

Claudineia Helena Recco

Um Estudo de Técnicas de Agregação para o Problema do Transporte Generalizado



1910000939





**Um Estudo de Técnicas de
Agregação para o Problema do
Transporte Generalizado**

Claudineia Helena Recco

**Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional MAC-049**



Um estudo de Técnicas de Agregação para o Problema do Transporte Generalizado

Claudineia Helena Recco

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José
do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel



939/00

São José do Rio Preto

Dezembro/1999



“(…)

Ainda que eu falasse a lingua dos homens
e falasse a lingua dos anjos,
sem amor eu nada seria
(…)”

Renato Russo.

Aos meus pais,
Antenor e
Maria Helena
dedico.

AGRADECIMENTOS

Li em algum lugar que sempre existem mais pessoas que merecem agradecimentos do que costumamos reconhecer, assim sei que muitas pessoas importantes para este trabalho não constam na minha pequena lista de agradecimentos. A elas meu muito obrigado.

À Prof^a Maria do Socorro Nogueira Rangel pela orientação, paciência e companherismo na elaboração desse trabalho.

Ao Prof. Igor Semionovich Litvinchev pela ajuda constante na elaboração desse trabalho.

A todos os professores e funcionário do DCCE que de alguma forma contribuíram durante este período.

Aos amigos pós-graduandos pelo companherismo.

A meus irmãos pela compreensão, apoio e carinho.

A meus pais pela compreensão e carinho nos momentos mais difíceis.

A Deus por dar-me forças e coragem em todos os momentos.

RESUMO

Neste trabalho, estudam-se técnicas de agregação e desagregação para problemas de programação linear de grande-porte. Limites de erros *a priori* e *a posteriori* associados a localizações lineares são calculados para se obter uma estimativa da solução ótima do problema original. Faz-se uma aplicação da técnica de agregação ao problema do transporte generalizado baseado em dois métodos de agregação: agregação de origens e agregação de destinos. Por fim, apresenta-se um estudo numérico da qualidade dos limites de erro *a posteriori* propostos por Zipkin [23] e Litvinchev [11] para agregação de origens e agregação de destinos no problema do transporte generalizado.



Abstract

In this work, aggregation and disaggregation techniques for large-scale linear programming problems are presented. To estimate the loss of optimality due to aggregation *a priori* and *a posteriori* error bounds based on linear localization are calculated. An application of the aggregation and disaggregation techniques to the generalized transportation problem, aggregating origins and aggregating destinations, are given. Finally, a numerical study of the quality of the *a posteriori* error bounds proposed by Zipkin [23] and Litvinchev [11] to the generalized transportation problem is presented.



Índice

Nomenclatura	iv
1 Introdução	1
2 Agregação para Programação Linear	4
2.1 Introdução	4
2.2 Definição do Problema Agregado	6
2.3 Limite de Erro <i>a Priori</i>	13
2.4 Limites de Erro <i>a Posteriori</i>	19
3 Agregação para o Problema do Transporte Generalizado	29
3.1 Introdução	29
3.2 Métodos de Agregação para o Problema do Transporte Generalizado	33
3.2.1 Agregação de Origens	33
3.2.2 Agregação de Destinos	45
3.3 Limite de erro <i>a Posteriori</i>	56
4 Experimentos Numéricos	73
4.1 Introdução	73
4.2 Problemas Testados	73
4.3 Resultados	76
5 Conclusão	81
Referências Bibliográficas	83



Nomenclatura

A matriz $m \times n$ do problema original PL

A_k submatriz de A composta pelas colunas de A associadas as variáveis no cluster S_k

A^l submatriz de A composta pelas linhas de A associadas as restrições no cluster R_l

A_k^l submatriz de A composta pelas colunas e linhas de A associadas as variáveis no cluster S_k e as restrições no cluster R_l

$\bar{A}$ matriz do problema agregada

$\mathcal{A}$ matriz de incidência nó-arco

$\mathcal{A}_{ij}$ submatriz de $\mathcal{A}$ composta pelas colunas de $\mathcal{A}$ associadas as variáveis no cluster S_{ij}

β_i semelhança entre uma restrição i e a função objetivo

c_k subvetor de c composto pelas variáveis associadas ao cluster S_k

c vetor custo do problema original

$\bar{c}$ vetor custo do problema agregado

D dual

(D^*, u^*) solução ótima para o problema PL dual original

$(\bar{D}^*, \bar{U}^*)$ solução ótima para o problema PL dual agregado

(D^*, u^*, v^*) solução ótima para o PTG dual original

$(\bar{D}^*, \bar{U}_i^*, \bar{V}_j^*)$ solução ótima para o PTG dual agregado

d_{ij} multiplicador positivo associado com o arco (i, j) na rede generalizada

$d(x, y)$ distância euclidiana

$\delta(g, W_i)$ limitante associado a localização W_i

f^l vetor peso associado as restrições

$G = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ rede com conjunto de nó $\mathcal{I}$ e conjunto de arco $\mathcal{J}$

g^k vetor peso associado as variáveis

γ direção de busca arbitrária



$\mathcal{I}$ conjunto finito de nós (vértices) em uma rede
 (i, j) arco unindo nó i ao nó j
 $G = (\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{J})$ rede bipartida
 $\mathcal{J}$ conjunto de linhas (arcos) em uma rede
 K número de clusters
 LS limite de erro superior *a posteriori*
 $\max$ maximizar
 $\min$ minimizar
 $\|\cdot\|$ norma euclidiana
 $\nabla_{U_i} LS(\bar{U}^{*W}, W)$ a derivada de $LS(U^W, W)$ em relação a U_i
 P primal
 $\mathcal{P}$ conjunto de todas as soluções factíveis para o problema original
 PA problema agregado
 PL programação linear
 PO problema original
 PR problema reduzido
 PTG problema do transporte generalizado
 $\langle, \rangle$ produto escalar
 $\pi(g, W_i \cap W_j)$ limitante associado a localização $(W_i \cap W_j)$
 $\Pi_+(\tau)$ projecção ortogonal de $\tau \in \mathbb{R}$ sob o octante não negativo
 $\mathbb{R}$ conjunto dos reais
 R_l cluster associado a agregação de restrições
 ρ, ρ' partição dos índices das restrições e do conjunto das origens $\mathcal{I}_2$
 S matriz de similaridade
 S_k cluster associado a agregação de variáveis
 σ, σ' partição dos índices das variáveis e do conjunto de destinos $\mathcal{I}_1$
 θ número real qualquer
 ε limite de erro
 W_i localização
 ξ tamanho do passo
 X_{ij} subvetor de x composto pelas variáveis associadas ao cluster S_{ij}

X_k subvetor de x composto pelas variáveis associadas ao cluster S_k

$(\bar{X}, \bar{U})$ variável agregada primal/dual

(x, u) variável original primal/dual

$(\bar{x}, \bar{u})$ solução desagregada primal/dual

Z^* valor objetivo ótimo para o problema original

$\bar{Z}^*$ valor objetivo ótimo para o problema agregado

(Z^*, x^*) solução ótima para o problema primal original

$(\bar{Z}^*, \bar{X}^*)$ solução ótima para o problema primal agregado

$(\bar{Z}^*, \bar{X}_{ij}^*, \bar{X}_{pj}^*)$ solução ótima para o problema do transporte generalizado primal agregando as origens

$(\bar{Z}^*, \bar{X}_{ij}^*, \bar{X}_{ip}^*)$ solução ótima para o problema do transporte generalizado primal agregando os destinos



Capítulo 1

Introdução

A técnica de Agregação e Desagregação é uma ferramenta valiosa para manipular dados, e tem sido desenvolvida para facilitar a resolução e análise de modelos de otimização de grande porte. Basicamente, esta técnica consiste em um conjunto de métodos para resolver problemas de otimização, tais como:

- a) Combinação de dados.
- b) Uso de um modelo(s) auxiliar(es), que é reduzido em tamanho e/ou complexidade com relação ao modelo original.
- c) Análise dos resultados do modelo auxiliar, em termos do modelo original.

O principal objetivo dessa técnica é desenvolver modelos auxiliares que forneçam boas aproximações para o problema original.

Existem na literatura vários exemplos do uso da técnica de agregação e desagregação em modelos de Programação Linear de Grande Porte. Balas [3], Zipkin [22, 25] e Norman [18] aplicam a técnica de agregação ao problema do transporte; Evans [5] ao problema do transporte de múltiplos produtos; Zipkin [22] ao problema de rede; Evans [6] e Litvinchev [11] ao problema do transporte generalizado; Mendelssohn [17] ao problema de decisão de Markov; Weintraub [26] ao problema de planejamento florestal. Outras aplicações podem ser encontradas em Rogers et. al [20] e suas referências.

Para aplicar a técnica de agregação e desagregação deve-se seguir alguns passos, tais como:

- 1) Análise de Agregação - métodos para determinar os elementos do modelo reduzido.
- 2) Análise de Desagregação - métodos para obter uma solução aproximada para o problema



original através do problema agregado.

3) Análise de Erro - métodos para determinar o limite de erro, resultante do uso de técnicas de agregação e desagregação.

Análise de Agregação é o procedimento empregado para agrupar, combinar os dados do problema original (PO), formando um outro problema de menor dimensão e/ou complexidade, que denomina-se problema agregado (PA). O primeiro item na análise de agregação é a determinação da entidade a ser combinada, isto é, variáveis e/ou restrições. Uma vez definida a entidade a ser combinada, é necessário um procedimento para determinar quais elementos são candidatos a fazer parte de um mesmo grupo, chamado de cluster. A definição dos clusters determina a dimensão que o novo problema (problema agregado) terá.

Uma vez definido os clusters, é necessário decidir como combinar seus elementos. Uma maneira é chamada combinação de peso-fixo. Um vetor peso convexo, g^k arbitrário, onde $g_i^k \geq 0$ e $\sum g_i^k = 1$ é usado para agregar os elementos de cada cluster. Um outro método é a combinação por dominância, que consiste de uma matriz peso g , tal que, apenas uma componente em cada coluna é igual a 1 e as demais iguais a zero, isto é, a coluna do problema agregado é formada considerando-se apenas o maior elemento de cada linha da submantriz associado ao cluster.

Análise de Desagregação é o procedimento que utiliza a solução ótima do problema agregado para estimar uma solução factível aproximada para o problema original.

A entidade(s) à ser desagregada será idêntica a que foi agregada. A desagregação pode ou não usar o mesmo vetor peso que foi usado para agregar os dados originais.

Os modelos reduzido e original devem estar relacionados, isto é, se a solução desagregada do modelo reduzido não fornece a decisão ótima para o modelo original, deve então, fornecer decisões próximas do ótimo. Faz-se necessário então, calcular uma estimativa para esta diferença.

A análise de Erro é o procedimento que estuda a perda de informações devido ao processo de agregação e desagregação.

Freqüentemente, dois tipos de limites de erro são calculados:

- 1) Limite de erro *a priori*: é o limite calculado sobre o valor ótimo de um modelo de otimização original, depois de um modelo agregado ter sido formado, mas antes de ser resolvido.
- 2) Limite de erro *a posteriori*: é o limite calculado sobre o valor ótimo de um modelo de



otimização original, depois de um modelo agregado ter sido formado e resolvido.

A figura (1.1) abaixo descreve o processo geral de agregação e desagregação para problemas de otimização.

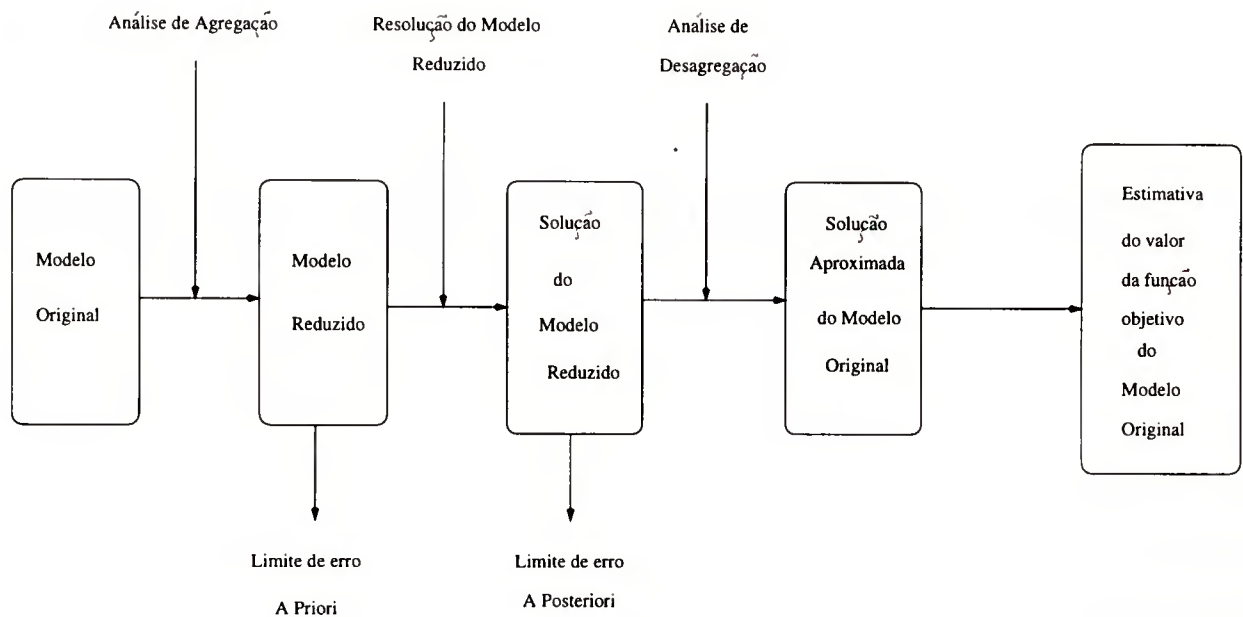


Figura 1.1: O processo de agregação/desagregação para modelos de otimização

Neste trabalho, estudam-se técnicas de agregação e desagregação aplicadas a problemas de programação linear. A motivação para este trabalho é organizar alguns resultados básicos sobre agregação e desagregação existentes na literatura, e apontar várias aplicações da técnica. Em particular, é discutido com detalhes a aplicação da metodologia ao problema do transporte generalizado.

No capítulo 2, apresentam-se métodos de agregação/desagregação, incluindo a definição do problema agregado e o cálculo dos limites de erro *a priori* e *a posteriori*.

No capítulo 3, apresenta-se uma aplicação da técnica de agregação/desagregação ao problema de transporte generalizado. São descritos dois métodos de agregação e o cálculo dos limites de erro *a posteriori* propostos por Litvinchev [11] e Zipkin [23].

No capítulo 4, apresentam-se os resultados de um pequeno estudo numérico aplicado ao problema do transporte generalizado.

Por fim, apresentam-se as conclusões do trabalho e as referências bibliográficas.

Capítulo 2

Agregação para Programação Linear

2.1 Introdução

Um Problema de Programação Linear (PL) geralmente consiste em, por exemplo, minimizar os custos de produção de uma fábrica; ou maximizar os lucros. Para isso, leva-se em consideração algumas restrições como: a mão de obra, o tempo gasto e o custo da produção do produto a ser fabricado, o período em que o mesmo pode ficar estocado, o local de estocagem, a aceitação no mercado, o transporte do produto, etc. Há problemas que envolvem milhares de restrições e variáveis.

Os modelos de programação linear têm as seguintes características:

- a) Variáveis de decisão contínuas, indicando por exemplo, quanto produzir de um determinado item. Essas variáveis são não-negativas.
- b) Um critério de escolha das variáveis de decisão constituído por uma função linear. Esta função é denominada função objetivo e seu valor deve ser otimizado (Maximizado ou Minimizado).
- c) Restrições à decisão a ser tomada, que envolvem, por exemplo, aceitação do produto no mercado, mão de obra limitada, tempo gasto na produção. Essas restrições envolvem relações de interdependência entre as variáveis de decisão e são expressas por um conjunto de equações ou inequações lineares.

Um modelo de programação linear pode ser representado matematicamente na seguinte



forma matricial:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = cx \\ (P) \quad & \text{sujeito a } Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $c = [c_j]$, $j = 1, \dots, n$, $b = [b_i]$, $i = 1, \dots, m$, $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, $x = [x_j]$ é um vetor de variáveis de decisão e (Z^*, x^*) é a solução ótima.

Para interpretar o modelo geral, convém associá-lo a uma empresa que têm m recursos disponíveis para a fabricação de n produtos distintos. Assim, para os produtos $j = 1, \dots, n$ e recursos $i = 1, \dots, m$ tem-se:

x_j = nível de produção do produto ou atividade j .

c_j = lucro unitário do produto j .

b_i = quantidade disponível do recurso i ($b_i \geq 0$).

a_{ij} = quantidade do recurso i consumida na produção de uma unidade do produto j .

A função objetivo a ser maximizada representa o lucro total da empresa nas n atividades distintas. As m restrições informam que o total gasto do recurso i , nas n atividades, têm que ser menor ou, no máximo, igual a quantidade b_i disponível do recurso i .

Qualquer modelo de programação linear pode ser associado a um outro modelo de PL chamado de modelo de programação linear dual. O modelo original é chamado de problema primal.

O problema de programação linear dual associado ao problema (2.1) consiste em determinar u , tal que:

$$\begin{aligned} \min \quad & D = ub \\ (D) \quad & \text{sujeito a } uA \geq c \\ & u \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $u = [u_i]$, $i = 1, \dots, m$ é um vetor de variáveis de decisão dual e (D^*, u^*) é a solução ótima.

Pode-se definir algumas relações entre o par primal(P)/dual(D). Uma relação entre os problemas P e D diz respeito a soluções factíveis. Qualquer que seja x primal factível e qualquer que seja u dual factível tem-se:

$$cx \leq ub$$

onde cx e ub são as funções objetivas dos problemas P e D, respectivamente.

Se a solução ótima x^* para o problema primal existe então a solução ótima u^* para o problema dual existe, e $cx^* = u^*b$. Logo tem-se que o valor ótimo satisfaz:

$$cx \leq \text{valor ótimo} \leq ub.$$

Considere o par de problemas P e D, então, exatamente uma das sentenças a seguir é verdadeira:

- a) Os problemas P e D possuem soluções ótimas x^* e u^* respectivamente e $cx^* = u^*b$.
- b) Se um problema tem o valor objetivo ilimitado, então o outro problema é infactível.
- c) Os dois problemas são infactíveis.

Maiores detalhes sobre as relações entre os problemas Primal/Dual, assim como, sobre métodos de solução para Problemas de Programação Linear podem ser encontrados em Bazaraa [4] e Luenberger [15].

Nas seções a seguir, discute-se a técnica de agregação e desagregação aplicada ao Problema de Programação Linear: como obter o problema agregado, como obter uma solução aproximada para o problema original através da solução obtida para o problema agregado. Estuda-se também a metodologia de análise de erro, isto é, como calcular limites de erro *a priori* e *a posteriori* para a perda de otimalidade causada pelo uso da metodologia de agregação.

2.2 Definição do Problema Agregado

Suponha que o problema PL esteja definido como em (2.1). Como já mencionado, há problemas que envolvem milhares de restrições e variáveis. Esses problemas são chamados de problemas de grande porte e são difíceis de serem resolvidos pelos métodos tradicionais.

Para resolver este tipo de problema estuda-se um método que gera um problema com dimensão menor que o problema PL original, denominado Problema Agregado (PA) ou Reduzido (PR) e, portanto, mais simples de ser resolvido. No caso de agregação de variáveis, através da solução encontrada ao resolver o problema agregado, é possível obter uma solução factível para o problema PL original. Nem sempre é possível obter uma solução desagregada factível quando a entidade agregada é restrições, ou variáveis e restrições simultânea (Zipkin

[24]).

Dado o problema PL original (2.1), pode-se construir o problema agregado substituindo um conjunto de variáveis (colunas), chamado de cluster, por uma única variável (coluna) resultante de uma combinação linear de todas as variáveis pertencentes ao cluster. Para tanto, considere uma partição σ dos índices das variáveis $\{1, \dots, n\}$, em um conjunto de clusters, $\sigma = \{S_k \mid k \in K\}$. Isto é $\cup_{k=1}^K S_k = \{1, \dots, n\}$, $S_k \cap S_l = \emptyset$ para $k \neq l$, e $n_k = |S_k|$. As variáveis em cada cluster são agregadas, formando uma única variável, usando um vetor peso não negativo, $g^k \geq 0$ tal que $\sum_{j \in S_k} g_j^k = 1$, $k = 1, \dots, K$. Denota-se por A_k a submatriz $m \times n_k$ de A , contendo as colunas com os índices em S_k . Analogamente, define-se c_k , tal que $c = (c_1, \dots, c_K)$ e X_k , tal que $x = (X_1, \dots, X_K)$. Uma coluna agregada $\bar{A}_k$, é obtida através de uma combinação linear das colunas de A_k usando o vetor peso g^k e, analogamente, $\bar{c}_k$ e $\bar{X}_k$ são obtidos através de uma combinação linear dos elementos de c_k e X_k , isto é:

$$\bar{A}_k = A_k g^k \quad (2.3)$$

$$\bar{c}_k = c_k g^k \quad (2.4)$$

$$\bar{X}_k = X_k g^k \quad (2.5)$$

$$k = 1, \dots, K.$$

Tomando então, $\bar{A} = (\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_K)$, $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_K)$ e $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$, o problema original (2.1) pode ser transformado no seguinte problema agregado:

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{Z}_v = \bar{c} \bar{X} \\ (PA) \text{ sujeito a } & \bar{A} \bar{X} \leq b \\ & \bar{X} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $(\bar{Z}_v^*, \bar{X}^*)$ é a solução ótima.

Pode-se associar também ao problema agregado o problema dual, que é representado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}_v = \bar{U} b \\ (DA) \text{ sujeito a } & \bar{U} \bar{A} \geq \bar{c} \\ & \bar{U} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $(\bar{D}_v^*, \bar{U}^*)$ é a solução ótima.

Pode-se observar que o problema dual (2.7) do problema agregado (2.6) é equivalente a agregar restrições do problema dual (2.2) do problema original (2.1).

É possível agregar também as restrições de um problema linear. Dado o problema PL original (2.1), pode-se construir o problema agregado substituindo um conjunto de restrições (linhas), chamado de cluster, por uma única restrição (linha) resultante de uma combinação linear de todas as restrições pertencentes ao cluster. Para tanto, considere uma partição ρ dos índices das restrições $\{1, \dots, m\}$, em um conjunto de clusters, $\rho = \{R_l \mid l \in L\}$. Isto é, $\cup_{l=1}^L R_l = \{1, \dots, m\}$, $R_l \cap R_r = \emptyset$ para $l \neq r$, e $m_l = |R_l|$. As restrições em cada cluster são agregadas, formando uma única restrição, usando um vetor peso não negativo, $f^l \geq 0$ tal que $\sum_{i \in R_l} f_i^l = 1$, $l = 1, \dots, L$. Denota-se por A_l a submatriz $m_l \times n$ de A , contendo as linhas com os índices em R_l . Analogamente, define-se b_l , tal que $b = (b_1, \dots, b_L)$. Uma linha agregada $\bar{A}_l$, é obtida através de uma combinação linear das linhas de A_l usando o vetor peso f^l e, analogamente, $\bar{b}_l$ é obtido através de uma combinação linear dos elementos de b_l , isto é:

$$\bar{A}_l = f^l A_l \quad (2.8)$$

$$\bar{b}_l = f^l b_l \quad (2.9)$$

$$l = 1, \dots, L.$$

Tomando então, $\bar{A} = (\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_L)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_L)$ o problema original (2.1) pode ser transformado no seguinte problema agregado:

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{Z}_r = cx \\ (PA) \quad & \text{sujeito a } \bar{A}x \leq \bar{b} \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pode-se associar também ao problema agregado (2.10) o problema dual, que é representado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}_r = u\bar{b} \\ (DA) \quad & \text{sujeito a } u\bar{A} \geq c \\ & u \geq 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Há ainda problemas, onde é desejável agregar as variáveis e as restrições simultaneamente. Essa é uma terceira maneira de fazer agregação. Para tanto, considere as partições σ e ρ dos índices das colunas e linhas, respectivamente, conforme definidos acima, e os pesos não negativos $g^k \geq 0$ e $f^l \geq 0$ tal que:

$$\sum_{j \in S_k} g_j^k = 1, \quad k = 1, \dots, K \text{ e } \sum_{i \in R_l} f_i^l = 1, \quad l = 1, \dots, L.$$

Denota-se por A_k^l a submatriz $m_l \times n_k$ de A , contendo as colunas com os índices em S_k e as linhas em R_l . Analogamente, define-se c_k , tal que $c = (c_1, \dots, c_K)$, b_l , tal que $b = (b_1, \dots, b_L)$ e X_k , tal que $x = (X_1, \dots, X_K)$. Uma coluna agregada $\bar{A}_k^l$, é obtida através de uma combinação linear das colunas de A_k e das linhas de A_l usando os vetores peso g^k e f^l e, analogamente, $\bar{c}_k$, $\bar{b}_l$ e $\bar{X}_k$ são obtidos através de uma combinação linear dos elementos de c_k , b_l e X_k respectivamente, isto é:

$$\bar{A}_k^l = f^l A_k^l g^k \quad (2.12)$$

$$\bar{c}_k = c_k g^k \quad (2.13)$$

$$\bar{b}_l = f^l b_l \quad (2.14)$$

$$\bar{X}_k = X_k g^k \quad (2.15)$$

$$k = 1, \dots, K$$

$$l = 1, \dots, L.$$

Tomando então, $\bar{A} = (\bar{A}_1^1, \dots, \bar{A}_K^L)$, $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_K)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_L)$ e $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$, o problema original (2.1) pode ser transformado no seguinte problema agregado ($L \times K$):

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{Z}_{vr} = \bar{c} \bar{X} \\ (PA) \quad & \text{sujeito a } \bar{A} \bar{X} \leq \bar{b} \\ & \bar{X} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

O problema dual associado ao problema reduzido (2.16) é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{D}_{vr} = \bar{U} \bar{b} \\ (DA) \quad & \text{sujeito a } \bar{U} \bar{A} \geq \bar{c} \\ & \bar{U} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Maiores detalhes podem ser obtidos em Rogers et al. [20] e em Zipkin [24].

