

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/22

Gravitação Escalar-Tensorial na Variedade de Lyra

Eduardo Messias de Morais

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Coorientador

Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

2022

M828g Morais, Eduardo Messias de.
 Gravitação escalar-tensorial na variedade de Lyra / Eduardo Messias de
 Morais. – São Paulo, 2022
 188 f.

 Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de
Física Teórica (IFT), São Paulo
 Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar
 Coorientador: Rodrigo Rocha Cuzinatto

 1. Gravitação. 2. Geometria diferencial. 3. Partículas (Física nuclear). I.
Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca
do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo
autor(a).

*Á minha amada filha Cecília, à Carol, minha companheira de vida e à meus pais José
Messias e Maria de Lourdes que sempre me amaram incondicionalmente.*

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente à Deus pela minha vida e pelas pessoas maravilhosas que colocou em meu caminho.
- Meus sinceros votos de agradecimento à minha esposa, Carol, pelo carinho, companheirismo, compreensão e apoio em minhas horas de dedicação a essa tese.
- À minha filhinha, Cecília, por dar um novo significado à minha vida. Por ser a minha fonte de esperança em tempos turbulentos, o meu sorriso em tempos de tristeza, minha luz em tempos sombrios e a minha calma em meio ao desespero.
- Sou infinitamente grato à meu pai, José Messias de Moraes, por ter me tranquilizado e apoiado no ano de 2016, o que foi fundamental para eu me preparar para o ingresso no programa de pós graduação do IFT; pelas centenas de vezes que se dispôs à acordar de madrugada para me levar e buscar na rodoviária para a minhas viagens semanais Poços-São Paulo, por ter me convencido a não desistir no meu momento de maior dificuldade e principalmente, por ter me mostrado que nunca se é tarde demais para correr atrás de seus sonhos.
- Agradeço à minha mãe, Maria de Lourdes, por todo amor, cuidado e por todo esforço para fazer com que eu me sentisse em casa em qualquer lugar que eu estivesse.
- Agradeço à toda minha família pela compreensão nos meus momentos de ausência.
- Agradeço ao professor Pimentel pela orientação, pela amizade e por ter confiado em mim e no meu trabalho desde o começo. Pelas lições de vida, por ter me ensinado a conviver com minhas limitações, a ouvir antes de agir, a ter humildade e a valorizar a minha família acima de tudo.
- Agradeço ao Rodrigo Cuzinatto pela aula extra de cosmologia na disciplina de Fenômenos Térmicos, lá em 2012, o que me inspirou à correr atrás de um projeto de IC na área e me levou a estar onde estou hoje. Agradeço pelos quase 10 anos de amizade, por ter me mostrado de Rush é a maior banda de todas, por ter me orientado nos projetos de IC e mestrado, por ter me apresentado o Prof. Pimentel, pela ajuda no estudo para o Exame Unificado e pela coorientação no doutorado.
- Agradeço a Clícia pela amizade e pelos nossos bate papos sobre a vida, o universo e tudo mais.
- Agradeço aos professores do IFT e à todos os outros professores que contribuíram para minha formação. Em especial, ao professor Edson Ferreira do SENAI por ter me inspirado a ingressar no ensino superior, algo que nem me passava pela cabeça até então. Ao Prof. Léo pela coorientação de mestrado, pelo incentivo nos estudo de cosmologia observacional e por ter me motivado a ingressar no dourado do IFT. À todos os professores de Física do campus da Unifal - Poços de Caldas; em especial, ao Prof. Daniel Pamplona pela amizade e por ter me incentivado nos estudos em física desde o começo.
- Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo apoio financeiro à esse trabalho

“Let me tell you something you already know. The world ain’t all sunshine and rainbows. It’s a very mean and nasty place and I don’t care how tough you are it will beat you to your knees and keep you there permanently if you let it. You, me, or nobody is gonna hit as hard as life. But it ain’t about how hard ya hit. It’s about how hard you can get hit and keep moving forward. How much you can take and keep moving forward. That’s how winning is done!”

Rocky Balboa

Resumo

Apresentamos as propriedades geométricas da variedade de Lyra e estudamos sua aplicação na modelagem do espaço-tempo. Nesse cenário, os referenciais físicos ficam definidos pelo sistema de coordenadas x^μ e uma função de escala de Lyra ϕ . Construímos tensores com respeito às transformações simultâneas de (x^μ, ϕ) e definimos suas leis de transformação. Equipamos a variedade com uma conexão afim e construímos o operador de derivação covariante de Lyra. Através das propriedades afins da variedade de Lyra, definimos o tensor de torção, o tensor de curvatura e suas contrações. Definimos também os equivalente em Lyra da Equação de Hamilton-Jacobi e o teorema da divergência. Sob as hipóteses de compatibilidade métrica e ausência de torção, formulamos uma teoria de gravitação escalar-tensorial chamada de teoria LyST (*Lyra Scalar-Tensor*), onde os campos fundamentais relacionados à geometria do espaço-tempo são a métrica $g_{\mu\nu}$ e a função de escala de Lyra ϕ . As equações de campo em LyST são obtidas via princípio variacional, considerando uma generalização em Lyra da ação de Einstein-Hilbert. Mostramos que ela apresenta um limite newtoniano bem definido e que suas previsões se equivalem às da Relatividade Geral nos fenômenos em escala de sistema solar. Encontramos duas classes fisicamente coerentes de soluções esfericamente simétricas, que dependem do parâmetro $m_G := MG$, que é a massa gravitacional da fonte; e o parâmetro r_L que tem unidades de distância e contabiliza a influência da escala de Lyra. No limite de $r_L \rightarrow \infty$, as soluções encontradas tendem à solução de Schwarzschild. Na classe de soluções onde $r_L > 0$, encontramos uma singularidade aparente em $r = 1 / (1/2m_G + 1/r_L)$ e uma singularidade real em $r = r_L$, além da singularidade em $r = 0$. Essa solução divide o espaço-tempo em duas regiões ($r < r_L$ e $r > r_L$) que não tem contato causal. Outra solução de interesse é aquele em que $r < -2m_G$ e, nesse caso, temos somente a singularidade em $r = 0$ e a singularidade aparente em $r = 1 / (1/2m_G + 1/r_L)$. Por fim, fizemos um estudo aprofundado sobre as geodésicas no espaço-tempo esfericamente simétrico de LyST e caracterizamos os seus diversos tipos de trajetórias geodésicas.

Palavras Chaves: Gravitação; Geometria diferencial

Áreas do Conhecimento: Ciências Exatas e da Terra; Física; Física das Partículas Elementares e Campos; Gravitação.

Abstract

We present the geometric properties of Lyra manifolds and study its application in space-time modeling. In this scenario, the physical frames are defined by the coordinate system x^μ and a Lyra scale function ϕ . We constructed tensors with respect to the simultaneous transformations of (x^μ, ϕ) and defined their transformation laws. We equipped the manifold with an affine connection and constructed the Lyra covariant derivation operator. Through the affine properties of the Lyra manifold, we defined the torsion tensor, the curvature tensor and their contractions. We also defined the Lyra equivalents of the Hamilton-Jacobi equation and the divergence theorem. Under the assumptions of metric compatibility and torsion-free spacetime, we formulated a scalar-tensor theory of gravity called LyST theory (*Lyra Scalar-Tensor*), where the fundamental fields related to spacetime geometry are the metric $g_{\mu\nu}$ and the Lyra scale function ϕ . Field equations in LyST are obtained via the variational principle, considering a generalization in Lyra of the Einstein-Hilbert action. We proved that it has a well-defined Newtonian limit and that its predictions are equivalent to those of General Relativity in solar system scale phenomena. We found two physically interesting classes of spherically symmetric solutions, which depend on the parameter $m_G := MG$, which is the gravitational mass of the source; and the parameter r_L which has units of distance and accounts for the influence of Lyra's scale. In the limit of $r_L \rightarrow \infty$, the solutions tend to the Schwarzschild solution. In the class of solutions where $r_L > 0$, we found an apparent singularity at $r = 1/(1/2m_G + 1/r_L)$ and a real singularity at $r = r_L$, in addition to the singularity at $r = 0$. This solution splits spacetime into two regions ($r < r_L$ and $r > r_L$) that have no causal contact. Another interesting solution is the one where $r < -2m_G$ and, in this case, we only have the singularity at $r = 0$ and the apparent singularity at $r = 1/(1/2m_G + 1/r_L)$. Finally, we made an in-depth study of geodesics in LyST's spherically symmetric spacetime and characterized its different types of geodesic trajectories.

Prefácio

Nas últimas décadas, a tecnologia tem impulsionado grandemente o avanço científico e vem permitindo a verificação experimental de teorias físicas com precisão nunca antes acessíveis. Neste cenário, a teoria da Relatividade Geral (RG) se estabeleceu como o modelo padrão da interação gravitacional clássica. Para se ter uma ideia do quão rápida está a evolução das pesquisas nessa área, desde 2011, 4 prêmios Nobel de física foram dados a pesquisadores por contribuições em gravitação e cosmologia:

- Prêmio Nobel 2011 – Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt e Adam G. Riess pela descoberta da expansão acelerada do universo pela observação de supernovas distantes;
- Prêmio Nobel 2017 – Rainer Weiss, Barry C. Barish e Kip S. Thorne pela contribuição decisiva para o detector LIGO e as observações de ondas gravitacionais;
- Prêmio Nobel 2019 – James Peebles, Michel Mayor e Didier Queloz pela contribuição à nossa compreensão da evolução do universo e o lugar da Terra no cosmos
- Prêmio Nobel 2020 – Roger Penrose pela descoberta de que a formação de buracos negros é uma predição robusta da teoria da relatividade e; Reinhard Genzel and Andrea Ghez pela descoberta do objeto supermassivo no centro de nossa galáxia.

Todavia, a RG ainda não é capaz de explicar a fenomenologia gravitacional por completo quando levamos em consideração apenas as fontes observáveis. A aceleração da expansão cósmica, por exemplo, é um fenômeno gravitacional que a Teoria da Relatividade Geral não pode explicar sem a consideração de componentes adicionais, visto que o que observamos de fato (ou seja, matéria tipo poeira) levaria a uma expansão desacelerada. Por outro lado, a detecção de ondas gravitacionais e os recentes resultados em observação de buracos negros são fenômenos compatíveis com as predições da RG. Para um considerável setor da comunidade científica, a solução desse paradoxo é simples: a Relatividade Geral permanece intocada e o problema deve-se pela suposta existência de componentes escuras que atuam como fonte gravitacional mas que não estão sendo consideradas visto que supostamente não interagem com a radiação. Contudo, até a data de escrituração desse trabalho, não foi encontrada nenhuma evidência direta dessas componentes. Um outra linha de trabalho leva os pesquisadores à proposição de teorias alternativas de gravitação, cunhadas de *Teoria Modificadas de Gravitação*, que sejam capazes de, ao mesmo tempo, manter as vantagens da Teoria da Relatividade Geral e explicar todos os fenômenos gravitacionais observados.

Contudo, as Teorias Modificadas de Gravitação tem um longo histórico, e foram introduzidas não só por motivações experimentais, mas também por razões teóricas. De

fato, teorias alternativas tem sido propostas desde a data publicação da Relatividade Geral, o que faz desta área como sendo tópicos de pesquisa centenários. Esse longo histórico fez com que muitas teorias, como por exemplo a gravitação na variedade de Lyra, fossem suplantadas com o passar dos anos. Dessa forma, a existência de problemas em aberto aliada à crescente perspectiva de novas metodologias de física observacional serviram de motivação para o início do projeto de pesquisa que deu origem a essa tese de doutorado, que objetiva reacender o interesse em teorias de gravitação em Lyra à luz das novas descobertas em gravitação.

O projeto que se iniciou em maio de 2019 era primeiramente voltado para o estudo da cosmologia de acordo com a teoria gravitacional de Sen & Dunn [1]. No decorrer do estudo, notamos a necessidade de se priorizar o desenvolvimento de uma teoria de gravitação reformulada, que fosse generalizável, formal do ponto de vista geométrico e derivável de um princípio de mínima ação. Desenvolvemos um procedimento geral, donde podemos construir teorias de gravitação diversas sobre a variedade de Lyra. Do terceiro capítulo em diante, focamos em uma teoria métrico-compatível e livre de torção, que chamamos de LyST (para *Lyra Scalar-Tensor*), e que mostrou ser para a variedade de Lyra o que a Relatividade Geral é para a variedade Riemanniana. Entretanto, deixamos transparente o procedimento para se construir generalizações. Assim, esse trabalho visa apresentar a construção do formalismo pelo qual a variedade de Lyra modela o espaço-tempo, a formulação da Teoria LyST, a solução esfericamente simétrica e o estudo de geodésicas de partículas livres no espaço-tempo esfericamente simétrico de Lyra. Como uma etapa natural do desenvolvimento do projeto, publicamos um trabalho sobre a construção da teoria LyST na variedade de Lyra [2] e estamos preparando outros dois com os resultados de nossos estudos [3, 4].

O texto dessa tese inicia-se com uma introdução histórica no Capítulo 1 relacionando os principais desenvolvimentos das teorias de gravitação e motivando o leitor sobre a importância do estudo de teorias alternativas. Em seguida, o Capítulo 2 apresenta os princípios geométricos necessários para a construção da variedade de Lyra e os entes geométricos essenciais na descrição do movimento geodésico. Esse capítulo introduz todo o ferramental que utilizaremos para a formulação da Teoria Escalar-Tensorial LyST. Essa formulação é exposta em detalhes no Capítulo 3, onde comentamos as hipóteses geométricas adotadas e analisamos algumas das suas consequências. Por fim, no Capítulo 4, apresentamos uma solução esfericamente simétrica a partir da qual conseguimos obter a descrição das trajetórias geodésicas no espaço-tempo de Lyra. No Capítulo 5, consolidamos os resultados obtidos no trabalho, propomos próximos passos e apresentamos as perspectivas futuras para trabalhos com teorias de gravitação na variedade de Lyra.

Convenções e Notações

Nesse trabalho, vamos adotar a assinatura da métrica como $(+, -, -, -)$ e a velocidade de luz unitária ($c = 1$). Vamos adotar a convenção de soma de Einstein onde índices repetidos em posições subscrita e sobrescrita indicam uma soma em todas as n dimensões das quantidades consideradas:

$$A_\mu B^\mu := \sum_{\mu=0}^n A_\mu B^\mu.$$

Além disso, vamos ter que lidar com quantidades definidas em diferentes variedades. Ao longo do texto, foi tomado o cuidado de se detalhar na descrição o significado de cada quantidade. Contudo, pode acontecer do leitor começar sua leitura após a definição, o que à primeira vista pode acarretar numa confusão de símbolos. Por isso, é importante estabelecer o significado das variáveis nesse capítulo para que o leitor possa consultar sempre que preciso.

- G : constante gravitacional de Newton
- ϕ : função de escala de Lyra
- $g_{\mu\nu}$: componentes do tensor métrico
- g : determinante da métrica
- $[\mu, \alpha\beta]$: símbolo de Christoffel do primeiro tipo
- $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\}$: símbolo de Christoffel do segundo tipo
- $\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$: Conexão afim definida sobre a variedade riemanniana
- $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$: Conexão afim definida sobre a variedade de Lyra
- \mathbf{e}_μ : base geral para o espaço tangente à um ponto P
- ∂_μ : base canônica relacionada às coordenadas x^μ para para o espaço tangente à um ponto P
- θ^μ : base geral para o espaço cotangente à um ponto P
- $\mathbf{d}x^\mu$: base canônica relacionada às coordenadas x^μ para para o espaço cotangente à um ponto P
- $\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu}$, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ e \mathcal{R} : tensor de curvatura, tensor de Ricci e escalar de curvatura definidos em termos do símbolo de Christoffel do segundo tipo $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\}$.

- $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ e R : tensor de curvatura, tensor de Ricci e escalar de curvatura definidos em termos da conexão de Lyra $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$.
- ∇ : símbolo da derivação covariante de Lyra
- m : massa das partículas-teste sobre o espaço-tempo de Lyra
- m_G : massa gravitacional ($m_G := MG$) das fontes gravitacionais

Índice

I Geometria de Lyra	1
1 Introdução	3
1.1 Relatividade Geral	7
1.1.1 Conceitos de Geometria Riemanniana	8
1.1.2 Equações de Campo	14
1.1.3 Limitações da Relatividade Geral	15
1.2 Teorias de Gravitação Modificadas	16
1.2.1 Teoria de Jordan-Brans-Dicke	18
1.2.2 Teoria de Weyl	20
1.2.3 Teoria de Sen & Dunn	20
2 Geometria de Lyra	23
2.1 Sistemas Referenciais de Lyra	24
2.2 Variedades de Lyra	27
2.2.1 Vetores	29
2.2.2 Métrica	32
2.2.3 Covetores	34
2.2.4 Espaço Dual	38
2.2.5 Tensores	38
2.2.6 Conexão Afim	42
2.3 Propriedades Métricas da Variedade	44
2.3.1 Elemento Linha	44
2.3.2 Geodésicas	45
2.3.3 Elemento de Volume	47
2.4 Propriedades Afins da Variedade	48
2.4.1 Derivada Covariante	48
2.4.2 Curva Autoparalela	49
2.4.3 Curvatura	50
2.4.4 Torção	51
2.4.5 Componentes da Conexão	52
2.5 Teorema da Divergência	56
2.6 Espaço-Tempo de Lyra	58
2.6.1 O Método de Hamilton-Jacobi na variedade de Lyra	60

2.6.2	Isometrias na Variedade de Lyra	62
2.7	Comentários Finais	69
II Gravitação na Variedade de Lyra com Geodésicas Autoparalelas		71
3	Teoria Escalar-Tensorial na Variedade de <i>Lyra</i> - LyST	73
3.1	Introdução	73
3.1.1	Autoparalelismo das curvas geodésicas	74
3.1.2	Condições geométricas	75
3.2	Prescrição de Acoplamento Mínimo	77
3.3	Equações de Campo	79
3.4	Limite Newtoniano	81
3.5	Comentários Finais	85
4	Simetria Esférica na Gravitação LyST	87
4.1	Solução Estática Esfericamente Simétrica no Vácuo	87
4.1.1	Soluções tipo-Schwarzschild	89
4.2	Geodésicas	92
4.2.1	Abordagem de Hamilton-Jacobi para Partículas Massivas	97
4.2.2	Abordagem de Hamilton-Jacobi para Fótons	100
4.2.3	Correção à Gravitação de Newton	102
4.3	Propriedades da solução esfericamente simétrica	103
4.4	Trajetória de Partículas Massivas	108
4.4.1	Movimento Radial	109
4.4.2	Potencial Efetivo	110
4.4.3	Captura Gravitacional	116
4.4.4	Movimento Hiperbólico	121
4.4.5	Movimento Circular	123
4.4.6	Movimento Ligado e Precessão de Periastros	127
4.4.7	Precessão de periélio via abordagem de Hamilton-Jacobi	133
4.5	Trajetória de Fótons	138
4.5.1	Movimento Radial e a Distorção dos Cones de Luz	139
4.5.1.1	Redshift Gravitacional	141
4.5.1.2	Singularidades e Estrutura Causal	144
4.5.2	Potencial Efetivo	145
4.5.3	Captura Gravitacional de Fótons	149
4.5.4	Movimento Hiperbólico	151
4.6	Comentários Finais	152
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	155

Apêndices	165
A Gravitação LyST: Cálculos e Observações	165
A.1 Tensor de Curvatura e Tensor de Ricci	165
B Isometria de Rotação da Teoria LyST	171
Referências	179

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática das teorias de gravitação de ordem superior definidas pela adição de invariantes à ação de Einstein-Hilbert. Fonte: [5]	17
1.2	Representação esquemática das teorias de gravitação obtidas pelo acoplamento de novos campos à ação de Einstein-Hilbert. Fonte: [5]	18
1.3	Representação esquemática obtidas pela alteração de princípios geométricos distintos daqueles da Relatividade Geral. Fonte: [5]	18
2.1	Representação do sistema de coordenadas e a função de escala nos pontos da variedade \mathcal{M} .	25
2.2	Representação do sistema de coordenadas e a função de escala nos pontos da variedade \mathcal{M} .	26
2.3	Determinação do vetor tangente \mathbf{v}_P como a derivada direcional da aplicação F na direção da curva α sobre a variedade \mathcal{M} , parametrizada por t .	30
2.4	Espaço tangente $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$ definido sobre o ponto $P \in \mathcal{M}$.	31
2.5	Produtos internos em dois pontos distintos.	33
2.6	Transformação entre referenciais inerciais.	36
4.1	Comportamento de cada uma das classes de soluções de α . O caso limite de $r_L \rightarrow \infty$ leva naturalmente a solução de Schwarzschild.	107
4.2	Gráficos para o potencial (4.102) para diferentes valores de momento angular específico h , mantendo-se fixo $\rho_L = 10^3$. No caso em que $h = \sqrt{3}/(1/2m_G + 1/r_L)$, V_{eff} apresenta apenas um ponto de equilíbrio. Por outro lado, sempre que $h > \sqrt{3}/(1/2m_G + 1/r_L)$, o potencial exibirá dois pontos de equilíbrio, ao passo que se $h < \sqrt{3}/(1/2m_G + 1/r_L)$, não apresentará nenhum. A curva tracejada indica graficamente a posição dos pontos de equilíbrio. No caso de soluções de classe 2 com $r_L \ll -2m_G$, as características do potencial são equivalentes as soluções de classe 1 com $r_L \gg 2m_G$.	113
4.3	Curvas do potencial efetivo para diferentes valores de r_L . (a) $h < \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$; (b) $h = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$; e (c) $h > \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$.	115
4.4	Três famílias de potencial efetivo caracterizando os diferentes tipos de movimentos orbitais. As linhas horizontais representam valores constantes de energia.	117
4.5	Captura gravitacional de uma partícula com velocidade inicial \mathbf{v} .	119

4.6	Trajétórias de capturas para diferentes valores de parâmetro de impacto, mantendo-se h fixo.	120
4.7	Movimento hiperbólico para parâmetros de impacto maiores que b_{cap} onde a trajetória da partícula é desviada por um ângulo α . Por sua vez, o valor da coordenada angular azimutal no fim do movimento é $\varphi = \pi + \alpha$	122
4.8	Comparação entre as curvas geodésicas tipo (2) para gravitação Lyst e a Relatividade Geral para os mesmos valores de parâmetro de impacto e momento angular. Foi assumido um valor de $r_L/m_G = 1000$	124
4.9	Comparação entre varias curvas geodésicas cujos valores de parâmetro de impacto são igualmente espaçados. As curvas tracejadas em cor laranja representam os movimentos de captura gravitacional ao passo que as curvas em azul são as trajetórias hiperbólicas.	125
4.10	Variação da energia $k = E/m_0$ em função de r/m_G para uma órbita circular de acordo com a Eq. (4.124), onde m_0 é a massa de repouso da partícula teste e m_G é a massa da fonte gravitacional.	126
4.11	Órbita planetária elíptica ao redor do Sol.	130
4.12	Geodésicas nulas para a solução esfericamente simétrica na gravitação escalar-tensorial na variedade de Lyra em coordenadas de Schwarzschild. Na vizinhança de r_L e $r_s = \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}\right)^{-1}$, nota-se uma grande distorção dos cones de luz. O diagrama da esquerda remete ao caso onde $r_s < r_L$ e o gráfico da direita para $r_s > r_L$	140
4.13	Evento de emissão e observação para dois fótons distintos.	141
4.14	Potencial efetivo para o movimento de fótons considerando-se valores positivos e negativos de ρ_L	147
4.15	Quatro famílias de potencial efetivo de partículas não massivas, caracterizando os diferentes tipos de movimentos orbitais. As linhas horizontais representam valores constantes e energia.	150

Parte I

Geometria de Lyra

Capítulo 1

Introdução

A proposição da Lei de Gravitação Universal por Newton em 1665 foi um inquestionável marco para a evolução do pensamento científico [6, 7]. Sua lei de força gravitacional proporcional ao inverso do quadrado da distância foi capaz de unificar fenômenos gravitacionais terrestres e celestiais em uma única teoria. Ela traz consigo dois conceitos bastante importantes que ao longo do tempo se mostraram fatores cruciais para formulação e estabelecimento de teorias de gravitação: (1) o conceito de espaço e tempo absolutos [8] e, (2) uma noção primária do que hoje se conhece por princípio de equivalência fraco [9]. Entretanto, a teoria de Newton traz consigo a incompatibilidade metafísica de depender de uma ação instantânea a distância. Apesar desse problema, a Lei de Gravitação Universal levou os pesquisadores a realizar previsões corretas para uma grande gama de fenômenos gravitacionais, tanto terrestres quanto celestiais, ao longo de quase de 2 séculos.

Foi somente na metade do século XIX que alguém foi capaz de apontar um fenômeno gravitacional incoerente com a teoria de Newton. Urbain Le Verrier observou uma precessão de 35 segundos de arco diferente da precessão esperada para a órbita de Mercúrio, de acordo com a teoria de perturbações aplicada sobre as equações de movimento de Newton [10, 11]. Posteriormente, Simon Newcomb mediu este efeito de forma mais acurada, encontrando um desvio de 43 segundos de arco [12, 13]. A "crença" na eficácia da Lei de Gravitação Universal era tão acentuada que, à priori, Le Verrier tentou atribuir essa incompatibilidade, não a uma incoerência da teoria, mas sim à existência de um astro ainda não observado cuja órbita perturbava a órbita de Mercúrio [14].

Outro tópico de discussão acerca de um dos pontos chave da teoria de Newton – o espaço absoluto – se deu pela chamada *correspondência de Leibniz–Clarke* [15]. Este debate se configurou pela troca de cartas entre Gottfried Wilhelm Leibniz e Samuel Clarke cujo tópico principal era o contraste de diferentes visões sobre teorias do espaço. Enquanto Clarke apoiava a visão newtoniana de espaço e tempo absolutos, Leibniz discorria sobre a noção de espaço relacional, onde o espaço só se define pela relação entre objetos e não poderia existir na ausência de matéria [16]. Essas ideias vieram a tona novamente no fim do século XIX com os trabalhos de Ernst Mach. Ainda que de modo vago, os trabalhos de Mach trouxeram a ideia de que "*a inércia se origina da relação entre os corpos*", em contraste a visão de Newton de que "*inércia é sempre relativa ao referencial do espaço absoluto*".

Com o início do século XX, novos desafios à gravitação newtoniana se tornaram evi-

dentos. O desenvolvimento das equações do eletromagnetismo de Maxwell iniciou um novo capítulo no debate sobre o modelo de espaço-tempo. Conhecidamente, estas equações não são invariantes em relação às transformações de Galileu tal como as equações de Newton. Assumindo que os referenciais inerciais sejam conectados por transformações desse tipo, as equações de Maxwell, na forma como propostas, deveriam ser válidas no referencial inercial de repouso do éter, supostamente o referencial inercial absoluto. Seguindo essa linha de raciocínio, através das subseqüentes comprovações experimentais da teoria de Maxwell em laboratórios terrestres, seria possível concluir que o referencial do laboratório seria indistingüivelmente próximo do suposto referencial absoluto na maioria dos casos, supondo que as distorções em relação aos resultados previstos pelas equações de Maxwell estariam abaixo das incertezas experimentais. Para uma efetiva tentativa de comprovação do éter, Michelson e Morley propuseram um experimento de interferometria de alta precisão, aproveitando-se da velocidade relativa da Terra com respeito ao meio para propagação de ondas eletromagnéticas que estaria em repouso em relação ao suposto referencial absoluto [17]. Contudo, o experimento se mostrou incapaz de comprovar a existência desse meio. Esse resultado promoveu uma difusão de ideias relativísticas.

Poincaré, ao se deparar com a impossibilidade de detecção do éter, argumentou que sua existência seria uma mera questão metafísica e sugeriu que este conceito pudesse ser negligenciado algum dia [18]. Partindo do pressuposto da impossibilidade de detecção de qualquer movimento relativo ao éter, Poincaré introduziu o conceito do Princípio da Relatividade do Movimento, no qual as *leis do movimento deveriam ser as mesmas para todos os referenciais inerciais* [18]. Contudo, apesar dessas ideias, Poincaré não aparenta ter se desgarrado completamente do conceito do referencial absoluto. Em primeiro lugar, ele também afirmou não ser possível saber se o princípio da relatividade do movimento é verdadeiro, mas que seria interessante determinar suas implicações [19]. Deve-se salientar também que ele nunca deixou de lado o conceito de éter, chegando a referir-se a este como uma "hipótese conveniente" e o utilizando nos trabalhos subseqüentes [20]. Isso fica bastante claro em seu procedimento de sincronização de relógios onde, além de introduzir os conceitos de *tempo local* e *aparente* para distintos referenciais inerciais, ele apresenta o que ele chama de "*tempo verdadeiro*" que seria medido no referencial absoluto [21].

Uma forma diferente de se pensar seria assumir que os referenciais inerciais se conectam, não pelas transformações de Galileu, mas sim por uma lei de transformação alternativa. Essa proposta foi realizada em 1904 por Lorentz, que foi capaz de derivar as transformações que preservam a forma das equações de Maxwell [22]. Um resultado bastante importante desse trabalho foi a consequente existência de um limite para a velocidade de partículas massivas, que seria o da velocidade da luz. Com as transformações propostas por Lorentz, era possível explicar a falha do experimento de Michelson e Mor-

ley em detectar o éter por efeitos de contração dos braços do interferômetro e dilatação temporal dos cronômetros oriundas desse novo conjunto de transformações.

Einstein, em 1905, mostrou que os resultados dos trabalhos de Lorentz e Poincaré (apesar de não referenciados) poderiam ser derivados por um simples conjunto de postulados [23]:

1. **O Princípio da Relatividade:** as leis da física devem ser as mesmas em todos os referenciais inerciais
2. **A constância da velocidade da luz:** A velocidade da luz no vácuo deve ser a mesma, medida em qualquer referencial.

A diferença de abordagem de Einstein para com outros autores é que ele insere esses dois conceitos como primeiros princípios. Diferentemente de Poincaré, Einstein coloca o princípio de relatividade, não como uma condição de trabalho dada a impossibilidade de detecção do éter, mas sim como uma característica do espaço. Além disso, a constância da velocidade da luz é vista por Einstein como um importante princípio físico e não como consequência das transformações de Lorentz. Com essa abordagem, Einstein foi capaz de derivar todos os resultados expostos isoladamente pelos outros pesquisadores [24].

Logo após a teoria da Relatividade Especial de Einstein ter sido publicada, Einstein rapidamente se atentou para a generalização dos conceitos relativísticos ao caso de referenciais não inerciais. Em 1907, ele notou que a gravitação newtoniana era incompatível com a Teoria da Relatividade Especial, visto que, embora a teoria estabelecesse uma relação entre inércia e energia, ela nada tinha a dizer à respeito da relação entre inércia e peso [24, 25]. Em um trabalho intitulado “*A Influência da Gravidade na Propagação da Luz*” [26], Einstein estabelece uma hipótese sobre a natureza física do campo gravitacional. Assume-se a existência de um campo gravitacional homogêneo, que sob a ótica de um referencial inercial K , tem intensidade \mathbf{g} . Considerando o Princípio de Equivalência de Newton, \mathbf{g} é a aceleração que o campo gravitacional homogêneo produz sobre todas as partículas pontuais, observadas pelo referencial K . Logo, a descrição do movimento dessas partículas em K seria equivalente à descrição do movimento em um referencial não-inercial K' , sem campo gravitacional, que possui aceleração \mathbf{g} em relação ao referencial K . Essa similaridade na descrição do movimento das partículas pontuais é consequência do Princípio de Equivalência de Newton. A hipótese de Einstein foi que a equivalência dos referenciais K e K' é válida não somente para fenômenos mecânicos, mas para todos os fenômenos físicos. Sendo assim, ele formulou o *Princípio de Equivalência Forte* ou *Princípio de Equivalência de Einstein*, que incorpora e generaliza o Princípio de Equivalência de Newton [9].

Uma característica básica de uma teoria de gravitação relativística é a não-linearidade. Um forma simples de se detectar esse requisito é através do estudo do sistema de duas partículas. A partir do resultado relativístico que relaciona massa e energia através da ex-

pressão $E = mc^2$, sabe-se que a massa do sistema é a soma das massas menos o módulo da energia de ligação entre as duas partículas. Dessa forma, o campo gravitacional externo oriundo do sistema binário será, em parte, gerado pela gravitação das duas partículas. Uma teoria de gravitação aceitável plenamente relativística só viria a se concretizar com a publicação da Teoria da Relatividade Geral, no ano de 1915. Contudo, desde o ano de 1907, Einstein se convenceu de que o Princípio de Equivalência seria o ponto de partida para organizar suas ideias em uma teoria de gravitação [27, 28].

Com o princípio de equivalência, Einstein realizou algumas previsões fenomenológicas, tais como a ponderabilidade da energia, a deflexão dos raios de luz no campo gravitacional [26, 29], e o atraso de relógios no campo gravitacional [24]. Esse último efeito é consequência direta do redshift gravitacional, como provado por Einstein em seu artigo original. Porém, concernente a isso, é preciso deixar claro alguns pontos. Diversos autores de livros-texto de Relatividade Geral e Gravitação citam a dedução do redshift gravitacional por Einstein através do seu Princípio de Equivalência¹ [29, 31, 32, 33, 34]. O que geralmente não se comenta é que, nessa dedução, Einstein utiliza de forma despretensiosa a fórmula de Doppler para o deslocamento da frequência entre emissor e receptor com velocidades distintas. Embora leve a uma correta predição do efeito do Redshift Gravitacional, a heurística de Einstein é falha e peca ao negligenciar a abordagem relativística do efeito Doppler [35]. Um estudo detalhado acerca desse tópico pode ser encontrado na Ref. [9].

A Lei de Gravitação Universal de Newton é incompatível com a teoria da relatividade especial. Uma abordagem possível para se construir uma teoria de gravitação consistente com os princípios da relatividade restrita seria buscar alterar a teoria de Newton. No entanto, não foi este o caminho seguido para formulação da Relatividade Geral. Conforme já comentado, Einstein conseguiu derivar uma série de efeitos relativísticos baseando-se apenas no princípio de equivalência. Nesse sentido, o entendimento de que todos os corpos caem precisamente da mesma forma definem curvas preferenciais no espaço-tempo, chamadas de geodésicas. No caso do espaço de Minkowski, essas curvas geodésicas são justamente as trajetórias dos referenciais inerciais. Nessa interpretação, o fenômeno gravitacional pode ser entendido como sendo a distorção das geodésicas em relação às da Relatividade Especial, e não como o resultado da ação de um campo gravitacional adicional.

Mas o que causa a distorção das geodésicas? O segundo conjunto de ideias que le-

¹Uma exceção é a terceira edição de *Gravitation and Spacetime* de Ohanian e Ruffini [30], conforme pode ser verificado na sua nota de rodapé 1 da página 137.

varam à formulação da Relatividade Geral, compõem o chamado princípio de Mach e trabalham acerca desse questionamento. Na Relatividade Especial e em teorias anteriores, a estrutura do espaço-tempo é fixa, válida em todos os eventos e permanece inalterada pelos corpos materiais. A ideia de Mach era de que os conceitos de referencial não-acelerado e referencial não-rotativo só fazem sentido em um universo com matéria. Sendo assim, a presença de matéria no universo deve influenciar nas definições locais de "não-aceleração" e "não-rotação". Einstein se inspirou nessa ideia e se motivou a elaborar um teoria onde, diferentemente da Relatividade Especial, a estrutura do espaço-tempo é influenciada pela presença de matéria.

A nova teoria de espaço e tempo, e conseqüentemente de gravitação, propõe que as propriedades intrínsecas do espaço-tempo, que independem de observador, são descritas por uma métrica. Nessa descrição, os fenômenos gravitacionais surgem exclusivamente da equação das geodésicas de um espaço-tempo com distorções em relação ao caso plano (que seriam as equações de movimento da teoria). Essas distorções surgem devido ao tensor de energia momento descrevendo a distribuição de matéria no espaço-tempo, e são modeladas via uma equação de campo. Esta deve ser definida de acordo com algum princípio. Dessa forma, a estrutura do espaço-tempo (descritas pela métrica) está relacionada ao seu conteúdo de matéria, de acordo com algumas das ideias de Mach (mas não de todas elas).

1.1 Relatividade Geral

O desenvolvimento conceitual das ideias de cunho fenomenológico foi o cerne da construção da Teoria da Relatividade entre os anos de 1907 e 1912. Foi somente depois do verão de 1912 que Einstein tentou incorporar esses conceitos físicos em uma teoria física formal. A ideia de que gravitação pode retardar cronômetros e curvar os raios de luz deu uma noção de que o espaço-tempo de Minkowski não seria o modelo ideal para uma teoria de relatividade generalizada.

Alterar esse cenário não era, e ainda não é, nada trivial. Por isso, Einstein precisou de ajuda do matemático Marcel Grossmann, seu amigo. Grossman baseou-se num artigo de revisão de 1901 de Ricci e Levi-Civita chamado, em tradução livre, de "*Cálculo Diferencial Absoluto*"². Esse formalismo matemático por si só já chamou atenção por possibilitar a representação de teorias físicas em quaisquer sistemas de coordenadas. Essa característica era justamente o que Einstein precisava para estender o princípio da relatividade para referenciais não inerciais e organizar suas ideias em uma teoria de gravitação. Os dois, em colaboração, publicaram um artigo chamado "Rascunho (*Entwurf*) de uma Teoria de Relatividade Generalizada e uma Teoria de Gravitação"³ [36]. Nesse trabalho, é

²Hoje, essa área é conhecida por cálculo tensorial.

³Em tradução livre.

possível encontrar muito do conteúdo que hoje é familiar aos pesquisadores de gravitação. Os conceitos do cálculo tensorial são expostos para possibilitar a generalização do espaço-tempo de Minkowski para um espaço-tempo com curvatura.

Embora esse artigo desse a impressão de que a principal parte do trabalho da construção da teoria estava concluído, isso não era verdade. Em primeiro lugar, conforme notado pelo próprio Grossman, as equações de campo propostas não tendiam suavemente às equações da gravitação newtoniana nos limites de campos fracos e velocidades não relativísticas. Além disso, a teoria de 1913 não acomodava o movimento anômalo de Mercúrio. A busca pelo conjunto de equações de campo foi tópico de trabalho de Einstein pelos dois anos seguintes.

Em junho-julho de 1915, David Hilbert, que acabara de se interessar pelo assunto, convidou Einstein a ministrar aulas sobre a sua atual teoria de relatividade generalizada na Universidade de Göttingen. Na segunda metade desse ano, Einstein se manteve em contato por cartas com Hilbert, que começou a trabalhar em uma teoria combinada de gravitação e eletromagnetismo. Em novembro de 1915, Einstein deu quatro aulas em Berlin, o que levou às publicações finais e a correta equação de campo de sua Teoria de Relatividade Geral em 25 de novembro. Nesse mês, Einstein enviou trabalhos quase que semanalmente aos boletins da academia prussiana, corrigindo erros prévios e reformulando a teoria [37, 38, 39, 40]. David Hilbert nesse tempo, trabalhava num projeto de reescrituração das equações de campo da antiga teoria Entwurf de Einstein em uma formulação mais elegante. Com sua abordagem, Hilbert foi capaz de derivar exatamente as mesmas equações de campo de Einstein, e as apresentou na Academia de Ciências de Göttingen em 20 de Novembro.

Assim como na Relatividade Restrita, existe muito controvérsia sobre na prioridade de formulação da Relatividade Geral. Não é o objetivo desse trabalho argumentar se foi Einstein ou Hilbert o pioneiro na obtenção das equações de campo, mas sim, reconhecer o trabalho dos dois e a contribuição de cada um deles nas formulações geométricas das teorias gravitacionais atuais. O leitor interessado nesse tópico pode consultar as Refs. [41, 42, 43, 44, 45].

1.1.1 Conceitos de Geometria Riemanniana

A constatação de que o espaço-tempo de Minkowski é incompatível com uma descrição gravitacional relativística dá origem à necessidade de se generalizar o espaço-tempo em termos de suas propriedades geométricas. Ainda que hoje se conheçam construções heurísticas da Teoria da Relatividade Geral, muito bem embasadas em conceitos físicos, elas pouco ajudam na compreensão macro do cenário, muito menos dão ideias sobre as possíveis formas de generalização da teoria. Dessa forma, assim como Einstein precisou focar primeiramente nas ferramentas matemáticas para a correta descrição geométrica do espaço-tempo, será feita uma pequena síntese sobre os conceitos necessários à formu-

lação da Relatividade Geral.

Na Relatividade Geral, a estrutura do espaço-tempo é modelada conforme as regras da geometria Riemanniana, onde o conjunto de todos pontos (eventos) forma uma variedade diferenciável \mathcal{M} . Cada ponto $P \in \mathcal{M}$ pode ser definido por ao menos uma quádrupla de coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Em geral, essas coordenadas não valem para todos os pontos da variedade, o que implica que é necessário vários sistemas de coordenadas para cobrir a variedade \mathcal{M} .

Define-se um espaço vetorial tangente $\mathbf{T}_P(\mathcal{M})$, com uma base natural $\mathbf{e}_\mu := \partial_\mu$ associada a cada um dos sistemas de coordenadas. Nesse caso, um determinado campo vetorial $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_P(\mathcal{M})$ pode ser expandido como $\mathbf{v} := v^\mu \mathbf{e}_\mu$. Os coeficientes v^μ podem ser chamados de *componentes de \mathbf{v} na base \mathbf{e}_μ* .

Métrica

O produto interno de dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} em um determinado ponto da variedade é definido pela métrica $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Suas componentes, tomadas em um determinado sistema de coordenadas, podem ser obtidas operando-a sobre os vetores da base canônica. Ou seja:

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu). \quad (1.1)$$

Com a métrica, o conceito de "comprimento de um vetor" ganha sentido, e pode ser representado como $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$.

A definição da métrica permite associar o espaço vetorial $\mathbf{T}_P(\mathcal{M})$ com um outro espaço $\mathbf{T}_P^*(\mathcal{M})$, com base canônica dada por $\boldsymbol{\theta}^\mu = \mathbf{d}x^\mu$. Dessa forma, cada vetor \mathbf{v} está relacionado com um covetor $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \cdot)$ com componentes v_μ respeitando a relação $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \cdot) = v_\mu \mathbf{d}x^\mu$. Aplicando-a sobre os elementos da base do espaço vetorial \mathbf{e}_ν associados as coordenadas $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$, encontra-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{v}, \partial_\nu) &= v_\mu \mathbf{d}x^\mu (\partial_\nu) \\ \mathbf{g}(v^\mu \partial_\mu, \partial_\nu) &= v_\mu \delta_\nu^\mu \\ v_\nu &= g_{\mu\nu} v^\mu. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Uma vez que a métrica relaciona \mathbf{v} e $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \cdot)$, pode-se referir a v_μ e v^μ respectivamente como as componentes *covariante* e *contravariante* de um campo vetorial \mathbf{v} .

A consideração de uma métrica permite a definição de uma medida de deslocamento infinitesimal entre dois pontos vizinhos da variedade. Essa quantidade é chamada de elemento de linha e é definida por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.3)$$

Tensores

O produto tensorial de k espaços covetoriais $\mathbf{T}_p^*(\mathcal{M})$ e l espaços vetoriais $\mathbf{T}_p(\mathcal{M})$ é também um espaço vetorial, cujos elementos são designados por tensores de tipo (k, l) , com *rank* $k + l$. A métrica é um exemplo de cotensor de tipo $(2, 0)$ e *rank* 2 e os vetores e covetores citados acima são tensores de *rank* 1, respectivamente de tipos $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

Como já comentado, um sistema de coordenadas, em geral, não cobre todos os pontos da variedade. Dado que dois sistemas de coordenadas x^μ e \bar{x}^μ sejam bem definidos em um ponto específico P , os elementos dos campos tensoriais tangentes nesse ponto podem ser expandidas nas bases canônicas desses dois sistemas⁴. Nesses casos, as componentes de um tensor geral \mathbf{T} de tipo (k, l) apresenta uma lei de transformação de componentes dada por:

$$\bar{T}_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial \bar{x}^{\beta_l}} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}. \quad (1.4)$$

Derivada Covariante

Em uma variedade de Riemann geral, a operação de derivação ordinária de um campo tensorial não é um campo tensorial. Para definição de uma operação diferencial cujo resultado seja também um campo tensorial, deve-se introduzir uma conexão linear ∇ na variedade. Um operador $\nabla_{\mathbf{u}}$ é relacionado a cada campo vetorial \mathbf{u} , tal que, quando aplicado a um campo vetorial distinto \mathbf{v} , resulte num campo vetorial $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. Além disso, é requerido que $\nabla_{\mathbf{u}}$ respeite as seguintes propriedades [46]:

$$(i) \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w};$$

$$(ii) \nabla_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w};$$

$$(iii) \nabla_{F\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = F \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}; \quad e$$

$$(iv) \nabla_{\mathbf{u}}(F\mathbf{v}) = (\mathbf{u}F)\mathbf{v} + F\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$$

onde F é uma função suave. Assim sendo, $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ pode ser chamado de derivada covariante de \mathbf{v} na direção de \mathbf{u} . Para expressá-la em componentes, expande-se os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} em componentes e usa-se as propriedades determinadas acima:

⁴Na verdade, como os sistemas de coordenadas não cobrem toda a variedade, uma determinação mais precisa depende da definição de um conjunto aberto U de M . A definição mais formal será explorada com mais detalhes na construção geométrica da variedade de Lyra.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \underbrace{\nabla_{(u^\beta\partial_\beta)}}_{\text{prop. iii}}(v^\alpha\partial_\alpha) = u^\beta\underbrace{\nabla_{\partial_\beta}}_{\text{prop. iv}}(v^\alpha\partial_\alpha) = \\
&= u^\beta\nabla_{\partial_\beta}(v^\alpha)\partial_\alpha + u^\beta v^\alpha(\nabla_{\partial_\beta}\partial_\alpha) = \\
&= u^\beta(\partial_\beta v^\alpha)\partial_\alpha + u^\beta v^\alpha(\nabla_{\partial_\beta}\partial_\alpha).
\end{aligned}$$

O objeto $\nabla_{\partial_\beta}\partial_\alpha$ descreve a variação de um dos vetores de base (aqui no caso, ∂_α) no sentido de outro vetor de base ∂_β . Esse tensor pode ser expandido em uma base ∂_λ como:

$$\nabla_{\partial_\beta}\partial_\alpha = \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}\partial_\lambda, \quad (1.5)$$

onde $\bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}$ são os chamados "coeficientes da conexão", ou simplesmente conexão no jargão das teorias de gravitação relativísticas⁵. Esse objeto descreve uma propriedade geométrica da variedade e, em geral, é independente de quaisquer outras entidades geométricas. O leitor familiarizado com Teoria de Relatividade Geral pode associar essa quantidade ao símbolo de Christoffel de segundo tipo, e, conseqüentemente à derivadas de primeira ordem dos coeficiente métricos. Contudo, é preciso ter cautela. Essa associação só é válida para um conjunto muito específico de hipóteses (compatibilidade métrica e ausência de torção), consideradas na Relatividade Geral. No momento, o foco é manter a mente aberta pra geometria e aplicar as hipóteses geométricas na hora certa. Nesse espírito, $\bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}$ é geral, e não apresenta simetria definida nos índices inferiores. Neste trabalho, tomamos o segundo índice como aquele relacionado à dimensão de derivação, como é o caso de β na Eq. (1.5). Isso é um convenção adotada aqui e pode ser diferente em trabalhos de outros autores.

Assim:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= u^\beta(\partial_\beta v^\alpha)\partial_\alpha + u^\beta v^\alpha\bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}\partial_\lambda, \\
\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} &= \left(u^\beta\partial_\beta v^\lambda + u^\beta v^\alpha\bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}\right)\partial_\lambda.
\end{aligned} \quad (1.6)$$

Agora, queremos ser mais específicos e calcular a variação de \mathbf{v} na direção de um dos vetores de base. Para isso, basta fazer \mathbf{u} como sendo $\mathbf{u} = \partial_\nu$, e também pode ser considerada a relação $u^\mu\partial_\mu = \delta_\nu^\mu\partial_\mu$, tal que $u^\mu = \delta_\nu^\mu$ nos casos em que precisamos das componentes.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_\nu}\mathbf{v} &= \left(\delta_\nu^\beta\partial_\beta v^\lambda + \delta_\nu^\beta v^\alpha\bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}\right)\partial_\lambda \\
&= \left(\partial_\nu v^\lambda + \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu}v^\alpha\right)\partial_\lambda.
\end{aligned}$$

⁵A barra em $\bar{\Gamma}$ diferencia a conexão Riemanniana da conexão Γ que será abordada no capítulo sobre variedade de Lyra

O tensor $\nabla_{\partial_\nu} \mathbf{v}$ pode ser expandido em uma base específica ∂_λ . Os coeficientes dessa representação são definidos por $\nabla_\nu v^\lambda$, tal que:

$$\nabla_{\partial_\nu} \mathbf{v} = \left(\nabla_\nu v^\lambda \right) \partial_\lambda.$$

Assim, a variação da componente v^λ na direção da coordenada x^ν será:

$$\begin{aligned} \left(\nabla_\nu v^\lambda \right) \partial_\lambda &= \left(\partial_\nu v^\lambda + \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu} v^\alpha \right) \partial_\lambda \\ \nabla_\nu v^\lambda &= \partial_\nu v^\lambda + \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu} v^\alpha. \end{aligned} \tag{1.7}$$

A derivação covariante pode ser generalizada para o caso de um tensor geral \mathbf{T} de tipo (p, q) . Nesse caso, sua derivada covariante será designada por $\nabla_{\partial_\alpha} \mathbf{T}$ e pode ser expandida como:

$$\nabla_{\partial_\alpha} \mathbf{T} = \nabla_\alpha T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q} \left(\partial_\alpha \otimes \mathbf{dx}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{dx}^{\mu_p} \otimes \partial_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\nu_q} \right)$$

onde as componentes $\nabla_\alpha T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q}$ são escritas como:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q} &= \partial_\alpha T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q} + \bar{\Gamma}^{\nu_1}_{\lambda\alpha} T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\lambda \dots \nu_q} + \\ &+ \dots + \bar{\Gamma}^{\nu_q}_{\lambda\alpha} T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \lambda} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu_1\alpha} T_{\lambda \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q} - \dots - \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu_p\alpha} T_{\mu_1 \dots \lambda}^{\nu_1 \dots \nu_q}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Torção e Curvatura

Com a introdução da conexão, pode-se calcular a curvatura \mathbf{R} e a torção⁶ $\bar{\tau}$ na variedade de acordo com [46]:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{v}, \mathbf{u}]} \mathbf{w}$$

e

$$\bar{\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}].$$

Expandindo-se nas bases canônicas, encontram-se as respectivas expressões para as componentes:

$$\mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu} - \partial_\nu \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\mu} + \bar{\Gamma}^\rho_{\alpha\nu} \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\mu} - \bar{\Gamma}^\rho_{\alpha\mu} \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu}; \tag{1.9}$$

⁶O símbolo $\bar{\tau}$ sobre a torção $\bar{\tau}$ serve apenas para diferenciar essa quantidade da torção τ definida na variedade de Lyra.

$$\tilde{\tau}^{\alpha}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\mu} - \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Em muitas situações, será necessário trabalhar com as formas contraídas do tensor de curvatura. A primeira dessas quantidades tensoriais derivadas da curvatura da variedade é o *tensor de Ricci*, definido pela contração entre os índices λ e ν da Eq. (1.9):

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu} := \mathcal{R}^{\lambda}_{\alpha\mu\lambda} = \partial_{\mu}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\mu} + \bar{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\lambda}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\mu} - \bar{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\mu}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}. \quad (1.11)$$

Da mesma forma, o *escalar de curvatura* é definido pelo traço do tensor de Ricci:

$$\mathcal{R} := g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial^{\mu}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\lambda} + g^{\mu\nu}\bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda} - g^{\mu\nu}\bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\nu}. \quad (1.12)$$

Expressão para $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$

A quantidade $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ são os coeficientes de $\nabla_{\partial_{\mu}}(\partial_{\nu})$ representados na base ∂_{λ} . Essa quantidade, portanto, determina o comportamento dos vetores de base ao longo dos pontos da variedade. Não é de se admirar que tanto curvatura quanto torção sejam exclusivamente dependentes dela. Entretanto, essa quantidade é bastante arbitrária em sua forma mais geral. Num espaço-tempo 4-dimensional, por exemplo, possui 64 componentes distintas, o que deixa bastante complicado o estudo de um sistema físico. Em muitas situações, a própria simetria do problema ameniza essa arbitrariedade. Todavia, existem argumentos físicos e geométricos pré estabelecidos para se eliminar alguns de seus graus de liberdade. Para clarificar esse hipóteses em discussões posteriores, pode-se reescrever $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ como ⁷:

$$\bar{\Gamma}^{\beta}_{\lambda\nu} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2}\bar{M}^{\beta}_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\bar{\tau}_{\lambda\mu\nu} - \bar{\tau}_{\nu\lambda\mu} - \bar{\tau}_{\mu\lambda\nu}), \quad (1.13)$$

onde $\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel, definidos por :

$$\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\beta\sigma}(\partial_{\lambda}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\lambda\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\nu\lambda}); \quad (1.14)$$

e

$$\bar{M}^{\beta}_{\nu\lambda} = g^{\mu\beta}\nabla_{\mu}g_{\nu\lambda} - g^{\mu\beta}\nabla_{\nu}g_{\mu\lambda} - g^{\mu\beta}\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

é o tensor de compatibilidade métrica. Assim, a conexão é composta por uma parte relacionada às derivadas de primeira ordem da métrica, uma segunda parte que define a derivada covariante da métrica e uma terceira relacionada a torção.

⁷Detalhes de como isso é feito serão dados no desenvolvimento da geometria de Lyra, no nosso Capítulo 2.

Curvas Autoparalelas

Considera-se uma curva σ definida sobre a variedade \mathcal{M} , cujas coordenadas x^μ são parametrizadas de acordo com um parâmetro afim λ . Associado a essa curva, existe um vetor tangente $\mathbf{v}_\sigma = v_{(\sigma)}^\mu \partial_\mu$, onde $v_{(\sigma)}^\mu = dx^\mu/d\lambda$. Esta curva σ será uma autoparalela caso seu vetor tangente seja transportado paralelamente sobre si. Matematicamente, isso implica em dizer que a derivação covariante do vetor na sua própria direção é zero: $\nabla_{\mathbf{v}_\sigma} \mathbf{v}_\sigma = 0$. Partindo da Eq. (1.6), a expressão para as componentes do vetor tangente em termos das coordenadas, encontra-se:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}_\sigma} \mathbf{v}_\sigma &= v_{(\sigma)}^\nu \left(\nabla_{\partial_\nu} v_{(\sigma)}^\mu \right) \partial_\mu + v_{(\sigma)}^\nu v_{(\sigma)}^\mu \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \partial_\alpha, \\ 0 &= \left(\partial_\nu v_{(\sigma)}^\alpha + v_{(\sigma)}^\nu v_{(\sigma)}^\mu \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \right) \partial_\alpha, \\ \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Geodésicas e Equações de Movimento

Com a introdução da métrica, e a definição do elemento de linha (1.3), pode-se descrever o movimento de partículas livres do espaço-tempo da Relatividade Geral. Considere-se uma trajetória s definida no espaço-tempo, parametrizada pela parâmetro afim λ . O movimento é tomado como sendo aquele que minimiza a integral de ds :

$$\delta \left(\int ds \right) = 0. \quad (1.17)$$

Trajetórias que respeitam essa condição são chamadas das *trajetórias geodésicas* ou simplesmente *geodésicas*. Substituindo a Eq. (1.3) em (1.17) e realizando-se o cálculo variacional, encontra-se:

$$\begin{aligned} \delta \left(\int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} dt \right) &= 0, \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

que é conhecida com a *equação da geodésica* na Relatividade Geral.

1.1.2 Equações de Campo

O espaço-tempo da Relatividade pressupõe algumas hipóteses geométricas. A primeira delas é a de torção nula

$$\bar{\tau}^\mu_{\alpha\beta} = 0$$

e a seguinte é a de compatibilidade métrica:

$$\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0$$

que naturalmente leva a:

$$\bar{M}^{\mu}_{\alpha\beta} = 0.$$

Com essas condições, a expressão (1.13) para a conexão se reduz a:

$$\bar{\Gamma}^{\beta}_{\lambda\nu} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\}, \quad (1.19)$$

que mostra a simetria nos índices inferiores da conexão (visto que os dois índices inferiores do símbolo de Christoffel são simétricos). Com essa constatação, a curvatura (1.9) e suas formas contraídas (1.11) e (1.12) dependem apenas das primeiras derivadas da métrica.

As equações de campo da Relatividade Geral são oriundas de um princípio variacional aplicado sobre a ação de Einstein-Hilbert:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} \mathcal{R}(\partial g) + \mathcal{L}_{\text{matéria}}(\phi_i, \partial\phi_i) \right], \quad (1.20)$$

onde g é o determinante da métrica, \mathcal{R} o escalar de curvatura e $\mathcal{L}_{\text{matéria}}(\phi_i, \partial\phi_i)$ a lagrangiana que depende dos campos de matéria ϕ_i (Aqui, i é um índice que "varre" todos os campos considerados; ou seja, ϕ_i não é um campo tensorial, mas sim, representa n campos de natureza qualquer).

Aplicando as variações com respeito aos coeficientes métricos, encontra-se:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.21)$$

onde o tensor de energia-momento métrico é dado por:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{matéria}} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matéria}}}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (1.22)$$

As variações com respeito aos campos ϕ_i dão origem às equações dos campos de matéria:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matéria}}}{\partial \phi_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matéria}})}{\partial (\partial_{\mu} \phi_i)} = 0. \quad (1.23)$$

1.1.3 Limitações da Relatividade Geral

Com a Teoria da Relatividade Geral foi possível explicar uma vasta gama de fenômenos gravitacionais numa ampla faixa de escalas. Devido a esse fato, a RG tem figurado ao longo de mais de um século como a teoria gravitacional vigente. Contudo, o recente avanço da tecnologia experimental junto à evolução na compreensão dos métodos de

física teórica alimentam uma vasta lista de lacunas que têm posto em cheque esse *status quo*. Como exemplo de problemas fenomenológicos, pode-se citar a incoerência da massa de aglomerados galácticos com o teorema do virial [47], o padrão das curvas de rotação de galáxias espirais [48], a aceleração cosmológica recente [49, 50].

Essas constatações são acomodadas dentro do contexto da Relatividade Geral pela inserção de componentes não observadas, designadas por matéria e energia escuras. Na cosmologia, esse modelo é chamado de Λ CDM (Λ de constante cosmológica e CDM de *cold dark matter*). Porém, assumir a existência dessas componentes sem a devida observação fenomenológica dos efeitos dos campos e/ou partículas a elas atrelados é, de certo modo, uma hipótese de trabalho. (Esse problema talvez seja o "éter" da geração moderna de pesquisadores.) Obviamente, dentro da comunidade acadêmica, esse cenário é bastante incômodo, ainda mais, quando se leva em a consideração que a "existência" dessas componentes não é suficiente para explicar a totalidade dos fenômenos observados. Concerne a isso, duas grandes questões permanecem em aberto no que se refere a medição dos valores de dois dos parâmetros do modelo padrão da cosmologia atual (Λ CDM): são as tensões do parâmetro de Hubble H_0 e da amplitude das flutuações quadradas médias na densidade de massa em uma esfera co-móvel de diâmetro 8 Mpc, ou σ_8 . Referente a H_0 , as medições desse parâmetro pelos dados de Radiação Cósmica de Fundo (CMB) presumindo Λ CDM diferem da medição local direta pelo método de calibração sucessiva (*local distance ladder measurements*) realizado pela colaboração SHOES [51]. Já para σ_8 , são encontradas discrepâncias estatísticas entre a medição pelo satélite Planck em relação à medição obtida via grandes compilações de distorções no domínio do redshift [52].

