

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

**LUCAS FAVI BOCCA**

**PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS ROBUSTOS CONSIDERANDO  
CUSTO GARANTIDO COM REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA**

Ilha Solteira - SP

2021

**LUCAS FAVI BOCCA**

**PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS ROBUSTOS CONSIDERANDO  
CUSTO GARANTIDO COM REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA**

Trabalho de Graduação apresentado à  
Universidade Estadual Paulista "Júlio de  
Mesquita Filho" Campus de Ilha Solteira  
- UNESP, como parte dos requisitos para  
obtenção do grau de Engenheiro Eletricista.

**Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira**  
Orientador

Ilha Solteira - SP

2021

## FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

B664p Bocca, Lucas Favi.  
Projeto de controladores chaveados robustos considerando custo garantido com realimentação estática de saída / Lucas Favi Bocca. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021  
67 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) -  
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2021

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Inclui bibliografia

1. Sistemas lineares. 2. LMI. 3. Controle robusto. 4. Controle chaveado. 5.  
Evolução diferencial.

  
Rajane da Silva Santos

## ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos vinte e três dias do mês de setembro do ano de dois mil e vinte e um, o discente **Lucas Favi Bocca** matriculado sob o nº 162053444, tendo como banca examinadora o seu orientador, o *Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira*, o *Prof. Me. Igor Thiago Minari Ramos* e o *Prof. Dr. Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves*, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS ROBUSTOS CONSIDERANDO CUSTO GARANTIDO COM REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA" obtendo a nota 10,0 (dez inteiros) e conceito APROVADO.



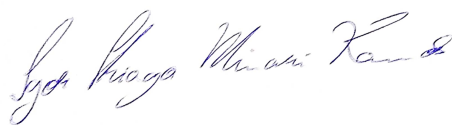
Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

- orientador -



Lucas Favi Bocca

- discente -



Prof. Me. Igor Thiago Minari Ramos

- Membro da Banca -



Prof. Dr. Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves

- Membro da Banca -

## **AGRADECIMENTOS**

Em especial agradeço meus pais, Luiz Carlos Bocca e Rosângela Maria Favi Bocca, por todos os ensinamentos e apoio nos momentos mais importantes, durante toda minha vida. Suas opiniões foram de exímia importância para minha trajetória acadêmica e pessoal.

A minha colega, Tamires Shiokawa De Simone, pela paciência e contribuições pessoais durante a elaboração desse trabalho.

A todos os alunos, professores e membros do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) do campus de Ilha Solteira pela parceria. Em especial, ao Prof. Me. Igor Thiago Minari Ramos pelas longas e produtivas aulas, incentivo e apoio durante a pesquisa que resultaram nesse trabalho, ao Prof. Dr. Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves e ao Prof. Dr. Douglas Buytendorp Bizarro pelo suporte durante a execução dessa pesquisa.

Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira pela oportunidade de executar esse trabalho de pesquisa, pela orientação e por me apoiar, me propiciando trabalhar com excelentes professores e alunos.

A toda equipe docente e de servidores da Universidade Estadual Paulista por terem me proporcionado a oportunidade de me tornar engenheiro eletricista.

Por fim, gostaria de agradecer às agências de financiamento em pesquisa, sendo elas a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pela contribuição financeira.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Para o projeto de controladores, nem sempre todos os estados do sistema se encontram disponíveis ou a obtenção de todos eles podem acarretar em maiores custos de projeto. Visando esse fato, neste trabalho serão propostos métodos de projeto de controladores chaveados robustos com realimentação estática da saída. Será apresentada a teoria básica necessária para o entendimento e desenvolvimento dos teoremas a partir da teoria proposta por Lyapunov e de desigualdades matriciais lineares. Ainda, será estudado o modelo matemático em espaço de estados do protótipo da suspensão ativa de bancada, do fabricante Quanser, que será utilizado para a simulação e implementação dos controladores projetados. No projeto dos controladores será considerada a minimização da energia da saída, com o objetivo de reduzir o tempo de estabelecimento e as oscilações da saída do sistema em malha fechada e o limite físico da saída do sistema, que é feito a partir da consideração de um conjunto convexo de condições iniciais. Isso pode ser obtido por meio de um índice de desempenho quadrático chamado de custo garantido. Condições suficientes descritas em formas de desigualdades matriciais lineares (LMIs) para atender os critérios de projeto são apresentados em forma de teoremas que requerem a escolha de parâmetros constantes. A busca dos valores ótimos globais para o índice de desempenho definido será alcançada por meio de um algoritmo de Evolução Diferencial (ED). Desta forma, quando as condições propostas são satisfeitas, o sistema em malha fechada será assintoticamente estável e, para um dado conjunto de condições iniciais, a saída ficará dentro dos limites especificados. Além da implementação dos controladores no protótipo de suspensão ativa de bancada, dois exemplos numéricos foram considerados para avaliar a região de factibilidade e estabilização de sistemas descritos por variáveis de estado.

**Palavras-chave:** Sistemas Lineares, LMI, Controle Robusto, Controle Chaveado, Evolução Diferencial.

## ABSTRACT

For the design of controllers, not all system states are always available or obtaining all of them can result in higher project costs. Considering that, in this work design methods for robust switching controllers with static output feedback are proposed. It will be presented the basic theory of linear matrix inequalities and Lyapunov's theory necessary for understanding the proposed theorems. Also will be studied the the state space mathematical model of the active bench suspension prototype, manufactured by Quanser, which will be used for the simulation and implementation of the designed controllers. In the design of the controllers the minimization of the output energy will be considered with the objective of reducing the settling time and the oscillations of the closed-loop system output. It is considered the physical limit of the system output, by taking into account a bounded set of initial conditions, which is done by considering a convex set of initial conditions. This minimization was archived by the definition of a quadratic performance index, named guaranteed cost. Sufficient conditions described in linear matrix inequalities (LMIs), to meet the design criteria, are presented in the form of theorems that require some chosen constant parameters. The search for the global optimal values of the performance index will be achieved through the Differential Evolution (DE) algorithm. Besides that, when the proposed conditions are satisfied, the closed-loop system will be asymptotically stable and the output will be within the specified limits for a given set of initial conditions. In addition to the implementation of the controllers in the benchtop active suspension prototype, two numerical examples were considered to evaluate the feasibility and stabilization region of systems described by state variables.

**Keywords:** Linear control systems, LMI, Robust Control, Switched Control, Differential Evolution.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema da definição do conceito de estabilidade. . . . .	18
Figura 2 – Distribuição uniforme no intervalo $[e, m]$ . . . . .	37
Figura 3 – Ilustração do processo de <i>crossover</i> . . . . .	37
Figura 4 – Suspensão ativa de bancada Quanser. . . . .	39
Figura 5 – Esquema da Suspensão Ativa. . . . .	40
Figura 6 – Mínimo do custo garantido para os Teoremas 7 e 9, considerando o Teorema 10.	45
Figura 7 – Sinal considerado para a pista $z_r(t)$ . . . . .	46
Figura 8 – Comportamento do sistema da suspensão ativa em malha aberta e $M_s = 2,45$ kg. . . . .	47
Figura 9 – Limitante superior $\beta$ mínimo para a população por geração durante a evolução para os Teoremas 6 e 10. . . . .	49
Figura 10 – Simulação do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.15) e $M_s = 1,455$ kg. . . . .	50
Figura 11 – Simulação do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.15) e $M_s = 2,45$ kg. . . . .	51
Figura 12 – Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.15) e $M_s = 1,455$ kg. . . . .	52
Figura 13 – Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.15) e $M_s = 2,45$ kg. . . . .	53
Figura 14 – Limitante superior $\beta$ mínimo para a população por geração durante a evolução para os Teoremas 9 e 10. . . . .	54
Figura 15 – Simulação do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.16) e $M_s = 1,455$ kg. . . . .	55
Figura 16 – Simulação do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.16) e $M_s = 2,45$ kg. . . . .	56
Figura 17 – Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.16) e $M_s = 1,455$ kg. . . . .	57
Figura 18 – Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.16) e $M_s = 2,45$ kg. . . . .	57

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros da suspensão ativa. . . . .	41
Tabela 2 – Intervalos de estabilização . . . . .	43
Tabela 3 – Comparação do custo garantido entre os controladores projetados. . . . .	58

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BMI	Bilinear Matrix Inequalities - (Desigualdades Matriciais bilineares).
CC	Corrente contínua.
ED	Evolução Diferencial.
LMI	Linear Matrix Inequalities - (Desigualdades Matriciais Lineares).

## LISTA DE SÍMBOLOS

$I_{m \times m}$	Matriz Identidade.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathcal{M}_{m \times n}$	Matriz de dimensão $m \times n$ .
$\mathcal{M}_{m \times n}^l$	$l$ -ésima linha da matriz $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
$\mathbb{K}_N$	Conjunto $\{1, \dots, N\}$ , $N \in \mathbb{N}$ .
$M^T$	Transposta da matriz $M$ .
$M \succ (\succeq) 0$	Matriz $M$ simétrica e (semi-)definida positiva.
$M \prec (\preceq) 0$	Matriz $M$ simétrica e (semi-)definida negativa.
*	Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
$He(A)$	Denota $A + A^T$ .
$\Lambda_r$	Simplex unitário $\Lambda_r = \{\alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}^r\}$ .
$M_z$	$M_z = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i$ , $\alpha \in \Lambda_r$ .
$\ x\ _2$	Norma euclidiana de $x$ .
$\det(M)$	Determinante da matriz $M$ .
$\forall$	Para todo.
$\in$	Pertence.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
1.1	Organização do texto	12
<b>2</b>	<b>CONCEITOS E TEORIAS BÁSICOS</b>	<b>14</b>
2.1	Conceitos e definições matriciais	14
2.2	Modelagem do sistema em espaço de estados	15
2.3	Estabilidade de sistemas lineares segundo Lyapunov	16
2.4	Sistemas lineares invariantes no tempo com realimentação de estados	19
<b>3</b>	<b>CONTROLADORES COM REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA</b>	<b>20</b>
3.1	Realimentação estática de saída	20
3.2	Incertezas politópicas	22
3.3	Controle ótimo quadrático (custo garantido)	24
3.4	Projeto de controladores ótimos robustos chaveados	27
3.5	Restrição de saída	34
<b>4</b>	<b>EVOLUÇÃO DIFERENCIAL</b>	<b>36</b>
<b>5</b>	<b>SUSPENSÃO ATIVA DE BANCADA</b>	<b>39</b>
5.1	Descrição do equipamento	39
5.2	Modelo matemático	40
<b>6</b>	<b>PROJETOS, SIMULAÇÕES E IMPLEMENTAÇÕES DOS CONTROLADORES</b>	<b>42</b>
6.1	Exemplo 1: estabilização de um sistema numérico	42
6.2	Exemplo 2: minimização do custo garantido de um sistema numérico	44
6.3	Estudo do modelo da suspensão ativa de bancada	45
6.3.1	Estudo em malha aberta	47
6.3.2	Projeto do controlador ótimo robusto de único ganho	47
6.3.2.1	<i>Simulação do comportamento do sistema em malha fechada</i>	49
6.3.2.2	<i>Implementação prática do controlador</i>	51
6.3.3	Projeto do controlador ótimo robusto chaveado	53
6.3.3.1	<i>Simulação do comportamento do sistema em malha fechada</i>	54
6.3.3.2	<i>Implementação prática do controlador</i>	56
6.3.4	Comparação entre os controladores de ganho único e chaveados	58
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>59</b>
7.1	Perspectivas futuras	60
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>61</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A automação e controle de processos, sem que haja intervenção humana, são alvos de diversas pesquisas, impulsionando a busca por novos métodos de controle que se adaptam às complexidades dos sistemas contemporâneos, que muitas vezes são complexos e interligados. Esses sistemas podem conter um grande número de entradas e saídas motivando o surgimento da teoria de controle moderno. Essa metodologia permite a análise de sistemas diretamente no domínio do tempo a partir do uso das variáveis de estado (DORF; BISHOP, 2001).

Baseado nessa teoria, é possível o projeto de controladores onde a dinâmica do sistema é modelada a partir de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem (OGATA, 2011). Essa modelagem pode envolver termos não lineares, porém, um modelo linear pode ser obtido através da linearização do sistema em torno de uma região de operação (SLOTINE; LI, 1991).

No mundo real e não idealizado, os sistemas físicos podem apresentar incertezas, como mudança no valor da massa dos passageiros de um veículo, falha nos atuadores, imprecisão dos componentes elétricos utilizados, dentre outros (SILVA et al., 2013; BUZETTI, 2017). Portanto, um projeto de controle deve levar em consideração as incertezas no modelo matemático para que, mesmo na presença dessas, o controlador garanta os índices de desempenho desejados. A partir do conhecimento dos valores de máximo e mínimo das incertezas paramétricas, estas podem ser descritas como vértices de um politopo e desta forma obter o modelo que representa o sistema incerto (BOYD et al., 1994; ZHOU; DOYLE, 1998; CHANG; PARK; ZHOU, 2015).

Em muitos sistemas físicos, torna-se complexo e custoso obter todas as variáveis de estado através de sensores específicos, como por exemplo o torque e velocidade para sistemas motorizados (SANCHES, 2013; WOLMUTH et al., 2019). Na prática, geralmente deve-se ter um sensor para cada variável de estado do sistema, impossibilitando em algumas aplicações a obtenção do vetor de estados para a realimentação. Nesse sentido, a realimentação estática de saída representa uma malha de realimentação simples, não sendo necessário mensurar todas as variáveis de estado. Dessa forma, a implementação do controlador pode ser facilitada, sendo capaz de obter um desempenho próximo ao obtido através da realimentação de estado (DONG; YANG, 2007).

O projeto de controladores com realimentação estática de saída para sistemas lineares invariantes no tempo é um problema desafiador na teoria de controle que tem atraído atenção da comunidade científica dado o seu uso em problemas práticos (SADABADI; PEAUCELLE, 2016; BEHROUZ; MOHAMMADZAMAN; MOHAMMADI, 2021). Usualmente, o projeto desses controladores requer a solução de sistemas de equações não convexas, comumente expressados na forma de desigualdades matriciais bilineares, do inglês Bilinear Matrix Inequalities (BMIs), ou igualdades matriciais lineares, do inglês Linear Matrix Equalities (LMEs). Atualmente várias

pesquisas estão sendo realizadas nesta área com o objetivo de encontrar condições suficientes que garantam a estabilidade do sistema com realimentação estática de saída (CARNIATO et al., 2018; SERENI; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2020). No projeto de controladores, além da estabilidade, podem ser requeridos índices de desempenho como robustez, taxa de decaimento e performance  $H_\infty$  (DONG; YANG, 2007; CHANG; PARK; ZHOU, 2015; CARNIATO et al., 2018).

De forma a minimizar as oscilações na saída do sistema e reduzir seu tempo de estabelecimento, pode ser incluído um limitante superior para um índice de performance quadrático, chamado de custo garantido (DEAECTO et al., 2010; BOYD et al., 1994; CAUN et al., 2018). Em Deaecto et al. (2010), o custo garantido está relacionado com a dissipação de energia de conversores de corrente contínua (CC) CC-CC, enquanto que em Silva et al. (2020) esse índice está relacionado com a minimização das oscilações e resposta transitória da saída do sistema.

Comumente, o projeto dos controladores considera apenas um ganho, sendo que deste modo nem sempre é possível obter a factibilidade ou um custo garantido adequado para o sistema. Nesse contexto, de forma a obter uma maior região de factibilidade, vêm sendo desenvolvido o projeto de controle chaveado em que uma lei de chaveamento, de acordo com o estado do sistema, irá selecionar um ganho pertencente a um conjunto de ganhos que minimiza a derivada da função de Lyapunov, conforme proposto por Souza et al. (2013).

O projeto de controladores chaveados proporciona uma região de factibilidade menos conservativa e melhora a performance do sistema quando comparado com os controladores com um único ganho (SONGLIN et al., 2008; CARDIM et al., 2011; SOUZA, 2013; GEROMEL; COLANERI, 2006; BUZETTI, 2017; ZHAI, 2001; RAMOS et al., 2019). Na atualidade, a pesquisa em controladores chaveados apresenta um grande avanço e têm oferecido resultados menos conservadores no controle de sistemas com incertezas politópicas (SOUZA et al., 2013; OTSUKA; SOGA, 2010).

A partir da descrição do sistema em variáveis de estado e considerando uma função energia baseando-se nos estudos de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992), muitos dos problemas da área de Engenharia de Controle podem ser formulados em desigualdades matriciais lineares, do inglês Linear Matrix Inequalities - LMIs. Neste trabalho, para encontrar as soluções das LMIs, será utilizado o software MATLAB em conjunto com a interface YALMIP (LOFBERG, 2004) e o *solver* LMILab (GAHINET et al., 1994), que são *toolboxes* do MATLAB.

Em muitos problemas formulados em termos de LMIs e com métodos de flexibilização como o *S-procedure* e o Lema de Finsler (BOYD et al., 1994), podem ser utilizadas variáveis escalares que multiplicam as matrizes a serem encontradas pelos *solvers*. Desta forma, o conjunto de solução se torna não convexo e atualmente não existe um *solver* capaz de resolver este problema, o que motiva a utilização de algoritmos de meta-heurística para resolver os problemas de

otimização e possibilitar encontrar um mínimo global (CARNIATO et al., 2018).

Um exemplo de algoritmo de meta-heurística, baseado em princípios biológicos de evolução e seleção natural, é o método de evolução diferencial. A partir de uma população inicial, faz-se o processo iterativo de gerar novos indivíduos de tal forma que estas possuam um melhor índice escolhido *a priori* do que as gerações anteriores. O método recebe esse nome devido ao fato de que as novas gerações são formadas a partir da diferença ponderada entre indivíduos da geração atual do processo iterativo.

Aplicando esse conceito no problema de redução do valor da função de custo garantido, espera-se que a cada nova geração obtenha-se um menor limitante superior para  $J$  (STORN; PRICE, 1997). Além disso, esse método pode ser utilizado para espaços de funções não lineares e não diferenciáveis.

## 1.1 Organização do texto

Neste trabalho, é descrito o procedimento de projeto para controladores chaveados com realimentação estática de saída, tendo como referência os trabalhos Carniato et al. (2018), Silva et al. (2020) e BOYD et al. (1994). As restrições de projeto são dadas em forma de LMIs, onde alguns dos parâmetros necessitam ser determinados apropriadamente, e são baseadas em uma função candidata de Lyapunov. Foi considerada a minimização de um limitante superior para um índice de performance quadrático (custo garantido), relacionando-se com a energia de saída do sistema, como em Deaecto et al. (2010), Bocca et al. (2020), Caun et al. (2018). Com o intuito de encontrar um conjunto de parâmetros constantes de forma a minimizar o custo garantido, é empregada a Evolução Diferencial.

Para averiguar os procedimentos propostos foram projetados e implementados controladores para o sistema de suspensão ativa de bancada da Quanser, presente no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira FEIS-UNESP. A dinâmica do sistema é descrita através de variáveis de estado com incertezas politópicas, onde foram consideradas como premissas a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, a redução das oscilações da posição da massa do passageiro e as restrições físicas. Por fim, foi realizado o estudo dos resultados em um exemplo numérico de forma a validar os conceitos.

Os resultados obtidos fornecem subsídios para comparar o desempenho entre a utilização de controladores de ganho único e controladores chaveados, considerando realimentação estática de saída e estabilidade assintótica. De forma a organizar a apresentação da teoria e dos resultados, o trabalho foi estruturado por:

- Capítulo 1: É apresentada uma breve introdução do tema exposto no trabalho, abordando os principais estudos científicos correlatos. Uma síntese do trabalho e sua organização

textual são descritas.