O método de agregação descrito acima é chamado de combinação de peso-fixo, e é a estratégia de substituição mais usada na literatura.

Para construir o problema agregado, tem-se alguns passos a seguir, tais como: definir os clusters, isto é, de que maneira fazer as partições utilizadas na agregação; como combinar os dados do problema original para obter os dados (coeficientes) para o problema agregado. Depois do problema agregado ter sido construído e resolvido, desagrega-se a solução do problema agregado obtendo uma solução aproximada para o problema original. A seguir discute-se esses passos com mais detalhes.

Definição dos clusters

Antes de definir a partição σ (e/ou ρ) que será usada na construção do problema agregado, é preciso fazer uma análise dos dados do problema original e definir qual entidade de cluster, variáveis e/ou restrições, deve ser agrupada. A entidade a ser combinada deve ser, em grande parte, determinada de maneira a realizar uma boa agregação/desagregação. Por exemplo, se o tamanho do problema PL original viola a capacidade de um software, então, uma estratégia pode ser agrupar apenas o suficiente para satisfazer a capacidade do software.

Uma vez definida a entidade de cluster que será agrupada, é necessário estabelecer critérios para a definição do conjunto σ (e/ou ρ).

Shetty e Taylor [21], analisam vários critérios para se agrupar os dados do problema PL.

Considerando um par de restrições i, j de um problema PL, a semelhança entre elas é denotada por s_{ij} e pode ser colocada em forma de matriz. Seja $S = [s_{ij}]$ a matriz de similaridade. A semelhança entre cada restrição $i = 1, \dots, m$ e a função objetivo é denotada por β_i . O cálculo de s_{ij} e β_i pode ser feito utilizando dois critérios: “proximidade angular” e/ou “proximidade espacial”:

“Proximidade Angular”: Procura-se agrupar entidades cujos hiperplanos são paralelos ou “próximos de paralelos”;

“Proximidade Espacial”: Procura-se agrupar entidades cuja distância entre as partes dos hiperplanos que contornam a região factível é mínima. A distância mínima entre quaisquer dois hiperplanos é definida como o mínimo das distâncias entre quaisquer dois pontos sobre os hiperplanos, tal que, os pontos não estejam sobre o mesmo hiperplano.

O critério de “proximidade angular”, pode ser também definido baseado no cosseno do



ângulo entre a função objetivo e cada uma das restrições.

Assim, β_i é definido como:

$$\beta_i = \cos^{-1} \left[\frac{\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}}{\left[\sum_{j=1}^n c_j^2 \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right]^{1/2}} \right].$$

Os critérios de proximidade angular e/ou proximidade espacial das restrições para o problema dual podem ser utilizadas para determinar clusters de variáveis.

Uma outra medida de similaridade é dada pela distância entre dois vetores $d(x, y)$. Sejam $x = [x_i]$ e $y = [y_i]$ então, uma medida de distância pode ser dada por:

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^K (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2},$$

onde $d(x, y)$ é a distância euclidiana.

Considere um vetor coluna definido como $A_j = (c_j, a_{1j}, \dots, a_{mj})$, onde c_j é o coeficiente da função objetivo e $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ são os coeficientes da coluna A_j do problema original. Então, uma segunda medida de distância entre duas colunas A_j e A_k pode ser dada por: $d(A_j, A_k) = 1 - \cos(A_j, A_k)$, onde $\cos(A_j, A_k)$ é o cosseno do ângulo formado pelas colunas A_j e A_k , isto é:

$$\cos(A_j, A_k) = \frac{\langle A_j, A_k \rangle}{\|A_j\| \|A_k\|},$$

onde $\langle, \rangle$ indica o produto escalar e $\|.\|$ indica a norma euclidiana.

Note que $d(A_j, A_k)$ é uma métrica pois satisfaz:

$$d(A_j, A_k) > 0, \text{ para todo } j, k$$

$$d(A_j, A_j) = 0 \text{ para todo } j$$

$$d(A_j, A_k) = d(A_k, A_j) \text{ para todo } j, k$$

$$d(A_j, A_k) \leq d(A_j, A_i) + d(A_i, A_k) \text{ para todo } i, j, k, \text{ (desigualdade triangular).}$$

Note que, quando $A_j = A_k$ a distância $d(A_j, A_k) = 0$. Maiores detalhes podem ser obtidos em Weintraub [26].

Uma vez definido os candidatos a fazerem parte de um mesmo cluster, também estará definido o número de clusters (k), ou seja, o número de variáveis que o problema agregado

terá.

Métodos de combinação

Uma vez definido o conjunto σ (clusters), é necessário definir como substituir cada cluster S_k de variáveis por uma única variável. Pode-se fazer a substituição dos clusters por combinação de peso-fixo, ou por combinação por dominância.

Métodos de combinação de peso-fixo envolvem um vetor peso g^k cujas componentes são não negativas e soma unitária. O vetor g^k é usado para fazer uma combinação linear dos dados do problema original, fornecendo os dados para o problema agregado.

O método de combinação por dominância é um método de aproximação conservativa que consiste em atribuir um peso positivo somente para uma componente de cada elemento do cluster, isto é, faz-se uma combinação linear das componentes do cluster utilizando uma matriz peso g , tal que, apenas uma componente em cada coluna é igual a 1 e as demais iguais a zero. Para um problema de maximização, o maior elemento de cada linha da submatriz associada ao cluster formará a coluna agregada. Este critério garante que a solução do problema agregado fornecerá um limite inferior para o problema original.

A combinação por dominância freqüentemente resulta em uma solução inferior àquelas encontradas por combinação de peso-fixo. Esse método pode também ser usado para agregar restrições ou agregar restrições e variáveis simultaneamente. Zipkin [23] nota que é possível determinar uma matriz peso g , que fornecerá uma solução ótima para o problema agregado igual a solução ótima do problema original (ver Rogers et al. [20]).

Solução desagregada

Depois que o problema agregado é construído e resolvido, pode-se usar o resultado para obter uma solução aproximada para o problema original, através da desagregação da solução agregada obtida.

Suponha que o PA foi resolvido, e seja $(\bar{X}^*, \bar{U}^*)$ uma solução ótima para o primal e dual, (2.6) e (2.7) respectivamente. Então, a solução do problema agregado é usada para obter uma solução factível para o problema original, onde a entidade de cluster à ser desagregada será a mesma que foi agregada (combinada).

O caminho mais simples para obter uma solução factível para o problema original (2.1) é usar desagregação de peso-fixo, (ver Zipkin [23], Leisten [9]) isto é:

$$\bar{x}_j = g_j^k \bar{X}_k^*, \quad j \in S_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.18)$$



$\bar{x}_j$ é uma solução factível, mas geralmente subótima para (2.1), isto é, a solução gerada é uma solução aproximada para o problema (2.1). Seja $(\bar{x}, \bar{u})$, a solução desagregada primal/dual. Então, a solução $(\bar{x}, \bar{u})$ é chamada de “solução de peso-fixo”, para o problema (2.1) obtida de $(\bar{X}^*, \bar{U}^*)$.

O problema (2.6) pode ser infactível, e ainda assim, o problema (2.1) pode ser factível, portanto, deve-se escolher (σ, g) de maneira que (2.6) seja factível.

Considerando o caso onde variáveis e restrições são agregadas simultaneamente, também pode-se aplicar desagregação de peso-fixo, para obter uma solução aproximada para o problema (2.1), maiores detalhes podem ser obtidos em Zipkin [24].

Quando um problema agregado é resolvido, freqüentemente é interessante obter algumas informações sobre a perda de precisão, devido ao fato, de um problema mais simples que o problema original ser resolvido. Um caminho para estimar a perda de precisão é a diferença entre os valores das funções objetivos dos problemas original e agregado. Como o valor ótimo Z^* do problema original não é conhecido, pode-se somente estimar $Z^* - \bar{Z}^*$ e obter os limites para essa diferença.

O erro resultante da agregação de um problema PL é expresso pelo grau de subotimalidade da solução agregada, comparada com o valor ótimo da função objetivo do problema (2.1). Precisa-se calcular um limite superior e um inferior para o valor da função objetivo do problema (2.1). Usualmente dois tipos de limites são considerados: um limite de erro *a priori* que não requer a solução do problema agregado (2.6), e outro *a posteriori* que é obtido usando a solução do problema agregado.

2.3 Limite de Erro *a Priori*

Nesta seção, estudam-se limites sobre a perda de precisão devido a agregação. Esse limite, pode ser calculado após o problema agregado ser formado e antes de ser resolvido. Este tipo de limite é, chamado de limite de erro *a priori*, e foi apresentado por Zipkin [23, 24].

O limite de erro *a priori*, supõe que seja conhecida alguma informação sobre uma solução ótima do problema original (2.1). Seja x^* uma solução ótima para (2.1).

Seja W um conjunto fechado, convexo e limitado em $\mathbb{R}^n$, chamado de *localização*, tal que $x^* \in W$, onde x^* é uma solução ótima para o problema (2.1). A localização W pode ser obtida



por uma manipulação das restrições do problema original, ou pode ser construída depois do problema agregado ter sido resolvido. Se W é conhecido, pode-se adicionar a condição $x \in W$ ao problema (2.1), sem alterar a solução ótima.

No cálculo do limite de erro *a priori*, Zipkin [23, 24] considera dois tipos de localizações definidas na suposição (2.3.1) a seguir.

Suposição 2.3.1 (a) *Seja $\sigma' = \{S'_k : k = 1, \dots, K'\}$ uma partição qualquer dos índices das colunas $\{1, \dots, n\}$, não necessariamente a mesma partição σ usada na agregação do problema. Sejam $d_1, \dots, d_n$ números conhecidos e positivos, e $p_1, \dots, p_{K'}$ números não-negativos, tal que, para alguma solução primal x^* ótima para (2.1), temos:*

$$x^* \in W = \{x : \sum_{j \in S'_k} d_j x_j \leq p_k, \quad k = 1, \dots, K'\}. \quad (2.19)$$

(b) *Seja $\rho' = \{R'_l : l = 1, \dots, L'\}$, uma partição dos índices das restrições $\{1, \dots, m\}$, não necessariamente a mesma partição ρ usada na agregação do problema. Sejam $e_1, \dots, e_m$ números conhecidos e positivos, e $q_1, \dots, q_{L'}$ números não-negativos, tal que, para alguma solução dual u^* ótima para (2.2), temos:*

$$u^* \in W = \{u : \sum_{i \in R'_l} e_i u_i \leq q_l, \quad l = 1, \dots, L'\}. \quad (2.20)$$

Um limite de erro *a priori* devido agregação de variáveis pode ser obtido a partir da proposição (2.3.1) a seguir.

Proposição 2.3.1 *Se o item a) da suposição (2.3.1) vale para alguma solução x^* ótima do problema (2.1), então:*

$$Z^* \leq Ub + \varepsilon_+, \quad \text{onde} \\ \varepsilon_+ = \sum_{k=1}^{K'} \left[\max_{j \in S'_k} \left\{ \frac{(c_j - UA^j)}{d_j} \right\} \right]^+ p_k. \quad (2.21)$$

onde A^j corresponde a j -ésima coluna da matriz A .

Demonstração:

Defina o conjunto W , como $W = \{x | \sum_{j \in S'_k} d_j x_j \leq p_k, k = 1, \dots, K', x \geq 0\}$. Note que,

devido à hipótese da suposição (2.3.1), $W \neq \emptyset$, pois $x^* \in W$. Além disso, $\forall U \geq 0, U \in \mathbb{R}^m$ e $\forall x$ factível para o problema original, tem-se:

$$\begin{aligned} Z^* = cx^* &\leq cx^* + U(b - Ax^*) \\ &= Ub + (c - UA)x^* \\ &\leq Ub + \max_{x \in W} \{(c - UA)x\} \\ &= Ub + \max_{x \in W} \left\{ \sum_{j=1}^n (c_j - UA^j)x_j \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde A^j é uma coluna da matriz de restrição da problema original (2.1) e pelo teorema das folgas complementares $U(b - Ax^*) \geq 0$.

Considere o problema de maximização em (2.22), e seja $\hat{x}$ sua solução ótima. Devido à não-negatividade do vetor $\hat{x}$, se o coeficiente $(c_j - UA^j)$ da variável x_j em (2.22) for negativo, então $\hat{x} = 0$. Dessa forma, o problema de otimização em (2.22) pode ser simplificado para:

$$\max_{x \in W} \left\{ \sum_{j=1}^n [c_j - UA^j]^+ x_j \right\}, \text{ onde } [\alpha]^+ = \max\{0, \alpha\}. \quad (2.23)$$

Daí levando-se em conta a partição σ' definida na suposição (2.3.1), pode-se escrever:

$$Z^* \leq Ub + \sum_{k=1}^{K'} \sum_{j \in S_{k'}} [(c_j - UA^j)]^+ \hat{x}_j. \quad (2.24)$$

Considere agora, os números $\{d_1, \dots, d_n\}$ com as características definidas na hipótese da suposição (2.3.1). Esses números podem ser introduzidos, sem alterar o resultado, na expressão (2.24) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Z^* &\leq Ub + \sum_{k=1}^{K'} \sum_{j \in S_{k'}} \left[\frac{c_j - UA^j}{d_j} \right]^+ d_j \hat{x}_j \\ &\leq Ub + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S_{k'}} \left[\frac{c_j - UA^j}{d_j} \right]^+ \sum_{j \in S_{k'}} d_j \hat{x}_j \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde, levando em conta que $\hat{x} \in W$, ou equivalente, $\sum_{j \in S_{k'}} d_j \hat{x}_j \leq p_k, k = 1, \dots, K'$, obtém-se:

$$Z^* \leq Ub + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S_{k'}} \left[\frac{c_j - UA^j}{d_j} \right]^+ p_k, \quad (2.26)$$

o que completa a prova da proposição. ■

Para agregação de restrições pode-se obter um limite de erro *a priori* de maneira análoga



a agregação de variáveis, considerando o item b) da suposição (2.3.1) e para agregação de variáveis e restrições simultânea considera-se os itens a) e b) da suposição (2.3.1) para calcular um limite de erro *a priori*.

Quando calcula-se o limite de erro *a priori* não se conhece a solução $(\bar{X}^*, \bar{U}^*)$ dos problemas agregado. Uma maneira de resolver esta questão é supor que existam números $\{s_j\}$ e $\{r_i\}$, tais que,

$$s_j \geq c_j - \bar{U}^* A^j, j = 1, \dots, n \quad (2.27)$$

$$r_i \geq A_i \bar{X}^* - b_i, i = 1, \dots, m$$

e que a suposição (2.3.1) vale. Assim, usando (2.21), um limite de erro *a priori* é dado por:

$$\bar{Z}^* - \varepsilon_{b-} \leq Z^* \leq \bar{Z}^* + \varepsilon_{b+} \quad (2.28)$$

onde

$$\varepsilon_{b+} = \sum_{k=1}^{K'} \left[\max_{j \in S'_k} \left\{ \frac{s_j}{d_j} \right\} \right]^+ p_k \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_{b-} = \sum_{l=1}^{L'} \left[\max_{i \in R'_l} \left\{ \frac{r_i}{e_i} \right\} \right]^+ q_l \quad (2.30)$$

e as constantes p_k e q_l são definidas nas localizações (2.19) e (2.20) respectivamente.

Tem-se que encontrar $\{s_j\}$ e $\{r_i\}$ sem conhecer $\bar{U}^*$ e $\bar{X}^*$, respectivamente. Isso pode ser feito resolvendo uma série de problemas da mochila contínuos. Considere os seguintes problemas:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - \min U A^j \\ \text{sujeito a} \quad &U \bar{A}_k \geq \bar{c}_k \\ &U \geq 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde (s_j, U^*) é a solução ótima para cada $j \in S'_k, k = 1, \dots, K'$ e

$$\begin{aligned} r_i &= -b_i + \max A_i X \\ \text{sujeito a} \quad &\bar{A}_l X \leq \bar{b}_l \\ &X \geq 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde (r_i, X^*) é a solução ótima para cada $i \in R'_l, l = 1, \dots, L'$.

Se os problemas (2.31) e (2.32) são finitos para todos j e i , então, a inequação dada em

(2.28) fornece um limite de erro *a priori*, pois X^* é uma solução factível para (2.6) e U^* é uma solução factível para o problema dual (2.7). Note que cada um desses problemas é um problema da mochila contínuo e pode ser facilmente resolvido.

Uma solução para um problema tipo mochila pode ser obtida utilizando as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (ver Luenberger [15]). Assim, uma solução para o problema (2.31) é dada por:

$$s_j = c_j - \bar{c}_k \min_i [a_{ij} / \bar{a}_{ik}].$$

Uma condição para que o problema (2.31) seja finito para todo j é que $A \geq 0$ e $c \geq 0$. Nesse caso, $s_j = c_j - \bar{c}_k \min_i \left\{ \frac{a_{ij}}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$, $j \in S'_k, k = 1, \dots, K'$. Assim o limite de erro *a priori* dado em (2.29) torna-se:

$$\varepsilon_{b^+} = \sum_{k=1}^{K'} \left[\max_{i,j} \left\{ \frac{\left(c_j - \left(\frac{\bar{c}_k a_{ij}}{\bar{a}_{ik}} \right) \right)}{d_j} : j \in S'_k, \bar{a}_{ij} > 0 \right\} \right]^+ p_k. \quad (2.33)$$

Suponha que $\sigma' = \sigma$. Se os elementos de um mesmo cluster (c_j, A^j) , $j \in S'_k$ são idênticos, então, o k -ésimo termo em (2.33) é zero, isto é:

Substituindo $\bar{c}_k = c_k g^k$ e $\bar{a}_{ik} = A_k g^k$, em (2.33) e tomando o k -ésimo termo, tem-se que:

$$\frac{c_j - \left(\frac{\bar{c}_k a_{ij}}{\bar{a}_{ik}} \right)}{d_j} = \frac{c_k - \left(\frac{c_k g^k a_{ij}}{a_{ij} g^k} \right)}{d_j} = \frac{c_k - c_k}{d_j} = \frac{0}{d_j} = 0.$$

Pode-se notar que, se variáveis idênticas são agregadas, não existe perda de precisão, isto é, $s_j = 0$, $j \in S'_k$.

Esta observação mostra que quanto maior for a similaridade entre os elementos de um mesmo cluster, menor será o erro resultante da agregação do problema.

De forma similar, pode-se obter as condições para que o problema (2.32) seja finito.

Uma condição mais geral para que o problema (2.31) seja finito, é uma consequência do lema de Farkas (ver Rockafeller [19]). O problema (2.31) é finito se, e somente se $\lambda \bar{A}_k \leq A^j$, para algum escalar $\lambda \geq 0$ e $j \in S'_k$ (ver Zipkin [23]). Essa condição é equivalente a:

(a) $a_{ij} < 0$ implica $\bar{a}_{ik} < 0$, para todo i .

(b) Sejam

$$\begin{aligned} I_j^- &= \{i : a_{ij} < 0, \bar{a}_{ik} < 0\} \\ I_j^+ &= \{i : a_{ij} \geq 0, \bar{a}_{ik} > 0\} \\ t_j^- &= \max_{i \in I_j^-} \left\{ \frac{a_{ij}}{\bar{a}_{ij}} \right\} \\ t_j^+ &= \min_{i \in I_j^+} \left\{ \frac{a_{ij}}{\bar{a}_{ij}} \right\}. \end{aligned}$$

Então (i) I_j^- ou I_j^+ é vazio ou (ii) $t_j^- \leq t_j^+$. As condições (a) e (b), consideram a partição σ e o peso g usados para construir o problema agregado (2.6). A condição (a) sugere que colunas com componentes negativas sejam agrupadas com colunas onde essas mesmas componentes são negativas. Se uma coluna é agrupada com uma coluna onde as componentes tenham sinais diferentes, os pesos devem compensar os elementos negativos, caso contrário, o problema agregado será menos consistente que o problema original. A condição (b) pode ser interpretada como um aperfeiçoamento da mesma idéia, e garante que todos coeficientes de um mesmo grupo de colunas tenham os mesmos sinais.

A solução para (2.31) é obtida fazendo todas as componentes de U iguais a zero, exceto uma, que será igual a 1.

A tabela (2.1) abaixo, extraída de Zipkin [23], fornece os valores de s_j para várias situações devido agregação de variáveis.

	$I_j^+ = \emptyset$	$I_j^- = \emptyset$	$I_j^+ \cap I_j^- \neq \emptyset$
$\bar{c}_k > 0$	(2.31) infactível	$c_j - \bar{c}_k t_j^+$	$c_j - \bar{c}_k t_j^+$
$\bar{c}_k = 0$	c_j	c_j	c_j
$\bar{c}_k < 0$	$c_j - \bar{c}_k t_j^-$	c_j	$c_j - \bar{c}_k t_j^-$

Tabela 2.1: Valores de s_j (Zipkin [23])

Se (2.31) é infactível para algum j , os duais para o problema (2.1) e (2.6) também são infactíveis, o que contradiz a suposição de que existe uma solução ótima finita para o problema (2.1). Portanto é necessário reconstruir o problema agregado.

O limite de erro *a priori* é calculado a fim de refinar, melhorar o problema agregado. Na próxima seção, estuda-se como calcular limites de erro *a posteriori*.



2.4 Limites de Erro *a Posteriori*

Nesta seção, estudam-se limites sobre a perda de precisão devido a agregação de variáveis calculados *a posteriori*. Isto é, os limites são calculados após o problema agregado ser formado e resolvido.

Ao resolver o problema agregado, imediatamente obtém-se um limite inferior para o valor da função objetivo do problema original, $\bar{Z} \leq Z^*$.

É desejável calcular também, um limite superior sobre o valor da função objetivo do problema original.

Para o cálculo do limite de erro *a posteriori*, assim como, para cálculo do limite de erro *a priori*, supõe-se que seja conhecida alguma informação sobre uma solução ótima para o problema original (2.1). Seja então x^* uma solução ótima para o problema original (2.1).

Tomando como base o cálculo do limite de erro *a priori*, pode-se calcular um limite de erro superior *a posteriori*. A partir da proposição (2.3.1) e do item a) da suposição (2.3.1) e com alguma manipulação algébrica, o limite de erro *a posteriori* é dado por:

$$\bar{U}b - \varepsilon_- \leq Z^* \leq \bar{U}b + \varepsilon_+, \quad (2.34)$$

onde

$$\varepsilon_+ = \sum_{k=1}^{K'} \left[\max_{j \in S'_k} \left\{ \frac{c_j - \bar{U}^* A^j}{d_j} \right\} \right]^+ p_k, \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_- = \sum_{l=1}^{L'} \left[\max_{i \in R'_l} \left\{ \frac{A_i \bar{X}^* - b_i}{e_i} \right\} \right]^+ q_l. \quad (2.36)$$

Os limites dados pela expressão (2.34) são conhecidos como limites de erro *a posteriori* de Zipkin, onde $(\bar{X}^*, \bar{U}^*)$ são soluções ótimas para os problemas primal/dual, (2.6)/(2.7), respectivamente. Maiores detalhes podem ser obtidos em Zipkin [23, 24].

