UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática

Amarildo Melchiades da Silva

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática

Amarildo Melchiades da Silva

Orientador: Prof. Dr. Romulo Campos Lins

Tese de Doutorado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2003

Comissão Examinadora

____

Prof. Dr. Romulo Campos Lins
Orientador

____

Profª. Dra. Mônica Rabello de Castro

____

Profª. Dra. Jante Bolite Frant

____

Prof. Dr. Antonio Carlos Carrera de Souza

____

Prof. Dr. Antonio Vicente M. Garnica

____

Amarildo Melchiades da Silva
Doutorando

Rio Claro, 13 de outubro de 2003

Resultado: ____________________

Dedico este trabalho a minha família

Antonio Melchiades da Silva (em memória)

Dagmar Coelho da Silva

Lucimar Coelho da Silva

Jucerley Gilson da Silva

Franklin Gilson da Silva

Agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, em particular,

Ao amigo Prof. Romulo Campos Lins pela amizade, disponibilidade e liberdade com que conduziu a tarefa de orientação;

À Profª Patricia Rosana Linardi que com carinho e atenção participou e contribuiu em todo o processo de elaboração deste trabalho. Extensivo, a familia Linardi, Sr. Matheus Rene Linardi, Srª Aparecida Maria Doricio Linardi e Rafa, que, com amizade, me acolheram na cidade azul;

Aos amigos do grupo de pesquisa Sigma-t: Profª Ms. Viviane Cristina Almada de Oliveira, Profª Ms. Patricia Rosana Linardi, Profª Ms. Regina Ehlers Bathelt, Prof. Ms. João Carlos Gilli Martins, Prof. Ms. Rodolfo Chaves e Prof. Ms. Carlos Alberto Francisco, pelas contribuições nas discussões sobre o trabalho nas sessões de orientação;

À Profª Drª Terezita Noriega (Universidade de Havana – Cuba) pelas contribuições nas discussões de meu trabalho no período em que esteve no grupo de pesquisa;

Aos colegas professores do Departamento de Matemática da UFJF, pelo voto de confiança, que possibilitou meu afastamento;

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP – Campus de Rio Claro, pela acolhida, em particular, ao Prof. Dr. Anízio Perissionotto Junior, a Profª Drª Alice Kimie Miwa Libardi e ao Prof. Dr.Vanderlei Marcos do Nascimento, que de maneiras distintas, contribuíram com o trabalho;

Aos discentes do curso de Matemática da UNESP - Campus de Rio Claro: Luis Rodrigo de Oliveira, Patricia Leme Pedroso, Marina Ribeiro Barros Dias, Eliana Vieira Norte, Katia Forno dos Anjos, Amanda Liz Pacífico Manfrin, Carlos Eduardo Wellichan, Everton Pereira Barbosa, Mariane Schäfer, pela participação como sujeitos de pesquisa nos testes-piloto, na fase de treinamento;

Aos membros da banca de qualificação, Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares, Profª Drª Janete Bolite Frantz, Prof. Dr. Antonio Carlos Carrera de Souza e Prof. Dr. Geraldo Perez, pelas críticas construtivas.

Aos membros da banca examinadora da defesa de tese, Profª Drª Janete Bolite Frant, Profª Drª Mônica Rabello de Castro, Prof. Dr. Antonio Carlos Carrera e Prof. Dr. Antonio Vicente M. Garnica, por aceitarem o convite e colocarem suas experiências a serviço de uma avaliação construtiva do meu trabalho.

Aos amigos Prof. Edimilson Sacramento dos Santos e Profª Simone Reganhan dos Santos pelo apoio e auxílio no início das transcrições;

À Profª Graziela Lucci de Angelo pela revisão do trabalho;

Aos colegas da Pós-Graduação em Educação Matemática, em particular, Heloísa da Silva, Raquel Milani, José Eduardo Ferreira da Silva, Adlai Ralph Detoni, Ronaldo Marcos Martins, Sônia Maria Clareto, Ana Karina Cancian, Elaine Cristina Catapani, Jussara de Loyola Brandão e Andréia de Oliveira;

Aos amigos Alexandre Toledo Bellini, Antonio Carlos de Oliveira e Sebastião José de Oliveira, por todo apoio que dispensaram;

E aos sujeitos de pesquisa, que tornaram possível este trabalho.

“... eu entendo que o mundo não é visto simplesmente em cor e forma, mas também como um mundo com sentido e significado.”

Lev Seminovich Vygotsky

SUMÁRIO

ÍNDICE

Resumo

Neste trabalho investiga-se a dinâmica do processo de produção de significados para a Matemática a partir da perspectiva proposta pelo Modelo Teórico dos Campos Semânticos. Esta pesquisa caracteriza-se pelo desenvolvimento de uma abordagem qualitativa de investigação, cujo trabalho de campo foi desenvolvido em uma sala de aula da disciplina Álgebra Linear ministrada para alunos do curso de mestrado e de doutorado de um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. A investigação se deu a partir da proposição, pelo professor, de um problema que deveria ser investigado pela turma. Durante, aproximadamente, dois meses, os alunos divididos em grupos investigaram e propuseram à turma encaminhamentos sobre a resolução do problema proposto. A análise da dinâmica do processo foi desenvolvida, considerando essa produção de significados dos alunos na procura da solução do problema, através do método de Leitura Positiva, formulado a partir do referencial teórico adotado. A investigação permitiu a identificação e caracterização de importantes aspectos da dinâmica do referido processo.

Palavras – Chave: Educação Matemática; Produção de Significados; Processo; Dinâmica; Álgebra Linear.

Abstract

In this thesis we study the dynamics of the processes of meaning production for mathematics, from the perspective of the Theoretical Model of Semantic Fields. The thesis is characterised by the development of a qualitative approach to the investigation, having the field work been done in a Linear Algebra course, for postgraduate students (master and PhD candidates in Mathematics Education). The study followed from a problem proposed by the professor, a proposition to be investigated by the students. For about two months the students worked in small groups and presented to the whole group their suggestions and findings towards solving the problem. The analysis of the dynamics of the processes was made with reference to the meanings produced by the students, using a non-deficit reading based on the theoretical support adopted. It was possible to identify and characterise some important aspects of that dynamics.

Keywords: Mathematics Education; meaning production; process; dynamics; Linear Algebra.

510.07 Silva, Amarildo Melchiades da
S586s Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática / Amarildo Melchiades da Silva. – Rio Claro : [s.n.], 2003
256 f. : il.

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Romulo Campos Lins

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Processo. 3. Álgebra linear. 4. Matemática – Ensino e aprendizagem. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Introdução

Este trabalho tem como objetivo investigar a dinâmica do processo de produção de significados para a Matemática. A revisão da literatura sobre o assunto, em Educação Matemática, indicou que as pesquisas sobre a produção de significados são ainda incipientes. Porém, as potencialidades do tema, para a comunidade de educadores matemáticos, evidenciaram a necessidade do desenvolvimento de uma investigação sistemática sobre o assunto. Nesta direção, desenvolvo este trabalho, que teve início com o projeto de dissertação intitulado “Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear”. Naquele momento, o foco esteve no objeto “base de um espaço vetorial de dimensão finita”; agora, o olhar se desloca do objeto para o processo de produção de significados.

O termo “significado”, ponto de partida nesta investigação, possui múltiplos significados na literatura em geral. Ele é estudado, por exemplo, em campos como a Lingüística, a Filosofia da Linguagem e a Psicologia; dependendo do contexto, o foco pode estar no significado da palavra, no significado da frase, ou no significado do proferimento. Ogden e Richards (1976), por exemplo, no livro intitulado “O significado de significado: um estudo da influência da linguagem sobre o pensamento e sobre a ciência do simbolismo”, apresentam uma lista de dezesseis definições possíveis de “significado”, compiladas dos trabalhos de vários estudiosos do assunto[1]. Dentre as possibilidades para a utilização do termo “significado”, neste trabalho, tomarei o termo num sentido preciso: o significado de um objeto é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre o objeto numa dada atividade. Assim, com base nessa noção, tomo o Modelo Teórico dos Campos Semânticos proposto por Lins (1999, 2001), como referencial teórico nesse estudo.

A investigação se deu numa sala de aula de um programa de Pós-Graduação em Educação Matemática onde estava sendo ministrada a disciplina Álgebra Linear para uma turma de dezoito alunos. O desencadeamento do processo de investigação aconteceu através da proposição de um problema a ser investigado pelos alunos. Durante,

[1] Cf. Ogden; Richards, 1976, p. 194.

aproximadamente, dois meses, os alunos produziram significados através do encaminhamento de uma resolução para o problema.

Assim, a pesquisa foi desenvolvida observando o processo de produção de significados desses alunos, entendido como o processo determinado pelas ações enunciativas desses sujeitos frente a uma demanda de produção de significados – o problema proposto.

A tese, em sua versão final, tem a seguinte estrutura: no primeiro capítulo situo o problema de pesquisa no contexto onde foi formulado, cuja origem remete a questões surgidas no processo de elaboração do Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS). Nesse momento, ao assumir uma delimitação precisa para o termo "significado", esta pesquisa adquire uma singularidade que permeará todo o estudo.

O segundo capítulo foi dedicado, num primeiro momento, a uma revisão da literatura, em Educação Matemática, com o objetivo de identificar as possíveis pesquisas correlatas na área e, mais uma vez, situar essa pesquisa no contexto do tema. A importância deste estudo é indicar a existência de poucos trabalhos, referenciados teoricamente, sendo desenvolvidos sobre o tema. Nas duas seções seguintes, apresento algumas das idéias dos psicólogos russos L. S. Vygotsky e A. N. Leontiev. Com respeito a Vygotsky, o interesse esteve em olhar para sua leitura de processo e para seus métodos de análise desses processos, como fonte de inspiração para o tipo de estudo que iria empreender nessa investigação. No caso de Leontiev, apresento e discuto o conceito de atividade proposto pelo psicólogo, por se tratar de uma noção central para o MTCS e por se constituir, na unidade de análise do método proposto no capítulo 4.

No terceiro capítulo, apresento os detalhes da pesquisa de campo. Nesse momento, aproveito para caracterizar o trabalho como uma pesquisa qualitativa do tipo etnográfico. Apresento, a seguir, em linhas gerais, as duas saídas que fiz a campo: a primeira, correspondendo à fase de treinamento e a segunda, relativa à pesquisa propriamente dita. Por último, apresento uma delimitação do material coletado, cujo produto final correspondeu a, aproximadamente, 30 horas de gravação em vídeo e anotações em um diário de campo.

No quarto capítulo, apresento o método de análise do processo de produção de significados denominado método de Leitura Positiva, que foi elaborado a partir do MTCS e que permitiu a investigação da dinâmica do processo.

Nos dois capítulos seguintes - no quinto e sexto capítulos – desenvolvo uma leitura do processo de produção de significados dos alunos do momento em que o processo é deflagrado – a proposição do problema à turma – até o seu final, quando o professor apresenta a solução do problema. Na primeira leitura, investigo a dinâmica do processo, observando a produção de significados de maneira mais global, olhando para os sujeitos, em interação face a face, ocorrida ao longo dos quase dois meses em que o problema ficou em discussão. Na segunda, faço uma leitura local, focando o processo de produção de significados de três, dos dezoito sujeitos de pesquisa, analisados um a um. Entendo que esses dois tipos de análise foram necessários, por serem complementares e por terem especificidades que apenas uma das leituras não explicitaria. As conclusões a que cheguei, e que são apresentadas no último capítulo, são o resultado do cruzamento dessas leituras.

O objetivo deste trabalho foi identificar e caracterizar aspectos da dinâmica do processo de produção de significados. E, como conseqüência, avançar na compreensão desse processo através da busca de um maior entendimento da maneira de operar dos alunos, procurando, no futuro, caminhos que apontem para os seguintes interesses: a busca de possibilidades concretas de interação e intervenção na produção de significados dos alunos em sala de aula.

Capítulo 1

A Proposição do Problema de Pesquisa

O problema de pesquisa que apresento neste capítulo foi formulado com o objetivo de avançar as investigações sobre a produção de significados para a Matemática, desenvolvidas a partir do Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS). Para contextualizar o problema, retomo a trajetória de emergência dessa teoria.

O MTCS foi desenvolvido por Romulo Campos Lins e sua gênese se encontra em seu projeto de pesquisa que resultou na tese de doutorado intitulada "A framework for understanding what algebraic thinking is" (Um quadro de referência para entender-se o que é pensamento algébrico), desenvolvido no Shell Centre for Mathematical Education em Nottingham (Inglaterra), no período de janeiro de 1988 a junho de 1992. Nessa época, as idéias do modelo começaram a ser desenvolvidas como suporte teórico a uma caracterização para álgebra e pensamento algébrico.

Nesse trabalho, Lins (1992) desenvolveu um estudo histórico e um estudo experimental. Desses estudos, surgiu a necessidade de o autor responder às seguintes perguntas durante o processo de investigação: o que é conhecimento? o que é significado? Para responder à primeira pergunta, ele partiu de uma caracterização para Epistemologia nos seguintes termos: "é a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento?; (ii) como é que o conhecimento é produzido?; e, (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?" (LINS, 1993b, p.77). Ele então propôs a seguinte formulação para conhecimento:

> Conhecimento é entendido como uma **crença** - algo que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma **afirmação** – junto com o que o sujeito considera ser uma **justificação** para sua **crença-afirmação**. (LINS, 1993b, p.86, grifos do autor).

Assim, os três aspectos-chave para conhecimento são: a crença, a afirmação e a justificação. O sujeito acredita naquilo que está afirmando, o que implica que ele acredita estar autorizado a ter aquela crença. Mas não é suficiente que a pessoa acredite e afirme; é preciso também que ela justifique suas crenças-afirmações para que a produção do conhecimento ocorra. Porém, o papel da justificação não é explicar a crença-afirmação, mas tornar sua enunciação legítima, o que faz com que as justificações tenham um papel central no estabelecimento do conhecimento do sujeito. Como observa Lins

(1995), as justificações desempenham um duplo papel na constituição do conhecimento pois, ao mesmo tempo que elas são parte do processo de legitimá-lo, elas também são parte do processo de constituir objetos.

Da formulação de conhecimento proposta acima, decorre que diferentes justificações para uma mesma crença-afirmação constituem conhecimentos diferentes[2]. Por exemplo, consideremos a proposição “2 + 2 = 4”. Uma criança acredita e afirma que dois mais dois são quatro, o mesmo em que um matemático acredita e também afirma. Mas, quando consideramos suas justificações, vemos que a criança exibe os dedos indicando que dois dedos da mão direita com dois da mão esquerda são quatro dedos – essa é sua justificação. Ao matemático, membro de uma comunidade científica que lhe impõe certos padrões de rigor, a justificação é outra; ele fala em conjuntos, em axiomas de Peano. Assim, as justificações da criança e do matemático são diferentes. Do ponto de vista da formulação que apresentamos, eles não compartilham o mesmo conhecimento, pois, se a justificação muda, o conhecimento também mudará. Portanto, produzir conhecimento é produzir justificações no processo de enunciação de crenças-afirmações.

Nesse processo de elaboração da teoria, Lins iria formular ainda as noções de significado, produção de significado e campo semântico que passariam, posteriormente, por reformulações. Assim, optei por apresentá-las oportunamente, em suas versões atuais, ao longo do trabalho.

A fim de apresentar uma visão geral de sua tese, de acordo com os nossos propósitos, farei uma apresentação sucinta das idéias centrais de sua pesquisa. Seu objetivo, com o estudo histórico-crítico, foi expresso nos seguintes termos:

> Procuro mostrar, no estudo histórico, de que modo a compreensão do conhecimento matemático de uma cultura – e, portanto, de indivíduos, já que estes são sempre indivíduos de alguma cultura – só se dá na medida em que investigamos os pressupostos mais amplos destas culturas. (LINS, 1993a, p.5)

Sobre a importância do estudo histórico, ele comenta:

> [...] nos textos históricos vamos encontrar informantes muito mais competentes do que o que podemos esperar de nossos alunos: os que escreveram os textos históricos eram “profissionais”, de quem se esperava apresentações

---

[2] Cf. LINS, 1994b, p.29.

> referenciadas nas culturas matemáticas a que pertenciam, de modo que podemos avaliar com razoável precisão em que consistia esta demanda de precisão, bem como de que forma se conduzia a justificação das afirmações feitas, e é aí que vamos nos encontrar com os mundos (epistemológicos) daqueles a quem queremos compreender. (LINS, 1993a, p.5)

Em Lins (1992, 1993a) podemos observar que o estudo histórico apontou para vários aspectos cruciais da produção de significados para a álgebra, porém estes resultados não são de nosso interesse neste momento.

Nesse trabalho, o estudo experimental foi desenvolvido com estudantes brasileiros e ingleses, alunos do que hoje chamamos ensino fundamental. Sobre as direções que seu trabalho apontou para Álgebra e Pensamento Algébrico, ele diz:

> Uma fundamental conseqüência do trabalho de pesquisa foi indicar a necessidade de uma profunda reconceitualização do ensino da álgebra, e no centro desta reconceitualização está a discussão do papel da utilização de modelos não-algébricos – balança, áreas, reta numérica, por exemplo. Até aqui estes modelos têm sido usados como forma facilitadora do aprendizado, mas do aprendizado de quê? Uma vez que não se trata apenas de memorizar frases, somos levados a concluir – de maneira um tanto óbvia – que o que se aprende são uma álgebra da balança, uma álgebra das áreas, uma álgebra dos segmentos. Ora, é a tarefa maior da tese mostrar exatamente que a cada uma destas álgebras correspondem diferentes modos de produzir significado, diferentes modos de constituir objetos: como resultado, a tentativa de facilitar a vida do aluno (ou será a do professor e do autor de livros didáticos?) termina por exigir dos alunos que vejam como semanticamente ligados procedimentos que foram constituídos como semanticamente isolados. (LINS, 1993a, p.12)

Algumas das conclusões a que Lins chegou em sua tese podem ser observadas quando ele diz:

> O que meu trabalho de pesquisa sugere é que é preciso que, na sala de aula, os diferentes modos de se produzir significados sejam explicitados, que se tornem objeto de atenção pelos alunos. O crucial, aqui, é que esta recomendação se choca frontalmente com o que tem sido tradicionalmente adotado, que é esconder os saltos entre diferentes campos semânticos e confiar numa passagem “suave” entre, por exemplo, uma álgebra da balança e uma álgebra algébrica. A posição epistemológica que suporta esta posição didática caracteriza-se por duas premissas principais: (i) que a cognição é um processo descontextualizado, mesmo que se admita que ela acontece, “é óbvio”, em “contextos”; e, (ii) que conhecimento é algo do domínio do enunciado, do

> texto, e não da enunciação, isto é, que conhecimento não tem sujeito, embora, curiosamente, esta posição freqüentemente se associe a outra, a de que o indivíduo constrói seu próprio conhecimento. (LINS, 1993a, p.12)

Portanto, este trabalho marca a gênese do Modelo Teórico dos Campos Semânticos cujos pilares, nesta fase, foram representados pelas noções de conhecimento, significado, produção de significados e campo semântico. Porém, o modelo como construção teórica não aparece explicitamente no corpo da tese, mas o germe da idéia se encontra lá – como o próprio autor observou. Na verdade, a coerência global da tese é garantida exatamente pelas premissas do modelo[3].

Ao término do doutorado, Lins passou a se dedicar à elaboração da teoria. Preocupou-se, em particular, com a coerência interna das noções que havia formulado, o que o levou a algumas reformulações como comentamos anteriormente. Neste período, ele produz, ainda, a reconceitualização do processo de comunicação, que apresentaremos no capítulo 4.

Em sua versão atual, a noção de significado de um objeto, neste trabalho será entendida como aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade[4]. O "poder dizer" presente na formulação de significado está intimamente relacionado à questão da legitimidade[5]. Como conseqüência, dizer que um sujeito produziu significados é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade. Além disso, produzir significados não se refere a tudo o que numa dada situação o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto e sim ao que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade. Assim, os objetos são constituídos enquanto tal através do que o sujeito diz que eles são. Como observa Lins (1996, p.5*):* "o ponto central é que produzimos significados para que pertençamos a uma prática social ou, em escala maior, a uma cultura, tanto quanto produzimos enunciações pelo mesmo motivo".

A importância de se investigar a produção de significados é expressa por Lins (1999) quando diz: "Para mim, o aspecto central de toda

---

[3] Cf. LINS, 1993a.
[4] A noção de atividade será discutida no capítulo 2.
[5] Cf. LINS, 1997, p.145.

aprendizagem humana – em verdade, o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados”. (LINS, 1999, p.86)

Uma das importantes considerações que as pesquisas sobre produção de significados evidenciaram é o fato de que,

> [...] quando se encontram com textos do matemático – livros-didáticos, por exemplo – as pessoas de fato produzem significados que não são os do matemático, mas que as tornam capazes de falar a partir daquele texto [...] (LINS, 1994b, p. 37).

A importância dessa afirmação reside na freqüência em que ocorre na prática. De fato, nas salas de aula de matemática presenciamos professores e alunos, produzindo significados “não-matemáticos” quando estão falando de matemática.

Para concluir nossa explanação a respeito da fase de elaboração do MTCS, é importante ressaltar que sua construção se deu com base em algumas concepções que são, a nosso ver, imprescindíveis para a compreensão desta teoria; em resumo, são elas:

i) O interesse em olhar para processos, em oposição a olhar para estados ou produtos;

ii) O interesse por uma leitura positiva do processo de produção de significados para a matemática, isto é, o interesse em entender o que as pessoas dizem e por que dizem, em oposição a olhá-las pelo erro, pela falta;

iii) A busca de uma explicação plausível para o processo de produção de significados para a matemática.

Como resumo desta fase, podemos dizer que, do problema em questão – a busca de uma caracterização para álgebra e pensamento algébrico – decorreram duas conseqüências imediatas. A primeira, motivo de nossa discussão anterior, foi o nascimento de uma teoria. A segunda, foram as contribuições desta pesquisa no campo da educação algébrica em Educação Matemática que, devido aos nossos propósitos atuais, não discutimos aqui.

Após a fase de consolidação da teoria, iniciou-se uma nova fase de pesquisas desenvolvidas tomando o MTCS como referencial teórico. Em geral, os trabalhos estiveram direcionados para a análise dos diferentes significados que poderiam ser produzidos para objetos matemáticos, tais como taxa de variação no Cálculo Diferencial; base e transformação linear, em Álgebra

Linear. Essas pesquisas basearam-se ou na análise de textos históricos, ou na análise de livros-texto, ou em entrevistas com estudantes de matemática.

Nesta fase desenvolvi meu projeto de mestrado (1997) que resultou na dissertação intitulada “Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear”. Nesta pesquisa, o foco estava em investigar os possíveis significados produzidos para o objeto “base” em um espaço vetorial de dimensão finita. Formulamos, naquela ocasião, três questões para investigação, nos seguintes termos:

i) Em que contextos operavam os matemáticos que constituíram a noção de base no processo histórico de emergência das noções elementares da Álgebra Linear?

ii) Que significados podem ser produzidos para a noção de base a partir da leitura de livros-texto tomados como demanda de produção de significados?

iii) Que significados são produzidos para a noção de base por um estudante a partir dos textos matemáticos apresentados a ele como demanda de produção de significados em um primeiro curso de Álgebra Linear?

De um modo geral, os trabalhos desenvolvidos, tendo o MTCS como referencial teórico, trataram de questões análogas às anteriormente citadas[6].

O projeto de pesquisa atual representa a abertura de uma nova frente nas pesquisas que tomam o MTCS como referencial teórico. Neste momento, o olhar se desloca dos significados que podem ser produzidos para os objetos matemáticos para focar o processo. Minha atenção se dirige agora a investigar a dinâmica do processo de produção de significados para a matemática.

Com o estudo da dinâmica pretendo ampliar nosso entendimento do referido processo, isto é, ampliar nosso entendimento relativo à maneira de operar das pessoas quando estas se propõem a produzir significados para a matemática.

---

[6] Este ponto será tratado no capítulo 2 quando apresentarei a revisão de literatura.

Capítulo 2

A Revisão da Literatura

O objetivo deste capítulo é discutir algumas questões relevantes para nossa investigação. O capítulo foi dividido em três seções independentes. Na primeira seção, apresento o resultado do levantamento que desenvolvi a respeito das possíveis pesquisas correlatas ao nosso tema de pesquisa em Educação Matemática.

Na segunda seção, apresento um estudo das idéias do pesquisador russo Lev Semenovich Vygotsky (1896 – 1934) com o foco em seus métodos de investigação e análise de processos, uma questão central em nossa investigação. Na terceira seção, apresento as principais idéias a respeito do conceito de atividade, proposto pelo psicólogo russo Alexei Nikolaievich Leontiev (1903 –1979). Essa noção tem uma importância central em nosso referencial teórico, além de ser a unidade de análise que utilizaremos para a leitura do processo de produção de significados.

§1. As pesquisas correlatas em Educação Matemática

Para conduzir a revisão bibliográfica para levantamento das possíveis pesquisas relacionadas ao nosso problema de pesquisa, tomei como palavras-chave os termos: significado e Educação Matemática. A escolha das palavras-chave tinha como objetivo ter uma visão geral da diversidade de trabalhos que envolviam a noção de significado. Esse estudo foi desenvolvido em duas etapas. A primeira etapa aconteceu no segundo semestre de 1999 e a segunda, foi efetivada no primeiro semestre de 2002 e tinha como objetivo atualizar o estudo anterior. Como estratégia, percorremos os periódicos nacionais[7] e internacionais[8] em Educação Matemática a partir dos mais recentes, ou seja, de 2002 a 1992. Essas publicações nos levaram a várias dissertações e livros, o que permitiu uma ampliação de nossa revisão.

---

[7] Das publicações nacionais revisamos: Bolema, Zetetiké, Boletins do GEPEM, Educação Matemática em revista (SBEM), Anais do ENEM (de 1992 a 2001) e do EPEM (1993,1996) e a relação de resumos de dissertações e teses produzidas/defendidas no Brasil em Educação Matemática, organizada pelo Prof. Dr. Dario Fiorentini (FE/Unicamp) e publicada em vários volumes na revista Zetetiké.

[8] Das publicações internacionais constaram de nossa análise as revistas: Récherches en Didactique des Mathématiques (França), Quadrante (Portugal), Education Studies in Mathematics (Holanda, Inglaterra, USA), Journal for Research in Mathematics Education (USA), Revista de Didáctica de las Matemáticas – UNO (Espanha); Handbook of research on Mathematics teaching and learning (1992) e Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education – PME (1994, 1995, 1998).

Na primeira etapa da revisão, ficou claro que o número de trabalhos que tratavam da produção de significados era reduzido. Além disso, os trabalhos que tratavam sobre o assunto não sugeriam uma pesquisa sistemática sendo desenvolvida. Chamou-nos a atenção, também, a utilização do termo significado e a variedade de termos associados a ele, sem suficiente sustentação teórica. Por exemplo, "atribuir significado", "negociação de significados", "atividades significativas", "produção de significados e sentido", "espaço de significação", "aprendizagem significativa", "construção de significados", "respostas significativas de alunos" foram alguns dos termos que encontramos tanto em periódicos nacionais quanto internacionais.

Encontramos em Lins (1993b) um alerta a respeito desse estado de coisas. Nesse artigo, ele defende a posição - em relação às pesquisas em Educação Matemática - de que os pesquisadores deveriam sempre manter explícitas suas posições epistemológicas. Nessa direção, ele referia-se mais especificamente às noções de conhecimento e significado, nos seguintes termos:

> Os artigos em Educação Matemática estão recheados de frases envolvendo "conhecimento do aluno", "conhecimento matemático" e "significado", mas em quantos deles podemos encontrar uma discussão do que estas coisas querem dizer – ou mesmo uma indicação de teorias às quais o leitor deveria se referir para encontrar o ponto de vista adotado pelo autor do artigo? Muito poucos, poucos demais, eu diria. (LINS, 1993b, p.77)

Na revisão dos periódicos internacionais, encontramos um comentário análogo em Godino e Batanero (1994) nos seguintes termos:

> A pesar del carácter relevante que la idea de significado tiene, no sólo para la Didáctica de la Matemática, sino para la psicología en general, no se encuentra en la literatura de la especialidad análisis explícito de qué sea el significado de las nociones matemáticas. Los investigadores en esta disciplina utilizan el término "significado" de un modo que podemos calificar de lenguaje ordinario, o sea, con un sentido intuitivo o pré-teórico. (GODINO e BATANERO, 1994, p. 328)

O levantamento que desenvolvi veio confirmar a afirmação dos pesquisadores anteriormente citados. Observamos, também, que os trabalhos que tratam de produção de significados não eram numerosos o suficiente para que pudessem ser categorizados. Como veremos a seguir, as pesquisas sobre o tema baseiam-se em alguns pesquisadores e, na maioria das vezes, em trabalhos isolados. Com respeito à produção científica nacional, a primeira pista que encontramos foi apresentada por Baldino (1996, p.1), no seguinte comentário:

> As recentes tentativas de pensar a Educação Matemática a partir da produção de significado, portanto, da linguagem é o fruto mais novo e mais recente da vertente marxista anti-humanista à qual se filia a maioria dos pensadores situados em relação à problemática estruturalista, como Derrida, Bourdieu, Foucault e Althusser. No campo da psicanálise, essa vertente deságua em Lacan, cuja obra foi herdada por seu genro, Jacques Alain Miller, ex-aluno de Althusser, atualmente na Universidade de Paris VIII, fundada em conseqüência do Movimento de Maio de 68. Dessa vertente essencialmente francesa, corre um regato para a Educação Matemática, paradoxalmente nascendo na Inglaterra, representado pela vasta e importante pesquisa de Valerie Walkerdine. Alguns autores brasileiros, com recentes doutorados nesse país, aderiram ao primado da produção de significados para pensar os temas da Educação Matemática.

Entre possíveis nomes a quem Baldino tenha se referido, e do universo que revisamos, apenas Lins apresenta o desenvolvimento de uma pesquisa sistemática sendo efetivada. Em parte, pela sua própria produção científica, em parte, pelos projetos de pesquisa desenvolvidos no programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na UNESP – Campus de Rio Claro sob sua orientação ou utilizando o MTCS.

Sob sua orientação, encontramos os seguintes trabalhos: Cassol (1997), com dissertação intitulada *Produção de significados para a derivada: taxa de variação*; Poloni (1997), dissertação intitulada *Sobre a produção de significado por um grupo de alunos quando da proposição de um certo texto do chamado discurso matemático*; Silva (1997), dissertação com o título *Uma análise da produção de significado para a noção de base em Álgebra Linear*[9]; Sad (1998), tese de doutorado intitulada *Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos* e Oliveira (2002), dissertação intitulada *Sobre a produção de significado para a noção de transformação linear*.