- Capítulo 2: Decorre-se sobre os principais conceitos e teorias necessários para o desenvolvimento e entendimento do trabalho. Nele são recordados alguns conceitos necessários de matrizes e define-se a estabilidade segundo Lyapunov. Para alcançar o desenvolvimento e entendimento dos teoremas principais propostos nesse trabalho, são abordados critérios de projeto para sistemas lineares constantes a partir de realimentação de estados com ganho único.
- Capítulo 3: Nesse capítulo é demonstrada a representação de sistemas incertos a partir de incertezas politópicas com realimentação estática de saída e são propostos teoremas com critérios de projeto de um controlador de ganho único e chaveado para sistemas lineares descritos por incertezas politópicas, prevendo estabilidade assintótica, custo garantido e restrição de saída.
- Capítulo 4: É apresentada a teoria do algoritmo de Evolução Diferencial, método heurístico baseado em algoritmo evolutivo utilizado nesse trabalho de forma a se encontrar parâmetros escalares que minimizam globalmente o índice de performance quadrático. Comparado a outros algoritmos evolutivos, a Evolução Diferencial pode ser implementada de forma simples e com poucos parâmetros.
- Capítulo 5: É apresentado o protótipo da suspensão ativa de bancada utilizado para o projeto dos controladores e implementação prática. É descrito o modelo matemático da planta em forma de espaço de estados.
- Capítulo 6: Nesse capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir de simulações e implementações práticas dos controladores projetados a partir dos teoremas propostos. Ainda, de forma a demonstrar a região de factibilidade obtida através dos métodos de projeto demonstrados, são apresentados dois exemplos numéricos, sendo o primeiro de estabilização e o segundo para a redução do custo garantido.
- Capítulo 7: É apresentada uma conclusão geral do trabalho e dos resultados, com perspectivas futuras, seguidas pelas referências bibliográficas.

De forma a simplificar as notações, nesse trabalho a indicação da variável dependente do tempo foi omitida tal que  $x = x(t)$ ,  $\dot{x} = \dot{x}(t)$ ,  $u = u(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  e  $\alpha = \alpha(t)$ .

## 2 CONCEITOS E TEORIAS BÁSICOS

Neste capítulo, apresentam-se conceitos e detalhamentos da teoria utilizada para a definição das restrições dos projetos de controle que serão formulados no decorrer desse trabalho, baseados em estudos disponíveis na literatura. Nesse trabalho, será utilizada de forma extensiva a notação matricial. Alguns conceitos se fazem necessários de serem abordados e destacados nesse capítulo.

### 2.1 Conceitos e definições matriciais

Considere uma matriz real quadrada simétrica arbitrária  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Definição 1.** (BOS, 2007)  $G$  é dita *semi-definida positiva* se

$$w^T G w \geq 0 \quad (2.1)$$

para qualquer vetor real  $w \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.** (BOS, 2007)  $G$  é dita *definida positiva* se

$$w^T G w > 0 \quad (2.2)$$

para qualquer vetor real  $w \in \mathbb{R}^n$ .

De forma análoga, a matriz  $G$  é dita (semi-)definida negativa se  $-G$  é (semi-)definida positiva. Uma matriz definida positiva também é semi-definida positiva, porém, uma matriz semi-definida positiva não necessariamente é definida positiva. As definições 1 e 2 não implicam que todos os elementos das matrizes são positivos ou não zeros.

Um meio de se definir a positividade de  $G$  é através do Critério de Sylvester, sendo que uma matriz real e simétrica  $G$  é positiva definida se todos os menores principais sucessivos de  $G$  forem positivos, ou seja, se

$$\det(G_k) > 0, \quad k \in \mathbb{K}_n, \quad (2.3)$$

sendo  $G_k$  o menor principal de ordem  $k$  da matriz  $G$ . Logo, tem-se que a matriz  $G$  será definida positiva se as desigualdades

$$G_{11} > 0, \det \left( \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \right) > 0, \dots, \det \left( \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \right) > 0, \quad (2.4)$$

forem satisfeitas (SLOTINE; LI, 1991). A positividade da matriz  $G$  também pode ser determinada por meio de seus autovalores.

**Definição 3.** (BOYD et al., 1994) Considere uma matriz quadrada simétrica  $X$  arbitrária particionada da forma:

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Então, temos que:

- $X \succ 0$  se e somente se  $A \succ 0$  e  $C - B^T A^{-1} B \succ 0$ ;
- $X \succ 0$  se e somente se  $C \succ 0$  e  $A - B C^{-1} B^T \succ 0$ ;
- se  $A \succ 0$ ,  $X \succeq 0$  se e somente se  $C - B^T A^{-1} B \succeq 0$ ;
- se  $C \succ 0$ ,  $X \succeq 0$  se e somente se  $A - B C^{-1} B^T \succeq 0$ .

As desigualdades matriciais  $C \succ 0$  e  $A - B C^{-1} B^T \succ 0$  são equivalentes à desigualdade

$$\begin{bmatrix} A - B C^{-1} B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \succ 0. \quad (2.6)$$

Multiplicando (2.6) à esquerda e direita pela matriz não-singular

$$\begin{bmatrix} I & B C^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.7)$$

e sua transposta, respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} I & B C^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - B C^{-1} B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C^{-1} B^T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succ 0. \quad (2.8)$$

Portanto, a desigualdade (2.5) é válida se e somente se  $A \succ 0$  e  $C - B^T A^{-1} B \succ 0$  e as demais afirmações podem ser obtidas de forma análoga. A definição 3 é chamada de complemento de Schur e será utilizada na elaboração dos teoremas propostos nesse trabalho.

## 2.2 Modelagem do sistema em espaço de estados

A análise das características dinâmicas de sistemas pode ser realizada a partir de um modelo matemático, definido como um conjunto de equações que representa a dinâmica do sistema com precisão. Essa dinâmica pode ser descrita em termos de equações diferenciais que regem o sistema e a definição de um modelo adequado é a parte mais importante da análise de sistemas de controle como um todo (OGATA, 2011).

Os modelos matemáticos podem ser representados de distintas formas de acordo com a sua aplicação e estudo. Para análises de resposta transitória ou resposta em frequência é mais

vantajoso a representação por função de transferência, enquanto que nos problemas de controle ótimo, tema desse trabalho, é mais conveniente a representação por variáveis de estado.

Os sistemas de controle representados por variáveis de estado, na maior parte dos casos, podem ser definidos por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= C_1x + Du, \\ z &= C_2x, \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  a entrada de controle,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  a variável de saída controlada e  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  a saída medida com as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$  e  $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  constantes. Esses sistemas são descritos por equações diferenciais de primeira ordem e se apresentam conforme equação (2.10) para  $C_2 = 0_{n_z \times n_x}$ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_x} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n_x} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n_x1} & a_{n_x2} & \cdots & a_{n_xn_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n_u} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n_u} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n_x1} & b_{n_x2} & \cdots & b_{n_xn_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_u} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n_y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n_x} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n_x} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{n_y1} & c_{n_y2} & \cdots & c_{n_y n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n_u} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n_u} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ d_{n_x1} & d_{n_x2} & \cdots & d_{n_xn_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_u} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 2.3 Estabilidade de sistemas lineares segundo Lyapunov

Na literatura, diversos métodos de análise de estabilidade estão disponíveis, tais como o Critério de Nyquist, Critério de Routh e Método de Lyapunov, sendo o último o método utilizado neste trabalho. Esse método de análise de estabilidade foi proposto por Lyapunov por volta de 1890 e parte do princípio de que se a energia de um sistema for continuamente dissipada com o avanço do tempo, então esse sistema irá convergir para um ponto de equilíbrio (KALMAN; BERTRAM, 1960).

Para realizar a análise de estabilidade, é necessário a definição de alguns conceitos (ASSUNÇÃO E.; TEIXEIRA, 2016). Considere um sistema dinâmico descrito como em (2.10) e que não tenha entrada de controle, ou seja,  $u = 0$ . Nesse caso, tem-se que:

$$\dot{x} = Ax. \quad (2.11)$$

**Definição 4.** (SLOTINE; LI, 1991) Um vetor constante  $x_e$  é dito estado de equilíbrio do sistema descrito em (2.11) se  $\dot{x} = Ax_e = 0$ , em outras palavras, se todas as derivadas das variáveis de

estado forem nulas. Isso implica que as variáveis de estado não variam no tempo e, nesse caso, o vetor  $x_e$  é dito estado em equilíbrio ou ponto de equilíbrio.

Para a definição de estabilidade, considere uma região esférica de raio  $k$  em torno de um estado de equilíbrio  $x_e$  dada por

$$\|x - x_e\|_2 < k, \quad (2.12)$$

sendo  $S(\delta)$  a região que consiste do conjunto de todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\|_2 \leq \delta, \quad (2.13)$$

com  $x_0$  o estado inicial e  $S(\xi)$  a região que consiste em todos os pontos para os quais

$$\|x - x_e\| \leq \xi, \quad \forall t > 0, \quad (2.14)$$

sendo  $t$  a variável independente de tempo.

Dessa forma, pode-se definir os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade.

**Definição 5.** (SLOTINE; LI, 1991) Um estado de equilíbrio  $x_e$  do sistema (2.11) é dito estável de acordo com Lyapunov se, correspondendo a cada  $S(\xi)$ , houver uma  $S(\delta)$  tal que as trajetórias iniciadas em  $S(\delta)$  não deixem  $S(\xi)$  com o aumento de  $t$ .

**Definição 6.** (SLOTINE; LI, 1991) Um estado de equilíbrio  $x_e$  do sistema (2.11) é dito assintoticamente estável se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução que começa em  $S(\delta)$  converge para  $x_e$ , sem deixar  $S(\xi)$  com o aumento de  $t$ .

**Definição 7.** (SLOTINE; LI, 1991) Um estado de equilíbrio  $x_e$  do sistema (2.11) é dito instável se, para algum número real  $\xi > 0$  e todo número real  $\delta > 0$ , há sempre um estado inicial  $x_0$  em  $S(\delta)$  tal que a trajetória deixe a região  $S(\xi)$  em algum intervalo de tempo.

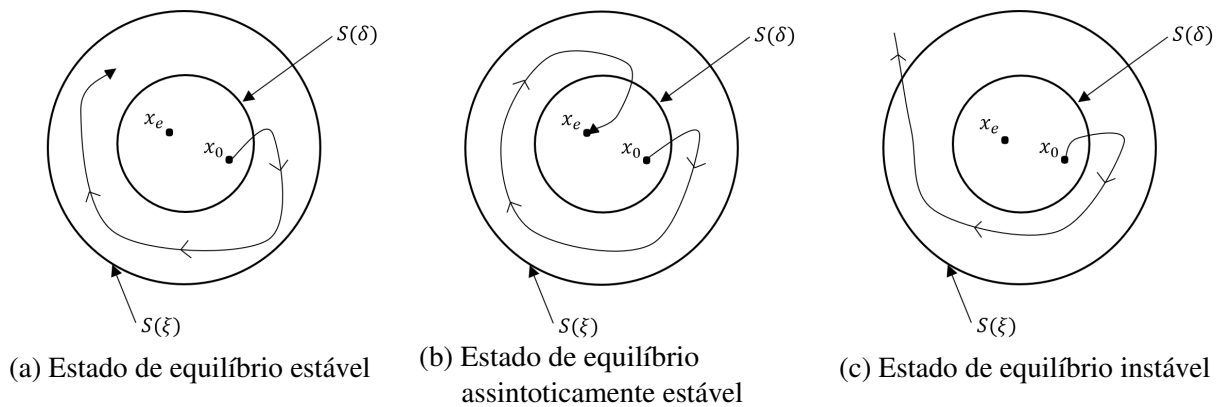
As Definições 5, 6 e 7 podem ser analisadas de forma gráfica, conforme ilustrado na Figura 1. Para definir o conceito de estabilidade de forma algébrica, algumas outras definições se fazem necessárias (ASSUNÇÃO E.; TEIXEIRA, 2016).

**Definição 8.** (SLOTINE; LI, 1991) Uma função escalar  $V(x)$  é dita definida positiva em uma região  $\Omega$  se  $V(x) > 0$  para  $\forall x \neq 0_{n_x}$  na região  $\Omega$  e  $V(0) = 0$ .

**Definição 9.** (SLOTINE; LI, 1991) Uma função escalar  $V(x)$  é dita definida negativa em uma região  $\Omega$  se  $-V(x)$  for definida positiva.

**Definição 10.** (SLOTINE; LI, 1991) Uma função escalar  $V(x)$  é dita semi-definida positiva se for positiva ou nula para todos os vetores de estado  $x$  em  $\Omega$ , sendo nula na origem  $x = 0_{n_x}$ .

Figura 1 – Esquema da definição do conceito de estabilidade.



Fonte: Adaptado de Assunção E.; Teixeira (2016).

**Definição 11.** (SLOTINE; LI, 1991) Uma função escalar  $V(x)$  é dita semi-definida negativa em uma região  $\Omega$  se  $-V(x)$  for semi-definida positiva.

**Definição 12.** (SLOTINE; LI, 1991) Uma função quadrática definida por  $V(x) = x^T P x$  é dita definida positiva se  $P \succ 0$ , conforme Definições 2 e 8.

De forma similar à Definição 12, pode-se obter as relações entre as funções quadráticas do tipo  $V(x) = x^T P x$  e sua positividade através da positividade da matriz  $P$ . A partir dos conceitos e definições expostos, pode-se chegar a uma restrição de projeto em termos de LMIs para garantir a estabilidade do sistema descrito em (2.11).

**Teorema 1.** (BOYD et al., 1994) Considere o sistema descrito por (2.11), sendo  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  o vetor de estados e  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  uma matriz não-singular constante e com elementos reais. Uma condição única e suficiente para que o estado de equilíbrio  $x_e = 0_{n_x \times n_x}$  seja assintoticamente estável é que exista uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  simétrica definida positiva tal que a restrição em forma de LMI

$$A^T P + P A \prec 0 \quad (2.15)$$

seja satisfeita.

*Demonstração.* Partindo da função quadrática candidata de Lyapunov definida por

$$V(x) = x^T P x \quad (2.16)$$

e considerando que o sistema parte de um estado inicial com energia não nula, ou seja,  $V(x) > 0$ , para que o sistema perca energia e retorne para um estado de equilíbrio estável é necessário que a taxa de variação da função de Lyapunov seja negativa, portanto

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < 0. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.11) em (2.17), obtém-se

$$\dot{V}(x) = (Ax)^T Px + x^T PAx = x^T A^T Px + x^T PAx = x^T (A^T P + PA)x < 0. \quad (2.18)$$

Para que a inequação (2.18) seja satisfeita para  $\forall x \in \mathbb{R}^{n_x}$ , a partir da Definição 12 tem-se que

$$A^T P + PA \prec 0, \quad (2.19)$$

e a demonstração está concluída.  $\square$

Dessa forma, a estabilidade de um sistema pode ser definida a partir de restrições em forma de LMIs. Essas inequações podem ser solucionadas a partir de *solvers* ou por métodos numéricos.

## 2.4 Sistemas lineares invariantes no tempo com realimentação de estados

Suponha um sistema linear tal que possua entrada de controle e seja descrito por (2.9). Considere, agora, a lei de controle com realimentação de estados definida por

$$u = -Kx, \quad (2.20)$$

sendo  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  a matriz de ganhos do controlador. Dessa forma, de (2.9) e (2.20), o sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x} = (A - BK)x. \quad (2.21)$$

**Teorema 2.** (BOYD et al., 1994) Considere o sistema descrito por (2.9). Suponha a existência de uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  tais que

$$XA^T - M^T B^T + AX + AX - BM \prec 0, \quad (2.22)$$

então, a lei de controle (2.20) torna o sistema (2.9) estável para  $K = MX^{-1}$ .

*Demonstração.* De forma análoga ao exposto no Teorema 1, para a estabilidade a restrição

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = A^T P - K^T B^T P + PA - PBK \prec 0 \quad (2.23)$$

deve ser satisfeita. Pré e pós multiplicando (2.23) por  $X = P^{-1}$  obtém-se

$$XA^T - XK^T B^T + AX - BKX \prec 0. \quad (2.24)$$

Como  $X$  é uma matriz simétrica,  $X^T = X$ , assim como sua inversa. Assim, substituindo  $M = KX$  obtém-se

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM \prec 0, \quad (2.25)$$

concluindo a demonstração.  $\square$

### 3 CONTROLADORES COM REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA

Nesse capítulo serão expostos os conceitos de realimentação estática de saída, incertezas politópicas (controle robusto) e custo garantido (controle ótimo). Serão propostos novos teoremas com critérios suficientes para o projeto de controladores de ganho único e chaveados considerando restrição de saída.

#### 3.1 Realimentação estática de saída

Para o sistema (2.9), considere a realimentação estática de saída de ganho único definida pela lei de controle

$$u = -Ky = -KC_1x. \quad (3.1)$$

De (2.9) e (3.1), o sistema em malha fechada é, portanto, dado por

$$\dot{x} = (A - BC_1K)x. \quad (3.2)$$

O Lema 1 será utilizado para encontrar os resultados dos próximos teoremas propostos nesse trabalho.

**Lema 1.** (CHANG; PARK; ZHOU, 2015) Para matrizes  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{A}$  com as dimensões apropriadas e um escalar  $\eta$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

$$(i) \begin{bmatrix} \mathcal{T} & * \\ \eta \mathcal{P}^T + \mathcal{U} \mathcal{A} & -\eta \mathcal{U} - \eta \mathcal{U}^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.3)$$

$$(ii) \mathcal{T} \prec 0, \quad \mathcal{T} + \mathcal{A}^T \mathcal{P}^T + \mathcal{P} \mathcal{A} \prec 0. \quad (3.4)$$

*Demonstração.* A prova pode ser obtida em Chang, Park e Zhou (2015).  $\square$

Além disso, para a flexibilização do sistema adotam-se as matrizes  $\mathcal{F}_{n_y \times n_z}$  e  $\mathcal{F}_{n_y \times n_x}$  definidas por:

$$\mathcal{F}_{n_y \times n_z} = \begin{cases} I_{n_y \times n_y}, & \text{se } n_y = n_z, \\ \begin{bmatrix} I_{n_y \times n_y} & 0_{n_y \times (n_z - n_y)} \end{bmatrix}, & \text{se } n_y < n_z, \\ \begin{bmatrix} I_{n_z \times n_z} \\ 0_{(n_y - n_z) \times n_z} \end{bmatrix}, & \text{se } n_y > n_z, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}_{n_y \times n_x} = \begin{cases} I_{n_y \times n_y}, & \text{se } n_y = n_x, \\ \begin{bmatrix} I_{n_y \times n_y} & 0_{n_y \times (n_x - n_y)} \end{bmatrix}, & \text{se } n_y < n_x. \end{cases} \quad (3.6)$$

**Teorema 3.** *Considere o sistema descrito por (2.9) com a lei de controle (3.1). Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes auxiliares  $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  e  $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  e escalares  $\eta > 0$  e  $\rho > 0$  tais que:*

$$\begin{bmatrix} He(A X - B V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * & * \\ -\rho V^T B^T & -I_{n_y \times n_y} & * \\ -\eta V^T B^T + C_1 X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.7)$$

seja satisfeita. Então a lei de controle (3.1), sendo  $K = VU^{-1}$ , torna o sistema linear definido em (2.9) assintoticamente estável.

*Demonstração.* Note que se a inequação (3.7) é satisfeita,  $U$  é não singular e possui inversa. Aplicando o Lema 1 e considerando que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \begin{bmatrix} He(A X - B V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho V^T B^T & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} -B V \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A} &= U^{-1} \begin{bmatrix} C_1 X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

a LMI (3.7) leva a

$$\begin{bmatrix} He(A X - B V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho V^T B^T & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -B V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1 X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \end{bmatrix} \right) \prec 0. \quad (3.9)$$

Deve-se observar que a inequação (3.9) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} He(A X) & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-B V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho V^T B^T & 0 \end{bmatrix} \\ &+ He \left( \begin{bmatrix} -B V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1 X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \end{bmatrix} \right) \prec 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

porém, note que a inequação (3.10) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} He(A X) & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -B V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1 X & 0 \end{bmatrix} \right) \prec 0. \quad (3.11)$$

Substituindo  $K = VU^{-1}$  em (3.11), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} He(A X - B K C_1 X) & * \\ 0_{n_y \times n_x} & -I_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.12)$$

Como  $-I_{n_y \times n_y} \prec 0$ , é possível aplicar o Complemento de Schur em (3.12), obtendo-se:

$$A X + X A^T - B K C_1 X - X C_1^T K^T B^T \prec 0. \quad (3.13)$$

Pré e pós multiplicando (3.13) por  $P = X^{-1}$ , tem-se:

$$PA + A^T P - PBK C_1 - C_1^T K^T B^T P \prec 0. \quad (3.14)$$

Considerando o sistema de malha fechada definido em (3.2) e a candidata à função de Lyapunov  $V(x) = x^T P x > 0$  sendo  $P = X^{-1}$ , tem-se a derivada em relação ao tempo:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA - PBK C_1 - C_1^T K^T B^T P) x < 0. \quad (3.15)$$

Porém, pré e pós multiplicando a equação (3.14) por  $x^T$  e  $x$  respectivamente, tem-se que

$$x^T (PA + A^T P - PBK C_1 - C_1^T K^T B^T P) x < 0, \quad (3.16)$$

não alterando, assim, sua positividade.