Mendelssohn [16], estende a idéia de Zipkin [23] para obter um melhor limite de erro *a posteriori* utilizando a seguinte localização:

$$W = \{x : \sum_{j \in S'_k} x_j \leq p_k, \quad k = 1, \dots, K'\}. \quad (2.37)$$

Isto é, os d_j definidos na localização dada em (2.19) são iguais a 1.

Reescrevendo o problema (2.1) e anexando a localização acima temos:

$$\begin{aligned}
& \max \quad Z_l = cx \\
& \text{sujeito a} \quad Ax \leq b \\
& \quad \sum_{j \in S'_k} x_j \leq p_k, \quad k = 1, \dots, K' \\
& \quad x \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

O problema dual associado ao problema (2.38) é escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \min \quad D_l = ub + \sum_{k=1}^{K'} \delta_k p_k \\
& \text{sujeito a} \quad \sum_i a_{ij} u_i + \delta_k \geq c_j, \quad j \in S'_k; k = 1, \dots, K' \\
& \quad u \geq 0; \delta \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Considerando (2.39) com u restrito ao conjunto $U = \{u/u = \bar{U}^* \theta, \theta \in \mathbb{R}\}$. O problema (2.39) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \min \quad D_l(\theta) = \bar{Z} \theta + \sum_{k=1}^{K'} \delta_k p_k \\
& \text{sujeito a} \quad \left(\sum_i a_{ij} \bar{U}_i^* \right) \theta + \delta_k \geq c_j, \quad j \in S'_k, j = 1, \dots, n \\
& \quad \bar{U} \geq 0; \delta_k \geq 0, k = 1, \dots, K'.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Os possíveis valores de θ onde o ótimo para o problema (2.40) pode ocorrer são encontrados como mostra o teorema (2.4.1) abaixo.

Teorema 2.4.1 (Mendelssohn [16]) $D_l(\theta)$ é uma função convexa e linear por partes. Seja $D_{l-}(\theta)$ a derivada a esquerda de $D_l(\theta)$, em relação a θ . Então, os possíveis pontos de descontinuidade de $D_{l-}(\theta)$ onde um ótimo pode ocorrer são $\theta_1, \dots, \theta_n$ onde:

$$\theta_j = \begin{cases} c_j / \sum_i a_{ij} \bar{U}_i^*, & \text{se } \sum_i a_{ij} \bar{U}_i^* \neq 0 \\ \infty, & \text{se } \sum_i a_{ij} \bar{U}_i^* = 0, \quad \forall j. \end{cases} \tag{2.41}$$

Considerando a partição S'_k o problema dual (2.40) pode ser decomposto em k subproblemas, $k = 1, \dots, K'$, e cada subproblema tem o valor da solução igual ao $\max_{j \in S'_k} [c_j - (\theta \sum_i a_{ij} \bar{U}_i^*)]^+ p_k$. Isso implica que $D_l(\theta)$ é dado por:

$$D_l(\theta) = \bar{Z} \theta + \sum_{k=1}^{K'} \left[\max_{j \in S'_k} (c_j - (\theta \sum_i a_{ij} \bar{U}_i^*)) \right]^+ p_k. \tag{2.42}$$

O valor mínimo de $D_l(\theta)$, é a solução ótima para (2.40), para todos valores possíveis de θ e , é também um limite de erro *a posteriori* para o problema (2.1), isto é, o limite de erro *a posteriori* proposto por Mendelssohn é da forma:

$$Z^* \leq \min_{\theta \in \mathbb{R}^+} \left\{ \bar{Z}\theta + \sum_{k=1}^{K'} \left[\max_{j \in S'_k} (c_j - \theta \bar{U}^* A^j) \right]^+ p_k \right\} \leq \bar{U}b + \varepsilon_+. \quad (2.43)$$

Ou seja, o limite de Mendelssohn é mais refinado do que o limite de Zipkin.

Shetty e Taylor [21], também desenvolveram limites para o problema original (2.1) a partir da solução do problema agregado (2.6).

Considere um ponto x_0 infactível para o problema agregado (2.6) e γ uma direção de busca arbitrária. Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 + \theta\gamma \geq 0$ e x_j^* uma solução ótima desconhecida para o problema (2.1). Então:

$$Z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*.$$

Somando uma porção positiva em Z^* , obtém-se a seguinte desigualdade:

$$Z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j^* + (b - \sum_{j=1}^n A^j x_j^*)(x_0 + \theta\gamma), \quad (2.44)$$

onde por suposição $x_0 + \theta\gamma \geq 0$ e pelo teorema das folgas complementares tem-se que:

$$b - \sum_{j=1}^n A^j x_j^* \geq 0.$$

Fazendo uma manipulação algébrica na expressão (2.44), tem-se que:

$$\begin{aligned} Z^* &\leq bx_0 + b\theta\gamma + \sum_{j=1}^n [c_j - (x_0 + \theta\gamma)A^j]x_j^* \\ &= b(x_0 + \theta\gamma) + \sum_{j=1}^n [c_j - (x_0 + \theta\gamma)A^j]x_j^*. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Suponha que exista uma partição S'_k , e números não-negativos $p_k \geq 0$, $k = 1, \dots, K'$, tal que, a solução ótima x^* de (2.1) pertença a localização:

$$W = \{x : \sum_{j \in S'_k} d_j x_j \leq p_k\} \quad (2.46)$$

definida na suposição (2.3.1). Então tomando a partição S'_k tem-se:

$$Z^* \leq b(x_0 + \theta\gamma) + \sum_{k=1}^{K'} \sum_{j \in S'_k} [c_j - (x_0 + \theta\gamma)A^j]x_j^*. \quad (2.47)$$

Como $d_j > 0$ pode-se dividir e multiplicar a expressão (2.47), por d_j sem alterar o resultado, então obtém-se:

$$Z^* \leq b(x_0 + \theta\gamma) + \sum_{k=1}^{K'} \sum_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - (x_0 + \theta\gamma)A^j}{d_j} \right] [d_j x_j^*] \quad (2.48)$$

Tomando o maior elemento de cada cluster S'_k tem-se que:

$$\begin{aligned} Z^* &\leq b(x_0 + \theta\gamma) + \sum_{k=1}^{K'} \sum_{j \in S'_k} \max_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - (x_0 + \theta\gamma)A^j}{d_j} \right]^+ [d_j x_j^*] \\ &= b(x_0 + \theta\gamma) + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - (x_0 + \theta\gamma)A^j}{d_j} \right]^+ \sum_{j \in S'_k} [d_j x_j^*]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Usando (2.46), tem-se:

$$Z^* \leq b(x_0 + \theta\gamma) + \sum_{k=1}^{K'} \sum_{j \in S'_k} \max_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - (x_0 + \theta\gamma)A^j}{d_j} \right]^+ p_k. \quad (2.50)$$

Seja $(\bar{X}^*, \bar{U}^*)$ a solução ótima do problema agregado (2.6) e seu dual (2.7) respectivamente, e γ uma direção de busca arbitrária, então pode-se reescrever a expressão (2.50) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Z^* &\leq b(\bar{U}^* + \theta\gamma) + \sum_{j=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - (\bar{U}^* + \theta\gamma)A^j}{d_j} \right]^+ p_k \\ &= \bar{Z} + b\theta\gamma + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - (\bar{U}^* + \theta\gamma)A^j}{d_j} \right]^+ p_k. \end{aligned} \quad (2.51)$$

O mínimo para a expressão (2.51) é um limite superior para o problema (2.1), se tomar θ , tal que, $\bar{U}^* + \theta\gamma \geq 0$. Então o limite proposto por Shetty e Taylor é dado por:

$$Z^* \leq \bar{Z} + \min_{\substack{\bar{U}^* + \theta\gamma \geq 0 \\ \theta \in \mathbb{R}}} \left\{ b\theta\gamma + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - (\bar{U}^* + \theta\gamma)A^j}{d_j} \right]^+ p_k \right\}. \quad (2.52)$$

Pode-se observar que para $\theta = 0$, Z^* fornece o limite de Zipkin [23] e que para uma direção $\gamma = -\bar{U}^*$, Z^* fornece o limite de Mendelssohn [16].

Pode-se notar ainda que Zipkin, Mendelssohn, e Taylor e Shetty, usam a mesma metodologia para calcular os limites de erro *a posteriori*. Esses autores constroem os limites superiores *a posteriori* a partir de uma solução dual conhecida.

A tabela (2.2) resume o cálculo básico dos limites de erro superiores *a posteriori* dados acima.

Autores	solução dual considerada	limites	
ZipKin	$\bar{U}^*$	$Z^* \leq \bar{Z} + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - \bar{U}^* A^j}{d_j} \right]^+ p_k$	(2.34)
Mendelssohn	$\theta \bar{U}^*$ $\theta \in \mathbb{R}$	$Z^* \leq \min_{\theta \in \mathbb{R}^+} \left\{ \theta \bar{Z} + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} [c_j - \theta \bar{U}^* A^j]^+ p_k \right\}$	(2.43)
Shetty e Taylor	$\bar{U}^* + \theta \gamma \geq 0$ $\theta \in \mathbb{R}$	$Z^* \leq \bar{Z} + \min_{\substack{\bar{U}^* + \theta \gamma \geq 0, \\ \theta \in \mathbb{R}}} \left\{ b \theta \gamma + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[\frac{c_j - (\bar{U}^* + \theta \gamma) A^j}{d_j} \right]^+ p_k \right\}$	(2.52)

Tabela 2.2: Limites de erro *a posteriori* para agregação de variáveis em PL

Knolmayer (ver Leisten [9]), considera que se duas ou mais soluções duais $\bar{U}_i$, $i = 1, \dots, I$ são disponíveis, pode-se calcular um limite de erro *a posteriori* a partir do limite de erro *a posteriori* de Mendelssohn (limite (2.43)), considerando uma combinação convexa das soluções duais.

Seja,

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{U}_i \tag{2.53}$$

onde $\sum_{i=1}^I \lambda_i = 1$, uma combinação convexa das soluções duais disponíveis do problema agregado (2.6).

Substituindo a combinação convexa (2.53), no limite de erro dado pela expressão (2.43), obtém-se o limite de erro proposto por Knolmayer:

$$Z^* \leq \min_{\substack{\theta \lambda \geq 0 \\ \sum_i \lambda_i = 1}} \left\{ \theta \left(\sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{U}_i \right) b + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[c_j - \theta \left(\sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{U}_i \right) A^j \right]^+ p_k \right\} \tag{2.54}$$

onde $\bar{Z} = \sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{U}_i b$, e $\bar{U}_i$ $i = 1, \dots, I$ são soluções ótimas para o problema agregado (2.6). Então, a expressão dada em (2.54) pode ser reescrita como:

$$Z^* \leq \min_{\substack{\theta \lambda \geq 0 \\ \sum_i \lambda_i = 1}} \left\{ \theta \bar{Z} + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[c_j - \theta \left(\sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{U}_i \right) A^j \right]^+ p_k \right\}.$$

Como a expressão $Z^* \leq \bar{U}b + (c - \bar{U}A)x^*$ vale para todas as soluções duais $\bar{U}_i > 0$, o limite dado em (2.54) pode ser generalizado, fornecendo o limite de erro *a posteriori* proposto por Leisten:

$$\begin{aligned} Z^* &\leq \min_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \sum_i \lambda_i \bar{U}_i \geq 0}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{U}_i \right) b + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[c_j - \left(\sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{U}_i \right) A^j \right]^+ p_k \right\} \\ &= \min_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \sum_i \lambda_i \bar{U}_i \geq 0}} \left\{ \bar{Z} + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[c_j - \left(\sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{U}_i \right) A^j \right]^+ p_k \right\}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

aqui as soluções $\bar{U}_i$ $i = 1, \dots, I$ também são soluções duais ótimas para o problema agregado (2.6).

A dificuldade em obter uma solução para a expressão (2.54) ou (2.55) é comparada com a dificuldade em obter uma solução para o problema original (2.1). Leisten [9] então apresenta uma heurística para encontrar uma solução aproximada para (2.55).

Heurística 1

(1) Para todas as soluções duais $\bar{U}_i$, $i = 1, \dots, I$, disponíveis para o problema agregado (2.6) determinar a melhor solução, substituindo $\bar{U}_i$ por $\theta_i^1 \bar{U}_i$ em (2.43):

$$\theta_i^1 = \arg \min_{(\theta) \geq 0, \theta \in \mathbb{R}} \left\{ \theta \bar{U}_i b + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[c_j - \theta \bar{U}_i A^j \right]^+ p_k \right\} \quad (2.56)$$

(2) Para $i = 1, \dots, I - 1$ faça:

(2.1) Determine

$$\theta_i = \arg \min_{\substack{\theta \in \mathbb{R} \\ \theta \bar{U}_i + (1-\theta) \bar{U}_{i+1} \geq 0}} \left\{ (\theta \bar{U}_i + (1-\theta) \bar{U}_{i+1}) b + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[c_j - (\theta \bar{U}_i + (1-\theta) \bar{U}_{i+1}) A^j \right]^+ p_k \right\}. \quad (2.57)$$

Substituindo $\bar{U}_{i+1}$ por $\theta_i \bar{U}_i + (1-\theta_i) \bar{U}_{i+1}$ em (2.43). Esse passo determina a melhor combinação convexa das duas soluções duais pré-otimizada $\bar{U}_i$ e $\bar{U}_{i+1}$ do passo 1.

(2.2) Determine

$$\theta_{i+1}^2 = \arg \min_{(\theta) \geq 0, \theta \in \mathbb{R}} \left\{ \theta \bar{U}_{i+1} b + \sum_{k=1}^{K'} \max_{j \in S'_k} \left[c_j - \theta \bar{U}_{i+1} A^j \right]^+ p_k \right\}. \quad (2.58)$$

Substituindo $\bar{U}_{i+1}$ por $\theta_{i+1}^2 \bar{U}_{i+1}$ em (2.43). Esse passo determina a melhor solução dual que é um múltiplo da solução dual pré-otimizada $\bar{U}_{i+1}$.

(3) Use a melhor solução dual $\bar{U}_i$ gerada para calcular o limite de erro *a posteriori*.

Maiores detalhes podem ser obtidos em Leisten [9] e suas referências.

Litvinchev e Rangel [14], desenvolveram limites de erro *a posteriori* baseado na metodologia proposta por Mendelssohn, Shetty e Taylor e Leisten. Isto é, fazendo uma mudança no vetor de variáveis duais. Além disso, desenvolveram limites de erro utilizando uma localização W geral. Um dos passos mais críticos em calcular o limite de erro é construir a localização W .

Considera-se o problema original (2.1), e define-se o limite de erro superior *a posteriori* como segue:

$$LS(U, W) = \sum_{i=1}^m U_i b_i + \max_{x \in W} \left\{ \sum_{j=1}^n x_j (c_j - \sum_{i=1}^m U_i a_{ij}) \right\}. \quad (2.59)$$

onde a localização W é um conjunto fechado, convexo e limitado, contendo a solução ótima do problema (2.1).

Para $U = \bar{U}^*$,

$$LS(\bar{U}^*, W) = \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j + \max_{x \in W} \left\{ \sum_{j=1}^n x_j (c_j - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* a_{ij}) \right\}. \quad (2.60)$$

onde U é uma solução factível e $\bar{U}^*$ é a solução ótima para o problema agregado (2.6), e $\bar{x}$ é a solução factível desagregada para o problema (2.1).

Para definir a localização W , supõe-se que algumas restrições do problema original sejam incluídas, então, tem-se que:

$$W = \{x \in \tilde{W} : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i \in I \subseteq \{1, \dots, m\} = M, \},$$

onde $\tilde{W}$ é outra localização de x^* .

Considerando as componentes $U_i, i \in M \setminus I$ do vetor de variáveis duais, que não foram usadas para definir a localização W , tem-se que $LS(U^W, W)$ é:

$$LS(U^W, W) = \sum_{i \in M \setminus I} U_i b_i + \max_{x \in W} \left\{ \sum_{j=1}^n x_j (c_j - \sum_{i \in M \setminus I} U_i a_{ij}) \right\} \quad (2.61)$$

Usa-se a notação U^W para enfatizar que a dimensão e as componentes de U^W dependem da localização W formada por algumas restrições do problema (2.1), isto é, $U^W \in \mathbb{R}^{m-|I|}$ e

$U \in \mathbb{R}^m$.

Suponha que o limite de erro $LS(U^W, W)$ foi calculado para $U^W = \bar{U}^{*W}$ e que o problema de maximização em $LS(U^W, W)$ tem uma única solução ótima $\hat{x}$. Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} \nabla_{U_i} LS(\bar{U}^{*W}, W) &= b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j, \quad i \in M \setminus I, \\ U^W(\xi) &= \Pi_+(\bar{U}^{*W} - \xi \nabla_U LS(\bar{U}^{*W}, W)) \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde ξ é o tamanho do passo e é definido por uma busca unidimensional, $\nabla_{U_i}(LS(\bar{U}^W, W))$ é a derivada de $LS(U^W, W)$ em relação a U_i e $\Pi_+(\tau)$ é uma projeção ortogonal de $\tau \in \mathbb{R}$ sob o octante não negativo. O tamanho do passo $\tilde{\xi}$, associado com o melhor passo de descida, deve ser definido por uma busca unidimensional: $\tilde{\xi} = \arg \min\{LS(U^W(\xi), W)/\xi \geq 0\}$ (técnica do gradiente projetado Luenberger [15], Lasdon [8]). Para melhorar o limite de erro $LS(\bar{U}^{*W}, W)$, deve-se mudar somente as variáveis duais para as restrições que não foram usadas para definir W .

Denota-se por δ_j os coeficientes do problema de maximização,

$$\max_{x \in W} \left\{ \sum_j x_j (c_j - \sum_{i \in M \setminus I} U_i a_{ij}) \right\}, \quad (2.63)$$

isto é, $\delta_j = c_j - \sum_{i \in M \setminus I} U_i a_{ij}$.

Os valores δ_j dependem do vetor U , e usa-se a notação δ_j para destacar que o problema (2.63) tem função objetivo linear para qualquer $U \geq 0$.

Seja a localização W definida por:

$$W = \{x \mid \sum_{j=1}^n d_j x_j \leq p, 0 \leq x_j \leq r_j, j = 1, \dots, n, r_j > 0\}. \quad (2.64)$$

A localização W é convexa, fechada e limitada para quaisquer valores de d_j e p e pode ser facilmente obtida se o problema original tiver restrições do tipo mochila, tais como, $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j, a_{ij}, b_j > 0$. Por exemplo, pode-se tomar $r_j = \min_i \{b_i/a_{ij}\}$ e uma restrição ou uma combinação linear das restrições do problema original.

Para calcular um limite superior utilizando a localização (2.64), deve-se resolver o seguinte problema,

$$\begin{aligned}
& \max \quad \sum_{j=1}^n \delta_j x_j \\
& \text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^n d_j x_j \leq p \\
& \quad \quad \quad 0 \leq x_j \leq r_j, j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Considera-se o caso onde $d_j, p \geq 0$. Pode-se obter uma solução ótima $\hat{x}$ para (2.65) utilizando as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Sejam as variáveis ordenadas, tal que, $\delta_1/d_1 \geq \delta_2/d_2 \geq \dots \delta_n/d_n$. Uma solução ótima $\hat{x}$ de (2.65) é dada por:

$$\delta_j \hat{x}_j = [\delta_j]^+ \min \left\{ r_j, \frac{p - \sum_{l=1}^{j-1} d_l \hat{x}_l}{d_j} \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.66}$$

onde por definição $[\tau]^+ = \max\{0, \tau\}$ e o termo $[\delta_j]^+$ em (2.66) garante que $\hat{x}_j = 0$ para $\delta_j < 0$. Se $\delta_j = 0$, então $\hat{x}_j$ não é único, e:

$$0 \leq \hat{x}_j \leq \min \left\{ r_j, \frac{p - \sum_{l=1}^{j-1} d_l \hat{x}_l}{d_j} \right\}.$$

De acordo com Zipkin [23], supõe-se que ao invés de uma restrição linear do tipo (2.64), tem-se um número de restrições lineares independentes. Considere $\sigma' = \{S_k, k = 1, \dots, K'\}$ uma partição de $\{1, \dots, n\}$, não necessariamente o mesmo σ usada na construção do problema agregado, e a localização

$$W_b = \{x \mid \sum_{j \in S_k} d_j x_j \leq p_k, \quad k = 1, \dots, K', \quad 0 \leq x_j \leq r_j, \quad j = 1, \dots, n\}. \tag{2.67}$$

Utilizando a localização W_b definida em (2.67), o problema (2.65), decompõe-se em K' subproblemas independentes do mesmo tipo. Uma solução ótima para cada subproblema é calculada usando (2.66). O valor da função em (2.1) é a soma das funções objetivas ótimas de cada subproblema.

Um exemplo importante, onde pode-se facilmente construir localizações do tipo (2.67),

são problemas com restrições do tipo transporte generalizado (estudado no próximo capítulo), isto é, restrições do tipo:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, i \in \Sigma, \quad \sum_{i=1}^m k_{ij} x_{ij} \leq t_j, j \in T, x_{ij} \geq 0.$$

Para esse caso pode-se definir as localizações da seguinte maneira:

$$W_1 = \{x | \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, 0 \leq x_{ij} \leq t_j k_{ij}^{-1}, i \in \Sigma, j \in T\}$$

e

$$W_2 = \{x | \sum_{i=1}^m k_{ij} x_{ij} \leq t_i, 0 \leq x_{ij} \leq s_j, i \in \Sigma, j \in T\},$$

onde o problema para calcular o limite de erro superior para o caso da localização W_1 é decomposto em $|\Sigma|$ subproblemas e para o caso da localização W_2 em $|T|$ subproblemas.

Vários tipos de localizações podem ser obtidas em problemas de estruturas especiais (ver Litvinchev [10]).

Lembrando que Zipkin [23], usa localizações do tipo:

$$W_z = \{x | \sum_{j \in S'_k} d_j x_j \leq p_k, k = 1, \dots, K', x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\},$$

com a condição de que $d_j > 0$. E que o limite obtido é da forma:

$$Z^* \leq \bar{Z} + \sum_{k=1}^{K'} [\max_{j \in S'_k} \{\delta_j / d_j\}]^+ p_k, \text{ onde } \delta_j = c_j - \bar{U} A^j,$$

onde $\bar{U}$ é a solução ótima do problema agregado (2.6).

Como $W_b \subseteq W_z$, pode-se concluir, que $LS(\bar{U}^*, W_b)$ é pelo menos tão bom quanto o limite de erro *a posteriori* obtido por Zipkin [23].

Para ambos limites, os clusters de variáveis considerados devem ser os mesmos usados na construção do problema agregado.

No capítulo 3 a seguir, desenvolve-se dois métodos de agregação e desagregação para o problema de transporte generalizado e faz-se um estudo do limite de erro *a posteriori*.

Capítulo 3

Agregação para o Problema do Transporte Generalizado

3.1 Introdução

Em programação linear, existe uma classe de problemas com uma estrutura especial, que são os problemas de fluxo em redes. Problemas deste tipo permitem a elaboração de algoritmos especiais que são mais rápidos e eficientes do que os algoritmos para resolver um problema de programação linear geral.

Problemas com estrutura de rede freqüentemente dizem respeito a problemas de distribuição de produtos e, conseqüentemente, são economicamente muito importantes para muitas empresas comerciais que operam em várias instalações e mantêm estoques em armazéns locais. Em geral, nas aplicações reais, esses modelos contém milhares de atividades e centenas de restrições.

Uma rede G é constituída por um par de conjuntos $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ e denotada por $G = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$, onde $\mathcal{I}$ é um conjunto de pontos (também chamados de vértices ou nós) e $\mathcal{J}$ é um conjunto de linhas, onde cada linha une um par de pontos do conjunto $\mathcal{I}$. Os nós i, j são ditos adjacentes se existe uma linha unindo-os. Uma linha unindo os nós i, j é chamada de arco e denotada por um par ordenado (i, j) . Pode existir mais de um arco com a mesma direção, unindo os pontos i, j , tais linhas são chamadas linhas paralelas e serão denotadas por $(i, j)_1, (i, j)_2$, etc.

Considera-se que uma rede $G = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ tem um número finito de nós e arcos, isto é: $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$ e $\mathcal{J} = \{1, \dots, n\}$.



Uma rede pode ser representada graficamente através de um diagrama, onde os nós são representados por círculos, os arcos por semi-retas conectando os nós e flechas indicando a direção do arco.

