



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Ciência e Tecnologia
Câmpus de Sorocaba

DANIEL TEIXEIRA DE PAULA

ESPECIFICAÇÃO DE TAREFAS PRIMITIVAS PARA O
CONTROLE DA LOCOMOÇÃO DE ROBÔS QUADRÚPEDES

Sorocaba

2024

DANIEL TEIXEIRA DE PAULA

**ESPECIFICAÇÃO DE TAREFAS PRIMITIVAS PARA O
CONTROLE DA LOCOMOÇÃO DE ROBÔS QUADRÚPEDES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba, Universidade Estadual Paulista (UNESP), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Paciencia Godoy

Coorientador: Prof. Dr. Mauricio Becerra Vargas

Sorocaba

2024

P324e	Paula, Daniel Teixeira de Especificação de tarefas primitivas para o controle da locomoção de robôs quadrúpedes / Daniel Teixeira de Paula. -- Sorocaba, 2024 98 p. : il., tabs. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Ciência e Tecnologia, Sorocaba Orientador: Eduardo Paciencia Godoy Coorientador: Mauricio Becerra Vargas 1. Robótica. 2. Robôs móveis. 3. Robôs - Sistemas de controle. 4. Locomoção. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Ciência e Tecnologia, Sorocaba. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Especificação de Tarefas Primitivas para o Controle da Locomoção de Robôs Quadrúpedes

AUTOR: DANIEL TEIXEIRA DE PAULA

ORIENTADOR: EDUARDO PACIÊNCIA GODOY

COORDINADOR: MAURÍCIO BECERRA VARGAS

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Mauricio Becerra
Vargas:2315493
1880

Assinado de forma digital
por Mauricio Becerra
Vargas:23154931880
Dados: 2024.05.10
14:08:43 -03'00'

Prof. Dr. MAURÍCIO BECERRA VARGAS (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia de Controle e Automação / Instituto de Ciência e Tecnologia UNESP Campus de Sorocaba

Prof. Dr. THIAGO BOAVENTURA CUNHA (Participação Virtual)
Engenharia Mecânica / Escola de Engenharia de São Carlos - USP



Documento assinado digitalmente
THIAGO BOAVENTURA CUNHA
Data: 15/05/2024 21:29:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. FELIX MAURICIO ESCALANTE ORTEGA (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia de Controle e Automação / Câmpus de Sorocaba



Documento assinado digitalmente
FELIX MAURICIO ESCALANTE ORTEGA
Data: 10/05/2024 11:19:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Sorocaba, 09 de maio de 2024

Resumo

Para além das impressionantes façanhas acrobáticas, a principal motivação para o desenvolvimento de robôs com patas reside em sua capacidade para se deslocar nos variados tipos de ambiente, um aspecto fundamental para aplicações críticas envolvendo risco a integridade humana como a inspeção em áreas de difícil acesso, operações de busca e salvamento ou até mesmo a exploração espacial. Na natureza, a forma com que os animais escolhem se locomover depende da importância relativa atribuída a aspectos característicos como a velocidade, aceleração, custo energético, e resiliência. Cada um desses aspectos pode ser interpretado como resultado da associação de múltiplas tarefas primitivas representando funções dos estados do sistema, dando indícios que uma estratégia de controle projetada para o controle da locomoção de um robô com patas precisa ser capaz de atender a múltiplos objetivos, possivelmente conflitantes, simultânea e harmoniosamente, no entanto, isso não significa que o controle deva considerar todas as possíveis tarefas dado que frequentemente é necessário moderar sua funcionalidade em virtude das inerentes limitações do sistema. Como definir o grau de complexidade do controle necessário para viabilizar a locomoção com patas de forma adequada permanece uma pergunta sem resposta definitiva. Nesse sentido, este trabalho investiga como a gradual incorporação de tarefas primitivas e a respectiva elevação da complexidade influencia o desempenho do controle da locomoção quadrúpede. Com um enfoque no controle do movimento, este estudo envolve a análise de desempenho para locomoção com patas de estratégias de controle com diferentes níveis de complexidade, incluindo o controle cinemático, o controle de impedância, e o controle de corpo inteiro. Os sistemas propostos são implementados em simulação através de um protótipo virtual desenvolvido no Simulink com o *toolbox* Simscape Multibody. Ademais, são realizados ensaios para avaliar o efeito do impacto com o solo e verificar o desempenho da locomoção usando a marcha trote. Os resultados evidenciaram que a qualidade de rastreamento da trajetória das patas por si só não foi suficiente para permitir a locomoção. Ao considerar o efeito das forças advindas da interação com o solo, o robô foi capaz de se locomover adequadamente, mantendo o equilíbrio e se deslocando com uma velocidade próxima da estimada. Dentre as estratégias para o controle do movimento propostas, o controle de corpo inteiro obteve o melhor desempenho para locomoção, apresentando funcionalidade adicional além de reduzido consumo energético. Por fim, são sugeridos aspectos que podem ser melhor explorados em trabalhos futuros para expandir a abrangência dos resultados obtidos neste trabalho.

Palavras-chave: controle da locomoção; robôs quadrúpedes; tarefas primitivas.

Abstract

Beyond the impressive acrobatic feats, the main drive for legged robot development resides in its potential to move as effectively as its animal counterparts do in different types of terrain with varying degree of complexity, a key aspect for critical applications that imply risks to human integrity such as the inspection of hard-to-reach places, search-and-rescue missions, or even space exploration. In nature, how an animal chooses to traverse the landscape depends on the relative importance attributed to aspects such as speed, acceleration, energetic cost, and endurance. Each one of these elements can be interpreted as the result of combining multiple task primitives representing system state functions, which hints that a control scheme designed for legged locomotion control needs to be able to fulfill multiple, possibly conflicting, control objectives simultaneously and harmoniously, however, this does not mean that the control must consider all the possible tasks given that moderating its functionality may be required due to inherent system limitations. How to define the degree of complexity that enables adequate legged locomotion remains a question without a definitive answer. With that in mind, this work investigates how the incremental addition of task primitives and its associated increase in complexity affects quadruped locomotion control performance. Focusing on motion control, this study analyzes the locomotion performance of control schemes with different levels of complexity, including kinematic control, impedance control, and whole-body control. The proposed systems are implemented in simulation using a virtual prototype developed in Simulink with the Simscape Multibody toolbox. In addition, experiments were carried out to evaluate the control schemes applied to the quadruped robot, examining the effect of ground impact and verifying its performance for locomotion using the trot gait. Results showed that the foot trajectory tracking performance by itself was not sufficient to enable locomotion. By accounting for ground reaction forces, the robot was able to move adequately, close to the estimated speed, while maintaining balance. Within all the proposed motion control schemes, the whole-body control obtained the best locomotion performance, presenting additional functionality as well as lower energy consumption. Lastly, we suggest aspects that can be further explored in future works to broaden the coverage of the results obtained in this work.

Keywords: locomotion control; quadruped robots; task primitives.

Lista de abreviaturas e siglas

CoM Centro de Massa (Inglês: *Center of Mass*)

CoT Custo de Transporte (Inglês: *Cost of Transport*)

CPG Gerador Central de Padrões (Inglês: *Central Pattern Generator*)

DAE Equação Diferencial e Algébrica (Inglês: *Differential-Algebraic Equation*)

DOF Graus de liberdade (Inglês: *Degrees-of-freedom*)

EoM Equações de Movimento (Inglês: *Equations of Motion*)

GRF Força de Reação com o Solo (Inglês: *Ground Reaction Force*)

LF Pata Posterior Esquerda (Inglês: *Left Foreleg*)

LH Pata Anterior Esquerda (Inglês: *Left Hindleg*)

MLP Percéptron Multicamadas (Inglês: *Multilayer Perceptron*)

RF Pata Posterior Direita (Inglês: *Right Foreleg*)

RH Pata Anterior Direita (Inglês: *Right Hindleg*)

RoS Risco de Escorregamento (Inglês: *Risk of Slippage*)

SEA Atuador Elástico em Série (Inglês: *Series Elastic Actuator*)

TCN Rede Neural Convolucional Temporal (Inglês: *Temporal Convolutional Network*)

VIC Controle de Impedância Variável (Inglês: *Variable Impedance Control*)

VMC Controle via Modelo Virtual (Inglês: *Virtual Model Control*)

WBC Controle de Corpo Inteiro (Inglês: *Whole-Body Control*)

ZMP Ponto de Momento Zero (Inglês: *Zero-Moment Point*)

Lista de símbolos

Locomoção

β_f	Fator de trabalho
Fr	Número de Froude
h	Comprimento característico do movimento
λ_s	Comprimento da passada
λ_{st}	Comprimento do passo
ϕ	Fase relativa normalizada
T_s	Período do ciclo de locomoção
T_{st}	Duração da fase de suporte
T_{sw}	Duração da fase de balanço
v	Velocidade característica do movimento

Cinemática

$\mathbf{0}_n$	Vetor nulo com n elementos igual a 0
$\mathbf{O}_{m \times n}$	Matriz nula com m linhas e n colunas igual a 0 (caso $m = n$ id. $\mathbf{O}_n$)
$\mathbf{1}_n$	Matriz identidade de ordem n
α	Vetor de aceleração angular
$\mathbf{D}, \mathbf{H}$	Matrizes utilizadas na derivação da cinemática diferencial
ϵ	Parte vetorial do quatérnio
η	Parte escalar do quatérnio
$\mathbf{f}(\cdot)$	Função cinemática direta
$\mathbf{f}^{-1}(\cdot)$	Função cinemática inversa
$\mathbf{F}_q$	Matriz Jacobiana do sistema (id. $\mathbf{J}_{sys}$)
$\mathbf{G}$	Matriz para conversão de coordenadas rotacionais para angulares
γ	Vetor de termos não lineares
$\mathbb{H}_1$	Conjunto dos quatérnios unitários
$\mathbf{J}_{sys}$	Matriz Jacobiana do sistema (id. $\mathbf{F}_q$)

$\mathbf{v}$	Quatérnio unitário respectivo a orientação
$\boldsymbol{\omega}$	Vetor de velocidade angular
$\mathbf{p}$	Vetor posição
$\tilde{\mathbf{p}}$	Quatérnio com a parte vetorial correspondente ao vetor $\mathbf{p}$
$\mathbf{q}$	Vetor de variáveis independentes
$\mathcal{Q}$	Espaço das juntas
$\mathbf{r}_{i,j}^k$	Posição de $\{i\}$ com relação a $\{j\}$ expressa em $\{k\}$ (caso $\{k\} = \{j\}$ id. $\mathbf{r}_i^j$)
$\mathbf{R}$	Matriz de rotação
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbf{S}(\cdot)$	Matriz antissimétrica do argumento
$\mathbf{T}$	Matriz de transformação de velocidade
$\mathbf{x}$	Vetor de variáveis operacionais
$\mathcal{X}$	Espaço operacional

Dinâmica

A	Medida de “ação” conforme o Princípio de Hamilton
$\mathcal{B}$	Corpo rígido
$\mathbf{B}$	Matriz de inércia em coordenadas generalizadas
$\mathbf{B}_{\text{sys}}$	Matriz de inércia em coordenadas independentes
dm	Massa de uma partícula elementar
δW_{ext}	Trabalho virtual realizado pelas forças externas
δW_{nc}	Trabalho virtual realizado pelas forças não conservativas
ϵ	Escalar infinitesimal
$\mathbf{f}$	Força externa
g	Aceleração gravitacional local
$\mathbf{g}_0$	Vetor de aceleração gravitacional
$\mathbf{h}$	Vetor de restrições cinemáticas
$\mathbf{H}_x$	Matriz Jacobiana das restrições
$\mathbf{I}_i$	Tensor de inércia do corpo rígido i relativo a seu centro de massa
L	Lagrangiana
$\boldsymbol{\lambda}$	Vetor de multiplicadores de Lagrange

m	Massa
μ	Momento externo
n	Número de coordenadas generalizadas
n_b	Número de corpos rígidos
n_c	Número de restrições cinemáticas
$\Phi, \dot{\Phi}$	Funções do tempo arbitrárias contínuas e diferenciáveis ao menos uma vez
S_{act}	Matriz de seleção das juntas ativas
T	Energia cinética
τ	Vetor de torques de atuação
U	Energia potencial
$\mathbf{u}$	Vetor de entradas
$\mathbf{v}$	Vetor de termos de velocidade quadrática em coordenadas generalizadas
$\mathbf{w}$	Vetor de estados das juntas
$\mathbf{y}$	Vetor de estados operacionais
ξ	Vetor de forças generalizadas não conservativas
ξ_{ext}	Vetor de forças externas em coordenadas generalizadas
ζ	Vetor de forças generalizadas
ζ_g	Vetor de forças generalizadas geradas pelo efeito da gravidade

Contato

f_n	Componente normal da força de contato com o solo
f_t	Componente tangencial da força de contato com o solo
k_{dc}	Amortecimento da força normal de contato
k_{pc}	Rigidez da força normal de contato
μ_d	Coefficiente de atrito dinâmico
μ_s	Coefficiente de atrito estático máximo
v_{crit}	Velocidade onde o coeficiente de atrito efetivo corresponde a μ_s
w_{trans}	Largura da região de transição para força normal de contato

CPG

α, β	Taxas de convergência para o ciclo limite
-----------------	---

b	Grau de independência das fases
Δ_{ij}	Termo de acoplamento entre as células i e j
k	Grau de acoplamento entre células
$\mu^{1/2}$	Amplitude da forma de onda resultante
θ_{ij}	Diferença de fase entre as células i e j
ω	Frequência angular da forma de onda resultante
ω_{st}	Frequência angular da fase de suporte
ω_{sw}	Frequência angular da fase de balanço

Curvas de Bézier

$b_{i,n}$	Polinômio de Bernstein de grau n
$\mathbf{b}_z$	Curva de Bézier
$\Delta_r(\cdot)$	Operador de diferença direta
$\mathbf{P}_{st}$	Pontos de controle da fase de suporte
$\mathbf{P}_{sw}$	Pontos de controle da fase de balanço

Controle

$\mathbf{D}_d$	Matriz de amortecimento desejada
$\mathbf{d}_d$	Vetor de elementos na diagonal da matriz de amortecimento desejada
$\mathbf{e}$	Vetor de erro
$\mathbf{K}_d$	Matriz de rigidez desejada
$\mathbf{k}_d$	Vetor de elementos na diagonal da matriz de rigidez desejada
$\mathbf{\Lambda}$	Matriz de inércia expressa no espaço operacional
$\mathbf{M}_d$	Matriz de inércia desejada
$\mathbf{m}_d$	Vetor de elementos na diagonal da matriz de inércia desejada
$\mathbf{N}$	Projetor ortogonal para o espaço nulo
ζ_{int}	Forças generalizadas de interação aplicadas ao sistema

Subscritos

act	Subespaço controlável das juntas
b	Tronco
d	Valor desejado

<i>dyn</i>	Compensação da dinâmica original do sistema
<i>ext</i>	Forças externas
<i>f</i>	Extremidade das patas que entrará em contato com o solo
<i>g</i>	Gerado pelo efeito da gravidade
<i>h</i>	Conjunto de tarefas primitivas em um mesmo nível hierárquico
<i>i</i>	Indexador genérico
<i>id</i>	Controle de impedância via dinâmica inversa
<i>int</i>	Forças de interação
<i>j</i>	Indexador da pata
<i>k</i>	Indexador de algum elemento relativo a pata
<i>l</i>	Link das patas
<i>mr</i>	Parte móvel dos atuadores
<i>ms</i>	Parte fixa dos atuadores
<i>prev</i>	Efeito combinado dos níveis hierárquicos anteriores (mais prioritários)
<i>rot</i>	Envolve coordenadas rotacionais
<i>sys</i>	Espaço das juntas
<i>t</i>	Tarefa primitiva
<i>vmc</i>	Controle de impedância via modelo virtual
<i>wbc</i>	Controle de corpo inteiro
<i>x</i>	Coordenada cartesiana x
<i>y</i>	Coordenada cartesiana y
<i>z</i>	Coordenada cartesiana z

Índices de desempenho

$\bar{e}_z$	Componente vertical do erro de posição relativa das patas
e_{t0}	Norma do erro de posição relativa das patas
v_{loc}	Velocidade de avanço
ψ_{loc}	Ângulo de guinada do tronco

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Locomoção com patas	20
1.2	Controle da locomoção	22
1.2.1	Modelos matemáticos e o controle	24
1.3	Revisão de literatura	24
1.3.1	Controle cinemático	25
1.3.2	Controle de impedância	26
1.3.3	Controle híbrido de força/posição	27
1.3.4	Controle de Corpo Inteiro (WBC)	28
1.3.5	Controle ótimo	30
1.3.6	Geradores Centrais de Padrões (CPGs)	32
1.3.7	Aprendizado de máquina	33
1.4	Objetivos e abordagem proposta	34
1.4.1	Lista de publicações	36
1.5	Principais contribuições	36
1.6	Organização do trabalho	36
2	MODELO DO ROBÔ	37
2.1	Estrutura do robô	37
2.2	Cinemática	39
2.2.1	Cinemática direta	40
2.2.2	Cinemática diferencial	43
2.3	Dinâmica	44
2.3.1	Energia cinética	45
2.3.2	Energia potencial gravitacional	45
2.3.3	Forças não-conservativas	46
2.3.4	Equações de movimento	46
3	PROTÓTIPO VIRTUAL	51
3.1	Robô	52
3.1.1	Corpos Rígidos	52
3.1.2	Sistemas de Coordenadas	52
3.1.3	Juntas	52
3.2	Ambiente	53
3.2.1	Dinâmica de Contato	53
3.3	Simulação	54
3.3.1	Parâmetros	54
3.3.2	Cenários	55

4	GERAÇÃO DO MOVIMENTO	59
4.1	Geração de padrões de caminhada	59
4.2	Geração de trajetórias	60
4.3	Simulação	62
5	CONTROLE DO MOVIMENTO	63
5.1	Definição das tarefas primitivas	63
5.1.1	Rastreamento da trajetória das patas	63
5.1.2	Regulação do tronco	65
5.2	Controle cinemático	65
5.3	Controle de impedância	66
5.3.1	Controle via modelo virtual	67
5.3.2	Controle via dinâmica inversa	67
5.3.3	Dinâmica inversa das patas	68
5.4	Controle de corpo inteiro	69
5.5	Simulação	72
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	73
6.1	Primeiro cenário	73
6.1.1	Controle cinemático	73
6.1.2	Controle de impedância	74
6.1.3	Controle de corpo inteiro	77
6.2	Segundo cenário	79
6.2.1	Controle cinemático	79
6.2.2	Controle de impedância	80
6.2.3	Controle de corpo inteiro	81
7	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	87
	APÊNDICE A – DEFINIÇÕES	91
	APÊNDICE B – CINEMÁTICA	93
B.1	Par de corpos rígidos	93
B.1.1	Junta de revolução	93
B.2	Conversão para coordenadas rotacionais	94
B.3	Sistema multicorpo	95
B.3.1	Base fixa	96
B.3.2	Base flutuante	96
	APÊNDICE C – DINÂMICA	97
C.1	Equação de Euler-Lagrange Aumentada	97

1 Introdução

Ao longo da última década, o tópico de robôs com patas observou uma dramática popularização em virtude dos impressionantes feitos de mobilidade demonstrados na prática por exemplares provenientes de diversos grupos de pesquisa (e.g., Biomimetic Robotics Lab – MIT, Dynamic Legged Systems Lab – IIT, Autonomous Systems Lab – ETH Zürich) e um crescente número de empresas (e.g., Boston Dynamics, ANYbotics), no entanto, robôs com patas controlados de forma automática não configuram uma novidade, estando presentes desde o final da década de 1970 (RAIBERT, 1986). Robôs com patas integram uma subclasse da robótica móvel em que a locomoção envolve o contato descontínuo com o solo. Em comparação com a locomoção usando apenas rodas ou trilhos, a descontinuidade do contato com o solo permite que robôs com patas tenham maior capacidade de adaptação ao ambiente, podendo atuar de forma eficaz tanto em terrenos naturais (e.g., terra, areia, neve, cascalho) quanto artificiais (e.g., entulho, escadas). Essa característica abre caminho para uma vasta gama de aplicações incluindo a inspeção de áreas industriais (ANYBOTICS, 2022; BOSTON DYNAMICS, 2022), segurança pública (CNN, 2020b; CNN, 2020a), operações de busca e salvamento, e até mesmo a exploração espacial, permitindo o acesso a áreas previamente inacessíveis e preservando a integridade humana. No Brasil, esse tipo de robô tem sido empregado por empresas de grande porte como a Petrobras e Vale em atividades de inspeção em refinarias e plataformas marítimas (PETROBRAS, 2022), e unidades de processamento de minério (IBRAM, 2021).

Modelar e controlar robôs com patas configura um problema desafiador, integrando sistemas físicos de base flutuante (sub-atuados) com elevado número de graus de liberdade sujeitos ao contato intermitente com o solo. Para se deslocar, robôs com patas precisam planejar e executar uma sequência de movimentos envolvendo o contato com solo de forma a movimentar o corpo e simultaneamente manter o equilíbrio e desviar de obstáculos. No geral, a locomoção pode ser analisada através de alguns aspectos característicos como a velocidade, aceleração, consumo energético e estabilidade. Nos animais, correlacionada com os requisitos necessários para sobrevivência, a forma com que cada um desses aspectos se manifesta tende a favorecer características com elevada aptidão ou *fitness*, que quantifica a probabilidade de um mesmo grupo de genes ser transmitido para futuras gerações (ALEXANDER, 2013).

1.1 Locomoção com patas

A locomoção com patas é um processo cíclico envolvendo duas fases complementares, a fase de suporte, em que há contato efetivo da pata com o solo, e a fase de balanço, que ocorre entre dois instantes consecutivos de contato com o solo. A fase de suporte (*stance phase*) visa gerar forças de reação com o solo (GRFs) capazes de compensar o peso bem como prover aceleração e desaceleração do animal (BIEWENER; PATEK, 2018). Já a fase de balanço (*swing phase*) tem como objetivo movimentar a pata em preparação à próxima fase de suporte, garantindo o desvio de obstáculos e a manutenção do equilíbrio. O intervalo de tempo respectivo a cada fase e sua relação com o período do ciclo de locomoção influencia tanto os esforços envolvidos quanto o deslocamento resultante.

Seja T_{st} o intervalo de tempo em que a pata se encontra na fase de suporte, e seja T_{sw} o intervalo de tempo em que a pata se encontra na fase de balanço tal que o período do ciclo de locomoção (*stride period*) $T_s = T_{st} + T_{sw}$. Define-se o fator de trabalho (*duty factor*) β_f , que quantifica a duração do contato com o solo relativa ao período do ciclo de locomoção¹, como

$$\beta_f = \frac{T_{st}}{T_s} = \frac{T_{st}}{T_{st} + T_{sw}}. \quad (1.1)$$

Relativo ao deslocamento resultante, o comprimento do passo (*step length*) λ_{st} representa a distância percorrida durante a fase de suporte, enquanto o comprimento da passada (*stride length*) λ_s , a distância percorrida durante um ciclo de locomoção. Conforme Alexander (2013), para animais que se locomovem com patas, a velocidade média de locomoção pode ser calculada como a razão entre o comprimento da passada e o período do ciclo de locomoção, indicando que a mesma pode ser elevada alongando comprimento da passada, reduzindo o período do ciclo de locomoção, ou uma combinação de ambos. Especialmente relevante para a comparação justa da locomoção entre animais com características distintas, o número de Froude Fr descreve uma grandeza adimensional calculada em função do quadrado de uma velocidade característica v do movimento (e.g., velocidade média de locomoção), de um comprimento característico h (e.g., altura do quadril ao solo quando o animal está de pé), e da aceleração gravitacional local g , tal que

$$Fr = \frac{v^2}{gh}. \quad (1.2)$$

Além do comportamento das patas de forma isolada, em virtude do acoplamento das patas com o tronco, é importante caracterizar a correlação entre o movimento

¹ Em virtude da natureza impulsiva das interações com o solo, quanto menor o fator de trabalho maiores serão as forças de reação envolvidas na locomoção.

de diferentes patas. Nesse sentido, a marcha (*gait*) representa a sequência com que diferentes patas entram em contato com o solo. Conforme Hildebrand (1977) uma determinada marcha pode ser definida a partir: (i) dos instantes de tempo em que cada pata inicia o contato com o solo, (ii) da duração do contato de cada pata, e (iii) da duração do ciclo de locomoção. Dos três elementos, os dois últimos correspondem a parâmetros previamente descritos no contexto de uma pata isolada (i.e. T_{st} e T_s), já o primeiro resulta do acoplamento das patas com o tronco.

Considerando um período de locomoção e um fator de trabalho em comum para todas as patas, uma determinada marcha pode ser definida a partir das fases relativas ϕ_j entre os instantes de contato com o solo de cada membro com relação ao membro referencial, o que resulta, para o caso de quadrúpedes, em um total de quatro parâmetros ($j = 1, 2, 3, 4$). A Tabela 1, cujos dados foram originalmente extraídos de Alexander (1984), apresenta uma relação com algumas marchas quadrúpedes e suas respectivas fases relativas normalizadas, a exemplo da marcha trote (linha 2), caracterizada pelo movimento sincronizado das patas diagonalmente opostas e um defasamento único de meio período. As iniciais LF, RF, LH, RH se referem aos membros posterior esquerdo (*left forelimb*), posterior direito (*right forelimb*), anterior esquerdo (*left hindlimb*) e anterior direito (*right hindlimb*), estando correlacionadas com os números inteiros 1, 2, 3, e 4 respectivamente.

Tabela 1 – Marchas quadrúpedes típicas e suas respectivas fases relativas normalizadas.

Gait	Normalized relative phases			
	ϕ_{LF}	ϕ_{RF}	ϕ_{LH}	ϕ_{RH}
Walk	0	0,50	0,75	0,25
Trot	0	0,50	0,50	0
Pace (Rack)	0	0,50	0	0,50
Canter	0	0,80	0,80	0,50
Transverse Gallop	0	0,10	0,50	0,60
Rotary Gallop	0	0,10	0,60	0,50
Bound	0	0	0,50	0,50
Pronk	0	0	0	0

Fonte: (DE PAULA; GODOY; BECERRA-VARGAS, 2022).

A forma com que animais se locomovem e conseqüentemente qual marcha utilizam depende da importância relativa de aspectos como a velocidade, aceleração, manobrabilidade, resiliência, custo energético, e a estabilidade em função das circunstâncias (ALEXANDER, 2013). Relativo a estabilidade ² existem duas classes de marcha, as estaticamente estáveis (*statically stable gaits*), que garantem o equilíbrio

² Estabilidade no contexto da locomoção com patas diz respeito a manutenção da trajetória do tronco (i.e. base flutuante) mediante a perturbação das condições iniciais.

estável do corpo ao longo de todo o período de locomoção, e as dinamicamente estáveis (*dynamically stable gaits*), capazes de rejeitar pequenos distúrbios de forma passiva e através de reflexos. Para animais quadrúpedes, uma marcha estaticamente estável seria composta de uma sequência de caminhada (primeira linha da Tabela 1) juntamente a um fator de trabalho de no mínimo 0,75 para garantir que ao menos três patas estejam em contato com o solo durante todo o período de locomoção.

Intuitivamente, um dos principais requisitos que um sistema de controle para locomoção com patas precisa atender envolve garantir que o corpo se mantenha equilibrado. Nesse contexto, o *Zero-Moment Point* (ZMP) caracteriza um dos principais indicadores para o equilíbrio dinâmico de um robô de base flutuante. Conforme Vukobratović e Borovac (2004), o ZMP define o ponto de atuação da GRF resultante onde as componentes horizontais do momento são identicamente nulas. O sistema é considerado em equilíbrio se a posição estimada para o ZMP se encontra na parte interna do *polígono de suporte* (polígono cujos vértices compõe as patas em contato), sendo a distância do ZMP com relação as arestas do polígono de suporte uma medida que quantifica a proximidade do sistema ao tombamento. Apesar de ser amplamente utilizado, o uso do ZMP como indicador do equilíbrio dinâmico limita-se a locomoção em uma superfície planar sem escorregamento.

1.2 Controle da locomoção

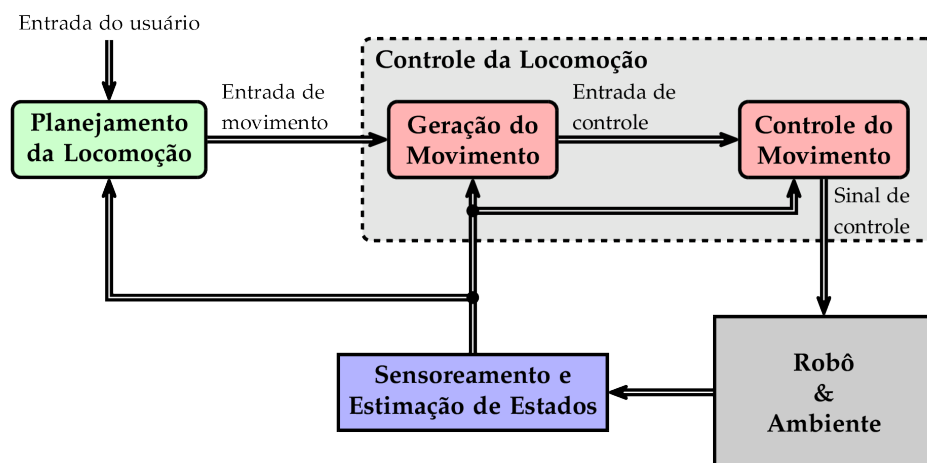
Um dos mais tradicionais métodos para o controle da locomoção dinâmica com patas proposto por Marc Raibert (RAIBERT, 1986), um dos fundadores da Boston Dynamics, envolve (a princípio) um robô monópode e um controlador segmentado em três partes independentes sincronizadas por uma máquina de estados finita: a manutenção do saltitar (*hopping*), o controle do avanço (*forward travel*), e a regulação da postura (*posture*). A primeira parte trata do controle (tipicamente passivo) do movimento vertical, tendo como objetivo gerar e sustentar as *oscilações verticais*³ necessárias para o corpo. A segunda parte, o controle do avanço, regula a progressão da locomoção através da escolha da posição do ponto de impacto da pata com o solo. Nesse estágio, a assimetria na trajetória do corpo ocasionada pelo posicionamento do ponto de impacto relativo ao ponto neutro permite que o robô acelere, desacelere, ou mantenha uma velocidade constante. Já a terceira parte corresponde a regulação da postura, que visa ajustar o ângulo de inclinação do corpo. Apesar de ter sido originalmente projetado para o deslocamento restrito no plano sagital (que divide os lados direito e esquerdo) os resultados obtidos também são válidos para o caso tridimensional. Essa metodo-

³ A manutenção de oscilações verticais busca replicar o comportamento da locomoção animal, que naturalmente envolve oscilações na energia potencial e energia cinética do sistema em virtude da periodicidade do contato das patas com o solo (BIEWENER; PATEK, 2018).

logia pode ser aplicada diretamente para robôs bípedes, no entanto, em virtude do posicionamento das patas com relação ao tronco, sua utilização em robôs com mais de duas patas é limitada a marchas passíveis de serem interpretadas como marchas bípedes (RAIBERT, 1986).