Deste modo, de (3.15) e (3.16) tem-se que  $\dot{V}(x) < 0$ , provando a estabilidade assintótica do sistema e, portanto, a demonstração do Teorema 3 está concluída.  $\square$

### 3.2 Incertezas politópicas

Em sua grande parte, os sistemas reais possuem incertezas que necessitam ser levadas em conta no projeto de controladores de forma a garantirem os índices de desempenho desejados, além de garantir a estabilidade. Dessa forma, essas incertezas podem ser modeladas a partir de incertezas politópicas, onde as matrizes que modelam o sistema são formadas por uma combinação convexa do polítopo incerto, chamadas de vértices.

Dessa forma, considere o sistema linear incerto e invariante no tempo descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B(\alpha)u, \\ y &= C_1(\alpha)x, \\ z &= C_2(\alpha)x, \end{aligned} \quad (3.17)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  a entrada de controle,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  a variável de saída controlada e  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  a saída medida. As matrizes  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  e  $C_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$  são matrizes constantes pertencentes ao polítopo incerto  $\Omega$ :

$$\Omega = \left\{ \left[ A(\alpha), B(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha) \right] = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \left[ A_i, B_i, C_{1i}, C_{2i} \right], \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, \quad (3.18)$$

com  $n_r$  representando o número de vértices do polítopo e  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{n_r}]^T$  sendo um vetor constante, porém, incerto. No Teorema 4 são propostas restrições necessárias e suficientes para verificar a estabilidade de sistemas incertos descritos por incertezas politópicas.

**Teorema 4.** (BOYD et al., 1994) Considere o sistema descrito por (3.17). Uma condição única e suficiente para que o estado de equilíbrio  $x_e = 0_{n_x \times n_x}$  seja assintoticamente estável é que exista uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  simétrica definida positiva tal que as restrições em forma de LMI

$$A_i^T P + P A_i \prec 0 \quad (3.19)$$

sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ .

*Demonstração.* A partir de (3.18) e multiplicando (3.19) por  $\alpha_i$  e somando de 1 até  $n_r$ , obtém-se:

$$A(\alpha)^T P + P A(\alpha) \prec 0, \quad (3.20)$$

e a demonstração prossegue analogamente à demonstração do Teorema 1.  $\square$

Para o sistema (3.17), considere a realimentação estática de saída de ganho único definida pela lei de controle

$$u = -Ky = -KC_1(\alpha)x. \quad (3.21)$$

De (3.17) e (3.21), o sistema em malha fechada é, portanto, dado por

$$\dot{x} = (A(\alpha) - B(\alpha)KC_1(\alpha))x. \quad (3.22)$$

**Teorema 5.** Considere o sistema incerto descrito por (3.17) com a lei de controle (3.21). Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes auxiliares  $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  e  $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  e escalares  $\eta > 0$  e  $\rho > 0$  tais que:

$$\begin{bmatrix} He(A_i X - B_i V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * & * \\ -\rho V^T B_i^T & -I_{n_y \times n_y} & * \\ -\eta V^T B_i^T + C_{1i} X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.23)$$

sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ . Então a lei de controle (3.21), sendo  $K = VU^{-1}$ , torna o sistema linear incerto definido em (3.17) assintoticamente estável.

*Demonstração.* A partir de (3.18) e multiplicando (3.23) por  $\alpha_i$  e somando de 1 até  $n_r$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * & * \\ -\rho V^T B(\alpha)^T & -I_{n_y \times n_y} & * \\ -\eta V^T B(\alpha)^T + C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.24)$$

e a demonstração prossegue de forma análoga ao exposto no Teorema 3.  $\square$

### 3.3 Controle ótimo quadrático (custo garantido)

Busca-se para o sistema (3.17) e a lei de controle (3.21) a minimização da energia do sinal de saída (custo garantido). Com isso, tem-se um menor tempo de estabelecimento com menos oscilações, como por exemplo na implementação de um controlador ótimo em uma suspensão ativa de bancada. Isto posto, define-se a equação quadrática do custo garantido como:

$$J = \int_0^{\infty} z^T R z dt = \int_0^{\infty} x^T C_2^T(\alpha) R C_2(\alpha) x dt, \quad (3.25)$$

sendo a matriz  $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  simétrica e definida positiva a ponderação do custo em relação à saída controlada do sistema. A minimização do custo garantido definido em (3.25) exige que o transitório da saída controlada  $z$  seja rápido e sem muitas oscilações. Em outras aplicações, busca-se a ponderação e redução do sinal de controle  $u$  a partir da inserção de mais um fator relacionando-o na equação (3.25) (CAUN et al., 2018).

Este índice de desempenho será garantido para condições iniciais  $x(0)$  pertencentes ao conjunto convexo descrito por:

$$x(0) = \sum_{m=1}^{n_{x0}} \lambda_m x_m(0), \quad \sum_{m=1}^{n_{x0}} \lambda_m = 1, \quad \lambda_m \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{K}_{n_{x0}} \quad (3.26)$$

com os vetores de condições iniciais  $x_m(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$  dados.

**Teorema 6.** (BOCCA et al., 2020) *Considere o sistema incerto descrito por (3.17) com a lei de controle (3.21), o índice de desempenho  $J$  definido em (3.25) e o conjunto de condições iniciais (3.26). Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes auxiliares  $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  e  $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  e escalares  $\omega > 0$ ,  $\eta > 0$  e  $\rho > 0$  tais que:*

$$\begin{aligned} & \max_{X,U,V} \quad \omega \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} \omega & \omega x_m^T(0) \\ \omega x_m(0) & X \end{bmatrix} \succeq 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} He(A_i X - B_i V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * & * \\ C_{2i} X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B_i^T & -R^{-1} & * \\ -\eta V^T B_i^T + C_{1i} X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.28)$$

sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ ,  $m \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$ . Então a lei de controle (3.21), sendo  $K = VU^{-1}$ , torna o sistema linear incerto definido em (3.17) assintoticamente estável garantindo o índice de desempenho  $J < \omega^{-1} = \beta$  para todo  $x(0)$  descrito por (3.26).

*Demonstração.* A partir de (3.18), multiplicando (3.28) por  $\alpha_i$  e somando de 1 até  $n_r$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * & * \\ C_2(\alpha)X - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & -R^{-1} & * \\ -\eta V^T B^T(\alpha) + C_1(\alpha)X - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.29)$$

Aplicando o Lema 1 e considerando que

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V\mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ C_2(\alpha)X - \rho\mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A} &= U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U\mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U\mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{3.30}$$

a inequação (3.29) leva a

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)V\mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ C_2(\alpha)X - \rho\mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix} \\ & + He \left( \begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U\mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U\mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \right) \prec 0.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Deve-se observar que a inequação (3.31) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V\mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho\mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \\ & + He \left( \begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U\mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U\mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \right) \prec 0,\end{aligned}\tag{3.32}$$

porém, note que a inequação (3.32) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V\mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho\mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B^T(\alpha) & 0 \end{bmatrix} = He \left( \begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} U\mathcal{F}_{n_y \times n_x} & \rho U\mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \right).\tag{3.33}$$

Substituindo (3.33) em (3.32) e simplificando os termos em comum, pode ser visto que os termos que envolvem as matrizes de flexibilização  $\mathcal{F}_{n_y \times n_x}$  e  $\mathcal{F}_{n_y \times n_z}$  se cancelam. Assim, (3.32) pode ser reescrita por:

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -B(\alpha)V \\ 0 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X & 0 \end{bmatrix} \right) \prec 0.\tag{3.34}$$

reescrevendo (3.34) por:

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -B(\alpha)VU^{-1}C_1(\alpha)X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & = \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)VU^{-1}C_1(\alpha)X) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0,\end{aligned}\tag{3.35}$$

e substituindo  $K = VU^{-1}$  em (3.34), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} He(A(\alpha)X - B(\alpha)KC_1(\alpha)X) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0.\tag{3.36}$$

Como  $R \succ 0$ , temos que  $R^{-1} \succ 0$  e, por consequente,  $-R^{-1} \prec 0$ . Dessa forma, é possível aplicar o Complemento de Schur em (3.36), obtendo-se:

$$A(\alpha)X + XA^T(\alpha) - B(\alpha)KC_1(\alpha)X - XC_1^T(\alpha)K^TB^T(\alpha) + XC_2^T(\alpha)RC_2(\alpha)X \prec 0. \quad (3.37)$$

Pré e pós multiplicando (3.37) por  $P = X^{-1}$ , tem-se:

$$PA(\alpha) + A^T(\alpha)P - PB(\alpha)KC_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^TB^T(\alpha)P + C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) \prec 0. \quad (3.38)$$

Considerando o sistema de malha fechada definido em (3.22) e a candidata à função de Lyapunov  $V(x) = x^TPx > 0$ , para todo  $x \neq 0$ , sendo  $P = X^{-1}$ , tem-se a derivada em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^TPx + x^TP\dot{x} < 0 \\ &= x^T(A(\alpha)^TP + PA(\alpha) - PB(\alpha)KC_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^TB^T(\alpha)^TP)x. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Porém, pré e pós multiplicando a equação (3.38) por  $x^T$  e  $x$  respectivamente, tem-se para  $x \neq 0$  que

$$x^T(PA(\alpha) + A(\alpha)^TP - PB(\alpha)KC_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K^TB^T(\alpha)^TP)x < -x^T(C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x, \quad (3.40)$$

e, sabendo que  $-R \prec 0$  nota-se que  $-C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) \preceq 0$ . Deste modo, de (3.39) e (3.40) tem-se que  $\dot{V}(x) < -x^T(C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x \leq 0$  para todo  $x \neq 0$ , provando a estabilidade assintótica do sistema. Além disso, integrando ambos os lados da inequação (3.40) de 0 a  $\infty$ , obtém-se de (3.25):

$$\int_0^\infty \dot{V}(x) dt < \int_0^\infty -x^T(C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x dt = -J, \quad (3.41)$$

e, portanto, de (3.41):

$$V(x(t \rightarrow \infty)) - V(x(0)) < -J. \quad (3.42)$$

Sabendo-se que o sistema de malha fechada é assintoticamente estável ( $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0_{n_x \times 1}$ ) e, por consequente,  $V(x(t \rightarrow \infty)) = 0$ , de (3.42) obtém-se que:

$$J < V(x(0)) = x^T(0)Px(0). \quad (3.43)$$

Aplicando o complemento de Schur na inequação (3.27), tem-se que:

$$\omega - \omega^2 x_m(0)^T X^{-1} x_m(0) \geq 0. \quad (3.44)$$

Substituindo  $P = X^{-1}$ ,  $\omega = \beta^{-1}$  e multiplicando ambos os lados por  $\beta^2$  obtém-se:

$$\beta \geq x_m(0)^T Px_m(0). \quad (3.45)$$

Multiplicando (3.45) por  $\lambda_m$  e somando de 1 até  $n_{x0}$  considerando (3.26), obtém-se que

$$\beta \geq x(0)^T Px(0). \quad (3.46)$$

Por consequente, de (3.43) e (3.46) tem-se  $\beta \geq x(0)^T Px(0) > J$ , garantindo que  $\beta > J$  para toda condição inicial descrita por (3.26) e demonstração do Teorema 6 está concluída.  $\square$

O Teorema 7 fornece condições baseadas em LMI para o projeto do ganho  $K$  de realimentação estática de saída a partir da lei de controle (3.21), tal que o custo garantido descrito em (3.25) seja minimizado para qualquer condição inicial descrita por (3.26). A principal diferença entre o Teorema 6 e o Teorema 7 está relacionado com a função candidata de Lyapunov: o primeiro é baseado na função quadrática de Lyapunov e, no segundo, a função de Lyapunov depende do vetor  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{n_r}]^T$  definido em (3.18). Assim, as condições do Teorema 7 fornecem resultados menos conservadores ou no mínimo iguais aos do Teorema 6.

**Teorema 7.** (BOCCA et al., no prelo) *Considere um sistema incerto linear descrito por (3.17), a lei de controle (3.21), o índice de performance  $J$  de (3.25) e as condições iniciais (3.26). Suponha que existam matrizes simétricas  $X_j \succ 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes  $U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ , e escalares  $\omega > 0$ ,  $\eta > 0$  e  $\rho > 0$  tal que o seguinte problema de otimização é solucionado:*

$$\begin{aligned} & \max_{X_j, U, V} \quad \omega \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} \omega & \omega x_m^T \\ \omega x_m & X_j \end{bmatrix} \succeq 0, \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\Omega_{ii} \prec 0, \tag{3.48}$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} \prec 0, \quad i < j \tag{3.49}$$

para todo  $i$  e  $j \in \mathbb{K}_{n_r}$ ,  $m \in \mathbb{K}_{n_x}$ , sendo

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} W_{ij} & * & * \\ Y_{ij} & -R^{-1} & * \\ S_{ij} & -\rho U \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix}, \tag{3.50}$$

$$W_{ij} = He(A_i X_j - B_i V \mathcal{F}_{n_y \times n_x}),$$

$$Y_{ij} = C_{2i} X_j - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V^T B_i^T,$$

$$S_{ij} = -\eta V^T B_i^T + C_{1i} X_j - U \mathcal{F}_{n_y \times n_x}. \tag{3.51}$$

Então, a lei de controle (3.21) com  $K = VU^{-1}$  torna o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema linear incerto (3.17) assintoticamente estável, com índice de desempenho  $J < \omega^{-1} = \beta$  para todo  $x(0)$  dado por (3.26).

*Demonstração.* Similar à prova do Teorema 6. □

### 3.4 Projeto de controladores ótimos robustos chaveados

Exemplos numéricos e teóricos demonstram que o projeto de controladores chaveados garantem uma região de factibilidade maior ou igual a controladores de único ganho, assim como para os índices de desempenho do sistema em malha fechada.

Considere a lei de controle chaveada com realimentação de saída dada por

$$u = -K_\sigma y = -K_\sigma C_1(\alpha)x, \quad \sigma = \arg^* \min_{s \in \mathbb{K}_{n_r}} (y^T Z_s y), \quad (3.52)$$

onde  $\arg^* \min_{s \in \mathbb{K}_{n_r}} (y^T Z_s y)$  indica o menor índice  $\sigma \in \mathbb{K}_{n_r}$  tal que  $y^T Z_\sigma y = \min_{s \in \mathbb{K}_{n_r}} (y^T Z_s y)$ ,  $K_\sigma \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  é um vetor de ganhos escolhido do conjunto de vetores de ganhos  $\{K_1 K_2 \dots K_{n_r}\}$  que são obtidos a partir do procedimento de projeto junto com as matrizes de decisão  $Z_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ . De (3.17) e (3.52), o sistema em malha fechada é dado por:

$$\dot{x} = A(\alpha)x - B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha)x = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j [A_i - B_i K_\sigma C_{1j}] x. \quad (3.53)$$

Busca-se a estabilização do sistema em malha fechada (3.53). Dessa forma, no Teorema 8 são estabelecidos critérios para o projeto de controladores chaveados robustos com realimentação estática de saída.

**Teorema 8.** (BOCCA et al., no prelo) *Considere um sistema linear incerto descrito por (3.22), relacionado com o sistema incerto (3.17) e (3.18), com a lei de controle (3.52). Suponha que existam matrizes simétricas  $X_i \succ 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $U_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  e  $V_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ , para todo  $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ , e um escalar  $\eta > 0$  tal que as seguintes desigualdades matriciais:*

$$\Omega_{iis} \prec 0, \quad (3.54)$$

$$\Omega_{ijs} + \Omega_{jis} \prec 0, \quad i < j \quad (3.55)$$

$$\Theta_{iii} \prec 0, \quad (3.56)$$

$$\Theta_{iij} + \Theta_{iji} + \Theta_{jii} \prec 0, \quad i \neq j \quad (3.57)$$

$$\Theta_{ijq} + \Theta_{iqj} + \Theta_{jiq} + \Theta_{jqj} + \Theta_{qij} + \Theta_{qji} \prec 0, \quad i < j, \quad j < q, \quad (3.58)$$

para todo  $i, j, q$  e  $s \in \mathbb{K}_{n_r}$ , sendo

$$\Omega_{ijs} = \begin{bmatrix} W_{ijs} & * \\ Y_{ijs} & -\eta U_s - \eta U_s^T \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$\Theta_{ijq} = Q_i + C_{1i}^T Z_j C_{1q}, \quad (3.60)$$

$$W_{ijs} = He(A_i X_j - B_i V_s \mathcal{F} C_{1j}) - Q_i - C_{1i}^T Z_s C_{1j},$$

$$Y_{ijs} = -C_{1i} X_j + U_s \mathcal{F} C_{1i} + \eta V_s^T B_i^T,$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} I_{n_y \times n_y}, & C_{1i}, i = 1, 2, \dots, \mathbb{K}_{n_r} \\ & \text{de posto incompleto.} \\ (C_{1i_0} C_{1i_0}^T)^{-1}, & \exists \text{ alguns } i_0 \in \{1, 2, \dots, \mathbb{K}_{n_r}\}, \\ & \text{s.t. } C_{1i_0} \text{ é de posto completo.} \end{cases} \quad (3.61)$$

são satisfeitas. Então, a lei de controle (3.52) com  $K_s = V_s U_s^{-1}$  torna o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema linear incerto (3.17) e (3.18) assintoticamente estável.