A cada arco (i, j) da rede pode-se associar um valor c_{ij} representando o custo unitário do fluxo de mercadorias via este arco. Cada arco da rede possui uma capacidade limitada de fluxo. Assim, pode-se dizer que o fluxo no arco (i, j) deve ser menor que u_{ij} e maior que l_{ij} .

A cada nó i da rede, pode-se associar um valor inteiro b_i representando a oferta ($b_i > 0$) ou a demanda ($b_i < 0$) de fluxo no nó i . Se $b_i = 0$, o nó i é chamado de nó de baldeação.

O problema do fluxo em rede com custo mínimo é o problema de determinar a quantidade de fluxo em cada arco da rede de forma a minimizar o custo total do fluxo na rede. Denotando por x_{ij} a quantidade de fluxo no arco (i, j) da rede $G = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$, tem-se o seguinte modelo de programação linear:

$$\min \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} c_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{\{j:(i,j) \in \mathcal{J}\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in \mathcal{J}\}} x_{ij} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{J} \quad (3.3)$$

Em termos matriciais tem-se:

$$\min \quad cx \quad (3.4)$$

$$\text{s.a. } \mathcal{A}x = b \quad (3.5)$$

$$l \leq x \leq u \quad (3.6)$$

A matriz $\mathcal{A}$ é chamada de matriz de incidência nó-arco. Uma característica dessa matriz é que cada coluna $\mathcal{A}_{ij}$ tem exatamente dois coeficientes não zeros, $+1$ na i -ésima linha e -1 na j -ésima linha, e portanto as colunas da matriz $\mathcal{A}$ são dadas por:

$$\mathcal{A}_{ij} = e_i - e_j,$$

onde e_i e e_j são vetores unidades em $\mathbb{R}^m$, com 1's nas i e j -ésimas posições respectivamente.

No problema (3.4-3.6) foi suposto que em uma unidade de fluxo originando-se do nó i e percorrendo o arco (i, j) permanecesse uma unidade de fluxo na chegada ao nó j , isto é, não ocorre nenhuma perda e nenhum ganho do fluxo ao longo do arco. Essa suposição pode não

valer em alguns problemas. Por exemplo, em problemas de transmissão de energia através de linhas elétricas, fluxo de água através de canais e transporte de produtos perecíveis. Em todos esses exemplos pode existir um multiplicador $d_{ij} > 0$ associado com o arco (i, j) , tal que, uma unidade de fluxo originária no nó i e que percorre o arco (i, j) se transforma em $d_{ij}x_{ij}$ unidades ao chegar no nó j , se $d_{ij} > 1$ dizemos que há um ganho no fluxo e se $d_{ij} < 1$, dizemos que há uma perda no fluxo. Neste caso, o problema é chamado de problema de fluxo em redes generalizado. E pode ser formulado como:

$$\min \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} c_{ij}x_{ij} \quad (3.7)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{\{j:(i,j) \in \mathcal{J}\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in \mathcal{J}\}} d_{ij}x_{ij} = b_i, i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{J}. \quad (3.9)$$

Um caso especial do problema de fluxo em rede generalizado (ou simplesmente problema de fluxo generalizado) é obtido quando o conjunto $\mathcal{I}$ pode ser particionado em dois conjuntos $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ não vazios, tal que, toda linha em $\mathcal{J}$ une um ponto em $\mathcal{I}_1$ com um ponto em $\mathcal{I}_2$ (isto é, não existe linha em $\mathcal{J}$ unindo um par de pontos em $\mathcal{I}_1$ (ou em $\mathcal{I}_2$)). G é chamada de rede bipartida e denotada por $G = (\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{J})$.

Uma aplicação ilustrativa de um problema de fluxo generalizado ocorre para um fabricante de aço com m usinas. Numa base mensal, o gerente de produção determina a distribuição das encomendas a cada uma das usinas. A capacidade de fabricação da usina i é a_i toneladas por mês. Há n produtos diferentes a serem fabricados. Para o mês corrente, a demanda total para o produto j é b_j toneladas. Como as usinas diferem em suas instalações, uma unidade padrão de medida na usina i designada para fabricar o produto j produz d_{ij} toneladas do produto. Uma tonelada do produto j , fabricado na usina i , custa c_{ij} , e se as usinas estiverem dispersas geograficamente os c_{ij} podem também incluir despesas de embarque diferenciadas. Considerando que x_{ij} corresponde a unidade padrão de medida da usina i designada para fabricar o produto j durante o mês. Os d_{ij} diferentes indicam eficiências relativas de produção correspondentes, $\mathcal{I}_1$ corresponde as m usinas e $\mathcal{I}_2$ corresponde aos n produtos a serem fabricados.

O modelo matemático para o problema é dado por:

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3.10)$$

$$(PTG) \text{ sujeito a } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \text{ para } i = 1, \dots, m \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = b_j, \text{ para } j = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall \quad i, j.$$

Denota-se por (Z^*, x^*) a solução ótima para o problema (3.10-3.12), onde $x = [x_{i,j}]$.

Este é um problema de fluxo generalizado em rede bipartida.

A matriz de incidência nó-arco para o problema de fluxo generalizado (3.10-3.12) é mostrada na figura (3.1) abaixo.

	x_{11}	...	x_{1n}	x_{21}	...	x_{2n}	...	x_{m1}	...	x_{mn}	
1	1	...	1								$\leq a_1$
usinas	$\vdots$			1	...	1	...				$\vdots$
m								1	...	1	$\leq a_m$
1	d_{11}			d_{21}				d_{m1}			$= b_1$
produtos	$\vdots$	$\ddots$			$\ddots$		...		$\ddots$		$\vdots$
n			d_{1n}			d_{2n}				d_{mn}	$= b_n$
	c_{11}	...	c_{1n}	c_{21}	...	c_{2n}	...	c_{n1}	...	c_{mn}	minimizar

Figura 3.1: Matriz de incidência nó-arco para o problema (3.10-3.12)

Pode-se observar que a estrutura mostrada na figura (3.1) é muito parecida com a estrutura do problema do transporte, por esse motivo, o modelo (3.10-3.12) é chamado de “problema do transporte generalizado” (PTG). Maiores detalhes sobre os problemas de fluxo em redes generalizado e métodos de resolução como o algoritmo simplex para fluxo generalizado podem ser obtidos em Ahuja [1] e Kennington [7].

Problemas de transporte generalizado freqüentemente são de grande porte, e portanto, podem ser muito difíceis de serem resolvidos pelos métodos tradicionais, como por exemplo, o método simplex.

Devido a esta dificuldade, busca-se métodos de solução aproximada onde um problema mais fácil em termos de tamanho e complexidade é resolvido no lugar do problema original.

Um método para reduzir o tamanho do problema é através de agregação de variáveis

e/ou restrições.

Quando aplica-se o método de agregação para o problema do transporte generalizado é interessante calcular os limites de erro *a posteriori*. Assim como é feito para problemas de programação linear em geral.

Neste capítulo discute-se dois métodos de agregação para o problema do transporte generalizado. No primeiro método, aplica-se a metodologia de agregação às origens e no segundo aplica-se a metodologia de agregação aos destinos. Discute-se também como obter limites de erro *a posteriori*.

3.2 Métodos de Agregação para o Problema do Transporte Generalizado

Como os problemas de transporte generalizado freqüentemente são de grande porte, para obter uma solução factível para esses problemas estuda-se um método, que gera um problema de menor dimensão e, portanto, mais fácil de ser resolvido, isto é, aplica-se a metodologia de agregação descrita no capítulo 2.

Nesta seção discute-se com detalhes dois métodos de agregação aplicados ao problema do transporte generalizado. No primeiro método trabalha-se com a metodologia de agregação aplicada às origens e no segundo trabalha-se com agregação aplicada aos destinos.

3.2.1 Agregação de Origens

Suponha que o problema do transporte generalizado (PTG), esteja definido como em (3.10-3.12). Para obter uma solução aproximada para o problema do transporte generalizado original, aplica-se a metodologia de agregação de peso-fixo às origens, baseado na proposta de Evans [6] e Litvinchev [11].

Dado o PTG original (3.10-3.12), pode-se construir o problema agregado, substituindo um subconjunto de origens por uma única origem. Para tanto, considere uma partição σ do conjunto das origens $\mathcal{I}_1 = \{1, \dots, m\}$, em p subconjuntos $T_k = \{k\}, k = 1, \dots, p-1$ e $T_p = \{p, p+1, \dots, m\}$. Assim, temos que $\cup_{k=1}^p T_k = \{1, \dots, m\}$, $T_k \cap T_l = \emptyset$ para $k \neq l$.

As origens $i = 1, \dots, p-1$ não são agregadas, enquanto que as origens $i = p, p+1, \dots, m$



são agregadas formando uma única origem p .

O problema agregado usando a partição σ definida acima, é composto de p origens e n destinos e possui $p \times n$ variáveis (clusters) e $p + n$ restrições.

Os primeiros $(p - 1) \times n$ clusters são da forma:

$$S_{ij} = \{x_{ij}\}, i = 1, \dots, p - 1, j = 1, \dots, n.$$

Enquanto que os últimos n clusters são da forma:

$$S_{pj} = \{x_{pj}, x_{(p+1)j}, x_{(p+2)j}, \dots, x_{mj}\}, j = 1, \dots, n.$$

Para os primeiros $(p - 1) \times n$ clusters considera-se o vetor peso g definido por:

$$g = 1, i = 1, \dots, p - 1, j = 1, \dots, n.$$

Para os demais n clusters considera-se um vetor peso não negativo $g^j, j = 1, \dots, n$ fixo, definido por:

$$g_{ij} = a_i \frac{1}{O}, \quad i = p, p + 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad O = \sum_{i=p}^m a_i, \quad (3.13)$$

e que satisfaz a condição:

$$\sum_{i=p}^m g_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad g_{ij} \geq 0. \quad (3.14)$$

Denota-se por $\mathcal{A}_{ij}$ a submatriz de $\mathcal{A}$ contendo as colunas associadas as variáveis que estão no cluster S_{ij} . Analogamente, define-se os subvetores C_{ij} e X_{ij} dos vetores c e x respectivamente.

As colunas $\bar{\mathcal{A}}_{ij}$ do problema agregado são dadas da seguinte maneira:

$$\bar{\mathcal{A}}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}g, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n.$$

De maneira análoga tem-se que:

$$\bar{c}_{ij} = C_{ij}g \text{ e } \bar{X}_{ij} = X_{ij}g, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n.$$

E considerando

$$a_i = \bar{a}_i \quad i = 1, \dots, m,$$

o problema agregado obtido do problema original (3.10-3.12) pode então ser escrito da seguinte maneira:



$$\min \quad \bar{Z} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-1} c_{ij} \bar{X}_{ij} + \sum_{j=1}^n \bar{X}_{pj} \sum_{i=p}^m c_{ij} g_{ij} \quad (3.15)$$

$$(PA) \text{ sujeito a } \sum_{j=1}^n \bar{X}_{ij} \leq \bar{a}_i, \quad i = 1, \dots, p-1 \quad (3.16)$$

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} \bar{X}_{pj} \leq \bar{a}_i, \quad i = p, \dots, m \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} d_{ij} \bar{X}_{ij} + \bar{X}_{pj} \sum_{i=p}^m g_{ij} d_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

$$\bar{X}_{ij} \geq 0, \quad \bar{X}_{pj} \geq 0,$$

Para fazer coerência com o capítulo 2 daqui em diante passa-se a tratar o problema de minimizar como um problema de maximizar. Com isso o problema (3.15-3.18) passa a ser escrito como:

$$- \max \quad \bar{Z} = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-1} c_{ij} \bar{X}_{ij} - \sum_{j=1}^n \bar{X}_{pj} \sum_{i=p}^m c_{ij} g_{ij} \quad (3.19)$$

$$(PA) \text{ sujeito a } \sum_{j=1}^n \bar{X}_{ij} \leq \bar{a}_i, \quad i = 1, \dots, p-1 \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} \bar{X}_{pj} \leq \bar{a}_i, \quad i = p, \dots, m \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} d_{ij} \bar{X}_{ij} + \bar{X}_{pj} \sum_{i=p}^m g_{ij} d_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

$$\bar{X}_{ij} \geq 0, \quad \bar{X}_{pj} \geq 0,$$

Substituindo o vetor peso g_{ij} dado em (3.13) na inequação (3.21) tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n g_{ij} \bar{X}_{pj} &\leq \bar{a}_i \\ \sum_{j=1}^n a_i \frac{1}{O} \bar{X}_{pj} &\leq \bar{a}_i \\ \sum_{j=1}^n \bar{X}_{pj} &\leq O \frac{\bar{a}_i}{\bar{a}_i} \\ \sum_{j=1}^n \bar{X}_{pj} &\leq O, \end{aligned} \quad (3.23)$$

e considerando:

$$\bar{c}_{pj} = \sum_{i=p}^m c_{ij} g_{ij}, \quad \bar{d}_{pj} = \sum_{i=p}^m g_{ij} d_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Pode-se reescrever o problema agregado (3.19-3.22) da seguinte maneira:

$$- \max \quad \bar{Z} = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-1} c_{ij} \bar{X}_{ij} - \sum_{j=1}^n \bar{c}_{pj} \bar{X}_{pj} \quad (3.24)$$

$$(PA) \text{ sujeito a } \sum_{j=1}^n \bar{X}_{ij} \leq \bar{a}_i, \quad i = 1, \dots, p-1 \quad (3.25)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{X}_{pj} \leq O, \quad (m-p+1 \text{ vezes}) \quad (3.26)$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} d_{ij} \bar{X}_{ij} + \bar{d}_{pj} \bar{X}_{pj} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.27)$$

$$\bar{X}_{ij} \geq 0, \quad \bar{X}_{pj} \geq 0,$$

Pode-se observar, que para o problema (3.24-3.27), a estrutura do problema do transporte foi perdida.

Como as $(m-p+1)$ restrições $\sum_{j=1}^n \bar{X}_{pj} \leq O$ (3.26), são linearmente dependentes, o problema agregado (3.24-3.27) pode ser resolvido, considerando-se apenas uma das $(m-p+1)$ restrições. E fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$\overset{\circ}{x}_{ij} = \bar{X}_{ij}, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

$$\overset{\circ}{X}_{pj} = \bar{X}_{pj}, \quad i = p, \dots, m$$

e $\overset{\circ}{u}_i, i = 1, \dots, p, \overset{\circ}{v}_j, j = 1, \dots, n$ são variáveis duais.

As variáveis $\overset{\circ}{x}_{ij}, \overset{\circ}{X}_{pj}, \overset{\circ}{u}_i, \overset{\circ}{v}_j$ foram introduzidas devido ao fato de se considerar a restrição (3.26) apenas uma vez ao invés das $(m-p+1)$ vezes.

Então o problema (3.24-3.27) pode ser reescrito como:

$$- \max \quad \bar{Z} = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-1} c_{ij} \overset{\circ}{x}_{ij} - \sum_{j=1}^n \bar{c}_{pj} \overset{\circ}{X}_{pj} \quad (3.28)$$

$$(PA) \text{ sujeito a } \sum_{j=1}^n \overset{\circ}{x}_{ij} \leq \bar{a}_i, \quad i = 1, \dots, p-1 \quad (3.29)$$

$$\sum_{j=1}^n \overset{\circ}{X}_{pj} \leq O, \quad (3.30)$$

$$\sum_i^{p-1} d_{ij} \overset{\circ}{x}_{ij} + \bar{d}_{pj} \overset{\circ}{X}_{pj} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

$$\overset{\circ}{x}_{ij} \geq 0, \quad \overset{\circ}{X}_{pj} \geq 0,$$

problema do transporte generalizado (3.28-3.31).

E assim, a estrutura do problema do transporte generalizado é preservada.

Pode-se observar que, quando se agrega as origens uma agregação de variáveis e restrições simultânea estão sendo realizadas e assim, o problema agregado tem dimensão $(p+n) \times (p \times n)$.

O problema dual associado ao problema agregado (3.24-3.27) é dado por:

$$\min \quad \bar{D} = \sum_{i=1}^{p-1} \bar{U}_i \bar{a}_i + \sum_{i=p}^m \bar{U}_i \bar{a}_i - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j b_j \quad (3.32)$$

$$(DPA) \text{ sujeito a } c_{ij} - \bar{U}_i + \bar{V}_j d_{ij} \leq 0, \quad i = 1, \dots, p-1 \quad (3.33)$$

$$\bar{c}_{pj} + \bar{V}_j \bar{d}_{pj} - \sum_{i=p}^m \bar{U}_i g_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.34)$$

$$\bar{U}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \bar{V}_j \text{ irrestrito,}$$

Uma solução dual para o problema (3.32-3.34), é obtida fazendo:

$\bar{v}_j = \bar{V}_j, j = 1, \dots, n, \bar{u}_i = \bar{U}_i, i = 1, \dots, p-1$ e $\bar{U}_i, i = p, \dots, m$ são quaisquer números não-negativos satisfazendo a condição:

$$\bar{u}_p = \frac{1}{O} \sum_{i=p}^m \bar{U}_i a_i \quad (3.35)$$

A solução dual $\bar{U}_i, i = p, \dots, m$ em (3.32-3.34) não é única, isto é, pode-se encontrar mais de um valor para $\bar{U}_i$ satisfazendo (3.35).

Depois do problema agregado (3.24-3.27) ter sido formado e resolvido, pode-se obter uma solução factível para o problema original (3.10-3.12), a partir da solução do problema agregado (3.24-3.27).

Teorema 3.2.1 (Evans [6]) *Seja $\bar{X}_{pj}$ uma solução factível para o problema agregado (3.24-3.27). Então a desagregação de peso-fixo de $\bar{X}_{pj}$, definida como:*

$$\bar{x}_{ij} = \bar{X}_{ij}, \quad i = 1, \dots, p-1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\bar{x}_{ij} = g_{ij} \bar{X}_{pj}, \quad i = p, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

é uma solução factível para o problema original (3.10-3.12), e

$$z^* = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{p-1} c_{ij} \bar{X}_{ij} - \sum_{j=1}^n \bar{c}_{pj} \bar{X}_{pj} = \bar{Z}^*,$$

onde z^ é o valor objetivo desagregado para o problema original e $\bar{Z}^*$ é o valor objetivo do problema agregado.*

Demonstração:

A primeira coisa a fazer é mostrar que as relações que define a desagregação de peso-fixo satisfazem as restrições do problema original (3.10-3.12).

Verifica-se que a primeira restrição $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m$ é satisfeita:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n \bar{X}_{ij} \leq \bar{a}_i = a_i, \quad i = 1, \dots, p-1 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n g_{ij} \bar{X}_{pj} \\ &\leq g_{ij} O \\ &\leq \frac{a_i}{O} O \\ &\leq a_i, \quad i = p, \dots, m. \end{aligned}$$

Agora verifica-se que a segunda restrição $\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$ é satisfeita:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} &= \sum_{i=1}^m d_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{p-1} d_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{i=p}^m d_{ij} \bar{x}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} d_{ij} \bar{X}_{ij} + \sum_{i=p}^m d_{ij} g_{ij} \bar{X}_{pj} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} d_{ij} \bar{X}_{ij} + \bar{X}_{pj} \sum_{i=p}^m g_{ij} d_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} d_{ij} \bar{X}_{ij} + \bar{d}_{pj} \bar{X}_{pj} \\ &= b_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Finalmente, mostra-se que o valor objetivo z^* desagregado para o problema original coincide com o valor objetivo $\bar{Z}^*$ do problema agregado.

$$\begin{aligned} z^* &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} = - \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{x}_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=p}^m c_{ij} \bar{x}_{ij} \\ &= - \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{X}_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=p}^m c_{ij} g_{ij} \bar{X}_{pj} \\ &= - \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{X}_{ij} - \sum_{j=1}^n \bar{c}_{pj} \bar{X}_{pj} = \bar{Z}^*. \end{aligned}$$

■

EXEMPLO

Passa-se, agora, a exemplificar os conceitos desenvolvidos anteriormente sobre agregação de origens, considerando o problema descrito na figura (3.2) abaixo, que tem solução ótima $Z^* = 122.8333$, $x_{11}^* = 9.75$, $x_{12}^* = 11.25$, $x_{14}^* = 5$, $x_{16}^* = 24$, $x_{43}^* = 6.67$, $x_{45}^* = 8.33$, $x_{51}^* = 0.75$, e os demais $x_{ij}^* = 0$.

Aplicando a técnica de agregação as origens, considera-se a partição σ do conjunto das origens $\mathcal{I}_1$ em $p = 3$ subconjuntos $T_k = \{k\}$, $k = 1, 2$ e $T_3 = \{3, 4, 5\}$, isto é, para o problema agregado o conjunto de origens $\mathcal{I}_1$ passa de $i = 1, 2, 3, 4, 5$ para $i = 1, 2, 3$, enquanto que o conjunto de destinos não se altera.

O problema agregado terá 3×6 clusters.

Os primeiros 2×6 clusters são:

$$S_{11} = \{x_{11}\}, S_{12} = \{x_{12}\}, S_{13} = \{x_{13}\}, S_{14} = \{x_{14}\}, S_{15} = \{x_{15}\}, S_{16} = \{x_{16}\},$$

$$S_{21} = \{x_{21}\}, S_{22} = \{x_{22}\}, S_{23} = \{x_{23}\}, S_{24} = \{x_{24}\}, S_{25} = \{x_{25}\}, S_{26} = \{x_{26}\},$$

e os últimos n clusters são:

$$S_{31} = \{x_{31}, x_{41}, x_{51}\}, S_{32} = \{x_{32}, x_{42}, x_{52}\}, S_{33} = \{x_{33}, x_{43}, x_{53}\},$$

$$S_{34} = \{x_{34}, x_{44}, x_{54}\}, S_{35} = \{x_{35}, x_{45}, x_{55}\}, S_{36} = \{x_{36}, x_{46}, x_{56}\}.$$

Utilizando o vetor peso g dado em (3.13), temos:

$$O = \sum_{i=3}^5 a_i = 46 + 28 + 10 = 84$$

$$g_{3j} = \frac{46}{84} = 0,55,$$

$$g_{4j} = \frac{28}{84} = 0,33,$$

$$g_{5j} = \frac{10}{84} = 0,12,$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

e para as demais origens $g = 1$.

Assim, tem-se que:

$$\bar{c}_{pj} = \sum_{i=3}^5 c_{ij} g_{ij}, j = 1, \dots, 6$$

$$\bar{c}_{31} = 50.38, \bar{c}_{32} = 41.33, \bar{c}_{33} = 4.45, \bar{c}_{34} = 51.26, \bar{c}_{35} = 10.59, \bar{c}_{36} = 11.36$$

para $i = 1, 2$ e $j = 1, \dots, 6$ $\bar{\mathcal{A}}_{ij} = \mathcal{A}_{ij} \times 1$

e para $p = 3$ e $j = 1, \dots, 6$ $\bar{\mathcal{A}}_{pj} = [\mathcal{A}_{pj}, \mathcal{A}_{(p+1)j}, \dots, \mathcal{A}_{mj}][g_{pj}, g_{(p+1)j}, \dots, g_{mj}]^t$.

Assim,

$$\bar{\mathcal{A}}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.33 \\ 0.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.55 \\ 0.33 \\ 0.12 \\ 1.55 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As demais colunas $\bar{\mathcal{A}}_{3j}$, $j = 2, \dots, 6$, obtidas de maneira análoga são:

$$\bar{\mathcal{A}}_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.55 \\ 0.33 \\ 0.12 \\ 0 \\ 2.33 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.55 \\ 0.33 \\ 0.12 \\ 0 \\ 0 \\ 3.55 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_{34} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.55 \\ 0.33 \\ 0.12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.74 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_{35} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.55 \\ 0.33 \\ 0.12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_{36} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.55 \\ 0.33 \\ 0.12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.79 \end{bmatrix}$$

A figura (3.3) abaixo, ilustra o processo de agregação do problema original.

