Hawkins, 1975, p. 20, tradução nossa)⁹

Para determinar os eixos e o momento de inércia, Cauchy utiliza de uma esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, das derivadas parciais e dos multiplicadores de Lagrange em seus cálculos. Durante este processo, ele obtém um sistema de equações diferenciais que, por fim, resultam no que entendemos como autovalor.

Figura 1 - Trecho do texto “Sur l’équation à l’aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes”

176 SUR L'ÉQUATION À L'AIDE DE LAQUELLE

Les équations (6) deviendront

$$(9) \quad \begin{cases} A_{xx}x + A_{xy}y + A_{xz}z + \dots = sx, \\ A_{xy}x + A_{yy}y + A_{yz}z + \dots = sy, \\ A_{xz}x + A_{yz}y + A_{zz}z + \dots = sz, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

et pourront s'écrire comme il suit :

$$(10) \quad \begin{cases} (A_{xx} - s)x + A_{xy}y + A_{xz}z + \dots = 0, \\ A_{xy}x + (A_{yy} - s)y + A_{yz}z + \dots = 0, \\ A_{xz}x + A_{yz}y + (A_{zz} - s)z + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Cela posé, il résulte des principes établis dans le Chapitre III de l'Analyse algébrique (§ 2) (*) que le premier membre de l'équation (8), ou S, sera une fonction alternée des quantités comprises dans le Tableau :

Fonte: disponível na plataforma da “Bibliothèque Nationale de France”, em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90201q/f177>. Acesso em: 30 de maio de 2024

É interessante notar que o segundo sistema apresentado se assemelha aos cálculos que realizamos hoje em dia, de modo que haja uma subtração na diagonal principal da matriz. Vale

⁸ Cauchy, A.L. Sur l’équation à l’aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes, 1829.

⁹ It is known that the determination of the axes of a surface of the second degree or of the principal axes and moments of inertia of a solid body depend on an equation of the third degree, the three roots of which are necessarily real. However, geometers have succeeded in demonstrating the reality of the three roots by indirect means only... The question that I proposed to myself consists in establishing the reality of the roots directly...

destacar que Euler também estudou o movimento rotacional de um corpo rígido e descobriu a importância dos eixos principais. Como percebeu Lagrange, os eixos principais são os autovetores da matriz de inércia. Posteriormente, Cauchy, utilizando alguns resultados destes estudiosos, percebe como utilizar esta teoria para classificar superfícies quadráticas, além de cunhar o termo “característico”, de onde vem uma das nomenclaturas destas questões de estudo.

Esses resultados podem ser compreendidos como as raízes da Teoria Espectral, que estende a teoria de autovalores e autovetores, ganhando destaque no século XX (Steen, 1973). Assim, os resultados de Cauchy, as investigações da simplificação de uma quádrlica através da rotação dos eixos realizadas por Fermat, Descartes e Euler, a generalização dos teoremas propostas por Lagrange contribuem para o início da formalização da teoria em questão, nomeada por Hilbert. Steen (1973) destaca a contribuição de diversos matemáticos, sobretudo estudiosos de Geometria Analítica, Álgebra e Análise, para o aprofundamento destes conceitos, com desenvolvimento teórico e prático, a fim de chegar à forma como estudamos atualmente.

Após todo o desenvolvimento, os autovalores e autovetores se tornaram um dos principais tópicos de estudo da Álgebra Linear. Estes dois conceitos são inerentes um ao outro, de modo que, na sua definição, são apresentados juntos. David Lay (1999, p. 216, grifos do autor) traz em seu livro “Álgebra Linear e suas Aplicações” a seguinte definição: “Um **autovetor** de uma matriz A $n \times n$ é um vetor não nulo x tal que $Ax = \alpha x$ para algum escalar α . Um escalar α é chamado **autovalor** de A se existir solução não trivial x de $Ax = \alpha x$, tal x é chamado autovetor associado a α ”. Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle (1987, p. 276)) definem o seguinte em seu livro “Álgebra Linear”: “Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, com $v \neq 0$, é *vetor próprio* do operador se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. O número λ é denominado *valor próprio* de T associado a v ”.

Ambas as definições trazem um conceito importante da Álgebra Linear: as transformações lineares. Este tópico normalmente é apresentado anteriormente e pode ser tido como ponto de partida para o início dos estudos de autovalores e autovetores. Steinbruch e Winterle expõem, na definição, um operador linear, que é uma transformação linear atuante em um único espaço vetorial. Lay, por sua vez, apresenta na definição uma matriz quadrada nomeada como A , a qual representa a matriz de uma transformação linear. Significa dizer que, de modos distintos, os autores fazem referência aos principais conceitos que compõem a definição, de modo que $Ax = \alpha x$ e $T(v) = \lambda v$ sejam equações equivalentes.

Na segunda versão das recomendações feitas pelo LACSG, os pesquisadores ressaltam os cuidados necessários para introduzir esta equação aos estudantes, sendo importante:

[...] enfatizar que na equação, existem vários objetos (matriz, vetor e escalar) para coordenar de diferentes maneiras (multiplicação de matriz-vetor, multiplicação de vetor por escalar), mas o resultado dessas operações diferentes é o mesmo objeto, um vetor; isso pode ajudar a combater o instinto compreensível de “cancelar o vetor” da equação, raciocinando conceitualmente que uma matriz não pode ser igual a um valor próprio. (Stewart et al., 2022, p. 815, tradução nossa)¹⁰

O conteúdo dos autovalores e autovetores se tornou um tópico fundamental para a Álgebra Linear. Isso porque, nas temáticas sugeridas para um primeiro curso na área, estes tópicos estão presentes em ambas as recomendações feitas pelo LACSG (Carlson et al., 1993; Stewart et al., 2022), bem como nas considerações feitas pela SBEM (2013). Além disso, quando se trata de um segundo curso, também recomendado nas duas publicações do LACSG, estes temas são novamente citados, sendo um ponto de partida para explorar as aplicações e outros conceitos provenientes de estudos mais abstratos.

Lima e Gomes (2018) discutem os conteúdos da disciplina “Complementos de Geometria”, oferecida em 1952 para o curso de Matemática da USP. Mesmo que não esteja explícito, podemos compreender que os autovalores e autovetores eram abordados, pois, além dos estudos das transformações lineares, consta o tópico “forma canônica de uma matriz ou de Jordan”, sendo os autovalores os coeficientes que compõem essa matriz, sendo necessária a matriz dos autovetores para o cálculo final. Assim, podemos depreender que a abordagem destes conteúdos exista desde o início das primeiras disciplinas de Álgebra Linear.

A formatação das disciplinas de Álgebra Linear segue um padrão, podendo variar de acordo com a instituição e com a formação, sendo comum seguir a ordem de conteúdos: Matrizes, Sistemas de Equações Lineares, Determinantes, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Espaços com Produto Interno, Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Operadores e Formas Quadráticas. De um modo geral, os conceitos de autovalores e autovetores são apresentados no fim da disciplina, sendo um dos últimos conteúdos abordados, como nas propostas feitas em Carlson et al. (1993), Stewart et al. (2022) e SBEM (2013).

Compreendemos que os conteúdos da disciplina não são desconexos, ao contrário, muitas vezes, novas definições e conceitos são provenientes de um tópico anterior, como, por exemplo, a relação entre transformações lineares e autovalores e autovetores. Entendemos que essa

¹⁰ [...] to emphasize that in the eigen equation, there are multiple objects (matrix, vector, and scalar) to coordinate in different ways (matrix-vector multiplication, scalar-vector multiplication), yet the result of these differing operations is the same object, a vector; this may help combat the understandable instinct to “cancel the vector” from the eigen equation by conceptually reasoning that a matrix cannot equal an eigenvalue.

característica se mantém não somente com o conteúdo anterior, mas também com outros conceitos vistos, de modo que, quanto mais se avança, mais conexões podemos fazer.

Para ilustrar esse entendimento, vamos tomar como ponto de partida o conteúdo de autovalores e autovetores. Conforme já dito, na própria definição, há a presença da transformação linear, fazendo necessário compreender este conceito e seus principais resultados, como a definição de uma matriz que representa essa transformação. Assim, é preciso uma compreensão também de alguns resultados de matrizes, como matriz inversa e transposta. A partir do estudo da matriz da transformação, obtemos resultados sobre os autovalores e autovetores, como o fato de os autovalores serem sempre números reais em uma matriz simétrica. Outros teoremas e proposições que tratam dos autovetores indicam que eles formam uma base de um espaço (ou subespaço) vetorial. Assim, para entender este resultado, é necessário ter em conta estes conceitos, como base, dependência e independência linear, espaço e subespaço vetorial. Além de formarem uma base, se a matriz for simétrica, é possível verificar, por meio do produto interno, que estes autovetores são ortogonais.

O próprio cálculo dos autovetores exige o conhecimento do cálculo do determinante de uma matriz, assim como os autovetores exigem uma compreensão do cálculo de sistemas lineares, ou seja, trabalhar um conteúdo permite retomar os conceitos anteriores, e não só isso: permite a introdução de novos conceitos. Novamente tomando os autovalores e autovetores como exemplo, este conteúdo é essencial para o entendimento de resultados referentes à diagonalização de operadores e formas quadráticas, possíveis tópicos a serem trabalhados em seguida.

Esta percepção não é exclusividade nossa, visto que, a partir da análise da seção de autovalores e autovetores do livro de Álgebra Linear de Lay (1999), Nomura (2014, p. 183) ressalta que o autor “destaca a dependência dos conhecimentos prévios adquiridos nos capítulos anteriores”. No livro “Álgebra Linear com aplicações”, seus autores destacam no prefácio que “um dos nossos principais objetivos pedagógicos é transmitir ao estudante que a Álgebra Linear é um assunto coeso e não só uma coleção de definições e técnicas isoladas” (Anton; Rorres, 2012, p. x), apresentando ao longo do livro o que chamam de “Afirmações equivalentes”, revisando resultados anteriores.

Ressaltamos entender que essa característica de permitir conexões com conteúdos anteriores e conceitos futuros se faz possível em todas as temáticas citadas, e não temos a pretensão de tratar os autovalores e autovetores como o “ápice” da disciplina, dado que temos ciência da importância de todos os conceitos. Eles foram tomados como referência para ilustrar nossa compreensão por serem o principal conteúdo que este trabalho investiga.

Em ambas as recomendações feitas pelo LACSG (Carlson et al., 1993; Stewart et al., 2022), os autores destacam a importância dos autovalores e autovetores em diversas aplicações, como cadeias de Markov, equações de diferença, equações diferenciais, programação linear, entre outras, bem como sugerem a introdução destes conceitos a partir de exemplos geométricos.

As considerações da SBEM (2013), que tratam especificamente da formação inicial do professor de Matemática, destacam que:

A teoria de autovalores, autovetores e diagonalização de operadores é um tópico que introduz o futuro professor às aplicações relevantes do mundo atual, com exemplos que podem ser compreendidos em nível de Ensino Médio. Por exemplo, a visualização de eixos ou de planos invariantes no plano ou espaço por transformações, como reflexão ou rotação, pode levar o licenciado a compreender o significado dos autovalores e autovetores de maneira concreta. O tópico pode ser incluído num currículo da licenciatura por meio de uma abordagem que permita, além de aplicações básicas na própria Matemática, como nas formas canônicas de cônicas, o trabalho com exemplos simples de aplicação em problemas contextualizados como, por exemplo, no tratamento de dados e informação como pesquisa na web, na economia ou nos problemas de engenharia; ou ainda, pode ser motivador para um professor de Ensino Médio saber que a transmissão de sinais por satélite usa o conceito de autovalores. (Sbem, 2013, p. 30)

É possível perceber que as considerações acerca do estudo destes conceitos destacam a diversidade de suas aplicações, seja em teorias matemáticas seja em problemas contextualizados, bem como incentivam a relação com questões geométricas, permitindo que estes caminhos agreguem à compreensão do futuro professor referente a temas que podem ser tratados na Educação Básica, como as transformações geométricas e as simplificações de aplicações.

Assim como acontece com outros conteúdos, a aprendizagem dos autovalores e autovetores pode ser alvo de dificuldades entre os estudantes. Além de levarmos em conta as considerações referentes à disciplina como um todo, conforme destacado na seção anterior, podemos investigar quais são os impasses deste tópico em específico. Stewart e Thomas (2006) investigaram essa questão a partir de um estudo de caso com os estudantes do curso de matemática da Universidade de Auckland, na Nova Zelândia.

Uma primeira questão destacada pelos autores trata justamente da definição, marcando a transição entre a definição escrita e a explicada oralmente para a representação algébrica, obtendo a equação $Ax = \lambda x$. A partir daí, ressaltam também a atenção necessária para a manipulação algébrica desta equação para se obter a equação da forma $(A - \lambda I)x = 0$, ponto de

partida para iniciar os cálculos dos autovalores. Assim como destacado por Stewart et al. (2022), há a necessidade de interpretar a equação corretamente, de modo a destacar a presença de diferentes objetos matemáticos, como matriz, vetor e número real (e a relação estabelecida nessa igualdade).

Sublinham também a centralidade de compreender diferentes representações, sendo elas a algébrica, a geométrica e a matricial, evidenciando que essas transições não são automáticas e podem ser efetivadas discutindo sobre a própria equação da definição e o conceito da multiplicação de um vetor por um escalar. Os estudantes podem apresentar dificuldades no processo do cálculo dos autovalores e autovetores, por se tratar de processos distintos com diferentes etapas, de modo que calcular um não implica ter domínio sobre o cálculo do outro.

Afirmam que um modo de apresentar uma compreensão acerca destes conceitos é identificar um autovetor sem a necessidade de calculá-lo, entendendo que qualquer escalar de um autovetor dado também o torna autovetor. Por fim, os autores expõem a opinião de que os autovalores e autovetores são os conteúdos mais difíceis da disciplina, mesmo que a maioria dos alunos não concorde, e justificam essa diferença com o fato de que os estudantes “[...] muitas vezes focam nos processos de solução ao invés da compreensão conceitual” (Stewart; Thomas, 2006, p. 187, tradução nossa)¹¹.

Nomura e Bianchini (2014) realizam um estudo de caso em que investigam as estruturas cognitivas envolvidas na construção dos objetos matemáticos autovalor e autovetor. Nesse contexto, julgam se fazer necessário que o estudante encontre os autovalores e autovetores, que perceba a existência de infinitos autovetores associados a cada autovalor e que compreenda o processo de encontrá-los baseados em qualquer matriz, além de ter em conta a definição de autovalores e autovetores como objetos.

Durante a pesquisa, ressaltam que raramente os autovetores são representados geometricamente, com a representação matricial e algébrica prevalecendo. Para a resolução das questões propostas, destacam que “o conjunto de instruções apresentado pelo aluno para encontrar a solução do problema evidencia que pouco é compreendido a respeito dos conceitos envolvidos” (Nomura; Bianchini, 2014, p. 184), de modo que, mesmo que os procedimentos de cálculo sejam realizados, não há um indicativo do entendimento de resultados relativos a estes objetos, fazendo com que estabeleçam relação com outras disciplinas de sua formação, mas não com conceitos da própria Álgebra Linear.

Em sua pesquisa bibliográfica, Philot e Bianchini (2020) destacam que o conteúdo mais

¹¹ (...) since they often focus on solution procedures rather than conceptual understanding.

investigado nas pesquisas analisadas foi o de transformações lineares. Silva (2016), Almeida (2013) e Furtado (2010) são estudos que tratam especificamente deste tópico. Entendemos que as considerações sobre autovalores e autovetores exigem investigações que tratem exclusivamente destes conteúdos, pois, tomando essas pesquisas como exemplos, Silva (2016) e Almeida (2013) não apresentam reflexões sobre autovalores e autovetores, enquanto que, nas atividades propostas por Furtado (2010), eles se fazem presentes, embora também não haja uma discussão específica sobre. Consideramos que os autovalores e autovetores podem não ter sido abordados, pois, mesmo que haja uma relação deles com transformações lineares, este conteúdo é vasto e com diversos focos possíveis, não devendo necessariamente tratar dos autovalores e autovetores.

Deste modo, a presente pesquisa tem como foco principal os autovalores e autovetores, mas destacamos que outros conteúdos foram mencionados devido à conexão percebida com os tópicos da disciplina de Álgebra Linear. Investigamos a compreensão dos estudantes destes conteúdos de um modo geral, atentando-nos não somente para a definição, mas também para propriedades e teoremas relacionados, bem como para a interpretação dos cálculos e as transições entre as possíveis representações.

3.3 Álgebra linear e tecnologias

Para iniciar as discussões sobre Álgebra Linear e tecnologias digitais, podemos compreender que houve um desenvolvimento mútuo entre ambos. Assim, antes de trazermos considerações específicas sobre o trabalho com tecnologias que envolvem aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear, exporemos nossa compreensão sobre como o avanço tecnológico também é possível devido a resultados deste campo de estudo.

Na primeira publicação das recomendações do grupo de educadores matemáticos que formavam o LACSG, os autores já reconheciam que não só as tecnologias poderiam auxiliar em questões do ensino e da aprendizagem, mas também o avanço tecnológico apresentava uma demanda de saberes destes conceitos, pois entendiam que “as melhorias de *hardware* e *software* na ciências da computação aumentaram o poder da álgebra linear para resolver problemas que são de magnitude maiores do que se imaginava possível há algumas décadas” (Carlson et al., 1993, p. 41, tradução nossa)¹².

¹² [...] hardware and software improvements in computer science have raised the power of linear algebra to solve problems that are orders of magnitude greater than dreamed possible a few decades ago.

Um exemplo é a presença destes conceitos em primeiras versões do algoritmo de busca do Google, nomeado PageRank (Batti, 2015). Deste modo, “uma compreensão básica da álgebra linear levou à explosão de oportunidades de carreira em ciência de dados, processamento de sinais, criptografia, ciência da computação e computação quântica” (Stewart et al., 2022, p. 813, tradução nossa)¹³, tornando esta área de estudo cada vez mais necessária. Essa demanda surge não só para profissionais ligados à engenharia ou a computação, mas também para os estudantes da licenciatura, fazendo com que:

na era da tecnologia digital, da robótica, da computação gráfica, etc., é interessante que o professor esteja preparado para poder trabalhar mais significativamente a Álgebra Linear das transformações lineares e das matrizes. (Sbem, 2013, p. 29)

Como dito anteriormente, a Álgebra Linear tem seus impactos no avanço tecnológico, e vice-versa, com novas demandas, questões e possibilidades. No prefácio da 3ª edição do livro “Álgebra Linear” (Boldrini et al., 1986), apresenta-se que houve uma ampliação de uma seção, tornando-a um novo capítulo, proveniente do crescente interesse e das aplicações práticas de programação linear, descrevendo algoritmos para microcomputadores.

Como quarta recomendação da primeira publicação do LACSG, os autores incentivavam o trabalho com tecnologias na disciplina, como computadores ou calculadoras, de modo que compreendiam que as tarefas extra sala, como lições de casa e desenvolvimento de projetos, poderiam ser beneficiadas com essa adesão, reforçando os conceitos vistos ou contribuindo para a descoberta de novos resultados (Carlson et al., 1993, p. 45).

Anos depois, os autores da segunda versão das recomendações do LACSG reconhecem que, comparadas ao período da primeira publicação, as tecnologias se tornaram mais acessíveis para a maior parte dos estudantes, incentivando o ensino e a aprendizagem com elas. Na recomendação concernindo especificamente as tecnologias, expõem a compreensão de que elas podem auxiliar no cálculo e na exploração de diferentes exemplos e indicam:

programas com extensas rotinas simbólicas, gráficas, numéricas e exatas incluindo GeoGebra, Matlab, Mathematica, Maple e Sage. Isso permite que os alunos explorem e descubram ativamente padrões, façam conjecturas e determinem ou verifiquem resultados de forma rápida e correta. (Stewart et

¹³ [...] a foundational understanding of linear algebra has led to the explosion of career opportunities in data science, signal processing, cryptography, computer science, and quantum computing.

al., 2022, p. 817, tradução nossa)¹⁴

Assim, o trabalho com tecnologias durante a disciplina vem sendo cada vez mais incentivado. Corroborando esse pensamento, Leon (2008) relata, no início de seu livro intitulado “Álgebra Linear com Aplicações”, que:

embora esse material possa ser ensinado sem referência alguma ao computador, acreditamos que exercícios computacionais podem melhorar muito o aprendizado do aluno e dar uma nova dimensão ao ensino da álgebra linear. Essa visão parece estar ganhando grande apoio na comunidade matemática em geral. O grupo de estudo sobre o currículo de álgebra linear recomendou o uso de tecnologia em uma primeira disciplina de álgebra linear. Nos encontros das três maiores sociedades matemáticas americanas existem, agora, sessões cujo assunto principal é o uso de computadores no ensino de álgebra linear. (Leon, 2008, p. 14)

Desta forma, Leon (2008) e Lay (1999) incentivam em seus respectivos livros o desenvolvimento de um trabalho com computadores durante a disciplina de Álgebra Linear, e constroem a teoria e os exercícios propostos sugerindo algoritmos e programas, como Mathematica, Maple e Matlab. Em muitos casos, propõem que o aluno obtenha matrizes ou polinômios genéricos com o computador, para que compreendam a atividade de acordo com a sequência de questionamentos propostos pelo autor. Na seção que envolve o tema que tratamos neste trabalho, Lay (1999) também cita o método iterativo para o cálculo de Autovalores. Essas ações podem ser entendidas como exemplos de que “a Álgebra Linear é também uma disciplina propícia para explorar o potencial didático das ferramentas tecnológicas e, nesse caso, os aspectos numéricos se tornam relevantes além da estrutura algébrica” (Sbem, 2013, p. 31), principalmente para que o futuro professor possa ter contato com possibilidades de ensino que trabalhem com este modo.

Assim, o trabalho com TDICs já é uma realidade, e as pesquisas que tratam sobre tecnologias na Educação Matemática permitem a continuidade das investigações com novas possibilidades ou até mesmo a reflexão sobre as estruturas atuais. Identificamos, em diferentes pesquisas, que, para determinados conceitos que envolvem a Álgebra Linear, o trabalho com tecnologias digitais em sala de aula é uma opção. Encontramos uma indicação desse fato no trabalho realizado por Philot e Bianchini (2020). Nele, as autoras realizaram uma análise das

¹⁴ Programs with extensive symbolic, graphical, numerical, and exact routines include GeoGebra, Matlab, Mathematica, Maple, and Sage. These allow students to actively explore and discover patterns, make conjectures, and determine or verify results, quickly and correctly.

pesquisas que tratavam sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear em um determinado período de tempo e apontam que a categoria que apresenta o maior número de trabalhos são os que relacionam as tecnologias com questões de ensino e aprendizagem desta disciplina.

Deste modo, entendemos ser necessário retomar algumas pesquisas que integram a relação apresentada por Philot e Bianchini (2020), buscando identificar pontos importantes já investigados e as principais considerações apontadas. Destacamos, para este levantamento, as pesquisas de Dorier (2002) que trabalha com o *software* Cabri II; Hillel e Sierpinska (1994), com o Maple; Richit et al. (2013) e Santiago (2017), com o GeoGebra, entre outros estudos. Entendemos que os temas discutidos nestes trabalhos estão relacionados com os interesses de nossa pesquisa.

Dorier (2002) relata uma situação de ensino e aprendizagem em que o *software* de geometria dinâmica Cabri II esteve presente na apresentação de um espaço vetorial bidimensional, com algumas transformações lineares. Nele, conta que os estudantes tinham um pensamento mais prático do que teórico, fazendo com que as explorações e os exemplos estudados fossem tomados como a própria definição, como, compreender a rotação, a dilatação e o cisalhamento não como exemplos de transformações lineares, mas como a “definição” de transformação, havendo outras possibilidades e variações delas. Além disso, apresentavam uma dificuldade em relacionar a representação que manipulam no *software* com outras possíveis.

Hillel e Sierpinska (1994), por sua vez, narram que, a partir das dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a disciplina de Álgebra Linear, desenvolveram situações para trabalhar os conteúdos com o *software* Maple, trazendo reflexões a partir da vivência com três turmas diferentes e expondo dados de uma delas. Os autores apontam que, devido à quantidade de computadores disponíveis, os estudantes trabalharam em grupos, o que avaliaram no final como algo positivo, haja vista propiciar um ambiente de discussão sobre os conceitos. Tendo como base o relato da maioria dos alunos, pôde-se afirmar que o *software* melhorou o entendimento deles, dando-lhes a possibilidade de consultar e de explorar as conjecturas feitas, além de perfazer mais exemplos e situações mais complexas. Também há estudantes, em minoria, que disseram que tal abordagem tornou a experiência mais confusa, entendendo que se faz necessário conhecer os conceitos antes de explorá-los no computador.

Richit et al. (2013) apresentam uma proposta com o Geogebra para o estudo do conceito de vetores, suas propriedades e operações, como soma, subtração e multiplicação por escalar. Atestam que o trabalho com este *software* permite que os estudantes articulem e visualizem geometricamente diferentes representações dos procedimentos estudados, de modo a exemplificar a natureza geométrica de alguns conceitos. Ademais, os pesquisadores destacam

positivamente a exploração dinâmica que o GeoGebra apresenta..

Arrebola (2013) buscou contribuir na investigação e na análise das dificuldades encontradas pelos estudantes no tópico de Transformações Lineares, empregando um ambiente de geometria dinâmica, Cabri. Para tanto, foi desenvolvida e proposta uma sequência didática na disciplina, voltada a alunos do Bacharelado em Matemática de uma instituição privada de Ensino Superior da cidade de Santos (São Paulo). O autor explicita nos resultados que essa abordagem ocasionou a aprendizagem do tema Transformações Lineares, especialmente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Já Santiago (2017) teve como objetivo investigar de que modo os recursos computacionais visuais, dinâmicos e interativos do *software* GeoGebra podem contribuir para a construção do conhecimento sobre espaço vetorial. O estudo foi desenvolvido com dez alunos da disciplina de Álgebra Linear do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (Nilópolis). Como resultados, o autor destaca que essa abordagem permitiu aos participantes concretizarem e experimentarem visualmente e numericamente conceitos abstratos da temática.

Kripka (2018) tinha como objetivo, com discentes e docentes, investigar os pontos fortes e fracos referentes ao trabalho com recursos tecnológicos digitais nos processos de ensino e aprendizagem da disciplina. Para tal, foram elaboradas, então, tarefas desenvolvidas em sala de aula, as quais utilizavam a mesma sequência didática e indicavam as mesmas tecnologias, como geotecnologias e os aplicativos GeoGebra, Matlab e Planilha Excel. Tais atividades foram propostas para três turmas regulares da disciplina do curso de Engenharia Civil de uma instituição do Rio Grande do Sul. Ao final, a pesquisadora sustenta que houve uma maior compreensão dos conceitos e uma aprendizagem mais significativa na disciplina em que o trabalho com tecnologias digitais foi contínuo, facilitando a mediação pedagógica, a compreensão e a construção de conceitos.

Yildiz-Ulus (2013) trata de um estudo de caso realizado com trinta e cinco estudantes da turma do curso de Matemática da Universidade Galatasaray (Turquia). O estudo teve o intuito de investigar como incorporar as tecnologias na graduação em Matemática e desenvolver novos materiais instrucionais sobre o conceito de diagonalização. Inicialmente, as etapas de cálculo foram realizadas com papel e caneta e, posteriormente, eles foram realizados com calculadoras gráficas que apresentavam o determinante da matriz, seus autovalores e autovetores, entre outras possibilidades. Com isso, ao invés de os estudantes realizarem os cálculos, concentravam-se nas principais questões sobre a natureza das operações. A autora destaca que esse foi o primeiro trabalho dos estudantes com calculadoras, mas que já tinham familiaridade

com linguagens de programação e situações envolvendo a criação de algoritmos. Ao final, destaca que, em avaliações finais, sem as calculadoras, os discentes demonstraram não ter dificuldades com elementos envolvendo as etapas que compõem a diagonalização, de modo que concluiu ter havido uma aprendizagem do conceito, ressaltando, no entanto, compreender que a tecnologia em si não simplifica a aprendizagem e faz necessário um ambiente de ensino previamente preparado.

Tratando especificamente do conteúdo de autovalores e autovetores, há os trabalhos de Stewart e Thomas (2006) e Pedersen (2007). O primeiro refere-se a um estudo de caso na universidade de Auckland, Nova Zelândia, no qual os estudantes frequentaram o laboratório de informática durante a realização da disciplina. No início, foram apresentados a um tutorial do Maple, com atividades voltadas ao trabalho com esse *software*. Ao longo da pesquisa, são mostradas algumas falas dos estudantes e, em duas delas, eles afirmam que o trabalho com o computador neste formato os ajudou na compreensão dos autovalores e autovetores. Entretanto, alguns deles não souberam calcular manualmente os dois conceitos, afirmando que calculariam com auxílio do Maple. Ao final, os autores afirmam que “quando questionados se achavam que os computadores deveriam ser usados em aulas de álgebra linear, a maioria dos alunos concordou que tal trabalho era benéfico e que isto pode fornecer um caminho a seguir” (Stewart; Thomas, 2006, p. 192, tradução nossa)¹⁵.

Pedersen (2007) exhibe os resultados de uma proposta para o desenvolvimento de um projeto com computadores, envolvendo o estudo de autovalores e autovetores em matrizes que representavam um crescimento populacional como parte da avaliação dos estudantes. Esta proposta não foi desenvolvida em um curso de Álgebra Linear, mas em uma disciplina obrigatória de Matemática para estudantes de diferentes formações, como biotecnologia e economia agrícola. Como parte de uma reforma educacional, incluíram o trabalho com computadores, especificamente com a linguagem de programação “R”, com o objetivo de apoiar a aprendizagem de Matemática e apresentar aos alunos alguns tópicos da ciência da computação.

Com os computadores, os estudantes eram instruídos a explorarem diferentes casos e interações. Uma vez realizados os cálculos dos autovalores e autovetores pela máquina, os alunos discutiam e interpretavam os resultados na situação explorada.

Embora esta abordagem possa dar aos alunos uma introdução ilustrativa aos

¹⁵ When asked whether they thought computers should be used in linear algebra lectures the majority of students agreed that such work was beneficial, and this may provide a way forward.

autovalores e autovetores, bem como ao papel que desempenham nos modelos populacionais, ela, e situações semelhantes nos outros projetos, também exigem que os próprios alunos façam transições entre ação, formulação e validação, com o que provavelmente não estão acostumados. (Petersen, 2006, p. 39, tradução nossa)¹⁶

Principalmente devido ao caráter exploratório da atividade, o autor assevera que esta abordagem permitiu aos estudantes descobrirem os resultados desejados e, a partir do trabalho com o computador, poderiam continuar a trabalhar com conteúdos mais avançados, além do proposto.

Compreendemos que a exposição destes estudos permite ressaltar apontamentos importantes para o trabalho com tecnologias, como a possibilidade de exemplificar conceitos e apresentar algumas aplicações. O trabalho com *software* como o Cabri II, o Maple, o GeoGebra, o Matlab, entre outros, mostrou-se eficaz para a compreensão dos conceitos da Álgebra Linear, como autovalores e autovetores. Contudo, essa abordagem também traz desafios, a exemplo da necessidade de se manter atento à teoria discutida e da dificuldade de alguns estudantes em posteriormente realizar cálculos manuais.

¹⁶ Whereas this approach could give the students an illustrative introduction to eigenvalues and eigenvectors as well as the role they play in population models, it, and similar situations in the other projects, also requires the students themselves to make transitions between action, formulation and validation, which they are probably not used to.

4 COMPREENSÕES E POSSIBILIDADES PARA O TRABALHO COM TDICS

Neste capítulo, trazemos considerações sobre TDICs e sobre a perspectiva assumida para a realização deste trabalho. Posteriormente, apresentamos o GeoGebra e os principais recursos articulados para o desenvolvimento das atividades, como a janela de cálculo simbólico (CAS) e o que nomeamos de GeoGebra LOGO. Devido à escassez de trabalhos que tratem sobre o GeoGebra LOGO, optamos por trazer reflexões acerca dessa possibilidade, fundamental para a resolução das práticas planejadas para esta pesquisa. Deste modo, vemos a necessidade de evidenciar as principais ideias sobre a linguagem de programação LOGO, com o objetivo de familiarizar o leitor no que concerne as questões debatidas em sequência.

As discussões em torno do tema “Tecnologia e Educação Matemática” se reuniram ao redor de uma linha de pesquisa, o que mostra a potencialidade e a importância do trabalho com tecnologias nos ambientes educacionais, das quais as pesquisas referenciadas nesta seção são indicativas.

O termo “Tecnologias” pode fazer referência a diversos objetos, como caneta, papel, lousa, computadores, entre outros. Por essa razão, é comum que o termo “Tecnologias Digitais” (TD) seja utilizado para fazer referência de modo mais específico aos computadores, celulares, *software* e *tablets*. No entanto, para aludir às tecnologias empregadas nesta pesquisa, escreveremos a sigla TDICs, Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, de modo a enfatizarmos que elas permitem também uma rápida comunicação e acesso à informação (Paulo; Pereira; Pavanelo, 2020).

Entendemos que, para o trabalho com TDICs de forma geral, postura essa que adotamos no desenvolvimento deste estudo, devemos ter em mente que:

considerar TDICs para a aprendizagem requer a constituição de um ambiente no qual haja condições para a produção de conhecimento, o que exige um espaço de investigação onde os alunos possam explorar possibilidades, expor conjecturas e construir argumentos; um espaço de diálogo para que o que é constituído dentro da subjetividade possa ser explicitado e colocado em discussão, inaugurando o processo intersubjetivo no qual, através dos meios de comunicação, a linguagem seja articulada, elaborada, refinada e compreendida para comunicar o que foi validado por todos. (Paulo; Pereira; Pavanelo, 2020, p. 643, tradução nossa)¹⁷

¹⁷ Considering DICTs for learning requires the constitution of an environment where there are conditions for production of knowledge, which demands a space of investigation where students may explore possibilities, expose conjectures and build arguments; a space of dialogue so that what is constituted within one's subjectivity may be made explicit and put to discussion inaugurating the intersubjective

Este ambiente pode tanto ser um laboratório de informática, com computadores e acesso à internet, quanto a própria sala de aula, com celulares e outros dispositivos móveis. Independentemente do modo, devemos ter cuidado para que as tecnologias estejam adequadas ao objetivo que se espera alcançar com elas, apresentando um bom funcionamento e bom estado físico. Em alguns casos, por exemplo, não temos aparelhos para todos os estudantes, fazendo com que trabalhem em grupos. No entanto, apesar de compreender que esta falta é uma pauta importante de políticas públicas para a Educação, entendemos que tal cenário é também propício para o ambiente de exploração e de diálogo, igualmente basilares no processo de aprendizagem.

Diante da postura fenomenológica adotada neste trabalho, vemos a necessidade de expor a compreensão das TDICs a partir dessa perspectiva. Assumindo que “as tecnologias digitais aí estão na materialidade disponível a nós na mundaneidade do mundo e atraem nossa visada, constituindo-se fenômenos a serem desvendados” (Rosa; Bicudo, 2018, p. 24), entendemos que as TDICs estão conosco no mundo, fazendo não com que as usemos, mas que ajamos com elas.

Compreender o trabalho com TDICs dessa forma pode ser um convite à reflexão das nossas ações com elas, levando-nos a entender que:

[...] as TD na produção do conhecimento não são entendidas como **ferramentas**, pois elas não ocupam um papel de suplementação para o ser humano, como uma chave de fenda, por exemplo, que é usada para tornar o trabalho mais ágil, mais eficiente ou mais econômico. Ou seja, a mídia está presente no próprio pensar. Compreendendo as TD como presentes no movimento de produzir conhecimento, falamos do pensar-com-TD, de forma a se perceber com elas, assim como de produzir conhecimento nas relações com o mundo e com os outros. (Rosa; Bicudo, 2018, p. 27, grifo dos autores)

As ideias de ser com tecnologias e pensar com tecnologias não se referem a uma proposta de misturar biologia e tecnologia, fazendo com que esta última seja semelhante a uma prótese. Pelo contrário, elas reconhecem que, estando e sendo no mundo, não estamos sós, e sim em interação com outros sujeitos viventes, como os animais, a natureza e a produção humana situada histórica e culturalmente, como as TDICs. Deste modo, estamos e somos com elas também e “isso significa que produzimos conhecimento com o mundo, com as tecnologias digitais que se encontram no mundo e não sobre o mundo, sozinhos de forma que essas

process, in which, through the means communication, the language is articulated, elaborated, refined and comprehended to convey what it was validated by all.

tecnologias simplesmente nos auxiliem a pensar sobre algo” (Rosa; Bicudo, 2018, p. 29).

Acreditando no potencial que o trabalho com tecnologias pode apresentar na aprendizagem dos estudantes, defendemos o desenvolvimento de atividades e experiências com elas, levando em consideração justamente as especificidades de cada uma. Significa dizer que, ao trabalhar com o computador, as orientações para os alunos devem ter em conta suas propriedades, caso contrário, realizar-se-ia o estudo de um conceito com o computador, apenas para enfatizar o trabalho com TDICs, por exemplo, sendo que a mesma atividade poderia ser realizada com qualquer outra tecnologia, como um livro, lápis e papel.

As práticas desenvolvidas para esta pesquisa (apresentadas posteriormente no capítulo 5) foram planejadas tendo no horizonte esta perspectiva, de modo que foram elaboradas visando a desfrutar dos benefícios e das possibilidades que o trabalho com computadores permite, ou seja, se optarmos por outra mídia ou até mesmo nenhuma, todas as atividades devem ser repensadas.

Partir dessa perspectiva implica um repensar e um replanejar a ação docente e as interações da sala de aula como um todo. Com as TDICs inseridas na escola, o professor não é mais a “única” fonte de informações, visto que elas permitem o acesso a diferentes fontes e tópicos de forma rápida, com diferentes imagens, sons, textos, mudanças e explorações rápidas, favorecendo diferentes modos de se compreender um conceito.

4.1 GeoGebra

O GeoGebra é um *software* livre e dinâmico, pensado para Educação Matemática (Hohenwarter; Fuchs, 2004), dado que reúne objetos de estudo da Geometria, da Álgebra, bem como planilhas, gráficos, funções estatísticas e de cálculo em um único ambiente. Além de oferecer o *download* gratuito¹⁸, foi desenvolvida uma versão *online* que conta com uma comunidade virtual para divulgar os estudos feitos. Também foram desenvolvidos seis aplicativos para *smartphones*, como a “Calculadora Gráfica GeoGebra” e o “GeoGebra Geometria”, todos gratuitos, cujo objetivo é o de permitir que os estudos também sejam realizados pelo celular, de modo que cada aplicativo é semelhante a uma das funcionalidades do *software* do computador.

O GeoGebra recebe atualizações até hoje e, conforme a tecnologia avança, seus desenvolvedores buscam adaptar funcionalidades, a exemplo dos aplicativos citados e da função

¹⁸ Download GeoGebra: <https://www.geogebra.org/download>.

de realidade aumentada através do celular. Para o computador, a versão mais recente atualmente é chamada de GeoGebra Classic 6.0, lançada em abril de 2017, sucessora da versão mais utilizada, GeoGebra Classic 5.0, que também obteve atualizações e novas versões, como a 5.2. Outra versão muito utilizada é a *online*, para a qual não é necessário fazer o *download* no computador, sendo suficiente acessar as diferentes janelas e comandos do GeoGebra na *internet* por meio da página oficial do *software*.

Ressaltamos que, neste trabalho, os comandos e as possibilidades apresentadas são referentes à versão Classic 5, equivalentes aos comandos do GeoGebra *online*. Trabalhar com essas variadas versões não traz diferenças que prejudiquem a resolução das propostas de investigação, posto que as distinções são concernentes ao *layout*, à disposição das janelas e à possibilidade de salvar e divulgar os resultados *online* de forma mais rápida, mas nada que impossibilite o uso de outra versão.

Ainda olhando para as diferentes versões, a primeira delas foi desenvolvida em 2001, na Universidade de Salzburg, na Áustria, por Markus Hohenwarter, tendo alcançado uma grande popularidade desde o início por se destacar de outros programas de Geometria já existentes, como o Cabri Geometry e o Poly.

Podemos pensar em alguns dos motivos que levaram a esse destaque: primeiramente, devemos considerar o fato de o GeoGebra não trabalhar somente com Geometria, como é o caso das duas plataformas citadas anteriormente, e tal diversidade de recursos e possibilidades foi permitindo trabalhar com o *software* em diferentes níveis de ensino e com diferentes assuntos. Em seguida, outro ponto de destaque se deve ao fato de o GeoGebra ser um *software* de código aberto, ou seja, ele permite que qualquer pessoa acesse-o e faça modificações, o que concorre para uma troca gratuita de informações e para um desenvolvimento colaborativo na programação, fazendo com que as ideias tidas por qualquer pessoa possam acarretar em uma melhoria para o *software*. Outras características que valem ser ressaltadas são a diversidade de idiomas em que ele está disponível, a conexão e o dinamismo entre as janelas de Álgebra e de Geometria, a Planilha de Cálculo e sua interface intuitiva e de fácil uso para algumas pessoas.

O *software* permite a construção de diversos objetos de estudo da Matemática, como ponto, reta, vetores, segmento, plano, polígonos, circunferências, cônicas, funções, matrizes, entre outras possibilidades, e é capaz de apresentar as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto, mesmo que seja dinâmico, relacionando as janelas de Álgebra e de Visualização, por exemplo. No estudo de gráficos de funções, podemos calcular suas raízes, máximos e mínimos, entre outras coisas. Atualmente, é possível também visualizar objetos tridimensionais através da janela de visualização 3D, o que permite diversos estudos como

sólidos geométricos, funções de duas variáveis e o estudo de retas e planos no espaço tridimensional.

Deste modo, o GeoGebra vem sendo premiado por diversos anos, desde 2002 até agora, e é possível afirmar que hoje já está consolidado na comunidade de Educação Matemática, devido à diversidade de trabalhos com diferentes públicos e assuntos. O GeoGebra faz parte de uma das fases das tecnologias digitais na pesquisa em Educação Matemática e, de acordo com a classificação dos autores Borba, Silva e Gadanidis (2020), faz parte da quarta e última/atual fase das tecnologias nessa área de pesquisa, juntamente com o avanço da *internet* e com todas as consequências desse avanço.

4.1.1 *Aprendizagem com GeoGebra*

Devido à popularidade e à consolidação do GeoGebra na comunidade acadêmica, buscamos apresentar propostas que se aproximam da desenvolvida neste trabalho, a saber, pesquisas realizadas em disciplinas do Ensino Superior, com foco na disciplina de Álgebra Linear. Entretanto, ressaltamos que o *software* pode estar presente em salas de aula de diferentes níveis de ensino, como a Educação Básica. Corroborando com essa diversidade, entendemos que o trabalho com o GeoGebra:

[...] permitiu uma mudança de foco no cotidiano escolar, não apenas no ensino superior, mas também no ensino básico. Por exemplo, ao invés de gastar tempo produzindo gráficos os professores passam a investir o tempo interpretando e entendendo gráficos, explorando essas representações de forma mais sistemática. Isso abre a possibilidade de atribuir um papel mais central ao pensamento matemático, no momento que a partir da dinamicidade que o GeoGebra possui, os alunos conseguem formular conjecturas. (Mathias, 2023, p. 46)

Desta forma, o *software* permite um ambiente propício para investigações, testes envolvendo diferentes exemplos e criação de hipóteses conforme se constata as mudanças feitas e suas consequências. Desde o seu desenvolvimento, o GeoGebra foi pensado para propiciar esse ambiente, visto que:

não importa se os estudantes exploram matemática sozinhos ou em grupos, o professor deve tentar ser um orientador em segundo plano que dá suporte quando é necessária ajuda. Os resultados dos estudantes de seus experimentos com o GeoGebra devem ser a base para as discussões em sala de aula. Isso dá

aos professores mais tempo para se concentrar em ideias fundamentais e raciocínio matemático. (Hohenwarter; Fuchs, 2004, p. 3, tradução nossa)¹⁹

Assim, trabalhar com GeoGebra também é um convite à criatividade e à reflexão sobre como explorar os conteúdos desejados. Deste modo, ele pode se fazer presente em diversas disciplinas do Ensino Superior, na maioria dos casos, de cursos de Exatas, não somente pensando na formação de professores mas também nos cursos de Engenharia.

Mathias (2023) apresenta exemplos de estudos feitos com turmas de diferentes cursos em três disciplinas em que já ministrou aulas: Geometria Plana e Espacial, Cálculo e Álgebra Linear. Na disciplina de Geometria Plana e Espacial, a autora apresenta exemplos de como trabalhou os Teoremas de Varignon e de Viviani, além de destacar a possibilidade de fazer construções geométricas seguindo os moldes das construções com régua e compasso. Na disciplina de Cálculo, traz exemplos de estudo de curvas de nível e curvas no espaço através da janela de visualização 3D, ademais de trabalhar curvas planas na janela de visualização 2D, como a Lemniscata.