Além disso, existem desconfortos teóricos acerca da RG. Dentre eles, pode-se citar o inevitável aparecimento de singularidades no espaço-tempo da RG [53, 54], e principalmente, o fato desta ser a única interação fundamental não renormalizável [55]. A constatação desses fatos vem motivando a investigação de teorias alternativas de gravitação

1.2 Teorias de Gravitação Modificadas

As abordagens de modificação ou generalização da Relatividade Geral são extremamente diversas e podem ser rústicamente agrupadas de acordo com características em comum. Essa divisão é meramente um guia para compreensão e não deve ser levada como uma regra, visto que em alguns casos, uma teoria pode muito bem se encaixar em mais de um cenário⁸. O primeiro grupo é aquele de teorias de ordem superior, onde se adicionam invariantes ao integrando da ação de Einstein-Hilbert (vide Fig. 1.1). Esses invariantes dependem exclusivamente dos mesmos campos da Relatividade Geral de tal forma que não existe adição de graus de liberdade; o número de equações de campo é o mesmo que

⁸Nessa abordagem, não estão sendo consideradas as teorias que visam a quantização do campo gravitacional.

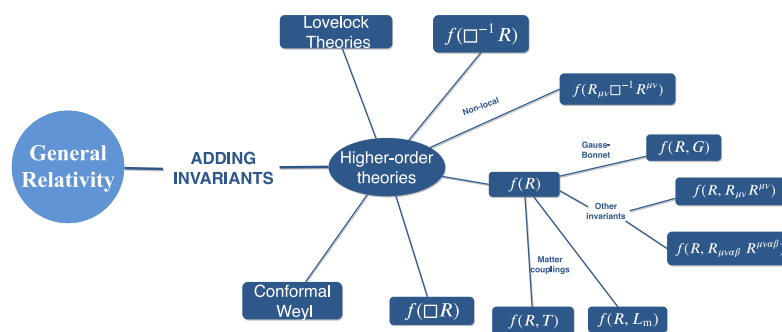


Figura 1.1 – Representação esquemática das teorias de gravitação de ordem superior definidas pela adição de invariantes à ação de Einstein-Hilbert. Fonte: [5]

o da RG, mas as teorias de ordem superior e a RG se diferem funcionalmente. Esse grupo é conceitualmente o mais simples, ainda que as equações possam ser extremamente complicadas de se resolver.

Outro grupo de teorias é aquele onde o fenômeno gravitacional é descrito não só por um, mas por diversos campos. Essas teorias, por muitas vezes, são designadas por teoria Tensorial-Vetorial-Escalar e, em inglês, chamadas de TeVeS (Fig.1.2).

Por último, destaca-se o grupo de teorias obtidas pela alteração de princípios geométricos. Esse grupo é bastante extenso e de complexidade bastante grande, visto que, na formulação da Relatividade Geral, Einstein apresentou uma estrutura geométrica resultante de um conjunto restrito de hipóteses adotadas. Dentre essas hipóteses estão a adoção da variedade riemanniana para modelagem do espaço-tempo, a forma do intervalo infinitesimal do espaço-tempo, a integrabilidade do comprimento de vetores e a ausência de torção [27]. Isso abriu precedentes para formulação de teorias alternativas de gravitação através de mudanças dessas considerações [56, 57, 58, 59]. A Fig. 1.3 mostra exemplos da categoria de gravitação modificada via alteração da geometria subjacente.

Não é o objetivo desse trabalho a exploração de todas as teorias esquematizadas nas Figs. 1.1, 1.2 e 1.3. Entretanto, nas próximas subseções, vamos tecer alguns comentários sobre duas teorias modificadas que auxiliarão na compreensão da evolução dos conceitos necessários à formulação da Teoria Escalar-Tensorial na variedade de Lyra; tratam-se das teorias de Jordan-Brans-Dicke e de Weyl. Além disso, é importante comentar sobre a teoria gravitacional de Senn & Dunn, formulada como uma teoria gravitacional obtida de um princípio variacional na variedade de Lyra. Será exposto o contexto histórico dessa formulação e explicado o porquê, de acordo com o autor desse trabalho, essa teoria não pode ser classificada da forma como os autores propõem. A teoria de Senn & Dunn manteve um legado como sendo a "teoria de gravitação de Lyra". Entretanto, em sua formulação (vide Ref. [1]), os autores cometeram um equívoco no procedimento variacional que levou a obtenção de um conjunto de equações que, apesar de terem o seu

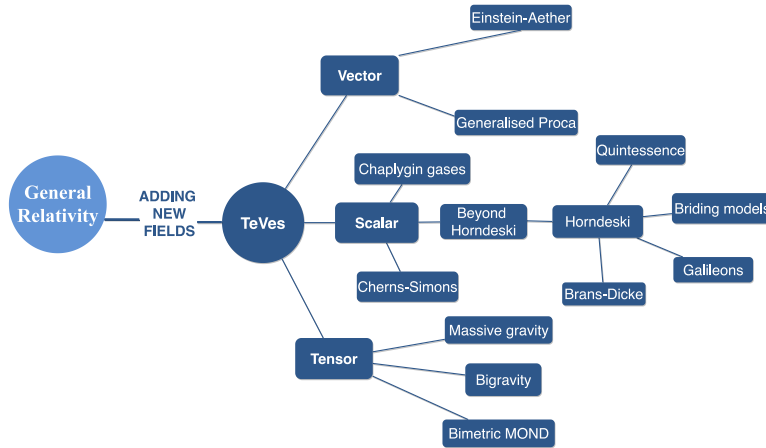


Figura 1.2 – Representação esquemática das teorias de gravitação obtidas pelo acoplamento de novos campos à ação de Einstein-Hilbert. **Fonte:** [5]

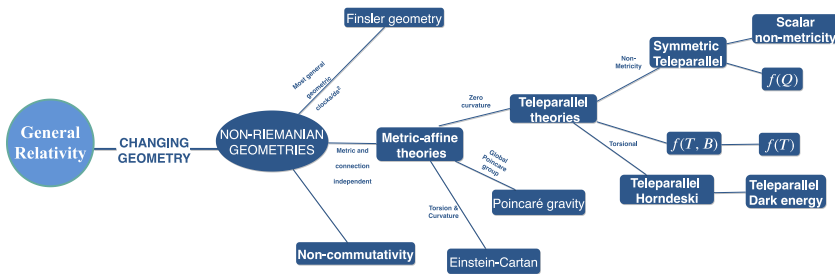


Figura 1.3 – Representação esquemática obtidas pela alteração de princípios geométricos distintos daqueles da Relatividade Geral. **Fonte:** [5]

valor heurístico, não podem ser obtidas via extremização da ação de Einstein-Hilbert na variedade de Lyra.

1.2.1 Teoria de Jordan-Brans-Dicke

A teoria de Jordan-Brans-Dicke tem como objetivo aderir a gravitação relativística ao princípio de Mach, ainda que parcialmente, via modificação da formulação original da Relatividade Geral de Einstein. Diferentemente do que ocorre na Relatividade Geral, onde o tensor métrico é a única quantidade descrevendo a gravitação, a teoria de Jordan-Brans-Dicke considera um campo escalar ϕ além da métrica [60]. Dessa forma, essa teoria se encaixa no grupo de teorias com campos adicionais. Esse formalismo envolve necessariamente uma constante adimensional ω não determinada a priori⁹.

O desenvolvimento básico da teoria se deu partindo do princípio variacional geral da teoria de Einstein, cuja a ação é dada na Eq. (1.20). Se o parâmetro (de acoplamento) da gravitação de Newton G é constante, o princípio de estacionariedade da ação dá origem

⁹É comum encontrar na literatura comentários de que a teoria de Brans-Dicke recupera a Relatividade Geral no limite de $|\omega| \rightarrow \infty$ (veja por exemplo, a Ref. [61]). Porém, nem sempre essa afirmação é válida. Isso pode ser diretamente constatado através de um contra-exemplo na Ref. [62].

às equações de campo de Einstein (1.21). A invariância por difeomorfismos presente em (1.20) leva naturalmente à conservação do tensor energia-momento.

A ideia de Brans para generalização foi propor a multiplicação da densidade de lagrangiana pela constante G^{-1} e elevar G^{-1} à posição de um novo campo escalar acoplado com a matéria e a gravitação, redesignando-o por ϕ . Então, deve-se adicionar uma densidade de lagrangiana envolvendo derivadas de primeira ordem em ϕ para manter as equações de campo de ϕ também a derivadas de segunda ordem desse campo. Por simplicidade, Brans optou por manter esse termo da lagrangiana em primeira ordem em ϕ e primeira ordem em $\partial_\mu\phi$:

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi \mathcal{R}(\partial g) - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 16\pi G \mathcal{L}_{\text{matéria}} \right] = 0. \quad (1.24)$$

Note o aparecimento da constante adimensional ω . Essa constante foi induzida dessa maneira pela escolha de Brans sobre a forma do setor da densidade de lagrangiana dependente de ϕ . Flexibilizações nessa exigência dão origem a teorias de gravitação mais gerais, conforme pode ser conferido na Ref. [63].

A variação com respeito aos coeficientes métricos dá origem à equação de campo análoga às Equações de Einstein:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} - \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) + \frac{1}{\phi} \left[\nabla_{(\mu} \partial_{\nu)} \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right] = \frac{8\pi G}{\phi} T_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento associado à densidade de lagrangiana de matéria. Por sua vez, a variação da ação com respeito ao campo escalar ϕ dá origem à equação de campo:

$$\square \phi - \frac{1}{2\phi} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + \frac{\phi}{2\omega} \mathcal{R} = 0. \quad (1.26)$$

Se comparada à Teoria da Relatividade Geral, a teoria de Brans-Dicke apresenta apenas um parâmetro extra: a constante ω . É possível avaliar a viabilidade da teoria utilizando-se dos erros experimentais da gravitação para estabelecer limites à ω . Com os teste experimentais nas escalas de Sistema Solar, via aproximação Pós-Newtoniana, pode-se estabelecer a condição de que [64, 65]:

$$\omega > 40000.$$

A escala de grandeza desse valor é um problema, pois seria esperado que os parâmetros de acoplamento adimensionais estivessem na ordem de grandeza da unidade. Ainda que a teoria de Brans-Dicke não possa ser considerada como uma alternativa viável à Relatividade Geral da forma como foi inicialmente proposta, ela serve de molde para a construção de uma classe mais geral de teorias que incluem um campo escalar.

1.2.2 Teoria de Weyl

No cenário de teorias modificadas de gravitação, a teoria unificada de Hermann Weyl, publicada em 1918, ganha destaque, uma vez que traz à tona a possibilidade do uso da liberdade de adoção de hipóteses geométricas para formulação de uma estrutura que acomoda tanto gravitação quanto eletromagnetismo [66]. Na geometria de Weyl, a mudança do comprimento de vetores sob transporte paralelo é não nula e depende de uma nova quantidade vetorial A_μ que desempenha o papel de potencial eletromagnético. Uma importante constatação é a de que a estrutura apresentada exibe um novo tipo de simetria, chamada *simetria de gauge*, além da invariância por difeomorfismos.

Apesar da simplicidade, da beleza matemática e do grande potencial de unificação de teorias fundamentais com base em conceitos geométricos simples, a teoria de Weyl apresenta problemas de natureza física. Em primeiro lugar, conforme apontado por Einstein, a hipótese de não integrabilidade do comprimento faz com que a frequência das linhas espectrais emitidas por átomos dependa de sua história passada e, como tal, não permaneceriam constantes [67]. Além disso, a densidade de lagrangiana invariante por ações de difeomorfismos e por mudanças de gauge dá origem a equações de campo de 4ª ordem, o que não é desejável em uma teoria física [68]. Apesar disso, o trabalho de Weyl é amplamente reconhecido, uma vez que foi o pioneiro na abordagem de teorias de gauge, conceito no qual se apoia grande parte dos trabalhos em física moderna. Uma forma de se reduzir os problemas inerentes a teoria de Weyl consiste em impor que o vetor deslocamento de Weyl seja irrotacional, ou seja $A_\mu = \partial_\mu \sigma$ [69]. Teorias com essa característica, chamadas de WIST (de *Weyl integrable spacetime*) têm despertado a atenção dos pesquisadores e, nos anos recentes, têm sido constantemente exploradas [70]. Nessa abordagem, a unificação entre gravitação e eletromagnetismo é posta de lado, e o WIST é visto como um teoria escalar-tensorial de gravitação [71, 72, 73].

1.2.3 Teoria de Sen & Dunn

Uma outra forma de se manter a integrabilidade do comprimento de vetores foi proposta por Lyra em 1951 através da adoção de uma função de gauge ϕ como parte integrante da estrutura geométrica da variedade [74]. Essa consideração altera naturalmente a definição dos referenciais físicos, uma vez que estes, na geometria de Lyra, dependem tanto das coordenadas quanto da função de escala. Lyra propõe que a conexão afim que descreve o transporte paralelo seja definida pela soma de dois setores; um deles dependendo de métrica e ϕ , e o segundo dependendo exclusivamente de uma 1-forma A_μ , tal que o tensor de curvatura, o tensor de torção e suas respectivas formas contraídas serão funções, não só de métrica, mas também de ϕ e A_μ [75].

Embora tenha descrito a estrutura geométrica, Lyra não formulou uma teoria de campos onde os entes geométricos desempenham o papel de campo gravitacional. A primeira proposta nesse sentido foi realizada por D. K. Sen, em 1957, na formulação de

um modelo cosmológico estático onde a função de escala aparece como responsável pelo aparecimento do *redshift* das linhas espectrais galácticas [76]. Para isso, Sen propôs a obtenção das equações de campo através do princípio variacional

$$\delta \left(\int d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \mathcal{R} \right) = 0, \quad (1.27)$$

onde tanto o elemento de integração $d^4x \phi^4 \sqrt{-g}$ quanto o escalar de curvatura \mathcal{R} são invariantes sob mudanças de referenciais de Lyra. Como resultado, apresentou as equações

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \frac{3}{2}A_\mu A_\nu - \frac{3}{4}g_{\mu\nu}A_\lambda A^\lambda = \varkappa T_{\mu\nu} \quad (1.28)$$

onde A_μ é uma 1-forma que, segundo o autor, é consequência direta da função de gauge ϕ no transporte paralelo, ainda que ele não deixe claro a relação entre A_μ e ϕ . Nessa equação, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ e \mathcal{R} são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura calculados com os símbolos de Christoffel, como é feito na Relatividade Geral. Para derivação de (1.28), Sen utilizou a condição de fixação de gauge $\phi = 1$, mantendo livre as componentes de A_μ e tomando a variação da ação com respeito às componentes métricas. Posteriormente, Sen mostrou que as geodésicas na variedade de Lyra não são, em geral, curvas autoparalelas [77]. Entretanto, como caso específico, é possível garantir o autoparalelismo das geodésicas com a condição,

$$A_\mu = \frac{1}{\phi} \partial_\mu \ln \phi^2. \quad (1.29)$$

Após a medição da radiação cósmica de fundo e a comprovação do modelo do Big-Bang [78], a Eq. (1.28) foi extensamente utilizada para modelagem da dinâmica cosmológica [79, 80, 81, 82, 83, 84]. Em 1971, Sen e Dunn deram um passo adiante na tentativa de se formalizar uma teoria escalar-vetorial na variedade de Lyra [1]. Para isso, os autores, reconhecendo a influência simultânea de $g_{\mu\nu}$ e A_μ nos fenômenos gravitacionais, realizaram o procedimento variacional sem a fixação de gauge, tomando a variação da ação com respeito às componentes métricas e às componentes de A_μ . A equação de campo oriunda das variações métricas tem (1.28) como o caso limite de $\phi = 1$. Por sua vez, o segundo conjunto de equações, dado por

$$A_\mu = -\frac{1}{2\phi} \partial_\mu \ln \phi^2 \quad (1.30)$$

relaciona diretamente A_μ com ϕ . Essa relação é problemática, primeiro, porque é explicitamente incompatível com a condição de autoparalelismo geodésico (1.29), e, como consequência, as geodésicas métricas e afins não coincidem na Teoria Escalar-Tensorial formulada por Sen & Dunn. Segundo, porque a condição de fixação de gauge utilizada na dedução de (1.28), ou seja, $\phi = 1$, leva ao anulamento de A_μ na Eq. (1.30).

A não imposição de uma condição de gauge nessa teoria faz com seja possível tra-

balhar com equações diferenciais acopladas para os coeficientes métricos e a função ϕ . Nesse caso, Sen & Dunn deixam de lado a Eq. (1.28), válida apenas num gauge específico, e combinam os dois conjuntos de equações numa única relação:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} - \frac{3}{2\phi^2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{3g_{\mu\nu}}{4\phi^2}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} = \varkappa\phi^2T_{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

Essa expressão chama a atenção, uma vez que pode ser interpretada como um caso específico da teoria de Brans-Dicke [60]. Os autores propuseram uma solução esfericamente simétrica para (1.31) dada em termos de séries de potências em 1971 [1]. No ano seguinte, Halford encontrou uma solução analítica esfericamente simétrica fechada em coordenadas isotrópicas [85].

Contudo, Jeavons, McIntosh & Sen, no ano de 1975, embora reconheçam e importância heurística da Eq. (1.31), mostraram que esta, diferentemente do que está proposto em [1], não pode ser obtida do princípio de mínima ação (1.27) [86]. Através dos nossos próprios estudos [2], foi possível concluir que durante o procedimento variacional, a relação foi calculada negligenciando-se a contribuição dos termos $\int d^4x\phi^2\delta(\sqrt{-g}\mathcal{R})$ e $3\int d^4x\phi^3\delta((\sqrt{-g}A_\mu g^{\mu\nu})_{,\nu})$. A equação de campo que respeita o princípio supracitado surge da variação da ação com respeito as componentes do tensor métrico, ao passo que a condição de autoparalelismo das geodésicas $A_\mu = \phi^{-1}\partial_\mu \ln \phi^2$ surge naturalmente da variação da ação com respeito a A_μ .

Através dos estudos sobre teorias de gravitação na variedade de Lyra, fica claro que, de fato, a presença de um termo de escala na lei de transformação de vetores induz naturalmente termos extras aos símbolos de Christoffel na conexão. No entanto, não nos parece um procedimento estritamente necessário introduzir uma 1-forma A_μ como um ente descorrelacionado de ϕ para descrição desses termos, visto que as próprias equações de campo estabelecem uma relação direta entre A_μ e ϕ , tanto no trabalho de Sen & Dunn de 1971 [1] quanto da teoria de Jeavons, McIntosh & Sen de 1975 [86].

As afirmações realizadas nos dois últimos parágrafos serão justificadas nos estudos da variedade de Lyra e da teoria de gravitação à ela associada. Começamos a relatar esses estudos a partir do próximo capítulo desta tese.

Capítulo 2

Geometria de Lyra

Após um pouco de contextualização histórica, o foco será direcionado à construção de uma teoria de gravitação sobre a variedade de Lyra. Esse procedimento é longo e, como a base geométrica da teoria está sendo alterada, ele deve ser feito com bastante cuidado. Muitos autores adotam as equações de campo de Sen & Dunn como as equações do campo gravitacional, assumindo-as como os equivalentes das equações de Einstein para a variedade de Lyra [87, 88, 89, 90]. Essa constatação é falsa. A equação de Einstein da variedade de Riemann é obtida via princípio variacional com densidade de lagrangiana dada pelo escalar de curvatura. Assim, um equivalente das equações de Einstein seria obtido tomando a generalização de Lyra para a ação de Einstein-Hilbert e realizando as variações. O fato dessas equações não serem oriundas de um princípio variacional não é um problema, visto que não existe nada na natureza que obrigue o campo gravitacional a respeitar algum princípio de ação extrema. Contudo, essas equações foram resolvidas com falsas premissas ou falsas afirmações. Como a geometria da variedade foi alterada, temos que realizar considerações geométricas em todas as etapas da análise, e não apenas na obtenção das equações de campo. Em [91, 92] por exemplo, os autores adotam o elemento de linha:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

como sendo a forma do elemento de linha esfericamente simétrico. O leitor adaptado à Relatividade Geral pode não encontrar problema nessa afirmação, mas na verdade, ela não é real. Esse elemento de linha nem mesmo é um invariante de Lyra. Um elemento de linha invariante a uma isometria deve necessariamente passar por uma solução da equação de Killing considerando os geradores da transformação desejada. A equação de Killing por sua vez, depende da geometria considerada. Ou seja, na geometria de Lyra, a expressão para o elemento de linha esfericamente simétrico é diferente daquela para a geometria Riemanniana. A lista de expressões advindas da geometria Riemanniana que são inválidas na variedade de Lyra é gigantesca. Por isso, vamos construir do zero grande parte do ferramental necessário para descrever a gravitação no contexto da geometria de Lyra.

A adoção de uma geometria alternativa à geometria Riemanniana para modelar o espaço-tempo traz consigo uma série de desafios. A proposta de Lyra de se permitir o escalonamento local dos vetores de base de um determinado referencial (através de uma função de escala ϕ) abriu discussões sobre a correta forma de se parametrizar os novos

graus de liberdade. Lyra, no desenvolvimento de sua teoria, parametrizou a influência dessa função de escala na conexão afim em termos de um 4–vetor A_μ . Nessa abordagem, as equações de campo derivadas através da ação invariante de Lyra de Einstein-Hilbert estabelece uma relação direta entre A_μ e as derivadas ordinárias de ϕ . Nesse sentido, nos pareceu muito mais natural a reconstrução da estrutura geométrica em termos de ϕ apenas, sem necessidade de introduzir o 4–vetor A_μ .

2.1 Sistemas Referenciais de Lyra

Para definir as propriedades do que futuramente será dito "geometria de Lyra", considera-se um espaço euclidiano \mathbb{R}^N , onde $N \in \mathbb{Z}_+^*$. Dessa forma, assumindo a existência de subconjunto \mathcal{M} de \mathbb{R}^N , \mathcal{M} será chamado de "variedade diferenciável" caso apresente determinadas propriedades que serão discutidas na sequência. Em primeiro lugar, assume-se que " \mathcal{M} é uma superfície n -dimensional suave", onde $\{n \in \mathbb{Z}_+^* | n < N\}$. Contudo, é necessário definir exatamente o que essa afirmação significa. Para isso, deve-se entender o conceito chave de *sistemas referenciais*, o que será abordado mais adiante. Por enquanto, devemos nos concentrar apenas na ideia de que \mathcal{M} é uma superfície suave de dimensão n contida em \mathbb{R}^N .

Agora, considera-se um conjunto aberto de \mathcal{M} designado por U . Para caracterização de cada um dos elementos de \mathcal{M} na geometria de Lyra, introduz-se um mapa injetivo $\chi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ e também um mapa $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^*$, chamado de *mapa de escala*. Conforme representado na Fig. 2.1, a aplicação χ relaciona os elementos de U a uma região $\chi(U)$ de um espaço euclidiano \mathbb{R}^n , onde n é a dimensão de \mathcal{M} . Dessa forma, aplicando χ em um ponto $P \in U$ de \mathcal{M} , obtém-se uma n –upla de números $(x_P^1, x_P^2, \dots, x_P^n)$ que designam um ponto em \mathbb{R}^n . Esse conjunto de números recebe o nome de *coordenadas* de P em χ e é denotado por $x_P := (x_P^1, x_P^2, \dots, x_P^n)$:

$$x_P := \chi \circ P, \tag{2.1}$$

onde adotou-se a equivalência das notações $\chi \circ P$ e $\chi(P)$. Para garantir que as coordenadas respeitem a topologia e a suavidade de \mathcal{M} , assume-se que χ seja um homeomorfismo, tal que χ e sua inversa χ^{-1} sejam mapas contínuos e também que $\chi \in C^\infty$, onde C^∞ designa o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis [93].

Definição 2.1. Seja \mathcal{M} um subconjunto de \mathbb{R}^N . Um *sistema de coordenadas* em \mathcal{M} é um par (U, χ) onde $U \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto de \mathcal{M} e $\chi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ é um mapa injetivo com as seguintes propriedades:

- a. χ é um homeomorfismo do conjunto aberto U em um conjunto aberto $\chi(U)$ (χ respeita a topologia de \mathcal{M}); e

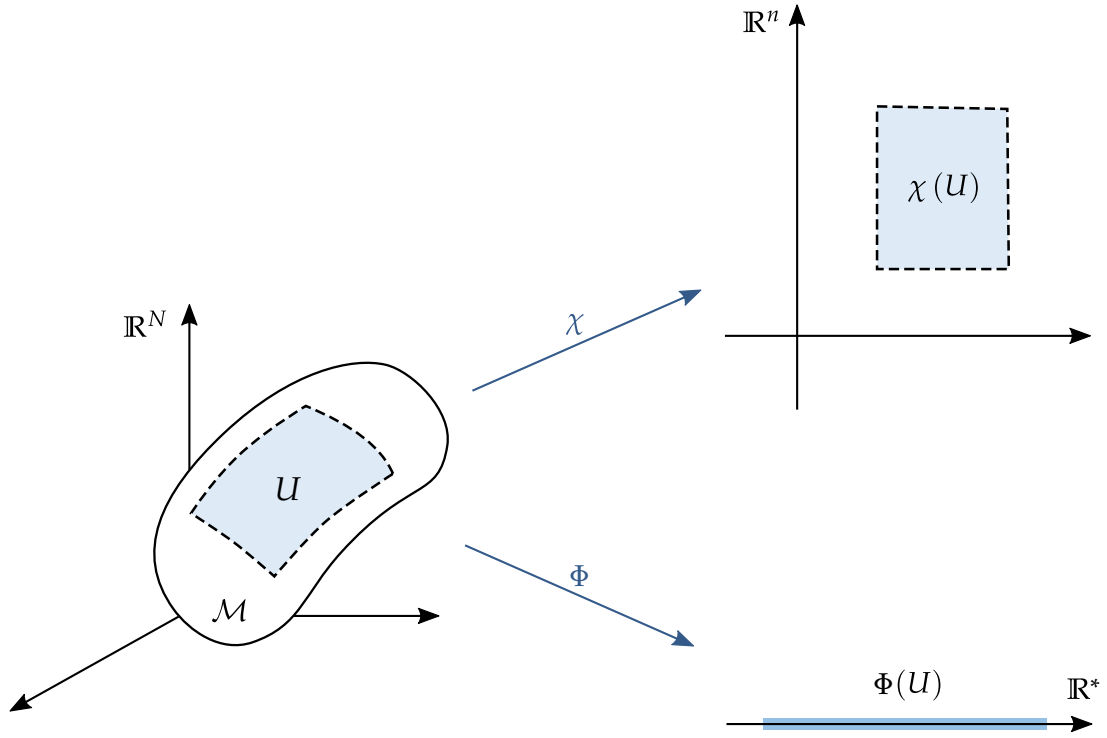


Figura 2.1 – Representação do sistema de coordenadas e a função de escala nos pontos da variedade \mathcal{M} .

b. $\chi \in C^\infty$ (χ respeita a suavidade de M).

Por outro lado, o mapa de escala, assumidamente C^∞ , relaciona cada um dos pontos de U à um número real positivo $\Phi \circ P$. Considerando uma parametrização específica χ , $\Phi \circ P$ pode ser encarado como um função das coordenadas por intermédio da identidade $\chi^{-1} \circ \chi = \mathbf{1}$:

$$\Phi \circ P = \Phi \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ P = (\Phi \circ \chi^{-1}) \circ x_P.$$

Dessa relação, percebe-se que $\Phi \circ \chi^{-1}$ é uma aplicação que recebe as coordenadas de P e as mapeia em um número real. Por conta disso, define-se a *função de escala* $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ como $\phi := \Phi \circ \chi^{-1}$, tal que:

$$\Phi \circ P = \phi(x_P). \quad (2.2)$$

Na estrutura geométrica de Lyra, um *sistema referencial* será caracterizado, não apenas pelo sistema de coordenadas, mas também pelo mapa de escala.

Definição 2.2. Seja \mathcal{M} um subconjunto de \mathbb{R}^N . Um *sistema referencial* em \mathcal{M} é a tríade (U, χ, Φ) onde (U, χ) compõem um sistema de coordenadas, conforme Def. 2.1, e $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^*$ é um mapa de escala C^∞ .

Deve-se considerar um sistema referencial específico (U_1, χ_1, Φ_1) como uma possível

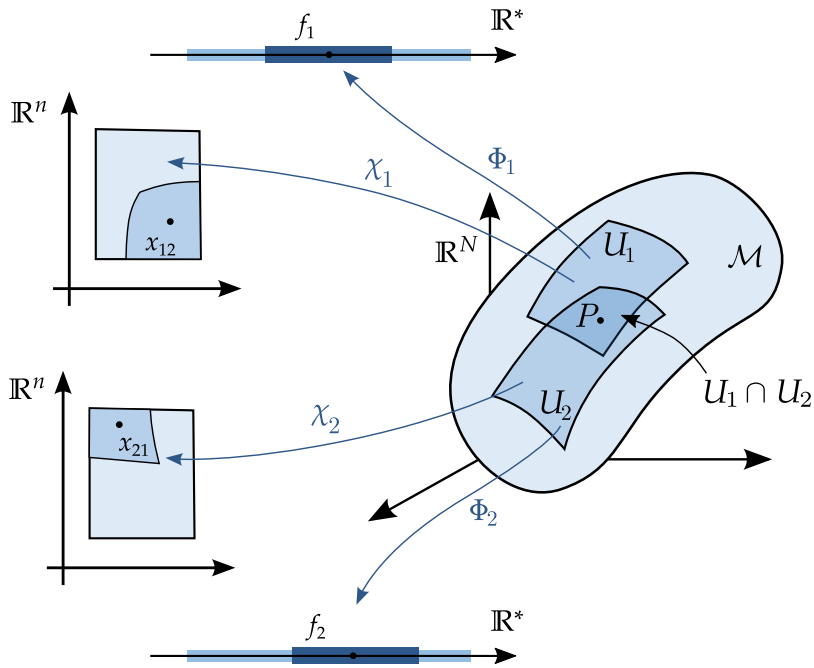


Figura 2.2 – Representação do sistema de coordenadas e a função de escala nos pontos da variedade \mathcal{M} .

parametrização de uma “superfície suave”. Contudo, não é requisito que tal parametrização contemple por completo a superfície \mathcal{M} . Pode-se pensar em um conjunto de parametrizações (U_k, χ_k, Φ_k) , com $k = 1, \dots, I$, em que I é uma quantidade de referenciais suficiente para que a união de todas as regiões U_k contenha \mathcal{M} ; ou seja:

$$\mathcal{M} \subset \bigcup_{k \in I} U_k.$$

É possível que alguns desses referenciais apresentem regiões U_k que se interceptem. Assumindo que esse seja o caso de dois referenciais (U_1, χ_1, Φ_1) e (U_2, χ_2, Φ_2) , cf. Fig. 2.2, os pontos $P \in U_1 \cap U_2$ na região de intersecção $U_1 \cap U_2$ podem ser descritos por dois sistemas de referência, no mínimo. Nessa situação, existe a possibilidade de troca de referencial. Para investigar isso, definem-se dois conjuntos \mathbb{R}^n :

$$x_{12} := \chi_1(U_1 \cap U_2) \quad \text{e} \quad x_{21} := \chi_2(U_1 \cap U_2)$$

e dois conjuntos em \mathbb{R}^* :

$$f_1 = \Phi_1(U_1 \cap U_2) \quad \text{e} \quad f_2 = \Phi_2(U_1 \cap U_2).$$

As funções de transição que conectam x_{12} e x_{21} são:

$$\chi_{1 \rightarrow 2} := \chi_2 \circ \chi_1^{-1} \quad \text{e} \quad \chi_{2 \rightarrow 1} := \chi_1 \circ \chi_2^{-1}. \quad (2.3)$$

Deste modo, sendo $x = \chi_1(P)$ e $y = \chi_2(P)$ as coordenadas de P nos referenciais (U_1, χ_1, Φ_1) e (U_2, χ_2, Φ_2) respectivamente, elas se relacionam pelas funções de transição através de:

$$y = \chi_{1 \rightarrow 2}(x) \quad \text{e} \quad x = \chi_{2 \rightarrow 1}(y).$$

Uma vez que os mapas χ são homeomorfismos, então, segue-se que as funções de transição também o são. Além disso, demanda-se que $\chi_{1 \rightarrow 2}$ e $\chi_{2 \rightarrow 1}$ sejam funções suaves.

De forma análoga, as funções que conectam f_1 e f_2 são definidas como:

$$f_{1 \rightarrow 2} := \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} \quad \text{e} \quad f_{2 \rightarrow 1} := \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}, \quad (2.4)$$

por intermédio das quais as funções de escala de cada referencial $\phi_1(x) = \Phi_1(P)$ e $\phi_2(y) = \Phi_2(P)$ se relacionam:

$$\phi_2(y) = f_{1 \rightarrow 2}(\phi_1(x)) \quad \text{e} \quad \phi_1(x) = f_{2 \rightarrow 1}(\phi_2(y)).$$

Assume-se aqui que $f_{1 \rightarrow 2}$ e $f_{2 \rightarrow 1}$ sejam aplicações C^∞ .

Posto que as funções de transição $\chi_{1 \rightarrow 2}$, $\chi_{2 \rightarrow 1}$, $f_{1 \rightarrow 2}$ e $f_{2 \rightarrow 1}$ são suaves, diz-se que os sistemas referenciais (U_1, χ_1, Φ_1) e (U_2, χ_2, Φ_2) são *suavemente conectados*.

Definição 2.3. Seja \mathcal{M} um subconjunto de \mathbb{R}^N . Um *atlas de Lyra* em \mathcal{M} é uma família de referenciais de Lyra $(U_k, \chi_k, \Phi_k)_{k \in I}$ com as seguintes propriedades:

- a. $\mathcal{M} \subset \bigcup_{k \in I} U_k$;
- b. quaisquer dois sistemas referenciais de Lyra são suavemente conectados.

2.2 Variedades de Lyra

Considera-se um subconjunto $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ equipado com um atlas de Lyra $(U_k, \chi_k, \Phi_k)_{k \in I}$. Suponha ainda um mapa contínuo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa um número real a cada elemento de \mathcal{M} . Seja $P \in \mathcal{M}$ um ponto arbitrário em \mathcal{M} . Deseja-se agora definir um significado para a afirmação de que “ F é diferenciável no ponto P ”. Tomando um sistema referencial (U_1, χ_1, Φ_1) tal que $P \in U_1$, as coordenadas desse ponto serão $x_P = \chi_1(P)$. Pode-se representar F em termos de uma função euclideana ordinária $f_1 := F \circ \chi_1^{-1}$ com

domínio em U_1 . Assim:

$$F \circ P = F \circ \chi_1^{-1} \circ \chi_1 \circ P = f_1(x_P).$$

No decorrer do capítulo, f_1 será chamada de *função representativa euclidiana de F* , ou apenas de *representativa*. Se F em si é definida em uma vizinhança de P , vê-se que a representativa euclidiana f_1 é definida na vizinhança das coordenadas x_P . Consequentemente, pode-se fazer a seguinte definição:

Definição 2.4. Seja um mapa $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Tomando um sistema referencial específico (U_1, χ_1, Φ_1) tal que o ponto $P \in U_1$ tenha coordenadas $x_P = \chi_1(P)$, denomina-se a *representativa euclidiana de F* neste referencial o mapa $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f_1 := F \circ \chi_1^{-1}$. Assim, F é diferenciável no ponto P se e somente se a representativa euclidiana f_1 é diferenciável no senso usual nas coordenadas x_P .

À primeira vista, é temerário que essa definição não tenha significado uma vez que foi necessária a escolha de um referencial para estabelecê-la. Contudo, assumindo que f_1 é diferenciável em x_P , em um outro referencial (U_2, χ_2, Φ_2) onde P tenha coordenadas $y_P := \chi_2(P)$, é possível garantir que a outra representativa euclidiana de F , dada por $f_2 = F \circ \chi_2^{-1}$, seja diferenciável em y_P :

$$\begin{aligned} f_2 &= F \circ \chi_2^{-1} = F \circ (\chi_1^{-1} \circ \chi_1) \circ \chi_2^{-1} = f_1 \circ \chi_1^{-1} \circ (\chi_1 \circ \chi_2^{-1}) \\ &= f_1 \circ \chi_{2 \rightarrow 1}, \end{aligned}$$

onde usou-se a Eq. (2.3). Conforme proposto, os sistemas de coordenadas são relacionados suavemente e, por conta disso, a função de transição $\chi_{2 \rightarrow 1}$ é uma função suave. Dessa forma, garante-se a diferenciabilidade de f_2 se f_1 assim também for. Por conta do atlas tornar possível introduzir o conceito do mapa diferenciável $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, é dito que *o atlas gera uma estrutura diferenciável em \mathcal{M}* .

Agora, suponha que se tenham dois atlas $(U_k, \chi_k, \Phi_k)_{k \in I}$ e $(\bar{U}_j, \bar{\chi}_j, \bar{\Phi}_j)_{j \in I}$ que cobrem o mesmo subconjunto \mathcal{M} . Se todos os sistemas referenciais no primeiro atlas são suavemente relacionados a todos os sistemas referenciais no segundo atlas, então, eles vão gerar a mesma estrutura diferenciável. Ou seja, um mapa contínuo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ será diferenciável em relação ao primeiro atlas exatamente quando for diferenciável em relação ao segundo. Isso motiva o seguinte conceito:

Definição 2.5. Um atlas de Lyra $(U_k, \chi_k, \Phi_k)_{k \in I}$ em um subconjunto \mathcal{M} é chamado *maximal* se tem a seguinte propriedade: sempre que se existir um referencial $(\bar{U}, \bar{\chi}, \bar{\Phi})$ suavemente conectado a todos os referenci-

ais (U_k, χ_k, Φ_k) no atlas, então, $(\bar{U}, \bar{\chi}, \bar{\Phi})$ pertence ao atlas em si; isto é, $(\bar{U}, \bar{\chi}, \bar{\Phi}) = (U_k, \chi_k, \Phi_k)$ para algum $k \in I$.

Então, um atlas maximal compreende todas as mudanças de coordenadas suaves em \mathcal{M} . Para um dado atlas $(U_k, \chi_k, \Phi_k)_{k \in I}$, pode-se facilmente gerar um atlas maximal simplesmente suprimindo-o com todos os referenciais que são suavemente conectados com ele.

Pode-se formalizar a definição de uma estrutura diferenciável como:

Definição 2.6. Uma estrutura diferenciável no subconjunto euclidiano \mathcal{M} é um atlas maximal em \mathcal{M} .

Finalmente, pode-se enunciar uma definição precisa do que se entende por “superfície suave”, que, de agora em diante, será referida com uma *variedade diferenciável*:

Definição 2.7. Uma variedade diferenciável de Lyra \mathcal{M} é um subconjunto \mathcal{M} equipado com uma estrutura diferenciável.

Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável e $P \in \mathcal{M}$ um ponto arbitrário. Se for possível cobri-la com um único sistema de coordenadas, ela é chamada de *variedade simples*. Nesse caso, um mapa $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser investigado através de uma única função representativa $f(x)$. Entretanto, em um caso geral, é necessário muitos sistemas de coordenadas para cobrir \mathcal{M} . Um mapa $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ deve, portanto, ser representado por muitas representativas $f_k(x)$ correspondentes aos vários sistemas referenciais (U_k, χ_k, Φ_k) . Nas regiões de intersecção $\Omega_{ij} = U_i \cap U_j$, as representativas respeitam:

$$f_i(x_i) = f_j(x_j)$$

onde $x_i = \chi_i \circ P$ e $x_j = \chi_j \circ P$ são as coordenadas de P em dois referenciais distintos.

2.2.1 Vetores

Da mesma forma como foi possível definir mapas $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ associando um número real a cada ponto de variedade \mathcal{M} , é possível pensar em curvas parametrizadas sobre \mathcal{M} , onde um intervalo unidimensional fechado $[a, b]$ é associada a um subconjunto unidimensional de \mathcal{M} . Nesse contexto, estabelece-se a seguinte definição.

Definição 2.8. Considera-se uma variedade diferenciável \mathcal{M} . Uma aplicação diferenciável suave $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ é chamada uma *curva diferenciável* sobre \mathcal{M} .

Como se sabe, em \mathbb{R}^3 , as curvas tem papel muito importante visto que podem ser utilizadas para determinação de vetores via o conceito de *derivada direcional* na sua respectiva direção. Como as quantidades vetoriais são imprescindíveis para a descrição de

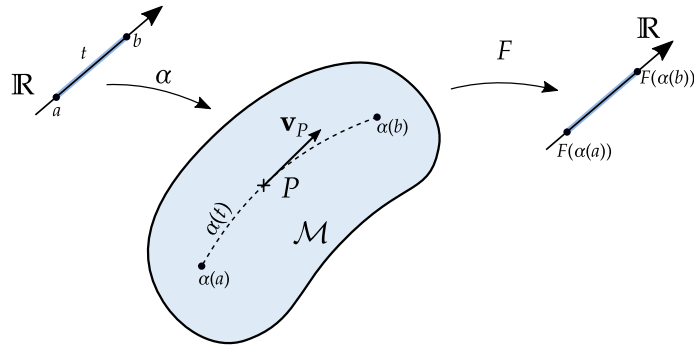


Figura 2.3 – Determinação do vetor tangente \mathbf{v}_P como a derivada direcional da aplicação F na direção da curva α sobre a variedade \mathcal{M} , parametrizada por t .

grande parte dos fenômenos físicos, pode-se utilizar a Def. 2.8 para defini-las, de maneira análoga à que é feita no espaço euclidiano de dimensão 3.

Definição 2.9. Considere-se uma variedade diferenciável \mathcal{M} e uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$, parametrizada por $\alpha = \alpha(t)$ onde $t \in [a, b]$. Considere-se também um ponto arbitrário $P \in \mathcal{M}$, tal que $P = \alpha(t_0)$, e um mapa diferenciável $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definido na vizinhança de P (vide Fig. 2.3). O *vetor tangente* à curva no ponto P é definido com sendo o operador sobre F que resulta na derivada direcional de F com respeito a curva α :

$$\mathbf{v}F = \left. \frac{d(F \circ \alpha)}{dt} \right|_P. \quad (2.5)$$

Toma-se um referencial de Lyra específico (U, χ, Φ) , onde a derivada direcional de F pode ser reescrita em termos da representativa euclidiana $f := F \circ \chi^{-1}$ e a curva $\alpha(t)$ através de suas coordenadas de $x(t) = \chi \circ \alpha$.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}F &= \left. \frac{d(F \circ \alpha)}{dt} \right|_P = \left. \frac{d(F \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ \alpha)}{dt} \right|_P = \left. \frac{df(x)}{dt} \right|_P \\ \mathbf{v}F &= \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_P \partial_\mu f. \end{aligned} \quad (2.6)$$

No restante da seção, aborda-se apenas vetores definidos no mesmo ponto P . Por conta disso, abandona-se a notação com o índice P sob \mathbf{v} e $\frac{dx^\mu}{dt}$, ficando a cargo no leitor subentender que estas estão definidas no ponto supracitado.

O conjunto dos vetores gerados por todas as curvas em \mathcal{M} que passam por P formam um espaço vetorial $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$, chamado *espaço tangente* (vide Fig. 2.4). A cada sistema referencial de Lyra (U, χ, Φ) , está atrelada uma base para natural para $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$, definida pela

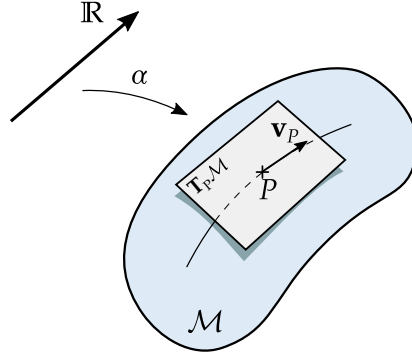


Figura 2.4 – Espaço tangente $T_P \mathcal{M}$ definido sobre o ponto $P \in \mathcal{M}$.

expressão:

$$\mathbf{e}_\mu := \frac{1}{\phi(x)} \partial_\mu, \quad (2.7)$$

em que $\phi(x) = \phi \circ x = \Phi \circ P$ e $x = \chi \circ \alpha$. Sendo assim, as componentes de um vetor \mathbf{v} dado em (2.6) serão:

$$v^\mu = \phi(x) x^{\mu'}(0), \quad (2.8)$$

onde $x^{\mu'} := dx^{\mu'}/dt$. Dessa forma, o vetor pode ser escrito como $\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu$.

Uma consequência imediata das Eqs. (2.7) e (2.8) está na lei de transformação das quantidades vetoriais sob alterações de referenciais de Lyra. Supondo a mudança $(U, \chi, \Phi) \rightarrow (\bar{U}, \bar{\chi}, \bar{\Phi})$, que leva simultaneamente a uma mudança de coordenadas $x = \chi \circ P \rightarrow \bar{x} = \bar{\chi} \circ P$ e uma transformação de escala $\phi = \Phi \circ P \rightarrow \bar{\phi} = \bar{\Phi} \circ P$, os vetores de base se alteram de acordo com:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_\mu &= \frac{1}{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{1}{\phi(x)} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \bar{\mathbf{e}}_\mu &= \frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \mathbf{e}_\nu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da mesma forma, partindo da expressão (2.8), verifica-se que a lei de transformação das componentes vetoriais será:

$$\begin{aligned} \bar{v}^\mu &= \bar{\phi}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^\mu}{dt} = \frac{\bar{\phi}(\bar{x})}{\phi(x)} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \phi(x) \frac{dx^\nu}{dt} \\ \bar{v}_P^\mu &= \frac{\bar{\phi}(\bar{x})}{\phi(x)} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Conforme pôde ser verificado, a presença da escala de Lyra na definição da base de $T_P \mathcal{M}$ altera a lei de transformação vetoriais quando em comparação com a forma com que se alteram as componentes de vetores sob mudanças de sistema de coordenadas na estrutura Riemanniana. É justamente uma mudança do tipo de (2.10) que foi proposta por Lyra para a resolução do problemas da não-integrabilidade do comprimento

de vetores sob transporte paralelo para a teoria de Weyl [74]. Contudo, uma abordagem detalhada desse t3pico demandaria a adi3o3o de uma estrutura afim na variedade, o que por ora deve ser evitado, posto que o foco no momento est3a em estudar da influ3ncia da escala de Lyra nas quantidades geom3tricas usuais em teorias de gravita3o3o relativ3sticas.

A defini3o3o da base (2.7) com a fun3o3o de escala d3a origem a uma estrutura geom3trica bastante distinta daquelas usuais em geometria Riemanniana. A principal raz3o3o disso est3a na n3o comutatividade dos elementos da base induzida pela escolha do referencial. De fato, a rela3o3o de comuta3o3o 3 [e_μ, e_ν] = γ^α_{μν}e_α, onde as constantes de estrutura podem ser determinadas pela aplica3o3o de [e_μ, e_ν] sobre uma fun3o3o f ∈ C[∞]:

$$\begin{aligned}
[e_{\mu}, e_{\nu}] f &= \left[\frac{1}{\phi} \partial_{\mu}, \frac{1}{\phi} \partial_{\nu} \right] f, \\
[e_{\mu}, e_{\nu}] f &= \frac{1}{\phi} \partial_{\mu} \left(\frac{1}{\phi} \partial_{\nu} f \right) - \frac{1}{\phi} \partial_{\nu} \left(\frac{1}{\phi} \partial_{\mu} f \right), \\
[e_{\mu}, e_{\nu}] f &= \frac{1}{\phi} \left(-\frac{\partial_{\mu} \phi}{\phi^2} \right) \partial_{\nu} f + \frac{1}{\phi^2} \partial_{\mu} \partial_{\nu} f - \frac{1}{\phi} \left(-\frac{\partial_{\nu} \phi}{\phi^2} \right) \partial_{\mu} f - \frac{1}{\phi^2} \partial_{\nu} \partial_{\mu} f, \\
[e_{\mu}, e_{\nu}] f &= \frac{1}{\phi} \left(-\frac{\partial_{\mu} \phi}{\phi^2} \right) \partial_{\nu} f - \frac{1}{\phi} \left(-\frac{\partial_{\nu} \phi}{\phi^2} \right) \partial_{\mu} f, \\
[e_{\mu}, e_{\nu}] f &= \left(\frac{1}{\phi^2} \partial_{\nu} \phi \delta_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{\phi^2} \partial_{\mu} \phi \delta_{\nu}^{\alpha} \right) \frac{1}{\phi} \partial_{\alpha} f, \\
[e_{\mu}, e_{\nu}] &= \phi^{-2} \left(\delta_{\mu}^{\alpha} \partial_{\nu} \phi - \delta_{\nu}^{\alpha} \partial_{\mu} \phi \right) e_{\alpha}. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Pode-se definir as constantes de estrutura da base local como:

$$\gamma_{\mu\nu}^{\alpha} := \phi^{-2} \left(\delta_{\mu}^{\alpha} \partial_{\nu} \phi - \delta_{\nu}^{\alpha} \partial_{\mu} \phi \right), \tag{2.12}$$

de tal forma que [e_μ, e_ν] = γ^α_{μν}e_α.

2.2.2 M3trica

No espa3o euclideo ordin3rio ℝⁿ, o produto interno entre dois vetores **v** = v^μe_μ e **u** = u^μe_μ:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v^1 u^1 + \dots + v^n u^n,$$

3 sim3trico, bilinear e positivo definido. Para trabalhar em geometrias gerais, 3 necess3rio estender a no3o3o dessa opera3o3o a vetores tangentes em uma variedade M.

O primeiro conceito importante est3a na forma como se definem os vetores. Em cada ponto, associa-se um espa3o tangente composto por todos os vetores ali definidos. Assim, vetores em dois pontos distintos pertencem a espa3os vetoriais distintos. Contudo, em ℝⁿ o espa3o tangente de todos os pontos da variedade coincide com a variedade em si, o que permite com que vetores possam ser transladados e comparados em pontos dis-

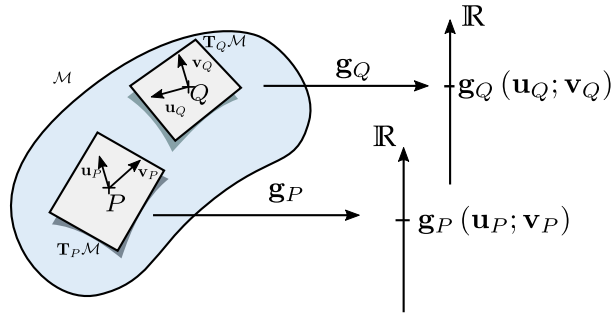


Figura 2.5 – Produtos internos em dois pontos distintos.

tintos. Como consequência, uma operação de produto interno apenas contempla todo o domínio de pontos de \mathbb{R}^n . Em geometrias gerais, isso não ocorre [93]. Por outro lado, deve-se associar um produto interno, a cada ponto, cf. Fig. 2.5. Essa família de produtos internos é chamada de métrica, e é denotada pela letra \mathbf{g} . Se \mathbf{v}_P e \mathbf{u}_P são vetores tangentes pertencentes ao mesmo espaço $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$, o valor de seu produto interno será denotado por $\mathbf{g}(\mathbf{v}_P; \mathbf{u}_P)$. Observa-se que não foi definido o produto interno de vetores de pontos distintos.

Assim como no caso euclideano, deve-se assumir \mathbf{g} *simétrico* :

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_P; \mathbf{u}_P) = \mathbf{g}(\mathbf{u}_P; \mathbf{v}_P) \quad (2.13)$$

e bilinear:

$$\mathbf{g}(\lambda \mathbf{v}_P + \mu \mathbf{u}_P; \mathbf{w}_P) = \lambda \mathbf{g}(\mathbf{v}_P; \mathbf{w}_P) + \mu \mathbf{g}(\mathbf{u}_P; \mathbf{w}_P), \quad (2.14)$$

onde λ e μ são escalares. Entretanto, não será exigido que o produto interno seja positivo definido. Apenas que ele seja *não-degenerado*; ou seja, o único vetor ortogonal a todos os outros vetores em $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$ é o vetor zero:

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_P; \mathbf{u}_P) = 0 \quad \text{para todos } \mathbf{u}_P \text{ em } \mathbf{T}_P\mathcal{M} \text{ implica } \mathbf{v}_P = 0. \quad (2.15)$$

Nesse ponto, convém introduzir um sistema referencial e sua base canônica correspondente $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Assim sendo, os números:

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu; \mathbf{e}_\nu) \quad (2.16)$$

são referidos como as componentes métricas. Seja \mathbf{v}_P e \mathbf{u}_P dois vetores tangentes que, nesse referencial, apresentam componentes v^μ e u^ν respectivamente. Então, pelas propriedades de bilinearidade de \mathbf{g} , pode-se expressar o produto interno \mathbf{v}_P e \mathbf{u}_P inteiramente

em termos dos coeficientes métricos:

$$\mathbf{g}(v^\mu \mathbf{e}_\mu; u^\nu \mathbf{e}_\nu) = v^\mu u^\nu \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu; \mathbf{e}_\nu) = g_{\mu\nu} v^\mu u^\nu. \quad (2.17)$$

Em cada ponto, a métrica é completamente caracterizada pelas suas componentes $g_{\mu\nu}(P)$. Então, deve-se reconhecer os coeficientes métricos como funções definidas no intervalo do sistema de coordenadas. Identificando P com suas coordenadas (x^1, \dots, x^n) , reconhece-se $g_{\mu\nu}$ como sendo uma função euclideana ordinária:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, \dots, x^n).$$

Diz-se que a métrica é suave se $g_{\mu\nu}$ depende suavemente das coordenadas. No que se segue, será assumido que as métricas são sempre suaves.

Definição 2.10. Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável. Uma métrica suave \mathbf{g} é uma família de produtos internos definidos em cada espaço tangente, com as seguintes propriedades:

1. \mathbf{g} é um mapa bilinear simétrico e não-degenerado.
2. Os coeficientes métricos $g_{\mu\nu}$ dependem suavemente das coordenadas (x^1, \dots, x^n) .

Com a métrica, pode-se, portanto, definir o conceito de comprimento $|v|$ de um vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_P\mathcal{M}$ através de:

$$|v| := \sqrt{\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

2.2.3 Covetores

O próximo conceito a ser introduzido na variedade \mathcal{M} é o de covetor, conceito este que é crucial na determinação de um espaço dual a $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$.

Definição 2.11. Um covetor ω_P no ponto P é um mapa linear:

$$\omega_P : \mathbf{T}_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Em alguns casos, convém a utilização da notação de Dirac, onde um dado um vetor tangente \mathbf{v}_P será denotado por meio de um *ket* $|\mathbf{v}\rangle$ e o covetor ω denotado por um *bra* $\langle\omega|$. Então, o covetor ω aplicado sobre em \mathbf{v} é escrito simplesmente como o bracket:

$$\omega \circ \mathbf{v} = \langle\omega|\mathbf{v}\rangle. \quad (2.19)$$

A linearidade de um covetor ω pode ser expressada a seguinte maneira:

$$\langle \omega | \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \omega | \mathbf{v} \rangle + \mu \langle \omega | \mathbf{u} \rangle . \quad (2.20)$$

A soma entre dois covetores ω e ζ , definida conforme [93]:

$$\langle \omega + \zeta | \mathbf{v} \rangle = \langle \omega | \mathbf{v} \rangle + \langle \zeta | \mathbf{v} \rangle ,$$

dá origem ao mapa $\omega + \zeta$, cuja soma respeita a Eq. (2.20); ou seja, é também um mapa linear. De forma semelhante, o produto de um covetor ω por um número escalar λ é dada por:

$$\langle \lambda \omega | \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \omega | \mathbf{v} \rangle . \quad (2.21)$$

Consequentemente, verifica-se que bracket é bilinear em ambos os argumentos.

O conjunto de todos os covetores no ponto P formam um espaço vetorial, denotado por $\mathbf{T}_P^* \mathcal{M}$, que é chamado de *espaço vetorial dual* [93]. É conveniente estudar a estrutura desse espaço vetorial um pouco mais de perto. Considera-se um ponto $P \in \mathcal{M}$ e um sistema referencial (U, χ, Φ) que descreve a sua vizinhança. Com relação a esse referencial, deseja-se determinar uma base θ^μ para o espaço cotangente de tal forma que um covetor ω possa ser expandindo como $\omega = \omega_\mu \theta^\mu$. Com relação aos covetores de base, requer-se que respeitem a propriedade $\langle \theta^\mu | \mathbf{e}_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu$. Sendo assim, a aplicação de ω_P sobre \mathbf{v}_P que, como já verificado, é dada pelo bracket (2.19), pode ser expandida em componentes através de:

$$\langle \omega | \mathbf{v} \rangle = \langle \omega_\mu \theta^\mu | v^\nu \mathbf{e}_\nu \rangle = \omega_\mu v^\mu . \quad (2.22)$$

Nota-se que uma expressão como $\omega_\mu v^\mu$, embora os índices indiquem a escolha de um referencial específico, é independente de referencial visto que o bracket $\langle \omega | \mathbf{v} \rangle$ foi definido de forma puramente global, sem referências aos sistemas referenciais de Lyra usados sobre \mathcal{M} . *Essa é uma característica geral de expressões onde se soma sob um índice repetido.*

Haja visto que se introduziu um referencial específico, pode-se identificar o espaço dual $\mathbf{T}_P^* \mathcal{M}$ como um espaço vetorial, no sentido que o covetor ω é representado na base θ^μ por componentes ω_μ . Nesse sentido, pode-se atrelar dois espaços vetoriais para cada ponto P na variedade:

$$\mathbf{T}_P^* \mathcal{M} \text{ e } \mathbf{T}_P \mathcal{M} .$$

Na discussão acerca de espaços vetoriais tangentes, foi verificado que um vetor \mathbf{v} tem um interpretação geométrica simples: ele pode ser reconhecido com um vetor velocidade correspondente a uma curva suave λ passando por P . Agora, busca-se uma interpretação geométrica equivalente para um covetor.