Algumas das idéias do MTCS começaram também a figurar em trabalhos científicos sob orientação de outros pesquisadores como em Ciani (2000), dissertação intitulada *Aula particular de Matemática: uma questão de gosto e as relações de poder*; em Oliveira (1997), dissertação de mestrado

[9] Trabalho orientado em conjunto com a Profa. Dra. Janete Bolite Frant.

intitulada *Pensando algebricamente antes da 7ª série: uma outra perspectiva sobre os processos de construção do conhecimento* e na comunicação científica de Reis (1998), com o título *Produção de significado para dez por cento*.

Esses trabalhos buscavam investigar a produção de significados, ou a partir da História da Matemática, ou de livros-texto de Matemática, ou a partir da análise da fala dos alunos.

As investigações das falas dos alunos, em geral, estiveram ligadas a objetos matemáticos como, por exemplo, seqüências de números, taxa de variação, porcentagens, base de um espaço vetorial.

Essas pesquisas foram desenvolvidas em diferentes contextos: nas universidades (Cassol, 1997; Silva, 1997; Sad, 1998; Oliveira, 2002), no ensino fundamental de 1ª a 4ª séries (Reis, 1998) e de 5ª a 8ª séries (Poloni, 1997; Oliveira, 1997).

Dos trabalhos desenvolvidos em outras frentes na produção científica nacional, baseados em referenciais teóricos explícitos e que possuíam em seu foco a preocupação com o processo de produção de significados, podemos citar Meira (1996), Machado (1995).

No artigo de Meira (1996), intitulado *Atividade algébrica e produção de significados em matemática: um estudo de caso,* o autor analisa a produção de significados de dois estudantes do ensino fundamental, envolvidos em uma atividade algébrica. Partindo da Teoria da Atividade de Leontiev, seu objetivo era discutir uma visão psicológica da construção de significados em matemática. Através da noção de atividade, ele caracteriza o conceito de atividade algébrica e utiliza a noção para descrever e interpretar a fala de seus informantes.

A noção de significados e rede de significados é encontrada em Machado (1995). Para ele, a construção do significado é sempre uma ação de significar, de transformar em signo, de representar por um signo, através de um processo de abstração, e o conhecimento se organiza em redes de significado.

Nossa revisão dos periódicos internacionais, na direção de nossos interesses, indicou apenas uma pesquisa onde a noção de significado foi tratada no interior de uma teoria. Esse modelo teórico foi formulado por Godino e Batanero (1994, 1996) denominado Teoria do Objeto e do Significado, que tinha como objetivo discutir a natureza dos objetos matemáticos e seus significados.

Esse modelo foi elaborado no âmbito da Didática da Matemática, que é caracterizada por seus autores da seguinte maneira:

> La Didáctica de las Matemáticas estudia los procesos de enseñanza/aprendizaje de los saberes matemáticos - en los aspectos teórico-conceptuales y de resolución de problemas – tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción. (GODINO e BATANERO, 1994, p.327)

A perspectiva destes pesquisadores é expressa nos seguintes termos:

> [...] el estudio teórico de la significación desde una perspectiva matemática, psicológica y didáctica, esto es, la formulación de una teoría explícita de los objetos matemáticos, puede ser útil para establecer conexiones entre distintas aproximaciones a las cuestiones de investigación en Didáctica de la Matemática. (GODINO e BATANERO, 1994, p.329)

O interesse desses pesquisadores está em estudar o significado dos objetos matemáticos que são classificados por eles em institucional, pessoal e temporal. Com base na teoria que desenvolvem, eles propõem algumas questões de investigação decorrentes de seus estudos. Entre elas encontramos o interesse na investigação da dinâmica dos significados pessoal e institucional. Eles inicialmente propõem:

> a) Una clase de estudios primarios en Didáctica deben orientarse a determinar o caracterizar los significados institucionales, especialmente el significado en la institución matemática: es necesario ver cuáles son los usos característicos de los conceptos, proposiciones y teorías matemáticas, las situaciones problemáticas fundamentales que incorporan las notas esenciales de las nociones que podríamos llamar canónicas. Este análisis debe abarcar los aspectos epistemológicos y fenomenológicos de los mismos.
> b) Respecto a los significados de los objetos personales, esto es, los relativos a profesores y alumnos, es necesario desarrollar procedimientos de diagnóstico que permitan, en un momento dado, conocer el significado personal construido para el objeto o campo conceptual correspondiente. (GODINO e BATANERO, 1994, p.351-352)

Para eles, os estudos relativos aos itens a) e b), constituiriam a “estática dos significados”, tanto institucionais quanto pessoais cuja dinâmica seria expressa nos seguintes termos:

> La captación del significado por el alumno, el aprendizaje comprensivo (relacional o significativo), puede modelizarse como una secuencia de actos de superación de obstáculos (Sierpinska, 1990). La caracterización de dichos, y la identificación de mecanismos productores de obstáculos [...] es una temática central dentro de lo que podemos denominar dinámica del significado personal de los objetos matemáticos. (GODINO e BATANERO, 1994, p.352)

E ainda,

> El estudio de los cambios que el significado institucional de referencia de los objetos matemáticos sufre para convertirse en significado a enseñar, a través de distintas instituciones de enseñanza (diseños curriculares, autores de textos) [...] constituye lo que podríamos llamar dinámica de los significados institucionales [...]. (GODINO e BATANERO, 1994, p.352)

Observamos que todo esforço dos pesquisadores está baseado em que os alunos compreendam/aprendam os conceitos matemáticos científicos, característica da tradição francesa do que se entende por Didática da Matemática. Comparado ao nosso projeto de pesquisa, nosso foco está na produção de significados do sujeito; sejam eles significados matemáticos ou não-matemáticos, contrariamente ao proposto por Godino e Batanero cujo foco, como dissemos, está na Matemática. Assim, a única semelhança que observamos de nossa investigação com o projeto desses pesquisadores é o fato de que a proposta do estudo da dinâmica nasceu de maneira similar à nossa, de uma questão interna a uma teoria.

Para concluir, observamos que a revisão de literatura não nos permitiu uma discussão a respeito do tema proposto, nem no sentido de convergir ou explicitar uma oposição. Porém, a importância dessa revisão reside na constatação de que as pesquisas sobre a produção de significados em Educação Matemática ainda são incipientes, evidenciando assim, a necessidade de investigações mais sistemáticas, referenciadas teoricamente, devido às potencialidades do tema.

§ 2. A inspiração vygotskyana

Uma dificuldade do problema de pesquisa que me propus investigar é a análise de processos. Na verdade, acredito que toda análise de processos implica dificuldades, principalmente porque a investigação de processos requer um método de análise adequado que permita uma explicação plausível do que se quer observar. A clareza sobre essa questão surgiu, em grande parte, do estudo que desenvolvi dos trabalhos de Vygotsky, cujas idéias também foram importantes na elaboração do MTCS.

Apesar de nosso problema de pesquisa ser de natureza diferente daqueles discutidos por Vygotsky, o estudo de suas investigações teve o papel de nos permitir refletir sobre nossas próprias questões. Assim, neste parágrafo, revisaremos alguns aspectos do seu trabalho, indicando a direção de nosso olhar que prioritariamente esteve focado no seu método e no seu olhar sobre processos.

Mais especificamente, a leitura será feita em dois momentos: no primeiro, revisaremos, em linhas gerais, os princípios que formam a base da análise das funções psicológicas superiores. No segundo momento, analisarei o tratamento dado por Vygotsky ao problema da inter-relação entre pensamento e linguagem, que, para nós, funcionou como um exemplo "exemplar" da investigação de processos.

Vygotsky em suas investigações desenvolveu um estudo das funções psicológicas superiores, características dos seres humanos. Na tentativa de elaborar uma análise das formas superiores de comportamento, ele esbarrou na ineficiência dos métodos de investigação e análise de seus contemporâneos. Ele entendia que nenhuma das escolas de psicologia da época fornecia bases sólidas necessárias para o estabelecimento de uma teoria unificada dos processos psicológicos humanos. Assim, uma de suas maiores preocupações estava em encontrar um método de investigação que não tivesse as deficiências dos métodos existentes. Em suas palavras:

> A procura de um método torna-se um dos problemas mais importantes de todo empreendimento para a compreensão das formas caracteristicamente humanas de atividade psicológica. Nesse caso, o método é, ao mesmo

tempo, pré-requisito e produto, o instrumento e o resultado do estudo (VYGOTSKY, 1994, p. 86).

A origem dos pressupostos de Vygotsky, que seriam a base de seu método, é explicitada por Cole e Scribner (apud VYGOTSY, 1994, p. 8) no seguinte comentário:

> Vygotsky viu nos métodos e princípios do materialismo dialético a solução dos paradoxos científicos fundamentais com que se defrontavam seus contemporâneos. Um ponto central desse método é que todos os fenômenos sejam estudados como processos em movimento e em mudança.[10]

Assim, no materialismo dialético Vygotsky encontrou a sustentação que lhe permitiria estudar processos. Sobre seus pressupostos, Vygotsky comenta:

> Baseado na abordagem materialista dialética da análise da história humana, acredito que o comportamento humano difere qualitativamente do comportamento animal, na mesma extensão em que diferem a adaptabilidade e desenvolvimento dos animais. O desenvolvimento psicológico dos homens é parte do desenvolvimento histórico geral de nossa espécie e assim deve ser entendido. A aceitação dessa proposição significa termos de encontrar uma nova metodologia para a experimentação psicológica.[11]

Na continuação, citando Engels, ele diz:

> O elemento-chave do nosso método [...] decorre diretamente do contraste estabelecido por Engels, entre as abordagens naturalística e dialética para a compreensão da história humana. Segundo Engels, o naturalismo na análise histórica manifesta-se pela suposição de que somente a natureza afeta os seres humanos e de que somente as condições naturais são os determinantes do desenvolvimento histórico. A abordagem dialética, admitindo a influência da natureza sobre o homem, afirma que o homem, por sua vez, age sobre a natureza e cria, através das mudanças nela provocadas, novas condições naturais para sua existência. Essa posição representa o elemento-chave de nossa abordagem do estudo e interpretação das funções psicológicas superiores do homem e serve como base dos novos métodos de experimentação e análise que defendemos.[12]

Ele então conclui:

> Todos os métodos do tipo estímulo-resposta partilham da inadequabilidade que Engels atribui à abordagem naturalística da história. Nota-se em ambos que a relação entre comportamento e natureza é unidirecionalmente reativa. Entretanto, eu e meus colaboradores acreditamos que o

---

[10] Ibid, p.8.
[11] Ibid, p.80.
[12] Ibid, p.80.

> comportamento humano tem aquela “reação transformadora sobre a natureza” que Engels atribui aos instrumentos. Portanto, temos que procurar métodos adequados à nossa concepção. Conjuntamente com os novos métodos, necessitamos também de uma nova estrutura analítica.[13]

Assim, para investigar os processos psicológicos superiores, Vygotsky desenvolveu um novo método denominado método genético-experimental, pois, “provoca ou cria artificialmente um processo de desenvolvimento psicológico”. Além disso, segundo ele, “essa abordagem também é apropriada ao objetivo básico da análise dinâmica”[14].

Podemos observar que seu interesse estava em criar processos e em efetuar uma análise dinâmica desses processos. Este ponto se tornará mais claro a seguir.

Na exposição de seu método, Vygotsky apresenta três princípios que formam a base de sua abordagem da análise das funções psicológicas superiores, que ele resume da seguinte maneira:

> (1) uma análise do processo em oposição a uma análise do objeto; (2) uma análise que revela as relações dinâmicas ou causais, reais, em oposição à enumeração das características externas de um processo, isto é, uma análise explicativa e não descritiva; e (3) uma análise do desenvolvimento que reconstrói todos os pontos e faz retornar à origem o desenvolvimento de uma determinada estrutura. O resultado do desenvolvimento não será uma estrutura puramente psicológica, como a psicologia descritiva considera ser, nem a simples soma de processos elementares, como considera a psicologia associacionista, e sim uma forma qualitativamente nova que aparece no processo de desenvolvimento.[15]

Ao distinguir a análise de um objeto e a análise de um processo, Vygotsky se refere ao que até então estava sendo feito pela análise psicológica da época, que tratava os processos como objetos fixos e estáveis. Para ele, esta análise consistia em simplesmente separar os objetos em seus elementos componentes[16]. Sendo assim, ele acreditava que a análise psicológica dos objetos deveria ser diferenciada da análise de processos pois, a segunda, como ele mesmo disse, requeria uma exposição dinâmica dos principais pontos constituintes da história dos processos.

---

[13] Ibid, p.80.
[14] Ibid, p.81-82.
[15] Ibid, p.86.
[16] Este ponto será melhor esclarecido quando discutirmos a inter-relação entre o pensamento e a fala.

Vygotsky tinha a seguinte visão dos processos psicológicos:

> Qualquer processo psicológico, seja o desenvolvimento do pensamento ou do comportamento voluntário, é um processo que sofre mudanças a olhos vistos. O desenvolvimento em questão pode limitar-se a poucos segundos somente, ou mesmo frações de segundos (como no caso da percepção normal). Pode também (como no caso dos processos mentais complexos) durar muitos dias e mesmo semanas. Sob certas condições, torna-se possível seguir esse desenvolvimento.[17]

Vygostky acreditava que os pesquisadores poderiam, em condições de laboratório, provocar o desenvolvimento, isto é, criar processos que deixariam, à mostra, o curso real de uma determinada função.

No segundo princípio apresentado por Vygotsky – explicação versus descrição -, sua opção pela explicação em oposição à análise pela descrição reside no fato de que “a mera descrição não revela as relações dinâmico-causais reais subjacentes ao fenômeno”. Ele deixa mais clara sua opção quando diz:

> Na realidade, a psicologia nos ensina a cada instante que, embora dois tipos de atividades possam ter a mesma manifestação externa, a sua natureza pode diferir profundamente, seja quanto à sua origem ou à sua essência. Nesses casos são necessários meios especiais de análise científica para pôr a nu as diferenças internas escondidas pelas similaridades externas. A tarefa da análise é revelar essas relações. Nesse sentido, a análise científica real difere radicalmente da análise introspectiva subjetiva, que pela sua natureza não pode esperar ir além da pura descrição. O tipo de análise objetiva que defendemos procura mostrar a essência dos fenômenos psicológicos ao invés de suas características perceptíveis.[18]

Podemos observar, na fala anterior, indícios de seu interesse em analisar a gênese dos processos psicológicos e em produzir, não uma descrição desses fenômenos, mas a explicação deles. Na continuação, ele diz:

> Não estamos interessados na descrição da experiência imediata eliciada, por exemplo, por um lampejo luminoso, tal como ela nos é revelada pela análise introspectiva; ao invés disso, procuramos entender as ligações reais entre os estímulos externos e as respostas internas que são a base das formas superiores de comportamento, apontadas pelas descrições introspectivas. Assim, para nós, a análise

---

[17] Ibid, p.81.
[18] Ibid, p.83.

> psicológica rejeita descrições nominais, procurando, ao invés disso, determinar as relações dinâmico-causais.[19]

Sobre o terceiro princípio, que ele denominou “o problema do comportamento fossilizado”, ele diz:

> O terceiro princípio básico de nossa abordagem analítica fundamenta-se no fato de que, em psicologia, defrontamo-nos freqüentemente com processos que esmaeceram ao longo do tempo, isto é, processos que passaram através de um estágio bastante longo do desenvolvimento histórico e tornaram-se fossilizados. Essas formas fossilizadas de comportamento são mais facilmente observadas nos assim chamados processos psicológicos automatizados ou mecanizados, os quais, dadas as suas origens remotas, estão agora sendo repetidos pela enésima vez e tornaram-se mecanizados. Eles perderam sua aparência original, e a sua aparência externa nada nos diz sobre a sua natureza interna. Seu caráter automático cria grandes dificuldades para a análise psicológica.[20]

Como exemplo, ele apresenta os processos que tradicionalmente são discutidos como atenção voluntária e involuntária. Segundo ele, estes processos “constituem um exemplo elementar que demonstra como processos essencialmente diferentes adquirem similaridades externas em conseqüência dessa automação”[21]. Ele observa então que, da perspectiva do desenvolvimento, os dois processos diferem profundamente, porém, do ponto de vista da psicologia experimental, a atenção voluntária funciona exatamente como a atenção involuntária. Ele então observa:

> [...] precisamos compreender sua origem. Conseqüentemente, precisamos concentrar-nos não no *produto* do desenvolvimento, mas no próprio *processo* de estabelecimento das formas superiores. Para isso, o pesquisador é freqüentemente forçado a alterar o caráter automático, mecanizado e fossilizado das formas superiores de comportamento, fazendo-as retornar à sua origem através do experimento. Esse é o objetivo da análise dinâmica.[22]

Observando essas idéias de Vygotsky, podemos entender a importância do método para uma investigação. Sua clareza, a meu ver, é fruto de uma profunda compreensão dos problemas que queria investigar. Lendo os fragmentos de suas pesquisas presentes em seus livros, podemos ver uma coerência entre o que se queria investigar e os meios para sua efetivação. Por

---

[19] Ibid, p.84.
[20] Ibid, p.84.
[21] Ibid, p.84.
[22] Ibid, p.85.

exemplo, ele afirmava que se os processos superiores surgiam e sofriam transformações ao longo do aprendizado e do desenvolvimento, então a psicologia só poderia compreendê-los completamente se determinasse sua origem e traçasse a sua história. Mas o que ele entendia por determinar a sua história? Sua resposta a essa questão mostra sua coerência com seus pressupostos, como podemos constatar em suas próprias palavras:

> O conceito de uma psicologia historicamente fundamentada é mal interpretado pela maioria dos pesquisadores que estudam o desenvolvimento da criança. Para eles, estudar alguma coisa historicamente significa, por definição, estudar algum evento do passado. Por isso, eles sinceramente imaginam existir uma barreira intransponível entre o estudo histórico e o estudo das formas comportamentais presentes. Estudar alguma coisa historicamente significa estudá-la no processo de mudança: esse é o requisito básico do método dialético. Numa pesquisa, abranger o processo de desenvolvimento de uma determinada coisa, em todas as suas fases e mudanças – do nascimento à morte – significa, fundamentalmente, descobrir sua natureza, sua essência, uma vez que "é somente em movimento que um corpo mostra o que é". Assim, o estudo histórico do comportamento não é um aspecto do estudo teórico, mas sim sua verdadeira base. Como afirmou P.P. Blonsky, "o comportamento só pode ser entendido como a história do comportamento".[23]

Com o mesmo objetivo em mente – olhar para métodos e processos nos trabalhos de Vygotsky -, passaremos agora a revisar alguns aspectos do seu tratamento ao problema da inter-relação entre pensamento e linguagem. Seu objetivo, como sabemos, foi o de desenvolver a análise genética da relação entre o pensamento e a palavra falada. Ele considerava este problema como sendo um dos problemas mais complexos da Psicologia e que até aquele momento não havia sido investigado experimentalmente de maneira sistemática.

Sua revisão dos trabalhos anteriores sobre o tema indicou que a ineficácia das investigações foi, em grande parte, resultante do fato de, até aquele momento, os pesquisadores terem assumido o pressuposto de que o pensamento e a palavra eram elementos isolados e independentes e que o pensamento verbal resultava da união externa entre eles. Para ele, o problema também residia nos métodos de análise adotados pelos pesquisadores que o

[23] Ibid, p.85-86.

antecederam. Segundo Vygotsky, existiam dois métodos diferentes no estudo das estruturas psicológicas e, referindo-se ao método dos pesquisadores a quem criticava como sendo o primeiro método, ele diz:

> O primeiro método analisa os todos psicológicos complexos em *elementos componentes.* Pode-se compará-lo à análise química da água em hidrogênio e oxigênio, sendo que nenhum deles apresenta as propriedades do todo, e cada um tem propriedades que não estão presentes no todo. O estudante que utilizar este método para tentar explicar alguma propriedade da água – por que ela apaga o fogo, por exemplo – descobrirá, com surpresa, que o hidrogênio queima e que o oxigênio alimenta o fogo. Essas descobertas não ajudarão muito a solucionar o problema. A psicologia encontra-se no mesmo beco sem saída quando analisa o pensamento verbal e seus componentes, o pensamento e a palavra, e os estuda isoladamente. No decorrer da análise, as propriedades originais do pensamento verbal desaparecem. Ao pesquisador resta apenas tentar descobrir a interação mecânica de dois elementos, na esperança de reconstruir, de modo puramente especulativo, as propriedades desaparecidas do todo. (VYGOTSKY, 1993, p.2-3, grifo do autor)

Ele propõe então uma nova abordagem da questão com o objetivo de contornar a deficiência do método anterior, ao que ele chamou de análise em unidades. Ele esclarece:

> Com o termo *unidade* queremos nos referir a um produto de análise que, ao contrário dos elementos, conserva todas as propriedades básicas do todo, não podendo ser dividido sem que as perca. A chave para a compreensão das propriedades da água são as suas moléculas e seu comportamento, e não seus elementos químicos.[24]

Faltaria então decidir qual seria a unidade de análise do pensamento verbal que satisfaria os requisitos propostos. Ele inicialmente postula: “Acreditamos poder encontrá-la no aspecto intrínseco da palavra, no *significado* da palavra” [25]. Para ele, “é no significado da palavra que o pensamento e a fala se unem em pensamento verbal” [26]. Desse modo as respostas poderiam ser encontradas na análise do significado das palavras. Para Vygotsky, vale ressaltar, em oposição a outras abordagens, uma palavra não se referia a um objeto isolado, mas a um grupo ou a classe de objetos, sendo assim, cada palavra já era entendida por ele como uma generalização.

---

[24] Ibid, p.4, grifo do autor.
[25] Ibid, p.4.
[26] Ibid, p.4.

Então, para Vygotsky, o método a seguir na investigação da natureza do pensamento verbal seria a análise semântica, entendida como “o estudo do desenvolvimento, do funcionamento e da estrutura dessas unidades, em que pensamento e fala estão inter-relacionados”.[27]

Passemos a olhar mais de perto o problema investigado por Vygotsky quando buscou desenvolver a análise genética da relação entre o pensamento e a palavra falada. Note que, em sua essência, esse problema discute a relação entre, pelo menos, dois processos: o processo de pensamento e o processo da fala. Porém, nesse empreendimento, vários outros processos foram considerados.

O ponto de partida da investigação se deu através de uma tentativa de descobrir a relação entre o pensamento e a fala nos estágios iniciais do desenvolvimento filogenético (o da evolução da espécie) e ontogenético (o individual). Para o estudo do desenvolvimento filogenético, Vygotsky analisou os vários estudos sobre a linguagem e o intelecto dos macacos antropóides. No estudo do desenvolvimento ontogenético, Vygotsky, baseado em alguns resultados de pesquisa, observou a existência de uma fase pré-verbal na evolução do pensamento durante a infância. Por outro lado, ele indicou que as raízes pré-intelectuais da fala no desenvolvimento da criança já eram conhecidas naquele momento. Assim, ele então conclui que as duas funções da fala observadas no desenvolvimento filogenético aparecem, e são evidentes, em crianças antes mesmo do primeiro ano de vida.

Para Vygostky, baseado nos relatos de Stern, a maior descoberta da criança acontece por volta dos dois anos de idade quando as curvas do desenvolvimento do pensamento e da fala, até então separadas, se encontram para iniciar uma nova forma de comportamento. Isto acontece no momento em que ela descobre que cada coisa tem seu nome. É neste momento que a fala começa a servir ao intelecto e os pensamentos começam a ser verbalizados. As linhas do desenvolvimento do pensamento e da fala se encontram. Para Vygotsky, “neste ponto ata-se o nó do problema do pensamento e da linguagem”[28]. Porém, ele discordava de Stern que pensava que isso se dava de forma súbita. Para ele, tal descoberta era resultante de um processo gradual

[27] Ibid, p.4.
[28] Ibid, p.38.

pois como ele afirmava, "'a maior descoberta da criança' só é possível quando já se atingiu um nível relativamente elevado de desenvolvimento do pensamento e da fala. Em outras palavras, a fala não pode ser 'descoberta' sem o pensamento"[29].

Sobre o estudo da gênese do pensamento e da fala ele observa:

> O fato mais importante revelado pelo estudo genético do pensamento e da fala é que a relação entre ambos passa por várias mudanças. O progresso da fala não é paralelo ao progresso do pensamento. As curvas de crescimento de ambos cruzam-se muitas vezes; podem atingir o mesmo ponto e correr lado a lado, e até mesmo fundir-se por algum tempo, mas acabam se separando novamente. Isso se aplica tanto à filogenia quanto à ontogenia.[30]

Além disso, Vygotsky concluiu que "o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem, isto é, pelos instrumentos lingüísticos do pensamento e pela experiência sócio-cultural da criança"[31]. Sendo assim seu crescimento intelectual dependeria dos meios sociais do pensamento, isto é, da linguagem.

Sobre o pensamento verbal, suas principais conclusões foram:

> Se compararmos o desenvolvimento inicial da fala e do intelecto – que, como vimos, se desenvolvem ao longo de linhas diferentes tanto nos animais como nas crianças muito novas – com o desenvolvimento da fala interior e do pensamento verbal, devemos concluir que o último estágio não é uma simples continuação do primeiro. *A natureza do próprio desenvolvimento se transforma*, do biológico para o sócio-histórico. O pensamento verbal não é uma forma de comportamento natural e inata, mas é determinado por um processo histórico-cultural e tem propriedades e leis específicas que não podem ser encontradas nas formas naturais de pensamento e fala. Uma vez admitido o caráter histórico do pensamento verbal, devemos considerá-lo sujeito a todas as premissas do materialismo histórico, que são válidas para qualquer fenômeno histórico da sociedade humana. Espera-se apenas que, neste nível, o desenvolvimento do comportamento seja regido essencialmente pelas leis gerais da evolução histórica da sociedade humana.[32]

No seu estudo comparativo do desenvolvimento dos conceitos científicos e dos conceitos espontâneos da criança, muitas questões relevantes foram

---

[29] Ibid, p.38.
[30] Ibid, p.28.
[31] Ibid, p.44.
[32] Ibid, p.44, grifos do autor.

tratadas, porém fixaremos nosso olhar no que ele diz sobre o significado das palavras:

> Em qualquer idade, um conceito expresso por uma palavra representa um ato de generalização. Mas os significados das palavras evoluem. Quando uma palavra nova é aprendida pela criança, o seu desenvolvimento mal começou: a palavra é primeiramente uma generalização do tipo mais primitivo; à medida que o intelecto da criança se desenvolve, é substituída por generalizações de um tipo cada vez mais elevado – processo este que acaba por levar à formação dos verdadeiros conceitos. O desenvolvimento dos conceitos, ou dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar.[33]

A questão central desta afirmação é a constatação de Vygotsky a respeito do caráter dinâmico do significado das palavras que, como conseqüência, indicou que a relação entre o pensamento e a fala seria uma relação dinâmica e que experimentava várias mudanças. Detalhemos este ponto.

De fato, com base em investigações experimentais, Vygotsky, ao confirmar sua tese básica de que a unidade de análise do pensamento verbal era de fato o significado das palavras, diz:

> O significado de uma palavra representa um amálgama tão estreito do pensamento e da linguagem, que fica difícil dizer se se trata de um fenômeno da fala ou de um fenômeno do pensamento. Uma palavra sem significado é um som vazio: o significado, portanto, é um critério da "palavra", seu componente indispensável. Pareceria, então, que o significado poderia ser visto como um fenômeno da fala. Mas, do ponto de vista da psicologia, o significado de cada palavra é uma generalização ou um conceito. E como as generalizações e os conceitos são inegavelmente atos de pensamento, podemos considerar o significado como um fenômeno do pensamento. Daí não decorre, entretanto, que o significado pertença formalmente a duas esferas diferentes da vida psíquica. O significado das palavras é um fenômeno de pensamento apenas na medida em que o pensamento ganha corpo por meio da fala, e só é um fenômeno da fala na medida que esta é ligada ao pensamento, sendo iluminada por ele. É um fenômeno do pensamento verbal, ou da fala significativa – uma união da palavra e do pensamento.[34]

Segundo Vygotsky, as investigações experimentais mostraram que o estudo concreto do desenvolvimento do pensamento verbal era possível

---

[33] Ibid, p.71-72.
[34] Ibid, p.104.

utilizando-se do significado das palavras como unidade analítica – questão que inicialmente havia sido postulada por ele. Além disso, as investigações levaram a uma outra tese, considerada por ele como o resultado mais importante do estudo: o fato de que o significado das palavras evolui. A extensão da importância desse fato é expresso em suas palavras:

> A descoberta de que o significado das palavras evolui tira o estudo do pensamento e da fala de um beco sem saída. Os significados das palavras são formações dinâmicas, e não estáticas. Modificam-se à medida que a criança se desenvolve; e também de acordo com as várias formas pelas quais o pensamento funciona.[35]

Como conseqüência, Vygotsky observou que se os significados das palavras se alteram em sua natureza intrínseca, então a relação entre o pensamento e a palavra também se modificaria. Ele então viu a relação entre o pensamento e a palavra como um processo contínuo; "um vaivém do pensamento para a palavra e vice-versa"[36]. O pensamento verbal foi considerado como uma entidade dinâmica e complexa, como ele mesmo conclui:

> A relação entre o pensamento e a palavra é um processo vivo; o pensamento nasce através das palavras. Uma palavra desprovida de pensamento é uma coisa morta, e um pensamento não expresso por palavras permanece uma sombra. A relação entre eles não é, no entanto, algo formado e constante; surge ao longo do desenvolvimento e também se modifica.[37]

O contato com as idéias de Vygostky nos permitiu experimentar "o gosto" de se pensar em processos em curso; suas mudanças, transformações, dinâmicas. As influências dessas idéias são grandes em nosso trabalho e mesmo se foram imperceptíveis externamente, podemos afirmar que elas sempre estiveram presentes em nossa investigação.