Apesar das limitações, os elementos que fundamentam a metodologia de Raibert (1986), podem ser extraídos e utilizados para definir uma estrutura de controle com capacidade de realizar os princípios da locomoção com patas. Dessa forma, entende-se que o controle da locomoção com patas (*locomotion control*) pode ser caracterizado por três módulos interconectados (Figura 1): a geração do movimento (*motion generation*), o controle do movimento (*motion control*), e o sensoreamento e estimação de estados (*sensing and state estimation*).

Figura 1 – Diagrama de blocos envolvendo o robô e seu ambiente e os componentes básicos necessários para implementar a locomoção com patas.



Fonte: Autoria própria.

A geração do movimento tem como objetivo interpretar os comandos provenientes do planejamento (e.g., velocidade e direção de avanço do robô, sequência de pontos de apoio) e gerar sinais de entrada adequados para o sistema de controle (e.g., trajetória das patas, pose do tronco). O controle do movimento envolve a geração de sinais de controle compatíveis com o tipo de atuação a partir dos sinais de entrada desejada aplicados ao sistema de controle. Já o sensoreamento e estimação de estados envolve a aquisição, filtragem e processamento das grandezas mensuráveis do sistema (e.g., ângulo das juntas, velocidade do tronco, força atuante nas patas) para utilização no laço de realimentação de forma direta ou indireta através da estimação de estados compostos do sistema (e.g, pose do tronco).

Atualmente não há um consenso a respeito da melhor ou mais adequada forma para realizar a estrutura de controle necessária para a locomoção com patas, sendo a escolha dependente em grande parte dos requisitos de projeto e limitações do sistema.

1.2.1 Modelos matemáticos e o controle

Para o controle, a utilização de um modelo matemático capaz de reproduzir o comportamento do sistema físico a ser controlado pode impactar tanto as etapas de projeto quanto a implementação e validação, influenciando aspectos como a complexidade, exequibilidade, e precisão do controlador resultante. Um modelo matemático caracteriza uma abstração de um sistema físico real representada por meio da linguagem matemática, reduzindo a investigação de um fenômeno do mundo externo para um problema matemático (EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY, 2011). Nesse contexto, abstrair envolve incluir apenas os detalhes relevantes para uma dada aplicação, sendo a proximidade de seu comportamento em relação ao sistema físico real mensurada pelo grau de fidelidade. O *modelo*⁴ constitui uma importante ferramenta para caracterizar desvios da normalidade, servindo como referência para o comportamento esperado do sistema real; para estabelecer a correlação entre entradas e saídas, expandindo a quantidade de informações disponíveis; ou mesmo para o planejamento de ações futuras.

O controle baseado em modelo (*model-based control*) viabiliza a exploração da dinâmica natural do sistema, possibilitando tanto a utilização mais eficiente dos recursos disponíveis quanto a predição do comportamento futuro, todavia, sua capacidade sempre estará limitada pelo grau de fidelidade do modelo em relação ao sistema real que ele representa. Apesar de ferramentas como a identificação de sistemas e o controle robusto mitigarem esse problema, em determinados casos, utilizar um modelo pode não ser factível em virtude de alta complexidade do sistema ou insuficiência de dados, sendo necessário empregar técnicas de controle livres de modelo (*model-free control*). Atualmente, combinar aspectos de ambas vertentes em uma mesma estrutura de controle constitui uma prática comum na literatura, o que dificulta a classificação de trabalhos individuais como pertencentes a uma ou outra categoria.

1.3 Revisão de literatura

Tendo em vista a estrutura de controle para locomoção com patas (Figura 1), a literatura selecionada foi coletada para apresentar as diferentes formas existentes para implementar o controle da locomoção com patas, sendo classificada em função do tipo de controle (*model-based* ou *model-free*) predominantemente empregado.

⁴ Neste trabalho, “modelo” e “modelo matemático” são usados de forma intercambiável.

1.3.1 Controle cinemático

O controle cinemático configura um dos tipos de controle mais tradicionais da robótica industrial em virtude ampla difusão de atuadores servo-controlados (em que a entrada de controle disponível para o usuário compõe um ângulo ou velocidade de referência) característicos pela elevada redução de velocidade ($> 100:1$). Esse método de controle envolve a utilização de um modelo cinemático do robô, que leva em conta os aspectos geométricos do sistema sem considerar os geradores de movimento, para derivar os ângulos das juntas a partir de uma trajetória desejada expressa no espaço operacional (e.g., posição em coordenadas cartesianas do efetuador). Esse mapeamento do espaço operacional para o espaço das juntas constitui a *cinemática inversa*, um problema significativamente mais complexo que seu dual, a cinemática direta, em função da dificuldade (ou impossibilidade) de se encontrar uma expressão analítica bem como a multiplicidade ou até mesmo inexistência de soluções.

Zhang, Li e Ma (2021) apresenta uma estratégia de controle de posição aplicado ao controle de movimentação de um robô quadrúpede servo-controlado. Uma referência de posição provém da fase de balanço, estando correlacionada com o posicionamento das patas necessário para controlar a velocidade do tronco. Adicionalmente, define-se uma referência de velocidade para a fase de suporte em busca da regulação da arfagem do tronco. Ambos sinais de referência são combinados para gerar um sinal unificado de velocidade linear em coordenadas cartesianas a ser mapeado para o espaço das juntas utilizando a matriz Jacobiana inversa, que caracteriza um método numérico alternativo a derivação analítica da cinemática inversa para gerar as velocidades das juntas. Nesse método as velocidades das juntas devem ser integradas para se obter os ângulos das juntas, estando sujeito ao fenômeno de deriva em função dos erros cumulativos provenientes da integração numérica.

Visando a aplicação em robôs quadrúpedes acionados por atuadores hidráulicos, Fang et al. (2023) desenvolve um controlador de código aberto envolvendo uma estratégia de controle distribuído baseada no controle de posição das patas. Comparado a atuadores elétricos, atuadores hidráulicos naturalmente apresentam elevada densidade de potência, alta capacidade de carga, e resistência passiva à impactos, o que os torna atrativos para aplicações envolvendo a locomoção com patas. Na abordagem proposta, as trajetórias desejadas das patas descritas em coordenadas cartesianas são utilizadas para calcular o erro no espaço operacional para então serem mapeadas para o espaço das juntas utilizando a matriz Jacobiana inversa, sendo as velocidades resultantes integradas para se obter os ângulos das juntas.

1.3.2 Controle de impedância

Conforme previamente discutido, a interação com o ambiente constitui um aspecto fundamental para a locomoção com patas, sendo um dos principais fatores responsáveis pela movimentação. Visando compreender a mecânica dessa interação, uma analogia pode ser estabelecida entre o contato das patas com o solo e um tópico bem fundamentado na literatura de robótica, a manipulação de objetos por robôs industriais. Com a exceção de algumas aplicações (e.g., soldagem, pintura em spray) onde a interação dinâmica entre o manipulador e o objeto manipulado pode ser desprezada, em geral, esse acoplamento não permite que o manipulador seja tratado como um sistema isolado, sendo insuficiente o controle tradicional envolvendo apenas uma grandeza vetorial como a posição, velocidade ou força (HOGAN, 1985).

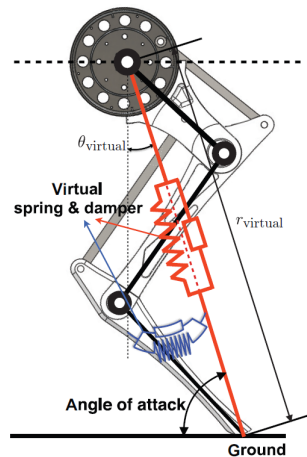
A troca de energia entre dois sistemas físicos pode ser caracterizada pelo produto entre um par de variáveis complementares, o *esforço* (e.g., tensão elétrica, força, temperatura) e o *fluxo* (e.g., corrente elétrica, velocidade, calor). A relação entre essas duas variáveis para um determinado sistema define se ele atua como uma *impedância* ou uma *admitância*. A admitância aceita como entrada uma variável de esforço tendo como saída uma variável de fluxo, já a impedância tem como entrada uma variável de fluxo e como saída uma variável de esforço.

Conforme Hogan (1985), em virtude das inércias e/ou restrições cinemáticas envolvendo as tarefas de manipulação, ambas sujeitas a imposição de forças mas nem sempre a movimentação, o ambiente pode ser visto pelo manipulador como uma admitância, devendo o manipulador assumir o comportamento de uma impedância para garantir a compatibilidade física. Mediante o acoplamento não desprezível entre o manipulador e o objeto manipulado, o controle deve especificar tanto uma grandeza vetorial (e.g., posição, velocidade, força) quanto a interação dinâmica. Dessa forma, define-se o controle de impedância como o controle do movimento em conjunto com a especificação da interação dinâmica expressa na forma de uma impedância constante ou variável. Apesar de não ser utilizada neste trabalho, a variabilidade ser explorada para melhorar a adaptação do sistema a diferentes condições ambientais, ampliando o espectro de aplicações do controle. Para maiores detalhes a respeito do Controle de Impedância Variável (VIC) ver Abu-Dakka e Saveriano (2020).

Aplicado à locomoção com patas, esse tipo de controle tem capacidade para minimizar os esforços advindos do impacto, reagir de forma segura a obstáculos e distúrbios imprevistos, e permitir o deslocamento em terrenos irregulares sem a necessidade de informações adicionais como o mapeamento. Uma possível realização para o controle de impedância, amplamente utilizada no contexto da locomoção com patas (RAIBERT et al., 2008; HYUN et al., 2014), envolve o Controle via Modelo Virtual (VMC). Segundo Pratt, Dilworth e Pratt (1997), o VMC visa simular a inclusão de um

componente físico virtual (e.g., mola, amortecedor) na dinâmica natural do sistema através do controle. A Figura 2 representa visualmente o efeito do VMC ao sobrepor o mecanismo de uma das patas do robô com uma impedância (mola e amortecedor) representada em coordenadas polares. Apesar de não ter esse objetivo, o VMC não

Figura 2 – Representação do controle de impedância via modelo virtual, nesse caso simulando a inclusão de uma mola e amortecedor nas direções radial e angular.



Fonte: (HYUN et al., 2014).

garante a realização do rastreamento trajetória e da interação dinâmica planejada visto que desconsidera a influência da dinâmica original do sistema (e.g., efeitos inerciais, de atrito, e gravitacionais). A limitação do VMC pode ser resolvida ao elevar a complexidade do controle e utilizar a *dinâmica inversa* para derivar a lei de controle, compensando a dinâmica original do sistema e impondo a impedância desejada.

1.3.3 Controle híbrido de força/posição

Diferente do controle de impedância, que trata o movimento livre e o movimento restrito de forma unificada, o controle híbrido de força/posição envolve a especificação tanto da força quanto da posição (ou velocidade), cada uma respectiva a um tipo de movimento (livre ou restrito) pertinente a uma mesma tarefa. Nessa metodologia, tarefas são descritas no espaço operacional (KHATIB, 1987) considerando, de forma independente, os graus de liberdade disponíveis e as forças e momentos necessários para manter as restrições cinemáticas.

No contexto de manipuladores industriais, Raibert e Craig (1981) define o controle híbrido de força/posição com base no preceito de que toda tarefa de manipulação pode ser desmembrada em componentes elementares associados a um determinado conjunto de *restrições naturais* (de força ou movimento) provenientes das características mecânicas e geométricas particulares da tarefa. Complementares às restrições naturais, as *restrições artificiais* correspondem a especificações de força e posição (ou velocidade)

introduzidas pelo controle. Dessa forma, a seleção entre os dois tipos de controle é feita de forma discreta em função do tipo de restrição atuante no sistema em um determinado instante de tempo. Essa descontinuidade juntamente a disparidade entre as especificações de movimento e de força tipicamente exigem a definição de algum método para suavizar o estado de transição entre movimentação livre e restrita, o que torna esse método de controle mais adequado para aplicações onde preferencialmente não há alteração no conjunto de restrições naturais.

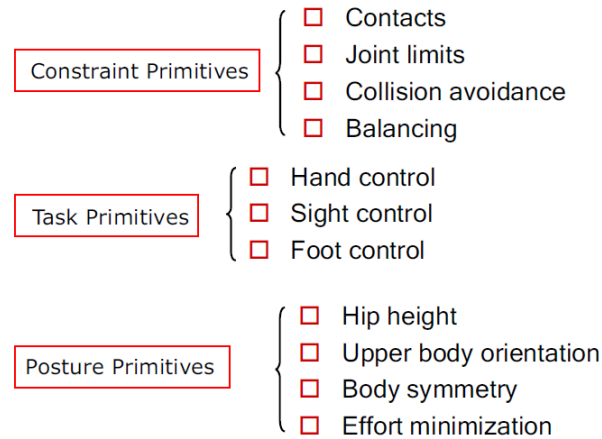
1.3.4 Controle de Corpo Inteiro (WBC)

Além da especificação da posição e orientação das patas, objetivos de controle pertinentes a robôs de base flutuante podem envolver combinações de coordenadas associadas com diferentes partes do robô, a postura do robô como um todo, e restrições advindas de limitações do sistema bem como de interações com o ambiente (SENTIS; KHATIB, 2005b). Dessa forma, para que seja efetiva, a estratégia de controle adotada precisa ser capaz de atender a múltiplos objetivos, possivelmente conflitantes, simultânea e harmoniosamente.

Khatib et al. (2004) define o Controle de Corpo Inteiro (WBC) como uma estratégia de controle no espaço operacional envolvendo a síntese de comportamentos complexos a partir da junção de múltiplos *comportamentos primitivos* organizados conforme uma hierarquia pré-estabelecida. Nesse método, a resolução de conflitos provém da manutenção da estrutura hierárquica, que é assegurada pela projeção de comportamentos primitivos de menor prioridade no espaço nulo de comportamentos primitivos com maior prioridade. Em virtude da projeção no espaço nulo, esse método naturalmente apresenta um custo computacional mais elevado.

No WBC, comportamentos primitivos representam funções dos estados do sistema que quantificam um comportamento desejado (e.g., rastreamento de trajetória das patas, regulação do tronco, limitação do ângulo das juntas). Sentis e Khatib (2006), conforme apresenta a Figura 3, estabelece três classes para esses comportamentos definidas em ordem decrescente de prioridade: primitivos de restrição, primitivos de tarefa, e primitivos de postura. O maior nível de prioridade é atribuído aos primitivos de restrição, que representam algum tipo de restrição advinda da interação com o ambiente (e.g., contato, desvio de obstáculos) ou de limitações/requisitos do sistema (e.g., limitação do ângulo das juntas, manutenção do equilíbrio). Com um nível intermediário de prioridade definem-se os primitivos de tarefas, que constituem ações típicas de controle (e.g., manipulação, movimentação). Na base da hierarquia se encontram os primitivos de postura, que visam aproveitar a possível redundância residual para implementar ações como a regulação da altura do quadril, da orientação do tronco, manutenção da simetria do corpo, e minimização de esforços.

Figura 3 – Categorização dos comportamentos primitivos em três classes: (i) primitivos de restrição (*constraint primitives*), primitivos de tarefa (*task primitives*), e primitivos de postura (*posture primitives*).



Fonte: (SENTIS; KHATIB, 2006).

Em comparação com a maioria dos manipuladores industriais, robôs de base flutuante possuem uma maior quantidade de graus de liberdade (DOF), um aspecto especialmente observável em robôs humanoides, a exemplo do ASIMO (SAKAGAMI et al., 2002) com 26-DOF, e do PETMAN (NELSON et al., 2012), precursor do ATLAS da Boston Dynamics, com 29-DOF. Além disso, robôs de base flutuante contam por definição com menos juntas ativas que graus de liberdade, o que juntamente com a característica anterior resulta em parcial controlabilidade e (possível) redundância. Sentis e Khatib (2005a) caracteriza o WBC com um enfoque nessas peculiaridades, sugerindo que a representação do sistema original no espaço das juntas, envolvendo tanto os estados respectivos a base flutuante quanto as juntas ativas, pode ser convertida para o subespaço controlável descrito somente em função das juntas ativas.

Como exemplo de aplicação real para o controle da locomoção quadrúpede, Barasuol et al. (2013) integra o controle de movimento baseado no WBC para rastrear as trajetórias desejadas das patas e regular a pose do tronco. A regulação da pose do tronco, tida como uma tarefa menos prioritária, emprega a projeção no espaço nulo de forma a não interferir com o posicionamento das patas. As simulações e experimentos realizados com o robô HyQ (SEMINI et al., 2011) demonstraram que esse método foi capaz de permitir a locomoção em terrenos acidentados mesmo sem utilizar um mapa do ambiente.

1.3.5 Controle ótimo

Um dos principais desafios na robótica com patas envolve a transferência de controladores projetados em simulação para aplicação no mundo real. Especialmente susceptível a esse problema, o controle baseado em modelo depende da proximidade do modelo em relação ao sistema real para garantir a viabilidade física de suas soluções. Nesse contexto, o controle ótimo, por meio de sua representação do problema de controle como um critério, função custo ou objetivo a ser otimizado tem capacidade para reduzir a dependência do modelo.

O processo de otimização implica encontrar as variáveis de otimização que minimizem (ou maximizem) uma função objetivo tendo em vista assegurar o atendimento de certas restrições. As restrições definem funções dos parâmetros de projeto que codificam certos objetivos de projeto (e.g., consistência dinâmica, rastreamento de trajetória, não escorregamento) ou limitações do sistema (e.g., faixa de operação segura dos atuadores, limites físicos das juntas). A complexidade do problema juntamente às limitações existentes são aspectos que definem a relação entre o intervalo de tempo necessário e o disponível para otimização. Conforme Wensing et al. (2022), essa disponibilidade de tempo permite caracterizar duas possíveis vertentes para o controle ótimo, o controle preditivo e o controle reativo.

O controle preditivo define um processo cíclico (com realimentação intrínseca) e sequencial que compreende a análise do estado do sistema, a predição do comportamento esperado ao longo de um horizonte de tempo finito, o planejamento das ações de controle a serem realizadas nesse período, e a aplicação do primeiro sinal de controle planejado. Nesse método, a presença de um horizonte temporal incorre em melhor estabilidade (DI CARLO et al., 2018) e viabilidade recursiva (RATHOD et al., 2021), no entanto, esse mecanismo restringe a capacidade de resolver problemas complexos em virtude do (ainda) elevado custo computacional envolvido na simulação do sistema para toda uma janela de tempo. Di Carlo et al. (2018) faz uso de um controlador preditivo cuja função é determinar as GRFs necessárias para locomoção do robô quadrúpede MIT Cheetah 3 com base no rastreamento de uma trajetória desejada para o centro de massa do robô e marchas pré-definidas. Em virtude das limitações do controle preditivo, a dinâmica do sistema teve de ser incorporada usando um modelo simplificado do robô, envolvendo apenas a dinâmica centroidal do tronco com a componente angular linearizada.

Diferentemente do controle preditivo, o controle reativo envolve a solução de problemas de otimização considerando apenas os estados atuais do sistema. Comumente empregado para gerar uma distribuição otimizada das GRFs com base nas forças e momentos necessários para controlar a pose do tronco, esse tipo de controle ótimo pode envolver ora modelos simplificados do robô (GEHRING et al., 2013; FOCCHI et

al., 2017) ora o modelo completo (FAHMI et al., 2019), a depender do dinamismo da locomoção. Empregando um modelo simplificado do robô, Rathod et al. (2021) utiliza como entrada forças e momentos atuantes no tronco planejadas de forma a garantir viabilidade física do movimento. Seguindo essa linha, Focchi et al. (2017) propõe uma estratégia de controle visando a locomoção em terrenos com elevada inclinação (> 45 graus). A otimização busca regular a posição do centro de massa do robô e a orientação do tronco levando em consideração, na função objetivo, a consistência dinâmica e a minimização dos esforços, sendo o não escorregamento interpretado como uma restrição. Fahmi et al. (2019) descreve uma estratégia de controle para locomoção quadrúpede baseada na otimização da aceleração do centro de massa do robô, da aceleração das juntas e das GRFs. No problema de otimização, a função custo envolve a minimização dos esforços de controle e o rastreamento das tarefas de movimento (respectivas ao centro de massa e as patas em balanço), sendo o modelo dinâmico do robô, as condições de não escorregamento e os limites dos torques de atuação e dos ângulos das juntas interpretados como restrições.

Na função objetivo, tradicionalmente os múltiplos requisitos de projeto são ponderados com base na criticidade para a aplicação, no entanto, essa abordagem não garante que uma ordem de prioridade seja obedecida. Caso a manutenção da hierarquia de tarefas seja importante, torna-se necessário elevar a complexidade e adicionar um mecanismo que seja capaz de garantir que as relações hierárquicas sejam respeitadas (e.g., projeção no espaço nulo). Na otimização hierárquica, o problema de otimização original é segmentado em diversos subproblemas, definidos com base nos níveis hierárquicos (grupo de tarefas) existentes, a serem solucionados em ordem decrescente de prioridade. Em seu trabalho seminal, Hutter et al. (2014) demonstra a aplicabilidade da otimização hierárquica através da projeção no espaço nulo iterativa para locomoção quadrúpede dinâmica e ágil, definindo categorias de tarefas com base em três parâmetros de projeto a serem otimizados: (i) aceleração no espaço operacional, (ii) torque nas juntas, e (iii) forças de contato. Utilizando o robô quadrúpede StarlETH (HUTTER et al., 2014), esse trabalho realiza conjuntos de experimentos envolvendo diferentes tipos de marcha, sendo estabelecidas duas tarefas cinemáticas: restrição das patas em contato com o solo, e rastreamento da pose desejada para o tronco; e sete tarefas dinâmicas: consistência dinâmica, minimização dos esforços nos atuadores, minimização da magnitude das forças de contato, limites físicos dos atuadores e das juntas, minimização do escorregamento, e minimização do impacto na transição de fase de locomoção. No geral, as tarefas que definem a consistência dinâmica e a restrição das patas em contato apresentam maior prioridade, seguido das tarefas de limitação e posteriormente as de rastreamento e minimização.

1.3.6 Geradores Centrais de Padrões (CPGs)

A ritmicidade demarcada pela sucessão alternada de períodos de suporte e balanço compõe um dos aspectos fundamentais da locomoção. Na natureza, atividades rítmicas envolvendo funções vitais como a respiração, a mastigação, a deglutição, assim como a locomoção são produzidas por Geradores Centrais de Padrões (CPGs), que compõem circuitos neurais especializados capazes de gerar sinais rítmicos de forma autônoma independentemente da presença de estímulos. Apesar de intuitivo, replicar cegamente os mecanismos presentes nos animais (bio-mimética) e esperar resultados equivalentes nem sempre é possível ou mesmo recomendado por conta das disparidades entre os sistemas físicos. Visando considerar essas diferenças, faz-se necessário discernir os aspectos biológicos que sejam realmente aplicáveis a sistemas artificiais (bio-inspiração).

No contexto da bio-inspiração, Yu et al. (2014) elenca quatro aspectos dos CPGs biológicos aplicáveis a locomoção de robôs com patas: a autonomia para geração de sinais rítmicos, a estabilidade proveniente da correspondência matemática a um ciclo-limite estável, a adaptabilidade via *realimentação sensorial*⁵, e a flexibilidade para estabelecer diferentes comportamentos motores em uma mesma estrutura. Dentre as possíveis vantagens de CPGs para o controle da locomoção, Ijspeert (2008) pauta a robustez a perturbações, a possibilidade de implementação distribuída, a reduzida dimensionalidade dos parâmetros de controle, a capacidade de adaptação via realimentação sensorial, e a adequação para otimização em geral.

Tendo em vista que para aplicações de controle não há muita vantagem em se utilizar modelos complexos para representar os CPGs (IJSPEERT, 2008), a maioria dos trabalhos envolve sua modelagem através de osciladores não lineares acoplados. Baseado em osciladores Hopf modificados, Liu et al. (2018) implementa uma estratégia de controle para locomoção quadrúpede em terrenos acidentados. A metodologia proposta combina a saída do CPG (posição angular das juntas ativas) com o VMC, onde nesse caso o componente virtual corresponde a uma mola e amortecedor associados a orientação e velocidade angular do tronco. Na mesma linha, Wang et al. (2019) propõe um esquema de controle envolvendo um CPG com osciladores metamorfoseados (*morphed oscillators*) aliado a um VMC para a regulação da orientação do tronco. Em ambos trabalhos, a adição do VMC melhorou o desempenho para locomoção em terrenos acidentados, eliminando a deriva na guinada e permitindo uma velocidade de avanço ligeiramente maior.

⁵ Apesar de não ser um requisito para geração dos sinais rítmicos, a influência externa tem um papel crucial na síntese de comportamentos adaptativos (MACKAY-LYONS, 2002).

1.3.7 Aprendizado de máquina

Nos últimos anos, o aprendizado de máquina, uma vertente da inteligência artificial característica pela otimização automática usando exemplos e experiências passadas, vem ganhando espaço em aplicações de controle, sendo empregado para simplificar e automatizar tanto o projeto quanto a implementação de controladores. Dentre os paradigmas do aprendizado de máquina, o aprendizado por reforço tem sido um dos mais relevantes para o controle da locomoção quadrúpede, com aplicações reais se mostrando capazes de desbloquear o potencial da robótica com patas ao expandir o leque de habilidades motoras (LEE et al., 2020) e permitir a locomoção efetiva em terrenos desafiadores (e.g., lama, neve, gelo) (MA et al., 2022; LI et al., 2022). Apesar dessa técnica estar inerentemente sujeita a demora no treinamento, um processo tipicamente realizado em simulação que pode levar semanas ou meses a depender do equipamento disponível (HWANGBO et al., 2019), atualmente a transferência do conhecimento aprendido nesse ambiente controlado para o mundo real configura um dos principais desafios para sua utilização na prática.

Envolvendo o treinamento de uma política de controle via aprendizado por reforço, Hwangbo et al. (2019) investiga a aplicabilidade dessa técnica para locomoção ágil e dinâmica de robôs quadrúpedes reais dotados de atuadores complexos (e.g., servomotores, atuadores elásticos em série (SEAs), cilindros hidráulicos) como o robô ANYmal (HUTTER et al., 2016). A política de controle, implementada por um Percéptron Multicamadas (MLP), utiliza os estados do sistema para gerar sinais de referência para as juntas ativas. Empregando a mesma metodologia para o treinamento mas uma política de controle distinta, Lee et al. (2020) avalia o potencial para locomoção em terrenos desafiadores. Nesse caso, a política de controle, que envolve uma Rede Neural Convolucional Temporal (TCN) seguida de um MLP, é usada em conjunto com um gerador de trajetórias para sintetizar as trajetórias desejadas das patas em coordenadas cartesianas.

Tendo em vista a reusabilidade da política de controle para robôs com características geométricas e físicas distintas, Li et al. (2022) verifica a capacidade de redirecionamento *zero-shot* (*zero-shot retargeting*) de um método baseado no aprendizado por reforço. O redirecionamento *zero-shot* consiste em transferir as diversas habilidades motoras aprendidas em simulação para um sistema físico real possivelmente distinto sem a necessidade de retreinamento. Considerando esse requisito, o aprendizado por reforço foi utilizado apenas para geração de trajetórias, sendo as particularidades de cada sistema físico compensadas no controle do movimento implementado por uma estratégia de controle baseada em modelo. Similarmente, Ma et al. (2022) aplica esse conceito para um robô com patas e manipulador, utilizando o aprendizado por reforço para locomoção, e o controle baseado em modelo para a manipulação.

1.4 Objetivos e abordagem proposta

Apesar do gradativo aumento em complexidade na tentativa de cobrir situações cada vez mais específicas (e.g., escolha dos pontos de apoio em terrenos granulares), o controle baseado em modelo, ainda desprovido de atributos como a generalidade e robustez necessários para locomoção em situações mais complexas (LEE et al., 2020), permanece incapaz de desbloquear todo o potencial da locomoção com patas. Essa “frustração” com o controle baseado em modelo juntamente aos recentes avanços da inteligência artificial justificam a mudança de foco dos principais grupos de pesquisa, que deixaram de lado o controle *puramente* baseado em modelo e passaram a integrar aspectos do controle livre de modelo (LI et al., 2022; MAGAÑA et al., 2019; HWANGBO et al., 2019). Mesmo diante desse cenário, como definir o grau de complexidade realmente necessário para permitir a locomoção com patas de forma adequada, algo que remete às limitações intrínsecas do controle baseado em modelo, permanece sem resposta definitiva.

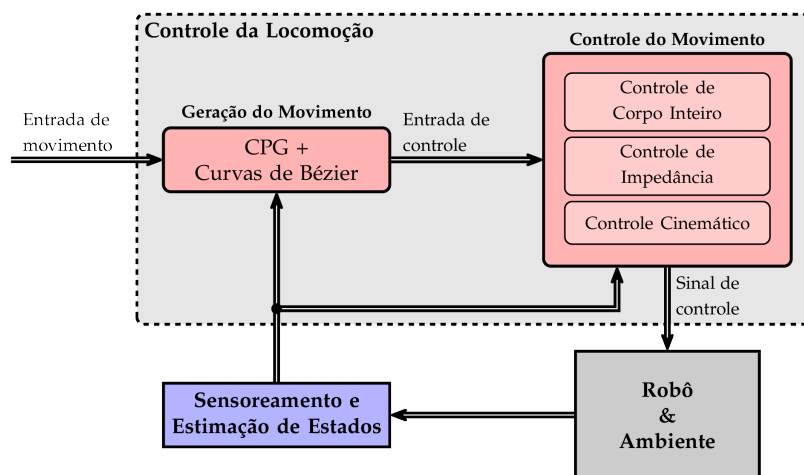
No contexto do controle de corpo inteiro, interpreta-se a locomoção com patas como um comportamento complexo a ser sintetizado através da combinação de múltiplas tarefas primitivas organizadas em uma hierarquia estabelecida conforme os requisitos da aplicação. A especificação de tarefas primitivas e a definição dos diferentes níveis de prioridade caracterizam fatores primordiais para obter um bom desempenho do controle da locomoção com patas, no entanto, dado que o desempenho também depende das características do sistema e da aplicação em questão, torna-se difícil definir uma configuração mínima que atenda a todos os requisitos simultaneamente. Nesse sentido, este trabalho investiga como a complexidade do sistema de controle afeta o desempenho da locomoção quadrúpede. Intuitivamente se espera encontrar que quanto maior a complexidade, melhor o desempenho para locomoção. A metodologia proposta envolve gradualmente elevar a complexidade do sistema de controle, incorporando aspectos que em teoria deveriam melhorar o desempenho da locomoção, e ao longo do caminho avaliar seu progresso, analisando se o aumento de complexidade resultou em avanço, retrocesso, ou manutenção de desempenho para locomoção.