Considera-se uma função diferenciável $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, definida na vizinhança de P , e uma curva $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ que passe por esse ponto, cf. Fig. 2.6. Então, $F \circ \lambda$ é uma função ordinária de \mathbb{R} para \mathbb{R} meramente descrevendo a variação de F ao longo de λ , onde, para

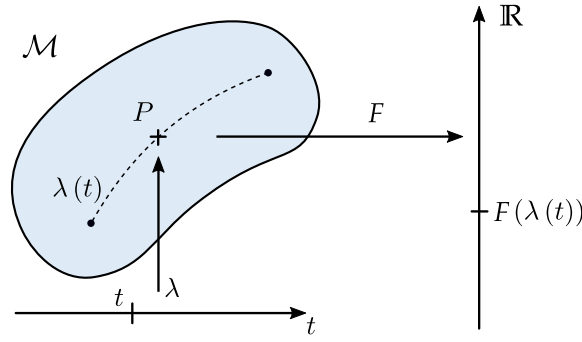


Figura 2.6 – Transformação entre referenciais inerciais.

um dado valor de t , obtém-se um outro número real $F(\lambda(t))$. Uma vez que esta é uma função ordinária, pode-se diferenciá-la em $t = 0$:

$$\left. \frac{dF(\lambda(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

É vantajoso investigar esse número um pouco mais de perto, pois ele representa a taxa de variação e F na direção de λ . Ao se introduzir um referencial (U, χ, Φ) ao redor de P , pode-se representar F por uma função representativa $F \circ \chi^{-1} = f$, e, dessa forma, a curva λ pode ser parametrizada como $\chi \circ \lambda = x^i$, tal que

$$F(\lambda(t)) = F \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ \lambda \circ t = f \circ x^i \circ t = f(x^i(t)).$$

No sistema de coordenadas supracitado, o vetor tangente \mathbf{v}_P tem componentes intrínsecas dadas conforme Eq. (2.8):

$$v^\mu = \phi(x) x^{\mu'}(0).$$

Usando essas parametrizações, obtém-se:

$$\left. \frac{dF(\lambda(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x^\mu(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\phi(x)} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} v^\mu. \quad (2.23)$$

Essa fórmula mostra que o número $\frac{d}{dt} F(\lambda(t))$ depende somente do vetor tangente \mathbf{v}_P e não da curva particular que o gera. Além disso, verifica-se que essa dependência de \mathbf{v}_P é linear. Assim, a operação acima descrita configura um mapa linear no espaço tangente $\mathbf{T}_P \mathcal{M}$ por:

$$\mathbf{v}_P \rightarrow \frac{dF(\lambda(t))}{dt},$$

onde λ é qualquer curva suave que gera \mathbf{v}_P . Contudo, um mapa linear entre o espaço tangente $\mathbf{T}_P(\mathcal{M})$ e um real define justamente um covetor. Esse covetor será denotado por $\mathbf{d}f$ e será referido como a derivada exterior de f .

Dessa forma, foi mostrado que:

$$\langle \mathbf{d}f | \mathbf{v}_P \rangle := \frac{d}{dt} f(x^\mu(t))|_{t=0} = \frac{1}{\phi(x)} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} v^\mu. \quad (2.24)$$

Comparando (2.24) com a Eq. (2.22), pode-se obter imediatamente as componentes de $\mathbf{d}f$. Assim, no referencial escolhido, $\mathbf{d}f$ pode ser representado como:

$$\mathbf{d}f = \frac{1}{\phi(x)} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \boldsymbol{\theta}^\mu. \quad (2.25)$$

Pode-se considerar, portanto, que $\mathbf{d}f$ atua como uma generalização para a geometria de Lyra dos vetores gradientes do cálculo vetorial em espaços euclidianos. Com eles, é possível analisar a estrutura do espaço dual $\mathbf{T}_P^* \mathcal{M}$ um pouco mais de perto. Sendo P um ponto sobre \mathcal{M} , introduz-se um referencial (U, χ, Φ) , tal que $P \in U$ e, por hipótese, as coordenadas de P sejam nulas, $\chi(P) = x^\mu = 0$. Assim, pode-se construir um referencial para o espaço tangente $\mathbf{T}_P \mathcal{M}$ da seguinte maneira.

Suponha que $X^\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ sejam n mapas suaves, onde cada um retorna a ν -ésima coordenada do referencial (U, χ, Φ) ; ou seja $X^\nu \circ P = x^\nu$. Definindo $x^\nu := X^\nu \circ \chi^{-1}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} X^\nu \circ P &= X^\nu \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ P = X^\nu \circ \chi^{-1} \circ x_p = x^\nu(x_p), \\ x^\nu(x_p) &= x^\nu. \end{aligned}$$

Isso indica que, interpretando $x^\nu(x_p)$ como uma função representativa da aplicação X^ν , a dependência deve acontecer apenas de forma trivial da coordenada x^ν . Aplicando o operador \mathbf{d} em cada um desses mapas, cf. Eq. (2.25), encontra-se:

$$\mathbf{d}x^\nu = \frac{1}{\phi} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \boldsymbol{\theta}^\mu = \frac{1}{\phi} \boldsymbol{\theta}^\nu.$$

Consequentemente, verifica-se que $\phi \mathbf{d}x^\mu$ serve como vetores de base canônicos para o espaço dual $\mathbf{T}_P^*(M)$. Nesse aspecto, se um covetor arbitrário $\boldsymbol{\omega}$ tem coordenadas ω_μ , então:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_\mu \phi \mathbf{d}x^\mu. \quad (2.26)$$

Finalmente, pode-se investigar a forma como as coordenadas de um covetor $\boldsymbol{\omega}$ se transformam mediante a troca do sistema referencial $(U, \chi, \Phi) \rightarrow (\bar{U}, \bar{\chi}, \bar{\Phi})$. Usando (2.9):

$$\bar{\omega}_\mu = \langle \boldsymbol{\omega} | \bar{\mathbf{e}}_\mu \rangle = \left\langle \boldsymbol{\omega} \left| \frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \mathbf{e}_\nu \right. \right\rangle = \frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{e}_\nu \rangle = \frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \omega_\nu.$$

Então, as coordenadas de um covetor são alteradas de acordo com a seguinte lei de trans-

formação:

$$\bar{\omega}_\mu = \frac{\phi(x)}{\phi(\bar{x})} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \omega_\nu. \quad (2.27)$$

Assim, as coordenadas se transformam covariavelmente e isso justifica o nome covetores.

2.2.4 Espaço Dual

Até esse ponto, trabalhou-se com uma variedade *sem métrica*. Em cada ponto $P \in \mathcal{M}$, foi mostrado como construir dois espaços vetoriais n -dimensionais $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$ e $\mathbf{T}_P^*\mathcal{M}$. Equipando-se uma métrica \mathbf{g} à variedade \mathcal{M} , é possível atrelar $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$ e $\mathbf{T}_P^*\mathcal{M}$, onde cada vetor tangente $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_P\mathcal{M}$ é identificado com um único covetor $\omega \in \mathbf{T}_P^*\mathcal{M}$ de uma forma completamente geométrica. Considerando-se um vetor tangente \mathbf{v} , constrói-se um mapa linear $\mathbf{T}_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ utilizando-se a métrica, conforme:

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{v}; \mathbf{u}).$$

Sabe-se que um mapa linear $\mathbf{T}_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é justamente um covetor. Assim, o vetor tangente \mathbf{v} gera um covetor que será denotado por $\mathbf{g}(\mathbf{v}; \cdot)$. Para prosseguir, introduz-se um sistema de coordenadas na vizinhança de P , onde \mathbf{v} pode ser representado pelas coordenadas v^μ . Nesse aspecto, as coordenadas v_ν correspondentes ao covetor $\mathbf{g}(\mathbf{v}; \cdot)$ podem ser facilmente encontradas:

$$v_\nu = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{e}_\nu) = \mathbf{g}(v^\mu \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = v^\mu \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu),$$

$$v_\nu = g_{\mu\nu} v^\mu.$$

Então, o vetor tangente com coordenadas v^μ gera um covetor com coordenadas v_ν . O mapa $I : v^\mu \rightarrow v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$ é um isomorfismo entre $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$ e $\mathbf{T}_P^*\mathcal{M}$ porque $g_{\mu\nu}$ é uma matriz regular. Dá-se o nome de *identificação canônica* a essa relação. Mostra-se assim que, da mesma forma como na geometria Riemanniana, a métrica pode ser usada para subir e abaixar índices de vetores e covetores de Lyra.

2.2.5 Tensores

Na seção 2.2.2, introduziu-se o produto interno sobre a variedade, considerando-se uma métrica definida pelo mapa bilinear que relaciona dois vetores em $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$ em um número real. Ainda que a ideia seja bastante simples e intuitiva, esta requer um cuidado adicional. Os possíveis argumentos para a métrica são componentes do espaço tangente. Pode-se pensar nesses dois argumentos como uma única componente de um espaço formado pelo produto tensorial de dois espaços $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$; ou seja, $\mathbf{T}_P\mathcal{M} \otimes \mathbf{T}_P\mathcal{M}$. Assim, o mapa

bilinear que define a métrica pode ser representado como:

$$\mathbf{g} : \mathbf{T}_P \mathcal{M} \otimes \mathbf{T}_P \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Esse conceito pode ser facilmente generalizado para maiores dimensões. Para isso, considere-se um mapa $\mathbf{F}(\cdot; \dots; \cdot)$ com k argumentos. Esses argumentos são vetores tangentes $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}$ e \mathbf{F} mapeia um k -upla $(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)})$ em um número real $\mathbf{F}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)})$. O conjunto de todas as k -uplas $(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)})$ possíveis é denotado por:

$$\underbrace{\mathbf{T}_P \mathcal{M} \otimes \dots \otimes \mathbf{T}_P \mathcal{M}}_{k \text{ fatores}},$$

e, então, \mathbf{F} é definido como um mapa $\mathbf{F} : \mathbf{T}_P \mathcal{M} \otimes \dots \otimes \mathbf{T}_P \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Aqui, assume-se que \mathbf{F} é linear em cada um de seus argumentos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}) &= \lambda \mathbf{F}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}) + \\ &+ \mu \mathbf{F}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}), \end{aligned}$$

propriedade essa que é expressa dizendo que \mathbf{F} é um *mapa multilinear*.

Definição 2.12. Um cotensor \mathbf{F} é um mapa multilinear:

$$\mathbf{F} : \underbrace{\mathbf{T}_P \mathcal{M} \otimes \dots \otimes \mathbf{T}_P \mathcal{M}}_{k \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se \mathbf{F} tem k argumentos, diz-se que \mathbf{F} é um cotensor de *rank* k e o conjunto de todos os cotensores de *rank* k será denotado por $\mathbf{T}_P^{(0,k)} \mathcal{M}$.

Nesse aspecto, um covetor ω é um cotensor de *rank* 1 ao passo que a métrica \mathbf{g} é um cotensor simétrico e não degenerado de *rank* 2.

O próximo passo consiste em investigar a possibilidade de se introduzir componentes para possibilitar os cálculos com cotensores. Caso tudo ocorra bem, deve ser possível concluir que esses cotensores, de fato, correspondem ao conceito familiar de tensores oriundo da física ordinária.

Considere-se um ponto P da variedade e escolha-se um referencial de Lyra (U, χ, Φ) , tal que $P \in U$. Agora, defina-se um cotensor

$$\mathbf{S} : \mathbf{T}_P \mathcal{M} \otimes \dots \otimes \mathbf{T}_P \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Suas respectivas componentes são obtidas adotando os vetores de base canônica de $\mathbf{T}_P \mathcal{M}$

como argumentos da aplicação:

$$S_{\mu\dots\lambda} = \mathbf{S}(\mathbf{e}_\mu, \dots, \mathbf{e}_\lambda) \quad (2.28)$$

Seja $\mathbf{v}_{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{(k)}$ um conjunto com k vetores tangentes arbitrários com componentes $v_{(1)}^\mu, \dots, v_{(k)}^\lambda$ respectivamente. Pela propriedade de multilinearidade de \mathbf{S} , pode-se expressar o valor de $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ em termos das componentes de \mathbf{S} e as componentes v^μ, u^ν e w^λ dos vetores:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{v}_{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{(k)}) &= \mathbf{S}(v_{(1)}^\mu \mathbf{e}_\mu, \dots, v_{(k)}^\lambda \mathbf{e}_\lambda) \\ &= v_{(1)}^\mu \cdots v_{(k)}^\lambda \mathbf{S}(\mathbf{e}_\mu, \dots, \mathbf{e}_\lambda) \\ &= S_{\mu\dots\lambda} v_{(1)}^\mu \cdots v_{(k)}^\lambda. \end{aligned}$$

Observe que, embora as componentes específicas $S_{\mu\dots\lambda}, v_{(1)}^\mu, \dots, v_{(k)}^\lambda$ dependam do referencial, o número $S_{\mu\dots\lambda} v_{(1)}^\mu \cdots v_{(k)}^\lambda$ é independente dele.

Com isso que foi colocado, pode-se obter a lei de transformação de \mathbf{S} sob uma mudança de referenciais $(U, \chi, \Phi) \rightarrow (\bar{U}, \bar{\chi}, \bar{\Phi})$ a partir de (2.9):

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\alpha\dots\gamma} &= \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_\alpha, \dots, \bar{\mathbf{e}}_\gamma) = \mathbf{S}\left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \mathbf{e}_\mu, \dots, \frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\gamma} \mathbf{e}_\lambda\right) \\ &= \frac{\phi^k(x)}{\bar{\phi}^k(\bar{x})} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\gamma} \mathbf{S}(\mathbf{e}_\mu, \dots, \mathbf{e}_\lambda) \\ &= \frac{\phi^k(x)}{\bar{\phi}^k(\bar{x})} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\gamma} S_{\mu\dots\lambda}, \\ \bar{S}_{\alpha\dots\gamma} &= \frac{\phi^k(x)}{\bar{\phi}^k(\bar{x})} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\gamma} S_{\mu\dots\lambda}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Então, vê-se que as componentes dos cotensores de Lyra se transformam de forma diferente daquela como se transformam os cotensores na geometria de Riemann, haja vista a presença de $\phi^k(x) / \bar{\phi}^k(\bar{x})$ na expressão para a transformação.

Durante a execução de cálculos e manipulações algébricas, teremos que lidar com muitas operações matemáticas envolvendo tensores. Dentre as possíveis, vamos destacar algumas das mais comuns. Nota-se aqui que, em muitos casos, as operações dos tensores numa variedade de Lyra não se alteram em relação aos tensores na variedade riemanniana.

1. Soma de dois cotensores – Se \mathbf{S} e \mathbf{T} são cotensores do mesmo *rank* k , então, a soma $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ é definida como o seguinte cotensor de mesmo *rank* k :

$$(\mathbf{S} + \mathbf{T})(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \mathbf{S}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) + \mathbf{T}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$$

e a soma é caracterizada pelas componentes:

$$S_{\mu_1 \dots \mu_k} + T_{\mu_1 \dots \mu_k}.$$

2. Produto de cotensor e escalar – Se \mathbf{S} é um cotensor de *rank* k e λ um escalar, então, a pode-se definir um novo cotensor de *rank* k , $\lambda\mathbf{S}$, pela fórmula:

$$(\lambda\mathbf{S})(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \lambda\mathbf{S}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k).$$

O produto de um cotensor e um escalar é caracterizado pelas componentes $\lambda S_{\mu_1 \dots \mu_k}$.

3. Produto tensorial – Se \mathbf{S} e \mathbf{T} são cotensores de *ranks* s e t respectivamente, então, seu produto tensorial é definido como o seguinte cotensor e *rank* $s + t$:

$$(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T})(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t).$$

O produto tensorial tem componentes:

$$S_{\mu_1 \dots \mu_s} T_{\nu_1 \dots \nu_t}.$$

4. Contração – Se \mathbf{T} é um cotensor de *rank* k e $\mathbf{v}_{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{(m)}$ são vetores tangentes, então, a contração é definida como sendo o seguinte cotensor de *rank* $(k - m)$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}_{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{(m)}; \dots),$$

e a contração é caracterizada pelas componentes

$$T_{\nu_1 \dots \nu_{m+1} \dots \nu_k} \vartheta_{(1)}^{\nu_1} \dots \vartheta_{(m)}^{\nu_m}.$$

É importante observar que, como o espaço dos cotensores $\mathbf{T}_P^{(0,k)}\mathcal{M}$ carrega uma estrutura linear, ele é um espaço vetorial. Uma vez que se tem o produto vetorial à disposição, pode-se discutir como se construir tensores de *rank* arbitrário sistematicamente usando covetores como blocos de construção. Previamente, foi estudado o espaço dos covetores $\mathbf{T}_P^*\mathcal{M} = \mathbf{T}_P^{(0,1)}\mathcal{M}$, encontrando, em especial, os covetores da base canônica θ^μ . Esses são os covetores que devem ser usados como unidades básicas.

Focando em um ponto P sobre a variedade, atrela-se um espaço tangente $\mathbf{T}_P\mathcal{M}$ que pode ser utilizado para construir o espaço dos cotensores. Contudo, conforme verificou-se anteriormente, pode-se definir também um espaço vetorial cotangente $\mathbf{T}_P^*\mathcal{M}$ de dimensão n com uma estrutura muito similar à do espaço tangente. Sendo assim, pode-se generalizar a discussão de cotensores da seguinte maneira.

Definição 2.13. Um tensor misto F de tipo (k, l) é um mapa multilinear:

$$F_P : \underbrace{\mathbf{T}_P^*(\mathcal{M}) \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}_P^*(\mathcal{M})}_{k\text{-fatores}} \times \underbrace{\mathbf{T}_P(\mathcal{M}) \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}_P(\mathcal{M})}_{l\text{-fatores}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Um tensor misto de tipo (k, l) tem *rank* $k + l$, e o espaço de todos os tensores mistos de tipo (k, l) será denotado por $\mathbf{T}_P^{(k,l)}\mathcal{M}$.

Um tensor misto de tipo $(0, l)$ é chamado de *cotensor de rank* l . Por outro lado, o tensor de tipo $(k, 0)$ é chamado simplesmente de *tensor de rank* k . Porém, se existe uma métrica g na variedade \mathcal{M} , é costumeiro não distinguir entre os vários tipos de tensores de mesmo *rank*. Fala-se apenas de *tensores*, e um dado tensor T é representado por vários tipos de componentes. Por exemplo, um tensor T de *rank* 2 é representado pelos seguintes conjuntos de componentes $T_{\mu\nu}$, T_ν^μ , T_μ^ν e $T^{\mu\nu}$ que se relacionam através das expressões:

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} & T_\mu^\nu &= g^{\lambda\nu} T_{\mu\lambda} & T^{\mu\nu} &= g^{\mu\lambda} g^{\rho\nu} T_{\lambda\rho} \\ T_{\mu\nu} &= g_{\mu\lambda} T_\nu^\lambda & T_{\mu\nu} &= g_{\lambda\nu} T_\mu^\lambda & T_{\mu\nu} &= g_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} T^{\lambda\rho}. \end{aligned}$$

Essas operações são conhecidas como abaixar e levantar índices. Um tensor tipo (k, l) pode ser expandido em uma base $\{\theta^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{\mu_k} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\nu_l}\}$ e apresenta uma lei de transformação de componentes dada por:

$$\bar{T}_{\beta_1 \cdots \beta_l}^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}(\bar{x}) = \left(\frac{\bar{\phi}(\bar{x})}{\phi(x)} \right)^{k-l} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial \bar{x}^{\beta_l}} T_{\nu_1 \cdots \nu_l}^{\mu_1 \cdots \mu_k}(x). \quad (2.30)$$

2.2.6 Conexão Afim

Uma conexão afim em \mathcal{M} é definida como um mapa bilinear $\nabla : \mathbf{T}_P\mathcal{M} \otimes \mathbf{T}_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}_P\mathcal{M}$ que associa dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} a um vetor $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ [94]. Considerando \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , tal que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{T}_P\mathcal{M}$, e uma função suave $F \in C^\infty$, é requerido que a conexão respeite as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}$;
- (ii) $\nabla_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$;
- (iii) $\nabla_{F\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = F\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$; e
- (iv) $\nabla_{\mathbf{u}}(F\mathbf{v}) = (\mathbf{u}F)\mathbf{v} + F\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.

Sejam $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ duas curvas suaves na variedade, que se interceptam no ponto $P = \sigma(0) = \lambda(0) \in \mathcal{M}$. Pode-se definir os campos vetoriais tangentes \mathbf{v} e \mathbf{u} a σ e λ , respectivamente através de (2.5), onde $F \in C^\infty : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Tomando um referencial

específico (U, χ, ϕ) , tal que $P \in U$, representa-se $\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu$ e $\mathbf{u} = u^\mu \mathbf{e}_\mu$, onde as suas respectivas componentes são dadas por

$$v^\mu = \phi(x) x'^\mu(0) \quad \text{e} \quad u^\mu = \phi(y) y'^\mu(0)$$

sendo x e y as coordenadas das curvas σ e λ respectivamente. A operação $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ representa a mudança do campo vetorial \mathbf{v} na direção de \mathbf{u} . Dessa forma, a conexão afim traz naturalmente consigo o conceito de campos vetoriais paralelos ao longo de uma curva. Se $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = 0$, diz-se que \mathbf{v} é paralelamente transportado na direção de \mathbf{u} .

Agora, deseja-se obter a expressão para as componentes do vetor $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ no referencial escolhido. Expandindo esses vetores na base natural:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \nabla_{u^\nu \mathbf{e}_\nu} (v^\mu \mathbf{e}_\mu).$$

Utilizando a propriedade **(iii)**:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^\nu \nabla_{\mathbf{e}_\nu} (v^\mu \mathbf{e}_\mu),$$

e, em seguida, a propriedade **(iv)**:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^\nu (\mathbf{e}_\nu v^\mu) \mathbf{e}_\mu + u^\nu v^\mu \nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{e}_\mu.$$

Define-se os elementos da conexão $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ através da expressão:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha := \nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{e}_\mu, \quad (2.31)$$

de modo que:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^\nu (\mathbf{e}_\nu v^\mu) \mathbf{e}_\mu + u^\nu v^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha$$

Utilizando a Eq. (2.7) para expressar os vetores da base em $\mathbf{e}_\nu v^\mu$, encontra-se:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^\nu (\phi^{-1} \partial_\nu v^\mu) \mathbf{e}_\mu + u^\nu v^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha,$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^\nu (\phi^{-1} \partial_\nu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\mu) \mathbf{e}_\alpha. \quad (2.32)$$

Conforme já comentado, no caso em que \mathbf{v} é paralelamente transportado na direção de λ , vale a relação $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = 0$. Por meio da Eq. (2.32), verifica-se que a mudança das componentes de \mathbf{v} sob transporte paralelo na direção de \mathbf{u} surge em decorrência da equação diferencial:

$$\phi^{-1} u^\nu \partial_\nu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\mu u^\nu = 0. \quad (2.33)$$

Supondo uma direção infinitesimal $u^\mu = dx^\mu$, encontra-se:

$$dx^\nu \partial_\nu v^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\mu \phi dx^\nu$$

$$\delta v^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\mu \phi dx^\nu,$$

que é a generalização da fórmula para a variação δv^α das componentes de vetores sob transporte paralelo.

2.3 Propriedades Métricas da Variedade

2.3.1 Elemento Linha

A introdução da métrica permite a definição de elementos físicos essenciais na construção de uma teoria de gravitação. O primeiro deles é a noção de comprimento. Seja uma curva $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, parametrizada pelo parâmetro afim t . Por intermédio dela, pode-se definir vetores tangentes com $\mathbf{v} = \phi(x) x'^{\mu} \mathbf{e}_\mu$, onde $()'$ indica derivação com respeito ao parâmetro t . Define-se o segmento da curva s entre a e b como:

$$s = \int_a^b dt \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}, \quad (2.34)$$

onde $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Escolhendo um referencial específico (U, χ, Φ) , o segmento da curva pode ser escrito como:

$$s = \int_a^b dt \sqrt{\phi^2 g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}. \quad (2.35)$$

Supondo que a distância entre a e b seja infinitesimal, tal que $b = a + dt$, o elemento de linha infinitesimal pode ser escrito como:

$$ds^2 = \phi^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.36)$$

Nota-se aqui a presença da escala na definição do elemento de linha, o que o diferencia do elemento de linha comumente considerado nas teorias construídas sobre a estrutura geométrica Riemanniana. A presença desse termo faz com que ds^2 seja invariante em relação às transformações de referenciais de Lyra, visto que satura a presença da escala na lei de transformação do tensor métrico.

2.3.2 Geodésicas

Uma *geodésica métrica* é uma curva que passa pelos pontos a e b , cuja distância s é estacionária sob variações infinitesimais fixas nos extremos:

$$\delta \left(\int ds \right) = 0.$$

Com isso a Eq. (2.36), verifica-se que o princípio variacional que define as curvas geodésicas pode ser expresso como:

$$\delta \left(\int_a^b \sqrt{g_{\mu\lambda} \phi \frac{dx^\mu}{dt} \phi \frac{dx^\lambda}{dt}} dt \right) = 0 \quad (2.37)$$

Definindo uma lagrangiana:

$$L = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\phi^2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (2.38)$$

com $\dot{x}^\nu = dx^\nu/dt$, as equações de Euler-Lagrange para (2.37) serão:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} \right) = 0. \quad (2.39)$$

A priori, estas equações determinam a curva $x^\mu(t)$ que representa um extremo entre dois pontos. Entretanto, seria melhor trabalhar com L^2 em detrimento de L a fim de evitar a raiz quadrada. Para fazer isso, em primeiro lugar multiplica-se (2.39) por $-2L$:

$$2L \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} \right) - 2L \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = 0.$$

Essa equação então pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\nu} = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} \frac{dL}{dt}.$$

Sabe-se que $L = ds/dt$. Assim:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\nu} = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (2.40)$$

Convém resolver essa equação por partes. Focando primeiramente no membro esquerdo,

podemos considerar a Eq. (2.38), tal que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\nu} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu} \left(\phi^2 g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\phi^2 g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) \\ &= 2\phi^2 g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\alpha + 2\phi^2 \partial_\beta g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + 2\partial_\beta (\phi^2) g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \\ &\quad - \partial_\nu (\phi^2) g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \phi^2 \partial_\nu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \end{aligned}$$

Renomeando índices mudos:

$$2\phi^2 \partial_\beta g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \phi^2 \partial_\beta g_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \phi^2 \partial_\alpha g_{\beta\nu} \dot{x}^\beta \dot{x}^\alpha.$$

Logo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\nu} = 2\phi^2 g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\alpha + 2\phi^2 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \left([\nu, \alpha\beta] + g_{\alpha\nu} \partial_\beta \ln \phi^2 - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\nu \ln \phi^2 \right) \quad (2.41)$$

onde usou-se a expressão para o símbolo de Christoffel de primeiro tipo:

$$[\nu, \alpha\beta] = \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}).$$

O lado direito da Eq. (2.40) pode ser resolvido utilizando a liberdade de definição do parâmetro t . Escolhendo

$$t = c_1 s + c_2, \quad (2.42)$$

com c_1 e c_2 sendo constantes reais, o membro direito de (2.40) se anula e a equação se reduz à:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\nu} = 0. \quad (2.43)$$

Com a reparametrização de t para $c_1 s + c_2$, o membro esquerdo de (2.40) se torna:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\nu} = 2\phi^2 g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + 2\phi^2 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left([\nu, \alpha\beta] + \partial_\beta \ln \phi^2 g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu \ln \phi^2 g_{\alpha\beta} \right). \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.43):

$$\phi^2 g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \phi^2 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left([\nu, \alpha\beta] + g_{\alpha\nu} \partial_\beta \ln \phi^2 - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\nu \ln \phi^2 \right) = 0.$$

Contraindo essa expressão com $\frac{1}{\phi} g^{\mu\nu}$:

$$\phi \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \phi \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left(g^{\mu\nu} [\nu, \alpha\beta] + \partial_\beta \ln \phi^2 g^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln \phi^2 g_{\alpha\beta} \right) = 0.$$

Reconhecendo o símbolo de Christoffel de segundo tipo:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = g^{\mu\nu} [\nu, \alpha\beta] = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}), \quad (2.45)$$

então:

$$\begin{aligned} & \phi \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \phi \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + \\ & + \phi^2 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left(\phi^{-1} \partial_\beta \ln \phi^2 \delta_\alpha^\mu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi^{-1} \partial_\nu \ln \phi^2 g_{\alpha\beta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Pela simetria dos índices α e β :

$$\begin{aligned} & \phi \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \phi \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + \\ & + \phi^2 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left(\frac{1}{2} \phi^{-1} \partial_\alpha \ln \phi^2 \delta_\beta^\mu + \frac{1}{2} \phi^{-1} \partial_\beta \ln \phi^2 \delta_\alpha^\mu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi^{-1} \partial_\nu \ln \phi^2 g_{\alpha\beta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como a função de escala é diferente de zero, então:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + \\ & + \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \left(\partial_\alpha \ln \phi \delta_\beta^\mu + \partial_\beta \ln \phi \delta_\alpha^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln \phi g_{\alpha\beta} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \\ & + \phi^{-1} \left(\partial_\alpha \phi \delta_\beta^\mu + \partial_\beta \phi \delta_\alpha^\mu - \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (2.46) \end{aligned}$$

A Eq. (2.46) é a equação da geodésica na geometria de Lyra. Note-se que ela generaliza o resultado conhecido da relatividade geral para a variedade riemanniana, em cujo caso aparecem apenas os dois primeiros termos do lado esquerdo.

2.3.3 Elemento de Volume

Na geometria de Lyra, a presença da escala influencia no elemento invariante de volume. Partindo-se da lei de transformação das componentes do tensor métrico – que é um tensor (0, 2) – verifica-se que o determinante da métrica, sob uma mudança de referenciais, se altera como:

$$\bar{g}(\bar{x}) = \frac{\phi^{2n}}{\bar{\phi}^{2n}} \det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \right)^2 g(x),$$

onde definiu-se $g := \det g_{\mu\nu}$. Assim, o elemento de integração de volume será $d^n x \phi^n \sqrt{|g(x)|}$ e o volume de uma determinada região $R \subset \mathcal{M}$ será:

$$\text{vol}(R) = \int_{\chi(R)} d^n x \phi^n \sqrt{|g(x)|}.$$

A obtenção desse resultado tem relevância na definição das integração covariantes na variedade Lyra. Assim, quando formos construir um princípio de acoplamento mínimo para as teorias de gravitação em Lyra, devemos levar a função de escalar em conta na definição dos princípios variacionais associados a teoria.

2.4 Propriedades Afins da Variedade

Uma vez tendo abordado algumas das propriedades métricas da variedade de Lyra, vamos direcionar nossos estudos para algumas de suas propriedades afins. Equipamos nossa variedade com uma conexão afim, conforme descrito na seção 2.2.6. Com ela, temos a possibilidade de se definir o autoparalelismo de curvas na variedade de Lyra e também, a introdução de derivações covariantes. Nesse seção, vamos explorar alguns dos resultados e os entes geométricos que podem ser obtidos a partir das propriedades afins da variedade.

2.4.1 Derivada Covariante

Tomando as curvas $\lambda_{(\nu)}$ que, num referencial específico, geram cada um dos vetores da base, então, a derivada covariante do vetor \mathbf{v} na direção de \mathbf{e}_ν , de acordo com (2.32), será:

$$\nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{v} = \left(\phi^{-1} \partial_\nu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\mu \right) \mathbf{e}_\alpha. \quad (2.47)$$

Esse equação pode ser expandida como $\nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{v} = \nabla_\nu v^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, donde se conclui que as componentes da operação de derivação covariante de um vetor na geometria de Lyra são dadas por:

$$\nabla_\nu v^\alpha = \frac{1}{\phi} \partial_\nu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\mu. \quad (2.48)$$

Nota-se que se diferem do caso riemanniano pela presença do fator ϕ^{-1} na derivação ordinária das componentes. Além disso, o fato peculiar da conexão afim na variedade de Lyra não ser simétrica faz com que a ordem dos índices inferiores em $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ tenha significado. Na convenção adotada na Eq. (2.31), o índice livre do operador de derivação (no caso de (2.48) é o índice ν) ocupará a segunda posição dos índices inferiores da conexão.

A derivada covariante de um covetor ω será escrita como $\nabla_{\mathbf{e}_\mu} \omega = \nabla_\mu \omega_\alpha \theta^\alpha$, onde, para determinação das componentes $\nabla_\mu \omega_\alpha$, deve-se lembrar que a derivada covariante de um escalar f é $\nabla_{\mathbf{u}} f = \mathbf{u}f$ e que a aplicação de um covetor ω em um vetor tangente

retorna um escalar. Dessa forma, aplicando ω em um vetor tangente de base, encontra-se:

$$\nabla_{\mu}\omega_{\nu} = \frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\omega_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\omega_{\lambda}. \quad (2.49)$$

O conceito de derivação covariante pode ser estendido para o caso de um (p, q) – tensor geral \mathbf{T} . Nesse caso, sua derivada covariante será designada por $\nabla_{\mathbf{e}_{\alpha}}\mathbf{T}$ e pode ser expandida como:

$$\nabla_{\mathbf{e}_{\alpha}}\mathbf{T} = \nabla_{\alpha}T_{\mu_1\cdots\mu_p}^{\nu_1\cdots\nu_q} (\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\theta}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\theta}^{\mu_p} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\nu_q}),$$

onde as componentes $\nabla_{\alpha}T_{\mu_1\cdots\mu_p}^{\nu_1\cdots\nu_q}$ são escritas como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}T_{\mu_1\cdots\mu_p}^{\nu_1\cdots\nu_q} = & \frac{1}{\phi}\partial_{\alpha}T_{\mu_1\cdots\mu_p}^{\nu_1\cdots\nu_q} + \Gamma^{\nu_1}_{\lambda\alpha}T_{\mu_1\cdots\mu_p}^{\lambda\cdots\nu_q} + \\ & + \cdots + \Gamma^{\nu_q}_{\lambda\alpha}T_{\mu_1\cdots\mu_p}^{\nu_1\cdots\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu_1\alpha}T_{\lambda\cdots\mu_p}^{\nu_1\cdots\nu_q} - \cdots - \Gamma^{\lambda}_{\mu_p\alpha}T_{\mu_1\cdots\lambda}^{\nu_1\cdots\nu_q}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

A partir da lei de transformação (2.50), verifica-se que a derivada covariante de um campo escalar f não é equivalente à derivação ordinária, posto que $\partial_{\mu}f$ não se transforma como vetor de Lyra.

2.4.2 Curva Autoparalela

Seja $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ uma curva suave em \mathcal{M} , com vetor tangente $\mathbf{v} = v^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}$. Esta será dita uma *curva autoparalela* caso \mathbf{v} seja paralelamente transportado em relação a sua própria curva geradora σ ; ou seja, $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$. Com o auxílio da Eq. (2.33), tomando $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, e a expressão para as componentes do vetor tangente em termos das coordenadas $v^{\mu} = \phi(x)(dx^{\mu}/d\lambda)$, encontra-se a equação diferencial para um curva autoparalela:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}v^{\nu}\partial_{\nu}v^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} &= 0, \\ \phi^{-1}\left(\phi\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)\partial_{\nu}\left(\phi\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\left(\phi\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\right)\left(\phi\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right) &= 0, \\ \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}(\partial_{\nu}\phi)\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} + \phi\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\partial_{\nu}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\right) + \phi^2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} &= 0, \\ \phi\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \left(\partial_{\nu}\phi\delta^{\alpha}_{\mu} + \phi^2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \left(\phi \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \nabla_\nu \phi \delta_\mu^\alpha \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (2.51)$$

onde $\nabla_\mu \phi := \phi^{-1} \partial_\mu \phi$. Essa equação pode ser comparada com a Eq. (2.46) para a curva geodésica na variedade de Lyra, e evidencia mais uma propriedade da variedade de Lyra. Fica bastante claro que a curva autoparalela, em geral, não coincide com a geodésica em nosso contexto, diferentemente do que ocorre no caso padrão da variedade riemanniana.

2.4.3 Curvatura

Uma quantidade central em geometria diferencial nos estudos das variedades é o tensor de curvatura. Quando aplicado à modelagem do espaço-tempo nas abordagens convencionais, a curvatura é de fundamental importância pois está diretamente associada ao conteúdo material fonte de gravitação via as equações de campo, e influencia na distorção das linhas geodésicas por intermédio da conexão afim. O tensor de curvatura é definido como um mapa linear $\mathbf{R} : \mathbf{T}_p \mathcal{M} \otimes \mathbf{T}_p \mathcal{M} \otimes \mathbf{T}_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}_p \mathcal{M}$ dado por [46]:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{v}, \mathbf{u}]} \mathbf{w}. \quad (2.52)$$

Da definição acima, verifica-se diretamente que \mathbf{R} é antissimétrico nos seus argumentos; ou seja $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{w} = -\mathbf{R}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \mathbf{w}$. Calculando as suas componentes para um referencial específico na variedade de Lyra, obtém-se: :

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\alpha\mu\nu} \mathbf{e}_\lambda f &= [\mathbf{R}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) \mathbf{e}_\alpha] f = \\ &= [\nabla_{\mathbf{e}_\mu} (\nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{e}_\alpha) - \nabla_{\mathbf{e}_\nu} (\nabla_{\mathbf{e}_\mu} \mathbf{e}_\alpha) - \nabla_{[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu]} \mathbf{e}_\alpha] f \\ &= [\nabla_{\mathbf{e}_\mu} (\Gamma^\rho_{\alpha\nu} \mathbf{e}_\rho) - \nabla_{\mathbf{e}_\nu} (\Gamma^\rho_{\alpha\mu} \mathbf{e}_\rho) - \nabla_{\gamma^\rho_{\mu\nu} \mathbf{e}_\rho} \mathbf{e}_\alpha] f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\alpha\mu\nu} \mathbf{e}_\lambda f &= [\nabla_{\mathbf{e}_\mu} \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \mathbf{e}_\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \nabla_{\mathbf{e}_\mu} (\mathbf{e}_\rho) - \nabla_{\mathbf{e}_\nu} (\Gamma^\rho_{\alpha\mu}) \mathbf{e}_\rho - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \nabla_{\mathbf{e}_\nu} (\mathbf{e}_\rho) - \gamma^\rho_{\mu\nu} \nabla_{\mathbf{e}_\rho} \mathbf{e}_\alpha] f \\ &= [(\mathbf{e}_\mu \Gamma^\rho_{\alpha\nu}) \mathbf{e}_\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} (\nabla_{\mathbf{e}_\mu} \mathbf{e}_\rho) - (\mathbf{e}_\nu \Gamma^\rho_{\alpha\mu}) \mathbf{e}_\rho - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} (\nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{e}_\rho) - \gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\tau_{\alpha\rho} \mathbf{e}_\tau] f \\ &= \left[\frac{1}{\phi} \partial_\mu \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \mathbf{e}_\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} (\Gamma^\tau_{\rho\mu} \mathbf{e}_\tau) - \left(\frac{1}{\phi} \partial_\nu \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \right) \mathbf{e}_\rho - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\tau_{\rho\nu} \mathbf{e}_\tau - \gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\tau_{\alpha\rho} \mathbf{e}_\tau \right] f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\mu\nu\alpha} \mathbf{e}_\lambda f &= \left[\frac{1}{\phi} \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \frac{1}{\phi} \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \right] \mathbf{e}_\lambda f \\ &= \left[\frac{1}{\phi} \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \frac{1}{\phi} \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \phi^{-2} (\delta^\rho_\mu \partial_\nu \phi - \delta^\rho_\nu \partial_\mu \phi) \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \right] \mathbf{e}_\lambda f \\ &= \left[\left(\frac{1}{\phi} \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} + \phi^{-2} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \partial_\mu \phi \right) - \left(\frac{1}{\phi} \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} + \phi^{-2} \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \partial_\nu \phi \right) + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \right] \mathbf{e}_\lambda f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^\lambda_{\alpha\mu\nu} \mathbf{e}_{\lambda f} &= \left[\phi^{-2} \left(\phi \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \partial_\mu \phi \right) - \phi^{-2} \left(\phi \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \partial_\nu \phi \right) + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \right] \mathbf{e}_{\lambda f} \\
&= \left[\frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \left(\phi \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \right) - \frac{1}{\phi^2} \partial_\nu \left(\phi \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \right) + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \right] \mathbf{e}_{\lambda f},
\end{aligned}$$

$$R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \left(\phi \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \right) - \frac{1}{\phi^2} \partial_\nu \left(\phi \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \right) + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\nu}. \quad (2.53)$$

Essa expressão evidencia que a relação de dependência entre a curvatura e a conexão difere do caso riemanniano pela presença da função de escala nos dois primeiros termos.

Partindo das Eqs. (2.58) e (2.52), considerando \mathfrak{S} como um símbolo de soma cíclica, pode-se mostrar que curvatura e torção respeitam [46]:

1. Primeira identidade de Bianchi:

$$\mathfrak{S} [\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{w}] = \mathfrak{S} [\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w})] + (\nabla_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\tau})(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \quad (2.54)$$

2. Segunda identidade de Bianchi:

$$\mathfrak{S} [(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R})(\mathbf{v}, \mathbf{w})] + \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w}) = 0. \quad (2.55)$$

Uma importante quantidade tensorial relacionada às propriedades de curvatura da variedade é o *tensor de Ricci*, definido pela contração entre os índices λ e ν da Eq. (2.53):

$$R_{\alpha\mu} := R^\lambda_{\alpha\mu\lambda} = \frac{1}{\phi^2} \partial_\mu \left(\phi \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} \right) - \frac{1}{\phi^2} \partial_\lambda \left(\phi \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \right) + \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}. \quad (2.56)$$

Da mesma forma, o *escalar de curvatura* é definido pelo traço do tensor de Ricci:

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi^2} g^{\mu\nu} \partial_\lambda \left(\phi \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{\phi^2} \partial^\mu \left(\phi \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right) + g^{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} - g^{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu}. \quad (2.57)$$

Nota-se que podemos recuperar o tensor de curvatura, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura da Relatividade Geral tomando $\phi = 1$ nas Eqs. (2.53), (2.56) e (2.57).

2.4.4 Torção

Por sua vez, o tensor de torção é definido por $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{T}_P \mathcal{M} \times \mathbf{T}_P \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{T}_P \mathcal{M}$ [46]:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad (2.58)$$

donde se verifica diretamente que $\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\tau(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Suponha a escolha de um referencial específico. Então, as componentes do tensor de torção $\tau^\alpha_{\mu\nu}$ na base local atrelada ao referencial serão obtidas aplicando a Eq. (2.58) aos vetores de base:

$$\tau^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha = \tau(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$$

$$\tau^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha = \nabla_{\mathbf{e}_\mu} \mathbf{e}_\nu - \nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{e}_\mu - [\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu].$$

Utilizando as Eqs. (2.11) e (2.31), encontra-se:

$$\tau^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \mathbf{e}_\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha - \phi^{-2} \left(\delta_\mu^\alpha \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \phi \right) \mathbf{e}_\alpha$$

$$\tau^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha = \left[\Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \phi^{-1} \left(\delta_\mu^\alpha \nabla_\nu \phi - \delta_\nu^\alpha \nabla_\mu \phi \right) \right] \mathbf{e}_\alpha.$$

Dessa relação, fica claro que o tensor de torção em Lyra não está associado apenas à parte antissimétrica da conexão devido ao fato das constantes de estrutura $\gamma_{\mu\nu}^\alpha$ da base canônica, dadas em (2.12), serem não nulas. As componentes do tensor de torção serão, portanto:

$$\tau^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \phi^{-1} \left(\nabla_\mu \phi \delta_\nu^\alpha - \nabla_\nu \phi \delta_\mu^\alpha \right). \quad (2.59)$$

2.4.5 Componentes da Conexão

Até o momento, a conexão foi incorporada à estrutura como um ente geométrico independente da métrica. Essas quantidades se entrelaçam diretamente na expressão para a derivada covariante da métrica, de tal modo que a relação entre conexão e métrica está ligada à $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. No caso em que $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, diz-se que a variedade apresenta *compatibilidade métrica* ou que é *métrico-compatível*. Contudo, essa não é a única propriedade geométrica de importância para descrição das propriedades afins da variedade. Outra forma consiste em atribuir ou não a presença de curvatura e torção, visto que estas quantidades dependem de Γ , conforme Eqs. (2.59) e (2.53). Em linhas gerais, determinando-se a propriedade de compatibilidade métrica e a presença ou não de torção, é possível reduzir de forma significativa os 64 graus de liberdade presentes em Γ . Ademais, adiantando ao leitor a ideia da correlação entre os efeitos geométricos e gravitacionais, a imposição desses vínculos está associada a propriedades físicas como integridade do comprimento de vetores sob transporte paralelo, integrabilidade do vetor sob translações.

Existe uma expressão prática para os coeficientes da conexão partindo da expressão da derivada covariante da métrica. Considere-se três vetores tangentes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{T}_p \mathcal{M}$.

Determine-se a derivada do tensor métrico no sentido de \mathbf{u} :

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u}[\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})] - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{g}(\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}).$$

Na sequência, permuta-se os vetores na expressão anterior:

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w})] - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w});$$

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{w}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}).$$

De posse das três equações, define-se o cotensor de não metricidade $\mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ através da relação:

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.60)$$

tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := & \mathbf{u}[\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})] - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{g}(\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}) + \\ & - \mathbf{v}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w})] + \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}) + \\ & - \mathbf{w}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] + \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := & \mathbf{u}[\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})] - \mathbf{v}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w})] - \mathbf{w}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] + \\ & - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \\ & + \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \\ & + \mathbf{g}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}) + 2\mathbf{g}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Utilizando a expressão (2.58) para o tensor de torção, pode-se reescrever $\mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := & \mathbf{u}[\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})] - \mathbf{v}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w})] - \mathbf{w}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] + \\ & - \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}) + \\ & + \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + [\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}) + \\ & + \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + [\mathbf{w}, \mathbf{v}], \mathbf{u}) + 2\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, é importante interpretar o que foi feito. A primeira linha está associada a derivadas da métrica. Quando realiza-se o cálculo de componentes e expande-se os vetores na base natural, esse setor fica associado aos símbolos de Christoffel. Os termos da segunda e terceira linha se dividem em dois cada por intermédio das propriedades de linearidade da métrica. Assim, $\mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w})$ está com relação à torção da variedade e $\mathbf{g}([\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w})$, com as constantes de estrutura da álgebra de Lie da base, que,

como visto, dependem da função de escala. Por último, o termo $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ pode ser expandido em termos dos coeficientes da conexão, conforme Eq. (2.31). Portanto, de forma ampla, pode-se verificar que a equação acima exposta relaciona a conexão com tensor de não-metricidade, derivadas da métrica, torção e função de escala. Para obtenção da relação exata, basta adotar $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\mu, \mathbf{v} = \mathbf{e}_\nu$ e $\mathbf{w} = \mathbf{e}_\lambda$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\lambda) := & \mathbf{e}_\mu [\mathbf{g}(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\lambda)] - \mathbf{e}_\nu [\mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\lambda)] - \mathbf{e}_\lambda [\mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)] + \\ & - \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu), \mathbf{e}_\lambda) - \mathbf{g}([\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu], \mathbf{e}_\lambda) + \\ & + \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu), \mathbf{e}_\nu) + \mathbf{g}([\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu], \mathbf{e}_\nu) + \\ & + \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\nu), \mathbf{e}_\mu) + \mathbf{g}([\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\nu], \mathbf{e}_\mu) + 2\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{e}_\nu}\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu) \end{aligned}$$

Utilizando as relações $\nabla_{\mathbf{e}_\nu}\mathbf{e}_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \tau_{\mu\nu}^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ e $[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = \gamma_{\mu\nu}^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ encontra-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\lambda) := & \mathbf{e}_\mu [\mathbf{g}(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\lambda)] - \mathbf{e}_\nu [\mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\lambda)] - \mathbf{e}_\lambda [\mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)] + \\ & - (\tau_{\mu\nu}^\alpha + \gamma_{\mu\nu}^\alpha) \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\lambda) + (\tau_{\lambda\mu}^\alpha + \gamma_{\lambda\mu}^\alpha) \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\nu) \\ & + (\tau_{\lambda\nu}^\alpha + \gamma_{\lambda\nu}^\alpha) \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\mu) + 2\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\mu). \end{aligned}$$

Nota-se aqui que os tensores estão aplicados sobre os vetores de base; ou seja, podemos reescrever em termos das componentes:

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu\lambda} := & \frac{1}{\phi} \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \frac{1}{\phi} \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \frac{1}{\phi} \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \\ & - (\tau_{\mu\nu}^\alpha + \gamma_{\mu\nu}^\alpha) g_{\alpha\lambda} + (\tau_{\lambda\mu}^\alpha + \gamma_{\lambda\mu}^\alpha) g_{\alpha\nu} \\ & + (\tau_{\lambda\nu}^\alpha + \gamma_{\lambda\nu}^\alpha) g_{\alpha\mu} + 2\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha g_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

Isolando o termo com a conexão, encontra-se:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha g_{\alpha\mu} = & \frac{1}{\phi} (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}) + \\ & + (\tau_{\mu\nu}^\alpha + \gamma_{\mu\nu}^\alpha) g_{\alpha\lambda} - (\tau_{\lambda\mu}^\alpha + \gamma_{\lambda\mu}^\alpha) g_{\alpha\nu} + \\ & - (\tau_{\lambda\nu}^\alpha + \gamma_{\lambda\nu}^\alpha) g_{\alpha\mu} - M_{\mu\nu\lambda}. \end{aligned}$$

Contraindo com as componentes contravariantes da métrica, e isolando os coeficientes

da conexão, encontra-se:

$$\begin{aligned}
2\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} &= \frac{1}{\phi}g^{\mu\beta}(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}) + \\
&+ g^{\mu\beta}(\tau^\alpha{}_{\mu\nu} + \gamma^\alpha{}_{\mu\nu})g_{\alpha\lambda} - g^{\mu\beta}(\tau^\alpha{}_{\lambda\mu} + \gamma^\alpha{}_{\lambda\mu})g_{\alpha\nu} + \\
&- (\tau^\alpha{}_{\lambda\nu} + \gamma^\alpha{}_{\lambda\nu})g^{\mu\beta}g_{\alpha\mu} - g^{\mu\beta}M_{\mu\nu\lambda}, \\
\Gamma^\beta{}_{\lambda\nu} &= \frac{1}{\phi}\frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}) + \\
&+ \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\tau^\alpha{}_{\mu\nu} + \gamma^\alpha{}_{\mu\nu})g_{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\tau^\alpha{}_{\lambda\mu} + \gamma^\alpha{}_{\lambda\mu})g_{\alpha\nu} + \\
&- \frac{1}{2}(\tau^\alpha{}_{\lambda\nu} + \gamma^\alpha{}_{\lambda\nu})g^{\mu\beta}g_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}M^\beta{}_{\nu\lambda}, \\
\Gamma^\beta{}_{\lambda\nu} &= \frac{1}{\phi}\{\beta\}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}M^\beta{}_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(g_{\alpha\lambda}\gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu}\gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} - g_{\alpha\mu}\gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}) + \\
&+ \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(g_{\alpha\lambda}\tau^\alpha{}_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu}\tau^\alpha{}_{\lambda\mu} - g_{\alpha\mu}\tau^\alpha{}_{\lambda\nu}). \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Tomando a Eq. (2.12) para expressar as constantes de estrutura em termos da escala, as contrações de $\gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ com a métrica que aparecem em (2.61) serão:

$$g_{\alpha\lambda}\gamma^\alpha{}_{\mu\nu} := \phi^{-2}(g_{\mu\lambda}\partial_\nu\phi - g_{\nu\lambda}\partial_\mu\phi),$$

$$-g_{\alpha\nu}\gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} := \phi^{-2}(+g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi - g_{\lambda\nu}\partial_\mu\phi)$$

e

$$-g_{\alpha\mu}\gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} := \phi^{-2}(+g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi - g_{\lambda\mu}\partial_\nu\phi).$$

Substituindo-as em (2.61):

$$\begin{aligned}
\Gamma^\beta{}_{\lambda\nu} &= \frac{1}{\phi}\{\beta\}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}M^\beta{}_{\nu\lambda} + \phi^{-2}g^{\mu\beta}(g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi - g_{\nu\lambda}\partial_\mu\phi) + \\
&+ \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(g_{\alpha\lambda}\tau^\alpha{}_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu}\tau^\alpha{}_{\lambda\mu} - g_{\alpha\mu}\tau^\alpha{}_{\lambda\nu})
\end{aligned}$$

$$\Gamma^\beta{}_{\lambda\nu} = \frac{1}{\phi}\{\beta\}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}M^\beta{}_{\nu\lambda} + \phi^{-1}(\delta^\beta{}_\nu\nabla_\lambda\phi - g_{\nu\lambda}\nabla^\beta\phi) + \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\tau_{\lambda\mu\nu} - \tau_{\nu\lambda\mu} - \tau_{\mu\lambda\nu}). \tag{2.62}$$

Na variedade de Riemann-Cartan o tensor de não-metricidade M desaparece, assim

como o terceiro termo do lado direito, pois $\phi = 1$.

2.5 Teorema da Divergência

Considere-se $V \subset \mathbb{R}^4$ um hipervolume delimitado pela hipersuperfície ∂V de dimensão 3. Agora, dada a integral:

$$\int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \nabla_\mu a^\mu \quad (2.63)$$

onde ∇_μ é a derivada covariante de Lyra e a^μ é um vetor de Lyra, deseja-se determinar se existe uma versão covariante do teorema da divergência na variedade de Lyra:

$$\int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \nabla_\mu a^\mu \stackrel{?}{=} \oint_{\partial V} d^3x \phi^3 \sqrt{-g} n_\mu a^\mu$$

para um vetor normal n_μ à superfície de integração. Essa constatação é de fundamental importância nas derivações que vamos realizar mais adiante nesta tese.

Expandindo a derivada em (2.63), de acordo com a regra deduzida na Eq. (2.48), obtém-se:

$$\int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \nabla_\mu a^\mu = \int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\phi} \partial_\mu a^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} a^\lambda \right). \quad (2.64)$$

A expressão geral para a conexão está dada em (2.62). Contraindo o índice superior com o segundo índice inferior:

$$\Gamma^\mu_{\lambda\mu} = \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{\phi} (4\nabla_\lambda \phi - \nabla_\lambda \phi) - \frac{1}{2} M^\mu_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (\tau_{\lambda\rho\mu} - \tau_{\mu\lambda\rho} - \tau_{\rho\lambda\mu}),$$

$$\Gamma^\mu_{\lambda\mu} = \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \frac{3}{\phi} \nabla_\lambda \phi - \frac{1}{2} M^\mu_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (\tau_{\lambda\rho\mu} - \tau_{\mu\lambda\rho} - \tau_{\rho\lambda\mu}).$$

Retomando a expressão para o tensor de não metricidade:

$$M_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu g_{\nu\rho} - \nabla_\nu g_{\mu\rho} - \nabla_\rho g_{\mu\nu}$$

temos:

$$g^{\mu\lambda} M_{\mu\nu\rho} = M^\lambda_{\nu\rho} = g^{\mu\lambda} \nabla_\mu g_{\nu\rho} - g^{\mu\lambda} \nabla_\nu g_{\mu\rho} - g^{\mu\lambda} \nabla_\rho g_{\mu\nu}.$$

Contraindo os índices λ e ν , obtemos:

$$M^{\nu}_{\nu\rho} = \nabla^\nu g_{\nu\rho} - \nabla^\nu g_{\mu\rho} - g^{\mu\nu} \nabla_\rho g_{\mu\nu}$$

$$M^{\nu}_{\nu\rho} = -g^{\mu\nu} \nabla_\rho g_{\mu\nu}.$$

Por fim, será preciso utilizar a identidade do símbolo de Christoffel [95]:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}.$$

Logo:

$$\Gamma^\mu_{\lambda\mu} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} + \frac{3}{\phi} \nabla_\lambda \phi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda g_{\mu\nu} + \tau_{\lambda\nu\mu} - \tau_{\mu\lambda\nu} - \tau_{\nu\lambda\mu}). \quad (2.65)$$

Substituindo (2.65) em (2.64):

$$\begin{aligned} & \int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \nabla_\lambda a^\lambda = \\ & = \int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\phi} \partial_\lambda a^\lambda + \frac{1}{\phi} \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} a^\lambda + \frac{3}{\phi} \nabla_\lambda \phi a^\lambda \right] + \\ & + \int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda g_{\mu\nu} + \tau_{\lambda\nu\mu} - \tau_{\mu\lambda\nu} - \tau_{\nu\lambda\mu}) a^\lambda. \end{aligned}$$

Por enquanto, vamos trabalhar com o primeiro termo do membro direito:

$$\begin{aligned} T_1 & := \int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\phi} \partial_\lambda a^\lambda + \frac{1}{\phi} \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} a^\lambda + \frac{3}{\phi} \nabla_\lambda \phi a^\lambda \right) \\ & = \int_V d^4x \left(\phi^3 \sqrt{-g} \partial_\lambda a^\lambda + \phi^3 \partial_\mu \sqrt{-g} a^\mu + \frac{3}{\phi} \phi^4 \sqrt{-g} \nabla_\lambda \phi a^\lambda \right) \\ & = \int_V d^4x \left[\phi^3 \partial_\lambda (\sqrt{-g} a^\lambda) + 3\phi^3 \sqrt{-g} \nabla_\lambda \phi a^\lambda \right]. \end{aligned}$$

Pode-se somar e subtrair um termo do tipo $\partial_\lambda \phi^3 (\sqrt{-g} a^\lambda)$:

$$\begin{aligned} T_1 & = \int_V d^4x \left[\partial_\lambda (\phi^3 \sqrt{-g} a^\lambda) + 3\phi^3 \sqrt{-g} \frac{1}{\phi} \partial_\lambda \phi a^\lambda \right] \\ & - \int_V d^4x \left[3\phi^2 \partial_\lambda \phi (\sqrt{-g} a^\lambda) \right]. \end{aligned}$$

$$T_1 = \int_V d^4x \partial_\lambda (\phi^3 \sqrt{-g} a^\lambda).$$

O objeto entre parênteses pode ser entendido como um vetor v^λ . Por isso, podemos usar a forma conhecida (da geometria de Riemann) para o teorema da divergência e converter essa integral em d^4x em uma integral de "superfície":

$$T_1 = \oint_{\partial V} d^3x \phi^3 \sqrt{-g} n_\lambda a^\lambda, \quad (2.66)$$

onde n_λ é um vetor normal à superfície do volume de integração de (2.63).

Nesse caso, temos:

$$\int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \nabla_\lambda a^\lambda = \oint_{\partial V} d^3x \phi^3 \sqrt{-g} n_\lambda a^\lambda + \int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda g_{\mu\nu} + \tau_{\lambda\nu\mu} - \tau_{\mu\lambda\nu} - \tau_{\nu\lambda\mu}) a^\lambda. \quad (2.67)$$

Esse resultado é bastante importante! Ele nos mostra que uma versão na variedade de Lyra do teorema da divergência:

$$\int_V d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \nabla_\lambda a^\lambda = \oint_{\partial V} d^3x \phi^3 \sqrt{-g} n_\lambda a^\lambda, \quad (2.68)$$

é somente possível caso:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} + \tau_{\lambda(\nu\mu)} - \tau_{\mu\lambda\nu} - \tau_{\nu\lambda\mu} = 0. \quad (2.69)$$

2.6 Espaço-Tempo de Lyra

Nas seções anteriores, foram abordados os conceitos de uma geometria geral na variedade de Lyra. Deseja-se utilizar esse desenvolvimento como modelo para fenômenos físicos. Dessa forma, é preciso entender como descrever as entidades físicas nessa variedade.