Na disciplina de Álgebra Linear, Mathias (2023) dá um exemplo de outra pesquisa que trata da compreensão geométrica de triplas ordenadas, o qual a autora utiliza para introduzir o espaço vetorial tridimensional. Seguindo com exemplos de abordagens autorais, discute o estudo de diferentes casos e da solução de sistemas lineares de três incógnitas, de modo que os planos e as interseções fossem visualizados enquanto os parâmetros do sistema fossem representados por controles deslizantes. Outro caso apresentado tinha como objetivo trabalhar com transformações lineares, especificamente onde apresentam a compressão vertical, transformando a imagem construída à medida que lê a matriz associada a essa transformação, interagindo com os pontos e dando novas características da imagem. A pesquisadora afirma ainda que tal atividade contribui para a identificação visual das semelhanças e diferenças entre os dois estágios do objeto (antes e depois de sofrer a transformação).

Também tratando da disciplina de Álgebra Linear, Kripka et al. (2017) discutem uma atividade de ensino realizada com estudantes de Engenharia Civil, que visou à aprendizagem significativa de sistemas lineares propiciada pela resolução de um problema contextualizado no GeoGebra. Os autores concluem que a construção de um modelo dinâmico no *software*,

¹⁹ No matter if students explore mathematics alone or in groups, the teacher should try to be an advisor in the background who gives support when help is needed. The students' results of their experiments with GeoGebra should be the basis for discussions in class. This gives teachers more time to concentrate on fundamental ideas and mathematical reasoning.

utilizando das generalizações algébricas, contribuiu para a (re)significação e para a aprendizagem significativa dos conceitos discutidos.

Diferente de ambos os trabalhos anteriores, que se referem à resolução de sistemas lineares, Souza (2014) aborda outros conteúdos da disciplina de Álgebra Linear, quais sejam cônicas e transformações lineares, com o objetivo de construir os gráficos das cônicas e efetuar transformações lineares, como cisalhamento horizontal e rotação de um ângulo dado, utilizando o *software* para visualização das transformações feitas. Outrossim, buscou trabalhar o processo inverso, partindo da equação de uma cônica e encontrando seus componentes no GeoGebra.

Vale ressaltar que, durante este último processo, o autor evidencia a importância de se identificar os autovalores e autovetores associados à equação matricial da cônica, mas não o faz usando o GeoGebra e nem menciona a possibilidade disponível no *software* para tal, realizando e apresentando os cálculos manualmente.

Os trabalhos citados são alguns exemplos do que o GeoGebra oferece. Assim, podemos compreender o quão completo ele consegue ser, com recursos tão abrangentes que muitas vezes acabamos não tendo ciência deles e, por conseguinte, não explorando e não conhecendo outras ferramentas, caminhos e discussões que também são possíveis.

Nas atividades propostas neste trabalho, buscamos nos valer de recursos de fácil acesso no *software*, mas também apresentar alternativas que antes nos eram igualmente desconhecidas, com vistas a explorarmos ainda mais o GeoGebra em conjunto com os participantes da pesquisa, evidenciando e aprofundando alguns desses recursos disponíveis.

Desta forma, as práticas incentivaram o trabalho com as ferramentas já existentes, referentes às transformações geométricas, como reflexão em relação a uma reta, reflexão em relação a um ponto, rotação em torno de um ponto e homotetia, além de outras funcionalidades que também estão disponíveis na tela inicial do *software*, a exemplo da ferramenta polígono e do controle deslizante.

Também foram exploradas alternativas para a escrita de um mesmo objeto. Por exemplo, para se escrever uma sequência de números específicos ou de pontos, podemos fazê-lo a partir de diferentes comandos na janela de entrada, tanto como sequência quanto como lista de interação, ajustando conforme a necessidade, sendo igualmente possível obter o resultado desejado através da escrita na planilha disponível no *software*. Além disso, apresentamos a forma de escrever uma matriz no GeoGebra, bem como o modo de utilizar a janela de cálculo simbólico (CAS) para realizar cálculos relacionados à matriz, como determinante, transposta, autovalores e autovetores, estes dois últimos sendo os tópicos de estudo principal dessa pesquisa.

Todo esse conteúdo está disponível no *software* e foi mostrado aos participantes da pesquisa antes de realizarmos as atividades de investigação, as quais se encontram nos apêndices deste trabalho, tendo servido como principal fonte da produção dos dados deste estudo. É importante ressaltar, finalmente, que, ademais de trabalhar com os recursos disponíveis no GeoGebra, intentamos integrar nas atividades o que chamamos de GeoGebra LOGO, detalhado na sequência.

4.2 A linguagem de programação LOGO

Uma linguagem de programação pode ser entendida como um meio de comunicação entre o computador e a pessoa que o utiliza. A linguagem LOGO é uma linguagem de programação desenvolvida inicialmente para a aprendizagem de crianças, pois, devido à estrutura simples dos comandos, pode ser trabalhada como uma introdução a fim de se familiarizar com a estrutura dos códigos e da lógica da programação, ao mesmo tempo em que são discutidos alguns problemas para investigação.

Ainda que a linguagem tenha sido desenvolvida para ser trabalhada com crianças, isso não a torna infantil. Isso porque suas características se fazem úteis para qualquer público que tenha contato com ela e, conforme se cria uma familiaridade, abrem-se diferentes possibilidades de se trabalhar com o LOGO. Deste modo, é possível compreender o LOGO como uma linguagem simples e poderosa (Papert, 1985).

Sua primeira versão foi lançada em 1967, a partir do trabalho de um grupo de pesquisadores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), nos Estados Unidos, entre os quais Seymour Papert, Wally Feurzeig e Cynthia Solomon. Apesar de outras pessoas terem tido um papel no desenvolvimento da linguagem, prevalece o nome de Papert quando se fala da criação e da divulgação da linguagem.

Seymour Aubrey Papert (1928-2016) nasceu na África do Sul, graduou-se em Física e em Matemática pela Universidade de Witwatersrand, em seu país natal, em 1949, e obteve seu Doutorado na Universidade de Cambridge, nos Estados Unidos, em 1959. Na década de 60, passou um período com Jean Piaget, biólogo e psicólogo que desenvolveu a teoria do Construtivismo, fonte de inspiração para os trabalhos subsequentes de Papert. Posteriormente, foi convidado a integrar o MIT, onde foi cofundador do Laboratório de Inteligência Artificial. É considerado um dos pioneiros no incentivo ao trabalho com computadores no aprendizado, fazendo com que se apresentasse como um “utópico educacional” (Papert, 1985, p. 33), sendo também reconhecido como o pai da linguagem LOGO e da teoria Construcionista.

Mesmo que esta pesquisa não mobilize todas as ideias do construcionismo, entendemos ser relevante apresentar certas considerações sobre essa teoria para melhor referenciar os principais trabalhos de Papert. Essa teoria tem como foco o ensino das Ciências e da Matemática, tendo se inspirado nas ideias de Piaget em um contexto da tecnologia. Ambas as abordagens tomam a aprendizagem como um processo ativo e construtivo, mas a de Papert propõe uma prática maior, com a criação como parte do aprendizado, enfatizando, dessa forma, a relação entre a linguagem de programação e o pensamento matemático. Nesse sentido, o estudante deixa de ser um espectador que acompanha o computador e passa a instruí-lo conforme o programa, refletindo sobre soluções para as situações propostas.

O Construcionismo defende que o processo de criação, ou seja, a proposta de investigação e o momento prático em que os estudantes colocam “a mão na massa” (*hands-on*), deve ser dedicado a um projeto ao qual os estudantes consigam atribuir significado, de modo que o interesse e a proposição surjam deles, que, por conseguinte, mobilizarão diferentes conhecimentos na busca por uma possível solução.

Com essa abordagem, temos uma proposta que ressignifica diversos atores e cenários do processo de aprendizagem, como as tecnologias e os professores, e na qual cada um desempenha papéis específicos:

É importante frisar que, embora a tecnologia seja realmente importante e constitui um dos focos centrais da pesquisa construcionista, para o construcionismo um ambiente educacional efetivo exige muito mais do que o aprendiz e um computador. É preciso um ambiente acolhedor que propicie a motivação do aprendiz a continuar aprendendo, um ambiente que seja rico em materiais de referência, que incentive a discussão e a descoberta e que respeite as características específicas de cada um. Nesse ambiente, o professor é o regente que, em parceria com toda a comunidade escolar, deve desempenhar a difícil tarefa de fazer com que tudo funcione a contento. (Maltempi, 2004, p. 266-267)

Posteriormente, a partir dos estudos realizados, foram estabelecidas cinco dimensões que formam a base do construcionismo: dimensão pragmática, dimensão sintônica, dimensão sintática, dimensão semântica e dimensão social (Maltempi, 2004, p. 267).

A dimensão pragmática refere-se ao conhecimento aprendido, necessário para o desenvolvimento do projeto em questão. Entende-se que o estudante se mobiliza para aprender enquanto busca soluções práticas e imediatas, e não conhecimentos sem perspectiva para estabelecer relações. Esse movimento é recorrente, tendo em vista que ele sempre busca melhorias ou mudanças mais complexas em seus projetos.

A dimensão sintônica trata da relação entre aprendiz e projeto, o que faz com que a

aprendizagem passe a ser contextualizada, visando ao desenvolvimento de um projeto de interesse dos alunos. A escolha pode ser mediada pelo professor, com o intuito de que ele auxilie na opção por algo passível de ser desenvolvido e que conte com o computador como um elemento que expanda as perspectivas quando comparado a projetos físicos do ambiente concreto.

A dimensão sintática, por sua vez diz respeito à possibilidade de o aprendiz acessar elementos básicos que compõem o ambiente de aprendizagem, como materiais que possam ser acedidos com poucos pré-requisitos. Na prática, isso pode ser inviável, mas deve ser perseguido o máximo possível (Maltempi, 2004).

A dimensão semântica concerne a importância de o estudante lidar com elementos que carreguem significados para ele, a fim de que os conceitos e ideias sejam representativos no assunto que está sendo trabalhado. Por fim, a dimensão social aborda as relações pessoais e a cultura do ambiente, indicando que o projeto também deve mobilizar questões valorizadas culturalmente. Nesta dimensão, a tecnologia e a valorização social do conhecimento em programação voltam a ganhar destaque, dado o avanço tecnológico que faz com que muitas vezes estejamos rodeados por celulares e computadores e afins.

A base da teoria Construcionista advém do trabalho com o LOGO, ocasionando um desenvolvimento mútuo deles, haja vista que, enquanto se investigava o ambiente de aprendizagem, desenvolvia-se a linguagem de programação. Para tal, foi necessário dialogar com outras teorias, a fim de que contribuíssem para compreender os diferentes níveis de interação que aconteciam nesse ambiente, mobilizando, para além de Piaget e Papert, autores como Vygotsky e Freire, segundo Valente (1996).

Na década de 70, o LOGO começa a ser utilizado no próprio MIT e em outros países, como Austrália e Escócia. Inicialmente, essa linguagem programava uma “tartaruga” (apelido atribuído devido à velocidade com que percorria o percurso), um robô que executava comandos conforme marcava seu trajeto com uma caneta.

Figura 2 - Seymour Papert com a tartaruga de chão



Fonte: https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Seymour_Papert.jpg.

A programação ocorria em laboratórios, visto que o interpretador LOGO estava disponível somente para computadores de grande porte, como o PDP 10 e PDP 11. Com o avanço da tecnologia e o desenvolvimento de microcomputadores, os quais hoje denominamos computadores pessoais, a linguagem LOGO deixa de programar um robô físico e passa a programar uma tartaruga em um *software* de computação gráfica, desenhando diversas formas e imagens. Por conseguinte, um novo grupo de pesquisa do MIT, focado apenas no LOGO, desenvolve versões para duas máquinas: Apple II e Texas Instruments TI 99/4. A partir daí, surgem distintas perspectivas de trabalho com o computador, como a perspectiva didática, uma vez que:

quando o aluno interage com o computador através do Logo, ele programa o computador ou “ensina” a Tartaruga como produzir um gráfico na tela. Isso implica na descrição da solução do problema através dos comandos do LOGO (procedimentos Logo). O computador, por sua vez, executa esses procedimentos e a Tartaruga apresenta na tela um resultado na forma de um gráfico. O aluno olha para a figura que está sendo construída na tela e para o desenho final e faz uma reflexão sobre essas informações. (Valente, 1996, p. 11)

Nessa mesma década, o LOGO começou a ser apresentado nas escolas, sendo a primeira delas uma escola da cidade de Brookline, Estados Unidos, para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Com um projeto patrocinado pela *Texas Instruments* e pelo MIT, 50 computadores foram distribuídos para uma escola em Dallas, também nos Estados Unidos, com 450 estudantes matriculados. Outras iniciativas como essa também aconteceram em Nova York, com a distribuição de computadores em escolas públicas em alguns distritos da cidade, sendo sempre um dos dois modelos citados anteriormente. Em ambos os projetos, foram oferecidos

aos professores uma formação, através de cursos de verão de duas semanas de duração, bem como acompanhamento durante o ano letivo, ações essas apoiadas pelo MIT.

A partir daí, outras práticas foram realizadas a fim de apresentar e de incentivar o trabalho com a linguagem LOGO, como, por exemplo, a criação da *LOGO Foundation*²⁰ (Fundação LOGO, em tradução livre), uma organização sem fins lucrativos que promove e fornece apoio ao uso da linguagem nas escolas, e de empresas como a *Terrapin Software* e a *Logo Computer Systems, Inc* (LCSI), com Seymour Papert como presidente na fundação.

Em 1980, um grande marco na história da linguagem foi o lançamento do livro “Mindstorms: children, computers and powerful ideas”, publicado no Brasil anos depois com o título “Logo: Computadores e Educação” (Papert, 1985). O avanço da popularidade da linguagem no início da década é uma consequência da publicação deste livro. De acordo com o autor, ele desenvolve duas ideias principais na obra:

a primeira é que é possível construir computadores de modo que aprender a comunicar-se com eles seja um processo natural, mais parecido como processo de aprender francês morando na França do que como método antinatural do ensino americano de línguas estrangeiras. A segunda é que aprender a comunicar-se com um computador pode mudar a maneira como outras aprendizagens acontecem. O computador pode ser um interlocutor-de-matemática ou um interlocutor-de-línguas. Estamos aprendendo a fabricar computadores com os quais as crianças gostam de se comunicar. Quando esta comunicação ocorre, as crianças aprendem matemática como uma língua viva. (Papert, 1985, p. 18)

Enquanto apresenta a tartaruga no ambiente LOGO, Papert (1985, p. 26) destaca que:

o papel central da tartaruga neste livro não deve ser visto como uma panaceia para todos os problemas educacionais. Vejo-a como instrumento educacional válido, mas sua principal função é servir como modelo para outros objetos, ainda a serem inventados. Meu interesse está no processo de invenção desses “objetos-de-pensar-com”, objetos em que há uma interseção de presença cultural, conhecimento implícito, e a possibilidade de identificação pessoal.

A partir de então, novas versões do LOGO foram produzidas com novos recursos, como sons, gráficos e traduções para outros idiomas. Por exemplo, em 1985, a LCSI lança o LogoWriter, com capacidade de processamento de texto e interface mais simplificada do que as versões anteriores.

Na mesma década, Mitchel Resnick e Steve Ocko, membros do MIT Media Lab,

²⁰ Site da Logo Foundation: <https://el.media.mit.edu/logo-foundation/index.html>.

apresentaram o Lego Logo, com o qual seria possível programar motores, sensores e outras peças de Lego através de uma interface com comandos na linguagem LOGO. A ideia foi desenvolvida ao longo dos anos, sendo possível encontrar ainda hoje programações com blocos de Lego, como, por exemplo o kit de robótica Lego Mindstorm EV3 (nome que faz referência ao livro de Papert), ocorrendo concursos de robótica a níveis mundiais.

Mitchel Resnick segue trabalhando no MIT e, com fundamentos e preocupações semelhantes aos de Papert, é um dos principais fundadores da linguagem e comunidade Scratch²¹, desenvolvida a partir de 2004, com lançamento em 2007. Igualmente voltado principalmente para crianças e com um interface visual simples, o Scratch fornece um ambiente onde é possível criar jogos, contar histórias, usar simuladores, dentre outros recursos, através da programação com “blocos”, não sendo preciso escrever todas as linhas do código, mas sim usar os blocos de comando conforme se deseja. Com a grande popularidade alcançada e as inovações feitas no correr dos anos, o Scratch se tornou uma das principais linguagens para se trabalhar com programação nas escolas.

Como dito anteriormente, outras versões foram sendo desenvolvidas, traduzidas e apresentadas em diversos países, dentre eles, o Brasil. A linguagem LOGO chega em território nacional em 1982, por meio das ações do Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED), existente até hoje na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), sendo disponibilizada para crianças e adolescentes. Dentre as várias pessoas envolvidas neste processo, destacamos o professor José Armando Valente.

José Armando Valente se graduou em Engenharia Mecânica pela Universidade de São Paulo (USP) em 1970. Obteve o título de mestre em Ciência da Computação pelo Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Unicamp em 1974 e realizou outro mestrado no Programa Interdisciplinar de Ciência e Educação do MIT, em 1979, logrando o título de Doutor pelo Departamento de Engenharia Mecânica e Divisão para o Estudo e Pesquisa em Educação do MIT em 1983, sendo ambos os trabalhos orientados por Seymour Papert.

Buscando divulgar e incentivar os estudos com o LOGO, podemos destacar duas publicações de livros: “Logo: Conceitos, Aplicações e Projetos” (Valente; Valente, 1988) e “O Professor no Ambiente Logo: Formação e Atuação” (Valente, 1996).

Na primeira publicação citada acima, os autores dividem a obra em duas partes. No primeiro momento, têm como objetivo apresentar e incentivar alguns comandos e

²¹ Comunidade Scratch: <https://scratch.mit.edu/>.

possibilidades ao se trabalhar com a linguagem e, para tanto, expõem alguns conceitos de programação ao mesmo tempo que sugerem projetos a serem realizados e atividades sem o computador para se discutir o que foi evidenciado. Nessa parte, também ressaltam que:

nosso objetivo principal é mostrar que as atividades gráficas utilizam de ideias poderosas e sofisticadas, as quais, quando embutidas nas atividades gráficas, se tornam manipuláveis. Aprendem-se coisas difíceis brincando, desenhando, sem perceber que são difíceis. Isto é Logo – um ambiente onde aprender coisas difíceis deve ser divertido! (Valente; Valente, 1988, p. 1)

Já na segunda parte do livro, os autores mobilizam uma possibilidade a qual afirmam ser pouca conhecida: a manipulação de símbolos no *software*, indo além da parte gráfica da tartaruga, haja vista favorecer o trabalho com textos, como mensagens, poemas e até a simulação de conversas previamente programadas. Ademais, permite o emprego de números e procedimentos de cálculos, como esboçar gráficos, usar a trigonometria, entre outras possibilidades.

A segunda obra citada, por sua vez, é resultado do 1º Grupo de estudo LOGO, realizado no NIED em março de 1994, com a finalidade de discutir os seguintes tópicos: o papel do facilitador no ambiente Logo e a formação do facilitador Logo e as características da linguagem Logo. Inicialmente, vinte e duas pessoas foram convidadas a escreverem artigos, os quais compõem as três primeiras partes do livro, dividido pelos tópicos discutidos. Os textos foram enviados aos convidados e debatidos no encontro presencial, cujas discussões foram gravadas e transcritas, de modo a compor a quarta e última parte do livro. Em 2000, o NIED desenvolveu o SuperLogo (SLogo), que tem sua versão SuperLogo 3.0 como a mais recente do LOGO traduzida para o português, disponível para *download* gratuitamente, com instruções e exemplos de projetos também disponíveis para o trabalho com o *software* no site do projeto²². Desta forma, é comum que as pesquisas que tratam da linguagem LOGO aqui no Brasil utilizem o *software* SuperLogo 3.0, como Oliveira e Gonçalves (2018), Cardoso (2021) e Souza (2024).

4.2.1 O LOGO no processo de aprendizagem

Vale lembrar que o LOGO foi pensado para a aprendizagem e essa característica permanece, independentemente da idade daquele que se aventura em programar com ela.

²² SuperLogo: <https://www.nied.unicamp.br/projeto/super-logo/>.

Programar com LOGO permite a visualização gráfica dos comandos escritos, tornando possível identificar mais facilmente os erros e discutir os comandos executados pela tartaruga enquanto se investiga um problema ou uma questão proposta. Assim, os passos da tartaruga podem abrir espaço para discussões de conteúdos matemáticos, questões artísticas ou das ciências em geral. Focando na aprendizagem matemática, temos que:

interagir com a tartaruga Logo pode contribuir na construção de conceitos matemáticos, muitas vezes de forma intuitiva. Conceitos podem ser explorados até mesmo antes de serem apresentados formalmente, possibilitando a descoberta de relações matemáticas importantes. (Gregolin, 2009, p. 4)

Deste modo, trabalhar com o LOGO para tratar de conteúdos matemáticos é exatamente um dos propósitos da linguagem. Como destacado anteriormente, a simplicidade e a capacidade da linguagem são um convite para que usemos da criatividade para relacionar os comandos realizados pela tartaruga com diversas questões, de diferentes níveis de escolaridade.

Souza e Passos (2015) mostram a linguagem para alunos de um curso de Pedagogia e professores dos anos iniciais através de um curso *online*. Concluem que os participantes foram receptivos à linguagem como um recurso didático, posto que desenvolveram atividades envolvendo jogos e dinâmicas em grupo para realizar com os estudantes dos anos iniciais.

Também com professores dos anos iniciais, Scheffer e Binotto (2023) expõem e analisam três atividades trabalhadas com esse público, de modo a pensar na relação a ser estabelecida entre o Pensamento Geométrico e o Pensamento Computacional com a vivência do corpo-próprio na construção de polígonos. Em todas as atividades, as autoras defendem que se deve iniciar com as crianças, buscando executar o resultado da programação antes de partirem para programar o quadrado, o triângulo e uma aproximação de circunferência, em cada atividade respectivamente. Na primeira atividade, tratando da programação de um quadrado, exibem a solução com o *software* SuperLogo, enquanto que as outras duas programações são realizadas com o Scratch. Entendemos que as três atividades podem ser realizadas em ambos os ambientes, ficando a escolha a cargo do professor ao ter em mente seu objetivo com a turma.

Ao final, as autoras concluem que é possível trabalhar diferentes perspectivas geométricas com os alunos da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir do SLogo, tais como ângulos, polígonos e suas características, discutindo os comandos e significados matemáticos presentes nos movimentos da tartaruga, os quais podem ser realizados e vivenciados pelo estudante antes da prática do registro simbólico e da programação do movimento no SLogo.

Cardoso e Pavanelo (2020) apresentam um minicurso realizado que aborda o pensamento abstrato através da álgebra, da geometria e do movimento. As discussões foram feitas com professores e tratavam de mínimo múltiplo comum (mmc) e do máximo divisor comum (mdc), com base nos desenhos da tartaruga. Oliveira e Gonçalves (2018), por sua vez, trazem uma investigação realizada com alunos do Ensino Fundamental que explora tópicos de Geometria Plana e do Teorema de Pitágoras. Os autores ressaltam que:

a utilização do *SuperLogo* possibilita não somente o estudo da geometria, como também o emprego de uma lógica de programação que permite a elaboração de conjecturas, a verificação de hipóteses, a investigação e a recondução dos procedimentos em caso de erro. (Oliveira; Gonçalves, 2018, p. 105)

Enquanto trabalhamos com o LOGO, é possível mobilizar discussões relacionadas a diferentes conceitos matemáticos, de modo que, mesmo que se tenha como objetivo trabalhar um deles em específico, outros podem surgir, o que torna a experiência ainda mais rica.

Pavanelo, Cayres e Santos (2022) mostram uma proposta de atividade baseada na teoria Construcionista de Papert para os anos finais do Ensino Fundamental em que exploram conceitos relacionados à Geometria Plana, como polígonos, e ideias referentes à Robótica Educacional, a qual não trabalha com a tartaruga no computador, mas com um robô físico, cujos comandos são os mesmos da linguagem LOGO. A proposta tem como objetivos enfatizar o aprendizado sobre os polígonos, possibilitar aos alunos o contato com robótica e realizar uma introdução sobre conceitos de programação.

Já Souza (2024) realiza uma investigação com alunos do Ensino Médio para explorar uma ideia intuitiva de limite, tópico de estudo no Ensino Superior, como parte da disciplina de Cálculo em muitos cursos de Exatas. Também partindo da programação com a tartaruga, Cardoso (2021) efetua discussões sobre propriedades algébricas, como congruência módulo m , vista no Ensino Superior com alunos da Licenciatura em Matemática.

Significa dizer que trabalhar com o LOGO permite o debate de diversos assuntos, tantos quantos se queira explorar, tendo como ponto de partida o rastro deixado pela programação da tartaruga. Além dos assuntos abordados, é possível estabelecer relações entre as representações algébricas, como os comandos escritos, e as representações geométricas - os movimentos da tartaruga -, e então discutir os pensamentos algébrico, matemático e computacional desenvolvido pelo aluno.

Observando os estudos citados como exemplo, dentre outros que já foram feitos, é possível perceber que:

alunos que interagem com a tartaruga Logo e seus professores podem se beneficiar das possibilidades de estabelecimento de relações que o Logo propicia de uma forma que, muitas vezes, não se dá na escola: problemas podem ser propostos pelo professor ou pelo aluno e as soluções podem ser testadas e ajustadas de tal forma que o erro não seja um bloqueador a ser evitado, mas um caminho para o acerto. A aprendizagem da Matemática certamente é enriquecida com o apoio da Linguagem Logo e para que isso ocorra os professores de Matemática devem conhecer essa linguagem computacional e, brincando com a tartaruga, constatar algumas possibilidades referidas neste texto e, certamente, descobrir muitas outras. (Gregolin, 2009, p. 9)

Deste modo, fica evidente o papel do professor de Matemática no tocante ao conhecimento das possibilidades que diferentes tecnologias podem fornecer, bem como no domínio mínimo para apresentar e trabalhar com o LOGO com seus estudantes.

Ainda que o LOGO não tenha atingido o mesmo nível de popularidade de outras linguagens e *softwares* educacionais, como o Scratch e o GeoGebra, seu desenvolvimento foi tão marcante que o programa e a linguagem de programação da tartaruga são compreendidos como uma primeira fase quando se discute a presença de tecnologias em pesquisas em Educação Matemática no Brasil, presença essa dividida por Borba, Silva e Gadaniadis (2020) em quatro fases. Outrossim, é importante refletir a importância de Papert de um modo geral, o qual, além de propor inovações em se tratando do uso de computadores no processo de aprendizagem, foi e é fonte de inspiração para outros trabalhos, como o próprio Scratch e os kits de robóticas da LEGO, o que fez com que se tornasse um dos principais educadores a abordar as tecnologias, já que ele mesmo compreendia que “na educação, a mais elevada marca de sucesso é não ter imitadores, mas inspirar outros a ir além” (Papert, 2008, p. 82).

4.3 Apresentando o GeoGebra LOGO

A partir de 2012, com a versão do GeoGebra Classic 5.0, foram adicionadas duas possibilidades de programação no *software*. Uma delas foi a linguagem Python, substituída em versões mais recentes pela linguagem JavaScript, utilizada inclusive na programação do código do GeoGebra. A outra foi o LOGO, cujos principais comandos foram nomeados de forma semelhante, mas fazendo com que as finalidades fossem iguais às do *software* específico da tartaruga.

Ressaltamos que os comandos aqui apresentados valem para as versões 5.0 e *online*, visto que, para outras versões, podem ocorrer pequenas alterações na escrita deles, não alterando, no

entanto, sua funcionalidade.

Devido ao baixo número de trabalhos que tratam e investigam o GeoGebra LOGO, os quais serão revisados e expostos mais adiante, entendemos que existe a chance de tal recurso ser menos conhecido na comunidade acadêmica e na prática escolar em comparação a outros, como o Scratch, o que nos leva à necessidade de fazer uma breve introdução explicando o funcionamento desta abordagem, utilizada nas atividades com os participantes da presente pesquisa.

4.3.1 Primeiros passos

Para iniciarmos o trabalho com o LOGO no ambiente do Geogebra, devemos escrever na janela de entrada o comando “Tartaruga()”. Em seguida, temos, na janela de álgebra, o nome referente à tartaruga criada, da qual podemos acessar diferentes configurações, como desabilitar sua exibição e mudar o nome. Na janela de visualização, a tartaruga é criada sempre na origem, no ponto (0,0), e sempre estará voltada para o eixo das abcissas. Após sua criação, um botão “Reproduzir/Pausa” é disponibilizado no canto inferior esquerdo da janela de visualização, o qual está diretamente ligado a ela, de modo que ele inicia ou pausa a execução da tartaruga pelos comandos digitados.

Apresentamos, no quadro a seguir, os comandos exclusivos do GeoGebra para a tartaruga, que adaptam os comandos básicos desenvolvidos desde o início da linguagem LOGO.

Quadro 1 - Comandos do GeoGebra para a tartaruga

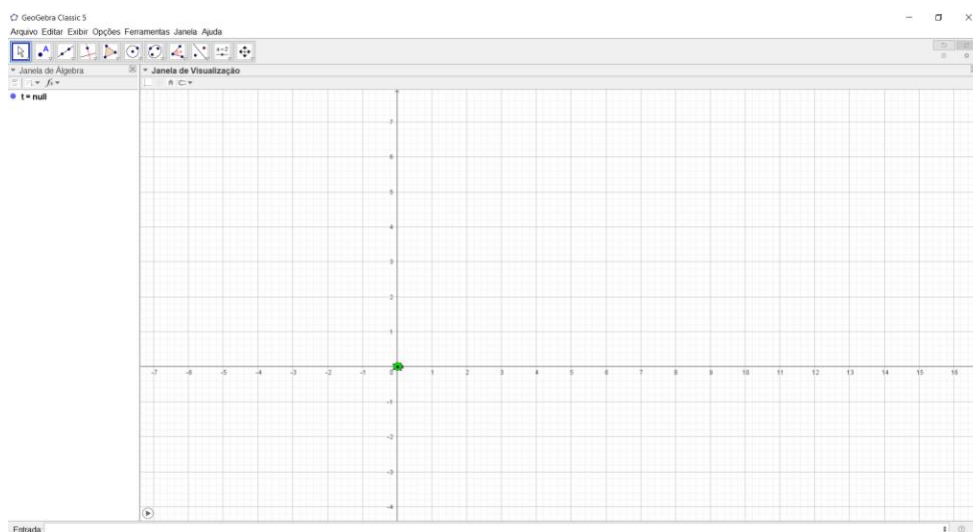
Tartaruga()	Cría uma tartaruga na origem das coordenadas.
TatNãoDesenhar(Tartaruga)	Instrui a tartaruga a não desenhar, até que se diga o contrário.
TatDesenhar(Tartaruga)	Instrui a tartaruga a desenhar toda a sua trajetória.
TatPF(Tartaruga, Distância)	A tartaruga avança uma distância determinada para a frente (PF é uma abreviação de “para frente”).
TatPT(Tartaruga, Distância)	A tartaruga recua uma distância determinada (PT é uma abreviação de “para trás”).
TatPD(Tartaruga, Ângulo)	A tartaruga rotaciona para a direita segundo um determinado ângulo (PD é uma abreviação de “para a direita”).
TatPE(Tartaruga, Ângulo)	A tartaruga rotaciona para a esquerda segundo um determinado ângulo (PE é uma abreviação de “para a esquerda”).

Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Ressaltamos a importância de ficar atento à escrita dos comandos, principalmente pelo fato de que eles não iniciam com as primeiras letras da palavra “Tartaruga”, mas sim com “Tat”. O GeoGebra executa os comandos mesmo que não estejam com letras maiúsculas, entretanto, para todos os comandos do *software*, deve-se atentar à pontuação, que não é executada caso não esteja ortograficamente correta, sejam os comandos específicos da tartaruga ou outros.

Assim que a tartaruga é criada, ela desenha conforme avança, seguindo, para tanto, os comandos digitados na janela de entrada. Desta forma, o comando “TatDesenhar” só é necessário se anteriormente foi dado o comando “TatNãoDesenhar”. Para todos os comandos apresentados, é necessário indicar qual tartaruga deve executar as instruções, mesmo que haja apenas uma. Desta forma, ao criar a tartaruga, podemos imediatamente nomeá-la como quisermos, por exemplo, “ $t = \text{Tartaruga}()$ ” cria uma tartaruga em cujos comandos será referenciada como “t”.

Figura 3 - Tartaruga no GeoGebra



Fonte: Captura de tela feita pelos autores (2025).

Para os outros quatro comandos apresentados, devemos ter em mente que o referencial em questão sempre será a posição da tartaruga, sendo necessário compreender qual seu lugar no plano cartesiano e qual sua direção, tendo como orientação a localização da sua cabeça.

Os comandos podem ser escritos na janela de entrada e a execução deles tem uma ligação direta com o botão “Reproduzir/Pausa”. Isso porque, se o botão estiver pausado, podemos digitar uma sequência de comandos na janela de entrada e, quando o reacionarmos, a tartaruga executará todos os comandos na ordem em que foram digitados. Caso o botão não esteja

pausado, a tartaruga efetivará imediatamente cada comando que receber.

Uma desvantagem de ambos os formatos é que não temos um acesso ao histórico dos comandos digitados, podendo ser difícil recordar e analisar a ordem ou a estrutura deles, principalmente se houver algum erro na execução desejada (ligado a um problema nesses comandos). Uma maneira de contornar tal desvantagem é a criação de um botão, disponível na penúltima janela de ferramentas do GeoGebra.

Criando um botão, podemos escrever a estrutura do código, visando a obter um desenho específico feito pela tartaruga. Tal ação permite visualizarmos os comandos instruídos como um todo, facilitando no processo de depuração, seja por verificarmos que a execução não correspondeu ao desejado em um determinado momento ou que ocorreu um erro no GeoGebra, além de haver a indicação de qual linha e qual erro em questão.

Essas ações são realizadas acessando as propriedades do botão, em uma janela à direita da tela, podendo alterar seu nome, posição e cor. Acedendo à aba “Programação”, escrevemos os comandos específicos do código GeoGebra na opção “Ao clicar”. Também é possível programar em JavaScript, mas, para isso, é necessário estar na aba referente a mesma ou alterar a linguagem que utilizaremos no canto inferior esquerdo da janela. Em todo este trabalho, valemo-nos do código GeoGebra.

Criar um botão é um dos recursos oferecidos por estarmos no ambiente do GeoGebra, sendo possível empregar outros comandos e funcionalidades já disponíveis no *software*, relacionando-os com a tartaruga. Descrevemos a seguir alguns destes comandos, utilizados para a resolução das atividades desenvolvidas para esta pesquisa, os quais fazem parte das possibilidades que podem agregar ao trabalho com o GeoGebra LOGO.

Quadro 2 - Comandos do GeoGebra que podem ser relacionados à tartaruga

Apagar(Objeto)	Este comando apaga um objeto indicado tanto na janela de álgebra quanto na janela de visualização. Ao indicarmos como objeto a tartaruga, ela e todo o desenho feito são excluídos.
IniciarAnimação()	Escrever este comando no início do código de um botão é uma maneira de acionar automaticamente o botão “Reproduzir/Pausa”, fazendo com que comece o desenho do código escrito.
DefinirCoordenadas(Objeto,x,y)	Se selecionarmos a tartaruga como objeto em questão, ela altera suas coordenadas para a posição desejada, coordenadas essas expressas por (x,y), mantendo sua direção antes de executar o comando.

Repetir(Número, Programação, ...)	Repete uma ou várias ações um número finito de vezes.
Controle deslizante	O GeoGebra vai relacionar toda variável presente no código a um controle deslizante. Vale destacar que alterar o controle deslizante após a execução do programa não alterará seu percurso, de modo que o comando é compreendido com o valor do controle deslizante antes de clicar no botão e iniciar o desenho.
DefinirValor(Objeto, Objeto)	Pode ser utilizado para alterar automaticamente o valor de uma variável, a partir da indicação da variável e de qual valor ou expressão deverá ser alterada.
Distância(Objeto, Ponto)	Calcula a distância entre um objeto e um ponto.
Ângulo(Ponto,Ponto,Ponto)	Calcula o ângulo formado por três pontos selecionados no sentido anti- horário.

Fonte: Dos Autores (2025).

Ressaltamos que o GeoGebra compreende o termo “objeto” para toda entrada que não seja um comando a ser executado, fazendo com que pontos, retas, polígonos e controles deslizantes sejam todos tomados como objetos, assim como a tartaruga. Desta forma, os comandos “Distância” e “Ângulo” podem ser utilizados em conjunto com os comandos “TatPF/TatPT” e “TatPE/TatPD”, para que a distância a ser percorrida pela tartaruga seja definida pela distância entre dois pontos pré-estabelecidos e que o ângulo a ser rotacionado seja o ângulo formado por três pontos.

Entendemos que estas são algumas entre as diversas possibilidades de se relacionar os comandos já existentes do GeoGebra com os comandos da tartaruga. Não temos o objetivo de apresentar todas elas, as quais devem ser mais estudadas e compreendidas conforme se trabalha com o GeoGebra LOGO.

Diante disso, temos o intuito de estabelecer breves comparações entre o *software* SuperLogo e o GeoGebra. Conforme estudamos diferentes trabalhos desenvolvidos com o SuperLogo, como, por exemplo, Valente e Valente (1988), buscamos comparar sua funcionalidade com o GeoGebra. De modo geral, concluímos que grande parte dos recursos dos comandos podem ser empregados em ambos os *softwares*, mas quase sempre com adaptações, principalmente na escrita deles. Por exemplo, no SuperLogo, temos o comando “Repita” enquanto que, no GeoGebra, escrevemos “Repetir”.

Assim, com algumas adaptações, entendemos que grande parte das possibilidades do SuperLogo estão presentes no GeoGebra, e compreendemos que estar nesse novo ambiente

permite outros caminhos a serem explorados. Por isso, destacaremos algumas das diferenças que nós percebemos e que se mostraram importantes para o trabalho que realizamos neste ambiente.

Um comando básico do SuperLogo é o “Aprenda”, em que descrevemos uma sequência de comandos, fazemos referência a ela e a nomeamos. No GeoGebra, entendemos que a opção que mais se aproxima é a criação de um botão, do qual a escrita do código faz parte, e cujo faz referência a toda essa sequência.

No rol de pequenas diferenças, além da escrita do comando principal, notamos que os comandos para rotacionar diferem pouco, uma vez que, no GeoGebra, é necessário adicionar o grau ($^{\circ}$) acompanhado do número referente à rotação desejada, caso contrário, ele interpretará o número em radianos, enquanto que, no SuperLogo, não é necessário tal identificação, pois a rotação é sempre expressa em graus.

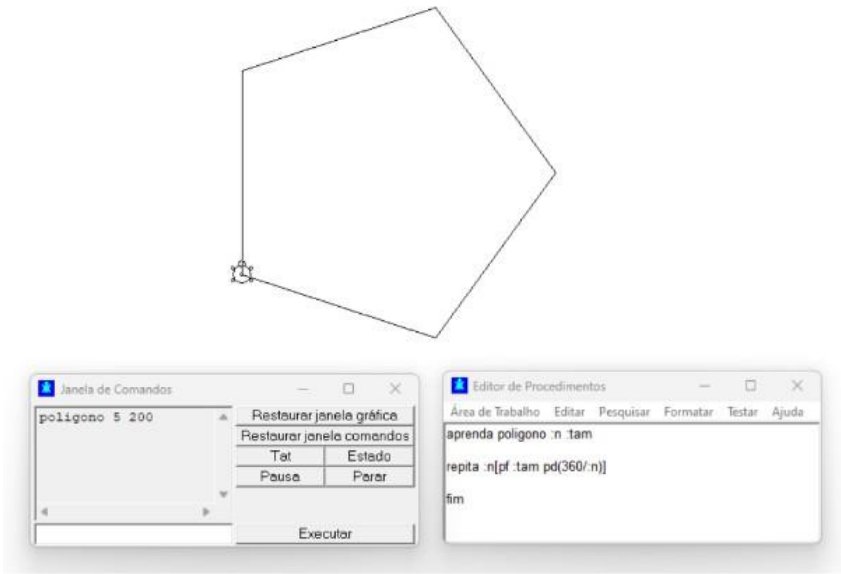
Sobre os comandos que fazem a tartaruga ir para frente e para trás, no SuperLogo, o número indica os “passos” da tartaruga; já no GeoGebra, o número segue a escala dos eixos presentes na janela de visualização. No tocante aos comandos “Distância” e “Ângulo”, podemos fazer referência a eles no código sem necessariamente calculá-los numericamente, operação feita pelo próprio GeoGebra que, em seguida, utiliza-o na programação.

Ao passo que a tartaruga se desloca e rotaciona, podemos acompanhar toda a sua trajetória e seus movimento ao interpretar cada comando, linha por linha do código programado, avançando em uma velocidade constante. No SuperLogo, por sua vez, isso não é possível, já que, logo após o código ser compilado, o desenho é posto na tela.

Essa é uma diferença que consideramos positiva, pois acompanhar a trajetória e os passos da tartaruga permite estabelecer relações com o código escrito, tratando da sequência de passos e, principalmente, permite verificar quando há erros, ou seja, quando o produto final não era o que se tinha em mente ao ser programado, oportunizando, assim, uma compreensão mais rápida no processo de depuração e de análise do desenho.

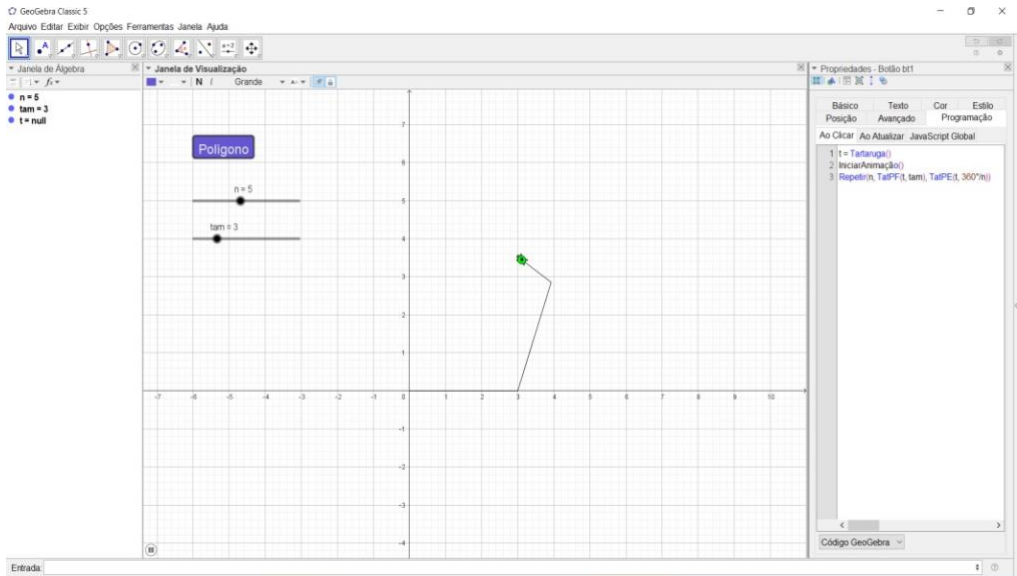
Algumas das considerações feitas até aqui, como o uso do controle deslizante, a escrita dos comandos, o botão e o movimento da tartaruga, podem ser exemplificadas comparando as figuras a seguir. A Figura 4 representa a programação no ambiente SuperLogo, enquanto as Figuras 5 e 6 dão-se no ambiente do GeoGebra, a partir da criação de um botão e de um controle deslizante. Embora todas tratem da programação de um polígono regular qualquer, tendo o número e o tamanho dos lados a serem definidos previamente pelo usuário nos diferentes ambientes, a Figura 6 apresenta o programa concluído, ao passo que a Figura 5 representa a tartaruga executando o código, com parte do trajeto já percorrido.

Figura 4 - Programação no SuperLogo



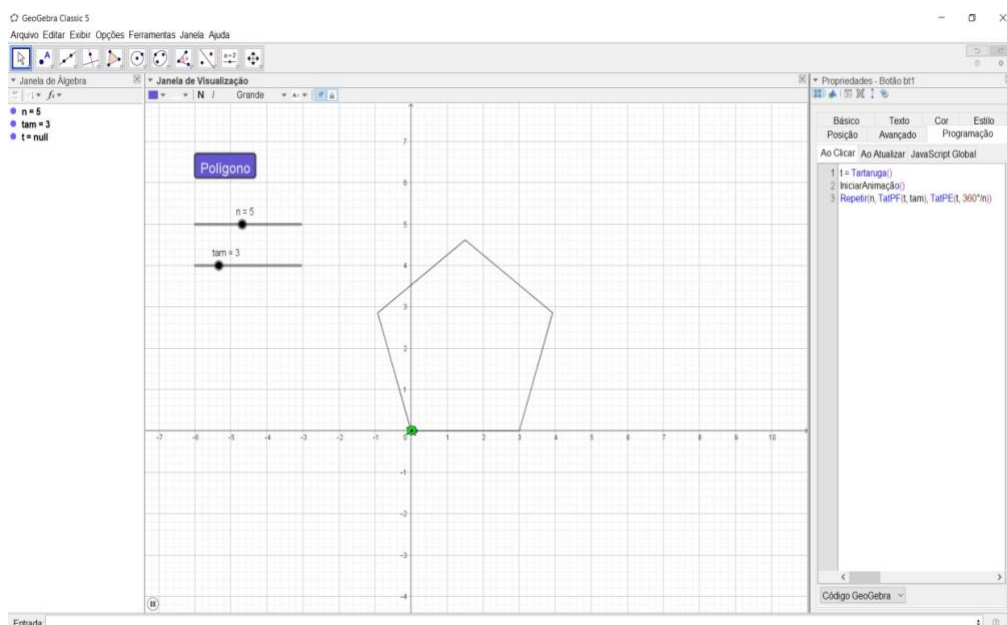
Fonte: Souza (2024).