Todo o desenvolvimento foi realizado em um protótipo virtual desenvolvido no Simulink em conjunto com o *toolbox* Simscape Multibody. O pacote MATLAB+Simulink, apesar de ser uma ferramenta amplamente difundida para as mais diversas aplicações de controle, é raramente empregado para simulação e controle de robôs com patas. Neste trabalho, optou-se pela utilização do Simulink tanto por sua vasta gama de ferramentas acessíveis e robustas disponibilizadas para desenvolver, testar, aplicar, e validar sistemas de controle, quanto pelos anos de experiência prévia do autor trabalhando com essa ferramenta; ambos fatores que facilitaram a implementação dos

sistemas utilizados no trabalho, poupando tempo e recursos físicos. Para representar o robô quadrúpede, optou-se pela síntese de um modelo a partir de corpos rígidos simples que apresentasse uma estrutura cinemática e propriedades dinâmicas similares ao robô MIT Cheetah 3 (BLEDT et al., 2018), uma plataforma robusta projetada para locomoção dinâmica omnidirecional. Dois cenários de simulação são propostos para avaliar a implementação das estratégias de controle no robô quadrúpede. O primeiro cenário tem como objetivo investigar o efeito isolado do impacto com o solo no desempenho do controle, estando o robô sujeito a queda livre (com o tronco inicialmente a uma altura de um metro do solo) devendo ser mantidas as condições iniciais das patas. O segundo cenário busca verificar o desempenho do controle aplicado a locomoção usando a marcha trote. No primeiro cenário são avaliados o desempenho e a viabilidade do controle, já no segundo, além do desempenho e a viabilidade do controle, são avaliadas grandezas relacionadas com a locomoção.

Considerando a estrutura de controle descrita na Figura 1, define-se a implementação de seus dois principais módulos, a geração e o controle de movimento conforme apresenta a Figura 4. A geração do movimento foi implementada por um módulo para geração de trajetórias previamente desenvolvido e validado (DE PAULA; GODOY; BECERRA-VARGAS, 2022), que integra um CPG para conduzir o ritmo de locomoção, modulando as trajetórias das patas descritas por meio de curvas de Bézier. Relativo ao sensoreamento foram utilizados apenas os sensores disponibilizados pelo Simulink e o Simscape Multibody. Por fim, o controle do movimento, que caracteriza a plataforma utilizada para avaliar o efeito da complexidade do sistema de controle no desempenho da locomoção, é representado por uma de três estratégias de controle com diferentes níveis de complexidade: o controle cinemático, o controle de impedância (via controle virtual e via dinâmica inversa) e o controle de corpo inteiro.

Figura 4 – Diagrama de blocos representativo do sistema de controle proposto.



Fonte: Autoria própria.

1.4.1 Lista de publicações

DE PAULA, D. T.; GODOY, E. P.; BECERRA-VARGAS, M. Towards Dynamic Quadruped Locomotion: Development of a CPG-driven Foot Trajectory Generator. In: *Proceedings of the 30th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Vouliagmeni, Greece: IEEE, 2022. p. 988–993.

1.5 Principais contribuições

- Demonstração do efeito da complexidade do sistema de controle da locomoção sobre o desempenho resultante para locomoção quadrúpede.
- Definição de uma hierarquia de tarefas capaz de permitir simultaneamente o rastreamento da trajetória das patas e a regulação da orientação do tronco.

1.6 Organização do trabalho

No Capítulo 2 são detalhados aspectos relativos ao desenvolvimento do modelo dinâmico do robô quadrúpede, sendo estabelecida a estrutura do robô e derivados os termos pertinentes a cinemática e dinâmica do sistema para utilização nas leis de controle. O Capítulo 3 define o protótipo virtual construído para simular o robô quadrúpede e seu ambiente, descrevendo a construção do modelo virtual, as formas para interação com o mundo real (i.e. dados sensoreados e visualização tridimensional), e as ferramentas utilizadas para teste e validação do protótipo como plataforma capaz de avaliar o desempenho da locomoção quadrúpede (i.e. configuração dos dois cenários de simulação e o cálculo dos índices de desempenho). Estabelecidos os requisitos necessários para construção, aplicação, e validação do controle, os dois capítulos seguintes delimitam o controle da locomoção conforme proposto neste trabalho. O Capítulo 4 apresenta uma breve descrição dos componentes que integram o módulo para geração do movimento e seus parâmetros característicos, definindo a trajetória desejada para as patas e os parâmetros do CPG. Já o Capítulo 5 define o controle do movimento, apresentando a formulação das tarefas primitivas e as leis de controle respectivas a cada controlador utilizado. No Capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos para os dois cenários de simulação propostos, havendo ao final de cada cenário uma discussão comparando o desempenho individual dos controladores e analisando sua correlação com a complexidade do controle. Por fim, o Capítulo 7 aponta as conclusões derivadas do trabalho e elenca as perspectivas para trabalhos futuros.

2 Modelo do Robô

O modelo dinâmico objetiva representar um sistema físico real de forma a esclarecer questões referentes ao movimento e as forças atuantes nos diferentes componentes do sistema. Quando integrado a um protótipo virtual, um modelo dinâmico bem projetado tem grande potencial para minimizar a dependência por recursos físicos, reduzindo os custos envolvidos no projeto, produção, e manutenção de sistemas. Um aspecto importante para definir o nível de fidelidade do modelo dinâmico, especialmente em aplicações de controle, consiste em avaliar a disponibilidade de informação a respeito do sistema. No caso de um robô quadrúpede, apesar da existência de múltiplos exemplares implementados com sucesso na prática (e.g., MIT Cheetah 3, ANYmal, HyQ), a falta de informações detalhadas a respeito dos vários componentes do sistema dificulta a construção de um modelo dinâmico que represente precisamente um desses robôs. Tendo em vista essa limitação, neste trabalho optou-se por desenvolver um modelo dinâmico priorizando a integração de características fundamentais. Em específico, foi escolhido como referência o MIT Cheetah 3 (BLEDT et al., 2018), um robô quadrúpede com 18-DOF projetado para se locomover de forma dinâmica, com capacidade para se deslocar rapidamente nos mais variados tipos de terrenos e um legado marcado por impressionantes feitos de agilidade.

Nesse capítulo são detalhados aspectos relativos ao desenvolvimento do modelo dinâmico respectivo ao robô quadrúpede. Caso não haja sobrescrito, considerar que a grandeza se encontra expressa no referencial inercial absoluto fixo no solo. A Seção 2.1 estabelece a estrutura do robô, definindo as propriedades geométricas e inerciais dos corpos rígidos envolvidos bem como uma padronização para a atribuição de subscritos visando facilitar a identificação de parâmetros respectivos a cada corpo rígido. A Seção 2.2 trata da análise cinemática, envolvendo a descrição do movimento dos componentes do sistema usando sistemas de coordenadas rigidamente acoplados aos corpos. Já a Seção 2.3 caracteriza a dinâmica partindo de princípios físicos envolvendo a variação da energia do sistema.

2.1 Estrutura do robô

A estrutura do robô quadrúpede pode ser decomposta em três grupos de corpos rígidos interconectados por juntas: o tronco, as patas, e os atuadores. O tronco integra a parte central do quadrúpede, estando acoplado às quatro patas através dos atuadores na primeira junta ativa de cada pata. As patas são compostas de três corpos rígidos (*links*) interconectados através dos atuadores. Já os atuadores compõem duas partes,

uma fixa (e.g., carcaça e o estator) que pode ser representada por um único corpo rígido, e outra móvel (e.g., rotor e a transmissão), representada por ao menos um corpo rígido. Assim, o robô quadrúpede utilizado integra um total de 37 corpos rígidos, sendo eles o tronco, três *links* e três atuadores por pata, onde cada atuador envolve dois corpos rígidos. Em função da quantidade de corpos rígidos envolvidos foi necessário estabelecer uma padronização para atribuição de subscritos com o intuito de facilitar a identificação dos parâmetros respectivos a cada corpo rígido. Essa padronização envolve compor o subscrito de forma sequencial, da esquerda para direita, não sendo possível omitir níveis anteriores, conforme apresenta a seguinte enumeração:

1. Subscrito pré-existente. Opcionalmente podem ser utilizados parênteses em tamanho normal envolvendo o símbolo principal anexo ao subscrito pré-existente para facilitar seu discernimento.
2. Sigla do grupo ou subgrupo correspondente (*b* para tronco, *l* para *links* das patas, *ms* para parte fixa dos atuadores, *mr* para parte móvel dos atuadores, *f* para a extremidade das patas que entrará em contato com o solo).
3. Numeração da pata correspondente (1, 2, 3, ou 4). Caso não seja especificado um índice numérico convencionase utilizar a variável *j*.
4. Numeração relativa a pata (1, 2, ou 3). Caso não seja especificado um índice numérico convencionase utilizar a variável *k*.

Como exemplo da aplicação dessa padronização representa-se a massa (*m*) do tronco como m_b , a massa do *link* 1 (sem especificar a pata) como m_{lj1} , e o comprimento (l_x) do *link* 1 (sem especificar a pata) como l_{xlj1} ou $(l_x)_{lj1}$.

Tendo em vista a síntese do modelo a partir de corpos rígidos com uma geometria simples, tanto o tronco quanto as patas foram representados como prismas, já os atuadores, nesse caso compondo apenas dois corpos rígidos, foram representados como cilindros. A Tabela 2 apresenta um sumário das propriedades geométricas e inerciais respectivas aos principais componentes do robô quadrúpede considerando todas as patas e atuadores como idênticos. Nessa tabela, cada linha define a massa, a geometria, e as dimensões respectivas a cada subgrupo de corpos rígidos pertinentes ao robô quadrúpede. As dimensões dos corpos rígidos são expressas de acordo com a sua geometria, sendo prismas caracterizados pelo comprimento, largura, e altura, e cilindros, pelo diâmetro e altura. Tanto a massa quanto as dimensões foram baseadas nos dados respectivos ao MIT Cheetah 3, sendo que em especial, a massa dos *links* foi estimada a partir do somatório das massas de todos os *links* das quatro patas de 2,7 kg (BLEDT et al., 2018) considerando uma densidade uniforme. Relativo ao atuador, para parte fixa foi considerada uma massa próxima da especificada para o motor HT05001

(1,28 kg) utilizado em uma versão prévia do MIT Cheetah (MCKENZIE, 2012), enquanto a parte móvel foi estimada considerando a geometria e uma densidade uniforme de 7850 kg/m^3 . Vale ressaltar que os tensores de inércia necessários para o modelo dinâmico foram calculados em função da massa e geometria de cada componente.

Tabela 2 – Propriedades geométricas e inerciais dos grupos e subgrupos de corpos rígidos que integram o robô quadrúpede utilizado. O dado apresentado na coluna respectiva as dimensões depende do tipo de geometria, sendo correspondente ao comprimento, largura e altura para prismas e ao diâmetro e espessura para cilindros.

Grupo	Subgrupo	Massa	Geometria	Dimensões [mm]
Tronco	–	20 kg	Prisma	(410, 300, 200)
	Link 1	25,6 g	Prisma	(150, 40, 40)
Patas	Link 2	325 g	Prisma	(350, 40, 40)
	Link 3	325 g	Prisma	(350, 40, 40)
Atuadores	Parte fixa	1 kg	Cilindro	(150, 20)
	Parte móvel	888 g	Cilindro	(120, 10)

Fonte: Autoria própria.

2.2 Cinemática

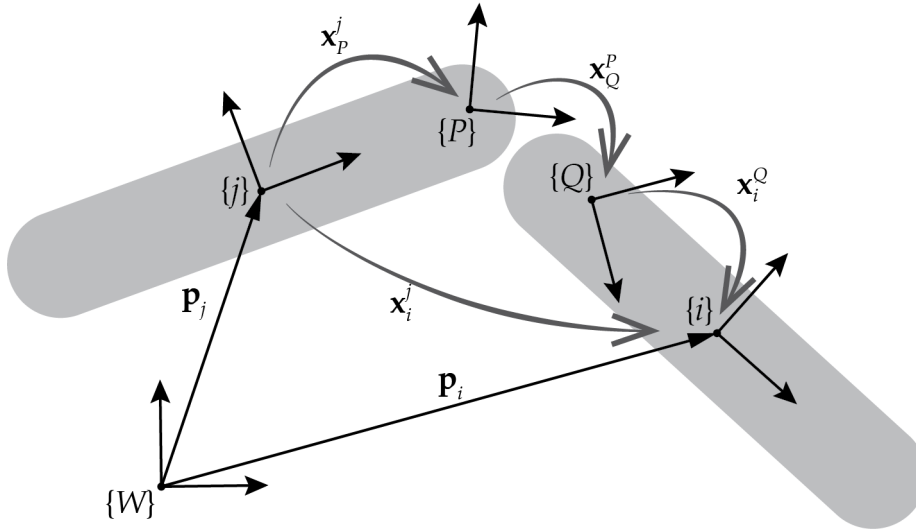
A análise cinemática envolve o estudo dos aspectos geométricos associados a movimentação de corpos sem considerar os elementos geradores de movimento. Em sistemas envolvendo apenas corpos rígidos, a cinemática pode ser completamente descrita utilizando sistemas de coordenadas ou *frames* rigidamente acoplados aos corpos. A interconexão dos corpos rígidos por meio de juntas permite que o robô seja caracterizado através da pose relativa de *frames* associados. Dessa forma, estando dois corpos rígidos $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{B}_j$ interconectados por meio de uma junta, a pose $\mathbf{x}_i = (\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i)$ de $\mathcal{B}_i$ pode ser obtida em função da pose absoluta $\mathbf{x}_j = (\mathbf{p}_j, \mathbf{v}_j)$ de $\mathcal{B}_j$ e de sua pose relativa $\mathbf{x}_i^j = (\mathbf{r}_i^j, \mathbf{v}_i^j)$, definida conforme o tipo de junta. Considerando a representação da orientação por meio de quatérnios unitários, essa relação pode ser expressa como

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_i &= \tilde{\mathbf{p}}_j + \mathbf{v}_j \tilde{\mathbf{r}}_i^j \mathbf{v}_j^* \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_j \mathbf{v}_i^j \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

onde $\tilde{\mathbf{r}}$ se refere a um quatérnio unitário com a parte vetorial correspondente ao vetor posição relativa $\mathbf{r}$ e parte escalar nula, e o símbolo $*$ se refere a conjugação quaterniônica, que consiste da troca de sentido da parte vetorial. A Figura 5 ilustra a

associação desse par de corpos rígidos envolvendo *frames* intermediários $\{P\}$ e $\{Q\}$ respectivamente fixos a $\mathcal{B}_j$ e $\mathcal{B}_i$. Note que a pose relativa $\mathbf{x}_i^j$ pode ser decomposta em três passos, $\mathbf{x}_P^j$, $\mathbf{x}_Q^P$, e $\mathbf{x}_i^Q$, sendo o primeiro e último passo constantes para corpos rígidos e o segundo passo dependente das variáveis pertinentes ao tipo de junta.

Figura 5 – Associação entre os corpos rígidos $\mathcal{B}_j$ e $\mathcal{B}_i$ representada por meio da especificação da pose relativa $\mathbf{x}_i^j$ decomposta em três passos sequenciais ($\mathbf{x}_P^j$, $\mathbf{x}_Q^P$, e $\mathbf{x}_i^Q$) envolvendo dois *frames* intermediários $\{P\}$ e $\{Q\}$ respectivamente fixos a $\mathcal{B}_j$ e $\mathcal{B}_i$.



Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 3 são apresentados os parâmetros que descrevem a estrutura cinemática do robô quadrúpede, sendo cada linha correspondente a especificação de uma junta característica do sistema (e.g., linha 1 representa a junta fixa entre o tronco e a parte fixa do motor 1 respectivo a pata 1), e as colunas, da esquerda para direita, ao par (A, B) de corpos rígidos envolvidos, e a posição $\mathbf{r}_{JA}^A$ e orientação $\mathbf{v}_{JA}^A$ relativas do *frame* da junta fixo no corpo A . A pose relativa do *frame* da junta fixo no corpo B , $\mathbf{x}_{JB}^B = (\mathbf{r}_{JB}^B, \mathbf{v}_{JB}^B)$, equivale a $(\mathbf{0}_3, \{1, \mathbf{0}_3\})$ exceto para linha 10 ($\mathcal{B}_{lj2}$, $\mathcal{B}_{lj3}$) onde o termo correspondente a posição $\mathbf{r}_{JB}^B = (-175, 0, 0)$ mm. As linhas 5 ($\mathcal{B}_{msjk}$, $\mathcal{B}_{mrjk}$) e 10 representam juntas de revolução, sendo as demais linhas juntas fixas.

2.2.1 Cinemática direta

A cinemática direta $\mathbf{f} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{X}$ descreve a pose $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ de um dado sistema de coordenadas associado a um corpo, expressa no espaço operacional $\mathcal{X}$, em função das variáveis independentes $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$. O conjunto de variáveis independentes $\mathcal{Q}$ tipicamente está correlacionado com as juntas do sistema (e.g., ângulos das juntas de revolução). Relativo a pose, tanto a posição quanto a orientação podem ser representadas de múltiplas formas, no entanto, a escolha dos parâmetros de orientação requer maior cautela em função dos problemas ocasionados pela condição de singularidade. Para o

Tabela 3 – Conjunto de parâmetros que descrevem a estrutura cinemática do robô quadrúpede através da especificação de sistemas de coordenadas associados a uma determinada junta mas fixos a corpos rígidos distintos.

$\mathcal{B}_A$	$\mathcal{B}_B$	$\mathbf{r}_{JA}^A$ [mm]	$\mathbf{v}_{JA}^A$
$\mathcal{B}_b$	$\mathcal{B}_{ms11}$	(215, 75, 0)	$\frac{1}{2}\{1, (1, 1, 1)\}$
$\mathcal{B}_b$	$\mathcal{B}_{ms21}$	(215, -75, 0)	$\frac{1}{2}\{1, (1, 1, 1)\}$
$\mathcal{B}_b$	$\mathcal{B}_{ms31}$	(-215, 75, 0)	$\frac{1}{2}\{-1, (-1, 1, 1)\}$
$\mathcal{B}_b$	$\mathcal{B}_{ms41}$	(-215, -75, 0)	$\frac{1}{2}\{-1, (-1, 1, 1)\}$
$\mathcal{B}_{msjk}^1$	$\mathcal{B}_{mrjk}$	(0, 0, 25)	$\{1, \mathbf{0}_3\}$
$\mathcal{B}_{mrj1}$	$\mathcal{B}_{lj1}$	(75, 0, 10)	$\{1, \mathbf{0}_3\}$
$\mathcal{B}_{lj1}$	$\mathcal{B}_{msj2}$	(40, 0, 0)	$\frac{\sqrt{2}}{2}\{1, (0, 1, 0)\}$
$\mathcal{B}_{mrj2}$	$\mathcal{B}_{lj2}$	(-175, 0, 10)	$\{0, (0, 1, 0)\}$
$\mathcal{B}_{lj2}$	$\mathcal{B}_{msj3}$	(-175, 0, 35)	$\{1, \mathbf{0}_3\}$
$\mathcal{B}_{lj2}$	$\mathcal{B}_{lj3}$	(175, 0, 0)	$\{1, \mathbf{0}_3\}$

¹ Para todas as linhas envolvendo os indexadores j e k , os mesmos são iguais para ambos os corpos rígidos pertencentes a um dado par.

Fonte: Autoria própria.

robô quadrúpede foram utilizados os quatro parâmetros de orientação que integram os quatérnios unitários $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_1$, onde $\mathbb{H}_1 := \{(\eta, \epsilon) : \eta \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R}^3, \text{ e } \eta^2 + |\epsilon|^2 = 1\}$. Em adição a inexistência de singularidades advindas da representação, essa escolha ainda provê facilidades para simplificação de certas expressões em virtude das relações de identidade provenientes da álgebra de quatérnios (Definição 1).

Estruturada em árvore, com os ramos representando cada uma das patas, a cadeia cinemática existente em robôs de base flutuante permite que a cinemática direta seja derivada ao varrer os múltiplos ramos da árvore. Essa metodologia, baseada na aplicação iterativa do par de equações (2.1), pode ser observada no Algoritmo 1, que representa em pseudocódigo a forma recursiva como a cinemática direta pode ser implementada. Esse algoritmo requer a definição de uma estrutura de dados em árvore, nesse caso instanciada como `kine_tree`, onde cada nó representa um corpo rígido, sendo a relação de parentesco definida pelas juntas existentes no sistema. Nessa estrutura, o nó raiz `kine_tree.root` corresponde a base flutuante e cada subárvore originada do nó raiz corresponde a estrutura cinemática de um dado membro acoplado. Cada nó da árvore integra um registro com quatro campos: `key`, uma chave única para indexação do corpo rígido no vetor de coordenadas generalizadas do sistema; `parent`,

um ponteiro para o nó pai; *child*, um vetor de ponteiros para os nós filhos; e *info*, contendo informações pertinentes ao corpo rígido: a definição dos *frames* rigidamente acoplados mas não inclusos no vetor de estados do sistema (Tabela 3) e os parâmetros inerciais (Tabela 2). No Algoritmo 1, a função principal COMPUTEFORWARDKINEMATICS(), que tem como argumentos as variáveis independentes $\mathbf{q}$ e a estrutura de dados em árvore *kine_tree*, inicia a varredura da cadeia cinemática em árvore a partir da raiz, chamando recursivamente a função SWEEPKINETREE() até percorrer todos os nós. Essa função envolve dois estágios: calcular a pose do corpo rígido respectivo ao nó atual $\mathbf{x}[\text{bodyi.key}] = \mathbf{x}_i$ a partir da pose do corpo rígido associado $\mathbf{x}[\text{bodyj.key}] = \mathbf{x}_j$ e da pose relativa $\mathbf{x}_i^j = (\mathbf{r}_i^j, \mathbf{v}_i^j)$; e na sequência chamar a função SWEEPKINETREE() para cada um dos nós filhos pertencentes ao nó atual. Vale ressaltar que GETKINEINFO() caracteriza uma função que utiliza as variáveis independentes $\mathbf{q}$ em conjunto as informações relativas a cinemática armazenadas no campo *info* para calcular a pose relativa.

Algoritmo 1 Cálculo da cinemática direta recursiva para sistemas de base flutuante

Require: *kine_tree*

```

1: function COMPUTEFORWARDKINEMATICS( $\mathbf{q}$ , kine_tree)
2:   bodyi  $\leftarrow$  kine_tree.root
3:   SWEEPKINETREE(bodyi)
4:   return  $\mathbf{x}$ 
5: end function
6: function SWEEPKINETREE(bodyi)
7:   if bodyi  $\neq$  NULL then
8:     bodyj  $\leftarrow$  bodyi.parent
9:     if bodyj = NULL then
10:       $\mathbf{x}[\text{bodyi.key}] \leftarrow \mathbf{q}_b$  ▷ Nó raiz corresponde a base flutuante
11:     else
12:       $(\mathbf{p}_j, \mathbf{v}_j) \leftarrow \mathbf{x}[\text{bodyj.key}]$ 
13:       $(\mathbf{r}_i^j, \mathbf{v}_i^j) \leftarrow \text{GETKINEINFO}(\mathbf{q}, \text{bodyj.info}, \text{bodyi.info})$ 
14:       $\tilde{\mathbf{p}}_i \leftarrow \tilde{\mathbf{p}}_j + \mathbf{v}_j \tilde{\mathbf{r}}_i^j \mathbf{v}_j^*$ 
15:       $\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_j \mathbf{v}_i^j$ 
16:       $\mathbf{x}[\text{bodyi.key}] \leftarrow (\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i)$ 
17:     end if
18:     for each child i of bodyi do
19:       SWEEPKINETREE(bodyi.child[i])
20:     end for
21:   end if
22: end function

```

2.2.2 Cinemática diferencial

A cinemática diferencial descreve a velocidade $\dot{\mathbf{x}}$ e aceleração $\ddot{\mathbf{x}}$ de um dado sistema de coordenadas associado a um corpo em função das derivadas com relação ao tempo das variáveis independentes $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$. Partindo da cinemática direta, a cinemática diferencial pode ser obtida derivando $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ com relação ao tempo, ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_q \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.2)$$

Essa expressão descreve a velocidade linear e rotacional $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{v}})$ como uma função linear de $\dot{\mathbf{q}}$ envolvendo a matriz Jacobiana $\mathbf{F}_q(\mathbf{q})$. Respectivo a aceleração, derivando-se novamente a função $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ com relação ao tempo, obtém-se

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{F}}_q \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.3)$$

que descreve a aceleração linear e rotacional $\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{v}})$ como uma função não linear de $\ddot{\mathbf{q}}$, dependendo tanto de um termo linear com relação a $\ddot{\mathbf{q}}$ através de $\mathbf{F}_q(\mathbf{q})$ quanto do termo não linear $\dot{\mathbf{F}}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$.

A dedução da matriz Jacobiana $\mathbf{F}_q$ e do termo não linear $\dot{\mathbf{F}}_q \dot{\mathbf{q}}$ pode ser realizada através da manipulação de expressões simbólicas e consequente geração de código-fonte ou empregando a diferenciação numérica. Relativo a essa última metodologia, verifica-se que sua dependência intrínseca da operação de diferenciação pode incorrer em certos problemas quando aplicada a sinais com ruído, uma situação tipicamente encontrada na prática. Como alternativa, o primeiro método pode ser utilizado, explorando a geometria do sistema de forma a não envolver a derivação explícita dos estados. O Apêndice B apresenta de forma detalhada a derivação do método geométrico utilizado para formular a cinemática diferencial que resulta nas seguintes expressões para cinemática de velocidade e aceleração:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}_{\text{rot}}^{-1} \mathbf{H}_{\text{rot}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\text{sys}} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}_{\text{rot}}^{-1} \mathbf{H}_{\text{rot}} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_{\text{rot}}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{\text{rot}} = \mathbf{J}_{\text{sys}} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}} \end{aligned} \right\}, \quad \mathbf{J}_{\text{sys}} = \mathbf{F}_q, \quad \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}} = \dot{\mathbf{F}}_q \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.4)$$

onde os termos $\mathbf{D}_{\text{rot}}$, $\mathbf{H}_{\text{rot}}$, e $\boldsymbol{\gamma}_{\text{rot}}$ são descritos no Apêndice B, representa a matriz Jacobiana do sistema, e $\boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}}$, o vetor de termos com velocidade quadrática.

2.3 Dinâmica

Na mecânica analítica, deriva-se o conjunto completo de equações de movimento que regem o comportamento de um sistema físico a partir de um único princípio descrito em função da “ação”, uma grandeza escalar característica do sistema. Como um importante exemplar desses princípios, o Princípio de Hamilton pode ser aplicado para descrever o comportamento de sistemas mecânicos complexos envolvendo forças não-conservativas e restrições cinemáticas. O Princípio de Hamilton afirma que a “ação” A torna-se estacionária ($\delta A = 0$) para um conjunto arbitrário de possíveis variações da configuração do sistema desde que as configurações inicial e final sejam prescritas (LANCZOS, 2012).

Seja T a energia cinética e U a energia potencial do sistema tal que a Lagrangiana $L = T - U$, e seja δW_{nc} o trabalho virtual realizado pelas forças não conservativas. Dado um sistema não conservativo descrito em função de n coordenadas generalizadas representadas pelo vetor $\mathbf{x}$, sujeito a $n_c < n$ restrições cinemáticas holonômicas da forma $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ tal que λ seja o vetor dos correspondentes multiplicadores de Lagrange, definidas as configurações inicial em $t = t_1$ e final em $t = t_2$, o Princípio de Hamilton pode ser descrito como

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L - \delta W_{nc} - \lambda^T \delta \mathbf{h}) dt = 0. \quad (2.5)$$

Seguindo a derivação da equação de Euler-Lagrange Aumentada descrita no Apêndice C, tem-se que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \lambda = \xi. \quad (2.6)$$

Essa expressão em conjunto com as restrições cinemáticas $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ integra as $n + n_c$ equações necessárias para descrever um sistema não conservativo sujeito a restrições cinemáticas holonômicas.

Para que a relação (2.6) possa ser representada de forma explícita, cada um de seus termos (energia cinética, energia potencial, forças não-conservativas) precisa ser expresso como funções explícitas das variáveis generalizadas do sistema. Além disso, visando a aplicação na lei controle ainda é importante representar esse conjunto de equações de movimento no espaço das juntas, sendo necessário aplicar uma transformação para eliminar as restrições cinemáticas holonômicas respectivas as juntas, reduzindo o número de equações do sistema para $n - n_c$.