Antes de prosseguir, é importante ser claro quanto ao que estamos tentando modelar. Nesse modelo, a gravidade pode ser inferida por uma partícula teste através da distorção das suas linhas geodésicas em relação às linhas retas. Em muitos livros-texto de Relatividade Geral, fala-se sobre a distorção das geodésicas de partículas livres pela curvatura do espaço-tempo. Isso, apesar de parecer intuitivo, não é verdade. Temos teorias teleparalelas e, portanto, sem curvatura, mas com geodésicas não triviais assim como na Relatividade Geral. Outros, podem argumentar que a forma da conexão na equação de movimento é responsável pelas alterações das geodésicas. Isso pode ser uma meia verdade dentro do contexto da geometria Riemanniana, mas a resposta é um pouco mais complexa. Na Relatividade Geral, onde a conexão é dada pelos símbolos de Christoffel, isso é fato. Porém, numa ótica mais geral, vai depender se a teoria apresenta geodésicas autoparalelas. Em linhas gerais, em uma teoria de gravitação com geometria distinta da Riemanniana, deve-se ter cuidado com os conceitos geométricos assumidos com base na experiência em teorias de gravitação em variedades Riemannianas, visto que muitos deles não são válidos em uma geometria como a de Lyra. Nesse trabalho, a fim de se descrever o movimento de partículas livres em um espaço-tempo modelado por uma variedade de Lyra, vamos rederivar as equações de movimento desde o princípio.

O ponto de partida, assim como é feito na Relatividade Especial e na Relatividade Geral, é a definição da distância infinitesimal entre dois eventos do espaço-tempo. O

elemento de linha na geometria de Lyra é:

$$ds^2 = \phi^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.70)$$

Nota-se que a presença da escala ϕ^2 na expressão faz de ds^2 um invariante de Lyra:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= \bar{\phi}^2 \bar{g}_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \\ &= \bar{\phi}^2 \left(\frac{\phi^2}{\bar{\phi}^2} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\lambda\sigma} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta \right) \\ &= (\phi^2 g_{\lambda\sigma}) \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta \right) \\ &= \phi^2 g_{\lambda\sigma} dx^\lambda dx^\sigma \\ &= ds^2 \end{aligned}$$

Assim, pode-se determiná-lo em um outro referencial onde a escala é unitária e o intervalo entre eventos ocorre no mesmo ponto da seção espacial da variedade:

$$ds^2 = \tilde{g}_{00} d\tilde{t}^2.$$

Reparametrizando o tempo $\tilde{g}_{00} d\tilde{t}^2 \rightarrow d\tau^2$:

$$ds^2 = d\tau^2,$$

essa relação mostra que:

$$d\tau^2 = \phi^2 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.71)$$

Suponha uma partícula livre no espaço-tempo de Lyra, com massa m , e 4-velocidade dada por:

$$u^\alpha \equiv \phi \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (2.72)$$

tal que, pela Eq. (2.71):

$$u_\alpha u^\alpha = 1. \quad (2.73)$$

Nota-se que u^α se transforma como um vetor da variedade de Lyra:

$$\tilde{u}^\alpha = \tilde{\phi} \frac{d\tilde{x}^\alpha}{d\tau} = \frac{\tilde{\phi}}{\phi} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \phi \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{\tilde{\phi}}{\phi} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} u^\beta.$$

Define-se também o 4-momento da partícula de massa m através de:

$$p^\alpha \equiv m u^\alpha. \quad (2.74)$$

Como consequência:

$$p_\alpha p^\alpha = m^2. \quad (2.75)$$

2.6.1 O Método de Hamilton-Jacobi na variedade de Lyra

Em alguns casos, os fenômenos físicos podem ser mais diretamente estudados via a Equação de Hamilton-Jacobi [96, 97]. No caso de uma variedade Riemanniana, a equação de Hamilton-Jacobi é escrita como [96]:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2, \quad (2.76)$$

onde S é a função principal de Hamilton e m é a massa da partícula. Entretanto, na sua obtenção, são utilizados uma série de conceitos válidos exclusivamente em geometria riemanniana [97]. Sendo assim, não se pode aplicá-la ingenuamente sem antes se averiguar sua validade na teoria geométrica de Lyra.

A forma geral da equação de Hamilton-Jacobi, como já se conhece, é [98]:

$$H\left(x^\mu, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^\mu}\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tau} = 0,$$

onde τ é um parâmetro de evolução (como o tempo próprio no caso de partículas massivas, por exemplo). Claro está que a hamiltoniana H no movimento de partículas livres, não deve depender explicitamente de τ . Nesse caso, propõe-se uma solução para $\tilde{S}(x^\mu, \tau)$ da forma:

$$\tilde{S}(x^\mu, \tau) = S(x^\mu) - Cf(\tau),$$

onde C é uma constante real e f uma função arbitrária da variável τ . Assim:

$$H\left(x^\mu, \frac{\partial S}{\partial x^\mu}\right) = C. \quad (2.77)$$

Portanto, para encontrar uma equação de Hamilton-Jacobi que seja válida na variedade de Lyra, basta encontrar a hamiltoniana de uma partícula livre em termos das coordenadas e momentos, e substituir estes por $\partial S/\partial x^\mu$. Através da resolução da Eq. (2.77), obtém-se $S(x^\mu, c_1, \dots, c_n)$, onde c_μ são n constantes do movimento. As equações que descrevem a solução das coordenadas são obtidas impondo-se que as derivadas da função principal de Hamilton S sejam constantes κ^i :

$$\kappa^i = \frac{\partial S}{\partial c_i}. \quad (2.78)$$

Os momentos canonicamente conjugados a cada uma das coordenadas são obtidos via [98]:

$$\pi_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (2.79)$$

Em primeiro lugar, conforme será demonstrado na seção 4.2, uma lagrangiana que reproduz as equações da geodésica é:

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\beta) = \frac{m}{2} \phi^2(x^\alpha) g_{\mu\nu}(x^\alpha) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (2.80)$$

onde aqui, a dependência de L das coordenadas e velocidades generalizadas foram explicitadas.

Determinando-se a lagrangiana, de acordo com a abordagem hamiltoniana, definem-se os momentos canônicos π_μ pela expressão usual:

$$\begin{aligned} \pi_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \left(\phi^2 g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right), \\ \pi_\mu &= m \phi^2(x^\alpha) g_{\mu\beta}(x^\alpha) \dot{x}^\beta. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Isolando \dot{x}^β nessa equação:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \pi_\mu &= m \phi^2 g^{\mu\nu} g_{\mu\beta} \dot{x}^\beta \\ \dot{x}^\nu(x^\alpha, \pi_\beta) &= \frac{g^{\mu\nu}(x^\alpha) \pi_\mu}{m \phi^2(x^\alpha)}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

pode-se reescrever a lagrangiana como:

$$\begin{aligned} L(x^\alpha, \pi_\beta) &= \frac{m}{2} \phi^2 g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{m \phi^2} g^{\alpha\mu} \pi_\alpha \right) \left(\frac{1}{m \phi^2} g^{\beta\nu} \pi_\beta \right) \\ &= \frac{g^{\mu\nu}(x^\alpha) \pi_\mu \pi_\nu}{2m \phi^2(x^\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Uma vez obtida a lagrangiana e as velocidades em termos de coordenadas e momentos, a Hamiltoniana será:

$$\begin{aligned} H(x^\mu, \pi_\mu) &= \pi_\mu \dot{x}^\mu(x^\alpha, \pi_\beta) - L(x^\alpha, \pi_\beta) \\ &= \frac{1}{m \phi^2} g^{\alpha\mu} \pi_\mu \pi_\alpha - \frac{1}{2m \phi^2} g^{\beta\nu} \pi_\beta \pi_\nu \\ H(x^\mu, \pi_\mu) &= \frac{g^{\mu\nu}(x^\alpha) \pi_\mu \pi_\nu}{2m \phi^2(x^\alpha)} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Conforme as Eqs. (2.72) e (2.74), sabe-se que o 4-momento da partícula é dado por:

$$p^\mu = m \phi \dot{x}^\mu = \frac{1}{\phi} g^{\mu\nu} \pi_\nu. \quad (2.85)$$

Logo, através das Eqs. (2.75), (2.84) e (2.85), verifica-se que a hamiltoniana é uma constante temporal:

$$H(x^\mu, \pi_\mu) = \frac{g^{\mu\nu} \pi_\mu \pi_\nu}{2m \phi^2} = \frac{1}{2m} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$$

$$H = \frac{m}{2}, \quad (2.86)$$

resultado este que se mostra condizente com (2.77). Combinando (2.84) com (2.86) e substituindo os momentos π_μ por $\partial S / \partial x^\mu$, encontra-se:

$$H \left(x^\mu, \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) = \frac{m}{2},$$

$$\frac{1}{2m\phi^2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = \frac{m}{2}.$$

Por fim, a Equação de Hamilton-Jacobi válida na variedade de Lyra será:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2 \phi^2. \quad (2.87)$$

A Eq. (2.87) difere do resultado conhecido na variedade Riemanniana, Eq. (2.76), pela presença do quadrado da escala como fator multiplicativo no membro direito.

2.6.2 Isometrias na Variedade de Lyra

Existe um interesse especial em quantidades que são invariantes perante transformações específicas. No caso das transformações de referenciais $(x^\nu, \phi) \rightarrow (\bar{x}^\nu, \bar{\phi})$, uma quantidade $T^{\dots}(x^\nu)$ de natureza arbitrária (ou seja, pode apresentar caráter escalar, vetorial, tensorial, etc.) é *invariante de forma* sob tal transformação caso :

$$\bar{T}^{\dots}(\bar{x}^\nu) = T^{\dots}(x^\nu); \quad (2.88)$$

ou seja, as funções \bar{T}^{\dots} e T^{\dots} retornam os mesmos resultados para os mesmo argumentos. Nesse caso, a transformação é dita uma *isometria*.

Um campo escalar Ψ na variedade de Lyra se transforma como:

$$\Psi(x^\nu) = \bar{\Psi}(\bar{x}^\nu). \quad (2.89)$$

Supondo que esse campo respeita uma determinada isometria, através da condição (2.88), encontra-se:

$$\Psi(x^\nu) = \bar{\Psi}(x^\nu). \quad (2.90)$$

Essa equação é válida em qualquer troca arbitrária de referenciais $(x^\nu, \phi) \rightarrow (\bar{x}^\nu, \bar{\phi})$, e, em geral, não pode ser resolvida. Contudo, muitas das simetrias de interesse físico são descritas em termos de grupos de Lie e podem ser obtidas através de geradores infinitesimais. Dessa forma, pode-se manter o foco nesses tipos de transformações infinitesimais à procura de uma solução para a forma funcional de $\Psi(x^\nu)$ para os casos supracitados.

Consideram-se simetrias infinitesimais aquelas parametrizadas de acordo com a transformação:

$$\begin{cases} x^\mu & \rightarrow \bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon \zeta^\mu(x) \\ \phi & \rightarrow \bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x) + \varepsilon \Phi(x) \end{cases} \quad (2.91)$$

onde ε é um parâmetro arbitrário e infinitesimal e ζ^μ e Φ são *campos de Killing* que carregam a informação sobre a isometria.

Sob (2.91), o campo escalar Ψ se transforma como:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\bar{x}^\nu) &= \bar{\Psi}(x^\nu + \varepsilon \zeta^\nu) = \\ &= \bar{\Psi}(x^\nu) + \varepsilon \partial_\alpha \Psi \zeta^\alpha. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Pode-se utilizar a lei de transformação (2.89) para reescrever o membro esquerdo de (2.92):

$$\Psi(x^\nu) = \bar{\Psi}(x^\nu) + \varepsilon \partial_\alpha \Psi \zeta^\alpha.$$

Agora, aplicando a condição de isometria (2.89), encontra-se a equação que determina a forma funcional que um campo escalar Ψ deve apresentar para respeitar uma simetria descrito pelo vetor ζ^α :

$$\Psi(x^\nu) = \bar{\Psi}(x^\nu) + \varepsilon \partial_\alpha \Psi \zeta^\alpha,$$

ou seja

$$\partial_\alpha \Psi \zeta^\alpha = 0. \quad (2.93)$$

Isometrias de Campos Vetoriais

Para o caso de um campo vetorial, o procedimento é um pouco mais longo, uma vez que a lei de transformação vetorial é mais complexa. Conforme já verificado, sob uma mudança de referenciais na variedade de Lyra, as componentes de um vetor de Lyra se transformam como:

$$v_\mu(x^\nu) = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \bar{v}_\alpha(\bar{x}^\nu).$$

Sob transformações de referenciais $(x^\nu, \phi) \rightarrow (\bar{x}^\nu, \bar{\phi})$, o vetor $v_\mu(x^\nu)$ é *invariante de forma* caso, no referencial $(\bar{x}^\nu, \bar{\phi})$, a função vetorial $\bar{v}_\mu(\bar{x}^\nu)$ retorne o mesmo resultado que $v_\mu(x^\nu)$ para o mesmo argumento. Ou seja:

$$\bar{v}_\mu(x^\nu) = v_\mu(x^\nu).$$

Obter as isometrias de um campo vetorial, portanto, consiste em se resolver a equação

$$v_\mu(x^\nu) = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} v_\alpha(\bar{x}^\nu) \quad (2.94)$$

para encontrar a transformação de referenciais. Alternativamente, pode-se inverter o problema, procurando campos vetoriais $v_\mu(x^\nu)$ que respeitem uma determinada isometria de interesse. Esse segundo caso é mais interessante uma vez que, na maioria das vezes, a isometria do problema é inferida por observações, hipóteses em primeiros princípios e, nesse aspecto, é desejável obter os campos que respeitam a simetria requerida. No restante do capítulo, o foco do trabalho estará restrito a essa tarefa.

Trabalhar com a Eq. (2.94) para casos gerais é uma tarefa impraticável. Em vez disso, pode-se atacar o problema propondo simetrias infinitesimais parametrizadas de acordo com a transformação (2.91). Esse procedimento leva às equações de Killing, cujas soluções obedecem as simetrias em questão. Para obter a equação de Killing para esse caso, vamos primeiramente aplicar as transformações infinitesimais de coordenadas e depois, a transformação infinitesimal de escala.

Através da primeira das Eqs. (2.91), temos:

$$\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \varepsilon \partial_\mu \bar{\zeta}^\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} = \delta_\alpha^\mu - \varepsilon \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu. \quad (2.95)$$

Sob (2.91), a escala da geometria de Lyra ϕ se transforma como:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{x}^\nu) &= \bar{\phi}(x^\nu + \varepsilon \bar{\zeta}^\nu) = \bar{\phi}(x^\nu) + \varepsilon \partial_\alpha \bar{\phi} \bar{\zeta}^\alpha \\ &= \bar{\phi}(x^\nu) (1 + \varepsilon \partial_\alpha \ln \bar{\phi} \bar{\zeta}^\alpha) \end{aligned} \quad (2.96)$$

e o campo vetorial:

$$\bar{v}_\mu(\bar{x}^\nu) = \bar{v}_\mu(x^\nu) + \varepsilon \partial_\alpha \bar{v}_\mu \bar{\zeta}^\alpha. \quad (2.97)$$

Por outro lado, a lei de transformação de $v_\mu(x^\nu)$ é dada por:

$$\bar{v}_\alpha(\bar{x}^\nu) = \frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(\bar{x}^\nu)} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} v_\mu(x^\nu)$$

Aplicando as Eqs. (2.95), (2.96) em (2.97):

$$\begin{aligned} \bar{v}_\alpha(x^\nu) + \varepsilon \partial_\nu \bar{v}_\alpha \bar{\zeta}^\nu &= \frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu) (1 + \varepsilon \partial_\nu \ln \bar{\phi} \bar{\zeta}^\nu)} (\delta_\alpha^\mu - \varepsilon \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu) v_\mu(x^\nu) \\ &= \frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} (v_\alpha - \varepsilon v_\mu \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu - \varepsilon \partial_\nu \ln \bar{\phi} \bar{\zeta}^\nu v_\alpha), \end{aligned} \quad (2.98)$$

onde desprezamos os termos de ordem ζ^2 . Para garantir a condição de isometria, deve-se

impor que:

$$\bar{v}_\alpha(x^\nu) = v_\alpha(x^\nu). \quad (2.99)$$

Dessa forma, da Eq. (2.98), encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} (v_\alpha - \varepsilon v_\mu \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu - \varepsilon \partial_\nu \ln \bar{\phi} \bar{\zeta}^\nu v_\alpha) - \varepsilon \partial_\nu \bar{v}_\alpha \bar{\zeta}^\nu &= v_\alpha(x^\nu), \\ \left[\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} (1 - \varepsilon \partial_\nu \ln \bar{\phi} \bar{\zeta}^\nu) - 1 \right] v_\alpha - \varepsilon \frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} v_\mu \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu - \varepsilon \partial_\nu \bar{v}_\alpha \bar{\zeta}^\nu &= 0. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Para prosseguir, expande-se o termo $\varepsilon \partial_\nu \bar{v}_\alpha \bar{\zeta}^\nu$, mantendo-se apenas termos de primeira ordem:

$$\varepsilon \bar{\zeta}^\nu \partial_\nu \bar{v}_\alpha = \varepsilon \bar{\zeta}^\nu \partial_\nu \left[\frac{\phi(x^\lambda)}{\bar{\phi}(x^\lambda)} \right] v_\alpha + \varepsilon \frac{\phi(x^\lambda)}{\bar{\phi}(x^\lambda)} \bar{\zeta}^\nu \partial_\nu v_\alpha. \quad (2.101)$$

Assim, substituindo (2.101) em (2.100):

$$v_\alpha \left[\frac{\phi(x^\lambda)}{\bar{\phi}(x^\lambda)} (1 - \varepsilon \partial_\nu \ln \bar{\phi} \bar{\zeta}^\nu) - 1 \right] - \varepsilon \frac{\phi(x^\lambda)}{\bar{\phi}(x^\lambda)} (v_\mu \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu + \bar{\zeta}^\nu \partial_\nu v_\alpha) - \varepsilon \bar{\zeta}^\nu \partial_\nu \left[\frac{\phi(x^\lambda)}{\bar{\phi}(x^\lambda)} \right] v_\alpha = 0$$

Pode-se dividir a equação toda por $\phi/\bar{\phi}$:

$$(v_\mu \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu + \bar{\zeta}^\nu \partial_\nu v_\alpha) + \bar{\zeta}^\nu v_\alpha \partial_\nu \ln \phi = \frac{1}{\varepsilon} v_\alpha \left[1 - \frac{\bar{\phi}(x^\lambda)}{\phi(x^\lambda)} \right]. \quad (2.102)$$

No caso de transformações infinitesimais de escala, como na segunda linha de (2.91):

$$\frac{\bar{\phi}(x^\lambda)}{\phi(x^\lambda)} = 1 + \frac{1}{\phi} \varepsilon \Phi(x^\lambda) - \varepsilon \partial_\alpha \ln \phi \bar{\zeta}^\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{\phi}{\bar{\phi}(x^\lambda)} = 1 - \frac{1}{\phi} \varepsilon \Phi(x^\lambda) + \varepsilon \partial_\alpha \ln \phi \bar{\zeta}^\alpha, \quad (2.103)$$

a Eq. (2.102) se reduz à:

$$(v_\mu \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu + \bar{\zeta}^\nu \partial_\nu v_\alpha) + \bar{\zeta}^\nu v_\alpha \partial_\nu \ln \phi = -v_\alpha \frac{\Phi(x^\lambda)}{\phi} + \bar{\zeta}^\nu v_\alpha \partial_\nu \ln \phi,$$

$$v_\mu \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu + \bar{\zeta}^\nu \partial_\nu v_\alpha + \frac{\Phi}{\phi} v_\alpha = 0, \quad (2.104)$$

cujo último termo do membro esquerdo é a contribuição extra para o caso de Lyra.

Isometrias de Campos Tensoriais

Um campo tensorial covariante de *rank* 2 se transforma como:

$$\bar{T}_{\alpha\beta}(\bar{x}^\nu) = \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(\bar{x}^\nu)} \right)^2 \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} T_{\mu\nu}(x^\nu). \quad (2.105)$$

Aplicando as Eqs. (2.95) e (2.96)

$$\bar{T}_{\alpha\beta}(\bar{x}^\nu) = \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(\bar{x}^\nu)} \right)^2 \left(1 - \varepsilon \partial_\lambda \ln \bar{\phi}^2 \bar{\zeta}^\lambda \right) \left(T_{\alpha\beta}(x^\nu) - \varepsilon \partial_\beta \bar{\zeta}^\nu T_{\alpha\nu}(x^\nu) - \varepsilon \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu T_{\mu\beta}(x^\nu) \right), \quad (2.106)$$

Expandindo o lado esquerdo:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\alpha\beta}(x^\nu) &= \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} \right)^2 \left(T_{\alpha\beta}(x^\nu) - \varepsilon \partial_\beta \bar{\zeta}^\nu T_{\alpha\nu}(x^\nu) - \varepsilon \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu T_{\mu\beta}(x^\nu) \right) + \\ &\quad - \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} \right)^2 \varepsilon \partial_\lambda \ln \bar{\phi}^2 \bar{\zeta}^\lambda T_{\alpha\beta}(x^\nu) - \varepsilon \partial_\lambda \bar{T}_{\alpha\beta} \bar{\zeta}^\lambda. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Mantendo-se apenas os termos de primeira ordem da expansão de $\varepsilon \partial_\lambda \bar{T}_{\alpha\beta} \bar{\zeta}^\lambda$, através de (2.107), obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_\lambda \bar{T}_{\alpha\beta} \bar{\zeta}^\lambda &= \varepsilon \partial_\lambda \left[\left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} \right)^2 T_{\alpha\beta}(x^\nu) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \bar{\zeta}^\lambda \\ &= \varepsilon \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} \right)^2 \partial_\lambda T_{\alpha\beta} \bar{\zeta}^\lambda + \varepsilon T_{\alpha\beta}(x^\nu) \bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Substituindo (2.108) em (2.107):

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\alpha\beta}(x^\nu) &= \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} \right)^2 \left(T_{\alpha\beta} - \varepsilon \partial_\beta \bar{\zeta}^\nu T_{\alpha\nu} - \varepsilon \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu T_{\mu\beta} - \varepsilon \partial_\lambda T_{\alpha\beta} \bar{\zeta}^\lambda \right) + \\ &\quad - \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} \right)^2 \varepsilon \partial_\lambda \ln \bar{\phi}^2 \bar{\zeta}^\lambda T_{\alpha\beta}(x^\nu) - \varepsilon T_{\alpha\beta}(x^\nu) \bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda \left(\frac{\phi(x^\nu)}{\bar{\phi}(x^\nu)} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Impondo a condição de isometria $\bar{T}_{\alpha\beta}(x^\nu) = T_{\alpha\beta}(x^\nu)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right)^2 \left(\bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda T_{\alpha\beta} + \partial_\beta \bar{\zeta}^\nu T_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu T_{\mu\beta} \right) &= \\ = T_{\alpha\beta} \left[\left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right)^2 \left(1 - \varepsilon \partial_\lambda \ln \bar{\phi}^2 \bar{\zeta}^\lambda \right) - 1 \right] - \varepsilon T_{\alpha\beta} \bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right)^2. \end{aligned}$$

Dividindo a equação por $(\phi/\bar{\phi})^2$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda T_{\alpha\beta} + \partial_\beta \bar{\zeta}^\nu T_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu T_{\mu\beta} \right) = \\ = T_{\alpha\beta} \left[1 - \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right)^2 \right] - \varepsilon \partial_\lambda \ln \bar{\phi}^2 \bar{\zeta}^\lambda T_{\alpha\beta} - \varepsilon T_{\alpha\beta} \bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda \ln \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right)^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda T_{\alpha\beta} + \partial_\beta \bar{\zeta}^\nu T_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu T_{\mu\beta} + T_{\alpha\beta} \bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda \ln \phi^2 = \frac{1}{\varepsilon} T_{\alpha\beta} \left[1 - \left(\frac{\bar{\phi}(x^\nu)}{\phi(x^\nu)} \right)^2 \right]. \quad (2.110)$$

Supondo que a transformação de escala possa ser posta na forma infinitesimal, pode-se substituir (2.103) em (2.110):

$$\bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda T_{\alpha\beta} + \partial_\beta \bar{\zeta}^\nu T_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu T_{\mu\beta} + 2 \frac{\Phi}{\phi} T_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.111)$$

Isometrias do Tensor Métrico

Na seção anterior, obteve-se a equação que determina a forma que um campo tensorial covariante de *rank* 2 deve apresentar para respeitar uma determinada isometria definida pelos vetores $\bar{\zeta}^\mu$. Um tensor covariante muito importante é a métrica $g_{\mu\nu}$. Essa seção visa aplicar a Eq. (2.111) a esta quantidade, utilizando suas propriedades para simplificação das equações.

Aplicando (2.111) à $g_{\mu\nu}$:

$$\bar{\zeta}^\lambda \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + \partial_\beta \bar{\zeta}^\nu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu g_{\mu\beta} + 2 \frac{\Phi}{\phi} g_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.112)$$

Aplicando a regra da cadeia nos termos $\partial_\beta \bar{\zeta}^\nu g_{\alpha\nu}$ e $\partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu g_{\mu\beta}$, obtém-se:

$$\partial_\beta \bar{\zeta}^\nu g_{\alpha\nu} = \partial_\beta (\bar{\zeta}^\nu g_{\alpha\nu}) - \bar{\zeta}^\nu \partial_\beta g_{\alpha\nu} = \partial_\beta \bar{\zeta}_\alpha - \bar{\zeta}^\lambda \partial_\beta g_{\alpha\lambda}.$$

e

$$\partial_\alpha \bar{\zeta}^\mu g_{\mu\beta} = \partial_\alpha (\bar{\zeta}^\mu g_{\mu\beta}) - \bar{\zeta}^\mu \partial_\alpha g_{\mu\beta} = \partial_\alpha \bar{\zeta}_\beta - \bar{\zeta}^\lambda \partial_\alpha g_{\lambda\beta}.$$

Substituindo as duas relações acima na Eq. (2.112), encontra-se:

$$\begin{aligned}\zeta^\lambda (\partial_\lambda g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\beta}) + \partial_\beta \zeta_\alpha + \partial_\alpha \zeta_\beta + 2 \frac{\Phi}{\phi} g_{\alpha\beta} &= 0, \\ \xi_\mu g^{\mu\lambda} (\partial_\lambda g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\beta}) + \partial_\beta \zeta_\alpha + \partial_\alpha \zeta_\beta + 2 \frac{\Phi}{\phi} g_{\alpha\beta} &= 0.\end{aligned}$$

Reconhecendo o símbolo de Christoffel no primeiro termo do membro esquerdo:

$$\partial_\beta \zeta_\alpha + \partial_\alpha \zeta_\beta - 2 \xi_\mu \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + 2 \frac{\Phi}{\phi} g_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.113)$$

Essa é a expressão para a equação de Killing para as simetrias do tensor métrico. Contudo, ela não está escrita de forma covariante de Lyra. Para obter essa equação de forma covariante, o membro esquerdo pode ser reescrito em termos das derivadas covariantes do campo ζ^μ . Da expressão (2.49), a derivada covariante de um vetor ζ_β será:

$$\nabla_\alpha \zeta_\beta = \frac{1}{\phi} \partial_\alpha \zeta_\beta - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \zeta_\lambda$$

onde

$$\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} = \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} M^\lambda_{\alpha\beta} + \phi^{-1} \left(\delta^\lambda_\alpha \nabla_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \nabla^\lambda \phi \right) + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\tau_{\beta\rho\alpha} - \tau_{\alpha\beta\rho} - \tau_{\rho\beta\alpha}).$$

Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \zeta_\beta &= \frac{1}{\phi} \partial_\alpha \zeta_\beta - \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} \zeta_\lambda + \frac{1}{2} M^\lambda_{\alpha\beta} \zeta_\lambda - \phi^{-1} \left(\delta^\lambda_\alpha \nabla_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \nabla^\lambda \phi \right) \zeta_\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\tau_{\beta\rho\alpha} - \tau_{\alpha\beta\rho} - \tau_{\rho\beta\alpha}) \zeta_\lambda.\end{aligned}$$

Permutando os índices α e β , encontra-se:

$$\begin{aligned}\nabla_\beta \zeta_\alpha &= \frac{1}{\phi} \partial_\beta \zeta_\alpha - \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \zeta_\lambda + \frac{1}{2} M^\lambda_{\beta\alpha} \zeta_\lambda - \phi^{-1} \left(\delta^\lambda_\beta \nabla_\alpha \phi - g_{\beta\alpha} \nabla^\lambda \phi \right) \zeta_\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\tau_{\alpha\rho\beta} - \tau_{\beta\alpha\rho} - \tau_{\rho\alpha\beta}) \zeta_\lambda.\end{aligned}$$

Somando as duas últimas equações, temos:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha &= + \frac{1}{\phi} (\partial_\alpha \zeta_\beta + \partial_\beta \zeta_\alpha) - \frac{2}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \zeta_\lambda + M^\lambda_{(\alpha\beta)} \zeta_\lambda \\ &\quad + 2 g_{\alpha\beta} \nabla^\lambda \phi \zeta_\lambda - 2 \phi^{-1} \zeta_{(\alpha} \nabla_{\beta)} \phi + g^{\lambda\rho} \left(\tau_{\beta[\alpha\rho]} + \tau_{\alpha[\beta\rho]} + \tau_{\rho(\alpha\beta)} \right) \zeta_\lambda\end{aligned} \quad (2.114)$$

Podemos manipular ainda mais o parênteses com os coeficientes da torção. Da Eq. (2.59),

sabe-se que $\tau_{\alpha(\beta\rho)} = 0$. Portanto:

$$\tau_{\beta[\alpha\rho]} + \tau_{\alpha[\beta\rho]} + \tau_{\rho(\alpha\beta)} = 2\tau_{(\alpha\beta)\rho}.$$

Substituindo em (2.114), obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha} &= \frac{1}{\phi} (\partial_{\alpha}\xi_{\beta} + \partial_{\beta}\xi_{\alpha}) - \frac{2}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \xi_{\lambda} + M^{\lambda}_{(\alpha\beta)} \xi_{\lambda} \\ &+ 2g_{\alpha\beta} \nabla^{\lambda} \phi \xi_{\lambda} - 2\phi^{-1} \xi_{(\alpha} \nabla_{\beta)} \phi + 2g^{\lambda\rho} \tau_{(\alpha\beta)\rho} \xi_{\lambda}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} (\partial_{\alpha}\xi_{\beta} + \partial_{\beta}\xi_{\alpha}) - 2 \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \xi_{\lambda} &= \\ = \phi \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \phi \nabla_{\beta}\xi_{\alpha} - \phi M^{\lambda}_{(\alpha\beta)} \xi_{\lambda} - 2g_{\alpha\beta} \phi \nabla^{\lambda} \phi \xi_{\lambda} &+ 2\xi_{(\alpha} \nabla_{\beta)} \phi - 2\phi g^{\lambda\rho} \tau_{(\alpha\beta)\rho} \xi_{\lambda}. \end{aligned}$$

Substituindo essa expressão em (2.113), encontra-se a forma geral covariante para a equação de Killing para as isometrias do tensor métrico na variedade de Lyra:

$$\begin{aligned} \phi \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \phi \nabla_{\beta}\xi_{\alpha} + 2\xi_{(\alpha} \nabla_{\beta)} \phi - 2 \frac{\Phi}{\phi} g_{\alpha\beta} + \\ - 2\phi \xi_{\lambda} \left(g_{\alpha\beta} \nabla^{\lambda} \phi + \frac{1}{2} M^{\lambda}_{(\alpha\beta)} + g^{\lambda\rho} \tau_{(\alpha\beta)\rho} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

2.7 Comentários Finais

A consideração de um fator de escala nos vetores da base canônica, conforme definido na Eq.(2.7), traz uma série de consequências geométricas para a variedade. Foi visto que um referencial de Lyra depende, não só do sistema de coordenadas, mas também da escala. As transformações de referenciais de Lyra dão origem a tensores com leis de transformações distintas dos tensores riemannianos, cf. Eq. (2.30). Além disso, a escala influencia também nas propriedades da conexão afim $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ que apresenta uma dependência explícita da primeira derivada da função de escala, além das dependências da torção e do tensor de compatibilidade métrica (vide Eq. (2.30)). A expressão para as componentes das derivações covariantes (2.50) também é digna de nota, visto que, além da dependência indireta da escala pela presença das componentes da conexão (no caso de derivadas covariantes de vetores ou tensores), depende explicitamente através do termo de derivação ordinária que é multiplicado pelo fator ϕ^{-1} . Os tensores de curvatura e torção também são estruturalmente distintos das suas versões na variedade riemanniana.

O tensor de curvatura de Lyra (2.53) não depende somente de Γ e $\partial\Gamma$, mas apresenta também uma dependência explícita de ϕ e, por sua vez, a torção não é dada apenas pela parte antissimétrica da conexão, mas também por um termo adicional dependente da escala, conforme a Eq. (2.59).

Num *espaço-tempo de Lyra*, que é como vamos chamar quando a variedade de Lyra é aplicada ao modelo do espaço-tempo, o elemento de linha invariante de Lyra é distinto do da Relatividade Geral pois depende explicitamente da função de escala. Além disso, a escala é incorporada na definição da 4-velocidade das partículas de modo a fazer dessas quantidades vetores de Lyra. Como consequência, a escala ϕ gera alterações significativas na equação de Hamilton-Jacobi e as equações de Killing.

Com a definição dessas quantidades, damos um passo na direção de concluir nosso objetivo de se construir uma teoria escalar-tensorial de gravitação na variedade de Lyra. A determinação das propriedades da variedade de Lyra é bastante importante, pois nos revela um cenário não tão trivial para essa formulação. Em outras teorias onde um campo escalar é acoplado na ação de Einstein-Hilbert, todos os métodos válidos em variedade riemannianas continuam aplicáveis, mudando-se apenas as equações de campo e suas soluções. Em Lyra, porém, devemos sempre ter um cuidado adicional pois, mesmo coisas simples como a escolha de um *ansatz* para o elemento de linha a ser utilizado em uma solução, ou mesmo a definição da 4-velocidade são distintas. Saber dessas diferenças nos leva a tomar decisões mais conscientes referentes às hipóteses geométricas sobre o espaço-tempo e nos dá uma visão mais macro em relação às possíveis generalizações. No capítulo seguinte, vamos abordar algumas dessas hipóteses e utilizar o conhecimento das propriedades da variedade de Lyra para construção da teoria LyST.

Parte II

Gravitação na Variedade de Lyra com Geodésicas Autoparalelas

Capítulo 3

Teoria Escalar-Tensorial na Variedade de *Lyra* - LyST

3.1 Introdução

O modelo padrão de gravitação vigente é o da Relatividade Geral, e é caracterizado por atribuir um caráter geométrico ao espaço-tempo. Visto que o campo principal dessa teoria é o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, ela é uma *teoria tensorial*. Mas ela não é a única desse tipo. Como exemplos adicionais, pode-se colocar todas as teorias de gravitação obtidas para adição de novos invariantes na ação, que foram introduzidas na Seção 1.2. De um ponto de visto de legado histórico, as teorias tensoriais relativísticas não foram as mais intuitivas de se elaborar. Os primeiros esforços na construção de uma teoria de gravitação relativística foram direcionados para a generalização da gravitacional newtoniana. Como por exemplo, podemos considerar as teorias de Nordström [99, 100, 101, 102]. Teorias desse tipo são *escalares*, visto que o campo principal de teoria é um potencial escalar. As teorias de Nordström são bastante simples e interessantes, mas divergem da Relatividade Geral em três principais pontos. Primeiro, suas construções não se baseiam no princípio da equivalência; segundo, como consideram o traço do tensor energia-momento na equação de campo, a radiação eletromagnética não poderia atuar como uma fonte de gravitação; e por último, elas não são capazes de prever corretamente a precessão do periélio da órbita de Mercúrio.

Conforme discutido no Capítulo 1, diversas teorias alternativas à Relatividade Geral foram sendo formuladas ao longo do século XX. Uma classe dessas teorias de gravitação, e que foi apresentada na Seção 1.2, é aquela onde campos adicionais à métrica são considerados. Nas teorias escalares-tensoriais, temos um campo escalar e a métrica contribuindo mutuamente na descrição do fenômeno gravitacional. Nesse caso, o cenário é bem diferente daquele das teorias de Nordström do início do século XX, visto que a fundamentação geométrica e física de Relatividade Geral permanece intacta e o campo escalar é acoplado não-minimamente a ação. Como exemplo, pode-se considerar a teoria de Brans-Dicke [60].

Uma aparente desvantagem de algumas das teorias escalar-tensoriais reside na atribuição de um significado do campo escalar adicional. Diferentemente do tensor métrico, onde seu papel é muito bem estabelecido desde a fundamentação geométrica, os cam-

pos escalares são geralmente acoplados manualmente à ação e tem seu significado atribuído a posteriori. Essa constatação evidencia a importância de se utilizar a variedade de Lyra como modelo do espaço-tempo visto que, assim como a métrica, a função de escala ϕ tem papel geométrico bem definido desde a construção das bases geométricas do espaço-tempo. Assim, o objetivo desse capítulo é elaborar uma teoria escalar-tensorial com campos ϕ e $g_{\mu\nu}$, ambos com conteúdo geométrico.

Nessa abordagem, é preciso utilizar as propriedades geométricas gerais da variedade de Lyra que foram apresentadas no capítulo anterior. Entretanto, a estrutura completa, contendo $g_{\mu\nu}$, ϕ , $M^{\mu}_{\alpha\beta}$ e $\tau_{\alpha\rho\beta}$, tem muitos graus de liberdade e é bastante complicada para uma primeira tentativa. Assim, iremos realizar algumas hipóteses geométricas simplificadoras que, como será demonstrado, garantem o autoparalelismo das curvas geodésicas e a validade de uma versão covariante de Lyra do teorema da divergência. Este teorema é de grande utilidade no procedimento variacional para obtenção de equações de campo e reduzem significativamente o número de funções do espaço-tempo a serem determinadas.

3.1.1 Autoparalelismo das curvas geodésicas

O mecanismo pelo qual pode-se designar uma interpretação geométrica à gravitação é aquele onde, desconsiderando-se o conceito de força gravitacional, são as propriedades geométricas do espaço-tempo que influenciam uma partícula teste através da equação que dita o seu “movimento natural”. A definição do que seria o “movimento natural” não é algo completamente definido e, de certa forma, configura uma hipótese adicional à estrutura gravitacional [103].

Por um lado, o princípio mais usual para se estabelecer um movimento livre é o da distância estacionária, no qual, a distância s entre dois pontos a e b respeita $\delta s = 0$. Como já comentado, as curvas que satisfazem esse vínculo são as curvas geodésicas, com equação dada pela Eq. (2.46):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \left[\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + 2\nabla_{(\alpha}\phi\delta_{\beta)}^\mu - \nabla_\nu\phi g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \right] \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.1)$$

Uma outra forma de se entender o conceito de movimento natural não estaria relacionado à distância da curva, mais sim, ao caminho mais direto, o que é obtido procurando a curva cujos vetores tangentes apresentam componentes invariantes por transportes paralelos a ela. A equação que surge desse vínculo é dado pela Eq. (2.51):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \left(\phi\Gamma^{\mu}_{(\alpha\beta)} + \nabla_{(\alpha}\phi\delta_{\beta)}^\mu \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.2)$$

No caso do espaço-tempo da Relatividade Geral, onde $\phi = 1$ e $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$, verifica-se que essas definições coincidem. Como a base fenomenológica gravitacional atualmente

conhecida está dada em escalas onde a RG é comprovada, por ora, não é possível apontar com embasamento experimental qual destes princípios guia a trajetória dos corpos em movimento num campo gravitacional. No caso de uma teoria escalar-tensorial geral na variedade de Lyra, deve ficar claro que a adoção da geodésica ou da curva auto-paralela configura uma hipótese adicional à teoria de gravitação.

A estrutura geométrica geral da variedade de Lyra depende da escala ϕ , do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, do tensor de não metricidade $M_{\mu\nu\rho}$ e do tensor de torção $\tau^\mu_{\alpha\beta}$. De fato, essa é uma estrutura muito completa, mas que tem poucas finalidades práticas uma vez que a quantidade exorbitante de graus de liberdade relacionados de forma não-linear pelas equações de campo torna impossível a solução do sistema gravitacional na maior partes dos problemas de interesse físico. Essa constatação motiva a adoção de hipóteses adicionais à estrutura. Nesse sentido, é conveniente utilizar essa liberdade para garantir uma equivalência entre curvas geodésicas e autoparalelas sobre a variedade de Lyra.

De fato, para que as Eqs. (3.1) e (3.2) sejam equivalentes, deve ser válido o vínculo:

$$\phi\Gamma^\mu_{(\alpha\beta)} + \nabla_{(\alpha}\phi\delta^\mu_{\beta)} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + 2\nabla_{(\alpha}\phi\delta^\mu_{\beta)} - \nabla_\nu\phi g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}. \quad (3.3)$$

Simetrizando a expressão para os coeficientes da conexão, dada na Eq. (2.62):

$$\phi\Gamma^\mu_{(\alpha\beta)} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2}\phi M^\mu_{\alpha\beta} + \left(\nabla_{(\alpha}\phi\delta^\mu_{\beta)} - g_{\alpha\beta}\nabla^\mu\phi \right) - \phi\tau_{(\alpha\beta)}^\mu. \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq. (3.4) na expressão (3.3), a condição de autoparalelismo das curvas geodésicas se reduz a:

$$M^\mu_{\alpha\beta} = \tau_{(\alpha\beta)}^\mu. \quad (3.5)$$

É bastante interessante o fato de que a condição de autoparalelismo das curvas geodésicas não necessariamente implica nos princípios de compatibilidade métrica e ausência de torção. O contrário é necessariamente válido. Ou seja, o espaço-tempo de uma teoria que assume compatibilidade métrica e ausência de torção apresenta naturalmente uma equivalência entre curvas autoparalelas e curvas geodésicas.

3.1.2 Condições geométricas

Conforme já comentado, a primeira condição para formular a nossa teoria de gravitação na variedade de Lyra é impor um teoria em que as geodésicas sejam também curvas autoparalelas. O vínculo mais geral para fazer válida essa condição é (3.5). Porém, podemos adotar algumas considerações mais restritivas. A hipótese adicional mais simples possível é aquela que exige um espaço-tempo tempo livre de torção:

$$\tau^\mu_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.6)$$

e compatibilidade métrica:

$$\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.7)$$

Verifica-se diretamente que essas hipóteses compõem uma solução trivial para a condição de autoparalelismo geodésico dado pela Eq. (3.5). Além disso, com essas duas condições, garantimos a condição (2.69) para a validade da versão covariante em Lyra do teorema da divergência.

Foi visto na Eq. (2.62) que os coeficientes da conexão podem ser escritos em termos de $g_{\mu\nu}$, $\tau^{\mu}_{\alpha\beta}$ e $M^{\mu}_{\alpha\beta}$. Aplicando (3.6) e (3.7) nessa expressão, encontra-se diretamente:

$$\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu} = \frac{1}{\phi} \{\beta\}_{\lambda\nu} + \frac{1}{\phi} \left(\delta^{\beta}_{\nu} \nabla_{\lambda} \phi - g_{\lambda\nu} \nabla^{\beta} \phi \right). \quad (3.8)$$

Essa conexão será designada por *conexão LyST*, onde LyST vem de *Lyra Scalar-Tensor Gravity*, que é a teoria gravitacional formulada nesse capítulo.

Através da expressão para a conexão (3.8), pode-se calcular o tensor de curvatura conforme detalhado no Apêndice A.1:

$$\begin{aligned} R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = & \frac{1}{\phi^2} \mathcal{R}^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{\phi^2} \left(g_{\alpha\nu} \delta^{\lambda}_{\mu} - g_{\alpha\mu} \delta^{\lambda}_{\nu} \right) \nabla_{\rho} \phi \nabla^{\rho} \phi + \\ & + \frac{1}{\phi} \left(\delta^{\lambda}_{\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} \phi - \delta^{\lambda}_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla_{\alpha} \phi + g_{\alpha\mu} \nabla_{\nu} \nabla^{\lambda} \phi - g_{\alpha\nu} \nabla_{\mu} \nabla^{\lambda} \phi \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\mathcal{R}^{\lambda}_{\mu\nu\alpha}$ é o tensor de curvatura da Relatividade Geral, calculado apenas com os símbolos de Christoffel [104]:

$$\mathcal{R}^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = \partial_{\mu} \{\lambda\}_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} \{\lambda\}_{\alpha\mu} + \{\rho\}_{\alpha\nu} \{\lambda\}_{\rho\mu} - \{\rho\}_{\alpha\mu} \{\lambda\}_{\rho\nu}. \quad (3.10)$$

O tensor de Ricci em LyST é obtido contraindo-se os índices λ e ν de (3.9):

$$R_{\alpha\mu} = \frac{1}{\phi^2} \mathcal{R}_{\alpha\mu} + \frac{2}{\phi} \nabla_{\mu} \nabla_{\alpha} \phi + \frac{1}{\phi} g_{\alpha\mu} \nabla_{\rho} \nabla^{\rho} \phi - \frac{3}{\phi^2} g_{\alpha\mu} \nabla_{\rho} \phi \nabla^{\rho} \phi. \quad (3.11)$$

onde $\mathcal{R}_{\alpha\mu}$ é o tensor de Ricci na variedade Riemanniana [104]:

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu} = \partial_{\mu} \{v\}_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} \{v\}_{\alpha\mu} + \{\rho\}_{\alpha\nu} \{v\}_{\rho\mu} - \{\rho\}_{\alpha\mu} \{v\}_{\rho\nu}. \quad (3.12)$$

Por fim, o equivalente de Lyra do escalar de curvatura será o traço da Eq. (3.11):

$$R = \frac{1}{\phi^2} \mathcal{R} + \frac{6}{\phi} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi - \frac{12}{\phi^2} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\mu} \phi, \quad (3.13)$$

onde \mathcal{R} é o traço do tensor de Ricci, dado em (3.12).

3.2 Prescrição de Acoplamento Mínimo

A teoria de gravitação que estamos querendo desenvolver deve se apoiar no princípio de que as leis da física sejam simultaneamente invariantes sob transformações de referenciais de Lyra (i.e. transformações de coordenadas e de escala). Sabe-se que em muitos sistemas físicos onde a gravitação pode ser negligenciada devido à escala de energia, as leis da física respeitam a invariância sob a ação do grupo de Poincaré e estão inseridas na estrutura geométrica de Minkowski. Isso decorre como consequência da possibilidade de se poder associar um espaço tangente de Minkowski em cada ponto do espaço-tempo. Dado esse cenário, surge a necessidade de se definir de maneira coerente as leis da física em um espaço-tempo de Lyra a partir de leis definidas de antemão no espaço-tempo de Minkowski. Nesse contexto, a Prescrição de Acoplamento Mínimo aparece como um conjunto básico de regras que generalizam as leis para espaços-tempo gerais. Literalmente, ela propõe transformações que tornam uma ação escalar sob o grupo de transformações de Poincaré em uma ação escalar sob transformações de Lyra.

O primeiro passo consiste em generalizar a estrutura métrica do espaço-tempo, trocando o tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ para um mais geral $g_{\mu\nu}$. É válido dizer que tal procedimento não é restrito a se obter leis da física em espaços-tempo curvos, visto que, mesmo na estrutura de Minkowski, essa substituição se faz necessária nos casos em que a utilização de um sistema de coordenadas que não o cartesiano se mostra favorável.

Outro problema inerente à generalização de leis físicas ao espaço-tempo curvo está na própria natureza diferencial das leis físicas. Muitas vezes, as equações físicas são dadas na forma de relações envolvendo as derivadas dos campos com respeito às coordenadas, que, como outrora comentado, não são quantidades tensoriais. Foi preciso generalizar o conceito de derivada ∂_μ para uma derivada covariante ∇_μ , de tal forma que $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ quando $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$.

O terceiro ponto diz respeito ao elemento invariante de hipervolume nas integrais de ação; este é mais delicado e carece de um pouco mais de detalhes. Para abordá-lo, vale a pena dar um passo atrás e estudar a definição no espaço-tempo de Minkowski e depois generalizar o hipervolume (ou medida de integração de espaço-tempo) para Lyra. Um campo coerentemente definido no espaço-tempo deve ser resultado de um princípio de mínima ação. No espaço-tempo de Minkowski, as integrais da ação são tomadas em termos do elemento de integração d^4x :

$$S = \int d^4x \sqrt{-\eta} \mathcal{L}(\psi, \partial\psi),$$

onde $\eta \equiv \det(\eta_{\mu\nu})$ é o determinante da métrica de Minkowski ¹. Nesse caso, tanto S

¹Nos livros textos onde se trabalha apenas com transformações de Lorentz que relacionam as coordenadas cartesianas de diferentes referenciais inerciais, o determinante da métrica de Minkowski é sempre -1 e, conseqüentemente, $\sqrt{-\eta} = 1$. Devido a esse fato, é bastante comum nos depararmos com integrais de ação

como $d^4x\sqrt{-\eta}$ e \mathcal{L} são invariantes de Poincaré.

No espaço-tempo de Lyra, se aplicarmos os dois pontos ditos anteriormente, teríamos:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi).$$

As substituições de derivações ordinárias por derivações covariantes de Lyra na lagrangiana faz de \mathcal{L} um invariante de Lyra. Porém, S só será um invariante de Lyra se $d^4x\sqrt{-g}$ também for, o que não é o caso. Assim, devemos encontrar um fator multiplicador F para d^4x tal que

$$(\bar{F} d^4\bar{x}) = (F d^4x).$$

Para uma transformação geral de coordenadas, d^4x se transforma de acordo com:

$$d^4\bar{x} = \det J d^4x$$

onde J é a matriz jacobiana da transformação de coordenadas. Assim, sabemos que F deve se transformar como:

$$\bar{F} = \frac{1}{\det J} F. \quad (3.14)$$

Elementos que se transformam de acordo com alguma potencial do jacobiano são conhecidos em geometria diferencial como densidades tensoriais. Em Lyra, a lei de transformação geral para uma *densidade tensorial* \mathcal{D} de peso W e *rank* $l + k$ será:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(\bar{x}) &= \left[\det \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} J_{\nu}^{\mu} \right) \right]^W \left(\frac{\bar{\phi}(\bar{x})}{\phi(x)} \right)^{k-l} \times \\ &\times J_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots J_{\mu_k}^{\alpha_k} [J^{-1}]_{\beta_1}^{\nu_1} \dots [J^{-1}]_{\beta_l}^{\nu_l} \mathcal{D}_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}(x) \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $J_{\nu}^{\mu} \equiv \partial \bar{x}^{\mu} / \partial x^{\nu}$ são as componentes da matriz jacobiana da transformação de coordenadas. A densidade tensorial mais direta que se pode obter sem a necessidade de se introduzir campo extras é a partir do determinante da métrica. Em Lyra, as métricas de dois referenciais gerais se relacionam através de:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \right)^2 (J^{-1})_{\mu}^{\alpha} (J^{-1})_{\nu}^{\beta} g_{\alpha\beta}(x). \quad (3.16)$$

O determinante de (3.16) é:

$$\bar{g}(\bar{x}) = \det \left[\left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \right)^2 (J^{-1})_{\mu}^{\alpha} (J^{-1})_{\nu}^{\beta} \right] g = \left(\det \left[\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} (J^{-1}) \right] \right)^2 g(x)$$

de campos relativísticos dados sem o fator $\sqrt{-\eta}$. Porém, quando se considera uma transformação geral do grupo de Poincaré, o determinante da métrica é diferente de -1 em geral e, por isso, o fator $\sqrt{-\eta}$ não pode ser negligenciado [105, 106].

em que $g \equiv \det g_{\mu\nu}$. Utilizando as seguintes propriedades dos determinantes:

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det M \quad \text{e} \quad \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M},$$

onde n é a ordem da matriz, encontramos:

$$\bar{g}(\bar{x}) = \left(\frac{\phi^4(x)}{\bar{\phi}^4(\bar{x})} \frac{1}{\det J} \right)^2 g(x). \quad (3.17)$$

Como as métricas do espaço-tempo são Lorentzianas (de assinatura (3,1) ou (1,3)), seu determinante será sempre negativo. Por isso, cada membro da Eq. (3.17) é também negativo. Multiplicando por -1 e tomando a raiz quadrada, encontramos:

$$\bar{\phi}^4(\bar{x}) \sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} = \frac{1}{\det J} \phi^4(x) \sqrt{-g(x)}. \quad (3.18)$$

Vemos que $\phi^4 \sqrt{-g}$ se transforma exatamente como o requerido pela Eq. (3.14). Portanto, um passo final na Prescrição de Acoplamento Mínimo é multiplicar todas as densidades tensoriais de peso W que porventura apareçam na teoria por $(\phi^4 \sqrt{-g})^W$; em especial o elemento de hipervolume d^4x que aparece na integral da ação de toda teoria física.

O passos básicos que definem a Prescrição de Acoplamento Mínimo na variedade de Lyra são:

- substituir a métrica de Minkowski por uma métrica geral ($\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$)
- substituir derivadas parciais por derivadas covariantes de Lyra ($\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$)
- multiplicar potências adequadas de $\phi^4 \sqrt{-g}$ para saturar a zero o peso de densidades tensoriais. Em especial, o elemento de hipervolume do espaço-tempo ($d^4x \rightarrow \phi^4 \sqrt{-g} d^4x$)

3.3 Equações de Campo

Com a definição dos entes geométricos oriundos da curvatura e a definição de uma prescrição de acoplamento mínimo, temos os ingredientes necessários para a construção da nova teoria de gravitação. Para obtenção das equações de campo, propõe-se um princípio de mínima ação, onde o integrando é invariante sob mudanças de referenciais de Lyra. Visto que as condições (3.6) e (3.7) são as mesmas condições geométricas requeridas na formulação da Relatividade Geral, convém assumir que a teoria LyST seja o análogo da Relatividade Geral na variedade de Lyra e formular um princípio variacional dado pela

generalização da ação de Einstein-Hilbert em Lyra:

$$S = \int d^4x \phi^4 \sqrt{-g} (R + 2\kappa \mathcal{L}_m), \quad (3.19)$$

onde R é dado pela Eq. (3.13) e \mathcal{L}_m é uma densidade de lagrangiana que, por hipótese, depende apenas de ϕ sua primeira derivada covariante. Inserindo (3.13) em (3.19):

$$S = \int d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\phi^2} \mathcal{R} + 2\kappa \mathcal{L}_m(\phi, \nabla\phi) + \frac{6}{\phi} \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - 12 \frac{\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi}{\phi^2} \right); \quad (3.20)$$

Aplicando o princípio variacional em relação às componentes métricas $g_{\mu\nu}$, encontra-se o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} + 2\phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - 2\phi g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi + 3g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi = \kappa \phi^2 T_{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

onde o tensor energia momento é definido como na relatividade geral, i.e.:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (3.22)$$

Pode-se verificar que o limite da Relatividade Geral é recuperado tomando $\phi \rightarrow 1$, que é o resultado esperado. Aliás, esse bom limite é a razão de adotarmos (3.22).

Tomando as variações com respeito com a função de escala ϕ , obtém-se a equação:

$$6\phi \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - 12 \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + \mathcal{R} = \kappa \phi^2 M \quad (3.23)$$

onde:

$$M = -4\mathcal{L}_m - \phi \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} - \nabla_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\nabla_\alpha \phi)} \right). \quad (3.24)$$

Tomando o traço da Eq. (3.21), verifica-se que:

$$\mathcal{R} + 6\phi \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi - 12 \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi = -\kappa \phi^2 T. \quad (3.25)$$

Combinando com (3.23), encontra-se uma regra de associação entre o escalares M e T :

$$M = -T.$$

Tabela 3.1 – Ordens de grandeza das velocidades orbitais dos planetas do sistema solar.

Planeta	Velocidade (km/s)	Velocidade (% de c)
Mercúrio	~ 60	~ 0.020
Vênus	~ 35	~ 0.012
Terra	~ 30	~ 0.010
Marte	~ 20	~ 0.007
Júpiter	~ 15	~ 0.005
Saturno	~ 10	~ 0.003
Urano	~ 5	~ 0.002
Netuno	~ 5	~ 0.002

3.4 Limite Newtoniano

As equações de campo de gravitação LyST precisam estar coerentes com a fenomenologia gravitacional acessível aos observatórios terrestres. Como se sabe, os efeitos gravitacionais na mecânica celeste são, com exceção da precessão de periélio de Mercúrio e o desvio de feixes de luz, perfeitamente descritos pela gravitação Newtoniana em nível de sistema solar dentro das incertezas observacionais. Uma teoria gravitacional bem sucedida deve, portanto, recuperar as equações da gravitação de Newton em uma determinada escala de validade, cunhada de *Limite Newtoniano*. Óbvio que é esperado que a teoria Escalar-Tensorial na Variedade de Lyra respeite o limite newtoniano sob certas condições, uma vez que o limite dessa teoria para a Relatividade Geral é bem definido (quando $\phi \rightarrow 1$), e a Relatividade Geral, por si, apresenta equações geodésicas que tendem às equações da gravitação newtoniana em circunstâncias adequadas.

Restringindo o foco à fenomenologia gravitacional, três requisitos básicos definem o limite newtoniano [107]. O primeiro deles é o de velocidades não relativísticas. Essa é uma característica comum dos astros no sistemas solar. Pode-se tomar como exemplo as ordens de grandezas das velocidades orbitais, cf. Tabela 3.1 . Sendo assim, as componentes espaciais de 4-velocidade das partículas testes podem ser negligenciadas dentro dessa ordem de aproximação:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}. \quad (3.26)$$

Portanto:

$$u^2 = 1 = \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - \frac{dx^i}{d\tau} \rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} \approx 1. \quad (3.27)$$

A equação para a geodésica (4.24) se reduz à:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ 00 \end{matrix} \right\} + 2\nabla_0 \phi \delta_0^\mu - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi g_{00} \approx 0. \quad (3.28)$$

O segundo ponto é impor que o campo gravitacional seja estático. Como consequência,

as derivadas temporais da métrica que aparecem no símbolo de Christoffel,

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ 00 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (\partial_0 g_{\alpha 0} + \partial_0 g_{0\alpha} - \partial_\alpha g_{00}) \approx -\frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \partial_\alpha g_{00},$$

assim como a derivada temporal de ϕ , devem ser negligenciadas. Dessa forma:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \approx \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \partial_\alpha g_{00} + g^{\mu\nu} \frac{1}{\phi} \partial_\nu \phi g_{00}. \quad (3.29)$$

O terceiro requisito é garantir que o campo gravitacional seja fraco. Como consequência, o campo gravitacional deve ser entendido como uma perturbação ao espaço-tempo de Minkowski, o que na teoria escalar-tensorial de Lyra, é obtido no limite de $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ e $\phi \approx 1$. Assim, define-se:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \phi \approx 1 + \delta\phi(x), \quad (3.30)$$

onde $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$ e $\delta\phi(x) \ll 1$. Além disso, assumiremos coordenadas cartesianas, tal que $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Uma consideração adicional é de que os índices contravariantes de $h_{\mu\nu}$ sejam obtidos via contração com a métrica de Minkowski. Ou seja:

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (3.31)$$

As componentes contravariantes do tensor métrico pode ser escritas como $g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, onde $\delta g^{\mu\nu} \ll \eta^{\mu\nu}$. Queremos escrever $\delta g^{\mu\nu}$ com $h^{\mu\nu}$ impondo a reciprocidade na contração entre métrica covariante e contravariante; ou seja $g_{\mu\nu} g^{\nu\beta} = \delta_\mu^\beta$. Dessa relação, pode-se mostrar que

$$\delta g^{\alpha\beta} = -\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\mu\nu} = -h^{\alpha\beta}.$$

Assim:

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

Considerando as Eqs. (3.30) em (3.29), mantendo apenas os termos de primeira ordem, encontra-se:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \approx \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \left(\frac{1}{2} h_{00} + \delta\phi \right). \quad (3.33)$$

Para o setor temporal, a equação é:

$$\frac{d^2 x^0}{dt^2} \approx \partial_0 \left(\frac{1}{2} h_{00} + \delta\phi \right) = 0$$

Uma vez que dx^0/dt é constante, o lado esquerdo se anula automaticamente. Como foi imposto que $h_{\mu\nu}$ e ϕ são campos estáticos, o lado direito é zero também e essa equação

fica trivialmente definida. Por outro lado, para o setor espacial:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\partial_i \left(\frac{1}{2} h_{00} + \delta\phi \right). \quad (3.34)$$

Logo:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \approx -\nabla U \quad (3.35)$$

onde

$$U \equiv \frac{1}{2} h_{00} + \delta\phi. \quad (3.36)$$

Nota-se que o potencial newtoniano U depende tanto da métrica quanto do campo $\delta\phi$.