Figura 5 - Execução da programação no GeoGebra



Fonte: do Autor (2025).

Figura 6 - Programação no GeoGebra



Fonte: do Autor (2025).

O comando para a tartaruga não desenhar, presente em ambos, torna-se menos útil no GeoGebra. Isso porque, no SuperLogo, ele pode ser usado a fim de fazer a tartaruga caminhar em outra direção para, posteriormente, desenhar. Por sua vez, no GeoGebra, podemos nos valer do comando “DefinirCoordenadas” para alterar a coordenada da tartaruga e seguir com o desenho. Tal identificação do local desejado para reposicionar também é facilitada, dado que usamos como referência os eixos presentes na janela de visualização. Essa consideração é válida apenas se compreendermos o comando “não desenhar” no SuperLogo unicamente como meio de reposicionar a tartaruga.

Estas são algumas diferenças que notamos entre ambos, mas que não interferem no desenvolvimento das atividades aqui apresentadas. Pessoas com maior experiência no SuperLogo poderão encontrar outras diferenças além das expostas aqui, mas, ainda assim, incentivamos a exploração desse novo ambiente.

De forma geral, entendemos que a possibilidade de relacionar a tartaruga com os comandos existentes do GeoGebra é uma das vantagens ao se trabalhar neste ambiente, onde as principais características do SuperLogo se mantêm, mesmo que algumas funcionalidades se percam, sem ser possível adaptá-las ao novo ambiente.

Além disso, é possível retomar as ideias de Papert (1985, p. 26) referente à tartaruga, quando afirma que ela “serve ao único propósito de ser fácil de programar e boa para pensar”. A característica inicial se mantém devido à estrutura dos comandos, e compreendemos que relacionar novos comandos ao fato de estarmos no ambiente do GeoGebra permite novos

recursos de exploração, ideias e conceitos, talvez antes menos viáveis, estando então, de acordo com a segunda característica proposta.

4.3.2 *Aprendizagem com o GeoGebra LOGO*

Compreendemos o que nomeamos de “GeoGebra Logo” como a possibilidade de programar com a tartaruga no ambiente do GeoGebra. Estas explorações estão inseridas em um ambiente já bastante difundido e consolidado na comunidade da Educação Matemática. Entendemos, então, que muitas das considerações feitas ao se trabalhar com o GeoGebra, tratando do *software* de forma geral, mantêm-se quando falamos sobre a programação com a tartaruga, afinal, estamos no mesmo ambiente. Por exemplo, pesquisadores mencionados anteriormente, como Hohenwarter e Fuchs (2004), fazem considerações sobre o GeoGebra, porém percebemos que essas ideias podem fazer referência também às atividades que exploram o GeoGebra LOGO.

Da mesma forma, notamos que muitas das asserções feitas a partir de estudos desenvolvidos especificamente com o *software* LOGO podem também se relacionar com o trabalho com a tartaruga no GeoGebra, devido à proximidade da funcionalidade básica apresentada. Assim, entendemos que as afirmações feitas por Gregolin (2009), segundo o qual a aprendizagem Matemática pode ser enriquecida ao se trabalhar com o LOGO, também se fazem presentes quando nos referimos a esse novo ambiente.

Mesmo com o número reduzido de pesquisas que discutem a possibilidade de ensino por meio do Geogebra LOGO, as características nucleares de ambos permanecem. Entendemos que suas possibilidades e limitações coexistem, agora integradas, de modo que a base teórica desenvolvida por diversas investigações sobre cada um deles não pode ser descartada.

Assim, mesmo fazendo referência ao *software* específico do LOGO, as conjecturas a seguir também se fazem presentes quando lidamos com o ambiente do GeoGebra, onde estamos igualmente sujeitos a erros e a correções no código. Dessa forma:

[...] durante a execução do programa elaborado pelo aluno, existe uma correspondência direta entre cada comando e o comportamento da Tartaruga. Essas características disponíveis no processo de execução do programa facilitam a análise do programa de modo que o aluno possa achar seus erros (bugs). O processo de achar e corrigir o erro constitui uma oportunidade única para o aluno usar e testar ou aprender tanto conceitos envolvidos na solução do problema quanto as estratégias de resolução de problemas. O aluno pode também usar seu programa para entender sobre o seu próprio pensamento, ou seja, no nível metacognitivo. Ele pode analisar seu programa em termos de

efetividade das ideias, estratégias e estilos de resolução de problema. Nesse caso, o aluno começa a pensar sobre suas próprias ideias (abstração reflexiva). (Valente, 1996, p. 12)

Ademais de ambos os ambientes terem essa característica em comum, entendemos que o GeoGebra LOGO, ao apontar em qual linha e qual foi o erro cometido, contribui para a efetivação das considerações feitas, além de oferecer outras ferramentas que permitem a investigação do plano cartesiano. Corroborando o exposto, para explorar outros comandos já existentes no GeoGebra, é possível consultar, na Janela de Entrada, a estrutura da escrita dos comandos ou clicar no botão “Ajuda”, onde podemos acessar todos os demais comandos disponíveis no *software*, buscando aquele que mais se aproxima do desejado.

Um termo comum nas construções feitas no GeoGebra, principalmente nas construções geométricas, é popularmente chamado de “teste do arrastar”. Basicamente, esse teste parte do princípio de alterar a posição de pontos e retas, buscando observar se a estrutura do objeto construído se mantém para qualquer caso ou se foi construído para um caso particular. Entendemos que o teste do arrastar no GeoGebra LOGO tem o papel de verificar o funcionamento do código, visando a uma escrita genérica. Caso se desenhe um triângulo formado por 3 pontos dados (como em uma das atividades elaboradas neste trabalho), deve-se ter em mente que ele foi feito a partir das posições iniciais, de modo que alterar os pontos não altera o desenho, o que nos leva à consideração anterior: devemos observar se o código desenha qualquer triângulo independentemente das posições dos pontos.

Mesmo compreendendo que as possibilidades existentes para ambos os *softwares*, antes vistas de forma disjunta e agora compreendidas em conjunto, podem fazer referência ao GeoGebra LOGO, buscamos trabalhos que tratem especificamente desta funcionalidade, o que nos levou a um número escasso de publicações abordando este assunto.

Entendemos que o baixo número de estudos não é um indicativo da pouca viabilidade de se trabalhar com esse formato em sala de aula ou em pesquisas, afinal, se esse fosse o caso, seria necessário justamente que as investigações ou relatos indicassem tal cenário, levando-nos a concluir a inviabilidade de tal abordagem. Assim, acreditamos que o cenário atual diz respeito ao pouco conhecimento da comunidade de Educação Matemática acerca dessa possibilidade, o que nos conduz, então, a incentivar o estudo mais aprofundado de uma integração que foi proposta já há mais de dez anos.

De forma a dar sequência à revisão bibliográfica deste trabalho, encontramos duas publicações que tratam do GeoGebra LOGO, sendo uma brasileira e outra portuguesa. A seguir, apresentamos cada uma delas.

Tanajura (2020) tem como objetivo expor uma modelagem matemática através dos L-sistemas, utilizando como meio computacional o *software* GeoGebra. No decorrer do trabalho, apresenta a modelagem de fractais, o conjunto de Cantor, a curva que determina o floco de neve de Koch, as curvas FASS (pode-se dizer curvas de preenchimento espacial), L-árvores e tesselações, a exemplo da tesselação de Penrose, todos eles atrelados a um sistema dinâmico discreto, estabelecido por Lindenmayer: o L-sistema. Para isso, ele programa a tartaruga com os comandos do GeoGebra e a linguagem JavaScript. No capítulo 1 de seu estudo, mais especificamente na seção 1.2.1, mostra o que nomeia de “Pequeno manual para a utilização da tartaruga no GeoGebra”, o qual também pode ser um ponto de partida para iniciar o trabalho com o LOGO nesse ambiente.

Esta publicação se trata de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) para obter o título de bacharel em Matemática. Desta forma, mesmo com a seção dedicada a um breve manual de apresentação, com exemplos e discussões que podem se fazer presentes na sala de aula, entendemos que outras considerações e preocupações específicas da Educação Matemática podem não ter sido abordadas no estudo, afinal, são áreas e focos distintos.

Brito (2021) discute uma apresentação em um evento ocorrido em Portugal, o que nos leva a ressaltar que pequenas diferenças de escrita podem ocorrer, principalmente quando evidencia os comandos no GeoGebra. Na publicação, a autora tem como objetivos promover com alunos do 6º ano a aprendizagem da linguagem LOGO, o desenvolvimento do pensamento computacional e da competência matemática.

Assim, ela também exhibe os comandos básicos específicos da tartaruga, a construção de um triângulo equilátero e um algoritmo genérico para polígonos regulares com n lados, como o apresentado na Figura 5 no presente trabalho. Ao final, incentiva o desenho de diferentes figuras e apresenta brevemente as possibilidades de relacioná-los com o pensamento computacional e com a aprendizagem de Matemática.

Para além de publicações e apresentações em eventos, buscamos pela palavra “Tartaruga” no *site* do GeoGebra, no qual é possível acessar diferentes materiais elaborados pela comunidade. Entendemos que esse também é um indicativo de que o trabalho com o GeoGebra LOGO pode ser viável, mas provavelmente não foi tão divulgado, seguindo como uma possibilidade para se realizar pesquisas e atividades que permitam a investigação em conjunto com essa funcionalidade.

Dentre os diferentes materiais encontrados, destacamos o livro criado na própria plataforma, intitulado “Aprendendo algoritmos com a tartaruga do GeoGebra”, resultado de uma oficina realizada (e ainda disponível *online*) em 2020 por William Vieira Gonçalves, um

dos professores voluntários responsáveis pela plataforma “O GeoGebra”²³. Tal plataforma tem como objetivo a divulgação do *software* GeoGebra, disponibilizando, para tanto, materiais e recursos a fim de capacitar usuários em seus aspectos técnicos e fomentar reflexões sobre seu trabalho em situações de ensino e aprendizagem.

Neste material, é possível ter acesso às primeiras funcionalidades ao programar com a Tartaruga, desenhando polígonos regulares e polígonos quaisquer, mas também apresentando uma programação mais exigente, como a de um fractal. A publicação é encerrada com um vídeo que trata das possibilidades de se discutir o pensamento computacional.

4.3.3 *Algumas considerações sobre o GeoGebra LOGO*

Diante do estudo realizado, a fim de apresentar uma funcionalidade ainda pouco divulgada e conhecida no GeoGebra e estabelecer as bases teóricas com as quais as atividades foram desenvolvidas, vemos a necessidade de contemplar mais duas questões.

A primeira delas trata da limitação do GeoGebra LOGO. Buscamos apresentar e valorizar mais o que podemos fazer com a tartaruga ao invés do que não podemos, mas compreendemos que certas funcionalidades nos fazem buscar maneiras de adaptar ideias que poderiam ser mais fáceis de executar. Isso porque o GeoGebra não permite, por exemplo, a criação de pontos sobre o desenho feito pela tartaruga, de modo que ou os pontos são criados antes de a tartaruga passar por eles ou após a construção e, nesse caso, é preciso que utilizemos dos eixos para nos orientar acerca de qual seria a posição correta (ou aproximada) do local em que queremos posicionar. Um segundo ponto que identificamos é que não é possível visualizar os comandos dados à tartaruga no “Protocolo de construção”, o qual muitas vezes é utilizado como histórico do que foi feito, levando-nos a criar um botão como a melhor opção para contornar esse caso.

Entretanto, mesmo diante de limitações e desafios, vemos no GeoGebra LOGO um potencial para a aprendizagem de Matemática, de programação, para realizar discussões sobre o pensamento computacional e outras questões que concernem a Educação Matemática. Desta forma, para concluir, apresentaremos mais dois argumentos destacando potencialidade de se desenvolver trabalhos dessa natureza.

Conforme apresentado, o GeoGebra já é bem divulgado e conhecido e ele faz jus a esse reconhecimento por ser completo, permitindo abordar diferentes assuntos matemáticos em um

²³ Site da plataforma O GeoGebra: <https://ogeogebra.com.br/site/>.

mesmo ambiente. A existência de uma grande variedade de recursos pode nos levar a acreditar que, muitas vezes, não compreendemos a totalidade de sua funcionalidade e possibilidade. Neste trabalho, compreendemos que o acesso à tartaruga e à Janela de Cálculo Simbólico (CAS) são exemplos desse fato. Além disso, relacionar o que o *software* oferece, como as diferentes janelas e os comandos existentes, com a tartaruga agrega nas discussões sobre programação e Matemática, uma vez que podemos lidar com diferentes objetos e conceitos dessa área a partir do trajeto a ser realizado ou feito pela tartaruga. Também vale considerar que já ter uma familiaridade com o GeoGebra pode ser um fator que o torna mais convidativo para explorar a programação com a tartaruga, ao invés de aprender desde o início sobre um novo *software* (SuperLogo, caso desconheça), como *download*, sintaxe dos comandos, até suas possibilidades.

Em tempos em que se discute pensamento computacional, computadores, algoritmos e programação são termos de destaque dessas discussões. Conforme já exposto, compreendemos que o Scratch é uma das principais referências quando lidamos com essas questões pensando na Educação Básica. Entendemos também que muitos dos benefícios do Scratch, como a facilidade dos comandos, também se fazem presentes no GeoGebra LOGO, pois, por advir do LOGO, com procedimentos simples, podemos desenhar figuras complexas e notamos, então, que uma nova porta se abre para tais discussões, não pondo o Scratch e o GeoGebra LOGO como “concorrentes”, mas sim como ambientes que permitem gerar discussões para a sala de aula, pois cada um tem objetivos e finalidades diferentes, ficando a cargo do professor optar pelo cenário que lhe pareça ser mais eficiente no tocante a seu objetivo final, às possibilidades e às limitações que ambos oferecem. Além disso, ao lidar com a programação com a tartaruga, pode surgir o interesse em adicioná-la a outros objetos do GeoGebra, de modo que tal prática esteja presente não apenas como forma de representar o LOGO, mas também buscando agregar a abordagem de outros conceitos.

Desta forma, acreditamos que trabalhar com o LOGO no ambiente do GeoGebra permite a abordagem de diferentes conceitos matemáticos, enquanto se discute e aprende digitando a programação. Outrossim, o desenho gerado pode ser o ponto de partida para as discussões dos assuntos desejados, ao passo que se relaciona com outras possibilidades presentes no *software*. É com essa perspectiva que este trabalho foi desenvolvido.

5 PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, inicialmente, discorreremos sobre como foi efetuada a produção de dados, detalhando a proposta feita aos discentes da Licenciatura em Matemática, sujeitos da pesquisa. Em seguida, serão trazidas considerações acerca da análise fenomenológica, baseadas em dois principais momentos: a análise Ideográfica e a análise Nomotética. Por fim, apresentaremos a análise realizada na presente pesquisa a partir dos discursos dos sujeitos.

5.1 Produção dos dados

Para a produção dos dados, organizamos uma sequência de encontros e atividades nomeados “Explorando conceitos de Álgebra Linear com o GeoGebra”, e os divulgamos para os alunos da Licenciatura em Matemática da Unesp de Rio Claro que já haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear.

Foi estabelecido esse último critério, pois, como o conteúdo de Autovalores e Autovetores é um dos últimos tópicos da ementa, se convidássemos estudantes que ainda estavam cursando a disciplina naquele semestre, eles não estariam aptos a discutir não só esse conteúdo, mas também outros temas necessários, a exemplo de Transformações Lineares e Espaço Vetorial. Essa escolha estava diretamente relacionada a como as atividades foram organizadas. Isso porque, à época que realizamos os encontros para a produção de dados da pesquisa, os estudantes da disciplina estavam na terceira semana de aula, iniciando os estudos em Álgebra Linear, contudo, era necessário já ter um conhecimento básico de Transformações Lineares e Autovalores e Autovetores, a fim de retomar o que lembravam desse conteúdo e aprofundar outras discussões..

Inicialmente, inscreveram-se 6 alunos da Licenciatura, sujeitos da pesquisa. Entretanto, os dados foram produzidos com 5 participantes, após uma delas informar que não continuaria a frequentar os encontros. Dentre os 5 sujeitos da pesquisa, 3 eram do sexo feminino e 2 do sexo masculino, com idades entre 21 e 27 anos. Um estudante estava cursando o 5º semestre da Licenciatura, dois cursando o 7º semestre, um o 9º semestre e um o 11º semestre. Os alunos se organizaram para discutir as atividades formando um trio e uma dupla, conforme a escolha deles. O movimento de discutir as atividades em conjunto e não individualmente está ligado à forma de investigação que propomos nessa pesquisa, de modo a nos atentar às falas dos participantes interagindo entre eles e com as Tecnologias. Entendemos que a decisão dos participantes em definir com quem se reuniriam foi um ponto essencial, pois, como as análises

partem das transcrições das falas dos sujeitos, eles estariam mais à vontade para discutir com as pessoas com quem escolheram interagir.

A fim de garantir o anonimato dos participantes, eles não terão o nome divulgado e, durante a análise, mencionaremos-nos como Estudante 1 (E1), Estudante 2 (E2), Estudante 3 (E3), que formaram o trio, e Estudante 4 (E4) e Estudante 5 (E5), que formaram a dupla. Eles estão cientes desse processo e sugeriram com qual número gostariam de ser referenciados.

As atividades foram desenvolvidas em 8 dias, divididos em 3 semanas, com 3 encontros na primeira semana, 3 na segunda e finalizando com 2 na última semana. Esses momentos foram realizados no período noturno, após o horário de aula, iniciando às 19h e terminando 21h, visto que o curso é de período integral. Na maioria dos dias, tivemos a presença de todos, contudo, houveram casos em que alguns faltaram. Todas as ausências foram justificadas, estando relacionadas a atividades e reuniões do Programa de Educação Tutorial (PET), Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) ou a problemas de saúde. Houve casos em que os estudantes chegaram com antecedência no dia seguinte à sua ausência em uma tentativa de ficar a par das discussões do dia anterior, sendo esse movimento uma sugestão deles.

As atividades aconteceram no Laboratório de Informática do Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro. Para registrar a fala e a tela do computador, trabalhamos com um *software* gratuito que permitiu a gravação de ambos enquanto acontecia a discussão das 3 atividades elaboradas a fim de investigar o fenômeno em questão. Devido ao funcionamento não adequado dos computadores, como ocorrido durante a realização da Atividade 1, a dupla passou a trabalhar com o notebook pessoal do pesquisador, ao passo que o trio seguiu com um computador do laboratório, visto que não estavam confortáveis em levar o notebook para os encontros em função do horário em que eram realizados. Com vistas a garantir a gravação dos encontros, os estudantes disponibilizaram, cada um, seu celular particular para registrar os áudios das discussões. Assim, utilizamos o celular do pesquisador e um de cada grupo durante os encontros, ação essa que foi essencial para a transcrição, visto que a qualidade dos áudios dos celulares era superior à qualidade da gravação do computador, sendo consultado em momentos específicos, apenas para rever sua tela.

As atividades foram planejadas levando em consideração os recursos e ferramentas disponíveis no GeoGebra Classic 5 ou na versão *online*. A dupla que trabalhou com o notebook discutiu as atividades na versão Classic 5, já o trio, na versão *online*. Isso se deveu ao fato de a versão instalada no computador deles não conter todos os recursos necessários para a resolução das práticas, como o comando para calcular os Autovalores e Autovetores na janela CAS.

Pensamos em trocar de equipamento, permanecendo a uma distância considerável da dupla para que a gravação mantivesse a qualidade do áudio, entretanto, deparamo-nos com máquinas que não contavam com o *software* de gravação instalado, possuíam versões diferentes do GeoGebra e até mesmo em inglês, o que nos levou a decidir que o trio permaneceria com aquele computador, sendo necessário, para tanto, conectar-se na internet cabeada do campus e acessar a versão *online*.

Os dois primeiros encontros tiveram como foco introduzir o GeoGebra LOGO, apresentando brevemente a história do LOGO, os comandos referentes à tartaruga e outros que poderiam ser utilizados na resolução das demais atividades, os quais foram evidenciados anteriormente neste trabalho. Os estudantes já tinham ciência que as práticas faziam parte de uma pesquisa de Mestrado e, no primeiro dia, foi entregue o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido²⁴ (disponível no Apêndice A), posteriormente assinado pelos participantes..

No terceiro dia, dividimos o encontro em dois momentos. No primeiro, foram mostrados outros comandos e possibilidades do GeoGebra, como a planilha, a escrita de matrizes, as listas, as sequências e a janela CAS, bem como alguns comandos específicos desta janela, citados anteriormente neste trabalho, na seção 4.1.1. No segundo, iniciamos a Atividade 1, nomeada “Crocodilos e Tartarugas”. Neste dia, houve duas ausências e, por conseguinte, foi formado um trio diferente do dos outros dias, com os presentes, quais sejam Estudante 3, Estudante 4 e Estudante 5.

A Atividade 1, “Crocodilos e Tartarugas”, trata de uma simplificação de um sistema de modelagem “presa e predador”, relacionado à disciplina Equações de Diferença. A prática tinha como proposta explorar o comportamento de diferentes pontos conforme exploravam os botões e programações já criadas anteriormente no GeoGebra e, a partir daí, definir duas regiões no primeiro quadrante que resumem a relação entre as duas espécies, dependendo do ponto inicial, referidas como “Sempre teremos ambas as populações vivas” e “Nos leva à extinção das Tartarugas”. Explorando o comportamento dos pontos conforme a interação programada no botão, pudemos discutir que os limites/fronteiras dessas regiões são indicados pelos autovetores, crescendo conforme o autovalor, ambos auxiliando na previsão de comportamentos de diferentes sistemas. Relacionando novamente com Equações de Diferenças, pudemos indicar que os Autovalores e os Autovetores fazem parte da solução geral do sistema, apontamento esse que possivelmente não foi visto devido ao fato de não terem tido contato com

²⁴ A proposta foi aprovada pelo Comitê de Ética da Unesp - Faculdades de Ciências, campus de Bauru em 06 de abril de 2023, com número do certificado de apresentação de apreciação ética (CAAE) sendo 67321123.6.0000.5398.

o conteúdo enquanto cursavam essa disciplina.

A tarefa foi discutida dentro do tempo previsto, 1 hora, correspondente à metade do terceiro dia. Na semana seguinte, antes de iniciarmos a Atividade 2, o trio apresentou e explicou sobre a primeira atividade aos ausentes, cujas falas naquele momento também compõem discursos presentes na análise, inclusive os comentários dos ausentes, que tiveram um primeiro contato com a prática por meio da explicação dos colegas.

A partir dessa atividade, foi exposto aos estudantes que o tópico central das discussões seria o conteúdo de Autovalores e Autovetores. Isso não foi feito antes devido ao modo que organizamos a Atividade 1, na qual fizemos referência a esses tópicos mas sem nomeá-los propriamente, buscando perceber se os estudantes fariam essa relação enquanto estivessem discutindo a resolução.

A Atividade 2, nomeada “Explorando Transformações Geométricas”, foi realizada durante os 3 dias da segunda semana. Nela, inicialmente os estudantes escreveram um código com o Geogebra LOGO que desenhasse um triângulo baseado em três pontos. A partir do triângulo desenhado, discutimos como adaptar o código da programação do triângulo inicial para desenhar o triângulo resultante das transformações geométricas: Reflexão em relação a um ponto; Reflexão em relação a uma reta; Rotação em torno de um ponto e homotetia.

Existem ferramentas disponíveis no GeoGebra que executam tais transformações que podem ser consultadas para verificar e validar os desenhos feitos. Por isso, em nossa proposta, o estudante deveria analisar o significado da transformação para compreendê-la e adaptar a programação, ferramenta diferente daquela em que a reflexão sobre o significado da transformação ocorre na análise da figura dada pelo próprio *software*.

Estas transformações estão presentes no currículo da Educação Básica para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio (Brasil, 2017). Deste modo, a partir dos conteúdos com os quais os futuros professores poderão ter contato, discutimos que tais transformações podem ser compreendidas como transformações lineares, escrevendo a matriz que as representasse e abordando os Autovalores e Autovetores de cada transformação.

Na Atividade 3, “Os quadrados do Leonardo”, iniciamos com o objetivo de desenhar com o GeoGebra LOGO os 6 primeiros quadrados que compõem o desenho da proporção áurea para, a partir daí, buscar responder a pergunta principal: “para o n -ésimo quadrado, qual o tamanho de seu lado?”, com o objetivo equivalente de obter uma função, sendo que, para cada n , obtém-se o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci (o Leonardo referenciado no título da atividade). Conforme avançamos nas discussões, vimos como e por quê os Autovalores e Autovetores se mostram e qual o significado deles a partir dos cálculos, realizados em conjunto com todos os

participantes, e não separadamente. É possível debater como apresentar a sequência de Fibonacci na Educação Básica na qual os conteúdos de Álgebra Linear podem não vir à tona, mas de modo que os participantes (futuros professores) entendam o porquê dos resultados finais da questão principal. Para a resolução da Atividade 3, foram necessários os dois últimos dias previstos para a totalidade dos encontros.

Essas atividades eram enviadas antecipadamente ao e-mail de todos os participantes, que consultavam e avançavam conforme o próprio ritmo. Ao final de cada atividade, apresentávamos os “Materiais de Apoio”, os quais compõem as principais fontes de inspiração ou de referência para cada prática elaborada. As três atividades desenvolvidas estão presentes no final deste trabalho, com comentários, sugestões de intervenções, direcionamentos de possíveis discussões e conteúdos que podem ser trabalhados a partir das questões abordadas. Esses comentários visam a auxiliar outras pessoas caso queiram levar as atividades para suas aulas.

5.2 Análise dos dados

Seguindo com a perspectiva fenomenológica neste trabalho, discorreremos sobre os principais momentos do processo de análise dos dados. Conforme evidenciado, observamos os discursos dos sujeitos, com vistas a verificar as convergências e divergências que compõem a estrutura do fenômeno investigado.

Primeiramente, vale destacar que se faz necessário, mas não suficiente, a imersão do pesquisador na vivência com os sujeitos das experiências que fazem parte do fenômeno investigado. Necessário, pois o pesquisador compartilha da vivência com os sujeitos, aproxima-se do mundo-vida de cada um, os quais compartilham experiências e interpretações enquanto passam pelas experimentações. Entretanto, não é suficiente, haja vista que o rigor da análise solicita rever os discursos, buscando compreendê-los após o vivido e, na imersão, pode-se perder a totalidade da experiência.

Assim, a participação do pesquisador pode ir além do se fazer presente, interagindo com os sujeitos durante a vivência do fenômeno. De acordo com Santos e Venturin (2010, p. 5), nestes casos, “é importante também que o pesquisador detalhe nas descrições suas próprias ações, já que elas estão presentes na vivência do fenômeno que busca compreender”.

Tanto na vivência quanto revisitando a experiência, destacam-se os discursos dos sujeitos, os quais solicitam uma interpretação, uma vez que:

as palavras não dizem tudo e não são objetivamente dadas, ou seja, não há uma relação biunívoca entre palavra e o seu correlato (experiência vivida). Portanto, o comunicado solicita uma hermenêutica, isto é, clama por interpretação dos sentidos e dos significados que pode expressar. (Bicudo, 1994, p. 19)

Deste modo, a partir dos discursos dos sujeitos, destacamos dois momentos principais para a compreensão do fenômeno: a análise ideográfica e a análise nomotética.

A análise ideográfica se refere ao emprego de ideogramas, símbolos que representam as ideias. Este momento é iniciado pela leitura dos discursos, seguido de uma sua releitura, na qual se destacam as falas que compreendemos estabelecer relações com a interrogação e as interpretamos, buscando constituir a estrutura do fenômeno. As descrições dos sujeitos podem ser vistas como ingênuas, o que é entendido na fenomenologia como desprovidas de articulações e termos da temática, como uma forma mais espontânea de se expressar.

Assim, desvelando o significado das descrições, constituímos as unidades de significados, isto é, a interpretação dos discursos dos sujeitos, mantendo-nos fiéis às suas ideias sob a interrogação da pesquisa, compondo as asserções articuladas. Com elas, efetuamos o movimento de redução, que busca, por uma síntese das ideias expressadas, compor as ideias nucleares, ou seja, aquelas que compõem o núcleo ou sentido do que foi expresso. Todos esses processos constituem a análise ideográfica, focando, então, na individualidade das descrições.

A individualidade da análise ideográfica não trata de analisar frases e ações isoladas de cada sujeito, pois entendemos que:

esses gestos ou falas muitas vezes aparecem inseridos em diálogos que surgem coletivamente e que adquirem sentido na complementação com as outras falas. A fragmentação dos diálogos em frases solitárias pode extinguir o sentido revelado nas conexões entre as diversas vozes e expressões, pois as manifestações dos sujeitos também ocorrem de forma intercalada, repentina e autêntica, formando um núcleo de sentido. Se esse núcleo for desmembrado, pode perder características essenciais, comprometendo seu significado original. (Santos; Venturin, 2010, p. 6)

Deste modo, o caráter individual desse primeiro momento da análise faz referência à análise de cada descrição e discurso, um por vez, buscando as ideias nucleares do que foi expresso pelos sujeitos. Partindo da individualidade e com o objetivo de estabelecermos mais convergências, iniciamos a análise nomotética.

“O termo nomotético deriva-se de *nomos*, que significa uso de leis, portanto, normatividade ou generalidade, assumindo um caráter de princípio ou de lei” (Machado, 1994, p. 42). Neste momento de análise, o movimento das reduções indica uma passagem do

individual, da análise ideográfica, para a convergência das ideias expressas nas descrições de todos os sujeitos participantes. Busca-se, com ela, compreender a estrutura do fenômeno, não com características universais, mas com as categorias que compõem o fenômeno investigado, indicando estruturas gerais que podem estar presentes em vivências semelhantes.

A partir das ideias nucleares, as convergências estabelecidas, por meio das reduções, compõem as categorias abertas, que revelam a compreensão do pesquisador acerca da estrutura do fenômeno investigado.

Vale ressaltar que “muitas asserções podem vir a convergir para mais de uma ideia” (Santos; Venturin, 2010, p. 7). Podemos entender, então, que o fenômeno não é estruturado hierarquicamente por meio de categorias, de modo que é necessário observar sua totalidade, cujas categorias são chamadas de abertas para representar que não há um início e um fim de cada uma delas, posto que a interconexão entre elas é que compõe o fenômeno investigado.

Feitas as considerações sobre o processo de produção dos dados e sobre a abordagem fenomenológica, expomos agora os movimentos da análise a partir das descrições dos participantes acerca das atividades propostas. Apresentaremos cada análise separadamente, em forma de quadros, mostrando e organizando nossas compreensões acerca das descrições.

5.2.1 *Análise Ideográfica*

Conforme apresentado, a análise ideográfica trata da análise individual das falas dos sujeitos enquanto discutiam as três atividades propostas, buscando desvelar o significado por trás das expressões espontâneas que surgiram. Em alguns momentos, evidenciamos os diálogos existentes na experiência vivenciada, seja entre os próprios estudantes seja com o pesquisador. Os diálogos dados a ver na análise são os que compreendemos como o conjunto das descrições que tratavam de um tema específico, visto que entender a análise individual das falas não se trata de olhar a fala de um sujeito, mas compreender o significado exclusivo da descrição ou do conjunto de descrições que compõem e dão sentido ao que está sendo discutido.

Para organizar os dados, utilizamos um quadro, no qual, na primeira linha, trazemos a identificação, as unidades de sentido (descrições dos sujeitos), as asserções articuladas (interpretação do que foi dito) e, posteriormente, as ideias nucleares, numeradas a fim de facilitar a orientação no próximo momento de análise. Na segunda linha, identificamos a atividade em questão e, em sequência, apresentamos o movimento de análise. A estrutura das colunas se mantém no decorrer do quadro, indicando cada atividade e seus respectivos diálogos.

A identificação é feita da seguinte forma: o código AXDY é referente à Atividade X, Dia

Y, no início de cada descrição, seja de um sujeito ou de um diálogo; em seguida, o código EZ se refere ao Estudante Z, com a descrição apresentada ao lado. Para os diálogos entre os sujeitos, serão identificados os participantes com suas respectivas falas. Além das descrições dos estudantes, as falas do pesquisador nos momentos de diálogos são identificadas com a inicial “P”.

Destacamos que, além da vivência com os sujeitos, durante o desenvolvimento e resolução das atividades, o pesquisador desempenhou um papel de mediador, disposto a tirar dúvidas, direcionar discussões e dar explicações que justificassem as observações dos estudantes, de modo que houve uma intervenção nos momentos em que julgamos adequado.

As transcrições das descrições dos sujeitos foram realizadas tentando nos aproximar ao máximo da forma com que foram ditas e vivenciadas, havendo, portanto, pausas, erros de dicção, desvios ortográficos e interrupções, presentes também nas transcrições. Apresentamos excertos dos discursos, lidando, assim, com falas específicas que podem constituir o fenômeno investigado, a nosso ver. Os trechos sublinhados evidenciam as perguntas presentes no material, cuja leitura descortina trechos que destacamos e abordamos na análise. Em certos momentos, os estudantes fazem referência a professores do Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro, os quais foram ou são docentes de disciplinas que eles cursaram. A fim de manter o anonimato, alteramos os nomes para Cleusa, Iolanda, Isabela, Luiz e Mariano.

As descrições são apresentadas seguindo uma ordem cronológica, pois, desse modo, damos a ver separadamente os discursos dos dois grupos, mas gravados no mesmo dia. Na conclusão das três atividades, os estudantes estavam todos reunidos, o que fez com que as discussões finais se dessem em conjunto. Nas Atividades 1 e 3, elas foram finalizadas de um modo geral enquanto que, na Atividade 2, discutimos ainda a última transformação geométrica proposta. Ao final das discussões da última atividade, foram feitas aos sujeitos três perguntas finais, as quais os estudantes responderam também enquanto estavam em conjunto. Tais perguntas e as consequentes respostas também compõem os excertos destacados para a análise dos dados. O quadro a seguir traz o primeiro movimento de análise: a análise ideográfica.

Quadro 3 - Análise Ideográfica

Identificação e Unidade de Sentido	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
Atividade 1 - Tartarugas e Crocodilos		

A1D1 E5: Vocês concorda que tipo, vai ter mais crocodilo do que tartarugas. Então isso é um problema porque se tem mais crocodilo do que tartaruga... E3: Vai implicar que quando a gente aperta o botão um ele vai ser... o L vai ser menor do que, menor igual a zero... Aí ele vai virar vermelho.	Expõe aos colegas buscando aprovação da conjectura inicial ao analisar os números iniciais das populações das diferentes espécies. Ideia essa complementada pelo outro estudante, indicando as consequências dos pontos com a característica indicada pelo colega, partindo de um ponto específico como exemplo.	1. Discussão em grupo para validação e complementação de ideias; 2. Reconhecem padrões; 3. Início de conjecturas a partir da exploração dos botões; 4. Exploração de um caso específico e suas consequências; 5. Compreendem o código programado exemplificando com uma situação investigada.
A1D1 E4: Ah então vocês estavam falando do caso 3 ali, né? Uma tartaruga, nenhum crocodilo. Só vai aumentar as tartarugas. E3: Sim. E5: Tipo assim ó, lembra da aula do Luiz que era o que, vamos supor se você tem pouco predador para muita presa. E3: Vai aumentar muito.	A estudante que não havia dialogado em uma discussão anterior, confirma com os colegas o caso referenciado e as consequências. Em seguida o colega relembra os exemplos vistos na disciplina de Equações de Diferença, com as ideias complementadas por outra colega.	6. Discussão em grupo retomando o que foi discutido; 7. Relação entre as ideias propostas na atividade e as ideias discutidas na disciplina de Equações de Diferença.
A1D1 E3: As coordenadas elas vão se alterar porque... vai ter o valor de M, por exemplo, que a gente tem (5,10) e depois vai ter, o ponto, que vai ser a Matriz do sistema, vezes essas coordenadas que a gente tinha. Logo, a gente, na primeira vez que a gente apertar o botão vai ter uma configuração, na segunda vez vai ter outra configuração, porque o M vai se alterar de acordo com a progressão, faz sentido?	Compreende que a mudança de coordenadas é referente a interação do sistema, no código, a partir da multiplicação da Matriz com as coordenadas atuais, cujo resultado representa um novo estado do sistema, e ao final, consulta seus colegas.	8. Compreendem o código relacionando com as compreensões do sistema proposto; 9. Alteração do sistema a partir do cálculo realizado pelo GeoGebra através do botão; 10. Consulta aos demais sobre o que foi dito.
A1D1 E4: O ponto M aconteceu exatamente o que a gente falou.	Aponta que previram corretamente o que aconteceria com o ponto M após mudarem suas coordenadas para investigação de novas situações.	11. Compreendem o código ao estabelecer relações entre a situação problema. 12. Exploração de novos cenários de investigação.

A1D1 E3: Na verdade eu tô em dúvida quanto ao amarelo. E4: Não amiga, olha aqui os valores. E3: Eu... então eu tava com dúvida, talvez poderia mudar o do amarelo porque... E4: Então aperta mais. E5: Mas acho que não.	Enquanto uma estudante demonstra dúvida quanto ao comportamento de um ponto específico, sua colega sugere para que observe a coordenada do ponto na Janela de Álgebra, ao invés de focarem apenas na Janela de Visualização. Em seguida, é sugerido alterar as coordenadas ponto amarelo, mas buscando esclarecer a dúvida inicial, exploram novamente o botão, visando esclarecer qual o comportamento do ponto em questão.	13. Discussão em grupo com o objetivo de esclarecer dúvidas; 14. Observam os dados em diferentes janelas do GeoGebra: Janela de Álgebra e de Visualização; 15. Exploração de diferentes casos; 16. Exploração do botão e suas consequências nos pontos.
A1D1 E3: Aconteceu uma coisa muito engraçada, tipo, primeiro, se você for ver ele foi crescendo, por exemplo o amarelo, mas ele veio, ele veio tipo numa diagonalzinha assim, tipo crescer...	Começam a identificar um padrão na mudança de coordenadas de um ponto específico.	17. Reconhecem um padrão enquanto exploram um caso específico.
A1D1 E4: Aperta de novo para eu ver que eu não percebi isso.	Como não percebeu uma colocação feita anteriormente pela colega, solicita que apertem o botão novamente para observar com o que foi dito em mente.	18. Esclarece o que foi dito, explorando o botão e suas consequências.
A1D1 E3: Mas é engraçado que o rosa ele vai sempre se manter na mesma linha, por causa que o número de crocodilo jamais vai aumentar e o verde ele aumenta tipo muito pouquinho, ele vira tipo uma diagonal mesmo.	Identifica que na situação onde não há crocodilos, apenas tartarugas, a trajetória do crescimento está em uma reta, e aponta as causas desse comportamento, em seguida aponta um outro caso que difere do anterior, mas que leva ao crescimento de ambas as populações.	19. Reconhecem padrão, descrito por uma reta linear; 20. Relações com os dados do enunciado com o ponto explorado; 21. Exemplificação referenciando outro ponto.
A1D1 E4: As tartarugas crescem desordenadamente. E5: Vai crescendo bastante. E3: Mas olha que legal, tipo o verde ele tava no um, aí ele foi para o dois, aí do dois ele veio para o quatro, então, tipo, ele tá meio que fazendo isso aqui.	Identificam que há pontos onde, em um primeiro momento, não percebem um padrão no crescimento das populações, enquanto que outros pontos, como o verde, percebem um padrão pelo menos para uma das populações.	22. Exploração de diferentes casos; 23. Identificam o comportamento dos pontos; 24. Reconhecem padrões.
A1D1 E3: Continua apertando o botão... quero ver uma coisa.	Para explorar mais uma situação, solicita que pressionem o botão mais vezes, para verificar possíveis suposições.	25. Exploram o botão na tentativa de elaborar conjecturas.
A1D1 E4: É uma parábola, se as populações forem iguais. E3: E o rosa é uma constante.	Criam a hipótese de o crescimento ser descrito por uma parábola, no caso do número de populações iguais, e ressaltam o crescimento constante quando não há crocodilos.	26. Levantamento de hipóteses; 27. Reconhecem padrões; 28. Complementações de ideias dos pares.

A1D1 P: O que vocês falaram que forma? E4: Uma parábola. Tava crescendo. E3: Me lembrou a função exponencial.	Relacionam o crescimento com funções conhecidas por eles, como parábola e exponencial.	29. Relações entre o explorado com conceitos conhecidos (parábola e exponencial).
A1D1 E4: Calma, calma, presta atenção no V ó, 4 e 4, 8 e 8... E5: É por que ele vai ficar igual. E3: Não mas, clica mais um, ele vai mudar quer ver? (clícam no botão 1) E3: Não... E4: Aperta de novo. Sempre vai dobrar. E3: É, sempre vai se manter igual.	Retomando o caso em que as populações são iguais, identificam um padrão no crescimento de ambas as populações, entretanto, um estudante desconfia desse padrão e sugere dar sequência na exploração do botão relacionado com comportamento do sistema, o qual após clicarem, percebe que de fato, o padrão se mantém, o qual é justificado através de explorarem o botão novamente e por fim, estão de acordo com as hipóteses feitas.	30. Identificam padrão como crescimento linear; 31. Criação de hipóteses; 32. Exploração do botão para validar ou justificar as hipóteses levantadas.
A1D1 E4: É antes da gente mexer a gente tinha percebido que o rosa ele era constante. E3: Porque não tinha número (de crocodilos). P: O que que era constante? E4: Ele, é o crescimento dele. E3: Das tartarugas. E5: Ele sempre ficava na mesma reta, não saía. E4: É, que mais? E3: O verde quando a gente igualou o número de tartarugas e o de crocodilos ele forma uma diagonal, ele faz mais retinho, tipo, igual, igual. E4: Sim, ele vai crescer igual.	Relatam que antes de alterarem as condições iniciais, visando explorar novos casos, haviam identificado o crescimento constante de um dos pontos e sua causa, identificando que a sequência de pontos estava em uma reta. Em seguida, com os valores alterados, identificam que partindo de populações iguais, a sequência de pontos formam uma reta, de modo que a igualdade entre as populações se mantém.	33. Identificam padrão referente ao crescimento constante; 34. Identificam um crescimento linear; 35. Exploram novos casos, alterando as condições iniciais.
A1D1 E4: Populações iguais, ela sempre vão dobrar juntas tipo, (2,2), vai ser (4,4), (8,8), vai ser sempre assim.	Identificam um padrão e a proporção, de modo que dobre os valores em cada interação com o botão.	36. Identifica um padrão e uma proporção.
A1D1 P: A gente multiplica uma matriz com um par ordenado, e o que que a gente obtém? E3: O dobro. E4: É que tinha alguma coisa pra gente falar que a gente não tá falando...	Questionados sobre o comportamento identificado, repetem a proporção identificada para um caso, enquanto que percebem que se tratava de algum conteúdo específico, mesmo que não se lembrassem qual seria.	37. Percebem que as discussões se tratam de algum conceito de Matemática, mas não conseguem especificar qual exatamente.
A1D1 E4: Eu acho que é a matriz vezes a inversa dela. E3: Mentira, eu acho que o dois é o determinante da matriz A.	Buscando identificar o conteúdo correto, iniciam com palpites referente a matriz inversa e determinante da matriz inicial.	38. Palpites na tentativa de identificar o conceito; 39. Temas e tópicos que remetem à Matriz e Álgebra Linear.