2.3.1 Energia cinética

Dado um corpo rígido $\mathcal{B}_i$ com massa m_i composto de partículas elementares com massa dm e posição $\mathbf{p}$ com relação a um referencial absoluto, define-se sua energia cinética T_i como

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{m_i} (\dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}}) dm. \quad (2.7)$$

Seja $\mathbf{p}_i$ a posição do centro de massa (CoM) de $\mathcal{B}_i$, seja $\boldsymbol{\omega}_i$ sua velocidade angular, seja $\mathbf{I}_i$ seu tensor de inércia relativo ao CoM, e seja $\mathbf{r}$ a posição de uma partícula elementar com relação ao CoM, todos com respeito a um referencial absoluto. Partindo da cinemática, a relação (2.7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} \int_{m_i} ((\dot{\mathbf{p}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r})^T (\dot{\mathbf{p}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r})) dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_{m_i} (\dot{\mathbf{p}}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i + 2\dot{\mathbf{p}}_i^T (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r})^T (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r})) dm = \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{p}}_i^T m_i \dot{\mathbf{p}}_i + 2\dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \int_{m_i} \mathbf{r} dm + \boldsymbol{\omega}_i^T \left(\int_{m_i} \mathbf{S}(\mathbf{r})^T \mathbf{S}(\mathbf{r}) dm \right) \boldsymbol{\omega}_i \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{p}}_i^T m_i \dot{\mathbf{p}}_i + \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i), \quad (2.8) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{S}(\cdot)$ corresponde a matriz antissimétrica do argumento. Em função das coordenadas generalizadas $\mathbf{x}_i = (\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i)$ tem-se que a energia cinética pode ser expressa na forma quadrática

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{x}}_i, \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{B}_i$ corresponde a matriz de inércia do corpo $\mathcal{B}_i$ expressa em coordenadas generalizadas, sendo definida em função das propriedades inerciais $(m_i, \mathbf{I}_i^i)$, da matriz de conversão de velocidade $\mathbf{G}_i$ (Apêndice A) e da matriz de rotação $\mathbf{R}_i$ como

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{1}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 4} \\ \mathbf{O}_{4 \times 3} & (\mathbf{G}_i^i)^T \mathbf{I}_i^i \mathbf{G}_i^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_i^i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{G}_i. \quad (2.10)$$

2.3.2 Energia potencial gravitacional

Dado o vetor de aceleração gravitacional $\mathbf{g}_0$ com respeito a um referencial absoluto, a energia potencial gravitacional pode ser descrita como

$$U_i = - \int_{m_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p} dm = -(m_i \mathbf{g}_0^T) \mathbf{p}_i. \quad (2.11)$$

Considerando a força generalizada $(\zeta_g)_i$, tem-se que

$$U_i = \begin{bmatrix} -m_i \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{0}_4 \end{bmatrix}^T \mathbf{x}_i = -(\zeta_g)_i^T \mathbf{x}_i. \quad (2.12)$$

2.3.3 Forças não-conservativas

O termo de forças não-conservativas pode ser obtido a partir do trabalho virtual. No caso de uma força $\mathbf{f}$ e momento $\boldsymbol{\mu}$ externos aplicados a um ponto P no corpo $\mathcal{B}_i$, tem-se que o respectivo trabalho virtual δW_{ext} seja

$$\delta W_{\text{ext}} = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega}_i \delta t \quad (2.13)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & -\mathbf{f}^T \mathbf{S}(\mathbf{r}_P) \mathbf{G}_i + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i, \quad (2.14)$$

o que implica o vetor de forças generalizadas

$$(\boldsymbol{\xi}_{\text{ext}})_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{G}_i^T (\mathbf{S}(\mathbf{r}_P) \mathbf{f} + \boldsymbol{\mu}) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Para um torque τ aplicado ao eixo de rotação $\hat{\mathbf{z}}$ de uma junta de revolução entre os corpos $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{B}_j$ tem-se que o respectivo trabalho virtual seja

$$\delta W_{\text{ext}} = \tau \delta \phi = (\hat{\mathbf{z}} \tau)^T (\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_j) \delta t \quad (2.16)$$

$$= (\hat{\mathbf{z}} \tau)^T \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3^T & -\mathbf{G}_j & \mathbf{O}_3^T & \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_j \\ \delta \mathbf{x}_i \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

implicando os vetores de forças generalizadas

$$(\boldsymbol{\xi}_{\text{ext}})_j = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & -\mathbf{G}_j \end{bmatrix}^T \hat{\mathbf{z}} \tau, \quad (\boldsymbol{\xi}_{\text{ext}})_i = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{G}_i \end{bmatrix}^T \hat{\mathbf{z}} \tau. \quad (2.18)$$

2.3.4 Equações de movimento

Para um sistema com n_b corpos rígidos, agrupando e substituindo as expressões obtidas nas seções anteriores na equação (2.6) e utilizando as identidades provenientes da álgebra de quatérnios (Definição 1) obtém-se as equações de movimento para o sistema representadas no espaço operacional, isto é,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_x^T \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{v} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\}, \quad (2.19)$$

onde $\mathbf{H}_x = \partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{x}$ representa a matriz Jacobiana de restrições, $\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{n_b})$ representa a matriz de inércia em coordenadas generalizadas, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n_b})$ corresponde ao vetor de forças generalizadas incluindo os efeitos das forças gravitacionais (2.12), forças externas (2.15), e torques nas juntas ativas (2.18), e $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_b})$ representa o vetor contendo os termos de velocidade quadrática, sendo definido para cada corpo rígido $\mathcal{B}_i$ como

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ -2(\dot{\mathbf{G}}_i^T)^T \mathbf{I}_i^i \boldsymbol{\omega}_i^i \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

2.3.4.1 Eliminando as restrições cinemáticas

Para transformar o conjunto de equações de movimento para o espaço das juntas é necessário garantir que as restrições cinemáticas correlatas não sejam violadas em nenhum instante de tempo, uma condição que pode ser atendida projetando as equações de movimento para o espaço nulo da matriz Jacobiana de restrições $\mathbf{H}_x$. Em especial, um projetor que atende a esse requisito envolve a matriz Jacobiana $\mathbf{J}_{\text{sys}}$ proveniente da cinemática de velocidade (2.4). Dessa forma, multiplicando a relação (2.19) por $\mathbf{J}_{\text{sys}}^T$ e aplicando a substituição (2.3), obtém-se

$$\mathbf{J}_{\text{sys}}^T \mathbf{B} \mathbf{J}_{\text{sys}} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{J}_{\text{sys}}^T (\mathbf{v} - \mathbf{B} \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}}),$$

que pode ser representada de forma compacta como

$$\mathbf{B}_{\text{sys}} \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\zeta}_{\text{sys}} + \mathbf{v}_{\text{sys}}. \quad (2.21)$$

Assim, tendo em vista a utilização do modelo dinâmico no controle do robô quadrúpede, o processo completo para derivação da matriz de inércia $\mathbf{B}_{\text{sys}}$ e dos vetores $\boldsymbol{\zeta}_{\text{sys}}$ e $\mathbf{v}_{\text{sys}}$ que compõem os termos das equações de movimento em coordenadas das juntas foi implementado conforme apresenta o Algoritmo 2 em pseudocódigo, onde convencionou-se que $\mathbf{w} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ seja o vetor de estado correspondente as coordenadas no espaço das juntas, e $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ seja o vetor de estado correspondente as coordenadas no espaço operacional. Note que a estrutura de dados em árvore `kine_tree` e a função para o cálculo da cinemática direta `COMPUTEFORWARDKINEMATICS()` foram previamente definidas para o Algoritmo 1, já a cinemática diferencial foi calculada através da função `COMPUTEDIFFERENTIALKINEMATICS()` com base no desenvolvimento apresentado no Apêndice B e em (2.4). As forças não conservativas $\boldsymbol{\xi}$, envolvendo tanto a dinâmica das juntas quanto as forças externas aplicadas as patas foram calculadas conforme as relações (2.15) e (2.18) através da função `COMPUTENONCONSERVATIVEFORCES()`, tendo como argumentos os estados $\mathbf{y}$, as entradas $\mathbf{u}$, e os parâmetros de configuração das entradas `input_config` (e.g., ponto de aplicação das forças e momentos externos, coeficiente de amortecimento das juntas).

No Algoritmo 2, a função principal `COMPUTEJOINTSPACEDYNAMICMODEL()`, que tem como argumentos o vetor de estados das juntas $\mathbf{w}$, o vetor de entradas $\mathbf{u}$ (e.g., forças externas, torque nas juntas), a estrutura de dados em árvore `kine_tree`, e os parâmetros de configuração das entradas `input_config`, deriva os termos das equações de movimento no espaço das juntas em três etapas: calcular a cinemática para obter os estados no espaço operacional $\mathbf{y}$ (Algoritmo 1) bem como a matriz Jacobiana do sistema $\mathbf{J}_{\text{sys}}$ e o vetor de termos não lineares $\boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}}$ (2.4); construir a matriz de inércia $\mathbf{B}$, os vetores de força generalizada $\boldsymbol{\zeta}$, e os termos de velocidade quadrática $\mathbf{v}$ para o modelo dinâmico no espaço operacional incluindo restrições cinemáticas (2.19); e

converter os termos do modelo dinâmico no espaço operacional para o espaço das juntas obtendo-se $\mathbf{B}_{\text{sys}}$, ζ_{sys} , e $\mathbf{v}_{\text{sys}}$ (2.21). Vale ressaltar que na inicialização do sistema utiliza-se a função `GETDYNINFO()` para extrair as propriedades inerciais armazenadas no campo `info` de cada nó (que corresponde a um corpo rígido) existente na estrutura de dados em árvore `kine_tree`.

O modelo dinâmico respectivo a um robô de base flutuante possui uma estrutura caracterizada pelo acoplamento (em geral) somente entre a base flutuante e cada um de seus membros. Essa estrutura sugere a decomposição do modelo dinâmico para melhor visualizar os termos relacionados somente com a base e os membros de forma isolada bem como os originados do acoplamento. Em especial, o vetor de forças generalizadas pode ser decomposto em três componentes respectivos a gravidade, aos torques dos atuadores, e as forças externas tal que o modelo dinâmico possa ser alternativamente representado de forma particionada como¹

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{bb} & \mathbf{B}_{bl} \\ \mathbf{B}_{bl}^T & \mathbf{B}_{ll} \end{bmatrix}_{\text{sys}} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix}_{\text{sys}} + \begin{bmatrix} (\zeta_g)_b \\ (\zeta_g)_l \end{bmatrix}_{\text{sys}} + \begin{bmatrix} (\xi_{\text{ext}})_b \\ (\xi_{\text{ext}})_l \end{bmatrix}_{\text{sys}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 \\ \boldsymbol{\tau}_{\text{act}} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

onde o subscrito b indica os termos referentes a base flutuante, o subscrito l indica os termos referentes aos membros acoplados a base flutuante, e $\boldsymbol{\tau}_{\text{act}}$ ao vetor de torques de atuação. A matriz de inércia foi particionada em submatrizes correspondentes a base flutuante de forma isolada $(\mathbf{B}_{\text{sys}})_{bb}$, aos membros acoplados a base flutuante de forma isolada $(\mathbf{B}_{\text{sys}})_{ll}$ e aos termos mistos $(\mathbf{B}_{\text{sys}})_{bl}$.

2.3.4.2 Subespaço das juntas ativas

Seguindo a metodologia proposta por Sentis e Khatib (2005a), a representação do sistema no espaço das juntas pode ser convertida para o subespaço controlável descrito somente em função das juntas ativas a partir da matriz de seleção das juntas ativas e da matriz de inércia do sistema. Seja $\mathbf{S}_{\text{act}}$ a matriz de seleção das juntas ativas tal que $\mathbf{q}_{\text{act}} = \mathbf{S}_{\text{act}}\mathbf{q}$, e seja $\mathbf{B}_{\text{act}} = (\mathbf{S}_{\text{act}}\mathbf{B}_{\text{sys}}^{-1}\mathbf{S}_{\text{act}}^T)^{-1}$ a matriz de inércia expressa no subespaço das juntas ativas. Define-se a pseudo-inversa dinamicamente consistente $\mathbf{S}_{\text{act}}^+$ como

$$\mathbf{S}_{\text{act}}^+ = \mathbf{B}_{\text{sys}}^{-1}\mathbf{S}_{\text{act}}^T\mathbf{B}_{\text{act}}. \quad (2.23)$$

Aplicando $(\mathbf{S}_{\text{act}}^+)^T$ no modelo dinâmico expresso no espaço das juntas (2.21), obtém-se o modelo dinâmico expresso no subespaço das juntas ativas

$$\mathbf{B}_{\text{act}}\ddot{\mathbf{q}}_{\text{act}} = \zeta_{\text{act}} + \mathbf{v}_{\text{act}}, \quad (2.24)$$

onde $\mathbf{v}_{\text{act}} = (\mathbf{S}_{\text{act}}^+)^T\mathbf{v}_{\text{sys}}$, e $\zeta_{\text{act}} = (\zeta_g)_{\text{act}} + (\xi_{\text{ext}})_{\text{act}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{act}} = (\mathbf{S}_{\text{act}}^+)^T\zeta_{\text{sys}}$.

¹ Nota-se que como os vetores e matrizes são associados a um mesmo grupo (nesse caso relacionado com modelo dinâmico no espaço das juntas) permite-se utilizar uma representação unificada com um subscrito no vetor ou matriz por completo para evitar a extensão horizontal desnecessária dos símbolos na equação.

Algoritmo 2 Cálculo do modelo dinâmico para um sistema multicorpos

Require: kine_tree, input_config

```

1: for each bodyi in kine_tree do
2:    $(m_i, \mathbf{I}_i^i) \leftarrow \text{GETDYNINFO}(\text{bodyi.info})$ 
3: end for
4: function COMPUTEJOINTSPACEDYNAMICMODEL( $\mathbf{w}, \mathbf{u}$ , kine_tree, input_config)
5:    $\mathbf{y}, \mathbf{J}_{\text{sys}}, \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}} \leftarrow \text{COMPUTEKINEMATICS}(\mathbf{w}, \text{kine\_tree})$ 
6:    $\mathbf{B}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \leftarrow \text{BUILDDYNAMICMODEL}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \text{input\_config})$ 
7:    $\mathbf{B}_{\text{sys}}, \mathbf{v}_{\text{sys}}, \boldsymbol{\zeta}_{\text{sys}} \leftarrow \text{CONVERTDYNAMICMODEL}(\mathbf{B}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{J}_{\text{sys}}, \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}})$ 
8: end function
9: function COMPUTEKINEMATICS( $\mathbf{w}$ , kine_tree)
10:   $\mathbf{x} \leftarrow \text{COMPUTEFORWARDKINEMATICS}(\mathbf{q}, \text{kine\_tree})$  (Algoritmo 1)
11:   $\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{J}_{\text{sys}}, \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}} \leftarrow \text{COMPUTEDIFFERENTIALKINEMATICS}(\mathbf{w}, \text{kine\_tree})$ 
12:  return  $\mathbf{y}, \mathbf{J}_{\text{sys}}, \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}}$ 
13: end function
14: function BUILDDYNAMICMODEL( $\mathbf{y}, \mathbf{u}$ , input_config)
15:   for each body  $i$  do
16:      $\mathbf{B}_i \leftarrow \text{diag} \left( m_i \mathbf{1}_3, (\mathbf{G}_i^i)^T \mathbf{I}_i^i \mathbf{G}_i^i \right)$ 
17:      $\mathbf{v}_i \leftarrow \left( \mathbf{0}_3, -2(\dot{\mathbf{G}}_i^i)^T \mathbf{I}_i^i \boldsymbol{\omega}_i^i \right)$ 
18:      $\boldsymbol{\zeta}_i \leftarrow (m_i \mathbf{g}_0, \mathbf{0}_4)$ 
19:   end for
20:    $\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{n_b})$ 
21:    $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_b})$ 
22:    $\boldsymbol{\xi} \leftarrow \text{COMPUTENONCONSERVATIVEFORCES}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \text{input\_config})$ 
23:    $\boldsymbol{\zeta} \leftarrow \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\xi}$ 
24:   return  $\mathbf{B}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}$ 
25: end function
26: function CONVERTDYNAMICMODEL( $\mathbf{B}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{J}_{\text{sys}}, \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}}$ )
27:    $\mathbf{B}_{\text{sys}} \leftarrow \mathbf{J}_{\text{sys}}^T \mathbf{B} \mathbf{J}_{\text{sys}}$ 
28:    $\mathbf{v}_{\text{sys}} \leftarrow \mathbf{J}_{\text{sys}}^T \left( \mathbf{v} - \mathbf{B} \boldsymbol{\gamma}_{\text{sys}} \right)$ 
29:    $\boldsymbol{\zeta}_{\text{sys}} \leftarrow \mathbf{J}_{\text{sys}}^T \boldsymbol{\zeta}$ 
30:   return  $\mathbf{B}_{\text{sys}}, \mathbf{v}_{\text{sys}}, \boldsymbol{\zeta}_{\text{sys}}$ 
31: end function

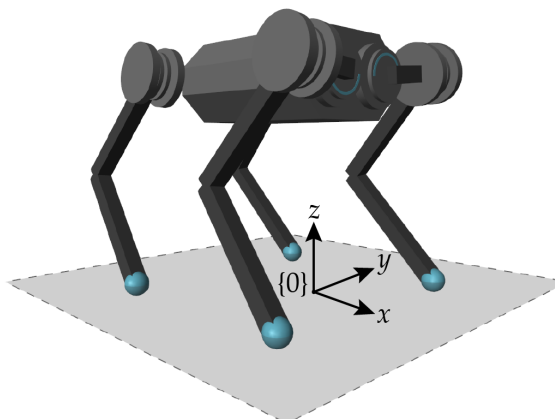
```

3 Protótipo Virtual

O Simscape integra uma família de *toolboxes* voltadas para modelagem de sistemas físicos no ambiente de simulação Simulink. Na versão 2023a do MATLAB, a família Simscape conta com um *toolbox* base e outros cinco complementos direcionados para aplicações complexas envolvendo sistemas elétricos, sistemas de transmissão mecânica, sistemas com fluidos, e sistemas mecânicos multicorpos. No Simscape, cada sistema é representado por uma rede física (*physical network*) de elementos funcionais (blocos) cuja interação é caracterizada pela troca de energia (THE MATHWORKS INC., 2023). Essa interação é feita através de portas não direcionais, sendo cada uma associada a um determinado fluxo de energia definido como o produto entre duas variáveis conjugadas (e.g., corrente e tensão, velocidade e força). Nessa representação, o nível de idealização do modelo é indicado pela quantidade de portas, abstraindo a complexidade da implementação e facilitando o processo de prototipagem.

Adaptado para simulação de sistemas mecânicos multicorpos, o Simscape Multibody possui variados blocos disponíveis para modelagem, incluindo diferentes tipos de corpos, juntas, restrições cinemáticas, elementos geradores de força, e sensores. Esse *toolbox* foi utilizado para construir e simular o robô quadrúpede e seu ambiente (i.e. solo e campo gravitacional). A Figura 6 apresenta o modelo virtual do robô quadrúpede e ambiente construído no Simscape. As Seções 3.1 e 3.2 descrevem os componentes utilizados para construir o robô quadrúpede e seu ambiente. A Seção 3.3 apresenta os parâmetros de configuração da simulação e define os dois cenários de simulação propostos, as condições iniciais, e os índices de desempenho utilizados.

Figura 6 – Modelo virtual do robô quadrúpede e ambiente construído no Simscape. O *frame* $\{0\}$ corresponde ao referencial inercial absoluto fixo no solo.



Fonte: Autoria própria.

3.1 Robô

3.1.1 Corpos Rígidos

No Simscape Multibody, corpos podem ser rígidos, flexíveis, ou de massa variável, sendo representados através de blocos pertencentes a categoria *Body Elements*. Essa categoria inclui variadas formas geométricas com seus respectivos parâmetros dinâmicos (e.g., densidade, massa), componentes gráficos (e.g., cor, transparência), e sistemas de coordenadas.

Para o robô quadrúpede foram utilizados apenas corpos rígidos para modelar a estrutura do tronco, as patas, e os componentes dos atuadores, sendo as propriedades geométricas e inerciais de cada corpo definidas para coincidir com os parâmetros utilizados no modelo dinâmico do robô (Tabela 2). O tronco e as patas são representados por corpos primitivos individuais (prismas), já os atuadores integram um conjunto de componentes respectivos ao motor e o sistema de redução. Cada atuador inclui dois corpos rígidos, um representando as partes fixas e o outro as partes móveis considerando uma relação de transmissão de 10:1 (20:1 para o atuador na junta do joelho), sendo ambos modelados utilizando cilindros. A modelagem dos atuadores como componentes separados teve como princípio a contabilização de seus efeitos inerciais na dinâmica do sistema.

3.1.2 Sistemas de Coordenadas

Blocos *Rigid Transform* definem sistemas de coordenadas arbitrários a partir da especificação da translação e rotação do *frame* seguidor (*Follower*) com relação ao *frame* base (*Base*). O Simscape Multibody requer a definição de ao menos um *frame* para qualquer sistema, o *World Frame*, que representa o sistema de coordenadas inercial de referência para o modelo. No robô, esses blocos foram empregados para posicionar e orientar os diversos corpos rígidos seguindo o modelo cinemático definido (Tabela 3).

3.1.3 Juntas

Juntas são representadas por meio de blocos pertencentes a categoria *Joint*, que inclui desde juntas prismáticas e de revolução até juntas complexas como a junta de velocidade constante (homocinética) e a junta parafuso. Cada bloco é composto por três campos configuráveis: *Joint Primitives*, que define o comportamento dos graus de liberdade (condições iniciais, dinâmica interna, limites, tipo de acionamento, e sensoramento); *Mode Configuration*, que permite a conexão ou desconexão da junta de sua rede física; e *Composite Force/Torque Sensing*, para aferir as forças e torques de reação gerados pelas restrições impostas pela junta.

No robô quadrúpede foram utilizadas juntas de revolução (*Revolute Joint*) nas patas e uma única junta espacial (*6-DOF Joint*) no tronco. Para a junta espacial foram configuradas apenas as condições iniciais e habilitado o sensoreamento pertinente aos estados do tronco, sendo as demais propriedades mantidas como padrão. Relativo as juntas de revolução, foram configuradas as condições iniciais, habilitado o sensoreamento pertinente aos estados das juntas, e a dinâmica interna incluindo apenas o atrito viscoso com coeficiente de 0,1 N.m/(rad/s).

3.2 Ambiente

3.2.1 Dinâmica de Contato

O bloco *Spatial Contact Force* (presente desde a versão R2019b do MATLAB) representa a dinâmica de contato entre geometrias possivelmente associadas a corpos rígidos. Esse bloco utiliza o casco convexo (*convex hull*) das geometrias para definir o *contact frame*, o sistema de coordenadas no qual as forças de contato são expressas. Por convenção, o *contact frame* é orientado para representar as forças atuando no corpo conectado ao *frame* seguidor, sendo que a direção positiva da força normal aponta para o seguidor. Tendo em vista aplicações de controle, esse bloco ainda permite exportar um sinal lógico indicando quando há contato, a distância de separação entre objetos, bem como a magnitude das forças e velocidades relativas.

Nessa implementação, a força normal é calculada seguindo um modelo *Smooth Spring-Damper*, um sistema mola-amortecedor ponderado por uma função suavizadora (não especificada na documentação), já a força de atrito é regida por um modelo *Smooth Stick-Slip*, onde o coeficiente de atrito efetivo varia continuamente conforme a velocidade relativa. Apesar de simples e eficiente, a metodologia utilizada para modelar o contato pode introduzir componentes de alta frequência para os estados do sistema, tornando a simulação lenta. Dessa forma, a dinâmica de contato foi configurada de forma a balancear a fidelidade do modelo com relação ao sistema real e o tempo de simulação. A Tabela 4 resume os parâmetros de configuração utilizados para definir o contato com o solo.

Tabela 4 – Parâmetros de configuração para a dinâmica de contato.

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
k_{pc}	1E6	N/m	Rigidez da força normal de contato.
k_{dc}	1E4	N/(m/s)	Amortecimento da força normal de contato.
w_{trans}	1E-4	m	Largura da região de transição onde força de contato varia de 0 a seu valor nominal.
μ_s	5E-1	–	Coeficiente de atrito estático máximo.
μ_d	3E-1	–	Coeficiente de atrito dinâmico.
v_{crit}	1E-3	m/s	Velocidade onde o coeficiente de atrito efetivo corresponde a μ_s .

Fonte: Autoria própria.

3.3 Simulação

3.3.1 Parâmetros

Usar um ambiente de simulação como Simulink envolve, além da construção do modelo, a configuração de parâmetros que controlam aspectos como o tempo de duração da simulação e o solucionador (*solver*), que caracteriza o método numérico empregado para resolver o sistema de equações diferenciais (e possivelmente algébricas) que descrevem o modelo. A Tabela 5 apresenta os parâmetros de configuração utilizados para simulação no Simulink.

A escolha do solucionador deve ser feita levando em conta as características do sistema (e.g., contínuo/discreto, implícito/explicito), tipo de passo (fixo/variável), a precisão da solução, e o tempo disponível para simulação. Dessa forma, foi selecionado o *daessc* (similar ao *ode23t*), um solucionador de passo variável implícito particular do Simscape recomendado para resolução de equações diferenciais e algébricas (DAE) provenientes de sistemas físicos. O máximo passo de tempo utilizável pelo solucionador de passo variável foi escolhido com base em experimentos previamente realizados, tendo como princípio a manutenção da estabilidade do contato com o solo e maior velocidade de simulação. Definiu-se a duração da simulação de forma a incluir tempo suficiente para que ela capturasse alguns ciclos após a convergência da locomoção para o estado estacionário.

Tabela 5 – Parâmetros de configuração utilizados para simulação no Simulink. Os parâmetros não listados foram mantidos em seus valores padrão.

Parâmetro	Valor	Descrição
StartTime	0	Tempo de início da simulação em segundos.
StopTime	10	Tempo de término da simulação em segundos.
Solver	daessc	Tipo de solucionador utilizado.
MaxStep	1E-3	Máximo passo de tempo em segundos.
RelTol	1E-6	Tolerância relativa. Máximo erro aceitável para a solução relativo a magnitude dos estados em cada passo de tempo.
AbsTol	1E-9	Tolerância absoluta. Máximo erro aceitável.

Fonte: Autoria própria.

3.3.2 Cenários

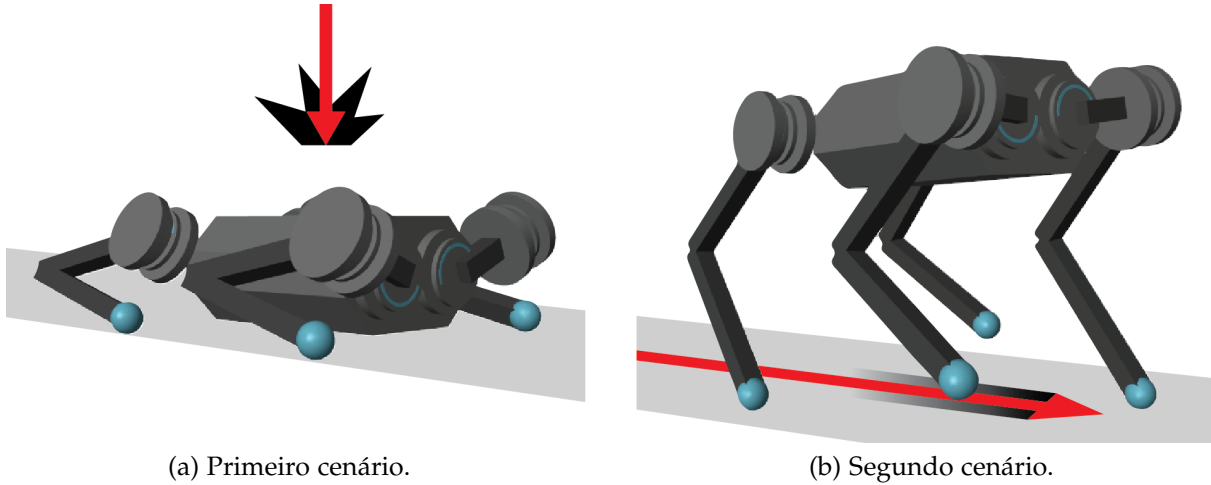
Tendo em vista os requisitos de natureza distinta demandados do controle, dois cenários de simulação envolvendo o robô quadrúpede e o solo foram propostos. O primeiro cenário (Figura 7a) tem como objetivo investigar o efeito do impacto com o solo no desempenho do controle, já o segundo (Figura 7b) busca verificar o desempenho do controle aplicado a locomoção. Enquanto o segundo cenário envolve o rastreamento da trajetória proveniente do módulo gerador de movimento utilizando a marcha trote, o primeiro cenário não envolve a locomoção, sendo o robô quadrúpede submetido a uma tarefa simples que compõe o regulação das condições iniciais de cada pata (Tabela 6). Para ambos cenários de simulação o solo foi modelado como um plano horizontal localizado em $z = -1$ m.

Tabela 6 – Posição inicial relativa das patas expressa no sistema de coordenadas do tronco para tarefa simplificada utilizada no primeiro cenário de simulação.

Pata	Posição inicial [mm]
LF	(0, 200, -500)
RF	(0, -200, -500)
LH	(0, -200, -500)
RH	(0, 200, -500)

Fonte: Autoria própria.

Figura 7 – Ilustração dos dois cenários utilizados para avaliação do controle. O primeiro cenário (a) foi proposto para avaliar o desempenho do controle mediante o impacto com o solo sem envolver os aspectos particulares da locomoção, já o segundo cenário (b) foi proposto para avaliar o desempenho da locomoção usando a marcha trote e a trajetória de referência proveniente do módulo gerador de movimento.



Fonte: Autoria própria.

3.3.2.1 Condições iniciais

As condições iniciais foram escolhidas de forma distinta para o tronco e para as patas. Relativo ao tronco, foram definidas as seguintes condições iniciais: $\mathbf{q}_b = (\mathbf{0}_3 \text{ m}, \{1, \mathbf{0}_3\})$, e $\dot{\mathbf{q}}_b = (\mathbf{0}_3 \text{ m/s}, \mathbf{0}_3 \text{ rad/s})$. Com relação às condições iniciais das patas, partindo do repouso ($\dot{\mathbf{q}}_l = \mathbf{0}_{12} \text{ rad/s}$), as mesmas foram definidas de forma unificada para ambos cenários como os ângulos das juntas correspondentes a posição inicial apresentada na Tabela 6 calculados a partir da cinemática inversa das patas.