Uma vez obtida essa importante constatação, deve-se voltar as atenções para as equações de campo (3.23):

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} + 2\phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \phi \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi - 3g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi = \varkappa \phi^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (3.37)$$

Em primeiro lugar, no caso de baixas velocidades e campos fracos, o tensor energia momento é dominado pela densidade de energia [61]. Sendo assim:

$$T \approx T_{00} = \rho. \quad (3.38)$$

Focando nas componentes temporais da equação de campo:

$$\mathcal{R}_{00} + 2\phi \nabla_0 \nabla_0 \phi + g_{00} \phi \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi - 3g_{00} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi = \varkappa \phi^2 \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right). \quad (3.39)$$

Aplicando as condições de limite de campos fracos e limite não relativístico:

$$\mathcal{R}_{00} + \partial_\lambda \partial^\lambda (\delta\phi) \approx \frac{\varkappa}{2} \rho;$$

i.e.

$$\mathcal{R}_{00} - \nabla^2 (\delta\phi) \approx \frac{\varkappa}{2} \rho. \quad (3.40)$$

A expressão para \mathcal{R}_{00} pode ser obtida utilizando a expressão para o tensor de Ricci

(oriunda de 3.12):

$$\mathcal{R}_{00} = \partial_0 \left\{ \begin{matrix} \mu \\ 0\mu \end{matrix} \right\} - \partial_\mu \left\{ \begin{matrix} \mu \\ 00 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ 0\mu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ 00 \end{matrix} \right\}. \quad (3.41)$$

Muitos dos termos definidos através dos símbolos de Christoffel tem dependência, ora de derivadas temporais, ora de termos de ordem superiores. Nas hipóteses aqui adotadas, eles devem ser negligenciadas. Sendo assim, cada termo da Eq. (3.41) fica como:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ 0\mu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{0\alpha} - \partial_\alpha g_{0\mu}) = 0;$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ 00 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_0 g_{\alpha 0} + \partial_0 g_{0\alpha} - \partial_\alpha g_{00}) \approx -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \partial_\alpha g_{00} \\ &\approx -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\alpha} + h^{\mu\alpha}) \partial_\alpha (1 + h_{00}) \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha h_{00}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\mu}) \\ &\approx \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\alpha g_{\lambda\mu} \approx \frac{1}{2} (\eta^{\mu\lambda} + h^{\mu\lambda}) \partial_\alpha h_{\lambda\mu} \\ &\approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\alpha h_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ 0\mu \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\rho g_{\alpha 0} + \partial_0 g_{\rho\alpha} - \partial_\alpha g_{\rho 0}) \frac{1}{2} g^{\rho\beta} (\partial_0 g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{0\beta} - \partial_\beta g_{0\mu}) \\ &= \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} (\partial_\rho g_{\alpha 0} - \partial_\alpha g_{\rho 0}) g^{\rho\beta} (\partial_\mu g_{0\beta} - \partial_\beta g_{0\mu}) \\ &= \frac{1}{4} (\eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha}) (\eta^{\rho\beta} - h^{\rho\beta}) (\partial_\rho h_{\alpha 0} - \partial_\alpha h_{\rho 0}) (\partial_\mu h_{0\beta} - \partial_\beta h_{0\mu}) \\ &\approx 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ 00 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_\rho g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\rho\alpha} - \partial_\alpha g_{\rho\mu}) \frac{1}{2} \eta^{\rho\beta} \partial_\beta h_{00} \\ &= -\frac{1}{2} (\eta^{\rho\alpha} - h^{\rho\alpha}) (\partial_\rho g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\rho\alpha} - \partial_\alpha g_{\rho\mu}) \frac{1}{2} \eta^{\rho\beta} \partial_\beta h_{00} \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na Eq. (3.41):

$$\mathcal{R}_{00} \approx -\partial_\mu \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha h_{00} \right] \approx \frac{1}{2} \partial^\mu \partial_\mu h_{00}.$$

Como $\partial_t h_{00} = 0$, encontra-se:

$$\mathcal{R}_{00} \approx \frac{1}{2} \partial^i \partial_i h_{00}.$$

Reconhecendo $\partial^i \partial_i \rightarrow -\nabla^2$, a expressão não relativística e de campos fracos para \mathcal{R}_{00} será [108]:

$$\mathcal{R}_{00} \approx -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}. \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.40):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} - \nabla^2 (\delta\phi) &\approx \frac{\varkappa}{2} \rho \\ \nabla^2 \left(\frac{1}{2} h_{00} + \delta\phi \right) &= -\frac{\varkappa}{2} \rho. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Para recuperar a equação de Poisson, deve-se tomar:

$$\varkappa = -8\pi G. \quad (3.44)$$

Dessa forma:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} h_{00} + \delta\phi \right) \approx 4\pi G \rho. \quad (3.45)$$

Das Eqs. (3.36) e (3.45) verifica-se que no limite newtoniano da gravitação LyST, o campo gravitacional tem tanto a contribuição métrica (através de h_{00}) quanto da função de escala (por meio de $\delta\phi$).

3.5 Comentários Finais

Nesse capítulo, construímos a teoria de gravitação LyST. Ela se baseia nas hipóteses de compatibilidade métrica e ausência de torção que garantem a similaridade entre as geodésicas métrica e afim. Com essas hipóteses, foi possível obter a curvatura e suas contrações. O próximo passo foi determinar um princípio variacional para a obtenção das equações de campo. Construímos uma generalização em Lyra da ação de Einstein-Hilbert, onde de acordo com o princípio de acoplamento mínimo na variedade de Lyra, foi considerado um elemento invariante de volume $d^4x \sqrt{-\bar{g}} \phi^4$ e o escalar de curvatura de Lyra R no integrando. Obtivemos as equações de campo e conseguimos mostrar que ela apresenta um limite newtoniano bem definido, tanto nas equações de campo (que tendem à equação de Poisson) quando na equação da geodésica, que tende à expressão de uma força conservativa a partir de um potencial. Essa característica é bastante importante, pois serve como um indicativo de que os fenômenos gravitacionais explicados pela teoria newtoniana não excluem a teoria LyST nas suas escalas de validade. Agora, queremos iniciar uma primeira aplicação da teoria, que é no caso esfericamente simétrico

que será abordado no capítulo seguinte.

Capítulo 4

Simetria Esférica na Gravitação LyST

No capítulo anterior, foi construída a teoria de gravitação LyST sobre a variedade de Lyra. Com as equações de campo e a equação da geodésica definidas, podemos submeter a teoria a verificações fenomenológicas, a fim de estabelecer a sua validade. O primeiro passo nessa abordagem consiste em obter as soluções com simetria esférica. Essa etapa é crucial pois, com ela, poderemos contrastar as suas predições com informações obtidas em nível de sistema solar.

Em geral, as teorias relativísticas de gravitação utilizam os astros do sistema solar como laboratório de experimentação. Contudo, pelo fato das escalas de energia serem não relativísticas, é possível apenas comparar as predições da teoria relativística como perturbações de primeira ordem sobre a teoria newtoniana. Nesse ponto, já averiguamos que a teoria LyST se comporta bem para esse caso uma vez que apresenta um limite newtoniano bem definido. Assim, uma boa estratégia de abordagem será a obtenção de uma solução estacionária esfericamente simétrica seguida do estudo das suas geodésicas. Nesse estudo, vamos explorar as trajetórias de partículas massivas e não massivas a fim de se ter uma noção sobre a influência gravitacional na teoria LyST. Serão investigadas as aproximações em primeira ordem sobre a gravitação newtoniana para a expressão da precessão do periélio orbital aplicada à órbita de mercúrio.

4.1 Solução Estática Esfericamente Simétrica no Vácuo

O caso de interesse é aquele em que o espaço-tempo tem solução estacionária e esfericamente simétrica, com coordenadas (t, r, θ, φ) . A expressão para o elemento esfericamente simétrico na variedade de Lyra é derivada no Apêndice B. Assim, vamos assumir que as componentes métricas da Eq. (B.34) não apresentam dependência temporal e, portanto, trabalhar com um elemento de linha do tipo:

$$ds^2 = \phi(r)^2 \alpha(r) dt^2 - \phi(r)^2 \beta^{-1}(r) dr^2 - \phi(r)^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

cuja métrica referente e sua inversa são, respectivamente:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(\alpha(r), -\beta^{-1}(r), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (4.2)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(\alpha^{-1}(r), -\beta(r), -r^{-2}, -r^{-2} \sin^2 \theta \right). \quad (4.3)$$

Os símbolos de Christoffel são:

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha'}{2\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha'}{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\alpha'}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta'}{2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \beta \end{pmatrix}; \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Com eles, calcula-se as componentes não nulas do tensor de Ricci na variedade Riemanniana:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_0^0 = -\frac{\beta\alpha''}{2\alpha} - \frac{\alpha'\beta'}{4\alpha} + \frac{\beta\alpha'^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta\alpha'}{r\alpha}, \\ \mathcal{R}_1^1 = -\frac{\beta\alpha''}{2\alpha} - \frac{\alpha'\beta'}{4\alpha} + \frac{\beta\alpha'^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta'}{r}, \\ \mathcal{R}_2^2 = -\frac{\beta\alpha''}{2\alpha} - \frac{\alpha'\beta'}{4\alpha} + \frac{\beta\alpha'^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta\alpha'}{r\alpha}, \\ \mathcal{R}_3^3 = -\frac{\beta}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\beta\alpha'}{2r\alpha} - \frac{\beta'}{2r}, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde, pelo cálculo do traço, obtém-se o escalar de curvatura de Riemann:

$$\mathcal{R} = \frac{2}{r^2} - \frac{2\beta}{r^2} - \frac{\beta\alpha''}{\alpha} - \frac{\alpha'\beta'}{2\alpha} + \frac{\beta\alpha'^2}{2\alpha^2} - \frac{2\beta\alpha'}{r\alpha} - \frac{2\beta'}{r}. \quad (4.6)$$

Substituindo as Eqs. (4.5) e (4.6) em (3.21), juntamente com a condição de que $\phi = \phi(r)$, então, as equações de campo se reduzem a:

$$\frac{\beta'\phi'}{\beta\phi} - \frac{1}{\beta r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{\beta'}{\beta r} + \frac{4\phi'}{r\phi} + \frac{2\phi''}{\phi} - \frac{\phi'^2}{\phi^2} = 0, \quad (4.7a)$$

$$-\frac{\alpha'\phi'}{\alpha\phi} + \frac{1}{\beta r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{\alpha r} - \frac{4\phi'}{r\phi} - \frac{3\phi'^2}{\phi^2} = 0, \quad (4.7b)$$

$$-\frac{\alpha''}{2\alpha} - \frac{\alpha'\beta'}{4\alpha\beta} - \frac{\alpha'\phi'}{\alpha\phi} + \frac{\alpha'^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta'\phi'}{\beta\phi} - \frac{\alpha'}{2\alpha r} - \frac{\beta'}{2\beta r} - \frac{2\phi'}{r\phi} - \frac{2\phi''}{\phi} + \frac{\phi'^2}{\phi^2} = 0, \quad (4.7c)$$

$$\sin^2(\theta) \left(-\frac{\alpha''}{2\alpha} - \frac{\alpha'\beta'}{4\alpha\beta} - \frac{\alpha'\phi'}{\alpha\phi} + \frac{\alpha'^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta'\phi'}{\beta\phi} - \frac{\alpha'}{2\alpha r} - \frac{\beta'}{2\beta r} - \frac{2\phi'}{r\phi} - \frac{2\phi''}{\phi} + \frac{\phi'^2}{\phi^2} \right) = 0. \quad (4.7d)$$

Claramente, as Eqs. (4.7c) e (4.7d) são idênticas e levam às mesmas consequências.

Na Relatividade Geral, o espaço-tempo ao redor de um buraco negro estacionário, carregado ou não, pode ser escrito com uma métrica da forma:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(\alpha(r), -\alpha^{-1}(r), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (4.8)$$

mesmo que se considere a contribuição da constante cosmológica. Uma vez que as observações indicam uma correspondência bastante significativa entre os fenômenos gravitacionais e as previsões da Relatividade Geral, deve-se seguramente assumir que uma teoria gravitacional na variedade de Lyra deve recuperar as equações da Relatividade Geral nos regimes de validade dos dados já observados. Seguindo essa linha de raciocínio, pode-se formular uma abordagem de trabalho, assumindo-se uma métrica tal como (4.8) para a variedade de Lyra. Claro que esta não é abordagem mais geral; mas sua consideração simplifica grandemente o trabalho e, como será posteriormente demonstrado, dá origem a soluções que tendem ao espaço de Schwarzschild em limites específicos. As soluções com métrica da forma (4.8), serão designadas por soluções "tipo-Schwarzschild" e serão primeiramente averiguadas.

Enfatizamos que ao adotarmos (4.8) não eliminamos a informação sobre a função de escala da solução esfericamente simétrica sob construção no contexto de Lyra. De fato, ϕ aparece separadamente de $g_{\mu\nu}$ e é levado em conta explicitamente no elemento de linha (4.1) e nas equações de campo (4.7). Por isso, ϕ aparecerá na solução que encontraremos para o equivalente de Schwarzschild na gravitação de Lyra.

4.1.1 Soluções tipo-Schwarzschild

As equações de campo para um espaço-tempo vazio esfericamente simétrico descrito por uma métrica tipo Schwarzschild são obtidos das Eqs. (4.7), assumindo-se $\alpha = \beta$ (que é a condição para que (4.2) fique da forma (4.8)):

$$\frac{\alpha' \phi'}{\alpha \phi} - \frac{1}{\alpha r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha'}{\alpha r} + \frac{4\phi'}{r\phi} + \frac{2\phi''}{\phi} - \frac{\phi'^2}{\phi^2} = 0, \quad (4.9a)$$

$$-\frac{\alpha' \phi'}{\alpha \phi} + \frac{1}{\alpha r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{\alpha r} - \frac{4\phi'}{r\phi} - \frac{3\phi'^2}{\phi^2} = 0, \quad (4.9b)$$

$$-\frac{\alpha''}{2\alpha} - 2\frac{\alpha' \phi'}{\alpha \phi} - \frac{\alpha'}{\alpha r} - \frac{2\phi'}{r\phi} - \frac{2\phi''}{\phi} + \frac{\phi'^2}{\phi^2} = 0. \quad (4.9c)$$

Somando-se as Eqs. (4.9a) e (4.9b), encontra-se:

$$\frac{\phi''}{\phi} - 2\frac{\phi'^2}{\phi^2} = 0. \quad (4.10)$$

Nota-se que, resolvendo ϕ com (4.10), pode-se em um segundo momento, utilizar alguma das Eqs. (4.9) para resolução de α . Opta-se aqui pela utilização de (4.9b). Para solução dessas equações, define-se momentaneamente a variável:

$$z \equiv \frac{\phi'}{\phi}, \quad (4.11)$$

tal que:

$$\frac{\phi''}{\phi} = z' + z^2. \quad (4.12)$$

Portanto, as Eqs. (4.9b) e (4.10) se reduzem a:

$$z' - z^2 = 0, \quad (4.13a)$$

$$-\frac{\alpha'}{\alpha}z + \frac{1}{\alpha r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{\alpha r} - \frac{4}{r}z - 3z^2 = 0. \quad (4.13b)$$

A Eq. (4.13a) é uma equação diferencial de simples solução:

$$z(r) = -\frac{1}{r - r_L}, \quad (4.14)$$

onde r_L é uma constante real. Combinando (4.11) e (4.14), pode-se obter a solução para $\phi(r)$:

$$\phi(r) = \frac{r_0}{r_L - r}. \quad (4.15)$$

Nessa expressão, r_0 é uma constante de integração definida sobre a linha dos reais.

Substituindo (4.14) em (4.13b), obtemos, depois de alguns passos algébricos:

$$r_L \frac{d\alpha}{dr} + \alpha \frac{r_L (1 + 2r/r_L)}{r (1 - r/r_L)} + \left(1 - \frac{r_L}{r}\right) = 0.$$

Definido $\rho \equiv r/r_L$:

$$\frac{d\alpha}{d\rho} + \frac{\alpha (1 + 2\rho)}{\rho (1 - \rho)} + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Essa é uma equação diferencial linear de primeira ordem, cuja solução é:

$$\alpha(\rho) = (1 - \rho)^2 [1 - (1 - \rho) \Delta] \frac{1}{\rho},$$

onde $\Delta \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração. Portanto:

$$\alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{r}{r_L}\right) \Delta\right] \frac{r_L}{r}. \quad (4.16)$$

Essa função tem duas raízes. A primeira delas é obtida caso o primeiro fator da multiplicação em (4.16) se anule. Isso ocorre quando $r = r_L$. A segunda raiz, que será

designada por r_s , é obtida quando o segundo fator se anula. A condição para isso é $1 - (1 - r/r_L)|_{r=r_s} \Delta = 0$, e a solução dada por:

$$r_s = r_L \left(1 - \frac{1}{\Delta}\right). \quad (4.17)$$

Nota-se que não é possível obter uma solução finita para (4.17) no caso em que $\Delta = 0$. Essa constatação naturalmente divide a solução (4.16) em dois grupos. Naquele em que $\Delta = 0$, a função α será:

$$\alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \frac{r_L}{r}. \quad (4.18)$$

Por outro lado, no caso em que $\Delta \neq 0$, pode-se resolver a Eq. (4.17) para Δ e o substituir em (4.16), para reescrevê-la como:

$$\alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left(\frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r_L}\right) \quad (4.19)$$

Por fim, sintetiza-se o conjunto de soluções esfericamente simétricas das Eqs. (4.15), (4.18) e (4.19) em:

Soluções do Tipo A	
$\phi(r) = \frac{r_0}{1 - \frac{r}{r_L}} \quad \text{e} \quad \alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left(\frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r_L}\right) \quad (4.20)$	

e:

Soluções do Tipo B	
$\phi(r) = \frac{r_0}{1 - \frac{r}{r_L}} \quad \text{e} \quad \alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \frac{r_L}{r}. \quad (4.21)$	

De um ponto de vista de fenomenologia física, a solução do tipo A é mais interessante. Isso porque, para recuperarmos o limite da Relatividade Geral, precisamos tomar o limite em que a função de escala é uma constante. Observando as soluções para $\phi(r)$ nas Eqs. (4.20) e (4.21), podemos obter esse limite caso $r_L \rightarrow \infty$. Tomando essa condição nas soluções para α , encontramos:

$$\alpha_{\text{tipo A}}(r) \rightarrow 1 - \frac{r_s}{r}$$

ao passo que

$$\alpha_{\text{tipo B}}(r) \rightarrow \infty.$$

Assim, somente as soluções tipo A recuperam o limite de Schwarzschild e serão aquelas com que iremos trabalhar no decorrer do estudo.

4.2 Geodésicas

Tendo encontrado as soluções para as equações de campo, deve-se voltar as atenções para as equações de movimento. Supondo que a trajetória de uma partícula livre possa ser parametrizada com o tempo próprio τ , então, esta pode ser obtida através do cálculo de variações como sendo aquela que minimiza o funcional:

$$s = \int d\tau \sqrt{\phi^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}}; \quad (4.22)$$

ou seja:

$$\delta s = 0. \quad (4.23)$$

Esse cálculo foi realizado para um contexto geral na seção 2.3.2. De fato, a Eq. (2.46), juntamente com a definição da derivada covariante de Lyra da função de escala (ou seja, $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi / \phi$) pode ser escrita como:

$$\ddot{x}^\lambda + \left[\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + \nabla_\alpha \phi \delta_\beta^\lambda + \nabla_\beta \phi \delta_\alpha^\lambda - g^{\lambda\rho} \nabla_\rho \phi g_{\alpha\beta} \right] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad (4.24)$$

onde foram utilizadas as notações $(\cdot)^\cdot := \frac{d(\cdot)}{d\tau}$ e $(\cdot)^{\cdot\cdot} := \frac{d^2(\cdot)}{d\tau^2}$.

Contudo, no caso da simetria esférica, é mais instrutivo, sob certas circunstâncias, trabalhar com lagrangianas que originam as equações de movimento (4.24). De (4.22), pode-se verificar diretamente que uma lagrangiana possível é:

$$L = \sqrt{\phi^2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (4.25)$$

Porém, com essa expressão, a obtenção das equações será grandemente dificultada. Como alternativa, pode-se buscar uma nova lagrangiana que leva as mesmas equações de movimento.

Proposição 4.1. *A lagrangiana*

$$L = \frac{1}{2} \phi^2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (4.26)$$

dá origem à equação de movimento (4.24), assim como (4.25).

Demonstração. Para mostrar que a lagrangiana (4.26) resulta na Eq. (4.24), pode-se calcular as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0, \quad (4.27)$$

onde $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu / d\tau$. O primeiro membro de (4.27) será:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \phi \partial_\mu \phi \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \phi^2 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\mu g_{\alpha\beta}.$$

Derivando (4.26) com respeito a \dot{x}^μ , encontra-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \phi^2 g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \quad (4.28)$$

Portanto, o segundo de membro de (4.27) será dado pela expressão:

$$\frac{d}{d\tau} (\phi^2 g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha) = 2\phi \partial_\beta \phi g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \phi^2 \partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \phi^2 g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha \quad (4.29)$$

A Equação de Euler-Lagrange será

$$\phi \partial_\mu \phi \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \phi^2 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\mu g_{\alpha\beta} - 2\phi \partial_\beta \phi g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \phi^2 \partial_\beta g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \phi^2 g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha = 0. \quad (4.30)$$

Nota-se que:

$$\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \left(\frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\mu} \right) = -\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta [\mu, \alpha\beta] \quad (4.31)$$

e

$$-2\phi \partial_\beta \phi g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\phi \partial_\alpha \phi g_{\beta\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \phi \partial_\beta \phi g_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \quad (4.32)$$

Com (4.31) e (4.32), a Eq. (4.30) pode ser reescrita como:

$$-\phi^2 g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\alpha - \phi^2 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta [\mu, \alpha\beta] + (\phi \partial_\mu \phi g_{\alpha\beta} - \phi \partial_\alpha \phi g_{\beta\mu} - \phi \partial_\beta \phi g_{\alpha\mu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0.$$

Contraindo com $\phi^{-2} g^{\mu\nu}$:

$$0 = -\ddot{x}^\nu - \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + \left(\phi^{-1} \partial_\mu \phi g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - \phi^{-1} \partial_\alpha \phi \delta_\beta^\nu - \phi^{-1} \partial_\beta \phi \delta_\alpha^\nu \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta.$$

Reconhecendo que $\nabla_\mu \phi = \phi^{-1} \partial_\mu \phi$:

$$\ddot{x}^\nu + \left(\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + \nabla_\alpha \phi \delta_\beta^\nu + \nabla_\beta \phi \delta_\alpha^\nu - \nabla_\mu \phi g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad (4.33)$$

e, assim, conclui-se que, de fato, a lagrangiana (4.26) leva à (4.24). ■

No decorrer do texto, considera-se então a Eq. (4.26):

$$L = \frac{1}{2} \phi^2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

Portanto, para o caso esfericamente simétrico em que o tensor métrico é definido pela Eq.

(4.8), a lagrangiana será:

$$L = \frac{\phi^2(r) \alpha(r)}{2} \dot{t}^2 - \frac{\phi^2(r)}{2\alpha(r)} \dot{r}^2 - \frac{\phi^2(r)}{2} r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (4.34)$$

onde α e ϕ são funções de r dadas nas Eqs. (4.20). No decorrer desse capítulo, vamos omitir a dependência de r em ϕ e α por economia de notação, mas vale salientar que $\alpha := \alpha(r)$ e $\phi := \phi(r)$.

Na sequência, serão calculadas as quantidades que aparecem nas equações de Euler-Lagrange para cada coordenada. Começando pela coordenada temporal t , verifica-se que:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Por outro lado, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \phi^2 \alpha \dot{t}.$$

Combinando essas duas relações, a equação de Euler-Lagrange com respeito à coordenada t dá origem à seguinte equação de movimento:

$$\phi^2 \alpha \dot{t} = k, \quad (4.35)$$

onde k é uma constante que surge em decorrência da ciclicidade da coordenada t na lagrangiana L .

Por sua vez, para a coordenada radial, encontra-se:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\phi^2 \alpha}{2} \dot{t}^2 \left(2 \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) - \frac{\phi^2}{2\alpha} \dot{r}^2 \left(2 \frac{\phi'}{\phi} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) - \phi^2 r^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{1}{r} \right) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2).$$

Temos também:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = -\frac{\phi^2 \dot{r}}{\alpha},$$

e, com isso:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\phi^2}{\alpha} \dot{r}^2 \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 2 \frac{\phi'}{\phi} - \frac{\ddot{r}}{\dot{r}^2} \right).$$

A equação de movimento nessa coordenada será, portanto:

$$\ddot{r} + \alpha^2 \dot{t}^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) + \dot{r}^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} - \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) - \alpha r^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{1}{r} \right) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 0. \quad (4.36)$$

Agora, vamos trabalhar com a coordenada polar θ . Tomando a derivada da lagrangiana com relação a θ e com relação a $\dot{\theta}$, obtemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\phi^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2;$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\phi^2 r^2 \dot{\theta}.$$

Assim, podemos calcular o segundo termo da equação de Euler Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -2\phi\phi' \dot{r} r^2 \dot{\theta} - \phi^2 2r \dot{r} \dot{\theta} - \phi^2 r^2 \ddot{\theta}$$

Portanto:

$$\ddot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + 2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{2}{r} \right) \dot{r} \dot{\theta} = 0. \quad (4.37)$$

Por fim, a coordenada azimutal. A lagrangiana é também cíclica nessa variável:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -\phi^2 r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi},$$

$$\phi^2 r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = h, \quad (4.38)$$

onde h é uma nova constante de movimento.

Devido à simetria esférica, o movimento geodésico resultante de uma condição inicial específica estará restrito ao plano geodésico. Aqui, assume-se que as coordenadas foram definidas de tal modo que o plano geodésico se caracteriza por $\theta = \pi/2$. Assim, as equações de Euler Lagrange (4.35)-(4.38) se simplificam e podem ser escritas como:

$$\phi^2 \alpha \dot{t} = k; \quad (4.39a)$$

$$\ddot{r} + \alpha^2 \dot{t}^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) + \dot{r}^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} - \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) - \alpha r^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{1}{r} \right) = 0; \quad (4.39b)$$

$$\phi^2 r^2 \dot{\varphi} = h. \quad (4.39c)$$

Pode-se substituir uma das equações pelo vínculo $u_\mu u^\mu = 1$ para partículas massivas ou $u_\mu u^\mu = 0$ para não massivas, lembrando que, na geometria de Lyra, a 4-velocidade precisa ser determinada com um fator ϕ para que se transforme, de fato, com um vetor de Lyra. Assim:

$$u_\mu u^\mu = \phi^2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Usando a Eq. (4.8), encontramos:

$$\phi^2 \alpha \dot{t}^2 - \frac{\phi^2}{\alpha} \dot{r}^2 - \phi^2 r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Como $\theta = \pi/2$, então:

$$\phi^2 \alpha \dot{t}^2 - \frac{\phi^2 \dot{r}^2}{\alpha} - \phi^2 r^2 \dot{\phi}^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} .$$

Utilizando as Eqs. (4.39a) e (4.39c), obtém-se:

$$\phi^2 \alpha \dot{t}^2 = \frac{k^2}{\phi^2 \alpha} \quad \text{e} \quad \phi^2 r^2 \dot{\phi}^2 = \frac{h^2}{\phi^2 r^2} .$$

Logo

$$\frac{k^2}{\phi^2 \alpha} - \frac{\phi^2 \dot{r}^2}{\alpha} - \frac{h^2}{\phi^2 r^2} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} . \quad (4.40)$$

O conjunto de equações (4.39) e (4.40) será:

$$\phi^2 \alpha \frac{dt}{d\tau} = k; \quad (4.41a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \alpha^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) + \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} - \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) + \\ - \alpha r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{1}{r} \right) = 0; \end{aligned} \quad (4.41b)$$

$$\phi^2 r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = h; \quad (4.41c)$$

$$\frac{k^2}{\phi^2 \alpha} - \frac{\phi^2}{\alpha} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{h^2}{\phi^2 r^2} = \begin{cases} 0 & (m = 0) \\ 1 & (m \neq 0) \end{cases}, \quad (4.41d)$$

onde m designa a massa da partícula em movimento geodésico. No caso de partículas não massivas, k e h são respectivamente energia e momento angular. Por outro lado, se a partícula tem massa, então essas constantes serão energia e momento angular específicos; isto é, energia e momento angular divididos pela massa m . Essa interpretação ficará mais clara quando as equações forem rederivadas na seção 4.2.1 via método de Hamilton-Jacobi.

As Eqs. (4.41c) e (4.41d) podem ainda ser combinadas para a obtenção de uma equação diferencial que descreve a trajetória orbital como uma função de r em termos de ϕ .

Definindo

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & (m = 0) \\ 1 & (m \neq 0) \end{cases},$$

a Eq. (4.41d) fica:

$$\frac{k^2}{\phi^2 \alpha} - \frac{\phi^2}{\alpha} \left(\frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 - \frac{h^2}{\phi^2 r^2} = \varepsilon.$$

Usando (4.41c):

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{k^2 r^4}{h^2} - \varepsilon \frac{\alpha \phi^2 r^4}{h^2} - \alpha r^2. \quad (4.42)$$

Quando se trabalha com soluções esfericamente simétricas, algumas equações são melhor abordadas definindo-se uma nova variável u :

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}.$$

Nesse caso, as funções $\alpha := \alpha(r)$ e $\phi := \phi(r)$ devem ser subentendidas como $\phi(1/u)$ e $\alpha(1/u)$. Entretanto, para uma maior clareza na exposição, vamos continuar omitindo as dependência nessas funções. Assim sendo, a Eq. (4.42) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \frac{k^2}{h^2} - \varepsilon \frac{\alpha \phi^2}{h^2} - \alpha u^2 \quad (4.43)$$

Derivando com respeito à ϕ :

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \frac{1}{2} \frac{d(\alpha u^2)}{du} + \frac{\varepsilon}{2h^2} \frac{d(\alpha \phi^2)}{du} = 0. \quad (4.44)$$

Essa equação será estudada mais adiante no texto.

4.2.1 Abordagem de Hamilton-Jacobi para Partículas Massivas

Uma abordagem alternativa para a obtenção das equações geodésicas é o método de Hamilton-Jacobi, desenvolvido na seção 2.6.1. Como visto, a equação de Hamilton-Jacobi no contexto da geometria de Lyra é escrita como:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2 \phi^2,$$

em que S é a função principal de Hamilton. No caso de uma métrica esfericamente simétrica conforme a proposta em (4.8), sua inversa é dada por:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left[\alpha^{-1}(r), -\alpha(r), -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2} \theta \right]. \quad (4.45)$$

Escolhendo um plano orbital onde $\theta = \pi/2$, reduz-se uma dimensão do problema, e a equação de Hamilton-Jacobi fica:

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = m^2 \phi^2(r). \quad (4.46)$$

Devido às isometrias do espaço-tempo, a hamiltoniana independe tanto da coordenada temporal t como da coordenada angular azimutal φ . Nesse caso, propõe-se uma solução para S com a forma:

$$S = Et - l\varphi + S_r(r), \quad (4.47)$$

onde E e l são constantes.

Substituindo (4.47) na Eq. (4.46), encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} E^2 - \alpha \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{l^2}{r^2} &= m^2 \phi^2, \\ S_r(r) &= \pm \int dr \sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{m^2 \phi^2}{\alpha} - \frac{l^2}{\alpha r^2}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

A função principal de Hamilton será, portanto:

$$S = Et - l\varphi \pm \int dr \sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{m^2 \phi^2}{\alpha} - \frac{l^2}{\alpha r^2}}, \quad (4.49)$$

que depende de duas constantes: l e E . Conforme exposto em (2.78), as equações de movimento podem ser obtidas tornando constantes as derivadas de S com respeito a cada uma destas constantes. Começando com a constante E :

$$\begin{aligned} \kappa_t \equiv t_{\text{ref}} &= \frac{\partial S}{\partial E} = t \pm \int dr \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{m^2 \phi^2}{\alpha} - \frac{l^2}{\alpha r^2}}, \\ t - t_{\text{ref}} &= \mp \int dr \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{m^2 \phi^2}{\alpha} - \frac{l^2}{\alpha r^2}}} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial E} E^2, \end{aligned}$$

$$t - t_{\text{ref}} = \mp E \int dr \frac{\alpha^{-2}}{\sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{m^2 \phi^2}{\alpha} - \frac{l^2}{\alpha r^2}}}. \quad (4.50)$$

Agora, para a constante l :

$$\kappa_\varphi \equiv -\varphi_{\text{ref}} = \frac{\partial S}{\partial l} = -\varphi \pm \int dr \frac{\partial}{\partial l} \sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{m^2 \phi^2}{\alpha} - \frac{l^2}{\alpha r^2}},$$

$$\varphi - \varphi_{\text{ref}} = \pm l \int dr \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E^2 - m^2 \alpha \phi^2 - \frac{l^2}{r^2} \alpha}}. \quad (4.51)$$

Nota-se através das Equações de Hamilton-Jacobi, que pode-se relacionar a evolução das coordenadas diretamente, sem a necessidade de se parametrizar o movimento com um parâmetro afim, como é feito no caso do cálculo das equações geodésicas.

Os momentos canônicos são :

$$\pi_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}.$$

Pode-se utilizar a Eq. (2.81) para determinar como as velocidades generalizadas dependem das coordenadas:

$$\begin{aligned} \pi_\mu &= m\phi^2 g_{\mu\beta} \dot{x}^\beta = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \\ \dot{x}^\beta &= \frac{1}{m\phi^2} g^{\beta\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \end{aligned}$$

Para o caso de t , a Eq. (4.49) permite encontrar:

$$\dot{t} = \frac{1}{m\phi^2} g^{00} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\alpha^{-1}}{m\phi^2} E,$$

$$\phi^2 \alpha \dot{t} = \frac{E}{m}. \quad (4.52a)$$

Para r , a Eq. (4.49) dá:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{m\phi^2} g^{11} \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{(-\alpha)}{m\phi^2} \left(\pm \sqrt{\alpha^{-2} E^2 - m^2 \alpha^{-1} \phi^2 - \frac{\alpha^{-1} l^2}{r^2}} \right), \\ m^2 \phi^4 \alpha^{-2} \dot{r}^2 &= \alpha^{-2} E^2 - m^2 \alpha^{-1} \phi^2 - \frac{\alpha^{-1} l^2}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\alpha \phi^2} \frac{E^2}{m^2} - \frac{\phi^2}{\alpha} \dot{r}^2 - \frac{1}{r^2 \phi^2} \frac{l^2}{m^2} = 1. \quad (4.52b)$$

E, por fim, para a coordenada φ :

$$\phi^2 r^2 \dot{\varphi} = \frac{l}{m}. \quad (4.52c)$$

Nota-se que as Eqs. (4.52) são as mesmas que a primeira, terceira e quarta das Eqs. (4.41), reconhecendo que $k = E/m$ e $h = l/m$.

4.2.2 Abordagem de Hamilton-Jacobi para Fótons

No caso de partículas não massivas ($m = 0$), temos:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0,$$

em que S é a função principal de Hamilton. Usando a métrica inversa na Eq. (4.45), esta equação fica:

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = 0. \quad (4.53)$$

As isometrias do espaço-tempo garantem que a Eq. (4.47) seja válida também no caso de partículas-teste não-massivas. Logo, substituindo (4.47) em (4.53):

$$\frac{1}{\alpha} E^2 - \alpha \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{l^2}{r^2} = 0,$$

$$S_r(r) = \pm \int dr \sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{l^2}{\alpha r^2}}. \quad (4.54)$$

A função principal de Hamilton será:

$$S = Et - l\varphi \pm \int dr \sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{l^2}{\alpha r^2}}, \quad (4.55)$$

que depende dos parâmetros l e E . Assim como apresentado na Eq. (2.78), é possível obter as equações de movimento fazendo com que as derivadas de S com respeito a cada uma desses parâmetros sejam constantes. Realizando esse procedimento para as constantes E e l , de forma análoga à que foi feita na seção 4.2.1, obtemos:

$$t - t_{\text{ref}} = \mp E \int dr \frac{\alpha^{-2}}{\sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{l^2}{\alpha r^2}}}. \quad (4.56)$$

e

$$\varphi - \varphi_{\text{ref}} = \pm l \int dr \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E^2 - \frac{l^2}{r^2} \alpha}}. \quad (4.57)$$

Para fótons, o momento canônico será $\pi_\mu = \phi^2 g_{\mu\beta} \dot{x}^\beta$. Pela abordagem de Hamilton-Jacobi, esse momento canônico está associado a S através de:

$$\pi_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}.$$

Portanto:

$$\dot{x}^\beta = \frac{1}{\phi^2} g^{\beta\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu}.$$

Para o caso temporal, obtemos:

$$\phi^2 \alpha \dot{t} = E. \quad (4.58a)$$

Para r :

$$\frac{E^2}{\alpha \phi^2} - \frac{\phi^2}{\alpha} \dot{r}^2 - \frac{l^2}{r^2 \phi^2} = 0. \quad (4.58b)$$

E, por fim, a coordenada angular φ :

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{\phi^2 r^2} (-l)$$

$$\phi^2 r^2 \dot{\varphi} = l. \quad (4.58c)$$

Assim como no caso de partículas massivas, as Eqs. (4.58) são as mesmas que a primeira, terceira e quarta das Eqs. (4.41) para $m = 0$. Um detalhe adicional é que, conforme já havia sido comentado e agora foi constatado, k e h em (4.41) são respectivamente a energia e o momento angular no caso de partículas não massivas.

Colecionamos as Eqs. (4.58a) e (4.58c) no conjunto de equações abaixo:

$$\phi^2 \alpha \frac{dt}{d\tau} = k; \quad (4.59)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \alpha^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) + \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} - \frac{\alpha'}{2\alpha} \right) +$$

$$-\alpha r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{1}{r} \right) = 0; \quad (4.60)$$

$$\phi^2 r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = h; \quad (4.61)$$

$$\frac{k^2}{\phi^2 \alpha} - \frac{\phi^2}{\alpha} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{h^2}{\phi^2 r^2} = \begin{cases} 0 & (m = 0) \\ 1 & (m \neq 0) \end{cases}. \quad (4.62)$$

4.2.3 Correção à Gravitação de Newton

Na seção 3.4, foi verificado que, no caso de movimentos não relativísticos de partículas testes sob influência de campo gravitacional fraco e estático, a gravitação LyST apresenta equações de campo e movimento tais como a da Lei de Gravitação Universal de Newton. Focando no caso de simetria esférica, as Eqs. (3.34) e (3.45) se reduzem a:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU}{dr} \quad (4.63)$$

e

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = 4\pi G\rho. \quad (4.64)$$

onde:

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} h_{00} + \delta\phi, \quad (4.65)$$

onde h_{00} é o termo de perturbação ao coeficiente η_{00} da métrica de Minkowski e $\delta\phi$ é um termo perturbativo à função de escala unitária; i.e. $\phi = 1 + \delta\phi$. A solução esfericamente simétrica obtida para a teoria gravitacional na variedade de Lyra é inteiramente definida pelas funções $\alpha(r)$ e $\phi(r)$, cf. Eqs. (4.20). Realizando uma expansão em série de Taylor para as condições de campo fraco $r_s \ll r$ e $r \ll r_L$ (e logicamente, $r_s \ll r_L$), obtemos:

$$\phi(r) \approx 1 + \frac{r}{r_L} + \frac{r^2}{r_L^2}, \quad (4.66)$$

$$\alpha(r) \approx 1 + 3 \left(\frac{r_s}{r_L} + \frac{r_s^2}{r_L^2} \right) - \left(1 + \frac{r_s}{r_L} \right) \frac{r_s}{r} - 2 \frac{r}{r_L} \left(1 + \frac{3 r_s}{2 r_L} \right) + \frac{r^2}{r_L^2}. \quad (4.67)$$

Comparando as Eqs. (4.66) e (4.67) com (3.30), reconhece-se que:

$$h_{00} = 3 \left(\frac{r_s}{r_L} + \frac{r_s^2}{r_L^2} \right) - \left(1 + \frac{r_s}{r_L} \right) \frac{r_s}{r} - 2 \frac{r}{r_L} \left(1 + \frac{3 r_s}{2 r_L} \right) + \frac{r^2}{r_L^2} \quad (4.68)$$

e

$$\delta\phi = \frac{r}{r_L} + \frac{r^2}{r_L^2}. \quad (4.69)$$

Substituindo (4.68) e (4.69) em (4.65):

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_s}{r_L} \right) \frac{r_s}{r} - \frac{3 r_s}{2 r_L^2} r + \frac{3 r^2}{2 r_L^2}. \quad (4.70)$$

onde foram negligenciados os termos constantes em U , visto que não contribuem para as equações de campo e de movimento. Substituindo (4.70) em (4.63):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_s}{r_L} \right) \frac{r_s}{r^2} + \frac{3 r_s}{2 r_L^2} - \frac{3r}{r_L^2}. \quad (4.71)$$

Definindo-se a *massa geométrica*:

$$m_G = \frac{1}{2} \frac{r_s}{\left(1 - \frac{r_s}{r_L} \right)} \approx \frac{1}{2} r_s \left(1 + \frac{r_s}{r_L} \right), \quad (4.72)$$

podemos reescrever a Eq.(4.71) como:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{m_G}{r^2} + \frac{3}{2 r_L^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2 m_G} + \frac{1}{r_L} \right)} - \frac{3r}{r_L^2} \quad (4.73)$$

A partir da aproximação em primeira ordem de r_L^{-1} , nota-se que a massa, fonte de gravitação na descrição newtoniana está relacionada, não só a r_s (como é o caso da Relatividade Geral), mas também com r_L . Dessa forma, o efeito de r_L em primeira ordem é simplesmente alterar a definição da massa gravitacional newtoniana. Os efeitos de segunda ordem incluem uma aceleração repulsiva constante $\frac{3}{2 r_L^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2 m_G} + \frac{1}{r_L} \right)}$ e o termo atrativo tipo anti-de-Sitter $-\frac{3r}{r_L^2}$.

4.3 Propriedades da solução esfericamente simétrica

A constatação da existência de um limite newtoniano, conforme exposto na seção 3.4 permite o reconhecimento da massa newtoniana, que, por princípios fenomenológicos,

é uma grandeza real e positiva. Sendo assim, pode-se reescrever a solução (4.20) para α substituindo-se a constante r_s em termos de m_G e r_L . Isolando r_s em (4.72):

$$r_s = \frac{1}{\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}}. \quad (4.74)$$

Substituindo (4.74) na segunda equação de (4.20):

$$\alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right). \quad (4.75)$$

Na solução para a escala ϕ , dada em (4.20), toma-se $\phi_0 = 1$, tal que:

$$\phi(r) = \frac{1}{1 - \frac{r}{r_L}}. \quad (4.76)$$

Nessa parametrização, o elemento de linha será dado por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^{-4} \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right)^{-1} dr^2 - \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^{-2} r^2 d\Omega^2 \quad (4.77)$$

Antes de prosseguir, deve-se reescrever as equações para a geodésica, dadas em (4.78), de acordo com as expressões (4.75) e (4.76):

$$\left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right) \frac{dt}{d\tau} = k; \quad (4.78a)$$

$$\frac{r^2}{\left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2} \frac{d\varphi}{d\tau} = h; \quad (4.78b)$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right)} \left[k^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^4} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \right] - \frac{\left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 h^2}{r^2} = \begin{cases} 0 & (m = 0) \\ 1 & (m \neq 0) \end{cases}. \quad (4.78c)$$

Limite de Schwarzschild

Nesse ponto, deve-se verificar se as Eqs (4.75) e (4.76) são fisicamente coerentes. Sabe-se que a Relatividade Geral deve ser a teoria emergente no limite de $\phi \rightarrow 1$ da gravitação na variedade de Lyra. Considerando essa condição em (4.20), encontram-se as relações:

$$\phi_0 \simeq 1 \quad \text{e} \quad r_L \rightarrow \infty \quad (4.79)$$

que devem ser válidas simultaneamente. Investigando o limite de $r_L \rightarrow \infty$ em (4.20), verifica-se diretamente que

$$\alpha(r) \simeq 1 - \frac{2m_G}{r}, \quad (4.80)$$

que é o resultado esperado, de acordo com a solução de Schwarzschild na Teoria da Relatividade Geral [95]. Comprova-se assim a existência de um limite de Schwarzschild na solução obtida e, com isso, a possibilidade de se interpretar o parâmetro r_s como a generalização em Lyra do conceito do raio de Schwarzschild.

Regime de Grandes Distâncias

O campo gravitacional sentido por partículas teste infinitamente afastadas pode ser obtido tomando o limite de $r \rightarrow \infty$ em (4.20) e depende quase que exclusivamente de um termo quadrático:

$$\alpha(r) \simeq \left(1 + \frac{2m_G}{r_L}\right) \frac{r^2}{r_L^2}. \quad (4.81)$$

Comparando com a solução de Schwarzschild de-Sitter no limite de grandes distâncias:

$$\alpha(r) = 1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \approx -\frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (4.82)$$

então, verifica-se que o parâmetro r_L está associado com a massa da fonte e a Constante Cosmológica:

$$\Lambda \simeq -\frac{3}{r_L^2} \left(1 + \frac{2m_G}{r_L}\right). \quad (4.83)$$

Entretanto, é o valor de r_L que determina se a constante Λ será positiva ou negativa. A solução será assintoticamente de-Sitter (ou seja, $\Lambda > 0$) quando r_L respeita a condição $-2m_G < r_L < 0$. Nesse caso (em que $|r_L| < 2m_G$), a Eq. (4.83) pode ser reescrita como:

$$\Lambda \simeq \frac{6m_G}{|r_L|^3} \left(1 - \frac{|r_L|}{2m_G}\right). \quad (4.84)$$

Porém, nas soluções em que $-2m_G < r_L < 0$, a função $\alpha(r)$ é negativa para todos os valores positivos de r :

$$\alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{2m_G}{r_L}\right) - \frac{2m_G}{r}\right] < 0,$$

como pode ser visualizado na Fig. 4.1. Isso faz com que $g_{00} < 0$ e $g_{11} > 0$, o que leva a uma assinatura de métrica do tipo $(- + - -)$.

Por outro lado, se $r_L < -2m_G$ ou $r_L > 0$, então, o espaço-tempo nas regiões afastadas da fonte gravitacional será do tipo AdS, com:

$$\Lambda \simeq -\frac{3}{r_L^2} \left(1 + \frac{2m_G}{r_L}\right). \quad (4.85)$$

Classes de Soluções

Com os comentários realizados acerca do comportamento assintótico das soluções, pode-se classificá-las em três classes distintas ¹:

- Classe 1: $r_L > 0$, soluções assintoticamente AdS, com r_L positivo;
- Classe 2: $r_L < -2m_G$, soluções assintoticamente AdS, com r_L negativo;
- Classe 3: $-2m_G < r_L < 0$, soluções assintoticamente de-Sitter.

O comportamento de α como função da coordenada radial pode ser verificado na Fig. 4.1. Nesse tipo de solução, α apresenta duas raízes reais positivas, uma em $r = \frac{1}{\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}}$ e outra em $r = r_L$, sendo que $r = r_L$ é um ponto de mínimo da função $\alpha(r)$. Nas soluções

¹Não se está considerando a solução Schwarzschild que é também, uma possível solução.

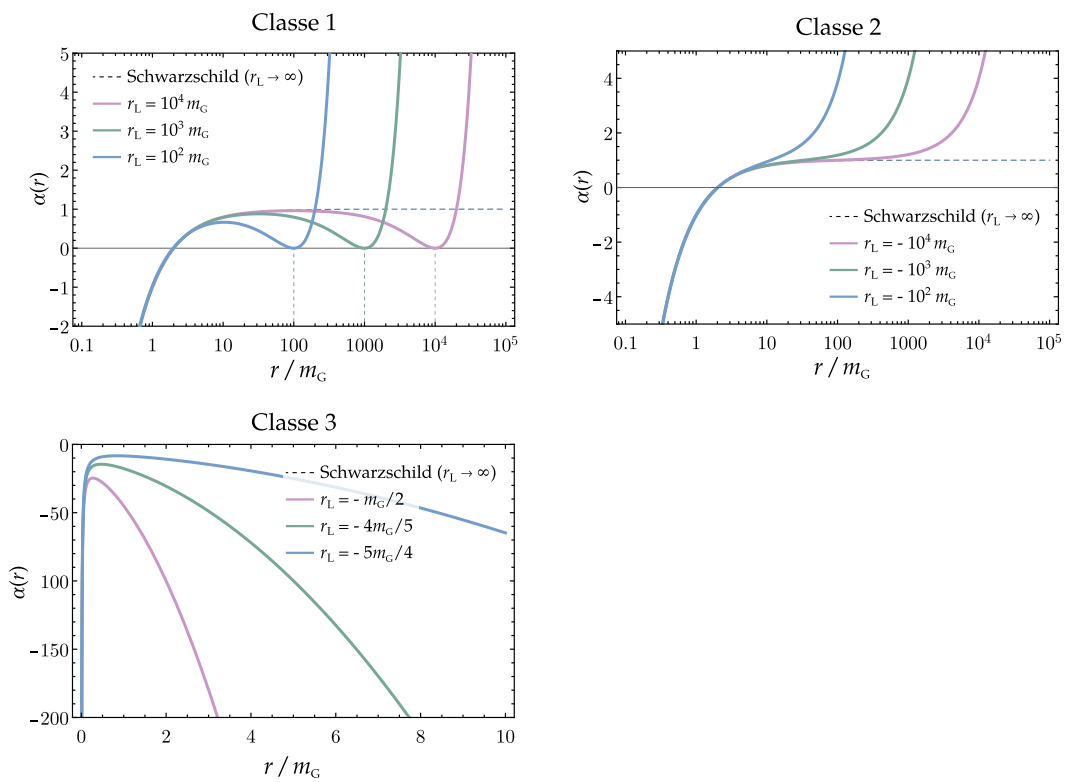


Figura 4.1 – Comportamento de cada uma das classes de soluções de α . O caso limite de $r_L \rightarrow \infty$ leva naturalmente a solução de Schwarzschild.

de Classe 2, o valor de α cresce monotonicamente conforme se aumenta a coordenada radial, tendendo a um regime tipo anti-de-Sitter em $r \rightarrow \infty$. Por último, as soluções de Classe 3, tendem a um regime tipo de-Sitter em $r \rightarrow \infty$. Contudo, conforme pode ser visualizado, a função $\alpha(r)$ é negativa para todos os valores reais positivos de r .

4.4 Trajetória de Partículas Massivas

As partículas de massa não-nula, designadas por m , apresentam trajetórias geodésicas tipo-tempo. Os objetos astronômicos sujeitos à ação de campos gravitacionais cuja fonte tem massa M muito superior a deles ($m \ll M$), podem ter sua trajetória modelada como partículas teste, cujas coordenadas (r, θ, φ) estão sujeitas aos vínculos geodésicos (4.41):

$$\phi^2 \alpha \dot{t} = k, \quad (4.86)$$

$$\frac{1}{\alpha \phi^2} k^2 - \frac{\phi^2}{\alpha} \dot{r}^2 - \frac{1}{r^2 \phi^2} h^2 = 1, \quad (4.87)$$

$$\phi^2 r^2 \dot{\varphi} = h, \quad (4.88)$$

onde k e h são respectivamente, a energia e momento angular específicos da partícula. As funções $\alpha(r)$ e $\phi(r)$ definem, respectivamente, a métrica e a escala e surgem como soluções das equações de campo da gravitação LyST, dadas pelas Eqs. (4.20). Salienta-se que nas Eqs. (4.86) - (4.88), o plano orbital foi mantido constante e o sistema de coordenadas orientado tal que $\theta = \pi/2$.

Conforme já comentado, quando se trabalha com problemas de potenciais centrais, as equações, em muitos casos, são melhores desenvolvidas em termos da variável $u = 1/r$. Tomando as soluções (4.75) e (4.76) em termos de u :

$$\alpha(u) = \left(1 - \frac{1}{r_L u}\right)^2 \left(1 - 2m_G u + \frac{2m_G}{r_L}\right),$$

$$\phi(u) = \frac{1}{1 - \frac{1}{r_L u}},$$

pode-se reescrever a Eq. (4.44), com $\varepsilon = 1$, como:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \left(1 + \frac{6m_G}{r_L}\right) = \frac{m_G}{h^2} + \frac{1}{r_L} \left(1 + \frac{m_G}{r_L}\right) + 3m_G u^2 \quad (4.89)$$

4.4.1 Movimento Radial

Um movimento puramente radial mantém fixas as coordenadas angulares. Dessa forma, de acordo com a Eq. (4.88), verifica-se que trajetórias desse tipo ocorrem quando $h = 0$. Aplicando essa condição em (4.87):

$$\frac{1}{\alpha(r)\phi^2(r)} \frac{E^2}{m^2} - \frac{\phi^2(r)}{\alpha(r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1. \quad (4.90)$$

Das Eqs. (4.20), pode-se mostrar que:

$$\alpha(r)\phi^2(r) = 1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L} \quad (4.91)$$

e

$$\frac{\phi^2(r)}{\alpha(r)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right)}. \quad (4.92)$$

Logo, a Eq. (4.90) fica:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^4 \left(\frac{E^2}{m^2} - 1 + \frac{2m_G}{r} - \frac{2m_G}{r_L}\right). \quad (4.93)$$

Na teoria de gravitação LyST, a velocidade $dr/d\tau$ não se anula em $r = r_s$, o que é um possível indício de que o horizonte é resultado da escolha de coordenadas. Em contrapartida, na teoria escalar-tensorial de Lyra, $dr/d\tau$ se anula em $r = r_L$. Por esse resultado, pode-se especular que $r = r_L$ é, de fato, uma divergência física no espaço-tempo. Na seção 4.5.1.2, esse tópico será investigado com mais detalhes.

Supondo que, num tempo inicial $\tau = 0$, a partícula esteja em repouso na coordenadas $r = r_0$, onde r_0 é uma constante real diferente de r_L :

$$\left.\frac{dr}{d\tau}\right|_{r=r_0} = 0.$$

Dessa forma, pode-se, através de (4.93), reescrever as constantes E e m em termos de r_s , r_L e r_0 :

$$\frac{E^2}{m^2} = 1 - \frac{2m_G}{r_0} + \frac{2m_G}{r_L}. \quad (4.94)$$

Substituindo (4.94) em (4.93):

$$\frac{dr}{d\tau} = - \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \sqrt{\frac{2m_G}{r} - \frac{2m_G}{r_0}}, \quad (4.95)$$

onde foi tomado o sinal negativo para descrição do movimento de queda livre. Dessa equação, verifica-se que os movimentos que levam a uma velocidade radial não complexa

estão restringidos pelo vínculo $r < r_0$. Integrando (4.95), encontra-se:

$$\tau = \frac{1}{2^{3/2} \sqrt{m_G} \left(\frac{1}{r_L} - \frac{1}{r_0}\right)^{3/2}} \left\{ \log \left[\frac{2}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_L}} \left(\frac{1}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{r_L} - \frac{1}{r_0}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_L} + \frac{1}{r}\right) \right) \right] + \frac{2}{\frac{1}{r_L} - \frac{1}{r}} \sqrt{\left(\frac{1}{r_L} - \frac{1}{r_0}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \right\} + \tau_0$$

onde τ_0 é o tempo próprio onde $r = r_0$. Dessa equação, vê-se que o tempo próprio para um observador em queda livre partindo de $r_0 > r_L$ chegar até r_L é divergente:

$$\tau(r_L) \rightarrow \infty.$$

Esse resultado é um sinal de uma patologia a ser analisada adiante.

4.4.2 Potencial Efetivo

Na mecânica newtoniana, a lagrangiana por unidade de massa de uma partícula em um potencial central do tipo $V(r) = -m_G/r$ é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{m_G}{r}.$$

Por conta da coordenada θ ser cíclica em \mathcal{L} , as equações de Euler-Lagrange mostram que o momento conjugado a coordenada θ , dado por $p_\theta \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\theta}$, é conservado. Assim:

$$p_\theta =: h = r^2 \dot{\theta} = \text{constante},$$

onde h é o momento angular por unidade de massa. A energia total por unidade de massa é:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (4.96)$$

em que:

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{m_G}{r} + \frac{h^2}{2r^2}. \quad (4.97)$$

Segundo a teoria de gravitação newtoniana, uma órbita circular só pode ocorrer no ponto radial exato em que o potencial efetivo (4.97) é um mínimo. Em geral, com exceção dos casos circulares, as órbitas ligadas apresentam dois pontos de retorno. O termo centrífugo $h^2/2r^2$ em (4.97) gera uma barreira infinita à medida que $r \rightarrow 0$, tal que é impossível para um partícula com momento angular intrínseco h não nulo alcançar a origem. As órbitas ligadas são caracterizadas por $V_{\text{eff}} < 0$. A órbita circular ocorre no ponto de equilíbrio,

que pode ser determinado anulando-se a derivada radial da Eq.(4.97):

$$\frac{m_G}{r^2} - 2\frac{h^2}{2r^3} = 0 \rightarrow$$

$$r_{\text{circ}}^{(\text{New})} = \frac{h^2}{m_G}.$$

Uma equação relativística análoga à (4.96), dentro do contexto da gravitação de Lyra, pode ser obtida partindo-se da Eq. (4.87):

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{\phi^4}k^2 - \frac{\alpha h^2}{r^2\phi^4} - \frac{\alpha}{\phi^2},$$

$$\phi^4\dot{r}^2 = k^2 - \frac{\alpha h^2}{r^2} - \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right),$$

onde usaram as Eqs. (4.75) e (4.76) para α e ϕ . Logo:

$$\frac{1}{2}(k^2 - 1) = \frac{1}{2}\phi^4\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha h^2}{r^2} - \frac{m_G}{r} + \frac{m_G}{r_L}. \quad (4.98)$$

No caso não relativístico, a energia E está quase que em sua totalidade na forma de energia de repouso $E \simeq m$. Lembrando que $k = E/m$, essa condição implica em $k \simeq 1$. Definindo $k \equiv 1 + \mathcal{E}$, recupera-se a expressão não relativística (4.96) expandindo (4.98) para $\mathcal{E} \rightarrow 0$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\phi^4\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad (4.99)$$

onde definiu-se o potencial efetivo:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{\alpha h^2}{r^2} - \frac{m_G}{r} + \frac{m_G}{r_L}$$

Com a solução (4.75) e (4.76):

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{m_G}{r_L} - \frac{m_G}{r} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2m_G}{r_L}\right)\frac{h^2}{r^2} - \frac{m_G h^2}{r^3}. \quad (4.100)$$

As equações geodésicas podem dar origem a diversos tipos de trajetórias que se distinguem de acordo com as propriedades do potencial efetivo. Para estudá-las, reescreve-se o potencial normalizando as quantidades r_L , r e h por m_G :

$$\rho := \frac{r}{m_G}, \quad \rho_L := \frac{r_L}{m_G} \quad \text{e} \quad \eta := \frac{h}{m_G}. \quad (4.101)$$

Essas variáveis são adimensionais e foram definidas apenas para compactar a notação. Ao longo do texto, as Eqs. (4.101) serão frequentemente consideradas nas discussões,

para passar de ρ , ρ_L e η para r_L , r , h e m_G , visto que são estas últimas as que apresentam significado físico direto.