§ 3. A noção de atividade

A teoria psicológica da atividade foi desenvolvida por A. N. Leontiev. Nesta seção, não pretendemos discutir todos os aspectos relacionados à

[35] Ibid, p.107-108.
[36] Ibid, p.108.
[37] Ibid, p.131.

teoria, mas focar nossa atenção na estrutura da atividade. Tomamos como ponto de partida o contexto onde esta investigação teve sua inspiração. Para tocar neste ponto, remeter-nos-emos às palavras de Vladimir P. Zinchenko:

> Nos anos 20, a idéia (e o problema) da atividade estava no ar. Em 1922, Sergei Rubinstein transplantou a categoria filosófica da “atividade” para a área da psicologia. De alguma forma, anteriormente, Vladimir Bejhterev e V. Mayasishchev tentaram criar a “ergologia” (ergonologia), com o objetivo de conduzir o estudo complexo da atividade do trabalho. Na mesma linha, pode-se encontrar a pesquisa psicotécnica de I. Shpi’rein e S. Gellershtein, bem como as investigações na área da psicologia, psicofisiologia e biomecânica de Ukhtomskii e Nicolai Bernshtein. No contexto da pedologia Mikhail Basov traçou uma abordagem para a personalidade como um ator em ação. A psicologia histórico-cultural foi formada de uma maneira que é paralela ao movimento psicotécnico interpretado num sentido amplo. Não se pode esquecer que Vygotsky participou dos movimentos psicotécnico e pedológico e, é claro que ele estava familiarizado com a problemática da atividade e ação. Mas o enfoque básico de seus interesses estava na consciência e nos problemas mentais superiores. Foi especificamente nesta problemática que Leontiev começou a assentar um novo conceito de “atividade”. (ZINCHENKO, apud WERTSCH et al, 1998, p.45)

Este é, pois, o contexto que Leontiev inicia o desenvolvimento de seu trabalho. Na mesma referência anteriormente citada, Zinchenko faz duas considerações importantes. Para ele, foi a psicologia histórico-cultural que deu origem à teoria da atividade desenvolvida por Leontiev e ele entende que tanto a psicologia histórico-cultural quanto a teoria da atividade representam linhas de pesquisa e não duas escolas, como muitos pesquisadores entendem.

Veremos a seguir como Leontiev, para descrever a estrutura da atividade, utilizou três níveis de funcionamento: a atividade propriamente dita, as ações e as operações.

A noção de atividade foi expressa nos seguintes termos:

> Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (VIGOTSKII, LURIA e LEONTIEV,1988, p.68)

Para Leontiev, de acordo com a formulação acima, nem todos os processos devem ser vistos como atividade, ele diz:

> Por esse termo designamos aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem

> uma necessidade especial correspondente a ele. Nós não chamamos atividade um processo como, por exemplo, a recordação, porque ela em si mesma, não realiza via de regra, nenhuma relação independente com o mundo e não satisfaz qualquer necessidade especial.[38]

A questão central que se coloca de imediato é: como decidir se um dado processo é ou não uma atividade? Nessa direção, analisaremos o exemplo apresentado pelo próprio Leontiev[39] na expectativa de elucidarmos a questão. Ele propõe a seguinte situação: "Admitamos que um estudante, preparando-se para um exame, leia um livro de história". Logo em seguida ele questiona: "Será este, psicologicamente, um processo tal que possamos adequadamente chamá-lo de atividade, nos termos em que acabamos de concordar?" E responde: "Não podemos dizer imediatamente, porque o caráter psicológico do processo exige saber o que ele representa para o próprio sujeito. E para tanto, precisamos de uma análise psicológica do próprio processo."

Em relação à questão que colocamos, fica claro que a decisão de se o processo é ou não atividade dependerá do entendimento daquele que analisa o processo. Mas a nova questão que se põe é: para onde dirigir o olhar? Vejamos, na continuação, a análise de Leontiev:

> Admitamos que um colega de nosso estudante lhe diga que o livro que está lendo não é absolutamente necessário para o exame. Poderá então ocorrer o seguinte: o estudante poderá imediatamente pôr o livro de lado, poderá continuar sua leitura ou talvez desistir da leitura com relutância, com pena. Nos dois últimos casos é óbvio que aquilo que dirigiu o processo de leitura, isto é, o conteúdo do livro, estimulou por si mesmo o processo, em outras palavras, o conteúdo do livro foi o motivo. Dizendo de outra forma, alguma necessidade especial do estudante obteve satisfação no domínio do conteúdo do livro – uma necessidade de conhecer, de entender, de compreender aquilo de que tratava o livro.
>
> O primeiro caso é diferente. Se nosso estudante, ao saber que o conteúdo do livro não contava do roteiro do teste, prontamente abandonou sua leitura, fica claro que o motivo que o levou a ler o livro não era o conteúdo do livro por si mesmo, mas apenas a necessidade de ser aprovado no exame. Aquilo para o qual sua leitura se dirigia não coincidia com aquilo que o induzia a ler. Neste caso, por conseguinte, a leitura não era propriamente uma atividade. A atividade, neste caso, era a preparação para o exame, e não a leitura do livro por si mesmo.[40]

---

[38] Ibid, p.68.
[39] Ibid, p.68.
[40] Ibid, p.68.

Vemos que a resposta à nossa última questão nos é sugerida pelo exemplo, ou seja, focar a necessidade e o motivo do sujeito.

De fato, para Leontiev, “a primeira condição de uma atividade é uma necessidade” (LEONTIEV, 19??, p.115). Porém ele observa:

> Todavia, em si, a necessidade não pode determinar a orientação concreta de uma atividade pois é apenas no objeto da atividade que ela encontra a sua determinação: deve por assim dizer, encontrar-se nele. Uma vez que a necessidade encontra a sua determinação no objeto (se “objetiva” nele), o dito objeto torna-se motivo da atividade, aquilo que o estimula. (LEONTIEV, 19??, p. 115)

É importante observar ainda a consideração de Leontiev acerca do termo “motivo”. Ele diz:

> Devemos apenas sublinhar que não utilizamos o termo “motivo” para designar o sentimento de uma necessidade; ele designa aquilo em que a necessidade se concretiza de objetivo nas condições consideradas e para as quais a atividade se orienta, o que a estimula.[41]

Assim, o que podemos concluir é que a atividade se relaciona diretamente ao motivo.

Vejamos agora um exemplo de Leontiev que diz respeito a uma atividade coletiva e que nos permitirá elucidar as ações e operações em uma atividade.

Consideremos uma caçada coletiva em que homens de uma tribo saem em busca de alimento. No grupo, cada homem participa, tendo uma função pré-estabelecida; por exemplo, o batedor tem a função de afugentar a caça em direção a outros que têm a função de abatê-la. Nesses termos, Leontiev observa:

> Quando um membro da coletividade realiza a atividade de trabalho, realiza-a também com o fim de satisfazer uma necessidade sua. Assim, a atividade do batedor que participa na caçada coletiva primitiva é estimulada pela necessidade de se alimentar ou talvez de se vestir com a pele do animal. Mas para que está diretamente orientada a sua atividade? Pode ser, por exemplo, assustar a caça e orientá-la na direção de outros caçadores que estão à espreita. É propriamente isso que deve ser o resultado da atividade do caçador. Ela pára aí; outros caçadores fazem o resto. É evidente que este resultado (assustar a caça) não acarreta por si mesmo e não poderia acarretar a satisfação da necessidade de alimento, de

[41] Ibid, p.103-104.

> vestuário etc., que o batedor sente. Assim, aquilo para que estão orientados os seus processos de atividade não coincide com o seu motivo; os dois são separados. Chamaremos ações aos processos em que o objeto e o motivo não coincidem. Podemos dizer, por exemplo, que a caçada é a atividade do batedor, e o fato de levantar [espantar] a caça é a sua ação.[42]

Assim, a "ação é um processo cujo motivo não coincide com o seu objetivo (isto é, com aquilo para o qual ele se dirige), mas reside na atividade da qual ele faz parte"[43].

Sobre ação Leontiev ainda observa:

> Como pode nascer uma ação, isto é, a separação do objeto da atividade do seu motivo? Visivelmente a ação só é possível no seio de um processo coletivo agindo sobre a natureza. O produto do processo global que responde a uma necessidade coletiva, acarreta igualmente a satisfação da necessidade que experimenta um indivíduo particular, se bem que ele possa não efetuar as operações finais (o ataque direto ao animal e a sua matança, por exemplo) que conduzem diretamente à posse do objeto desta necessidade. Geneticamente (isto é, pela sua origem), a separação entre o motivo e o objeto da atividade individual é o resultado do parcelamento em diferentes operações de uma atividade complexa, "polifásica", mas única. Essas diversas operações, absorvendo doravante todo o conteúdo de uma dada atividade do indivíduo, transforma-se para ele em ações independentes, continuando bem entendido a não ser senão um só dos numerosos elos do processo global do trabalho coletivo.[44]

Note que no texto acima, Leontiev menciona as operações. Para ele, o terceiro nível da atividade humana é o nível das operações, que se referem ao modo de execução de uma tarefa. Ele diz:

> Além de seu aspecto intencional (**o que** deve ser realizado) a ação também inclui seu aspecto operacional (**como**, de que modo pode ser realizada), o qual é determinado não pela meta em si, mas pelas condições objetivas (ambientais) para sua realização. [...] A esses modos de desempenhar uma ação chamo **operações**. (LEONTIEV, 19?? apud OLIVEIRA, 1995, p.98, grifos do autor)

Observando o exemplo da caça, vemos que uma mesma atividade humana pode ser desempenhada por diferentes cadeias de ações – afugentar o animal, abatê-lo, retirar sua pele – e cada uma dessas ações pode ser desempenhada por diferentes operações; por exemplo, o abate do animal pode

---

[42] Ibid, p.82.
[43] Ibid, p.69.
[44] Ibid, p.69.

ser realizado por tiros de arma de foco, por golpes de facão ou pelo uso de flechas.

Para finalizar, observamos que, segundo Leontiev (19??), existe uma relação particular entre atividade e ação. Para ele, a ação pode se transformar em atividade, tendo um motivo próprio. Ele diz, “o motivo da atividade, sendo substituído, pode passar para o objeto (o alvo) da ação, com o resultado de que a ação é transformada em uma atividade” (LEONTIEV, 19??, p.69). E exemplifica:

> São os casos habituais do homem que começa a efetuar certas operações sob a influência de um motivo preciso e que acaba por efetuá-las para si mesmos, tendo-se o motivo de certo modo deslocado para o seu fim. Isto significa que estas ações se tornaram atividade.[45]

Estes são, portanto, os níveis de análise da teoria psicológica da atividade proposta por Leontiev e cuja representação esquemática encontramos em Wertsch (1988, p.212) nos seguintes termos: “Atividade – Motivo; Ação – Objetivo; Operação – Condições”.

Nos capítulos seguintes a utilização da atividade como categoria será explicitada, pois, além de estar presente na elaboração das noções de significado e campo semântico no MTCS, ela será utilizada como unidade de análise no método de leitura da produção de significados que apresentaremos no capítulo 4.

---

[45] Ibid, p.104.

Capítulo 3
A Pesquisa de Campo

O propósito de investigar a dinâmica do processo de produção de significados para a Matemática indicou - de acordo com o referencial teórico adotado - que o material de investigação e análise, seriam, em grande parte, as ações enunciativas dos sujeitos. Conseqüentemente, tal fato nos levou a certas opções metodológicas em detrimento de outras, como será esclarecido a seguir.

Neste capítulo farei a apresentação da pesquisa de campo desenvolvida ao longo da investigação, onde esclarecerei minhas opções e procedimentos metodológicos. Apresentarei também a delimitação do material coletado para posterior análise.

Como ponto de partida, segundo uma visão global da tese, caracterizo esta pesquisa, como sendo qualitativa do tipo etnográfico, no sentido proposto por André (1995).

Dizer que a pesquisa é do tipo etnográfico, pretende sugerir nossa concordância com a perspectiva proposta por André (1995), quando afirma que, nas pesquisas em educação, não se faz etnografia no sentido estrito, porque o foco de interesse dos educadores não é o mesmo dos etnógrafos. Enquanto os primeiros se preocupam com o processo educativo, os últimos têm o foco de interesse na descrição da cultura, o que, segundo André (1995), "faz com que certos requisitos da etnografia não sejam – nem necessitem ser – cumpridos pelos investigadores das questões educacionais". Ela, então, observa que o que tem sido feito é uma adaptação da etnografia à educação, donde ela conclui que os educadores fazem, então, "estudos do tipo etnográfico e não etnografia no sentido estrito". (ANDRÉ, 1995, p. 28).

Quando afirmamos que nossa abordagem é do tipo etnográfico, temos duas coisas em mente. Primeiro, que entendemos que este trabalho satisfaz as características propostas pela pesquisadora. Segundo André (1995), para um trabalho ser caracterizado como sendo do tipo etnográfico em Educação, ele deve satisfazer a um certo número de características, que podem ser assim resumidas:

i) o uso de técnicas que tradicionalmente são associadas à etnografia. No nosso caso, utilizamos como técnica de coleta de dados a observação participante;

ii) O pesquisador é o instrumento principal na coleta e análise dos dados;

iii) A ênfase no processo, naquilo que está ocorrendo e não no produto;

iv) A preocupação com o significado, “com a maneira própria com que as pessoas vêem a si mesmas, as suas experiências e o mundo que as cerca. O pesquisador deve tentar apreender e retratar essa visão pessoal dos participantes” (ANDRÉ, 1995, p.29);

v) A pesquisa etnográfica envolve um trabalho de campo;

vi) A investigação é descritiva, no sentido de que o pesquisador faz uso de grande quantidade de dados descritivos como situações, pessoas, depoimentos, diálogos, ambientes, que podem ser reconstruídos em forma de palavras ou transcrições literais;

vii) Os pesquisadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.

Sobre os objetivos da pesquisa etnográfica, ela comenta:

> [...] a pesquisa etnográfica busca a formulação de hipóteses, conceitos, abstrações, teorias e não sua testagem. [...] O que esse tipo de pesquisa visa é a descoberta de novos conceitos, novas relações, novas formas de entendimento da realidade. (ANDRÉ, 1995, p.30)

O segundo ponto que temos em mente é a especificidade de nossa investigação, que pretende, com a pesquisa de campo, obter uma descrição minuciosa das ações enunciativas dos sujeitos envolvidos em atividades de produção de significados para a Matemática.

Nesta pesquisa, o campo de observação foi uma sala de aula de matemática de um programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, onde a Álgebra Linear era disciplina em discussão. Tais opções podem ser justificadas.

A opção pela disciplina decorreu do interesse pessoal em dar continuidade ao trabalho que iniciei com o projeto de dissertação com a disciplina Álgebra Linear. A opção por essa sala de aula específica aconteceu na etapa final do processo que começou na fase de treinamento e que passaremos a relatar.

A primeira saída a campo representou a fase de treinamento, onde procurei aprofundar o entendimento do problema de pesquisa e refinar o olhar através da leitura da produção de significados em uma sala de aula da disciplina Introdução à Álgebra Linear, formada por uma turma de alunos do primeiro ano de universidade, de uma graduação em Matemática.

Esta fase compreendeu dois momentos: minha presença em sala de aula como observador e as entrevistas com alunos da referida turma.

Sobre a observação daquela sala de aula, não há nada que acredito seja importante detalhar pelo fato de as aulas terem sido ministradas em quase sua totalidade de forma expositivo-explicativa, com total ausência das falas dos alunos. Porém, minha presença naquele espaço satisfez um dos objetivos: a aproximação com os alunos, para posterior convite para as entrevistas.

As entrevistas com os alunos passaram por duas fases: um teste piloto e entrevistas clínicas do tipo semi-estruturadas. As entrevistas foram aplicadas num total de 4 sessões de aproximadamente 30 minutos cada uma. Em cada sessão um problema de Álgebra Linear era proposto a uma dupla de alunos. O problema era escrito na lousa na presença da dupla e esta era dividida ao meio, ficando cada aluno com uma metade. A proposta era que eles fossem comentando suas resoluções, com liberdade para dialogar entre si. Com a câmera ligada em direção à lousa, ficávamos como observador, e nossas intervenções eram no sentido de instigá-los a falar e pedir esclarecimentos sobre o que estavam fazendo.

Ao longo do processo, fui observando as limitações daquelas entrevistas, como eu as tinha elaborado. Por exemplo, a seleção de quatro tarefas distintas, uma para cada sessão, não me permitia olhar o processo de produção de significados dos alunos na direção dos meus interesses. Observei que as entrevistas, por serem de curta duração, me permitiam ter um bom controle da situação, porém, da maneira como foram elaboradas, não me permitiam observar a dinâmica do processo de produção de significados. O período muito curto das entrevistas deixava as informações colhidas das falas dos sujeitos muito fragmentadas. Uma possibilidade talvez fosse ter optado por uma única tarefa discutida em várias sessões, ao invés de quatro tarefas discutidas uma em cada sessão.

Esse estado de coisas nos levou a avaliar toda nossa conduta e a pensar em novas possibilidades que fossem mais favoráveis à observação da dinâmica do processo. Tínhamos, nesse momento, a possibilidade de retornar às entrevistas elegendo um novo problema para ser discutido em várias sessões. Porém, uma nova proposta surgiu nessa fase.

Há vários semestres anteriores o professor Romulo Campos Lins vinha lecionando a disciplina Álgebra Linear no programa de Pós-Graduação em Educação Matemática através da proposição de problemas onde os alunos investigavam as possíveis soluções para o problema e falavam ao longo das aulas sobre o encaminhamento de suas resoluções. Acreditei que essa sala de aula seria um local ideal para observação.

Dentro deste espírito, a fase de treinamento foi encerrada e partimos para a preparação de nossa nova saída a campo. Com relação ao material coletado, acreditávamos que a riqueza das coisas que observei, surgiriam novamente, e possivelmente, em maiores proporções. Além disso, poderíamos reunir melhores condições para a observação da produção de significados dos alunos.Esses foram, portanto, os motivos que nos levaram até aquela sala de aula.

É importante observar inicialmente que já havia tido a experiência de ter sido aluno dessa disciplina e nas condições acima relatadas, na fase de conclusão dos créditos obrigatórios em disciplinas para o doutorado. Conhecia a dinâmica das aulas e as posturas do professor. O público da disciplina era formado, em geral, por alunos do mestrado e doutorado em Educação Matemática e por professores interessados no programa de Pós-graduação.

Passei então à fase de preparação. O ponto mais importante dessa fase era a possibilidade que teríamos de criar um ambiente de sala de aula favorável aos nossos propósitos, onde a produção de significados dos alunos pudesse ser estimulada a partir da tomada de decisões prévias como, por exemplo, a postura do professor em sala de aula.

Os pontos centrais que constituíram nossa tomada de decisão em conjunto com o professor da disciplina, podem ser assim enumerados:

1º) Ficou acertado que poderíamos fazer intervenções em sala de aula, porém, nenhum de nós poderia falar na direção de esclarecer, explicar e justificar questões relativas ao conteúdo matemático em discussão. Essa decisão foi tomada com dois objetivos em mente: para ver até onde os alunos poderiam ir, falando sobre o problema apresentado e para, na medida do possível, não “contaminar” a produção de significados desses alunos. Tínhamos à nossa disposição as informações do professor sobre esta prática, fruto de sua experiência em outras salas de aula. Mas não sabíamos o quanto estas informações poderiam ser úteis nessa nova turma. Foi também nosso entendimento, como conseqüência, que essa postura daria mais confiabilidade ao processo, considerando que o professor da disciplina era autor do MTCS e orientador desse projeto de tese.

2º) Decidimos que o curso seria ministrado através de problemas e que os alunos deveriam investigar suas soluções, como nas vezes que a disciplina foi lecionada anteriormente. Discutimos sobre a possibilidade de trabalharmos com grupos de problemas ou problemas isolados. Decidimos por problemas isolados. Para mim, esta seria a melhor opção em face do que comentei anteriormente, fruto de minha experiência na fase de treinamento. Escolhemos o primeiro problema para dar início ao trabalho de investigação dos alunos. Durante as aulas mais um problema foi apresentado à turma e foi de livre escolha do professor.

3º) Como dinâmica de sala de aula, decidimos que, a partir da proposição do primeiro problema, os alunos deveriam reunir-se em grupos para a discussão e o encaminhamento de resoluções do problema. Parte da aula seria, então, destinada à reunião dos grupos e a outra parte seria destinada aos relatos verbais dos grupos a respeito de seus resultados de investigação.

4º) Decidimos também que não faríamos nenhuma previsão com relação ao número de aulas destinada à discussão de cada problema proposto. A expectativa era de que o transcorrer das aulas nos informasse o momento em que as discussões se esgotariam.

Em linhas gerais, foram essas as decisões que tomamos; todas as outras foram tomadas livremente pelo professor, que, a partir do que observava, foi conduzindo as aulas. Por exemplo, durante as aulas o professor tomaria uma postura frente aos alunos que, de certo modo, não chegou a ser decidido por nós. Ele tomou a decisão de, na presença dos alunos, manter-se imóvel, sem nenhum gesto, sem nenhuma expressão facial que sugerisse concordância ou discordância com o que era dito por eles; gestos do tipo balançar a cabeça em sinal de afirmação ou negação, sorrir, responder às perguntas dos alunos sobre conteúdo não aconteceram. Em geral, suas intervenções foram ou de encaminhamento das tarefas do dia ou da aula seguinte, ou de intervenções para esclarecimento sobre o que os alunos e alunas queriam dizer. Com essas posições entramos em sala de aula.

A disciplina Álgebra Linear, como dissemos, é destinada a mestrandos e doutorandos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Neste programa o sistema de créditos é semestral. A disciplina está alocada no Departamento de Matemática e possui quatro créditos semanais, totalizando uma carga horária de 60 horas/aula. As aulas foram ministradas uma vez por semana – às sextas-feiras – durante o turno da tarde, das 14 às 18 horas.

A turma foi formada por 18 alunos e alunas cujos pseudônimos são: Ades, Ane, Azul, Betty, Diva, Duda, Judy, Lufran, Maria Helena, Maria Luiza, Mega, Mel, Mila, Morgana, Muiara, Pinho, Role e Teka. Durante o semestre letivo, apenas Maria Helena veio a abandonar a disciplina. Deste grupo três eram alunas regulares; treze, alunos e alunas especiais[46] e duas alunas, ouvintes.

Durante as aulas, dois problemas foram propostos e discutidos pela turma. Para nossa investigação foi suficiente o tempo de observação relativo ao primeiro problema, que esteve em discussão por aproximadamente dois meses, o que correspondeu a seis aulas. Seu enunciado foi apresentado à turma nos seguintes termos:

"Problema para investigar:

IR^2 é o conjunto dos pares ordenados de números reais:

$IR^2 = \{(x, y) \text{ tal que } x, y \in IR\}$

Investigue se é possível existir um espaço vetorial real (isto é, IR é o corpo dos escalares) onde IR^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3."

A importância desse problema reside, para nós, no fato de possuir duas características centrais para a observação da produção de significados de uma pessoa que se propõe a falar a partir daquele enunciado; são elas: ser familiar e não-usual. Familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo. O fato de a tarefa ser não-

---

[46] A instituição onde o curso acontece possui uma categoria, denominada aluno especial, que permite que as pessoas da comunidade se matriculem nas disciplinas do referido programa de pós-graduação.

usual tem como objetivo nos permitir – enquanto professores ou pesquisadores - observar até onde a pessoa pode ir falando. Além disso, será nosso caminho para investigar a dinâmica do processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa. É importante ressaltar que a crença de que uma tarefa seja familiar e não-usual está presente apenas nas expectativas do pesquisador através do seu entendimento dos sujeitos envolvidos e do contexto onde o problema será aplicado, pois, não há nada que garanta tal crença.

Olhando da perspectiva dos significados que um matemático produziria na tentativa de resolução desse problema, seria necessário passar por todas as noções centrais da Álgebra Linear – entendida como o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles. Seria necessário considerar a definição de espaço vetorial, entendido como uma estrutura algébrica constituída por um conjunto; um corpo de escalares; e duas operações, a adição de vetores e a multiplicação por escalar. Assim, como no problema proposto acima são dados o conjunto IR^2 e o corpo de escalares, IR, a questão recai sobre as operações. Se as operações forem as usuais, tem-se que a dimensão do espaço vetorial procurado é 2. Sendo assim, a questão passa a ser: existem operações não-usuais que satisfaçam as condições do problema? A resposta a esta pergunta é sim. Porém, ao chegar a tal conclusão, fica a questão de como determinar tais operações de modo que o espaço vetorial em questão tenha dimensão três. O que esse problema sugere é o fato de que, dependendo da operação que se escolhe, a dimensão pode ser diferente.

Apesar desse problema ser interessante na direção de nossos objetivos, dependendo da perspectiva de um matemático, tal problema pode ser considerado sem importância. Por exemplo, se considerarmos um problema importante pelo que ele faz avançar a pesquisa matemática, gerando novos resultados, o referido problema, segundo esta perspectiva, seria considerado destituído de valor.

Após a proposição do problema, o processo foi deflagrado e nossa atenção se dirigiu à produção de significados daquelas pessoas. Os alunos passaram então a se reunir em grupos, que ficaram fixos até o final, variando apenas o grupo 6 com a saída de Maria Helena. A formação dos grupos foi a seguinte:

Grupo 1: Mila, Betty, Mel;

Grupo 2: Diva, Lufran, Role;

Grupo 3: Morgana, Pinho, Ane;

Grupo 4: Azul, Mega, Muiara;

Grupo 5: Maria Luiza, Ades, Judy;

Grupo 6:Teka, Duda, Maria Helena.

Durante as seis aulas seguintes, esses grupos investigaram o problema proposto.

Como técnicas de coleta de dados foram utilizadas: a observação participante, a filmagem das aulas, a aplicação de um questionário e uma entrevista com os grupos. A seguir detalharemos nossos procedimentos e opções metodológicas.

Minha introdução na sala de aula foi feita pelo professor da disciplina que esclareceu à turma o motivo da minha presença e solicitou permissão – aos presentes – para a filmagem das aulas. Assim, convivi com a turma durante todo o semestre letivo em interação face a face com o objetivo de coletar dados. Durante o tempo que estive em sala, fiz algumas intervenções que podem ser constatadas nas transcrições em anexo. Por ser aluno do referido programa, convivia com vários alunos e alunas também fora de sala de aula.

Para nossos propósitos, a videografia, ou o registro em vídeo, foi uma ferramenta útil na coleta dos dados. Já na fase de treinamento, pude constatar que apenas o uso do diário de campo não me permitiria coletar todas as informações necessárias sobre a produção de significados dos alunos, pois, como observa Meira:

> A filmagem em vídeo pode [...] capturar múltiplas pistas visuais e auditivas que vão de expressões faciais a diagramas no quadro-negro, e do aspecto geral de uma atividade a diálogos entre professor e alunos. [O vídeo] é menos sujeito ao viés do observador que anotações baseadas em observação, simplesmente porque ele registra informações em maior densidade. (MEIRA, 199?, p.3)

Para as filmagens utilizei apenas uma câmera que, durante a fala dos alunos, ficava no canto esquerdo da sala de aula, onde poderia ser direcionada tanto para a lousa quanto para os alunos. Durante as filmagens, encontramos duas dificuldades: a primeira foi decorrente do arranjo das carteiras, em forma de um semi-círculo. Dependendo da posição em que o aluno se encontrava, era necessário um grande giro com a câmera para direcioná-la. A segunda dificuldade foi em decorrência de utilizarmos apenas o sistema de áudio da câmera; certas falas não foram capturadas na sua totalidade. A leitura das transcrições permitirá ao leitor a constatação desse fato, onde a ocorrência é marcada pela palavra "inaudível". Porém a perda dos relatos verbais foi pequena e não chegou a comprometer nosso entendimento desses relatos. Ainda assim, penso ser preferível conviver com estas dificuldades a optar pelo uso de duas câmeras filmadoras que permitiriam capturar mais informações, mas que poderia se mostrar mais invasiva e causar mais constrangimento do que uma câmera. Da minha observação e dos relatos dos alunos, a filmadora não foi um empecilho às suas participações. Muitas vezes, ficou evidente que a câmera ficava transparente para os alunos, isto é, eles esqueciam que estavam sendo filmados.

Durante as reuniões dos grupos para discussão do problema proposto, filmamos, em uma sala à parte, as reuniões do grupo 1, que havia concordado com o convite do professor. As filmagens foram feitas ao longo do semestre. Pelo que observei, nesta situação a presença da câmera causou um certo grau de constrangimento, fato que foi explicitado por uma das alunas do grupo.

Na continuação da coleta de dados, entrevistei todos os grupos na aula anterior àquela em que a solução do problema seria revelada. Tinha como objetivo ter mais informações de onde eles se encontravam, no caminho de resolução do problema proposto.

No último dia de aula apliquei um questionário com o objetivo de coletar algumas informações gerais a respeito dos sujeitos de pesquisa. Além de dados pessoais, me informei a respeito de quanto cada aluno havia tido contato com a disciplina Álgebra Linear e seus principais conceitos. Os dados obtidos com este questionário não foram utilizados diretamente na análise.[47] Neste mesmo dia apresentei à turma um termo de compromisso ético que esclarecia o grau de utilização do material coletado, que foi assinado pelas partes envolvidas[48].

---

[47] Cf. Anexo B, p. 241.
[48] Cf. Anexo C, p. 243.

Como produto do material coletado ao final da observação, tinha, à disposição, aproximadamente 15 fitas de vídeo, num total de 30 horas de gravação; um questionário, com informações sobre os alunos, e os registros escritos em um diário de campo.

De posse do material coletado, passei a fazer a delimitação do material disponível através da seleção e cortes das falas como preparação para a análise.

A primeira delimitação do material coletado ocorreu ao final da fase de observação, quando após ter presenciado todo o desenvolvimento das aulas, optei por analisar apenas a atividade de produção de significados dos alunos referente à primeira tarefa proposta pelo professor. Recordando, ao longo das aulas, dois problemas foram discutidos com a turma. Porém a riqueza contida na fala dos alunos referentes à tentativa de resolver o primeiro problema foi suficiente para nossos objetivos de investigação. Além disso, o tempo de apenas três aulas, em que o segundo problema ficou em discussão, foi bem menos proveitoso que a discussão do primeiro problema, que durou seis aulas (do dia 24 de agosto, ocasião de sua proposição, ao dia 19 de setembro, quando o professor apresentou a solução para o problema). Sendo assim, o total de, aproximadamente, 30 horas de gravação em vídeo ficou reduzido pela metade, pois o intervalo do dia 24 de agosto a 19 de setembro correspondeu a 6 aulas, do total de 12 aulas referentes a todo o semestre letivo.