3.3.2.2 Índices de desempenho

Considerando que o primeiro cenário tem como objetivo avaliar o desempenho do controle mediante o impacto com o solo são analisadas grandezas relacionadas com a qualidade da resposta e viabilidade do sinal de controle. A qualidade da resposta é medida a partir da componente vertical do erro de posição relativa das patas $\bar{e}_z$ (3.1a), enquanto a viabilidade do controle provém do máximo valor absoluto dos torques $|\tau_k|_{\max}$ (3.1b) atuantes no eixo (antes da redução de velocidade) de forma que possam ser comparados com valores equivalentes para atuadores reais.

$$\bar{e}_z = \frac{1}{4} \sum_j (e_{t0z})_j \quad (3.1a)$$

$$|\tau_k|_{\max} = \max_j |\tau_{jk}| \quad (3.1b)$$

No segundo cenário, para avaliar a qualidade da resposta utilizou-se da norma do erro de posição e_{t0} (3.2), sendo mantido o índice de viabilidade do sinal de controle $|\tau_k|_{\max}$ definido para o primeiro cenário.

$$e_{t0} = \frac{1}{4} \sum_j \|\mathbf{e}_{t0j}\|_2 \quad (3.2)$$

Além desses índices são analisadas grandezas relacionadas particulares da locomoção, sendo elas a velocidade de avanço $v_{\text{loc}} = \dot{x}_b^b$, o ângulo de guinada do tronco ψ_{loc} (medido diretamente do Simscape Multibody), o custo de transporte CoT, e o risco de escorregamento RoS. A velocidade de avanço e ângulo de guinada visam avaliar a efetividade da locomoção visto que podem ser comparados às entradas de movimento desejadas (Figura 1), já o custo de transporte quantifica o trabalho necessário para mover uma unidade de massa do robô por uma unidade de distância. Conforme a definição apresentada por Hyun et al. (2014) o custo de transporte pode ser calculado como a potência fornecida pelos atuadores dividida pelo peso total do robô vezes a velocidade de avanço, isto é,

$$\text{CoT} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{\text{act}}^T \dot{\mathbf{q}}_{\text{act}}}{\sum_i^{n_b} (m_i g) v_{\text{loc}}}. \quad (3.3)$$

O risco de escorregamento (HUTTER et al., 2014) pode ser obtido conforme (3.4) calculando-se a média entre as patas da razão entre as componentes tangencial f_t e normal f_n das GRFs, sendo que quanto menor essa grandeza menor o risco de escorregamento (e possivelmente tombamento) naquele instante de tempo.

$$\text{RoS} = \frac{1}{4} \sum_j \frac{|f_{tj}|}{f_{nj}}, \quad f_{nj} \neq 0 \quad (3.4)$$

4 Geração do Movimento

A geração do movimento tem como objetivo interpretar os comandos provenientes do planejamento (e.g., velocidade e direção de avanço do robô) e gerar sinais de entrada adequados para o sistema de controle (e.g., trajetória das patas, pose do tronco). Para a locomoção, a geração do movimento implica estabelecer a movimentação das patas com o solo de forma a deslocar o tronco. Tendo em vista esse requisito, foi empregado um módulo para geração de trajetórias previamente desenvolvido e validado (DE PAULA; GODOY; BECERRA-VARGAS, 2022), que consiste de um Gerador Central de Padrões (CPG) em conjunto com um gerador de trajetórias das patas baseado em curvas de Bézier.

4.1 Geração de padrões de caminhada

No módulo para geração do movimento, um CPG foi utilizado para coordenar o ritmo da locomoção, definindo um padrão cíclico de contato das patas com o solo. Em um CPG, cada oscilador isolado tem capacidade de gerar sinais oscilatórios independentemente de estímulos externos ou ativação cíclica. A adição do acoplamento entre múltiplos osciladores permite que o sistema estabeleça diferentes padrões de caminhada ou marchas. Os atributos pertinentes a geração e ao acoplamento são representados por meio de parâmetros de configuração distintos: (i) os parâmetros dos osciladores, que descrevem as características particulares da forma de onda respectiva a cada estado $\mathbf{x}_i = (x_1, x_2)_i$ de um dado oscilador i ; e (ii) os parâmetros de acoplamento, que definem a correlação entre os estados dos osciladores. O Quadro 1 apresenta uma breve descrição dos parâmetros de configuração associados ao CPG.

O CPG utilizado é composto por uma rede de quatro osciladores Hopf modificados com acoplamento bidirecional simétrico. Sua dinâmica pode ser descrita na forma de espaço de estados para cada oscilador $i = \{1, 2, 3, 4\}$, sendo que a numeração de cada oscilador segue a numeração estabelecida para as patas, como

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \begin{bmatrix} \alpha(\mu - r_i^2) & -\omega_i \\ \omega_i & \beta(\mu - r_i^2) \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ k \sum_j \Delta_{ji} \end{bmatrix} \\ \omega_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{st}}{e^{-b(x_1)_i}} + \frac{\omega_{sw}}{e^{b(x_1)_i}} \right) \\ \Delta_{ji} &= (x_2)_i \cos(\theta_{ji}) - (x_1)_i \sin(\theta_{ji}) \end{aligned} \right\}, \quad r_i = \sqrt{(x_1)_i^2 + (x_2)_i^2}. \quad (4.1)$$

Seguindo a convenção estabelecida em De Paula, Godoy e Becerra-Vargas (2022) no contexto do módulo para geração de trajetórias, o estado x_2 de cada oscilador atua como parâmetro condutor das curvas de Bézier utilizadas na geração de trajetórias das patas, enquanto o estado x_1 atua como indicador da fase de locomoção, com $x_1 > 0$ representando a fase de suporte, e $x_1 < 0$, a fase de balanço.

Quadro 1 – Parâmetros de configuração do CPG.

Parâmetros dos osciladores	Descrição
$\mu^{1/2}$	Amplitude da forma de onda resultante.
ω	Frequência angular da forma de onda resultante.
$\omega_{st} = 2\pi/T_{st}$	Frequência angular da fase de suporte.
$\omega_{sw} = 2\pi/T_{sw}$	Frequência angular da fase de balanço.
α, β	Taxas de convergência para o ciclo limite.
b	Grau de independência das fases.
Parâmetros de acoplamento	
k	Grau de acoplamento entre células.
Δ_{ij}	Termo de acoplamento entre as células i e j .
ϕ_i	Fase normalizada da célula i .
$\theta_{ij} = 2\pi(\phi_i - \phi_j)$	Diferença de fase entre as células i e j .

Fonte: Autoria própria.

4.2 Geração de trajetórias

Curvas de Bézier representam uma classe de curvas paramétricas que empregam polinômios de Bernstein (Definição 2) como base. Uma curva de Bézier $\mathbf{b}_z(t)$ de grau n (ordem $n + 1$) com pontos de controle $\mathbf{p}_i$ é definida como

$$\mathbf{b}_z(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i b_{i,n}(t). \quad (4.2)$$

A correlação com polinômios de Bernstein traz consigo uma série de propriedades de interesse para aplicações de controle. Uma delas pode ser observada na expressão respectiva a r -ésima derivada total da curva de Bézier com relação ao parâmetro t (HYUN et al., 2014)

$$\frac{d^r}{dt^r}(\mathbf{b}_z(t)) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta_r \mathbf{p}_i b_{i,n-r}(t), \quad (4.3)$$

onde $\Delta_r \mathbf{p}_i = \Delta_{r-1} \mathbf{p}_{i+1} - \Delta_{r-1} \mathbf{p}_i$ representa o operador de diferença direta (*forward difference operator*). Essa expressão indica que, por exemplo, pontos de controle consecuti-

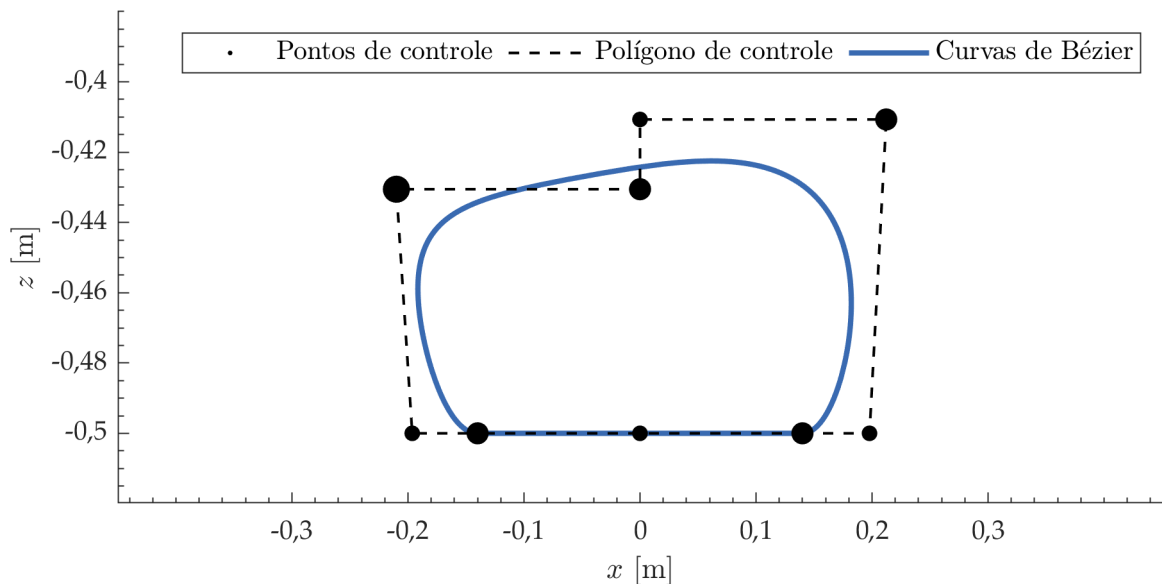
tivos sejam adicionados ou removidos de forma a controlar a velocidade e aceleração desejada em um determinado instante.

Neste trabalho, os pontos de controle respectivos as curvas de Bézier para fase de balanço $\mathbf{P}_{sw}$ e para fase de suporte $\mathbf{P}_{st}$ foram definidos como

$$\mathbf{P}_{sw}[\text{mm}] = \begin{bmatrix} 140,00 & -500,00 \\ 197,82 & -500,00 \\ 212,24 & -410,70 \\ 212,24 & -410,70 \\ 0,00 & -410,70 \\ 0,00 & -430,55 \\ 0,00 & -430,55 \\ -210,00 & -430,55 \\ -210,00 & -430,55 \\ -210,00 & -430,55 \\ -196,35 & -500,00 \\ -140,00 & -500,00 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{st}[\text{mm}] = \begin{bmatrix} 140 & -500 \\ 140 & -500 \\ 0 & -500 \\ -140 & -500 \\ -140 & -500 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

A Figura 8 representa os pontos de controle e as respectivas curvas de Bézier utilizadas como referência para as patas do robô quadrúpede.

Figura 8 – Pontos de controle e respectivas curvas de Bézier utilizadas como referência para trajetória das patas do robô quadrúpede. O tamanho dos pontos de controle é proporcional a quantidade de pontos em uma mesma posição.



Fonte: Autoria própria.

Dado que os pontos de controle são bidimensionais, as curvas resultantes foram utilizadas para representar as trajetórias desejadas das patas em planos paralelos ao plano sagital distanciados do mesmo de 200 mm (o que explica o fator ± 200 na

especificação da coordenada- y da posição inicial apresentada na Tabela 6). Para cada pata, a trajetória descreve a posição da extremidade em relação a parte fixa do atuador na primeira junta, sendo expressa no sistema de coordenadas do tronco.

4.3 Simulação

Dado que foi proposta a utilização da marcha trote (*Trot* na Tabela 1), torna-se necessário definir as circunstâncias que tipicamente acompanham essa marcha. A partir de dados estatísticos de animais em movimento Alexander e Jayes (1983) define funções para estimar parâmetros como o fator de trabalho β_f e o comprimento da passada relativo λ_s/h conforme o tipo de marcha e o número de Froude Fr . Com base nos dados médios pertinentes a mamíferos cursoriais (*cursorial mammals*) extraídos de Alexander e Jayes (1983), definindo o número de Froude para o trote ($Fr = 1,0$), considerando um comprimento característico $h = 0,5$ m, e assumindo um fator de trabalho $\beta_f = 0,5$ resulta em um período do ciclo de locomoção de 0,43 s e um comprimento do passo de 0,48 m. Esses valores (especialmente o comprimento do passo) provaram ser muito agressivos durante os experimentos preliminares, causando saltitar excessivo e o eventual tombamento do robô, por isso tiveram de ser alterados até que o robô fosse capaz de se locomover adequadamente. Ao final, os parâmetros da locomoção utilizados para simulação foram definidos como: $\beta_f = 0,5$, $\lambda_{st} = 0,28$ m, e $T_s = 0,5$ s. Em função desses parâmetros e nos dados extraídos de De Paula, Godoy e Becerra-Vargas (2022), foram definidos os parâmetros de configuração respectivos ao CPG conforme apresenta a Tabela 7.

Tabela 7 – Parâmetros de configuração do CPG utilizados para simulação no Simulink.

Parâmetro	Unidade	Valor
$\mu^{1/2}$	–	1,0
T_{st}	s	0,25
T_{sw}	s	0,25
α	–	5,0
β	–	50,0
b	–	$1,0 \times 10^3$
k	–	1,0

Fonte: Autoria própria.

5 Controle do Movimento

5.1 Definição das tarefas primitivas

Para aplicação do controle, propõe-se que cada objetivo de controle seja expresso como uma função dos estados do sistema, definindo uma tarefa primitiva $\mathbf{x}_t$. A partir da tarefa primitiva derivam-se a respectiva matriz Jacobiana $\mathbf{J}_{\text{task}}$ e os termos de velocidade quadrática γ_t . Nas subseções que seguem são definidos esses termos para as duas tarefas propostas nesse trabalho: o rastreamento da trajetória das patas e a regulação do tronco (usada somente no controle de corpo inteiro). Vale lembrar que para utilização no controle, a matriz Jacobiana da tarefa precisa ser convertida para o subespaço das juntas ativas (2.24). Essa conversão se dá por meio da multiplicação pela pseudo-inversa dinamicamente consiste da matriz de seleção das juntas ativa $\mathbf{S}_{\text{act}}^+$ (2.23), ou seja,

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_{\text{task}} \mathbf{S}_{\text{act}}^+ \quad (5.1)$$

5.1.1 Rastreamento da trajetória das patas

Tendo em vista que o planejamento de trajetórias descreve a trajetória desejada para extremidade de cada pata que entrará em contato com o solo (que corresponde a origem de um sistema de coordenadas fixo no último *link* de cada pata), faz-se necessário uma transformação de coordenadas. Considerando $\{fj\}$ como o sistema de coordenadas respectivo a extremidade da pata j que entrará em contato com o solo, tem-se que a posição $\mathbf{p}_{fj}$, velocidade $\dot{\mathbf{p}}_{fj}$, e aceleração $\ddot{\mathbf{p}}_{fj}$ de sua origem podem ser expressas como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{fj} &= \mathbf{p}_{lj3} + \mathbf{R}_{lj3} \mathbf{r}_{fj, lj3}^{lj3} \\ \dot{\mathbf{p}}_{fj} &= \dot{\mathbf{p}}_{lj3} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{lj3}) \mathbf{R}_{lj3} \mathbf{r}_{fj, lj3}^{lj3} \\ \ddot{\mathbf{p}}_{fj} &= \ddot{\mathbf{p}}_{lj3} + \left(\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}_{lj3}) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{lj3})^2 \right) \mathbf{R}_{lj3} \mathbf{r}_{fj, lj3}^{lj3} \end{aligned} \right\}, \quad \mathbf{r}_{fj, lj3}^{lj3} = \begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ mm}, \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{r}_{fj, lj3}^{lj3} = \mathbf{R}_{lj3} \mathbf{r}_{fj, lj3}^{lj3}$ representa a posição da extremidade da pata j relativa ao CoM do link 3. A trajetória desejada, sendo relativa a parte fixa do primeiro atuador $\{msj1\}$ e expressa no sistema de coordenadas do tronco $\{b\}$, ainda requer outra transformação de coordenadas. Seja $\mathbf{x}_t$ a tarefa primitiva tal que $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_{t1}, \mathbf{x}_{t2}, \mathbf{x}_{t3}, \mathbf{x}_{t4})$, define-se a componente $\mathbf{x}_{tj}$ (e sua respectiva derivada com relação ao tempo) da tarefa primitiva correspondente a pata j como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{tj} &= \mathbf{r}_{fj, msj1}^b = \mathbf{R}_b^T (\mathbf{p}_{fj} - \mathbf{p}_{msj1}) \\ \dot{\mathbf{x}}_{tj} &= \dot{\mathbf{r}}_{fj, msj1}^b = \mathbf{R}_b^T (\dot{\mathbf{p}}_{fj} - \dot{\mathbf{p}}_{msj1}) + (\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_b) \mathbf{R}_b)^T (\mathbf{p}_{fj} - \mathbf{p}_{msj1}) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Expressa em função dos estados do sistema no espaço operacional, a velocidade pode ser utilizada para definir uma correlação entre a tarefa primitiva $\dot{\mathbf{x}}_t$ e as variáveis das juntas $\mathbf{q}$. Substituindo as expressões apresentadas em (5.2) e definindo $\mathbf{S}_{\mathbf{x}_r}$ como a matriz de seleção de $\mathbf{x}_r$ a partir dos estados do sistema $\mathbf{x}$ no espaço operacional (i.e. $\mathbf{x}_r = \mathbf{S}_{\mathbf{x}_r} \mathbf{x}$) a expressão da velocidade pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{tj} &= \mathbf{R}_b^T (\dot{\mathbf{p}}_{fj} - \dot{\mathbf{p}}_{msj1}) + \mathbf{R}_b^T \mathbf{S} (\mathbf{p}_{fj} - \mathbf{p}_{msj1}) \boldsymbol{\omega}_b = \\ &= \mathbf{R}_b^T (\dot{\mathbf{p}}_{lj3} - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, lj3}) \boldsymbol{\omega}_{lj3} - \dot{\mathbf{p}}_{msj1}) + \mathbf{R}_b^T \mathbf{S} (\mathbf{p}_{lj3} + \mathbf{r}_{fj, lj3} - \mathbf{p}_{msj1}) \boldsymbol{\omega}_b = \\ &= \mathbf{R}_b^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, lj3}) \mathbf{G}_{lj3} \end{bmatrix} \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{x}}_{lj3}} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_3 & \mathbf{S}(\mathbf{p}_{lj3} + \mathbf{r}_{fj, lj3} - \mathbf{p}_{msj1}) \mathbf{G}_{msj1} \end{bmatrix} \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{x}}_{msj1}} \right) \dot{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Descrever a velocidade em função da velocidade no espaço operacional $\dot{\mathbf{x}}$ torna possível extrair a matriz Jacobiana respectiva a tarefa primitiva a partir da matriz Jacobiana do sistema. Seja $\mathbf{J}_{\text{task}}$ a matriz Jacobiana respectiva a tarefa primitiva tal que $\mathbf{J}_{\text{task}} = (\mathbf{J}_{\text{task}1}, \mathbf{J}_{\text{task}2}, \mathbf{J}_{\text{task}3}, \mathbf{J}_{\text{task}4})$ e $\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{J}_{\text{task}} \dot{\mathbf{q}}$, define-se a componente $\mathbf{J}_{\text{task}j}$ da matriz Jacobiana respectiva a pata j como

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{task}j} &= \mathbf{R}_b^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, lj3}) \mathbf{G}_{lj3} \end{bmatrix} \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{x}}_{lj3}} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_3 & \mathbf{S}(\mathbf{p}_{lj3} + \mathbf{r}_{fj, lj3} - \mathbf{p}_{msj1}) \mathbf{G}_{msj1} \end{bmatrix} \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{x}}_{msj1}} \right) \mathbf{J}_{\text{sys}} = \\ &= \mathbf{R}_b^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, lj3}) \mathbf{G}_{lj3} \end{bmatrix} \mathbf{J}_{lj3}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde $\mathbf{J}_{lj3}$ representa a componente da matriz Jacobiana do sistema respectiva ao último *link* da pata j . Vale ressaltar que a última igualdade em (5.5) foi derivada considerando a estrutura da matriz Jacobiana do sistema $\mathbf{J}_{\text{sys}}$ característica de sistemas de base flutuante, com acoplamento existente apenas entre cada um dos membros e a base flutuante.¹

A partir da matriz Jacobiana podem ser obtidos os termos de velocidade quadrática $\gamma_t = \dot{\mathbf{J}}_{\text{task}} \dot{\mathbf{q}}$ respectivos a tarefas primitiva. Derivando (5.5) com relação ao

¹ Considerando um robô de base flutuante com m membros acoplados, tem-se que a matriz Jacobiana do sistema $\mathbf{J}_{\text{sys}}$ possui um estrutura similar a matriz $\mathbf{D}$ em (B.10), podendo ser representada em função dos componentes isolados (relativos à base flutuante $\mathbf{J}_{bb}$ ou aos membros $\mathbf{J}_{llj}$) e de acoplamento ($\mathbf{J}_{blj}$) como

$$\mathbf{J}_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{bb} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{J}_{bl1} & \mathbf{J}_{ll1} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_{blm} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{J}_{llm} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

tempo obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}_{\text{task}j} = & \mathbf{R}_b^T \left[\mathbf{1}_3 \quad -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, l3}) \mathbf{G}_{lj3} \right] \dot{\mathbf{J}}_{lj3} + \\ & + \mathbf{R}_b^T \left[\mathbf{O}_3 \quad -\mathbf{S}(\dot{\mathbf{R}}_{lj3} \mathbf{r}_{fj, l3}^{lj3}) \mathbf{G}_{lj3} - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, l3}) \dot{\mathbf{G}}_{lj3} \right] \mathbf{J}_{lj3} + \\ & - \mathbf{R}_b^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_b) \left[\mathbf{1}_3 \quad -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, l3}) \mathbf{G}_{lj3} \right] \mathbf{J}_{lj3}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dado que $\boldsymbol{\gamma}_t = (\gamma_{t1}, \gamma_{t2}, \gamma_{t3}, \gamma_{t4})$, a componente γ_{tj} dos termos de velocidades quadrática respectiva a pata j pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \gamma_{tj} = \dot{\mathbf{J}}_{\text{task}j} \dot{\mathbf{q}} = & \mathbf{R}_b^T \left[\mathbf{1}_3 \quad -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, l3}) \mathbf{G}_{lj3} \right] \gamma_{lj3} + \\ & + \mathbf{R}_b^T \left[\mathbf{O}_3 \quad -\mathbf{S}(\dot{\mathbf{R}}_{lj3} \mathbf{r}_{fj, l3}^{lj3}) \mathbf{G}_{lj3} - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, l3}) \dot{\mathbf{G}}_{lj3} \right] \dot{\mathbf{x}}_{lj3} + \\ & - \mathbf{R}_b^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_b) \mathbf{R}_b \dot{\mathbf{x}}_{tj}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Considerando as identidades de quatérnios unitários (Apêndice A) tem-se que a relação (5.8) pode ser simplificada para

$$\gamma_{tj} = \mathbf{R}_b^T \left(\left[\mathbf{1}_3 \quad -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{fj, l3}) \mathbf{G}_{lj3} \right] \gamma_{lj3} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{lj3})^2 \mathbf{r}_{fj, l3} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_b) \mathbf{R}_b \dot{\mathbf{x}}_{tj} \right). \quad (5.9)$$

5.1.2 Regulação do tronco

Tendo em vista que os estados do tronco já estão inclusos no vetor de estados do sistema, define-se a tarefa primitiva correspondente como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{v}_b, \quad \dot{\mathbf{x}}_t = \boldsymbol{\omega}_b, \\ \mathbf{J}_{\text{task}} &= \mathbf{G}_b \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{v}}_b} \mathbf{J}_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{1}_3 & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \\ \gamma_t &= \dot{\mathbf{J}}_{\text{task}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

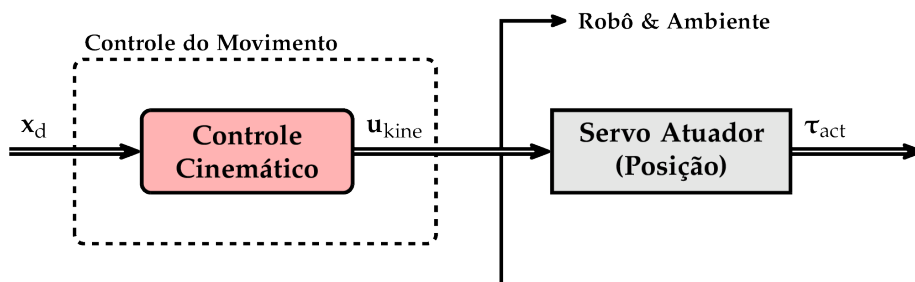
5.2 Controle cinemático

Compondo a estratégia de controle mais simples utilizada nesse trabalho, o controle cinemático envolve aplicar a cinemática inversa sobre a trajetória desejada $\mathbf{x}_d$. No controle cinemático, o sinal de controle $\mathbf{u}_{\text{kine}}$ compõe a trajetória desejada expressa no espaço das juntas ativas. Exclusivamente para o controle cinemático, os atuadores foram tratados como servo-motores ideais (usando o acionamento cinemático das juntas ativas no Simscape Multibody), sendo capazes de rastrear perfeitamente a posição desejada. Essa escolha foi feita para acentuar as particularidades dessa estratégia de controle, simulando sua operação nas melhores condições possíveis. Assim, aplicando a cinemática inversa, o sinal de controle $\mathbf{u}_{\text{kine}}$ pode ser descrito como

$$\mathbf{u}_{\text{kine}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \dot{\mathbf{q}}_d \\ \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_d = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_d), \quad (5.11)$$

onde a velocidade $\dot{\mathbf{q}}_d$ e aceleração $\ddot{\mathbf{q}}_d$ no espaço das juntas foram obtidas de forma numérica por meio do conversor SIMULINK-PS CONVERTER, que permite a estimação automática das derivadas de um sinal de entrada para utilização como sinais físicos em blocos do Simscape. A Figura 9 apresenta o diagrama de blocos representativo do controle cinemático. Note que o atuador configura um elemento pertencente ao bloco Robô & Ambiente dentro do sistema de controle proposto (Figura 4) e portanto é representado utilizando o mesmo estilo de bloco.

Figura 9 – Diagrama de blocos representativo do controle cinemático. O sinal de controle $\mathbf{u}_{\text{kin}}$ compõe a trajetória desejada expressa no espaço das juntas ativas.



Fonte: Autoria própria.

5.3 Controle de impedância

Conforme previamente discutido, o controle de impedância pode ser interpretado como o controle do movimento em conjunto com a especificação da interação dinâmica expressa na forma de uma impedância. Considerando uma impedância linear no espaço operacional, tem-se que o controle de impedância pode ser descrito em função das forças generalizadas de interação aplicadas pelo sistema ζ_{int} , do erro de “posição” $\mathbf{e}$, do erro de velocidade $\dot{\mathbf{e}}$, e do erro de aceleração $\ddot{\mathbf{e}}$, resultando no sistema de equações

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \mathbf{e} = \zeta_{\text{int}}, \quad (5.12)$$

onde $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{D}_d$, e $\mathbf{K}_d$ representam matrizes respectivas a inércia, o amortecimento, e a rigidez desejada. Note que a definição do erro depende da tarefa primitiva, sendo que caso a tarefa integre uma pose torna-se necessário empregar o operador diferença enquadrada ($\boxminus$) em virtude da natureza não vetorial da orientação. Considerando a pose desejada $\mathbf{x}_d = (\mathbf{p}_d, \mathbf{v}_d)$ e a pose atual $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$, sendo a representação da orientação via quatérnios unitários (i.e. $\mathbf{v}, \mathbf{v}_d \in \mathbb{H}_1$), o operador diferença enquadrada entre $\mathbf{x}_d$ e $\mathbf{x}$ pode ser expresso como

$$\mathbf{x}_d \boxminus \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_d - \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{\text{err}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\text{err}} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})_{\text{err}} = \mathbf{v}_d \mathbf{v}^*.$$

O controle de impedância caracteriza uma relação entre diferentes tipos de variáveis, sendo seu significado para um determinados sistema ou aplicação depen-

dente da implementação. Neste trabalho foram utilizadas duas formas distintas para implementar o controle de impedância: o controle via modelo virtual, e o controle via dinâmica inversa.

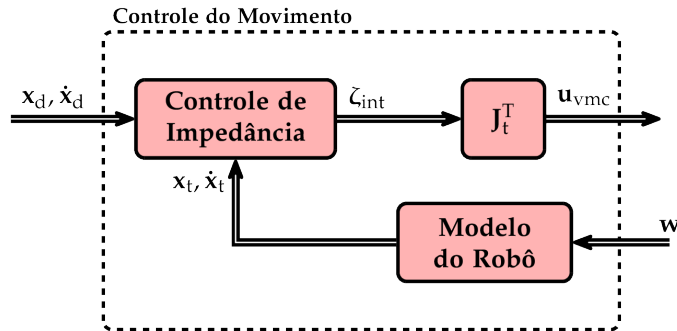
5.3.1 Controle via modelo virtual

O controle via modelo virtual tem como princípio simular a inclusão de um componente físico virtual através do controle. Dessa forma, o sinal de controle respectivo ao controle de impedância via modelo virtual $\mathbf{u}_{vmc}$ corresponde ao torque nas juntas respectivo a ação da força generalizada virtual de interação ζ_{int} , calculada conforme (5.12), podendo ser descrito como

$$\mathbf{u}_{vmc} = \mathbf{J}_t^T \zeta_{int}. \quad (5.13)$$

A Figura 10 apresenta o diagrama de blocos representativo do controle de impedância via modelo virtual (considerando $\mathbf{M}_d = \mathbf{0}$), onde o bloco Modelo do Robô aplica a cinemática direta e diferencial para obter os estados no espaço operacional respectivos a tarefa ($\mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{x}}_t$) a partir dos estados das juntas $\mathbf{w}$.

Figura 10 – Diagrama de blocos representativo do controle de impedância via modelo virtual. O sinal de controle $\mathbf{u}_{vmc}$ compõe o torque nas juntas ativas respectivo a ação da força generalizada virtual de interação ζ_{int} .



Fonte: Autoria própria.