A1D1 P: Tá, então, aquilo ali (escrito na lousa a afirmação que fizemos “multiplicar a matriz pelo par/vetor obtendo o dobro dele” $Av = 2v$), não lembra nada? E4: Desculpa, não. E3: Não, não, não, não, não.	Após escrever a afirmação anterior a partir de uma expressão algébrica, os estudantes afirmam não identificar ou lembrar de nenhum conteúdo estudado.	40. Não lembram do conteúdo de Autovalores e Autovetores a partir da expressão escrita.
A1D1 P: A gente viu alguns comandos hoje específicos de “Angelim” na Janela de Cálculo Simbólico que falava de matrizes. E4: Ah tem a ver com vetor, é... autovetor? E3: Autovalor? E4: Parece né...? Não. P: Parece ou não parece? E4: Não faço ideia se parece, não fiz essa disciplina direito.	Relembrando os comandos do GeoGebra apresentados no início das atividades, levantam a hipótese de se tratar de Autovetores e Autovalores, mas não concluem tal questão, de modo que um dos estudantes relata não haver se dedicado aos estudos da disciplina de Álgebra Linear da forma que julgue adequada.	41. Experiência não adequada por parte do estudante com a disciplina de Álgebra Linear; 42. Palpites na tentativa de identificar o conteúdo.
A1D1 E5: Tem alguma relação com produto escalar, com produto vetorial ou não?	Dando sequência nos palpites, levanta a hipótese de se tratar de produto escalar ou produto vetorial.	43. Palpites sobre diferentes temas tratados em Álgebra Linear.
A1D1 E3: Ele pode até gerar esse autovalor pra ele criar esse padrão.	Identifica que o padrão gerado pela proporção se trata do Autovalor.	44. Autovalor como escalar, proporção.
A1D1 E3: Digita aí... E5: O que a gente pode pesquisar? E3: O que é um autovalor.	Pesquisando na internet, no Google, buscam compreender o que é um autovalor.	45. Utilizam a internet como meio de pesquisa sobre a definição de Autovalor.
A1D1 E3: A matriz vezes o autovetor gera uma constante. (Pausa) Gera uma coisa, gera tipo, um autovalor, e esse autovalor vai ser a nossa constante.	Identifica que o autovalor é obtido a partir da multiplicação da matriz pelo autovetor, cujo valor é constante, referente aquele autovetor.	46. Interpretação da definição de Autovalor e Autovetor; sendo o Autovalor como constante.
A1D1 E5: É que eu não entendi muito esse $(-1, -1)$ só. P: Qual que é a diferença do vetor $(-1, -1)$ e do vetor $(1,1)$? E3: O sentido da setinha.	Não compreende o significado do autovetor $(-1, -1)$, e questionados sobre a diferença entre os dois vetores ditos, apontam como resposta o sentido do vetor.	47. Dificuldade em interpretar o significado do Autovalor; 48. Explicam o significado sobre direção de vetores.
A1D1 E5: Então isso aqui, ele implica que não necessariamente precisa ser o $(-1, -1)$, mas se eu pegar tipo, $(1,1)$, dois pontos iguais eu consigo trabalhar agora.	Após as discussões em conjunto, compreende o autovalor como representante de um conjunto de vetores equivalentes, cujo outro vetor seja mais próximo da situação estudada.	49. Compreende o Autovetor como um representante de um conjunto de vetores; 50. Relaciona o autovetor com a situação proposta.

A1D2 E4: E também foi muito legal porque a gente também pode reparar que alguns pontos eles tinham, eles cresciam exponencialmente, ou eles eram... o que que você falou mesmo aquele dia? E3: Constantes. E4: Eles eram constantes. Eu vou trocar aqui pra vocês verem que, quando a população é o mesmo valor, tipo de crocodilos e tartarugas, é muito legal o que acontece. (Pausa) Olha os números aqui, ele cresce tipo igualzinho, a quantidade de tartaruga e de crocodilos.	Relatam que o crescimento das populações ou segue uma função exponencial ou uma função que descreve uma reta, nesse caso, com um crescimento constante. Em seguida, alteram os valores dos pontos para exemplificar o que foi expresso.	51. Compreensão do crescimento descrito por funções conhecidas pelos estudantes; 52. Interação com os pares para complementar as ideias; 53. Exploração da situação alterando os valores.
A1D2 E4: Não, não morreu, ele tá bem lá pra cima.	Após um estudante achar que um ponto específico indicava a extinção das tartarugas, outra participante aponta que isso não aconteceu, apenas só não está visível na Janela de Visualização, alterando a visão até encontrar o ponto.	54. Levantamento e verificação de hipóteses.
A1D2 E1: Essa atividade é muito interessante pra se introduzir tanto em Equação de Diferença quanto Equação Diferencial, porque aqui intuitivamente quando você fala em dividir em zonas, você tá pensando na verdade em zonas de alteração, de um sistema de EDO, então cê vai ter ali um ponto, a partir de uma região, você vai ter pontos que são assintoticamente instáveis, então eles vão divergir de um equilíbrio, ou seja, quando você fala isso no sentido biológico, alguma espécie vai ser extinta, e você vai ter aquela zona que tá tudo bem, as populações elas vão oscilar mas nunca vão se extinguir, que seria uma zona de equilíbrio né. Eu achei bem legal.	Após a apresentação dos estudantes que discutiram a atividade para os que estiveram ausentes, um dos estudantes deste último grupo aponta a possibilidade de apresentar essa atividade nas disciplinas de Equações de Diferença e Equações Diferenciais, de modo a introduzir o estudo de diferentes sistemas, identificando as regiões e pontos com termos das disciplinas destacadas.	55. Discussão em grupo para os ausentes; 56. Criação de repertório do Licenciando, se colocando no lugar de professor em determinada disciplina; 57. Estabelecimento de relações entre conteúdos de Equações de Diferença e Equações Diferenciais; 58. Domínio dos conteúdos das disciplinas destacadas.
Atividade 2 – Explorando Transformações Geométricas		
A2D1 E4: Vamos mudar o ponto C, pronto.	Alteram as coordenadas do ponto C, para auxiliar na escrita do código.	1. Alteram os dados iniciais visando uma melhor exploração da atividade.
A2D1 E4: Dividido por n, não era? Olha aí no celular, que tem mais coisa.	Se refere a solução de atividades anteriores, feita nos primeiros dias das atividades, como solução para o problema com que se deparam, e solicita ao colega para buscarem no celular os registros feitos neste período.	2. Experiência em atividades anteriores como solução para os problemas presentes; 3. Celular como meio de registro e consulta para dúvidas.

A2D1 E4: Pra gente falta o comando né? (Pausa) Aqui ó, ângulo, ponto, ponto, ponto. Será? E5: Ah uma boa.	Enquanto buscam o comando que mais corresponde com o desejado, buscam na Janela de Entrada os diferentes comandos existentes no <i>software</i> e quais os pré-requisito para a escrita e definição do desejado, para posteriormente, escreverem no código.	4. Instruções e recursos do próprio <i>software</i> ; 5. Consulta à dupla sobre o que foi dito.
A2D1 E4: É fácil descobrir isso é só fazer assim.	Para identificar o ângulo, habilita a ferramenta de mesmo nome no <i>software</i> para compreender como referenciar na programação.	6. Recursos disponíveis no GeoGebra auxiliando na organização do código.
A2D1 E4: Vou pesquisar no Google.	Busca sanar as dúvidas pesquisando no Google.	7. Google como meio de pesquisa e fonte de informações.
A2D1 E4: Deixa eu achar aqui.	Com o arquivo da atividade aberto no celular, busca as demais orientações para darem sequência na atividade.	8. Celular como apoio na consulta de orientações das atividades.
A2D1 <u>As transformações geométricas são transformações lineares?</u> E4: Eu acho que elas são porque os nomes me lembra da disciplina.	Compreende as transformações geométricas como transformações lineares com a justificativa de que os nomes das transformações a lembram da disciplina.	9. Experiência na disciplina de Álgebra Linear, de modo que esteja lidando com termos familiares.
A2D1 <u>Essa discussão pode ser realizada na Educação Básica?</u> E4: Pode, mas eu não mandaria as crianças fazerem a programação, tipo eu faria a programação e ia questionando elas por que tem que ter quatro pontos... e ia questionando ela o porquê que aqui deu 23, o ângulo de D,A,C, porque que ele é importante... eu, em cima da programação que eu fiz eu ia fazer questionamentos para as crianças, não ia mandar elas se programarem.	Ao serem questionados sobre a realização da proposta na Educação Básica, a estudante expõe sua opinião de modo afirmativo, entretanto ressalta que faria modificações na experiência que tiveram, de modo que apresentaria o código final e este seria o centro das discussões, buscando a compreensão e justificativas dos comandos.	10. Construção de repertório para a carreira docente.
A2D1 <u>Essa discussão pode ser realizada na Educação Básica?</u> E5: Sim, eu acho melhor porque, querendo ou não é uma coisa meio com... não é complexa, foi complexo porque teve que pensar... E4: E porque a gente não sabia como programar. E5: Sim, mas eu acho que realmente daria para trazer contando que você mostrasse antes para elas, falar do conceitos, os comandos, e a partir daí elas podiam pensar, entendeu?	Outro estudante também responde de modo afirmativo, mas concorda com as considerações feitas pela colega, justificando que a programação pode ser trabalhosa, e ambos ressaltam a não familiaridade com esse modo, de modo que conclui concordando com a ideia feita pela colega anteriormente, retomando a necessidade de uma familiaridade com os comandos e conceitos.	11. Concorda com as considerações feita pela colega; 12. Apontam que programar pode ser trabalhoso e exige uma familiaridade; 13. Construção de repertório para a carreira docente.
A2D1 E4: Posso pesquisar no seu Google rapidinho? E5: Pode E4: Pesquisa assim, “comando... no GeoGebra... para inverter...” não,	Consultam o Google buscando por um comando do GeoGebra que resulte na reflexão do triângulo, entendendo o triângulo feito como um desenho e posteriormente uma construção geométrica.	14. Google como meio de consultar e sanar dúvidas, buscando por um comando que realize o desejado; 15. Compreensão de diferentes objetos do

“para refletir um desenho”, não, “uma construção”.		GeoGebra: Desenho e polígono.
A2D1 E4: Era só colocar no outro plano, então a gente precisou alterar os pontos iniciais, o B e C. A gente só precisou alterar os pontos e ela foi, e programar isso.	A estudante aponta que o novo triângulo deveria ser desenhado em outro quadrante, de modo que criaram novos pontos a partir da reflexão dos pontos do primeiro triângulo e alteraram o código com os novos pontos criados.	16. Compreendem o significado da transformação geométrica “Reflexão”; 17. Reconhecem padrões; 18. Utilizam o Código inicial como base para demais explorações.
A2D1 E4: Eu lembro que na aula da Cleusa, na aula invertida, eu... eu lembro que eu tive que dar essa aula de vetor, então todo vetor tem um sentido e uma direção, e o sentido e direção é diferente.	Ao fazer referência a uma experiência tida na disciplina de Geometria Analítica, a estudante recorda duas características de vetores: sentido e direção.	19. Relaciona com conceitos da disciplina de Geometria Analítica; 20. Recordação de duas características de vetores: sentido e direção.
A2D1 E1: Como que a gente relaciona... como que a gente descobre o ângulo entre esses dois pontos? E3: Tem um negocinho de ângulo no GeoGebra... E1: Tem um negocinho de ângulo. Mas em álgebra linear a gente tem uma relação. Como que é a relação? Eu lembro que tem uma lei de cosenos que da pra relacionar.	Buscando a generalização do código, os estudantes buscam uma maneira de referenciar o ângulo desejado na escrita dos comandos. Enquanto uma estudante sugere o recurso do GeoGebra para definir o ângulo, outro estudante busca solucionar relacionando com tópicos da Álgebra Linear.	21. Recurso do GeoGebra como auxiliar na escrita do código; 22. Relações com conceitos de Álgebra Linear: produto escalar.
A2D1 E1: Espera aí, vamos pesquisar no Google... “ângulo entre dois vetores”.	Os estudantes buscam no Google explicações sobre o cálculo entre dois vetores.	23. Google como fonte de informação.
A2D1 P: Mas o GeoGebra não sabe calcular o ângulo entre esses caras? E1: Então, ele sabe, mas a gente consegue colocar um comando que vai... que vai, se eu jogar o B para qualquer lado ele vai fazer? E3: Ah dá, se a gente calcular ali ele vai dar pra colocar ali direto. E1: Porque aí tipo assim, se a gente coloca aqui uma relação, eu sei que tem relação, eu lembro de cosseno e seno, e aí qualquer coisa a gente pegar esse B e arrastar, a gente não precisa mudar no código porque ele já vai ter um ângulo certo.	Ao serem questionados sobre como referenciar o ângulo desejado e buscando a generalização do código, a estudante sugere novamente o recurso do GeoGebra, de modo que contempla ao desejado. Em seguida, um dos estudantes retoma a ideia de relacionar com conceitos de Álgebra Linear, que abordem as relações trigonométricas, mesmo que não recorde qual conceito exatamente.	24. Busca pelo código generalizado; 25. Recursos do GeoGebra auxiliando na escrita do código; 26. Retoma a ideias sobre relações trigonométricas discutidas em Álgebra Linear.
A2D1 E2: Estamos usando o tal do Google.	A estudante registra na gravação que optaram por buscar informações no Google.	27. Google como fonte de busca por informações.
A2D1 E1: Eu ia abrir o Paint pra gente ter uma ideias.	O estudante expõe a ideia que teve de abrir o “Paint”, um software para criação de desenhos, para discutirem sobre o problema encontrado.	28. Paint como recurso do computador para registro e explanação das ideias.
A2D1 E1: E qual que é o comando memo?	Buscando a escrita do comando equivalente à ferramenta de ângulo, buscam na Janela de	29. GeoGebra como fonte de orientação para os comandos do próprio <i>software</i> .

E2: Não sei, vamos descobrir, acho mais fácil escrever, escreve aí “ângulo” e vê o que que acontece.	Entrada pelas instruções de escrita do comando desejado.	
A2D1 <u>As transformações geométricas são consideradas transformações lineares?</u> E2: Fala pra vocês que eu não lembro o que é uma transformação linear... Põe no Google "transformação linear".	A partir da pergunta proposta na atividade, a estudante afirma não se recordar sobre transformações lineares, e sugere a procura deste conteúdo no site do Google.	30. Google como fonte de busca por explicações sobre Transformações Lineares.
A2D1 E3: Coloca em imagens, eu gosto de imagens.	Enquanto exploram o site do Google, uma das estudantes sugere procurar na aba de imagens do site, ao invés de se limitar com textos e links de outros sites.	31. Imagens do Google como fonte de respostas.
A2D1 E3: Eu acho que a gente tá procurando transformação linear da graduação e a gente deveria procurar do ensino médio. E1: É... eu não lembro o que que é uma transformação linear no ensino médio.	A estudante expõe sua ideia de que haja dois modos de compreender transformações lineares, a depender do nível de escolaridade, enquanto seu colega relata não recordar sobre este conteúdo no ensino médio.	32. Entendem que há abordagens diferentes para transformações lineares, relacionado ao nível de escolaridade.
A2D1 (Os estudantes pesquisam no Google por "transformação linear geometria", e se deparam com a afirmação do Khan Academy: “é um tipo especial de função que pega um vetor bidimensional e tem como resultado outro vetor bidimensional”.) E2: É, é isso. E1: Então é né. E3: Sim.	Ao pesquisarem no Google e consultar uma informação neste site, a partir do que foi lido, compreendem as transformações geométricas como transformações lineares.	33. Google como fonte de busca, sites da Internet como meios de consulta às informações; 34. Analisam o conceito de Transformações Lineares.
A2D1 E3: Por que ele tá partindo da origem? E1: Porque a Álgebra Linear funciona assim, quando você pensa em módulos, que é o que ele tá dando pra gente, ele sempre vai surgir da origem.	Ao escreverem um vetor o GeoGebra, uma das estudantes questiona o porquê o vetor tem início na origem, e seu colega responde como resultado geral da Álgebra Linear.	35. Propriedades de vetores; 36. Argumenta com base nos conceitos estudados em Álgebra Linear.
A2D1 E3: E se a gente criar... existe o comando de reflexão de pontos. E2: Tem lá, tá em ferramentas.	Os estudantes se recordam do recurso do GeoGebra referente à reflexão de pontos em relação a um ponto escolhido, conforme a atividade propõe.	37. Recursos do Geogebra auxiliando na exploração da transformação geométrica.
A2D2 E4: Vou rotear (internet).	A estudante com seu celular roteia internet para o notebook, visto que o cabo de internet disponível no laboratório não é compatível com o notebook.	38. Acesso à internet como possibilidade ao se trabalhar com Tecnologias.
A2D2 P: Uma possibilidade então, é você escrever essa matriz genérica de “a,b,c,d” e cair em dois sistemas lineares, pra descobrir quem são os elementos da matriz. Esse é um caminho... trabalhoso, mas é um caminho. E4: Sim, e talvez eu não saiba fazer todos os passos.	Discutindo com o pesquisador sobre o cálculo da matriz referente à transformação explorada, a estudante expõe que não garante que saiba realizar todos os passos expostos.	39. Interação com pesquisador sobre procedimentos para avançar nas discussões; 40. Dificuldade em realizar os procedimentos de cálculo referente à matriz de uma transformação linear.

A2D2 <u>Calcule os autovalores e autovetores dessa transformação linear.</u> E4: Ele calcula pra mim né? Se eu colocar ali? (Pausa) E eu posso tirar uma foto disso pra depois lembrar?	A estudante se recorda que o GeoGebra realiza os cálculos dos autovalores e autovetores, em seguida, com seu celular, registra o que foi discutido em conjunto com o pesquisador.	41. GeoGebra como calculadora de autovalores e autovetores; 42. Fotos do celular como meio de registro.
A2D2 E4: Eu vou ter que olhar aqui nas minhas fotos que eu tirei... do computador.	A estudante expõe que precisa consultar as fotos tiradas com seu celular dos comandos apresentados nos primeiros encontros.	43. Fotos do celular como meio de registro.
A2D2 E4: Calma, eu posso só tipo, relembrar as definições de autovalores e autovetores? Posso pesquisar ou você quer falar? É que eu não lembro as definições, eu sei o que cada um é mas, não sei....	A estudante expõe a necessidade de relembrar as definições de autovalores e autovetores, realizando a pesquisa em seu celular.	44. Necessidade de relembrar as definições de autovalores e autovetores; 45. Celular como um modo de pesquisa e acesso à internet.
A2D2 P: Quem que ele aponta como autovalor? E4: -1 e -1. P: Certo, então quantos autovalores eu tenho então? E4: Dois, dois números. Ah não, um. Ele poderia ter colocado só o -1.	Dialogando com o pesquisador, a estudante identifica que há apenas um autovalor, de modo que o GeoGebra indique repetidamente.	46. Pondera sobre o resultado apresentado pelo <i>software</i> e o conceito de autovalor.
A2D2 P: Poderia existir 3 autovalores aqui? E4: Talvez, eu pensei nisso agora tipo, uma matriz 3 por 3, acho que ele colocaria três. P: E por que não é uma matriz 3 por 3? E4: Por que não é uma matriz 3 por 3? Porque... a gente só quer esse e o espelhado desse. O que entendi é, por exemplo, a gente quer esse vetor e esse vetor aqui, e aí ele... ele só dá dois porque isso aqui só tem uma coordenada, e esse aqui só tem uma coordenada. P: E quantos números representam essa coordenada? E4: Dois, o do eixo x e do y. P: Isso, então por que que o teto dele é me oferecer dois autovalores? E4: Ahh... é porque tá no R^2.	Questionada sobre a existência de três autovalores, a estudante compreende que seria necessário que a ordem da matriz fosse três, de modo que a ordem da matriz tem relação com a dimensão do espaço vetorial explorado, o que indica também o máximo de autovalores possíveis.	47. Compreende a relação entre o número de autovalores com a dimensão do espaço vetorial. 48. Pensa sobre o significado de uma matriz de transformação linear.
A2D2 E4: É que eu acho que, isso aqui é um autovetor e isso aqui é um auto..., outro autovetor, são dois só que ele colocou junto ali, né?	Como resultado do cálculo dos autovetores o GeoGebra indica a matriz dos autovetores, de modo que a estudante identifica que cada coluna se trata de um autovetor.	49. Interpreta o resultado indicado pelo GeoGebra.
A2D2 P: Mas e esse vetor aqui, o vetor $\overrightarrow{AB}$, ele se transforma? Quais são as coordenadas de quando ele se transforma? E4: Calma, quais são as coordenadas de quando $\overrightarrow{AB}$ se transforma? É $(0,0)$... e $(-3,-6)$.	Questionada sobre como os vetores do triângulo se comportam na transformação discutida, a estudante identifica que as coordenadas foram multiplicadas por menos um, e em seguida expõe a compreensão de que essa constante também multiplicou a	50. Identifica o escalar menos um multiplicando diferentes vetores na transformação; 51. Conjectura relacionando o escalar com a matriz da base canônica.

P: E o que que aconteceu com os sinais ali? E4: Multiplicou por menos um P: Só que... quem é multiplicado por menos um também? Que a gente acabou de conversar aqui? E4: Ah o C1 também... não, não era isso, calma, deixa eu pensar de novo. P: Isso, o C1 também, tá correto. E4: Faz a pergunta de novo... ah... a matriz, porque a gente multiplicou aqui, quando fez a base canônica, a gente, a gente, inverteu também o sinal ali da matriz.	matriz com os vetores da base canônica.	
A2D2 P: Uma coisa que a gente concluiu que, é legal... o vetor $\overrightarrow{AB}$ quando ele sofre a transformação e vira $\overrightarrow{AB_1}$ é a mesma coisa que a gente multiplicar por menos um, concorda com isso? E4: Concordo. P: E aí ele fala que o vetor (1,0) quando ele sofre a transformação, é a mesma coisa que transformar, que multiplicar ele por menos um e isso faz dele é um autovetor com autovalor menos um. E aí que vem a minha pergunta: Mas o $\overrightarrow{AB}$ não faz a mesma coisa que ele? E4: Sim, vai acontecer a mesma coisa.	Discutindo com o pesquisador sobre o comportamento de diferentes vetores, ao ser questionada sobre o comportamento do vetor $\overrightarrow{AB}$ com o vetor (1,0) a estudante compreende que ambos terão o mesmo comportamento.	52. Comparação entre o comportamento após a transformação de diferentes vetores.
A2D2 P: Você acha que você deu a sorte de descobrir os dois em que isso acontece ou tem mais? E4: Não, tem mais. Para todos que eu quiser vou conseguir. Tipo, se eu tivesse outro ponto aqui, eu ia fazer a reflexão do mesmo jeito e ia valer para todos a mesma coisa.	Ao ser questionada sobre a comparação do comportamento entre os vetores do triângulo e os indicados pelo GeoGebra como autovetores, a estudante identifica que o comportamento de ser multiplicado por menos um é geral, para todos os vetores, pois decorre da transformação reflexão.	53. Compreende a transformação reflexão; 54. Comparação entre comportamento de vetores e a generalização do discutido.
A2D2 P: Se eu colocar esse ponto aqui, que que vai acontecer com ele? E4: Ele vai refletir para lá quando eu multiplicar por menos um.	Ao ser questionada sobre um novo vetor, a estudante retoma a ideia de que a reflexão corresponde a multiplicação por menos um.	55. Compreende a transformação reflexão.
A2D2 E4: Eu sou péssima nessa parte de autovalor, eu já tinha tirado nota e eu nem estudei para a prova da Iolanda.	A estudante expõe não ter domínio dos conteúdos de autovalores, e justifica que quando foi discutido este tópico, ela já havia sido aprovada, fazendo com que se dedicasse menos na disciplina.	56. Falta de domínio do conteúdo de autovalores; 57. Relato de menor dedicação na disciplina no período do conteúdo de autovalores e autovetores.
A2D2 P: Você falou em um momento aí, todo mundo vai ser multiplicado por menos um ou seja... E4: Ah todo mundo é autovetor!	Dialogando com o pesquisador, a estudante compreende que todos os vetores estão relacionados com o autovalor, logo, todos são autovetores.	58. Diálogo com pesquisador sobre conteúdos de Álgebra Linear; 59. Compreende a relação entre autovetor com autovalor.
A2D2	Ao ser questionada sobre os procedimentos de cálculo dos	60. Não recorda de como se calcula o autovalor.

P: Você lembra como que calcula o autovalor na mão? E4: Mais ou menos. P: A gente vai começar aqui, você ia cair num sistema com infinitas soluções, se tem infinitas, todo mundo que você colocar... E4: E eu falei aqui, qualquer ponto que você colocar... Ai que burra, corta ela da pesquisa gente.	autovalores manualmente, a estudante afirma lembrar parcialmente, em seguida, retoma que já havia dado indícios da resposta, mas não estabeleceu as relações suficientes, e com humor, sugere a remoção dela na pesquisa.	61. Compreende parcialmente o processo de cálculo dos autovalores.
A2D2 P: Como então, ter uma calculadora é bom, mas a gente tem que saber a teoria pra interpretar... E4: Porque a calculadora tá fazendo errado. P: Não, só fazendo, por exemplo, na atividade de tartarugas e crocodilos, lembra quando ela vinha para cá? E4: Lembro, morria as tartarugas. P: Então, pro GeoGebra aquilo ali não é nada, mas a gente consegue... E4: A gente interpretou.	Dialogando com o pesquisador, a estudante afirma que o cálculo apresentado estava errado, entretanto, essa ideia é contrariada com exemplo da atividade 1, de modo que ressaltam a importância da interpretação sobre o resultado do cálculo apresentado pelo GeoGebra.	62. Importância da interpretação sobre o resultado calculado pelo GeoGebra.
A2D2 E2: Agora esse de transformação, com os conhecimentos de álgebra linear, não gosto muito.	Ao chegarem na etapa da atividade em que é proposto investigar a transformação geométrica com os conceitos da Álgebra Linear, uma das estudantes ressalta não gostar deste momento.	63. Ressalvas com discussões que tratem de conceitos da Álgebra Linear.
A2D2 E1: Agora...Matriz? E3: Aí quebrou a gente.	Discutindo sobre a transformação linear, os estudantes apresentam dificuldades em definir a matriz da transformação investigada.	64. Dificuldades em definir a matriz de uma transformação linear.
A2D2 E1: Que que seria matriz, seria então uma, um negócio que eu vou pegar um vetor vou multiplicar pela matriz e vou obter outro? P: Isso.	Discutindo com o pesquisador sobre a matriz de uma transformação linear, o estudante expõe sua compreensão acerca do cálculo matricial da transformação.	65. Discussão com o pesquisador sobre conceitos de Álgebra Linear; 66. Compreende o cálculo matricial de uma transformação linear.
A2D2 P: Essa Matriz aí, vou chamar ela de A, daria então o T de $v(T(v))$, que foi a transformação. E1: Tipo se eu joga então, esse $\overrightarrow{AB}$ aqui multiplica a matriz ele vai me dar esse $\overrightarrow{AB'}$.	Discutindo com o pesquisador sobre o cálculo matricial de uma transformação linear, o estudante compreende que ao multiplicar o vetor $\overrightarrow{AB}$ com a matriz A da transformação, resultará no vetor $\overrightarrow{AB'}$.	67. Discussão com o pesquisador sobre conceitos de Álgebra Linear; 68. Compreende o cálculo matricial de uma transformação linear.
A2D2 P: Essa matriz A, que ordem que ela? Ordem de linhas e colunas. E1: Eu acho que ela é uma dois por um. E3: Dois por dois. E2: Um por dois.	Discutindo com o pesquisador acerca da ordem da matriz, os estudantes apresentam palpites distintos em relação ao que foi perguntado.	69. Diferentes palpites referente à ordem da matriz da transformação linear estudada.
A2D2 P: Eu encontrei, mas eu não testei... eu acho que existe uma calculadora de transformação linear no Google. E1: Tem, eu já usei muito.	Conversando sobre um modo de definir a matriz da transformação linear, a partir da indicação do pesquisador da existência de uma calculadora <i>online</i>, os estudantes	70. Google como fonte de busca por uma calculadora <i>online</i>;

P: “Calculadora de transformação linear”, aí coloca os vetores de entrada e saída. E3: Vamo de calculadora! E1: Tem muito, eu já usei no EAD. E3: Eu usei bastante em “algeim”.	afirmam já ter conhecimento sobre essa possibilidade, por já terem tido contato anteriormente e optam por calcular desta forma.	71. Experiência com Tecnologias em momentos anteriores, inclusive na disciplina de Álgebra Linear.
A2D2 E3: Escreve calculadora de matriz é um link bem... duvidoso...	A estudante sugere as palavras de busca no Google de modo a encontrar um site que já acessou, e destaca que este tem uma aparência duvidosa, no sentido do <i>layout</i> e disposição dos recursos.	72. Google como forma de busca por uma calculadora; 73. <i>Layout</i> de plataformas e sua confiabilidade. 74. Acessam um site de calculadora de matrizes.
A2D2 E1: Vamos ver se o do Symbolab faz algo por nós.	Buscam no site do Symbolab, uma plataforma com diversas calculadoras, pela calculadora de transformação linear, de modo que realize os cálculos por eles.	75. Acessam ao site do Symbolab; 76. Tecnologia fazendo algo por eles, algo que, de princípio, eles deveriam fazer.
A2D2 E3: “A matriz deve ser quadrada”, ali, tá escrito.	A partir de uma informação disponível no site da calculadora <i>online</i> de transformação linear, a estudante destaca que a matriz deve ser quadrada.	77. Informações do site da calculadora como instruções e soluções para questões discutidas.
A2D2 E1: Oh Gab, não sei usar essa calculadora aqui.	Mesmo que tenham encontrado uma calculadora <i>online</i> de transformação linear, o estudante destaca não saber como proceder, pedindo auxílio ao pesquisador.	78. Necessidade da familiaridade com a plataforma e tecnologia; 79. Ajuda do pesquisador quando existe dúvida em relação à tecnologia.
A2D2 P: Que tá acontecendo com quem é da coordenada x e da coordenada y? E1: A coordenada x tá sendo multiplicada por menos um. P: E a y? E2: Também. P: E aí então, se a gente pegar um vetor (x, y) que vetor que ele vai dar? E1: $(-x, -y)$, ou $-1(x, y)$.	Discutindo com o pesquisador sobre a transformação linear, os estudantes concluem que a transformação resulta na multiplicação de qualquer vetor pelo escalar -1.	80. Dialoga com o pesquisador sobre o comportamento da transformação linear; 81. Identificam uma das propriedades de vetores: multiplicação por escalar.
A2D2 E2: Não tá, não tá legal.	O estudante não consegue proceder com os cálculos no GeoGebra por escrever os comandos na Janela de Álgebra, e não na Janela de CAS.	82. Não familiaridade com as possibilidade do <i>software</i>.
A2D2 E1: O Gab a gente sabe calcular...ah é na de CAS...	No momento em que ia perguntar ao pesquisador, o estudante nota que está em outra Janela do GeoGebra, não a de cálculo simbólico.	83. Ajuda do pesquisador quando existe dúvida em relação à tecnologia. 84. Familiaridade com as possibilidades do <i>software</i>.
A2D2 E1: Eles não conversam, eles são inimigos.	Como um modo de explicar o motivo do não funcionamento dos comandos em diferentes janelas do GeoGebra, o estudante, em forma de humor, antropomorfiza a tecnologia.	85. Busca por uma justificativa do não funcionamento; 86. Antropomorfização da tecnologia.

A2D2 E1: Ambos os autovalores são menos um, e cada um tá relacionado com um vetorzinho ali. (Pausa) Legal que nesse caso o autovetor, os autovetores são a própria base que a gente usou, né?	Após os cálculos do GeoGebra, o estudante identifica os autovalores e seu autovetor correspondente, de modo que destaca que os autovetores são a base canônica do espaço vetorial estudado.	87. Interpretação dos cálculos do GeoGebra; 88. Correspondência de autovalor com seu respectivo autovetor; 89. Identificação da base canônica.
A2D2 E1: Tá, aqui como se fosse o autovalor... foi como se fosse a constante que a gente multiplicou e os autovetores já foi, foi a matriz inicial que a gente tinha.	O estudante identifica que o autovalor é o escalar discutido anteriormente, e interpreta os autovetores como a matriz da base canônica, também referenciado nas discussões acerca da transformação linear.	90. Compreendem o autovalor como escalar, já discutido na transformação; 91. Autovetores como base canônica.
A2D2 E1: Os autovalores que a gente chegou, é um só né, e os autovetores, deram na verdade a nossa própria base original, para o autovalor é ele, é menos um, que é justamente a constante que a gente multiplicou a nossa base original. Então ele deu para a gente como se fosse um, uma mistura do negócio.	O estudante identifica que há somente um autovalor, destaca que os autovetores formam a base canônica, e interpreta o autovalor como o escalar que multiplicava os vetores quando discutiram sobre a transformação, de modo que encerra compreendendo que as discussões anteriores se misturaram e foram retomadas.	92. Interpretação do cálculo identificando um autovalor; 93. Autovetores como base canônica; 94. Autovalor como o escalar decorrente da transformação linear.
A2D2 P: Os vetores que vocês usaram para construir o triângulo, que que acontece com eles quando vocês fazem a transformação linear? E3: Muda o sentido. P: Que é a mesma coisa que... E3: Muda a direção, a setinha vai pra outro lado, sei lá... P: A setinha vai para outro lado, o que aconteceu com os números ali? E1: Tá multiplicando por menos um, que é o coeficiente, que a gente multiplicou a matrizinha. P: Mas quem que é esse -1 também, além desse coeficiente? E2: O autovalor.	Dialogando com o pesquisador, os estudantes ressaltam que compreendem que a transformação implica na mudança de direção dos vetores, mesmo que entendam direção e sentido como sinônimos, e buscando a implicação numérica decorrente deste comportamento, compreendem que é equivalente a multiplicar o vetor pelo escalar -1, que compreendem como um coeficiente que multiplicou a matriz da base canônica e como autovalor.	95. O pesquisador instiga uma análise da situação apresentada; 96. Compreendem a transformação linear reflexão; 97. Características de vetores: direção e sentido; 98. Autovalor como escalar.
A2D2 P: Ela faz isso só com a base ou com todo mundo? E1: Todo mundo. P: Com todo mundo... com todo mundo, ela inverte o sinal, então, quem são meus autovetores? E1: Ué do quê? P: Dessa transformação. E1: Vai ser o $(0,1)$ e $(0,1)$ ainda.	Questionados sobre o comportamento da transformação linear, os estudantes compreendem que todos os vetores são multiplicados pelo autovalor -1, mas não concluem que todos são autovetores.	99. Visualizam a transformação linear de reflexão mas não relacionam os vetores como autovetores.
A2D2 P: Estamos de acordo com isso, então, acabamos de contrariar uma coisa do GeoGebra, ele me aponta que dois caras estão sendo multiplicados pelo -1 e eu acabei de falar que existe um terceiro. E aí vamos voltar, que que a transformação linear faz?	Questionados sobre o comportamento da transformação linear, os estudantes ressaltam outra interpretação equivalente as discutidas anteriormente, entretanto, uma estudante entende que apenas os três vetores discutidos sofreram a mudança,	100. Diferentes atribuições de significados para a transformação; 101. Discussão sobre o comportamento dos vetores.

E1: Muda todo mundo de quadrante. P: Quem que muda, quantos que mudaram de quadrante? E3: Mudou os três vetores. E1: Todo mundo. Todo mundo vai multiplicar por menos um.	enquanto outro compreende que essa é uma característica para todos, de forma que a mudança de quadrante e a multiplicação por -1 seja equivalente.	
A2D2 P: Se fossemos calcular manualmente, vocês vão chegar, vocês vão chegar nesse sistema aqui, ó... E1: Ah que é solucionada para qualquer x y.	Ao serem apresentados pelo pesquisador ao cálculo manual e ao sistema linear, o estudante identifica que o sistema tem infinitas soluções.	102.Necessidade de Intervenção do pesquisador; 103.Identifica a solução de um sistema linear.
A2D2 P: Ele calcula, mas não é... E1: Não é SÓ aquilo então.	Conversando sobre os resultados apresentados pelo GeoGebra, os estudantes compreendem se tratar de um resultado parcial, que preze por uma interpretação.	104.Necessidade de interpretar os resultados apresentados pelo GeoGebra.
A2D2 E1: Eu acho interessante então nessa... para essa atividade, Gab, tipo assim, é que você puxou a... a inquietação com a gente, né? Mas talvez se, se invertesse a ordem da gente calcular na mão para depois calcular aqui, talvez tivesse surgido naturalmente também isso, tipo, porque ele colocou essa em específico, né?	O estudante sugere uma modificação na proposta da atividade, de modo que solicite o cálculo manual para se depararem com o sistema linear com infinitas soluções e depois explorar com o GeoGebra, sugerindo que possivelmente concluiriam com antecedência sobre os autovetores, comparando o resultado deles com o apresentado pelo <i>software</i>.	105.Criação de repertório do estudante visando práticas futuras; 106.A interpretação do cálculo do GeoGebra comparado com o cálculo manual.
A2D2 P: Por curiosidade, quem lembra como é o procedimento de calcular o autovalor? E3: Não. E2: Não lembro. E1: Eu lembro.	Questionados sobre as etapas do cálculo dos autovalores, duas estudantes relatam não recordar, enquanto um estudante diz se lembrar.	107.Conhecimento parcial sobre os procedimentos do cálculo dos autovalores.
A2D2 E1: Menos x e y? Vamos usar a base canônica de novo? E2: Vamo né. E1: Então fica... E2: $-1, 0, 0, 1$.	Dando sequência na atividade, tratando sobre uma nova transformação geométrica e retomando as discussões para definição da matriz da transformação anterior, os estudantes analisam o comportamento da base canônica para definição da nova matriz.	108.Retomam discussões anteriores quando se deparam com questões semelhantes; 109.Definição da matriz da transformação.
A2D2 E1: É só esse o autovetor? E3: Não. E2: Não, é a mesma coisa, vai ser qualquer um.	Ao se depararem com um resultado semelhante aos cálculos da transformação anterior, uma estudante levanta a hipótese de a interpretação também ser a mesma, logo, todos seriam autovalores.	110.Criação de hipóteses comparando os resultados dos cálculos de duas transformações lineares.
A2D2 E1: Como é vetor em matriz, é coluna ou em linha que lê? E2: É linha. E3: Eu penso em coluna. E2: Dá um Google aí. (Escrevem: “como se lê vetor em matriz”.)	Ao ficar em dúvida na leitura da matriz dos autovetores, os estudantes não entram em um acordo na resposta, e isso os leva a pesquisar no Google alguma informação na aba de imagens que os auxilie na resposta da questão levantada.	111.Leitura e interpretação do resultado apresentado pelo GeoGebra; 112.Desacordo entre o grupo; 113.Google como fonte de informação, com preferência para aba de imagens.

E2: Vai em imagens, deve ter alguma que ajude nois.		
A2D2 (Encontram uma imagem representando um vetor como matriz coluna e matriz linha) E1: Ah pronto, ajudou pra c@&\$%*!	Com sarcasmo, o estudante ressalta que a imagem é dúbia.	114. Informação na internet dúbia;
A2D2 E1: Volta lá, vamos ver se dá diferença naquele caso ali.	O estudante sugere comparar a matriz dos autovetores com a matriz da transformação anterior, visando esclarecer como se realiza a leitura e interpretação dos vetores.	115. Processo salvo e passível de ser revisitado; 116. Leitura e interpretação do resultado apresentado pelo GeoGebra.
A2D2 E1: Esse autovalor, ele é correspondente de qual vetor? P: A gente lê por coluna. E1: Ah então é assim. E3: Eu tava certa.	Buscando sanar sua dúvida, os estudantes questionam o pesquisador, o qual a estudante indica que já havia indicado tal resposta.	117. Pesquisador passível de ser consultado para dúvidas 118. Convivência de diferentes ideias.
A2D2 E1: Cara, do eixo que só inverteu, só inverteu uma das coordenadas, inverteu... Então ele pega como se você pegasse só um vetor ali daquela base canônica que ele retorna e mudasse só um.	O estudante interpreta a transformação relacionando com os vetores da base canônica novamente, de modo que compreende que o sinal é alterado em apenas em uma das coordenadas.	119. Compreendem a transformação linear reflexão; 120. Relação entre transformação e base canônica.
A2D2 P: Olha que curioso comparando com o anterior, ele apontou quantos vetores como, como autovetores aqui? E1: Só dois. P: Que são base canônica e dessa vez realmente é. E1: São só esses dois? E2: Ih então a gente viajou...	Dialogando com o pesquisador, comparando com a transformação analisada anteriormente, os estudantes apresentam que haviam feito as mesmas considerações para esta nova transformação, após o pesquisador ressaltar que se tratava de um outro caso, onde de fato somente dois vetores seriam autovetores.	121. Diálogo com pesquisador corrigindo as considerações dos estudantes feitas previamente; 122. Interpretação equivocada dos autovetores a partir de uma generalização equivocada de resultados.
A2D2 E1: Ó o 1 corresponde ao $(1, -1)$, o -1 corresponde ao $(-1, -1)$. Sabe que esse aí a minha interpretação já deu uma zoadá, que vejam bem, olha o que a gente tinha... E2: Continuo achando que, que eles só vão ser... infinitas soluções se eles forem iguais, se os autovalores forem iguais, logo esses aí são diferentes, logo são só esses dois.	Ao corresponder cada autovalor com seu respectivo autovetor, o estudante afirma ter dificuldades em dar sequência na interpretação, e comparando com o caso anterior, uma colega expõe a conjectura de que um único autovalor implica em infinitos autovetores.	123. Dificuldade na interpretação dos autovalores e autovetores; 124. Conjecturas equivocadas.
A2D2 E1: Quando eu falo interpretação é porque todos os outros a gente já deu a matriz, já era a canônica e ele retornou de autovetor, a canônica ou a canônica com sinal invertido, só que esse... <i>no, no, no</i> .	Tratando da sua dificuldade em interpretar o resultado, o estudante compara com casos estudados anteriormente, com os vetores da base canônica como autovetores, entretanto, percebe que estão diante de um novo caso.	125. Dificuldade na interpretação dos autovalores e autovetores.
A2D2 E1: Essa em relação é uma reta qualquer a gente usou a $y = -x$. Mas aí os autovetores eu já não consegui dar uma interpretação. Eu não consigo observar igual eu tava fazendo no	Dialogando com o pesquisador, o estudante ressalta a dificuldade em interpretar os autovalores e autovetores diante de um caso escolhido pelo grupo, e comparando com casos anteriores,	126. Dificuldade em interpretar os autovalores e autovetores; 127. Exploram diferentes casos.

outro, não deu pra ver, de forma fácil, que era o próprio vetor canônico...esse eu não consegui visualizar isso.	identifica que os vetores da base canônica não se fazem mais presentes.	
A2D2 P: Vocês chegaram a escrever esses vetores lá com aquele gráfico? E2: Não.	Questionados pelo pesquisador se haviam observados os autovetores como vetores na Janela Gráfica, uma estudante ressalta que não fizeram isso.	128. Intervenção do pesquisador a fim de dar sequência nas discussões; 129. Não exploração dos recursos disponíveis no <i>software</i> .
A2D2 E2: Aah ponto inicial meu, é tipo A B. E1: Não tem um jeito mais fácil de escrever vetor ?	Utilizando de um comando disponível no Geogebra para definir um vetor a partir de dois pontos, um estudante questiona se há outra maneira mais eficaz, para o caso deles, de escrever o vetor desejado.	130. Diferentes recursos com mesma funcionalidade disponíveis no GeoGebra;
A2D2 P: Olhou para eles assim, quais as coisas que vem à mente? E1: Isso aqui é perpendicular né... a reta que a gente fez a reflexão, o outro segue ali na reta...e acabaram aí, é como só, se eu tivesse na minha cabeça pensante, é só como se eu tivesse pegado o eixo inicial que a gente estava fazendo por exemplo e (assubia), fosse tombando.	Dialogando com o pesquisador, um estudante identifica que os autovetores são perpendiculares, de modo que um autovetor seja vetor diretor da reta escolhida pelos estudantes, e o outro perpendicular à reta, e finaliza que compreende tal transformação como uma rotação dos eixos do plano cartesiano.	131. Identifica a ortogonalidade entre os autovetores; 132. Visualiza o autovetor como vetor da reta; 133. Conjectura sobre a transformação linear.
A2D2 P: Qual que é a transposta dessa Matriz? Se quiser colocar para ele calcular, pode colocar. (Calculam a transposta no GeoGebra) E1: Ham? P: É a mesma né.	Questionados sobre a matriz transposta da matriz da transformação estudada, os estudantes efetuam os cálculos com o GeoGebra, e o resultado lhes causa estranheza, de modo que a conclusão é feita pelo pesquisador.	134. GeoGebra como calculadora da matriz transposta; 135. Pesquisador intervindo nas conclusões.
A2D3 E4: Deixa eu trocar o nome deles (dos pontos).	A estudante altera os nomes dos pontos criados nas janelas do GeoGebra.	136. Alteração buscando otimização no trabalho com as informações.
A2D3 E4: Cordelina, sumiu tudo...	A estudante pede auxílio ao pesquisador após a programação não constar na tela, por não estarem na aba correta.	137. Pesquisador intervindo para sanar dúvidas e propor soluções.
A2D3 E4: Oshe mas a matriz de transição vai ser a mesma coisa?	Interpretando o resultado da matriz da transformação linear, há uma estranheza da estudante por identificar que tal matriz a matriz estudada anteriormente.	138. Interpretam os resultados da calculadora <i>online</i> ; 139. Resultados esperados não condizentes com o apresentado.
A2D3 E4: Jesus... não quero mais não.	A estudante expressa não querer dar sequência na atividade após a matriz resultar com números fracionários.	140. Resultados esperados não condizentes com o apresentado.
A2D3 E5: Tecnologia é um negócio maravilhoso.	Após o GeoGebra apresentar os resultados do cálculo dos autovalores e autovetores, o estudante ressalta a sua percepção sobre as tecnologias de forma a serem maravilhosas.	141. Tecnologias como fonte de benefícios.