Ao final da coleta e registro dos dados, passei à análise dos videotapes o que nos permitiu efetuar mais cortes. Tomei a decisão de selecionar e analisar as falas dos alunos onde estivesse evidenciado para nós que estes estavam envolvidos na atividade de produzir significados para o problema proposto, pois observamos que algumas tarefas propostas pelo professor levaram os alunos a produzirem significados numa outra direção para além da atividade de produzir significados para o problema proposto. O critério que utilizei na seleção do material foi o de considerar as falas dos alunos quando estes respondiam à proposta do professor de que falassem do problema de investigação. Por exemplo, com base nesta conduta, excluímos do material de análise as falas relacionadas à tarefa “Presença de Anita” – do dia 14 de setembro - por entender que a tarefa levou a uma produção de significados numa outra direção que não era a de discutir o problema proposto. A exclusão aconteceu mesmo considerando que a referida tarefa influenciou a produção de significados de alguns sujeitos de pesquisa em algum momento, como podemos observar na fala de Mel, ao dizer:

Mel: Então, ontem / pode colocar o que a gente pensou disso? Nós também pensamos nessa relação, né? Ontem, eu e a Mila, nós fomos estudar de novo o problema. Aí sim a gente entendeu aquela questão da Anita de que dimensão daquele espaço, porque no fundo a gente tava confundindo os espaços. E aí o espaço que tinha lá é o espaço lugar, enquanto que o espaço que a gente discutia no problema, é o espaço vetorial. E aí, eu acho que é isso que a gente ficava naquilo que ele disse de outras direções. Quando a gente ficava falando de espaço lugar, espaço geométrico, a gente não saía do lugar no problema. Porque, na verdade, a gente tinha que saber de que espaço a gente tava falando e era outro. Então, a gente chegou a essa conclusão de que aquela questão foi mais pra falar ó, isso é o espaço de que vocês, às vezes, estão falando, e esse é o espaço vetorial.[49]

Porém, como pode ser observado, esse importante fato não ocorre no interior daquela atividade, mas no momento em que Mel falava do problema proposto no dia 21 de setembro.

Excluímos também da análise as falas relacionadas à tarefa proposta no dia 28 de setembro. A tarefa proposta foi: “Para cada idéia/noção/conceito abaixo, dê uma definição: 1) adição de vetores; 2) base; 3) bijeção; 4) corpo de escalares; 5) dimensão; 6) espaço vetorial; 7) multiplicação por escalar; 8) transformação linear; 9) vetor”. A exclusão ocorreu pela observação de que tal tarefa não nos informou nada a respeito do que os alunos poderiam dizer sobre o problema investigado. Nesse dia opto por incluir na análise a entrevista que realizei com os alunos sobre o que, naquele momento, eles poderiam dizer sobre a resolução do problema que estavam investigando[50].

Com a pesquisa de campo, o problema de pesquisa que havia sido formulado teoricamente estava incorporando a partir deste momento novos elementos e deveria agora ser lido como: investigar a dinâmica do processo de produção de significados dos alunos daquela sala de aula, envolvidos na atividade de produzir significados para o referido problema considerando os condicionantes e especificidades presentes naquela sala de aula.

Retomarei, no capítulo 5, o material coletado em campo para proceder a análise.

---

[49] Vide transcrição, Anexo A, dia 21 de setembro, p. 202.
[50] Cf. Anexo A, dia 28 de setembro, p. 224.

Capítulo 4
O Método de Análise da Produção de Significados

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar o método de análise da produção de significados que usaremos para investigar a dinâmica do processo a partir das ações enunciativas de nossos sujeitos de pesquisa.

Iniciaremos discutindo as características gerais do método, para, em seguida, detalhar o processo de produção de significados da perspectiva do MTCS. Assim, estaremos indicando que elementos consideraremos em nossa análise.

§ 1. Características Gerais do Método

Para os nossos propósitos, o método de análise do processo de produção de significados possui as seguintes características gerais:

i) A análise é desenvolvida considerando o processo de comunicação proposto pelo MTCS, constituído pela tríade: autor-texto-leitor;

ii) A atividade, no sentido proposto por Leontiev, é tomada como unidade de análise;

iii) A análise toma como premissa uma "leitura positiva" da produção de significados dos sujeitos de pesquisa.

De fato, a primeira característica parte de uma opção teórica presente no MTCS em relação à seguinte questão relacionada ao processo comunicativo: é possível comunicação, no sentido, por exemplo, da transmissão de uma mensagem de uma pessoa para outra?

Para Lins (1999, p.80) existem duas visões que respondem positivamente a essa questão e, como ele observa, "são dominantes, tanto no mundo acadêmico quanto no senso comum". Tanto a noção tradicional, vinda da teoria da informação, como a visão objetivista "assumem a existência de uma comunicação efetiva, no sentido da transmissão de uma mensagem". (LINS, 1999, p.80)

Podemos apontar David K. Berlo como um representante da primeira posição baseada na noção tradicional de comunicação, vinda da teoria da informação. Em seu livro "O Processo da Comunicação" (1979), ele se propõe a tratar da forma como as pessoas se comunicam. Ao abordar os "ingredientes da comunicação", Berlo parte de Aristóteles que, segundo Pena (1976, p.74), foi "a rigor a primeira tentativa de descrever o processo completo de comunicação...”. Aristóteles, em sua “Retórica”, comenta: ”[...] um discurso comporta três elementos: a pessoa que fala, o assunto de que fala e a pessoa com quem se fala; e o fim do discurso se refere a essa última, que eu chamo de ouvinte”. (ARISTÓTELES, 1???, p.42)

Assim, Aristóteles identifica três elementos básicos do processo comunicativo: o emissor, a mensagem e o receptor. Para Berlo, “a maioria dos atuais modelos de comunicação são similares ao de Aristóteles, embora um tanto mais complexos”. (BERLO, 1979, p.39) O autor propõe, então, um modelo de comunicação composto de seis elementos: a fonte, a mensagem, o codificador, o canal, o decodificador e o receptor.

No capítulo em que este autor discute a fidelidade da comunicação, ele coloca a seguinte questão: “quais os fatores na fonte, no receptor, na mensagem e no canal, que determinam a efetividade da comunicação, a fidelidade do processo?” (BERLO, 1979, p.49) Ele então discorre sobre o tema para concluir que a fidelidade de todo processo, isto é, a efetivação da comunicação vai depender de um número considerável de fatores que atuam em cada uma das etapas. Ele opera com a hipótese de que haverá transmissão efetiva de informação do emissor para o receptor caso não ocorram problemas nas etapas do processo, isto é, se codificada corretamente, transmitida corretamente e decodificada corretamente, o processo de comunicação levará informação do emissor ao receptor.

Outra visão que responde positivamente à questão colocada é expressa por Lins nos seguintes termos:

> Por outro lado, temos a noção de que a comunicação efetivamente acontece porque as mensagens emitidas referem-se ao mundo que é objetivo: por exemplo, se digo “o gato esta deitado sobre o tapete”, cada elemento dessa mensagem corresponde diretamente ao elemento da realidade (objetiva), e por isso posso compreendê-la. Esta visão é fortemente criticada por lingüistas como George Lakoff, mas mesmo assim persiste no senso comum: entendemos as mensagens porque elas se referem às coisas como elas efetivamente são. (LINS, 1999, p.81)

Para Lins, esse dois modos de entender o processo comunicativo vêem a não efetivação da comunicação como um acidente e sua efetivação como natural. Para ele, uma oposição a esse ponto de vista é representada pelo filósofo francês Jacques Derrida (1991), para quem a comunicação, como apresentada por Berlo, é que seria um acidente, pois a norma seria a não-comunicação.

Porém, na visão de Lins, as duas posições divergentes são ainda problemáticas: uma, por acreditar na comunicação efetiva e a outra, por não explicar "por que os processos comunicativos não são tão divergentes que simplesmente se desfazem à primeira tentativa de contato" (LINS, 1999, p.81). Segundo ele, seria então necessário formular uma terceira explicação sobre o processo comunicativo que evitasse as limitações das duas posições anteriores. Ele diz:

> [...], temos a sensação de que está ocorrendo algo que nos conecta, algo que nos dá razão para permanecer neste processo. É disto que precisamos dar conta, em primeiro lugar, mas penso que não precisamos, para resolver este problema, postular a existência de comunicação no sentido tradicional, de transmissão. (LINS, 1999, p.81)

A partir desta perspectiva, Lins formula uma nova proposta para o processo comunicativo cujos elementos constitutivos são: autor, texto e leitor. O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo à aula, busca entender o que o professor diz, o crítico de arte ou o leitor do livro. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado; expresso por Lins (2001, p.59) da seguinte maneira:

> Por um texto [...] entenderei não somente o texto escrito – como em Ecriture, de Derrida (1991), mas qualquer resíduo de uma enunciação: sons (resíduos de elocução), desenhos e diagramas, gestos e todos os sinais do corpo. O que faz do texto o que ele é, é a crença do leitor que ele é, de fato, resíduo de uma enunciação, ou seja, um texto é delimitado pelo leitor; além disso, ele é sempre delimitado no contexto de uma demanda de que algum significado seja produzido para ele.

Olhemos para o processo de comunicação, inicialmente, pela perspectiva do autor:

> Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém. Porém, por mais que um autor esteja diante de uma platéia, este alguém não corresponde a indivíduos, pessoas nessa

> platéia e, sim, ao leitor que o autor constitui: é para este 'um leitor' que 'o autor' fala (LINS, 1999, p.81).

A este "um leitor" chamaremos de interlocutor. O interlocutor deve ser identificado como sendo uma direção na qual o autor fala e não com pessoas, com "rostos" com quem falamos; mas com modos de produzir significados[51]. Um diagrama poderia ser este:

AUTOR ⟶ ENUNCIAÇÃO ⟶ INTERLOCUTOR

Porém, como o autor tem a expectativa de que a enunciação venha a se constituir em um texto para algum leitor, podemos expressar isto com o seguinte diagrama, proposto por Lins (1999, p.82)[52]:

O AUTOR ⟶ TEXTO ⇢ **UM** LEITOR

Por outro lado, na perspectiva do leitor, ele "sempre constitui um autor, e é em relação ao que este 'um autor' diria que o leitor produz significado para o resíduo de enunciação e que neste momento se constitui (ou transforma) em texto". (LINS,1999, p.82)

O diagrama[53] fica, agora, assim:

UM AUTOR ⇢ TEXTO ⟶ **O** LEITOR

Sobre o leitor, Lins observa: "é apenas na medida em que o leitor fala, isto é, produz significados para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leitor". (LINS,1999, p.82)

Sendo assim, poderíamos dizer que em situação de diálogo, por exemplo, o processo ficaria: o autor produz uma enunciação para cujo resíduo um leitor produziria significados. O leitor, através de uma outra enunciação, constitui aquilo que um autor disse em texto, produzindo uma nova enunciação na direção de um autor, e assim sucessivamente.

Assim, neste processo, não ocorre a comunicação efetiva; o que ocorre é expresso por Lins nos seguintes termos:

---

[51] Cf. Lins, 1994b, p.34.

[52] Segundo Lins (1999, p.81), "o pontilhado esta ali para indicar que é apenas na construção do autor que a transmissão existe".

[53] "Aqui também é o pontilhado uma transmissão que só se concebe como tal no imaginário do leitor" (LINS, 1999, p.81).

> [...] uma vez que nos colocamos incessante e alternadamente na posição de o autor e de o leitor em cada um destes processos, terminamos por fundir as duas imagens, e os pontilhados desaparecem, restando a sensação psicológica de comunicação efetiva. (LINS, 1999, p.82)

A partir desta perspectiva, o diagrama seria:

AUTOR ⟶ TEXTO ⟶ LEITOR

Logo, o sentimento de comunicação efetiva é fruto apenas de uma sensação psicológica. Porém, o que ocorre então para que entendamos uns aos outros? A resposta é apresentada novamente por Lins nos seguintes termos:

> A convergência se estabelece apenas na medida em que [autor e leitor] compartilham interlocutores, na medida em que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um espaço comunicativo: não é necessária a transmissão para que se evite a divergência. (LINS, 1999, p.82)

Portanto, com base nesta visão de processo comunicativo, nossa análise ocorre da seguinte maneira: as ações enunciativas dos nossos sujeitos de pesquisa (os autores), chegam até nós (os leitores) como resíduos de enunciações, que se constitui em texto a partir de nossa produção de significados, que novamente resulta em resíduo de enunciação. Assim, nossa análise é o resultado de nossa produção de significados para o qual o leitor da tese produzirá significado.

A segunda característica do método diz respeito à nossa opção por tomar o conceito de atividade, proposto por Leontiev, como unidade de análise. Com essa posição queremos dizer, primeiro, que a análise do processo de produção de significados é considerada sempre no interior de uma atividade. Segundo, queremos dizer que, em nossa análise, não é possível "olhar menor", isto é, a atividade é considerada no MTCS como um todo mínimo. E terceiro, nossa opção por esta unidade de análise se baseia na prática, no fato de que, se a atividade muda, a produção de significados também pode mudar[54]. Nosso olhar estará, então, dirigido na análise para a atividade coletiva e individual que propusemos no trabalho de campo: produzir significados para o problema proposto.

[54] Vide exemplo a seguir.

A terceira característica é o que designamos por leitura positiva. A origem desse tipo de leitura surgiu da oposição de Lins à maneira como Piaget analisava a produção de significados de seus sujeitos de pesquisa.

Uma das questões que influenciou toda a perspectiva de Lins como pesquisador, e marcou o início de uma ruptura com o pensamento piagetiano, envolvia responder ao que estaria acontecendo quando uma criança escreve

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5}$$

Ele evitou o olhar piagetiano, que questionaria: Em que estágio se encontra esta criança? Pois, ao propor o desenvolvimento cognitivo através de estágios, se a criança não opera de acordo com seu estagio correspondente, ela estaria em falta. A questão então seria: o que falta a esta criança para que ela opere corretamente de acordo com sua idade? Ao invés disso, ele questionou: por que ela fez o que fez? O efeito desta perspectiva é expressa em suas próprias palavras:

> [...] ao invés de apenas caracterizar o erro, a falta, eu queria mostrar que existe ali a possibilidade e a necessidade do que hoje chamo de uma leitura positiva do que o aluno fez/disse, que consiste em saber do que, de que objetos, ele estava efetivamente falando. E mais, desenvolver um referencial teórico que me permitisse fazer esta leitura positiva. (LINS, 2000, p.18)

A essa mudança de perspectiva correspondeu o seu afastamento das idéias de Piaget e uma aproximação gradual às idéias de Vygotsky.

Assim, em sua origem, o que estamos chamando de leitura positiva é uma oposição a esse ponto de vista de leitura do outro pela falta. O objetivo da leitura que propomos não é olhar para o erro quando as pessoas enfrentam uma tarefa, ou para o que lhes falta para resolvê-la corretamente. Nosso foco esta em entender por que ela fez o que fez. Com isso estamos também dizendo que leitura positiva não é juízo de valor.

Na verdade, esta perspectiva toma como premissa o fato de que, quando as pessoas produzem significados, seja para qual texto for, elas o fazem por inteiro, isto é, o que dizem/fazem é sempre o que elas podem dizer/fazer no interior daquela atividade.

Em termos teóricos, o caminho para uma leitura positiva é buscar fazer uma leitura do outro através de suas legitimidades, seus interlocutores, compartilhando o mesmo espaço comunicativo.

Para esclarecer a importância destas características, tomemos uma situação real ocorrida em nossa investigação. O episódio a seguir aconteceu durante as aulas que observamos. O professor propôs que os alunos falassem sobre o que seria, para eles, IR^2 e IR^3. Apresentaremos um diálogo entre dois colegas, Diva e Ades. Ela parece ter sido tocada pelas falas anteriores dele e assim tinha expectativas de encontrar respostas que legitimassem suas crenças na fala do colega. Passemos ao diálogo:

Diva[55]: Posso fazer uma pergunta para o colega? [Referindo-se ao Ades].

Prof: Pode.

Diva: Porque ele definiu o R2 como sendo o plano. O que que é o plano pra ele?

[...]

Ades: Bom, dois vetores linearmente independentes. A união desses dois vetores linearmente independentes.

Diva: Aí eu pergunto pelo seguinte [...] você falou no R3 como uma sobreposição de planos.

Ades: Paralelos.

Diva: Paralelos. Então, plano pra você teria / como é que seria esse plano?

Ades: Bom, eu tô entendendo o plano como uma folha de papel infinita.

Diva: Essa folha de papel infinita ela tem quantas dimensões?

Ades: Duas. Só definido pelos dois vetores l.i.

Diva: Mas, por mais fina que fosse a folha de papel, ela não seria tridimensional?

Ades: Não, pelo menos pelo que eu compreendo, não, não tem a terceira, né? Não tem essa terceira dimensão.

Diva: Mas se ela não tivesse dimensão, como é que você fosse sobrepor uma sobre a outra não ia formar nada. Se ela não tiver dimensão, né? [olhando para o professor]

[55]Nas transcrições das falas as seguintes convenções foram utilizadas: a) os sujeitos de pesquisa são identificados pelos seus pseudônimos, o professor pela abreviação Prof e o pesquisador por Pesq; b) Colchetes são usados para indicar gestos, expressões e atitudes dos sujeitos de pesquisa; c) Palavras entre barras indicam sobreposição de falas; d) Uma barra indica interrupção súbita ou mudança na direção de uma fala; e) Reticências indicam pausa prolongada; f) Reticências entre colchetes indicam omissão de partes da transcrição e g) Aspas indicam que o sujeito de pesquisa esta lendo o que esta dizendo.

Se ela não tiver uma terceira dimensão. Porque aí na hora que você vai colocando uma sobre a outra ia fazer diferença. Então, teria que ter um mínimo de espessura pra hora que você fosse colocando uma sobre a outra ela fosse formando uma outra, sei lá.

Ades: Ta, entendi. Só que eu não pensei em termos de espessura, né? Eu pensei em termos de localização, entendeu? Não de espessura. Porque, o que me fez começar a pensar assim foi a direção lá do vetor, né? Quando você vai fazer operação com vetor, você consegue transpor o vetor, não é o que a gente chama o mesmo vetor. Na verdade, ele ta no mesmo lugar no espaço. Usa lá a regra do paralelogramo. Eu coloco o vetor, desde que eu não mude as três características: módulo, direção e sentido, eu considero que é o mesmo vetor. Esta mesma analogia eu fiz com os vetores que formavam o plano. Eu posso formar um plano com dois vetores ortogonais, né? Então eu tô mudando essa localização, quando eu falo em paralelo, não tô pensando em espessura, tô pensando em localização... entendeu?

Diva: [Ela balança a cabeça expressando negação e diz:] Não. Não consegui ver a idéia dele. Não consegui, não consegui ver. Foi por isso que eu perguntei.

Mais à frente, Diva faz a seguinte consideração:

Diva: Eu fiquei pensando naquela aula que o pessoal falava a respeito de plano, aí depois, ele fala nessa questão [referindo-se ao pesquisador]. Aí eu comecei a pensar nas coisas que estão bem próximas de mim mesma, parece que eu não achei muita coisa de uma dimensão, não achei muita coisa de duas dimensões, parece que tudo tem três dimensões. Apenas eu não consegui ver como eu poderia pensar nisso daí dentro do problema dele. Então, na realidade, eu não consigo ver esse plano. Como esse plano assim, certinho, com duas dimensões. Eu não consigo ver esse plano. Eu não consigo ver também essa linha, que a gente fala: a linha tem só uma dimensão. Parece que eu consigo ver tudo, mas tudo com três dimensões. Então, eu ainda não consegui passar para a idéia do problema? Não consegui nem ver a idéia do problema. Mas eu acho assim, por mais que a gente falava assim o plano, bem fininho, bem transparente; ele deve ter uma dimensão, de espessura. Então, eu não tenho essa idéia de plano, aquele plano que não tenha as três dimensões. Eu não tenho essa idéia de linha que é uma linha com uma dimensão. Isto aí é o que ta mais me perturbando nesse exercício. Porque eu não vejo isso, não vejo isso daí, não consigo.

Passemos então a um breve exame do diálogo acima, da perspectiva das características que propusemos. Na qualidade de leitor, procuramos produzir significados para o que disseram Diva e Ades. Começamos olhando para os interlocutores e os espaços comunicativos em questão. Ades fala numa direção na qual a folha de papel é uma idealização. Para esclarecer este ponto remetemo-nos ao comentario de Davis e Hersh em “A Experiência Matemática”, quando discutem o tema “abstração como idealização”. Eles partem de um exemplo:

> Um carpinteiro, usando uma régua de metal, traça uma reta, com um lápis, em uma prancha, para usá-la como guia, ao cortar a prancha. A reta que ele traçou é uma coisa física; é um

> depósito de grafite sobre a superfície da prancha física. Possui largura e espessura variáveis, e, ao seguir a borda da régua, a ponta do lápis reage às desigualdades da superfície da prancha e traça uma reta que tem desvios e asperezas. (DAVIS e HERSH, 1985, p.157)

Eles então observam:

> Ao lado deste exemplo real, concreto, de uma reta existe a idéia mental da abstração matemática de uma linha reta ideal. Em sua versão idealizada, todos os fatos não-essenciais e imperfeições do exemplo concreto foram miraculosamente eliminados. Existe uma descrição verbal de uma reta idealizada [...] (DAVIS e HERSH, 1985, p.157)

É nesse sentido que vejo Ades operando com uma folha de papel idealizada. Por outro lado, Diva entende a folha de papel como coisa física. Assim, por falarem para interlocutores distintos, observamos que eles não compartilham o mesmo espaço comunicativo e aí, sob esta perspectiva, é que começamos a entender por que a divergência entre eles é inevitavel. É por isso que ela não pode "entendê-lo".

Importa observar que a crença-afirmação de Diva, de que o plano tem três dimensões, é absolutamente coerente com sua maneira de operar. De fato, para ela, o espaço parece ser o espaço físico[56]. Então uma folha de papel tem espessura, donde, uma folha tem três dimensões, logo, se o plano é uma folha de papel, conclui-se que o plano tem três dimensões. Isto nos sugere que sua angústia pode residir exatamente no fato de que ela vê coerência nas suas crenças.

Observe que, se nos pautarmos apenas pelo "produto" do diálogo, poderíamos ficar, por exemplo, apenas com o fato de que para Diva o plano tem três dimensões, e, por uma leitura pela falta, concluiríamos que isto é, da perspectiva dos significados matemáticos, um erro, uma incompreensão.

Pensar em termos de atividade tem como uma das possíveis conseqüências dizer que em outra atividade – por exemplo, na sala de aula em que Diva é professora – ela possivelmente não diria o que disse. Mesmo que ela acreditasse que o plano tivesse três dimensões, não seria legítimo para ela dizer o que disse como aluna. Como dissemos, se a atividade muda, a produção de significados pode mudar.

---

[56] Confira sua fala ao final do episódio o IR3 é azul, presente nas transcrições.

Por tudo o que dissemos, para nós, esse episódio é um exemplo exemplar onde a idéia de leitura positiva se concretiza, pois, se a fala de Diva for lida pela falta, toda a riqueza do processo se perderia.

Essas são, portanto, as características que nortearão nossa análise. Passaremos agora a descrever o processo de produção de significados sob a ótica do MTCS, que complementará nosso método de análise.

§ 2. O Processo de Produção de Significados

No processo de produção de significados, coexistem três grandes categorias: o novo, a justificação e o dado. Esta afirmação, em parte, é fruto das idéias do lingüista francês Oswald Ducrot (1972) cuja idéia central a partir da qual trabalharemos, foi filtrada por Bruner (1998) através da seguinte frase: "o que não se diz é o pressuposto ou dado, o que se diz é o novo". Numa adaptação a essa idéia, é possível observar que "a fala da pessoa que resolve um problema tende a explicitar o 'novo' e a silenciar o 'dado'. Isto é, quando estamos resolvendo um problema, 'falamos' as coisas que estamos tentando entender ou descobrir, mas silenciamos as coisas que tomamos como certas, como dadas". (LINS, 1997, p.122). Na verdade, nossa observação de campo vem indicando que este silêncio não é total, ele é parcial. Ao longo da justificação, a fala vai deixando os traços do que é o dado para o sujeito naquele momento. E estes traços são de suma importância para o nosso entendimento da maneira de operar desse sujeito. Porque o dado é o que nos diz onde ele [sujeito] está e a partir de que "lugar" ele esta falando. Nesse processo, a justificação tem o importante papel de ser o elo de ligação entre o novo e o dado. É a partir dela que ocorre o processo aonde o novo vai se transformando em dado frente a novas situações. Por exemplo, sobre o processo de produção de conhecimento, Lins comenta:

> Num conhecimento produzido, a crença-afirmação corresponde ao que é novo, ao passo que a justificação corresponde ao que é dado. Justificações estabelecem um vínculo entre crenças-afirmações e núcleos, que são um conjunto de objetos já estabelecidos e em relação aos quais o significado esta sendo produzido. (LINS, 1997, p.144)

Assim, da minha experiência pessoal com o trabalho de campo, tem sido esclarecedor observar a fala dos sujeitos de pesquisa identificando o que é o dado e o que é o novo em suas falas. Por esse motivo, neste trabalho, damos status de categorias ao dado, à justificação e ao novo no processo de produção de significados.

Nesse processo, existem ainda dois elementos centrais para os quais nosso olhar se dirige e que ainda não discutimos satisfatoriamente; são eles: os objetos e os núcleos. No primeiro caso, partimos da perspectiva proposta em Lins (1996) onde ele se propõe a discutir "certos aspectos de uma abordagem tradicional no estudo do pensamento humano", segundo o qual o pensamento é estruturado por conceitos. Ele sugere uma possível origem para esse modo de pensar; propõe, segundo sua visão, uma dificuldade enfrentada por essa posição, concluindo com uma proposta alternativa. Essa proposta, que será central em nossa investigação, assume que o pensamento é estruturado por objetos, no sentido que esclareceremos a seguir.

Antes, porém, é interessante observar que, quando vamos aos dicionários à procura do que vem a ser pensamento e conceito, encontramos, para pensamento, as seguintes formulações: "Poder de formular conceitos: o pensamento de Einstein revolucionou a física do séc. XX" (Aurélio eletrônico). Em dicionários de filosofia, a referência é Kant: "Atividade intelectual através do qual o espírito humano forma conceitos e formula juízos" (JAPIASSU e MARCONDES, 1990, p.192); ou "o conhecimento por conceitos chama-se pensamento". (RUSS, 1994, p.214).

Para conceito, encontramos: "Etimologicamente do latim conceptus, ação de conter, concepção, pensamento". (RUSS, 1994, p.214); ou "É a forma mais elementar do pensamento (...)" (DORAN e PAROT, 1998, p.162).

Notamos assim que há uma circularidade que remete pensamento a conceitos e vice-versa, que nos sugere que vários pensadores entendem que os conceitos podem ser entendidos como unidade estruturante do pensamento.

Japiassu e Marcondes (1990, p.53) sugerem uma diferenciação da noção de conceito na matemática e nas ciências experimentais. No primeiro caso, eles escrevem: "Em seu estilo matemático, o conceito é uma noção de base cuja definição é rigorosa (ex. o conceito de círculo: figura gerada por um segmento de reta em torno de um ponto fixo)". No segundo caso, "o conceito é uma noção que diz respeito à realidade ou fenômenos experimentais bem determinados (ex.: o conceito de peso, o conceito de ácido, etc.)".

Lins, na direção de conceber o conceito na perspectiva da ciência, formula uma possível origem de que o pensamento seja estruturado por conceitos; ele diz:

> [...] encontramos na ciência ocidental o protótipo do que tomamos hoje por “conceito”: uma construção teórica dentro duma teoria. É assim que temos conceitos de massa, velocidade e número natural, por exemplo. Na tradição de nossa ciência, o papel dos conceitos é o de tematizar e firmar as noções básicas de uma teoria ou campo de investigação; podemos considerar que os conceitos de uma teoria indicam do que é que ela trata, quais são – em um sentido amplo – seus objetos. (LINS, 1996b, p.137)

Na continuação, ele observa:

> A inserção de um sujeito em uma pratica científica, ainda que de forma “ficcional”, como muitas vezes se dá no plano do ensino-aprendizagem, passa necessariamente pela aceitação de que os objetos constituídos pelos conceitos são os objetos de que se trata naquela pratica, o que equivale a dizer que nesta inserção o sujeito deve pensar *com* e *sobre* aqueles conceitos: com relação ao pensamento científico, é natural considerar que este seja estruturado por conceitos. Parte considerável da atividade científica consiste, na verdade, em articular novas idéias ou evidência experimental aos conceitos básicos da ciência em questão. (LINS, 1996b, p.137)

Em outras palavras, nesse caso a atividade esta bem circunscrita – a atividade científica. Nesse contexto, os laboratórios de pesquisa, as universidades; empreende-se um esforço de resolver problemas da maneira mais geral possível. Na verdade, o objetivo da ciência é o domínio total dos fenômenos, é caminhar na direção de dizer tudo. Ele, então diz:

> [...] o pensamento científico, enquanto paradigma de verdade e excelência, oferece uma visão do que seja o pensamento humano “pleno”, e por este pensamento científico estruturar-se sobre conceitos, fica reforçada a tese de que todo pensamento o é. (LINS, 1996b, p.138-139)

Com esta afirmação, ele nos apresenta então a possível origem para o fato de que o pensamento se estrutura por conceitos. Além disso, ele também sugere o caminho pelo qual a influência dessa visão, provinda das ciências, fez-se presente na educação científica e matemática, nos seguintes termos:

> Boa parte de nossas tradições nas pesquisas sobre cognição derivam, direta ou indiretamente, de um interesse particular na educação, nos processos de ensino-aprendizagem. Esse fato, de resto muito natural, pois toda cultura deve cuidar de sua própria reprodução – se quer

> sobreviver –, nos fez acreditar por muito tempo que modelos cognitivos deveriam naturalmente levar em sua posição de destaque o que nossa ciência – coroa da civilização – atingiu. E com isso os conceitos passam a ser um "auge" natural. (LINS, 1996b, p.140)

Então, para ele, um dos ambientes de disseminação dessa posição tem sido a psicologia cognitiva. Em particular, um dos grandes divulgadores desse ponto de vista é, para Lins, Piaget. Para sustentar seu ponto de vista, ele parte do comentário de Valerie Walkerdine, sobre o projeto piagetiano, que diz:

Piaget estava profundamente comprometido, politicamente, com a erradicação da guerra e da competição, que ele rejeitava fortemente. Seu projeto se remetia à possibilidade do triunfo da razão sobre a emoção, através de uma ênfase nos processos naturalmente adaptativos dos organismos. Esta visão era compartilhada por vários pensadores progressistas e liberais que viam a possibilidade de uma sociedade racional e democrática, operando a partir do livre arbítrio e da razão. A ênfase no pensamento natural e sua importância hoje deve ser entendida nestes termos.[57] (WALKERDINE 1990, p.5, apud LINS, 1996b, p.138)

Ele então observa:

> Mas razão em Piaget, e seguindo uma tradição então já bem estabelecida, é a razão da lógica clássica. Não é nenhuma coincidência que Piaget se refira exatamente às mesmas estruturas-mãe de Bourbaki como as fundamentais do pensamento lógico-matemático, e que, como diz Walkerdine (1990), para ele, "matemática é pensamento". Por outro lado, a matemática é, por excelência, a ciência que lida com objetos "mentais", ideais, o que torna praticamente impossível concebê-la sem a noção de conceito, colocando esta noção na base de todo o pensamento humano, na visão piagetiana (e derivativas). (LINS, 1996b, p.138)

Além disso, ele chama atenção para um outro ponto relativo ao projeto piagetiano:

> Outro aspecto importante é que o projeto piagetiano, embora insistindo que a criança não é um pequeno adulto, as examina sempre pela falta, pelo que ele não é ainda, ficando o "pleno" reservado exatamente ao que nós (o ocidente racional

[57] "Piaget was deeply politically commited to the eradication of war, of competition, which he abhorred. His project concerned the possibility of the triumph of reason over emotion through stressing the naturally adaptive processes of organisms: This view was shared by many liberal and progressive thinkers who envisaged the possibility of a rational and democratic society, operating upon free will and reason. The stress on natural reasoning and its importance today must be understood in those terms". (WALKERDINE, 1990, p. 5, apud LINS, 1996b, p.138)

> e científico) somos. A investigação piagetiana dirige-se basicamente a estados, ficando reservado para a teoria discutir os mecanismos de passagem (cf., por exemplo, Garcia & Piaget, 1984), enquanto que a investigação vygotskyana, por exemplo, dirige-se tipicamente aos processos em mudança (cf., por exemplo, Vygotsky, 1987). (LINS, 1996b, p.138)

Com base no que foi dito, a questão passa a ser: por que assumir que o pensamento estruturado por conceitos causa problemas? De acordo com nossos objetivos, quando observamos a produção de significados de nossos alunos, o que vemos, muitas vezes, são afirmações do tipo: “O espaço vetorial é o lugarzinho lá onde moram os vetores” (OLIVEIRA, 2002, p.66) ou “O plano tem três dimensões”.