O problema agregado é mostrado na figura (3.4) abaixo, e considerando a substituição feita em (3.23) e as observações para o problema (3.24-3.27), o problema agregado resultante é dado na figura (3.5) abaixo,

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{46}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}	x_{56}	
1	1	1	1	1	1	1																									≤ 50
2							1	1	1	1	1	1																			≤ 20
3													1	1	1	1	1	1													≤ 46
4																			1	1	1	1	1	1							≤ 28
5																									1	1	1	1	1	1	≤ 10
1	3						5						2						1						1						$= 30$
2		4						3						1						5						1					$= 45$
3			2						7						4						3						3				$= 20$
4				2						2						6						1					1				$= 10$
5					5						5						2						3					3			$= 25$
6						1						2						1						3					2		$= 24$
	1	4	26	3	5	1	9	6	26	57	38	34	65	35	5	75	7	5	44	64	3	27	1	23	1	7	6	10	54	8	min

Figura 3.2: matriz de incidência nó-arco para o problema original

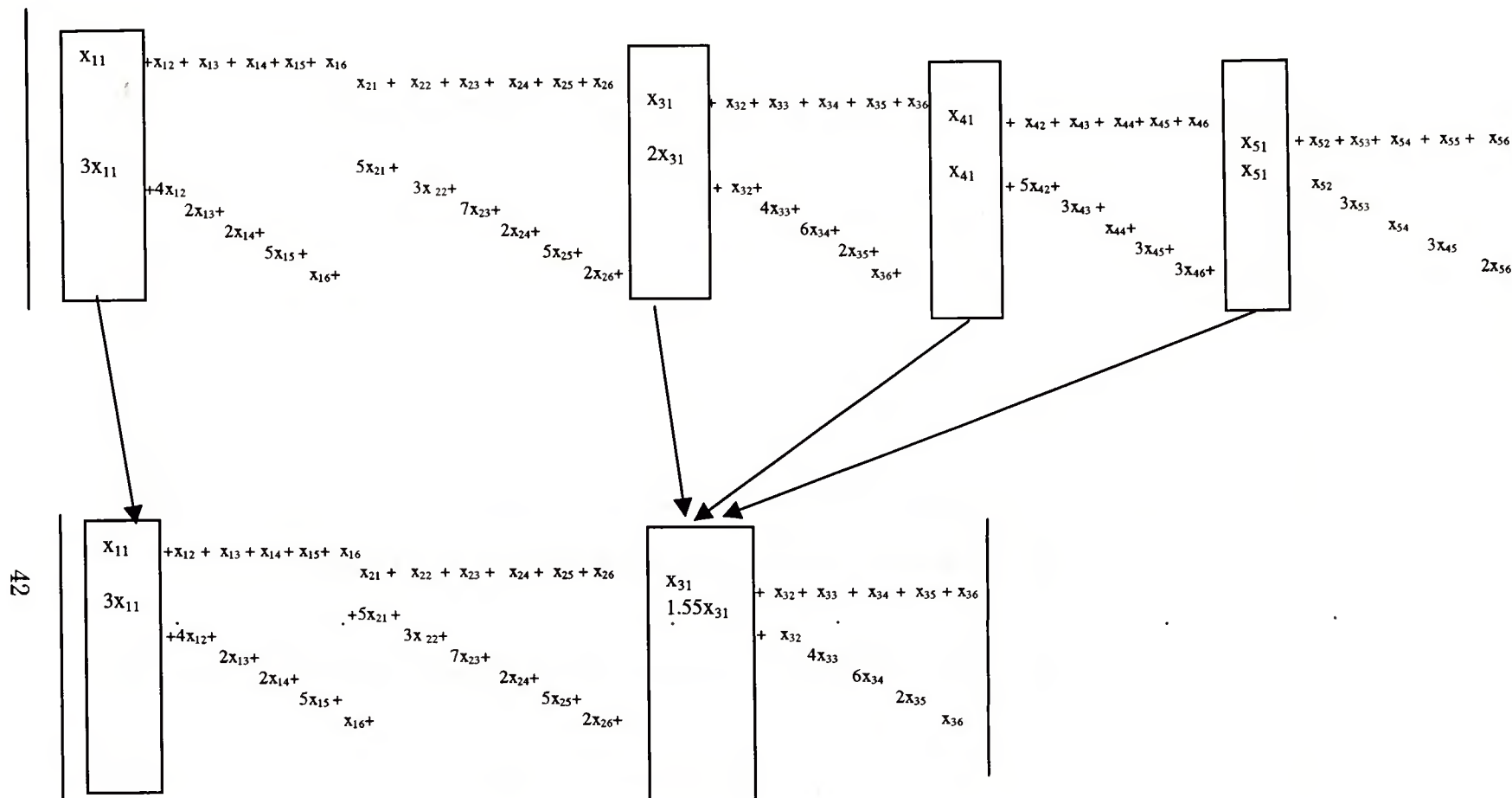


Figura 3.3: processo de agregação do problema original

	$\bar{X}_{11}$	$\bar{X}_{12}$	$\bar{X}_{13}$	$\bar{X}_{14}$	$\bar{X}_{15}$	$\bar{X}_{16}$	$\bar{X}_{21}$	$\bar{X}_{22}$	$\bar{X}_{23}$	$\bar{X}_{24}$	$\bar{X}_{25}$	$\bar{X}_{26}$	$\bar{X}_{31}$	$\bar{X}_{32}$	$\bar{X}_{33}$	$\bar{X}_{34}$	$\bar{X}_{35}$	$\bar{X}_{36}$	
1	1	1	1	1	1	1													≤ 50
2							1	1	1	1	1	1							≤ 20
3													0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	≤ 46
4													0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	≤ 28
5													0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	≤ 10
1	3						5						1.55						=30
2		4						3						2.33					=45
3			5						7						3.55				=20
4				2						2						3.74			=10
5					5						5						2.33		=25
6						1						2						1.79	=24
	1	4	26	3	5	1	9	6	26	57	38	34	50.38	41.33	4.45	51.26	10.59	11.36	min

Figura 3.4: matriz de incidência nó-arco para o problema agregado

	$\bar{X}_{11}$	$\bar{X}_{12}$	$\bar{X}_{13}$	$\bar{X}_{14}$	$\bar{X}_{15}$	$\bar{X}_{16}$	$\bar{X}_{21}$	$\bar{X}_{22}$	$\bar{X}_{23}$	$\bar{X}_{24}$	$\bar{X}_{25}$	$\bar{X}_{26}$	$\bar{X}_{31}$	$\bar{X}_{32}$	$\bar{X}_{33}$	$\bar{X}_{34}$	$\bar{X}_{35}$	$\bar{X}_{36}$	
1	1	1	1	1	1	1													≤ 50
2							1	1	1	1	1	1							≤ 20
3													1	1	1	1	1	1	≤ 84
1	3						5						1.55						=30
2		4						3						2.33					=45
3			5						7						3.55				=20
4				2						2						3.74			=10
5					5						5						2.33		=25
6						1						2						1.79	=24
	1	4	26	3	5	1	9	6	26	57	38	34	50.38	41.33	4.45	51.26	10.59	11.36	min

Figura 3.5: matriz de incidência nó-arco para o problema agregado

que tem solução ótima $\bar{Z}^* = 165.1007$, $\bar{X}_{11}^* = 10$, $\bar{X}_{12}^* = 6$, $\bar{X}_{14}^* = 5$, $\bar{X}_{15}^* = 5$, $\bar{X}_{16}^* = 24$, $\bar{X}_{22}^* = 7$, $\bar{X}_{33}^* = 5.64$, os demais $\bar{X}_{ij}^* = 0$.

A solução desagregada para o problema dado na figura (3.2) é:
 $z^* = 165.1007$, $\bar{x}_{11} = 10$, $\bar{x}_{12} = 6$, $\bar{x}_{14} = 5$, $\bar{x}_{15} = 5$, $\bar{x}_{16} = 24$, $\bar{x}_{22} = 7$, $\bar{x}_{33} = 3.08$, $\bar{x}_{43} = 1.88$, $\bar{x}_{53} = 0.67$, e os demais $\bar{x}_{ij} = 0$.

O problema dual é dado na figura (3.6) abaixo:

	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\bar{v}_3$	$\bar{v}_4$	$\bar{v}_5$	$\bar{v}_6$	
1	-1			3						≤ 1
2	-1				4					≤ 4
3	-1					5				≤ 26
4	-1						2			≤ 3
5	-1							5		≤ 5
6	-1								1	≤ 1
1		-1		5						≤ 9
2		-1			3					≤ 6
3		-1				7				≤ 26
4		-1					2			≤ 57
5		-1						5		≤ 38
6		-1							2	≤ 34
1			-1	1.55						≤ 50.38
2			-1		2.33					≤ 41.33
3			-1			3.55				≤ 4.45
4			-1				3.76			≤ 51.26
5			-1					2.33		≤ 10.59
6			-1						1.78	≤ 11.36
	-50	-20	-84	30	45	20	10	25	24	max

Figura 3.6: matriz de incidência nó-arco para o problema agregado dual

que tem solução ótima $\bar{D}^* = 165.1006$, $\bar{u}_1 = 4$, $\bar{u}_2 = 0$, $\bar{u}_3 = 0$, $\bar{v}_1 = 1.6$, $\bar{v}_2 = 2$, $\bar{v}_3 = 1.25$, $\bar{v}_4 = 3.5$, $\bar{v}_5 = 1.8$, $\bar{v}_6 = 5$.

A partir desta solução, vamos obter uma solução dual para o problema agregado dado pela figura (3.4):

$$\bar{v}_1 = \bar{V}_1 = 1.6, \bar{v}_2 = \bar{V}_2 = 2, \bar{v}_3 = \bar{V}_3 = 1.25, \bar{v}_4 = \bar{V}_4 = 3.5, \bar{v}_5 = \bar{V}_5 = 1.8, \bar{v}_6 = \bar{V}_6 = 5, \\ \bar{u}_1 = \bar{U}_1 = 4, \bar{u}_2 = \bar{U}_2 = 0,$$

para $i = 3, 4, 5$, $\bar{U}_i$ é obtido satisfazendo $\bar{u}_3 = \frac{1}{\bar{O}} \sum_{i=3}^5 \bar{U}_i a_i$, onde $\bar{u}_3 = 0$, então:

$$\bar{U}_3 = 0, \bar{U}_4 = 0, \bar{U}_5 = 0.$$

Além de agregar-se as origens do problema do transporte generalizado, tem-se uma outra

opção, que é aplicar a técnica de agregação aos destinos, que será vista na próxima subseção.

3.2.2 Agregação de Destinos

Suponha que o problema do transporte generalizado esteja definido como em (3.10-3.12). Evans [6], aplica a metodologia de agregação aos destinos de maneira análoga ao que foi proposto para agregação de origens.

Dado o PTG original (3.10-3.12), pode-se construir o problema agregado, substituindo um subconjunto de destinos por um único destino. Para tanto, considere uma partição ρ do conjunto dos destinos $\mathcal{I}_2 = \{1, \dots, n\}$, em p subconjuntos $T'_r = \{r\}, r = 1, \dots, p-1$ e $T'_p = \{p, p+1, \dots, n\}$. Assim temos que $\cup_{r=1}^p T'_r = \{1, \dots, n\}$, $T'_r \cap T'_y = \emptyset$ para $r \neq y$.

Os destinos $j = 1, \dots, p-1$ não são agregadas enquanto que os destinos $j = p, p+1, \dots, n$ são agregadas formando um único destino p .

O problema agregado, usando a partição ρ definida acima, é composto de m origens e p destinos e possui $m \times p$ variáveis (clusters) e $m + p$ restrições.

Os primeiros $m \times (p-1)$ clusters que correspondem as m origens e os $p-1$ destinos são da forma:

$$S_{ij} = \{x_{ij}\}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p-1.$$

Enquanto que os demais m clusters que correspondem as m origens e ao destino p são da forma:

$$S_{ip} = \{x_{ip}, x_{i(p+1)}, x_{i(p+2)}, \dots, x_{im}\}, i = 1, \dots, m.$$

Para os primeiros $(p-1) \times n$ clusters considera-se o vetor peso g definido por:

$$g = 1, j = 1, \dots, p-1, i = 1, \dots, m.$$

Para os demais m clusters considera-se um vetor peso não negativo $g^i, i = 1, \dots, m$ fixo, definido por:

$$g_{ij} = b_i \frac{1}{B}, \quad j = p, p+1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \quad B = \sum_{j=p}^n b_j, \quad (3.36)$$

e que satisfaz a condição:

$$\sum_{j=p}^n g_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad g_{ij} \geq 0. \quad (3.37)$$

Denota-se por $\mathcal{A}_{ij}$ a submatriz de $\mathcal{A}$, contendo as colunas associadas as variáveis que estão no cluster S_{ij} . Analogamente, define-se os subvetores C_{ij} e X_{ij} dos vetores c e x respectivamente.

As colunas $\bar{\mathcal{A}}_{ij}$ do problema agregado são dadas da seguinte maneira:

$$\bar{\mathcal{A}}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}g, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p.$$

De maneira análoga tem-se que:

$$\bar{c}_{ij} = C_{ij}g \text{ e } \bar{X}_{ij} = X_{ij}g, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p.$$

E considerando:

$$b_j = \bar{b}_j,$$

$$\bar{d}_{ip} = \sum_{j=p}^n g_{ij} d_{ij}$$

O problema agregado obtido do problema original (3.10-3.12), pode então, ser escrito da seguinte maneira:

$$- \max \quad \bar{Z} = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p-1} c_{ij} \bar{X}_{ij} - \sum_{i=1}^m \bar{c}_{ip} \bar{X}_{ip} \quad (3.38)$$

$$(PA) \text{ sujeito a } \sum_{j=1}^{p-1} \bar{X}_{ij} + \sum_{j=p}^n g_{ij} \bar{X}_{ip} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.39)$$

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} \bar{X}_{ij} = \bar{b}_j, \quad j = 1, \dots, p-1 \quad (3.40)$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{d}_{ip} \bar{X}_{ip} = \bar{b}_j, \quad j = p, \dots, n \quad (3.41)$$

$$\bar{X}_{ij} \geq 0, \quad \bar{X}_{ip} \geq 0,$$

Aqui, a desagregação de peso-fixo definida por:

$$\bar{x}_{ij} = \bar{X}_{ij}, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\bar{x}_{ij} = g_{ij} \bar{X}_{ip}, \quad j = p, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m,$$

não fornece uma solução factível para o problema original (ver Evans [6]), isto é:

para $j = p, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m d_{ij} g_{ij} \bar{X}_{ip} \neq \sum_{i=1}^m \sum_{j=p}^n g_{ij} d_{ij} \bar{X}_{ip} = \sum_{i=1}^m \bar{d}_{ip} \bar{X}_{ip}.$$

Para obter uma solução desagregada factível para o problema original Evans [6] propõe que se faça uma mudança de variáveis no problema original.

Essa mudança de variáveis é feita da seguinte maneira:

$$y_{ij} = d_{ij}x_{ij},$$

$$x_{ij} = \frac{y_{ij}}{d_{ij}}$$

e

$$c_{ij}x_{ij} = c_{ij}\frac{y_{ij}}{d_{ij}} = \frac{c_{ij}}{d_{ij}}y_{ij} = c'_{ij}y_{ij}.$$

onde $\frac{c_{ij}}{d_{ij}} = c'_{ij}$.

O problema resultante é dado por:

$$- \max \quad Z = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij}y_{ij} \quad (3.42)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^n \frac{y_{ij}}{d_{ij}} \leq a_i, \text{ para } i = 1, \dots, m \quad (3.43)$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} = b_j, \text{ para } j = 1, \dots, n \quad (3.44)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad \forall \quad i, j.$$

Aplicando a técnica de agregação de destino, descrita anteriormente ao problema (3.42-3.44), obtém-se uma solução desagregada factível para o problema original (3.10-3.12).

Depois de construir o problema agregado do problema (3.42-3.44), pode-se observar que ao agregar os destinos, uma agregação de variáveis e restrições simultânea está sendo realizada. E assim, o problema agregado tem dimensão $(m + p) \times (m \times p)$ como observado na agregação de origens.

Litvinchev [11], propõe um estudo sobre agregação de destinos, agregando todo o conjunto dos destinos.

Dado o PTG original (3.10-3.12), pode-se construir o problema agregado substituindo o conjunto dos destinos $\mathcal{I}_2 = \{1, \dots, n\}$ por um único destino.

O problema agregado terá m origens e apenas 1 destino e possuirá $m \times 1$ variáveis e $m + 1$ restrições. O problema agregado terá então $m \times 1$ clusters ou simplesmente m clusters.

Os m clusters $S_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1$ ou simplesmente S_i são da forma:

$$S_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\}.$$

Para construir o problema agregado, considera-se um vetor peso não negativo $g^j \geq 0$ fixo, definido por:

$$g_{ij} = b_j \frac{1}{d_{ij}R} \quad R = \sum_{j=1}^n b_j, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m. \quad (3.45)$$

Denota-se por $\mathcal{A}_i$ a submatriz de $\mathcal{A}$, contendo as colunas associadas as variáveis que estão no cluster S_i . Analogamente, defini-se os subvetores C_i e X_i dos vetores c e x respectivamente.

Como o problema agregado possui apenas um destino pode-se denotar $\bar{X}_{ij}$ por $\bar{X}_i$, $\bar{c}_{ij}$ por $\bar{c}_i$ e $\bar{\mathcal{A}}_{ij}$ por $\bar{\mathcal{A}}_i$.

As colunas $\bar{\mathcal{A}}_i$ do problema agregado são, então, dadas da seguinte maneira:

$$\bar{\mathcal{A}}_i = \mathcal{A}_i g, i = 1, \dots, m.$$

De maneira análoga tem-se que:

$$\bar{c}_i = C_i g \text{ e } \bar{X}_i = X_i g, i = 1, \dots, m.$$

Assim, o problema agregado pode ser escrito da seguinte maneira:

$$- \max \quad \bar{Z} = - \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \sum_{j=1}^n g_{ij} c_{ij} \quad (3.46)$$

$$(PA) \text{ sujeito a } \bar{X}_i \sum_{j=1}^n g_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.47)$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{X}_i d_{ij} g_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.48)$$

$$\bar{X} \geq 0.$$

Substituindo o vetor peso g_{ij} dado em (3.45) na inequação (3.47) tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{X}_i \sum_{j=1}^n g_{ij} &\leq a_i \\ \bar{X}_i \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{d_{ij}R} &\leq a_i \\ \bar{X}_i \frac{1}{R} \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{d_{ij}} &\leq a_i \\ \bar{X}_i \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{d_{ij}} &\leq a_i R \\ \bar{X}_i &\leq a_i \frac{R}{\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{d_{ij}}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

e substituindo o vetor peso dado em (3.45) na inequação (3.48) tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \bar{X}_i d_{ij} g_{ij} &= b_j \\
 \sum_{i=1}^m \bar{X}_i d_{ij} \frac{b_j}{d_{ij} R} &= b_j \\
 \frac{1}{R} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i d_{ij} \frac{b_j}{d_{ij}} &= b_j \\
 \frac{1}{R} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i b_j &= b_j \\
 \sum_{i=1}^m \bar{X}_i b_j &= b_j R \\
 \sum_{i=1}^m \bar{X}_i &= \frac{b_j}{b_j} R \\
 \sum_{i=1}^m \bar{X}_i &= R,
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

e considerando as notações:

$$\bar{c}_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} c_{ij}, \quad \bar{a}_i = a_i R \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{d_{ij}}}, i = 1, \dots, m.$$

Pode-se reescrever o problema agregado (3.46-3.48) como:

$$- \max \quad \bar{Z} = - \sum_{i=1}^m \bar{c}_i \bar{X}_i \tag{3.51}$$

$$(PA) \text{ sujeito a } \bar{X}_i \leq \bar{a}_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{3.52}$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{X}_i = R, \quad (n \text{ vezes}) \tag{3.53}$$

$$\bar{X}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Pode-se observar, que a estrutura do problema do transporte foi perdida.

Como as n restrições $\sum_{i=1}^m \bar{X}_i = R$ (3.53) são linearmente dependentes, então, o problema agregado (3.51-3.53) pode ser resolvido considerando-se apenas uma das n restrições. Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\overset{\circ}{X}_i = \bar{X}_i$$

e considerando as variáveis duais como:

$$\overset{\circ}{u}_i \text{ e } \overset{\circ}{v},$$

onde as notações $\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{v}$ foram introduzidas devido ao fato de se considerar a restrição (3.53) apenas uma vez ao invés das n vezes. Nesse caso, pode-se reescrever o problema (3.51-3.53) como:

$$-\max \quad \bar{Z} = -\sum_{i=1}^m \bar{c}_i \overset{\circ}{X}_i \quad (3.54)$$

$$(PA) \text{ sujeito a } \overset{\circ}{X}_i \leq \bar{a}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.55)$$

$$\sum_{i=1}^m \overset{\circ}{X}_i = R, \quad (3.56)$$

$$\overset{\circ}{X}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Assim, a estrutura do problema do transporte é preservada.

Novamente, pode-se observar que a agregação de destinos resulta em uma agregação de variáveis e restrições simultânea. A dimensão do problema agregado é $(m+1) \times (m \times 1)$.

O problema dual associado ao problema agregado (3.51-3.53) é dado por:

$$\min \quad \bar{D} = \sum_{i=1}^m a_i \bar{U}_i - \sum_{j=1}^n R \bar{V}_j \quad (3.57)$$

$$(DPA) \text{ sujeito a } \bar{c}_i - \bar{U}_i + \bar{V}_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (3.58)$$

$$\bar{U} \geq 0, \quad \bar{V} \text{ irrestrito.}$$

Uma solução dual para o problema (3.57-3.58) é obtida fazendo:

$\bar{U}_i = \overset{\circ}{u}_i, i = 1, \dots, m$ e os $\bar{V}_j$ são quaisquer números não-negativo satisfazendo a condição:

$$\overset{\circ}{v} = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^n \bar{V}_j b_j. \quad (3.59)$$

A solução dual $\bar{V}_j, \forall j$ em (3.57-3.58) não é única, isto é, pode-se encontrar mais de um valor para $\bar{V}_j$ satisfazendo a condição (3.59).

Para o problema (3.54-3.56) e seu dual respectivamente, pode-se obter a solução analiticamente.

Considere a reordenação dos coeficientes $\bar{c}_i$ de acordo com $\bar{c}_1 \leq \dots \leq \bar{c}_m$, e considere o índice l , tal que,

$$\sum_{i=1}^l \bar{a}_i > R, \quad \text{mas} \quad \sum_{i=1}^{l-1} \bar{a}_i \leq R.$$

Então

$$\overset{\circ}{X}_i = \begin{cases} \bar{a}_i, & i = 1, \dots, l-1 \\ 0, & i = l, \dots, m \end{cases},$$



$$\begin{aligned}\bar{X}_l &= R - \sum_{i=1}^{l-1} \bar{a}_i, \\ \bar{u} &= \bar{c}_l, \\ \bar{u}_l &= \begin{cases} \bar{c}_i + \bar{c}_l, & i = 1, \dots, l-1 \\ 0, & i = l, \dots, m \end{cases}, \\ \bar{Z}^* &= - \sum_{i=1}^{l-1} \bar{a}_i \bar{c}_i - \bar{c}_l (R - \sum_{i=1}^{l-1} \bar{a}_i).\end{aligned}$$

Depois do problema agregado (3.51-3.53), ter sido resolvido, usa-se a solução ótima, para estimar uma solução factível para o problema original (3.10-3.12).

Obtém-se uma solução factível $(z^*, \bar{x})$ para o problema (3.10-3.12) a partir da desagregação de peso-fixo:

$$\bar{x}_{ij} = g_{ij} \bar{X}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad g_{ij} \geq 0. \quad (3.60)$$

EXEMPLO

Passa-se, agora, a exemplificar os conceitos desenvolvidos anteriormente sobre agregação de destinos, proposta por Litvinchev e considerando o problema dado pela figura (3.2).

Aplicando a técnica de agregação aos destinos proposta por Litvinchev, agrega-se o conjunto de destinos $\mathcal{I}_2 = \{1, \dots, 6\}$, obtendo apenas um destino, isto é, para o problema agregado o conjunto dos destinos $\mathcal{I}_2$ passa de $j = 1, \dots, 6$, para $j = 1$, enquanto que o conjunto das origens não se altera.