A2D3 E4: Eu acho que esse menos um tá aqui por causa do quadrante...	Interpretando os resultados calculados pelo GeoGebra, a estudante acredita que há uma relação entre o resultado e o quadrante investigado.	142. Interpretam os cálculos realizados pelo GeoGebra; 143. Relação entre o resultado e a transformação linear.
A2D3 E4: Por que que ele dá em matriz ali?	A estudante questiona o motivo de o <i>software</i> apresentar os autovetores em uma única matriz, diferente do que normalmente ocorre na disciplina de Álgebra Linear.	144. Interpretam os cálculos realizados pelo GeoGebra; 145. Comparação com sua experiência na disciplina.
A2D3 P: Eu posso tomar o (0,1) também (como autovetor) ? E4: Não, não pode, porque a reflexão é no eixo x , não no eixo y . P: Quem tá no eixo y vai acontecer o que ? E5: Multiplicar por -1 .	Questionado sobre compreender o vetor (0,1) como autovetor, a estudante afirma que isso não ocorre devido a transformação tratar de uma reflexão no eixo x , mesmo que compreendem que há um escalar que multiplique os vetores semelhantes ao questionado inicialmente.	146. Conjectura equivocada; 147. Não apresenta uma compreensão sobre autovalores e autovetores, de modo que não identifica se tratar de um autovetor.
A2D3 E4: Só vão ser os dois porque a gente refletiu a partir do eixo	Interpretando a transformação, a estudante ressalta que há somente dois autovetores, sendo os vetores da base canônica, devido a relação entre a transformação e a alteração dos valores de um dos eixos.	148. Interpretam a transformação linear reflexão; 149. Interpreta a ideia de autovetores.
A2D3 E4: A gente tinha foto disso (da programação), não tinha? (Pausa) Vai, bota aí, por gentileza, que eu vou olhar a foto.	Questionando o colega sobre haverem feito o registro da programação com o celular através de uma foto, a estudante solicita que ele inicie a atividade enquanto ela procura a foto.	150. Celular como meio de registro a partir de fotos; 151. Trabalho em grupo com atividades diferentes de modo a dar sequência na atividade.
A2D3 E4: Esse não tinha dado certo... ah lá, que maluco. P: Ué porque maluco? Ele rodou o tanto que você queria. E4: Ah é verdade, porque esse tá mais pra cá, por isso ele vem parar aqui. E5: Faz sentido.	Explorando o recurso “rotação em torno de um ponto” com os pontos estabelecidos, a estudante expõe que determinado ponto não havia rotacionado corretamente, antropomorfizando a tecnologia devido ao resultado que ela julgava ser equivocado, entretanto, com o pesquisador, os estudantes percebem o equívoco, observando a posição inicial e a rotacionada, compreendendo o resultado apresentado.	152. Resultados obtidos não condizentes com os esperados; 153. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração e validação de ideias. 154. Antropomorfização do <i>software</i> . 155. Interação com pesquisador auxiliando nas conclusões.
A2D3 E5: Por que ficou vermelho? E4: Porque ele quis.	Perguntando à colega a razão dos comandos do código terem ficado com a cor vermelha, a estudante responde como uma escolha do <i>software</i> .	156. Antropomorfização da tecnologia; 157. Não compreensão das ações do <i>software</i> .
A2D3 E4: Vamos pesquisar ao invés de ficar tentando. E5: Tem umas fórmula aí loca hein.	Buscando trabalhar com a matriz de rotação, a estudante sugere buscar essa informação no Google ao invés de seguirem com tentativas a fim de definir a matriz, e acessando a aba de imagens, se deparam com diversas fórmulas e escritas dessa matriz.	158. Google imagens como fonte de informação;

A2D3 E4: A gente ficou “2 horas” mofando esperando você, pra descobrir agora que era só uma vírgula que faltava.	A estudante ressalta que ficaram um tempo considerável aguardando o pesquisador para solucionar a dúvida que estavam, e após solucionada julgam como algo simples.	159. Pesquisador auxiliando em momentos de dúvida; 160. Necessidade da familiaridade com os recursos do <i>software</i> .
A2D3 E4: Nossa que complicado, apareceu esse negócio de i aqui do Mariano.	Ao se depararem com a unidade imaginária a estudante ressalta a complicação decorrente disso e faz referência ao professor da disciplina de “Funções de variável complexa”.	161. Relações com outras disciplinas e conteúdos – Funções de variável complexa. 162. Números complexos como algo dificultoso.
A2D3 E4: Agora assim, vai ter que você falar as conclusões porque eu não sei mexer com i .	A estudante afirma que o pesquisador deverá fazer as conclusões devido à dificuldade que ela tem em lidar com números complexos.	163. Pesquisador auxiliando nas conclusões; 164. Dificuldade com números complexos.
A2D3 E4: Só muda o i , o imaginário troca de sinal.	A estudante reconhece que os valores apresentados se tratam de um número complexo e seu conjugado.	165. Interpretam o cálculo realizado pelo GeoGebra; 166. Identificam um número complexo e seu conjugado.
A2D3 E4: Sim porque você só vai calcular uma vez. Eu lembro que uma vez a Iolanda já tinha falado isso pra gente.	A estudante recorda de um resultado apresentado pela professora de Álgebra Linear. O resultado trata dos números complexos como autovalores, sendo sempre o par conjugado.	167. Recordam resultados estudados na disciplina de Álgebra Linear; 168. Propriedades de autovalores: número complexo e seu conjugado.
A2D3 E4: Eu acho que vai ser a mesma coisa né, a mesma regra. E5: É, só mudou o sinal do imaginário.	Calculado os autovetores, os estudantes identificam que este também são da forma complexa e seu conjugado.	169. Interpretam o resultado calculado; 170. Propriedade de autovetores: número complexo e seu conjugado.
A2D3 P: O de vocês deu complexo, isso só vai acontecer pro 45° ? E4: Não, são todos. P: É, tem alguns que não são, vamos pensar. E4: O 0° não é. P: Isso, e o 180° .	Após as discussões das causas da presença dos números complexos na rotação, os estudantes são questionados se este é um resultado padrão para qualquer ângulo, e após uma conjectura equivocada, mesmo que válida para a maioria, em conjuntam com o pesquisador, apresentam contraexemplos.	171. Generalização dos resultados; 172. Pesquisador auxiliando nas conclusões.
A2D3 E4: Vamos pesquisar no Google, “Homotetia”.	Buscam no Google pelo conteúdo de homotetia.	173. Google como fonte de busca e informação.
A2D3 E4: Cordelina, deu muito ruim aqui que sumiu tudo.	Pedem auxílio para o pesquisador após fecharem por engano as janelas de Álgebra e de Visualização, ambas do GeoGebra.	174. Pesquisador auxiliando o trabalho com tecnologias; 175. Necessidade da familiaridade com o <i>software</i> .
A2D3 E4: Coloca pra 3, vai ficar 3 vezes maior. Tá vendo, a Isabela ensinou direitinho.	A estudante compreende a relação entre a variável e a consequência no desenho, ressaltando que a professora das disciplinas de	176. Relação entre a variável, programação e desenho;

	Geometria ensinou este conteúdo bem.	177. Relação com outras disciplinas e conteúdos – Geometria.
A2D3 P: Quem são os autovalores? E1: n , e os autovetores é a base canônica.	O estudante compreende que o autovalor é a razão de homotetia, nomeado por eles como a variável n na programação, e identifica os autovetores como os vetores da base canônica.	178. Interpretam os autovalores e autovetores – razão de homotetia e base canônica.
A2D3 P: Só que esse aqui não triplicou? E4: Sim. P: Isso, e esse também? E4: Sim. P: Então, quem são os autovetores dessa transformação? E1: Podem ser esses dois que você usou pro triângulo.	Questionados pelo pesquisador sobre o comportamento de dois dos vetores que formam o triângulo, os estudantes compreendem que estes foram multiplicado por um escalar, e iniciam a conjectura de que estes podem ser autovetores também.	179. Intervenção do pesquisador para avançar nas discussões e conclusões; 180. Conjecturam sobre a ideia dos vetores serem autovetores.
A2D3 P: Esse aqui não foi triplicado também? E1: Sim. P: E ser autovetor não é ser multiplicado por um escalar? E4: Ah então ele é autovetor também.	Questionados pelo pesquisador sobre o comportamento de um vetor, os estudantes compreendem que este foi multiplicado por um escalar, e compreendem que este vetor é um autovetor da transformação.	181. Intervenção do pesquisador para avançar nas discussões e conclusões; 182. Compreendem os vetores como autovetores.
A2D3 E1: Ele não é único, ele tá naquele mesmo esquema de que se a gente fosse resolver na mão ele daria um sistema... que todas, todos os vetores vão ser uma solução, então qualquer vetor que a gente colocar ali vai ser uma base, ele colocou esse aí porque é a canônica.	O estudante identifica que os vetores discutidos não são os únicos autovetores, e comparando com discussões feitas anteriormente na mesma atividade, compreende lidar com o mesmo caso, de forma que realizando o cálculo manual, iriam se deparar com um sistema com infinitas soluções, assim, compreendem todos os vetores como autovetores, e conjectura que o modo de o GeoGebra representar isso é indicando a base canônica como autovetores.	183. Identificam e compreendem os autovetores; 184. Comparam com resultados anteriores da atividade, explorações já realizadas; 185. Comparam com o cálculo manual; 186. Conjectura para explicar os resultados do <i>software</i> .
A2D2 E1: Se for quase 90 tá certo... Tá parecendo muito. E3: 89. E1: É isso, tá certo, tá certo. E3: Tá ótimo.	Com o recurso do Geogebra, os estudantes medem o ângulo fixando um ponto aproximado com o vértice feito pela tartaruga, de modo que aceitam como correto ângulos próximos de 90° .	187. Arredondamento de valores, compreendidos como corretos.
A2D3 E3: Eu quero arrastar ele também para ver o que acontece.	A estudante expõe que deseja alterar a posição dos pontos para visualizar quais as consequências dessa ação.	188. Exploração de diferentes casos.
A2D3 E2: Estamos usando o Google (imagens).	A estudante registra que estão utilizando do site de busca Google, especificamente a aba de imagens.	189. Google imagens como fonte de informação.
A2D3 E1: Eu lembro que usa seno e cosseno porque eu já fiz isso aqui na mão numa prova de G.A. E3: Eu fiz G.A no EaD...	Buscando pela matriz genérica de rotação, o estudante diz que se recorda a presença das razões trigonométricas na matriz, por já ter demonstrado a matriz em uma	190. Recordam de conteúdos de Geometria Analítica; 191. Registra a realização da disciplina a distância durante o ensino

	prova de Geometria Analítica (G.A), em seguida, sua colega ressalta que cursou a disciplina na modalidade remota durante o período pandêmico.	emergencial como uma dificuldade.
A2D3 E1: Ah que isso, aí eu não gostei. E3: Deu complexos... E1: Aí agora eu quero o “amado mestre” pra interpretação. E2: Nem quando era 1 e 0 eu tava entendendo, agora com i ...	Diante do resultado apresentar números complexos, o estudante ressalta não ter gostado e necessita de auxílio do pesquisador para interpretação, enquanto sua colega aponta já ter dificuldade nos casos anteriores, de forma que a dificuldade se mantém e/ou aumentou diante do novo caso.	192. Pesquisador auxiliando na interpretação; 193. Dificuldade com números complexos.
A2D3 <u>Quais afirmações podemos fazer sobre a transformação linear, os autovalores e autovetores?</u> E1: Não sei. E3: Também não. E2: Nem ideia.	Diante da pergunta proposta na atividade, os estudantes afirmam não saber responder.	194. Dificuldade com números complexos; 195. Dificuldade na interpretação dos autovalores e autovetores.
A2D3 E2: Usamos o Google. E1: Já entendemos então, o que é homotetia.	A estudante registra que buscaram informações no Google, enquanto seu colega ressalta que agora já têm compreensão sobre o conceito de homotetia.	196. Google como meio de busca e fonte de informação; 197. Compreensão a partir da pesquisa.
A2D3 E1: Tudo o que tem número complexo... eu percebo que eu tenho uma dificuldade, até de entender o que os números complexos me falam.	O estudante ressalta a dificuldade que tem ao lidar e interpretar números complexos.	198. Dificuldade na interpretação dos números complexos.
A2D3 E1: Seria uma parte, a parte imaginária positiva e esse tem a parte imaginária sempre negativa. P: Isso, e o resto é igual? E1: O resto é igual. P: E aí quando isso acontece com o número complexo ele recebe um nome, não recebe? E3: É o do da barrinha lá... é o conjugado. E1: Conjugado... E3: Eu tô vendo isso em funções.	A partir do diálogo com o pesquisador, os estudantes identificam que os autovalores complexos tratam de um número e seu conjugado, fazendo referência a disciplina de “Funções de variável complexa”.	199. Pesquisador auxiliando nas conclusões das discussões; 200. Interpretam o cálculo realizado pelo GeoGebra; 201. Conjugado de um número complexo; 202. Relações com a disciplina de Funções de variável complexa.
A2D3 E1: A multiplicação no complexo, ela não dá uma extensão no vetor? Não tô lembrado muito bem.	O estudante expõe a ideia de que a multiplicação de dois números complexos resulta, visualmente, na extensão do vetor resultante do produto, e afirma não recordar exatamente sobre isso.	203. Questiona sobre a multiplicação entre números complexos.
A2D3 E1: Ó 0° dá positivo E2: 0° é a identidade. E1: Porque não tá rotacionando nada.	O estudante compreende que os autovalores de uma matriz de rotação de 0° serão números reais, enquanto sua colega relaciona com a matriz identidade, de forma que não há rotação.	204. Exploração de diferentes casos; 205. Relação entre a rotação, matriz identidade e suas propriedades.
A2D3	O estudante ressalta a dificuldade em interpretar e lidar com números	206. Dificuldade em interpretar e lidar com números complexos – abstração.

E1: Não dá para mim... muito abstrato, pra mim coisa com complexo é muito abstrato.	complexos, de forma que compreende estes como abstratos.	
A2D3 E3: E 360? E2: Vai dar a mesma coisa que o zero. E1: Cai no mesmo lugar.	Diante da dúvida de um ângulo não explorado, os estudantes compreendem a equivalência deste ângulo com outro discutido.	207.Exploração de diferentes casos; 208.Relação entre ângulos já investigados.
A2D3 E1: Aqui eu abri mão. Não consigo interpretar nada que tenha complexo de forma natural. Tudo muito abstrato para mim.	O estudante ressalta a dificuldade em interpretar números complexos, de forma que compreende estes como abstratos.	209.Dificuldade em interpretar números complexos – abstração.
A2D3 P: Que que parece que esse “suplementar” aí então, se eu tenho uma matriz, multiplica por outra e me dá a identidade? E1: Matriz inversa.	Dialogando com o pesquisador, discutem sobre ângulos rotacionados em seguida, de forma que a soma dos dois resulte em 360°, e relacionam com resultados de matrizes.	210.Interpretam a transformação linear e relação com resultados de matrizes.
Atividade 3 – Os quadrados do Leonardo		
A3D1 P: Vocês lembram como é a sequência (de Fibonacci), mais ou menos? E4: Eu vou pesquisar, de verdade, não lembro como era a carinha dela direito.	Questionados pelo pesquisador se lembram da sequência de Fibonacci, a estudante afirma não lembrar detalhes, de modo que pesquisa na internet para relembrar.	1. Internet como meio de acesso à informação.
A3D1 E4: Mas o que que tem a ver Fibonacci com Álgebra Linear? É isso que tá na minha cabeça.	A estudante expressa um questionamento que a intriga, se tratando da relação entre a sequência de Fibonacci e Álgebra Linear.	2. Relação entre Álgebra Linear e diferentes conceitos matemáticos.
A3D1 <u>Vocês acham que essa construção daria para ser feito na Educação Básica?</u> E4: Acho que sim, as crianças amam desenhar quadrados.	Após o questionamento proposto na atividade sobre a possibilidade de proposta para a Educação Básica, a estudante responde positivamente, justificando pelo gosto dos estudantes, a qual faz referência imaginando crianças.	3. Relação dos conceitos estudados na atividade com a educação básica
A3D1 E4: Nunca mexi no Excel. E5: É que lá é um pouco diferente, escreve soma aí você seleciona as casas e faz a soma.	A estudante afirma nunca ter trabalhado com o Excel, um <i>software</i> de planilhas da Microsoft, enquanto seu colega identifica pequenas diferenças com os comandos da planilha do GeoGebra com os do Excel.	4. Familiaridade com <i>software</i> e possibilidades com o computador.
A3D1 P: Se eu pedir para vocês agora o trigésimo quinto mês, vocês conseguem me dar? E4: Como que a gente daria o 35° mês? E5: Ué é só pegar e puxar.	Questionados pelo pesquisador sobre a quantidade de coelhos do problema investigado, uma das participantes não identifica uma solução para calcular, enquanto seu colega compreende que basta aumentarem as células da planilha que calcula os termos da sequência de Fibonacci.	5. Exploração de diferentes resultados através dos cálculos realizados pelo computador.

A3D1 E4: Mas o GeoGebra já faz também né? Criar Matriz.	A estudante relembra que é possível trabalhar com matrizes com o GeoGebra.	6. Recursos do GeoGebra auxiliando no desenvolvimento da atividade.
A3D1 E4: Mas eu posso fazer um negócio para ele fazer isso para mim, né.	A estudante afirma que é possível que o GeoGebra calcule para eles os pares de pontos conforme desejado.	7. Recursos do GeoGebra auxiliando no desenvolvimento da atividade.
A3D1 E1: Vamos colocar uma lista? E3: Sim.	O estudante sugere à colega para criarem uma lista no GeoGebra, visando auxiliar na resolução da atividade.	8. Recursos do GeoGebra auxiliando no desenvolvimento da atividade.
A3D1 P: Porque os quadrados têm esse tamanho? E1: Então a gente fez isso aqui ó, a gente pegou uma foto aqui.	Questionados pelo pesquisador quanto aos tamanhos dos quadrados que formam a proporção áurea, o estudante afirma que escolheram uma foto no Google imagens que representava a figura final e indicava o tamanho de cada lado.	9. Google imagens como fonte de informação.
A3D1 E1: Será que o chat GPT sabe o LOGO? Vou testar.	O estudante levanta a dúvida de se o chat GPT, um chat de inteligência artificial, saberia programar com LOGO.	10. Internet e inteligência artificial como meio de acesso à informação;
A3D1 E1: Nossa ele falou um negócio que eu não sei se é uma verdade, ou uma inverdade.	Diante da resposta do chat GPT, o estudante afirma não saber se a informação é verdadeira ou falsa.	11. Informação da inteligência artificial dúbia.
A3D1 E1: Ah então é só a gente procurar aqui.	Pensando em como definir os termos da sequência de Fibonacci, o estudante busca no Google por “termo sequência de Fibonacci”.	12. Google como meio de pesquisa e fonte de informações.
A3D1 E1: Por fim tudo vira reta.	O estudante levanta a hipótese de que os pontos formam uma reta.	13. Criação de hipótese.
A3D1 E3: Vamos ver até onde vai com 56?	A estudante sugere analisarem o comportamento de 56 pontos.	14. Exploração de diversos pontos.
A3D2 E4: Espera não tem como a gente jogar essa matriz aqui?	A estudante relembra que é possível trabalhar com matrizes com o GeoGebra.	15. Familiaridade com o <i>software</i> no desenvolvimento das atividades envolvendo o conceito de autovalores e autovetores.
A3D2 E4: Tem como jogar aquela Matriz aqui para a gente, para ele calcular, porque a gente sabe que ele calculou os autovalores e autovetores, mas eu não sei como que eu jogo aquela matriz aqui.	A estudante relembra que é possível trabalhar com matrizes com o GeoGebra, para que o <i>software</i> realize os cálculos dos autovalores e autovetores, mas não se recorda como escrever a matriz.	16. Familiaridade com o <i>software</i> no desenvolvimento das atividades envolvendo o conceito de autovalores e autovetores 17. <i>Software</i> realizando os cálculos dos autovalores e autovetores.
A3D2 E5: Vou ir tentando.	Buscando escrever a matriz no <i>software</i> , o estudante tenta lembrar a forma correta.	18. Explorando a escrita de matriz com o objetivo de auxiliar no

		desenvolvimento da atividade.
A3D2 <u>Os autovalores te lembram algo?</u> E4: Me lembra que, aquele negócio que ele é o oposto sabe, sempre vai ser o oposto, que a gente viu no último. Mas esse valor ele me lembra alguma coisa... deve ser alguma coisa de Fibonacci né.	A partir do questionamento da atividade, a estudante identifica que os autovalores apresentam os mesmos números, alterando o sinal do numerador, fazendo com que se lembrasse do conjugado de um número complexo, visto na atividade anterior. Em seguida conclui de que deve haver alguma relação com a sequência de Fibonacci.	19. Experiência em atividades anteriores auxiliando no desenvolvimento da nova atividade proposta;
A3D2 E5: Número de ouro? O que seria o número de ouro? Nunca ouvi esse termo. Pode pesquisar? E4: Eu já tô pesquisando dupla.	O estudante afirma nunca ter ouvido o termo “número de ouro” e questiona se poderia pesquisar na internet, enquanto sua colega afirma já estar pesquisando com seu celular.	20. Celular como um modo de pesquisa e acesso à internet.
A3D2 E4: Ah, calma aí volta na pergunta anterior. E5: “Calcule os autovalores” ou “se te lembra algo?” E4: O que me lembra algo, me “lembra” o número de ouro (risos). Nossa mas eu acho que eu nunca ouvi isso na minha vida.	Após pesquisarem sobre o número de ouro, a estudante retoma a pergunta anterior da atividade, e reconhece que um dos autovalores é o número de ouro, mesmo que nunca tenha ouvido esse termo.	21. Identifica um autovalor como o número de ouro.
A3D2 E4: É que os autovetores, é os vetores, tem que escrever assim ó.	A estudante compreende os autovetores como vetores, e ressalta que há uma forma para escrever vetores no GeoGebra.	22. Identifica os autovalores como vetores e destaca como deve ser escrito no <i>software</i> .
A3D2 E4: Aqui ó, escreve isso aqui... quer que eu tiro uma foto? E5: Mais fácil. E4: E aí você escreve isso aqui só que na janela de álgebra.	A estudante compreende que há informações relevantes na janela de CAS e que podem ser úteis na janela de Álgebra, assim, os estudantes registram os valores com uma foto com o celular.	23. Fotos do celular como meio de registro; 24. Trabalho com diferentes janelas do GeoGebra.
A3D2 E5: Que m&*&#@ velho. Por que os outros aparecem e esse não?	O estudante expressa sua frustração quando visualiza parcialmente os vetores digitados. Isso acontece devido a forma que escreveram os vetores na janela de entrada, alguns com os símbolos incorretos.	25. A importância do domínio dos modos de se utilizar os comandos do <i>software</i> .
A3D2 E4: Isso daí é tudo coisinha, é coisinha que a gente não sabe, desculpa. P: Como assim coisinha? E4: É programação, a lá, ele tá igual a minha cabeça.	A estudante afirma que as dificuldades com o <i>software</i> são detalhes, os quais não estão familiarizados, como os comandos do GeoGebra e a lógica de programação.	26. A importância da familiarização com o <i>software</i> para o desenvolvimento da atividade proposta.
A3D2 E4: Vamos analisar esses vetores aqui, “o que podemos concluir” desses dois, “porque isso acontece?”, alguma coisa acontece, o que que acontece? Um vai para um quadrante, outro vai para outro quadrante, só que eles têm no	Seguindo com os questionamentos da atividade, a estudante reconhece que os autovetores são de quadrantes diferentes, e justifica que isso ocorre devido ao sinal dos valores serem opostos.	27. Identifica que os autovetores estão em quadrantes diferentes e levanta uma hipótese para justificativa.

mesmo número, só que um fica menor e o outro fica maior. É porque, por causa que a raiz está negativa, por isso que isso acontece.		
A3D2 <u>Escreva a reta que passa pela origem e tem como vetor diretor.</u> E4: Tá falando coisa do EAD aqui.	A partir da orientação da atividade, a estudante reconhece que o tópico solicitado remete a uma disciplina que cursou nos primeiros anos da graduação, período marcado pelo ensino remoto emergencial devido à pandemia Covid-19.	28. Relação com outras disciplinas e conteúdos – Geometria Analítica.
A3D2 <u>O que podemos observar dos pontos em relação a uma das retas?</u> E4: Um dos pontos passou... Ah não, não passou não. Olha os pontos quase passam pela reta. Olha o F passa... O G tb. Quer ver, vamos dar um zoom para ver se passa. E5: É então, aqui parece que eles passam. E4: Mas acho que não, fica bem próximo.	A partir do questionamento na atividade, a estudante levanta a hipótese de que um dos pontos pertence à reta, ideia essa contrariada em seguida, conforme investigam diferentes pontos com o zoom do <i>software</i> , enquanto buscam compreender o comportamento dos pontos buscando validar uma das ideias.	29. Criação de hipóteses a partir da exploração de recursos do <i>software</i> .
A3D2 E4: É ele quase passa pelo ponto.	A estudante amplia o zoom cada vez mais, e conclui que o ponto não pertence à reta.	30. Exploração de diferentes pontos e seu comportamento com a reta com auxílio do zoom;
A3D2 E4: Por exemplo, o ponto F e G, parece que passou em cima, mas não passou.	A estudante cita como exemplo os pontos F e G que aparentemente pertenciam à reta, mas concluem que não pertence com o auxílio do zoom.	31. Exploração dos dados da atividade com o recurso do <i>software</i> para validação de hipóteses.
A3D2 E4: Nossa!! Fez a mesma coisa, quase passou mas não passou. Acho que nunca vai passar.	Explorando novos pontos, a estudante reconhece, com surpresa, que novamente os pontos não pertencem à reta, e levanta a hipótese de isso ser válido para qualquer caso.	32. Exploração de diferentes casos relacionados ao problema para a criação de diferentes hipóteses.
A3D2 P: E por que que isso acontece será? E4: Eu acho que é porque a reta elas, ela tem que a origem, muito entre aspas, no vetor. Então ela só vai coincidir com o ponto da origem e o ponto do vetor, as coordenadas do vetor. Acho que essa vai ser os únicos pontos que vão estar nessa reta, né?	Questionados pelo pesquisador pela causa que determina que os pontos se aproximem da reta, a estudante levanta a hipótese que isso acontece devido a reta ter como vetor diretor o autovetor.	33. Reconhece o autovetor como vetor diretor e suas implicações para a aproximação dos pontos.
A3D2 P: Quem quer multiplicar 4 matrizes? E4: O GeoGebra quer.	Após o pesquisador questionar sobre quem gostaria de multiplicar 4 matrizes, a estudante afirma que o GeoGebra faria isso.	34. Antropomorfização da tecnologia; 35. GeoGebra como calculadora para matrizes.
A3D2 P: Ele calcula e me aponta isso aqui. E4: Parabéns, como que você sabe que isso aqui tá certo? E5: Você confia no pai. E1: Fé.	A partir dos cálculos apresentados pelo GeoGebra, a estudante questiona como garantir que o cálculo está correto, e dois colegas respondem, com humor, com o sentido de ter que confiar e acreditar no resultado apresentado.	36. Questionamento quanto a validação dos cálculos apresentados pelo <i>software</i> .

A3D2 E4: Mas isso aí não foi o autovetor ou autovalor?	Diante dos autovalores e dos números das coordenadas dos autovetores serem os mesmos, a estudante reconhece que os autovalores estão presentes na lei da função calculada.	37. Identifica os autovalores como coeficientes na lei da função.
A3D2 E4: Aí você coloca... nossa, p#&@m&#\$@ tudo isso? Parênteses, 1 dividido por, “sqrt” e aí dentro você coloca o 5. Beleza agora para fora você coloca mais parentes de novo.	A estudante expressa sua revolta com a expressão que devem digitar na janela de entrada, sem seguida vai ditando para seu colega como deve escrever.	38. Destaque sobre a importância da escrita correta do comando no <i>software</i> .
A3D2 E4: Posso tirar todos esses? Que tá atrapalhando né.	A estudante sugere desabilitar a visualização dos pontos que não correspondem mais a discussão atual que estão fazendo.	39. Visualizam somente o que corresponde ao que discutem e investigam.
A3D2 P: A gente consegue responder à pergunta que a gente fez, inicialmente? E4: Sim, porque pra qualquer n o GeoGebra faz.	Questionados se o objetivo final da atividade foi respondido, a estudante afirma que sim, pois para qualquer valor o GeoGebra faz os cálculos.	40. GeoGebra como forma de generalização de ideias matemáticas.
A3D2 E1: Oh Gab vem cá por favor. Pra eu colocar uma matriz no cálculo simbólico é isso aqui não é? É isso e aí cada linha... Ou eu tô fazendo alguma coisa errada porque olha só... Fica dando essa interrogaçãozinha aí quando eu tento por exemplo colocar o autovetor...	O estudante solicita ajuda ao pesquisador quanto ao modo de escrever uma matriz na janela de cálculo CAS, após o <i>feedback</i> do GeoGebra.	41. Não familiarização com os comandos e possibilidades do GeoGebra.
A3D2 <u>Os autovalores te lembram algo?</u> E1: Lembra os negócios lá de Fibonacci. Aqui ó, quando a gente procurou apareceu... Ó aqui (pesquisam por “Fibonacci sequência termo”), cadê? Alá, e mostra que o termo (eles olham uma imagem que está escrito: “Sabe resolver? Mostre que o termo geral da sequência de Fibonacci é” e tem a expressão) Ah, olha que sacana esse negócio, o termo geral da sequência de “vapo vapo” é um autovetor a n menos o outro autovetor a n dividido por raiz de cinco. Que coisa né?	O estudante reconhece que os autovalores já foram vistos pelo grupo quando pesquisaram na internet pela sequência de Fibonacci e se depararam com uma imagem que continha a função para cada n , retorna o n -ésimo termo da sequência. Após retomar a imagem, o estudante identifica que a função é composta por uma subtração dos autovalores elevados a n , dividido por raiz de cinco, e apresenta surpresa com essa expressão.	42. Identifica os autovalores na expressão da função e reconhece o resultado obtido em uma pesquisa realizada no Google anteriormente.
A3D2 E1: E agora... bom então essa questão, forma o termo geral, né? Os autovalores formam o termo geral da sequência.	O estudante reconhece que os autovalores compõem a expressão que apresenta o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci.	43. Identifica e reconhece os autovalores na expressão da função.
A3D2 <u>O número de ouro está presente nas coordenadas do vetor?</u> E3: Mas o que que é o número de ouro? (Pesquisam na internet) E1: “Número de ouro é o número de ouro ou proporção Áurea.” Falou, falou e não falou nada. (Em seguida,	A partir da pergunta proposta na atividade, os estudantes buscam na internet pelo número de ouro. Primeiramente, se deparam com uma informação que não julgam ser útil, em seguida, buscando no Google Imagens, se deparam com o valor numérico, o que os leva a	44. Google imagens como fonte de informação;

olham no Google Imagens e encontram o valor numérico). Ah, não aqui... E3: O número de ouro é o famoso 1 mais raiz de 5 sobre 2... então sim.	responder à pergunta de forma afirmativa.	
A3D2 E1: Isso... isso aqui eu acho ó (passa o cursor do mouse sobre os vetores, da origem ao extremo volta e faz com o outro). E3: Formam um ângulo de 90°. E1: Sim. E3: Eu não sei, só... E1: Eles formam, eles formam. Se a gente fizer ó, u vezes v, ah lá zero.	Os estudantes reconhecem que os autovetores são ortogonais, entretanto, para confirmar, realizam o cálculo do produto interno no GeoGebra.	45. Identificam a ortogonalidade entre os autovetores, trabalhando com a possibilidade do GeoGebra de calcular o produto interno.
A3D2 (Em um momento, os estudantes mudam as cores dos autovetores.)	Antes de iniciar uma nova investigação presente no material, os estudantes atribuem diferentes cores aos autovetores, de modo a orientá-los na identificação comparando as diferentes janelas.	46. Recursos do Geogebra auxiliando na identificação e exploração.
A3D2 E1: Como que eu faço uma reta a partir de um vetor aqui? Ponto, vetor diretor. Qual é meu ponto, (0,0), e meu vetor diretor. E2: Ah se aproxima pra c@%@*&# agora. É isso. Melhorou né. Só que vai passar uma hora. E1: Uma hora vai.	O estudante explora o recurso de definir uma reta a partir de um ponto e um vetor diretor. Visualizada a reta, a estudante afirma que os pontos se aproximam da reta, mas levanta a hipótese de os pontos ficarem sobre a reta, a qual seu colega concorda.	47. Recursos do GeoGebra auxiliando na elaboração e exploração (validação) da hipótese de que a reta é uma boa aproximação dos pontos estudados.
A3D2 P: O número de ouro, tá presente no autovetor ou só no autovalor? E1: Ah, tá nos dois, porque no autovalor ele tá lá e no autovetor, você pode, você pode interpretar também que ele tá só dividido, o numerador tá na, na abscissa e o outro na ordenada.	Questionados pelo pesquisador, o estudante identifica que o número de ouro é um dos autovalores e pode se fazer presente nos autovetores, interpretando o vetor calculado pelo GeoGebra.	48. Interpretação dos resultados dado pelo GeoGebra, identificando o número de ouro como um autovalor e presente nas coordenadas do autovetor.
A3D2 E1: Aproxima muito bem, se você pensar numa... numa abordagem numérica é como se fosse uma reta de regressão linear.	O estudante afirma que a reta definida é uma boa aproximação dos pontos, e compara com uma reta de regressão linear.	49. Compreensão, com a visualização no <i>software</i> , de que a reta, entendida com uma regressão linear, seria uma boa aproximação dos pontos obtidos.
A3D2 P: Eu lembro que essa discussão do ortogonal surgiu só aqui e aí eu falei para vocês que eles iam ser ortogonais por causa da matriz e ela tinha uma característica especial, lembra qual que era essa característica? Tinha um teorema... olha para transposta. E1: Ah, quando a matriz é simétrica.	Relembrando uma discussão realizada na atividade 2 sobre a matriz e os autovetores serem ortogonais, o estudante relembra que para isso acontecer a matriz deve ser simétrica, isto é, quando sua transposta é igual a ela mesma.	50. Identificação, a partir da intervenção do pesquisador, do teorema relacionado a ortogonalidade dos autovetores.
A3D2 E2: Quer ver, apaga isso.	A estudante desabilita a visualização dos pontos anteriores para olharem apenas para os novos pontos.	51. Recursos do Geogebra auxiliando na exploração de diferentes casos.

A3D2 E1: O que que deu? Olha, voltou para reta. E2: Dá um zoom agora, não, mais para cima, essa parte é muito paia. E1: Mano eu diria que ela não encosta. E2: Eu também. E1: Pelo teorema do ponto gordo, se você fosse fazer isso aqui na mão... E2: Se eu dou zoom, calma aí... E1: Eles caíram na mesma boa aproximação, concorda? E2: Calma, vou subir mais um pouquinho.	Explorando novos pontos e definindo a mesma reta como feito anteriormente, o estudante opina que ainda sim a reta está próxima dos pontos, enquanto sua colega quer investigar com o zoom ao longo da reta. Enquanto investigam, os estudantes levantam a hipótese de os pontos não pertencerem à reta, mas que mesmo assim, é uma boa aproximação.	52. Levantando hipóteses e explorando diferentes pontos, analisando o comportamento da reta com o auxílio do zoom.
A3D2 E1: Tá convencida que aproxima muito bem? Você também tem uma sensação de que quanto maior, você, maior o termo da sequência, mais próxima ele tá da reta. E2: Sim, inclusive achava que uma hora ia passar, igual era o outro. E1: Você fala de passar de ao invés de ele ficar em baixo ele vai pra cima? E2: Sim.	Dialogando sobre a aproximação dos pontos à reta, um estudante expõe a percepção de que quanto maior o termo da sequência, mais próximo fica da reta, o qual sua colega compartilha dessa impressão, e expõe a ideia de que os pontos iriam ficar acima da reta, não somente abaixo.	53. Levantamento de hipóteses.
A3D2 (Os estudantes investigam tanto os pontos com o zoom que se deparam com um caso que aparenta que o ponto está na reta, mas eles aproximam muito, de modo que a escala nos eixos fica com um intervalo de 0.05 para cada número) E2: Ó, fala se esse não passou. E1: Passou. Ele vai fazendo assim ó, aí ele aproxima. (movimenta o mouse pra cima e pra baixo da reta).	Investigando com o recurso de zoom, a estudante identifica que um ponto está acima da reta, e identificam que os pontos vão se alternando acima e abaixo da reta.	54. Exploração de diferentes pontos e seu comportamento com a reta com auxílio do zoom; 55. Exploração e validação de hipóteses.
A3D1 E1: Para baixo, para cima, para cima, para baixo. A reta aproximou perfeitamente de novo. Qual será que é a distância?	Explorando a posição dos pontos relativa a reta, o estudante vai identificando quais pontos estão acima ou abaixo da reta. Ao retomar a ideia de que a reta é uma boa aproximação para os pontos, levanta uma nova questão a ser investigada, referente a distância dos pontos à reta.	56. Validação da hipótese de se a reta é uma boa aproximação dos pontos estudados; 57. Elaboração de novas hipóteses como consequência da validação anterior.
A3D1 E1: É (8,4) e a reta, que eu quero é isso aqui.	O estudante investiga com os comandos do GeoGebra qual a distância dos pontos à reta.	58. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração de novas investigações.
A3D2 P: Aí eu pensei “Ah, vou falar para o GeoGebra calcular”, e aí eu ponho as matrizes, a diagonal... E1: Nossa que inferno isso aí. (...) Ele não simplifica.	Diante dos cálculos realizados pelo GeoGebra referente a multiplicação de 4 matrizes, o estudante identifica que o <i>software</i> não simplifica e não agrupa termos semelhantes, de modo que apresenta uma extensa matriz como resultado final.	59. GeoGebra como calculadora; 60. Interpretação e validação do resultado apresentado.
A3D2	Explorando a função determinada, o estudante compreende a	61. Recursos do GeoGebra auxiliando na

E1: Óia, mas por que ele foi assim para o c@#@\$%&? Ah é, é porque agora é o termo, né? Tal termo e tal número.	diferença entre essa função, que representa o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci para cada n , para os pontos investigados anteriormente. Com o controle deslizante, eles exploram até o 100º termo da sequência.	compreensão da função e na exploração da sequência.
A3D2 E1: Vamo aproximar ele usando uma exponencial? E2: Vamo.	Diante do comportamento dos pontos, o estudante sugere investigar uma função exponencial que se aproxime dos pontos.	62. Elaboração de uma nova questão a ser investigada.
A3D2 E2: Eu acho que é o mais perto que chega. E1: Ah é, tá bom pô, tá legal.	Explorando diferentes funções exponenciais, os estudantes elegem a função que compreendem satisfazer o que almejavam, conforme investigaram alterando os coeficientes.	63. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração de novas investigações.
A3D2 E1: O Wolfram plota? (Ele habilita o n com incremento 0.5 para ver como a função se comporta calculando números com vírgula) E1: Deu interrogação.	O estudante sugere investigar se o Wolfram, um <i>software</i> voltado para matemática e computação, plota o gráfico da última função investigada na atividade. Após a investigação, se depara que este <i>software</i> também apresenta o resultado apenas para n pertencente ao conjunto dos Naturais.	64. Mobilização com outra tecnologia – Wolfram. 65. Levantamento de uma nova questão a ser investigada.
PERGUNTAS DE ENCERRAMENTO:		
1 - Como vocês compreendem as relações entre as discussões feitas e a formação de vocês?		
E1: Para mim, assim, foi uma experiência formativa muito boa, porque, os conceitos de álgebra linear estavam muito frescos ainda para mim, mas eu consegui olhar para eles de uma forma que eu não tinha visto antes, sabe, normalmente via gráfico, alguma coisa, representação no máximo um papel ali. E aí, não é só a tecnologia que mudou né, no papel, computador, um <i>software</i> , mas o fato de você ter essa dinamicidade, você conseguir fazer uma pequena alteração e já ver e explorar depois um autovalor e autovetor e então já associar enquanto você tá vendo, que você tá fazendo, para mim, essa, eu acho que uma grande mudança que eu senti, né? Para poder então olhar com outro olhar pra um conteúdo.	O estudante inicia dizendo que os encontros foram uma experiência formativa relevante, e justifica devido a oportunidade de rever conceitos de Álgebra Linear, mas também de ter novas interpretações, destacando a dinamicidade das modificações e explorações com o computador, permitindo a visualização e o estabelecimento de relações entre diferentes exemplos investigados e discutidos.	66. Experiência significativa para formação; 67. Novas interpretações sobre conceitos de Álgebra Linear; 68. Trabalho com computador permite dinamicidade, exploração e visualização.
E4: Então pra mim, é... eu não tinha feito disciplina de Álgebra Linear até o fim direito, eu fiz mas eu não fiz direito, e aí para mim, eu tive que... assim, a parte de autovalores e os autovetores para mim foi tipo... eu agora sei o que são autovalores e autovetores, então, foi um aprendizado porque no fim da disciplina eu não fiz isso, e também, é,	A estudante inicia lembrando sua dedicação na disciplina de Álgebra Linear, a qual não se empenhou até o final, e afirma que houve um aprendizado em relação aos conceitos de autovalores e autovetores. Além disso, destaca como as atividades com o GeoGebra LOGO inspiraram sua prática atual, fazendo com que	69. Experiência não adequada por parte do estudante com a disciplina de Álgebra Linear; 70. Aprendizado dos conceitos de autovalores e autovetores; 71. Atividade como inspiração para a prática docente presente;

eu já relatei bastante até a tartaruga em si sabe o LOGO no GeoGebra com muitas coisas que eu faço com minhas crianças lá no PIBID ou nas minhas aulas particulares. Tipo na minha aula particular, também é criança, eu já fui e já levei a tartaruga para ela, porque eu sou ansiosa. Aí já fui, já mostrei a tartaruga andando porque o meu aluno... hum, não consegue entender muito bem as formas geométricas e ele tá na parte de ângulos alternos internos, então a parte do que a tartaruga rotaciona foi bem legal para ele aprender, então eu não sabia que isso existia foi muito bom para minha formação também, que eu posso levar algo diferente, né para as crianças e foi bom para mim como pessoa porque eu aprendi a mexer no GeoGebra. Acho que aprendi.	trabalhasse com esse recurso, até então desconhecido por ela, no PIBID e em aulas particulares, e ao final destaca que criou mais familiaridade com o GeoGebra.	72. Desenvolvimento de uma familiaridade com o GeoGebra.
E5: Pra mim acho que também foi mais essa... nesse sentido, de você conseguir visualizar aquilo que você tá fazendo sabe? Então quando a gente fez a, a sequência assim bonitinha, e aí a gente fazia no GeoGebra e eu consegui enxergar aquilo que a gente estava fazendo, eu acho que é uma coisa que eu sinto falta quando eu faço uma matéria, como uma matéria de Geometria, Geometria Analítica, ou de até Cálculo, assim você ver uma coisa que você não conseguia enxergar uma aplicação pra aquilo e acho que a gente tendo que fazer as aplicações foi algo que ajudou muito, porque eu acho muito legal poder enxergar aquilo o que a gente está fazendo sabe, não... não só a forma... a fórmula dela, mas como é que ela funciona e também na... poder revisar os conteúdos de Geometria, de Álgebra para mim foi muito bom.	O estudante inicia destacando a possibilidade de visualizar o que está sendo estudado, ressaltando que é uma característica que poderia se fazer mais presente em outras disciplinas, destacando também a apresentação de aplicações com os conceitos discutidos, de modo que essas auxiliam a visualização e a discussão, além das atividades propiciarem um momento de revisão de diferentes conteúdos.	73. Trabalho com computador permite visualização dos casos estudados e de aplicações; 74. Atividades como momento de revisão de diferentes conceitos.
2 - Como vocês entendem que as tecnologias digitais influenciaram, de forma positiva e negativa, as compreensões das ideias de Autovalores e Autovetores?		
E4: O positivo é que não precisou ficar calculando tudo aquilo né, só escrever autovetor e “pa”. E3: Esse é um ponto, agora se me perguntar aí se eu sei calcular autovalor e autovetor na mão... E4: Não sei também. E3: Beijos, tchau até a próxima. E4: Eu aprendi o que é mas calcular lá na mão não, eu falo assim, “pode me trazer um GeoGebra”.	A estudante traz como característica positiva não realizar os cálculos manualmente dos autovalores e autovetores, os quais eram calculados pelo GeoGebra através de um comando. Em seguida, ela e uma colega ressaltam que não sabiam calcular manualmente, de modo que afirma ter aprendido o conceito, mas não o cálculo, criando uma certa dependência da calculadora.	75. GeoGebra como calculadora de autovalores e autovetores; 76. Experiência não adequada por parte do estudante com a disciplina de Álgebra Linear; 77. Dependência do computador e dos cálculos realizados por ele.