*Demonstração.* Inicialmente, multiplique (3.59) por  $\alpha_i$  e  $\alpha_j \geq 0$  tal que  $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j = 1$  e realize a soma de  $i = 1$  a  $n_r$  e de  $j = 1$  a  $n_r$ . Então, considerando (3.54) e (3.55), para  $s = \sigma$ , segue-se que

$$\sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j \Omega_{ij\sigma} = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2 \Omega_{ii\sigma} + \sum_{i=1}^{n_r-1} \sum_{j>i}^{n_r} \alpha_i \alpha_j (\Omega_{ij\sigma} + \Omega_{ji\sigma}) = \begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma} & * \\ Y_{\alpha\alpha\sigma} & -\eta U_\sigma - \eta U_\sigma^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.62)$$

$$W_{\alpha\alpha\sigma} = He(A(\alpha)X(\alpha) - B(\alpha)V_\sigma \mathcal{F} C_1(\alpha)) - Q(\alpha) - C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha),$$

$$Y_{\alpha\alpha\sigma} = -C_1(\alpha)X(\alpha) + U_\sigma \mathcal{F} C_1(\alpha) + \eta V_\sigma^T B^T(\alpha).$$

Note que de (3.62),  $U_\sigma$  é não singular e invertível. Pré e pós multiplicando (3.62) por  $[x^T \ x^T B(\alpha)K_\sigma]$  e sua transposta, para  $x \neq 0$  obtém-se

$$\begin{aligned} x^T & \left( A(\alpha)X(\alpha) + X(\alpha)A^T(\alpha) - Q(\alpha) - C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha) - B(\alpha)V_\sigma \mathcal{F} C_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)\mathcal{F}^T V_\sigma^T B^T(\alpha) \right. \\ & - X(\alpha)C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B^T(\alpha) + C_1^T(\alpha)\mathcal{F}^T U_\sigma K_\sigma^T B^T(\alpha) + \eta B(\alpha)V_\sigma K_\sigma^T B^T(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha)X(\alpha) \\ & + B(\alpha)K_\sigma U_\sigma T C_1(\alpha) + \eta B(\alpha)K_\sigma V_\sigma^T V_\sigma^T B^T(\alpha) - \eta B(\alpha)K_\sigma U_\sigma K_\sigma^T B^T(\alpha) \\ & \left. - \eta B(\alpha)K_\sigma U_\sigma^T K_\sigma^T B^T(\alpha) \right) x \prec 0 \text{ para todo } x \neq 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

sendo  $K_\sigma = V_\sigma U_\sigma^{-1}$ , implicando que  $V_\sigma = K_\sigma U_\sigma$ . Substituindo  $K_\sigma U_\sigma$  de  $V_\sigma$ , então (3.63) pode ser reescrita por:

$$x^T \left( A(\alpha)X(\alpha) + X(\alpha)A^T(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha)X(\alpha) - X(\alpha)C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B^T(\alpha) \right) x^T < x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y. \quad (3.64)$$

Porém, de (3.56), (3.57) e (3.58),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \sum_{q=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j \alpha_q \Theta_{ijq} &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^3 \Theta_{iii} + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{i \neq j}^{n_r} \alpha_i^2 \alpha_j (\Theta_{ijj} + \Theta_{iji} + \Theta_{jii}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{i < j}^{n_r} \sum_{j < q}^{n_r} \alpha_i \alpha_j \alpha_q (\Theta_{ijq} + \Theta_{iqj} + \Theta_{jij} + \Theta_{jqj} + \Theta_{qij} + \Theta_{qji}) \\ &= Q(\alpha) + C_1^T(\alpha)Z(\alpha)C_1(\alpha) \prec 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Pré e pós multiplicando (3.65) por  $x^T$  e  $x$ , respectivamente, e observando que, de (3.17),  $x^T C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha)x = y^T Z_\sigma y$ , obtém-se, para  $x \neq 0$ ,

$$x^T Q(\alpha)x + y^T Z(\alpha)y < 0. \quad (3.66)$$

O mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual a qualquer combinação convexa desses números. Então, de (3.66) e levando em conta que  $y^T Z_\sigma y = \min_{s \in \mathbb{K}_{n_r}} (y^T Z_s y)$ , obtém-se

$$x^T Q(\alpha)x + \min_{s \in \mathbb{K}_r} (y^T Z_s y) = x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y \leq x^T Q(\alpha)x + y^T Z(\alpha)y < 0. \quad (3.67)$$

Portanto, de (3.64) e (3.67),

$$A(\alpha)X(\alpha) + X(\alpha)A^T(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha)X(\alpha) - X(\alpha)C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B^T(\alpha) \prec 0. \quad (3.68)$$

Pré e pós multiplicando (3.68) por  $x^T P(\alpha) = x^T X^{-1}(\alpha)$  e sua transposta, e considerando o sistema em malha fechada (3.53) e a função candidata de Lyapunov  $V(x) = x^T P(\alpha)x > 0$ , para todo  $x \neq 0$  obtém-se que

$$\begin{aligned} P(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B^T(\alpha)P(\alpha) &= \dot{x}^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)\dot{x} \\ &= \dot{V}(x) < 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Assim, a demonstração do Teorema 8 está completa.  $\square$

Para o sistema em malha fechada (3.53), o teorema proposto a seguir fornece condições em LMIs para o projeto de um conjunto de ganhos de realimentação estática de saída e matrizes de decisão utilizadas em (3.52), tal que o índice de performance definido em (3.25) é minimizado para qualquer condição inicial descrita pela combinação convexa definida por (3.26).

**Teorema 9.** (BOCCA et al., no prelo) *Considere um sistema incerto descrito por (3.17), a lei de controle (3.52), o índice de desempenho  $J$  em (3.25) e uma condição inicial descrita por (3.26). Suponha que existam matrizes simétricas  $X_j \succ 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $Z_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  e  $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , matrizes  $U_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $V_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ , e escalares  $\omega > 0$ ,  $\eta > 0$  e  $\rho > 0$  tal que o seguinte problema de otimização é solucionado:*

$$\begin{aligned} &\max_{X_j, U_s, V_s} \quad \omega \\ &\text{sujeito a} \\ &\begin{bmatrix} \omega & \omega x_m^T \\ \omega x_m & X_j \end{bmatrix} \succeq 0, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\Omega_{iis} \prec 0, \quad (3.71)$$

$$\Omega_{ijs} + \Omega_{jis} \prec 0, \quad i < j \quad (3.72)$$

$$\Theta_{iii} \prec 0, \quad (3.73)$$

$$\Theta_{iij} + \Theta_{iji} + \Theta_{jii} \prec 0, \quad i \neq j \quad (3.74)$$

$$\Theta_{ijq} + \Theta_{iqj} + \Theta_{jiq} + \Theta_{jqj} + \Theta_{qij} + \Theta_{qji} \prec 0, \quad i < j, \quad j < q, \quad (3.75)$$

para todo  $i, j, s, q \in \mathbb{K}_{n_r}$ ,  $m \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$ , sendo

$$\Omega_{ijs} = \begin{bmatrix} W_{ijs} & * & * \\ Y_{ijs} & -R^{-1} & * \\ S_{ijs} & -\rho U_s \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U_s - \eta U_s^T \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} W_{ijs} &= He(A_i X_j - B_i V_s \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) - Q_i - C_{1i}^T Z_s C_{1j}, \\ Y_{ijs} &= C_{2i} X_j - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V_s^T B_i^T, \\ S_{ijs} &= -\eta V_s^T B_i^T + C_{1i} X_j - U_s \mathcal{F}_{n_y \times n_x}, \\ \Theta_{ijq} &= Q_i + C_{1i}^T Z_j C_{1q}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

com  $\mathcal{F}_{n_y \times n_z}$  e  $\mathcal{F}_{n_y \times n_x}$  definidas por (3.5) e (3.6), respectivamente. Então, a lei de controle chaveada (3.52) com  $K_s = V_s U_s^{-1}$  torna o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema linear incerto definido em (3.17) assintoticamente estável e o índice de performance  $J < \omega^{-1}$  garantido para todo  $x(0)$  dado por (3.26).

*Demonstração.* Primeiramente, multiplique (3.76) por  $\alpha_i$  e  $\alpha_j \geq 0$  tal que  $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j = 1$  e somando de  $i$  e  $j = 1$  até  $n_r$ . Então, considerando (3.71) e (3.72), para  $s = \sigma$ , segue-se que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j \Omega_{ij\sigma} &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2 \Omega_{ii\sigma} + \sum_{i=1}^{n_r-1} \sum_{j>i}^{n_r} \alpha_i \alpha_j (\Omega_{ij\sigma} + \Omega_{ji\sigma}) \\ &= \begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma} & * & * \\ Y_{\alpha\alpha\sigma} & -R^{-1} & * \\ S_{\alpha\alpha\sigma} & -\rho U_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U_\sigma - \eta U_\sigma^T \end{bmatrix} \prec 0, \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha\alpha\sigma} &= He(A(\alpha)X(\alpha) - B(\alpha)V_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) - Q(\alpha) \\ &\quad - C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha), \\ Y_{\alpha\alpha\sigma} &= C_2(\alpha)X(\alpha) - \rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V_\sigma^T B^T(\alpha), \\ S_{\alpha\alpha\sigma} &= -\eta V_\sigma^T B^T(\alpha) + C_1(\alpha)X(\alpha) - U_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_z}. \end{aligned}$$

Note que, de (3.78),  $U_\sigma$  é não singular e possui inversa. Aplicando o Lema 1 e considerando

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma} & * \\ Y_{\alpha\alpha\sigma} & -R^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{bmatrix} -B(\alpha)V_\sigma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = U_\sigma \\ \mathcal{A} &= U_\sigma^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X(\alpha) - U_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma} & * \\ Y_{\alpha\alpha\sigma} & -R^{-1} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -B(\alpha)V_\sigma \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X(\alpha) - U_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \right) \prec 0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Note que (3.80) pode ser reescrita por

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X(\alpha)) - Q(\alpha) - C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha) & * \\ C_2(\alpha)X(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)V_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_x}) & * \\ -\rho \mathcal{F}_{n_y \times n_z}^T V_\sigma^T B^T(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} -B(\alpha)V_\sigma \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \right. \\
& \quad \left. \times \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X(\alpha) - U_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U_\sigma \mathcal{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \right) \prec 0, \\
& \begin{bmatrix} He(A(\alpha)X(\alpha)) - Q(\alpha) - C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha) & * \\ C_2(\alpha)X(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix} \\
& + He \left( \begin{bmatrix} -B(\alpha)V_\sigma \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \right) \prec 0.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Substituindo  $K_\sigma = V_\sigma U_\sigma^{-1}$  em (3.81), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} T_{\alpha\alpha\sigma} - Q(\alpha) - C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha) & * \\ C_2(\alpha)X(\alpha) & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \\
& T_{\alpha\alpha\sigma} = A(\alpha)X(\alpha) + X(\alpha)A^T(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha)X(\alpha) - X(\alpha)C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B^T(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Como  $R \succ 0$ , tem-se que  $R^{-1} \succ 0$  e, conseqüentemente,  $-R^{-1} \prec 0$ . Então, é possível aplicar o complemento de Schur em (3.82), resultando em

$$T_{\alpha\alpha\sigma} + X(\alpha)C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha)X(\alpha) - Q(\alpha) - C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha) \prec 0. \tag{3.83}$$

Pré e pós multiplicando (3.83) por  $x^T$  e  $x$ , respectivamente, e considerando que, de (3.17),  $x^T C_1^T(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha)x = y^T Z_\sigma y$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
& x^T \left( A(\alpha)X(\alpha) + X(\alpha)A^T(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha)X(\alpha) \right. \\
& \quad \left. - X(\alpha)C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B^T(\alpha) + X(\alpha)C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha)X(\alpha) \right) x^T < x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Por outro lado, de (3.73), (3.74) e (3.75),

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \sum_{q=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j \alpha_q \Theta_{ijq} = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^3 \Theta_{iii} + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{i \neq j}^{n_r} \alpha_i^2 \alpha_j (\Theta_{ijj} + \Theta_{iji} + \Theta_{jii}) \\
& + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{i < j}^{n_r} \sum_{j < q}^{n_r} \alpha_i \alpha_j \alpha_q (\Theta_{ijq} + \Theta_{iqj} + \Theta_{jqi} + \Theta_{jqi} + \Theta_{qij} + \Theta_{qji}) \\
& = Q(\alpha) + C_1^T(\alpha)Z(\alpha)C_1(\alpha) \prec 0.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Pré e pós multiplicando (3.85) por  $x^T$  e  $x$ , respectivamente, e observando que, de (3.17),  $x^T C_1^T(\alpha) Z_\sigma C_1(\alpha) x = y^T Z_\sigma y$ , tem-se que, para  $x \neq 0$ ,

$$x^T Q(\alpha) x + y^T Z(\alpha) y < 0. \quad (3.86)$$

O mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual a qualquer combinação convexa desses números. Portanto, de (3.86) e levando em conta que  $y^T Z_\sigma y = \min_{s \in \mathbb{K}_r} (y^T Z_s y)$ , segue-se que

$$x^T Q(\alpha) x + \min_{s \in \mathbb{K}_r} (y^T Z_s y) = x^T Q(\alpha) x + y^T Z_\sigma y \leq x^T Q(\alpha) x + y^T Z(\alpha) y < 0. \quad (3.87)$$

Dessa forma, de (3.84) e (3.87),

$$\begin{aligned} A(\alpha)X(\alpha) + X(\alpha)A^T(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha)X(\alpha) \\ - X(\alpha)C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B^T(\alpha) + X(\alpha)C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha)X(\alpha) < 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Pré e pós multiplicando (3.88) por  $P(\alpha) = X^{-1}(\alpha)$ , obtém-se que:

$$P(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B^T(\alpha)P(\alpha) + C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) < 0. \quad (3.89)$$

Considere o sistema de malha fechada (3.53) e a função candidata de Lyapunov  $V(x) = x^T P(\alpha)x > 0$  para todo  $x \neq 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)\dot{x} < 0 \\ &= x^T (A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha) - C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B(\alpha)^T P(\alpha))x < 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Além disso, pré e pós multiplicando (3.89) por  $x^T$  e  $x$ , respectivamente, obtém-se, para  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} x^T (P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K_\sigma C_1(\alpha) \\ - C_1^T(\alpha)K_\sigma^T B(\alpha)^T P(\alpha))x < -x^T (C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Como  $-R < 0$ , então  $-C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha) \leq 0$ . Dessa forma, de (3.90) e (3.91), tem-se que  $\dot{V}(x) < -x^T (C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x \leq 0$  para todo  $x \neq 0$ , e o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Além disso, integrando ambos os lados de (3.91) de 0 para  $\infty$ , de (3.25), tem-se que

$$\int_0^\infty \dot{V}(x) dt < \int_0^\infty -x^T (C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha))x dt = -J, \quad (3.92)$$

e, de (3.92),

$$V(x(t \rightarrow \infty)) - V(x(0)) < -J. \quad (3.93)$$

Agora, como o sistema em malha fechada é assintoticamente estável,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  e, de (3.93),

$$J < V(x(0)) = x^T(0)P(\alpha)x(0). \quad (3.94)$$

Multiplicando (3.70) e  $\lambda_m \geq 0$ ,  $\sum_{m=1}^{n_{x0}} \lambda_m = 1$ , somando de  $m = 1$  to  $n_{x0}$  e multiplicando novamente por  $\alpha_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j = 1$ , considerando (3.26), tem-se que

$$\begin{bmatrix} \omega & \omega x(0)^T \\ \omega x(0) & X(\alpha) \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.95)$$

Aplicando o complemento de Schur em (3.95), substituindo  $P(\alpha) = X^{-1}(\alpha)$  e multiplicando ambos os lados por  $\beta^2$ , sendo  $\beta = \omega^{-1}$ , segue-se que

$$\beta \geq x(0)^T P(\alpha) x(0). \quad (3.96)$$

Portanto, de (3.94) e (3.96) tem-se que  $\beta \geq x(0)^T P(\alpha) x(0) > J$ , assegurando  $\beta > J$  para todas as condições iniciais definidas por (3.26) e a demonstração do Teorema 9 está completa.  $\square$

### 3.5 Restrição de saída

Os sistemas dinâmicos e eletrônicos possuem restrições físicas para a saída. Dessa forma, é conveniente a definição de uma restrição de saída de forma que a saída permaneça dentro da região de operação do equipamento ou dispositivo, além de garantir a estabilidade com essas restrições.

Considere a saída controlada  $y = [y_1 \ \cdots \ y_{n_y}]^T \in \mathbb{R}^{n_y}$  do sistema (3.17). Serão apresentadas nesse tópico restrições adicionais em LMIs de tal modo que, para qualquer condição inicial descrita pelo conjunto convexo (3.26), cada saída do vetor de saída mensurável é limitada por

$$\max_{t \geq 0} |y_p(t)| \leq \gamma_p, \quad (3.97)$$

sendo  $\gamma_p$  constantes conhecidas e positivas para  $\forall p \in \mathbb{K}_{n_y}$ .

**Teorema 10.** (BOCCA et al., no prelo) *Considere uma condição inicial descrita pelo conjunto convexo (3.26). A restrição  $|y_p| \leq \gamma_p$  é garantida para todo  $t \geq 0$  se as condições dos Teoremas 6 e 9 forem satisfeitas e*

$$\mathbb{E}_{iip} \succeq 0, \quad (3.98)$$

$$\mathbb{E}_{ijp} + \mathbb{E}_{jip} \succeq 0, \quad i < j, \quad (3.99)$$

para todo  $i, j \in \mathbb{K}_r$  e  $p \in \mathbb{K}_{n_y}$ , sendo

$$\mathbb{E}_{ijp} = \begin{bmatrix} X_j & * \\ C_{1i}^p X_j & (\gamma_p)^2 \omega \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

sendo  $C_{1i}^p$  a  $p$ -ésima linha de  $C_{1i}$ .

*Demonstração.* Note que, de (3.98),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j \Xi_{ijp} &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2 \Xi_{iip} + \sum_{i=1}^{n_r-1} \sum_{j>i}^{n_r} \alpha_i \alpha_j (\Xi_{ijp} + \Xi_{jip}) \\ &= \begin{bmatrix} X(\alpha) & * \\ C_1^p(\alpha)X(\alpha) & (\gamma_p)^2 \omega \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Aplicando o Complemento de Schur em (3.101) e pré e pós multiplicando por  $P(\alpha) = X^{-1}(\alpha)$ , obtém-se

$$\frac{\beta}{(\gamma_p)^2} (C_1^p)^T(\alpha) C_1^p(\alpha) - P(\alpha) \preceq 0, \quad (3.102)$$

sendo  $\beta = \omega^{-1}$ . Pré e pós multiplicando (3.102) por  $x^T$  e  $x$ , respectivamente, chega-se a

$$x^T \left( \frac{\beta}{(\gamma_p)^2} (C_1^p)^T(\alpha) C_1^p(\alpha) - P(\alpha) \right) x \leq 0. \quad (3.103)$$

De (3.103), (3.17), e (3.96) (ou (3.96) para  $u = -Ky$ ), tem-se que

$$\frac{x^T (C_1^p)^T(\alpha) C_1^p(\alpha) x}{(\gamma_p)^2} = \frac{(y_p)^T y_p}{(\gamma_p)^2} \leq \frac{x^T P(\alpha) x}{\beta} \leq \frac{x(0)^T P(\alpha) x(0)}{\beta} \leq 1. \quad (3.104)$$

Deste modo, de (3.104),

$$|y_p|^2 \leq \gamma_p^2. \quad (3.105)$$

Portanto,  $|y_p(t)| < \gamma_p$ , para todo  $p \in \mathbb{K}_{n_y}$ . A demonstração do Teorema 10 está completa.  $\square$

## 4 EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Note que em algumas restrições dos teoremas propostos, variáveis escalares  $\eta$  e  $\rho$  multiplicam variáveis matriciais, tornando as condições em desigualdades não convexas, portanto, não podendo ser solucionadas pelos *solvers* de LMI. Valores constantes podem ser atribuídos para esses escalares, apesar disso, esses valores afetam o custo garantido obtido e até a factibilidade do teorema. Por isso, valores apropriados para esses escalares devem ser utilizados.

Nos Teoremas 6 e 9 as duas variáveis  $\eta$  e  $\rho$  foram utilizadas simultaneamente. Dessa forma, é criada uma função desconhecida que mapeia o custo garantido (3.25) no espaço  $\eta \times \rho$ . Portanto, uma abordagem heurística pode ser utilizada de forma a otimizar o custo garantido encontrando valores adequados para esses escalares. Sendo assim, foi utilizado o algoritmo de evolução diferencial (ED). Essa abordagem já foi aplicada, com bons resultados, em Bocca et al. (2020). Na sequência, será apresentado a teoria do algoritmo da ED.

As maiores vantagens desse método são o uso de poucas e robustas variáveis de controle, encontrando o mínimo global, com rápida convergência (STORN; PRICE, 1997; KARABOĞA; ÖKDEM, 2004; LIU; LAMPINEN, 2002). A ED é um método estocástico de busca paralela direta que utiliza  $N_i$  vetores de parâmetros  $w_{i,G}$ ,  $i \in \mathbb{K}_{N_i}$ , como população para cada geração  $G$  ( $N_i$  não se altera durante o processo de minimização). O vetor populacional inicial deve ser escolhido aleatoriamente e deve abranger todo o espaço paramétrico.

Nesse trabalho, será considerada o modelo uniforme como o modelo probabilístico para as variáveis aleatórias contínuas  $\eta$  e  $\rho$ . Esse modelo tem distribuição uniforme no intervalo  $[e, m]$  e sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$\begin{cases} f(x; e, m) = \frac{1}{m-e}, & \text{se } e \leq x \leq m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1)$$

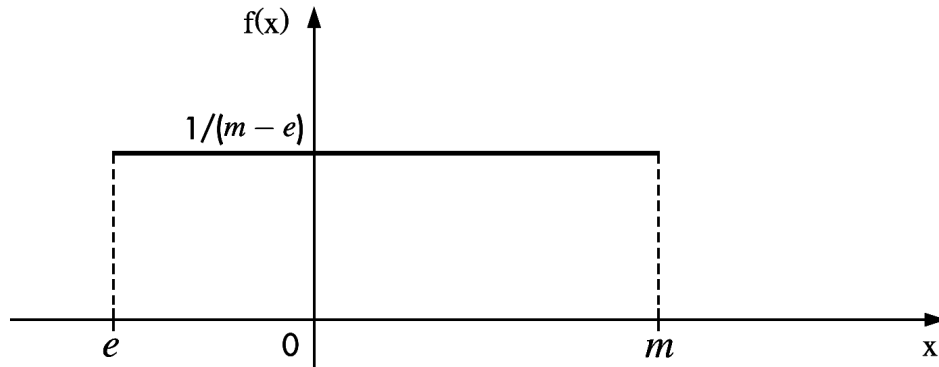
e sua forma gráfica pode ser vista na Figura 2.