O problema agregado terá 5 clusters que são:

$$S_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\},$$

$$S_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}\},$$

$$S_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}\},$$

$$S_4 = \{x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{46}\},$$

$$S_5 = \{x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, x_{55}, x_{56}\},$$

Utilizando o vetor peso g dado em (3.45), temos:

$$R = \sum_{j=1}^6 b_j = 30 + 45 + 20 + 10 + 25 + 24 = 154$$

$$\begin{aligned}
g_{1j} &= [0.06, 0.07, 0.03, 0.03, 0.03, 0.16]^t, \\
g_{2j} &= [0.04, 0.09, 0.02, 0.03, 0.03, 0.08]^t, \\
g_{3j} &= [0.09, 0.29, 0.03, 0.01, 0.08, 0.16]^t, \\
g_{4j} &= [0.19, 0.06, 0.04, 0.06, 0.05, 0.05]^t, \\
g_{5j} &= [0.19, 0.29, 0.04, 0.06, 0.08, 0.08]^t, \\
j &= 1, 2, 3, 4, 5, 6.
\end{aligned}$$

Assim, tem-se que:

$$\bar{c}_i = \sum_{j=1}^6 C_i g_{ij}, j = 1, \dots, 6 \text{ isto é :}$$

$$\bar{c}_1 = [1 \quad 4 \quad 26 \quad 3 \quad 5 \quad 1] \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.07 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.16 \end{bmatrix} = 1.45$$

de maneira análoga obtém-se:

$$\bar{c}_2 = 7.15, \quad \bar{c}_3 = 18.88, \quad \bar{c}_4 = 15.44, \quad \bar{c}_5 = 8.15$$

e $\bar{\mathcal{A}}_i = \mathcal{A}_i \times g \ i = 1, \dots, 5,$

então:

$$\bar{\mathcal{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.07 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.19 \\ 0.29 \\ 0.13 \\ 0.06 \\ 0.16 \\ 0.16 \end{bmatrix} .$$



De maneira análoga obtém-se:

$$\bar{\mathcal{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.29 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.19 \\ 0.29 \\ 0.13 \\ 0.06 \\ 0.16 \\ 0.16 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.67 \\ 0 \\ 0 \\ 0.19 \\ 0.13 \\ 0.13 \\ 0.06 \\ 0.16 \\ 0.16 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.47 \\ 0 \\ 0.19 \\ 0.29 \\ 0.13 \\ 0.06 \\ 0.16 \\ 0.16 \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{A}}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.75 \\ 0.19 \\ 0.29 \\ 0.13 \\ 0.06 \\ 0.16 \\ 0.08 \end{bmatrix}.$$

A figura (3.7) abaixo, ilustra o processo de agregação do problema original.

O problema agregado é dado na figura (3.8) abaixo,

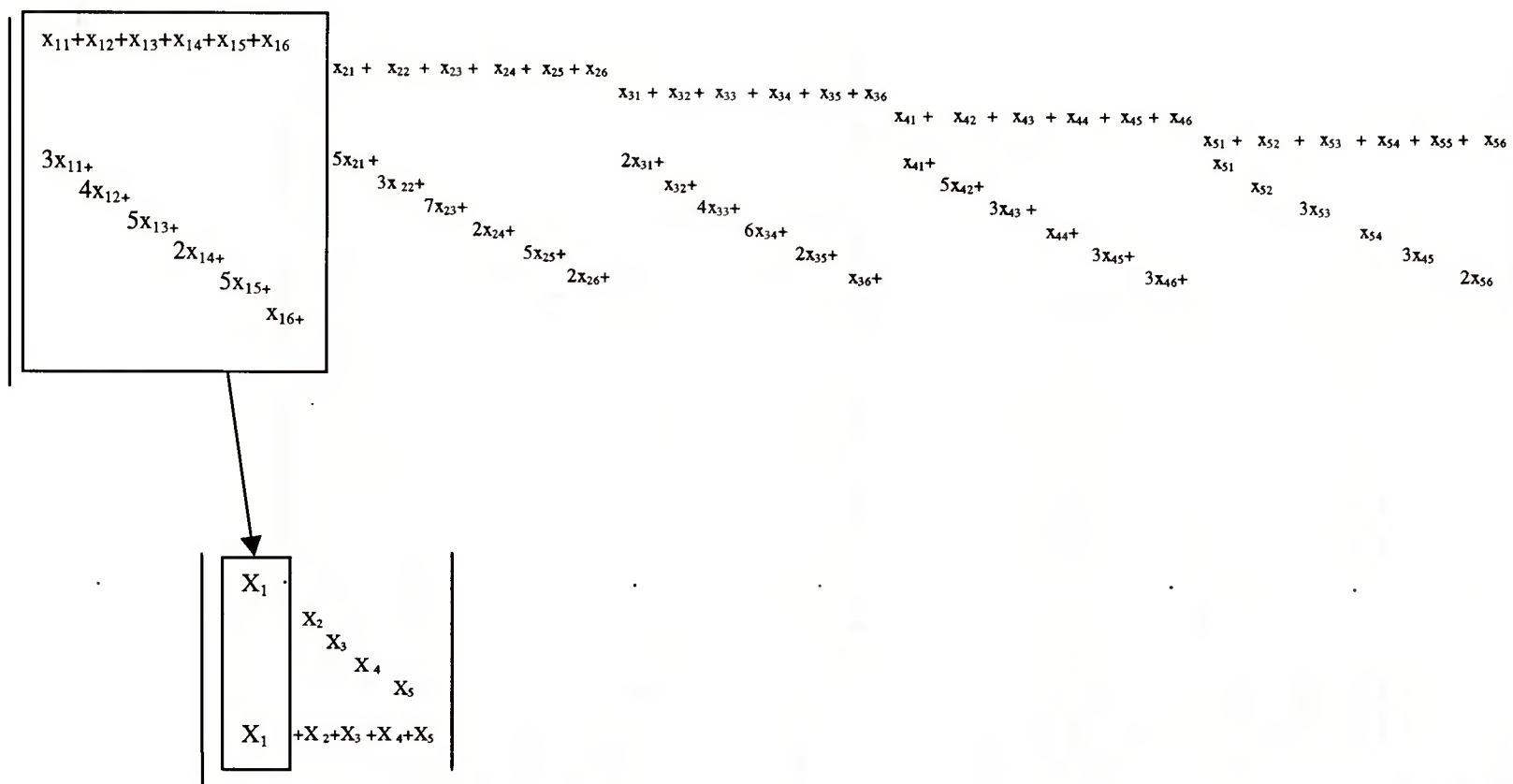


Figura 3.7: processo de agregação do problema original

	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_4$	$\bar{X}_5$	
1	0.38					≤ 50
2		0.29				≤ 20
3			0.67			≤ 46
4				0.47		≤ 28
5					0.75	≤ 10
1	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	$=30$
2	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	$=45$
3	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	$=20$
4	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	$=10$
5	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	$=25$
6	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	$=24$
	1.45	7.15	18.88	15.44	8.15	min

Figura 3.8: matriz de incidência nó-arco para o problema agregado

Considerando as substituições feitas em (3.49) e em (3.50) e as observações para o problema (3.51-3.53), o problema agregado resultante é dado na figura (3.9) a abaixo:

	$\overset{\circ}{X}_1$	$\overset{\circ}{X}_2$	$\overset{\circ}{X}_3$	$\overset{\circ}{X}_4$	$\overset{\circ}{X}_5$	
1	1					≤ 118.00
2		1				≤ 67.16
3			1			≤ 68.66
4				1		≤ 59.88
5					1	≤ 13.26
1	1	1	1	1	1	$=154$
	1.45	7.15	18.88	15.44	8.15	min

Figura 3.9: matriz de incidência nó-arco para o problema agregado

que tem solução ótima $\bar{Z}^* = 360.1163$, $\bar{X}_1^* = 129.96$, $\bar{X}_2^* = 24.04$, $\bar{X}_3^* = 0$, $\bar{X}_4^* = 0$, $\bar{X}_5^* = 0$.

A solução desagregada para o problema dado na figura (3.2) é:

$$z^* = 359.87, \bar{x}_{11} = 8.43, \bar{x}_{12} = 9.48, \bar{x}_{13} = 3.36, \bar{x}_{14} = 4.22, \bar{x}_{15} = 4.22, \bar{x}_{16} = 20.24, \bar{x}_{21} = 0.93, \bar{x}_{22} = 2.34, \bar{x}_{23} = 0.44, \bar{x}_{24} = 0.78, \bar{x}_{25} = 0.78, \bar{x}_{26} = 1.87 \text{ e os demais } \bar{x}_{ij} = 0.$$

Onde o problema dual é dado na figura (3.10) abaixo,

	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	$\bar{u}_4$	$\bar{u}_5$	$\bar{v}$	
1	1					-1	≤ 1.45
2		1				-1	≤ 7.15
3			1			-1	≤ 18.87
4				1		-1	≤ 15.44
5					1	-1	≤ 8.15
	129.96	67.16	68.66	59.88	13.26	-154	max

Figura 3.10: matriz de incidência nó-arco para o problema agregado dual

que tem solução ótima $\bar{D}^* = 360.1163$, $\bar{u}_1 = 5.70$, $\bar{u}_2 = 0$, $\bar{u}_3 = 0$, $\bar{u}_4 = 0$, $\bar{u}_5 = 0$, $\bar{v} = 7.15$.

A partir desta solução, vamos obter uma solução dual para o problema agregado dado pela figura (3.8), onde esta solução é dada a seguir:

$$\bar{u}_1 = \bar{U}_1 = 5.70, \bar{u}_2 = \bar{U}_2 = 0, \bar{u}_3 = \bar{U}_3 = 0, \bar{u}_4 = \bar{U}_4 = 0, \bar{u}_5 = \bar{U}_5 = 0$$

para $j = 1, 2, 3, 4, 6$, $\bar{V}_j$ é obtido satisfazendo $\bar{v} = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^6 \bar{V}_j b_j$, onde $\bar{v} = 7.15$, então fazendo:

$$\bar{V}_2 = 0, \bar{V}_3 = 0, \bar{V}_4 = 0, \bar{V}_5 = 0, \bar{V}_6 = 0, \text{ tem-se que } \bar{V}_1 = 36.71.$$

As soluções duais $(\bar{U}_i^*, \bar{V}_j^*)$ do problema agregado, são utilizadas para fornecer informações sobre a perda de precisão, isto é, para obter o limite de erro *a posteriori*.

3.3 Limite de erro *a Posteriori*

Para o problema do transporte generalizado (3.10-3.12), assim como para PL, em geral a solução desagregada não é ótima. Supondo que o PTG agregado é resolvido e que uma solução desagregada $\bar{x}$ para o PTG original é obtida, assim, temos que a perda de precisão introduzida usando o PTG agregado ao invés do PTG original é dada por $Z^* - \bar{Z}^*$. O objetivo desta seção é discutir limites de erro *a posteriori* para $Z^* - \bar{Z}^*$.

O cálculo dos limites de erro *a posteriori* é baseado na teoria desenvolvida em



Litvinchev [11] para limites de erro *a posteriori* para agregação em Programação Convexa. Vamos considerar que o PTG agregado foi obtido através de agregação das origens conforme definido na subseção 3.2.1.

Seja $\bar{x}$ uma solução factível para o problema original obtida através da desagregação da solução ótima $\bar{X}^*$, isto é, $\bar{x} = g\bar{X}^*$.

Usando a solução ótima $(\bar{U}^*, \bar{V}^*)$ do problema dual de PTG dado em (3.32-3.34) defina:

$$\bar{\Delta} = \{c_{ij} - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* d_{ij} + \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^*\} \quad (3.61)$$

e

$$(\bar{x}, \bar{\Delta}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}) - \bar{Z}^*. \quad (3.62)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas em (3.62), tem-se que:

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{\Delta}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_j^* d_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* b_j - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* a_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{U}_i^* x_{ij} - \bar{Z}^* \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - \bar{V}_j^* d_{ij} + \bar{U}_i^*) x_{ij} + \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* b_j - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* a_i - \bar{Z}^* \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - \bar{V}_j^* d_{ij} + \bar{U}_i^*) x_{ij} + \bar{Z}^* - \bar{Z}^* \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - \bar{V}_j^* d_{ij} + \bar{U}_i^*) x_{ij}. \end{aligned}$$

onde

$$-\sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* b_j + \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* a_i = \bar{Z}^*.$$

O lema (3.3.1) abaixo, fornece limites de erro *a posteriori*.

Lema 3.3.1 (Litvinchev [11])

a) Seja $W \in \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e limitado tal que $W \supseteq \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto de todas as soluções factíveis para o problema original. Então:

$$\delta(g, W) = \max_{\bar{x} \in W} (\bar{x}, \bar{\Delta}) \geq Z^* - \bar{Z}^* \geq 0. \quad (3.63)$$

b) Seja $W_1 = \{x \mid \sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i \leq 0, i = 1, \dots, m, x \geq 0\}$ um conjunto fechado e limitado, definido por algumas restrições do problema original. Então:

$$\delta(g, W_1) = \max_{\bar{x} \in W_1} (\bar{x}, \bar{\Delta}) \geq \pi(g, W_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{\bar{x} \in W_1} \{cx - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j)\} - \bar{Z}^* \\
&\geq Z^* - \bar{Z}^* \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

c) Seja $\tilde{W}$ uma localização conhecida que contém a solução ótima x^* do problema original:

$$x^* \in \tilde{W} = \{x \mid q_t(x) = 0, t = 1, \dots, T, x \geq 0\},$$

onde $q_t(x)$ é uma função linear e $\tilde{W}$ é um conjunto fechado e limitado. Então:

$$\begin{aligned}
\delta(g, \tilde{W}) &= \max_{\bar{x} \in \tilde{W}} (\bar{x}, \bar{\Delta}) \\
&\geq \pi(g, \tilde{W}) \\
&= \max_{\bar{x} \in \tilde{W}} \{cx - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i) - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j)\} - \bar{Z}^* \\
&\geq Z^* - \bar{Z}^* \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

d) Sejam as localizações $W_1, \tilde{W}$ como definidas em (b) e (c) respectivamente. Então:

$$\pi(g, W_1) \geq \pi(g, W_1 \cap \tilde{W}) \geq Z^* - \bar{Z}^* \geq 0. \tag{3.66}$$

Demonstração:

Para qualquer $\bar{x} \in \mathcal{P}$ tem-se $\bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j) = 0$ e $\bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i) \leq 0$. Além disso, pela definição de $(\bar{x}, \bar{\Delta})$ dada em (3.62) e a condição que $W \supseteq \mathcal{P}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\max_{\bar{x} \in W} (\bar{x}, \bar{\Delta}) &\geq \max_{\bar{x} \in \mathcal{P}} (\bar{x}, \bar{\Delta}) \geq \max_{\bar{x} \in \mathcal{P}} \{f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i)\} - f(\bar{X}^*) \\
&\geq \max_{\bar{x} \in \mathcal{P}} f(\bar{x}) - f(\bar{X}^*) = f(\bar{x}^*) - f(\bar{X}^*) = Z^* - \bar{Z}^* \geq 0
\end{aligned}$$

isso mostra (3.63).

Da definição da localização W_1 e da definição dada em (3.62), tem-se:

$$\begin{aligned}
\max_{\bar{x} \in W_1} (\bar{x}, \bar{\Delta}) &\geq \max_{\bar{x} \in W_1} \{f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i)\} - f(\bar{X}^*) \\
&\geq \max_{\bar{x} \in W_1} \{f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j)\} - f(\bar{X}^*) \\
&\geq \max_{\bar{x} \in W_1} \min_{U \geq 0} \{f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j)\} - f(\bar{X}^*) \\
&= f(\bar{x}^*) - f(\bar{X}^*) = Z^* - \bar{Z}^* \geq 0,
\end{aligned}$$

do qual obtém-se (3.64). A penúltima equação é obtida pelo teorema do ponto de sela (ver Lasdon [8], Luenberger [15]).

Para provar (3.65), nota-se que por definição da localização $\tilde{W}$, $f(\bar{x}^*) = \max\{f(\bar{x}) | \bar{x} \in (\mathcal{P} \cap \tilde{W})\}$.

Usando a definição dada em (3.62) e o teorema do ponto de sela, tem-se:

$$\begin{aligned} \max_{\bar{x} \in \tilde{W}}(\bar{x}, \bar{\Delta}) &\geq \max_{\bar{x} \in \tilde{W}} \{f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i)\} - f(\bar{X}^*) \\ &= \pi(g, \tilde{W}) \geq \max_{\bar{x} \in \tilde{W}} \min_{\substack{U \geq 0 \\ V \geq 0}} \{f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* (\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i)\} - f(\bar{X}^*) \\ &= f(\bar{x}^*) - f(\bar{X}^*) = Z^* - \bar{Z}^* \geq 0, \end{aligned}$$

A última parte do lema é provado notando que, pela definição da localização $\tilde{W}$ e pelo teorema do ponto de sela,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}^*) &= \max\{f(\bar{x}) | \bar{x} \in (W_1 \cap \tilde{W}), \sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i \leq 0, i = 1, \dots, m\} \\ &= \max_{\bar{x} \in (W_1 \cap \tilde{W})} \min_{U \geq 0} \{f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i)\}, \end{aligned}$$

isto é:

$$\begin{aligned} \pi(g, W_1) &= \max_{\bar{x} \in \tilde{W}} \{f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i)\} - f(\bar{X}^*) \\ &\geq \max_{\bar{x} \in (W_1 \cap \tilde{W})} \{f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i)\} - f(\bar{X}^*) \\ &\geq \max_{\bar{x} \in (W_1 \cap \tilde{W})} \min_{U \geq 0} \{f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* (\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i)\} - f(\bar{X}^*) \\ &= f(\bar{x}^*) - f(\bar{X}^*) = Z^* - \bar{Z}^* \geq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Suponha, seguindo Zipkin [23], que a localização $\tilde{W}$ é dada por:

$$\tilde{W} = \{x_{ij} : \sum_{i \in T_k} d_{ij} x_{ij} \leq p_k, \quad k = 1, \dots, p-1, p, \quad x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\},$$

onde $T_k = \{k\}$, $k = 1, \dots, p-1$ e $T_p = \{p, p+1, \dots, m\}$ é uma partição do conjunto de origens $\mathcal{I}_1$, $d_{ij} \geq 0$ e $p_k > 0$. Então, o cálculo de $\delta(g, \tilde{W})$ em (3.65) se reduz a resolver p problemas da mochila, independentes da forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \sum_{i \in T_k} (-c_{ij} + \bar{V}_j^* d_{ij} - \bar{U}_i^*) x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i \in T_k} d_{ij} x_{ij} \leq p_k, j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, i \in T_k, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Isto é:

$$\delta(g, \tilde{W}) = \sum_{k=1}^p p_k \max_{i \in T_k} \left(\frac{-c_{ij} + \bar{V}_j^* d_{ij} - \bar{U}_i^*}{d_{ij}} \right).$$

Como o problema inicial é linear, esta estimativa é idêntica à que foi obtida pelo método apresentado em Zipkin [23].

A equação (3.64) mostra que a estimativa dada em (3.63) pode ser melhorada reduzindo o conjunto W .

No caso geral, o cálculo dos valores de δ ou π em (3.63-3.66) é tão difícil quanto resolver o problema inicial. Mas existem alguns casos mais simples. Isto é, se o problema inicial tem restrições lineares tipo-mochila, pode-se utilizá-las para definir o conjunto W . Desta forma, o cálculo de $\delta(g, W)$ ou $\pi(g, W)$ se reduz a resolver um problema da mochila, o qual tem uma solução analítica.

Assim, para obter limites de erro *a posteriori* para o problema do transporte generalizado, considera-se as seguintes localizações propostas por Litvinchev [11]:

$$W_1 = \{x_{ij} : \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_{ij} \geq 0\}, \quad (3.67)$$

$$W_2 = \{x_{ij} : \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad x_{ij} \geq 0\}, \quad (3.68)$$

$$W_3 = \{x_{ij} : 0 \leq x_{ij} \leq b_j \frac{1}{d_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\}, \quad (3.69)$$

$$W_4 = \{x_{ij} : 0 \leq x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\}, \quad (3.70)$$

onde as localizações W_1 e W_2 são definidas pelas restrições do problema original (3.10-3.12) e, as localizações W_3 e W_4 são definidas por uma manipulação algébrica das mesmas. O uso dessas quatro localizações permitem que os limitantes sejam obtidos analiticamente. O mesmo não acontece se as localizações são definidas por meio de duas restrições lineares gerais (sem estrutura especial).

A partir das localizações definidas em (3.67-3.70), pode-se obter quatro limites de erro *a posteriori* para o problema do transporte generalizado.

Usando o limite dado em (3.64) junto com a localização W_1 (3.67), pode-se obter o limite $\delta(g, W_1)$ resolvendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
\delta(g, W_1) = \max \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-c_{ij} - \bar{U}_i^* + \bar{V}_j^* d_{ij}) x_{ij} \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m,
\end{aligned} \tag{3.71}$$

que pode ser separado em m problemas independentes. Pelas restrições do problema dual (3.32-3.34), tem-se que $-c_{ij} - \bar{U}_i^* + \bar{V}_j^* d_{ij} \leq 0$, $i = 1, \dots, p-1$. Neste caso, o limite de erro $\delta(g, W_1)$ pode também ser obtido analiticamente da seguinte maneira:

Teorema 3.3.1 (*Evans [6]*)

$$\begin{aligned}
\delta(g, W_1) &= \sum_{i=p}^m \max_j \{-\bar{U}_p^* + d_{ij} \bar{V}_j^* - c_{ij}\} \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \\
&= \sum_{i=p}^m a_i [\max_j (-\bar{U}_p^* + d_{ij} \bar{V}_j^* - c_{ij})^+] \\
&\geq Z^* - \bar{Z}^*.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Demonstração:

Considere o problema dual (3.32-3.34), onde $\bar{U}_i^*$ e $\bar{V}_j^*$ são soluções duais ótimas.

Seja x^* uma solução ótima e Z^* o valor ótimo para a função objetivo do problema original (3.10-3.12), então a relação a seguir vale:

$$\begin{aligned}
Z^* &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* \\
&\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* - \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij}^* - b_j \right) \bar{V}_j^* + \sum_{i=1}^{p-1} \left(a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \right) \bar{U}_i^* + \sum_{i=p}^m \left(a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \right) \bar{U}_i^* \right] \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij}^* - b_j \right) \bar{V}_j^* - \sum_{i=1}^{p-1} \left(a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \right) \bar{U}_i^* - \sum_{i=p}^m \left(a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \right) \bar{U}_i^*,
\end{aligned}$$

pois, pelo teorema das folgas complementares:

$$\left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij}^* - b_j \right) \bar{V}_j^* + \sum_{i=1}^{p-1} \left(a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \right) \bar{U}_i^* + \sum_{i=p}^m \left(a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \right) \bar{U}_i^* \right] \geq 0.$$

Rearranjando os termos e utilizando uma pequena álgebra obtém-se:

$$Z^* \leq \left[- \sum_{i=1}^{p-1} a_i \bar{U}_i^* - \sum_{i=p}^m a_i \bar{U}_i^* + \sum_{j=1}^n b_j \bar{V}_j^* \right] + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - d_{ij} \bar{V}_j^*) x_{ij}^* + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \bar{U}_i^* + \sum_{i=p}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \bar{U}_i^*$$

O termo entre colchetes é $\bar{Z}^*$. Então, tem-se:

$$\begin{aligned} Z^* &\leq \bar{Z}^* + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - d_{ij} \bar{V}_j^*) x_{ij}^* + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \bar{U}_i^* + \sum_{i=p}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \bar{U}_i^* \\ &= \bar{Z}^* + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^n (c_{ij} - d_{ij} \bar{V}_j^* + \bar{U}_i^*) x_{ij}^* + \sum_{i=p}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - d_{ij} \bar{V}_j^* + \bar{U}_i^*) x_{ij}^* \end{aligned}$$

Introduzindo $Z^* - \bar{Z}^*$:

$$Z^* - \bar{Z}^* \leq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^n (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*) x_{ij}^* + \sum_{i=p}^m \sum_{j=1}^n (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*) x_{ij}^*.$$

Ainda usando o teorema das folgas complementares, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^n (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*) x_{ij}^* = 0$$

então:

$$Z^* - \bar{Z}^* \leq \sum_{i=p}^m \sum_{j=1}^n (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*) x_{ij}^*.$$

Considere o máximo dos coeficientes $(-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*)$ para $j = 1, \dots, n$ então:

$$Z^* - \bar{Z}^* \leq \sum_{i=p}^m \sum_{j=1}^n \max_j (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*) x_{ij}^* \quad (3.73)$$

Considere o problema de maximização em (3.73) e seja $\hat{x}$ sua solução ótima. Devido a não negatividade do vetor $\hat{x}$, se o coeficiente $(-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*)$ da variável x_{ij} em (3.73) for negativa, então $\hat{x} = 0$. Dessa forma, (3.73) pode ser simplificado para:

$$Z^* - \bar{Z}^* \leq \sum_{i=p}^m [\max_j (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*)^+] \sum_{j=1}^n x_{ij}^*. \quad (3.74)$$

Como x_{ij}^* é a solução ótima do problema original, então, x_{ij}^* satisfaz a restrição $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$ do problema original (3.10-3.12). Então, tem-se que:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^* \leq a_i$$

substituindo em $\sum_{i=p}^m [\max_j (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*)^+] \sum_{j=1}^n x_{ij}^*$, tem-se:

$$Z^* - \bar{Z}^* \leq \sum_{i=p}^m a_i [\max_j (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*)^+]. \blacksquare \quad (3.75)$$

A expressão (3.75), nos permite calcular uma estimativa para o limite de erro $\delta(g, W_1)$ analiticamente, isto é:

$$\delta(g, W_1) = \sum_{i=p}^m a_i [\max_j (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*)^+] \geq Z^* - \bar{Z}^*.$$

Considerando o limite dado em (3.64) junto com a localização W_2 (3.68), pode-se obter o limite de erro $\delta(g, W_2)$ resolvendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \delta(g, W_2) = \max \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-c_{ij} - \bar{U}_i^* + \bar{V}_j^* d_{ij}) x_{ij} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.76)$$

que pode ser separado em m problemas independentes. Analogamente ao limite de erro $\delta(g, W_1)$, pelas restrições do problema dual (3.32-3.34) tem-se que $-c_{ij} - \bar{U}_i^* + \bar{V}_j^* d_{ij} \leq 0$, $i = 1, \dots, p-1$. Também pode-se obter uma estimativa analítica para o limite de erro $\delta(g, W_2)$:

$$\delta(g, W_2) = \sum_{j=1}^n b_j \max_{i \in T_k} \left\{ \frac{(-c_{ij} - \bar{U}_i^* + \bar{V}_j^* d_{ij})}{d_{ij}} \right\} \geq Z^* - \bar{Z}^* \geq 0. \quad (3.77)$$

Considerando ainda o limite dado em (3.64) e a intersecção das localizações W_1 (3.67) e W_3 (3.69), pode-se calcular o limite de erro $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ resolvendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \pi(g, W_1 \cap W_3) = \max \quad & - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* \left(\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j \right) - \bar{Z}^* \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq x_{ij} \leq b_j \frac{1}{d_{ij}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Lembrando que as restrições do problema original utilizadas para construir a localização W_1 não são incluídas na função objetivo do problema (3.78).