Assim, se fixarmos os conceitos de espaço vetorial e plano, presentes nos livros-texto, propostos pelos algebristas do século XX, não há outra alternativa de ler o que essas pessoas dizem senão pela falta. Porque o conceito tem como característica básica ser o que é certo, pelo menos num certo momento histórico. Em Álgebra Linear, espaço vetorial é uma estrutura algébrica e não uma casinha de vetores; plano é um subespaço vetorial de dimensão 2. Os conceitos em Álgebra Linear são, portanto, na prática científica dos matemáticos e como dizem Japiassu e Marcondes, “uma noção de base cuja definição é rigorosa”, isto é, eles estão circunscritos, bem delimitados.

Frente a essas falas, o que dizem os pesquisadores que assumem que o pensamento se estrutura por conceitos, ao checarem que o que é dito não é o que o conceito é? Sobre os pesquisadores que assumem o modelo piagetiano, Lins apresenta o seguinte comentário:

> Um efeito da concepção piagetiana é a noção de “misconceptions”, que se debate entre não poder aceitar a idéia de “conceito errado” (pois não seria um conceito), e o pressuposto de que o pensamento se estrutura através de conceitos. A solução habitual é procurar, subjacentes a “misconceptions”, por proto-conceitos, entendendo-se por isso uma noção que envolve pelo menos alguns aspectos (corretos) dos conceitos (plenos), mas também outros elementos (incorretos), podendo portanto serem vistos como germes da formação de conceitos, e ao mesmo tempo “responsáveis” por erros. (LINS, 1996b, p.138)

Para nós, o problema, ao assumirmos que o pensamento estrutura-se por conceitos, reside no fato de não existir nenhuma alternativa que nos permita não ler as pessoas pela falta. Isto nos desviaria de uma de nossas questões centrais: entender por que as pessoas dizem o que dizem. Nesse sentido é que uma posição alternativa faz-se necessária. A questão que se põe então é: que elementos de outra natureza, que não conceitos, estruturam o pensamento? A resposta é dada nos seguintes termos:

> Podemos chamar esses elementos de *objetos*, não no sentido de "coisa-em-si", mas no sentido de "coisas sobre as quais sabemos dizer algo, e dizemos". Uma tal noção refere-se, naturalmente, ao fato de que eles existem sempre no interior de atividades; o significado de um objeto não é o conjunto de todas as coisas que possivelmente poderíamos dizer sobre ele (uma noção que beira perigosamente o idealismo), e sim o conjunto das coisas que *efetivamente* dizemos sobre ele. "Massa" pode ser vista como um objeto, por exemplo, no interior de uma atividade na qual enunciamos que "a massa de um corpo varia com a velocidade desse corpo". Se em outra atividade enunciamos (newtonianamente) que, "a massa de um corpo é constante", *certamente o objeto é outro*. Há uma tradição que diria que são apenas duas "interpretações" de uma mesma coisa (uma delas sendo apenas aproximadamente correta), mas não penso que essa noção de "interpretação" de uma "essência" seja necessária (ou correta). *De fato*, é no interior de atividades que os objetos são constituídos. (LINS, 1996b, p.140, grifo do autor)

A seguir, podemos observar a diferença entre conceitos e objetos a partir de suas características quando Lins observa:

> Enquanto a noção de conceito pensa em caracterizações estáveis de objetos (e de preferência uma caracterização justa, minimal, como no caso de nossos conceitos científicos), os objetos enquanto noção básica são constituídos de forma redundante, muitas vezes, e são instáveis, na medida em que dentro de uma atividade é possível – e comum – que novas demandas ou condições se apresentem, que vínculos antes distantes se tornem próximos. (LINS, 1996, p.140)

Portanto, neste trabalho, operamos com a premissa de que o sujeito estrutura o pensamento por objetos por coerência com nossos pressupostos.

Como dissemos anteriormente, a produção de significados envolve também núcleos que desempenham papel central em nossa leitura. Como será evidenciado a seguir, eles carregam aquilo que é o dado para o sujeito, sobre o qual ele opera. É o que passaremos a discutir.

A noção de núcleo foi inspirada na construção de estipulação de Nelson Goodman (1984), filósofo norte-americano. Jerome Bruner em seu livro

“Realidade mental, mundos possíveis”, faz uma leitura das idéias de Goodman que, para ele, defende uma filosofia construtivista; sobre isso ele diz:

> Sua tese central, o “construtivismo”, é a de que, ao contrário do senso comum, não existe um “mundo real” único que preexista e que seja independente da atividade mental humana e da linguagem simbólica humana; o que chamamos de mundo é um produto de algumas mentes cujos procedimentos simbólicos constroem o mundo. (BRUNER, 1997b, p.101)

Sobre a construção e multiplicidade de mundos, Bruner comenta:

> O mundo da aparência, o próprio mundo em que vivemos, é “criado” pela mente. A atividade de elaboração do mundo é, para Goodman, um conjunto diverso e complexo de atividades, e sejam quais forem as outras formas pelas quais ele se expressa, as mesmas envolvem a “elaboração não com mãos, mas com mentes, ou melhor, com linguagens ou outros sistemas de símbolos [...]”. Os mundos que criamos, segundo ele, podem surgir da atividade cognitiva do artista (o mundo de Ulisses e de Joyce) ou das ciências (seja visão geocêntrica do mundo da Idade Média ou da física moderna), ou da vida comum (como no mundo do juízo comum dos trens, couves e reis). Tais mundos (ele insiste) foram construídos, mas sempre a partir de outros mundos, criados por outros, os quais tomamos como dados. Não operamos em algum tipo de realidade primitiva independente de nossas próprias mentes ou das mentes daqueles que nos precederam ou nos acompanham. (BRUNER, 1997b, p.102)

Assim, para Goodman, o real é uma construção mental na qual certas partes – as estipulações – ficam intocadas, de modo a produzir o efeito psicológico que descrevemos como realidade. A noção de estipulação, isto é, de tomar algo como dado, inspirou a noção de núcleo a partir da idéia de estipulações locais da seguinte maneira: no processo de produção de significados, existem algumas afirmações que a pessoa faz e que, tomando-as como absolutamente válidas, não sente necessidade de justificá-las. A essas crenças-afirmações, chamaremos de estipulações locais. E ao conjunto de estipulações locais constituídas no interior de uma atividade denominamos núcleo. Nesta direção, Lins (1997, p.194) comenta:

> Os elementos de um núcleo funcionam como estipulações locais: localmente são “verdades absolutas”, coisas que assumimos sem que haja a necessidade de uma infinita cadeia regressiva de justificações. O que é importante e revelador é que esse “localmente” se refere ao interior de uma atividade, e que no processo dessa atividade esse núcleo pode

> se alterar pela incorporação de novas estipulações (elementos) ou pelo abandono de algumas estipulações até ali assumidas.

Ainda na direção de esclarecer a noção de núcleo, Lins observa:

> Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação “realista” ou ficcional. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for. Núcleos não se referem especificamente a “conteúdos” ou “áreas de conhecimento”: em relação ao mesmo núcleo de balança de dois pratos, é possível produzir significado para uma equação, para a noção de justiça ou para fenômenos físicos diversos. (LINS, 1997, p.144)

É importante ter em mente que núcleo, no sentido proposto no MTCS, não se refere a algo estático, um conjunto de coisas, e sim, a um processo que se constitui no interior de atividades e dissipa ao final delas. Em uma outra atividade, novo núcleo se constitui e esse é o processo.

A relação entre a produção de significados e núcleos apresentam algumas características como, por exemplo, a consideração feita por Lins em comunicação oral:

> Tem uma coisa interessante: toda produção de significados envolve perda de significados. Num sentido muito preciso: para produzir significados é sempre em relação a um núcleo. Mas toda vez que você estabelece um núcleo, você deixa coisas de fora. No sentido de que tem coisas para as quais você não pode produzir significados. A produção de significados estabelece um recorte, uma categorização e, portanto, ela deixa coisas de fora. (LINS, 1996, ENTREVISTA COM O AUTOR)

Como podemos observar, esta é uma característica da produção de significados que se instala naturalmente, isto é, toda vez que produzimos significados estabelecemos um recorte.

Na observação do núcleo, numa dada atividade, podemos identificar a maneira de operar dos sujeitos bem como a lógica das operações ligadas ao processo de produção de significados para um texto. As operações são o que o sujeito faz com os objetos e a lógica é o que garante que ele pode fazer. Segundo Lins (1997, p.114), “toda operação é realizada segundo uma lógica” e ele vê como essencial a investigação dessas lógicas se queremos entender as formas de pensar de nossos alunos, de nossos sujeitos de pesquisa. Sobre isso ele comenta:

> Posto de uma forma simples, estamos nos referindo a um conjunto de estipulações, dentro de um núcleo, que se refere diretamente ao que pode ser feito com os objetos que estamos constituindo pela produção de significados. (LINS, 1997b, p.145)

A elaboração da noção de núcleo associada à de atividade permitiram que Lins reformulasse a noção de campo semântico. É importante observar que a noção proposta pelo MTCS é diferente daquela proposta pelos lingüistas. Segundo Doron e Parot (1988, p.125), o conceito de campo semântico foi proposta pela primeira vez por N. Trier em 1934; como eles dizem, “na acepção corrente, o campo semântico de uma palavra comporta o conjunto das palavras que a ele estão ligadas pelo sentido”. Para nós, campo semântico é entendido como a atividade de produzir significado em relação a um núcleo. Alternativamente, diremos que uma pessoa esta operando em um Campo Semântico toda vez que ela estiver produzindo significado em relação a um núcleo no interior de uma atividade.

Em resumo, quando uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação, observamos da perspectiva do MTCS o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve:

i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos;

ii) A formação de um núcleo: as estipulações locais, as operações e sua lógica;

iii) A produção de conhecimento;

iv) Os interlocutores;

v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade.

Vale ressaltar que, quando apresentamos esta lista de elementos – que usualmente chamamos de noções-categorias – em uma determinada ordem, não estamos querendo dizer que há uma seqüência de procedimentos, uma ordem de leitura, mas queremos dizer que é para o conjunto dessas coisas que estaremos considerando quando estivermos fazendo nossa leitura. Isto se constitui no que é dado para nossa investigação, sendo o nosso ponto de partida. O novo, o que queremos entender, o movimento na produção de significados é o que chamamos a dinâmica do processo.

Ao método que apresentamos acima denominaremos Método de Leitura Positiva, que tem como objetivo permitir um entendimento da produção de significados dos sujeitos humanos a partir na análise dos resíduos de suas ações enunciativas.

Capítulo 5
Análise da Dinâmica da Produção de Significados: Parte I

§ 1. Introdução

Neste capítulo e no seguinte, desenvolverei uma análise do processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa, com o objetivo, em mente, de investigar sua dinâmica.

A análise decorrente dessa investigação foi desenvolvida, como discutido no capítulo 3, em uma sala de aula de Álgebra Linear onde 18 pessoas – Ades, Ane, Azul, Betty, Diva, Duda, Judy, Lufran, Maria Helena, Maria Luiza, Mega, Mel, Mila, Morgana, Muiara, Pinho, Role e Teka - estiveram envolvidas na atividade de produzir significados para o seguinte problema proposto à turma: "Investigue se é possível existir um espaço vetorial real (isto é, IR é o corpo dos escalares) onde IR^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3." Assim, durante aproximadamente dois meses, essa turma, dividida em grupos, produziu significados na direção de resolvê-lo. Recordo que, na ocasião, a turma vivenciou uma situação atípica em sala de aula em que o professor esteve presente como autoridade, mas se ausentou como fonte de legitimidade, ao assumir perante a turma a postura de não dizer uma palavra sobre o conteúdo matemático relacionado ao problema em discussão.

A análise foi baseada nos resíduos das enunciações desses sujeitos de pesquisa, transformando-os em texto através da leitura ou leituras da produção de significados dessas pessoas, como proposto no capítulo 4.

Dividi a análise em duas partes: na primeira, que será efetivada neste capítulo, dirigi o olhar para a produção de significados dos sujeitos na interação face a face, buscando entender como se deu a dinâmica do processo neste contexto, fazendo uma leitura mais global dos sujeitos no processo. Na segunda parte, tema do capítulo seguinte, desenvolverei uma leitura deslocando o foco da turma para alguns sujeitos de pesquisa.

Na seção seguinte, a análise pretende ser uma suposta leitura "ao vivo" do processo, como se ela ocorresse em tempo real, como quem assiste criticamente a um filme e segue tecendo comentários. Com isto quero sugerir, como poderia ser uma análise idealizada de um professor frente à produção de significados de seus alunos, tendo à disposição o MTCS, como "instrumento" de análise.

As duas leituras pretenderam ser complementares, por acreditar que existiam especificidades que seriam perdidas se ocorresse apenas uma delas. O resultado final veio confirmar tal expectativa ao evidenciar que, investigar o processo em questão, das duas perspectivas propostas, foi decisivo para explicitar sua riqueza.

Por último, gostaria de observar que não buscarei desenvolver uma leitura nem objetiva, e muito menos completa da dinâmica do processo; mas objetivarei uma análise que nos permita uma fala plausível sobre essa dinâmica.

§ 2. Observando o processo de produção de significados na interação dos sujeitos

A observação inicia quando o professor propõe o problema a ser investigado. Após sua fala, as pessoas passam a se reunir em grupos, para iniciar a investigação. Esses grupos possuem a seguinte formação: no grupo 1, estão Mila, Betty e Mel; no grupo 2, Diva, Lufran e Role; no grupo 3, Morgana, Pinho e Ane; no grupo 4, Azul, Mega e Muiara; no grupo 5, Maria Luiza, Ades e Judy; no grupo 6, Teka, Duda e Maria Helena.

Com a turma novamente reunida, os grupos vão, um a um, apresentando suas primeiras considerações à turma a respeito de um encaminhamento para a resolução do problema proposto. Nesse momento, tem início, o processo de produção de significados de nossos sujeitos de pesquisa. Os membros do grupo 2 são os primeiros a falar:

Lufran: É, nós chegamos na teoria [...] que não daria. No R2, não daria pra corresponder a R3, por causa da dimensão. Não foi isso que nós chegamos? Seria um só, só se fosse uma coordenada zero, não seria isso?

Role: O R2 estaria no R3, né?

Diva: [...] a gente primeiro considerou a visão do texto; o que que era um espaço vetorial; em seguida, porque a gente tava querendo saber o que é dimensão, né? E como é que a gente chega para analisar a dimensão de um espaço vetorial. E aí, nós fomos chegando à conclusão do seguinte, que, por exemplo, se a gente tomar o espaço R2, o espaço R2, ele vai ter dimensão 2, né? E, por exemplo, se eu pego uma reta passando pela origem, inclusive a reta é um conjunto de vetores do R2. Pensou uma coisa assim? Aí, pra tentar concluir o exercício dele, a gente foi analisar o seguinte: então vai ver a dimensão, os subconjuntos que estão dentro de cada espaço. A gente pensou o seguinte: ó, quando a dimensão, “o R2 é o conjunto de vetores desse espaço" [lendo na lousa e colocando ênfase no artigo o]. Ó, se a gente pensar, o R2 é **o** conjunto de vetores desse espaço, então dá a impressão que o R2 tá coincidindo com o próprio espaço, né? Tá dando essa impressão? Agora, se por acaso, eu pensasse, por exemplo, o R2 é **um** conjunto de vetores deste espaço; então poderia pensar, por exemplo, que o R3 poderia ser o espaço que tivesse o espaço R2. [grifo nosso]

Observo que o problema que eles procuram resolver - a partir da leitura que fizeram do enunciado do problema parece passar por relacionar IR^2 a IR^3. Diva e seu grupo parecem tomar IR^3 e IR^2 como conjunto e subconjunto respectivamente. A palavra espaço é entendida como sinônimo de IR^3 e, em conseqüência deste entendimento, a frase "IR^2 é o conjunto de vetores desse espaço" presente no enunciado do problema é lida como: IR^2 é o conjunto de vetores de IR^3. Essa leitura levou-os à seguinte questão: ou IR^2 é **o** conjunto de vetores de IR^3, ou IR^2 é **um** conjunto de vetores de IR^3. Como observou Role, "uma palavrinha é suficiente para alterar o resultado, né?". Não parece ser claro para Diva o que é dimensão e como utilizá-la no contexto do problema. Noto, porém, que uma estipulação local para ela é: IR^2 tem dimensão 2.

O grupo 1 foi o segundo a se pronunciar sobre a resolução do problema:

Mel: [...] Então, a gente pensou o seguinte: se R2 coincide com esse espaço que eu tô falando, então se R2 é o único [ela diz isto enfaticamente – o único] subespaço então, eu não poderia ter dimensão três. Por quê? A gente também já viu um teorema onde dizia que, se a dimensão do subespaço coincide com a dimensão do espaço, então, a dimensão só pode ser a própria, que é dois. Então, a gente diria que não é dimensão três. Agora, a gente chegou a pensar que o R2 pode ser subespaço e, um do R3. Que aí a dimensão pode ser R3.

Constato, em sua fala e no comentário de Mila – que não apresentamos aqui –, que a mesma questão levantada pelo grupo 2 aparece para este grupo. Já Betty apresenta uma outra questão:

Betty: Mas a gente tá com um pequeno problema. Quando a gente pega um vetor em R3, a gente pode escrever x, y, z e em R2, x, y [ela escreve na lousa: (x,y,z) e (x,y)]. Mas, se a gente coloca o ponto zero aqui a gente pode falar que isso é equivalente a isso [isto é, que (x,y,0) equivale a (x,y)], ou seja,(x,y) / [enquanto falava ela fazia um esboço na lousa cuja reprodução está na figura 1 abaixo]

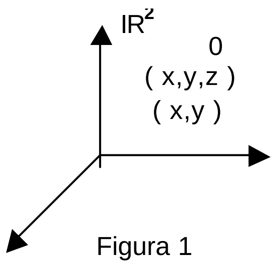

Figura 1

Mel: /Coincide geometricamente/

Betty: Coincide geometricamente em R2, tipo, considera esse plano, né? Que seria meu R2 [ela marca na figura 1 o que ela está chamando de R2]. Mas, se eu tô trabalhando no R3, equivale a dizer a mesma coisa?

Vemos, neste momento, que a produção de significados de Betty consiste em constituir os objetos IR^2 e IR^3 como o plano e o espaço, respectivamente. Ela parece estar operando com os objetos da Geometria Analítica, tais como pares, ternas, planos e a representação do espaço como um sistema de eixos coordenados tridimensional.

Na continuação, Pinho, falando pelo grupo 3, tece o seguinte comentário:

Pinho: É, a gente pensou nessa possibilidade aqui [referindo-se ao esboço na lousa que o grupo anterior havia deixado], de escolher, digamos um, colocar mais uma coordenada e essa coordenada zero e aí você teria o R2 como subespaço do R3. Mas aí a gente verificou que, embora o R2 seja um subespaço do R3, como espaço vetorial, ele continua tendo dimensão 2, né? Ou seja, ele tá dentro do R3 [...]

Pinho, como Diva, como pode ser observado em suas falas, apresentam como estipulação local o fato de que, para eles, o IR^2 tem dimensão 2. Novamente, apesar de Pinho falar em espaço e subespaço, IR^2 e IR^3 são tratados como se fossem subconjunto e conjunto, respectivamente. Na seqüência de sua fala, ele observa:

Pinho: Uma outra coisa que a gente pensou em explorar é que a gente tava trabalhando só com as operações usuais; que a gente chamou, né? As somas de vetores e os pares ordenados que a gente sabe. Agora, a gente vê nos livros, quando a gente aprende Álgebra Linear, espaço vetorial que, às vezes, o professor define uma operação que ele chama de soma, mas que não é aquela soma que a gente tá acostumado. Só que a gente não chegou a explorar essa parte. Então, pelo que a gente explorou, a gente acha que não.

Com essa fala, ele nos sugere que seu olhar se dirigiu para as operações, ele sugere a possibilidade de operar com operações não-usuais. Na seqüência das falas, o grupo 4 apresenta o seguinte comentário:

Muiara: Nós estivemos bastante parte do tempo na interpretação da pergunta, naquele, o corpo, aqui; o conjunto, e aqui, é possível existir um [apontando para o enunciado do problema escrito na lousa]. Como o primeiro grupo anunciou também. E fizemos figuras, desse tipo [referindo-se aos esboços na lousa deixados pelo grupo 1]. Temos esse plano em oito pedaços para poder analisar retas, origem, vetor. As perguntas ficavam meio assim: o R3 é composto de planos, ele é um espaço formado de planos, os planos de retas, e aí, será que a soma das retas é um plano? Será que a soma dos planos é um espaço? Aí acabávamos esbarrando naquilo ali: é um ou é o todo em volta?

Vemos que novamente a leitura do enunciado do problema levou à mesma questão levantada por Diva, anteriormente. Por outro lado, Mega parece confuso e diz:

Mega: É, nós discutimos essa questão dos três planos, as coordenadas, daí nós pensamos, assim, nesse escalar também. Se você multiplicar por um escalar, verificando todas as propriedades que seguem para que seja / as condições para que seja um espaço vetorial, né? Então, a gente /eu falei/ uma delas é que seja combinação linear. Como é que é? Agora eu me perdi.

Azul: Não, nós nos atemos primeiro em verificar em verificar tudo isso: o que era espaço vetorial, corpo, escalar. E a primeira impressão nossa, a minha e a do Mega, era sim; e da Muiara, não. Então, nós começamos a mudar a pergunta; porque se a pergunta fosse: numa dimensão 3 as possibilidades do R2, tá? Agora, se é R2, para você chegar numa dimensão 3, não teria essa possibilidade; porque a dimensão 3, ela tem que incluir.

Mega: R2 está contido no R3.

A partir de suas falas, observo que Azul e Mega constituem IR^2 e IR^3 como conjunto e subconjunto, respectivamente. Sendo assim, a operação em jogo é "estar contido/conter". Operando dessa maneira, ela sugere mudar a pergunta. A questão que fica é: por que a pergunta proposta pelo professor precisa ser alterada? Talvez, suas ações enunciativas esclareçam este ponto no decorrer do processo. Na continuação, o grupo 5 é o penúltimo a se pronunciar; Ades diz:

Ades: [...] no começo, né? Quando a gente começou a considerar que seria, por exemplo, o canto da sala ali, as três paredes, o chão e as duas paredes. [...] Aí eu também pensei no seguinte: quando você pega dois vetores paralelos, você considera que é o mesmo vetor, tanto é que você faz soma, regra do paralelogramo, etc, fazendo a transposição do vetor. Então, o vetor paralelo a ele mesmo, a um outro vetor é o mesmo vetor. Assim sendo todos os vetores; se você tem dois vetores paralelos que tão formando o plano, por exemplo, no fundo da sala, e você transpõe esse vetor, mexe pra cá, por exemplo, você tem um outro plano. [...] As classes de eqüipolência. O conjunto das classes de eqüipolência, não seria R3? [...] O conjunto das classes de eqüipolência seria o R3. E daí me veio a idéia de que o espaço seria uma expansão do plano, né? Na medida em que você não considera ser diferentes; na medida que você considera os dois vetores paralelos, como sendo o mesmo vetor, então o que você está fazendo é uma expansão do próprio plano. Então o espaço seria uma expansão do próprio plano.

Em sua fala, vemos que, ao dizer espaço, ele está se referindo ao IR^3 e, por plano, ele está se referindo a IR^2. Porém, sua maneira de operar fica mais clara quando o professor, ao vê-lo falando de IR^3, o questiona e cria o seguinte diálogo:

Prof: Que é o R3 o quê?

Ades: Que é possível você obter o espaço vetorial R2; não, péra aí [Olhando para o enunciado do problema na lousa].

Maria Luiza: Que é possível você obter um espaço vetorial real.

Ades: R3 a partir de R2, que seria esse plano.

Nesse momento, tenho a primeira evidência de que sua leitura do problema proposto nos sugere ser: obter IR^3 a partir de IR^2. Este é o problema que ele está tentando resolver. Judy, por sua vez, comenta:

Judy: O que a gente pensou é que, como pede um espaço real de dimensão três, então esse espaço podia ser o R3, todo. Mas aí, logo de cara, a hipótese ali fala que não [referindo-se ao enunciado do problema na lousa], que os vetores todos são do R2. Então todo volume dessa caixinha [indicando o sistema de eixos coordenados esboçado na lousa] não poderia tá contido. Quando variasse tudo aqui, né? Não poderia pertencer [referindo-se ao vetor anotado na lousa]. Aí a gente pensou: então são os três planos, a união dos três planos. Mas aí, a nossa última pergunta agora, assim, foi: mas qual a dimensão da união dos três planos? Será que é três? A gente ainda não teve tempo de responder isso. [...] Quando a gente pensou nessa união dos três, aí eu propus pra eles, por que não os planos paralelos? Aí a gente até pediu ajuda pra um grupo ou pra outro, assim, que achasse alguma coisa de que, o que que é um plano paralelo? Aí achou vetores eqüipolentes, classes de eqüipolência, em que um plano paralelo, ele precisa de três vetores pra ser determinado.

Observando o final da fala de Judy, concluo que os objetos classe e classe de eqüipolência, presentes na fala de Ades, parecem ter surgido durante a reunião de seu grupo. Pode ser nesse momento que esses objetos foram constituídos e incorporados à sua justificação.

O grupo 6 é o último grupo a falar sobre a investigação do problema proposto. Sobre o problema, Teka comenta:

Teka: Nós ficamos na discussão também daquela questão que vocês colocaram lá: ou é o conjunto ou é um, né? Se for “o” tem uma visão, se for “um”, a gente passa a ter outra; isso na nossa discussão. Esse é o ponto da nossa dúvida e a gente questiona, questiona e cai nessas duas posições. Não sei se é por aí que a gente precisaria / na verdade, a gente, assim, tinha uma certa certeza, entre aspas, né? Procuramos, assim, caminhar em função do sim e agora, a gente não sabe nem se sim ou se não.

Ao observar as falas dos grupos, o professor pede explicitamente, através da proposição de uma tarefa, que eles falem sobre o que entendiam por IR^2 e IR^3. Em resposta à tarefa proposta, Lufran, Role e Ades dizem:

Lufran: O R2 seria, de um modo geral, seria um plano, o R3 seria o espaço. O R2 é um conjunto de pares ordenados x, y que corta todo o plano e o R3 seria o espaço. Eu entendi isso. Eu não vejo outra coisa que possa ser o R3, que já um par ordenado, também de três coordenadas, que corta, que cobre todo o espaço, as três dimensões.

Role: Então, a gente pensou o R2 geometricamente, né? Representamos todos os vetores em x, y, né? No cartesiano, "todos os pares x, y com origem em O tal que preenche todo o plano". E o R3, também, a terna x,y,z, e a gente mostrou que preenchia o espaço, né? Então nós pensamos dessa forma o R2 e o R3.

Ades: Bom, eu continuo achando que / bom, R2 é o plano, não tem dúvida, né? Mais fácil à gente enxergar quando você projeta os planos, esses planos ou faz a união de todos esses planos, você obtém o espaço, né? Ou obtém o R3. Então, o R2 para mim é uma, uma, não sei se uma simplificação, mas um elemento formativo do R3. Então você coloca esse plano, esse R2, em todas as direções, você obtém o espaço.

Observo que Lufran diz: "Eu não vejo outra coisa que possa ser o IR^3"; por outro lado, Ades inicia sua fala dizendo: "Bom, eu continuo achando que...". Uma possibilidade é que o fato de o professor ter marcado: "falem sobre IR^2 e IR^3", considerando que eles já haviam dito, colocou-os em estado de alerta; algo do tipo: o que poderia ser IR^2 e IR^3 além do que já dissemos que é, além do que já dissemos sobre ele? Porém o mais importante aqui é o fato de que os objetos IR^2 e IR^3 são, e só podem ser, nesse momento, o plano e o espaço, respectivamente.