O princípio de funcionamento da ED é definido em três etapas: mutação, *crossover* e seleção, conforme descrito por Storn e Price (1997). Na etapa de mutação, para cada vetor alvo  $w_{i,G}$ , um vetor mutante é gerado por:

$$v_{i,G+1} = w_{r_1,G} + F \times (w_{r_2,G} - w_{r_3,G}), \quad (4.2)$$

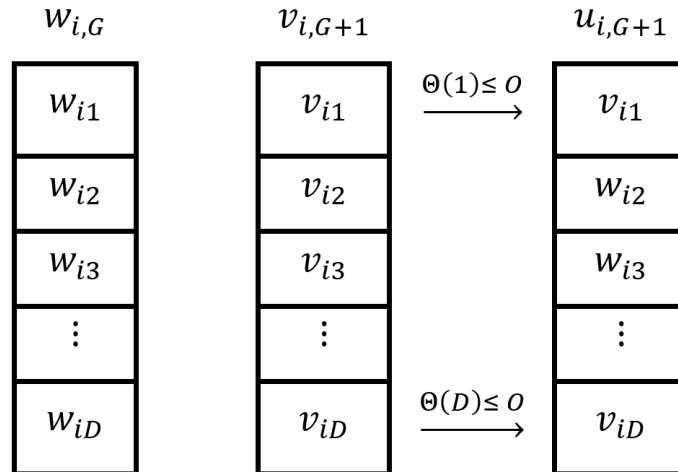
sendo  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{K}_{N_i}$  índices diferentes entre si escolhidos aleatoriamente e  $F \in [0, 2]$  o fator de mutação (escalar). Após isso, na etapa de *crossover*, a partir dos vetores mutantes  $v_{i,G+1}$  são obtidos os vetores de teste  $u_{ji,G+1}$ :

$$u_{ji,G+1} = \begin{cases} v_{ji,G+1}, & \text{se } \Theta(j) \leq O \text{ ou } j = rn(i), \\ w_{ji,G}, & \text{se } \Theta(j) > O \text{ e } j \neq rn(i), \end{cases} \quad (4.3)$$

Figura 2 – Distribuição uniforme no intervalo  $[e, m]$ .

Fonte: Adaptado de Morettin e Bussab (2017).

sendo  $\Theta(j)$  o valor do  $j$ -ésimo termo de uma distribuição aleatória uniforme com saídas  $\in [0, 1]$ ,  $O \in [0, 1]$  é a constante de *crossover* determinada pelo usuário,  $rn(i) \in \mathbb{K}_D$  é um índice escolhido aleatoriamente com  $D$  sendo o número de parâmetros e  $j \in \mathbb{K}_D$ . Dessa forma, para cada vetor  $v_{i,G+1}$ , é feito o processo para cada parâmetro  $v_{ji,G+1}$ . Na Figura 3 tem-se o processo de *crossover* ilustrado.

Figura 3 – Ilustração do processo de *crossover*.

Fonte: Próprio autor.

O valor dos parâmetros  $N_i$ , o fator de mutação  $F$  e a constante de *crossover*  $O$  devem ser escolhidos previamente de maneira que a convergência seja alcançada corretamente. De acordo com Storn e Price (1997), valores entre  $5 \times D$  e  $10 \times D$  se mostraram suficientes para  $N_i$ , com  $N_i \geq 4$  para assegurar que o algoritmo tenha vetores mutuamente diferentes para realizar os processos. Para o fator de mutação  $F$ , um valor adequado para início é de  $F = 0,5$ . Já para a constante de *crossover*, deve-se analisar a velocidade de convergência com o passar das gerações. Caso se deseja obter um resultado de forma mais rápida para análise, sugere-se valores entre  $0,9 < O < 1$ . Se o resultado obtido não for o desejado, o valor para a constante de *crossover*

deve ser reduzido.

Por fim, na etapa de seleção, decide-se se o vetor de teste  $u_{i,G+1}$  deve ou não fazer parte da geração  $G + 1$ . Para isso, compara-se o valor do custo definido obtido pelos parâmetros do vetor  $w_{i,G}$  com o obtido pelo vetor  $u_{i,G+1}$ . Se o vetor  $u_{i,G+1}$  leva a um menor valor do custo, então  $w_{i,G+1} = u_{i,G+1}$ , caso contrário,  $w_{i,G+1} = w_{i,G}$ .

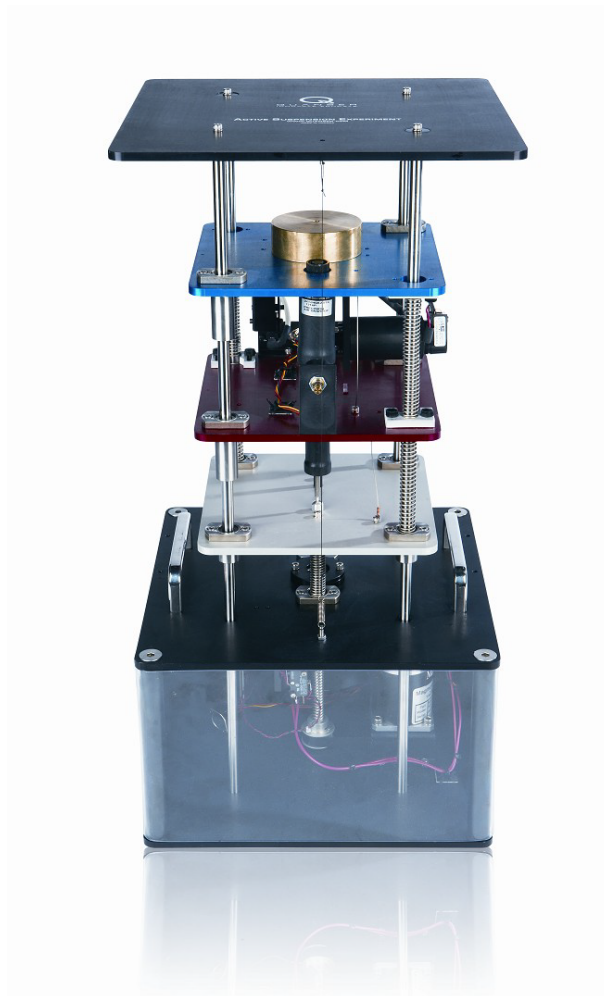
## 5 SUSPENSÃO ATIVA DE BANCADA

De forma a realizar o projeto dos controladores para os teoremas propostos, foi considerado o modelo matemático de uma suspensão ativa de 1/4 de um veículo, que será descrito nesse capítulo. O módulo utilizado, do fabricante Quanser, foi utilizado como implementação prática dos controladores.

### 5.1 Descrição do equipamento

A suspensão ativa de bancada, do fabricante Quanser, simula 1/4 de um veículo controlado por uma suspensão ativa e pode ser vista na Figura 4. Busca-se, a partir da utilização de controladores adequados, o conforto do passageiro e o deslocamento da suspensão dentro de seus limites físicos de operação.

Figura 4 – Suspensão ativa de bancada Quanser.



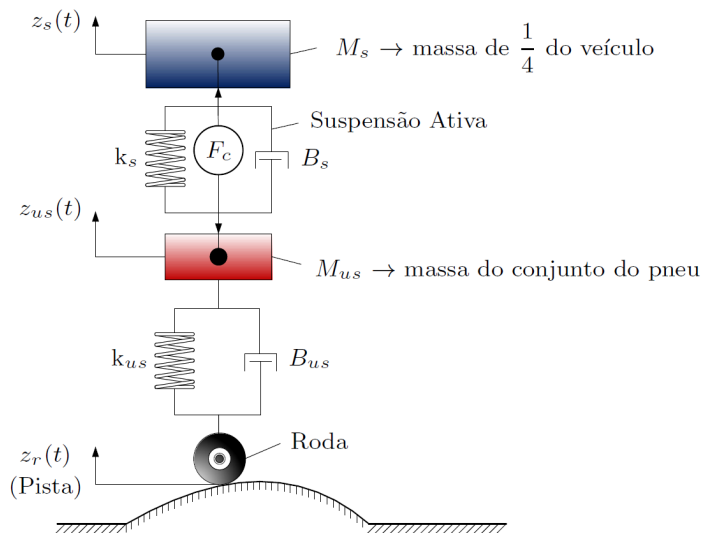
Fonte: Quanser (2009).

O protótipo possui três plataformas, uma acima da outra. O piso superior remete a carroceria do veículo e é suspenso sobre a placa do meio a partir de duas molas. Um motor CC também está posicionado entre as placas superior e intermediária para emular o mecanismo de suspensão ativa. O piso superior é equipado com um acelerômetro para medir a aceleração da carroceria do veículo em relação ao solo da planta. Já a placa inferior é conectada a um motor CC de resposta rápida para que o projetista possa simular diferentes perfis de estradas. Para que todo o sistema opere, é utilizado em conjunto o amplificador linear de corrente AMPAQ, também do fabricante Quanser (QUANSER, 2009).

## 5.2 Modelo matemático

O esquema do modelo da suspensão ativa de bancada pode ser visto na Figura 5. O sistema é composto por duas massas, sendo  $M_s$  a massa do corpo do veículo (sustentada pela mola  $k_s$  e o amortecedor  $B_s$ ) e  $M_{us}$  a massa do conjunto do pneu (sustentada pela mola  $k_{us}$  e o amortecedor  $B_{us}$ ). De forma a minimizar as oscilações provenientes de irregularidades na pista, utiliza-se um sistema de suspensão ativa, composto pelas massas  $M_s$  e  $M_{us}$ , e por um motor (atuador) conectado entre elas, sendo o sistema controlado por uma força  $F_c$ .

Figura 5 – Esquema da Suspensão Ativa.



Fonte: Oliveira et al. (2018).

Dessa forma, a dinâmica do sistema é dada por (SERENI; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2020):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & \frac{-k_{us}}{M_{us}} & \frac{-(B_s+B_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ \frac{-1}{M_{us}} \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{x}_1 \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = F_c. \quad (5.2)$$

Os valores dos parâmetros são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros da suspensão ativa.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa de 1/4 do corpo do veículo (kg)	$M_s$	1,455 a 2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	$M_{us}$	1
Constante de amortecimento (N.s/m)	$B_s$	7,5
Constante de amortecimento (N.s/m)	$B_{us}$	5
Constante de rigidez da mola (N/m)	$k_s$	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	$k_{us}$	2500

Fonte: Quanser (2009).

A massa de 1/4 do corpo do veículo,  $M_s$ , pode ser alterada a partir de duas cargas de 0,4975 kg cada.

## 6 PROJETOS, SIMULAÇÕES E IMPLEMENTAÇÕES DOS CONTROLADORES

Nessa seção serão apresentados os projetos de controladores com realimentação estática de saída para a suspensão ativa de bancada e para exemplos matemáticos, com o auxílio do *software* MATLAB/Simulink® e da *toolbox* YALMIP em conjunto com o *solver* LMILAB. Para a suspensão ativa, busca-se a minimização das oscilações da massa do veículo a partir da minimização do custo garantido.

Serão considerados controladores de único ganho, com índice de desempenho quadrático e controladores chaveados. Ainda, serão consideradas as incertezas dos sistemas descritas por incertezas politópicas. O desempenho obtido a partir dos diferentes métodos de projeto serão avaliados.

### 6.1 Exemplo 1: estabilização de um sistema numérico

Nesse primeiro exemplo, a região de factibilidade dos Teoremas 5 e 8 será comparado com outras metodologias presentes na literatura. O seguinte exemplo é apresentado em Dong e Yang (2013) e considera um sistema contínuo com os vértices do politopo da forma do sistema (3.17) e

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 6 & -1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 10 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & C_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

O sistema linear (6.1) com incertezas politópicas pode ser transformado em um problema com incertezas limitados por norma. Essa alteração na representação é feita de forma que seja possível a comparação com os Teoremas 4.3 e 4.4 de Gritli, Zemouche e Belghith (2021). Então, considere

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A}(t))x + (\mathcal{B} + \Delta\mathcal{B}(t))u, \\ y &= (\mathcal{C} + \Delta\mathcal{C}(t))x, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde as matrizes incertas  $\Delta\mathcal{A}(t)$ ,  $\Delta\mathcal{B}(t)$  e  $\Delta\mathcal{C}(t)$  são definidas por:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{A}(t) &= M_1 F_1(t) N_1, \\ \Delta\mathcal{B}(t) &= M_2 F_2(t) N_2, \\ \Delta\mathcal{C}(t) &= M_3 F_3(t) N_3, \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde  $F_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_{p1}}, F_2(t) \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_{p2}}, F_3(t) \in \mathbb{R}^{m_3 \times n_{p3}}, M_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{m1}}, M_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{m2}}, M_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{m3}}, N_1 \in \mathbb{R}^{n_{p1} \times n_x}, N_2 \in \mathbb{R}^{n_{p2} \times n_x}$  e  $N_3 \in \mathbb{R}^{n_{p3} \times n_x}$ . Ainda, considere que  $I$  é a matriz identidade com as dimensões apropriadas e que as matrizes  $F_1(t), F_2(t)$  e  $F_3(t)$  satisfazem as seguintes condições:

$$F_i^T(t)F_i(t) \leq I, \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ e } 3. \quad (6.4)$$

Portanto, o sistema com incertezas politópicas pode ser descrito utilizando a representação (6.2), considerando as incertezas limitadas em norma, utilizando as seguintes matrizes (BOCCA et al., no prelo):

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}|M_1|N_1] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -1 & 2,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1 & 0 & 2,5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a+10}{2} & 3,5 & -1 & \frac{a-10}{2} & 2,5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \\ [\mathcal{B}|M_2] &= \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ N_2 &= 0, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \end{bmatrix}^T \quad -1 \leq F_1(t), F_2(t), F_3(t) \leq 1. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Considere o sistema descrito em (6.1), pode ser visto na Tabela 2 que o método apresentado no Teorema 8 de Dong e Yang (2013) permitiu garantir a estabilidade para um intervalo menor de  $a$  que para o obtido no Teorema 9.

Tabela 2 – Intervalos de estabilização

Teorema	$a$
Teorema 5	[2,3 19,88]
Teorema 8	[3,5 83,9]
Teorema 8 de Dong e Yang (2013)	[3,6 82,2]
Teorema 2 de Sereni, Assunção e Teixeira (2020)	[0,5 18,2]
Teoremas 4.3 e 4.4 de Gritli, Zemouche e Belghith (2021)	Infactível

Fonte: Próprio autor.

Comparando o Teorema 8 com a nova metodologia proposta no Teorema 2 de Sereni, Assunção e Teixeira (2020), pode ser observado que há casos em que o Teorema 8 é melhor na busca de um valor máximo para  $a$ , porém para a busca de um valor mínimo para  $a$  a metodologia proposta em Sereni, Assunção e Teixeira (2020) demonstra melhores resultados. Já para o Teorema 5, nota-se a possibilidade de utilizar menores valores de  $a$  que para o Teorema 8, porém com um limite superior menor. Considerando o sistema (6.1) descrito por um problema com incertezas limitados em norma por (6.2), (6.3) e (6.5), não foi possível encontrar uma região de factibilidade a partir dos Teoremas 4.3 e 4.4 de Gritli, Zemouche e Belghith (2021) (BOCCA et al., no prelo). Portanto, o controlador chaveado com realimentação de saída pode apresentar uma maior região de factibilidade que de outras metodologias presentes atualmente na literatura.

## 6.2 Exemplo 2: minimização do custo garantido de um sistema numérico

O exemplo a seguir é apresentado em Chang, Park e Zhou (2015) com poucas alterações nas matrizes do sistema. O sistema é descrito conforme (3.17), onde as matrizes são descritas por:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0,9896 & 17,41 & 96,15 \\ 0,2648 & -0,8512 & -11,39 \\ 1 & 10 & -9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -97,78 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 1,702 & 50,72 & 263,5 \\ 0,2201 & -1,4180 & -31,99 \\ 15 & 5 & -9 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -42,545 \\ 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \\
 C_{11} = C_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{21} = C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

com uma restrição de saída, conforme descrito em (3.97), sendo:

$$y_1(t) = C_1^1 x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad \gamma_1 = 10. \quad (6.6)$$

Ainda, também foi considerado as condições iniciais incertas  $x(0)$  como definido em (3.26) com 8 vértices, tal que  $-4 < x_1, x_2, x_3 < 4$ . Nesse exemplo, busca-se comparar os resultados obtidos pelos controladores projetados a partir dos Teoremas 6, 7 e 9, ambos com restrição de saída asseguradas pelo Teorema 10. De forma a minimizar o custo garantido, os valores para os parâmetros  $\eta$  e  $\rho$  foram escolhidos a partir do algoritmo de ED. A população inicial utilizada na ED consistiu em 10 vetores ( $N = 10$ ), com cada vetor possuindo dois parâmetros que foram gerados aleatoriamente no intervalo  $[0, 0,001]$ . Foi considerado como critério de parada um total de  $G_T = 100$  gerações ou a diferença da média do custo garantido e a diferença do mínimo do custo garantido entre cada geração sendo menor que  $10^{-6}\%$ .

Para a solução das LMIs e o desenvolvimento do algoritmo de ED, foi utilizado o *software* MATLAB com a interface “YALMIP” (LOFBERG, 2004) em conjunto com *solver* “LMILab” (GAHINET et al., 1994) considerando  $R = I_{2 \times 2}$ .

As condições para os Teoremas 6 e 10 foram infactíveis nesse caso. Utilizando os Teoremas 7 e 10, para a lei de controle (3.21), o mínimo custo garantido obtido pela ED foi de  $\beta = 213,18$  para  $\rho = 0,2758 \times 10^{-3}$  e  $\eta = 0,3016 \times 10^{-3}$  após 25 gerações. O ganho do controlador obtido foi de

$$K = \begin{bmatrix} -341,4039 & -167,3761 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Além disso, para os Teoremas 9 e 10, para a lei de controle (3.52), o mínimo para o custo garantido obtido pela ED foi de  $\beta = 196,9482$  para  $\rho = 0,277 \times 10^{-3}$  e  $\eta = 0,3018 \times 10^{-3}$  após

28 gerações. As matrizes de ganho obtidas para o controlador chaveado (3.52) são dadas por

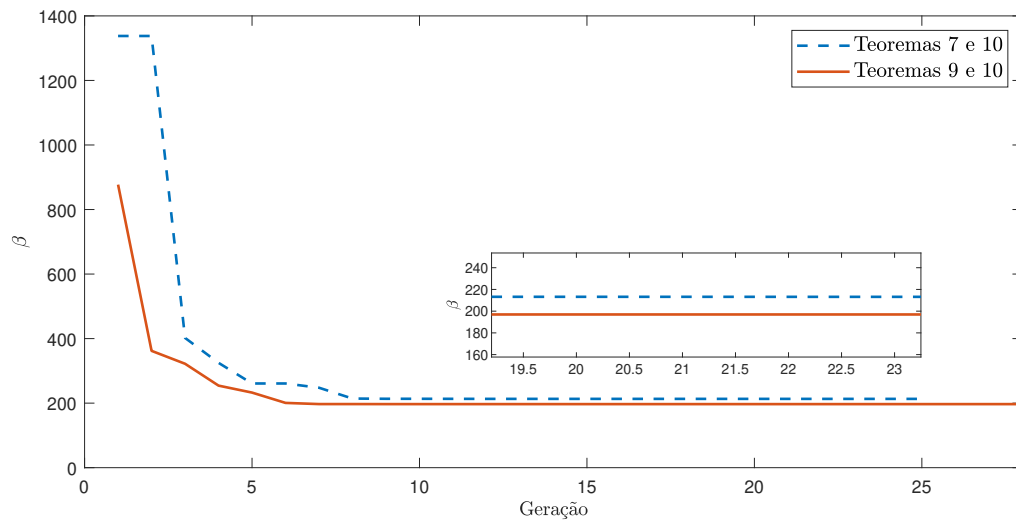
$$K_1 = \begin{bmatrix} -434,40 & 79,69 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -349,86 & 64,75 \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

e as matrizes simétricas  $Z_s$  para  $s \in \mathbb{K}_r$ , são

$$\begin{aligned} Z_1 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} -0,0141 & -0,0388 \\ -0,0388 & 6,1861 \end{bmatrix}, \\ Z_2 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} -0,0146 & -0,0388 \\ -0,0388 & 6,1861 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Na Figura 6 pode ser visto o mínimo custo garantido por geração obtido pela ED para o controlador de ganho único (3.21) e para o controlador chaveado (3.52). Conforme demonstrado, o mínimo do custo garantido é reduzido considerando o projeto do controlador chaveado (3.52) quando comparado com o uso de um único ganho em (3.21).