5.3.2 Controle via dinâmica inversa

Por definição, a dinâmica inversa consiste em determinar os torques de atuação necessários para estabelecer um movimento desejado para o sistema. O controle via dinâmica inversa visa explorar esse procedimento para desacoplar e linearizar a dinâmica original do sistema. Diferentemente do controle via modelo virtual, o controle de impedância via dinâmica inversa visa substituir a dinâmica original do sistema, permitindo a completa caracterização do comportamento do sistema resultante através da impedância programada. Nesse método, o sinal de controle $\mathbf{u}_{id}$, que corresponde a um torque de atuação, integra dois componentes: a compensação da dinâmica original

do sistema (τ_{dyn}), e a especificação do movimento desejado (τ_t). Como na maioria dos casos especifica-se o movimento desejado no espaço operacional por meio de uma força generalizada ζ_t , o sinal de controle pode ser expresso como

$$\mathbf{u}_{\text{id}} = \tau_t + \tau_{\text{dyn}} = \mathbf{J}_t^T \zeta_t + \tau_{\text{dyn}}. \quad (5.14)$$

O cálculo da força generalizada ζ_t envolve tanto a especificação da dinâmica desejada $\ddot{\mathbf{x}}_t$ quanto a compensação dos termos de velocidade quadrática γ_t . Considerando $\Lambda_t = (\mathbf{J}_t(\mathbf{B}_{\text{act}})^{-1}\mathbf{J}_t^T)^{-1}$ como a matriz de inércia respectiva a tarefa primitiva, tem-se que a força generalizada pode ser definida como

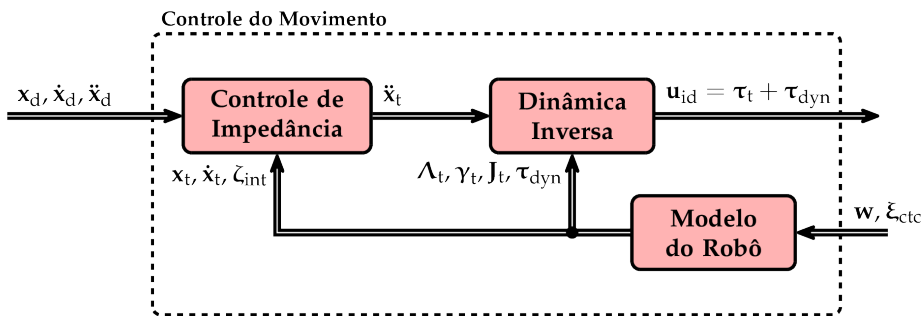
$$\zeta_t = \Lambda_t(\ddot{\mathbf{x}}_t - \gamma_t). \quad (5.15)$$

onde a especificação do movimento desejado $\ddot{\mathbf{x}}_t$ provém do termo respectivo ao erro de aceleração em (5.12), nesse caso definido como $\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{x}}_d - \ddot{\mathbf{x}}_t$, que resulta na expressão

$$\ddot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{D}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d\mathbf{e} - \zeta_{\text{int}}). \quad (5.16)$$

A Figura 11 apresenta o diagrama de blocos representativo do controle de impedância via dinâmica inversa, onde o bloco Dinâmica Inversa engloba todo o equacionamento necessário para converter a especificação do movimento desejado em um torque de atuação τ_t e compensar a dinâmica natural do sistema τ_{sys} . Observe que nesse caso o bloco Modelo do Robô implementa tanto a cinemática quanto a dinâmica do sistema a partir dos estados das juntas $\mathbf{w}$ e das forças generalizadas de contato com o solo ξ_{ctc} (inclusas no vetor de forças externas ξ_{ext} descrito na Seção 2.3).

Figura 11 – Diagrama de blocos representativo do controle de impedância via dinâmica inversa. O sinal de controle $\mathbf{u}_{\text{id}}$, que corresponde a um torque de atuação, integra dois componentes: a compensação da dinâmica original do sistema (τ_{dyn}), e a especificação do movimento desejado (τ_t).



Fonte: Autoria própria.

5.3.3 Dinâmica inversa das patas

Considerando o modelo dinâmico no subespaço controlável (2.24), tem-se que o termo respectivo a compensação da dinâmica original do sistema pode ser definido como

$$\tau_{\text{dyn}} = -((\zeta_g)_{\text{act}} + (\xi_{\text{ext}})_{\text{act}} + \mathbf{v}_{\text{act}}). \quad (5.17)$$

Note que caso fosse utilizado o modelo dinâmico no espaço das juntas (2.22), em virtude do acoplamento das patas com o tronco, a compensação da dinâmica original do sistema envolveria um termo dependente da aceleração do tronco, isto é,

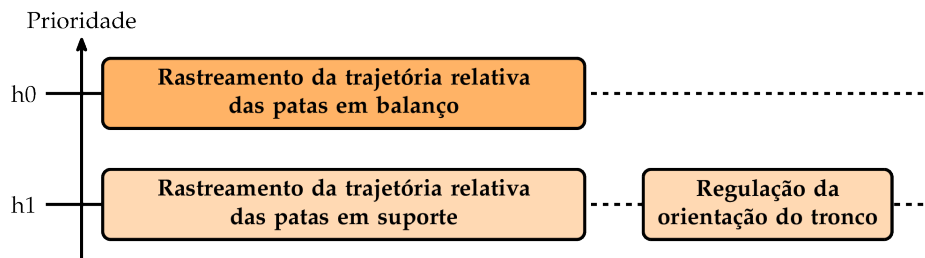
$$\tau_{\text{dyn}} = (\mathbf{B}_{\text{sys}})_{bl}^T \ddot{\mathbf{q}}_b - ((\zeta_g)_{\text{sys}} + (\xi_{\text{ext}})_{\text{sys}} + \mathbf{v}_{\text{sys}}).$$

Tendo em vista que os estados do sistema configuram a pose e velocidade, esse termo de aceleração teria de ser obtido através da derivação, uma operação sensível a ruídos. Apesar de não ser relevante em um ambiente de simulação controlado, na prática, esse efeito poderia degradar a compensação da dinâmica original do sistema impedindo o funcionamento adequado.

5.4 Controle de corpo inteiro

Baseado na hierarquização de tarefas primitivas, o controle de corpo inteiro permite que múltiplos objetivos de controle sejam considerados simultaneamente desde que haja redundância residual disponível no sistema. Neste trabalho foram definidos dois níveis hierárquicos, no primeiro nível consta a tarefa de movimento respectiva ao rastreamento das patas em balanço, já no segundo nível, o rastreamento das patas em suporte e a regulação da orientação do tronco. A tarefa de rastreamento das patas teve de ser particionada em duas subtarefas pertencentes a níveis hierárquicos distintos de forma a gerar uma redundância residual que permitisse instaurar a tarefa de regulação da orientação do tronco. A disposição das partições foi escolhida tendo como princípio que a regulação do tronco depende da modulação das forças de reação o solo (envolvendo a atuação das patas em suporte) e portanto deve estar pelo menos no mesmo nível hierárquico que qualquer outra tarefa envolvendo esse mesmo conjunto de patas. A Figura 12 apresenta um diagrama representativo da disposição das tarefas primitivas e seus respectivos níveis hierárquicos para o controle de corpo inteiro.

Figura 12 – Diagrama das tarefas primitivas e níveis hierárquicos definidos para o controle de corpo inteiro. Cada bloco representa uma tarefa primitiva, sendo o conjunto de blocos em uma mesma linha correspondente a um único nível hierárquico.



Fonte: Autoria própria.

No controle de corpo inteiro, a manutenção da estrutura hierárquica provém da projeção de tarefas menos prioritárias no espaço nulo de tarefas com maior prioridade. Dado que múltiplas tarefas podem compartilhar o mesmo nível hierárquico, define-se uma representação unificada para o conjunto de p tarefas primitivas pertencentes a um mesmo nível hierárquico i tal que

$$\mathbf{x}_{hi} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{tp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{hi} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{t1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{tp} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{hi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{t1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_{tp} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

onde $\mathbf{x}_{hi}$ representa o conjunto de tarefas primitivas situadas no nível hierárquico i , $\mathbf{J}_{hi}$ representa a sua respectiva matriz Jacobiana, e $\boldsymbol{\gamma}_{hi}$ representa os termos de velocidade quadrática.

Partindo do controle via dinâmica inversa, o sinal de controle $\mathbf{u}_{wbc}$, que corresponde a um torque de atuação, integra dois componentes: $\boldsymbol{\tau}_{dyn}$, respectivo a compensação da dinâmica original do sistema, e $\sum_i \boldsymbol{\tau}_{hi}$, que representa a contribuição de todos os níveis hierárquicos, podendo ser descrito como

$$\mathbf{u}_{wbc} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{hi} + \boldsymbol{\tau}_{dyn}. \quad (5.19)$$

Dado que cada nível hierárquico i seja expresso no espaço operacional como uma força generalizada $\boldsymbol{\zeta}_{hi}$, tem-se que

$$\boldsymbol{\tau}_{hi} = \left(\mathbf{J}_{hi|prev(i)} \right)^T \boldsymbol{\zeta}_{hi}, \quad (5.20)$$

onde $\mathbf{J}_{hi|prev(i)}$ representa a matriz Jacobiana priorizada do nível hierárquico i . Cada nível hierárquico configura um índice de prioridade i exclusivo, sendo $i = 0$ correspondente ao nível mais prioritário, $i = 1$ o nível com a segunda maior prioridade, e assim por diante. Dessa forma, para cada índice de prioridade i , a matriz Jacobiana priorizada $\mathbf{J}_{hi|prev(i)}$ pode ser obtida através do produto entre a matriz Jacobiana do nível hierárquico $\mathbf{J}_{hi}$ e um projetor ortogonal para o espaço nulo combinado $\mathbf{N}_{prev(i)}$ de todos os níveis anteriores, isto é, $\mathbf{J}_{hi|prev(i)} = \mathbf{J}_{hi} \mathbf{N}_{prev(i)}$, onde o projetor ortogonal para o espaço nulo combinado pode ser definido como

$$\mathbf{N}_{prev(i)} = \begin{cases} \mathbf{N}_{hi-1|prev(i-1)} \mathbf{N}_{hi-2|prev(i-2)} \cdots \mathbf{N}_{h0}, & i > 0, \\ \mathbf{1}, & i = 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

O projetor ortogonal para o espaço nulo para cada nível hierárquico pode ser obtido de diversas formas incluindo o método da pseudo-inversa e a decomposição QR. Neste trabalho, optou-se por utilizar a definição envolvendo o cálculo da pseudo-inversa, que define o projetor para o índice de prioridade i como

$$\mathbf{N}_{hi|prev(i)} = \mathbf{1} - \mathbf{J}_{hi|prev(i)}^\dagger \mathbf{J}_{hi|prev(i)}, \quad (5.22)$$

onde $\mathbf{J}_{hi|prev(i)}^+$ corresponde a pseudo-inversa dinamicamente consistente da matriz Jacobiana priorizada do nível hierárquico i , que depende da matriz de inércia priorizada $\mathbf{\Lambda}_{hi|prev(i)}$. Sendo a matriz Jacobiana não-singular, tem-se que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{hi|prev(i)} &= \left(\mathbf{J}_{hi|prev(i)} \mathbf{B}_{act}^{-1} \left(\mathbf{J}_{hi|prev(i)} \right)^T \right)^{-1} \\ \mathbf{J}_{hi|prev(i)}^+ &= \mathbf{B}_{act}^{-1} \left(\mathbf{J}_{hi|prev(i)} \right)^T \mathbf{\Lambda}_{hi|prev(i)} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

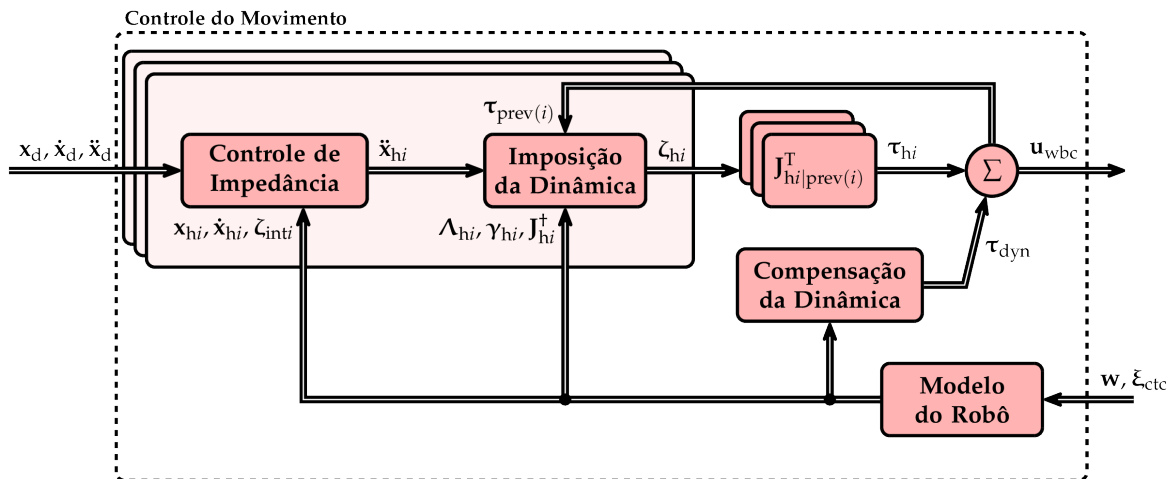
Note que quando há possibilidade de interferência nos níveis mais prioritários (i.e. redução do posto de $\mathbf{N}_{prev(i)}$) a matriz Jacobiana torna-se singular. Nessa situação, considerando que ainda exista redundância residual disponível ($\text{posto}(\mathbf{N}_{prev(i)}) > 0$), a matriz de inércia e a pseudo-inversa devem ser calculadas através de outro método (e.g., decomposição em valores singulares) para que se obtenha uma solução aproximada.

Em função dos múltiplos objetivos de controle, a força generalizada ζ_{hi} envolve, além da especificação da dinâmica desejada $\ddot{\mathbf{x}}_{hi}$ e da compensação dos termos de velocidade quadrática γ_{hi} , um termo respectivo a compensação do efeito gerado pelos níveis anteriores $\boldsymbol{\tau}_{prev(i)} = \boldsymbol{\tau}_{hi-1} + \boldsymbol{\tau}_{hi-2} + \dots + \boldsymbol{\tau}_{h0}$, podendo ser calculada como

$$\zeta_{hi} = \mathbf{\Lambda}_{hi}(\ddot{\mathbf{x}}_{hi} - \gamma_{hi}) - (\mathbf{J}_{hi}^+)^T \boldsymbol{\tau}_{prev(i)}. \quad (5.24)$$

A Figura 13 apresenta o diagrama de blocos representativo do controle de corpo inteiro. Note que nesse caso a dinâmica inversa foi segmentada em dois blocos: a Imposição da Dinâmica (5.24), e a Compensação da Dinâmica (5.17).

Figura 13 – Diagrama de blocos representativo do controle de corpo inteiro. O sinal de controle $\mathbf{u}_{wbc}$, que corresponde a um torque de atuação, integra dois componentes: $\boldsymbol{\tau}_{dyn}$, respectivo a compensação da dinâmica original do sistema, e $\sum_i \boldsymbol{\tau}_{hi}$, que representa a contribuição de todos os níveis hierárquicos.



Fonte: Autoria própria.

5.5 Simulação

Considerando que todos os métodos de controle propostos dependem pelo menos do modelo cinemático do robô, os mesmos foram implementados juntamente ao respectivo modelo através de blocos *Level-2 CMEX S-Function* do Simulink. Dos quatro métodos de controle propostos, apenas três possuem parâmetros de controle configuráveis (impedância), sendo que dois desses três consideram apenas uma das tarefas primitivas definidas (rastreamento da trajetória das patas). Assim, tendo em vista os dois cenários de simulação definidos no Capítulo 3, os parâmetros para os três métodos de controle propostos que possuem parâmetros configuráveis foram estabelecidos de forma unificada conforme apresenta a Tabela 8.

Tabela 8 – Parâmetros de controle utilizados para simulação. A tarefa I corresponde ao rastreamento da trajetória das patas, enquanto a tarefa II, a regulação do tronco.

	Tarefa I	Tarefa II
$\mathbf{m}_d$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$
$\mathbf{d}_d$	$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 200 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 20 & 20 & 100 \end{bmatrix}^T$
$\mathbf{k}_d$	$\begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 5000 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 1000 \end{bmatrix}^T$

Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 8, cada linha descreve um conjunto de parâmetros de controle, sendo as colunas respectivas a tarefa (rastreamento da trajetória das patas ou regulação do tronco). Considera-se que todas as matrizes são diagonais, sendo o conjunto de parâmetros de controle ($\mathbf{m}_d$, $\mathbf{d}_d$, $\mathbf{k}_d$) representativos dos elementos na diagonal das matrizes $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{D}_d$, e $\mathbf{K}_d$ tal que $\mathbf{M}_d = \text{diag}(\mathbf{m}_d)$, $\mathbf{D}_d = \text{diag}(\mathbf{d}_d)$, e $\mathbf{K}_d = \text{diag}(\mathbf{k}_d)$. A escolha do conjunto de parâmetros foi realizada manualmente durante experimentos preliminares de forma a possibilitar a execução dos dois cenários sem que houvesse tombamento, minimizando o saltitar excessivo e o escorregamento do robô.

6 Resultados e Discussão

A partir da implementação do controle cinemático, do controle de impedância (via modelo virtual e via dinâmica inversa) e do controle de corpo inteiro no ambiente Simulink e da construção do modelo do robô quadrúpede no Simscape Multibody, a coleta de resultados foi realizada para os dois cenários de simulação propostos. O primeiro cenário objetiva investigar o efeito do impacto com o solo no desempenho das estratégias de controle por meio da análise das grandezas associadas ao deslocamento vertical do robô (i.e. posição vertical do tronco e a coordenada z do erro de posição das patas) e aos esforços demandados dos atuadores. Já o segundo cenário envolve a aplicação das estratégias de controle para a locomoção, sendo avaliada a capacidade do robô para se deslocar em linha reta ao analisar a velocidade de avanço do robô, a orientação do tronco, bem como índices de desempenho pertinentes a locomoção (i.e. custo de transporte e risco de escorregamento).

6.1 Primeiro cenário

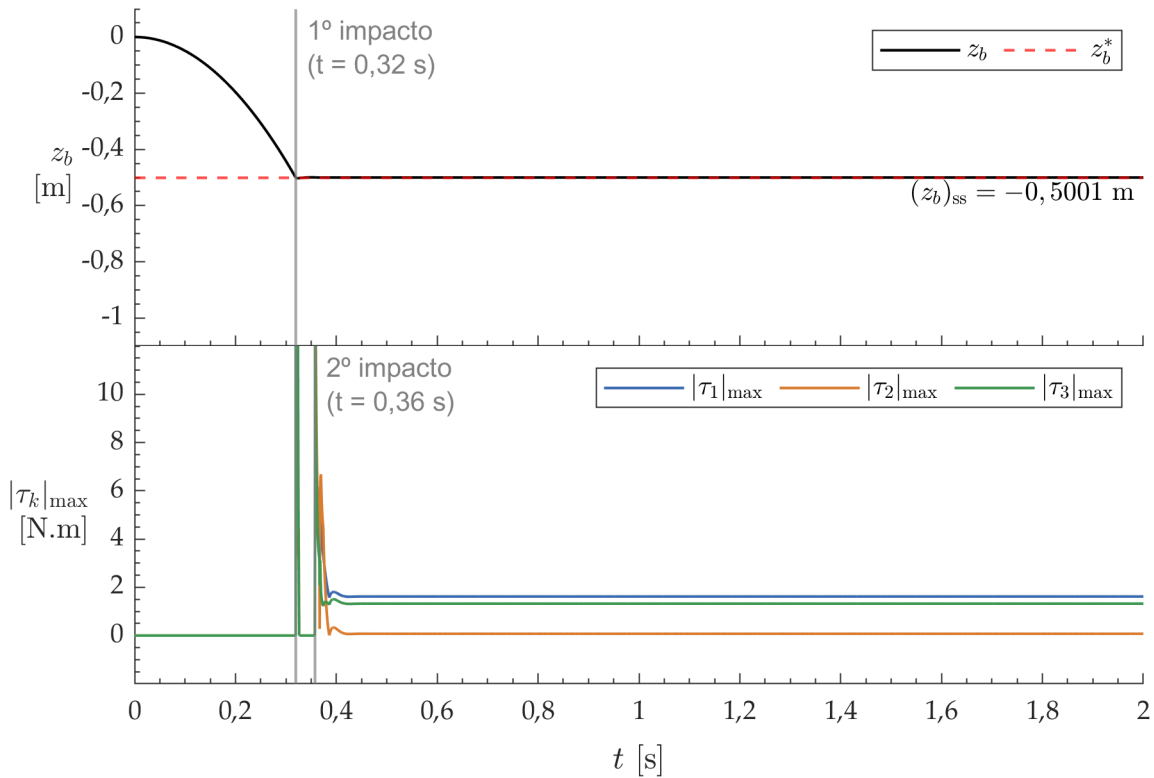
No primeiro cenário o controle opera como um regulador, devendo manter as condições iniciais durante a queda livre e mediante o impacto com o solo. Apesar de terem sido simulados um total de dez segundos para cada experimento, tendo em vista a rápida convergência para o estado estacionário, apenas os primeiros dois segundos foram apresentados nas figuras dessa seção. Nas subseções seguintes são apresentados os resultados pertinentes ao primeiro cenário para cada uma das estratégias de controle.

6.1.1 Controle cinemático

Verifica-se, conforme esperado para um controle de posição ideal, que o sistema apresentou durante todo o período simulado um erro na posição relativa das patas inferior a tolerância relativa utilizada de $1,0 \times 10^{-6}$ (Tabela 5) mesmo diante do impacto com o solo. Essa alta qualidade do rastreamento se reflete na elevação dos esforços máximos absolutos nos atuadores (Figura 14), registrando 434 N.m para primeira, 15,6 N.m para segunda, e 353 N.m para a terceira junta ativa logo após os dois instantes de impacto com o solo em 0,32 s e 0,36 s, uma demanda impraticável para o motor HT05001, que apresenta um torque máximo $\tau_{\text{peak}} = 10,2$ N.m (ALLIED MOTION, 2015), e qualquer atuador real com características similares. Vale ressaltar que especificamente para o caso do controle cinemático, em função do tipo de acionamento da junta, não foi possível instaurar qualquer tipo de saturação para mitigar esse problema. A idealidade do controlador também fica evidente no comportamento observado na

posição vertical do tronco z_b , que sem magnificação não apresenta qualquer oscilação indicando que houveram dois instantes de impacto com o solo. Ademais, observa-se que ao final da simulação o sistema converge para o estado estacionário, apresentando um erro entre o valor medido e o desejado ($z_b^* = -h = -0,5$ m) inferior a 0,1 mm. Esse erro tem correlação com a deformação do solo decorrente do modelo de contato, podendo ser estimado considerando a rigidez na componente normal de 1×10^6 N/m (Tabela 4) e uma força vertical de ≈ 100 N (peso total do robô / quatro patas).

Figura 14 – Posição vertical z_b e torques máximos absolutos nos atuadores das patas $|\tau_k|_{\max}$ durante o primeiro cenário de simulação com o controle cinemático.



Fonte: Autoria própria.

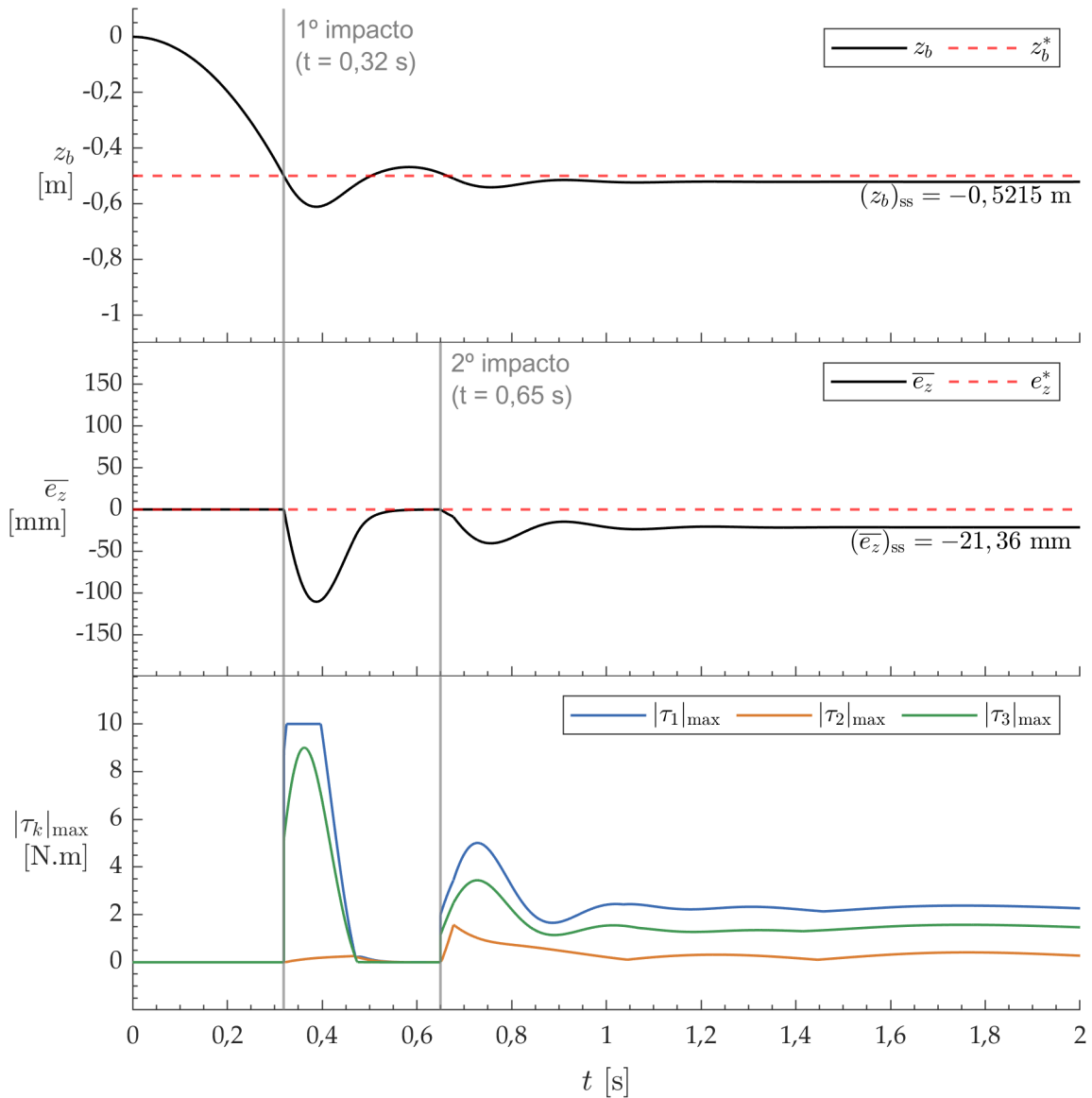
6.1.2 Controle de impedância

6.1.2.1 Controle via modelo virtual

Diferente do controle cinemático, o controle de impedância via modelo virtual, apresentou um erro mais significativo na trajetória das patas (Figura 15), resultando em um valor de estado estacionário de -21,36 mm para componente vertical do erro da posição das patas ao final da simulação. Lembrando que um valor não nulo de erro ao final da simulação configura um fenômeno esperado tendo em vista que o sistema permanece sob a ação das forças de contato e que o controle simula uma mola-amortecedor entre o tronco e as patas. Apesar de perder qualidade no rastreamento, o controle demandou esforços mais do que uma ordem de grandeza

menores, apresentando picos em valor absoluto de 10 N.m para primeira, 1,58 N.m para segunda, e 9,01 N.m para terceira junta ativa logo após o impacto inicial com o solo, onde apenas a junta 1 esteve sujeita a saturação. Com relação a posição vertical do tronco verifica-se um efeito do impacto inicial com o solo mais acentuado em comparação com o controle cinemático, podendo ser observadas oscilações visíveis próximas ao instante de impacto e o erro de posição das patas não desprezível.

Figura 15 – Posição vertical z_b , componente vertical do erro de posição das patas $\bar{e}_z$, e torques máximos absolutos nos atuadores das patas $|\tau_k|_{\max}$ durante o primeiro cenário de simulação envolvendo o controle de impedância via modelo virtual.

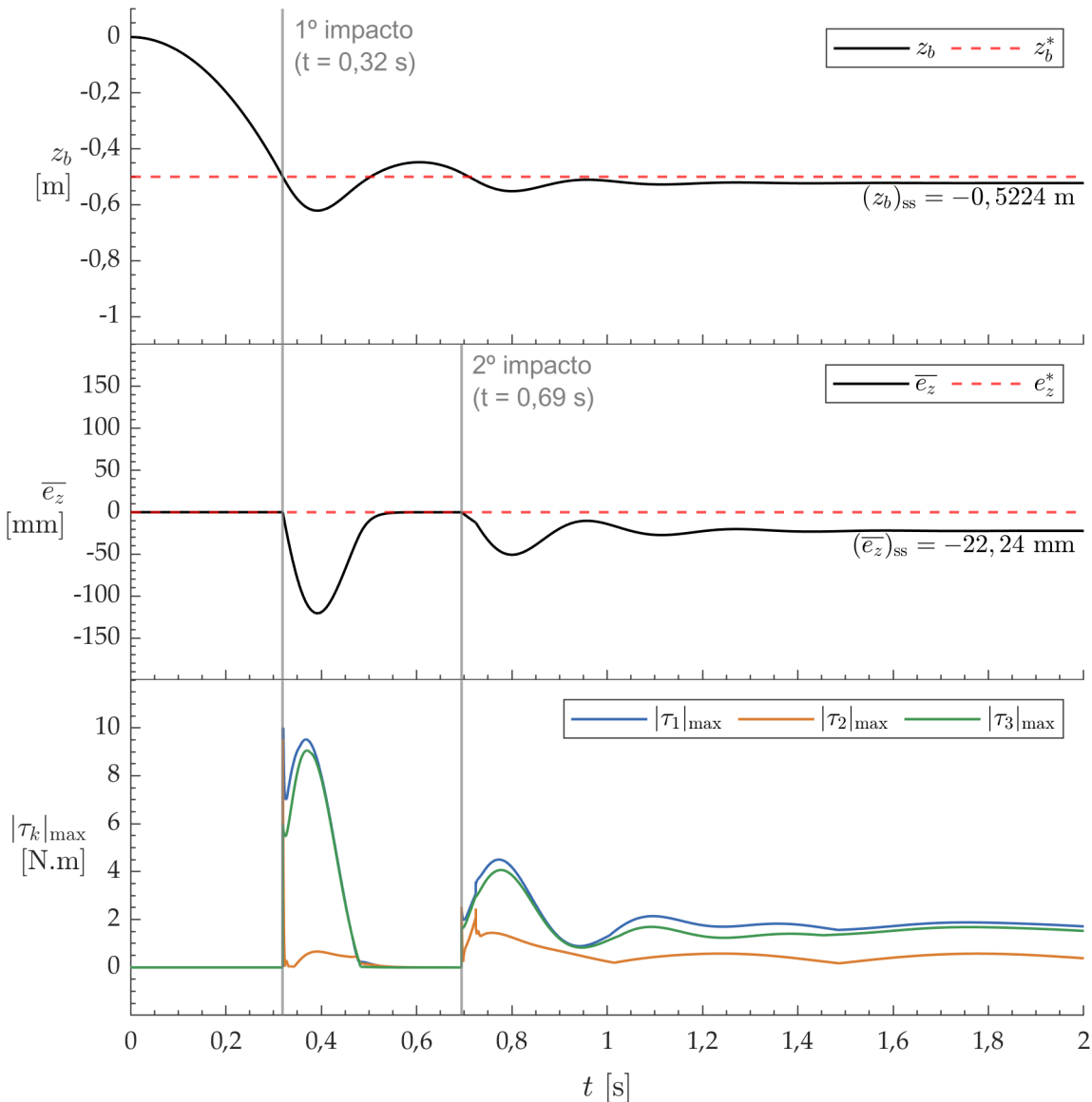


Fonte: Autoria própria.