Com a reparametrização, o potencial pode ser escrito como:

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) \frac{\eta^2}{\rho^2} - \frac{\eta^2}{\rho^3}. \quad (4.102)$$

Para um valor fixo de ρ_L , entende-se o potencial como sendo função, tanto de ρ quanto de η .

Em primeiro lugar, um fator discriminante entre os tipos de trajetórias possíveis para a partícula-teste é a presença dos pontos de equilíbrio no potencial efetivo. Nesse aspecto, para um valor fixo de η , tomando-se a condição para extremização de (4.102), encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} &= \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) (-2) \frac{\eta^2}{\rho^3} - (-3) \frac{\eta^2}{\rho^4} = 0, \\ \frac{1}{\rho^4} \left[\rho^2 - \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) \eta^2 \rho + 3\eta^2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

Uma solução óbvia a essa equação é $\rho \rightarrow \infty$. Como este não é um caso de interesse físico, trabalha-se na equação quadrática:

$$\rho^2 - \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) \eta^2 \rho + 3\eta^2 = 0,$$

cujas raízes são:

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) \eta^2 \pm \frac{\eta}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^2 \eta^2 - 12}.$$

Definindo-se a quantidade:

$$\xi := \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^2 \eta^2 - 12, \quad (4.103)$$

pode-se reescrever as raízes como:

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^{-1} (\xi + 12) \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{(1 + 12/\xi)}} \right]. \quad (4.104)$$

O parâmetro ξ vai determinar os possíveis tipos de potenciais de acordo com seu valor, uma vez que se $\xi < 0$, $\xi = 0$ e $\xi > 0$ remetem respectivamente a nenhum, um ou dois pontos de equilíbrio em V_{eff} . Desse vínculo, vê-se que uma vez estabelecidos os valores dos parâmetros r_L e m_G , o que determina a quantidade de pontos de equilíbrio do potencial é o valor do momento angular específico h , conforme ilustrado na Fig. 4.2:

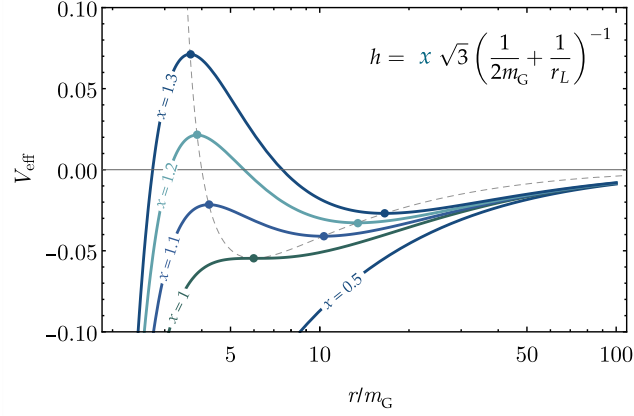


Figura 4.2 – Gráficos para o potencial (4.102) para diferentes valores de momento angular específico h , mantendo-se fixo $\rho_L = 10^3$. No caso em que $h = \sqrt{3}/(1/2m_G + 1/r_L)$, V_{eff} apresenta apenas um ponto de equilíbrio. Por outro lado, sempre que $h > \sqrt{3}/(1/2m_G + 1/r_L)$, o potencial exibirá dois pontos de equilíbrio, ao passo que se $h < \sqrt{3}/(1/2m_G + 1/r_L)$, não apresentará nenhum. A curva tracejada indica graficamente a posição dos pontos de equilíbrio. No caso de soluções de classe 2 com $r_L \ll -2m_G$, as características do potencial são equivalentes às soluções de classe 1 com $r_L \gg 2m_G$.

$$\xi < 0 \rightarrow \eta < \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^{-1} \sqrt{12} \rightarrow h < \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}\right)^{-1} \rightarrow \text{sem pontos de equilíbrio};$$

$$\xi = 0 \rightarrow \eta = \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^{-1} \sqrt{21} \rightarrow h = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}\right)^{-1} \rightarrow 1 \text{ ponto de equilíbrio};$$

$$\xi > 0 \rightarrow \eta > \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^{-1} \sqrt{12} \rightarrow h > \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}\right)^{-1} \rightarrow 2 \text{ pontos de equilíbrio}.$$

Assumindo que $\xi \geq 0$, o potencial terá ao menos um ponto de equilíbrio e a caracterização destes depende da análise da segunda derivada de (4.102) aplicada a cada uma das raízes (4.104). Em primeiro lugar, a segunda derivada de (4.102) com respeito a ρ será:

$$V''_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{2}{\rho^3} + 3 \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) \frac{\eta^2}{\rho^4} - 12 \frac{\eta^2}{\rho^5}.$$

Aplicando a expressão (4.104), substituindo-se η em termos de ξ de acordo com a Eq. (4.103), encontra-se:

$$V''_{\text{eff}}(\rho_{\pm}) = \pm \frac{16\sqrt{\xi}}{(\xi + 12)^{3/2}} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^3 \frac{1}{(\sqrt{\xi} \pm \sqrt{\xi + 12})^4}.$$

Conforme proposto, se $\xi \geq 0$ e assumindo que $|\rho_L| \gg 1$, vê-se claramente por essa equação que $V''_{\text{eff}}(\rho_+) > 0$ e $V''_{\text{eff}}(\rho_-) < 0$, o que indica que ρ_+ é um ponto de mínimo

ao passo que ρ_- é um ponto de máximo. No caso trivial onde $\xi = 0$, o único ponto de equilíbrio será em $\rho = 6$, que indica $r = 6m_G$.

Da Fig. (4.2) vê-se que o ponto de máximo local $V_{\text{eff}}(\rho_-)$ pode ou não ser um ponto de máximo global, dependendo do valor do momento angular. É de interesse obter a condição em η que garante que $V_{\text{eff}}(\rho_-) > V_{\text{eff}}(\infty)$. Para isso, em primeiro lugar, deve-se obter a expressão para o valor do potencial no ponto de máximo local, combinando-se as Eqs. (4.102) e (4.104):

$$V_{\text{eff}}(\rho_-) = \frac{1}{108}\eta^2 \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^3 + \frac{1}{108\eta} \left[\eta^2 \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^2 - 12 \right]^{3/2} + \frac{2}{3\rho_L} - \frac{1}{6}.$$

Por outro lado, pode-se verificar de (4.102) que:

$$V_{\text{eff}}(\infty) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{\rho_L}.$$

O valor de η onde $V_{\text{eff}}(\rho_-)$ e $V_{\text{eff}}(\infty)$ se equivalem é obtido da relação $V_{\text{eff}}(\rho_-) = V_{\text{eff}}(\infty)$:

$$\left[\eta^2 \left(\frac{2}{\rho_L} + 1 \right)^2 - 12 \right]^3 - \left(1 + \frac{2}{\rho_L} \right)^2 \left[18\eta - \eta^3 \left(\frac{2}{\rho_L} + 1 \right)^2 \right]^2 = 0.$$

Abrindo as potências, encontra-se:

$$\eta^2 \left(\frac{4}{\rho_L} + \frac{4}{\rho_L^2} + 1 \right) - 16 = 0.$$

A solução positiva para η será $\eta = 4/\sqrt{1 + 4m_G/r_L + 4m_G^2/r_L^2}$, o que mostra que a condição para que o pico $V_{\text{eff}}(\rho_-)$ seja maior que o potencial no infinito, e, portanto, um máximo global, é:

$$h > \frac{4m_G}{\sqrt{1 + 4/\rho_L + 4/\rho_L^2}}. \quad (4.105)$$

O efeito da escala de Lyra sobre o potencial efetivo está dada em termos do parâmetro r_L . Pode-se concluir da Eq. (4.100) que, nos casos em que $2m_G < |r_L|$, a influência de r_L é, em termos práticos, transladar verticalmente à curva do potencial em relação a curva obtida no limite da Relatividade Geral (ou seja, o limite $r_L \rightarrow \infty$). Conforme ilustrado na Fig. 4.3, os gráficos de potencial onde $r_L > 0$ são deslocados para cima ao passo que os gráficos onde $r_L < 2m_G$ se deslocam-se para baixo.² Apesar desse deslocamento, as características do potencial permanecem equivalentes àquelas da Relatividade Geral, o que leva a concluir que na gravitação LyST, a natureza dos movimentos geodésicos são

²O caso das soluções de classe 3, definidas pelo vínculo $-2m_G < r_L < 0$ não foram gerados visto que essa família de soluções leva a inversão dos cones de luz em todo o domínio da coordenada radial r .

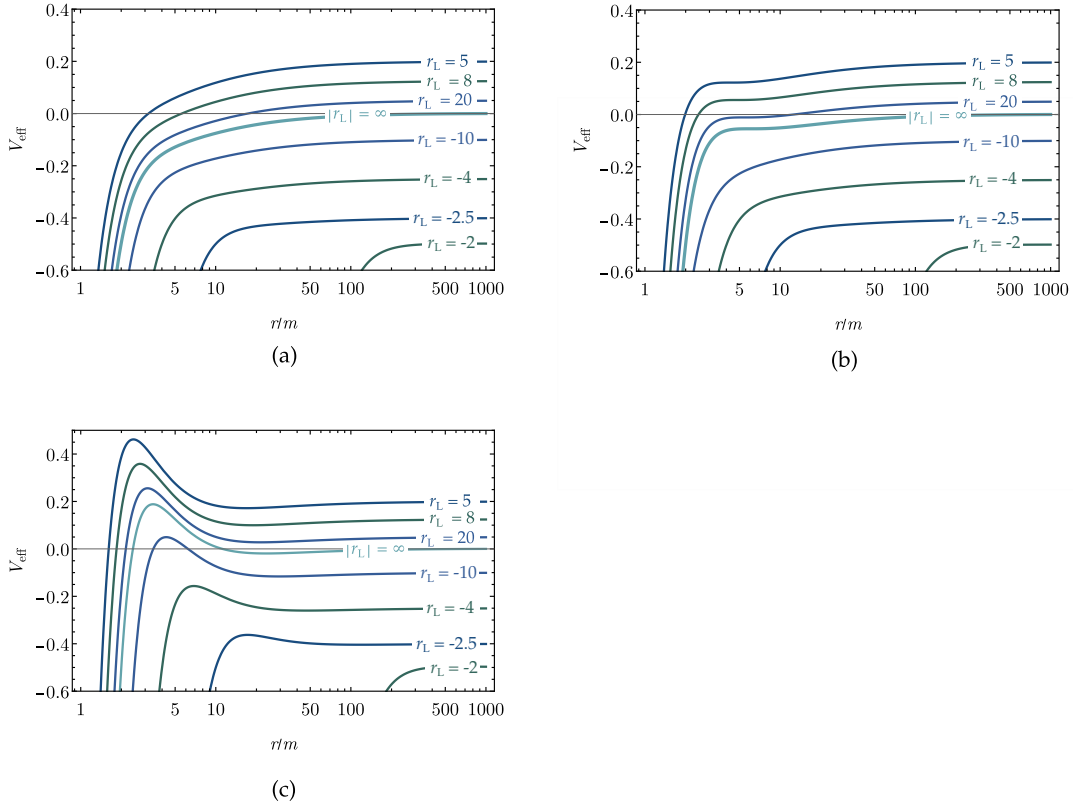


Figura 4.3 – Curvas do potencial efetivo para diferentes valores de r_L . (a) $h < \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$; (b) $h = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$; e (c) $h > \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$.

similares aos da teoria de gravitação padrão.

Tipos de Trajetórias

A Fig. 4.2 exhibe o comportamento do potencial efetivo para diferentes valores de h . No caso em que o momento angular específico respeita a condição $0 < h \leq \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$ (vide Fig.4.3.a), o potencial cresce monotonicamente à medida que r vai ao infinito. A ausência de pontos de mínimo implica na impossibilidade de movimentos ligados para esses valores de h . Por outro lado, para $h > \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$, o potencial tem, tanto um mínimo quanto um máximo local. Nessas circunstâncias, convém separar dois tipos de famílias de potenciais. O primeiro caso é quando quando $\sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1} < h < 4m_G / \sqrt{1 + 4m_G/r_L + 4m_G^2/r_L^2}$, conforme ilustrado na Fig. 4.4.b, onde o máximo local é menor que o potencial do infinito e os movimentos ligados só podem ocorrer caso a energia da partícula respeite $V_{\text{eff}}(\rho_+) < \mathcal{E} < V_{\text{eff}}(\rho_-)$. Entretanto, se $h > 4m_G / \sqrt{1 + 4m_G/r_L + 4m_G^2/r_L^2}$, as órbitas ligadas respeitam o vínculo $V_{\text{eff}}(\rho_+) < \mathcal{E} < V_{\text{eff}}(\rho_-)$ e, além destas, um movimento hiperbólico caso a energia seja $1/r_L < \mathcal{E} < V_{\text{eff}}(\rho_-)$, reiterando-se que $1/r_L$ é o

valor do potencial no infinito.

Nestes gráficos, as linhas horizontais representam movimentos com um valor fixo de energia. A natureza das órbitas no espaço-tempo LyST será inteiramente dependente das propriedades dos dois tipos de potencial comentados acima. Através deles, pode-se reconhecer os diferentes tipos de movimento:

1. Captura gravitacional:

$$\mathcal{E} > V_{\text{eff}}(\rho_-) ;$$

2. Movimento hiperbólico (espalhamento) :

$$h > 4m_G / \sqrt{1 + 4m_G/r_L + 4m_G^2/r_L^2} \text{ e } 1/\rho_L < \mathcal{E} < V_{\text{eff}}(\rho_-)$$

3. Órbitas ligadas;

$$\begin{cases} 1/\rho_L < \mathcal{E} < V_{\text{eff}}(\rho_-) & \text{se } h > 4m_G / \sqrt{1 + 4m_G/r_L + 4m_G^2/r_L^2} \\ V_{\text{eff}}(\rho_+) < \mathcal{E} < V_{\text{eff}}(\rho_-) & \text{se } \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1} < h < 4m_G / \sqrt{1 + 4m_G/r_L + 4m_G^2/r_L^2} \end{cases}$$

4. Órbitas circulares estáveis;

$$h = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L} \right)^{-1}$$

5. Órbitas circulares instáveis;

6. Movimento próximo ao horizonte;

Na sequência, serão abordados os detalhes da trajetória de captura gravitacional, espalhamento, órbitas ligadas e, em específico, a órbita circular estável. Além disso, será considerada em todos os casos a condição de que as órbitas estão suficientemente afastadas, tal que $r \gg 2m_G$ mas não infinitamente distantes, a ponto de que $r \ll |r_L|$. Essa última em condição, em específico, faz com que a gravitação LyST se aproxime da Relatividade Geral.

4.4.3 Captura Gravitacional

O primeiro tipo de movimento a ser estudado é o de captura gravitacional. Considerando-se uma partícula com momento angular específico h , esse tipo de trajetória ocorre quando $\mathcal{E} > V_{\text{eff}}(\rho_-)$. Com essa condição, nota-se através da Eq. (4.99) que num movimento geodésico de captura gravitacional (região 1 da Fig. 4.4), a derivada \dot{r} não altera seu sinal

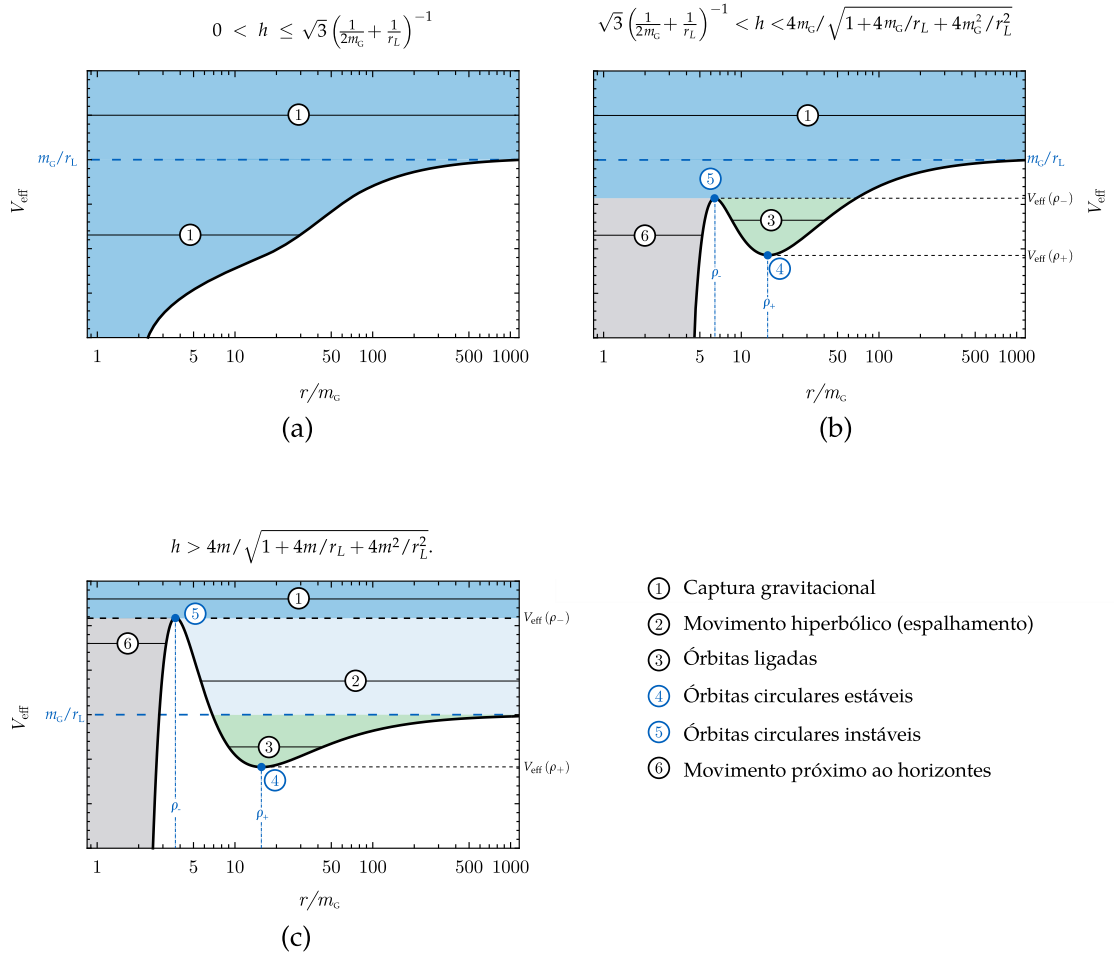


Figura 4.4 – Três famílias de potencial efetivo caracterizando os diferentes tipos de movimentos orbitais. As linhas horizontais representam valores constantes de energia.

ao longo do movimento, posto que a escala de Lyra é positiva em todos os pontos:

$$\dot{r}^2 = 2 \left(1 - \frac{r}{r_L} \right)^{-4} [\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r)] .$$

Em especial, no caso da queda de uma partícula distante, mas que respeite a condição $r \ll |r_L|$ supracitada, \dot{r} é negativo em toda a trajetória. Conseqüentemente, a coordenada radial r diminui seu valor até cruzar o horizonte de eventos em r_S , onde ela é capturada (vide Fig. 4.5). A seção de choque, para esse caso, pode ser calculada de acordo com:

$$\sigma = \pi b^2 \tag{4.106}$$

sendo b o parâmetro de impacto.

O módulo do momento angular, como já se sabe, é $l = mh$. Por outro lado, é calculado

localmente conforme $l = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|$, onde \mathbf{r} é o tri-vetor posição e \mathbf{p} é o tri-vetor momento. De acordo com a Eq. (4.77), verifica-se que o espaço-tempo oriundo das soluções das equações de campo tende a Minkowski no caso em que $m_G \ll r \ll r_L$. Nesse limite, o elemento de linha (4.77), será obtido expandindo os coeficiente em primeira ordem de m_G e r_L^{-1} :

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{2m_G}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2m_G}{r} + \frac{3r}{r_L}\right) dr^2 - \left(1 + 2\frac{r}{r_L}\right) r^2 d\Omega^2. \quad (4.107)$$

Termos proporcionais a m_G/r_L , por serem de segunda ordem, foram negligenciados. Define-se um novo sistema de coordenadas (T, X, Y, Z) tal que:

$$dT^2 = \left(1 - \frac{2m_G}{r}\right) dt^2$$

e

$$\left(1 + \frac{2m_G}{r} + \frac{3r}{r_L}\right) dr^2 + \left(1 + 2\frac{r}{r_L}\right) r^2 d\Omega^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

e, consequentemente, pelo elemento de linha:

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2.$$

Pode-se associar versores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} respectivamente às coordenadas espaciais X , Y e Z . Nesse caso, a posição de uma partícula será dada, simplesmente por $\mathbf{r} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$, sua velocidade dada por $\mathbf{v} = -v\hat{x}$ e o seu momento linear $\mathbf{p} = -p\hat{x}$. Portanto, o módulo do momento angular da partícula será:

$$l = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = |pb\hat{z}| = pb.$$

Por outro lado, sabe-se que $l = mh$:

$$mh = pb$$

O momento da partícula é dado por

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2}, \quad (4.108)$$

onde $v := |\mathbf{v}|$. Portanto:

$$b = \frac{h}{v}\sqrt{1-v^2}. \quad (4.109)$$

Da relação de dispersão de energia relativística, sabe-se que $E^2 = p^2 + m^2$. Portanto:

$$p^2 = E^2 - m^2 = m^2 \left(\frac{E^2}{m^2} - 1\right)$$

$$p^2 = m^2 (k^2 - 1)$$

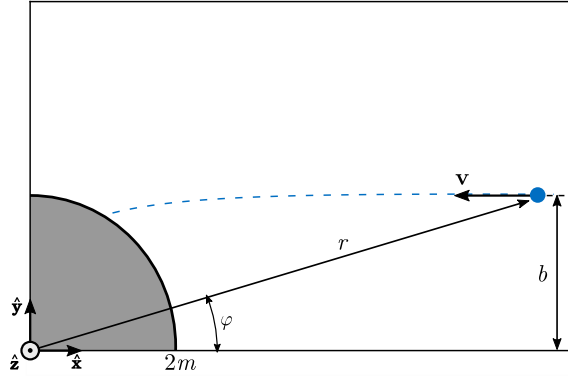


Figura 4.5 – Captura gravitacional de uma partícula com velocidade inicial v .

Da Eq. (4.108), sabe-se que:

$$p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2}.$$

Combinando as duas últimas equações:

$$k^2 = \frac{1}{1 - v^2}. \quad (4.110)$$

Isolando v^2 nas Eqs. (4.109), encontra-se:

$$v^2 = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{h^2}}.$$

Substituindo em (4.110):

$$k^2 = 1 + \frac{h^2}{b^2}. \quad (4.111)$$

Escrevendo-se $k \approx 1 + \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E} \ll 1$ é a energia cinética não relativística por unidade de massa da partícula:

$$\mathcal{E} = \frac{h^2}{2b^2}. \quad (4.112)$$

A medida que aumenta-se o parâmetro de impacto b , as partículas tendem a percorrer uma trajetória maior até serem capturadas de fato (vide Fig, 4.6). No entanto, existe um valor máximo de b para a captura acontecer. Isso ocorre quando b assume um valor b_{cap} , tal que \mathcal{E} passa a ser menor que $V_{\text{eff}}(\rho_-)$:

$$\mathcal{E}(b_{\text{cap}}) = V_{\text{eff}}(\rho_-).$$

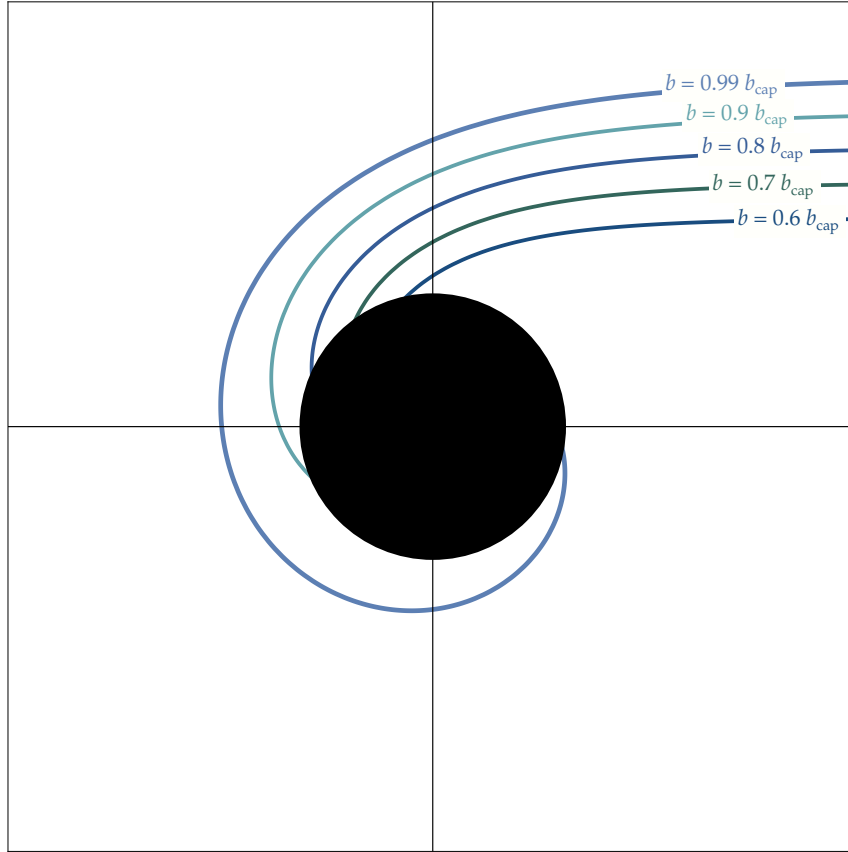


Figura 4.6 – Trajetórias de capturas para diferentes valores de parâmetro de impacto, mantendo-se h fixo.

Das Eqs. (4.102) e (4.112), tem-se:

$$b_{\text{cap}} = 3\sqrt{6}mm_G \left\{ \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^3 + \left[\left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^2 - \frac{12}{\eta^2} \right]^{3/2} - \frac{18}{\eta^2} \left(1 - \frac{4}{\rho_L}\right) \right\}^{-1/2} \quad (4.113)$$

A seção de choque, devido às Eqs. (4.106) e ao resultado (4.113), será:

$$\sigma = 54\pi m^2 m_G^2 \left\{ \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^3 + \left[\left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^2 - \frac{12}{\eta^2} \right]^{3/2} - \frac{18}{\eta^2} \left(1 - \frac{4}{\rho_L}\right) \right\}^{-1} \quad (4.114)$$

Nesse ponto, convém realizar um estudo em dois limites diferentes: o caso de partículas não-relativísticas e o das ultra-relativísticas. Primeiramente, verifica-se por (4.109) que o limite **não-relativístico** de $v \rightarrow 0$ leva b_{cap} a divergir. Em outras palavras, o movimento não relativístico ocorre para parâmetros de impacto significativamente grandes. Essa questão abre a tarefa de se obter a condição em η para que b_{cap} tenda ao infinito e, conseqüentemente, a condição em η para o limite não-relativístico. Partindo de (4.113), o

limite em que $b_{\text{cap}} \rightarrow \infty$ será dado pela relação:

$$\left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^3 + \left[\left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right)^2 - \frac{12}{\eta^2}\right]^{3/2} - \frac{18}{\eta^2} \left(1 - \frac{4}{\rho_L}\right) = 0.$$

Tomando o limite de $\rho_L \rightarrow \infty$, a solução dessa equação será $\eta = 4$. Como nossa condição física envolve valores bastante grandes de ρ_L , esperamos encontrar um resultado para η ligeiramente próximo de 4. Para obtermos uma solução desse tipo, podemos fazer uma substituição de variáveis $\eta \rightarrow 4 + \delta$, e expandir para $\delta \ll 1$ em primeira ordem. Fazendo assim, obtemos $\delta \approx -16/\rho_L$. Dessa forma, encontramos $\eta \approx 4(1 - 4/\rho_L)$ e, portanto:

$$h = 4m_G(1 - 4m_G/r_L).$$

Assim, pela Eq. (4.109), o parâmetro de impacto será:

$$b \approx \frac{4mm_G}{v} \left(1 - \frac{4m_G}{r_L}\right),$$

e com isso, a seção de choque se dá por:

$$\sigma_{\text{n-rel}}(v) \simeq 16\pi \frac{m^2 m_G^2}{v^2} \left(1 - \frac{8m_G}{r_L}\right). \quad (4.115)$$

Por outro lado, para o caso **ultra-relativístico** $v \rightarrow 1$, e de acordo com (4.109), verifica-se que $b_{\text{cap}} \simeq 0$ é a condição. Esse regime é obtido da Eq. (4.113) fazendo $\eta = \frac{h}{m_G} \rightarrow \infty$:

$$b_{\text{cap}}^2 \approx 27m^2 m_G^2 \left(1 - \frac{6m_G}{r_L}\right)$$

e, conseqüentemente:

$$\sigma_{\text{rel}}(v) \simeq 27\pi m^2 m_G^2 \left(1 - \frac{6m_G}{r_L}\right). \quad (4.116)$$

4.4.4 Movimento Hiperbólico

Para o estudo do movimento hiperbólico, assume-se que inicialmente a partícula esteja distante com um parâmetro de impacto b (vide Fig. 4.5). Conforme comentado, as condições para esse movimento são $h > 4m_G / \sqrt{1 + 4m_G/r_L + 4m_G^2/r_L^2}$ e $1/\rho_L < \mathcal{E} < V_{\text{eff}}(\rho_-)$. Considerando um parâmetro de impacto (4.109), a energia pode ser escrita conforme Eq. (4.112). Essas equações mostram que, ao se assumir $1/\rho_L < \mathcal{E}$, a condição $\mathcal{E} < V_{\text{eff}}(\rho_-)$, contrária ao caso da captura gravitacional, leva a uma condição sobre o parâmetro de impacto:

$$b > b_{\text{cap}}$$

onde b_{cap} está definido na Eq. (4.113).

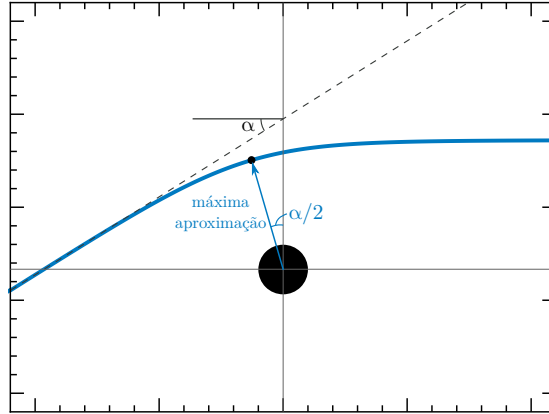


Figura 4.7 – Movimento hiperbólico para parâmetros de impacto maiores que b_{cap} onde a trajetória da partícula é desviada por um ângulo α . Por sua vez, o valor da coordenada angular azimutal no fim do movimento é $\varphi = \pi + \alpha$.

A trajetória de movimento geodésico pode ser descrita relacionando-se as coordenadas r e φ através da equação diferencial (4.42). Entretanto, conforme foi discutido nas seções anteriores, é mais fácil distinguir os diferentes tipos de movimentos geodésicos pela definição de um potencial efetivo e reparametrizando os parâmetros geodésicos em termos de energia, momento angular e parâmetro de impacto, alterações estas que não estão presentes na equação citada. Retomando a equação geodésica para r , dada em (4.99), pode-se reescrevê-la como:

$$\dot{r} = \pm \phi^{-2} \sqrt{2[\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r)]}. \quad (4.117)$$

Combinando a Eq. (4.117) na forma:

$$\dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \phi^{-2} \sqrt{2[\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r)]}$$

com a equação geodésica (4.88), encontra-se

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2 \sqrt{\frac{2}{h^2} [\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r)]}. \quad (4.118)$$

O movimento hiperbólico se define em toda a faixa de valores de r , tal que $V_{\text{eff}}(r) < \mathcal{E}$. A partícula se aproxima da fonte até um raio r_{min} em que $\mathcal{E} = V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$ e a coordenada azimutal assume o valor $\varphi = (\pi + \alpha) / 2$, sendo que α (vide Fig. 4.7) é função tanto de b quanto de h . Nesse ponto, a Eq. (4.117) altera o sinal e a partícula passa a se afas-

tar. O raio de maior aproximação pode ser determinado resolvendo para r_{\min} a seguinte equação cúbica:

$$\mathcal{E} = V_{\text{eff}}(r_{\min}) = \frac{m_G}{r_L} - \frac{m_G}{r_{\min}} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2m_G}{r_L} \right) \frac{h^2}{r_{\min}^2} - \frac{m_G h^2}{r_{\min}^3}. \quad (4.119)$$

Apesar de apresentar três raízes, apenas duas destas são reais e positivas e corresponde aos pontos onde a curva horizontal de (2) na Fig. 4.4.c cruza com o potencial. Destas duas raízes, a maior é aquela que limita inferiormente o movimento de uma partícula na região (2). Por conta da simetria das equações de movimento de aproximação e afastamento, o valor final da coordenada azimutal será $\varphi = \pi + \alpha$, indicando um desvio de trajetória dada pelo ângulo α .

Pela Eq. (4.118), a variação de φ até o ponto de máxima aproximação é:

$$\int_{r_{\text{ini}}}^{r_{\min}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{h^2} [\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r)]}} = \int_0^{(\pi+\alpha)/2} d\varphi,$$

ou seja:

$$\alpha(b, h) = \sqrt{2}h \int_{r_{\text{ini}}}^{r_{\min}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r)}} - \pi, \quad (4.120)$$

onde r_{ini} é um valor que respeita $r_{\text{ini}} \gg m_G$ e $r_{\text{ini}} \ll r_L$, conforme as condições anteriormente impostas.

A integral dada na Eq. (4.120) é complicada de se resolver, o que não desperta interesse do ponto de vista físico. Entretanto, a solução numérica pode ser obtida para $4m_G / \sqrt{1 + 4m_G/r_L + 4m_G^2/r_L^2} < h < \infty$ e $b_{\text{cap}} < b < \infty$. Obviamente, para valores de b pouco maiores que b_{cap} , o ângulo de desvio é bastante acentuado, da mesma forma como também o é para pequenos valores de h . A Fig. 4.8 exhibe o desvio de algumas trajetórias para determinados valores de h e b , donde pode-se verificar que o efeito da escala de Lyra sobre o movimento hiperbólico é atenuar o ângulo de espalhamento. Além disso, uma comparação acerca da natureza dos movimentos de captura e desvio hiperbólico pode ser visualmente realizada investigando a Fig. 4.9.

4.4.5 Movimento Circular

Do ponto de vista matemático, as geodésicas sobre os pontos de equilíbrio ρ_{\pm} determinam órbitas circulares. Entretanto, espera-se que esse tipo de trajetória seja fisicamente estável apenas quando definida sobre o ponto de mínimo ρ_+ . Dito isso, vê-se da Eq. (4.104) que os valores de ρ_+ condizentes com as órbitas circulares estáveis são aqueles onde $\zeta > 0$, o que leva às regiões com raio $r > 6m_G$. A condição $\zeta > 0$, de acordo com (4.103) e (4.101) estabelece o seguinte vínculo ao momento angular de uma partícula em

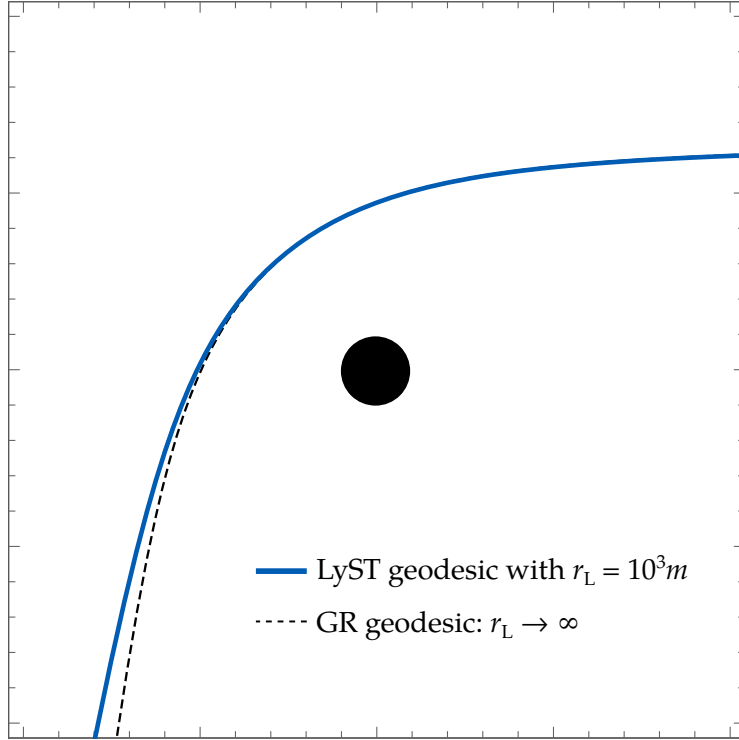


Figura 4.8 – Comparação entre as curvas geodésicas tipo (2) para gravitação Lyst e a Relatividade Geral para os mesmos valores de parâmetro de impacto e momento angular. Foi assumido um valor de $r_L/m_G = 1000$.

órbita circular estável;

$$h > \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}} \quad (\text{condição de equilíbrio para órbita circular}). \quad (4.121)$$

O movimento geodésico circular é caracterizado pelo movimento no plano equatorial, variando a coordenada azimutal e mantendo constante a coordenada radial em um valor r_c , onde a partícula apresenta energia e momento angular específicos, dados respectivamente por k_c e h_c . Impondo $dr/d\varphi = d^2r/d\varphi^2 = 0$ e conseqüentemente $du/d\varphi = d^2u/d\varphi^2 = 0$ obtém-se, de acordo com a Eq.(4.89):

$$u_c \left(1 + \frac{5m_G}{r_L} \right) = \frac{m_G}{h^2} + \frac{1}{r_L} \left(1 + \frac{m_G}{r_L} \right) + 3m_G u_c^2,$$

onde o índice c está indicando que u_c é uma constante. Isolando o quadrado do momento angular intrínseco h_c^2 nessa equação:

$$h_c^2 = \frac{m_G r_c^2}{r_c \left(1 + \frac{5m_G}{r_L} \right) - \frac{r_c^2}{r_L} \left(1 + \frac{m_G}{r_L} \right) - 3m_G} \quad (\text{condição em } h \text{ para órbita circular}). \quad (4.122)$$

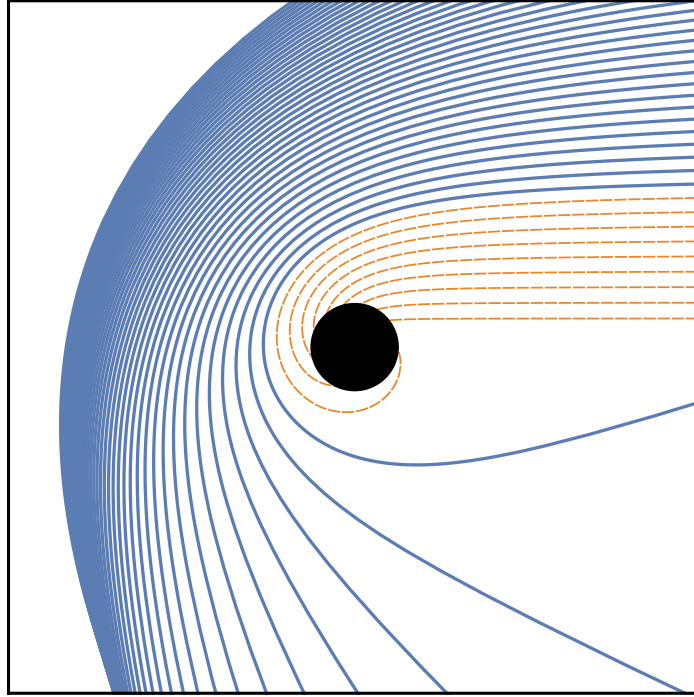


Figura 4.9 – Comparação entre varias curvas geodésicas cujos valores de parâmetro de impacto são igualmente espaçados. As curvas tracejadas em cor laranja representam os movimentos de captura gravitacional ao passo que as curvas em azul são as trajetórias hiperbólicas.

Impondo $\dot{r} = 0$ na equação para a energia (4.87), obtém-se:

$$\frac{1}{\alpha(r_c)\phi^2(r_c)}k_c^2 - \frac{1}{r_c^2\phi^2(r_c)}h_c^2 = 1.$$

Tendo em vista as Eqs. (4.75) e (4.76) para α e ϕ , obtemos:

$$k_c^2 - \frac{h_c^2}{r_c^2} \left(1 - \frac{r_c}{r_L}\right)^2 \left(1 - \frac{2m_G}{r_c} + \frac{2m_G}{r_L}\right) = \left(1 - \frac{2m_G}{r_c} + \frac{2m_G}{r_L}\right). \quad (4.123)$$

Substituindo (4.122) em (4.123):

$$k_c = \left(1 - \frac{2m_G}{r_c} + \frac{2m_G}{r_L}\right)^{1/2} \left[\frac{-2m_G + r_c \left(1 + \frac{4m_G}{r_L}\right) - \frac{r_c^2}{r_L}}{r_c \left(1 + \frac{5m_G}{r_L}\right) - \frac{r_c^2}{r_L} \left(1 + \frac{m_G}{r_L}\right) - 3m_G} \right]^{1/2}. \quad (4.124)$$

Da Eq. (4.123), vê-se que, numa órbita circular, existe um vínculo entre a energia específica k e o momento angular específico h . Assim, uma vez que se determina a energia

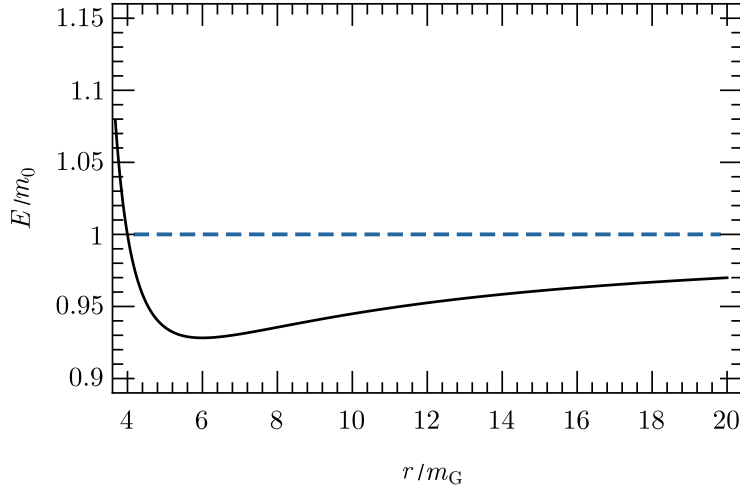


Figura 4.10 – Variação da energia $k = E/m_0$ em função de r/m_G para uma órbita circular de acordo com a Eq. (4.124), onde m_0 é a massa de repouso da partícula teste e m_G é a massa da fonte gravitacional.

específica k_c de uma órbita circular, o momento angular fica automaticamente definido:

$$r_c \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha(r_c)} k_c^2 - \phi^2(r_c)} \right) = h_c.$$

Podem-se usar esses resultados para determinar as características das órbitas ligadas. Diferentemente do caso não relativístico, em que as órbitas ligadas são aquelas que apresentam energia negativa, no caso relativístico, a condição para uma órbita estar ligada é apresentar energia total menor que sua energia de repouso, ou seja $E < m_0$. Na Fig. 4.10, essa condição remete a região em que E/m_0 está abaixo de $k = E/m_0 = 1$. No caso limite em que $E/m_0 = k = 1$, a Eq. (4.124) é escrita como:

$$\frac{m_G r_c}{r_L^2} - \left(\frac{3m_G}{r_L} + \frac{8m_G^2}{r_L^2} \right) + \frac{m_G}{r_c} \left(1 + \frac{12m_G}{r_L} \right) - \frac{4m_G^2}{r_c^2} = 0.$$

Multiplicando por r_c^2/m_G :

$$\frac{r_c^3}{r_L^2} - \left(\frac{3}{r_L} + \frac{8m_G}{r_L^2} \right) r_c^2 + \left(1 + \frac{12m_G}{r_L} \right) r_c = 4m_G. \quad (4.125)$$

Essa equação apresenta três raízes para r_c , valores estes que delimitam as regiões dos possíveis raios r_c de órbitas circulares ligadas. No entanto, para discussão, convém analisar apenas dois limites. O primeiro deles é aquele onde $r_L \rightarrow \infty$ e a influência da escala de Lyra pode ser interpretada como uma perturbação sobre a Relatividade Geral. Mantendo

apenas os termos lineares em r_L^{-1} da Eq. (4.125):

$$\frac{3}{r_L} r_c^2 - \left(1 + \frac{12m_G}{r_L}\right) r_c + 4m_G = 0.$$

As raízes dessa equação são:

$$r_c = \frac{r_L}{6} \left(1 + \frac{12m_G}{r_L}\right) \pm \frac{r_L}{6} \sqrt{\left(1 + \frac{12m_G}{r_L}\right)^2 - \frac{48m_G}{r_L}},$$

que serão designadas por $r_{c,\min}$ e $r_{c,\max}$ e, no limite de $r_L \gg m_G$, são dadas aproximadamente por:

$$r_{c,\min} \approx 4m_G \quad \text{e} \quad r_{c,\max} \approx \frac{r_L}{3}.$$

Portanto, de um ponto de vista puramente geodésico, vê-se que o menor raio possível para que $\dot{r} = 0$ é $4m_G$ ao passo que o máximo é $r_L/3$. Entretanto, do estudo de estabilidade, foi verificado que os pontos de equilíbrio estáveis do potencial só aparecem em $r > 6m_G$. Dessa forma, conclui-se que as órbitas circulares são possíveis com raios em $6m_G < r_c \lesssim r_L/3$, no limite de $r_L \rightarrow \infty$.

Outro limite de interesse é aquele em que $r_L \rightarrow 0$. Tomando-o em (4.125), mantendo apenas os termos de ordem r_L^{-2} , encontra-se:

$$\frac{r_c^3}{r_L^2} - \frac{8m_G}{r_L^2} r_c^2 = 0$$

cujas soluções são:

$$r_c = 8m_G.$$

Assim, se $r_L \rightarrow 0$, as órbitas circulares estáveis estão restritas ao intervalo $6m_G < r_c \lesssim 8m_G$.

4.4.6 Movimento Ligado e Precessão de Periastrós

O último caso de trajetórias de partículas massivas é o de movimentos ligados, caracterizados por valores de energia representados nas Figs. 4.4.b e 4.4.c pelas linhas horizontais ③. Esses são os casos de órbitas cíclicas de partículas teste ao redor de fontes gravitacionais. Assim como nas sessões anteriores, é desejável estudar o problema nas escalas próximas ao limite newtoniano a fim de se procurar por correspondências com dados observacionais. No caso newtoniano, as soluções para a equação de movimento orbital são [30]:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}}{h^2} + \frac{m_G}{h^2} u - \frac{1}{2} u^2.$$

Estas são analíticas e, sob convenientes escolhas de sistema de coordenadas, podem ser caracterizadas por elipses fechadas de acordo com:

$$u = \frac{1}{a} \left(\frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e^2} \right),$$

onde os parâmetros orbitais são a excentricidade e e o semi-eixo maior a :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{m_G^2}} \quad e \quad a = \frac{h^2}{m_G} \frac{1}{(1 - e^2)}. \quad (4.126)$$

Por outro lado, para o caso da Relatividade Geral, a geodésica tem um termo de correção cúbica em u :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}}{h^2} + \frac{m_G}{h^2} u - \frac{1}{2} u^2 + m_G u^3$$

e, por isso, a solução não é tão direta. Contudo, é possível obter uma solução perturbativa sobre a órbita newtoniana. Nessa abordagem, os parâmetros que caracterizam a natureza da órbita são os mesmos da teoria newtoniana, mas a trajetória da partícula em RG difere da órbita newtoniana pois a primeira exhibe uma precessão de periastro (no sistema solar, utiliza-se a designação periélio). O valor de pequenos deslocamentos angulares de periastro em n rotações de uma partícula teste ao redor da fonte gravitacional é [30]:

$$\Delta\varphi = 6\pi n \frac{m_G^2}{h^2} = 6\pi n \frac{m_G}{a(1 - e^2)}.$$

As medições dessa quantidade estão coerentes com a Relatividade Geral, ao menos dentro das incertezas observacionais no sistema solar. Nesse cenário, se a gravitação LyST exibir precessão distinta desse valor, estaria virtualmente descartada. Para averiguar esse fato, retoma-se a equação geodésica de LyST (4.43) que relaciona u e φ :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{h^2} \left(\mathcal{E} + m_G u - \frac{m_G}{r_L} \right) - \frac{1}{2} u^2 \left(1 - \frac{1}{r_L u} \right)^2 \left(1 - 2m_G u + \frac{2m_G}{r_L} \right).$$

Claramente, esta é uma equação diferencial de solução bem mais desafiadora que os casos anteriores. No entanto, existem fatos bastante pertinentes sobre a abordagem de trabalho aqui adotada que potencialmente vão simplificar o estudo referido. O primeiro deles é que no limite da solução procurada, dado por $m_G \ll r \ll r_L$, tanto m_G quanto r_L^{-1} devem ser tratados como parâmetros perturbativos de primeira ordem. Sendo assim, mantendo-se apenas os termos de primeira ordem sobre a equação anterior:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \approx \frac{\mathcal{E}}{h^2} + \frac{m_G u}{h^2} - \frac{1}{2} u^2 + m_G u^3 + \frac{u}{r_L}. \quad (4.127)$$

Nota-se que, desconsiderando a contribuição cúbica, a equação diferencial tem a mesma natureza que a equação newtoniana:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}}{h^2} + \left(\frac{m_G}{h^2} + \frac{1}{r_L} \right) u - \frac{1}{2} u^2 + \mathcal{O}(u^3). \quad (4.128)$$

Esse fato garante que a gravitação LyST não está automaticamente em desacordo com as observações.

Definindo momentaneamente uma quantidade \tilde{m}_G com unidades de massa:

$$\frac{\tilde{m}_G}{h^2} = \frac{m_G}{h^2} + \frac{1}{r_L}, \quad (4.129)$$

a Eq. (4.128), nessa ordem de aproximação, pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}}{h^2} + \frac{\tilde{m}_G}{h^2} u - \frac{1}{2} u^2,$$

cuja solução, assim como no caso newtoniana, será:

$$u = \frac{1}{r_{\text{med}}} \left(\frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e^2} \right), \quad (4.130)$$

onde e e r_{med} são respectivamente a excentricidade e o raio médio da órbita, expressados por:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\tilde{m}_G^2}} \quad \text{e} \quad r_{\text{med}} = \frac{h^2}{\tilde{m}_G} \frac{1}{(1 - e^2)},$$

em analogia a Eq. (4.126). Com a Eq. (4.129), essas quantidades podem ser escritas como:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{m_G^2 (1 + 2h^2/r_L)}} \quad \text{e} \quad r_{\text{med}} = \frac{h^2}{m_G^2 (1 + h^2/r_L)} \frac{1}{(1 - e^2)}.$$

Com a Eq. (4.130) pode-se obter a órbita de um planeta ao redor do Sol, conforme mostrado na Fig. 4.11, em que o Sol situa-se em um dos focos. A distância mais próxima ocorre quando o ângulo φ se anula:

$$r_{\text{min}} = r_{\text{med}} (1 - e). \quad (4.131)$$

Em contraposição, se $\varphi = \pi$, então o raio é máximo e

$$r_{\text{max}} = r_{\text{med}} (1 + e). \quad (4.132)$$

Vê-se dessa forma que r_{med} pode ser encarado como uma estimativa grosseira para o raio da partícula. De fato, pela soma das Eqs. (4.131) e (4.132), $r_{\text{min}} = (r_{\text{min}} + r_{\text{max}})/2$.

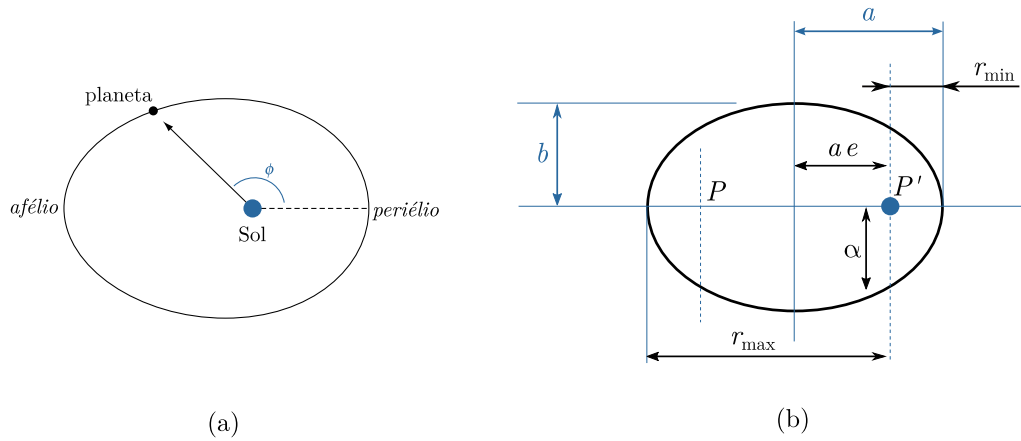


Figura 4.11 – Órbita planetária elíptica ao redor do Sol.

Derivando a Eq. (4.127) com respeito a φ , encontra-se:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m_G}{h^2} + \frac{1}{r_L} + 3m_G u^2.$$

Com a definição de \tilde{m}_G dada na Eq. (4.129), encontra-se:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\tilde{m}_G}{h^2} + 3m_G u^2. \quad (4.133)$$

No caso assintótico de $r \rightarrow \infty$, em que $u \rightarrow 0$, o termo proporcional à u^2 é negligenciável se comparado ao termo u . Por conta disso, propõe-se uma solução dada em série de potências de m_G :

$$u = u_{(0)} + u_{(1)}m_G + \dots \quad (4.134)$$

Substituindo (4.134) em (4.133) e mantendo apenas os termos lineares em m_G :

$$\frac{d^2u_{(0)}}{d\varphi^2} + u_{(0)} + m_G \left(\frac{d^2u_{(1)}}{d\varphi^2} + u_{(1)} \right) = \frac{\tilde{m}_G}{h^2} + 3m_G u_{(0)}^2.$$

Com os termos de ordem zero no parâmetro m_G , obtém-se:

$$\frac{d^2u_{(0)}}{d\varphi^2} + u_{(0)} = \frac{\tilde{m}_G}{h^2}, \quad (4.135)$$

enquanto que os termos de primeira ordem fornecem:

$$\frac{d^2u_{(1)}}{d\varphi^2} + u_{(1)} = 3u_{(0)}^2. \quad (4.136)$$

Como já visto em (4.130), a solução de (4.135) é:

$$u_{(0)} = \frac{\tilde{m}_G}{h^2} (1 + e \cos \varphi) . \quad (4.137)$$

Com $u_{(0)}$, a Eq. (4.136) se torna:

$$\frac{d^2 u_{(1)}}{d\varphi^2} + u_{(1)} = \frac{3\tilde{m}_G^2}{h^4} + \frac{6\tilde{m}_G^2 e}{h^4} \cos \varphi + \frac{3\tilde{m}_G^2 e^2}{2h^4} + \frac{3\tilde{m}_G^2 e^2}{2h^4} \cos(2\varphi) . \quad (4.138)$$

Para resolver essa equação diferencial, propõe-se uma solução do tipo:

$$u_{(1)} = x + y + z , \quad (4.139)$$

tal que sejam simultaneamente válidas as seguintes equações:

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} + x = \frac{3\tilde{m}_G^2}{h^4} + \frac{3\tilde{m}_G^2 e^2}{2h^4} , \quad (4.140)$$

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + y = \frac{6\tilde{m}_G^2 e}{h^4} \cos \varphi \quad (4.141)$$

e

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z = \frac{3\tilde{m}_G^2 e^2}{2h^4} \cos(2\varphi) . \quad (4.142)$$

Uma solução geral seria dada pela soma das soluções homogêneas e particulares. Entretanto, a solução homogênea dessas equações já está contida na expressão para $u_{(0)}$. Por isso, deve-se utilizar as equações (4.140)-(4.142) para determinar soluções particulares.