Ades segue expondo suas idéias; continuando sua fala anterior, ele diz:

Ades: [...] Aliás, aí tem uma coisa interessante também, não sei se vocês sabem? O ganso só enxerga em duas dimensões. O ganso e o marreco. Então, você não precisa pôr ele num cercado. Você passa um risco no chão e ele não sai daquele risco porque ele tá vendo aquela linha como se fosse uma barreira. Então pode fazer a experiência, põe lá e passa um risco, uma tinta branca, cal; ele não sai do lugar. Porque ele não enxerga o R3. Ele enxerga só o R2, ele tem visão em duas dimensões. Então, aquele risco para ele significa uma parede, limitado, né? Eu enxergo dessa maneira. Tem o espaço, seria a parede, né? Só que nós conseguimos discernir isso, conseguimos distinguir o R3 do plano. Então, a gente não vê a parede, mas vê a terceira dimensão que seria / ele está simplesmente no plano, né? Uma vez que aquela dimensão não existe pra ele, ele tá no plano. Porque eu tenho a capacidade de enxergar uma terceira dimensão. Na medida que eu não tenho a capacidade de enxergar essa terceira dimensão, dois e três é a mesma coisa. Agora, se eu expandir esse dois em todas as direções, eu consigo enxergar o R3. Eu não consigo caracterizar bem, mas é assim que eu vejo. Exatamente isso que eu quero fazer, essa ligação de um com outro eu não consegui fazer, desde que a gente aprenda algebricamente, né?

Ades segue falando, reiterando sua maneira de operar. Vou observando que suas certezas e afirmações categóricas vão levando algumas pessoas a falar na sua direção para dialogar, para legitimar sua falas, para compartilhar um mesmo espaço comunicativo. Talvez, pela ausência do professor como autoridade que legitimasse a fala das pessoas, estas vão se voltando para Ades. Role, por exemplo, diz:

Role: Posso fazer uma complementação, não sei, também pensei nessa situação. Seria como se fosse um caderno, o plano, né? [ele levanta o caderno brochura]. Você vai girando ele, você vai abrindo todos eles. Não seria como se fosse um sanduíche [ele faz gestos com a mão sugerindo planos paralelos]. Mas esse giro que desse a terceira dimensão.

Diva, por sua vez, parece levar a sério as considerações de Ades, como, por exemplo, produzir significados para o seguinte resíduo de enunciação:

Ades: Agora, eu pensei exatamente nos planos, infinitos planos, né? Porque o plano também é infinito na sua dimensão plana, né? Então, vão dizer, pra cá é infinito, pra cá e pra lá. Na medida em que você faz vários planos paralelos, você começou a gerar o espaço, né? [...] Uma folha é um plano [abrindo a capa do caderno]. O caderno já é o plano, com vários planos em seguida, já é o plano paralelo que você tem terceira dimensão que é o espaço. Você extrapolando pra cá e pra cá é infinito. Você tem o espaço todo, né? Porque aqui você não tem limitação. No plano você não tem limitação, o plano já é infinito. A limitação seria aqui [ele usa o caderno como plano e indica a limitação para fora do plano do caderno]. Então se você coloca / imaginar todos planos paralelos a esse plano, você tem o espaço.

Diva inicia um diálogo com ele, nos seguintes termos:

Diva: Posso fazer uma pergunta para o colega?

Prof: Pode.

Diva: Porque ele definiu o R2 como sendo o plano. O que que é o plano pra ele?

Ades: Pra mim, o que seria o plano?

Diva: O que seria o plano pra você?

Ades: Bom, quando eu pego dois vetores linearmente independentes [ele faz um gesto com a mão mostrando o polegar e o indicador]. A união desses dois vetores linearmente independentes.

Diva: Aí, é que eu pergunto, pelo seguinte, que você falou assim, quando você referiu ao R3, seria quase como se fosse uma /

Role: /Sobreposição/

Diva: De planos, né?

Ades: Paralelos.

Diva: Paralelos. Então, plano pra você teria / como é que seria esse plano?

Ades: Bom, eu tô entendendo o plano como uma folha de papel infinita.
.
Diva: Essa folha de papel infinita, ela tem quantas dimensões?

Ades: Duas. Só definido pelos dois vetores l.i.

Diva: Mas, por mais fina que fosse a folha de papel, ela não seria tridimensional?

Ades: Não, pelo menos pelo que eu compreendo não, né? Não tem a terceira, né? Não tem essa terceira dimensão.

Diva: Mas se ela não tivesse dimensão como é que você fosse sobrepor uma sobre a outra não ia formar nada. Se ela não tiver dimensão, né? [olhando para o professor] Se ela não tiver uma terceira dimensão. Porque aí na hora que você vai colocando uma sobre a outra ia fazer diferença. Então, teria que ter um mínimo de espessura pra hora que você fosse colocando uma sobre a outra, ela fosse formando uma outra, sei lá?

Ades: Tá, entendi. Só que eu não pensei em termos de espessura, né? Eu pensei foi em termos de localização, entendeu? Não de espessura. [...]

Ele continua falando, e ao concluir, ele pergunta se ela entendeu o que ele disse. Diva balança a cabeça em sinal de negação e diz: “Não consegui ver a idéia dele. Não consegui, não consegui ver. Foi por isso que eu perguntei.”

Durante o diálogo com Diva, Ades, em resposta aos seus questionamentos, nos sugere, pela segunda vez, no que constitui, para ele, o problema a ser investigado:

Diva: Como é que seria esse R3 pra você? Porque a gente também tá definindo o R3, né? Então, como seria esse R3?

Ades: A partir do R2, né? Que foi a pergunta do professor. Como seria esse R3 a partir do R2?

Observo que na turma seguem dialogando com Ades, Role, Lufran, Maria Helena, Mega, Diva e Muiara; o resto da turma ou fala esporadicamente em outra direção ou fica em silêncio. Esse grupo, por sua vez, fala de vetores exibindo os dedos ou usando a caneta, de planos exibindo as páginas do caderno, de giros de planos, eixos de rotação, planos paralelos, intersecção de planos. Observando tudo o que está sendo dito, Muiara comenta: “Isto aí faz lembrar a busca da menor partícula”. Ela fala e sorri. Porém, sua fala em vez de silenciar as pessoas, leva a uma intervenção de Role que dá continuidade às falas na mesma direção:

Role: Eu acho que começa com uma geometria, passa por uma geometria aí, né? Passa num ponto, né? Fica difícil até ser aceito, mas são definições de ponto, tá? Eu vi um livro com mais de trinta definições, não é? Fala de definições absurdas, assim, que você tem um ponto quando você tem duas retas.

Ades continua falando na direção do seu entendimento do que deva ser o encaminhamento de resolução do problema. Ao que parece, ele vai procurando reunir elementos que sustentem seus argumentos:

Ades: Mais é por aí que eu tô pensando, quer dizer, quando você vai definir R3? Quando você estabelece uma distância a esse plano original, vamos dizer assim? Porque embora se você tá imaginando que eles existem, né?, você tem como referência só o R2. A partir do R2 você pode definir o R3. É só você estabelecer outro ponto. Aí você tá definindo, né?. Vão dizer que você tem a parede como referência só e tem uma mosquinha voando. Você vai definir a posição dessa mosquinha em relação à parede. Daí você tá falando de espaço, você não eliminou a parede? Você tem que ter a parede. Agora, não precisa ter outra parede na mosquinha, né? Cê tem uma coordenada você definiu o espaço ali, em função daquela sua parede que é o R2, entendeu? Porque é assim que eu tô pensando.

A discussão vai se alongando, dando a sensação, para quem presencia, que vai se prolongar indefinidamente, monopolizada, principalmente, por Ades, Role, Mega e Lufran, com intervenções esporádicas de Muiara e Diva. O resto da turma se mantém em silêncio. Observamos que só Ades e Diva estão falando na direção de resolver o problema. Os outros estão falando na direção de responder à pergunta inicial do professor, a saber: o que é IR^2 e IR^3? O professor, então, intervém, sugerindo que outras pessoas falassem. Imediatamente, Azul se levanta de sua carteira e, falando, sai em direção à lousa, sugerindo que não entendia o motivo de tanta discussão; ela diz:

Azul: Eu queria colocar aí na lousa uma coisa que eu não sei. Agora eu vou fazer até o papel de quando o aluno tem / pode ser até que seja totalmente errada.Mas eu acho assim, pra mim, é uma coisa bem simples, eu não sei se tô totalmente fora disso ou se / O que que é o R pra mim? [ela traça uma reta na lousa] Pra mim é pegar todo o sistema nosso de numeração. Pra mim, seria isso aqui [ela faz riscos sobre a reta sugerindo pontos] todos os pontos, infinitos pontos, pra mim é R. Se eu fizer mais uma [ela traça uma reta perpendicular à anterior] e colocar infinitos pontos aqui ó, pra mim é outro R. Agora se eu unir isso aqui infinitamente, pra mim é R2. Eu não sei se pra mim é tão /eu vejo assim, isso aqui tudo unido, certinho é o R2. Daqui, aí, tira um ponto fora, desse ponto que tá aqui fora eu relaciono aqui, eu faço o R3. [com a mão, ela sugere um ponto fora do plano da lousa]. Pra mim é isso. Eu não sei se eu tô simplificando alguma coisa demais, mas tenho essa visão. Eu acho assim, se eu quiser o R3, eu tenho eu tenho que tirar um ponto fora daquele R2; se eu ligar, eu tenho R3. Se eu conseguir montar uma terceira dimensão, se eu pegar um outro ponto fora dessa terceira e ligar, vou ter R4. Agora, eu não consigo visualizar essa quarta, o R4. Mas, eu acredito que nesta mesma medida e proporção, deve existir.

Considerando a fala de Azul, Role diz:

Role: Essa visão acho que nós temos, porque nós aprendemos isso na escola, né? Então é uma coisa que nós carregamos. Mas eu acho que a profundidade é um pouco maior que isso, né? Até o IR é difícil da gente compreender, né? Não é verdade? Nós fizemos um curso /

Duda corta a fala de Role para dizer:

Duda: /Eu acho só/ que a gente tá fantasiando um pouquinho aqui. A visão que ele tá tendo ali de planos paralelos no R3 eu não consigo. [enquanto fala, ela faz gestos com as mãos sugerindo planos enfileirados mencionando uma fala anterior de Ades].

Olhando para as colocações de Azul e Duda, sou sugestionado a pensar que o que é IR^2 e IR^3 está tão "cristalizado", tão "solidificado" para elas que tudo que está sendo dito, fora do que este objeto é, para elas, não tem nenhuma legitimidade. Observo, no entanto, que as colocações de Azul e Duda não silencia as pessoas que estavam falando. Em particular, Role, Maria Helena e Lufran continuam discutindo o fato, por exemplo, de que o IR^3 pode ser obtido girando o IR^2. O professor pára novamente a aula e, antes do intervalo, propõe a seguinte tarefa:

Prof: Bom, o tempo acabou. É o seguinte: eu vou pedir pra vocês voltarem a discutir, a investigar, a tentar responder aquela pergunta geral da aula passada. E eu só vou pedir pra vocês, como primeira tarefa, cada grupo vai me dizer, quais são as noções ou conceitos, pra quem quiser chamar, que estão envolvidos naquela tarefa, naquela pergunta?

Mila: No problema inicial?

Prof: No problema inicial, tá?

No retorno do intervalo, os grupos voltam a se reunir para discutir a tarefa proposta. Após a reunião, todos se reúnem na sala para retomar a discussão e o professor diz:

Prof: Alguns grupos chegaram a uma resposta para aquela pergunta, que eu pedi para investigar. Eu vou pedir para esses dois grupos apresentarem os argumentos deles, apresentarem as respostas e aí a gente discute, tá? [...] Então vamos lá?

Diante desse relato, o professor propõe aos grupos que apresentem o encaminhamento da resolução do problema à turma. O grupo formado por Maria Helena, Duda e Teka é o primeiro a se pronunciar:

Prof: Questão de ordem, a resposta de vocês para aquela pergunta é sim, é possível, ou não, não é possível?

Marta: Não, não é possível.

Prof: Tá.

Maria Helena: [...] Então, eu vou lê o que a gente escreveu, depois eu rabisco na lousa pra gente ver. Então a gente escreveu assim: "lendo o problema verificamos que R2 é o conjunto dos pares ordenados, formado por números reais". Ele tá falando isso lá. [referindo-se ao enunciado do problema proposto] "Esses pares ordenados no plano cartesiano ortogonal geram pontos de coordenadas x e y." Não é? Que x pertence ao real e y pertence ao real. Então assim [ela fala e esboça dois eixos coordenados perpendiculares na lousa]. É isso que a gente quer dizer que vai formar um monte de pares ordenados.E aí, o que que acontece? [ela volta a ler] "Os vetores resultantes dessas coordenadas reais formam um conjunto de vetores do R2 [...] e geram um espaço vetorial de dimensão 2."

Ao término de sua fala, ela e suas colegas de grupo são questionadas, motivando o seguinte debate com a turma:

Betty: Como essas coordenadas são determinadas?

Maria Helena: x e y, x pertencente com reais, y pertencente com reais. Aí essas coordenadas formam vetores, esses vetores formam o espaço vetorial de dimensão 2, não é? Ponto. "Portanto, se torna impossível, nessas condições, existir um espaço vetorial real que tenha dimensão 3." Porque ele não falou nada. Ele só perguntou se é possível existir o espaço vetorial nessas condições que ele colocou, com dimensão 3. É possível? Eu acho que não. Eu acho não, eu tenho certeza diante disso aqui [referindo-se às anotações do caderno], que não. Agora, se tiver outra possibilidade, pelo amor de Deus.

Duda: Essa é a conclusão que nós chegamos.

Maria Helena: A gente chegou nisso, acabou, ponto.

Mel: Então, vocês consideram que o espaço vetorial procurado é o R2?

Marta: Sim.

Duda: A pergunta não é essa?

Teka: Dimensão dois, R2 gera um espaço vetorial de dimensão dois.

Mel: Tá, mas então o espaço vetorial procurado é o R2, só pode ser o R2?

Maria Helena: Não, eu não tomei o espaço como R2, assim, o espaço tem que ser R2. Eu fiz tudo que tá falando no problema. O problema me falou isso. Que ele pegou as coordenadas, oi?

Mila: E você chegou a essa conclusão?

Maria Helena: Não, eu não cheguei, eu fui fazendo /

Duda: [Olhando para o caderno na mão ela diz] Ele disse aqui que ó, “R2 é o conjunto de vetores desse espaço” [lendo].

Maria Helena: Desse espaço, desse espaço real.

Betty: Você só pode ter o R2?

Teka: Eu tô verificando o R2.

Maria Helena: Eu vi que no R2, não.

Diva: Como vocês chegaram a conclusão que esse conjunto de vetores, que ele / como é que você falou?

Maria Helena: [Lendo] [...] “Os vetores resultantes dessas coordenadas reais formam um conjunto de vetores do R2”. Isso é teoria.

Teka: A dimensão é dois porque eu tô usando /

Maria Helena: /A dimensão/ é dois.

Diva: Como vocês chegaram a essa conclusão?

Teka: Porque usou o par.

Diva: Por que usou o par?

Maria Helena: Duas dimensões. Tem mais alguma dimensão? Não tô vendo outra dimensão aqui? Ele pegou o par.

Diva: O que seria pra vocês a dimensão do espaço?

Maria Helena: Né?, o espaço, a dimensão [ela indica os eixos coordenados esboçados na lousa].

Teka: Tô pensando em dois eixos, tô trabalhando em dois, R e R. Tô localizando nesse espaço. Assim a gente verificou.

Maria Helena: Então, a gente acha que não [abaixando a voz].

Observando a fala do grupo, vou percebendo que, para elas, o IR^2 é o plano cartesiano, decorrendo daí que dimensão do IR^2 é 2 – uma estipulação local. Além do mais, isso parece ser tudo o que Maria Helena pode dizer, neste momento, sobre o enunciado do problema. Isto fica evidenciado para nós em suas próprias palavras: “Agora, se tiver outra possibilidade, pelo amor de Deus”, ou, “A gente chegou nisso, acabou, ponto”.

Durante as falas, Betty toma a palavra e faz a seguinte intervenção:

Betty: Eu só queria colocar uma coisa. Se você olhar pra R2 como sendo elementos de um conjunto e a partir disso você definir operações de modo que tenha dimensão três; Você ainda continuaria olhando desse modo? É, pros eixos ortogonais como vocês disseram? Não sei se vocês tão entendendo?

Duda/Maria Helena/Teka: [falando juntas] Não, não.

Betty: Tipo assim, cê tem R2, seu conjunto de vetores, tá? A partir disso, é possível você definir operações de modo que eu não vá olhar para o par ordenado x,y?

Maria Helena: Somar vetor, multiplicar vetor.

Betty: Isso, tipo, eu vou somar vetores x mais y de uma maneira que eu não faça a mesma coisa que eu tô acostumada a fazer no plano usualmente, de modo, vão supor, a obter uma terna, não sei?

Maria Helena: Eu não sei assim, como? Como que você vai somar vetor com duas pra você ter três?

Duda: Você tem duas coordenadas, como é que você geraria a terceira? Que operação seria?

Betty: Então, é será que não seria o caso de definir uma operação pra tá determinando um espaço vetorial de dimensão 3? Porque da maneira que vocês fizeram, deu a impressão que, ao fazer dessa forma, o conjunto R2 com as operações usuais, aí sim vai ter dimensão dois. Aí eu mudaria a pergunta: será que tem uma outra operação que isso ocorra?

Duda: Não sei. Eu não sei.

Maria Helena: Não, a gente não pensou em nada disso. Pensamos só assim, nas coisas / bom, não chegamos a mexer nisso, não sei. Não sei se pode.

Duda: Não cogitamos essa possibilidade.

A colocação de Betty dá início a um longo questionamento do professor ao grupo. Noto que nenhuma delas produzia significados para a enunciação de Betty. Baseio minha afirmação na observação de suas falas; por exemplo, Teka comenta:

Teka: Não consigo imaginar como? [Falando baixinho] [...] Como faria isso? Como? Que condições? Qual operação? Como seria isso? Pra dizer pra você que sim ou não, eu precisaria entender o como?

Nesse momento, instala-se o seguinte paradoxo didático, conseqüência dos questionamentos do professor: como é possível falar de uma coisa que eu desconheço? Para a qual eu não consigo produzir significados?

Maria Helena, por sua vez, mantém sua posição inicial, de não se permitir cogitar qualquer outra possibilidade de resposta diferente daquela a que chegou. Seguindo esta conduta, ela diz: "Eu acho que não. Eu acho que isso que a gente fez, dentro do texto, tá fechado".Duda, por outro lado, assume uma postura diferente, em resposta ao questionamento do professor; ela diz: "Se eu levo em consideração o que ela tá dizendo; eu pesquiso mais. Eu diria que eu não sei se é possível."

Na continuação, Pinho, que já havia mencionado a existência de operações não-usuais, é a única pessoa da turma a tecer um comentário sobre a colocação de Betty; todo o resto da turma mantém-se em silêncio. Ele diz:

> Pinho: Eu acho que a questão é pertinente porque quando a gente investiga, digamos, quando a gente tenta entender o que é um espaço vetorial e descobre que o espaço vetorial, digamos, é algo que é composto, digamos, tem quatro coisas num espaço vetorial que é um conjunto de vetores, um conjunto de escalares e as duas operações. Na sua pergunta, você fixa duas dessas coisas, que é o conjunto de vetores e o corpo de escalares, não fala nada sobre as duas operações, né? Então, a gente trabalhando com as operações usuais, pelos exemplos que a gente chegou, parece que com as operações usuais, realmente não dá pra ter um espaço com dimensão três. Agora, com as operações não-usuais, a gente também não sabe porque não investigou isso. Então, por isso, eu acho que a questão dela [se referindo a Betty] é pertinente.

Pinho, falando à turma, apresenta seu entendimento do objeto espaço vetorial como algo composto de um conjunto de vetores, um conjunto de escalares e as duas operações; ele fala de operações usuais e não-usuais. A importância da colocação de Betty e a fala de Pinho no processo são, neste momento, na introdução, de maneira explícita, de novos[58] objetos à discussão – operações usuais, não-usuais e espaço vetorial como um objeto composto de quatro coisas – e da inserção de uma nova questão: existem operações não-usuais?

O segundo grupo, que acreditava ter solucionado o problema, apresenta sua resolução à turma:

[58] O termo "novos objetos" aqui se refere aos objetos que ainda não haviam sido mencionados em sala de aula.

Muiara: Nós colocamos assim: “por mais vetores reais que consideremos, se não tivermos pelo menos um ponto fora do R2 não podemos obter a dimensão três”. E aí como figura que a gente poderia aproveitar / como você se chama mesmo?

Ades: Eu? Ades.

Muiara: Ades. R2, temos como figura a parede, um plano como a gente usualmente pensa. E esse outro ponto fora, seria a mosca. Se não tiver isso definido, então, como é que vai gerar a dimensão três? Então, eu acho que acaba caindo numa coisa assim: se a mosca tá fora do plano é porque existe alguma coisa além dele, né? Pelo menos, dá origem a essa dimensão três. Então sem esse elemento fora do R2, nós respondemos, também, que não. E concordamos com o argumento do grupo anterior, né? Agora /

Azul: /Se você/ tem o conjunto de vetores em R2, tá? Por mais que você trabalhar operações neles / nós vimos que era / com isto nós vimos até na outra aula / toda a parte de espaço vetorial e o que realmente era espaço vetorial, o que que acontecia, o que que precisa, por que que era? Daí, nós chegamos à conclusão que se eles estiverem realmente em R2, se eu não tiver nada fora dele, não tem como ter uma outra dimensão. Se fosse só pra colocar como sendo vetores de R2, pelo menos eu sinto assim. Claro, que no início, na outra aula, nós tínhamos pensado assim: se a gente mudar / cadê a pergunta? / Se nós mudarmos a pergunta, como ela colocou também, né? Aqui, se em vez de colocar “investigue se é possível existir um espaço vetorial real e que tenha dimensão três, onde R2 é o conjunto de todos os vetores do espaço?” Se eu tô afirmando que ele tem dimensão três, daí eu consigo retirar o que é R2. Mas, no texto do jeito que esta, eu acho que não dá.

Novamente, observo Azul sugerindo a mudança do enunciado do problema. Da sua fala vemos que ela parece não produzir significados para o problema proposto como ele está formulado. Ela diz:

Azul: Não, porque se você / a pergunta foi assim ó, “investigue se é possível existir um espaço vetorial real e que tenha dimensão três, onde R2 é o conjunto de vetores do espaço”. Então, se eu já tenho a dimensão três, eu consigo tirar tudo de R2. Se eu já tenho a dimensão três, eu consigo tirar todos os R2. Se já está gerado o três, eu consigo o dois.

Judy, observando o que ela diz, faz uma intervenção na direção de contradizer sua afirmação:

Judy: Não é isso que o Callioli fala aqui, na página 48 ó: [com o livro aberto sobre o colo ela lê] “observemos que os elementos de R2 e os de R3 são de natureza distinta e, assim sendo, não deve o leitor cometer o engano de dizer que R2 é subconjunto do R3”.

Mega toma a palavra e Azul fica em silêncio. Observo que Judy faz uma afirmação que poderia colocar por terra os argumentos de Azul, pois ela opera considerando IR^2 e IR^3 como subconjunto e conjunto, respectivamente. Na continuação, Maria Luiza retoma a discussão, porém, Azul parece não prestar atenção à pergunta e diz:

Azul: Não, eu acho que / eu andei agora pensando, eu tô vendo / colocando isso, que na minha opinião se eu tenho a dimensão três, / não é que / claro, não são todos / mas, eu forçosamente vou ter / agora eu tô vendo mais claro isso / eu vou ter R2 na dimensão três, agora o contrário não pode ser. Se eu tenho dimensão 2 eu não posso ter R3. É isso que eu quero colocar? Pra mim, agora, ficou claro, assim, eu não vou dizer que todos? Realmente, todos, não. Mas se eu tiver dimensão 3, eu tenho certeza que eu vou ter R2. Agora, se eu tiver dimensão 2, eu tenho certeza que eu não tenho R3? [...] Então, pra mim ficou claro. Agora, eu não sei se é isso que eu consegui passar na hora que eu falei? Entendeu?

Maria Luiza: Quando você falou, você falou assim: qualquer vetor poderia ser do R2. Foi a fala dela antes.

Azul: /Sabe, o que eu queria colocar/, eu sei, na hora que eu me expressei, eu acabei não colocando o meu pensamento. Mas, meu pensamento é esse: se eu tenho dimensão três, eu consigo R2, nele, tá? E se eu tenho dimensão 2, eu não consigo R3. Então, eu acho que, no início, sei lá.

Ela parece não produzir significados para a fala de Judy. Sua atenção parece estar dirigida a uma pergunta anterior de Mel que questionou: “Mas todos?”, a partir da afirmação de Azul de que “Se eu já tenho a dimensão 3, eu consigo retirar todos os IR^2.

Na seqüência, Diva faz a seguinte observação, abrindo uma nova discussão:

Diva: Eu ainda não entendi essa história da dimensão. Eu não entendi no grupo dela aí [referindo-se ao grupo anterior]. Não tô entendendo no seu grupo. Essa história da dimensão.

Marta: Mas, por quê? [Várias pessoas começam a falar ao mesmo tempo e a Diva retoma]

Diva: Por que você tá falando assim ó: a partir do R3 aí eu vou conseguir o R, como é que é? Da dimensão 3 eu consigo a dimensão 2. Mas, a partir da dimensão 2 eu não consigo a dimensão 3? Então o que que é essa dimensão aí? É isso que eu quero saber? O que que é essa dimensão?

Azul: Não é só, por exemplo, largura e comprimento? Não seria a dimensão 2? Largura e comprimento? Pra mim, é infinito. Mas, largura e comprimento. Quando eu tenho alguma coisa a mais, daí eu tenho dimensão três?

Diva: Aí, nesse caso que a gente tá falando de espaços vetoriais, a idéia permanece? Essa idéia aí permanece?

Muiara: Pra mim permanece sim [falando ao longe].

Azul: Bom, não sei?

Muiara: Eu não vejo possibilidade.

O que observamos é que esta é uma questão que acompanha Diva desde o início da investigação do problema. Ao que parece, ela percebe que dimensão em Álgebra Linear é diferente daquela proposta por Azul, porém ela não constitui dimensão como um objeto por não conseguir produzir significados para o resíduo de enunciação presente, por exemplo, nos livros que ela consultou. Por outro lado, para Azul e Muiara, dimensão 2 se refere a comprimento e largura e não pode ser outra coisa. Nossa observação tem evidenciado que uma recorrência nas falas das pessoas tem sido marcada por afirmações categóricas do tipo: o IR^2 é o plano, o IR^2 tem dimensão 2, que se constituem em estipulações locais e que parecem "resistir" à possibilidade de que, no processo, possa ser outra coisa. Esse é um ponto que focaremos ao longo do processo por dizer respeito à dinâmica dos núcleos.

Já no final da aula, alguém pergunta ao grupo: "Voltando a pergunta inicial do problema, continua sim ou não? Sim, é possível; não, não é possível?" As respostas são:

Muiara: Não, não é possível. Colocando o ponto /

Mega: /no R3/ não, né? ...

Muiara: Eu vou ler de novo a conclusão [...] "Por mais vetores reais que consideremos, se não tivermos pelo menos um ponto fora de R2, não obteremos a dimensão três". Então, no momento que a gente compõe três, nós identificamos infinitos planos R2. Mas, se tomarmos isoladamente e tentarmos somar sem essa composição, dizendo, um ponto fora dele, não é possível [ela fala olhando para o que está na lousa]. Resumiria, assim a figura [segue um silêncio e ela retoma]. Quem nasceu primeiro, o ovo ou a galinha? O espaço R3 ou o ponto que ta fora dele? Acho que fica meio assim?

Pinho faz a seguinte intervenção:

Pinho: Posso colocar uma pergunta? É, digamos que fosse possível, né? O que que teria de acontecer?

A resposta vem de Mel e Betty, nos seguintes termos:

Mel: É isso que a gente tava querendo, quando ela falou das operações?

Betty: Se a gente conseguisse definir uma operação em cima do R2 de modo que a gente obtivesse uma base com três vetores, aí sim a gente chegaria? Mas, o problema é como fazer isso? Agora, se a gente não conseguir? Como provar que não, entendeu? Se não for possível, claro, como provar que não?

Durante a aula, faço uma intervenção que não foi combinada anteriormente com o professor. Considerando as coisas que estava ouvindo, resolvi introduzir na discussão algo que, na minha concepção, não fizesse sentido ser dito naquele ambiente – uma sala de aula de Matemática. Sobre o efeito do que eu diria, não conseguia ter a menor expectativa de, por exemplo, como todos receberiam. A única coisa que me ocorreu foi dizer e sair da sala para não ter que discutir minha afirmação naquele momento. Eu queria que os presentes levassem a sério o que eu diria. Então, eu disse:

Pesq: Eu tenho que fazer um xerox ali, eu posso falar uma coisa que eu nunca comentei? Quer dizer, eu sempre achei o R3 bem mais interessante que o R2. Eu sempre vejo cor no R3.

Prof: Vejo?

Pesq: Cor. O R3, para mim, ele é azul. Eu estava pensando em dizer isso. Talvez pelo espaço. Vou fazer uma cópia e já volto.

Pensei em usar uma cor qualquer, mas a escolha do azul foi porque, até para mim, naquele momento, dizer qualquer outra cor como, por exemplo, vermelho, não fazia o menor sentido. Meu objetivo com esta intervenção era ou ser tomado como fonte de legitimidade e assim estimular que as pessoas se abrissem ainda mais ou ter uma idéia de até onde as pessoas aceitariam que se pudessem dizer coisas naquela sala de aula.

Logo após minha fala, Diva faz uma intervenção e leva a conversa para outra direção. Saio da sala, mais tarde retorno; no final da aula, o professor – agora sabendo do motivo da intervenção – me dá a palavra:

Prof: Obrigado. Acho que o Amarildo queria fazer um comentário?

Pesq: Não, é que eu fui cobrado, de alguma maneira, que eu sai correndo daqui, falei uma coisa e fui embora, né? Aí eu queria só voltar à questão [...]

Durante o intervalo, Mila havia me questionado sobre minha colocação, assim, ao dizer isto, prontamente ela começa a falar:

Mila: Não, ele falou assim, aí gente, eu acho que o R3, pra mim, é azul. Aí, ele fala e sai, ele deixa a coisa assim. Eu nem imagino, eu nem imagino cor para o espaço e ele fala numa cor azul. Então, isso me incomodou muito [...]. Como é que você consegue ver uma cor assim azul? Por que não amarelo? Por que não rosa?

Mel: Não, mas isso porque ele imagina o R3 azul, do tipo /

Mega: [Ele associa].

Mila: Por que o azul?

Pesq: Então, pra mim, é tão natural isso, que eu nem entendo quando você pergunta?

Algumas pessoas passam a buscar uma justificativa para minha afirmação, por exemplo:

Azul: Porque o azul é uma cor harmônica.