6.1.2.2 Controle via dinâmica inversa

O controle de impedância via dinâmica inversa (Figura 16) apresentou um erro de estado estacionário mais elevado em valor absoluto de -22,24 mm na componente vertical da posição relativa das patas bem como uma maior demanda de esforços nos atuadores, que atingiram picos em valor absoluto de 10 N.m para primeira, 9,53 N.m para a segunda, e 9,06 N.m para a terceira junta ativa logo após o impacto inicial com o solo, apesar de permanecer em saturação por um menor período de tempo. A diferença observada no erro de posição pode ser correlacionada com as forças de interação atuantes nas patas, que foram ligeiramente superiores (111,2 N) em comparação como as obtidas no controle via modelo virtual (106,3 N).

Figura 16 – Posição vertical z_b , componente vertical do erro de posição das patas $\bar{e}_z$, e torques máximos absolutos nos atuadores das patas $|\tau_k|_{\max}$ durante o primeiro cenário de simulação envolvendo o controle de impedância via dinâmica inversa.

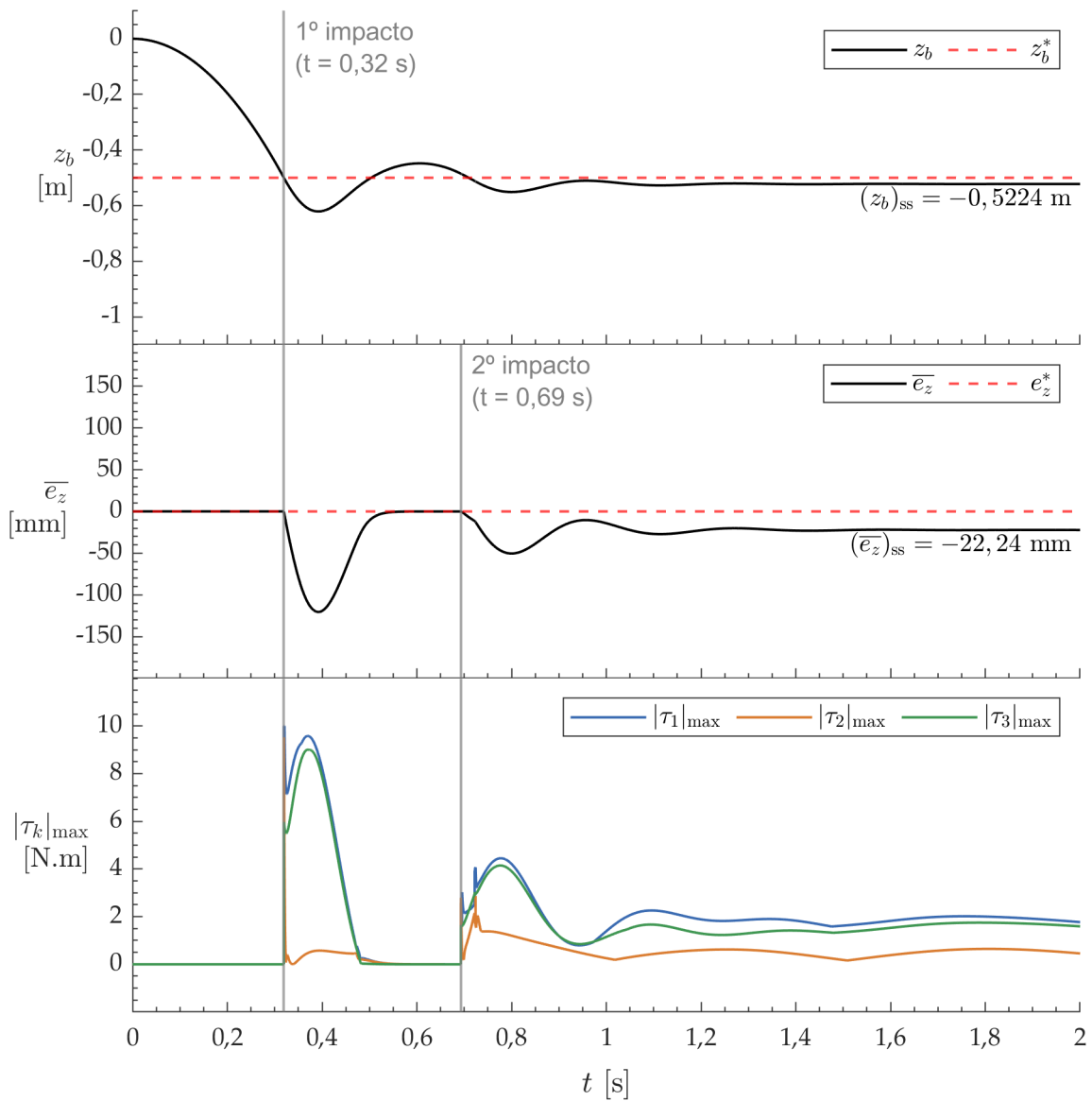


Fonte: Autoria própria.

6.1.3 Controle de corpo inteiro

O controle de corpo inteiro (Figura 17) mostrou um comportamento muito similar ao controle de impedância via dinâmica inversa, apresentando um erro de estado estacionário de -22,24 mm na componente vertical da posição relativa das patas e uma demanda de esforços nos atuadores atingindo picos em valor absoluto de 10 N.m para primeira, 9,53 N.m para a segunda, e 9,01 N.m para a terceira junta ativa logo após o impacto inicial com o solo.

Figura 17 – Posição vertical z_b , componente vertical do erro de posição das patas $\bar{e}_z$, e torques máximos absolutos nos atuadores das patas $|\tau_k|_{\max}$ durante o primeiro cenário de simulação envolvendo o controle de corpo inteiro.



Fonte: Autoria própria.

Para os três controladores envolvendo o controle de impedância, a magnitude do erro de estado estacionário na componente vertical pode ser estimada conhecendo-se a rigidez do controle k_{dz} , nesse caso $5,0 \times 10^3$ N/m, e força de contato (normal) f_z tal que $(e_z)_{ss} = -f_z/k_{dz}$. Tendo que em vista que pode existir um desbalanceamento no carregamento das patas, foi calculada a força normal média entre as patas ao final da simulação $(\bar{f}_z)_{ss}$, resultando em 106,3 N para o VMC e 111,2 N para o ID e WBC. Com esses valores obtém-se um erro estimado de $(\bar{e}_z)_{ss} = -106,3/(5,0 \times 10^3) = -21,26$ mm para o VMC, e $(\bar{e}_z)_{ss} = -111,2/(5,0 \times 10^3) = -22,24$ mm para o ID e WBC, praticamente iguais aos valores medidos em ambos os casos.

A Tabela 9 apresenta de forma resumida dos resultados numéricos obtidos durante o primeiro cenário. O controle cinemático demonstrou a melhor qualidade na regulação dado que não houve um erro de estado estacionário significativo na componente vertical da posição das patas, no entanto, os valores de torque máximo nos atuadores das patas estiveram muito acima das especificações do motor HT05001, o que torna esse tipo de controlador inviável em sua formulação ideal. Em contrapartida, nos outros controladores foi registrado um erro de estado estacionário não desprezível mantendo-se os valores de torque máximo dentro das especificações. Referente ao torque máximo demandado dos atuadores das patas observa-se uma elevação significativa do valor observado para junta 2 (de flexão e extensão do quadril) a partir do controle via dinâmica inversa, que pode estar correlacionada com a adição dos termos para compensação da dinâmica inversa.

Tabela 9 – Sumário dos resultados obtidos durante o primeiro cenário.

Tipo de controle ¹	Tarefa		Atuadores		
	$(z_b)_{ss}$	$(\bar{e}_z)_{ss}$	$ \tau_1 _{\max}$	$ \tau_2 _{\max}$	$ \tau_3 _{\max}$
	[m]	[mm]	[N.m]	[N.m]	[N.m]
A	-0,5001	0*	434	15,6	353
B	-0,5215	-21,36	10	1,58	9,01
C	-0,5224	-22,24	10	9,53	9,06
D	-0,5224	-22,24	10	9,53	9,01

¹ A. Controle cinemático; B. Controle de impedância via modelo virtual; C. Controle de impedância via dinâmica inversa; D. Controle de corpo inteiro. * Inferior a tolerância relativa de $1,0 \times 10^{-6}$.

Fonte: Autoria própria.

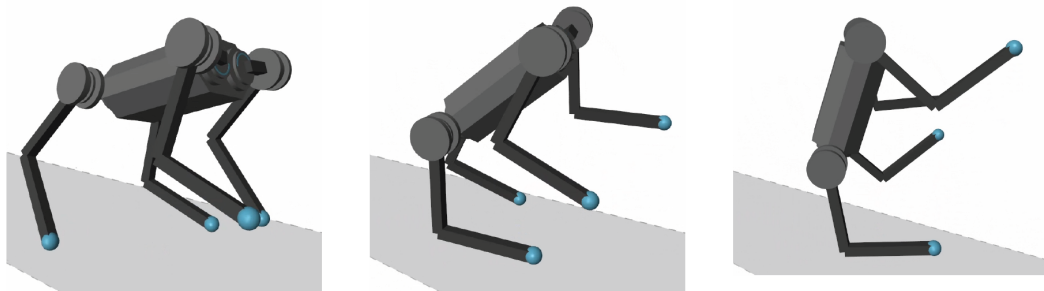
6.2 Segundo cenário

Buscando avaliar o desempenho das estratégias de controle aplicadas a locomoção, o segundo cenário foi realizado tendo em vista o rastreamento da trajetória proveniente do módulo gerador de movimento utilizando a marcha trote em velocidade moderada. Dado que o gerador de movimento demora um certo tempo para convergir ao ciclo-limite correspondente a marcha utilizada, optou-se por apresentar os dados coletados somente a partir dos 8 s de forma a evidenciar os aspectos particulares da locomoção. No segundo cenário foram obtidas séries temporais respectivas a velocidade de avanço v_{loc} , ângulo de guinada do tronco ψ_{loc} , erro de posição das patas e_{t0} , e torques máximos absolutos nos atuadores das patas $|\tau_k|_{max}$. As subseções que seguem apresentam os resultados pertinentes ao segundo cenário para cada uma das estratégias de controle.

6.2.1 Controle cinemático

Nesse cenário, o controle cinemático não foi capaz de permitir a locomoção com os parâmetros utilizados, com o robô tombando (Figura 18) logo após o início do padrão de locomoção. O tombamento do robô tem como causa a ação de um momento resultante no tronco com componentes na horizontal originado pelas elevadas GRFs geradas pelo controle cinemático no instante em que se inicia a locomoção (em particular durante a fase de suporte, onde há uma rápida movimentação horizontal). Dado que nessa condição o robô não foi capaz de se locomover, nenhum dado numérico foi registrado para esse tipo de controle.

Figura 18 – Instantâneos apresentando o tombamento do robô sob a influência o controle cinemático durante o segundo cenário de simulação.



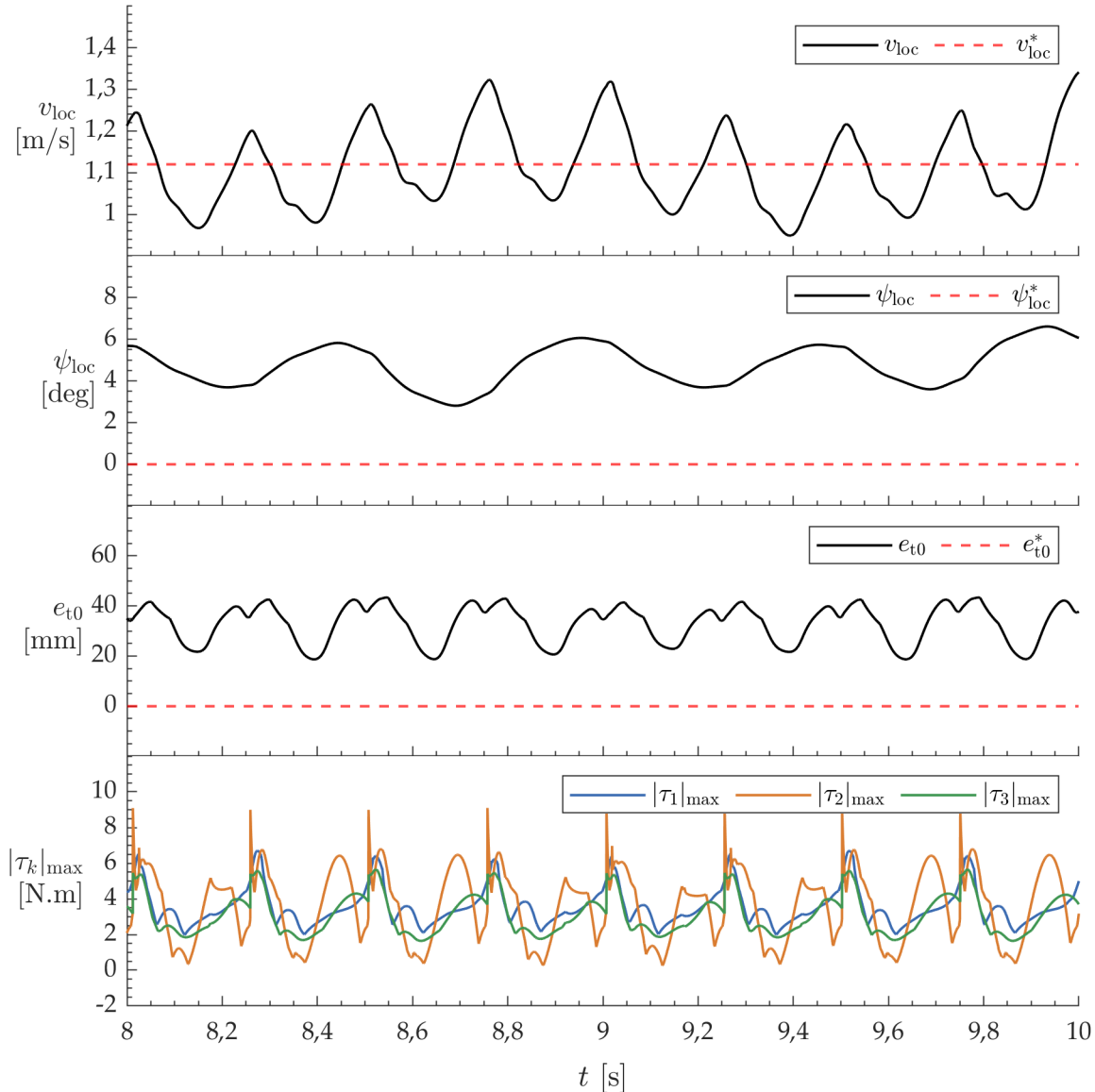
Fonte: Autoria própria.

6.2.2 Controle de impedância

6.2.2.1 Controle via modelo virtual

Verifica-se que com o controle de impedância via modelo virtual (Figura 19) o sistema apresentou uma velocidade de avanço média após a estabilização da marcha de 1,16 m/s, um valor muito próximo da velocidade estimada tendo em vista os parâmetros utilizados ($v_{loc}^* = \lambda_s/T_s = 0,56/0,5 = 1,12$ m/s), e um ângulo de guinada com valor médio de 4,73 graus, equivalente a um desvio lateral por metro de avanço $\Delta y = \tan(4,73) = 82,7$ mm/m. Nota-se que para a velocidade de avanço existe um

Figura 19 – Velocidade de avanço v_{loc} , ângulo de guinada ψ_{loc} , erro de posição das patas e_{t0} , e torques máximos absolutos nos atuadores das patas $|\tau_k|_{max}$ durante o segundo cenário de simulação mediante a utilização do controle de impedância via modelo virtual.



Fonte: Autoria própria.

sinal oscilatório de mais baixa frequência superposto a forma de onda esperada com período característico da locomoção de $T_s = 1$ s. A partir da curva respectiva ao erro de posição das patas obteve-se um valor médio de 35,1 mm. Relativo a demanda de esforços nos atuadores verificam-se picos de valor absoluto de 6,70 N.m para primeira, 9,10 N.m para a segunda, e 5,65 N.m para terceira junta ativa. Além dos dados apresentados graficamente foram registrados um custo de transporte médio de 0,485 e um risco de escorregamento médio de 0,211.

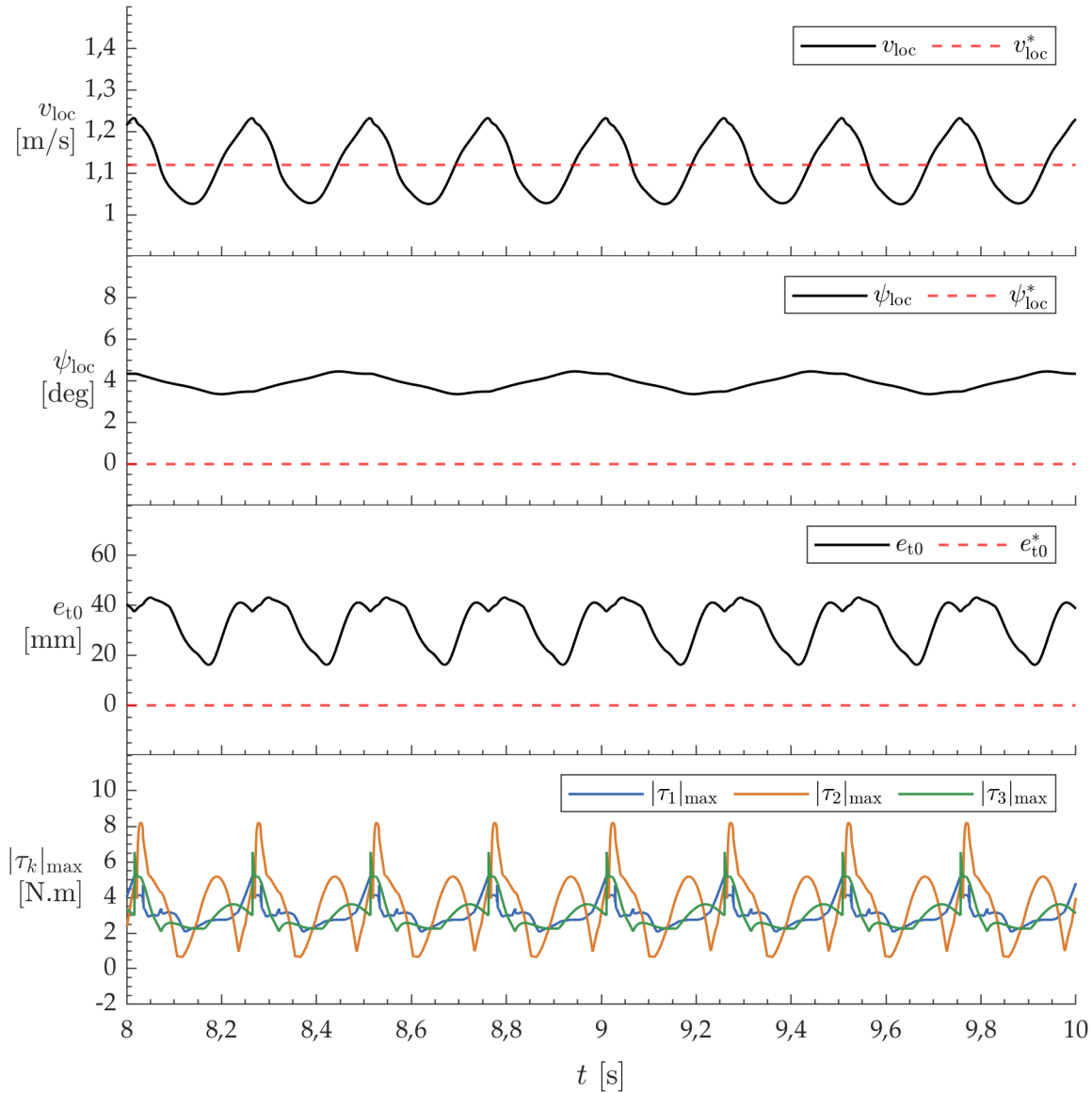
6.2.2.2 Controle via dinâmica inversa

Sujeito ao controle de impedância via dinâmica inversa (Figura 20) o sistema apresentou uma velocidade de avanço média após a estabilização da marcha de 1,15 m/s muito similar ($\delta = -1\%$), e um ângulo de guinada com valor médio inferior ($\delta = -17\%$) de 3,92 graus, equivalente a um desvio lateral por metro de avanço $\Delta y = \tan(3,92) = 68,5$ mm/m. Observa-se que o sinal oscilatório de mais baixa frequência superposto a curva de velocidade de avanço não está mais presente, dando indícios de sua correlação com algum aspecto proveniente da dinâmica natural do sistema, nesse caso compensado através da dinâmica inversa. Para o erro de posição das patas obteve-se um valor médio ligeiramente superior ($\delta = +1\%$) de 35,3 mm. Relativo a demanda de esforços nos atuadores verificam-se picos de valor absoluto inferiores para primeira (5,23 N.m, $\delta = -22\%$) e segunda (8,22 N.m, $\delta = -10\%$) juntas ativas e superiores para terceira (6,57 N.m, $\delta = +16\%$) junta ativa. O controle via dinâmica inversa apresentou um menor custo de transporte (0,446, $\delta = -8\%$) e risco de escorregamento (0,185, $\delta = -12\%$).

6.2.3 Controle de corpo inteiro

O controle de corpo inteiro (Figura 21) o sistema apresentou uma velocidade de avanço média após a estabilização da marcha de 1,14 m/s ($\delta = -1\%$) e um ângulo de guinada muito inferior ($\delta = -98\%$) ao obtido no caso anterior em virtude da adição da regulação da orientação do tronco, registrando um valor médio de -0,06 graus, equivalente a um desvio lateral por metro de avanço $\Delta y = \tan(-0,06) = -1,05$ mm/m. Para o erro de posição das patas observa-se um valor médio superior ($\delta = +10\%$) de 39 mm. Particular para esse tipo de controle, também foi calculado o valor médio para o erro de orientação do tronco, que resultou em 1,44 deg. Relativo a demanda de esforços nos atuadores verificam-se picos de valor absoluto superiores para primeira (5,64 N.m, $\delta = +8\%$), segunda (9,03 N.m, $\delta = +10\%$) e terceira (6,77 N.m, $\delta = +3\%$) juntas ativas, muito provavelmente decorrentes da funcionalidade adicional requerida do controle. Foram registrados um custo de transporte médio de 0,448 e um risco de escorregamento médio de 0,193 ligeiramente superiores.

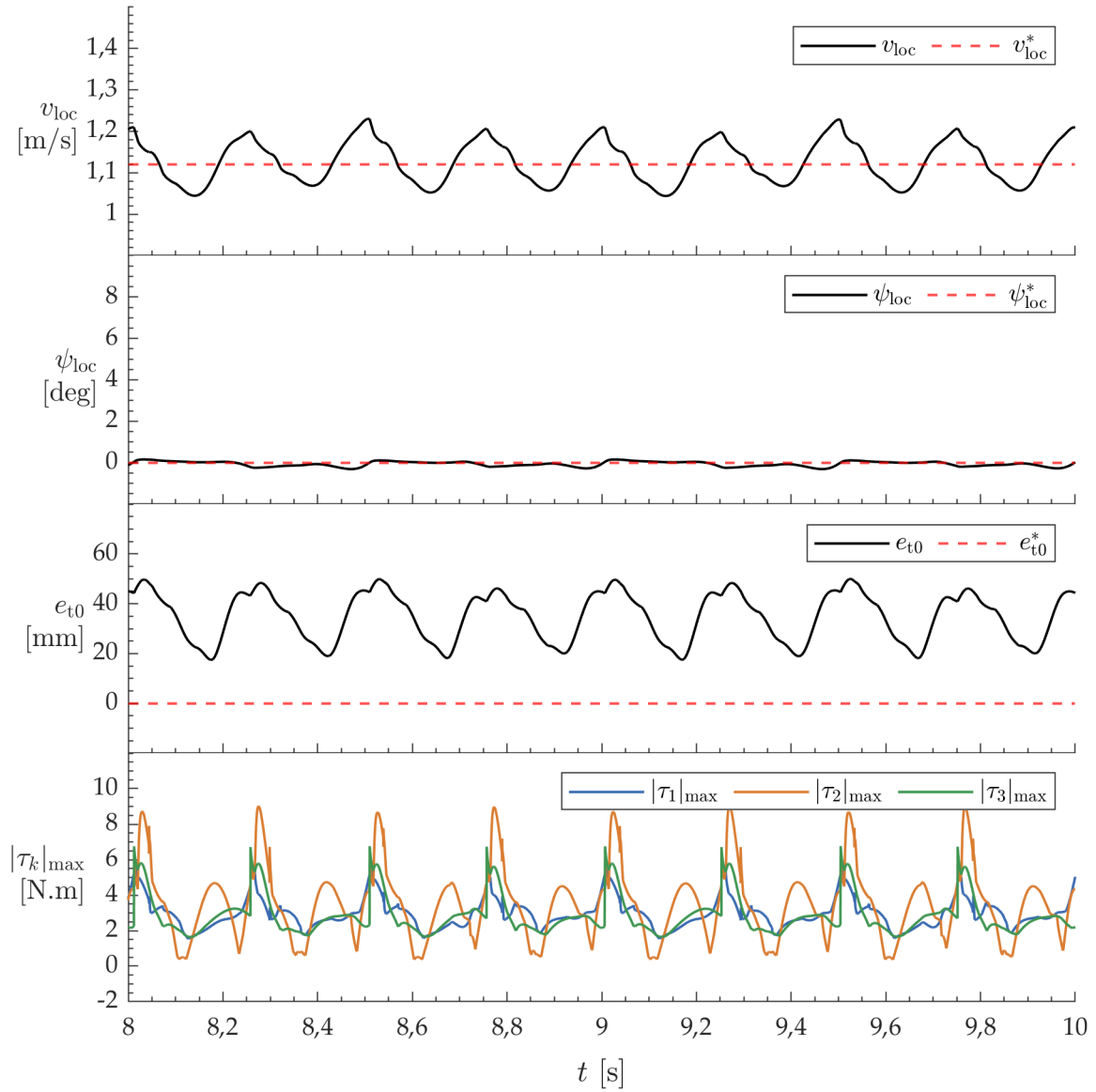
Figura 20 – Velocidade de avanço v_{loc} , ângulo de guinada ψ_{loc} , erro de posição das patas e_{t0} , e torques máximos absolutos nos atuadores das patas $|\tau_k|_{max}$ durante o segundo cenário de simulação com o controle de impedância via dinâmica inversa.



Fonte: Autoria própria.

A Tabela 10 apresenta um sumário dos resultados numéricos obtidos durante o segundo cenário. Apesar do descarte dos dados pertinentes ao controle cinemático em virtude do tombamento do robô evidenciado ao iniciar a locomoção, sua inclusão foi mantida para fins de completude. Com exceção do controle cinemático todos os outros tipos de controle foram capazes de implementar a locomoção com uma velocidade de avanço ligeiramente superior a velocidade de 1,12 m/s estimada por meio dos parâmetros de locomoção. A compensação da dinâmica natural do sistema implementada tanto no controle de impedância via dinâmica inversa quanto no controle de corpo inteiro reduziu o custo de transporte em 8% e o risco de escorregamento em 12%, melhorando a eficiência energética e a segurança da locomoção. Essa compensação

Figura 21 – Velocidade de avanço v_{loc} , ângulo de guinada ψ_{loc} , erro de posição das patas e_{t0} , e torques máximos absolutos nos atuadores das patas $|\tau_k|_{max}$ durante o segundo cenário de simulação usando o controle de corpo inteiro.



Fonte: Autoria própria.

também foi capaz de eliminar as oscilações de mais baixa frequência superpostas a curva de velocidade de avanço, efetivamente reduzindo a variabilidade da velocidade avanço. Com relação ao erro no rastreamento da trajetória das patas observa-se pouca variabilidade entre o controle de impedância via modelo virtual e via dinâmica inversa, no entanto, o controle de corpo inteiro apresentou um valor 10% superior. Vale ressaltar que apesar de ser mais abrangente (englobando as três componentes do vetor de erro) a medida de erro de posição das patas obtida no segundo cenário é superior aos valores obtidos para o primeiro cenário em virtude dos maiores esforços envolvidos na locomoção, sujeita a múltiplos e recorrentes impactos com o solo. Outro aspecto importante para locomoção envolve controlar a direção do avanço, representada pelo ângulo

de guinada do tronco. Nesse aspecto todos os tipos de controle que foram capazes de implementar a locomoção conseguiram atingir níveis aceitáveis, com o maior valor (respectivo ao VMC) sendo equivalente a 4,73 graus. A adição da compensação via dinâmica inversa foi capaz de reduzir esse valor para 3,92 graus, no entanto somente a inclusão da regulação da orientação do tronco conseguiu praticamente eliminá-lo, atingindo um valor de -0,06. Por fim, relativo a demanda dos atuadores observa-se que do controle de impedância via modelo virtual para o via dinâmica inversa houve uma redução na demanda das juntas 1 e 2, bem como um aumento na junta 3. Comparado ao controle de impedância via dinâmica inversa, o controle de corpo inteiro apresentou uma demanda superior em todas as juntas. Em ambos os casos essa disparidade na demanda possivelmente está correlacionada com os termos adicionais envolvidos nas leis de controle respectivas a cada controlador.

Por fim, apesar de não existir nenhum trabalho que implemente esse sistema nas mesmas condições vale ressaltar que tanto os valores obtidos para o custo de transporte quanto para o risco de escorregamento se mostraram consistentes com os obtidos na literatura, girando em torno de $\overline{\text{CoT}} = 0,5$ (HYUN et al., 2014) e $\overline{\text{RoS}} = 0,2$ (HUTTER et al., 2014) respectivamente.

Tabela 10 – Sumário dos resultados obtidos durante o segundo cenário.

Controle ¹	Locomoção				Tarefa		Atuadores		
	$\overline{v}_{\text{loc}}$	$\overline{\psi}_{\text{loc}}$	$\overline{\text{CoT}}$	$\overline{\text{RoS}}$	$\overline{e}_{t0}$	$\overline{e}_{t1}$	$ \tau_1 _{\text{max}}$	$ \tau_2 _{\text{max}}$	$ \tau_3 _{\text{max}}$
	[m/s]	[deg]			[mm]	[deg]	[N.m]	[N.m]	[N.m]
A	–	–	–	–	–	–	–	–	–
B	1,16	4,73	0,485	0,211	35,1	–	6,70	9,10	5,65
C	1,15	3,92	0,446	0,185	35,3	–	5,23	8,22	6,57
D	1,14	-0,06	0,448	0,193	39,0	1,44	5,64	9,03	6,77

¹ A. Controle cinemático; B. Controle de impedância via modelo virtual; C. Controle de impedância via dinâmica inversa; D. Controle de corpo inteiro.