Figura 6 – Mínimo do custo garantido para os Teoremas 7 e 9, considerando o Teorema 10.



Fonte: Adaptado de Bocca et al. (no prelo).

### 6.3 Estudo do modelo da suspensão ativa de bancada

Além da incerteza da massa do passageiro, foi considerada a falha no atuador, ou seja, uma perda de potência de 50% no motor, representado pela constante  $k_{falha}$  (OLIVEIRA et al., 2018):

$$u = F_c \Rightarrow u_{falha} = k_{falha} F_c. \quad (6.10)$$

Dessa forma, as incertezas do sistema (5.1) podem ser escritas em forma de incertezas politópicas. Para as implementações e simulações, foi considerado duas massas como sendo

a massa de 1/4 do veículo, sendo uma de  $M_s = 1,455$  kg e a outra de  $M_s = 2,45$  kg. Assim, obtêm-se as matrizes dos vértices do politopo:

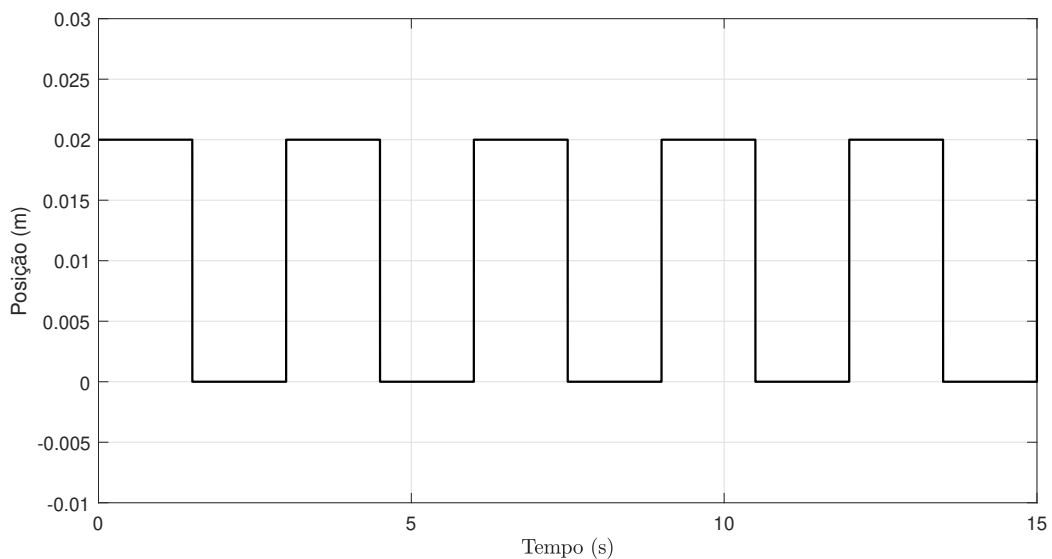
$$\begin{aligned}
 A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -524,8 & -4,373 & 0 & 4,373 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, \\
 A_2 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -282,6 & -2,355 & 0 & 2,355 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, \tag{6.11}
 \end{aligned}$$

$$[B_1|B_2|B_3|B_4] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,583 & 0,314 & 0,292 & 0,157 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -0,5 & -0,5 \end{array} \right],$$

sendo o vértice 1 referente à massa  $M_s = 1,455$  kg e sem falha no atuador, o vértice 2 referente à massa  $M_s = 1,455$  kg e com falha no atuador, o vértice 3 referente à massa  $M_s = 2,45$  kg e sem falha no atuador e o vértice 4 referente à massa  $M_s = 2,45$  kg e com falha no atuador.

Para as simulações e implementação prática, foi considerado um sinal com forma de onda quadrada como referência para a pista ( $z_r(t)$ ). Este sinal possui amplitude de 0,02 m, frequência de 1/3 Hz e largura de pulso de 50%, que pode ser visto na Figura 7.

Figura 7 – Sinal considerado para a pista  $z_r(t)$ .



Fonte: Próprio autor.

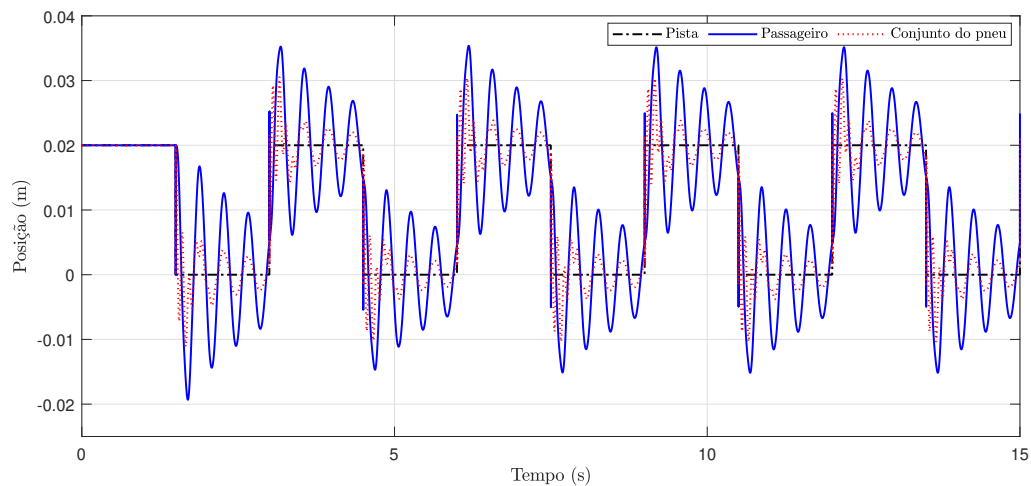
### 6.3.1 Estudo em malha aberta

Inicialmente, convém analisar se a planta é assintoticamente estável em malha aberta. A partir do Teorema 4 e do *solver* LMILAB, chegou-se a matriz  $P \succ 0$ :

$$P = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0,1351 & 0,0007 & -0,3299 & -0,0003 \\ 0,0007 & 0,0000 & -0,0018 & -0,0001 \\ -0,3299 & -0,0018 & 0,8186 & 0,0014 \\ -0,0003 & -0,0001 & 0,0014 & 0,0005 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

e, portanto, o sistema é estável em malha aberta. A partir do *software* Simulink, na Figura 8 tem-se a simulação para o sistema descrito por (5.1) para  $u = 0$ , ou seja, em malha aberta, com  $M_s = 2,45$  kg.

Figura 8 – Comportamento do sistema da suspensão ativa em malha aberta e  $M_s = 2,45$  kg.



Fonte: Próprio autor.

Nota-se que, apesar do sistema ser estável, tanto a deflexão da suspensão quanto a posição do passageiro apresentam grandes oscilações. Isso causaria desconfortos ao passageiro e possíveis danos aos componentes mecânicos da suspensão. Dessa forma, busca-se minimizar as oscilações a partir de controladores com realimentação estática de saída. Como o sistema já é estável em malha aberta, não será considerado o projeto de controladores a partir do Teorema 5.

### 6.3.2 Projeto do controlador ótimo robusto de único ganho

A partir do sistema (3.17) com as matrizes dos vértices do politopo dadas em (6.11), busca-se o projeto de um controlador com realimentação estática de saída de único ganho, conforme (3.21), capaz de reduzir as oscilações do passageiro e a deflexão da suspensão. Foram realizadas simulações e implementações a partir dos Teoremas 6 e 10, considerando o sistema de suspensão ativa, definido em (6.11). De acordo com as matrizes do politopo, as matrizes para as saídas

controlada e mensurável são:

$$C_1(\alpha) = C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2(\alpha) = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Portanto, para realimentação do sistema, foram consideradas apenas as medidas das variáveis de estado  $x_1$  e  $x_2$ , que representam respectivamente a diferença das posições e a diferença das velocidades das massas  $M_s$  e  $M_{us}$ . Dessa forma, não é possível a utilização de controladores com realimentação de estado de forma direta. Ainda, com o intuito de reduzir o tempo de estabelecimento das posições  $z_s(t)$  e  $z_{us}(t)$ , a matriz  $C_2(\alpha)$  seleciona as variáveis de estado  $x_1$  e  $x_3$  para serem otimizadas, sendo  $x_3$  a diferença entre a posição da massa do conjunto do pneu  $M_{us}$  e a pista.

Foi considerado o vetor de condições iniciais  $x(0)$  conforme descrito em (3.26) com 16 vértices, tendo que  $-0,02 \text{ m} < x_1 < 0,02 \text{ m}$ ,  $-0,15 \text{ m/s} < x_2 < 0,15 \text{ m/s}$ ,  $-0,02 \text{ m} < x_3 < 0,02 \text{ m}$  e  $-0,15 \text{ m/s} < x_4 < 0,15 \text{ m/s}$ . Além disso, foi considerada a restrição de saída, conforme (3.97), com:

$$y^1(t) = C_1^1 x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad \gamma^1 = 0,035 \text{ m}, \quad (6.14)$$

limitando, assim, a deflexão da suspensão. Para a solução das LMIs e o desenvolvimento da ED, foi utilizado o *software* MATLAB com a interface “YALMIP” (LOFBERG, 2004) e o *solver* “LMILab” (GAHINET et al., 1994), considerando  $R = I_{n_z \times n_z}$ . Na ED, a população inicial para os parâmetros  $\rho$  e  $\eta$  foi definida a partir de uma distribuição uniforme com  $m = 0,01$  e  $e = 0$  em (4.1).

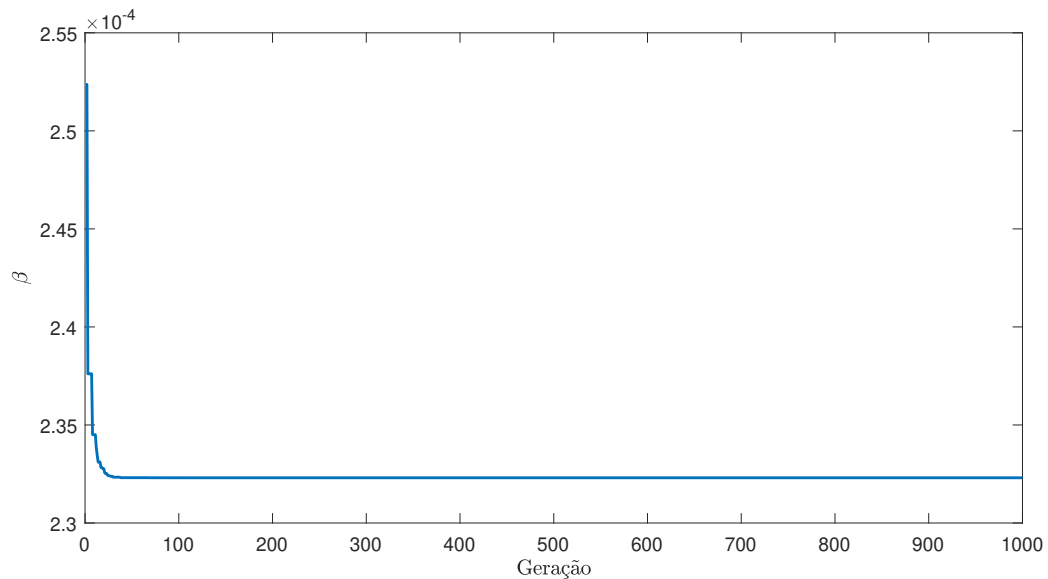
Além disso, o número de gerações máximo foi definido como  $G_T = 1000$ , com  $N_i = 10$  indivíduos. Assim, a cada nova geração  $G$  resolvem-se as LMIs para cada indivíduo e obtêm-se o limitante superior para a equação de custo garantido. Após os ajustes na população, conforme capítulo 4, resolvem-se novamente as LMIs e obtêm-se os parâmetros mais adequados. Na Figura 9 pode ser visto o custo garantido mínimo para a população obtido para cada geração.

Dessa forma, a partir dos Teoremas 6 e 10 e da ED, obteve-se o mínimo do limitante superior do custo  $\beta = 2,3241 \times 10^{-4}$  para os parâmetros  $\rho = 9 \times 10^{-4}$ ,  $\eta = 3,6 \times 10^{-3}$ , com o controlador robusto dado por:

$$K = \begin{bmatrix} 2500,8 & 87,57 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

sendo a matriz de ganhos  $K$  dada conforme a lei de controle (3.21).

Figura 9 – Limitante superior  $\beta$  mínimo para a população por geração durante a evolução para os Teoremas 6 e 10.



Fonte: Adaptado de Bocca et al. (2020).

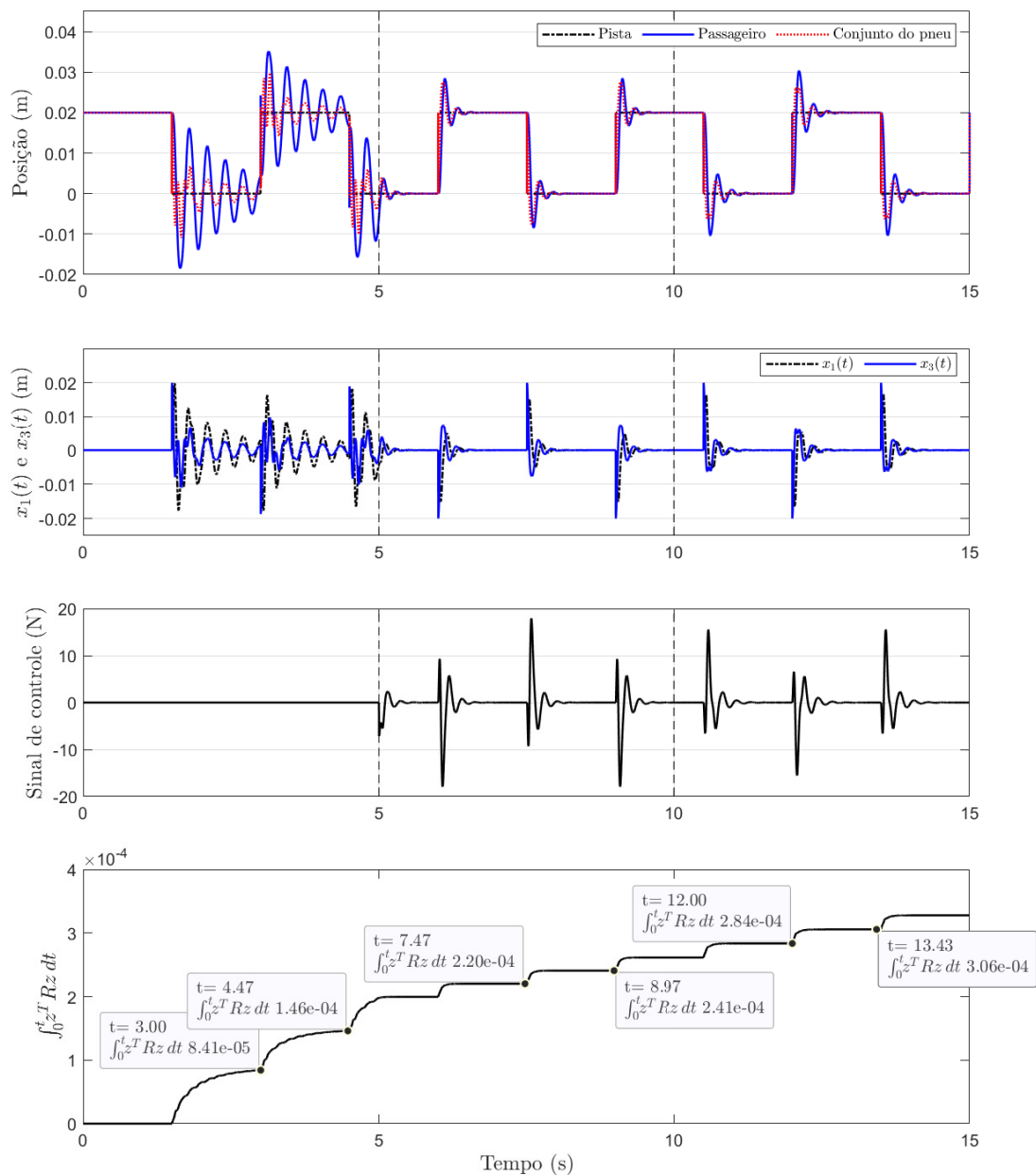
### 6.3.2.1 Simulação do comportamento do sistema em malha fechada

Com o auxílio do *software* Simulink, o comportamento da planta definida por (6.11) e (6.13) foi simulado para dois valores distintos de massa sendo uma com a massa  $M_s = 1,455$  kg e a segunda com  $M_s = 2,45$  kg. Além disso, o tempo de amostragem foi de 1 ms. Para todas as simulações foi considerado um intervalo de tempo de 15 s, sendo ( $0 < t < 5$ ) s o sistema em malha aberta, ( $5 < t < 10$ ) s o sistema em malha fechada, conforme a lei de controle (3.21), e ( $10 < t < 15$ ) s o sistema em malha fechada, porém, com falha de 50% no atuador conforme definido em (6.10) ( $k_{falha} = 0,5$ ).

Nas Figuras 10 e 11 podem ser vistos os resultados das simulações para  $M_s = 1,455$  kg e a segunda com  $M_s = 2,45$  kg, respectivamente, indicando a posição da pista ( $z_r(t)$ ), a posição do passageiro ( $z_s(t)$ ) e do conjunto do pneu ( $z_{us}(t)$ ), juntamente com os estados  $x_1$  e  $x_3$ , o sinal de controle e o resultado de  $\int_0^t z^T R z dt$ , conforme (3.25), pelo tempo.

Nota-se que as oscilações foram reduzidas drasticamente com a utilização do controlador com realimentação estática de saída para ambos os valores da massa incerta  $M_s$  e mesmo com a presença de falha nos atuadores. Isso é evidenciado pela redução do aumento na integral  $\int_0^t z^T R z dt$  a cada oscilação comparando-se com os valores obtidos do sistema em malha aberta com os valores em malha fechada.