Para (4.140), propondo uma solução do tipo $x = a\varphi^2 + b\varphi + c$, obtém-se:

$$2a + a\varphi^2 + b\varphi + c = \frac{3\tilde{m}_G^2}{h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) ,$$

que mostra que $a = b = 0$ e, conseqüentemente que $c = \frac{3\tilde{m}_G^2}{h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right)$. Portanto:

$$x = \frac{3\tilde{m}_G^2}{h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) . \quad (4.143)$$

Para (4.141), propõe-se soluções heterogêneas do tipo $y = a\varphi \cos \varphi + b\varphi \sin \varphi$. Substituindo essa *ansatz* na equação diferencial:

$$2b \cos \varphi - 2a \sin \varphi = \frac{6\tilde{m}_G^2 e}{h^4} \cos \varphi .$$

Portanto, $a = 0$ e $b = 3\tilde{m}_G^2 e/h^4$. Dessa forma:

$$y = \frac{3\tilde{m}_G^2 e}{h^4} \varphi \sin \varphi. \quad (4.144)$$

Por último, requer-se que $z = a \sin(2\varphi) + b \cos(2\varphi)$. Aplicando essa expressão em (4.142):

$$-3a \sin(2\varphi) - 3b \cos(2\varphi) = \frac{3\tilde{m}_G^2 e^2}{2h^4} \cos(2\varphi),$$

donde conclui-se que $a = 0$ e $b = -3\tilde{m}_G e^2/2h^4$, e a solução para z se reduz à:

$$z = -\frac{3\tilde{m}_G e^2}{2h^4} \cos 2\varphi. \quad (4.145)$$

Com as soluções heterogêneas individuais substituídas em (4.139), encontra-se:

$$u_{(1)} = \frac{3\tilde{m}_G^2}{h^4} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \frac{3\tilde{m}_G^2 e}{h^4} \varphi \sin \varphi - \frac{3\tilde{m}_G e^2}{2h^4} \cos(2\varphi) \quad (4.146)$$

No caso de pequenas excentricidades, os termos quadráticos em e podem ser negligenciados:

$$u_{(1)} = \frac{3\tilde{m}_G^2}{h^4} + \frac{3\tilde{m}_G^2 e}{h^4} \varphi \sin \varphi. \quad (4.147)$$

A solução aproximada, de acordo as Eqs. (4.137) e (4.147), será escrita como:

$$u = \frac{\tilde{m}_G}{h^2} \left[1 + \frac{3\tilde{m}_G}{h^2} + e \left(\cos \varphi + \frac{3m_G \tilde{m}_G}{h^2} \varphi \sin \varphi \right) \right].$$

Como o termo $3m_G \tilde{m}_G/h^2$ é de primeira ordem em relação à m_G , a solução para u pode ser aproximada em:

$$u \approx \frac{\tilde{m}_G}{h^2} \left[1 + \frac{3\tilde{m}_G}{h^2} + e \cos \left(\varphi - \frac{3m_G \tilde{m}_G}{h^2} \varphi \right) \right].$$

Dessa expressão, vê-se que a órbita ainda é periódica, mas com um período distinto do caso newtoniano. O termo periódico alcançará seu máximo quando o argumento for múltiplo de 2π . Portanto:

$$2\pi n = \varphi \left(1 - \frac{3m_G \tilde{m}_G}{h^2} \right),$$

ou, em nossas aproximações:

$$\varphi = 2\pi n \left(1 + \frac{3m_G \tilde{m}_G}{h^2} \right),$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Isso mostra que uma órbita com correções relativísticas irá se fechar para

valores de φ maiores que $2\pi n$, tal que $\varphi = 2\pi n + \Delta\varphi$, onde:

$$\Delta\varphi = 6\pi n \frac{m_G \tilde{m}_G}{h^2}.$$

Considerando-se agora a expressão (4.129), encontra-se:

$$\Delta\varphi = 6\pi n \frac{m_G^2}{h^2} + 6\pi n \frac{m_G}{r_L}. \quad (4.148)$$

O primeiro termo dessa equação é de primeira ordem, visto que, por Eq. (4.137), h^2/m_G deve ser da mesma ordem de grandeza do raio orbital. Esse termo é justamente a expressão para a precessão do periélio de mercúrio de acordo com a Relatividade Geral:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{\text{RG}} \left(1 + \frac{h^2}{m_G r_L} \right) = \Delta\varphi_{\text{RG}} \left[1 + \frac{r_{\text{med}}}{r_L} (1 - e^2) \right].$$

Por outro lado, o segundo termo é de segunda ordem por conta do vínculo $m_G \ll r_{\text{med}} \ll r_L$ para as escalas adotadas. Nesse sentido, nas ordens de grandeza do sistema solar, onde a medida mais significativa é a da precessão do periélio de mercúrio dada por $(43.1 \pm 0.5)''$ por século [104], o segundo termo de (4.148) não deve contribuir com mais do que 1% do que o valor da RG. A única informação que pode ser obtida é a de que $r_L \gtrsim 100r_{\text{☿}}$, onde $r_{\text{☿}} = 0.4$ u.a. é aproximadamente o raio de Mercúrio, o que é um fato conhecido pela observação de fenômenos astrofísicos. Sendo assim, esse resultado pode ser encarado como um indicativo de que os fenômenos em escala de sistema solar sejam inadequados para vincular os valores de r_L . Por outro lado, nós temos a constatação de que, ao menos em nível de sistema solar, a teoria LyST não pode ser descartada.

4.4.7 Precessão de periélio via abordagem de Hamilton-Jacobi

Nesse ponto deseja-se obter a influência da gravitação de Lyra em alguns fenômenos astrofísicos. No sistema solar, um dos testes clássicos da gravitação Einsteiniana é a precessão do periélio de Mercúrio e mais especificamente, a contribuição relativística para precessão do periélio, uma vez que uma órbita perfeitamente elíptica é somente um caso ideal, onde se negligencia a contribuição gravitacional de outros astros, o momento de quadrupolo da fonte gravitacional, e a precessão de Lense-Thirring, dentre outros efeitos. Até o início do século XX, os fenômenos físicos que conhecidamente contribuem para a precessão da órbita de Mercúrio não eram condizentes com o dado observado. Para entender a influência dos modelos de gravitação relativísticos e como eles sanam o problema, convém realizar primeiramente uma breve revisão de conceitos.

Considerações sobre a órbita newtoniana

Considere-se uma partícula de massa m no espaço não relativístico, sob a ação de um potencial gravitacional gerado por uma fonte de massa M :

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad (4.149)$$

onde $m \ll M$ e G é constante gravitacional de Newton. A lagrangiana para esse movimento pode ser posta como:

$$L(x^k, \dot{x}^l) = \frac{1}{2}mg_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - U(r),$$

onde $x^i = (r, \theta, \varphi)$, $\dot{x}^i \equiv dx^i/dt$ e $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Os momentos canonicamente conjugados às coordenadas espaciais x^i são $p_i = \partial L / \partial \dot{x}^i = mg_{ij}\dot{x}^j$. Com eles, a lagrangiana pode ser reescrita como:

$$L(x^k, p_l) = \frac{1}{2m}g^{ij}p_i p_j - U(r),$$

e a Hamiltoniana $H = p_i \dot{x}^i - L$ fica:

$$H(x^k, p_l) = \frac{1}{2m}g^{ij}p_i p_j + U(r).$$

Os momento canonicamente conjugados às coordenadas esféricas $x^i = (r, \theta, \varphi)$ podem ser escritos como $p_j = (p_r, p_\theta, p_\varphi)$. Considerando essa nomenclatura, juntamente com os coeficientes métricos referentes ao sistema de coordenadas esféricas e o potencial (4.149), temos:

$$H(x^k, p_l) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{GMm}{r}.$$

Como a interação é dependente somente de r , o momento angular é ortogonal à trajetória. Assim, pode-se fixar o plano orbital em $\theta = \pi/2$, tal que $\dot{\theta} = p_\theta = 0$:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}.$$

Com a Hamiltoniana escrita em termos de coordenadas x^l e momentos conjugados p_l , a Equação de Hamilton-Jacobi [97]:

$$H(x^k, p_l) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

será obtida substituindo os momentos pelas derivações parciais da função principal de

Hamilton S com respeito às suas respectivas coordenadas conjugadas. Assim, obtemos:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Pela ciclicidade das coordenadas t e φ na lagrangeana, uma solução para a função principal de Hamilton é dada por:

$$S(r, \varphi, t) = \mathcal{E}t - l\varphi + S_r(r).$$

Dessa forma, a equação de Hamilton-Jacobi se reduz à:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \mathcal{E}.$$

Resolvendo para S_r :

$$S_r(r) = \pm \int dr \sqrt{2m \left(\mathcal{E} + \frac{GMm}{r} \right) - \frac{l^2}{r^2}},$$

a função principal de Hamilton se torna:

$$S(r, \varphi, t) = \mathcal{E}t - l\varphi \pm \int dr \sqrt{2m \left(\mathcal{E} + \frac{GMm}{r} \right) - \frac{l^2}{r^2}}. \quad (4.150)$$

As equações de movimento surgem anulando-se às derivadas da Eq. (4.150) com respeito ao constante \mathcal{E} e l :

$$t = -m \int \frac{dr}{\sqrt{2m \left(\mathcal{E} + \frac{GMm}{r} \right) - \frac{l^2}{r^2}}} \quad (4.151)$$

e

$$\varphi = \int \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2m}{l^2} \left(\mathcal{E} + \frac{GMm}{r} \right) - \frac{1}{r^2}}}. \quad (4.152)$$

A solução da Eq. (4.152) é:

$$r = \left(\frac{l^2}{GMm^2} \right) \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{M^2G^2m^3}} \cos \varphi},$$

que é a equação de uma elipse. Nela, o movimento é oscilatório e tem raio mínimo:

$$r_* = \frac{l^2 / GMm^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2l^2\mathcal{E}}{M^2G^2m^3}}}.$$

A distância angular entre os pontos onde a partícula atinge a menor distância da fonte é

$\Delta\varphi = 2\pi$, visto que a periodicidade está determinada pela presença da função trigonométrica $\cos\varphi$.

Agora, foca-se na gravitação de Lyra, onde é a Eq. (4.51) que descreve a relação entre raio e ângulo. Para o movimento de um planeta em torno do Sol ser fenomenologicamente coerente, essa equação não deve ser muito diferente da equação de trajetória prevista pela teoria de Newton. As condições para essa equivalência são a velocidade não-relativística e campo gravitacional pouco intenso. Na gravitação newtoniana, no caso de movimentos ligados, a órbita se caracteriza por uma trajetória elíptica, onde a fonte gravitacional ocupa um dos focos. O *periélio* e *afélio* nessa órbita são dados respectivamente por:

$$r_{\min} = \frac{2m\mathcal{E}}{l^2} (1 - e) \quad \text{e} \quad r_{\max} = \frac{2m\mathcal{E}}{l^2} (1 + e),$$

que, de fato, são justamente as raízes do argumento da raiz quadrada de (4.152). Na gravitação newtoniana, o planeta atinge periélio (e também afélio) sempre em intervalos angulares de 2π , visto que a órbita é uma elipse fechada.

No caso relativístico, seja pela Relatividade Geral ou pela teoria de gravitação em Lyra, não se esperam diferenças gritantes nas magnitudes das distâncias de maior e menor aproximação, energia não relativística e momento angular, ao menos em nível de sistema solar. Entretanto, quaisquer perturbações a (4.152) devem contribuir para o efeito de precessão de periélio. Como este é um fenômeno acumulativo, ainda que as contribuições perturbativas sejam pequenas, elas podem ser contabilizadas pelos astrônomos através de medições ao longo de grandes intervalos de tempo. De fato, tal fenômeno foi crucial para o estabelecimento da teoria da Relatividade Geral. Sendo assim, é preciso verificar como a consideração da escala afetaria o efeito de precessão.

Em termos práticos, pode-se fazer isso de duas formas possíveis: perturbativamente ou numericamente. Aqui, o primeiro caso é mais interessante por uma série de fatores que serão exposto com o desenvolvimento do texto. Entretanto, a determinação numérica será importante para averiguar a validade da expressão perturbada.

Procedimento Perturbativo para a Precessão de Periélio

Na seção 2.6.1, foi verificado que a equação que deve ditar o movimento orbital é:

$$\varphi - \varphi_{\text{ref}} = \pm l \int dr \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E^2 - m^2\alpha(r)\phi^2 - \frac{l^2}{r^2}\alpha(r)}}. \quad (4.153)$$

Entretanto, para o cálculo da precessão, seguindo [96], deve-se dar um passo atrás e trabalhar com a função principal de Hamilton (4.49):

$$S = Et - l\varphi + S_r(r)$$

onde:

$$S_r(r) = \pm \int dr \sqrt{\frac{E^2}{\alpha(r)^2} - \frac{m^2 \phi^2(r)}{\alpha(r)} - \frac{l^2}{\alpha(r)r^2}}. \quad (4.154)$$

Em primeiro lugar, deve-se considerar que, no limite não relativístico, a energia E da partícula se divide naturalmente em um contribuição massiva m e uma energia não relativística \mathcal{E} :

$$E = m + \mathcal{E}, \quad (4.155)$$

onde $\mathcal{E} \ll m$.

Para prosseguir, define-se a nova variável de integração como:

$$r'^2 \equiv r^2 \alpha(r) = r^2 \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right) \quad (4.156)$$

que é justamente o denominador do termo proporcional a l^2 em (4.154). Isolando r , mantendo os termos r_s e r_L^{-1} em até segunda ordem, tem-se:

$$r \approx r' \left(1 + \frac{m_G}{r'} + \frac{r'}{r_L} + \frac{m_G^2}{2r'^2} + \frac{2r'^2}{r_L^2}\right). \quad (4.157)$$

Substituindo (4.157) na Eq. (4.75), mantendo-se apenas os termos até segunda ordem de m_G e r_L^{-1} , encontra-se:

$$\alpha(r') \approx 1 + \frac{6m_G}{r_L} - \frac{2m_G}{r'} + \frac{2m_G^2}{r'^2} - \frac{2r'}{r_L} - \frac{r'^2}{r_L^2}, \quad (4.158)$$

$$\alpha^{-1}(\rho) \approx 1 + \frac{2m_G}{r_L} + \frac{2m_G}{r'} + \frac{2m_G^2}{r'^2} + \frac{2r'}{r_L} + \frac{5r'^2}{r_L^2} \quad (4.159)$$

e

$$\alpha^{-2}(\rho) \approx 1 + \frac{12m_G}{r_L} + \frac{4m_G}{\rho} + \frac{8m_G^2}{\rho^2} + \frac{4\rho}{r_L} + \frac{14\rho^2}{r_L^2}. \quad (4.160)$$

Substituindo (4.155, 4.156, 4.157, 4.158-4.160) e a Eq. (4.72) em (4.154) e mantendo apenas os termos até segunda ordem, encontra-se:

$$S_r(r) = \pm \int dr' \left[2m\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \frac{1}{r_L} (4m_G m^2 + 8m\mathcal{E} r') + \frac{1}{r'} (2m_G m^2 + 8m_G m\mathcal{E}) - \frac{1}{r'^2} (l^2 - 6m^2 m_G^2) \right]^{1/2}.$$

Comparando com a parte radial da função principal de Hamilton na Relatividade Geral [96]:

$$S_r^{(\text{RG})} = \pm \int dr' \sqrt{2m\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \frac{1}{r'} (mr_s + 4mr_s\mathcal{E}) - \frac{1}{r'^2} (l^2 - 6m^2m_G^2)},$$

percebe-se que a única diferença entre ambas é a presença do termo $\frac{1}{r_L} (4m_G m^2 + 8m\mathcal{E} r')$ que aparece no caso da órbita na variedade de Lyra. Entretanto, esse termo só contribui alterando suavemente a relação entre energia e momento da partícula. Apenas as mudanças no coeficiente de $1/r'^2$ culminariam em uma distorção orbital capaz de ser detectada via precessão de periélio [96]. Dessa forma, verifica-se que os efeitos de precessão de periélio da teoria de gravitação na variedade de Lyra não são distinguíveis daqueles previstos pela Relatividade Geral em primeira ordem de aproximação dentro das ordens de grandeza do sistema solar.

4.5 Trajetória de Fótons

A trajetória de partículas de massa zero (aqui em específico, será assumido o fóton) é uma geodésica nula, e, nesse caso, não se pode utilizar o tempo próprio τ como parâmetro. Em vez disso, usa-se algum parâmetro afim λ . Para movimentos no plano equatorial, as equações de geodésicas nulas, conforme Eqs. (4.41), serão:

$$\phi^2 \alpha \frac{dt}{d\lambda} = k; \quad (4.161a)$$

$$\phi^2 r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = h; \quad (4.161b)$$

$$\frac{1}{\alpha \phi^2} k^2 - \frac{\phi^2}{\alpha} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{r^2 \phi^2} h^2 = 0, \quad (4.161c)$$

onde k e h são energia e momento angular do fóton.

Através das relações (4.161b) e (4.161c), pode-se encontrar uma importante equação para o estudo de órbitas em problemas onde a relação entre a coordenada radial e o ângulo azimutal tem papel de destaque:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{k^2 r^4}{h^2} - \alpha r^2. \quad (4.162)$$

A Eq. (4.162) apresenta duas soluções visto que a relação diferencial depende de um termo de derivada quadrática. Em casos específicos, é mais conveniente trabalhar apenas com a equação de ordem superior obtida ao se derivar (4.162) com respeito à φ :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} \frac{d(\alpha u^2)}{du} = 0; \quad (4.163)$$

onde foi definida a variável $u = 1/r$.

De posse das Eqs. (4.161) e (4.162) e (4.163), pode-se estudar os casos isolados de movimento radial e movimento circular para partículas não-massivas.

4.5.1 Movimento Radial e a Distorção dos Cones de Luz

No caso em que $\dot{\phi} = 0$, vê-se por (4.161b) que o momento angular deve ser nulo. Aplicando essa condição na Eq. (4.161c), é obtida a relação:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\phi^4} k^2.$$

Com a solução para ϕ dada na Eq. (4.76), encontra-se:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^4 k^2. \quad (4.164)$$

Dessa equação, percebe-se uma notável característica da gravitação LyST: no ponto onde $r = r_L$, não existe variação da coordenada radial. Isso é exatamente o que foi observado no caso de partículas massivas. Esse tipo de característica não é observada na Teoria da Relatividade Geral. Por outro lado, a percepção de que $dr/d\tau$ é não divergente sobre o horizonte de eventos é um indício de que o raio de Schwazrschild da Relatividade Geral configura-se como uma singularidade aparente. Na teoria LyST, portanto, nada pode ser concluído com respeito a isso.

Reescrevendo (4.164) em termos da derivada dr/dt :

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^4 k^2,$$

e, com a Eq. (4.161a), obtém-se:

$$\frac{k^2}{\phi^4 \alpha^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^4 k^2,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \alpha^2.$$

Usando-se a Eq. (4.75) para α ,

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right). \quad (4.165)$$

Dessa equação, não se pode obter soluções explícitas para r em função de t . Porém,

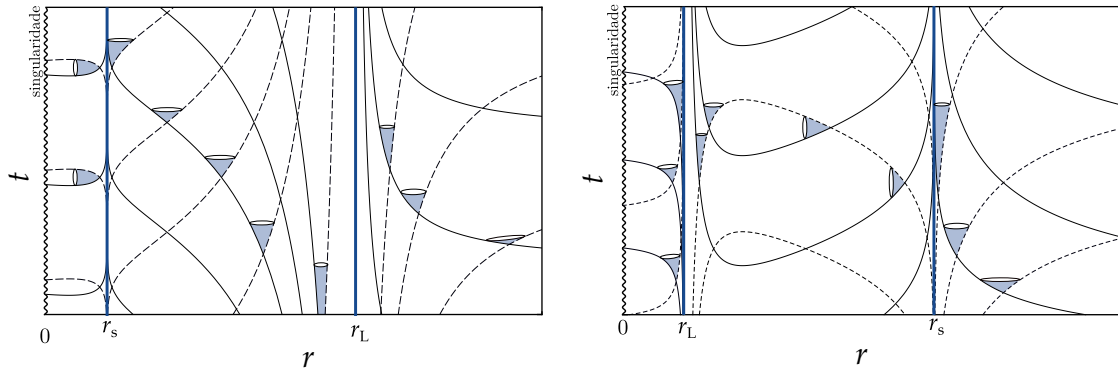


Figura 4.12 – Geodésicas nulas para a solução esfericamente simétrica na gravitação escalar-tensorial na variedade de Lyra em coordenadas de Schwarzschild. Na vizinhança de r_L e $r_s = \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}\right)^{-1}$, nota-se uma grande distorção dos cones de luz. O diagrama da esquerda remete ao caso onde $r_s < r_L$ e o gráfico da direita para $r_s > r_L$.

assumindo t como função de r , encontra-se:

$$t_{\pm}(r) = c_1 \pm \left[\frac{r}{\left(1 - \frac{r}{r_L}\right)} + 2m_G \ln \left(\frac{r}{1 - \frac{r}{r_L}} - 2m_G \right) \right]. \quad (4.166)$$

Note que o limite de $r_L \rightarrow \infty$ leva naturalmente ao resultado da Relatividade Geral:

$$t_{\text{RG}}(r) = c_1 \pm [r + 2m_G \ln(r - 2m_G)].$$

A derivada dt/dr diverge nas raízes de $\alpha(r)$, o que acontece em dois valores de coordenada radial: $r = r_L$ e $r = r_s = \left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}\right)^{-1}$. A Fig. 4.12 mostra várias curvas geodésicas nulas oriundas da Eq. (4.166), tanto para o caso em que $r_s < r_L$ quanto para $r_s > r_L$. Através desses diagramas, verifica-se que à esquerda de r_s , os cones de luz se rotacionam a 90° ; regiões estas em que r e t trocam de caráter. Nas vizinhanças de r_s e r_L , pode-se verificar uma significativa distorção dos cones de luz. Isso indica que uma partícula demoraria um tempo coordenado t infinito para alcançar os raios r_L ou r_s . No caso de r_s , esse problema pode ser rapidamente entendido como um efeito da escolha de coordenadas visto que, na equação diferencial dada em termos do parâmetro afim λ , não foi observado nenhum problema de divergência, conforme pode ser verificado pela Eq. (4.164). Entretanto, para o caso de r_L , a interpretação é bem mais complicada. Em primeiro lugar, verifica-se pela Eq. (4.166) que o tempo que um feixe de luz leva para alcançar o raio r_L é divergente. Essa característica já tinha sido observada no movimento radial de partículas massivas. As regiões de $r < r_L$ e $r > r_L$ não podem, portanto, ser conectadas causalmente. Como hipótese de trabalho, será assumido que $r < r_L$ para todos os fenômenos analisados.

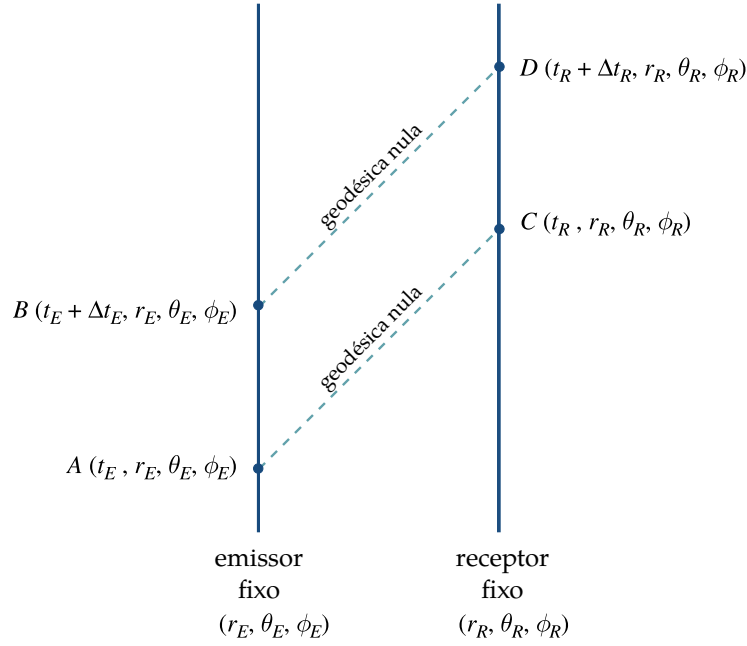


Figura 4.13 – Evento de emissão e observação para dois fótons distintos.

4.5.1.1 Redshift Gravitacional

Considere-se a região nas vizinhanças de uma distribuição esfericamente simétrica de massa. No contexto da gravitação de Lyra, o elemento de linha nessa região será dado pela Eq. (4.77):

$$ds^2 = \phi(r)^2 \alpha(r) dt^2 - \phi(r)^2 \alpha^{-1}(r) dr^2 - \phi(r)^2 r^2 d\Omega^2, \quad (4.167)$$

onde as funções radiais $\alpha(r)$ e $\phi(r)$ são dadas em (4.75) e (4.76).

Agora, considere-se o caso de uma fonte de luminosa fixa que emite um pulso no evento A de coordenadas $(t_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$, que será recebido por um observador no evento C , de coordenadas $(t_R, r_R, \theta_R, \phi_R)$. A trajetória percorrida pelo feixe de luz entre os eventos de emissão e observação é uma geodésica nula no espaço-tempo esfericamente simétrico de Lyra. Um segundo fóton é emitido em um evento $B(t_E + \Delta t_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$ e recebido pelo observador em $D(t_R + \Delta t_R, r_R, \theta_R, \phi_R)$. A Fig. 4.13 esquematiza os eventos de emissão (A e B) e observação (C e D) dos dois. Aplicando a condição $ds^2 = 0$ que define uma geodésica nula em (4.167), encontra-se:

$$\alpha(r) dt^2 = \alpha^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

ou

$$\alpha(r) dt^2 = -g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.168)$$

onde os índices i e j percorrem apenas as coordenadas espaciais. Parametrizando o movimento de acordo com um parâmetro afim λ , essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \alpha^{-1/2} \left(-g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right)^{1/2}. \quad (4.169)$$

Assim, o intervalo temporal coordenado que separa os eventos de emissão e recepção será:

$$t_R - t_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda_R} d\sigma \alpha^{-1} \left(-g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right)^{1/2},$$

$$t_R - t_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda_R} d\lambda \left(1 - \frac{r}{r_L} \right)^{-2} \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L} \right)^{-1} \left(-g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right)^{1/2}. \quad (4.170)$$

É importante salientar que a integral do membro direito da equação depende apenas do caminho pelo espaço. Então, para o caso onde tanto o emissor quanto o receptor estão fixos, o valor de $t_R - t_E$ será sempre o mesmo para todos os sinais enviados. A diferença de coordenada temporal Δt_E que separa os eventos A e B deve ser a mesma que o intervalo Δt_R que separa os eventos de recepção C e D :

$$\Delta t_E = \Delta t_R. \quad (4.171)$$

Considera-se o referencial do emissor, com coordenadas locais (τ_E, x_E^i) posicionado na origem das coordenadas espaciais; isto é, $x_E^i = 0$. Portanto, o intervalo entre dois eventos de emissão será:

$$ds^2 = d\tau_E^2 = g_{00} dt^2,$$

e com isso:

$$\Delta \tau_E = \sqrt{g_{00}(r_E)} \Delta t_E. \quad (4.172)$$

Da mesma forma, o intervalo de tempo próprio no referencial de observação será:

$$\Delta \tau_R = \sqrt{g_{00}(r_R)} \Delta t_R. \quad (4.173)$$

Substituindo essas relações em (4.171), encontra-se:

$$\frac{\Delta \tau_E}{\sqrt{g_{00}(r_E)}} = \frac{\Delta \tau_R}{\sqrt{g_{00}(r_R)}},$$

$$\frac{\Delta \tau_R}{\Delta \tau_E} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_R)}{g_{00}(r_E)}}. \quad (4.174)$$

Para dois sinais de luz, em específico os de duas frentes sucessivas de uma onda eletromagnética, $\Delta\tau_E$ e $\Delta\tau_R$ são os períodos das ondas de emissão e recepção, respectivamente. Assim, a relação entre frequência de emissão e recepção será:

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_E)}{g_{00}(r_R)}}. \quad (4.175)$$

Uma vez que:

$$g_{00}(r) = \alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right),$$

então:

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{r_E}{r_L}\right)^2 \left(1 - \frac{2m_G}{r_E} + \frac{2m_G}{r_L}\right)}{\left(1 - \frac{r_R}{r_L}\right)^2 \left(1 - \frac{2m_G}{r_R} + \frac{2m_G}{r_L}\right)'}}$$

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(\frac{1 - r_E/r_L}{1 - r_R/r_L}\right) \sqrt{\frac{1 - 2m_G(1/r_E - 1/r_L)}{1 - 2m_G(1/r_R - 1/r_L)}}. \quad (4.176)$$

O redshift gravitacional z é definido de acordo com a relação [104]:

$$1 + z = \left(\frac{\nu_R}{\nu_E}\right)^{-1}.$$

Assim:

$$z = \left(\frac{1 - r_R/r_L}{1 - r_E/r_L}\right) \sqrt{\frac{1 - 2m_G(1/r_R - 1/r_L)}{1 - 2m_G(1/r_E - 1/r_L)}} - 1.$$

Considerando termos de primeira ordem em m_G e r_L^{-1} , encontra-se:

$$z \approx \left(\frac{m_G}{r_E} - \frac{r_R}{r_L}\right) \left(1 - \frac{r_E}{r_R}\right). \quad (4.177)$$

Um caso de bastante interesse físico é aquele em que o raio de observação é muito maior que o raio de emissão, como nas observações espectrográficas de fenômenos de emissão de objetos astronômicos muito afastados. Nesse caso, o redshift será:

$$z \approx \frac{m_G}{r_E} - \frac{r_R}{r_L}. \quad (4.178)$$

Nota-se que a expressão (4.178) pode dar origem à *blueshift*, mesmo nos casos em que $r_E < r_R$. Porém, nos casos onde $m_G \ll r_E \ll r_R \ll r_L$ (fenômenos afastados do horizonte de Schwarzschild, escala de Lyra atuado como perturbações no espaço-tempo de Schwarzschild e raio de observação maior que o raio de emissão), sempre teremos z positivo, o que leva de fato à previsão de *redshifts*.

4.5.1.2 Singularidades e Estrutura Causal

Na seção anterior, foram obtidas as soluções para as componentes g_{00} e g_{11} da métrica e para a função de escala ϕ . Foi possível encontrar uma solução tipo Schwarzschild onde as componentes g_{00} e g_{11} respeitam o vínculo $g_{00}g_{11} = -1$. Em relação à solução esfericamente simétrica da gravitação LyST, porém, essa solução apresenta particularidades que despertam interesse e demandam um estudo mais aprofundado. Em primeiro lugar, o coeficiente métrico g_{00} se anula, não só no raio de Schwarzschild r_s , mas também em um valor de raio r_L . A grosso modo, essa característica aparenta indicar uma solução com múltiplos horizontes. Dessa forma, essa seção visa estudar mais a fundo esses conceitos, procurando determinar se existem singularidades físicas e, se sim, qual a sua natureza.

Um primeiro estudo de interesse é a determinação da distorção dos cones de luz, o que pode ser feito através do estudo das geodésicas tipo-luz. Entretanto, não é preciso adentrar na obtenção das equações das geodésicas, uma vez que o interesse reside apenas na determinação do movimento radial. Um cone de luz local é definido pelo anulamento do elemento de linha:

$$ds^2 = \phi^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0,$$

que corresponde às geodésicas de partículas não massivas. Mantendo o foco em movimentos radiais, tal que $d\theta = d\varphi = 0$, tem-se:

$$\alpha(r) dt^2 - \alpha^{-1}(r) dr^2 = 0,$$

o que leva à:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \alpha^{-1}(r). \quad (4.179)$$

Com a solução para $\alpha(r)$ dada na Eq. (4.75), encontra-se:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^{-2} \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right)^{-1}. \quad (4.180)$$

Conforme já comentado, para regiões muito distantes da fonte ($r \gg r_L$ e $r \gg r_s$) o espaço-tempo não tende a Minkowski, mas sim a de-Sitter ou anti-de-Sitter. Essa é uma característica que influencia diretamente na propagação radial de feixes luminosos, visto que:

$$\frac{dt}{dr} \neq 1$$

longe da fonte.

A solução para a Eq. (4.180) é:

$$t_{\pm}(r) = c_1 \pm \left[\frac{r}{\left(1 - \frac{r}{r_L}\right)} + 2m_G \ln \left(\frac{r}{1 - \frac{r}{r_L}} - 2m_G \right) \right]. \quad (4.181)$$

Para se certificar, é necessário conferir se existem divergências no valor de invariantes do campos gravitacional nesses pontos. O invariante mais simples que se pode pensar é o escalar de curvatura R . Entretanto, no caso das soluções de vácuo, o traço das equações de Einstein mostra que $R = 0$ em todo o espaço, o que inviabiliza a utilização de R para essa análise. Alternativamente, pode-se utilizar o *escalar de Kretschmann*, definido por [109]:

$$K = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta},$$

para esse fim. Utilizando as Eqs. (3.9) juntamente com as Eqs. (4.20), pode-se mostrar, após uma manipulação algébrica, que o escalar de Kretschmann será:

$$K = \frac{12r_s^2}{r^6} \frac{\left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^6}{\left(1 - \frac{r_s}{r_L}\right)^2}. \quad (4.182)$$

Nota-se que $K \simeq 48M^2/r^6$ no caso em que $r_L \rightarrow \infty$. No raio $r = r_s$, verifica-se que o *escalar de Kretschmann* é finito, o que leva a concluir que a divergência no raio de Schwarzschild r_s indicada pela Eq. (4.180), assim como no caso da Relatividade Geral, não se origina de uma singularidade essencial, e, por isso, pode ser removida através de uma escolha adequada de referencial. Entretanto, no ponto em que $r \rightarrow r_L$, o invariante de Kretschmann vai a zero. Para que esse ponto seja interpretado com maior clareza, pode-se estudar o que ocorre com um partícula em movimento radial de queda livre.

4.5.2 Potencial Efetivo

De forma análoga ao que foi feito na seção 4.4.2, pode-se escrever a Eq. (4.161c) em termos de um potencial efetivo. Partindo da equação referida, pode-se escrever:

$$\frac{m_G^2}{h^2} \phi^4 \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{m_G^2}{b^2}, \quad (4.183)$$

onde foi definida a quantidade:

$$b := \frac{h}{k}, \quad (4.184)$$

e o potencial efetivo:

$$V_{\text{eff}}(r) := \frac{m_G^2 \alpha}{r^2} \quad (4.185)$$

A equação de movimento será:

$$\dot{r} = \pm \frac{h}{m_G} \phi^{-2} \sqrt{\frac{m_G^2}{b^2} - V_{\text{eff}}(r)} \quad (4.186)$$

Em muitos casos, uma solução adequada para a Eq. (4.186) deve estabelecer a relação entre a coordenada radial r e a coordenada azimutal φ na geodésica nula. Portanto,

convém reescrevê-la em termos da derivada de r com respeito a φ :

$$\dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{h\varphi^{-2}}{m_G} \sqrt{\frac{m_G^2}{b^2} - V_{\text{eff}}(r)}.$$

Pela Eq. (4.161b), sabe-se que $\varphi^2 r^2 \dot{\varphi} = h$. Dessa forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{1}{m_G} \sqrt{\frac{m_G^2}{b^2} - V_{\text{eff}}(r)} \quad (4.187)$$

Agora que já se conhece como resolver um problema de movimento geodésico nulo com simetria esférica via utilização de potencial efetivo, é preciso determinar as informações físicas que essa quantidade pode fornecer. Expandindo (4.185) de acordo com (4.75), encontra-se:

$$V_{\text{eff}}(r) := \frac{m_G^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m_G}{r}\right) + \frac{2m_G^3}{r_L^3} + \frac{m_G^2}{r_L^2} \left(1 - \frac{6m_G}{r}\right) - \frac{2m_G^2}{r_L r} \left(1 - \frac{3m_G}{r}\right). \quad (4.188)$$

Definindo-se momentaneamente as quantidades relativas:

$$\rho := \frac{r}{m_G} \quad \text{e} \quad \rho_L := \frac{r_L}{m_G}, \quad (4.189)$$

obtem-se:

$$V_{\text{eff}}(\rho) := \frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{2}{\rho}\right) + \frac{2}{\rho_L^3} + \frac{1}{\rho_L^2} \left(1 - \frac{6}{\rho}\right) - \frac{2}{\rho_L \rho} \left(1 - \frac{3}{\rho}\right). \quad (4.190)$$

As possíveis diferentes famílias de potencial se distinguem apenas pelo valor da razão entre m_G e r_L . A Fig. 4.14 traz algumas curvas do potencial (4.190) com diferentes valores de ρ_L , tanto positivos quanto negativos. Verifica-se que, no caso de $\rho_L > 0$, a Eq. (4.190) apresenta um ponto de máximo local à esquerda, um ponto de mínimo local à direita e, para $\rho_L \rightarrow \infty$, a curva tende a um valor constante dado por:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{\rho_L^2} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right). \quad (4.191)$$

Os pontos de máximo e mínimo locais são obtidos resolvendo-se a relação:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = 0 \quad (4.192)$$

cujas soluções são dadas por:

$$\rho_- = \frac{3}{1 + 3/\rho_L} \quad \text{e} \quad \rho_+ = \rho_L. \quad (4.193)$$

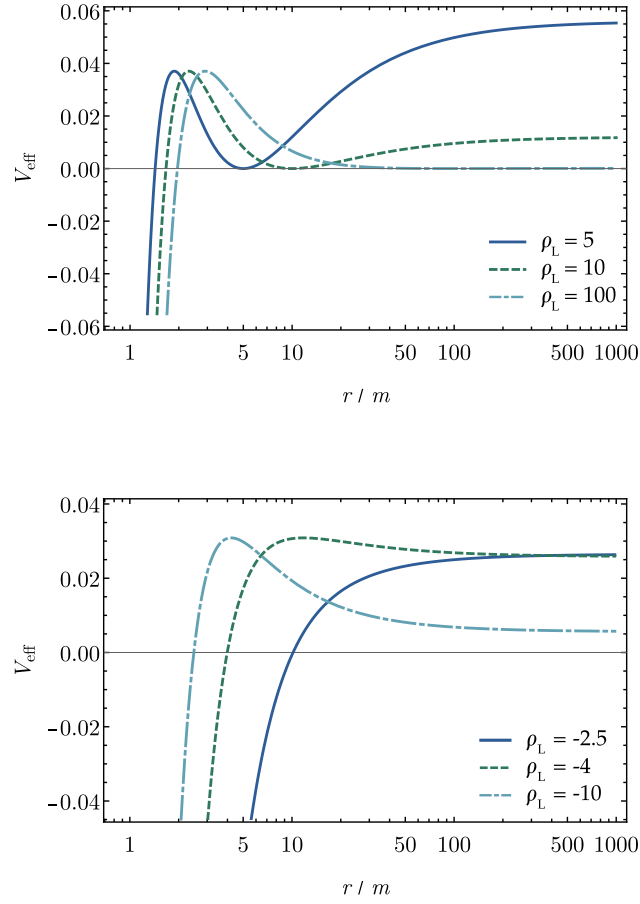


Figura 4.14 – Potencial efetivo para o movimento de fótons considerando-se valores positivos e negativos de ρ_L .

Calculando-se a segunda derivada, pode-se caracterizar cada um desses pontos extremos. No caso de ρ_- :

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\rho^2} \right|_{\rho_-} = -\frac{2}{81m_G^2} (1 + 3m_G/r_L)^4 < 0,$$

o que mostra que ρ_- é um ponto de máximo para valores finitos de m_G e r_L . Por sua vez, para ρ_+ , encontra-se:

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\rho^2} \right|_{\rho_+} = \frac{2m_G^2}{r_L^4} > 0,$$

o que leva a concluir que ρ_+ é um ponto de máximo. Dessas relações, pode-se distinguir três tipos básicos de potenciais de acordo com a presença dos pontos de máximo e mínimo:

1. se $-3 < \rho_L < 0$, não existem valores finitos de máximo e mínimo locais na região dado por $\rho > 0$;
2. se $\rho_L < -3$, V_{eff} o apresenta apenas o ponto de máximo, dado em ρ_- ;

3. se $\rho_L > 0$, V_{eff} apresenta máximo e mínimo locais .

Com eles, pode-se tecer algumas importantes observações. Na seção 4.3, foram verificadas diferentes classes de soluções esfericamente simétricas. Destas, a classe 2 (onde $-2 < \rho < 0$) foi negligenciada haja vista sua inadequação com fenômenos físicos (pois esta culmina no anulamento dos coeficientes métricos). Sendo assim, existe um estreito intervalo dado por $-3 < \rho_L < -2$ onde o potencial efetivo de fótons não apresenta pontos de máximo ou mínimos para valores positivos da coordenada radial.

Para os casos em que $\rho_L > 0$, o potencial no ponto de mínimo $\rho_+ = \rho_L$ será sempre zero:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\rho_L) &= \frac{1}{\rho_L^2} \left(1 - \frac{2}{\rho_L}\right) + \frac{2}{\rho_L^3} + \frac{1}{\rho_L^2} \left(1 - \frac{6}{\rho_L}\right) - \frac{2}{\rho_L^2} \left(1 - \frac{3}{\rho_L}\right) \\ &= \frac{1}{\rho_L^2} - \frac{2}{\rho_L^3} + \frac{2}{\rho_L^3} + \frac{1}{\rho_L^2} - \frac{6}{\rho_L^3} - \frac{2}{\rho_L^2} + \frac{6}{\rho_L^3} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.194}$$

Já nos casos onde V_{eff} apresenta um máximo local, que será designado aqui por V_{max} , verifica-se que o valor desse máximo é independente de ρ_L . De fato:

$$V_{\text{max}} := V_{\text{eff}}(\rho_-) = \frac{1}{\rho_-^2} \left(1 - \frac{2}{\rho_-}\right) + \frac{2}{\rho_-^3} + \frac{1}{\rho_-^2} \left(1 - \frac{6}{\rho_-}\right) - \frac{2}{\rho_- \rho_-} \left(1 - \frac{3}{\rho_-}\right),$$

$$V_{\text{max}} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{\rho_L^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{\rho_L} - \frac{2}{3^2 \rho_L} - \frac{2}{\rho_L^3} - \frac{4}{3 \rho_L^2} + \frac{2}{\rho_L^3} - \frac{1}{\rho_L^2} - \frac{6}{\rho_L^3} + \frac{2}{\rho_L^2} + \frac{6}{\rho_L^3},$$

$$V_{\text{max}} = \frac{1}{27}. \tag{4.195}$$

Pode-se observar tipos distintos de comportamentos de acordo com o valor constante (4.191) ao qual V_{eff} tende no infinito. No caso limite, o máximo local é igual ao valor assintótico:

$$\frac{1}{\rho_L^2} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) = \frac{1}{27}. \tag{4.196}$$

Essa equação pode ser reorganizada como $\rho_L^3 - 27\rho_L - 54 = 0$ e apresenta duas raízes reais:

$$\rho_L = -3 \quad \text{e} \quad \rho_L = 6. \tag{4.197}$$

Assim, se $0 < \rho_L < 6$ o máximo local não será um máximo global. Nesse caso, a barreira não será suficiente para impedir a captura de uma partícula vinda do infinito. Por outro

lado, se $\rho_L > 6$, os movimentos geodésicos de partículas vindas do infinito podem ser uma captura ou desvio hiperbólico, de acordo com o valor de b .

Com a distinção dos possíveis perfis para V_{eff} , que estão ilustrados na Fig. 4.15, percebe-se que a natureza dos movimentos em geodésicas nulas não diferem das geodésicas tipo-tempo. Nessa figura, as linhas horizontais representam movimentos com um valor fixo do parâmetro b e os números representam os seguintes tipos de movimentos:

1. Captura gravitacional:

$$\frac{m_G^2}{b^2} > \max \{V_{\text{max}}, V_{\text{eff}}(\infty)\}; \quad (4.198)$$

2. Movimento hiperbólico (espalhamento):

$$\frac{1}{\rho_L^2} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) < \frac{m_G^2}{b^2} < \frac{1}{27} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \rho_L < -3 & ; \text{ ou} \\ \rho_L > 6 & . \end{cases} \quad (4.199)$$

3. Órbitas ligadas:

$$\begin{cases} 0 < \frac{m_G^2}{b^2} < V_{\text{eff}}(\rho_-) & \text{se } 0 < \rho_L < 6, \\ 0 < \frac{m_G^2}{b^2} < \frac{1}{\rho_L^2} \left(1 + \frac{2}{\rho_L}\right) & \text{se } \rho_L > 6. \end{cases} \quad (4.200)$$

4. Órbitas circulares estáveis (*não aplicável*);
5. Órbitas circulares instáveis;
6. Movimento próximo ao horizonte .

Na sequência, vamos detalhar as características das trajetórias tipo-luz assim como foi feito na Seção 4.4.3 para trajetórias de partículas massivas. Entretanto, no caso de geodésicas tipo-luz, não se pode configurar um movimento radial pleno, visto que, conforme mostra a Eq. (4.194), o ponto de mínimo local leva ao anulamento do potencial. Assim sendo, verifica-se por (4.183) que não existe uma solução finita para $\dot{r} = 0$. Além disso, serão consideradas as condições de $2m_G \ll r \ll |r_L|$.

4.5.3 Captura Gravitacional de Fótons

No caso específico em que $-3 < \rho_L < -2$, onde o potencial não apresenta máximos locais, o movimento de captura gravitacional é inevitável. Por outro lado, se $0 < \rho_L < 6$ ou $\rho_L < -3$, a condição suficiente para o movimento de captura gravitacional é a de que a razão m_G^2/b^2 seja maior que o máximo local $V_{\text{eff}}(\rho_-)$. Conforme a Eq. (4.195), essa constatação implica a definição de um valor limitante para o parâmetro de impacto, dada por:

$$b_{\text{cap}} = \sqrt{27}m_G. \quad (4.201)$$

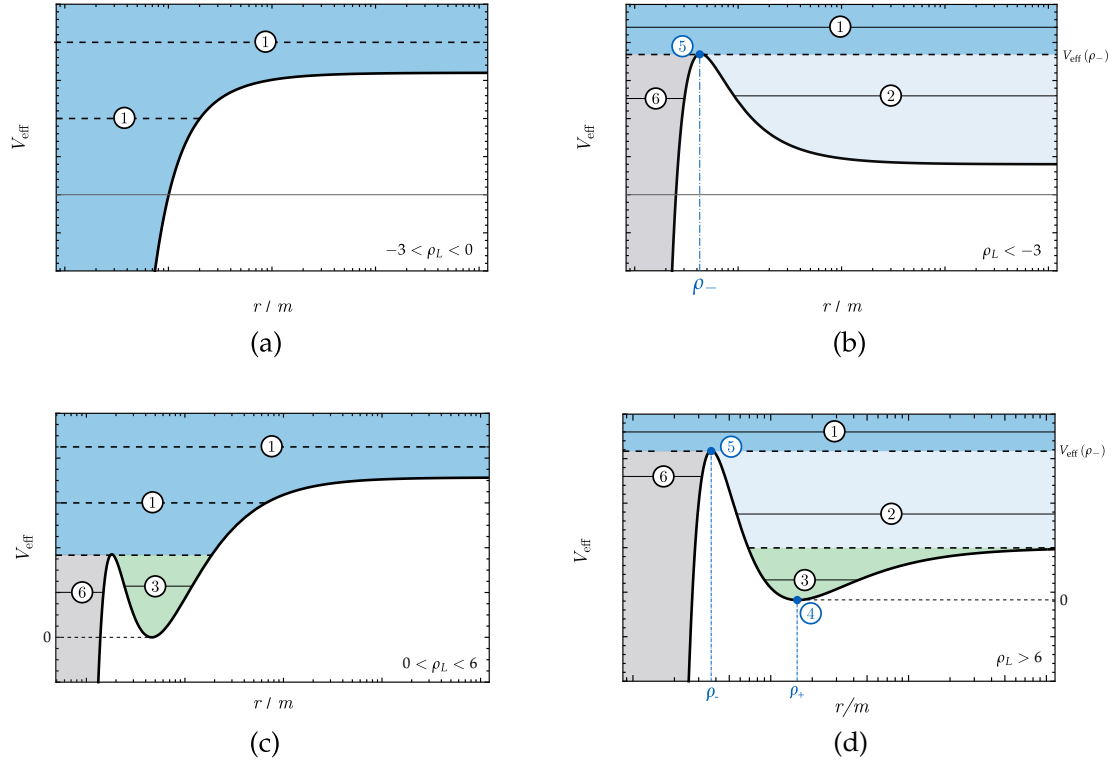


Figura 4.15 – Quatro famílias de potencial efetivo de partículas não massivas, caracterizando os diferentes tipos de movimentos orbitais. As linhas horizontais representam valores constantes e energia.

Dessa forma, a consideração dessa condição na equação de movimento (4.183) faz com que o sinal de \dot{r} ao longo da trajetória não se altere:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{1}{m_G} \sqrt{\frac{m_G^2}{b^2} - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (4.202)$$

Assim, uma vez que as condições iniciais sejam tais que $dr/d\varphi < 0$, o movimento de captura gravitacional ocorre.

Condições Iniciais

Para abordagem do problema, deve-se tomar condições iniciais onde o espaço-tempo é quasi-Minkowski. Para isso, é preciso manter os termos até segunda ordem referentes às condições $m_G \ll r$ e $r \ll r_L$ no potencial efetivo (4.188):

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{m_G^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m_G}{r}\right) + \frac{2m_G^3}{r_L^3} + \frac{m_G^2}{r_L^2} \left(1 - \frac{6m_G}{r}\right) - \frac{2m_G^2}{r_L r} \left(1 - \frac{3m_G}{r}\right),$$

i.e.

$$V_{\text{eff}}(r) \approx \frac{m_G^2}{r^2}. \quad (4.203)$$

Portanto, a equação de movimento (4.187) pode ser aproximada por:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}}. \quad (4.204)$$

Para encontrar a solução dessa equação diferencial, define-se uma variável $u := 1/r$, tal que:

$$\frac{du}{d\varphi} = \pm \frac{1}{b} \sqrt{1 - b^2 u^2}.$$

As condições iniciais devem ser tomadas num valor de coordenada radial r_0 , tal que $m_G \ll r_0 \ll r_L$. Tomando a condição de que $\varphi = 0$ para $u_0 = 1/r_0$, obtém-se:

$$\int_0^\varphi d\tilde{\varphi} = \pm b \int_{u_0}^u \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{1 - b^2 \tilde{u}^2}},$$

$$\frac{b}{r} = \pm \sin \left(\varphi + \arcsin \frac{b}{r_0} \right).$$

Uma condição extra que será adotada é a de que b seja negligenciável em comparação a r_0 . Assim:

$$\frac{b}{r} = \pm \sin \varphi. \quad (4.205)$$

Dessa relação, percebe-se que b é o valor da coordenada cartesiana y na região $2m_G \ll r \ll r_L$, onde o campo gravitacional é fraco. Essa constatação leva a concluir que, como esperado, b é o parâmetro de impacto da trajetória. Assim, as soluções procuradas são obtidas integrando-se a Eq. (4.202) com a condição inicial de que $y \rightarrow b$ para φ_0 suficientemente pequeno.

4.5.4 Movimento Hiperbólico

O movimento hiperbólico de fótons caracteriza um processo de espalhamento, onde o feixe luminoso se aproxima da fonte gravitacional com parâmetro de impacto $b > b_{\text{cap}}$, cf. Eq. (4.201), até um raio de máxima aproximação r_{min} de onde a partícula é desviada e passa a se afastar. A configuração geométrica é similar ao estudo do espalhamento de partículas massivas realizado na seção 4.4.4. O ponto de máxima aproximação r_a ocorre justamente quando o argumento da raiz quadrada de (4.187) se anula:

$$\frac{m_G^2}{b^2} = V_{\text{eff}}(r_a). \quad (4.206)$$

O valor final da coordenada angular azimutal é $\pi + \alpha$, conforme pode ser inferido da Fig. 4.7. Uma vez que a equação de movimento de aproximação (Eq. (4.186) com sinal negativo) e a de afastamento (mesma equação com sinal positivo) são equivalentes a menos de um sinal, o movimento é simétrico e, conseqüentemente, o valor da coordenada

angular no ponto de máxima aproximação será $\varphi = (\pi + \alpha) / 2$.

As condições iniciais de um movimento hiperbólico como esse são tomadas em um valor radial onde $m_G \ll r \ll r_L$ (região que tende a Minkowski) tomando $y = b$ e $\varphi = \varphi_0$, onde $\varphi_0 \ll 1$. Integrando as equações de movimento desde um ponto inicial (r_0, φ_0) até o ponto de máxima aproximação $(r_a, \pi/2 + \alpha/2)$, onde $r_a \ll r_0$, obtém-se:

$$\int_{\varphi_0}^{(\pi+\alpha)/2} d\varphi = -m_G \int_{r_0}^{r_a} \frac{1}{\sqrt{\frac{m_G^2}{b^2} - V_{\text{eff}}(r)}} \frac{dr}{r^2},$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} - \varphi_0 = m_G \int_{r_a}^{r_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{m_G^2}{b^2} - V_{\text{eff}}(r)}} \frac{dr}{r^2}. \quad (4.207)$$

Alguns comentários devem ser realizados nesse ponto. Em primeiro lugar, r_a é determinado de acordo com a Eq. (4.206). Apesar de esta ser uma afirmação bastante simples, sua execução não é tão trivial. Expandindo o potencial efetivo nessa relação, encontra-se:

$$\frac{m_G^2}{b^2} = \frac{m_G^2}{r_a^2} \left(1 - \frac{2m_G}{r_a}\right) + \frac{2m_G^3}{r_L^3} + \frac{m_G^2}{r_L^2} \left(1 - \frac{6m_G}{r_a}\right) - \frac{2m_G^2}{r_L r_a} \left(1 - \frac{3m_G}{r_a}\right), \quad (4.208)$$

que é uma equação de terceira ordem em r_a . Isso sem contar a integral que deve ser resolvida em (4.207) expandindo-se a expressão de $V_{\text{eff}}(r)$. Nos casos onde um resultado acurado é imprescindível, a forma mais eficiente de ser resolver o problema é numericamente. Essa mesma abordagem já foi utilizada na seção 4.4.4 para o caso de partículas massivas.

4.6 Comentários Finais

O estudo das soluções esfericamente simétricas da teoria LyST é bastante esclarecedor. Como principal resultado, destacamos que os fenômenos gravitacionais em nível de sistema solar não invalidam a teoria. Para chegarmos nessa conclusão, obtivemos uma solução tipo-Schwarzschild para LyST que depende da versão em Lyra do raio de Schwarzschild r_s um parâmetro único r_L , com unidades de comprimento. Com essa solução, estudamos as geodésicas no espaço-tempo de Lyra, donde conseguimos mostrar que, no limite de campos fracos e velocidades não relativísticas, a Lei de Gravitação Universal permanece válida. O parâmetro r_L só passa a ter contribuição a partir da segunda ordem de aproximação, situação em que acrescenta um termo repulsivo $3r_s/r_L^2$ e um termo atrativo $-3r/r_L^2$, linear com a distância. Como são contribuições de segunda ordem de r_L , não são relevantes em nível de sistema solar, mas podem ter contribuições significativas em escalas mais amplas, como em fenomenologia extragaláctica e cosmologia. Com respeito a testes relativísticos, mais especificamente à precessão do periélio de mercúrio, a teoria LyST prevê o mesmo resultado da Relatividade Geral dentro de aproximações em

primeira ordem.

As soluções esfericamente simétricas não são assintoticamente planas (assim como a solução de Schwarzschild com constante cosmologia da RG). Elas se dividem em três classes de acordo com o valor do parâmetro r_L . Dentre essas classes, uma delas é de menor relevância física visto que retorna valores negativos para os coeficiente métricos para qualquer valor da coordenada r . Essa característica faz com que os cones de luz sejam invertidos, inviabilizando o conceito de causalidade no espaço-tempo como bem se conhece. A Classe 1 de solução é particularmente interessante pois apresenta duas singularidades: uma em r_s e outra em r_L . Verificamos que a singularidade em r_s é aparente, ou seja, pode ser removida com uma troca de referencial, mas a singularidade em r_L é real. Assim, as regiões de $r < r_L$ e $r > r_L$ não podem ter contato causal. Nesse cenário, como os experimentos mostram que r_s deve ser próximo de $2MG$, então o parâmetro r_L deve ser bastante grande em relação a r_s (visto que aparece com potências negativas nas equações). Como consequência, $r_L > r_s$ e, por conta da ausência de contato causal comentada acima, r_L seria o maior raio para os eventos em contato causal; ou seja, o tamanho do universo. No caso da Classe 2, temos uma estrutura causal similar ao caso da solução de Schwarzschild com constante cosmológica.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Nesse trabalho, fizemos uma recapitulação histórica do desenvolvimento das teorias de gravitação até chegarmos nas teorias escalares-tensoriais (Capítulo 1). Vimos que uma família de propostas de teorias alternativas à Relatividade Geral é aquela onde se modificam algumas das hipóteses geométricas adotadas. Nesse cenário, apresentamos a proposta de alteração de Lyra, que basicamente consiste em reescalonar a definição dos vetores da base canônica através de uma função de escala ϕ . Com essa definição, temos um novo conceito de referencial que agora depende, além das coordenadas, também de uma função de escala. Em uma comparação com a geometria riemanniana, essa alteração dá origem a reformulações em praticamente todos os entes geométricos necessários à construção das teorias geométricas de gravitação, o que nos levou à realização de um estudo geral sobre a variedade de Lyra, derivando as quantidades necessárias a partir de primeiros princípios (Capítulo 2).

Na variedade de Lyra, supondo um tensor geral T de rank (k, l) , as suas componentes definidas num referencial de Lyra (x^μ, ϕ) se relacionam com as componentes em um novo referencial $(\bar{x}^\mu, \bar{\phi})$ através da seguinte lei de transformação:

$$\bar{T}_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(\bar{x}) = \left(\frac{\bar{\phi}(\bar{x})}{\phi(x)} \right)^{k-l} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial \bar{x}^{\beta_l}} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}(x). \quad (5.1)$$

Note a presença do fator $(\bar{\phi}/\phi)^{k-l}$ na expressão, o que a diferencia da lei de transformação dos tensores na variedade riemanniana. Por conta dessa lei de transformação, o elemento de linha invariante no espaço-tempo de Lyra deve ser definido com um fator de escala quadrático:

$$ds^2 = \phi^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.2)$$

o que garante a invariância de ds^2 sob mudanças de referencial. Esse é um ponto bastante importante que deve ser contabilizado na construção das teorias de gravitação em Lyra. Outro ponto relevante está na expressão para a conexão afim, que apresenta um termo adicional dependente apenas da escala:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\beta = \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} M_{\nu\lambda}^\beta + \frac{1}{\phi} \left(\delta_\nu^\beta \nabla_\lambda \phi - g_{\nu\lambda} \nabla^\beta \phi \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\beta} (\tau_{\lambda\mu\nu} - \tau_{\nu\lambda\mu} - \tau_{\mu\lambda\nu}), \quad (5.3)$$

onde M é o tensor de compatibilidade métrica. Essa é a expressão mais geral para a co-

nexão em Lyra e pode ser simplificada de acordo com as hipóteses geométricas adotadas.

Em Lyra, temos uma expressão distinta para a derivação covariante. As componentes da derivada covariante de Lyra de um vetor A^μ , por exemplo, são dadas por:

$$\nabla_\nu A^\mu = \frac{1}{\phi} \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda. \quad (5.4)$$

Nota-se que o primeiro termo do lado direito, referente a derivação ordinária, é escalonado pelo fator ϕ^{-1} . Outro ponto é que, em geral, os símbolos da conexão não apresentam simetria definida nos índices inferiores. Na convenção utilizada nesse trabalho, o índice associado à derivação é o segundo índice da posição inferior de $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$.

Por fim, vamos destacar as propriedades de duas grandezas geométricas obtidas a partir da conexão afim: curvatura e torção. A curvatura, definida em Lyra pela expressão:

$$R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{\phi^2} \partial_\mu (\phi \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}) - \frac{1}{\phi^2} \partial_\nu (\phi \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}) + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\nu}, \quad (5.5)$$

apresenta uma dependência explícita da escala ϕ , além da dependência implícita contida na definição de $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$. Esse é um ponto significativo que diferencia a expressão da conexão em Riemann. Além disso, a torção

$$\tau^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \phi^{-1} (\nabla_\mu \phi \delta^\alpha_\nu - \nabla_\nu \phi \delta^\alpha_\mu) \quad (5.6)$$

não está mais associada unicamente à parte antissimétrica da conexão, o que é algo que o leitor deve ter em mente para evitar confusões nas interpretações dos resultados oriundos de teorias na variedade de Lyra.

Espaço-Tempo de Lyra

No espaço-tempo de Lyra, a expressão para as geodésicas também é significativamente diferente das geodésicas riemannianas. Como padrão, a geodésica tem uma parte similar ao caso riemanniano acrescido de um termo dependente de escala:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \nabla_\mu \phi \delta^\alpha_\nu + \nabla_\nu \phi \delta^\alpha_\mu - \nabla_\rho \phi g^{\alpha\rho} g_{\mu\nu} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (5.7)$$

Da mesma forma se apresentam as curvas autoparalelas em Lyra:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \left(\phi \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \nabla_\nu \phi \delta^\alpha_\mu \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (5.8)$$

Nota-se que, diferentemente do espaço-tempo da Relatividade Geral, não existe equivalência entre as curvas autoparalelas e as geodésicas no espaço-tempo geral de Lyra. Contudo, pode-se impor essa equivalência como uma hipótese geométrica adicional. A

condição física para suportar essa hipótese é $M^{\mu}_{\alpha\beta} = \tau_{(\alpha\beta)}^{\mu}$.