A solução analítica pode ser escrita da seguinte maneira:

Considere a reordenação dos coeficientes de x_{ij} de acordo com $(d_{i1} \bar{V}_1 - c_{i1})^+ \geq \dots \geq (d_{in} \bar{V}_n - c_{in})^+$, e considere o índice l_i , tal que:

$$\sum_{j=1}^{l_i} b_j \frac{1}{d_{ij}} > a_i, \quad \text{mas} \quad \sum_{j=1}^{l_i-1} b_j \frac{1}{d_{ij}} \leq a_i.$$

Então a solução ótima para o problema (3.78) é:

$$x_{ij} = b_j \frac{1}{d_{ij}}, \quad j = 1, \dots, l_i - 1,$$

$$x_{il_i} = a_i - \sum_{j=1}^{l_i-1} b_j \frac{1}{d_{ij}},$$

$$x_{ij} = 0, \quad j = l_i + 1, \dots, n,$$

e o valor de $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ é dado por:

$$\pi(g, W_1 \cap W_3) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^{l_i-1} \frac{b_j (d_{ij} \bar{V}_j^* - c_{ij})^+}{d_{ij}} + (a_i - \sum_{j=1}^{l_i-1} b_j \frac{1}{d_{ij}}) (d_{il_i} \bar{V}_{l_i}^* - c_{il_i})^+ \right] - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* b_j - \bar{Z}^*.$$

Pode-se notar que o valor de $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ é independente da solução dual $\bar{U}_i^*$.

Finalmente, considerando ainda o limite dado em (3.64) e a intersecção das localizações W_2 (3.68) e W_4 (3.70), pode-se calcular o limite de erro $\pi(g, W_2 \cap W_4)$, resolvendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \pi(g, W_2 \cap W_4) = \max \quad & - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i \right) - \bar{Z}^* \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^m x_{ij} d_{ij} = b_j, \quad i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq x_{ij} \leq a_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Lembrando que as restrições do problema original utilizadas para construir a localização W_2 não são incluídas na função objetivo do problema (3.79).

A solução analítica pode ser escrita da seguinte maneira:

Considere a reordenação dos coeficientes de x_{ij} de acordo com $(c_{1j} + \bar{U}_1) \frac{1}{d_{1j}} \leq \dots \leq (c_{mj} + \bar{U}_m) \frac{1}{d_{mj}}$ e considere o índice l_j , tal que:

$$\sum_{i=1}^{l_j} d_{ij} a_i > b_j, \quad \text{mas} \quad \sum_{i=1}^{l_j-1} d_{ij} a_i \leq b_j.$$

A solução ótima para o problema (3.79) é dado por:

$$x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, l_j - 1,$$

$$x_{l_j j} = (b_j - \sum_{i=1}^{l_j-1} d_{ij} a_i) \frac{1}{d_{l_j j}},$$

$$x_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

e o valor de $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ é dado por:

$$\pi(g, W_2 \cap W_4) = - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^{l_j-1} a_i (c_{ij} + \bar{U}_i^*) + (b_j - \sum_{i=1}^{l_j-1} d_{ij} a_i) (c_{l_j j} + \bar{U}_{l_j}^*) \frac{1}{d_{l_j j}} \right] + \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* a_i - \bar{Z}^*.$$

Pode-se notar que o valor de $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ é independente da solução dual $\bar{V}_j^*$.

Na construção dos limites $\pi(g, W_i \cap W_j)$ pode-se notar que as restrições do problema original utilizadas para construir as localizações não são incluídas nas funções objetivas dos problemas para calcular $\pi(g, W_i \cap W_j)$ enquanto que para os limites $\delta(g, W_i)$ todas as restrições do problema original são incluídas na construção dos problemas para calcular os limites $\delta(g, W_i)$.

Nota-se que localizações menores produzem uma estimativa de erro melhor. Mas, as vezes não se pode comparar as localizações. Por exemplo, quando as localizações tem intersecção não vazia mas uma não contém a outra. Neste caso, tem-se que fazer uma comparação computacional dos limitantes, isto é, tem-se que calcular os limitantes associados com as diferentes localizações e depois definir qual localização fornece o melhor (menor) limite.

O cálculo dos limites de erro *a posteriori* quando o PTG agregado for obtido através da agregação dos destinos, conforme definido na subseção 3.2.2, é análogo ao cálculo dos limites de erro *a posteriori* quando o PTG agregado for obtido através da agregação das origens.

Considerando as localizações:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x_{ij} : \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_{ij} \geq 0\}, \\ W_2 &= \{x_{ij} : \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad x_{ij} \geq 0\}, \\ W_3 &= \{x_{ij} : 0 \leq x_{ij} \leq b_j \frac{1}{d_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\}, \\ W_4 &= \{x_{ij} : 0 \leq x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

o cálculo dos limites de erro *a posteriori* quando o PTG agregado for obtido através de agregação dos destinos, é resumido a seguir.

$$\begin{aligned} \delta(g, W_1) &= \max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-c_{ij} - \bar{U}_i^* + \bar{V}_j^* d_{ij}) x_{ij} \\ \text{sujeito a} \quad &\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$



ou analiticamente,

$$\delta(g, W_1) = \sum_{i=1}^m a_i \left[\max_{j \in \{p, \dots, n\}} (-c_{ij} + d_{ij} \bar{V}_j^* - \bar{U}_i^*)^+ \right] \geq Z^* - \bar{Z}^*.$$

$$\begin{aligned} \delta(g, W_2) = \max \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-c_{ij} - \bar{U}_i^* + \bar{V}_j^* d_{ij}) x_{ij} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

ou analiticamente,

$$\delta(g, W_2) = \sum_{j=p}^n b_j \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{(-c_{ij} - \bar{U}_i^* + \bar{V}_j^* d_{ij})}{d_{ij}} \right\} \geq Z^* - \bar{Z}^* \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \pi(g, W_1 \cap W_3) = \max \quad & - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* \left(\sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} - b_j \right) - \bar{Z}^* \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq x_{ij} \leq b_j \frac{1}{d_{ij}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

ou analiticamente, considerando a reordenação dos coeficientes de x_{ij} de acordo com $(d_{i1} \bar{V}_1 - c_{i1})^+ \geq \dots \geq (d_{in} \bar{V}_n - c_{in})^+$, e considerando o índice l_i , tal que:

$$\sum_{j=1}^{l_i} b_j \frac{1}{d_{ij}} > a_i, \quad \text{mas} \quad \sum_{j=1}^{l_i-1} b_j \frac{1}{d_{ij}} \leq a_i.$$

então, a solução ótima é dada por:

$$x_{ij} = b_j \frac{1}{d_{ij}}, \quad j = 1, \dots, l_i - 1,$$

$$x_{il_i} = a_i - \sum_{j=1}^{l_i-1} b_j \frac{1}{d_{ij}},$$

$$x_{ij} = 0, \quad j = l_i + 1, \dots, n,$$

e o valor de $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ é dado por:

$$\pi(g, W_1 \cap W_3) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^{l_i-1} \frac{b_j(d_{ij}\bar{V}_j^* - c_{ij})^+}{d_{ij}} + (a_i - \sum_{j=1}^{l_i-1} b_j \frac{1}{d_{ij}})(d_{il_i}\bar{V}_{l_i}^* - c_{il_i})^+ \right] - \sum_{j=1}^n \bar{V}_j^* b_j - \bar{Z}^*.$$

$$\begin{aligned} \pi(g, W_2 \cap W_4) = \max & - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i \right) - \bar{Z}^* \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^m x_{ij} d_{ij} = b_j, \quad i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq x_{ij} \leq a_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

ou analiticamente, considere a reordenação dos coeficientes de x_{ij} de acordo com $(c_{1j} + \bar{U}_1) \frac{1}{d_{1j}} \leq \dots \leq (c_{mj} + \bar{U}_m) \frac{1}{d_{mj}}$ e considerando o índice l_j , tal que:

$$\sum_{i=1}^{l_j} d_{ij} a_i > b_j, \text{ mas } \sum_{i=1}^{l_j-1} d_{ij} a_i \leq b_j.$$

então, a solução ótima é dada por:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, \dots, l_j - 1, \\ x_{l_j j} &= (b_j - \sum_{i=1}^{l_j-1} d_{ij} a_i) \frac{1}{d_{l_j j}}, \\ x_{ij} &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

e o valor de $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ é dado por:

$$\pi(g, W_2 \cap W_4) = - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^{l_j-1} a_i (c_{ij} + \bar{U}_i^*) + (b_j - \sum_{i=1}^{l_j-1} d_{ij} a_i) (c_{l_j j} + \bar{U}_{l_j}^*) \frac{1}{d_{l_j j}} \right] + \sum_{i=1}^m \bar{U}_i^* a_i - \bar{Z}^*.$$

EXEMPLO

Passa-se, agora, a exemplificar os conceitos desenvolvidos anteriormente sobre o cálculo dos limites, tanto para agregação de origens quanto para agregação de destinos, considerando o problema dado pela figura (3.2). Calcula-se os limites de erro *a posteriori* para os exemplos dados nas subseções 3.2.1 e 3.2.2 respectivamente. Para os dois métodos de agregação os

cálculos dos limites de erro foram feito considerando as seguintes localizações:

$$W_1 = \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \leq 20 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \leq 46 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} \leq 28 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} \leq 10 \\ x_{ij} \geq 0 \forall i, j \end{array} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{array}{l} 3x_{11} + 5x_{21} + 2x_{31} + x_{41} + x_{51} = 30 \\ 4x_{12} + 3x_{22} + x_{32} + 5x_{42} + x_{52} = 45 \\ 5x_{13} + 7x_{23} + 4x_{33} + 3x_{43} + 3x_{53} = 20 \\ 2x_{14} + 2x_{24} + 6x_{34} + x_{44} + x_{54} = 10 \\ 5x_{15} + 5x_{25} + 2x_{35} + 3x_{45} + 2x_{55} = 25 \\ x_{16} + 2x_{26} + x_{36} + 3x_{46} + 2x_{56} = 24 \\ x_{ij} \geq 0 \forall i, j \end{array} \right\}$$

$$W_3 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{11} \leq 10 \\ 0 \leq x_{12} \leq 11.25 \\ 0 \leq x_{13} \leq 4 \\ 0 \leq x_{14} \leq 5 \\ 0 \leq x_{15} \leq 5 \\ 0 \leq x_{16} \leq 24 \\ 0 \leq x_{21} \leq 6 \\ 0 \leq x_{22} \leq 15 \\ 0 \leq x_{23} \leq 2.85 \\ 0 \leq x_{24} \leq 5 \\ 0 \leq x_{25} \leq 5 \\ 0 \leq x_{26} \leq 12 \\ 0 \leq x_{31} \leq 15 \\ 0 \leq x_{32} \leq 45 \\ 0 \leq x_{33} \leq 5 \\ 0 \leq x_{34} \leq 1.67 \\ 0 \leq x_{35} \leq 12.5 \\ 0 \leq x_{36} \leq 24 \\ 0 \leq x_{41} \leq 30 \\ 0 \leq x_{42} \leq 9 \\ 0 \leq x_{43} \leq 6.67 \\ 0 \leq x_{44} \leq 10 \\ 0 \leq x_{45} \leq 8.33 \\ 0 \leq x_{46} \leq 8 \\ 0 \leq x_{51} \leq 30 \\ 0 \leq x_{52} \leq 45 \\ 0 \leq x_{53} \leq 6.67 \\ 0 \leq x_{54} \leq 2 \\ 0 \leq x_{55} \leq 12.5 \\ 0 \leq x_{56} \leq 12 \end{array} \right\}, W_4 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{11} \leq 50 \\ 0 \leq x_{12} \leq 50 \\ 0 \leq x_{13} \leq 50 \\ 0 \leq x_{14} \leq 50 \\ 0 \leq x_{15} \leq 50 \\ 0 \leq x_{16} \leq 50 \\ 0 \leq x_{21} \leq 20 \\ 0 \leq x_{22} \leq 20 \\ 0 \leq x_{23} \leq 20 \\ 0 \leq x_{24} \leq 20 \\ 0 \leq x_{25} \leq 20 \\ 0 \leq x_{26} \leq 20 \\ 0 \leq x_{31} \leq 46 \\ 0 \leq x_{32} \leq 46 \\ 0 \leq x_{33} \leq 46 \\ 0 \leq x_{34} \leq 46 \\ 0 \leq x_{35} \leq 46 \\ 0 \leq x_{36} \leq 46 \\ 0 \leq x_{41} \leq 28 \\ 0 \leq x_{42} \leq 28 \\ 0 \leq x_{43} \leq 28 \\ 0 \leq x_{44} \leq 28 \\ 0 \leq x_{45} \leq 28 \\ 0 \leq x_{46} \leq 28 \\ 0 \leq x_{51} \leq 10 \\ 0 \leq x_{52} \leq 10 \\ 0 \leq x_{53} \leq 10 \\ 0 \leq x_{54} \leq 10 \\ 0 \leq x_{55} \leq 10 \\ 0 \leq x_{56} \leq 10 \end{array} \right\}$$

O conjunto W_1 é composto pelas restrições de origens, o conjunto W_2 é composto pelas restrições de destinos, o conjunto W_3 é composto por limites para as variáveis deduzidas das restrições de destinos e o conjunto W_4 é composto por limites para as variáveis deduzidas das restrições de origens.

Limites para agregação de origens.

Para obter o limite $\delta(g, W_1)$, resolve-se o seguinte problema linear:

$$\max_{x \in W_1} \left\{ \begin{array}{l} 0.2x_{11} + 23.72x_{13} + 3.5x_{16} + x_{21} + 17.21x_{23} + \\ 50x_{24} + 29x_{25} + 24x_{26} + 61.8x_{31} + 33x_{32} - \\ 0.02x_{33} + 54x_{34} + 3.5x_{35} + 42.4x_{41} + 54x_{42} - \\ 0.76x_{43} + 23.5x_{44} - 4.4x_{45} + 8x_{46} - 0.6x_{51} + 5x_{52} + \\ 2.23x_{53} + 6.5x_{54} + 50.4x_{55} - 2x_{56} \end{array} \right\}$$

que tem solução $\delta(g, W_1) = -134.1263$, $x_{33}^* = 46$, $x_{45}^* = 28$, $x_{56}^* = 10$ e os demais $x_{ij}^* = 0$.

Para obter o limite $\delta(g, W_2)$, resolve-se o seguinte problema linear:

$$\max_{x \in W_2} \left\{ \begin{array}{l} 0.2x_{11} + 23.72x_{13} + 3.5x_{16} + x_{21} + 17.21x_{23} + \\ 50x_{24} + 29x_{25} + 24x_{26} + 61.8x_{31} + 33x_{32} - \\ 0.02x_{33} + 54x_{34} + 3.5x_{35} + 42.4x_{41} + 54x_{42} - \\ 0.76x_{43} + 23.5x_{44} - 4.4x_{45} + 8x_{46} - 0.6x_{51} + 5x_{52} + \\ 2.23x_{53} + 6.5x_{54} + 50.4x_{55} - 2x_{56} \end{array} \right\}$$

que tem solução $\delta(g, W_2) = -71.76735$, $x_{12}^* = 11.25$, $x_{14}^* = 5$, $x_{43}^* = 6.66$, $x_{45}^* = 8.33$, $x_{51}^* = 30$, $x_{56}^* = 12$ e os demais $x_{ij}^* = 0$.

Para obter o limite $\pi(g, W_1 \cap W_3)$, resolve-se o seguinte problema linear:

$$\max_{x \in W_1 \cap W_3} \left\{ \begin{array}{l} -3.99x_{11} - 4x_{12} + 19.72x_{13} - 4x_{14} - 4x_{15} - 4x_{16} + \\ 0.67x_{21} + 17.21x_{23} + 50x_{24} + 29x_{25} + 24x_{26} + \\ 61.68x_{31} + 33x_{32} - 0.02x_{33} + 54x_{34} + 3.4x_{35} + \\ 42.33x_{41} + 54x_{42} - 0.76x_{43} + 23.5x_{44} - 4.4x_{45} + 8x_{46} - \\ 0.67x_{51} + 5x_{52} + 2.23x_{53} + 6.5x_{54} + 50.4x_{55} - 2x_{56} + 205.3998 \end{array} \right\}$$

que tem solução $\pi(g, W_1 \cap W_3) = -261.8680 + 205.3998 = -56.4682$, $x_{11}^* = 4.75$, $x_{12}^* = 11.25$, $x_{14}^* = 5$, $x_{15}^* = 5$, $x_{16}^* = 24$, $x_{33}^* = 5$, $x_{43}^* = 6.66$, $x_{45}^* = 8.33$, $x_{56}^* = 10$ e os demais $x_{ij}^* = 0$.

Para obter o limite $\pi(g, W_2 \cap W_4)$, resolve-se o seguinte problema linear:

$$\max_{x \in W_2 \cap W_4} \left\{ -5x_{11} - 8x_{12} - 30x_{13} - 7x_{14} - 9x_{15} - 4x_{16} - 365.1007 \right\}$$

que tem solução $\pi(g, W_2 \cap W_4) = 292.6667 - 365.1007 = -72.434$, $x_{11}^* = 6.66$, $x_{12}^* = 11.25$, $x_{14}^* = 5$, $x_{16}^* = 24$, $x_{43}^* = 6.66$, $x_{45}^* = 8.33$, $x_{51}^* = 10$ e os demais $x_{ij}^* = 0$.

Em resumo, obtém-se os seguintes limites: $\frac{\delta(g, w_1)}{Z^* - \bar{Z}} = 3.1733$, $\frac{\delta(g, w_2)}{Z^* - \bar{Z}} = 1.6979$, $\frac{\pi(g, W_1 \cap W_3)}{Z^* - \bar{Z}} = 1.3359$, $\frac{\pi(g, W_2 \cap W_4)}{Z^* - \bar{Z}} = 1.7137$, onde $Z^* - \bar{Z} = -42.26737$, então, tem-se que o melhor limitante é $\pi(g, W_1 \cap W_3)$.

Limites para agregação de destinos.

Para obter o limite $\delta(g, W_1)$, resolve-se o seguinte problema linear:

$$\max_{x \in W_1} \left\{ \begin{array}{l} 103.43x_{11} - 9.70x_{12} - 31.70x_{13} - 8.705x_{14} - 10.705x_{15} - \\ 6.705x_{16} + 174.55x_{21} - 8.42x_{31} + 29.42x_{41} + 35.70x_{51} \end{array} \right\}$$

que tem solução $\delta(g, W_1) = -9843.044$, $x_{11}^* = 50$, $x_{21}^* = 20$, $x_{41}^* = 21$, $x_{51}^* = 10$ e os demais $x_{ij}^* = 0$.

Para obter o limite $\delta(g, W_2)$, resolve-se o seguinte problema linear:

$$\max_{x \in W_2} \left\{ \begin{array}{l} 103.43x_{11} - 9.70x_{12} - 31.70x_{13} - 8.705x_{14} - 10.705x_{15} - \\ 6.705x_{16} + 174.55x_{21} - 8.42x_{31} + 29.42x_{41} + 35.70x_{51} \end{array} \right\}$$

que tem solução $\delta(g, W_2) = -813.4359$, $x_{14}^* = 5$, $x_{22}^* = 15$, $x_{43}^* = 6.66$, $x_{45}^* = 8.33$, $x_{51}^* = 30$, $x_{56}^* = 12$ e os demais $x_{ij}^* = 0$.

Para obter o limite $\pi(g, W_1 \cap W_3)$, resolve-se o seguinte problema linear:

$$\max_{x \in W_1 \cap W_3} \left\{ 109.13x_{11} + 174.55x_{21} + 8.42x_{31} - 7.29x_{14} + 35.71x_{51} + 741.1687 \right\}$$

que tem solução $\pi(g, W_1 \cap W_3) = -2264.854 + 741.1687 = -1523.6863$, $x_{11}^* = 10$, $x_{21}^* = 6$, $x_{31}^* = 15$ e os demais $x_{ij}^* = 0$.

Para obter o limite $\pi(g, W_2 \cap W_4)$, resolve-se o seguinte problema linear:

$$\max_{x \in W_2 \cap W_4} \left\{ -6.70x_{11} - 9.70x_{12} - 31.70x_{13} - 8.70x_{14} - 10.70x_{15} - 5.70x_{16} - 645.274 \right\}$$

que tem solução $\pi(g, W_2 \cap W_4) = 0 - 645.274 = -645.274$, todos os $x_{ij}^* = 0$.

Em resumo, obtém-se os seguintes limites: $\frac{\delta(g, w_1)}{Z^* - \bar{Z}} = 41.4823$, $\frac{\delta(g, w_2)}{Z^* - \bar{Z}} = 3.4281$, $\frac{\pi(g, W_1 \cap W_3)}{Z^* - \bar{Z}} = 6.4214$, $\frac{\pi(g, W_2 \cap W_4)}{Z^* - \bar{Z}} = 2.7194$, onde $Z^* - \bar{Z} = -237.28297$, então, tem-se que o melhor limitante



é $\pi(g, W_2 \cap W_4)$.

No proximo capítulo, mostra-se os resultados de um pequeno experimento numérico onde calcula-se o limite de erro *a posteriori* para problemas de transporte generalizado.

Capítulo 4

Experimentos Numéricos

4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados numéricos obtidos com o uso do software Maple. Os resultados são apresentados em termos de gráficos e tabelas. Os gráficos são gerados com o uso do software Maple e as tabelas são geradas com o uso do software Excel.

4.2 O Problema de Transporte

Consideramos o problema de transporte em um espaço euclidiano. O problema é definido por um conjunto de pontos no espaço e um conjunto de pesos associados a cada ponto.

Capítulo 4

Experimentos Numéricos

4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentam-se os resultados de um pequeno estudo numérico do limite de erro *a posteriori* devido a agregação aplicada ao Problema do Transporte Generalizado. O objetivo deste estudo é verificar a eficácia da abordagem proposta por Litvinchev (seção 3.3) quando comparada com a abordagem de Zipkin (seção 2.4).

4.2 Problemas Testados

Nesse experimento, calcula-se o limite de erro *a posteriori* para o problema do transporte generalizado:

$$\begin{aligned} & -\max \quad Z = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ (P) \quad & \text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m d_{ij}x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde c_{ij} , a_i , b_j e $d_{ij} > 0$, $d_{ij} < b_j$ e $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Para isso, gerou-se 23 problemas do tipo (4.1) com $m = 3, \dots, 12$, $n = 4, \dots, 13$ e com

valores de d_{ij} , a_i , b_j e c_{ij} escolhidos casualmente, para resolver os PTG usou-se o software CPLEX.