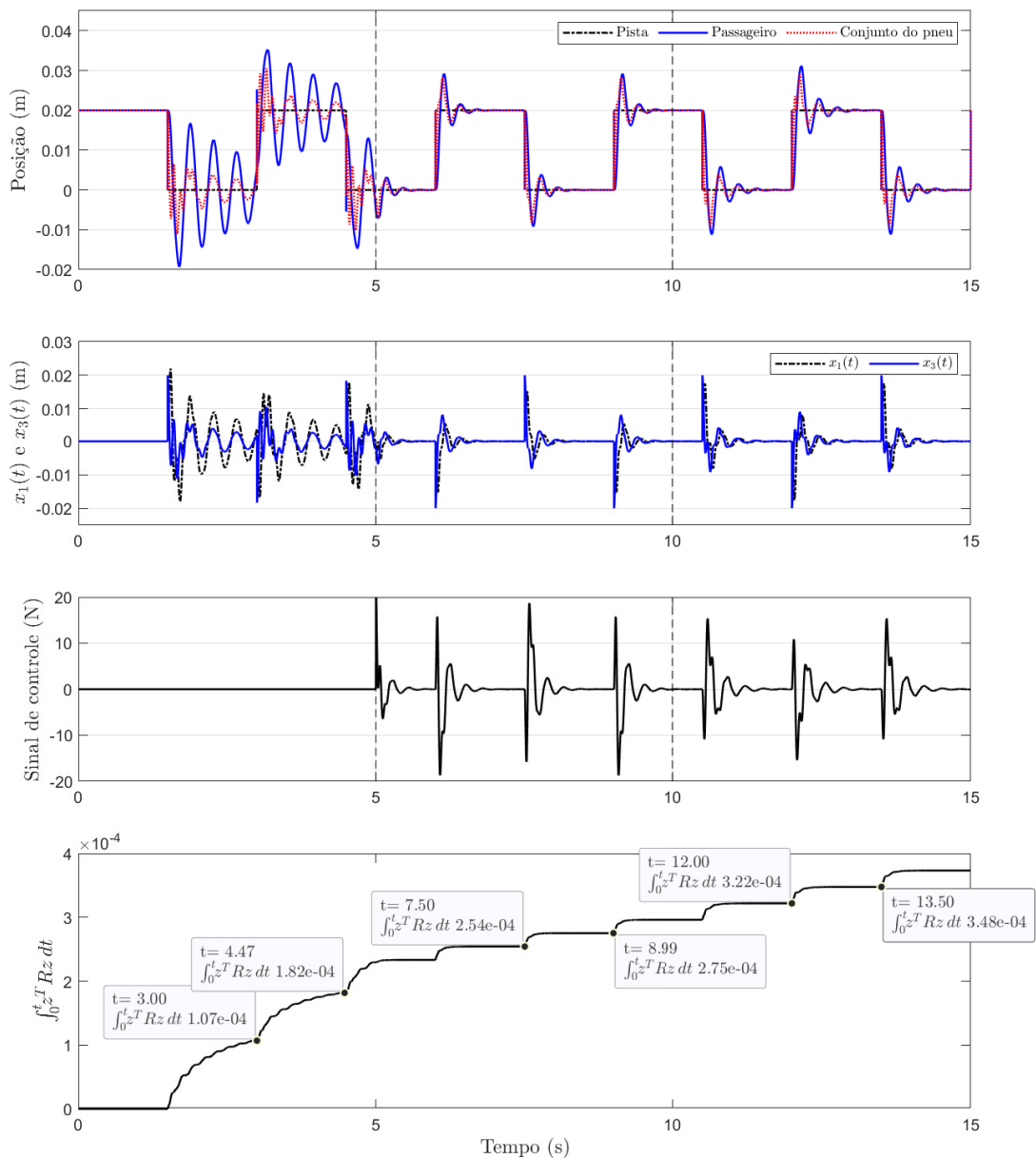
Figura 10 – Simulação do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.15) e  $M_s = 1,455$  kg.



Fonte: Próprio autor.

No período de  $5 < t < 10$  (em malha fechada sem falha), a cada oscilação o valor do custo garantido obtido foi de  $0,21 \times 10^{-4}$  e, no período de  $10 < t < 15$  (em malha fechada com falha), o custo garantido obtido foi de  $0,22 \times 10^{-4}$  para a massa de  $M_s = 1,455$  kg. Já com  $M_s = 2,45$  kg, a cada oscilação, para o controlador em malha fechada sem a falha, o valor para o custo garantido obtido foi de  $0,21 \times 10^{-4}$  e em malha fechada, porém com falha nos atuadores, o valor obtido para o custo garantido foi de  $0,26 \times 10^{-4}$ .

Figura 11 – Simulação do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.15) e  $M_s = 2,45$  kg.



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, demonstra-se que mesmo na presença das incertezas da massa  $M_s$  e na presença de falha nos atuadores, o controlador foi capaz de manter o custo garantido dentro do limitante superior máximo obtido a partir do projeto do controlador, que é de  $\beta = 2,3241 \times 10^{-4}$ .

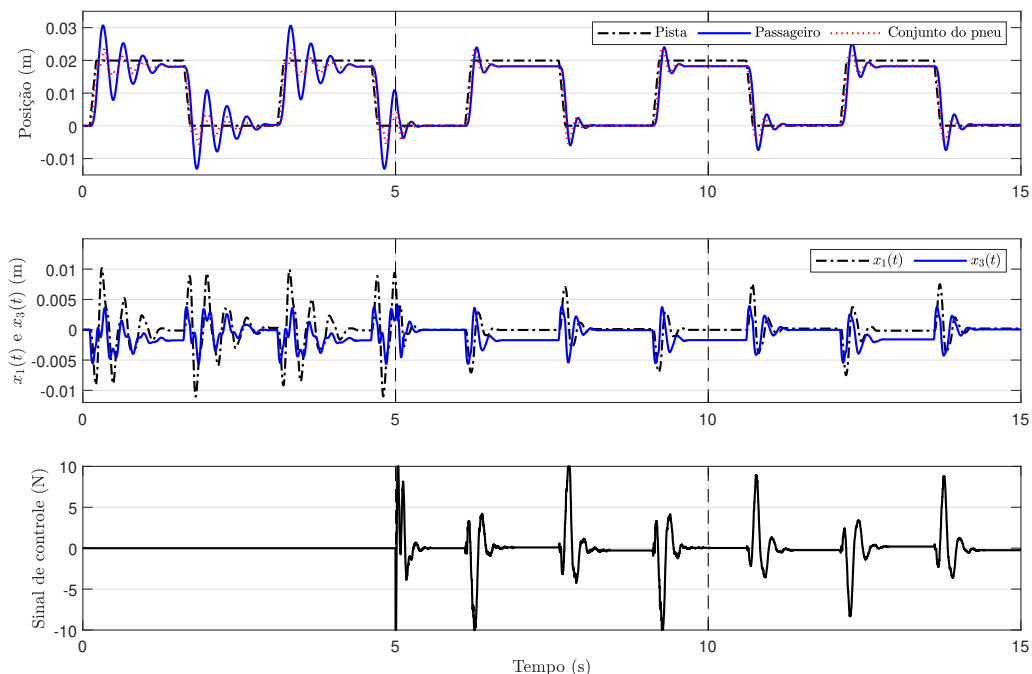
### 6.3.2.2 Implementação prática do controlador

Para a implementação prática, foi utilizado um sinal com forma de onda quadrada como referência para a pista ( $z_r(t)$ ). Este sinal possui amplitude de 0,02 m, frequência de 1/3 Hz e largura de pulso de 50%, conforme ilustrado na Figura 7. Além disso, o tempo de amostragem

foi de 1 ms. Para todas as implementações foi considerado um intervalo de tempo de 15 s, sendo que com  $(0 < t < 5)$  s o sistema se encontra em malha aberta,  $(5 < t < 10)$  s o sistema está em malha fechada conforme a lei de controle (3.21) e  $(10 < t < 15)$  s o sistema está em malha fechada, porém, com falha de 50% no atuador.

Foram feitas duas implementações, sendo uma com a massa  $M_s = 1,455$  kg e a segunda com  $M_s = 2,45$  kg. O resultado das implementações pode ser visto, respectivamente, nas Figuras 12 e 13, é possível analisar a posição da pista ( $z_r(t)$ ), a posição do passageiro ( $z_s(t)$ ) e do conjunto do pneu ( $z_{us}(t)$ ), juntamente com as variáveis de estados  $x_1$  e  $x_3$  e o sinal de controle.

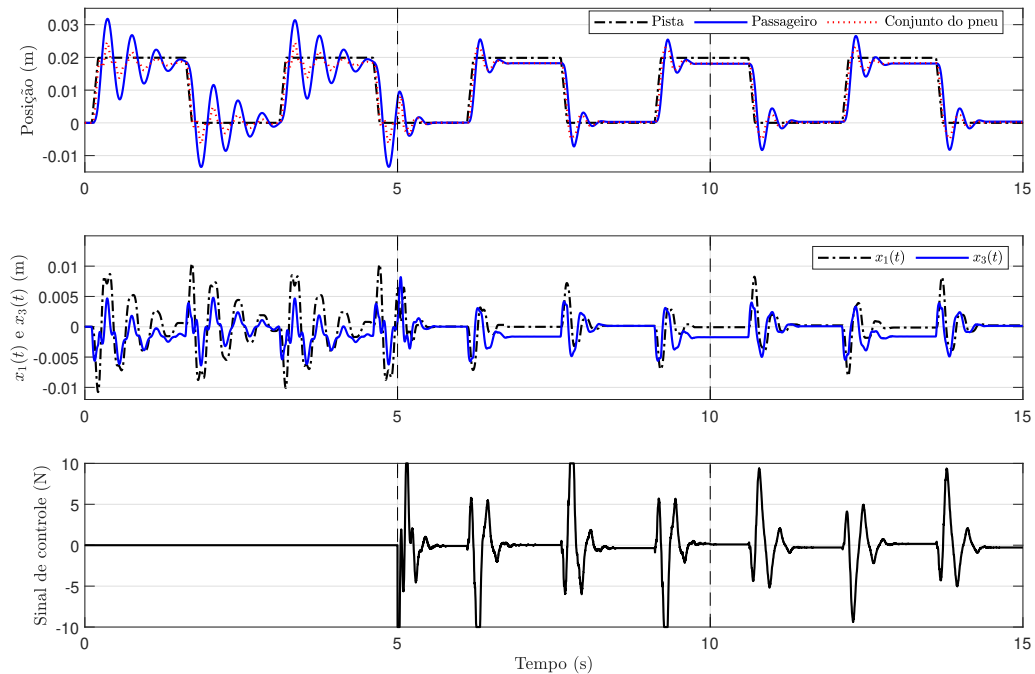
Figura 12 – Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.15) e  $M_s = 1,455$  kg.



Fonte: Adaptado de Bocca et al. (2020).

Pode ser observado que o comportamento com as diferentes massas para o corpo do veículo é semelhante e que, apesar do sistema não controlado ser estável, o nível de oscilação da posição do passageiro pode causar desconfortos e é minimizado ao se utilizar o controlador robusto projetado fundamentado no Teorema 6. Além disso, mesmo com a falha de 50% no atuador e com a incerteza da massa do veículo, as oscilações foram reduzidas satisfatoriamente. Nota-se que o sinal de controle não ultrapassa 10 N, mesmo com a presença de falha no atuador. Ainda, os resultados obtidos pelas simulações, mostradas nas Figuras 10 e 11, são próximos aos obtidos no protótipo real, apesar do menor valor obtido no sinal de controle na sua implementação.

Figura 13 – Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.15) e  $M_s = 2,45$  kg.



Fonte: Adaptado de Bocca et al. (2020).

### 6.3.3 Projeto do controlador ótimo robusto chaveado

A partir do sistema (3.17) com as matrizes dos vértices do polítopo dadas em (6.11) e (6.13), busca-se o projeto de um controlador chaveado com realimentação estática de saída, conforme lei de controle (3.52) de forma semelhante ao que foi desenvolvido para o controlador de único ganho.

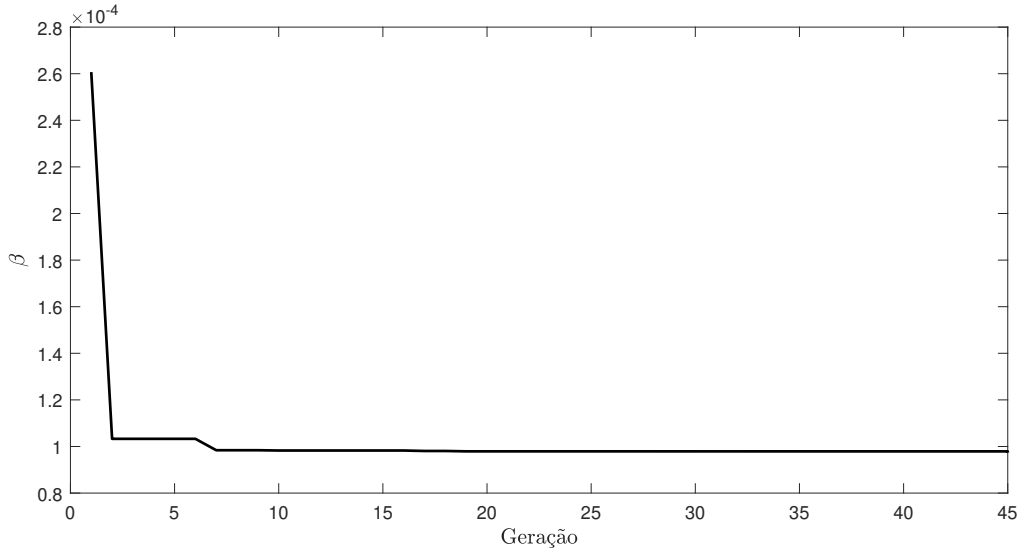
Tendo-se as mesmas premissas definidas no capítulo 6.3.2 para as matrizes do sistema, para o conjunto convexo de condições iniciais, com restrição de saída definida em (6.14) e  $R = I_{n_z \times n_z}$ , busca-se a redução das oscilações da deflexão da suspensão.

Na ED, o critério de parada do algoritmo foi definido para se a melhoria do custo garantido entre cada geração for menor que 0,000001%, tanto para o menor valor do custo garantido entre os indivíduos da população na geração atual quanto para a média do custo garantido de toda a população. Ainda, se os critérios de parada descritos anteriormente não forem atingidos, o algoritmo foi programado para descontinuar as iterações em 100 gerações.

Portanto, aplicando o algoritmo de ED para os parâmetros  $\eta$  e  $\rho$  definido nos Teoremas 9 e 10, na Figura 14 mostra-se o valor do mínimo do custo garantido entre os indivíduos da população de cada geração. A função densidade de probabilidade utilizada para a população inicial é a mesma do projeto do controlador de ganho único descrito na subseção 6.3.2, sendo

$m = 0,01$  e  $e = 0$  em (4.1).

Figura 14 – Limitante superior  $\beta$  mínimo para a população por geração durante a evolução para os Teoremas 9 e 10.



Fonte: Adaptado de Bocca et al. (no prelo).

O mínimo custo garantido de  $\beta = 9,7901 \times 10^{-5}$  foi obtido para os parâmetros  $\rho = 2,62 \times 10^{-5}$  e  $\eta = 2,07 \times 10^{-2}$  após 45 gerações. Para essa solução, os ganhos do controlador robusto chaveados foram de

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 2645,0 & 77,20 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} 2645,2 & 77,13 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 2658,4 & 77,51 \end{bmatrix}, & K_4 &= \begin{bmatrix} 2644,4 & 77,14 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

e as matrizes simétricas  $Z_s$  para  $s \in \mathbb{K}_{n_r}$  foram de

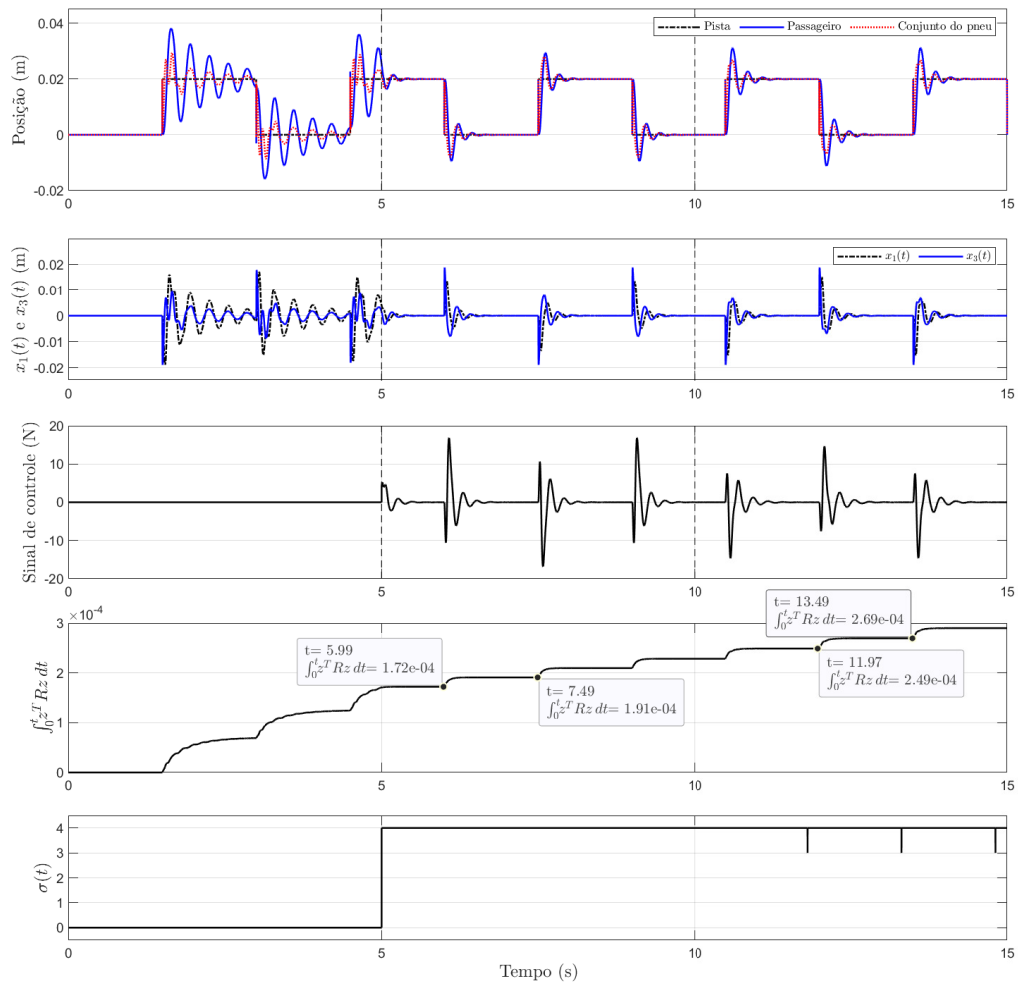
$$\begin{aligned} Z_1 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -11,0865 & -0,2002 \\ -0,2002 & -5,8112 \end{bmatrix}, & Z_2 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -11,0865 & -0,2004 \\ -0,2004 & -5,8007 \end{bmatrix}, \\ Z_3 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -11,0903 & -0,1750 \\ -0,1750 & -2,9170 \end{bmatrix}, & Z_4 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -11,0865 & -0,2004 \\ -0,2004 & -5,8230 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

### 6.3.3.1 Simulação do comportamento do sistema em malha fechada

De forma semelhante ao que foi exposto no capítulo 6.3.2.1, com auxílio do *software* Simulink, foi realizada a simulação do sistema definido por (6.11) e (6.13) para dois valores distintos de massa, sendo uma com a massa de  $M_s = 1,455$  kg e a outra com  $M_s = 2,45$  kg. Foi considerado um intervalo de tempo de 15 s, sendo que com  $(0 < t < 5)$  s o sistema se encontra em malha aberta,  $(5 < t < 10)$  s o sistema está em malha fechada conforme a lei de controle (3.52) e  $(10 < t < 15)$  s o sistema está em malha fechada, porém, com falha de 50% no atuador conforme definido em (6.10) ( $k_{falha} = 0,5$ ).

Assim, nas Figuras 15 e 16 podem ser vistos os comportamentos do sistema de suspensão ativa de bancada para cada valor da massa incerteza  $M_s$  indicando a posição da pista, a posição do passageiro e do conjunto do pneu, juntamente com os estados  $x_1$  e  $x_3$ , o sinal de controle em conjunto com o índice de seleção  $\sigma(t)$  e o resultado de  $\int_0^t z^T R z dt$ , conforme (3.25), pelo tempo.

Figura 15 – Simulação do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.16) e  $M_s = 1,455$  kg.