E3: É, assim... e também o... a diferença do <i>online</i> pro instalado, de computador, foi gritante.	A estudante ressalta a diferença de versões do GeoGebra trabalhadas na atividade e da qualidade do <i>hardware</i> , e como impactou no desenvolvimento da atividade.	78. Qualidade do <i>hardware</i> e da versão do <i>software</i> impactando diretamente do desenvolvimento da atividade.
P: A positiva é que ele calcula, e a negativa? E4: É que daí eu não aprendi a calcular na mão. E1: A negativa é que ele calcula (risos).	Questionados pelo pesquisador sobre as características negativas de se trabalhar com o computador, os estudantes compreendem que o cálculo ser realizado pelo computador pode ser algo positivo e negativo ao mesmo tempo, pois não exercitaram o cálculo manual nas atividades.	79. GeoGebra como calculadora de autovalores e autovetores; 80. Experiência não adequada por parte do estudante com a disciplina de Álgebra Linear; 81. Dependência do computador e dos cálculos realizados por ele.
E3: Mas eu acho que é mais fácil de exemplificar, de visualizar porque você vai lá e vai fazer na mão, às vezes sai tudo tipo, muito mais aproximado e tipo, "imagina que é isso" e aí não, ele tá "é isso".	A estudante ressalta a facilidade em trabalhar com diferentes exemplos e visualizá-los, algo que sem o computador seja mais difícil em articular.	82. Trabalho com computador permite exploração de diferentes casos e visualização.
E1: Se você quer testar mais um exemplo não é tão rápido tipo... Ah, olha esse exemplo e agora coloca outro vetor... não, você tem que falar vamos pensar em outro exemplo aí calcula..	Comparando com o estudo manual, o estudante compreende que o trabalho com tecnologias permite o estudo de diferentes exemplos de maneira mais rápida.	83. Trabalho com computador permite dinamicidade da exploração de diferentes exemplos.
E1: Pra mim aquele, aquele momento que a gente estava falando dos vetores canônicos lá, que ele apontava como uma solução, e na verdade era qualquer um, aquilo ali, eu acho que é um ponto, um ponto negativo de certa forma, porque, pô, você tá fazendo tudo ali rápido, vamos dizer assim, é para ver, você não vai olhar para uma matriz, você vai desconfiar que ela não é única ali, é só, que ela na verdade é um sistema com várias soluções, né? Isso eu achei negativo.	O estudante relembra um momento da atividade 2, onde os autovetores calculados correspondiam a base canônica, mas na verdade todos os vetores eram autovetores, e compreende esse momento como algo negativo, diante da necessidade de verificar o resultado apresentado pelo GeoGebra.	84. Necessidade de verificar o resultado do cálculo do GeoGebra.
3- Quais recursos vocês consideram mais úteis para compreender os conceitos de Autovalores e Autovetores?		
E1: Criar a matriz, porque se a gente não conseguir criar matriz não ia conseguir calcular os autovetores e autovalor... calcular. E4: É, calcular.	Os estudantes compreendem a escrita de matrizes no GeoGebra como um recurso útil para o estudo dos autovalores e autovetores, bem como o comando de cálculo desses dois.	85. Recursos do GeoGebra no estudo de autovalores e autovetores – escrita de matrizes e calculadora.
E1: Conseguir plotar vetor. E4: E você, é isso que eu ia falar, e você colocar ele como vetor.	Seguindo com os recursos que auxiliam no estudo de autovetores, os estudantes destacam a possibilidade de visualizar o autovetor como vetor no plano.	86. Recurso do GeoGebra no estudo de autovetores – visualizar o autovetor como vetor no plano.
E3: E dá para pôr a reta em cima do vetor.	A estudante destaca a possibilidade de estudar a reta que tem como vetor diretor o autovetor.	87. Visualização da reta a partir do autovetor.

E1: Conseguir ver as coisas todas juntas ali, eu acho que é o que facilita.	O estudante destaca a possibilidade de visualizar diferentes objetos de estudo juntos, em janelas distintas ou iguais, de modo que facilite o estudo.	88. Visualização de diferentes objetos de estudo como facilitador no estudo.
---	---	--

Fonte: Autoria própria.

5.2.2 *Análise Nomotética*

Apresentamos, na presente subseção, a convergência das ideias nucleares em categorias abertas que constituem a estrutura do fenômeno investigado, qual seja as nossas compreensões a partir do estudo de autovalores e autovetores com TDICs realizado pelos alunos.

Após o movimento de Análise Ideográfica abordado anteriormente, para iniciar o movimento de convergência das 356 ideias nucleares listadas com base nas falas dos estudantes no desenvolvimento das atividades e nas perguntas de encerramento, olhamos separadamente para cada uma das práticas. Com as ideias nucleares identificadas, reunimos as que compreendemos ser semelhantes no modo de escrita ou no significado, de modo que interpretamos que o conjunto de ideias revelavam diferentes características de um mesmo tema, assunto ou comportamento. Conforme seus resultados apareciam, muitas vezes foi necessário retomar as falas dos estudantes, relembrar discussões e como chegamos à identificação específica.

Após a reunião das ideias nucleares em diferentes grupos, quer tratem de assuntos ou de comportamentos, a exemplo das discussões envolvendo conceitos de Álgebra Linear e das posturas dos estudantes conforme resolviam as atividades e criavam uma familiaridade com os novos recursos, buscamos recorrentemente refletir, a partir de sucessivas leituras, sobre o que todas as ideias reunidas nos revelavam em comum, mesmo separadas em diferentes grupos. Tendo isso em mente, foram reunidas ideias que aparentemente não dialogam, mas interpretamos que essa diversidade nos revela características de um mesmo cenário.

O resultado desse movimento culminou em duas categorias abertas: “O caráter investigativo do estudo” e “Uma formação que vai além do estudo do conceito: aspectos do passado, presente e futuro”. Reiteramos a possibilidade de que uma ideia nuclear esteja presente em mais de uma categoria, visto que elas tratam da nossa compreensão do fenômeno investigado, havendo uma interconexão entre elas, que não se sobrepõem uma à outra.

Esse movimento também está organizado por meio de um quadro, no qual, na primeira coluna, retomamos as ideias nucleares e, na segunda coluna, apresentamos as categorias abertas. Atribuímos duas cores (verde e azul, respectivamente) para a segunda coluna, visando a facilitar

a identificação das categorias com as respectivas ideias nucleares que as compõem. As ideias nucleares foram identificadas com o código “AZINW.”, que corresponde à Atividade Z e a Ideia Nuclear W, seguindo a identificação feita na etapa anterior.

Quadro 4 – Análise Nomotética

A1IN9. Alteração do sistema a partir do cálculo realizado pelo GeoGebra através do botão.	O caráter investigativo do estudo.
A1IN28. Complementações de ideias dos pares.	
A1IN11. Compreendem o código ao estabelecer relações entre a situação problema.	
A1IN5. Compreendem o código programado exemplificando com uma situação investigada.	
A1IN8. Compreendem o código relacionando com as compreensões do sistema proposto.	
A1IN10. Consulta aos demais sobre o que foi dito.	
A1IN31. Criação de hipóteses.	
A1IN13. Discussão em grupo com o objetivo de esclarecer dúvidas.	
A1IN1. Discussão em grupo para validação e complementação de ideias.	
A1IN6. Discussão em grupo retomando o que foi discutido.	
A1IN18. Esclarece o que foi dito, explorando o botão e suas consequências.	
A1IN21. Exemplificação referenciando outro ponto.	
A1IN53. Exploração da situação alterando os valores.	
A1IN22. Exploração de diferentes casos.	
A1IN15. Exploração de diferentes casos.	
A1IN12. Exploração de novos cenários de investigação.	
A1IN4. Exploração de um caso específico e suas consequências.	
A1IN16. Exploração do botão e suas consequências nos pontos.	
A1IN32. Exploração do botão para validar ou justificar as hipóteses levantadas.	
A1IN35. Exploramos novos casos, alterando as condições iniciais.	
A1IN25. Exploram o botão na tentativa de elaborar conjecturas.	
A1IN36. Identifica um padrão e uma proporção.	
A1IN23. Identificam o comportamento dos pontos.	
A1IN30. Identificam padrão como crescimento linear.	
A1IN33. Identificam padrão referente ao crescimento constante.	
A1IN34. Identificam um crescimento linear.	
A1IN3. Início de conjecturas a partir da exploração dos botões.	
A1IN52. Interação com os pares para complementar as ideias.	
A1IN26. Levantamento de hipóteses.	
A1IN54. Levantamento e verificação de hipóteses.	
A1IN14. Observam os dados em diferentes janelas do GeoGebra: Janela de Álgebra e de Visualização.	

A1IN19. Reconhecem padrão, descrito por uma reta linear.	
A1IN2. Reconhecem padrões.	
A1IN24. Reconhecem padrões.	
A1IN27. Reconhecem padrões.	
A1IN17. Reconhecem um padrão enquanto exploram um caso específico.	
A1IN20. Relações com os dados do enunciado com o ponto explorado.	
A1IN45. Utilizam a internet como meio de pesquisa sobre a definição de Autovalor.	
A1IN44. Autovalor como escalar, proporção.	
A1IN47. Dificuldade em interpretar o significado do Autovalor.	
A1IN46. Interpretação da definição de Autovalor e Autovetor, sendo o Autovalor como constante.	
A1IN50. Relaciona o autovetor com a situação proposta.	
A1IN39. Temas e tópicos que remetem à Matriz e Álgebra Linear.	
A1IN45. Utilizam a internet como meio de pesquisa sobre a definição de Autovalor.	
A2IN106. A interpretação do cálculo do GeoGebra comparado com o cálculo manual.	
A2IN75. Acessam ao site do Symbolab.	
A2IN74. Acessam um site de calculadora de matrizes.	
A2IN38. Acesso à internet como possibilidade ao se trabalhar com Tecnologias.	
A2IN136. Alteração buscando otimização no trabalho com as informações.	
A2IN1. Alteram os dados iniciais visando uma melhor exploração da atividade.	
A2IN86. Antropomorfização da tecnologia.	
A2IN156. Antropomorfização da tecnologia.	
A2IN154. Antropomorfização do <i>software</i> .	
A2IN187. Arredondamento de valores, compreendidos como corretos.	
A2IN24. Busca pelo código generalizado.	
A2IN85. Busca por uma justificativa do não funcionamento .	
A2IN8. Celular como apoio na consulta de orientações das atividades.	
A2IN150. Celular como meio de registro a partir de fotos.	
A2IN3. Celular como meio de registro e consulta para dúvidas.	
A2IN45. Celular como um modo de pesquisa e acesso à internet.	
A2IN185. Comparam com o cálculo manual.	
A2IN184. Comparam com resultados anteriores da atividade, explorações já realizadas.	
A2IN197. Compreensão a partir da pesquisa.	
A2IN15. Compreensão de diferentes objetos do GeoGebra: Desenho e polígono.	
A2IN11. Concorde com as considerações feita pela colega.	

A2IN146. Conjectura equivocada.
A2IN186. Conjectura para explicar os resultados do <i>software</i> .
A2IN51. Conjectura relacionando o escalar com a matriz da base canônica.
A2IN133. Conjectura sobre a transformação linear.
A2IN180. Conjecturam sobre a ideia dos vetores serem autovetores.
A2IN124. Conjecturas equivocadas.
A2IN5. Consulta à dupla sobre o que foi dito.
A2IN118. Convivência de diferentes ideias.
A2IN110. Criação de hipóteses comparando os resultados dos cálculos de duas transformações lineares.
A2IN112. Desacordo entre o grupo.
A2IN130. Diferentes recursos com mesma funcionalidade disponíveis no GeoGebra.
A2IN188. Exploração de diferentes casos.
A2IN204. Exploração de diferentes casos.
A2IN207. Exploração de diferentes casos.
A2IN127. Exploram diferentes casos .
A2IN42. Fotos do celular como meio de registro.
A2IN43. Fotos do celular como meio de registro.
A2IN171. Generalização dos resultados.
A2IN29. GeoGebra como fonte de orientação para os comandos do próprio <i>software</i> .
A2IN173. Google como fonte de busca e informação.
A2IN30. Google como fonte de busca por explicações sobre Transformações Lineares.
A2IN27. Google como fonte de busca por informações.
A2IN70. Google como fonte de busca por uma calculadora <i>online</i> .
A2IN33. Google como fonte de busca, sites da Internet como meios de consulta às informações.
A2IN113. Google como fonte de informação, com preferência para aba de imagens.
A2IN23. Google como fonte de informação.
A2IN72. Google como forma de busca por uma calculadora.
A2IN196. Google como meio de busca e fonte de informação.
A2IN14. Google como meio de consultar e sanar dúvidas, buscando por um comando que realize o desejado.
A2IN7. Google como meio de pesquisa e fonte de informações.
A2IN158. Google imagens como fonte de informação.
A2IN189. Google imagens como fonte de informação.
A2IN31. Imagens do Google como fonte de respostas.
A2IN114. Informação na internet dúbia.
A2IN77. Informações do site da calculadora como instruções e soluções para questões discutidas.
A2IN4. Instruções e recursos do próprio <i>software</i> .
A2IN128. Intervenção do pesquisador a fim de dar sequência nas discussões.

A2IN179. Intervenção do pesquisador para avançar nas discussões e conclusões.
A2IN181. Intervenção do pesquisador para avançar nas discussões e conclusões.
A2IN73. <i>Layout</i> de plataformas e sua confiabilidade.
A2IN95. O pesquisador instiga uma análise da situação apresentada.
A2IN28. Paint como recurso do computador para registro e explanação das ideias.
A2IN115. Processo salvo e passível de ser revisitado.
A2IN17. Reconhecem padrões.
A2IN21. Recurso do GeoGebra como auxiliar na escrita do código.
A2IN6. Recursos disponíveis no GeoGebra auxiliando na organização do código.
A2IN25. Recursos do GeoGebra auxiliando na escrita do código.
A2IN37. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração da transformação geométrica.
A2IN153. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração e validação de ideias.
A2IN176. Relação entre a variável, programação e desenho.
A2IN208. Relação entre ângulos já investigados.
A2IN143. Relação entre o resultado e a transformação linear.
A2IN120. Relação entre transformação e base canônica.
A2IN139. Resultados esperados não condizentes com o apresentado.
A2IN140. Resultados esperados não condizentes com o apresentado.
A2IN152. Resultados obtidos não condizentes com os esperados.
A2IN76. Tecnologia fazendo algo por eles, algo que, de princípio, eles deveriam fazer.
A2IN141. Tecnologias como fonte de benefícios.
A2IN151. Trabalho em grupo com atividades diferentes de modo a dar sequência na atividade.
A2IN18. Utilizam o Código inicial como base para demais explorações.
A2IN34. Analisam o conceito de Transformações Lineares.
A2IN98. Autovalor como escalar.
A2IN94. Autovalor como o escalar decorrente da transformação linear.
A2IN91. Autovetores como base canônica.
A2IN93. Autovetores como base canônica.
A2IN97. Características de vetores: direção e sentido.
A2IN54. Comparação entre comportamento de vetores e a generalização do discutido.
A2IN52. Comparação entre o comportamento após a transformação de diferentes vetores.
A2IN47. Compreende a relação entre o número de autovalores com a dimensão do espaço vetorial.
A2IN53. Compreende a transformação reflexão.
A2IN55. Compreende a transformação reflexão.

A2IN66. Compreende o cálculo matricial de uma transformação linear.	
A2IN68. Compreende o cálculo matricial de uma transformação linear.	
A2IN96. Compreendem a transformação linear reflexão.	
A2IN119. Compreendem a transformação linear reflexão.	
A2IN90. Compreendem o autovalor como escalar, já discutido na transformação.	
A2IN16. Compreendem o significado da transformação geométrica “Reflexão”.	
A2IN182. Compreendem os vetores como autovetores.	
A2IN201. Conjugado de um número complexo.	
A2IN88. Correspondência de autovalor com seu respectivo autovetor.	
A2IN109. Definição da matriz da transformação.	
A2IN100. Diferentes atribuições de significados para a transformação.	
A2IN69. Diferentes palpites referente à ordem da matriz da transformação linear estudada.	
A2IN126. Dificuldade em interpretar os autovalores e autovetores.	
A2IN125. Dificuldade na interpretação dos autovalores e autovetores.	
A2IN123. Dificuldade na interpretação dos autovalores e autovetores.	
A2IN195. Dificuldade na interpretação dos autovalores e autovetores.	
A2IN134. GeoGebra como calculadora da matriz transposta.	
A2IN41. GeoGebra como calculadora de autovalores e autovetores.	
A2IN131. Identifica a ortogonalidade entre os autovetores.	
A2IN103. Identifica a solução de um sistema linear.	
A2IN50. Identifica o escalar menos um multiplicando diferentes vetores na transformação.	
A2IN89. Identificação da base canônica.	
A2IN183. Identificam e compreendem os autovetores.	
A2IN166. Identificam um número complexo e seu conjugado.	
A2IN81. Identificam uma das propriedades de vetores: multiplicação por escalar.	
A2IN62. Importância da interpretação sobre o resultado calculado pelo GeoGebra.	
A2IN149. Interpreta a ideia de autovetores.	
A2IN49. Interpreta o resultado indicado pelo GeoGebra.	
A2IN92. Interpretação do cálculo identificando um autovalor.	
A2IN87. Interpretação dos cálculos do GeoGebra.	
A2IN122. Interpretação equivocada dos autovetores a partir de uma generalização equivocada de resultados.	

A2IN210. Interpretam a transformação linear e relação com resultados de matrizes.	
A2IN148. Interpretam a transformação linear reflexão.	
A2IN165. Interpretam o cálculo realizado pelo GeoGebra.	
A2IN200. Interpretam o cálculo realizado pelo GeoGebra.	
A2IN169. Interpretam o resultado calculado.	
A2IN178. Interpretam os autovalores e autovetores – razão de homotetia e base canônica.	
A2IN142. Interpretam os cálculos realizados pelo GeoGebra.	
A2IN144. Interpretam os cálculos realizados pelo GeoGebra.	
A2IN138. Interpretam os resultados da calculadora <i>online</i> .	
A2IN111. Leitura e interpretação do resultado apresentado pelo GeoGebra.	
A2IN116. Leitura e interpretação do resultado apresentado pelo GeoGebra.	
A2IN104. Necessidade de interpretar os resultados apresentados pelo GeoGebra.	
A2IN44. Necessidade de relembrar as definições de autovalores e autovetores.	
A2IN48. Pensa sobre o significado de uma matriz de transformação linear.	
A2IN46. Pondera sobre o resultado apresentado pelo <i>software</i> e o conceito de autovalor.	
A2IN170. Propriedade de autovetores: número complexo e seu conjugado.	
A2IN168. Propriedades de autovalores: número complexo e seu conjugado.	
A2IN35. Propriedades de vetores.	
A2IN203. Questiona sobre a multiplicação entre números complexos.	
A2IN205. Relação entre a rotação, matriz identidade e suas propriedades.	
A2IN22. Relações com conceitos de Álgebra Linear: produto escalar.	
A2IN26. Retoma a ideias sobre relações trigonométricas discutidas em Álgebra Linear.	
A2IN132. Visualiza o autovetor como vetor da reta.	
A2IN99. Visualizam a transformação linear de reflexão mas não relacionam os vetores como autovetores.	
A3IN34. Antropomorfização da tecnologia.	
A3IN20. Celular como um modo de pesquisa e acesso à internet.	
A3IN49. Compreensão, com a visualização no <i>software</i> , de que a reta, entendida com uma regressão linear, seria uma boa aproximação dos pontos obtidos.	
A3IN13. Criação de hipótese.	
A3IN29. Criação de hipóteses a partir da exploração de recursos do <i>software</i> .	
A3IN57. Elaboração de novas hipóteses como consequência da validação anterior.	
A3IN62. Elaboração de uma nova questão a ser investigada.	

A3IN32. Exploração de diferentes casos relacionados ao problema para a criação de diferentes hipóteses.
A3IN30. Exploração de diferentes pontos e seu comportamento com a reta com auxílio do zoom.
A3IN54. Exploração de diferentes pontos e seu comportamento com a reta com auxílio do zoom.
A3IN5. Exploração de diferentes resultados através dos cálculos realizados pelo computador.
A3IN14. Exploração de diversos pontos.
A3IN31. Exploração dos dados da atividade com o recurso do <i>software</i> para validação de hipóteses.
A3IN55. Exploração e validação de hipóteses.
A3IN18. Explorando a escrita de matriz com o objetivo de auxiliar no desenvolvimento da atividade.
A3IN23. Fotos do celular como meio de registro.
A3IN40. GeoGebra como forma de generalização de ideias matemáticas.
A3IN12. Google como meio de pesquisa e fonte de informações.
A3IN9. Google imagens como fonte de informação.
A3IN44. Google imagens como fonte de informação.
A3IN42. Identifica os autovalores na expressão da função e reconhece o resultado obtido em uma pesquisa realizada no Google anteriormente.
A3IN11. Informação da inteligência artificial dúbia.
A3IN1. Internet como meio de acesso à informação.
A3IN10. Internet e inteligência artificial como meio de acesso à informação.
A3IN60. Interpretação e validação do resultado apresentado.
A3IN53. Levantamento de hipóteses.
A3IN65. Levantamento de uma nova questão a ser investigada.
A3IN52. Levantando hipóteses e explorando diferentes pontos, analisando o comportamento da reta com o auxílio do zoom.
A3IN64. Mobilização com outra tecnologia – Wolfram.
A3IN84. Necessidade de verificar o resultado do cálculo do GeoGebra.
A3IN78. Qualidade do <i>hardware</i> e da versão do <i>software</i> impactando diretamente do desenvolvimento da atividade.
A3IN36. Questionamento quanto a validação dos cálculos apresentados pelo <i>software</i> .
A3IN47. Recursos do GeoGebra auxiliando na elaboração e exploração (validação) da hipótese de que a reta é uma boa aproximação dos pontos estudados.
A3IN51. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração de diferentes casos.
A3IN58. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração de novas investigações.
A3IN63. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração de novas investigações.
A3IN46. Recursos do GeoGebra auxiliando na identificação e exploração.
A3IN6. Recursos do GeoGebra auxiliando no desenvolvimento da atividade.

A3IN7. Recursos do GeoGebra auxiliando no desenvolvimento da atividade.	
A3IN8. Recursos do GeoGebra auxiliando no desenvolvimento da atividade.	
A3IN83. Trabalho com computador permite dinamicidade da exploração de diferentes exemplos.	
A3IN68. Trabalho com computador permite dinamicidade, exploração e visualização.	
A3IN82. Trabalho com computador permite exploração de diferentes casos e visualização.	
A3IN24. Trabalho com diferentes janelas do GeoGebra.	
A3IN56. Validação da hipótese de se a reta é uma boa aproximação dos pontos estudados.	
A3IN39. Visualizam somente o que corresponde ao que discutem e investigam.	
A3IN75. GeoGebra como calculadora de autovalores e autovetores.	
A3IN79. GeoGebra como calculadora de autovalores e autovetores.	
A3IN35. GeoGebra como calculadora para matrizes.	
A3IN59. GeoGebra como calculadora.	
A3IN22. Identifica os autovalores como vetores e destaca como deve ser escrito no <i>software</i> .	
A3IN27. Identifica que os autovetores estão em quadrantes diferentes e levanta uma hipótese para justificativa.	
A3IN21. Identifica um autovalor como o número de ouro.	
A3IN45. Identificam a ortogonalidade entre os autovetores, trabalhando com a possibilidade do GeoGebra de calcular o produto interno.	
A3IN48. Interpretação dos resultados dado pelo GeoGebra, identificando o número de ouro como um autovalor e presente nas coordenadas do autovetor.	
A3IN60. Interpretação e validação do resultado apresentado.	
A3IN84. Necessidade de verificar o resultado do cálculo do GeoGebra.	
A3IN33. Reconhece o autovetor como vetor diretor e suas implicações para a aproximação dos pontos.	
A3IN86. Recurso do GeoGebra no estudo de autovetores – visualizar o autovetor como vetor no plano.	
A3IN61. Recursos do GeoGebra auxiliando na compreensão da função e na exploração da sequência.	
A3IN85. Recursos do GeoGebra no estudo de autovalores e autovetores – escrita de matrizes e calculadora.	
A3IN17. <i>Software</i> realizando os cálculos dos autovalores e autovetores.	
A3IN87. Visualização da reta a partir do autovetor.	
A1IN51. Compreensão do crescimento descrito por funções conhecidas pelos estudantes.	Uma formação que vai além do estudo do conceito: aspectos do passado, presente e futuro
A1IN56. Criação de repertório do Licenciando, se colocando no lugar de professor em determinada disciplina.	
A1IN55. Discussão em grupo para os ausentes.	

A1IN58. Domínio dos conteúdos das disciplinas destacadas.	
A1IN57. Estabelecimento de relações entre conteúdos de Equações de Diferença e Equações Diferenciais .	
A1IN41. Experiência não adequada por parte do estudante com a disciplina de Álgebra Linear.	
A1IN40. Não lembram do conteúdo de Autovalores e Autovetores a partir da expressão escrita.	
A1IN38. Palpites na tentativa de identificar o conceito.	
A1IN42. Palpites na tentativa de identificar o conteúdo.	
A1IN43. Palpites sobre diferentes temas tratados em Álgebra Linear.	
A1IN37. Percebem que as discussões se tratam de algum conceito de Matemática, mas não conseguem especificar qual exatamente.	
A1IN7. Relação entre as ideias propostas na atividade e as ideias discutidas na disciplina de Equações de Diferença.	
A1IN29. Relações entre o explorado com conceitos conhecidos (parábola e exponencial).	
A1IN49. Compreende o Autovetor como um representante de um conjunto de vetores.	
A1IN48. Explicam o significado sobre direção de vetores.	
A1IN37. Percebem que as discussões se tratam de algum conceito de Matemática, mas não conseguem especificar qual exatamente.	
A1IN47. Dificuldade em interpretar o significado do Autovalor.	
A2IN79. Ajuda do pesquisador quando existe dúvida em relação à tecnologia.	
A2IN83. Ajuda do pesquisador quando existe dúvida em relação à tecnologia.	
A2IN12. Apontam que programar pode ser trabalhoso e exige uma familiaridade.	
A2IN145. Comparação com sua experiência na disciplina.	
A2IN10. Construção de repertório para a carreira docente.	
A2IN13. Construção de repertório para a carreira docente.	
A2IN105. Criação de repertório do estudante visando práticas futuras.	
A2IN80. Dialoga com o pesquisador sobre o comportamento da transformação linear.	
A2IN121. Diálogo com pesquisador corrigindo as considerações dos estudantes feitas previamente.	
A2IN58. Diálogo com pesquisador sobre conteúdos de Álgebra Linear.	
A2IN71. Experiência com Tecnologias em momentos anteriores, inclusive na disciplina de Álgebra Linear.	
A2IN2. Experiência em atividades anteriores como solução para os problemas presentes.	
A2IN9. Experiência na disciplina de Álgebra Linear, de modo que esteja lidando com termos familiares.	
A2IN84. Familiaridade com as possibilidades do <i>software</i> .	

A2IN155. Interação com pesquisador auxiliando nas conclusões.	
A2IN39. Interação com pesquisador sobre procedimentos para avançar nas discussões.	
A2IN157. Não compreensão das ações do <i>software</i> .	
A2IN129. Não exploração dos recursos disponíveis no <i>software</i> .	
A2IN82. Não familiaridade com as possibilidades do <i>software</i> .	
A2IN60. Não recorda de como se calcula o autovalor.	
A2IN78. Necessidade da familiaridade com a plataforma e tecnologia.	
A2IN175. Necessidade da familiaridade com o <i>software</i> .	
A2IN160. Necessidade da familiaridade com os recursos do <i>software</i> .	
A2IN102. Necessidade de Intervenção do pesquisador.	
A2IN159. Pesquisador auxiliando em momentos de dúvida.	
A2IN192. Pesquisador auxiliando na interpretação.	
A2IN199. Pesquisador auxiliando nas conclusões das discussões.	
A2IN163. Pesquisador auxiliando nas conclusões.	
A2IN172. Pesquisador auxiliando nas conclusões.	
A2IN174. Pesquisador auxiliando o trabalho com tecnologias.	
A2IN135. Pesquisador intervindo nas conclusões.	
A2IN137. Pesquisador intervindo para sanar dúvidas e propor soluções.	
A2IN117. Pesquisador passível de ser consultado para dúvidas.	
A2IN20. Recordação de duas características de vetores: sentido e direção.	
A2IN190. Recordam de conteúdos de Geometria Analítica.	
A2IN167. Recordam resultados estudados na disciplina de Álgebra Linear.	
A2IN191. Registra a realização da disciplina a distância durante o ensino emergencial como uma dificuldade.	
A2IN177. Relação com outras disciplinas e conteúdos – Geometria.	
A2IN19. Relaciona com conceitos da disciplina de Geometria Analítica.	
A2IN202. Relações com a disciplina de Funções de variável complexa.	
A2IN161. Relações com outras disciplinas e conteúdos – Funções de variável complexa.	
A2IN57. Relato de menor dedicação na disciplina no período do conteúdo de autovalores e autovetores.	
A2IN63. Ressalvas com discussões que tratem de conceitos da Álgebra Linear.	
A2IN108. Retomam discussões anteriores quando se deparam com questões semelhantes.	
A2IN36. Argumenta com base nos conceitos estudados em Álgebra Linear.	
A2IN59. Compreende a relação entre autovetor com autovalor.	

A2IN61. Compreende parcialmente o processo de cálculo dos autovalores.	
A2IN107. Conhecimento parcial sobre os procedimentos do cálculo dos autovalores.	
A2IN193. Dificuldade com números complexos.	
A2IN164. Dificuldade com números complexos.	
A2IN194. Dificuldade com números complexos.	
A2IN206. Dificuldade em interpretar e lidar com números complexos – abstração.	
A2IN209. Dificuldade em interpretar números complexos – abstração.	
A2IN40. Dificuldade em realizar os procedimentos de cálculo referente à matriz de uma transformação linear.	
A2IN198. Dificuldade na interpretação dos números complexos.	
A2IN64. Dificuldades em definir a matriz de uma transformação linear.	
A2IN65. Discussão com o pesquisador sobre conceitos de Álgebra Linear.	
A2IN67. Discussão com o pesquisador sobre conceitos de Álgebra Linear.	
A2IN101. Discussão sobre o comportamento dos vetores.	
A2IN32. Entendem que há abordagens diferentes para transformações lineares, relacionado ao nível de escolaridade.	
A2IN56. Falta de domínio do conteúdo de autovalores.	
A2IN128. Intervenção do pesquisador a fim de dar sequência nas discussões.	
A2IN179. Intervenção do pesquisador para avançar nas discussões e conclusões.	
A2IN181. Intervenção do pesquisador para avançar nas discussões e conclusões.	
A2IN147. Não apresenta uma compreensão sobre autovalores e autovetores, de modo que não identifica se tratar de um autovetor.	
A2IN162. Números complexos como algo difícil.	
A3IN71. Atividade como inspiração para a prática docente presente.	
A3IN74. Atividades como momento de revisão de diferentes conceitos.	
A3IN69. Experiência não adequada por parte do estudante com a disciplina de Álgebra Linear.	
A3IN76. Experiência não adequada por parte do estudante com a disciplina de Álgebra Linear.	
A3IN80. Experiência não adequada por parte do estudante com a disciplina de Álgebra Linear.	
A3IN66. Experiência significativa para formação.	
A3IN67. Novas interpretações sobre conceitos de Álgebra Linear.	
A3IN28. Relação com outras disciplinas e conteúdos – Geometria Analítica.	
A3IN3. Relação dos conceitos estudados na atividade com a educação básica.	

A3IN73. Trabalho com computador permite visualização dos casos estudados e de aplicações.	
A3IN70. Aprendizado dos conceitos de autovalores e autovetores.	
A3IN77. Dependência do computador e dos cálculos realizados por ele.	
A3IN81. Dependência do computador e dos cálculos realizados por ele.	
A3IN50. Identificação, a partir da intervenção do pesquisador, do teorema relacionado a ortogonalidade dos autovetores.	
A3IN2. Relação entre Álgebra Linear e diferentes conceitos matemáticos.	
A3IN88. Visualização de diferentes objetos de estudo como facilitador no estudo.	
A3IN26. A importância da familiarização com o <i>software</i> para o desenvolvimento da atividade proposta.	
A3IN25. A importância do domínio dos modos de se utilizar os comandos do <i>software</i> .	
A3IN72. Desenvolvimento de uma familiaridade com o GeoGebra.	
A3IN15. Familiaridade com o <i>software</i> no desenvolvimento das atividades envolvendo o conceito de autovalores e autovetores.	
A3IN16. Familiaridade com o <i>software</i> no desenvolvimento das atividades envolvendo o conceito de autovalores e autovetores.	
A3IN4. Familiaridade com <i>software</i> e possibilidades com o computador.	
A3IN41. Não familiarização com os comandos e possibilidades do GeoGebra.	
A3IN38. Destaque sobre a importância da escrita correta do comando no <i>software</i> .	
A3IN19. Experiência em atividades anteriores auxiliando no desenvolvimento da nova atividade proposta.	

Fonte: Autoria própria.

6 DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS

Apresentamos, neste capítulo, nossas compreensões sobre as categorias identificadas e os modos pelos quais elas expõem para nós o sentido do interrogado. Para tanto, dialogamos com diferentes pesquisas da Educação Matemática, retomamos as expressões dos sujeitos e expomos as maneiras, a partir da nossa interpretação, que interligam as diferentes ideias nucleares analisadas.

6.1 O caráter investigativo do estudo

Essa categoria é composta pelas ideias nucleares que tratam de momentos em que os estudantes realizam alterações, explorações de diferentes casos, comparações, bem como reconhecem padrões, pesquisam na internet, fazem testes, muitas vezes em consequência de discussões em grupo e de criação de hipóteses, as quais buscam validar ou não. Entendemos que estes comportamentos são características que compõem o processo investigativo.

Compreendemos também que a presente categoria apresenta aproximações, assim como algumas divergências, com o que alguns autores discutem sobre investigações matemáticas na Educação Matemática. No entanto, não temos a intenção de delimitar o estudo desenvolvido em um método de trabalho e, por isso, buscamos descrever e enfatizar pontos em comum que nos permitem dialogar com os autores que defendem o trabalho investigativo no ensino de Matemática.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 20) abordam quatro momentos principais do que compreendem como uma investigação matemática:

o primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Os autores compreendem que o primeiro momento, em sua maioria, tem que partir de questões abertas, ou seja, “os objetivos nem as tarefas podem ser completamente definidos” (Ponte et al., 1998, p. 17), e essas questões devem, de preferência, ser definidas pelos estudantes, podendo, entretanto, ter como ponto de partida um questionamento proposto pelo professor (Ponte et al., 1998). Ainda que o realizado com os estudantes não corresponda totalmente ao exposto, visto que tínhamos um objetivo estabelecido pelo pesquisador para cada

atividade, compreendemos que os demais momentos compartilham de características semelhantes, justificando a nossa percepção do trabalho como um processo investigativo.

Ponte et al. (1998) apresentam algumas características desse processo, como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, refletir e generalizar, processo semelhante ao das ideias nucleares reunidas. Assim, durante a realização das atividades, os estudantes mostravam essas características e, mesmo com um objetivo final definido, investigavam outras questões propostas por eles.

Compreendemos que a investigação extrapola o que é dado no enunciado, uma vez que o trabalho com o computador amplia as informações que podem ser úteis para a realização da atividade proposta, como dito anteriormente, alterando valores, explorando novos casos, novas questões, retomando conceitos, criando e validando hipóteses.

Desenvolvendo as atividades com o GeoGebra, por exemplo, surgiu a necessidade de os estudantes compreenderem diferentes modos de representação de um mesmo conceito ou situação, relacionando o enunciado com o que estava sendo feito no *software*, o que fez com que se dessem conta das diferentes possibilidades que estavam à disposição diante do trabalho com o computador, como a calculadora de autovalores e autovetores e a conexão das diferentes janelas, tudo isso enquanto discutiam e interpretavam, isto é, investigavam.

Hillel (2000) destaca que uma das dificuldades evidenciadas pelos estudantes na disciplina de Álgebra Linear é justamente conseguir relacionar as diferentes linguagens, destacando as linguagens abstrata, geométrica e algébrica. Assim, compreendemos que o GeoGebra propicia um ambiente em que os estudantes se deparam com essa necessidade de relacionar a linguagem algébrica com a geométrica na execução das atividades, através das diferentes janelas do *software*. Nomura e Bianchini (2014, p. 184) asseveram que “concluimos não ser comum nem tampouco habitual que os alunos representem os autovetores geometricamente”. Nesse sentido, entendemos que essa seja uma característica positiva da investigação dos autovalores e autovetores com TDICs, uma vez que, lidando com diferentes representações de um objeto, surge a necessidade de estabelecer relações entre as diferentes linguagens e conceitos, movimento esse que não é automático (Stewart; Thomas, 2006).

Estar nesse ambiente também gerou uma mudança no modo de lidar com determinados valores, fazendo com que, em certos casos, recorressem ao zoom para ampliar e analisar os valores e a posição dos pontos, como em “A3IN30. Exploração de diferentes pontos e seu comportamento com a reta com auxílio do zoom” e no arredondamento de valores como algo aceitável, como em “A2IN187. Arredondamento de valores, compreendidos como corretos”.

Mesmo que as atividades tivessem como foco sua realização no GeoGebra, vimos que esse movimento investigativo com TDICs fez com que os estudantes mobilizassem outras possibilidades, acessando, por exemplo, o Symbolab, o WolframAlpha e outros sites para consultar diferentes calculadoras de matrizes, o Google e o ChatGPT para encontrar informações e esclarecer dúvidas, o Paint para rascunho e espaço para os cálculos realizados por eles, e mobilização com o celular para fotos como meio de registro, assim como para acesso à internet e acompanhamento das orientações da atividade. Assim, tendo em vista a quantidade de *software* e aplicativos decorrentes do avanço tecnológico, compreendemos que, em um trabalho com TDICs que busque incentivar a investigação dos estudantes, não seria favorável limitá-lo a um ou outro recurso específico somente.

Diante do estudo realizado, vale destacar que, mesmo com os recursos e comandos disponíveis no GeoGebra ou informações *online*, ambos ampliando as informações disponíveis para discussão, surge a necessidade de interpretar o resultado obtido e analisar o que é apresentado, o que muitas vezes não é condizente com o esperado. Significa dizer que, ainda que o GeoGebra calcule e execute determinada ação, o estudante tem uma expectativa com os resultados e ações que ele julga aceitáveis e espera que aconteça. Assim, vemos dois momentos importantes no processo de investigação com TDICs: a interpretação e a validação.

Seja apresentando um resultado após o cálculo seja modificando os objetos na Janela de Visualização após um comando, as ações do *software* solicitam reflexão e interpretação do estudante, para compreender o que foi feito e relacioná-lo o máximo possível à nova informação, com conceitos estudados, informações anteriores, discussões feitas ou com a situação problema estudada. Essa necessidade faz parte do caráter investigativo, a fim de interpretar diferentes situações ou conjunto de dados (Ponte et al., 1998).

O principal recurso do GeoGebra destacado pelos estudantes para o estudo dos autovalores e autovetores foi a calculadora presente na Janela CAS, visto que, selecionando a matriz, é possível obter os valores para cada tópico. Essa compreensão é composta pelo relato dos alunos e pela convergência de diferentes ideias nucleares, como a A2IN41, a A3IN75, a A3IN79 e a A3IN85. Diante do cenário de que, em alguns cliques, o aluno obtém os valores relacionados à matriz de uma transformação linear, uma vez que o GeoGebra os calcula, essa etapa não diz respeito ao estudante, fazendo com que ele se depare mais rapidamente com a necessidade de interpretar os resultados, isto é, de refletir questões do tipo: o que estes resultados me dizem sobre o que estou investigando? O que eles me dizem sobre a transformação linear estudada, além de dados numéricos?

Buscamos incentivar essas reflexões nas próprias atividades. Por exemplo, na atividade 2, para cada transformação, eles se deparavam com a questão “quais afirmações podemos fazer sobre a transformação linear, os autovalores e autovetores?”. A necessidade de interpretar decorre da postura adotada sobre a compreensão do trabalho com TDICs em sala de aula, de modo que “(...) a tecnologia envolvida no processo cognitivo não está ali para agilizar o processo somente, mas para participar efetivamente da produção do conhecimento” (Rosa, 2015, p. 74).

Surge, assim, um cenário em que calcular os autovalores e autovetores não é suficiente. É preciso atribuir significado aos escalares e aos vetores obtidos, relacionando-os à transformação linear e ao comportamento de diferentes vetores. Essas relações podem ser impulsionadas ao se trabalhar com diferentes janelas do *software*, como a Janela CAS e de Visualização. As ideias “A2IN131. Identifica a ortogonalidade entre os autovetores” e “A3IN45. Identificam a ortogonalidade entre os autovetores, trabalhando com a possibilidade do GeoGebra de calcular o produto interno” são exemplos dessa situação, haja vista que, observando os vetores na janela de visualização, os estudantes identificaram que são ortogonais, sendo possível verificar essa ideia de diferentes modos com o GeoGebra, como calculando o produto interno na janela de Álgebra.

Diante dessa possibilidade, os estudantes percebem esse recurso com uma certa dualidade, conforme relatado ao término da Atividade 3:

P: A positiva é que ele calcula, e a negativa?

E4: É que daí eu não aprendi a calcular na mão.

E1: A negativa é que ele calcula (risos).

Compreendemos que essa situação descreve um cenário com diferentes visões e interpretações e cabe ao professor avaliar quais características quer priorizar na sala de aula e na formação do grupo em questão. Entendemos que é primordial a compreensão do processo de cálculo de qualquer objeto matemático, como os autovalores e autovetores, a fim de agregar na percepção do conceito em questão. Entretanto, acreditamos que compreender apenas isso não é suficiente, é fundamental retomar a situação problema, relacioná-la ao que foi posto no enunciado ou até mesmo a outros conceitos.

Ao trabalhar o conteúdo de autovalores e autovetores dando uma maior ênfase no procedimento de cálculo, é possível se deparar com uma situação semelhante à apresentada por Nomura e Bianchini (2014, p.184) quando, em um estudo de caso, relatam que “o aluno limitou-se à realização de procedimentos operacionais de cálculo, expressando os passos entre os

processos que, no entanto, não se encontravam plenamente interiorizados”, limitando-se à técnica de resolução sem relacionar os conceitos. Contudo, o trabalho com TDICs pode criar uma dependência dos cálculos realizados pelo computador, conforme apontam Stewart e Thomas (2006) quando relatam o caso de um estudante que solicita o *software* Maple para realizar os cálculos, comportamento esse também apresentado pelos estudantes ao final da Atividade 3 em função do modo como elas foram realizadas. Todavia, a nosso ver, o estudo dos procedimentos de cálculo dos autovalores e autovetores não era o foco principal das investigações propostas, evidenciando que cabe ao professor analisar os prós e contras dessa situação, sempre retomando os objetivos da formação em questão.

Em todas as atividades, foram priorizadas a interpretação e a discussão dos resultados obtidos com o GeoGebra, por entendermos que, assim, o ambiente exige que os estudantes façam transições entre formulação e validação, movimentos com os quais podem não estar acostumados (Pedersen, 2007). Ao trabalharmos estes conteúdos com o computador, estamos de acordo com as considerações de Yildiz-Ulus (2013), que compreende que o trabalho com TDICs na disciplina de Álgebra Linear prioriza a investigação de um cenário ao invés da realização do cálculo manual para uma situação específica.

O avanço tecnológico fez com que diferentes *software*, aplicativos e *sites* simplificassem a obtenção dos resultados, uma vez que o algoritmo é programado para calcular como será determinada questão. Assim, compreendemos que o trabalho com TDICs não torna desnecessário o conhecimento do procedimento de cálculo, mas enfatiza a interpretação do resultado com o que está sendo discutido, de forma que seja possível que o estudo destes conceitos se torne mais significativo do que limitar a discussão aos resultados numéricos após os cálculos. Entendemos que trazer o conteúdo com essa perspectiva pode ser um modo de enfatizar a importância da compreensão conceitual ao invés de focar exclusivamente no processo de solução, embora alguns estudantes o priorizem de forma contrária, como apontam Stewart e Thomas (2006).

Retomando as ideias nucleares A1IN50, A2IN178 e A3IN48, temos exemplos de cada uma das atividades acerca de como se desenvolveu a interpretação dos estudantes no processo investigativo. Em “A1IN50. Relaciona o autovetor com a situação proposta”, o aluno compreendeu que o resultado obtido não é o mais adequado para a discussão feita no tocante ao número de ambas as espécies da Atividade 1. Assim, assumiu um autovetor equivalente, que, relacionado à atividade, é mais condizente com o discutido e investigado.

Em “A2IN178. Interpretam os autovalores e autovetores – razão de homotetia e base canônica”, após a indicação do autovalor igual a 3, o participante compreende que o autovalor é a razão de homotetia em questão e faz referência ao modo como o nomearam na programação como variável n , relacionada a um controle deslizante. Em “A3IN48. Interpretação dos resultados dados pelo GeoGebra, identificando o número de ouro como um autovalor e presente nas coordenadas do autovetor”, surge o seguinte diálogo:

P: O número de ouro tá presente no autovetor ou só no autovalor?

E1: Ah, tá nos dois, porque no autovalor ele tá lá e no autovetor, você pode, você pode interpretar também que ele tá só dividido, o numerador tá na, na abscissa e o outro na ordenada.

Questionado pelo pesquisador, o aluno identifica que o número de ouro é um dos autovalores e pode se fazer presente nos autovetores, interpretando o vetor calculado pelo GeoGebra, não se contentando apenas com o resultado indicado. Compreendemos que estes são alguns exemplos de como pode ocorrer o processo interpretativo dos resultados relacionados com autovalores e autovetores, destacando, entretanto, que esse movimento não é imediato. As ideias nucleares A2IN123, A2IN125, A2IN195, todas nomeadas “Dificuldade na interpretação dos autovalores e autovetores”, tratam de momentos em que os estudantes apresentam dificuldades, solicitando auxílio do pesquisador, cuja intervenção será discutida na categoria seguinte.