Na proposta de se utilizar a variedade de Lyra como modelo dinâmico do espaço-tempo, é preciso ser cuidadoso na definição dos graus de liberdade que descreverão os sistemas físicos. A 4-velocidade u^{μ} de uma partícula deve ser definida com a escala ϕ para se comportar como um vetor de Lyra:

$$u^{\mu} = \phi \frac{dx^{\mu}}{d\tau}, \quad (5.9)$$

onde τ é o tempo próprio da partícula. Esse detalhe culmina diretamente em uma nova expressão para a equação de Hamilton-Jacobi:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial S}{\partial x^{\nu}} = m^2 \phi^2, \quad (5.10)$$

donde é possível obter as geodésicas métricas através do método de Hamilton-Jacobi.

Teoria LyST

Com a definição dos entes geométricos, pode-se utilizar a variedade de Lyra como modelo do espaço-tempo. Para isso, é necessário definir as hipóteses geométricas do modelo e formular um princípio variacional responsável por estabelecer a dinâmica tempo-espacial. Construímos uma teoria de gravitação baseada nas hipóteses de compatibilidade métrica ($M^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$) e ausência de torção ($\tau^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$) que chamamos de LyST. Nota-se que essas condições satisfazem naturalmente o requisito de autoparalelismo das curvas geodésicas (assim como no caso de Relatividade Geral). Sob essas hipóteses, a expressão para a conexão da teoria LyST será:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{\phi} (\delta^{\alpha}_{\nu} \nabla_{\mu} \phi - g_{\mu\nu} \nabla^{\alpha} \phi) \quad (5.11)$$

e a curva geodésica (ou curva paralela, que agora são equivalentes) fica determinada pela expressão:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \nabla_{\mu} \phi \delta^{\alpha}_{\nu} + \nabla_{\nu} \phi \delta^{\alpha}_{\mu} - g_{\mu\nu} \nabla^{\alpha} \phi \right) \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0. \quad (5.12)$$

Por fim, foi proposta uma ação equivalente em Lyra à ação de Einstein-Hilbert com um termo de matéria:

$$S = \int d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \left[R(g, \partial g, \phi, \nabla \phi, \nabla^2 \phi) - \frac{1}{16\pi G} \mathcal{L}_m(\psi_k, \partial \psi_k, g, \partial g, \phi, \nabla \phi) \right]. \quad (5.13)$$

Note que R é o escalar de curvatura de Lyra que depende de ϕ e suas primeiras e segundas derivadas, além de g e ∂g . Da mesma forma, \mathcal{L}_m é uma densidade de lagrangiana de

matéria invariante de Lyra que, por hipótese, depende de ϕ , $g_{\mu\nu}$, dos campos de matéria ψ_k e as suas derivadas. Além disso, temos a presença do fator ϕ^4 no elemento infinitesimal de volume que garante a invariância da ação sob transformações de Lyra. Portanto, os campos fundamentais a serem considerados no princípio variacional são a métrica $g_{\mu\nu}$, a escala ϕ e os campos de matéria ψ_i . Tomando variações com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, encontramos:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + 2\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - 2\phi g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\lambda\phi + 3g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi = -8\pi G\phi^2T_{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

onde $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ e \mathcal{R} são o tensor de Ricci e escalar de curvatura calculados com o símbolo de Christoffel. Por sua vez, ao calcular as variações com respeito a ϕ , obtém-se:

$$\mathcal{R} + 6\phi\nabla_\lambda\nabla^\lambda\phi - 12\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi = 8\pi G\phi^2T, \quad (5.15)$$

equação esta que está completamente contida em (5.14) e pode ser obtida a partir desta pelo cálculo do traço. Verifica-se que, aplicando o limite de $\phi \rightarrow 1$ na Eq. (5.14), recuperamos a forma das equações de campo de Einstein.

Por fim, podemos consolidar a teoria pela verificação do limite newtoniano. Sob a hipótese de campos fracos e velocidades não-relativísticas (condições estas que se adéquam à grande maioria dos fenômenos observados na escala do sistema solar), podemos escrever a métrica de Lyra com um termo de correção à métrica de Minkowski ($g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) e a escala como sendo uma perturbação à unidade ($\phi = 1 + \delta\phi$), onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e $|\delta\phi| \ll 1$. Com essas considerações nas equações de campo (5.14), verifica-se que o setor temporal é o dominante e a equação de campo válida para as escalas de energia consideradas é justamente a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2}h_{00} + \delta\phi \right) \approx 4\pi G\rho. \quad (5.16)$$

Efetuando as mesmas considerações nas equações para a curva geodésica, verifica-se novamente que o setor mais significativo é o temporal e a equação de movimento oriunda da interação gravitacional é a de uma força conservativa:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \approx -\nabla \left(\frac{1}{2}h_{00} + \delta\phi \right), \quad (5.17)$$

onde \mathbf{x} é o 3–vetor $SO(3)$ de posição. Assim, verificamos que, em nível de equações de campo e equações de movimento, a teoria LyST tem um limite suave bem definido para a gravitação newtoniana. Esse é um indicativo de que os fenômenos observados na escala do sistema solar estão condizentes com as previsões da teoria LyST. Além do mais, as Eqs. (5.16) e (5.17) nos revelam que tanto a métrica como a escala são campos que atuam na descrição da interação gravitacional.

Simetria Esférica

Resolvendo a Equação de Killing para a isometria de rotação, obtemos a forma do elemento de linha esfericamente simétrico (vide Apêndice B). Com as hipóteses adicionais de métrica tipo-Schwarzschild estacionária, obtemos a forma da métrica:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(\alpha(r), -\frac{1}{\alpha(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (5.18)$$

onde $\alpha(r)$ é uma função radial que, junto com a função de escala $\phi(r)$, deve ser determinada pelas equações de campo LyST. Assim como demonstrado no Capítulo 4, a solução esfericamente simétrica para LyST é:

$$\alpha(r) = \left(1 - \frac{r}{r_L}\right)^2 \left(1 - \frac{2m_G}{r} + \frac{2m_G}{r_L}\right) \quad (5.19)$$

e

$$\phi(r) = \frac{1}{1 - \frac{r}{r_L}}, \quad (5.20)$$

onde $m_G := MG$ é a massa geométrica da fonte gravitacional e r_L um parâmetro com unidades de distância que contabiliza a influência da escala de Lyra nas equações. No limite de $r_L \rightarrow \infty$, recuperamos o limite da Relatividade Geral (ou seja, $\phi = 1$) e, como é de se esperar, a solução de Schwarzschild ($\alpha = 1 - 2m_G/r$). Assim, a massa geométrica deve ser uma quantidade positiva definida e esta relacionada à carga da interação gravitacional no limite newtoniano, conforme pode ser concluído da Eq. (4.73) no limite de $r_L \rightarrow \infty$. Nota-se que a solução não é assintoticamente plana, como no caso de Schwarzschild, e se assemelha à solução de Schwarzschild com constante cosmológica.

Com a solução esfericamente simétrica, tomamos o limite de campos fracos e estabelecemos termos de correção à Lei Universal de Gravitação de Newton:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{m_G}{r^2} + \frac{3}{2r_L^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2m_G} + \frac{1}{r_L}\right)} - \frac{3r}{r_L^2}. \quad (5.21)$$

Nota-se que efeitos de primeira ordem de r_L^{-1} não alteram a teoria newtoniana; ou seja, $\ddot{r} = -m_G/r^2$. Assim, a influência de Lyra deve atuar somente nos fenômenos em escalas de energia muito maiores do que aquelas do sistema solar. Considerando a contribuição em segunda ordem de r_L , temos uma aceleração repulsiva constante $\frac{3}{2r_L^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{r_L}\right)}$ e o termo atrativo anti-de-Sitter $-\frac{3r}{r_L^2}$, que devem ser mais relevantes em fenômenos em astrofísica extragaláctica ou cosmologia.

Nas Seções 4.4 e 4.5, com a solução esfericamente simétrica de LyST, obtivemos as expressões para as trajetórias geodésicas e estudamos diversos tipos possíveis de movimentos de partículas-teste [3]. Esse estudo visa entender a contribuição da escala de

Lyra no movimento geodésico e, com isso, servir de apoio e referência na procura de fenômenos e/ou experimentos que possam testar a teoria LyST. Nessa linha de trabalho, verificamos que a predição para a precessão do Mercúrio em LyST é a mesma que aquela obtida pela Relatividade Geral em primeira ordem de aproximação (vide a Seção 4.4.6). Esse resultado é bastante importante pois não refuta LyST. Junto com o fato de que o limite newtoniana de LyST é equivalente ao da RG, temos bastante evidência de que LyST e RG são teorias degenerescentes na escalas de energia dos fenômenos gravitacionais do sistema solar.

Próximos passos

Nesse trabalho, realizamos uma reformulação geométrica da variedade de Lyra que é bastante rica e interessante pois abre incontáveis frentes de trabalho. Propusemos a teoria LyST como um primeiro estudo de caso pois, traçando um paralelo com a Relatividade Geral em Riemann, acreditamos ser a etapa mais natural. Entretanto, existem diversas abordagens a serem estudadas que não estiveram no escopo dessa tese. Persistindo na comparação com a variedade de Riemann, temos um mar aberto de frentes de estudo, haja vista que tudo aquilo que se tem construído em Riemann pode, em teoria, ser construído em Lyra.

Em paralelo a esse trabalho, temos estudos encaminhados em algumas frentes que devem apresentar resultados em um curto prazo. De um ponto de vista teórico, estamos reconstruindo as expressões dos entes geométricos de Lyra em termos de formas diferenciais, o que nos ajudará na construção do análogo da teoria de Einstein-Cartan em Lyra. Além disso, é necessário estabelecer o procedimento de derivação covariante de grupos internos para possibilitar o acoplamento de campos de spin semi-inteiros nas teorias gravitacionais em LyST. Ademais, um estudo mais aprofundado e formal da transformação de referenciais de Lyra está em desenvolvimento. Por fim, existe a possibilidade de se explorar a generalização do equivalente teleparalelo da gravitação LyST.

Agora, sob um ponto de vista de fenomenologia física da teoria LyST, temos estudado as implicações da função de escala de Lyra na cosmologia. Nessa tarefa, devemos realizar um estudo de espaços maximalmente simétricos. Assim, poderemos descrever um espaço-tempo de Lyra com seção espacial dada como um subespaço maximalmente simétrico em acordo com o Princípio Cosmológico. Feito isso, será possível encontrar a solução das equações LyST para cosmologia e comparar suas previsões com dados de módulo de distância de supernovas. A hipótese é de que a influência de Lyra possa exercer um papel de energia escura, dada a presença de um termo repulsivo da correção em segunda ordem a gravitação newtoniana (5.21). Como uma tarefa adicional, podemos investigar a hipótese de que o termo atrativo anti-de-Sitter em (5.21) seja a explicação do problema de massa faltante em mensurações de aglomerados galácticos e nas curvas de

rotação de galáxias sem a definição de matéria escura. Dessa forma, enxergamos a teoria como interessante de um ponto de vista fenomenológicos na duas das maiores áreas de pesquisa cosmológicas atualmente: matéria e energia escura.

Apêndices

Apêndice A

Gravitação LyST: Cálculos e Observações

A.1 Tensor de Curvatura e Tensor de Ricci

No Capítulo 3, introduziu-se a teoria de gravitação na variedade de Lyra que surge quando se impõe um espaço-tempo métrico-compatível e livre de torção. Matematicamente, essas condições podem ser representadas respectivamente pelas relações:

$$M^{\mu}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{e} \quad \tau^{\mu}_{\alpha\beta} = 0,$$

onde M é o tensor de não-metricidade e τ é o tensor de torção. Aplicando essa condição na expressão (2.62) para os coeficientes da conexão afim, obtém-se a conexão da teoria LyST:

$$\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu} = \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} + \phi^{-1} \left(\delta^{\beta}_{\nu} \nabla_{\lambda} \phi - g_{\nu\lambda} \nabla^{\beta} \phi \right), \quad (\text{A.1})$$

que é a entidade básica que define as propriedades afins da variedade.

A primeira quantidade oriunda da conexão a ser abordada aqui é a curvatura, que está definida em (2.53).

$$R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{\phi^2} \partial_{\mu} \left(\phi \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \right) - \frac{1}{\phi^2} \partial_{\nu} \left(\phi \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \right) + \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}$$

Considerando (A.1) nesta equação, encontra-se:

$$\begin{aligned} R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{\phi^2} \partial_{\mu} \left[\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} + \delta^{\lambda}_{\nu} \nabla_{\alpha} \phi - g_{\alpha\nu} \nabla^{\lambda} \phi \right] - \frac{1}{\phi^2} \partial_{\nu} \left[\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} + \delta^{\lambda}_{\mu} \nabla_{\alpha} \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^{\lambda} \phi \right] + \\ &+ \frac{1}{\phi^2} \left(\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} + \delta^{\rho}_{\nu} \nabla_{\alpha} \phi - g_{\alpha\nu} \nabla^{\rho} \phi \right) \left(\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} + \delta^{\lambda}_{\mu} \nabla_{\rho} \phi - g_{\rho\mu} \nabla^{\lambda} \phi \right) + \\ &- \frac{1}{\phi^2} \left(\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} + \delta^{\rho}_{\mu} \nabla_{\alpha} \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^{\rho} \phi \right) \left(\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} + \delta^{\lambda}_{\nu} \nabla_{\rho} \phi - g_{\rho\nu} \nabla^{\lambda} \phi \right) \end{aligned}$$

Expandindo, distribuindo e reorganizando os termos, resulta:

$$\begin{aligned}
\phi^2 R^\lambda_{\alpha\mu\nu} &= \partial_\mu \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} - \partial_\nu \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} + \\
&+ \delta_\nu^\lambda \partial_\mu \nabla_\alpha \phi - \partial_\mu g_{\alpha\nu} \nabla^\lambda \phi - g_{\alpha\nu} \partial_\mu \nabla^\lambda \phi - \delta_\mu^\lambda \partial_\nu \nabla_\alpha \phi + \partial_\nu g_{\alpha\mu} \nabla^\lambda \phi + g_{\alpha\mu} \partial_\nu \nabla^\lambda \phi + \\
&+ \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} \left(\delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\mu} \nabla^\lambda \phi \right) + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} \left(\delta_\nu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi \right) + \\
&- \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} \left(\delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\nu} \nabla^\lambda \phi \right) - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \left(\delta_\mu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi \right) + \\
&+ \left(\delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\mu} \nabla^\lambda \phi \right) \left(\delta_\nu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi \right) - \left(\delta_\mu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi \right) \left(\delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\nu} \nabla^\lambda \phi \right)
\end{aligned}$$

Reconhecendo a curvatura Riemanniana $\mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu}$ e distribuindo os termos na última linha:

$$\begin{aligned}
\phi^2 R^\lambda_{\alpha\mu\nu} &= \mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu} + \delta_\nu^\lambda \partial_\mu \nabla_\alpha \phi - \partial_\mu g_{\alpha\nu} \nabla^\lambda \phi - g_{\alpha\nu} \partial_\mu \nabla^\lambda \phi + \\
&- \delta_\mu^\lambda \partial_\nu \nabla_\alpha \phi + \partial_\nu g_{\alpha\mu} \nabla^\lambda \phi + g_{\alpha\mu} \partial_\nu \nabla^\lambda \phi + \\
&+ \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} \left(\delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\mu} \nabla^\lambda \phi \right) + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} \left(\delta_\nu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi \right) + \\
&- \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} \left(\delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\nu} \nabla^\lambda \phi \right) - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \left(\delta_\mu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi \right) + \\
&+ \left(\delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\mu} \nabla^\lambda \phi \right) \delta_\nu^\rho \nabla_\alpha \phi - \left(\delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\mu} \nabla^\lambda \phi \right) g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi + \\
&- \left(\delta_\mu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi \right) \delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi + \left(\delta_\mu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi \right) g_{\rho\nu} \nabla^\lambda \phi \quad (A.2)
\end{aligned}$$

Agora, deve-se trabalhar com as derivações de $\nabla_\alpha \phi$, de modo a reescrevê-las como derivadas covariantes de ordem superior. Tomando $\partial_\mu \nabla_\alpha \phi$, verifica-se que:

$$\nabla_\mu \nabla_\alpha \phi = \frac{1}{\phi} \partial_\mu \nabla_\alpha \phi - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \nabla_\rho \phi \quad \rightarrow \quad \partial_\mu \nabla_\alpha \phi = \phi \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi + \phi \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \nabla_\rho \phi,$$

$$\partial_\mu \nabla_\alpha \phi = \left[\phi \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} \nabla_\rho \phi + \nabla_\alpha \phi \nabla_\mu \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi \right]. \quad (A.3a)$$

Fazendo o mesmo para $\partial_\nu \nabla_\alpha \phi$, $\partial_\mu \nabla^\lambda \phi$ e $\partial_\nu \nabla^\lambda \phi$:

$$\partial_\nu \nabla_\alpha \phi = \left[\phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} \nabla_\rho \phi + \nabla_\alpha \phi \nabla_\nu \phi - g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi \right], \quad (A.3b)$$

$$\partial_\mu \nabla^\lambda \phi = \left[\phi \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} \nabla^\rho \phi - \delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\lambda \phi \right], \quad (A.3c)$$

$$\partial_\nu \nabla^\lambda \phi = \left[\phi \nabla_\nu \nabla^\lambda \phi - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \nabla^\rho \phi - \delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi + \nabla_\nu \phi \nabla^\lambda \phi \right]. \quad (A.3d)$$

Substituindo-se as Eqs. (A.3) em (A.2):

$$\begin{aligned}
\phi^2 R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = & \mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} \nabla^\lambda \phi - \partial_\mu g_{\alpha\nu} \nabla^\lambda \phi + \\
& + \left[\delta_\nu^\lambda \phi \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\mu \end{smallmatrix} \right\} \delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi + \delta_\nu^\lambda \nabla_\alpha \phi \nabla_\mu \phi - \delta_\nu^\lambda g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi \right] \\
& + \left[-\delta_\mu^\lambda \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\nu \end{smallmatrix} \right\} \delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi - \delta_\mu^\lambda \nabla_\alpha \phi \nabla_\nu \phi + \delta_\mu^\lambda g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi \right] \\
& + \left[g_{\alpha\mu} \phi \nabla_\nu \nabla^\lambda \phi - \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho\nu \end{smallmatrix} \right\} g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi - g_{\alpha\mu} \delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi + g_{\alpha\mu} \nabla_\nu \phi \nabla^\lambda \phi \right] \\
& + \left[-g_{\alpha\nu} \phi \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho\mu \end{smallmatrix} \right\} g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi + g_{\alpha\nu} \delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi - g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \phi \nabla^\lambda \phi \right] \\
& + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\nu \end{smallmatrix} \right\} \left(\delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\mu} \nabla^\lambda \phi \right) + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho\mu \end{smallmatrix} \right\} \left(\delta_\nu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi \right) + \\
& - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\mu \end{smallmatrix} \right\} \left(\delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi - g_{\rho\nu} \nabla^\lambda \phi \right) - \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho\nu \end{smallmatrix} \right\} \left(\delta_\mu^\rho \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\mu} \nabla^\rho \phi \right) + \\
& + \delta_\mu^\lambda \nabla_\nu \phi \nabla_\alpha \phi - g_{\nu\mu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\alpha \phi - \delta_\mu^\lambda g_{\alpha\nu} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi + g_{\alpha\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\mu \phi + \\
& - \delta_\nu^\lambda \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi + \delta_\nu^\lambda g_{\alpha\mu} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi + g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\lambda \phi - g_{\alpha\mu} \nabla_\nu \phi \nabla^\lambda \phi
\end{aligned}$$

Muitos dos termos da expressão acima cancelam-se e a expressão com um todo se reduz à:

$$\begin{aligned}
\phi^2 R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = & \mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} \nabla^\lambda \phi - \partial_\mu g_{\alpha\nu} \nabla^\lambda \phi + \left(\delta_\nu^\lambda \phi \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi - \delta_\mu^\lambda \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi \right) + \\
& + \left[g_{\alpha\mu} \phi \nabla_\nu \nabla^\lambda \phi - g_{\alpha\nu} \phi \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi \right] + \left[g_{\alpha\nu} \delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi - g_{\alpha\mu} \delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi \right] + \\
& + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\mu \end{smallmatrix} \right\} g_{\rho\nu} \nabla^\lambda \phi - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\nu \end{smallmatrix} \right\} g_{\rho\mu} \nabla^\lambda \phi. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Agora, deve-se direcionar a atenção para as derivadas ordinárias dos coeficientes métricos a fim de reescrevê-las em termos de derivadas covariantes. Uma vez que foi considerada a condição de compatibilidade métrica ($\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = 0$), encontra-se:

$$\frac{1}{\phi} \partial_\nu g_{\alpha\mu} = \Gamma^\rho_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda}.$$

Usando (A.1):

$$\frac{1}{\phi} \partial_\nu g_{\alpha\mu} = \left[\frac{1}{\phi} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\nu \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\alpha \phi \delta_\nu^\rho - g_{\alpha\nu} \nabla^\rho \phi) \right] g_{\rho\mu} + \left[\frac{1}{\phi} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \phi \delta_\nu^\rho - g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi) \right] g_{\alpha\rho}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi} \partial_\nu g_{\alpha\mu} = & \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\nu \end{smallmatrix} \right\} g_{\rho\mu} + \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} g_{\alpha\rho} + \frac{1}{\phi} (\cancel{\nabla_\alpha \phi g_{\mu\nu}} - \cancel{g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \phi}) \\
& + \frac{1}{\phi} (\cancel{\nabla_\mu \phi g_{\alpha\nu}} - \cancel{g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi})
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\phi} \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\nu \end{smallmatrix} \right\} g_{\rho\mu} = \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} g_{\alpha\rho}.$$

Permutando os índices μ e ν e subtraindo da expressão anterior:

$$\frac{1}{\phi} \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \frac{1}{\phi} \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} g_{\rho\mu} + \frac{1}{\phi} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} g_{\rho\nu} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Com a Eq. (A.4) com a Eq. (A.5), encontra-se:

$$\begin{aligned} \phi^2 R^\lambda_{\alpha\mu\nu} &= \mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} \nabla^\lambda \phi - \partial_\mu g_{\alpha\nu} \nabla^\lambda \phi + \left[\delta_\nu^\lambda \phi \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi - \delta_\mu^\lambda \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi \right] + \\ &+ \left[g_{\alpha\mu} \phi \nabla_\nu \nabla^\lambda \phi - g_{\alpha\nu} \phi \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi \right] + \left[g_{\alpha\nu} \delta_\mu^\lambda \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi - g_{\alpha\mu} \delta_\nu^\lambda \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi \right] + \\ &+ \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\mu \end{matrix} \right\} g_{\rho\nu} \nabla^\lambda \phi - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} g_{\rho\mu} \nabla^\lambda \phi. \\ R^\lambda_{\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{\phi^2} \mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{\phi^2} \left(g_{\alpha\nu} \delta_\mu^\lambda - g_{\alpha\mu} \delta_\nu^\lambda \right) \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi + \\ &+ \frac{1}{\phi} \left[\delta_\nu^\lambda \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi - \delta_\mu^\lambda \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi + g_{\alpha\mu} \nabla_\nu \nabla^\lambda \phi - g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Tensor de Ricci

Outra quantidade fundamental no desenvolvimento da teoria de gravitação é o tensor de Ricci, dado pelo traço do tensor de curvatura de Riemann. Contraíndo os índices λ e ν na expressão (A.6), obtém-se:

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\alpha\mu\lambda} &= \frac{1}{\phi^2} \mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\lambda} + \frac{1}{\phi^2} \left(g_{\alpha\lambda} \delta_\mu^\lambda - g_{\alpha\mu} \delta_\lambda^\lambda \right) \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi + \\ &+ \frac{1}{\phi} \left[\delta_\lambda^\lambda \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi - \delta_\mu^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\alpha \phi + g_{\alpha\mu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi - g_{\alpha\lambda} \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi \right], \\ R_{\alpha\mu} &= \frac{1}{\phi^2} \mathcal{R}_{\alpha\mu} - 3g_{\alpha\mu} \frac{1}{\phi^2} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi + \\ &+ \frac{1}{\phi} \left[4\nabla_\mu \nabla_\alpha \phi - \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi + g_{\alpha\mu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi - \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi \right], \\ R_{\alpha\mu} &= \frac{1}{\phi^2} \mathcal{R}_{\alpha\mu} + \frac{2}{\phi} \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi + \frac{1}{\phi} g_{\alpha\mu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi - \frac{3}{\phi^2} g_{\alpha\mu} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Escalar de Curvatura

Por fim, vamos calcular o escalar de curvatura pelo traço do tensor de de Riemann:

$$\begin{aligned}g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\alpha} &= \frac{1}{\phi^2}g^{\lambda\alpha}\mathcal{R}_{\lambda\alpha} + \frac{2}{\phi}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\lambda\phi + \frac{1}{\phi}g^{\lambda\alpha}g_{\lambda\alpha}\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - \frac{3}{\phi^2}g^{\lambda\alpha}g_{\lambda\alpha}\nabla_\rho\phi\nabla^\rho\phi, \\R &= \frac{1}{\phi^2}\mathcal{R} + \frac{2}{\phi}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi + \frac{4}{\phi}\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - \frac{12}{\phi^2}\nabla_\rho\phi\nabla^\rho\phi, \\R &= \frac{1}{\phi^2}\mathcal{R} + \frac{6}{\phi}\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - \frac{12}{\phi^2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi\end{aligned}\tag{A.8}$$

Apêndice B

Isometria de Rotação da Teoria LyST

Em um espaço-tempo esfericamente simétrico, o tensor métrico é invariante por rotações espaciais. Em termos de coordenadas cartesianas $x^\mu = (t, x, y, z)$, as rotações espaciais podem ser escritas através de:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \left[L_{(i)} \right]^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{B.1})$$

em que L_i é o gerador da rotação em torno do i -ésimo eixo cartesiano. A expressão matricial para os geradores é:

$$L_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad L_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad L_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Nota-se ainda que as matrizes acima podem generalizadas em uma expressão para suas componentes

$$\left[L_{(i)} \right]^\mu_\nu = -\delta^{\mu k} \varepsilon_{ik\nu}, \quad (\text{B.3})$$

onde $\varepsilon_{ik\nu}$ é o símbolo totalmente antissimétrico.

Comparando a Eq.(B.1) com (2.91), considerando também os geradores (B.3), determinam-se os três campos de Killing associados a simetria de rotação:

$$\xi_{(i)}^\mu = -\delta^{\mu k} \varepsilon_{ik\nu} x^\nu \quad (\text{B.4})$$

para $i = 1, 2, 3$. É conveniente realizar uma transformação para um sistema de coordenadas adequado à simetria envolvida. Esse sistema é obviamente o esférico $\bar{x}^\mu = (\bar{t}, r, \theta, \varphi)$, onde cada ponto é definido por uma coordenada radial r , um ângulo polar θ em relação ao eixo z e um ângulo azimutal φ com respeito ao eixo x . O tempo permanece o mesmo.

As relações entre as coordenadas cartesianas e esféricas são:

$$\begin{cases} t = \bar{t} \\ x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{t} = t \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

A matriz jacobiana da transformação é

$$J_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial t} & \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} & \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ 0 & \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ 0 & -\frac{1}{r} \csc \theta \sin \varphi & \frac{1}{r} \csc \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Tendo definido a forma como se transformam as coordenadas, é preciso obter a transformação dos campos vetoriais de Killing (B.4) através de:

$$\tilde{\zeta}_{(i)}^{\mu} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \zeta_{(i)}^{\nu} = -J_{\nu}^{\mu} \delta^{\nu k} \varepsilon_{ik\lambda} x^{\lambda}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{(1)}^{\mu} &= -J_{\nu}^{\mu} \delta^{\nu 2} \varepsilon_{123} x^3 - J_{\nu}^{\mu} \delta^{\nu 3} \varepsilon_{132} x^2 = -J_{2}^{\mu} z + J_{3}^{\mu} y, \\ &= +J_{3}^{\mu} r \sin \theta \sin \varphi - J_{2}^{\mu} r \cos \theta. \end{aligned}$$

Calculando as componentes:

$$\tilde{\zeta}_{(1)}^0 = 0;$$

$$\tilde{\zeta}_{(1)}^1 = J_{3}^1 r \sin \theta \sin \varphi - J_{2}^1 r \cos \theta = r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi = 0;$$

$$\tilde{\zeta}_{(1)}^2 = J_{3}^2 r \sin \theta \sin \varphi - J_{2}^2 r \cos \theta = -\frac{1}{r} r \sin^2 \theta \sin \varphi - \frac{1}{r} r \cos^2 \theta \sin \varphi = -\sin \varphi;$$

$$\tilde{\zeta}_{(1)}^3 = J_{3}^3 r \sin \theta \sin \varphi - J_{2}^3 r \cos \theta = -\frac{1}{r} \csc \theta \cos \varphi r \cos \theta = -\cos \varphi \cot \theta.$$

Por fim, obtém-se:

$$\tilde{\zeta}_{(1)}^{\mu} = (0, 0, -\sin \varphi, -\cot \theta \cos \varphi) \quad (\text{B.7})$$

Realizando o mesmo procedimento para os outros dois campos de Killing, encontra-se:

$$\tilde{\zeta}_{(2)}^{\mu} = (0, 0, \cos \varphi, -\cot \theta \sin \varphi) \quad (\text{B.8})$$

e

$$\tilde{\zeta}_{(3)}^{\mu} = (0, 0, 0, 1). \quad (\text{B.9})$$

Uma vez obtido os campo de Killing associados a simetria de rotação, agora, deve-se impor tal isometria aos campos básicos da teoria de gravitação na variedade de Lyra, que são o escalar ϕ e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Em primeiro lugar, aplica-se a Eq. (2.93) ao campo ϕ para cada um dos 3 campos de Killing $\zeta_{(i)}^\alpha$:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \phi \zeta_{(1)}^\alpha &= 0, \\ \partial_\theta \phi (-\sin \varphi) + \partial_\varphi \phi (-\cot \theta \cos \varphi) &= 0, \\ \tan \varphi \tan \theta (\partial_\theta \phi) + \partial_\varphi \phi &= 0.\end{aligned}\tag{B.10a}$$

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \phi \zeta_{(2)}^\alpha &= 0, \\ \partial_\theta \phi (\cos \varphi) + \partial_\varphi \phi (-\cot \theta \sin \varphi) &= 0, \\ \tan \theta \partial_\theta \phi - \partial_\varphi \phi (\tan \varphi) &= 0,\end{aligned}\tag{B.10b}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \phi \zeta_{(3)}^\alpha &= 0, \\ \partial_\varphi \phi &= 0.\end{aligned}\tag{B.10c}$$

Combinando as Eqs. (B.10), observa-se que a escala não depende das coordenadas angulares. Assim $\phi(r, t)$. Contudo, para as soluções aqui requeridas, será assumido também que ϕ é estacionário, tal que:

$$\phi = \phi(r).\tag{B.11}$$

O próximo passo consiste em utilizar a Equação de Killing (2.111) para impor condições sobre as componentes do tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(t, r, \theta, \varphi) & g_{01}(t, r, \theta, \varphi) & g_{02}(t, r, \theta, \varphi) & g_{03}(t, r, \theta, \varphi) \\ g_{01}(t, r, \theta, \varphi) & g_{11}(t, r, \theta, \varphi) & g_{12}(t, r, \theta, \varphi) & g_{13}(t, r, \theta, \varphi) \\ g_{02}(t, r, \theta, \varphi) & g_{12}(t, r, \theta, \varphi) & g_{22}(t, r, \theta, \varphi) & g_{23}(t, r, \theta, \varphi) \\ g_{03}(t, r, \theta, \varphi) & g_{13}(t, r, \theta, \varphi) & g_{23}(t, r, \theta, \varphi) & g_{33}(t, r, \theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Como não está sendo imposto que o tensor métrico seja invariante de forma com respeito a um troca de escala, toma-se $\Phi = 0$ na Eq. (2.111), aplicada sobre $g_{\mu\nu}$. Assim:

$$\zeta^\lambda \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + \partial_\beta \zeta^\nu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \zeta^\mu g_{\mu\beta} = 0\tag{B.12}$$

Utilizando primeiramente (B.9), obtém-se:

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} \tilde{\zeta}^\alpha_{(3)} + \partial_\mu \tilde{\zeta}^\alpha_{(3)} g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \tilde{\zeta}^\alpha_{(3)} g_{\mu\alpha} = 0 \Rightarrow \partial_\phi g_{\mu\nu} \tilde{\zeta}^3_{(3)} = 0,$$

i.e.

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{B.13})$$

o que mostra que nenhuma componente da métrica depende do ângulo azimutal.

Restam ainda os dois campos de Killing das Eqs. (B.7) e (B.8). Ambos apresentam componentes 0 e 1 nulas. A Eq. (B.12) para esses campos se torna:

$$\partial_2 g_{\mu\nu} \tilde{\zeta}^2 + \partial_\mu \tilde{\zeta}^2 g_{2\nu} + \partial_\mu \tilde{\zeta}^3 g_{3\nu} + \partial_\nu \tilde{\zeta}^2 g_{\mu 2} + \partial_\nu \tilde{\zeta}^3 g_{\mu 3} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Com a Eq.(B.14), pode-se obter as restrições nas componentes do tensor métrico estudando combinações específicas dos índices μ e ν . Para índices $\mu = \nu = 0$:

$$\begin{cases} \partial_\theta g_{00} \tilde{\zeta}^2_{(1)} = 0 \\ \partial_\theta g_{00} \tilde{\zeta}^2_{(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial g_{00}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Portanto, por intermédio dos resultados (B.13) e (B.16), conclui-se que a componente g_{00} da métrica só pode depender de t e r .

Fixando os índices em $\mu = 0$ e $\nu = i$:

$$\begin{cases} \partial_2 g_{0i} \tilde{\zeta}^2_{(1)} + \partial_i \tilde{\zeta}^2_{(1)} g_{02} + \partial_i \tilde{\zeta}^3_{(1)} g_{03} = 0 \\ \partial_2 g_{0i} \tilde{\zeta}^2_{(2)} + \partial_i \tilde{\zeta}^2_{(2)} g_{02} + \partial_i \tilde{\zeta}^3_{(2)} g_{03} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

donde se conclui que, para $i = 1$:

$$\frac{\partial g_{01}}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{B.17})$$

Mostra-se com isso que, assim como a componente g_{00} , g_{01} não depende de coordenadas angulares.

Já para o caso em que $i = 2$ na Eq. (B.16), tem-se um sistema linear homogêneo com soluções triviais:

$$\begin{cases} \partial_\theta g_{02} \tilde{\zeta}^2_{(1)} + \partial_\theta \tilde{\zeta}^3_{(1)} g_{03} = 0 \\ \partial_\theta g_{02} \tilde{\zeta}^2_{(2)} + \partial_\theta \tilde{\zeta}^3_{(2)} g_{03} = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial g_{02}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.18})$$

e

$$g_{03} = 0; \quad (\text{B.19})$$

Por outro lado, para $i = 3$, já utilizando (B.19):

$$\begin{cases} \partial_2 g_{03} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{02} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{03} = 0 \\ \partial_2 g_{03} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(2)}^2 g_{02} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{03} = 0 \end{cases},$$

$$g_{02} = 0. \quad (\text{B.20})$$

Considerando os índices $\mu = 1$ e $\nu = j$, tem-se:

$$\begin{cases} \partial_2 g_{1j} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_1 \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{2j} + \partial_1 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{3j} + \partial_j \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{12} + \partial_j \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{13} = 0 \\ \partial_2 g_{1j} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + \partial_1 \tilde{\zeta}_{(2)}^2 g_{2j} + \partial_1 \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{3\nu} + \partial_j \tilde{\zeta}_{(2)}^2 g_{12} + \partial_j \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{13} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \partial_2 g_{1j} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_j \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{12} + \partial_j \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{13} = 0 \\ \partial_2 g_{1j} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + \partial_j \tilde{\zeta}_{(2)}^2 g_{12} + \partial_j \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{13} = 0 \end{cases}. \quad (\text{B.21})$$

Desse forma, se $j = 1$, a solução é simples uma vez que (B.7) e (B.8) não dependem da coordenada radial:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{B.22})$$

Como consequência, a componente g_{11} só dependente de r e t . Por outro lado, para $j = 2$:

$$\begin{cases} \partial_\theta g_{12} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_\theta \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{13} = 0 \\ \partial_\theta g_{12} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + \partial_\theta \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{13} = 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.23})$$

e

$$g_{13} = 0. \quad (\text{B.24})$$

Por fim, com $j = 3$, considerando que $g_{13} = 0$, conclui-se que:

$$\begin{cases} \partial_2 g_{13} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{12} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{13} = 0 \\ \partial_2 g_{13} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(2)}^2 g_{12} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{13} = 0 \end{cases},$$

$$g_{12} = 0. \quad (\text{B.25})$$

Calculando a equação de Killing para índices $\mu = \nu = 2$, encontra-se:

$$\begin{cases} \partial_2 g_{22} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{22} + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{32} + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{22} + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{23} = 0 \\ \partial_2 g_{22} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(2)}^2 g_{22} + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{32} + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(2)}^2 g_{22} + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{23} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \partial_\theta g_{22} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_\theta \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{23} + \partial_\theta \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{23} = 0 \\ \partial_\theta g_{22} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + \partial_\theta \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{23} + \partial_\theta \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{23} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \partial_\theta g_{22} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + 2\partial_\theta \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{23} = 0 \\ \partial_\theta g_{22} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + 2\partial_\theta \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{23} = 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.26})$$

e

$$g_{23} = 0. \quad (\text{B.27})$$

Restam apenas duas componentes para serem determinadas: g_{22} e g_{33} . Uma relação entre elas pode ser obtida estudando o caso de (B.14) em $\mu = 2$ e $\nu = 3$:

$$\begin{cases} \partial_2 g_{23} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{33} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{22} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{23} = 0 \\ \partial_2 g_{23} \tilde{\zeta}_{(2)}^2 + \partial_2 \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{33} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(2)}^2 g_{22} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(2)}^3 g_{23} = 0 \end{cases}$$

Como $g_{23} = 0$, então:

$$\begin{cases} \partial_\theta (-\cot \theta \cos \varphi) g_{33} + \partial_\varphi (-\sin \varphi) g_{22} = 0 \\ \partial_\theta (-\cot \theta \sin \varphi) g_{33} + \partial_\varphi (\cos \varphi) g_{22} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \csc^2 \theta \cos \varphi g_{33} - \cos \varphi g_{22} = 0 \\ \csc^2 \theta \sin \varphi g_{33} - \sin \varphi g_{22} = 0 \end{cases},$$

$$g_{33} = \sin^2 \theta g_{22} \quad (\text{B.28})$$

Por fim, considerando $\mu = \nu = 3$:

$$\partial_2 g_{33} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{23} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{33} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^2 g_{32} + \partial_3 \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{33} = 0,$$

$$\partial_\theta g_{33} \tilde{\zeta}_{(1)}^2 + 2\partial_\varphi \tilde{\zeta}_{(1)}^3 g_{33} = 0,$$

$$-\sin \varphi \partial_\theta g_{33} - 2 \cot \theta \partial_\varphi (\cos \varphi) g_{33} = 0,$$

$$-\sin \varphi \partial_\theta g_{33} + 2 \cot \theta \sin \varphi g_{33} = 0,$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = 2 \cot \theta g_{33}.$$

Resolvendo essa equação:

$$g_{33} = f(t, r) \sin^2 \theta.$$

Comparando essa equação com (B.28), conclui-se que a “constante de integração em θ ” $f(t, r)$ é justamente g_{22} , que depende apenas de t e r .

Compilando todos os resultados obtidos até agora, a forma geral do tensor métrico é:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00}(t,r) & g_{01}(t,r) & 0 & 0 \\ g_{01}(t,r) & g_{11}(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22}(t,r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{22}(t,r) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

O elemento de linha condizente com a simetria esférica é dado pela substituição de (B.29) na Eq. (2.70) para o elemento de linha ds^2 :

$$ds^2 = g_{00}(t,r) \phi^2 dt^2 + g_{11}(t,r) \phi^2 dr^2 + 2g_{01}(t,r) \phi^2 dt dr + \phi^2 g_{22}(t,r) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2].$$

É conveniente reescrever as componentes não nulas da métrica como:

$$\begin{aligned} g_{00}(t,r) &\rightarrow A(t,r) & ; & \quad g_{11}(t,r) \rightarrow -B(t,r) \\ g_{01}(t,r) &\rightarrow -C(t,r) & ; & \quad g_{22}(t,r) \rightarrow -r^2 D^2(t,r) \end{aligned}$$

Assim:

$$ds^2 = A(t,r) \phi^2 dt^2 - B(t,r) \phi^2 dr^2 - 2C(t,r) \phi^2 dt dr - D^2(t,r) \phi^2 [r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (\text{B.30})$$

Essa é a forma mais geral possível para um elemento de linha envolvendo simetria esférica na gravitação LyST. Nota-se que a parte espacial da métrica é um invariante rotacional, i.e., deve admitir o grupo de rotação $SO(3)$ como seu grupo de isometria.

A expressão (B.30) pode ser simplificada pela escolha adequada do sistema referencial. Por exemplo, define-se uma coordenada radial r' pela expressão:

$$r = \frac{r'}{D(t,r)}$$

e, com isso:

$$dr = \frac{dr'}{D} - r' \frac{(\partial_t D)}{D^2} dt - r' \frac{(\partial_{r'} D)}{D^2} dr' = \left(\frac{1}{D} - r' \frac{\partial_{r'} D}{D^2} \right) dr' - r' \frac{(\partial_t D)}{D^2} dt.$$

Consequentemente:

$$dr^2 = \left(\frac{1}{D} - r' \frac{\partial_{r'} D}{D^2} \right)^2 dr'^2 + \frac{r'^2 (\partial_t D)^2}{D^4} dt^2 - 2r' \frac{(\partial_t D)}{D^2} \left(\frac{1}{D} - r' \frac{\partial_{r'} D}{D^2} \right) dr' dt.$$

O elemento de linha será, portanto:

$$ds^2 = \phi^2 \tilde{A}(t,r) dt^2 - \phi^2 \tilde{B}(t,r) dr'^2 - 2\phi^2 \tilde{C}(t,r) dt dr' - \phi^2 r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{B.31})$$

onde foram definidas as seguintes funções:

$$\tilde{A} = A + 2Cr' \frac{(\partial_t D)}{D^2} - \frac{B r'^2 (\partial_t D)^2}{D^4};$$

$$\tilde{B} = B \left(\frac{1}{D} - r' \frac{\partial_{r'} D}{D^2} \right)^2;$$

e

$$\tilde{C} = C(t, r) \left(\frac{1}{D} - r' \frac{\partial_{r'} D}{D^2} \right) - Br' \frac{(\partial_t D)}{D^2} \left(\frac{1}{D} - r' \frac{\partial_{r'} D}{D^2} \right).$$

O termo de (B.31) envolvendo $dr' dt$ pode ser eliminado por uma redefinição de coordenadas. Considera-se um nova coordenada temporal t' que se relaciona infinitesimalmente com t e r de acordo com a equação:

$$dt = \frac{E(t, r)}{\tilde{A}(t, r)} dt' + \frac{\tilde{C}(t, r)}{\tilde{A}(t, r)} dr$$

em que $E(t, r)$ é uma função arbitrária do tempo e da coordenada radial. Nesse caso,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, r) dt^2 - 2\tilde{C}(t, r) dt dr' &= A \left(\frac{E}{\tilde{A}} dt' + \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} dr' \right)^2 - 2C \left(\frac{E}{\tilde{A}} dt' + \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} dr' \right) dr', \\ &= \frac{E^2}{\tilde{A}} dt'^2 + \frac{\tilde{C}^2}{\tilde{A}} dr'^2 + 2 \frac{E\tilde{C}}{\tilde{A}} dt' dr' - 2 \frac{E\tilde{C}}{\tilde{A}} dt' dr' - 2 \frac{\tilde{C}^2}{\tilde{A}} dr'^2, \\ &= \frac{E^2}{\tilde{A}} dt'^2 - \frac{\tilde{C}^2}{\tilde{A}} dr'^2 \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Pode-se, portanto, substituir (B.32) em (B.31). Além disso, como a coordenada temporal antiga t é função apenas de (t', r') , as funções de (t, r') podem ser escritas como funções de (t', r') :

$$ds^2 = \phi^2 \frac{E(t', r')^2}{\tilde{A}(t', r')} dt'^2 - \phi^2 \left(\frac{\tilde{C}(t', r')^2}{\tilde{A}(t', r')} + \tilde{B}(t', r') \right) dr'^2 - \phi^2 r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{B.33})$$

Chamando:

$$\alpha(t', r') \equiv \frac{E(t', r')^2}{\tilde{A}(t', r')}$$

e

$$\beta(t', r') \equiv \left(\frac{\tilde{C}(t', r')^2}{\tilde{A}(t', r')} + \tilde{B}(t', r') \right)^{-1},$$

a Eq.(B.33) se torna:

$$ds^2 = \phi^2(t, r) \alpha(t, r) dt^2 - \frac{\phi^2(t, r)}{\beta(t, r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{B.34})$$

onde se renomeou $t' \rightarrow t$ e $r' \rightarrow r$, que é nomenclatura comumente utilizada nos livros texto. A Eq. (B.34), juntamente com a hipótese de estacionariedade dará origem ao elemento de linha estacionário e esfericamente simétrico (4.1) que será utilizado ao longo do Capítulo 4.

Referências

- [1] D. K. Sen and K. A. Dunn. A scalar-tensor theory of gravitation in a modified riemannian manifold. *Journal of Mathematical Physics*, 12(4):578–586, 1971.
- [2] R. R. Cuzinatto, E. M. de Moraes, and B. M. Pimentel. Lyra scalar-tensor theory: A scalar-tensor theory of gravity on lyra manifold. *Physical Review D*, 103(12):124002, 2021.
- [3] R. R. Cuzinatto, E. M. de Moraes, and B. M. Pimentel. Geodesics in Lyra’s spherically symmetric spacetime. Em preparo.
- [4] R. R. Cuzinatto, E. M. de Moraes, and B. M. Pimentel. Hamilton-Jacobi approach on Lyra spacetime. Em preparo.
- [5] E. N. Saridakis, R. Lazkoz, V. Salzano, P. V. Moniz, S. Capozziello, J. B. Jiménez, M. De Laurentis, G. J. Olmo, Y. Akrami, S. Bahamonde, et al. Modified gravity and cosmology: An update by the cantata network. *arXiv preprint arXiv:2105.12582*, 2021.
- [6] I. Newton. *Principia: princípios matemáticos de filosofia natural - Livro I*. Edusp, São Paulo, 2008. Trad. de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring, M. H. C. Célia.
- [7] I. Newton. *Principia: princípios matemáticos de filosofia natural - Livros II e III*. Edusp, São Paulo, 2008. A. K. T. Assis e F. D. Joly.
- [8] S. Toulmin. Criticism in the history of science: Newton on absolute space, time, and motion, i. *The Philosophical Review*, 68(1):1–29, 1959.
- [9] O. A. Acevedo, E. M; de Moraes, and B. M. Pimentel. O princípio de equivalência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41(3), 2019.
- [10] U. J. Le Verrier. *Theorie du mouvement de Mercure*. Bachelier Imprimeur-Libraire, 1845.
- [11] U. J. Le Verrier. Theorie du mouvement de mercure. In *Annales de l’Observatoire de Paris*, volume 5, 1859.
- [12] S. Newcomb. Discussion and results of observations on transits of mercury from 1677 to 1881. *United States. Nautical Almanac Office. Astronomical paper; v. 1*, 1:363–487, 1882.
- [13] S. Newcomb. *The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy*. US Government Printing Office, 1895.

- [14] R. A Rydin. Le Verrier's 1859 paper on mercury, and possible reasons for mercury's anomalous precession. *The general science*, 13, 2009.
- [15] I. Clarke, A. Hallsworth, P. Jackson, R. De Kervenoael, et al. The Leibniz-Clarke Correspondence. 1956.
- [16] J. Trusted. *Physics and metaphysics: theories of space and time*. Routledge, 2003.
- [17] A. A. Michelson and E. W. Morley. On the relative motion of the earth and of the luminiferous ether. *Sidereal Messenger*, 6:306–310, 1887.
- [18] H. Poincaré. *Théorie mathématique de la lumière: cours de Physique Mathématique*. Georges Carré Editeur, 1889.
- [19] H. Poincaré. L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 28:302–324, 1904.
- [20] H. Poincaré. *Science and Method*, volume 1. London:Nelson & Sons, 1908.
- [21] H. Poincaré. Die theorie von Lorentz und das prinzip der reaktion. 1900.
- [22] H. A. Lorentz. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, 6, 809831, 1904.
- [23] A. Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, 4, 1905.
- [24] A. Einstein. On the relativity principle and the conclusions drawn from it. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4:411, 1907.
- [25] R. E. Kennedy. *A student's guide to Einstein's major papers*. OUP Oxford, 2012.
- [26] A. Einstein. Sobre a influência da gravidade na propagação da luz. In *Textos fundamentais da física moderna I: O Princípio da Relatividade*, volume 1, pages 127–140. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 6 edition, 2014. Traduzido por Mário José Saraiva.
- [27] A. Einstein. The foundation of the general theory of relativity. *Annalen der Physik*, 49(7):769–822, 1916.
- [28] A. Einstein. Os fundamentos da teoria da relatividade geral. In *Textos fundamentais da física moderna I: O Princípio da Relatividade*, volume 1, pages 141–214. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 6 edition, 2014. Traduzido por Mário José Saraiva.
- [29] A. Einstein. Über den einfluß der schwerkraft auf die ausbreitung des lichtetes. *Annalen der Physik*, 340(10):898–908, 1911.

- [30] H. C. Ohanian and R. Ruffini. *Gravitation and spacetime*. Cambridge University Press, 2013.
- [31] D. W. Sciama. *The Physical Foundations of General Relativity*. Doubleday&Company, New York, 1969.
- [32] N. Straumann. *General relativity and relativistic astrophysics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [33] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer. *Introduction to general relativity*, volume 220. McGraw-Hill New York, 1975.
- [34] K. S. Thorne, C. W. Misner, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 2000.
- [35] P. S. Florides. Einstein's equivalence principle and the gravitational red shift. *International Journal of Modern Physics A*, 17(20):2759–2759, 2002.
- [36] A. Einstein and M. Grossmann. *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. BG Teubner, 1913.
- [37] A. Einstein. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 778–786, November 1915.
- [38] A. Einstein. Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag). *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 799–801, November 1915.
- [39] A. Einstein. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 831–839, November 1915.
- [40] A. Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 844–847, January 1915.
- [41] G. Weinstein. Did Einstein "nostrify" Hilbert's final form of the field equations for general relativity? *arXiv preprint arXiv:1412.1816*, 2014.
- [42] L. Corry, J. Renn, and J. Stachel. Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute. *Science*, 278(5341):1270–1273, 1997.
- [43] F. Winterberg. On "Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute", published by L. Corry, J. Renn, and J. Stachel. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 59(10):715–719, 2004.
- [44] A. Loinger and T. Marsico. On Hilbert's gravitational repulsion (a historical note). *arXiv preprint arXiv:0904.1578*, 2009.

- [45] J. Mehra. *Einstein, Hilbert, and the theory of gravitation: Historical origins of general relativity theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [46] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. New York, London, 1963.
- [47] F. Zwicky. On the masses of nebulae and of clusters of nebulae. *The Astrophysical Journal*, 86:217, 1937.
- [48] V. Rubin and W. Ford Jr. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, 159:379, 1970.
- [49] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop, P. Nugent, P.G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D.E. Groom, et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [50] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [51] E. Di Valentino, A. Melchiorri, and O. Mena. Can interacting dark energy solve the H_0 tension? *Physical Review D*, 96(4):043503, 2017.
- [52] R. Gannouji, L. Kazantzidis, L. Perivolaropoulos, and D. Polarski. Consistency of modified gravity with a decreasing $G_{\text{eff}}(z)$ in a Λ CDM background. *Physical Review D*, 98(10):104044, 2018.
- [53] P. Yodzis, H-J Seifert, and H. Zum Hagen. On the occurrence of naked singularities in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 34(2):135, 1973.
- [54] H. zum Hagen, P. Yodzis, and H-J Seifert. On the occurrence of naked singularities in general relativity. 2. *Communications in Mathematical Physics*, 37(1):29, 1974.
- [55] S. Deser. General relativity and the divergence problem in quantum field theory. *Reviews of Modern Physics*, 29(3):417, 1957.
- [56] T. Kaluza. Zum unitätsproblem der physik. *Int. J. Mod. Phys.*, 1921(arXiv:1803.08616):1870001, 1921.
- [57] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906, 1926.
- [58] P. Finsler. Über kurven und flächen in allgemeinen räumen. Göttingen, Zürich: O. Füssli, 120 S. 8° (1918)., 1918.

- [59] A. Einstein. Riemann-geometrie mit aufrechterhaltung des begriffes des fernparallelismus. *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, pages 217–221, 1928.
- [60] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, 124(3):925, 1961.
- [61] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [62] C Romero and A Barros. Does the Brans-Dicke theory of gravity go over to General Relativity when $\omega \rightarrow \infty$? *Physics Letters A*, 173(3):243–246, 1993.
- [63] T. Damour and K. Nordtvedt. Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Physical Review D*, 48(8):3436, 1993.
- [64] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425(6956):374–376, 2003.
- [65] C. M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 2018.
- [66] H. Weyl. Gravitation und elektrizität. *Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.*, 26:465–480, 1918.
- [67] H. F. M. Goenner. On the history of unified field theories. *Living reviews in relativity*, 7(1):2, 2004.
- [68] E. Pagani, G. Tecchiolli, and S. Zerbini. On the problem of stability for higher-order derivative Lagrangian systems. *Letters in Mathematical Physics*, 14(4):311–319, 1987.
- [69] H. Weyl. *Space–time–matter*. Dutton, 1922.
- [70] R. Gannouji, H. Nandan, and N. Dadhich. Flrw cosmology in weyl-integrable space-time. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(11):051, 2011.
- [71] C. Romero, J. B. Fonseca-Neto, and M. L. Pucheu. General relativity and Weyl geometry. *Classical and Quantum Gravity*, 29(15):155015, 2012.
- [72] L. O'Raifeartaigh. *The dawning of gauge theory*. Princeton University Press, 2021.
- [73] E. Scholz. The unexpected resurgence of Weyl geometry in late 20th-century physics. In *Beyond Einstein*, pages 261–360. Springer, 2018.
- [74] G. Lyra. Über eine modifikation der riemannschen geometrie. *Mathematische Zeitschrift*, 54(1):52–64, 1951.

- [75] T. Singh and G. P. Singh. Lyra's geometry and cosmology: a review. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, 41(8):737–764, 1993.
- [76] D. K. Sen. A static cosmological model. *Zeitschrift für Physik*, 149(3):311–323, 1957.
- [77] D. K. Sen. On geodesics of a modified riemannian manifold. *Canadian Mathematical Bulletin*, 3(3):255–261, 1960.
- [78] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.
- [79] K. S. Bhamra. A cosmological model of class one in Lyra's manifold. *Australian Journal of Physics*, 27(4):541–548, 1974.
- [80] A. Beesham. Friedmann's cosmology in Lyra's manifold. *Astrophysics and Space Science*, 127(2):355–359, 1986.
- [81] W. D. Halford. Cosmological theory based on Lyra's geometry. *Australian Journal of Physics*, 23(5):863–870, 1970.
- [82] D. R. K. Reddy and R. Venkateswarlu. Magnetized cosmological model in Lyra manifold. *Astrophysics and Space Science*, 149(2):287–291, 1988.
- [83] G. P. Singh and K. Desikan. A new class of cosmological models in Lyra geometry. *Pramana*, 49(2):205–212, 1997.
- [84] J. K. Singh. Exact solutions of some cosmological models in Lyra geometry. *Astrophysics and Space Science*, 314(4):361–365, 2008.
- [85] W. D. Halford. Scalar-tensor theory of gravitation in a Lyra manifold. *Journal of Mathematical Physics*, 13(11):1699–1703, 1972.
- [86] J. S. Jeavons, C. B. G. McIntosh, and D. K. Sen. A correction to the Sen and Dunn gravitational field equations. *Journal of Mathematical Physics*, 16(2):320–321, 1975.
- [87] D. R. K. Reddy and P. Innaiah. An anisotropic cosmological model in Lyra's manifold. *Astrophysics and Space Science*, 114(2):285–288, 1985.
- [88] A. Pradhan, J. P. Shahi, and C. B. Singh. Cosmological models of universe with variable deceleration parameter in Lyra's manifold. *Brazilian journal of physics*, 36:1227–1231, 2006.
- [89] V. K. Shchigolev. Cosmology with an effective Λ -term in Lyra manifold. *Chinese Physics Letters*, 30(11):119801, 2013.

- [90] K. P. Singh and M. R. Mollah. Could the Lyra manifold be the hidden source of the dark energy? *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(04):1750063, 2017.
- [91] F. Rahaman, A. Ghosh, and M. Kalam. Lyra black holes. *arXiv preprint gr-qc/0612042*, 2006.
- [92] H. Bouhallouf. Lyra black holes and hawking radiation. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1269, page 012013. IOP Publishing, 2019.
- [93] B. Felsager. *Geometry, particles, and fields*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [94] N. J. Hicks. *Notes on differential geometry*, volume 3. van Nostrand Princeton, 1965.
- [95] R. A. d’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [96] L. D. Landau. *The classical theory of fields*, volume 2. Elsevier, 2013.
- [97] E. M. de Morais and B. M. Pimentel. Equação de Hamilton-Jacobi. Relatório de Estudos Acadêmicos. DOI: [10.13140/RG.2.2.17667.35362](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.17667.35362).
- [98] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Classical mechanics. *Ed: Pergamon Press, Oxford*, 1960.
- [99] G. Nordström. Relativitätsprinzip und gravitation. *Physikalische Zeitschrift*, 13(1126):29, 1912.
- [100] G. Nordström. Träge und schwere masse in der relativitätsmechanik. *Annalen der Physik*, 345(5):856–878, 1913.
- [101] G. Nordström. Zur theorie der gravitation vom standpunkt des relativitätsprinzips. *Annalen der Physik*, 347(13):533–554, 1913.
- [102] G. Nordström. Über die möglichkeit, das elektromagnetische feld und das gravitationsfeld zu vereinigen. *Physikalische Zeitschrift*, 15:504–506, 1914.
- [103] A. Vassallo. A metaphysical reflection on the notion of background in modern spacetime physics. *arXiv preprint arXiv:1602.06254*, 2016.
- [104] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [105] M. C. Das and R. Misra. Some studies on Lorentz transformation matrix in non-cartesian co-ordinate system. *Journal of Physics and Its Applications*, 1(2):58–61, 2019.
- [106] S. Mazumdar and K. K. Parida. Relativistic transformation of spherical co ordinates (t, r, θ, ϕ) . *arXiv preprint arXiv:2008.08780*, 2020.

- [107] S. M. Carroll. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- [108] M. Carmeli. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. World Scientific, 2001.
- [109] C. Cherubini, D. Bini, S. Capozziello, and R. Ruffini. Second order scalar invariants of the Riemann tensor: applications to black hole spacetimes. *International Journal of Modern Physics D*, 11(06):827–841, 2002.