Muiara: Você fez uma associação. A gente associa R3 ao espaço, espaço com céu. [...] A gente associa R3 ao espaço. E o espaço, pra gente assim, na escola, em casa, é o céu. É uma associação só, mais nada.

Azul: Pensei isso na hora que você falou que azul é o espaço, né? De um modo geral o R3 é isso, é o espaço. O que é o espaço? Quando você olha para o céu, a coisa mais linda para observar é o azul.

Maria Luiza mantém-se cética à minha colocação, ela diz:

Maria Luiza: Isso é sério, pra você mesmo?

Pesq: É.

Maria Luiza: Toda vez que você pensa no R3, você vê que ele é azul? [Ela esboça um sorriso]

Vejo então que meu objetivo se concretiza na fala das pessoas. Elas vão produzindo significados para minha fala e vão dizendo coisas com total liberdade, como Muiara e Mega:

Muiara: Quando eu falo em espaço, eu acho difícil entender em R1 e R2. Apesar de que quando a gente tá escrevendo no caderno assim, você dá o espaço, por exemplo, salta uma linha. Você tá num plano e dá um espaço, e é no plano? Então, eu preciso me esforçar para pensar em espaço em R2? Quando eu tô numa linha também, coloco o número 1, por exemplo, aí eu dou um espaço, coloco o 2 , aí eu dou um espaço. Mesmo sendo em dimensão um, eu me refiro a espaço mas, com um certo esforço. É muito mais natural na dimensão 3, a gente pensar no espaço porque ali ele ocupa todo o volume,né?

Mega: Por que, você se identifica com o azul? De achar que o R3 é azul. Você acha que o R3 tem cara de azul? Não tô zuando não, tô falando sério. Por que, às vezes, por exemplo, eu tenho uma simpatia pelo número 7, eu gosto do número sete, né? Eu acho o cinco muito barrigudo, né? E o quatro extremamente narigudo, cê entendeu? Eu conto essa história para os meus alunos e eles falam: - o Mega, você viaja muito na maionese. Mas de vez em quando eu faço isso de brincadeira, não é brincadeira? Não, o quatro pra mim é narigudo; o quatro não é narigudo?

Nesta direção, Diva faz um comentário surpreendente que indicava sua maneira de operar e que esclarecia alguns pontos obscuros no seu diálogo anterior com Ades, ela diz:

Diva: Eu fiquei pensando naquela aula que o pessoal falava a respeito de plano, aí depois, ele fala nessa questão. Aí eu comecei a pensar nas coisas que estão bem próximas de mim mesma, parece que eu não achei muita coisa de uma dimensão, não achei muita coisa de duas dimensões, parece que tudo tem três dimensões. Apenas eu não consegui ver como eu poderia pensar nisso daí dentro do problema dele. Então, na realidade, eu não consigo ver esse plano? Como é esse plano, assim, certinho, com duas dimensões. Eu não consigo ver esse plano. Eu não consigo ver também essa linha, que a gente fala: a linha tem só uma dimensão. Parece que eu consigo ver tudo, mas tudo com três dimensões. Então, eu ainda não consegui passar para a idéia do problema? Não consegui nem ver a idéia do problema. Mas eu acho assim, por mais que a gente falava assim o plano, bem fininho, bem transparente; ele deve ter uma dimensão, de espessura [ela faz gestos com os dedos sugerindo espessura]. Então, eu não tenho essa idéia de plano, aquele plano que não tenha as três dimensões. Eu não tenho essa idéia de linha que é uma linha com uma dimensão.Isto aí é o que tá mais me perturbando nesse exercício. Porque eu não vejo isso, não vejo isso daí, não consigo.

Alguém pergunta: Então não existe R2 pra você, só R3? Ela responde:

Diva: Não, não teria. Porque, na verdade, pra mim, tudo ia ser com mais de uma dimensão, num ia ter uma dimensão, não ia ter duas dimensões. Porque se eu pensar numa coisa de duas dimensões, eu vou pensar numa coisa que eu tô vendo.

Alguém fala ao mesmo tempo com ela e na continuação ela diz:

Diva: Seria só mais no meu imaginário, né? Na minha idéia.

A aula termina com o professor propondo a seguinte tarefa para a aula seguinte, na lousa ele escreve:

Aconteceu na mini-série “Presença de Anita”:
Nando tenta salvar seu casamento, depois de sua mulher, Lúcia Helena, descobrir que ele tinha uma amante. Quando Nando pergunta a Lúcia Helena se ela não o pode perdoar, ela diz: ”Nando, não há mais espaço para você em minha vida”. Qual a dimensão desse espaço?

Na aula seguinte, a turma discute a tarefa “Presença de Anita” deixada na aula anterior e, na segunda parte da aula, o professor propõe à turma:

Prof: Bom, agora, eu queria saber, se alguém, durante estas duas semanas, pensou alguma coisa com relação ao nosso problema. A investigação que tá proposta desde aquele primeiro dia. Se alguém quer acrescentar, comentar, ao que a gente já falou até aqui, sobre a investigação que foi posta.

Betty, imediatamente, toma a palavra, para dizer:

Betty: Bom, eu, assim, fui conversar com outras pessoas pra discutir sobre o problema e aí eu conversando com o Rodrigo, aluno do 4º ano, ele me deu a sugestão de como tá definindo as operações, né? E a gente ficou discutindo um pouco. Então, eu queria assim, tá mostrando como seriam essas operações, porque, como a gente tinha dito um pouco antes, bastava definir as operações de soma e multiplicação por escalar para tá verificando se existia um espaço de dimensão três. Mas, pra isso, nosso grupo tinha comentado que bastava ter um isomorfismo, né? Aí, em conversa com ele, ele me disse, não; basta que ache uma bijeção entre os espaços R2 e R3. Porque o R3 tem dimensão três. Então, quer dizer, em R3 a gente encontra uma base que gera todo o espaço. Então, essa base tem três vetores, né? Então, quer dizer, se existe uma função que é bijetora, pela imagem inversa a gente vai conseguir também uma base de dimensão três, que gere este espaço, cujos vetores sejam R2. Então, a partir daí, a gente definiu as operações, porque, se a gente consegue estabelecer uma relação de modo que, eu tô pegando elementos de R3 e ao mesmo tempo, eu tô pegando os mesmos elementos de R2; é como se eu estivesse pegando o mesmo conjunto. O que vai mudar são os elementos apenas. Não sei se deu, assim, pra entender? Se alguém concorda ou discorda?

Com esta fala, ela introduz um novo personagem na sala de aula: Rodrigo, um aluno do 4º ano, a quem ela toma como fonte de legitimidade. Betty, que na aula anterior, apenas apresentou a idéia de se considerar operações diferentes, apresenta com a fala anterior outros objetos, caracterizando uma nova direção para onde ela está falando; diferente, por exemplo, do que vinham dizendo Ades e outros colegas.

Durante a aula, faço uma pergunta a ela na direção de entender as possíveis mudanças ocorridas em sua produção de significados através do diálogo com Rodrigo; nosso diálogo é expresso nos seguintes termos:

Pesq: Posso te perguntar?

Betty: Pode.

Pesq: Eu tô vendo você tentando achar a resposta desse problema. A minha pergunta pra você é a seguinte: isto que você conversou com ele, tá na direção das coisas que você já vinha pensando?

Betty: Tá, mais ou menos, por causa da questão do isomorfismo. Pra mim é assim, se existisse o isomorfismo, então eu conseguiria é definir as operações de soma e multiplicação de modo que o conjunto tivesse dimensão três. Mas, aí a gente até ficou tentando achar e aí a gente não conseguiu, aí quando ele falou pra mim na função bijetora e se eu conseguisse definir a operação em função da função bijetora eu taria matando o meu problema. Aí eu acho que ajudou a encaminhar, porque, eu tava tentando mesmo definir bonitinho, achar uma operação tipo somando (a,b) mais (c,d), vai dar quem? Eu queria que desse uma terna. Na última reunião do nosso grupo, a gente tava querendo que isso virasse uma terna, mas não sai. Fiquei pensando, pensando... Mas, e se existe uma bijeção? Parece que fica mais fácil de definir. Foi por isso.

Pelo que Betty diz, percebo que há uma mudança em sua produção de significados; num primeiro momento, ela operava com a idéia de isomorfismo; noutro momento, ela começa a operar com a idéia de bijeção. Para investigar esse ponto, que nos sugere parte da dinâmica de seu processo de produção de significados, farei, no capítulo seguinte, um estudo detalhado de suas ações enunciativas.

Considerando o que Betty falou, o professor pergunta à turma se havia alguma objeção ao que ela disse: “Eu quero saber se alguém tem alguma objeção? Se alguém acha que ela disse alguma coisa absurda, errada?” Judy, então se pronuncia gerando o seguinte diálogo:

Judy: Ela falou assim, que não precisaria ser isomorfismo, mas uma aplicação que é injetora e sobrejetora é chamada isomorfismo. Então, como ela fala que precisa ser bijetora /

Betty: /Mais algumas propriedades/ além de ser bijetora.

Judy: Não, a definição tá /

Prof: Você lê a definição, por favor, então?

Judy: Uma aplicação linear que é injetora e sobrejetora é chamada isomorfismo.

Betty: Pra mim, eu acho que teria mais algumas propriedades, é para ser um isomorfismo.

Enquanto Mel e Betty trocam palavras e folheiam o livro procurando alguma coisa para sustentar seus argumentos, o professor segue questionando a turma: ”Quem de vocês está totalmente boiando com relação ao que foi dito aqui pelas duas? Quem de vocês está entendendo tudo do que está se passando em relação ao que ela falou? Terceira pergunta: quem de vocês está respondendo honestamente a minha pergunta?” Ele não encontra resposta da turma que em sua maioria ficam em total silêncio. Betty, com o livro nas mãos, toma, novamente a palavra, levando a um novo diálogo entre ela e Judy:

Betty: Tá definido assim, “entende-se por isomorfismo do espaço vetorial U no espaço vetorial V uma transformação linear f de U em V que seja bijetora. Um isomorfismo f de U em U é um automorfismo de U” [ela lê de um livro que pode ser Callioli e outros, 1993]. Então, na verdade, além de ser bijetora precisa ser uma transformação linear. Acho que aí fica a diferença, né? F seria também / é transformação linear. Porque se não, acho que não faz muito sentido falar em isomorfismo é a mesma coisa que ser bijetora. Não sei se foi isso que você queria dizer?

Judy: Não, é a palavra usada. Eu vou precisar de uma o que bijetora?

Betty: Uma função bijetora.

Judy: Uma função bijetora.

Para explicar Judy, Betty começa a esclarecer sua maneira de operar:

Betty: Porque o seguinte: imagina V o espaço cujos vetores sejam R2 com as operações mais e estrela, tá? Que eu defini e que não são as operações usuais. Se eu consigo fazer uma bijeção com o espaço de dimensão três, que a gente conhece, R3, quer dizer, que eu consigo encontrar uma base, assim, pra provar [ela faz um gesto com os dedos sugerindo colocar entre aspas a palavra provar] / esse é o caminho que eu usaria pra provar que o espaço tem dimensão 3. Tipo, eu pego a base de R3 que gera todo o espaço e consigo achar uma base nesse espaço que vai gerar, é? Com esse espaço, com as operações entre estrela e ... nem sei mais o que eu tinha falado. Estrela e mais. Eu acho que se eu fosse na lousa fazer um esqueminha, eu acho que nem mostrar a solução direto, acho que talvez, eu acho que melhoraria um pouco [ela levanta e se encaminha para a lousa].

Ela se levanta e se encaminha para a lousa. Frente à turma, ela retoma o que dizia:

Betty: Pra mim é o seguinte, eu defino o meu espaço [ela escreve na lousa: $V = (IR^2, +, *)$]. Seria o meu espaço procurado, cujo o conjunto de vetores sejam R2 e tenha dimensão três. E eu quero verificar o quê? [ela mesmo responde] Se ele tem dimensão três? Pra isso o que que eu preciso? Encontrar uma base de vetores que eu não sei quem é [ela escreve na lousa: $\beta = \{(\ ), (\ ), (\ )\}$], que gere todo esse conjunto [referindo-se a V]. Então, quer dizer, se tiver três vetores e esses vetores forem L.I., eu consigo ver que este espaço tem dimensão três. Então, se existir uma bijeção com o R3 [ela esboça o diagrama da figura 2], eu consigo encontrar essa base. Por que que eu consigo? Vocês me dêem uma base em R3?

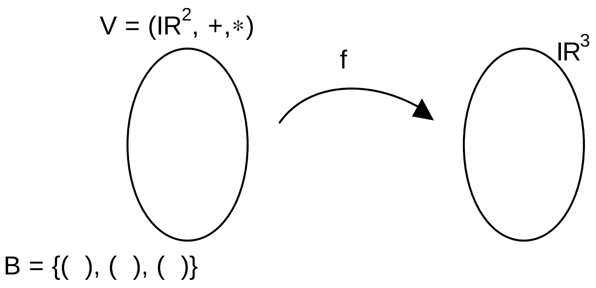

Figura 2

Pinho: Base canônica.

Betty: Base canônica, mas qual seria?

Pinho: Um, zero, zero; zero, um, zero; zero, zero, um. [e ela escreve na lousa – vide figura 3]

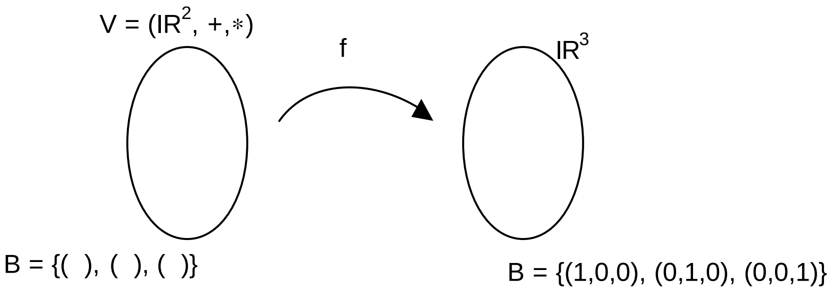

Figura 3

Betty: Então, assim, aqui é uma base. Agora, se existir essa bijeção, eu posso tá definindo as operações é..., em função dessa função bijetora [referindo-se à função f da figura 3]. Porque daí, eu pego aqui e trago pra cá [ela indica com um gesto o caminho de R3 para V]. Ou seja, pra essa base eu consigo os elementos / os vetores dessa base [ela olha para a turma e pergunta]. Até aqui, vocês concordam ou discordam, ou não entenderam nada do que eu falei? [...] É, tipo, se tem tal aplicação, então eu consigo associar esses elementos com esses [ela indica os elementos de V com os de R3]. Então, eu consigo ter um espaço de dimensão três porque é como se esses conjuntos fossem iguais, equivalentes. Porque se eu pego aqui [ela indica o R3 na figura 3], se os elementos estão associados, é como se eu tivesse pegando aqui [ela indica V na figura 3]. Não vai mudar nada praticamente. O que vai mudar é a operação. Seria, eu tô fazendo a mesma coisa em espaços diferentes. Só o que muda é, na verdade, a operação e é o que vai tá me dando a mesma dimensão.

O Professor, observando a fala de Betty pergunta: “Eu não tô entendendo porque você tá usando essa bijeção?” Ela responde:

Betty: Eu tô usando pelo seguinte fato, eu queria definir as operações nesse conjunto [ela indica o V na lousa] de modo que esse conjunto tivesse dimensão três. Só que, pra isso a gente estabelece uma relação com o R3. Então, pra eu definir a soma, eu definiria como? [ela vai contando e escrevendo na lousa] Eu pegava, vão supor, dois vetores (a,b) mais (c,d), aí eu esqueço um pouco isso aqui pra ver como eu fui definindo as operações em R3. Como é feita se eu tivesse a função, essa bijeção, de V em R3. A operação aqui seria [ela escreve na lousa: $(a,b) \oplus (c,d) = f^{-1} (f(a,b) + f(c,d))$]. Aqui seria a operação usual e aqui seria a operação em V, tá? Só que isso, existindo a bijeção, é o mesmo que eu fazer isto aqui. Então eu deveria ter usado a função bijetora na operação. Pra conseguir a operação. Porque eu não conseguiria enxergar como eu opero em R3 e volto pro meu conjunto V. Aqui seriam os elementos de R2 e aqui de R3. [Na lousa ela verifica o que escreveu: $(a,b) \oplus (c,d) = f^{-1}(f(a,b) + f(c,d)$ e ela indica que $f(a,b) = (x,y,z)$ e $f(c,d) = (x',y',z')$]. Não sei se ajudou, se não ajudou?

Alguém na turma pergunta: “Como você faria a multiplicação?” E Betty responde:

Betty: [...] Então a multiplicação por escalar seria α de (a,b) e eu vou pensar que eu tô operando em R3, no caso. E a imagem inversa para que eu caia no conjunto V. Não sei se tá claro a notação que eu tô fazendo? [Ela registra na lousa $\alpha.(a,b) = \alpha.f^{-1}(f(a,b))$ e indica $f(a,b) = (x,y,z)$]

Mega, observando a fala de Betty, inicia um diálogo:

Mega: [...] Eu fiquei imaginando, já que o seu objetivo tá em tentar achar uma função que transforme é, duas dimensões, um par ordenado, numa terna, você poderia criar uma função. Mas aí você definiria essa função. Existe essa função.

Betty: Mas eu acho que não tem necessidade de definir essa função. O meu objetivo não é transformar o par em terna e sim relacionar o par com a terna. Ou melhor, eu preciso relacionar a base de um espaço de dimensão 3 com esse espaço que eu quero. Na verdade, quero um espaço de dimensão três também, mas, o conjunto de vetores não é o R3, é o R2. Meu objetivo não é transformar o par, mas em tá relacionando.

Mega: Tem uma função pra relacionar isto?

Betty: Sim, mas no início eu tomaria uma função arbitrária; precisaria tá definindo. Se definir melhor. Mas como definir?

Mega então pedindo licença a Betty se levanta e vai à lousa:

Mega: Eu fiquei imaginando, tem que ser linear, né? Eu tenho um vetor (a,b), certo? Digamos, que eu criasse uma função, pra somar dois vetores de R2, pra criar um de três. Bastaria ter o que na minha função? De forma que na minha lei, da minha função, eu tivesse algo assim, ó? [Ele escreve na lousa: (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d, a+b+c+d)]. Aí eu teria uma terna.

Betty e Mega seguem discutindo sobre a criação da função até o momento que ela volta a explicitar sua maneira de operar:

Betty: Porque aqui [ela indica V na figura abaixo] daqui eu saio, tem um par. Eu aplico f, eu caio aqui, eu tenho uma terna [indicando o IR^3 na figura 4]. Então aqui eu tô operando com ternas e volto pra cá eu tenho pares [referindo-se a V na figura 4]. Só que aqui se eu tenho uma base, l.i., com três vetores [indicando o IR^3 na figura 4] a minha base aqui também vai ser l.i. com três vetores. Portanto, dimensão três.

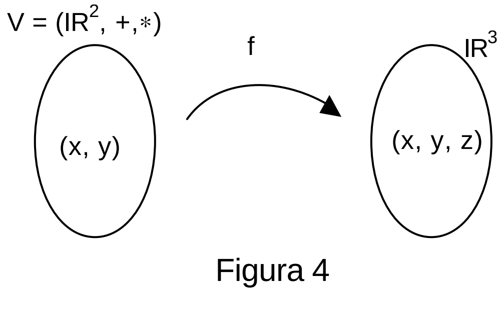

Figura 4

Observo que com sua fala Betty muda a direção da produção de significados que estava acontecendo em sala de aula e para o qual estavam voltados, na aula anterior, Ades, Role, Lufran, Maria Helena e outros. Esta mudança na direção dos interlocutores causa o silêncio nessas pessoas que, na aula anterior, tinha monopolizado a conversa. Judy que estava calada até então, como vimos, se pronunciou. Mega, por sua vez, tenta produzir significados para os objetos introduzidos por Betty.

Na aula seguinte, o professor inicia a aula com a seguinte proposta:

Prof: Alguém tem alguma coisa a dizer que estudou, discutiu, pensou, viu, resolveu, qualquer coisa ligada àquela tarefa que era a investigação inicial? Que consta daquele texto inicial. Queria saber se alguém quer focar alguma coisa ou muitas coisas?

Mega é o primeiro a falar diretamente do problema proposto. Ele, que já vinha falando na direção de Betty, diz:

Mega: Tem uma pergunta também, que nós começamos a estudar ã / Cadê a sua colega? [Olhando para trás, ele pergunta para Mel, referindo-se a Betty]

Mel: Ela veio, mas saiu.

Mega: Ah, tá. Porque ela tava falando em bijeção e a minha pergunta era se transformar de dois para três, é? Aquela função que ela tava querendo colocar pra gente, se existir aquela função, me garante que eu vou ter uma resposta do R2 no R3? Ou seja, uma transformação linear garante o que o professor colocou pra gente? É possível que R2 seja R3?

Observo que Mega deixa mais clara a sua leitura do problema proposto quando diz: ”Ou seja, uma transformação linear garante o que o professor colocou pra gente? É possível que IR^2 seja IR^3?” Ele então segue falando e mantendo um diálogo com Pinho e Mel enquanto o resto da turma se mantém em silêncio. Ele então produz os seguintes significados:

Mega: O que nós conseguimos verificar é que o R2 vai ser isomorfo a R3, como vocês falaram? A gente leu já bastante, contanto que uma das coordenadas, por exemplo, z, a cota, supostamente, ela seria uma constante. Não precisa ser zero; vai ser 1, vai ser 2, vai ser 3. A gente consegue colocar isso num gráfico, lá também. E nós conseguimos também uma função, a exemplo de transformações lineares em que você sai do R2 e vai para o R3. Até a gente bolou uma função que saísse do R3 para verificar se, se chegava nessa mesma função para R2? E a gente conseguiu. A gente pode mostrar? Agora, isso garante que é transformação de R2? Vocês querem dar uma olhada? [Ele se levanta e vai à lousa e, com um livro na mão, ele começa a escrever] Então, a gente quer colocar aqui pra vocês o seguinte ó: uma transformação linear de R2 para R3, associa vetores v, de seus pares ordenados pertencente a esse R2, com vetores w, da terna em R3 e define a transformação T por / aí ele cita um exemplo [ele escreve na lousa T: $IR^2 \rightarrow IR^3$, T(x,y) = (3x, -2y, x-y)]. Então, ele colocou uma lei, né? Então isso que tá no livro do Winterle, Stenbruch e Winterle. Então, daí ele faz como seria, pegar um ponto, vão pegar o T(2,1) daí eu teria seis, -2 e eu teria 1. [Na lousa ele escreve T(2,1) = (6,-2,1). Então, através dessa transformação, ela é linear T e essa terna, né? Bom, depois a gente chegou nisso daqui. Como a gente tava questionando / foi na sexta-feira /como a gente tava questionando ter uma transformação linear e a gente achou essa daqui do R2 pro R3, aí será que a gente consegue no caso da bijetora, voltar? Ou seja, achar uma outra transformação de R3 para R2, não é? Então, daí a gente teria que definir uma transformação [...] M. Agora, que tenha três coordenadas e que exista uma lei, pra transformar essas três coordenadas em duas coordenadas. Então, aqui, eu vou ter que ter um par ordenado. Então, aí a gente imaginou, né?, fazer isto aqui, pra botar ela pra lá, a inversa; tava falando de imagem inversa [ele escreve na lousa: M(x,y,z) = x/3, -y/2]. Então, o que que eu tenho daqui? Se eu pegar esse M desse ponto, eu teria o seguinte [ele escreve na lousa: M(6,-2,1) = (2,1)]. [...] Se eu fiz pra esse ponto, mas, esse ponto era um ponto do livro. Daí, nós peguemos outros dois pontos, por exemplo, (4,5), (7,-2) fizemos isso daqui, passamos pra cá, e depois fizemos a volta e a gente viu que a gente conseguiu. Então, nós conseguimos associar três vetores que estariam em R3, com três vetores que estariam em R2. Três pares ordenados que estariam associados para três ternas. Então, agora, a nossa pergunta é: se isso aqui vale? E se isso daqui de repente prova?

Ao retornar à sala, Betty observa a fala de Mega para fazer a seguinte intervenção: “Minha pergunta é a seguinte: você definiu a transformação; o que que essa definição pode te ajudar pra tá solucionando o problema?” Mega responde:

Mega: Então, eu queria exatamente vê o seu questionamento. Porque você falou pra mim assim, se eu conseguir uma função, que eu consiga, que eu possa transformar, né? Daí, vai existir isso daí. Porque você ouviu do seu colega, uma coisa assim, entendeu? Então a gente tava buscando alguma coisa nesse sentido. A gente foi procurar em transformação linear, a gente definiu uma função, que essa aqui tava no livro, foi mais cômoda. Mas, quando eu coloquei com você aqui na lousa, eu já tinha definido uma lei para transformar uma coisa em outra, né? O que era mais ou menos análogo. Então, a gente fez isso daqui nessa ânsia, né?, de dizer assim, bom, isso aqui é possível; mas isso aqui me garante? Foi isso o que eu não tinha certeza. Agora se você for multiplicar por escalar [apontando para Mel], nós temos aqui multiplicação de escalares, nós podemos expressar isso aqui como combinação linear, desde que você fixe umas constantes aqui /

Constato assim, que, de fato, Mega esta produzindo significados na direção dos interlocutores de Betty. Ao que parece, ele a toma – e por conseqüência, o personagem Rodrigo – como fonte de legitimidade. Mega, na seqüência da aula, vai sendo questionado por Mel, Diva e Betty.

Na continuação, os membros do grupo 1 passam a falar à turma sobre seus avanços.

Mel: Então, a gente começou colocando o que a gente / a gente queria saber se era possível encontrar um espaço vetorial, que tinha os vetores em R e tinha dimensão R3. Então, a gente chamou este espaço de V, né? [Ela escreve na lousa: V = (IR^2, ⊕, ∗)]. Então, esse era o espaço R2 de vetores, com as operações não-usuais, que eu não sei quais são. Então, aí a gente fez referência ao que você tava falando, né? [Ela vai para frente do diagrama de Venn, feito na lousa, onde está representado o IR^2 e o IR^3, vide figura 5 abaixo] Na hora que a gente fala dessa função, a gente vai considerar só o conjunto R2 e não o espaço, agora. Por isso eu só podia falar de função, por enquanto, não de transformação. Então, eu tenho que encontrar três vetores, que vão ser a base que gera esse espaço. Então, os vetores v_1, v_2 e v_3 tal que [ela escreve na lousa: $v_1 = (v_1', v_1'')$, $v_2 = (v_2', v_2'')$, $v_3 = (v_3', v_3'')$]. Tá, e aí isso aqui a gente vai ver depois que é a base que gera esse espaço. Então, nós vimos que pra fazer essa relação / pra chegar nessa conclusão a gente tinha que ter uma função bijetora, né? Pra que tivesse um / meu espaço tivesse dimensão três, a gente tinha que ter essa função que levasse três vetores [de V] em três vetores do R3. E, aí, se ela é bijetora, a gente tinha f^{1} aqui [vide figura 5]. Agora comecei a me perder um pouco. Eu tenho que agora, a gente vai ter que fazer os vetores. Era o v_1 e v_2 mesmo que a gente pega, né? [Ela pergunta para a Betty].

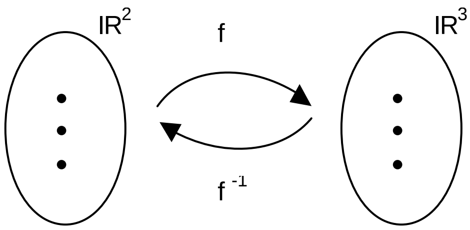

Figura 5

Betty: Isso.

Mel: Mas aí eu posso falar de a,b / essa é a operação do nosso espaço que agora eu vou falar dele [ela diz isto enquanto escreve: $(a,b) \oplus (c,d) =$]. Isto aqui é o mesmo que [e escreve $(a,b) \oplus (c,d) = f^{-1}(f(a,b) + f(c,d))$]. Tá, porque a inversa é que volta nesses mesmos dois vetores que tô tomando aqui.

Betty: Quando eu escrevo isso [ela indica a adição definida na lousa por Mel], é o mesmo que eu estar operando em R3, com operação usual que eu conheço e através da inversa dessa função, eu acabo operando em R2. É como se eu pegasse o conjunto R3, desse uma nova cara pra ele. Porque, se existe uma bijeção entre R2 e R3, então, cada elemento corresponde a um outro. Cada elemento de R2 corresponde a um elemento de R3 [ela indica na figura 5].

Elas seguem explicando à turma sobre suas conclusões e as dúvidas surgidas ao longo da investigação. Observo que Mila não diz uma palavra sobre o problema proposto. Uma possibilidade é que, apesar de tentar falar na direção proposta por Betty, ela não consegue. Já Mel se voltou para os interlocutores de Betty e vai produzindo significados nesta direção. Pinho é a única pessoa da turma, neste momento, que mantém um diálogo com Betty e Mel. A dúvida de Pinho e a do grupo é se a função f tem que ser uma bijeção apenas ou uma transformação linear. Betty tenta esclarecer a dúvida fazendo as seguintes considerações:

Betty: Eu acho que, na verdade, eu acho o que ajuda a ver melhor isso aí, é a gente definir a f de R2 em R3 [Ela escreve na lousa: $f: IR^2 \rightarrow IR^3$]. No final, depois que a gente verifica que vale as oito propriedades, a gente vai ter o quê? Uma T, uma transformação linear, que leva o espaço V em R3 [Ela escreve na lousa: T: V $\rightarrow$ IR^3] onde V quem é? É R2 com as operações mais e estrela. [Ela escreve na lousa: V = (IR^2, $\oplus$, $*$)] E, R3 com as operações usuais, né? [Ela escreve na lousa: IR^3 = (IR^3, +,$\cdot$)]. Eu acho que a diferença / eu acho que ajuda a verificar nisso a f / eu não pensei nas operações ainda. Agora, quando eu vou usar os espaços vetoriais, aí sim, eu vou ter uma transformação linear.