Na própria abreviação adotada para este trabalho, TDICs, nos damos conta de que são ampliadas as informações à nossa disposição, sejam elas relevantes ou não para resolver determinadas questões. Essas informações não necessariamente devem ser inéditas, como em A1IN45, em que os estudantes buscam lembrar o conceito de autovalor acessando o Google, e em A2IN30, em que retomam o conceito de transformações lineares.

Seja em uma pesquisa na internet seja nos resultados apresentados pelo *software*, contextualizando-os com o problema, é necessário refletir e validar a informação encontrada, e este momento nem sempre é imediato.

Mesmo com a facilidade de acesso ou a rapidez da exibição dos resultados, os estudantes mostram uma expectativa, uma desconfiança, não aceitando prontamente todo e qualquer resultado. Esse comportamento pode ser exemplificado na fala de uma participante durante a resolução da Atividade 3, após o resultado apresentado pelo GeoGebra: “E4: Parabéns, como que você sabe que isso aqui tá certo?” Ele também é verificado nos seguintes casos: em “A3IN11. Informação da inteligência artificial dúbia”, identificado pela fala “E1: Nossa, ele

falou um negócio que eu não sei se é uma verdade ou uma inverdade” e em “A2IN152. Resultados obtidos não condizentes com os esperados”:

E4: Esse não tinha dado certo... ah lá, que maluco.

P: Ué, por que maluco? Ele rodou o tanto que você queria.

E4: Ah, é verdade, porque esse tá mais pra cá, por isso ele vem parar aqui.

Compreendemos que este movimento está relacionado à exploração, ao acesso à informação e à criação de diferentes conjecturas e hipóteses dos estudantes. Naquele momento, focamos na confiabilidade diante de diversas ideias, conceitos e informações. Isso porque, no processo investigativo com tecnologias, não basta ter o resultado em mãos, deve-se interpretar e validar se ele é útil para o que está sendo discutido, sem ficar maravilhado com a velocidade com que foi obtido e com a quantidade de informações disponíveis, fazendo com que se perca o foco da questão principal.

A necessidade da validação é impulsionada pelo caráter dinâmico com que se dá o processo investigativo com TDICs, uma vez que, em muitos casos:

[...] os atos iniciais deles [alunos] diante de uma atividade consistem de imediato em realizar movimentos com o mouse e atentar para as implicações dos mesmos na interface do software. Percebemos que são poucos os alunos que inicialmente pensam em um movimento antes de realizá-lo. Entendemos que o pensar se realiza junto ao movimento, um anima o outro. No entanto, pode haver intervalos entre movimento realizado e pensamento sobre o movimento realizado. O movimento realizado, por ser também movimento visualizado, abre sempre uma gama de possibilidades de movimento e de pensamento de movimento. Nessa perspectiva, pensar o movimento já é estar realizando-o, já é estar imerso nele. No pensamento posso realizar um movimento e vivenciar toda sua duração, antes mesmo de efetivá-lo sinestésico-tátil-visualmente. (Pinheiro; Detoni, 2018, p. 62-63)

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) apresentam como último momento da investigação a argumentação, a demonstração e a avaliação do trabalho realizado. Ponte et al. (1998) evidenciam a necessidade de os estudantes justificarem e provarem suas afirmações, bem como Wichnoski e Klüber (2024) expõem a compreensão de que pode haver uma explicação intuitiva que reforça a veracidade das conjecturas, mas não as validam. Assim, estes autores apontam a demonstração formal como parte do último momento de investigação.

Durante o desenvolvimento das atividades, em nenhum momento foi solicitada a demonstração de determinada afirmação. Assim, diante da perspectiva de Wichnoski e Klüber (2024), o que ocorreu foi que os estudantes investigavam a veracidade de algo e tomavam-no como válido até que se mostrasse o contrário. Não buscamos, dessa forma, cultivar um ambiente

em que houvesse a marginalização da demonstração (Pinheiro; Detoni, 2018), apenas priorizamos a investigação e a criação de hipóteses a partir da percepção e, ao final, a maior parte dos resultados foi dialogado com o pesquisador, que confirmava ou apresentava um contraexemplo.

O processo de validação de ideias ocorre também nas hipóteses criadas pelos estudantes, posto que, em alguns casos, a validação individual não é suficiente, é preciso que o colega de turma se convença de tal resultado e também o valide. Deste modo, assim como para a criação de hipóteses, compreendemos que o trabalho investigativo com TDICs impulsiona o momento de validação, mobilizando outros recursos para investigar e assegurar a ideia proposta.

Esse movimento pode ser exemplificado pelos diálogos referentes às ideias “A3IN47. Recursos do GeoGebra auxiliando na elaboração e exploração (validação) da hipótese de que a reta é uma boa aproximação dos pontos estudados”, “A3IN55. Exploração e validação de hipóteses” e “A1IN32. Exploração do botão para validar ou justificar as hipóteses levantadas”, como na discussão abaixo:

E4: Calma, calma, presta atenção no V ó, 4 e 4, 8 e 8...

E5: É porque ele vai ficar igual.

*E3: Não, mas, clica mais um, ele vai mudar quer ver?
(clicam no botão 1)*

E3: Não...

E4: Aperta de novo. Sempre vai dobrar.

E3: É, sempre vai se manter igual.

Além de buscarem solucionar as perguntas na atividade, o perfil investigativo de como os alunos estudaram os conceitos de autovalores e autovetores fez com que levantassem novas questões a serem resolvidas. Esse movimento faz parte da investigação, conforme apontam Ponte et al. (1998, p. 120):

O ponto de partida poderá ser, em muitos casos, uma ou outra questão mais estruturada. Mas, de um modo geral, as tarefas a propor devem permitir ao aluno uma ampla margem de escolhas pessoais, tanto em relação às questões a estudar como no que se refere às estratégias a seguir.

Assim, as escolhas quanto às estratégias e modos de lidar com os resultados criam um ambiente em que “podem surgir também novas questões a investigar” (Ponte et al., 1998, p. 16). As ideias nucleares “A3IN65. Levantamento de uma nova questão a ser investigada” e “A3IN62. Elaboração de uma nova questão a ser investigada” são exemplos desse movimento, uma vez que trabalhar com o computador permitiu o contato com diferentes informações e

recursos, fazendo com que se propiciasse a criação e a exploração de novas questões, como em “A3IN63. Recursos do GeoGebra auxiliando na exploração de novas investigações”. Com novas possibilidades e novas questões, sem perder de vista a discussão principal proposta nas atividades, há um incentivo para a exploração. Isso porque “destaca-se que o trabalho investigativo se relaciona diretamente com a experimentação, de tal maneira que as ideias matemáticas emergentes são frutos das tentativas de compreensão experimentadas pelos alunos” (Wichnoski; Klüber, 2024, p. 8).

Conforme exposto em seções anteriores, compreendemos que há uma forte relação entre os conteúdos de Álgebra Linear, fazendo com que estudar um solicite um entendimento razoável de conceitos anteriores. Essa característica, junto com o perfil investigativo no estudo de autovalores e autovetores, fez com que os alunos articulassem diferentes conceitos matemáticos, e não só aqueles relacionados à disciplina em questão. Tratando especificamente dos conteúdos da disciplina de Álgebra Linear, a investigação do tópico principal desta pesquisa fez com que os discentes retomassem diferentes propriedades de vetores e matrizes, produto escalar, dimensão de espaço vetorial, transformação linear, matriz de uma transformação, diferentes exemplos de transformações, a definição e alguns resultados imediatos de autovalores e autovetores, como a relação entre ambos, propriedades e teoremas, a exemplo da ortogonalidade entre autovetores e diagonalização.

Compreendemos que esse processo investigativo é potencializado quando não ocorre de forma solitária, mas com o outro, isto é, com colegas de turma e diferentes TDICs. O convívio com os companheiros de turma durante a investigação prioriza o diálogo, o auxílio mútuo para o desenvolvimento da atividade, a presença de acordos e desacordos, o que torna necessário aprofundar a discussão a fim de convencer o outro ou se deparar com um equívoco. Essa interação é apontada como algo importante e benéfico no processo de investigação, conforme relatam Ponte et al. (1998). Wichnoski e Klüber (2024, p. 10) afirmam que “ao que concerne à parte da finalização, os dados revelam que ela acontece com a discussão e a reflexão conjunta do trabalho realizado”, semelhante às discussões finais realizadas com os estudantes.

Para as investigações coletivas, com seus pares e com TDICs, tem-se um cenário em que:

a investigação dá abertura ao diálogo, visto que nela é sempre preciso atentar a outros pensamentos e percepções. Quando essa investigação é promovida em ambientes de GD [Geometria Dinâmica], o diálogo também se expõe e é a interface do software que “entrega” sucessivos convites para que ele se mantenha. (...) Quando um grupo de alunos se volta a esses ícones para trabalhar um mesmo objetivo mediante uma tarefa, as possibilidades de escolher e clicar passam a ser discutidas. Se o trabalho é realizado em um

mesmo computador, o controle do mouse e do teclado pode ser negociado. O percebido por um aluno quando realiza um movimento, uma vez compartilhado, passa a ser uma possibilidade de percepção de todos. (Pinheiro; Detoni, 2018, p. 61)

Compreender-se com as tecnologias também fez parte desse processo investigativo, haja vista que, em muitos casos, houve uma antropomorfização da tecnologia, como em A2IN86, A2IN154, A2IN156 e A3IN34. A partir da perspectiva adotada neste trabalho, a de que não usamos a tecnologia, mas estamos com ela, historicamente e temporalmente situados, a partir da fenomenologia husserliana, entendemos que:

[...] nossa vivência com o mundo vida e com o que nele nos é disponível se dá em uma dialética na qual as coisas se doam à nossa percepção, e nós nos doamos no ato da percepção. Nessa dialética, as possibilidades, tais quais as que se mostram nos atos de perceber, de compreender, de imaginar, de mover, de arrastar são aberturas dadas ao sujeito que realiza esses atos. Se é possível, é possível a alguém. Assim, entende-se que as possibilidades de movimento estão dadas no mundo vida em que também estão os *software* de GD [Geometria Dinâmica] e a tecnologia. Entretanto, a atualização da possibilidade de movimento é do sujeito-movente que se volta à interface e põe-se em ação, investigando, provocando movimento, provocando mudança e percebendo mudança. (Pinheiro; Detoni, 2018, p. 64)

Destacamos que, para a investigação com TDICs, é importante o cuidado com a escolha do local e o zelo com o ambiente, de modo a priorizar a qualidade do *hardware* e do *software*, para que apresente um bom funcionamento e preferencialmente seja a versão mais atualizada possível, contando com acesso à internet. Com base na nossa experiência com os estudantes, essas características impactam diretamente o andamento da investigação, as possibilidades de explorações, os recursos disponíveis e até mesmo a motivação.

Retomando a interrogação deste trabalho, “o que se revela em um estudo sobre autovalores e autovetores com TDICs, junto a alunos de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática?”, compreendemos que a presente categoria nos revela a possibilidade de um comportamento investigativo, de modo que seja necessário relacionar diferentes linguagens da disciplina ao trabalhar com as diferentes janelas do *software*. Destacamos também a necessidade de interpretar e atribuir significado aos valores apresentados pelo GeoGebra, relacionando-os com a transformação linear e com a situação problema, como também a necessidade da validação de conjecturas e das informações apresentadas.

Exposta a nossa compreensão acerca dos motivos que caracterizaram o processo investigativo ocorrido no estudo de autovalores e autovetores com TDICs, entre aproximações

e divergências com o que é discutido até o momento na Educação Matemática, compartilhamos também da afirmação de que a investigação é um modo de fazer Matemática, de ensinar Matemática (Wichnoski; Klüber, 2024) e, como destacamos também no trabalho realizado, um modo de aprender Matemática.

6.2 Uma formação que vai além do estudo do conceito: aspectos do passado, presente e futuro

Essa categoria é composta pelas ideias nucleares que tratam de discussões coletivas em que houve intervenções do pesquisador, momentos esses em que concluíam as atividades, sanavam dúvidas e apresentavam resultados sobre autovalores e autovetores. Nessas oportunidades, houve também casos em que os estudantes relacionaram a atividade a conhecimentos prévios, como conceitos de disciplinas anteriores, relataram momentos da sua formação, evidenciando igualmente a necessidade de uma familiarização com os novos recursos apresentados do GeoGebra, familiarização essa que começou a se identificar na última atividade. Por fim, houve momentos em que compreendemos que participar dessas práticas foi uma experiência formativa para os estudantes, que corroboraram para aumentar um repertório de possibilidades relacionadas à docência e modificar a própria ação já existente. Entendemos que tais momentos revelam características da formação presente, com aspectos do passado e novas possibilidades para o futuro.

Vale ressaltar que essa categoria não despreza as discussões sobre autovalores e autovetores, mas busca destacar que o processo formativo pode extrapolar o conteúdo estudado, constituindo a formação docente. Exporemos na sequência nossas compreensões acerca das características da formação dos participantes, contemplando momentos anteriores aos encontros, referidos como passado, momentos durante a resolução das atividades, entendidos como presente, e momentos de perspectiva futura, realizando ponderações em relação à análise dos dados e à teoria.

Conforme exposto na categoria anterior, o desenvolvimento das atividades apresentou diversas características do que entendemos como um processo investigativo. Notamos que essas características se devem também tanto ao modo pelo qual as atividades foram planejadas, quanto à proposta de discutir estes conteúdos com as TDICs. Além disso, para garantir o bom andamento das práticas e das discussões sobre os autovalores e autovetores, também foi necessária uma postura intervencionista do pesquisador, com cautela quanto ao nível de intervenção, em diferentes momentos.

A postura adotada foi semelhante àquela indicada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 45-46), segundo os quais:

no acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois pólos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. Com esse duplo objetivo em vista, o professor deve procurar interagir com os alunos tendo em conta as necessidades particulares de cada um e sem perder de vista os aspectos mais gerais de gestão da situação didática. Desse modo, o professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles.

Além dessas características, prevê-se, no processo de investigação, que o professor deve apresentar um domínio do conteúdo estudado (Ponte et al., 1998). Desta forma, durante o desenvolvimento das atividades, as conclusões sobre as conjecturas criadas pelos estudantes eram sempre dialogadas com o pesquisador e os participantes reconheciam que esse diálogo era suficiente para validar as ideias, uma vez que tal domínio teórico do pesquisador se fazia presente nas discussões. Também vale destacar que alguns teoremas e justificativas foram apresentadas pelo pesquisador a partir dos cenários que os estudantes se depararam no processo investigativo. Compreendemos que estes são possíveis modos de apresentar alguns resultados sobre autovalores e autovetores, pois, mediante uma situação com a qual os estudantes se deparavam, era-lhes mostrado um resultado que tratava daquele cenário.

Acreditamos que essa postura pode ser um formato para se apresentar alguns resultados dos autovalores e autovetores no estudo com TDICs, visto que, quando os estudantes se deparavam com a mesma situação em outra investigação, em certos momentos, alguns deles identificavam que se tratava de algo que já havia sido discutido anteriormente. Esse comportamento pode ser exemplificado com momentos da Atividade 2, quando ocorre a repetição do modo de interpretar os autovetores indicados pelo GeoGebra, assim como em “A3IN50. Identificação, a partir da intervenção do pesquisador, do teorema relacionado à ortogonalidade dos autovetores”, momentos esses em que recordaram um resultado debatido pelo pesquisador na atividade anterior.

Assim, ressaltamos que o diálogo com o professor durante o processo investigativo é essencial. Isso porque, além de apresentar resultados, como relatado anteriormente, houve momentos em que foi necessário corrigir ideias equivocadas que os participantes haviam tomado como certas. Essa situação pode ser exemplificada em “A2IN121. Diálogo com

pesquisador corrigindo as considerações dos estudantes feitas previamente”, quando compararam com seus resultados com outros da etapa anterior da Atividade 2, tirando conclusões incorretas sobre a interpretação dos autovetores em uma nova situação. Conforme dito, esses momentos exigem, por parte do professor, um acompanhamento das discussões realizadas. A postura adotada foi a de acompanhá-los periodicamente, pedindo para que mostrassem os principais resultados e percepções.

Além dessas particularidades concernentes à postura do professor no processo investigativo, também é necessário levar em consideração que esse movimento ocorreu junto com TDICs. Assim, a conduta adotada foi a de auxiliar nas interpretações dos autovalores e autovetores, pois é necessário ter em conta que, “ao executar as ações da tarefa, a presença do professor é importante para auxiliar os alunos, explicando o que a calculadora faz e o que ela significa matematicamente” (Yildiz-Ulus, 2013, p. 122, tradução nossa)²⁵.

Seguindo a fenomenologia husserliana, entendemos que “nosso corpo-vivente carrega consigo as lembranças de vivências prévias, que, juntamente com as atuais, traçam caminhos para a ação. No ato, essas experiências se entrelaçam perfazendo uma ‘experiência integral’” (Pinheiro; Detoni, 2018, p. 68). Nesse sentido, vale lembrar que todos os participantes já haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear, o que justifica a nossa escolha por focar na interpretação e nas discussões de resultados de autovalores e autovetores com TDICs, partindo do princípio de que estes conteúdos não eram desconhecidos pelos estudantes. Entretanto, à luz da interrogação desta pesquisa, essa opção e a convivência com os sujeitos nos revelaram considerações e relatos sobre as experiências na disciplina. Assim, vemos a necessidade de nos debruçarmos sobre os relatos para analisarmos e refletirmos o modo como esses conteúdos podem estar sendo trabalhados.

A partir do princípio destacado, seria compreensível que os estudantes solicitassem a retomada de algumas questões sobre os autovalores e autovetores, pois estes conteúdos são mais um dentre vários outros obrigatórios para um curso de Licenciatura em Matemática. É importante considerar também que, no mesmo período das atividades, eles estavam sendo apresentados a novos conteúdos, o que demandava mais atenção e estaria mais recente nas lembranças de assuntos discutidos.

A primeira atividade foi a única em que não havia uma menção clara de que o conteúdo a ser discutido seriam os autovalores e autovetores. Desse modo, fizemos referência a esses tópicos, mas sem nomeá-los propriamente, buscando perceber se os estudantes fariam essa

²⁵ While performing the actions of the task, the presence of the teacher is important in assisting the students, explaining what the calculator does, and what it means mathematically.

relação enquanto estivessem discutindo a resolução, o que não ocorreu. Tal fato pode ser verificado na análise, uma vez que, a partir do diálogo com o pesquisador, surgiram diversas tentativas de identificar o conceito, como em “A1IN37. Percebem que as discussões tratam de algum conceito de Matemática, mas não conseguem especificar qual exatamente”, “A1IN38. Palpites na tentativa de identificar o conceito”, “A1IN42. Palpites na tentativa de identificar o conteúdo” e “A1IN43. Palpites sobre diferentes temas tratados em Álgebra Linear”. Dentre essas tentativas, foram mencionados conteúdos como produto vetorial, produto escalar, determinante de matriz e matriz inversa. Em seguida, ocorreu o seguinte diálogo, referente a “A1IN40. Não lembram do conteúdo de Autovalores e Autovetores a partir da expressão escrita”:

P: Tá, então, aquilo ali (escrito na lousa a afirmação que fizemos “multiplicar a matriz pelo par/vetor obtendo o dobro dele” $Av = 2v$), não lembra nada?

E4: Desculpa, não.

E3: Não, não, não, não, não.

Todo esse momento revela que os estudantes não identificaram os conteúdos porque não se recordam deles, mesmo diante da expressão escrita na lousa. Assim, surgem outros questionamentos, como: por que os alunos lembram de outros conteúdos e não o de autovalores e autovetores? Não houve uma aprendizagem significativa destes conceitos por parte de alunos que foram aprovados na disciplina?

A seguinte fala: “E4: Eu sou péssima nessa parte de autovalor, eu já tinha tirado nota e eu nem estudei para a prova da Iolanda” dá origem a “A2IN56. Falta de domínio do conteúdo de autovalores” e “A2IN57. Relato de menor dedicação na disciplina no período do conteúdo de autovalores e autovetores”, a qual, em conjunto com as ideias nucleares apresentadas anteriormente, revela, a partir da interrogação de pesquisa, possíveis modos como estes conceitos estão sendo tratados nas aulas. Como estes temas são os últimos previstos em ementas de um primeiro curso de Álgebra Linear, o relato da participante pode ser também o de outros discentes. Diante da não identificação dos conteúdos na primeira atividade, os estudantes acessaram a internet para relembrar a definição, os conceitos de vetores e matrizes, bem como discutiram alguns significados, relacionando-os com a situação proposta.

Conforme exposto na categoria anterior, o trabalho com TDICs fez com que os estudantes se deparassem com a necessidade de interpretar os resultados apresentados pela calculadora do GeoGebra, demonstrando em alguns momentos dificuldades em realizar essa interpretação. A partir dessas situações, refletimos sobre o que esse comportamento nos revela.

Nossas compreensões nos fazem ponderar sobre a formação dos participantes e o modo como estes conteúdos foram trabalhados na disciplina, questionando-nos sobre qual foco é dado a estes conteúdos na sua exposição em uma disciplina de Álgebra Linear: um foco procedimental, com ênfase nos cálculos e resultados numéricos para diferentes transformações, ou um foco interpretativo, que busca um significado para os números apresentados, relacionando-os com a transformação linear estudada? Se o foco for a primeira possibilidade, no caso dos participantes desta pesquisa, mostra-se que está sendo ineficaz, uma vez que a maioria deles declarou não se lembrar dos procedimentos de cálculo, como em “A2IN60. Não recorda de como se calcula o autovalor” e “A2IN107. Conhecimento parcial sobre os procedimentos do cálculo dos autovalores”.

O estudo destes conceitos com TDICs pode ser uma possibilidade para uma mudança de foco, desde que se tenha em mente que “o uso de TD (software, recurso, ambiente...) só se consolida se esse uso considerar a mídia como parte do processo cognitivo, como meio que abre diferentes fronteiras, diferentes horizontes de se pensar sobre o mesmo tópico matemático” (Rosa, 2015, p. 75).

Assim, essas questões nos levam a refletir sobre como estes conteúdos estão sendo apresentados, compreendendo que, aparentemente, não estão dando ênfase nos objetivos e nas relações para a formação de futuros professores de Matemática. Além disso, o baixo número de pesquisas, principalmente no âmbito nacional, que tratam sobre autovalores e autovetores nos faz indagar como estes conteúdos são vistos pela comunidade acadêmica, impactando, assim, nos modos como os formadores de professores lidam com estes conceitos. Entendemos que essas questões são um alerta sobre o caminho que estamos trilhando na abordagem destes temas na formação de futuros professores.

Conforme exposto na categoria anterior, a discussão sobre autovalores e autovetores exige uma compreensão de outros conceitos da disciplina. A maneira como organizamos as atividades, tendo em mente o trabalho com TDICs, permitiu também uma abertura para relacioná-los a temas de outras disciplinas, alguns previstos e outros articulados pelos estudantes. Foram discutidas questões relacionadas a diferentes funções, Equações de Diferença, Equações Diferenciais, Geometria Analítica, Geometria e Funções de Variável Complexa.

Compreendemos que o trabalho com tecnologias incentiva essas conexões com outros saberes, pois o recurso de diferentes janelas do GeoGebra faz com que, em um mesmo *software*, seja possível discutir questões relacionadas à Geometria, como a construção de triângulos e diferentes transformações no plano, bem como lidar com números complexos nessa mesma

situação, após o estudo da transformação linear. Em outros casos, na análise de comportamento dos pontos, os discentes relacionavam-nos a funções a que estavam habituados, como parábolas e exponenciais.

Além disso, esses momentos fizeram com que os estudantes apresentassem um domínio sobre os conteúdos discutidos, como em “A1IN58. Domínio dos conteúdos das disciplinas destacadas” e “A2IN19. Relaciona com conceitos da disciplina de Geometria Analítica”. Entendemos que esses comportamentos também dizem respeito a suas experiências passadas, existindo, entretanto, momentos em que as relações com diferentes conceitos também evidenciam características do presente e indicativos de possíveis ações futuras na formação, as quais serão abordadas mais adiante.

Mesmo nos referindo aos momentos da realização das atividades como momento presente, temos ciência de que, durante a escrita deste trabalho e após sua publicação, ele já constitui o passado. Contudo, para buscar manter uma lógica cronológica com os dados da pesquisa, compreendemos que as características do passado dizem respeito às experiências dos participantes anteriores as práticas desenvolvidas no estudo. Além disso, durante sua participação, projetavam perspectivas futuras, fazendo, então, com que os encontros ficassem entre esses dois períodos.

A realização da investigação com estudantes da Licenciatura foi compreendida não só como um momento de produção de dados, mas também como um momento formativo para eles. Essa ideia foi ratificada pelos próprios participantes, como é possível observar em “A3IN66. Experiência significativa para formação”. A este respeito, exporemos, a seguir, nossas compreensões sobre as temáticas formativas identificadas.

A primeira delas diz respeito justamente às discussões sobre autovalores e autovetores, tendo em vista que foi possível retomar estes conteúdos e debater sobre eles. Acreditamos que as discussões podem ter agregado na compreensão dos estudantes, posto que algumas ideias nucleares durante e ao final das atividades indicam essa característica, como “A2IN59. Compreende a relação entre autovetor com autovalor”, “A2IN90. Compreendem o autovalor como escalar, já discutido na transformação”, “A2IN182. Compreendem os vetores como autovetores”, “A3IN67. Novas interpretações sobre conceitos de Álgebra Linear” e “A3IN70. Aprendizado dos conceitos de autovalores e autovetores”.

Ao final das atividades, os estudantes destacaram que o estudo destes tópicos com TDICs beneficia a visualização de diversos objetos, como pontos, vetores, reta, ressaltando especialmente a importância da disposição de informações relevantes na tela, do estudo de diferentes exemplos e do contato com aplicações, conforme é possível verificar em “A3IN73.

Trabalho com computador permite visualização dos casos estudados e de aplicações”, “A3IN88. Visualização de diferentes objetos de estudo como facilitador no estudo”, entre outras ideias nucleares. Reafirmamos que essas características têm ligação direta com o modo como as atividades foram planejadas para essa pesquisa.

Conforme exposto no capítulo 2, podemos compreender alguns objetivos e justificativas para o estudo de autovalores e autovetores nos cursos de Licenciatura em Matemática, dado que:

a teoria de autovalores, autovetores e diagonalização de operadores é um tópico que introduz o futuro professor às aplicações relevantes do mundo atual, com exemplos que podem ser compreendidos em nível de Ensino Médio. Por exemplo, a visualização de eixos ou de planos invariantes no plano ou espaço por transformações, como reflexão ou rotação, pode levar o licenciado a compreender o significado dos autovalores e autovetores de maneira concreta. O tópico pode ser incluído num currículo da licenciatura por meio de uma abordagem que permita, além de aplicações básicas na própria Matemática, como nas formas canônicas de cônicas, o trabalho com exemplos simples de aplicação em problemas contextualizados como, por exemplo, no tratamento de dados e informação como pesquisa na web, na economia ou nos problemas de engenharia; ou ainda, pode ser motivador para um professor de Ensino Médio saber que a transmissão de sinais por satélite usa o conceito de autovalores. (Sbem, 2013, p. 30)

Deste modo, destaca-se a possibilidade de apresentar aplicações, a relevância da visualização para a compreensão dos significados destes conteúdos e o incentivo ao estudo de problemas contextualizados, em especial, em casos que podem ser discutidos na Educação Básica. Em ambas as recomendações feitas pelo LACSG (Carlson et al., 1993; Stewart et al., 2022), é ressaltada a importância dos autovalores e autovetores em diversas aplicações e também sugerida a introdução destes conceitos com exemplos geométricos, estabelecendo aproximações com as considerações anteriores.

No caso de situações que podem ser discutidas na Educação Básica, buscamos fazer perguntas durante a atividade que levassem os estudantes a estabelecerem relações com os conteúdos desse período escolar. Em nossa análise, compreendemos que o estabelecimento dessas relações não se deu em todos os casos, como em “A2IN32. Entendem que há abordagens diferentes para transformações lineares, relacionadas ao nível de escolaridade”, em que os estudantes teorizaram haver duas abordagens sobre transformações lineares conforme o nível escolar. Houve momentos em que foi percebida a relação, como em “A3IN3. Relação dos conceitos estudados na atividade com a Educação Básica”, entretanto, as perguntas propostas

nas atividades fizeram com que os estudantes refletissem mais sobre a prática docente do que sobre os conteúdos em si.

Mesmo identificando-o como um processo formativo e enaltecendo seus pontos positivos, o estudo destes conteúdos no formato adotado também apresentou alguns impasses. Pinheiro e Detoni (2018) destacam que a pouca familiarização com o *software* pode dificultar o trabalho investigativo com tecnologias. Esse foi o principal empecilho no estudo com TDICs. Todavia, apesar ser uma dificuldade, foi possível observar a criação dessa familiaridade com os recursos enquanto se desenvolvia as atividades, fazendo com que compreendêssemos essa situação, então, como um momento formativo com o GeoGebra.

Conforme relatado, nos primeiros encontros, os estudantes foram introduzidos aos comandos de programação referentes à tartaruga e a outros recursos do GeoGebra que poderiam auxiliar-lhes na resolução das atividades, como a janela CAS, a janela de planilha, a criação de listas e sequências. Como todos esses recursos eram desconhecidos por eles, é natural compreendermos ter havido uma dificuldade não só com o conceito em questão e com o modo de lidar com ele (priorizando a interpretação), mas também com o como começar a desenvolver mais essa etapa através dos recursos do *software*.

Esses momentos de dificuldade e de falta de familiaridade com o *software* foram representados em diferentes ideias nucleares, como “A2IN12. Apontam que programar pode ser trabalhoso e exige uma familiaridade”, “A2IN129. Não exploração dos recursos disponíveis no *software*”, “A2IN78. Necessidade da familiaridade com a plataforma e tecnologia”, “A2IN175. Necessidade da familiaridade com o *software*”, “A2IN160. Necessidade de familiaridade com os recursos do *software*”, “A3IN41. Não familiarização com os comandos e possibilidades do GeoGebra”.

Essas dificuldades foram superadas por dois principais movimentos: no primeiro, os estudantes exploravam diferentes modos de se deparar com a ação desejada por eles, em um movimento de tentativa e erro; no segundo, havia a intervenção do pesquisador para orientá-los. Para otimizar o tempo e garantir um bom andamento das atividades, até mesmo para não gerar demasiadas frustrações ou cansaços nos estudantes, entendemos que a intervenção do professor é a melhor opção, tendo ocorrido em momentos como “A2IN79. Ajuda do pesquisador quando existe dúvida em relação à tecnologia”, “A2IN83. Ajuda do pesquisador quando existe dúvida em relação à tecnologia” e “A2IN174. Pesquisador auxiliando o trabalho com tecnologias”. Destacamos que o caráter investigativo pode incentivar o primeiro modo descrito, havendo casos em que haja até mesmo um *feedback* e correções, com orientações sobre o próprio *software* no tocante a alguns erros de escrita dos comandos, por exemplo.

Essas dificuldades se fazem presentes principalmente nos momentos de resolução da segunda atividade, a qual levou mais tempo que as demais, com três encontros. Entretanto, é possível também identificar nela o início da familiarização mais desenvolvida, como em “A2IN84. Familiaridade com as possibilidades do software”, familiarização essa que se aprofundou, fazendo com que a última atividade fosse o momento em que os estudantes mais demonstraram esse desenvolvimento, seja com os recursos do GeoGebra, seja com os modos de expressar e organizar as informações, etc., exemplificados em “A3IN4. Familiaridade com softwares e possibilidades com o computador”, “A3IN15. Familiaridade com o software no desenvolvimento das atividades envolvendo o conceito de autovalores e autovetores”, “A3IN16. Familiaridade com o software no desenvolvimento das atividades envolvendo o conceito de autovalores e autovetores”, “A3IN19. Experiência em atividades anteriores auxiliando no desenvolvimento da nova atividade proposta”, “A3IN25. A importância do domínio dos modos de se utilizar os comandos do software”, “A3IN26. A importância da familiarização com o software para o desenvolvimento da atividade proposta”, “A3IN38. Destaque sobre a importância da escrita correta do comando no software” e “A3IN72. Desenvolvimento de uma familiaridade com o GeoGebra”.

Assim, constatamos que estes momentos agregam na formação docente, uma vez que os estudantes compreendem modos de aprender e de ensinar Matemática com TDICs, assim como são apresentados a novas possibilidades de um *software* já conhecido por eles, abrindo as portas para novas possibilidades e recursos, como o GeoGebra LOGO, essencial para o desenvolvimento das atividades propostas.

Não consideramos que uma única disciplina na graduação voltada especificamente para conhecer e trabalhar com o GeoGebra seja, necessariamente, a solução. Entretanto, entendemos que uma formação com TDICs sugere que os professores envolvidos nos cursos de formação inicial tragam possibilidades (*software*, sites, entre outros) e recursos mais condizentes com a sua disciplina, como a janela CAS e a calculadora de autovalores e autovetores, a qual pode ser introduzida na disciplina de Álgebra Linear, de modo que os estudantes possam aprender não só o conteúdo, mas também novas possibilidades do trabalho com tecnologias, fazendo, assim, com que, em cada disciplina, aumente ainda mais seu conhecimento sobre os recursos disponíveis.

Conforme exposto anteriormente, durante o desenvolvimento das atividades, os estudantes estabeleceram relações com diferentes conceitos e conteúdos, alguns por iniciativa própria (a partir da investigação) e outros previstos na atividade. Dentre as dificuldades

apresentadas, a maior parte das relações estabelecidas com outros conteúdos não compõem esses momentos, exceto por um tópico: os números complexos.

As discussões que envolviam os números complexos estavam previstas na Atividade 2, no estudo da transformação referente à rotação de um ângulo. Ambos os grupos apresentaram dificuldade em lidar e interpretar os números complexos que se fizeram presentes tanto nos autovalores quanto nos autovetores, tendo solicitado o auxílio do pesquisador, como em “E4: Agora assim, vai ter que você falar as conclusões porque eu não sei mexer com i ”. A manifestação da dificuldade com estes conceitos pode ser verificada em A2IN162, A2IN164, A2IN193, A2IN194, A2IN198, A2IN206 e A2IN209.

A dificuldade evidenciada não foi totalmente sanada, visto que as discussões quanto às dúvidas foram pontuais e com foco na interpretação dos autovalores e autovetores. Assim, compreendemos que esse comportamento nos revela uma mesma dificuldade entre um grupo heterogêneo (de diferentes anos de ingresso) de estudantes de Licenciatura em Matemática, fazendo com que a consideremos também como um alerta e um indicativo da necessidade de revisão do tratamento destes conceitos. Vale destacar que todos os participantes já haviam cursado ou estavam cursando naquele semestre a disciplina nomeada Funções de Variável Complexa. Para que a formação dos estudantes seja adequada, compreendemos que seria interessante que novas ações fossem tomadas com os estudantes para o estudo destes conceitos.

Entendemos esse momento também como parte do caráter investigativo, no qual, entre acertos e erros, dúvidas e dificuldades também aparecem. Cabe aos formadores de professores se atentarem para as questões que emergem e buscarem um diálogo com os estudantes para que esses empecilhos sejam discutidos ainda no período de graduação. Por exemplo, esperamos que as dificuldades indicadas a partir dessa pesquisa não sejam um ponto final, mas sim um momento de reflexão para novas ações com os estudantes, ações essas a serem realizadas posteriormente.

Por fim, o apontamento anterior inicia a última etapa sobre a qual discorreremos: o futuro. Para tanto, trazemos nossas compreensões acerca de como os estudantes expressam as projeções que fazem para quando estiverem no papel de docentes, a partir das reflexões feitas no momento da atividade. Entendemos que as conjecturas realizadas aqui e com a perspectiva de um futuro na carreira docente por parte dos estudantes caracterizam a discussão das práticas como uma forma/ação, que atualiza e dá uma nova forma dentre as possibilidades percebidas pelos estudantes.

Conforme exposto, haviam perguntas propostas nas atividades que buscavam relacioná-las a conceitos da Educação Básica. Entretanto, na maioria dos casos, os estudantes ligavam o

questionamento à futura prática docente, e não a conceitos específicos. Esses momentos caracterizaram o que compreendemos como reflexões sobre o vir a ser professor, em que há uma expectativa pela docência, de modo que, mesmo discutindo autovalores e autovetores, não se perdia de vista os objetivos específicos do curso em que estão se graduando.

Essa reflexão é caracterizada por diversos momentos, até mesmo naqueles em que não há um incentivo específico no material a essa percepção, como no encerramento da primeira Atividade, identificada por “A1IN56. Criação de repertório do Licenciando, colocando-se no lugar de professor em determinada disciplina”, ou durante a Atividade 2, “A2IN105. Criação de repertório do estudante visando práticas futuras”. As demais ideias nucleares identificadas são consequências da compreensão prevista na atividade, como “A2IN10. Construção de repertório para a carreira docente” e “A2IN13. Construção de repertório para a carreira docente”. Por fim, as discussões e possibilidades expostas podem fazer parte da prática futura dos participantes, mas também já modificam sua prática presente. Essa afirmação pode ser evidenciada por meio do relato que dá origem a “A3IN71. Atividade como inspiração para a prática docente presente”, no qual a participante afirma ter trabalhado com o GeoGebra LOGO em suas aulas particulares após ser apresentada ao recurso.

Entendemos que, dentre os dados que formaram as ideias nucleares dessa categoria, o relato de uma das estudantes no término da última atividade nos ajuda a exemplificar nossa compreensão exposta na presente seção. Isso porque buscamos discutir, a partir de diferentes ideias nucleares, como esses momentos com os discentes, para além da produção de dados, foram formativos, uma vez que, mesmo tendo como foco a discussão sobre autovalores e autovetores, trouxeram relatos sobre experiências anteriores, sobre a criação de uma familiaridade com os recursos tecnológicos e reflexões sobre as possibilidades da prática docente dos participantes:

*E4: Então pra mim, é... **eu não tinha feito disciplina de Álgebra Linear até o fim direito**, eu fiz mas eu não fiz direito, e aí para mim, eu tive que... assim, a parte de autovalores e os autovetores para mim foi tipo... eu **agora sei o que são autovalores e autovetores**, então, foi um aprendizado porque no fim da disciplina eu não fiz isso, e também, é, **eu já relacionei** bastante até a tartaruga em si sabe, o LOGO no GeoGebra com muitas **coisas que eu faço com minhas crianças lá no PIBID ou nas minhas aulas particulares**. Tipo na minha aula particular, também é criança, eu já fui e já levei a tartaruga para ela, porque eu sou ansiosa. Aí já fui, já mostrei a tartaruga andando porque o meu aluno... hum, não consegue entender muito bem as formas geométricas e ele tá na parte de ângulos alternos internos, então a parte do que a tartaruga rotaciona foi bem legal para ele aprender, **então eu não sabia que isso existia** foi muito **bom para minha formação** também, que eu posso*

levar algo diferente, né, para as crianças e foi bom para mim como pessoa porque eu aprendi a mexer no GeoGebra. Acho que aprendi. (grifo nosso)

Por fim, expostas nossas compreensões sobre o processo formativo ocorrido com os estudantes, acreditamos ser possível entender esse momento como uma forma/ação, compartilhando preocupações semelhantes às da Cyberformação (Rosa, 2015). Seguindo com a perspectiva adotada para o desenvolvimento deste trabalho, temos que “[...] a formação de professores na Educação Matemática, na perspectiva de um pensar fenomenológico, constitui-se em um renovar e renovar-se contínuo – no movimento de compreender e interpretar – o projeto humano de educação” (Orlowski, 2023 p. 222). Entendemos que as análises sobre as compreensões dos estudantes relacionadas aos autovalores e autovetores, revisitando tais conceitos e discutindo-os sob novas perspectivas, caracteriza um renovar, assim como as perspectivas de atuação com os novos recursos tecnológicos renovam as possibilidades de trabalho docente que tinham em mente, expressas nas ideias nucleares como repertório docente.

Entendemos esse repertório docente como as oportunidades de ação na sala de aula, apropriadas pelos estudantes durante o curso de Licenciatura, para que, futuramente, recordando-se delas, os novos professores tenham um leque de possibilidades para trabalhar determinados conteúdos. Essa ideia é semelhante à exposta em Paulo, Amaral e Santiago (2011), quando ressaltam a importância de apresentar projeções de possibilidades que reflitam suas ações futuras como professores.

Durante a realização das atividades, os estudantes vivenciaram um momento de fazer matemática com o outro e com as TDICs. Esses sujeitos, em muitos casos, conforme relatado, não perdiam de vista a compreensão própria de ser um professor de Matemática, entendida por nós como semelhante à ideia de vir-a-ser. Assim, temos:

[...] a compreensão da forma/ação de professores que aprendem-ensinam Matemática como movimento que *tende a ser*, que vai se constituindo no entrelaçamento do processo criador e criativo de acolhimento das atualizações de sentidos produzidos, refletidos, expressados e compartilhados entre os professores [estudantes] (poíesis) e a busca de modos pelos quais aprender-ensinar Matemática (mathema) desdobra-se em possibilidades formativas às pessoas. (Orlowski, 2023, p. 221, grifos do autor, inserção nossa)

Assim, os novos sentidos produzidos sobre os conceitos e o trabalho com TDICs, refletidos devido ao caráter investigativo e às perguntas propostas nas atividades, também exigindo da criatividade dos estudantes, fez com que relacionassem tudo isso almejando a

prática docente, na maioria dos casos a prática futura, mesmo que pudesse modificar a prática presente de alguns.

Destacamos a importância da reflexão para que se identifique uma forma/ação que retome o realizado e altere a prática. Entendemos que essa característica foi incentivada pela postura investigativa com TDICs, posto que fazia necessário refletir sobre o feito, sobre com o que se depararam e sobre as possibilidades da prática. Além disso, a familiarização criada a cada atividade decorre também da compreensão que foi sendo construída sobre o “saber fazer com” TDICs, isto é, sobre se perceber fazendo e refletir sobre, produzindo conhecimento enquanto constrói uma identidade de professor, buscando refletir sobre como orientar seus futuros alunos da mesma forma (Rosa, 2015).

Rosa (2015) discorre sobre a atenção necessária tanto à Cyberformação quanto a relação entre diferentes saberes, com os saberes específicos, no caso matemáticos, pedagógicos e tecnológicos. Entendemos que abordamos esses três saberes e, principalmente, como se influenciam mutuamente, haja vista que o trabalho com TDICs impactou no estudo de autovalores e autovetores e as discussões apontaram práticas docentes possíveis. Compartilhamos da perspectiva da Cyberformação segundo a qual a formação matemática pode estabelecer pontes entre teoria e prática (Rosa, 2015), buscando a presentificação de uma possível prática com os estudantes de Licenciatura.

Assim, investigar, refletir, dialogar e aprender são as principais ações que permearam esses momentos, como também a perspectiva de ensinar, “que não se descola, ao menos em intenção formativa, da ação de aprender” (Orlowski, 2023 p. 26). Essas ações compõem nossa compreensão como um momento de forma/ação, compartilhando a ideia de que os estudantes estão em formação quando estão em ação (Mocrosky; Mondini; Orlowski, 2018).

Por fim, retomando a interrogação deste trabalho, “o que se revela em um estudo sobre autovalores e autovetores com TDICs, junto a alunos de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática?”, compreendemos que a presente categoria nos revela um momento de forma/ação, de modo que foram discutidos o conceito de autovalores e autovetores, aplicações e teoremas, práticas na Educação Básica, além de se observar o desenvolvimento de uma familiaridade com GeoGebra. Além disso, os estudantes relatam experiências anteriores com este conteúdo, o que aponta para a necessidade de revisar o tratamento destes conceitos, bem como apresentam perspectivas futuras sobre a prática docente.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As discussões realizadas na presente pesquisa foram norteadas pela interrogação: o que se revela em um estudo sobre Autovalores e Autovetores com TDICs, junto a alunos de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática? Buscando a compreensão do interrogado, optamos pela metodologia de pesquisa qualitativa, seguindo uma abordagem fenomenológica.

Entendemos que o fenômeno investigado trata das nossas compreensões a partir do estudo de autovalores e autovetores com TDICs realizado pelos alunos, cuja discussão não se esgota, bem como não apresenta respostas definitivas e imutáveis. Aqui, discorreremos sobre nossas percepções diante do investigado e discutido, tornando possível diferentes interpretações e concepções sobre questões semelhantes.

Para investigar o fenômeno, desenvolvemos e realizamos três atividades com cinco estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Unesp de Rio Claro. Com vistas a empreender esse estudo sobre autovalores e autovetores, o principal *software* trabalhado foi o GeoGebra, com os recursos da janela CAS e com a programação do GeoGebra LOGO. Os dados foram produzidos por meio do registro dos discursos dos discentes durante a realização das atividades. Posteriormente, realizamos dois movimentos de análise: a Ideográfica e a Nomotética, tendo identificado duas categorias que compõem a estrutura do fenômeno investigado, a saber, “O caráter investigativo do estudo” e “Uma formação que vai além do estudo do conceito: aspectos do passado, presente e futuro”.