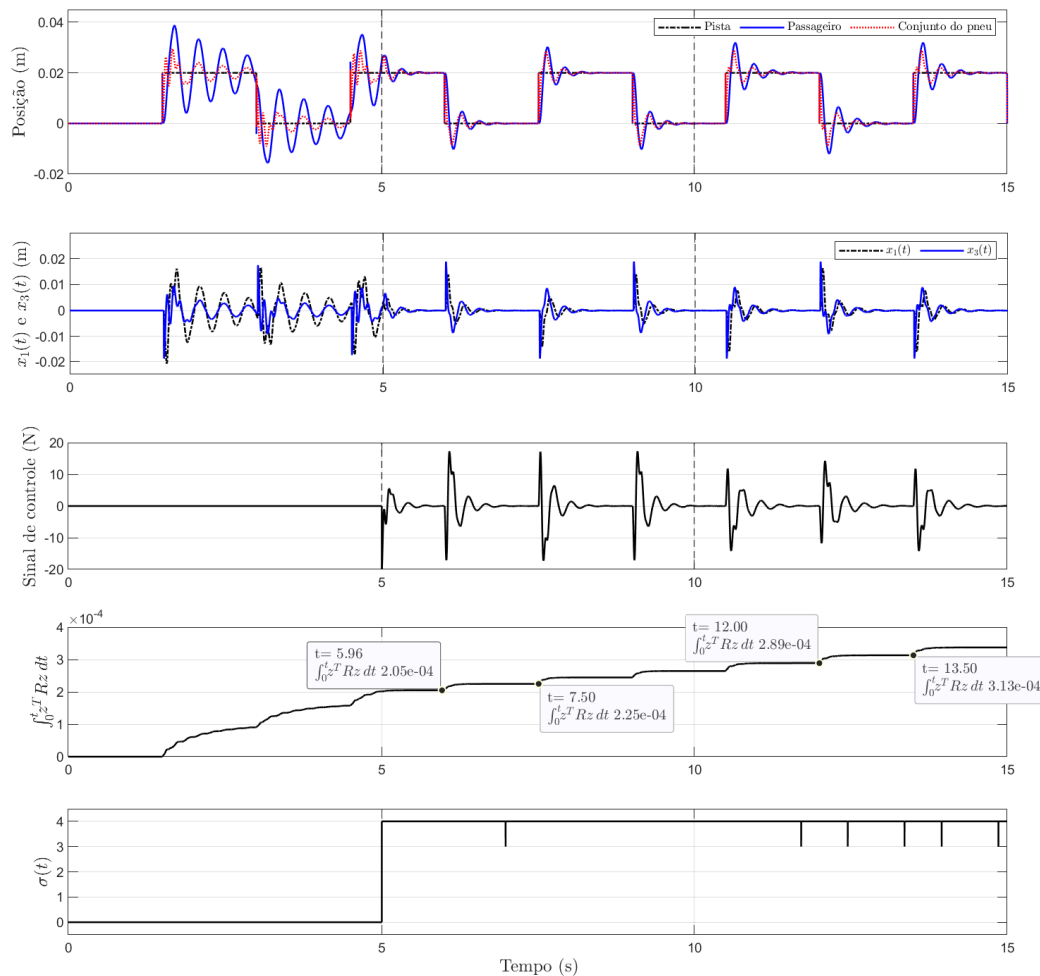


Fonte: Próprio autor.

Embora nem todos os índices de chaveamento tenham sido selecionados a partir do critério de seleção definido em (3.52), as oscilações do sistema foram reduzidas em relação ao sistema em malha aberta, apesar da massa incerta e falha nos atuadores.

No período  $5 < t < 10$  (em malha fechada sem falha), a cada oscilação o valor do custo garantido obtido foi de  $0,19 \times 10^{-4}$  e, no período  $10 < t < 15$  (em malha fechada com falha), o custo garantido obtido foi de  $0,20 \times 10^{-4}$  para a massa de  $M_s = 1,455$  kg.

Figura 16 – Simulação do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.16) e  $M_s = 2,45$  kg.



Fonte: Próprio autor.

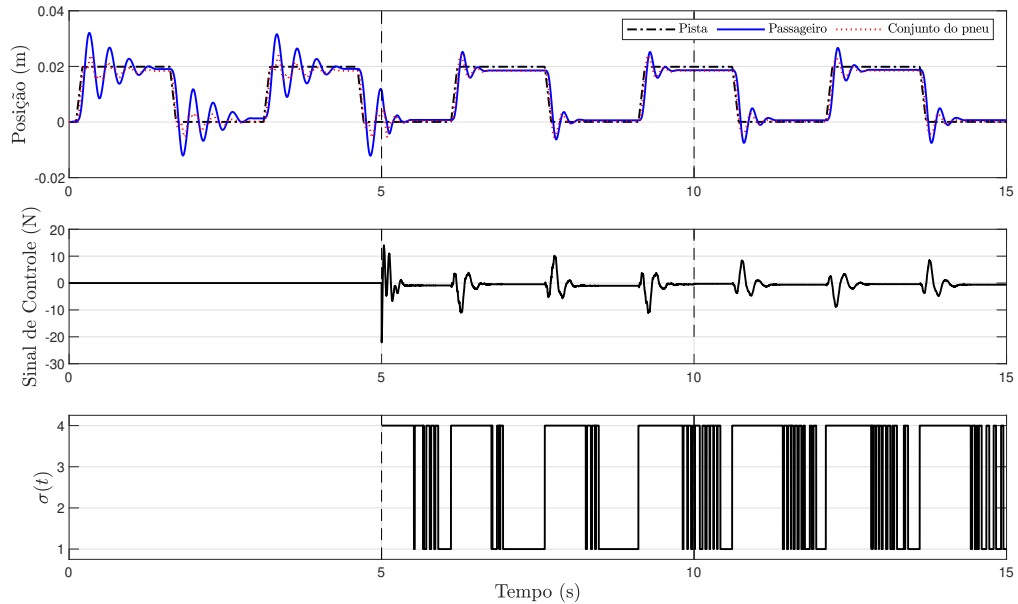
Já com  $M_s = 2,45$  kg, a cada oscilação, para o controlador em malha fechada e sem a falha, o valor para o custo garantido obtido foi de  $0,20 \times 10^{-4}$  e em malha fechada, porém com falha nos atuadores, o valor obtido para o custo garantido foi de  $0,24 \times 10^{-4}$ . Com isso, o valor do custo obtido em cada oscilação do sistema e volta ao estado de equilíbrio foi menor do que o obtido via projeto do controlador, sendo de  $\beta = 9,7901 \times 10^{-5}$ .

### 6.3.3.2 Implementação prática do controlador

O controlador (6.16) foi implementado no protótipo de suspensão ativa de bancada. O sinal para a pista considerado é dado na Figura 7, e para todas as implementações foi considerado um intervalo de tempo de 15 s, sendo no período ( $0 < t < 5$ ) s o sistema estando em malha aberta, ( $5 < t < 10$ ) s o sistema estando em malha fechada, conforme a lei de controle (3.52), e ( $10 < t < 15$ ) s o sistema se encontra em malha fechada, porém, com falha de 50% no atuador.

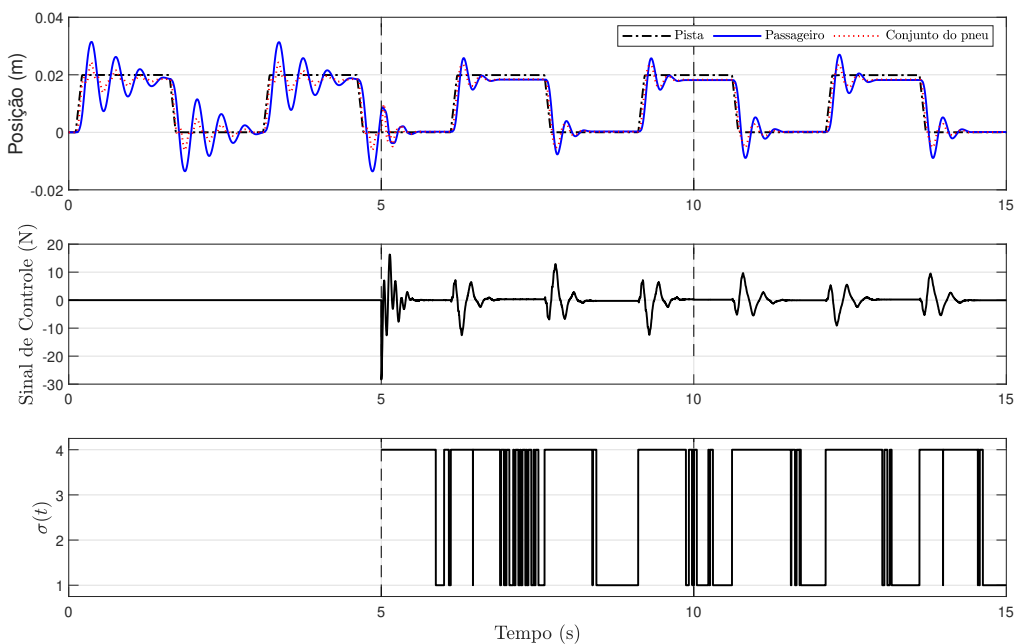
Na Figura 17 e 18 pode ser visto o comportamento do sistema da suspensão ativa de bancada para as massas  $M_s = 1,455$  kg e  $M_s = 2,45$  kg, respectivamente, juntamente com o sinal de controle e índice de chaveamento.

Figura 17 – Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.16) e  $M_s = 1,455$  kg.



Fonte: Adaptado de Bocca et al. (no prelo).

Figura 18 – Comportamento do sistema e o sinal de controle considerando o controlador (6.16) e  $M_s = 2,45$  kg.



Fonte: Adaptado de Bocca et al. (no prelo).

Portanto, mesmo com as diferentes massas para o corpo do veículo na implementação, pode-se notar das Figuras 17 e 18 que as oscilações foram reduzidas e que o sistema em malha fechada é semelhante para ambas as situações. Ainda, apesar do sistema em malha aberta ser estável, as oscilações poderiam causar desconfortos para o passageiro e danos físicos na suspensão, que foram reduzidas a partir da introdução do controlador chaveado (3.52) projetado a partir dos Teoremas 9 e 10. Além disso, a falha no atuador não afetou substancialmente o comportamento do sistema e as oscilações foram reduzidas satisfatoriamente com o sinal de controle sendo menor que 20 N.

#### 6.3.4 Comparação entre os controladores de ganho único e chaveados

A partir dos resultados elencados nos capítulos precedentes, é possível realizar a comparação do desempenho obtido pelas simulações a partir das leis de controle (3.1) e (3.52). Na Tabela 3 pode ser visto o valor do custo garantido para cada oscilação em malha fechada do sistema simulado considerando  $M_s = 1,455$  kg e  $M_s = 2,45$  kg, com e sem falha nos atuadores. Os valores do custo garantido apresentados na Tabela 3 são obtidos através da integral  $\int_m^n z^T R z dt$ , sendo a variável  $n$  o instante de tempo de início da oscilação e  $m$  o instante de tempo após a estabilização da oscilação.

Tabela 3 – Comparação do custo garantido entre os controladores projetados.

	Lei de controle (3.1)	Lei de controle (3.52)
$M_s = 1,455$ kg sem falha	$0,21 \times 10^{-4}$	$0,19 \times 10^{-4}$
$M_s = 2,45$ kg sem falha	$0,21 \times 10^{-4}$	$0,20 \times 10^{-4}$
$M_s = 1,455$ kg com falha	$0,22 \times 10^{-4}$	$0,20 \times 10^{-4}$
$M_s = 2,45$ kg com falha	$0,26 \times 10^{-4}$	$0,24 \times 10^{-4}$

Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, nota-se que a partir do emprego do controlador chaveado, conforme lei de controle (3.52), o custo garantido obtido para cada oscilação é menor, demonstrando desempenho superior ao controlador de único ganho.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, foi introduzida a teoria e definições necessárias para o projeto de controladores com condições de projeto baseados em LMIs. Essa teoria tem como base o estudo de Lyapunov, considerando a estabilidade do sistema a partir da solução de funções quadráticas. Para isso, também foi estudado o modelo de espaço de estados, definições matriciais e representação de sistemas incertos a partir de incertezas politópicas.

Procedimentos de projeto para controladores com realimentação estática de saída para sistemas lineares incertos foram estabelecidos em forma de LMIs. Foi verificado, reforçado pelos resultados obtidos para diferentes sistemas, que estes controladores provêm condições menos conservadoras que outros trabalhos citados e presentes na literatura. Além disso, o índice de performance relacionado com a energia do sinal de saída foi considerado nas condições de projeto. Conforme demonstrado no capítulo 6.1, o Teorema 8 estabelece condições iguais ou mais flexíveis para a estabilização do sistema proposto que em Dong e Yang (2013). Ainda, a partir do mesmo exemplo numérico, pode-se notar a obtenção de uma maior região de factibilidade do que em comparação com outros procedimentos como em Sereni, Assunção e Teixeira (2020) e Gritli, Zemouche e Belghith (2021). Conforme provado em Bocca et al. (no prelo), o Teorema 7 é uma generalização do Teorema 6 e o Teorema 10 estabelece condições de projeto menos conservadoras para controladores chaveados utilizando realimentação de saída, que garantem resultados mais flexíveis que em comparação com os demais teoremas propostos.

Provou-se, ainda, em Bocca et al. (no prelo) que, se para um sistema é possível o projeto de controladores de único ganho, então o projeto de controladores chaveados também pode ser realizado para o mesmo sistema em questão. Na Seção 6.1 demonstrou-se, a partir do Teorema 9, a possibilidade de obter valores menores para o custo garantido do que para os controladores projetados a partir dos critérios descritos no Teorema 6, de único ganho. Isso ocorre devido ao fato dos controladores chaveados resultarem em melhores ou iguais índices de performance do que no uso de controladores de único ganho.

O algoritmo de ED mostrou-se ser eficaz na busca dos parâmetros ótimos globais para as constantes dos teoremas, reduzindo consideravelmente o custo garantido obtido a cada geração. Essa busca não pode ser realizada em termos de LMIs, pois iria envolver multiplicações de variáveis. Dessa forma, o algoritmo de ED é um método eficaz de solucionar problemas com essas características.

Portanto, a partir dos exemplos numéricos assim como do exemplo prático, mostrou-se que os métodos de projeto de controladores com realimentação estática de saída são eficientes.

## 7.1 Perspectivas futuras

Como perspectivas futuras desse trabalho, destacam-se:

- Estudo de outros sistemas dinâmicos nos quais podem ser modelados a partir de incertezas politópicas e realizar o projeto de controladores a partir dos teoremas propostos, de modo a avaliar o desempenho obtido em comparação com outros métodos de projeto dispostos na literatura;
- Análise da influência do período de amostragem para a escolha do índice de chaveamento dos controladores chaveados;
- Inclusão de outros índices de desempenho nos teoremas propostos.

## REFERÊNCIAS

- ASSUNÇÃO E.; TEIXEIRA, M. C. M. **Apostila de Controle Linear II**. Ilha Solteira - DEE - FEIS - UNESP, 2016.
- BEHROUZ, H.; MOHAMMADZAMAN, I.; MOHAMMADI, A. Robust static output feedback  $H_2/H_\infty$  control synthesis with pole placement constraints: An LMI approach. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 19, n. 1, p. 241–254, 2021.
- BOCCA, L. F.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; BIZARRO, D. B.; PERES, J. C.; TEIXEIRA, M. C. M. Projeto de controladores ótimos robustos com realimentação estática de saída. *Anais da Sociedade Brasileira de Automática*, v. 2, n. 1, p. 1–6, 2020.
- BOCCA, L. F.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; BIZARRO, D. B.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Robust guaranteed cost switched controller design using static output feedback. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer, no prelo.
- BOS, A. van den. *Appendix C: Positive Semidefinite and Positive Definite Matrices*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2007. 259-263 p. ISBN 9780470173862.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: Siam, 1994. v. 15.
- BUZETTI, A. S. *Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores*. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Câmpus de Ilha Solteira, 2017.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R.; SEIXAS, F. J. M. D.; FARIA, F. A.; JÚNIOR, E. I. M. Implementation of a dc-dc converter with variable structure control of switched systems. In: IEEE. *2011 IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*. [S.l.], 2011. p. 872–877.
- CARNIATO, L. A.; CARNIATO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; JUNIOR, E. I. M.; ASSUNÇÃO, E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, p. 1–20, 2018.
- CAUN, R. da P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. da P. LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. *Cogent Engineering*, Cogent OA, v. 5, n. 1, p. 1457206, 2018.
- CHANG, X. H.; PARK, J. H.; ZHOU, J. Robust static output feedback  $h_\infty$  control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 85, p. 23–32, 2015.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A. Switched affine systems control design with application to dc–dc converters. *IET control theory & applications*, IET, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.

- DONG, J.; YANG, G.-H. Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 52, n. 10, p. 1930–1936, 2007.
- DONG, J.; YANG, G.-H. Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties. *Automatica*, Elsevier, v. 49, n. 6, p. 1821–1829, 2013.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Moderno*. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2001.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The lmi control toolbox. In: IEEE. *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*. [S.l.], 1994. v. 3, p. 2038–2041.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The lmi control toolbox. In: IEEE. *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1994. v. 3, p. 2038–2041.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- GRITLI, H.; ZEMOUCHE, A.; BELGHITH, S. On LMI conditions to design robust static output feedback controller for continuous-time linear systems subject to norm-bounded uncertainties. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 52, n. 1, p. 12–46, 2021.
- KALMAN, R. E.; BERTRAM, J. E. Control System Analysis and Design Via the “Second Method” of Lyapunov: I—Continuous-Time Systems. *Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. 2, p. 371–393, 06 1960. ISSN 0021-9223.
- KARABOĞA, D.; ÖKDEM, S. A simple and global optimization algorithm for engineering problems: differential evolution algorithm. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, The Scientific and Technological Research Council of Turkey, v. 12, n. 1, p. 53–60, 2004.
- LIU, J.; LAMPINEN, J. A fuzzy adaptive differential evolution algorithm. In: *IEEE Region Conference on Computers, Communications, Control and Power Engineering*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 1, p. 606–611.
- LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004, Taipei. Proceedings... Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289.
- LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992.
- MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. *Estatística básica*. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 2017.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle moderno*. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011.

- OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local  $H_\infty$  switched controller design for uncertain TS fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 344, p. 1–26, 2018.
- OTSUKA, N.; SOGA, T. Quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous-time switched linear systems composed of two subsystems. *International Journal of Control and Automation*, Citeseer, v. 3, n. 1, p. 35–42, 2010.
- QUANSER. *Active Suspension - User's Manual*. Ontario, Canada, 2009. Disponível em: <<https://www.quanser.com/products/active-suspension/>>. Acesso em: 4 de setembro de 2021.
- RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; LAZARINI, A. Z. N. On robust switched controller design to minimize the guaranteed cost of polynomial fuzzy systems. In: IEEE. *2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.], 2019. p. 1–6.
- SADABADI, M. S.; PEAUCELLE, D. From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey. *Annual reviews in control*, Elsevier, v. 42, p. 11–26, 2016.
- SANCHES, M. A. A. *Sistema eletrônico para geração e avaliação de movimentos em paraplégicos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Câmpus de Ilha Solteira, 2013.
- SERENI, B.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. New gain-scheduled static output feedback controller design strategy for stability and transient performance of LPV systems. *IET Control Theory & Applications*, IET, v. 14, n. 5, p. 717–725, 2020.
- SILVA, E. R. P. D.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust controller implementation via state-derivative feedback in an active suspension system subjected to fault. In: IEEE. *2013 conference on control and fault-tolerant systems (SysTol)*. [S.l.], 2013. p. 752–757.
- SILVA, H. R. M.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Switched control design with guaranteed cost for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. In: *21st IFAC World Congress Virtual (IFAC-V 2020)*. [S.l.]: Elsevier, 2020. p. 8123–8128.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199.
- SONGLIN, C.; YU, Y.; KAI, Z.; JIE, M. Stabilizing a class of uncertain switched linear systems via observer-based output feedback. In: IEEE. *2008 27th Chinese Control Conference*. [S.l.], 2008. p. 118–122.
- SOUZA, W. A. D. *Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Câmpus de Ilha Solteira, 2013.
- SOUZA, W. A. D.; TEIXEIRA, M.; SANTIM, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2013, 2013.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of global optimization*, Springer, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997.

WOLMUTH, L. D.; ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R. Derivative feedback control for a class of uncertain linear systems subject to actuator saturation. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer, v. 30, n. 4, p. 490–500, 2019.

ZHAI, G. Quadratic stabilizability of discrete-time switched systems via state and output feedback. In: IEEE. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 01CH37228)*. [S.l.], 2001. v. 3, p. 2165–2166.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of robust control*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998. v. 104.