Fonte: Autoria própria.

7 Conclusão

A importância relativa atribuída a aspectos característicos como a velocidade, custo energético, e estabilidade que define a forma como os animais escolhem se locomover sugere que o controle da locomoção em robôs com patas deve ser capaz de atender a múltiplos objetivos simultânea e harmoniosamente, incluindo as inerentes limitações do sistema. Em busca de uma configuração mínima que atenda a todos esses requisitos, este trabalho investiga como a elevação da complexidade do controle afeta o desempenho do controle da locomoção. Dentro do controle da locomoção, o controle do movimento, que envolve a geração de sinais de controle a partir dos sinais de entrada desejada aplicados ao sistema de controle, foi escolhido como plataforma para avaliar esse efeito, sendo propostas três estratégias de controle (totalizando quatro diferentes implementações) ordenadas em nível de complexidade crescente: o controle cinemático, o controle de impedância via modelo virtual, o controle de impedância via dinâmica inversa, e o controle de corpo inteiro. Todo desenvolvimento foi realizado em um protótipo virtual contendo toda a infraestrutura necessária, que consiste, além do controle do movimento, do modelo virtual do robô e seu ambiente, do módulo para geração do movimento, e das ferramentas para teste e validação, incluindo o cálculo dos índices de desempenho e a configuração dos dois cenários de simulação.

Analizando os resultados obtidos, o controle cinemático, que no primeiro cenário se mostrou como a estratégia de controle com melhor desempenho para o rastreamento de trajetória dentre as utilizadas, não foi aplicável a locomoção com os parâmetros utilizados. Isso indica que a qualidade de rastreamento da trajetória das patas por si só não é suficiente para permitir a locomoção, sendo necessário incluir algum mecanismo que considere o efeito das forças advindas da interação com o solo. Mesmo sem apresentar um desempenho marcante no rastreamento de trajetória, sob a influência do controle de impedância, o robô foi capaz de se locomover adequadamente, mantendo o equilíbrio e se deslocando com uma velocidade próxima da estimada a partir dos parâmetros de locomoção configurados no módulo de geração do movimento, apesar do pequeno desvio na direção de avanço em geral. Somente a adição da regulação da orientação do tronco presente no controle de corpo inteiro foi capaz de resolver esse problema, praticamente zerando o desvio na direção de avanço em troca de menos de 11% de elevação no erro da posição das patas em relação ao valor obtido para as outras estratégias. Comparado ao controle via modelo virtual, o controle via dinâmica inversa mostrou um melhor desempenho para locomoção, apresentando menor ângulo de guinada, custo de transporte, e risco de escorregamento para uma velocidade de avanço praticamente igual, indicando que a compensação da dinâmica natural do sistema

foi efetiva em facilitar a imposição de um comportamento desejado. Entre o controle via dinâmica inversa e o controle de corpo inteiro não houve muita disparidade nos parâmetros analisados com exceção do ângulo de guinada. Essa característica mostra que o controle de corpo inteiro (da forma como foi proposto nesse trabalho) conseguiu adicionar funcionalidade ao controle sem prejudicar o rastreamento da trajetória das patas a ponto de inviabilizar a locomoção. O controle de corpo inteiro obteve o melhor desempenho para locomoção dentre as estratégias para o controle do movimento propostas neste trabalho, constatando que o aumento de complexidade do sistema de controle gerou uma melhoria líquida no desempenho da locomoção, adicionando funcionalidade (controle da direção do movimento), reduzindo o consumo energético, e elevando a seguridade, apesar de no geral demandar maiores esforços dos atuadores que alternativas mais simples.

O controle de corpo inteiro define uma estrutura na qual o usuário deve definir as tarefas e os níveis de prioridade conforme as necessidades do projeto e a disponibilidade de recursos, sendo a forma particular escolhida para esse trabalho apenas uma possível configuração para o controle da locomoção de robôs quadrúpedes que provou ser efetiva. Trabalhos futuros poderiam explorar diferentes configurações para o controle de corpo inteiro, incluindo novas tarefas primitivas, modificando as já definidas, ou alterando a disposição dos níveis hierárquicos. Outra possível vertente para o aprimoramento do controle da locomoção envolve incluir a otimização, que codifica os objetivos de projeto e as limitações do sistema seja na função custo ou como restrições, reduzindo a dependência do modelo e abrindo o caminho para inclusão explícita de tarefas como o não escorregamento e a minimização dos esforços nos atuadores. Ainda, mantendo-se a mesma estrutura de controle, pode-se implementar o controle de impedância variável para automatizar a sintonia dos ganhos dos controladores, facilitando o projeto e possivelmente melhorando o desempenho resultante.

Referências

- ABU-DAKKA, F. J.; SAVERIANO, M. Variable Impedance Control and Learning — A Review. *Frontiers in Robotics and AI*, v. 7, p. 1–18, 2020. ISSN 22969144.
- ALEXANDER, R. M. The gaits of bipedal and quadrupedal animals. *The International Journal of Robotics Research*, v. 3, n. 2, p. 49–59, 1984.
- ALEXANDER, R. M. *Principles of Animal Locomotion*. 2. ed. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press, 2013. ISBN 978-0-691-12634-0.
- ALEXANDER, R. M.; JAYES, A. S. A dynamic similarity hypothesis for the gaits of quadrupedal mammals. *Journal of Zoology*, v. 201, p. 135–152, 1983.
- ALLIED MOTION. *HT0500x Series High Torque Brushless Torque Motors*. Amherst, New York, United States, 2015.
- ANYBOTICS. *ANYmal Significantly Contributes to Grace's Chemical Facility Uptime*. 2022. Online. Disponível em: <<https://www.anybotics.com/news/anymal-contributes-to-chemical-facility/>>.
- BARASUOL, V. et al. A reactive controller framework for quadrupedal locomotion on challenging terrain. *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 2554–2561, 2013. ISSN 10504729.
- BIEWENER, A. A.; PATEK, S. N. *Animal Locomotion*. 2. ed. New York, New York, USA: Oxford University Press, 2018. ISBN 978-0-19-874315-6.
- BLEDT, G. et al. MIT Cheetah 3: Design and Control of a Robust, Dynamic Quadruped Robot. *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, p. 2245–2252, 2018. ISSN 21530866.
- BOSTON DYNAMICS. *Dominion Energy: Case Study*. 2022. Online. Disponível em: <<https://bostondynamics.com/case-studies/dominion-energy/>>.
- CNN. *Robot dogs join US Air Force exercise giving glimpse at potential battlefield of the future*. 2020. Online. Disponível em: <<https://edition.cnn.com/2020/09/09/us/robot-dogs-us-air-force-test-intl-hnk-scli-scni/index.html>>.
- CNN. *Singapore deploys robot 'dog' to encourage social distancing*. 2020. Online. Disponível em: <<https://edition.cnn.com/2020/05/08/tech/singapore-coronavirus-social-distancing-robot-intl-hnk/index.html>>.
- DE PAULA, D. T.; GODOY, E. P.; BECERRA-VARGAS, M. Towards Dynamic Quadruped Locomotion: Development of a CPG-driven Foot Trajectory Generator. In: *Proceedings of the 30th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Vouliagmeni, Greece: IEEE, 2022. p. 988–993.
- DI CARLO, J. et al. Dynamic Locomotion in the MIT Cheetah 3 Through Convex Model-Predictive Control. In: *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Madrid, Spain: IEEE, 2018. p. 1–9.

EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY. *Mathematical model - Encyclopedia of Mathematics*. 2011. Online. Disponível em: <https://encyclopediaofmath.org/wiki/Mathematical_model>.

FAHMI, S. et al. Passive Whole-Body Control for Quadruped Robots: Experimental Validation Over Challenging Terrain. *IEEE Robotics and Automation Letters*, v. 4, n. 3, p. 2553–2560, 2019.

FANG, L. et al. Open-source lower controller for twelve degrees of freedom hydraulic quadruped robot with distributed control scheme. *HardwareX*, Elsevier, v. 13, p. 157–173, 2023.

FAROUKI, R.; RAJAN, V. Algorithms for polynomials in bernstein form. *Computer Aided Geometric Design*, v. 5, n. 1, p. 1–26, 1988.

FOCCHI, M. et al. High-slope terrain locomotion for torque-controlled quadruped robots. *Autonomous Robots*, Springer US, v. 41, p. 259–272, 2017.

GEHRING, C. et al. Control of dynamic gaits for a quadrupedal robot. In: *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Karlsruhe, Germany: IEEE, 2013. p. 3287–3292.

HILDEBRAND, M. Analysis of asymmetrical gaits. *Journal of Mammalogy*, v. 58, n. 2, p. 131–156, 1977.

HOGAN, N. Impedance control: An approach to manipulation: Part I - Theory. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, v. 107, p. 17–24, 1985.

HUTTER, M. et al. Toward combining speed, efficiency, versatility, and robustness in an autonomous quadruped. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 30, p. 1427–1440, 2014.

HUTTER, M. et al. ANYmal - a highly mobile and dynamic quadrupedal robot. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Daejeon, Korea (South): IEEE, 2016. p. 38–44.

HUTTER, M. et al. Quadrupedal locomotion using hierarchical operational space control. *International Journal of Robotics Research*, v. 33, p. 1047–1062, 2014.

HWANGBO, J. et al. Learning agile and dynamic motor skills for legged robots. *Science Robotics*, v. 4, p. 1–20, 2019.

HYUN, D. J. et al. High speed trot-running: Implementation of a hierarchical controller using proprioceptive impedance control on the MIT Cheetah. *The International Journal of Robotics Research*, v. 33, n. 11, p. 1417–1445, 2014.

IBRAM. *Vale investe em robôs para retirar empregados de situação de risco e aumentar a segurança de suas operações*. 2021. Online. Disponível em: <<https://ibram.org.br/noticia/vale-investe-em-robos-para-retirar-empregados-de-situacao-de-risco-e-aumentar-a-seguranca-de-suas-operacoes>>.

IJSPEERT, A. J. Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: A review. *Neural Networks*, v. 21, p. 642–653, 5 2008.

KHATIB, O. A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, v. 3, n. 1, p. 43–53, 1987.

KHATIB, O. et al. Whole-body dynamic behavior and control of human-like robots. *International Journal of Humanoid Robotics*, v. 1, p. 29–43, 2004.

KOMZSIK, L. *Applied Calculus of Variations for Engineers*. 2. ed. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 2008. ISBN 978-1-4822-5359-7.

LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. 4. ed. Mineola, New York, USA: Dover Publications, 2012. ISBN 978-0-486-13470-3.

LEE, J. et al. Learning quadrupedal locomotion over challenging terrain. *Science Robotics*, v. 5, p. 5986, 2020.

LI, H. et al. Zero-shot retargeting of learned quadruped locomotion policies using hybrid kinodynamic model predictive control. 9 2022. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2209.14123>>.

LIU, H. et al. Locomotion control of quadruped robot based on central pattern generators. In: *2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*. Shenyang, China: IEEE, 2018. p. 4409–4413.

MA, Y. et al. Combining learning-based locomotion policy with model-based manipulation for legged mobile manipulators. *IEEE Robotics and Automation Letters*, IEEE, v. 7, p. 2377–2384, 2022.

MACKAY-LYONS, M. Central Pattern Generation of Locomotion: A Review of the Evidence. *Physical Therapy*, v. 82, n. 1, 2002.

MAGAÑA, O. A. V. et al. Fast and continuous foothold adaptation for dynamic locomotion through cnns. *IEEE Robotics and Automation Letters*, v. 4, p. 2140–2147, 2019.

MCKENZIE, J. E. *Design of Robotic Quadruped Legs*. 102 f. Dissertação (Master of Science) — Massachusetts Institute of Technology, 2012.

NELSON, G. et al. PETMAN: A humanoid robot for testing chemical protective clothing. *Journal of the Robotics Society of Japan*, v. 30, n. 4, p. 372–377, 2012.

PETROBRAS. *Revap realiza testes com o “robô Anymal”, novo aliado da Petrobras para inspeções em áreas industriais*. 2022. Online. Disponível em: <<https://agencia.petrobras.com.br/pt/inovacao/revap-realiza-testes-com-o-robo-anymal-novo-aliado-da-petrobras-para-inspecoes-em-areas-industriais-15-12-2022/>>.

PRATT, J.; DILWORTH, P.; PRATT, G. Virtual model control of a bipedal walking robot. In: *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*. Albuquerque, New Mexico, USA: IEEE, 1997. v. 1, p. 193–198.

RAIBERT, M. et al. BigDog, the rough-terrain quadruped robot. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 41, n. 2, p. 10822–10825, 2008.

RAIBERT, M. H. *Legged Robots That Balance*. 1. ed. Cambridge, Massachusetts, USA: MIT Press, 1986. ISBN 978-0-2621-8117-4.

RAIBERT, M. H.; CRAIG, J. J. Hybrid Position/Force Control of Manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 103, n. 2, p. 126–133, 06 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3139652>>.

RATHOD, N. et al. Model Predictive Control With Environment Adaptation for Legged Locomotion. *IEEE Access*, v. 9, p. 145710–145727, 2021.

SAKAGAMI, Y. et al. The intelligent ASIMO: system overview and integration. In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Lausanne, Switzerland: IEEE, 2002. v. 3, p. 2478–2483 vol.3.

SEMINI, C. et al. Design of HyQ – A hydraulically and electrically actuated quadruped robot. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, v. 225, p. 831–849, 2011.

SENTIS, L.; KHATIB, O. Control of free-floating humanoid robots through task prioritization. In: *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Barcelona, Spain: IEEE, 2005. p. 1718–1723.

SENTIS, L.; KHATIB, O. Synthesis of whole-body behaviors through hierarchical control of behavioral primitives. *International Journal of Humanoid Robotics*, v. 2, p. 505–518, 2005. ISSN 02198436.

SENTIS, L.; KHATIB, O. A whole-body control framework for humanoids operating in human environments. *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, v. 2006, p. 2641–2648, 2006.

SHABANA, A. A. *Computational Dynamics*. 3. ed. Hoboken, New Jersey, USA: Wiley, 2010. ISBN 978-0-470-68615-7.

SHABANA, A. A. *Dynamics of Multibody Systems*. 4. ed. New York, New York, USA: Cambridge University Press, 2013. ISBN 978-1-107-04265-0.

THE MATHWORKS INC. *Basic Principles of Modeling Physical Networks*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/simscape/ug/basic-principles-of-modeling-physical-networks.html>>.

VUKOBRATOVIĆ, M.; BOROVAC, B. Zero-moment point — thirty five years of its life. *International Journal of Humanoid Robotics*, v. 1, p. 157–173, 2004.

WANG, X. et al. Locomotion control for quadruped robot combining central pattern generators with virtual model control. *IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA*, IEEE, v. 2019-July, p. 399–404, 2019.

WENSING, P. M. et al. *Optimization-Based Control for Dynamic Legged Robots*. arXiv, 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2211.11644>>.

YU, J. et al. A Survey on CPG-Inspired Control Models and System Implementation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, v. 25, p. 441–456, 3 2014.

ZHANG, G.; LI, Y.; MA, S. Trotting and pacing locomotion of a position-controlled quadruped robot. In: *2021 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Prague, Czech Republic: IEEE, 2021. p. 7456–7463.

APÊNDICE A – Definições

Definição 1 (Identidades de Quatérnios Unitários). Seja $\mathbf{v}$ um quatérnio unitário com parte escalar η e parte vetorial $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ representando a orientação de um corpo rígido $\mathcal{B}$ e seja $\mathbf{G}$ a matriz de conversão de velocidade, que correlaciona a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ de $\mathcal{B}$ com sua respectiva velocidade rotacional $\dot{\mathbf{v}}$ tal que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{v}}$, expressa em função de $\mathbf{v}$ como (SHABANA, 2013)

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{E} = 2 \begin{bmatrix} -\epsilon_1 & \eta & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_3 & \eta & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_3 & -\epsilon_2 & \epsilon_1 & \eta \end{bmatrix}.$$

Considerando $\mathbf{1}_n$ como uma matriz identidade de ordem n e $\mathbf{0}_m$ um vetor nulo com m elementos, define-se como relações de identidade válidas para quatérnios unitários (SHABANA, 2013):

- $\mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{1}_3$
- $\mathbf{E}^T\mathbf{E} = \mathbf{1}_4 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$
- $\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{0}_3,$
- $\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_3$
- $\dot{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\dot{\mathbf{v}} = 0,$
- $\mathbf{G}\dot{\mathbf{v}} = -\dot{\mathbf{G}}\mathbf{v}.$

Definição 2 (Polinômio de Bernstein (FAROUKI; RAJAN, 1988)). Seja $b_{i,n}(t)$ um polinômio de Bernstein de grau n tal que, para $t \in [0, 1]$,

$$b_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Lema 1 (Lema Fundamental do Cálculo Variacional (KOMZSIK, 2008)). Seja $f(t)$ uma função contínua no intervalo $[t_1, t_2]$ e seja

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta(t) f(t) dt = 0$$

para toda função $\eta(t)$ contínua e diferenciável em $[t_1, t_2]$ tal que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, então tem-se que

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

APÊNDICE B – Cinemática

A seguinte derivação foi desenvolvida com base na metodologia descrita em Shabana (2010) utilizando a nomenclatura e simbologia adotadas neste trabalho com algumas adições para caracterizar a conversão para coordenadas rotacionais e a cinemática de sistemas de base flutuante.

B.1 Par de corpos rígidos

B.1.1 Junta de revolução

Sejam os corpos rígidos $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{B}_{i-1}$, representados pelos *frames* $\{i\}$ e $\{i-1\}$, conectados por meio de uma junta de revolução com eixo de rotação $\hat{\mathbf{z}}_{\text{rev}}$ e sejam $\{P_i\}$ e $\{P_{i-1}\}$ *frames* rigidamente acoplados a $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{B}_{i-1}$ tal que tenham a mesma origem (i.e. $\mathbf{p}_{P_i} = \mathbf{p}_{P_{i-1}}$), e estejam orientados de forma que o eixo-z coincida com o eixo de rotação (i.e. $\hat{\mathbf{z}}_{P_i} = \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} = \hat{\mathbf{z}}_{\text{rev}}$). Define-se a cinemática de posição para junta de revolução como

$$\mathbf{p}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{r}_{P_i}^i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{P_{i-1}}^{i-1}, \quad (\text{B.1a})$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1}, \quad (\text{B.1b})$$

onde o vetor $\mathbf{p}_i$ e a matriz de rotação $\mathbf{R}_i$ representam a posição e orientação de $\{i\}$ com relação a um referencial inercial absoluto, o vetor $\mathbf{r}_{P_i}^i$ representa a posição de $\{P_i\}$ com relação a $\{i\}$ expressa em $\{i\}$, e a matriz de rotação $\mathbf{R}_i^{i-1}$, a orientação de $\{i\}$ com relação a $\{i-1\}$.

Seja ϕ_i o ângulo de rotação de $\mathcal{B}_i$ com relação a $\mathcal{B}_{i-1}$, seja $\mathbf{r}_{P_i} = \mathbf{R}_i \mathbf{r}_{P_i}^i$ a posição relativa de $\{P_i\}$ com relação a $\{i\}$, e seja $\boldsymbol{\omega}_{i,i-1} = \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \dot{\phi}_i$ a velocidade angular relativa. Define-se a cinemática de velocidade para junta de revolução como

$$\dot{\mathbf{p}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{P_i} = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{P_{i-1}}, \quad (\text{B.2a})$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i,i-1}. \quad (\text{B.2b})$$

As relações (B.2) podem ser representadas na forma matricial ao substituir o produto vetorial pelo operador matricial antissimétrico $\mathbf{S}(\cdot)$ tal que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}$. Dessa forma, a relação cinemática de velocidade para junta de revolução torna-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_i}) \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_{i-1}}) \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{1}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{i-1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \end{bmatrix} \dot{\phi}_i. \quad (\text{B.3})$$

Com isso, a velocidade $\mathbf{v}_i = (\dot{\mathbf{p}}_i, \boldsymbol{\omega}_i)$ do corpo $\mathcal{B}_i$ pode ser definida em função da velocidade $\mathbf{v}_{i-1} = (\dot{\mathbf{p}}_{i-1}, \boldsymbol{\omega}_{i-1})$ do corpo $\mathcal{B}_{i-1}$ e da variável independente $\dot{\mathbf{q}}_i$, isto é

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{H}_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (\text{B.4})$$

onde, para a junta de revolução,

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_i}) - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_{i-1}}) \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{1}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_i}) \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \\ \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_i = [\dot{\phi}_i].$$

A cinemática de aceleração pode ser obtida derivando-se (B.4) com relação ao tempo, que resulta em

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{H}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\gamma}_i, \quad (\text{B.5})$$

onde $\boldsymbol{\gamma}_i$ representa os termos de velocidade quadrática (efeito Coriolis + aceleração centrífuga) tal que

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{D}_i) \mathbf{v}_{i-1} + \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_i}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \dot{\phi}_i + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1})^2 \mathbf{r}_{P_{i-1}} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)^2 \mathbf{r}_{P_i} \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \dot{\phi}_i \end{bmatrix}.$$

Vale ressaltar que a forma das relações (B.4) e (B.5) independe do tipo de junta, representando a cinemática de velocidade e aceleração para qualquer par de corpos rígidos acoplados por meio juntas mediante a especificação das matrizes $\mathbf{D}_i$ e $\mathbf{H}_i$, do vetor $\boldsymbol{\gamma}_i$ e das respectivas variáveis das juntas $\mathbf{q}_i$.

B.2 Conversão para coordenadas rotacionais

Tendo em vista que as relações até então descritas são expressas utilizando coordenadas angulares para representar a orientação e dado que neste trabalho o vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$ envolve coordenadas rotacionais torna-se necessário realizar uma conversão de coordenadas angulares $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})$ para rotacionais $(\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}})$. Seja $\mathbf{v}_i$ um quatérnio unitário representando a orientação do corpo rígido $\mathcal{B}_i$, seja $\boldsymbol{\omega}_i$ a sua velocidade angular, e seja $\mathbf{G}_i$ a matriz para conversão de coordenadas rotacionais para angulares tal que $\dot{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{4}(\mathbf{G}_i)^T \boldsymbol{\omega}_i$. Define-se a matriz de transformação de velocidade $\mathbf{T}_i$ e sua respectiva inversa $(\mathbf{T}_i)^{-1}$ como

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_{4 \times 3} & \frac{1}{4}(\mathbf{G}_i)^T \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{T}_i)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 4} \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{G}_i \end{bmatrix}.$$

Aplicando a matriz de transformação de velocidade em (B.4) obtém-se a relação equivalente envolvendo coordenadas rotacionais

$$\dot{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{D}_{\text{rot}})_i \dot{\mathbf{x}}_{i-1} + (\mathbf{H}_{\text{rot}})_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (\text{B.6})$$

onde as matrizes $(\mathbf{D}_{\text{rot}})_i$ e $(\mathbf{H}_{\text{rot}})_i$ podem ser definidas como

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{D}_{\text{rot}})_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{D}_i (\mathbf{T}_{i-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & (\mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_i}) - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_{i-1}})) \mathbf{G}_{i-1} \\ \mathbf{O}_{4 \times 3} & \frac{1}{4}(\mathbf{G}_i)^T \mathbf{G}_{i-1} \end{bmatrix} \\ (\mathbf{H}_{\text{rot}})_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_i}) \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \\ \frac{1}{4}(\mathbf{G}_i)^T \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Derivando-se a relação (B.6) com relação ao tempo, obtém-se

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{D}_{\text{rot}})_i \ddot{\mathbf{x}}_{i-1} + (\mathbf{H}_{\text{rot}})_i \ddot{\mathbf{q}}_i + (\boldsymbol{\gamma}_{\text{rot}})_i, \quad (\text{B.7})$$

onde $(\boldsymbol{\gamma}_{\text{rot}})_i$ corresponde aos termos de velocidade quadrática em coordenadas rotacionais, podendo ser definido como

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\gamma}_{\text{rot}})_i &= \frac{d}{dt}(\mathbf{D}_{\text{rot}})_i \dot{\mathbf{x}}_{i-1} + \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_{\text{rot}})_i \dot{\mathbf{q}}_i = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{P_i}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \dot{\phi}_i + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1})^2 \mathbf{r}_{P_{i-1}} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)^2 \mathbf{r}_{P_i} \\ \frac{1}{4}(\dot{\mathbf{G}}_i)^T \boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{4}(\mathbf{G}_i)^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \hat{\mathbf{z}}_{P_{i-1}} \dot{\phi}_i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

B.3 Sistema multicorpo

Em um sistema multicorpo as relações (B.4) e (B.5) podem ser desenvolvidas para cada um dos pares interconectados por juntas e agrupadas na forma matricial como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{v} &= \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{D}\mathbf{a} &= \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.8})$$

A disposição do conteúdo das matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ e do vetor $\boldsymbol{\gamma}$ varia conforme a ordenação dos corpos rígidos e o tipo de estrutura cinemática subjacente. Para um sistema de base flutuante com membros acoplados esses termos podem ser derivados ao calcular a cinemática de cada membro de forma isolada considerando uma base fixa fictícia (associada ao membro mas rigidamente conectada a base flutuante) e posteriormente correlacionar cada base fixa fictícia com a base real. Assim, nas duas próximas subseções são descritos os termos pertinentes a um sistema de base flutuante com membros acoplados compondo cadeias cinemáticas abertas.

B.3.1 Base fixa

Para uma cadeia cinemática aberta com base fixa com n_b corpos rígidos, um total de n_i graus de liberdade, e uma ordenação dos corpos rígidos iniciando da base, obtém-se

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \cdots & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ -\mathbf{D}_2 & \mathbf{1}_6 & \mathbf{O}_6 & \cdots & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & -\mathbf{D}_3 & \mathbf{1}_6 & \cdots & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \cdots & -\mathbf{D}_{n_b} & \mathbf{1}_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \text{diag}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_{n_b}) \\ \boldsymbol{\gamma} &= (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_b}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

B.3.2 Base flutuante

Para um sistema de base flutuante com m membros acoplados compondo cadeias cinemáticas abertas, considerando uma ordenação dos corpos rígidos iniciando da base, tem-se que a cinemática pode ser descrita como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_6 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}_{l1b} & \mathbf{D}_{l1} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}_{l2b} & \mathbf{O} & \mathbf{D}_{l2} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{lmb} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{D}_{lm} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \text{diag}(\mathbf{1}_6, \mathbf{H}_{l1}, \mathbf{H}_{l2}, \dots, \mathbf{H}_{lm}) \\ \boldsymbol{\gamma} &= (\mathbf{0}_6, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{lm}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.10})$$

onde $\mathbf{D}_{ljb}$, $j = 1, 2, \dots, m$ corresponde ao termo de acoplamento entre a base flutuante b e o membro lj , e $\mathbf{H}_{lj}$, $\mathbf{D}_{lj}$, γ_{lj} representam os termos pertinentes a cinemática do membro lj considerando uma base fixa fictícia derivados conforme (B.9). O termo $\mathbf{D}_{ljb}$ pode ser calculado a partir da expressão derivada para junta de revolução considerando que não haja movimento relativo entre os corpos rígidos (i.e. $\dot{\phi}_i = 0$).

APÊNDICE C – Dinâmica

C.1 Equação de Euler-Lagrange Aumentada

A seguinte derivação foi desenvolvida com base na metodologia descrita em Lanczos (2012) utilizando a nomenclatura e simbologia adotadas neste trabalho.

Seja $\mathbf{q}$ o vetor de n coordenadas generalizadas do sistema, e seja $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$ o conjunto de $n_c < n$ restrições cinemáticas impostas. Em função da Lagrangiana L , dos multiplicadores de Lagrange λ , da variação das restrições cinemáticas $\delta\mathbf{h}$, e do trabalho virtual δW_{nc} realizado pelas forças não conservativas, o Princípio de Hamilton pode ser descrito como

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - \int_{t_1}^{t_2} \lambda^T \delta\mathbf{h} dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0. \quad (C.1)$$

A Lagrangiana L pode ser expressa em função das coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$, de suas respectivas derivadas com relação ao tempo $\dot{\mathbf{q}}$, e possivelmente do tempo t , permitindo que sua variação δL seja formulada como

$$\delta L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\Phi}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon\dot{\boldsymbol{\Phi}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

onde $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ é um escalar infinitesimal, $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(t)$ e $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)$ são funções arbitrárias contínuas e diferenciáveis ao menos uma vez tal que $\boldsymbol{\Phi}(t) = \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = 0$ para $t = t_1$ e $t = t_2$. Aplicando-se a expansão de Taylor em torno do ponto $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ obtém-se

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\Phi}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon\dot{\boldsymbol{\Phi}}, t) &= L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + (\epsilon\boldsymbol{\Phi}, \epsilon\dot{\boldsymbol{\Phi}}, 0)^T \nabla L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + O(\epsilon^2) \\ &= L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\Phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\boldsymbol{\Phi}} \right) + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

que resulta na aproximação linear da variação

$$\delta L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \approx \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\Phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\boldsymbol{\Phi}} \right).$$

Substituindo essa expressão em (C.1) e integrando por partes o segundo termo da soma tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\Phi} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\boldsymbol{\Phi}} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\Phi} dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\Phi} \right|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \boldsymbol{\Phi} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \boldsymbol{\Phi} dt. \end{aligned}$$

Considerando as restrições cinemáticas da forma $\mathbf{h} = \mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t)$, o mesmo procedimento utilizado para variação da Lagrangiana pode ser aplicado, obtendo-se a aproximação linear da variação

$$\delta \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \approx \epsilon \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\Phi}} \right),$$

e conseqüentemente o integrando

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{h} dt = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\lambda}^T \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} - \dot{\mathbf{A}} \right] \boldsymbol{\Phi} dt.$$

Já para as forças não conservativas, tem-se que o termo envolvendo o trabalho virtual pode ser descrito em função das forças generalizadas não conservativas $\boldsymbol{\xi}$ e do deslocamento virtual $\delta \mathbf{q} = \epsilon \boldsymbol{\Phi}$, isto é,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\xi}^T \delta \mathbf{q} dt = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\Phi} dt.$$

Aplicando o Lema 1, transpondo e multiplicando ambos os lados por -1 , obtém-se a equação de Euler-Lagrange Aumentada

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} - \dot{\mathbf{A}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\xi}. \quad (\text{C.2})$$