Compreendemos que essas categorias têm ligação direta com as atividades elaboradas, isto é, nossas concepções de ensino, de mundo e de sociedade fazem parte também da proposta, incluindo aí o fato de estarmos todos historicamente situados, os modos como compreendemos as possibilidades de se trabalhar os assuntos abordados e previamente escolhidos com alunos da Licenciatura e o fato de não estarmos diante de obrigações e responsabilidades inerentes a uma disciplina, como o cumprimento de uma ementa.

Na primeira categoria, “O caráter investigativo do estudo”, expomos nossa compreensão de que o estudo apresentou características de um processo investigativo, reunindo as ideias nucleares que tratam de momentos em que os estudantes realizaram alterações, explorações de diferentes casos, comparações, reconheceram padrões, pesquisaram na internet, realizaram testes, consequência, muitas vezes, de discussões em grupo e da criação de hipóteses. O estudo assim desenvolvido permitiu o contato com diferentes fontes de informação para a resolução das atividades, além das fornecidas pelo enunciado, de modo a favorecer que o trabalho com o computador ampliasse o conjunto de elementos que poderiam ser úteis nas discussões.

Nas investigações, foram articuladas diferentes possibilidades tecnológicas para além do GeoGebra, como o Google, o Chat GPT, o Wolfram, o Paint e o celular pessoal dos participantes, mesmo havendo um *software* principal para a realização das atividades. Desse modo, o título deste trabalho “Estudo de autovalores e autovetores com tecnologias digitais” evidencia essa diversidade articulada pelos estudantes.

Neste movimento investigativo com TDICs, foi desvelada a necessidade de interpretação e de validação das informações. A interpretação diz respeito às relações estabelecidas com o que é apresentado pelo computador, conectando-se a diferentes conteúdos ou à atividade em questão. Esse formato prioriza a interpretação dos autovalores e autovetores, ligando-os à transformação linear e a outros conceitos, uma vez que os cálculos foram realizados com o GeoGebra. A validação diz respeito às hipóteses levantadas pelos estudantes e às diversas informações disponíveis na internet. Essa característica incentiva o processo investigativo buscando, além do diálogo, contraexemplos das conjecturas levantadas. Ademais, requer uma reflexão sobre o que foi encontrado *online*.

Na segunda categoria, “Uma formação que vai além do estudo do conceito: aspectos do passado, presente e futuro”, expomos nossa compreensão de que a realização das atividades pelos estudantes trata-se de um momento de formação, visto que reúne as ideias referentes a situações de discussões com o pesquisador sobre resultados relacionados aos autovalores e aos autovetores e a criação de uma familiaridade com o *software*. Ao final, é possível compreender que o processo realizado apresenta características de uma forma/ação, pois muda a forma enquanto está em ação, bem como um movimento de tende a ser, com momentos em que os estudantes reconheciam possibilidades de futuras ações e posturas como docente. O estudo permitiu que os estudantes vislumbassem os conceitos abordados e novas possibilidades do trabalho com TDICs, sem perder de vista o objetivo da docência.

Também foram reunidas as ideias nucleares que tratam de relatos de experiências anteriores dos estudantes no curso de Licenciatura. Foram identificados o domínio de alguns conteúdos e o estabelecimento de conexões com outras disciplinas, mas também relatos de dificuldades com números complexos e com o conteúdo de autovalores e autovetores, devido à vivência na disciplina de Álgebra Linear e à postura deles diante destes tópicos.

Além das discussões realizadas neste trabalho, vimos abertura para indicações de outras questões que podem ser investigadas em novas pesquisas. Os dados produzidos por meio dos relatos dos estudantes indicam a necessidade de uma revisão sobre a abordagem de números complexos nos cursos de Licenciatura em Matemática, tendo em vista que todos eles expressaram ter dificuldade com estes conceitos.

A disciplina de Álgebra Linear e as pesquisas que investigam suas questões são recentes. Por essa razão, entendemos a necessidade da continuidade de pesquisas com este viés, que busquem agregar na prática e na experiência dos futuros professores e estudantes, além de contribuir com discussões importantes para a área da Educação Matemática. Neste sentido, esperamos que o presente estudo possa servir como inspiração e incentivo para o seguimento dos temas abordados, bem como para o aprofundamento de outras questões. Dentre os trabalhos a serem realizados, destacamos a possibilidade do desenvolvimento de outras investigações que tratem da Álgebra Linear na formação do professor de Matemática, da aprendizagem dos conceitos dessa disciplina, bem como de questões que envolvam sua parte histórica e seus conteúdos. Philot e Bianchini (2020) também trazem considerações referentes a essas temáticas, indicando a existência de espaço para mais pesquisas, como a análise dos livros didáticos, questões referentes ao currículo e ensino a distância (EAD).

Os autovalores e autovetores podem ser tomados como exemplo para essas considerações, devido ao baixo número de estudos nacionais encontrados versando sobre seu ensino ou aprendizagem. Além disso, os apontamentos sobre a parte histórica não estão reunidos em uma única investigação, de modo que todos os textos lidos sobre essa questão estão em línguas estrangeiras.

Outro ponto que entendemos merecer mais atenção e ser passível de novas análises é o GeoGebra LOGO. Compreendemos a potencialidade que o trabalho com este aplicativo pode ter na Educação Matemática (não tendo sido possível discorrer sobre todos os seus benefícios aqui), de modo que entendemos ser necessário elaborar pesquisas que tratem essa possibilidade como foco principal de suas investigações, para que novas perspectivas e discussões sejam evidenciadas não só para a comunidade acadêmica, mas também para a prática docente em diferentes níveis de ensino. Nesse sentido, escrevemos um artigo (Cordelina; Pavanelo, 2024) em que apresentamos uma introdução sobre o funcionamento dessa abordagem e trouxemos atividades semelhantes às que foram desenvolvidas com os estudantes nos primeiros encontros, focando na programação.

Compreendemos que nossas considerações na presente pesquisa não são soluções para todos os problemas que envolvem o estudo de conceitos da Álgebra Linear, mas buscamos compreender o fenômeno investigado, assumindo a flexibilidade de sua manifestação, de forma que nossa percepção possa contribuir com novas experiências de professores e estudantes ao trabalharem com estes conteúdos. Nesse sentido, as atividades elaboradas e disponíveis nos apêndices são um incentivo para que outros docentes adaptem esses materiais, com vistas a

poderem realizar discussões semelhantes, visando a um impacto positivo no estudo de autovalores e autovetores, através das possibilidades apresentadas no trabalho com TDICs.

Um dos primeiros pesquisadores a incentivar o trabalho com computadores na aprendizagem foi Papert, entendendo a si mesmo como utópico e reconhecendo a limitação da tecnologia de sua época, mas tendo como expectativa ser fonte de inspiração para outras pesquisas e abordagens educacionais. Compartilhamos essa última visão com Papert, esperando poder também ser fonte de inspiração para novas pesquisas no campo da Educação Matemática, por meio das discussões apresentadas neste estudo que envolve principalmente a formação de professores, o trabalho com tecnologias articulado com a disciplina de Álgebra Linear, de modo a agregar na busca pela compreensão de outros pesquisadores sobre aquilo que os inquieta.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, V. R. **Álgebra linear como um curso de serviço: o estudo das transformações lineares**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/832>. Acesso em: 23 dez. 2023.

ALVES, A. F. **Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática: o estudo dos espaços vetoriais**. 2013. 176 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, ICE – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/1159>. Acesso em: 28 nov. 2023.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução técnica: Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. Prefácio, p. ix-xii.

ARREBOLA, O. E. da S. **Uma sequência didática sobre transformações lineares em um ambiente de geometria dinâmica**. São Paulo, 2013. 202 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Universidade Bandeirantes Anhanguera de São Paulo.

ARTIGUE, M.; CHARTIER, G.; DORIER, J. Presentation of other research Works. In: DORIER, J.L (Ed), **On the Teaching of Linear Algebra**. 2. ed. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2000. Parte 2, Cap. 8. p. 247-264. (Mathematics Education Library).

BATTI, J. C. B. **Um pouco da matemática usada no algoritmo PageRank do Google**. 2015. 63 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160733>. Acesso em: 11 mar. 2024

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: Borba, M.C; Araújo, J.L. (orgs). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2019, p.107-119

BICUDO, M. A. V. A formação de professores: um olhar fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Formação de Professores? Da incerteza à compreensão**. 1.ed. Bauru: EDUSC, 2003. p. 19-46.

BICUDO, M. A. V. **A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa**. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 5, p. 15-26, 2012.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo; Editora UNESP, 1999. (Seminários & Debates).

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Editora Cortez, 2011.

BICUDO, M. A. V. Sobre a Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C.

(Orgs). **A pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1994. p. 35-46.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática: por quê?. **Bolema. Boletim de Educação Matemática** (UNESP. Rio Claro), v. 32, p. 229-240, 2009. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/772>

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. Pro-Posições (Unicamp), Campinas, v. 4, n.1[10], p. 18-23, 1993

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática Sala de aula e internet em movimento**. Grupo Autêntica, 2020. *E-book*. ISBN 9788551306734. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788551306734/>. Acesso em: 16 jan. 2024.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Censo da Educação Superior: 2022**. Brasília, Inep, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_superior/censo_superior/documentos/2022/apresentacao_censo_da_educacao_superior_2022.pdf. Acesso em: 22 dez. 2023

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: jan 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP n.o 1, de 18 de fevereiro de 2002. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena**. Brasília: MEC/CNE, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf>. Acesso em: 10 nov. 23

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. **Referenciais curriculares nacionais dos cursos de bacharelado e licenciatura**. Brasília, 4 de abril de 2010. Disponível em: <https://www.dca.ufrn.br/~adelardo/PAP/ReferenciaisGraduacao.pdf>. Acesso em 10 Nov. 2023

BRITO, L. Penso, LOGO programa com o GeoGebra. In: XXIV ENCONTRO MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS (PRÉ, 1.º E 2.º CICLOS), 24., 2021, Bragança (Portugal). **Anais [...]** 2021. p. 1-10. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/355980772_Penso_LOGO_programo_com_o_Geo_gebra. Acesso em: 13 dez. 2023.

CARDOSO, G. G. **Explorando conceitos algébricos com apoio do software SuperLogo**. 2021. 51 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Guaratinguetá, 2021.

CARDOSO, G. G. PAVANELO, E. O Logo no processo de aprendizagem em Matemática. In: POISSON (org.). **Série Educar - Volume 27: Matemática**. Belo Horizonte: Poisson, 2020. Cap. 17, p. 129. Disponível em:

https://www.poisson.com.br/livros/serie_educar/volume27/Educavol27.pdf. Acesso em: 14 jan. 2024.

CARLSON, D.; JOHNSON, C. R.; LAY, D. C.; PORTER, D. A. The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. In: **The College Mathematics Journal**, 24.v., n.1, 1993. p. 41-46.

CAUCHY, A. -L. Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes. In: **Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy**. Série 2, tome 9. Publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences et sous les auspices de M. le ministre de l'Instruction publique. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1882-1974. Disponível em: <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb302073189>. Acesso em: 23 nov. 2022. Conservation numérique: Bibliothèque nationale de France.

CORDELINA, G.; PAVANELO, E. Uma possibilidade de programação no GeoGebra: primeiros passos. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 13, n. 3, p. 085–103, 2024. DOI: 10.23925/2237-9657.2024.v13i3p085-103. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/66910>. Acesso em: 22 nov. 2024.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio: Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In : Borba, M. C; Araújo, J.L. (orgs). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2019, p.11-22

DORIER, J.-L. Teaching Linear Algebra at University. In: **INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS**, 2002, Pequim. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, August 20-28, 2002, Pequim: Higher Education Press, 2002. v. III, p. 875-884. Editado por Li Tatsien, Cai Zhijie, Xue Mi, Zhou Chunlian.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, pp. 107-115, 2005.

FURTADO, A. L. C. **DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ABSTRATOS DA ÁLGEBRA LINEAR**. 157 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/MSc%2032_Ana%20Luisa%20Carvalho%20Furtado.pdf. Acesso em: 29 dez. 2023.

GATTI, B. A. (2014). A formação inicial de professores para a educação básica: as licenciaturas. **Revista USP**, (100), 33-46. <https://doi.org/10.11606/issn.2316-9036.v0i100p33-46>. Acesso em: 13 dez. 2023

GONÇALVES, W. V. **Aprendendo algoritmos com a tartaruga do GeoGebra**. 2020. Oficina ao vivo apresentada em 03/12/2020, pelo canal do Youtube "Jogos & Matemática". Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/bfhqwq8ds>. Acesso em: 05 abr. 2024.

GREGOLIN, V. R. LINGUAGEM LOGO: explorando conceitos matemáticos. **Revista Tecnologias na Educação**, Minas Gerais, v. 1, n. 8, p. 1-10, dez. 2009. Disponível em: <https://tecedu.pro.br/ano-1-numero-vol-1/>. Acesso em: 15 fev. 2024.

HAWKINS, T. *Cauchy and the spectral theory of matrices*. **Historia Mathematica**, Elsevier, v. 2, n. 1, p. 1–29, February 1975. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086075900324>>. Acesso em: 24 nov. 2022.

HILLEL, J; SIERPINSKA, A. On one persistence mistake in linear algebra. In: **INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION - PME**, 18, 1994, Lisboa. Proceedings... Lisboa, 1994, v.3, p. 65-72.

HILLEL, J. Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In: DORIER, J.L (Ed.), **On the Teaching of Linear Algebra**. 2. ed. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2000. Parte 2, Cap. 6. p. 191-206. (Mathematics Education Library).

HOHENWARTER, M., FUCHS, K. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *ZDM*, 128-133, (2005), disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228398347_Combination_of_dynamic_geometry_algebra_and_calculus_in_the_software_system_GeoGebra. Acesso em: 27 mar. de 2024.

KRIPKA, R. M. L. **Uso de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear na perspectiva das teorias da aprendizagem significativa e dos registros de representação semiótica**. Rio Grande do Sul, 2018. 591p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

KRIPKA, R. M. L; KRIPKA, M; DE NARDIN PANDOLFO, P. C; PEREIRA, L. H. F; VIALI, L; LAHM, R. A. Aprendizagem de Álgebra Linear: explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas. **Revista Acta Scientiae**, v. 19, n. 4, 2017.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 504 p. Tradução de: Ricardo Camelier e Valéria de Magalhães Iório.

LEON, S. J. **Álgebra Linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 390 p. Tradução de: Valéria de Magalhães Iório.

LIMA, G. L. DE.; GOMES, E. A Inserção da Álgebra Linear no Currículo da Primeira Universidade Brasileira. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 32, n. 62, p. 927–945, dez. 2018.

MACHADO, O. V. M. Pesquisa Qualitativa: modalidade fenômeno situado. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Orgs). **A pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1994. p. 35-46.

MALTEMPI, M. V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à educação matemática. In: BICUDO, M. A. V; BORBA, M. DE C.(org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 250-263.

MARTINS, J.; BICUDO, M. A. V. **A pesquisa qualitativa em psicologia: fundamentos e recursos básicos**. 5. ed. São Paulo: Educ/Moraes, 2005.

MATHIAS, C. V. O potencial do GeoGebra como ferramenta de auxílio às habilidades de visualização. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, [S. l.]**, v. 12, n. 2, p. 044–066, 2023. DOI: 10.23925/2237-9657.2023.v12i2p044-066. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/59283>. Acesso em: 20 fev. 2024.

MOCROSKY, L. F.; MONDINI, F.; ORLOVSKI, N. A quem interessar possa! In: Paulo, R. M.; Firme I. C.; Batista, C.C. (Org.). **Ser professor com Tecnologias: sentidos e significados**. 1ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2018, v.1 , p. 41-54.

NACARATO, A. M. A Formação do Professor de Matemática: pesquisa x políticas públicas. **Revista Contexto & Educação**, [S. l.], v. 21, n. 75, p. 131–153, 2013. DOI: 10.21527/2179-1309.2006.75.131-153. Disponível em: <https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/1114>. Acesso em: 02 jan. 2024.

NOMURA, J. I. **Esquemas cognitivos e mente matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor**: traçando diferenciais na formação do engenheiro. 2014. 349 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

NOMURA, J. I.; BIANCHINI, B. L. CONCEPÇÃO AÇÃO-PROCESSO DO OBJETO MATEMÁTICO AUTOVALOR E AUTOVETOR – O ESTUDO DE CASO DE UM ALUNO DE ENGENHARIA. **VIDYA**, Santa Maria (RS, Brasil), v. 34, n. 1, p. 13, 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/24>. Acesso em: 25 jun. 2024.

OLIVEIRA, G. P. DE .; GONÇALVES, M. D.. Construções em Geometria Euclidiana Plana: as perspectivas abertas por estratégias didáticas com tecnologias. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 32, n. 60, p. 92–116, jan. 2018.

ORLOWSKI, N. **A forma/ação de professores ao aprender-ensinar matemática**. 2023. Tese (Doutorado em Formação Científica, Educacional e Tecnológica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2023.

ORLOWSKI, N.; MOCROSKY, L. F.; BICUDO, M. A. V. **Professores em forma/ação: Frações no ensino fundamental**. Produto educacional. Curitiba, 2023.

PAPERT, S. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da Informática**. Tradução Sandra Costa. Ed. rev. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PAPERT, S. **Logo: Computadores e Educação**. São Paulo: Editora Brasiliense, 1985. Publicado originalmente sob o título de Mindstorms: children, computers and powerful ideas. New York: Basic Books, 1980.

PAULO, R. M.; AMARAL, C. L. C.; SANTIAGO, R. A. A pesquisa na perspectiva fenomenológica: explicitando uma possibilidade de compreensão do ser-professor de matemática. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, [S. l.], v. 10, n. 3, p. 71 - 86, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/4088>. Acesso em: 9 jun. 2024.

PAULO, R. M.; PEREIRA, A. L.; PAVANELO, E. The constitution of mathematical knowledge with augmented reality. **The Montana Math Enthusiast**, v. 18, n.03, art. 11, p.641-668, 2020. Disponível em: < <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol18/iss3/11> >. Acesso em: 04 jun. 2022.

PAULO, R. M.; SANTIAGO, R. A.; AMARAL, C. L. C. A constituição da identidade do professor: uma abordagem fenomenológica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**,

Acta Scientiae, Canoas, v. 15, n. 3, p. 572-587, set./dez. 2013. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/541/753>. Acesso em: 9 jun. 2024.

PAVANELO, E.; CAYRES, H. M.; SANTOS, R. R. Uma proposta para trabalhar polígonos nas aulas de matemática por meio da robótica educacional. **EM TEIA - REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA IBEROAMERICANA**, v. 13, p. 1-28, 2022

PEDERSEN, T. V. Design of a didactic situation – mathematical experiments in linear algebra. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 12, n. 4, p. 27-52, 2007.

PHILOT, J. M., BIANCHINI, B. L. Um panorama das dissertações e teses sobre o tema álgebra linear no Ensino Superior no Brasil nos anos de 2011 a 2018. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, vol. 9, nº 2, novembro de 2020. *revistas.pucsp.br*, Disponível em: <https://doi.org/10.23925/2238-8044.2020v9i2p94-106>. Acesso em: 18 Jun. 2024.

PINHEIRO, J. M. L.; DETONI, A. R. Possibilidades do trabalho investigativo com A Geometria Dinâmica. In: Paulo, R. M.; Firme I. C.; Batista, C.C. (Org.). **Ser professor com Tecnologias: sentidos e significados**. 1ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2018, v. 1, p. 55-75.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H; CUNHA, M; H; SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações Matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998. 142 p.

PONTE, J. P; BROCARD, J; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4th ed. São Paulo: Autêntica Editora, 2019.

PRADO, E. A. **Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da Educação Básica**. 2016. 252 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), São Paulo, 2016. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/19048>. Acesso em: 27 Out. 2023

RICHT, A.; FARIAS, M. M. R. ; MISKULIN, R.G.S ; CABRAL, L. F. Articulação entre Álgebra Linear e Tecnologias Digitais: Perspectivas de exploração Matemática no Software GeoGebra. In: VII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 2013, Montevideo. **Actas do VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática**. Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguay, 2013. v. 1. p. 503-510

ROSA, M. Cyberformação com Professores de Matemática: interconexões com experiências estéticas na cultura digital. In.: ROSA, M. BAIRRAL, M. A. AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância: pesquisas contemporâneas**. Natal (RN): Editora da Física, 2015.

ROSA, M., BICUDO, M. A. V.; Focando a constituição do conhecimento matemático que se dá no trabalho pedagógico que desenvolve atividades com tecnologias digitais. In: Paulo, R. M.; Firme I. C.; Batista, C.C.. (Org.). **Ser professor com tecnologias: sentidos e significados**. 1ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2018, v. 1, p. 13-40.

SANTIAGO, E. F. F. **O uso de representações gráficas para a construção do conhecimento sobre Espaço Vetorial**. Rio de Janeiro, 2017. 149 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduados em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

SANTOS, E. História da disciplina Álgebra Linear: primeiras aproximações. **Revista de História da Educação Matemática**, ano 4, n. 2, p. 133-153, 2018.

SANTOS, M. R.; VENTURIN, J. A. Pesquisa fenomenológica e Educação Matemática: apresentação de procedimentos e discussão de alguns aspectos. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, 2010, Rio Claro. **Anais [...]**, p. 1-9.

SBEM. **A formação do professor de Matemática no curso de Licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBM/SBEM**. BOLETIM SBEM. Brasília: n.21, 2013. 42 p. Disponível em: <<http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>>. Acesso em: 09 Nov. 2023.

SCHEFFER, N. F.; BINOTTO, R. R. Pensamento Geométrico, Pensamento Computacional e Movimentos Corporais na construção de polígonos: uma discussão com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. In: BORBA, Marcelo C.; XAVIER, José Fábio; SCHUNEMANN, Tiele Aquino (org.). **Educação Matemática: múltiplas visões sobre tecnologias digitais**. São Paulo: Livraria da Física, 2023. Cap. 11. p. 157-172.

SILVA, M. E. S. C. **Concepção de transformação linear por estudantes de licenciatura em matemática**. 2016. 128 f. Tese (Mestrado em Educação Matemática - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016).

SOUZA, A. P. G. ; PASSOS, C. L. B. Dialogando sobre e Planejando com o SuperLogo no Ensino de Matemática dos Anos Iniciais. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 53, p. 1023–1042, dez. 2015.

SOUZA, A. V. **Ideia intuitiva de Limite no Ensino Médio: uma proposta com a linguagem de programação LOGO**. 2024. 81 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Guaratinguetá, 2024.

SOUZA, V. R. B. **Cônicas, Álgebra Linear e GeoGebra, uma combinação que deu certo**. 2014. 82 f. TCC - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

STEEN, L. A. Highlights in the History of Spectral Theory. **The American Mathematical Monthly**, v. 80, n. 4, p. 359-381, abr. 1973. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2319079>>. Acesso em: 9 ago. 2024.

STEINBRUCH, A; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, Ltda, 1987. p. 583.

STEWART, S.; AXLER, S., BEZZER, R.; BOMAN, E.; CATRAL, M.; HAREL, G.; MCDONALD, J.; STRONG, D.; WAWRO, M. Recommendations of the Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0). **Notices of the American Mathematical Society**, v. 69, n. 5, p. 813-816, maio 2022.

STEWART, S.; THOMAS, M. O. J. Process-object difficulties in linear algebra: eigenvalues and eigenvectors. In: NOVOTNÁ, J.; MORAOVÁ, H.; KRÁTKÁ, M.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.). **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 5, p. 185-192, 2006. Prague: PME.

TANAJURA, V. D. do V. **Modelagem de L-sistemas do âmbito computacional do GeoGebra**. 2020. 109 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021.

TOU, E. R., **Math Origins: Eigenvectors and Eigenvalues** (2018). SIAS Faculty Publications. 1101. Disponível em: https://digitalcommons.tacoma.uw.edu/ias_pub/1101. Acesso em: 24 nov. 2022

TRALDI JUNIOR, A. **ÁLGEBRA LINEAR NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: um conhecimento poderoso ou do poderoso?** In: TRALDI JUNIOR, Armando *et al* (comp.). **FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: processos, desafios e articulações com a educação básica**. São Paulo: Sbem - Sp, 2020. p. 82-93. Disponível em: https://sbempaulista.org.br/docs/E-book_SBEM_FORUM_PAULISTA_11_2020.pdf. Acesso em: 14 dez. 2023.

VALENTE, J. A. **O professor no ambiente Logo: formação e atuação**. Campinas: Ed. da UNICAMP/NIED, 1996. Print.

VALENTE, J. A; VALENTE, A. B. **Logo: conceitos, aplicações e projetos**. São Paulo: ITAUTEC Informática, 1988.

WICHNOSKI, P.; KLÜBER, T. E. Fenomenologia da Investigação Matemática na Educação Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 38, p. e230093, 2024.

YILDIZ-ULUS, A. Teaching the Diagonalization Concept in Linear Algebra with Technology: A Case Study at Galatasaray University. **The Turkish Online Journal of Educational Technology**, jan. 2013, p. 119-130. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/265744322_Teaching_the_Diagonalization_Concept_in_Linear_Algebra_with_Technology_A_Case_Study_at_Galatasaray_University. Acesso em: 28 ago. 2024.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO²⁶

O(a) Sr(a) está sendo convidado(a) para participar de uma pesquisa de Mestrado intitulada “Estudo de autovalores e autovetores com tecnologias digitais” que será desenvolvida por Gabriel Cordelina, Educação Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos, professora titular do Programa. A interrogação da referida pesquisa é: “O que se revela em um estudo sobre autovalores e autovetores com TDICs, junto a alunos de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática?”. Os benefícios da pesquisa são: participar de uma abordagem de um conteúdo da graduação envolvendo TDICs, visando melhorar a aprendizagem do conteúdo em questão.

Caso o(a) Sr(a) aceite participar desta pesquisa, sendo aluno da graduação, deverá participar das atividades didáticas desenvolvidas, com tempo previsto de 16 horas, divididos em 8 encontros de 2h de duração, ao decorrer de 3 semanas, em dias previamente definidos. Os dados serão registrados por meio de observação e gravação da resolução das atividades didáticas.

A resolução das atividades podem gerar riscos, tais como constrangimentos, desconfortos, timidez, sentimento de medo e/ou exposição. Para minimizar esses riscos iremos agendar previamente a coleta de dados; buscar um local privado e sem interferência de terceiros para a realização da coleta; permitir que o participante tenha acesso ao material; esclarecer possíveis dúvidas do participante sobre sua participação e uso de suas respostas/opiniões/considerações, para fins de pesquisa; remarcar a coleta, caso solicitado pelo participante; aceitar a solicitação de interrupção da gravação do procedimento em áudio ou imagem, pelo participante ou providenciar tal interrupção, caso observe alterações de humor ou saúde que coloquem o participante em risco durante a coleta de dados; prever diferentes formas de registro dos dados, caso o participante tenha restrições à captura de áudio e vídeo de sua participação, como, por exemplo, realizar a coleta de dados apenas em registro escrito/anotações.

A qualquer momento, antes, durante ou após sua participação coloco-me à disposição para esclarecimentos sobre eventuais dúvidas que possam surgir com a pesquisa. A participação é voluntária e sua recusa em participar não lhe provocará nenhum dano ou punição. Você poderá se recusar a participar, ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. Serão garantidos o sigilo e a privacidade de sua participação. Os dados coletados são confidenciais e serão utilizados unicamente para fins de pesquisa. Para participar

²⁶ (Conselho Nacional de Saúde, Resoluções 466/12 e 510/16)

não terá nenhuma despesa, bem como, não terá qualquer tipo de remuneração. Se o(a) senhor(a) se sentir esclarecido sobre a pesquisa, seus objetivos, eventuais riscos e benefícios, convido-o(a) a assinar este Termo, elaborado em duas vias, sendo que uma ficará com o senhor(a) e a outra com o pesquisador.

Rio Claro – SP / Abril de 2024

Assinatura do Pesquisador Responsável

Assinatura do participante da pesquisa

Dados sobre a Pesquisa:

Título do Projeto: Estudo de autovalores e autovetores com tecnologias digitais

Pesquisador Responsável: Gabriel Cordelina

Instituição: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – campus de Rio Claro

Dados para Contato: gabriel.cordelina@unesp.br

Orientador: Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos

Instituição: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – campus de Rio Claro

Dados para Contato: elisangela.pavanelo@unesp.br

Dados sobre os participantes da Pesquisa:

Nome:

Documento de Identidade:

Sexo:

Data de Nascimento: / /

Telefone para contato:

Comitê de Ética em Pesquisa da Faculdade de Ciências, Unesp-Bauru

Endereço: Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, nº 14-01 CEP: 17.033-360

Bairro: Centro

UF: São Paulo

Município: Bauru

Telefone: (14) 3130-9400

E-mail: cepesquisa.fc@unesp.br

APÊNDICE B – ATIVIDADE 1: TARTARUGAS E CROCODILOS

Na natureza, a dinâmica entre presa e predador é algo natural, e a cadeia alimentar é responsável por reger a relação entre cada espécie. A Tartaruga Marinha, por exemplo, consome vertebrados e invertebrados, como esponjas, medusas, algas e grama marinha, entre outras coisas. Mas um dia de caçador, também tem seu dia de caça, sendo presa de outros animais como raposas, falcões e crocodilos, de acordo com o Projeto Tamar.

Podemos explorar a relação entre presa e predador a partir de diferentes modelagens, com Equações de Diferença ou Equações Diferenciais, onde cada caso depende da abordagem discreta ou contínua do tempo.

Vamos investigar uma **simplificação** da relação entre tartarugas e crocodilos. Vamos tratar o tempo (t) de forma discreta, referente a cada semana que passa. A população de tartarugas do dia de hoje ($T(t)$) está relacionada com a população da semana anterior ($T(t - 1)$). Assim vamos abordar através de um sistema de Equações de Diferença Lineares Homogêneo (onde os coeficientes são constantes).

A população de tartarugas depende de duas coisas: da taxa de natalidade e da mortalidade (pelos crocodilos). Para simplificar o sistema, vamos observar apenas a taxa de natalidade dos predadores, com a população indicada por $C(t)$. Podemos escrever então a seguinte equação:

$$\begin{aligned} T(t+1) &= 3T(t) - C(t) \\ C(t+1) &= 2C(t) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} T(t+1) \\ C(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t) \\ C(t) \end{pmatrix}$$

Interprete a equação e identifique cada coeficiente com as taxas citadas acima. Com a escrita matricial, chamamos de A a matriz dos coeficientes.

Agora, vamos analisar o comportamento da população das Tartarugas a cada semana por meio do Geogebra, através do link: <https://www.geogebra.org/m/mt57ffrc>.

Na tela do Geogebra, iremos interpretar o eixo x como a população de tartarugas, e o eixo y como a dos crocodilos. Assim, cada par ordenado representado pelos pontos se refere à quantidade de tartarugas na abscissa, e quantidade de crocodilos na ordenada. Inicialmente iremos trabalhar com pares ordenados ao invés de vetores, para facilitar a visualização do comportamento a cada interação.

Antes de iniciarmos essa investigação, leia o código de programação dos Botões 1 e 2. Interprete a programação, o que é esperado que aconteça quando cada botão for clicado? Por que na programação não há nada referente ao eixo y ?

Caso fosse escrito “Se($y(L) \leq 0$, DefinirCor(L, VERMELHO))”, tal condição seria alcançada por qualquer um dos pontos ? Por que?

Explore outros pontos alterando a programação dada (lembre de habilitar o rastro dos pontos para visualizar a interação).

A partir daí, defina duas regiões no primeiro quadrante que resumem a relação entre as duas espécies, dependendo do ponto inicial (T_0, C_0), defina as regiões em que: “Sempre teremos ambas as populações vivas” e “Nos leva à extinção das Tartarugas”.

Refleta e discuta em grupo: Conforme há interação, o que acontece com os pontos? Eles obedecem algum padrão (estão alinhados ou não, (de)crescem de forma proporcional)?

O que divide as duas regiões? E porque divide?

Comentários para o professor: Este é o momento dos autovalores e autovetores, que na matriz existem dois, um onde não há crocodilos, e a reta em que divide as duas regiões é dada pelo outro autovetor, com o autovalor relacionado sendo o escalar a cada interação. É possível concluir a atividade comentando brevemente sobre Equações Diferenciais Ordinárias e Equações de Diferença, sobre como os autovetores e autovalores auxiliam na previsão dos comportamentos

Materiais de apoio:

CIPOLLI, V. G. **Sistemas Dinâmicos Discretos**: análise de estabilidade. 2012. 149 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática Universitária, Matemática, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, 2012.

PROJETO TAMAR. **Presa e predador**. Disponível em: <https://www.tamar.org.br/interna.php?cod=113#:~:text=Como%20presas%2C%20as%20tartarugas%20marinhas,plantas%20nas%20praias%20de%20desova>. Acesso em: 22 jan. 2024

STAR, Z. **The applications of eigenvectors and eigenvalues**: that thing you heard in endgame has other uses. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=i8FukKfMKCI>. Acesso em: 20 jan. 2024.

APÊNDICE C – ATIVIDADE 2: EXPLORANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

No Geogebra, podemos explorar diferentes transformações geométricas através de ferramentas que já estão disponíveis, de modo que selecionamos o polígono, reta ou ponto e obtemos um novo polígono, que advém do primeiro.

Os comandos disponíveis são: Reflexão em relação a uma reta; reflexão em relação a um ponto; inversão; rotação em torno de um ponto; translação por um vetor e homotetia.

As transformações geométricas constam na BNCC tanto para os anos finais do ensino fundamental quanto para o ensino médio:

Geometria - EF07MA21: Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

EM13MAT105: Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

EM13MAT308: Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Na presente atividade, iremos explorar as transformações acima, com exceção da inversão, através da programação na linguagem LOGO, iremos relacionar as transformações geométricas, vistas na Educação Básica, com as transformações lineares e discutir a respeito delas com os elementos da álgebra linear.

Construindo um triângulo com a tartaruga

Defina um ponto A na origem e em seguida, os pontos B e C no primeiro quadrante.

Programe a tartaruga para que desenhe o triângulo ABC.

Porque é conveniente que o ponto A esteja na origem?

Qual o mínimo de pontos que preciso para que a tartaruga desenhe qualquer triângulo?

Tal programação será nossa base para explorarmos todas as transformações, assim, poderá usar o mesmo código em todos casos, mantendo ou alterando as coordenadas dos pontos. Assim, convém deixarmos salvo em um botão criado na janela de visualização.

Questionamentos: Essas transformações geométricas, são consideradas transformações

lineares?

Em todos os casos, busque refletir, como podemos verificar o resultado obtido? Essas discussões podem ser realizadas na educação básica?

Reflexão em relação a um ponto

Crie o triângulo ABC como feito anteriormente. Iremos agora explorar a reflexão deste triângulo em relação à origem. Programe a tartaruga para desenhar o resultado dessa transformação.

Criando um novo botão, busque adaptar a programação que já têm, pensando, o que precisamos alterar?

Investigaremos agora essa transformação com os conhecimentos da álgebra linear. Primeiramente, obtenha os vetores que correspondem aos lados dos triângulos.

Após a transformação linear, identifique os vetores correspondentes a transformação aplicada em cada um deles.

Defina a matriz da transformação linear. Calcule os autovalores e autovetores dessa transformação linear. Quais afirmações podemos fazer sobre a transformação linear, os autovalores e autovetores?

Comentários para o professor: Podem surgir discussões comparando o cálculo do GeoGebra com o cálculo realizado manualmente, pensar no significado da transformação e relacionar com propriedades presentes em livros de Álgebra Linear.

Reflexão em relação a uma reta

Tomando como ponto de partida o triângulo ABC, como feito anteriormente, iremos agora explorar a reflexão deste triângulo em relação a uma reta. Para isso, escolha um dos eixos como uma reta para uma primeira investigação. Programe a tartaruga para desenhar o resultado dessa transformação.

Criando um novo botão, busque adaptar a programação que já têm, pensando, o que precisamos alterar?

Investigaremos agora essa transformação com os conhecimentos da álgebra linear.

Defina a matriz da transformação linear. Calcule os autovalores e autovetores dessa transformação linear. Quais afirmações podemos fazer sobre a transformação linear, os autovalores e autovetores?

Agora, utilizando da ferramenta polígono, explore diferentes retas (diferentes das retas que definem os eixos.)

Comentários para o professor: Novamente, podemos discutir sobre o cálculo do GeoGebra comparando com o caso anterior e o significado do mesmo. Reflexões nas retas no eixo X e no eixo Y são muito parecidas e apresentam poucas mudanças, as quais podem ser discutidas porque as mudanças ocorrem. No caso da reflexão de uma reta qualquer, é extremamente conveniente realizar os cálculos no geogebra. Podemos discutir sobre um autovetor ser vetor diretor da reta e o outro perpendicular a mesma, caso a reta passe pela origem, de modo que obtemos autovalores e autovetores reais, caso não passe pela origem, lidaremos com números complexos.

Rotação em torno de um ponto

Crie o triângulo ABC como feito anteriormente. Iremos agora explorar a rotação deste triângulo em relação à origem. Escolha um ângulo qualquer e programe a tartaruga para desenhar o resultado dessa transformação. Confirme utilizando as ferramentas do Geogebra.

Busque adaptar a programação que já têm, pensando, o que precisamos alterar? (* reposicionar tartaruga)

Investigaremos agora essa transformação com os conhecimentos da álgebra linear.

Defina a matriz da transformação linear. Podemos fazer isso utilizando o valor do ângulo rotacionado?

Calcule os autovalores e autovetores dessa transformação linear. Quais afirmações podemos fazer sobre a transformação linear, os autovalores e autovetores ?

Comentários para o professor: Existe uma matriz de rotação e é conveniente começarmos com ela. Aqui, obtemos autovalores e autovetores complexos, afinal estamos rotacionando a figura, e vale notar que os autovalores são os valores de um número complexo e seu conjugado. Podemos investigar o porquê a rotação implica em valores complexos, de modo que, no plano complexo, quando multiplicamos dois números complexos, na forma polar é possível ver que estamos multiplicando os módulos e somando os ângulos, assim, rotacionando. É interessante investigar diferentes ângulos, quais os autovalores e autovetores e porque isso acontece, por exemplo, os ângulos: 0° , - ângulo escolhido inicialmente (equivalente a transposta, assim a matriz é ortogonal, sendo possível explorar visualmente), 90° , entre outros.

Se o ponto não for a origem as conclusões se mantêm, só foi transladado com vetor de cada vértice para o ponto escolhido.

Homotetia

Iremos agora explorar a homotetia. A homotetia difere das anteriores pois não é uma transformação isométrica.

Crie o triângulo ABC como feito anteriormente. Para facilitar, tomemos como centro o ponto A na origem. Desenhe o novo triângulo com a razão da homotetia.

Busque adaptar a programação que já têm, pensando, o que precisamos alterar? Se o centro escolhido não for a origem, o que muda ?

Investigaremos agora essa transformação com os conhecimentos da álgebra linear.

Defina a matriz da transformação linear. Calcule os autovalores e autovetores dessa transformação linear.

Quais afirmações podemos fazer sobre a transformação linear, os autovalores e autovetores ? Comentários para o professor: Todos os vetores do R^2 são autovetores, com autovalor com a razão escolhida. Mudando o centro, algebricamente não muda nada, apenas foi transladada seguido o vetor do centro com cada vértice. Novamente, o cálculo do geogebra não coincide com um cálculo manual, como no primeiro caso, assim, podemos pensar porque as calculadoras diferem nesse resultado.

Materiais de apoio:

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: jan 2024.

MISTURINI, R. **Transformações Lineares no Plano**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/BUXHgkwq>. Acesso em: 02 fev. 2024.

APÊNDICE D – ATIVIDADE 3: OS QUADRADOS DO LEONARDO

"A proporção áurea ou proporção divina é uma igualdade associada a ideias de harmonia, beleza e perfeição. Euclides de Alexandria, matemático grego que viveu por volta de 300 a.C., foi um dos primeiros pensadores a formalizar esse conceito que até hoje intriga pesquisadores de diversas áreas. O motivo desse interesse é que a proporção áurea pode ser observada de maneira aproximada na natureza, inclusive nas sementes e folhas de plantas e no corpo humano. Consequentemente, a proporção áurea é objeto de estudo de diferentes profissionais, como biólogos, arquitetos, artistas e designers."

Da proporção Áurea podemos relacionar diversas discussões, como exemplos do cotidiano, o número de ouro, sequência de Fibonacci, entre outros.

Através da programação com a linguagem LOGO, desenhe os 6 primeiros quadrados que fazem parte da proporção Áurea.

Escreva um programa com o mínimo de linhas e comandos que conseguir.

Utilizando das ferramentas disponíveis no Geogebra, como Arco Circular, construa a espiral como na figura acima.

Tal construção seria possível ser feita na Educação Básica? Pergunta: Para o n -ésimo quadrado, qual o tamanho de seu lado?

Pergunta equivalente (pode surgir nas discussões): obter uma equação que para cada n , que descreva o n -ésimo termo da sequência;

Para respondermos essa pergunta, primeiramente, podemos explorar a sequência de Fibonacci.

Sequência de Fibonacci

Leonardo Pisano Bigollo (Pisa, 1170 – Pisa, 1250), mais conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci é considerado por alguns como o mais talentoso matemático Ocidental da Idade Média. A famosa sequência de Fibonacci teria sido alegadamente descoberta por matemáticos Indianos por volta do século VI, muito antes do nascimento de Leonardo. No entanto, a utilização desta sucessão no seu livro *Liber Abaci*, com o objetivo de dar resposta ao intitulado *O Problema dos Coelho*s, tornou-a muito popular no mundo não só das ciências como das artes, tendo sido atribuído, postumamente, o seu nome a este conjunto específico de números dispostos por ordem. A questão que foi colocada por Bigollo é a seguinte:

"Dois coelhos, macho e fêmea, nascem no início do ano. Assumindo as seguintes condições:

1. Depois de atingir a idade de dois meses, cada par produz um par misto (um

macho e uma fêmea) e, a seguir, outro par misto a cada mês.

2. Nenhuma morte ocorre durante o ano.

Quantos pares de coelhos haverá no final do ano?”

Vamos investigar essa pergunta usando o Geogebra. Escreva a sequência no software (seja usando o comando lista de interação ou pela planilha do excel - ambos os modos serão apresentados nos dias de introdução do curso).

De ambos os modos, concluiremos que no final do ano teremos 144 coelhos.

O processo para obter os números da sequência já é conhecido por nós, mas busquemos escrever uma equação matricial que também nos resulta nos valores da sequência de Fibonacci. Discussão em conjunto para obtermos a equação matricial.

Com a equação matricial em mãos, vamos investigar como se comportam os vetores de entrada e os vetores resultantes.

Escreva uma sequência no Geogebra para visualizar os vetores, respeitando a equação obtida (podemos compreendê-los olhando os extremos, visualizando como uma sequência de pontos para não ficar muito carregado a tela do software).

Calcule os autovalores e autovetores da matriz utilizada na equação. Os autovalores te lembram algo ?

Observe o autovetor calculado. O número de ouro está presente nas coordenadas do vetor? Escreva os autovetores na janela de álgebra, para visualizarmos. O que podemos concluir destes dois autovetores? Por que isso acontece?

Escreva a reta que passa pela origem e tem como vetor diretor um autovetor. O que podemos observar dos pontos em relação a uma das retas?

Comentários para o professor: autovetores formam um eixo, sendo um deles vetor diretor da reta onde os pontos se aproximam, sempre com razão de seu autovalor correspondente.

Agora é sua vez, utilizando da mesma lei de formação da sequência de Fibonacci, escreva sua sequência partindo de dois diferentes números. O que podemos observar comparando com o que já foi feito? Por que isso ocorre?

Comentários para o professor: Aqui, novamente é possível fazer comentários relacionando com a Atividade 1, como os autovetores nos auxiliam em “indicar” os resultados futuros.

Retomando para nosso objetivo inicial, vamos observar novamente a equação matricial. Busque escrever uma equação que calcule (F_{n+1}, F_n) em termos de (F_2, F_1) (sendo F_1 e F_2 os dois primeiros termos da sequência)

Com base nos cálculos feitos, o que pode ser feito para facilitar as contas?

Comentários para o professor: Na pesquisa apresentamos quais seriam os passos e qual é a solução da equação, mas disponibilizamos o acesso da resolução para aqueles que queiram ver. Essa é uma escolha que depende do tempo e da turma, ficando a critério do professor.

E finalmente, chegamos na função!

Quais são os números da função? Por que eles estão presentes? Escreva a função no Geogebra, e observe os pontos do tipo $(n, f(n))$.

Dica: construa um controle deslizante da variável “n” e habilite o rastro dos pontos. Conseguimos responder a pergunta feita inicialmente?

Quais são as diferenças entre esses pontos e outros que exploramos nesta atividade?

Extra: Também podemos encontrar o número de ouro de outra forma na Sequência de Fibonacci. Como ?

Materiais de apoio:

CAYRES, H.M. **Robótica Educacional no Ensino de Matemática**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Matemática - Licenciatura) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, campus de Guaratinguetá, 2022.

PEREIRA, F. C. **Números de Fibonacci**: propriedades e aplicações. 2022. 66 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 2022. Cap. 3.

RIZZO, M. L. A. "Proporção áurea"; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/proporcao-aurea.htm>. Acesso em 06 de fev. 2024.

STAR, Z. **The applications of eigenvectors and eigenvalues**: that thing you heard in endgame has other uses. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=i8FukKfMKCI>. Acesso em: 20 jan. 2024.