Em todos esses problemas aplicou-se dois métodos de agregação: agregação de origens e agregação de destinos. O cálculo dos limites foi feito considerando as seguintes localizações:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x_{ij} : \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_{ij} \geq 0\}, \\ W_2 &= \{x_{ij} : \sum_{i=1}^m d_{ij}x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad x_{ij} \geq 0\}, \\ W_3 &= \{x_{ij} : 0 \leq x_{ij} \leq b_j \frac{1}{d_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\}, \\ W_4 &= \{x_{ij} : 0 \leq x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Os limites de erros *a posteriori* $\delta(g, W_1)$, $\delta(g, W_2)$, $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\pi(g, W_2 \cap W_4)$, foram obtidos através da resolução de problemas lineares ou analiticamente como descrito no capítulo 3, seção 3.3.

É importante ressaltar que os limites de erro *a posteriori* $\delta(g, W_1)$, $\delta(g, W_2)$ são baseados na abordagem de Zipkin (localizações separadas) e os limites de erro *a posteriori* $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ são baseados na abordagem de Litvinchev (intersecção de localizações).

Ao aplicar agregação às origens, as variáveis foram reorganizadas em $k = p \times n$ clusters, onde $p = 2, 3, 4, 5$ é o número de origens no problema agregado.

Para os primeiros $(p - 1) \times n$ clusters considerou-se o vetor peso $g \geq 0$ definido por:

$$g = 1, \quad i = 1, \dots, p - 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

e para os demais n clusters considerou-se o vetor peso $g^j \geq 0$ definido por:

$$g_{ij} = a_i \frac{1}{O}, \quad \text{onde } O = \sum_{i=p}^m a_i, \quad i = p, p + 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

e que satisfaz a condição :

$$\sum_{i=p}^m g_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad g_{ij} \geq 0.$$

Ao aplicar agregação aos destinos as variáveis foram reorganizadas em $k = m$ clusters, considerando a proposta de Litvinchev discutida na subseção 3.2.2.

Para os m clusters considerou-se o vetor peso $g^j \geq 0$, definido por:

$$g_{ij} = b_j \frac{1}{d_{ij}R}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{onde } R = \sum_{j=1}^n b_j.$$



A tabela (4.1) abaixo, apresenta as dimensões (m = número de origens e n = número de destinos) e as soluções dos problemas originais utilizados neste experimento.

Problema	Dimensão ($m \times n$)	Solução linear (Z^*)
1	3×4	-94.19608
2	3×4	-1201.83333
3	3×4	-142.4
4	3×4	-949.83333
5	4×5	-143.66667
6	5×6	-122.83333
7	6×7	-160.5714
8	7×8	-156.9167
9	8×9	-356
10	9×10	-194.6667
11	10×11	-78.3590
12	10×11	-90.9667
13	10×11	-74.3238
14	10×11	-70.7523
15	10×11	-86.3
16	10×11	-92.2166
17	10×11	-79.4667
18	10×11	-76.4160
19	10×11	-88
20	10×11	-108.4667
21	10×11	-99.1333
22	11×12	-124.0976
23	12×13	-159.7678

Tabela 4.1: Soluções dos problemas originais



4.3 Resultados

A seguir apresenta-se os limites de erro *a posteriori* calculados devido a agregação de origens e destinos para os problemas descritos na tabela (4.1). Para facilitar a comparação dos limites, apresenta-se limites de erro estimado divididos pela diferença $Z^* - \bar{Z}^*$ (limite de erro atual) e o valor obtido é sempre maior ou igual a 1. Além disso, os menores valores obtidos são associados aos melhores limitantes.

Nas tabelas de (4.2) - (4.4) abaixo, apresentam-se os limites de erro obtidos para os problemas originais onde as origens foram agregadas.

Na tabela (4.2) abaixo, apresenta-se o cálculo dos limites para 10 problemas com dimensão, variando de 12 a 156 variáveis. Os respectivos problemas agregados tem dimensão variando de 8 a 33 variáveis. Está sublinhado na tabela o melhor limitante para cada problema. Em todos os casos, com exceção do problema 6, o melhor limite é obtido usando como localização a intersecção dos conjuntos W_2 e W_4 . O conjunto W_2 é composto pelas restrições de destino e o conjunto W_4 é composto por limites para as variáveis deduzidas das restrições de origem. Comparando os limites $\delta(g, W_1)$ com $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\delta(g, W_2)$ com $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ é possível notar, que incluir restrições para as variáveis nas localizações, isto é, fazer as interseções $W_1 \cap W_3$ e $W_2 \cap W_4$, reduz a estimativa de erro. Pode-se notar ainda, que o limitante $\delta(g, W_2)$, com exceção do problema 11, é o segundo melhor limitante. Para o problema 5, o limite de erro dado por $\delta(g, W_2)$, $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ é igual a diferença $Z^* - \bar{Z}^*$.

Problema	$m \times n$	Solução agregada $\bar{Z}^*$	$\delta(g, W_1)$	$\delta(g, W_2)$	$\pi(g, W_1 \cap W_3)$	$\pi(g, W_2 \cap W_4)$	K	p
			$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$		
1	(3 × 4)	-111.5725	16.4015	<u>1.0934</u>	<u>1.0934</u>	<u>1.0934</u>	8	2
5	(4 × 5)	-167	15.00002	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	15	3
6	(5 × 6)	-165.1007	3.1733	1.6979	<u>1.3359</u>	1.7137	18	3
7	(6 × 7)	-344.5049	5.4476	1.5171	2.0847	<u>1.4536</u>	21	3
8	(7 × 8)	-361.4979	2.9152	1.1146	1.7882	<u>1.0949</u>	24	3
9	(8 × 9)	-656.6851	5.8758	1.0782	1.8406	<u>1.0166</u>	27	3
10	(9 × 10)	-681.4183	4.5461	1.2315	2.4532	<u>1.2087</u>	30	3
11	(10 × 11)	-390.2606	1067.7852	1518.2212	5.2452	<u>3.0205</u>	33	3
22	(11 × 12)	-1204.8752	5.3667	1.1549	3.1545	<u>1.1115</u>	24	2
23	(12 × 13)	-1109.8136	5.7412	2.1933	3.8861	<u>1.0664</u>	26	2

Tabela 4.2: Limite de erro *a posteriori* / agregação de origem



Na tabela (4.3) abaixo, apresenta-se os limites para 4 problemas com 3 origens e 4 destinos. Os problemas agregados foram obtidos agregando-se 2 origens, reduzindo assim, a dimensão dos problemas de 12 variáveis e 7 restrições para 8 variáveis e 6 restrições. Está sublinhado na tabela o melhor limitante para cada problema. Em todos os casos, o melhor resultado é obtido com o limite $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ seguido por $\delta(g, W_2)$, $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\delta(g, W_1)$.

Problema	Solução	$\delta(g, W_1)$	$\delta(g, W_2)$	$\pi(g, W_1 \cap W_3)$	$\pi(g, W_2 \cap W_4)$	K=8	p=2
$(m \times n) = (3 \times 4)$	agregada $\bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$		
1	-111.5725	16.4015	<u>1.0934</u>	<u>1.0934</u>	<u>1.0934</u>		
2	-1224.114	36.2011	<u>8.2606</u>	20.6495	<u>8.2606</u>		
3	-172.8235	9.5417	<u>2.1635</u>	<u>2.1635</u>	<u>2.1635</u>		
4	-1085.852	8.0857	<u>2.0062</u>	5.3833	<u>2.0062</u>		

Tabela 4.3: Limite de erro *a posteriori* / agregação de origem

Na tabela (4.4) abaixo, apresenta-se o limite de erro para 11 problemas com 10 origens e 11 destinos. Os problemas agregados foram obtidos considerando 3, 4 e 5 origens, reduzindo assim, a dimensão de 110 variáveis e 21 restrições para 33, 44 e 55 variáveis e 14, 15 e 16 restrições respectivamente. Está sublinhado na tabela o melhor limitante para cada problema. Em todos os casos, com exceção do problema 15, o melhor limite é obtido usando como localização, a intersecção dos conjuntos W_2 e W_4 . Comparando os limites $\delta(g, W_1)$ com $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\delta(g, W_2)$ com $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ é possível notar que incluir restrições para as variáveis nas localizações, isto é, fazer as interseções $W_1 \cap W_3$ e $W_2 \cap W_4$, reduz a estimativa de erro. O limitante $\delta(g, W_2)$ com exceção dos problemas 11 e 15, é o segundo melhor limitante. Pode-se dizer ainda, que o problema 19 apresenta o limite de erro $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ menor que 1 devido erro de arredondamento.



Problema ($m \times n$) = (10×11)	Solução agregada $\bar{Z}^*$	$\frac{\delta(g, W_1)}{Z^* - \bar{Z}^*}$	$\frac{\delta(g, W_2)}{Z^* - \bar{Z}^*}$	$\frac{\pi(g, W_1 \cap W_3)}{Z^* - \bar{Z}^*}$	$\frac{\pi(g, W_2 \cap W_4)}{Z^* - \bar{Z}^*}$	K	p
11	-390.2606	1067.7852	1518.2212	5.2452	<u>3.0205</u>	33	3
12	-385.7743	7.2235	1.3883	3.0134	<u>1.3250</u>	33	3
13	-294.5352	5.9547	1.4212	2.8694	<u>1.3133</u>	33	3
14	-271.3049	7.6141	1.6127	3.1383	<u>1.5742</u>	33	3
15	-278.5530	6.3572	1.5144	<u>1.2726</u>	1.5013	33	3
16	-434.3320	7.0919	<u>1.2166</u>	3.3467	<u>1.2166</u>	33	3
17	-242.6884	8.9394	3.4877	4.0172	<u>1.5118</u>	44	4
18	-675.8293	7.1137	2.1158	3.9727	<u>1.8556</u>	44	4
19	-176.6686	6.2747	1.2653	1.6927	<u>0.9526</u>	55	5
20	-198.6019	11.7085	3.9008	5.3168	<u>3.5286</u>	55	5
21	-168.5310	6.1938	2.1729	2.3478	<u>2.0671</u>	55	5

Tabela 4.4: Limite de erro *a posteriori* /agregação de origem

Pode-se constatar, que ao agregar as origens no problema do transporte generalizado, com exceção dos problemas 6, o melhor limitante é obtido usando como localização a intersecção dos conjuntos W_2 e W_4 , e que o limitante $\delta(g, W_2)$ é o segundo melhor limitante com exceção dos problemas 11, 15 e 21.

Nas tabelas (4.5) - (4.7) abaixo, apresentam-se os limites de erro obtidos para os problemas originais, onde os destinos foram agregados.

Na tabela (4.5) abaixo, apresenta-se o cálculo dos limites de erro para 10 problemas com dimensão variando de 12 a 156 variáveis. Os respectivos problemas agregados, tem dimensão variando de 3 a 12 variáveis. Está sublinhado na tabela o melhor limitante para cada problema. Em todos os casos, o melhor limitante é obtido usando como localização a intersecção dos conjuntos W_2 e W_4 . O segundo melhor limitante é $\delta(g, W_2)$ seguido por $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\delta(g, W_1)$. Pode-se notar ainda, que para o problema 5, o limite de erro dado por $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ é igual a diferença $Z^* - \bar{Z}^*$.



Problema	$m \times n$	Solução	$\delta(g, W_1)$	$\delta(g, W_2)$	$\pi(g, W_1 \cap W_3)$	$\pi(g, W_2 \cap W_4)$	K
		agregada $\bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	
1	3×4	-147.50671	57.8738	2.5493	7.69002	<u>1.0288</u>	3
5	4×5	-184.0104	73.9155	4.7851	14.9244	<u>1</u>	4
6	5×6	-360.1163	41.4823	3.4281	6.4214	<u>2.7194</u>	5
7	6×7	-923.6648	7.2884	1.5715	6.0787	<u>1.3903</u>	6
8	7×8	-555.4028	24.5249	1.0259	7.7693	<u>1.01335</u>	7
9	8×9	-1058.729	44.0331	1.1570	10.6231	<u>1.0193</u>	8
10	9×10	-1046.3778	61.1778	2.34703	13.9882	<u>1.4684</u>	9
11	10×11	-244.0444	72.6463	3.7313	26.5827	<u>2.6648</u>	10
22	11×12	-1039.8440	24.6181	1.4330	14.4027	<u>1.2302</u>	11
23	12×13	-1282.4320	43.8542	1.7337	20.7163	<u>1.4094</u>	12

Tabela 4.5: Limite de erro *a posteriori* / agregação de destino

Na tabela (4.6) abaixo, apresenta-se o limite de erro para 4 problemas com 3 origens e 4 destinos. Os problemas agregados foram obtidos agregando os 4 destinos, reduzindo assim, a dimensão de 12 variáveis e 7 restrições para 3 variáveis e 4 restrições. Está sublinhado na tabela o melhor limitante para cada problema. Em todos os casos, o melhor limitante é obtido usando como localização a intersecção dos conjuntos W_2 e W_4 . O segundo melhor limitante é $\delta(g, W_2)$ seguido por $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\delta(g, W_1)$.

Problema	Solução	$\delta(g, W_1)$	$\delta(g, W_2)$	$\pi(g, W_1 \cap W_3)$	$\pi(g, W_2 \cap W_4)$	K=3
$(m \times n) = (3 \times 4)$	agregada $\bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	$Z^* - \bar{Z}^*$	
1	-147.5071	57.8738	2.5493	7.69002	<u>1.0288</u>	
2	-1260.974	178.8381	13.6108	62.2482	<u>2.2075</u>	
3	-357.1250	18.5869	1.1882	4.2688	<u>1.1749</u>	
4	-1611.087	37.5118	3.5851	10.1339	<u>1.6643</u>	

Tabela 4.6: Limite de erro *a posteriori* / agregação de destino

Na tabela (4.7) abaixo, apresenta-se o limite de erro para 11 problemas com 10 origens e 11 destinos. Os problemas agregados foram obtidos agregando os 11 destinos, reduzindo assim, a dimensão de 110 variáveis e 21 restrições para 10 variáveis e 11 restrições. Está sublinhado na tabela o melhor limitante para cada problema. Em todos os casos, o melhor



limitante é obtido usando como localização a intersecção dos conjuntos W_2 e W_4 . O segundo melhor limitante é $\delta(g, W_2)$, com exceção do problema 15.

Problema ($m \times n$) = (10 × 11)	Solução agregada $\bar{Z}^*$	$\delta(g, W_1)$ $Z^* - \bar{Z}^*$	$\delta(g, W_2)$ $Z^* - \bar{Z}^*$	$\pi(g, W_1 \cap W_3)$ $Z^* - \bar{Z}^*$	$\pi(g, W_2 \cap W_4)$ $Z^* - \bar{Z}^*$	K=10
11	-244.0444	72.6463	3.7313	26.5827	<u>2.6648</u>	
12	-559.6533	30.1996	2.0952	12.9748	<u>1.1273</u>	
13	-351.3057	19.7570	1.1876	10.3759	<u>1.082</u>	
14	-363.1060	23.0619	1.2126	12.2761	<u>1.0731</u>	
15	-514.3423	39.9620	1.2341	1.2161	<u>1.1416</u>	
16	-561.5689	30.8178	1.4018	12.4384	<u>1.1666</u>	
17	-462.8376	47.9032	6.4309	15.0723	<u>1.2508</u>	
18	-975.4712	25.8735	2.2774	10.5769	<u>1.1571</u>	
19	-615.3144	68.0275	10.7280	16.2528	<u>1.2942</u>	
20	-762.6182	53.9989	7.7995	9.0552	<u>1.5096</u>	
21	-721.4729	43.0124	4.0139	14.6112	<u>1.1523</u>	

Tabela 4.7: Limite de erro *a posteriori* / agregação de destino

Pode-se constatar, que ao agregar os destinos para todos os problemas, o melhor limitante é obtido usando como localização a intersecção dos conjuntos W_2 e W_4 , e que o limitante $\delta(g, W_2)$ é o segundo melhor limitante, com exceção dos problema 15.

Ao agregar origens ou destinos, o melhor limitante é obtido usando como localização a intersecção dos conjuntos W_2 e W_4 e que o limitante $\delta(g, W_2)$ é o segundo melhor limitante para a maioria dos problemas. Comparando os limites $\delta(g, W_1)$ com $\pi(g, W_1 \cap W_3)$ e $\delta(g, W_2)$ com $\pi(g, W_2 \cap W_4)$ é possível notar, que incluir restrições para as variáveis nas localizações, isto é, fazer as interseções $W_1 \cap W_3$ e $W_2 \cap W_4$, reduz a estimativa de erro. É importante lembrar que ao considerar como localização as interseções dos conjuntos W_i e W_j , o conjunto W_i é excluído da função objetivo do problema linear que fornece o valor do limitante $\pi(g, W_i \cap W_j)$.

Observa-se que, não pretende-se obter conclusões gerais a respeito do comportamento do erro calculado utilizando localizações lineares, devido à pequena quantidade de problemas considerado, bem como suas dimensões. O objetivo deste pequeno experimento foi obter uma indicação da eficiência dos limites propostos por Litvinchev [11]. Os resultados estimulam a realização de experimentos mais complexos.



Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, estudou-se métodos de agregação e desagregação para problemas de programação linear de grande porte.

A técnica de agregação e desagregação é de fundamental importância na resolução de vários problemas de otimização de grande porte. Basicamente, consiste em substituir o problema original por um problema de dimensão menor, mais fácil de ser resolvido. Através da solução deste problema reduzido é possível obter uma solução factível para o problema original.

Ao se usar esta solução aproximada é importante obter uma medida para a perda de otimalidade.

Discutiu-se no capítulo 2, deste trabalho, dois tipos de limites de erro para problemas PL: *a priori* e *a posteriori*. O limite de erro *a posteriori* pode ser obtido fazendo uma mudança no vetor de soluções duais do problema reduzido. Os limites discutidos neste trabalho foram propostos por Mendelssohn, Taylor e Shetty, Leisten, Knolmayer e Litvinchev e Rangel e tem por base a metodologia desenvolvida por Zipkin.

Apresentou-se no capítulo 3 uma aplicação da técnica de agregação e desagregação ao problema do transporte generalizado. Foram propostos duas metodologias para a obtenção do problema agregado: agregação de origens e agregação de destinos. Os limites de erro *a posteriori*, discutidos neste capítulo, foram apresentados por Evans e Litvinchev, e tem por base, a metodologia proposta por Zipkin.

No capítulo 4, apresentou-se um pequeno estudo numérico da qualidade dos limites *a posteriori*, discutidos no capítulo 3. Os resultados deste estudo indicam que para as duas



metodologias de agregação, na maior parte dos problemas testados, o melhor limite é obtido usando como localização a interseção dos conjuntos W_2 e W_4 . O limite $\delta(g, W_2)$ é o segundo melhor limite na maior parte dos problemas testados. Comparando $\delta(g, W_1)$ com $\pi(W_1 \cap W_2)$, e $\delta(g, W_2)$ com $\pi(W_1 \cap W_2)$, é possível notar que incluir restrições para as variáveis na localizações reduz a estimativa de erro, lembrando que ao considerar como localização as interseções dos conjuntos W_i e W_j , o conjuntos W_i é excluído da função objetivo do problema linear que fornece o valor dos limitantes $\pi(g, W_i \cap W_j)$.

Observa-se que não pretende-se obter conclusões gerais a respeito do comportamento do erro calculado utilizando localizações lineares, devido à pequena quantidade de problemas considerado, bem como suas dimensões. O objetivo deste pequeno experimento foi obter uma indicação da eficiencia dos limites propostos por Litvinchev [11]. Os resultados estimulam a realização de experimentos mais complexos.

Quando o limite de erro obtido for muito ruim uma alternativa para obter soluções aproximadas melhores para o problema original é refazer a agregação, isto é, redefinir o conjunto de clusters, obtendo assim, um novo problema agregado e recalcular o limite de erro. Este processo pode se repetir até que um bom limite de erro seja obtido, e assim, uma boa solução aproximada para o problema original é obtida. Este processo é chamado de técnica Iterativa de Agregação e Desagregação (ver Mendelssohn [17]).

Outro tópico, relacionado com este trabalho, e que poderá ser explorado em trabalhos futuros é o estudo de limites de erro associados a outros tipos de localizações, como por exemplo, localizações não-lineares. Um estudo sobre o uso de localizações elipsoidais é apresentado em Andrade [2] e em Litvinchev [12, 13]. Fazer aplicações em outros tipos de problemas encontrados na literatura, tais como: problemas lineares com variáveis 0 – 1.



Referências Bibliográficas

- [1] AHUJA, R.K., MAGNANTI, T.L. AND ORLIN, J.B., "*Network Flows*", Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [2] ANDRADE, I.G., *Localização Elipsoidal na Análise de Erro devido à Agregação de Variáveis em Programação Linear*, São José do Rio Preto, 1999. 94p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)- Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.
- [3] BALAS, E., *Solution of Large-Scale Transportation Problems Through Aggregation*, Opns. Res. 13, 82-93, 1965a.
- [4] BAZARAA, M.S., JARVIS, J.J. AND SHERALI, H.D., "*Linear Programming and Network Flows*", John Wiley & Sons, New York, 1980, 2nd ed..
- [5] EVANS, J. R. *A Combinatorial Equivalence Between a Class of Multicommodity Flow Problems and the Capacitated Transportation Problem*, Math. Prog. 10, 401-404, 1976.
- [6] EVANS, J.R., *Aggregation in the Generalized Transportation Problem*, Comput. Opns. Res. 6, 201-204, 1979a.
- [7] KENNINGTON, J.L. AND HELGASON, R.V., "*Algorithms for Network Programming*", John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [8] LASDON, L. S. "*Optimization Theory for Large Systems*", Macmillan, London, 1973.
- [9] LEISTEN, R., *A Posteriori Errors Bounds in Linear Programming Aggregation*. Computers Ops. Res., 24(1), 1-16, 1997.



- [10] LITVINCHEV, I., *Decomposition-Aggregation Method for Convex Programming Problems*. Optimization, 22(1), 47-56, 1991.
- [11] LITVINCHEV, I., *Bounds on the Suboptimalization of Aggregation in Convex Programming*. Comput. Maths Math. Phys., 33(8), 1007-1015, 1993.
- [12] LITVINCHEV, I., *On improved Goldfard-Choi solution containing ellipsoids in Linear Programming*. Relatório Técnico TR98003-OC - DCCE - Unesp - São José do Rio Preto(SP) - 1998.
- [13] LITVINCHEV, I., *On solution containing ellipsoids in Convex optimization - Part I*. Relatório Técnico TR98004-OC - DCCE - Unesp - São José do Rio Preto(SP) - 1998.
- [14] LITVINCHEV, I. E RANGEL, S., *Localization of the Optimal Solution e a Posteriori Bounds for Agregation*. Computers & Operations Research, 26, 967-988, 1999.
- [15] LUENBERGER, D.G., *"Linear and Nonlinear Programming"*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1989.
- [16] MENDELSSOHN, R., *Improved Bounds for Aggregated Linear Programs*, Opns. Res. 28, 1450-1453, 1980.
- [17] MENDELSSOHN, R., *An Iterative Aggregation Procedure for Markov Decision Processes*, Opns. Res. 30, 62-73, 1982.
- [18] NORMAN, S.K., ROGERS, D.F. AND LEVY, M.S. *Error bound comparisons for aggregation/desaggregation techniques applied to the transportation problem*, Computers & Operations Research, 26, 1003-1014, 1999.
- [19] ROCKAFELLAR, R., *"Convex Analysis"*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.
- [20] ROGERS, D.F., PLANTE, R.D., WONG, R.T. AND EVANS, J.R., *Aggregation and Desaggregation Techniques and Methodology in Optimization*, Opns. Res. 39(4), 553-582, 1991.
- [21] SHETTY, C. M. AND TAYLOR, R.W., *Solving Large-Scale Linear Programs by Aggregation*, Comput. Opns Res. 14, 385-393, 1987.



- [22] ZIPKIN, P.H., *Bounds for Aggregating Nodes in Network Problems*, Math. Prog. 19, 155-177, 1980a.
- [23] ZIPKIN, P.H., *Bounds on the Effect of Aggregating Variables in Linear Programs*, Opns. Res. 28, 403-418, 1980b.
- [24] ZIPKIN, P.H., *Bounds for Row Aggregation in Linear Programming*. Opns. Res. 28, 903-918, 1980c.
- [25] ZIPKIN, P.H. AND RAIMER, K., *An Improved Disaggregation Method for Transportation Problems*, Math. Prog. 26, 238-242, 1983.
- [26] WEINTRAUB, A.G.S, AND M. YADLIN.. *Aggregation procedures in Forest Management Planning using cluster Analysis*, Forest Science. 43(2), 274-285, 1997.