Na seqüência Mel e Betty colocam mais um problema que elas encontraram: a necessidade de provar a existência da função bijetora que elas estavam utilizando, Betty diz:

Betty: O que a gente discutiu foi o seguinte, quem me garante que existe essa função bijetora? Eu não sei explicar porquê, mas o Rodrigo me garantiu que existe um resultado, que me garante que existe uma função bijetora de R2 em R3. E essa função é justamente a função de Cantor. [...] a idéia aqui foi a seguinte: eu tenho um intervalo fechado zero, um, em R. Esse resultado me garante o quê? Que existe uma bijeção, do intervalo fechado, zero, um, em R2, tá? Se vale pra esse intervalo, vale para zero, dois fechado em R2, né? Então, eu posso estender o resultado pra todo plano, né? A reta tem uma bijeção em todo plano. Agora no espaço, o que que acontece? Eu vou fazer a mesma coisa: existe um intervalo fechado, que leva esse quadrado, num cubo de lado um. Então, quer dizer, isso aqui estendendo desse quadrado pro cubo eu vou estender do plano pro espaço, né? Que é o que vai me garantir que existe essa bijeção. Mas, a gente só sabe que ele existe, a gente não sabe falar nada mais sobre isso. E por isso é que a gente não define essa função que a gente tomou como sendo bijetora. Porque é uma função altamente descontínua. Porque a gente não consegue definir uma função que leva esse intervalo nesse quadrado. Como vai ser a cara dela? É por isso que a gente não deu uma lei pra ela. Que ela existe, ela existe.

Observando a discussão que envolvia Pinho, Mel e Betty, Mega faz a seguinte intervenção que envolve suas colegas de grupo:

Mega: Nós estávamos conversando na segunda-feira e a Muiara falou de uma brincadeirinha que ela fazia com os alunos, mas que era levar de um plano para um /

Muiara: Sólido.

Mega: Sólido, né? Então, seria pegar, por exemplo, uma folha, né?, e fazia girar em torno do seu eixo. A gente tem aquele sólido de revolução. Daí, eu tenho um plano gerando um sólido.

Muiara: Que é a segunda parte que você falou aí, o quadrado, gera um cubo. Que é a mesma maneira. Qual é essa função? O brinquedo, entre aspas, você gira meio círculo, que é uma figura plana, que forma uma esfera. Sabe aquele brinquedo assim /

Azul: /De puxar/

Muiara: De puxar /

Mega: /Papel/ que você enrola prendendo no fio e depois puxa. Que seria, os sólidos de revolução, né? Se você pegar o triângulo, você vai gerar / um triângulo retângulo, cê vai gerar um cone, e assim vai.

Muiara: Mas, a pergunta acaba sendo a mesma: como funciona isso, né? Que é isso que você tá fazendo. Como funciona isso? Mas, é análogo, né?

Mel e Betty parecem desconsiderar o que dizem; elas continuam a discutir:

Mel: Não, então, aí eu acho assim, que a gente só usou o fato da gente saber que existe. Porque aqui, pra resolver o nosso problema, a gente não precisa ficar sabendo /

Betty: /Quem é/ essa função.

Mel: Quem é a função. Se a gente sabe que ela existe, então, basta eu mostrar o que eu tô querendo, que é a existência desse espaço.

Mas Muiara, na continuação faz a seguinte consideração:

Muiara: Os ingredientes a gente tem, mas tá faltando, a máquina que faça isso.

Minha leitura do comentário de Mega, trazendo Muiara e Azul a falar é que frente ao resíduo de enunciação das falas de Betty, Pinho e Mel, isto é tudo que ele e elas podem dizer ao constituir aquelas falas em texto. Estes elementos que constituem suas falas são parte do que é dado para eles. Na seqüência Mel continua falando:

Mel: Mas, eu tô tomando esse aqui, sabe como? Como aqueles teoremas que a gente demonstra e que usa outros teoremas e usa outros axiomas, entendeu? Então, eu só vou usar disso.

Betty: A propriedade existe.

Mel: Existe e é válido. Então, eu vou usar, né? Foi isso que a gente pensou.

Mega e Muiara novamente tomam a palavra:

Muiara: Presos assim à Geometria Física, e não sai?

Mega: E a gente se questionou também o R4, no grupo, né? E daí, quando a gente viu do R2 pro R3, né?, pega o R2 e vai correndo num eixo, a gente pensou do R4 seria alguma coisa sei lá, pra nós, conjecturas, de pegar o R3, vão supor, colocar num recipiente e fazer esse recipiente correr num trilho, pra gente ter o R4. Se fosse possível visualizar isso aí. Mas, como eles falaram, não é legal isso aí, não é usual isso aí. Por isso é que a gente pára no R3.

Novamente, Mel, Pinho e Betty parecem ignorar o que dizem os dois. E apesar, de Muiara e Mega estarem falando numa direção totalmente diferente dos três, tem-se a impressão, como observador, de que a comunicação efetiva, para eles, está acontecendo.

Na continuação, Mel, Betty e Pinho seguem discutindo. Betty, então, passa a demonstrar as propriedades de espaço vetorial, utilizando as operações definidas anteriormente. Seu objetivo é demonstrar que V, como definido por ela, tem estrutura de espaço vetorial.

Na aula seguinte, a penúltima do semestre letivo, entrevistei os grupos para saber mais detalhes sobre a produção de significados das pessoas[59]. A última aula é caracterizada pela apresentação da resolução do problema proposto. Nessa aula, apenas alguns alunos e alunas se pronunciaram e o que dizem será usado, em parte, no capítulo seguinte para efeito de análise[60]. Sendo assim, as principais falas dos grupos foram apresentadas acima e, referem-se, à quase totalidade, do material que consideramos em nossa análise.

Com uma visão global de todo o transcorrer das aulas à disposição, passaremos, agora, a uma leitura mais fina do processo.

§ 3. Produzindo significados

Na primeira fala dos grupos, IR^2 foi constituído em objeto em quase todos os grupos. O IR^2, em geral, possuía as seguintes propriedades caracterizadoras: o IR^2 é o plano; o IR^2 tem dimensão 2; IR^2 é um conjunto. Além disso, desde o início das falas o IR^3 foi introduzido de maneira recorrente, constituído em objeto na fala de quase todos os grupos. O interessante, neste caso, é o fato de que IR^3 não figurava no enunciado do problema. Ele foi introduzido nas justificações a partir da leitura que foi feita do enunciado do problema. Muito provavelmente, o enunciado do problema "evocou" uma característica de IR^3 – ser o objeto que tem dimensão 3.

O encaminhamento para resolver o problema proposto, passou, por vezes, em relacionar/associar o IR^2 ao IR^3. A partir desses objetos, outros objetos foram constituídos, tais como: plano, reta, vetores, classes de eqüipolência, espaço, subespaço. De suas falas, extraímos as seguintes

[59] Cf. Anexo A, transcrição dia 28 de setembro.
[60] Cf. Anexo A, transcrição dia 19 de outubro.

estipulações locais: “o IR^2 é um conjunto de vetores do IR^3”; o IR^3 é o espaço; o IR^2 pode ser um/o subespaço de IR^3; “o IR^3 é composto de planos, ele é um espaço formado de planos, os planos de retas”; “IR^2 tá contido no IR^3”; “do IR^2 para o IR^3 é possível, o inverso não”; dentro do IR^3 existe o IR^2; “dois vetores paralelos você considera que é o mesmo vetor”.

Notamos ainda que as palavras vetorial e real, presentes no enunciado do problema, foram pouco mencionadas, e por alguns, foram desconsideradas. Apesar de algumas pessoas mencionarem as palavras espaço e subespaço, havia evidências de que IR^2 e IR^3 foram lidos como subconjunto e conjunto, respectivamente, naquele momento.

Esse estado de coisas nos levaram a direcionar nosso olhar, a partir daquele momento, para duas questões: primeira, de que maneira o problema proposto foi constituído em texto - caso tenha sido constituído - pelos leitores? Segunda, será que para os objetos – IR^2 e IR^3 – seriam produzidos outros significados, ao longo do processo, além daqueles que haviam sido produzidos? Essa última questão me levou a considerar à importância de fixar meu olhar nesses dois objetos e estudá-los historicamente, no sentido proposto por Vygotsky, quando sugere, como mencionado no capítulo 2, que “Estudar alguma coisa historicamente significa estudá-la no processo de mudança”[61] (VYGOTSKY, 1994, p.85-86).

Sobre a primeira questão, constatei que a produção de significados das pessoas estava sendo determinada exatamente pela leitura de cada um do problema proposto, portanto, o processo de constituição do enunciado em texto determinou, em parte, a dinâmica do processo[62]. Porém, na origem desta afirmação, está nossa observação da explicitação da leitura do problema por algumas pessoas, por exemplo, a leitura de Ades. Para ele, o problema dizia respeito a obter IR^3 a partir de IR^2. Por outro lado, Azul, do início ao fim do processo, sugeria mudar o enunciado do problema. A questão é: por que ela sugeria tal mudança?[63] Além disso, a análise de toda produção de significados de Role e Diva nos sugere que eles não constituíram o problema proposto em

---

[61] Faremos menção a este estudo como a história dos objetos IR^2 e IR^3.

[62] Para reforçar esta afirmação, desenvolverei uma análise local da produção de significados de Betty e Ades, no capítulo seguinte por acreditar que suas produções de significados sejam representativas neste ponto.

[63] Considerando a necessidade de entender este ponto, optamos por fazer uma leitura local de sua produção de significados – vide capítulo 6.

texto. Role, em nenhum momento, discutiu explicitamente o problema e, ainda, sua fala se deu apenas quando se discutiu sobre o IR^2 e IR^3, ou sobre outros temas que não estavam relacionados ao problema, tais como, metodologia de ensino, sala de aula, ensino e aprendizagem, entre outras coisas. Já Diva, sempre se referiu ao problema proposto como “o problema dele” – referindo-se ao professor -, e, em grande parte do tempo, ela esteve envolvida em buscar produzir significados para o objeto dimensão.

Sobre a segunda questão – a história dos objetos IR^2 e IR^3 –, não fecharemos questão ainda sobre o tema, deixando para fazê-lo após a análise local que desenvolverei no capítulo seguinte. Porém, como conclusão parcial, ressalto que a análise global do processo indicou duas situações: primeira, a maioria das pessoas constituiu IR^2 como o plano e o IR^3 como o espaço, ou como conjunto e subconjunto respectivamente. E isto estava tão “cristalizado”, “solidificado” que não podia ser outra coisa. O “não poder ser outra coisa”, ao nosso ver, está ligado a uma das questões mais importantes, que observei sobre a dinâmica do processo: a questão da legitimidade, isto é, de que o sujeito julga ser ou não, legítimo dizer. Ao longo de todo o processo de produção de significados das pessoas, a questão da legitimidade foi, junto com a leitura do problema pelos sujeitos, determinante para a dinâmica do processo. Frases como: “Eu não consigo imaginar como seja o que ela me disse”. [Teka sobre a fala de Betty sobre a possibilidade de existência de operações não-usuais]; “Eu não vejo outra coisa que possa ser o IR^3” [Lufran] “Eu não vejo possibilidade” [Muiara, sobre a possibilidade de dimensão 2 poder ser algo diferente de comprimento e largura]; “Não posso pensar desse jeito” [Diva, considerando a fala de Muiara]; delimitaram o que era legítimo ou não dizer, influenciando a dinâmica da produção de significados. Por outro lado, as transformações no processo de produção de significados para os objetos IR^2 e IR^3, foi evidenciada por Mel, que olhando para o processo de produção de significados de seu grupo, elucidou esse ponto dizendo:

> [...] ontem, na hora que eu, a Mila e a Betty, nós fomos estudar de novo o problema. Aí sim que a gente entendeu aquela questão da Anita de que dimensão era aquele espaço, porque no fundo a gente tava confundindo os espaços. E aí o espaço que tinha lá é o espaço lugar, enquanto que, o espaço que a gente discutia no problema, é espaço vetorial. E aí, eu acho que é isso que a gente ficava naquilo que ele disse de outras direções. Quando a gente ficava falando de espaço lugar, espaço geométrico, a gente não saía do lugar no problema. Porque, na verdade, a gente tinha que saber de

que espaço a gente tava falando e era outro. Então, a gente chegou a essa conclusão de que aquela questão foi mais pra falar ó, isso é o espaço de que vocês, às vezes, estão falando, e esse é o espaço vetorial.

Em particular, em Mel e Betty é possível observar a transformação dos objetos IR^2 e IR^3 de, por exemplo, IR^2 e IR^3, como plano e espaço respectivamente para conjuntos quando se referia a uma bijeção ou em espaços vetoriais quando associado a um corpo, às operações de adição e multiplicação por escalar e seus axiomas. A fim de elucidar este ponto, opto, no capítulo seguinte, por analisar a produção de significados de Betty em detrimento da de Mel, por ter sido a primeira quem determinou uma nova direção na fala para interlocutores em sala de aula.

Além das duas questões anteriores que identificamos em nossa análise, a continuação da observação dos emergentes daquela sala de aula relacionadas à dinâmica do processo evidenciou aspectos dessa dinâmica associada aos interlocutores. Como pontuamos na secção anterior, quando Ades produziu significados numa certa direção para a qual era legítimo falar de planos, espaço (geométrico), vetor como segmento orientado; Role, Lufran, Maria Helena, Mega, Muiara e Diva voltaram-se para esta direção. Nesse momento, essas pessoas falaram de expansão de planos, de giros de planos, vetores no espaço, retas, entre outras coisas. Quando Betty introduziu na discussão, outros objetos, tais como operações não-usuais, isomorfismo, bijeção, ela determinou uma outra direção daquela para os quais estavam voltados os sujeitos anteriormente mencionados.

Observei que a intervenção de Betty causou um corte visível na produção de significados naquela sala de aula. De imediato, aqueles que estavam falando na direção de Ades silenciaram, em particular o próprio Ades. Alguns sujeitos que já se encontravam mudos, continuaram mudos. E aqueles como Pinho, por exemplo, que já esboçavam uma fala na direção dos interlocutores de Betty, começaram a se pronunciar. Aos poucos, do grupo dos que produziam significados na direção dos interlocutores de Ades, vemos Mega e Diva voltando-se para falar na direção dos interlocutores de Betty. No caso de Mega, talvez seja pelo fato da direção de Betty se aproximar muito dos resíduos de enunciação presente nos livros-texto de Álgebra Linear, sobre o qual ele se debruçou durante todo o tempo de investigação. Já para Diva, vemos, claramente, sua tentativa de mudar sua produção de significados para dar conta de resolver o problema. De fato, inicialmente, ela opera com os objetos IR^2 e IR^3 de modo a constituir um núcleo com as seguintes estipulações locais: “o espaço IR^2 tem dimensão 2”, “a reta, passando pela origem, é um conjunto de vetores de IR^2 “, a dimensão do IR^3 é 3, o plano tem três dimensões. Depois, em diálogo com Betty, ela constitui os objetos matriz 3 por 2, matriz x, y; transformação linear, sugerindo uma tentativa de falar em outra direção. Porém, do que constatei, ela não foi muito longe falando nessa direção.

A produção de significados de Betty foi um divisor de águas entre o que estava sendo dito, antes de sua intervenção, e o que passou a ser dito, depois de sua intervenção. Nossa análise global do processo nos levou às seguintes considerações sobre esse episódio:

i) Apesar do silêncio de Ades, quando olhamos o transcorrer das aulas, vemos que sua produção de significados não foi alterada por uma possível “contaminação” das ações enunciativas de Betty. Esse ponto ficará mais claro quando analisarmos sua produção de significados no capítulo 6;

ii) Uma possível leitura do que a intervenção de Betty causou na produção de significados de algumas pessoas ao silenciar tudo o que não fosse dito naquela direção, refere-se ao fato de que o que passou a ser dito ali, ou melhor dizendo, os resíduos de enunciação de Betty, Mel, Pinho e Judy, que estavam voltados para uma outra direção, não se constituíram em texto para aquelas pessoas. A questão é que, obviamente, não produzimos significados para coisas que desconhecemos;

iii) Outra leitura possível é que, para algumas pessoas que se calaram, a produção de significados de Betty é totalmente ilegítima, no sentido de que essas pessoas não diriam, elas mesmas, nada naquela direção.

Na análise local que desenvolverei no capítulo 6 pretendo elucidar e aprofundar as questões que levantei nesta secção acerca da produção de significados de Betty, Ades e Azul. Assim, como continuação à análise que procedemos até aqui, passarei à análise local da dinâmica, através do estudo do processo de produção de significados desses sujeitos de pesquisa.

Capítulo 6
Análise da Dinâmica da Produção de Significados: Parte II

A análise que desenvolverei neste capítulo tem como objetivo investigar a dinâmica dos processos de produção de significados de Betty, Ades e Azul.

A escolha desses sujeitos se deveu ao fato de suas ações enunciativas nos permitirem elucidar as questões levantadas no capítulo anterior e que só um estudo local de suas produções de significados poderia explicar. Por exemplo, chamou-nos a atenção o fato de Azul, desde o início, sugerir que o enunciado do problema fosse alterado. Por outro lado, a escolha de Ades e Betty se deveu ao fato de que tanto um como o outro, produziram significados na direção de diferentes interlocutores, para o qual alguns colegas se voltaram no decorrer das aulas.

No capítulo 4, explicitei que, da perspectiva do MTCS, quando uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação no interior de uma atividade, ocorre o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve, entre outras coisas, a constituição de objetos, a formação de um núcleo e a fala na direção de interlocutores. Assim, são para esses elementos que dirigirei o olhar num primeiro momento.

Vale ressaltar, que a motivação original desse projeto de tese baseava-se na crença da importância de se estudar a dinâmica dos núcleos, para uma melhor compreensão do processo de produção de significados. Desse modo, nessa fase da investigação, os núcleos, serão candidatos naturais a serem investigados.

§ 1. A produção de significados de Betty

Betty, na direção de resolver o problema proposto, coloca a seguinte questão: (x,y,0) equivale a (x,y)? Essa questão parece surgir em decorrência da sua maneira de operar. Ela constitui os seguintes objetos: vetores, dados por pares e ternas; IR^3, como o objeto que possui vetores da forma (x,y,z); IR^2, como o objeto que possui vetores da forma (x,y). Ela, ao produzir significados, faz o seguinte esboço na lousa, sugerindo a representação cartesiana do espaço como um sistema ortogonal de eixos coordenados:

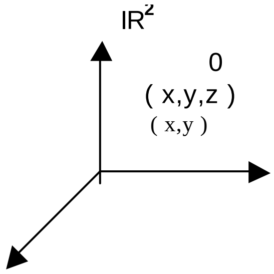

Figura 1

Ela diz:

Betty: (x,y) coincide geometricamente em R2, tipo, considera esse plano, né?, que seria meu R2 [vide figura 1]. Mas, se eu tô trabalhando no R3, equivale a dizer a mesma coisa? [...] Tipo, eu posso pegar um plano aqui também [ela indica um outro plano] e aí? Vai ser um vetor pertencente ao R2 também?

O esboço na lousa constitui uma estipulação local para Betty. São também suas estipulações locais: IR^3 é o espaço; IR^2 é o plano no espaço e IR^2 está contido em IR^3. Betty parece estar falando na direção dos significados geométricos que lembram os objetos da Geometria Analítica.

Na aula seguinte, Betty, dialogando com Duda, Maria Helena e Teka, faz comentários que reunimos na seguinte transcrição:

Betty: Eu só queria colocar uma coisa. Se você olhar pra R2 como sendo elementos de um conjunto e a partir disso você definir operações de modo que tenha dimensão três, você ainda continuaria olhando desse modo? [...] Tipo assim, cê tem R2, seu conjunto de vetores, tá? A partir disso, é possível você definir operações de modo que eu não vá olhar para o par ordenado x,y? [...] tipo, eu vou somar vetores x mais y de uma maneira que eu não faça a mesma coisa que eu tô acostumada a fazer no plano usualmente, de modo, vão supor, a obter uma terna, não sei. [...] Então, é será que não seria o caso de definir uma operação pra tá determinando um espaço vetorial de dimensão 3? Porque da maneira que vocês fizeram, deu a impressão que, ao fazer dessa forma, o conjunto R2 com as operações usuais, aí sim vai ter dimensão dois. Aí eu mudaria a pergunta: será que tem uma outra operação que isso ocorra?

Nesse momento, observo que sua leitura do problema proposto é: determinar um espaço vetorial de dimensão 3 a partir de uma operação diferente. Ela introduz a idéia de operação constituída em objeto pelas seguintes características: ser usual ou não, envolver pares e ternas, tal que, somar dois pares pode resultar numa terna. Vemos que ela opera, ainda, com os seguintes objetos: espaço vetorial, dimensão e base e com a seguinte estipulação local: o conjunto IR^2, com as operações usuais, tem dimensão 2.

Observo ainda que, apesar de Betty dizer "o conjunto IR^2 " ela parece operar como se ele fosse um espaço vetorial.

Ao final da aula, ela faz o seguinte comentário:

[Betty] Se a gente conseguisse definir uma operação em cima do R2, de modo que a gente obtivesse uma base com três vetores, aí sim a gente chegaria. Mas o problema é: como fazer isso? Agora, se a gente não conseguir? Como provar que não, entendeu? Se não for possível, claro, como provar que não?

Sua maneira de operar fica melhor esclarecida quando ela faz o seguinte comentário acerca desse momento:

Betty: [...] Pra mim é assim: se existisse o isomorfismo, então eu conseguiria é definir as operações de soma e multiplicação de modo que o conjunto tivesse dimensão três. Mas aí a gente até ficou tentando achar [...] eu tava tentando mesmo definir bonitinho, achar uma operação tipo somando (a,b) mais (c,d), vai dar quem? Eu queria que desse uma terna. Na última reunião do nosso grupo, a gente tava querendo que isso virasse uma terna, mas não sai. Fiquei pensando, pensando.

Nesse momento, vemos que a idéia de isomorfismo está sendo uma estipulação local a partir da qual ela opera. Além disso, em diálogo com Mega, ao vê-lo dizer: "onde R2 é o conjunto de vetores desse espaço", ela, imediatamente, diz: "O espaço é o espaço vetorial". Reunindo essa estipulação local com a anterior – o conjunto IR^2, com as operações usuais, tem dimensão 2 –, podemos observar aqui um processo de transformação sutil em relação às produções de significados anteriores e posteriores. A sugestão para detectá-lo nos foi indicada por Betty, durante entrevista (cf.transcrições 28 de setembro) que realizamos com seu grupo. Ela disse:

Betty: Eu acho que a maior dificuldade nossa, nesse problema, no começo, foi enxergar R2 como conjunto. A gente tava pensando nele como espaço. Aí é que a gente começou a falar e se R2 for o próprio espaço, né? [...] Aí a gente passou a ver o subespaço e tal. Aí, é que depois a gente falou não, vamos ver como conjunto, mas pra dar esse salto aí, foi tempo.[...] Mas, mesmo a gente lendo, R2 conjunto de vetores, a gente não viu como conjunto, a gente via como sendo espaço.

Assim, como havíamos sugerido acima, Betty considerou IR^2 como um espaço vetorial. Vejamos a seguir, quando ela o constituirá como conjunto.

Em sua intervenção, na aula seguinte, com o propósito de resolver o problema, ela diz:

Betty: [...] eu defino o meu espaço [ela escreve na lousa: $V = (IR^2, +, *)$]. Seria o meu espaço procurado, cujo conjunto de vetores sejam R2 e tenha dimensão três. E eu quero verificar o quê? [Ela mesma responde] Se ele tem dimensão três. Pra isso o que que eu preciso? Encontrar uma base de vetores que eu não sei quem é [ela escreve na lousa: $\beta = \{(\ ), (\ ), (\ )\}$], que gere todo esse conjunto [referindo-se a V]. Então, quer dizer, se tiver três vetores e esses vetores forem L.I., eu consigo ver que este espaço tem dimensão três. Então, se existir uma bijeção com o R3 [ela esboça o diagrama da figura 2], eu consigo encontrar essa base. Por quê que eu consigo? Vocês me dêem uma base em R3.

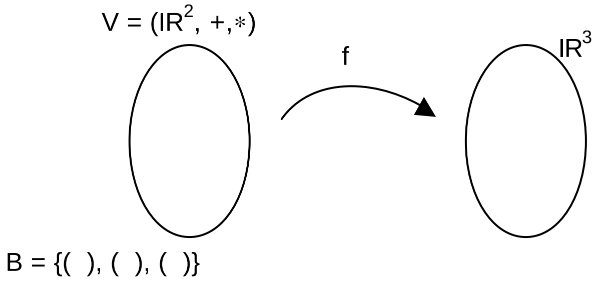

Figura 2

Pinho: Base canônica.

Betty: Base canônica, mas qual seria?

Pinho: Um, zero, zero; zero, um, zero; zero, zero, um [e ela escreve na lousa – vide figura 3].

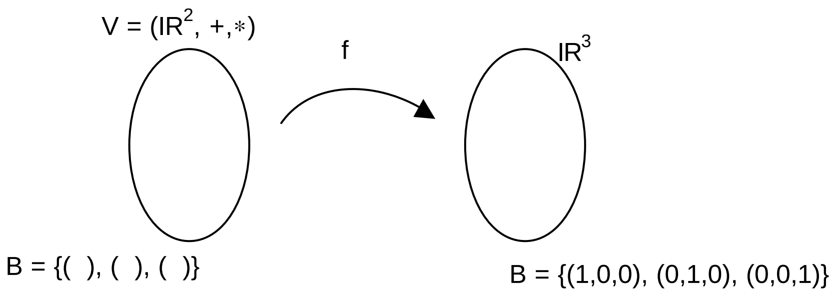

Figura 3

Betty: Então, assim, aqui é uma base. Agora, se existir essa bijeção, eu posso tá definindo as operações é..., em função dessa função bijetora [referindo-se a função f da figura 3]. Porque daí, eu pego aqui e trago pra cá [ela indica com um gesto o caminho de R3 para V]. Ou seja, pra essa base eu consigo os elementos / os vetores dessa base.

Note que $V = (IR^2, +,*)$ é constituído em objeto como o espaço vetorial procurado – formado por IR^2 e duas operações não-usuais – que deve ter dimensão 3. Ela então se propõe a encontrar uma base de V, tal que,como ela diz, “se tiver três vetores e esses vetores forem L.I., eu consigo ver que este espaço tem dimensão três”. Ao dizer isso, sou levado a pensar que ela está operando com a noção algébrica de dimensão. Observo também que Betty, como indica sua fala e o esboço gráfico, opera com V e IR^3 como sendo espaços vetoriais, mas faz menção a eles, por vezes, chamando-os de conjunto. Além disso, ela está operando de modo a aplicar a função f aos espaços vetoriais. Esse é o ponto que causou confusão para ela, como mencionado anteriormente. A questão agora é observar em que momento de sua produção de significados a transformação ocorrerá.

Sobre a bijeção, na continuação, ela diz:

Betty: Eu tô usando pelo seguinte fato: eu queria definir as operações nesse conjunto [ela indica V na lousa] de modo que esse conjunto tivesse dimensão três. Só que, pra isso a gente estabelece uma relação com o R3. Então, pra eu definir a soma, eu definiria como? [Ela vai contando e escrevendo na lousa] Eu pegava, vão supor, dois vetores (a,b) mais (c,d), aí eu esqueço um pouco isso aqui pra ver como eu fui definindo as operações em R3. Como é feita se eu tivesse a função, essa bijeção, de V em R3. A operação aqui seria [ela escreve na lousa: $(a,b) \oplus (c,d) = f^{1}$ (f(a,b) + f(c,d))]. Aqui seria a operação usual e aqui seria a operação em V, tá? Só que isso, existindo a bijeção, é o mesmo que eu fazer isto aqui. Então eu deveria ter usado a função bijetora na operação, pra conseguir a operação. Porque eu não conseguiria enxergar como eu opero em R3 e volto pro meu conjunto V. Aqui seriam os elementos de R2 e aqui de R3. [Na lousa ela verifica o que escreveu: $(a,b) \oplus (c,d) = f^{-1}(f(a,b) + f(c,d))$ e ela indica que f(a,b) = (x,y,z) e f(c,d) = (x',y',z')].[...] Então a multiplicação por escalar seria α de (a,b) e eu vou pensar que eu tô operando em R3, no caso. E a imagem inversa para que eu caia no conjunto V. Não sei se tá claro a notação que eu tô fazendo [ela registra na lousa $\alpha.(a,b) = \alpha.f^{-1}(f(a,b))$ e indica f(a,b) = (x,y,z)].
[...] Eu aplico f, eu caio aqui, eu tenho uma terna [indicando o IR3 na figura 4]. Então aqui eu tô operando com ternas e volto pra cá, eu tenho pares [referindo-se a V na figura 4]. Só que aqui, se eu tenho uma base, l.i., com três vetores [indicando o IR3 na figura 4], a minha base aqui também vai ser l.i. com três vetores. Portanto, dimensão três.

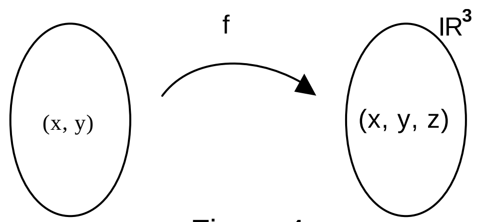

Figura 4

No início de sua fala anterior, ela segue dizendo conjunto V e operando de modo a constituí-lo como espaço vetorial; por exemplo, ela diz: "de modo que esse conjunto tenha dimensão 3".

Assim, ao produzir significados, Betty constitui os seguintes objetos: vetor (como pares e ternas), bijeção, imagem inversa [leia-se inversa da função], espaço vetorial, base, vetores l.i., dimensão, transformação linear, operações usuais e não-usuais ($(a,b) \oplus (c,d) = f^{-1}(f(a,b) + f(c,d))$, $\alpha.(a,b) = \alpha.f^{-1}(f(a,b))$) e isomorfismo. Sobre o objeto isomorfismo, ela diz: "Tá definido assim, ‘entende-se por isomorfismo do espaço vetorial U no espaço vetorial V uma transformação linear f de U em V que seja bijetora. Um isomorfismo f de U em U é um automorfismo de U’ [lendo]”. Nesse momento, ela está operando segundo as seguintes estipulações locais:

- “O IR^3 tem dimensão três”;
- Se f é bijetora, então existe a imagem inversa de f;
- IR^3 é um espaço vetorial;
- f, bijetora, não é definida por uma lei;
- Se um espaço vetorial possui um conjunto de três vetores l.i., então a dimensão desse espaço é três;
- Uma base do espaço gera todo o espaço.

A operação é “associar” V e IR^3 através da ação da função bijetora f, de modo a tomar uma base do espaço vetorial IR^3 e associá-la com uma base de V, o que implica, como ela mesma diz, em relacionar par e terna e não implica em transformar par em terna. E ainda, ela observa:

Betty: Então, eu consigo ter um espaço de dimensão três porque é como se esses conjuntos fossem iguais, equivalentes. Porque se eu pego aqui [ela indica o R3 na figura 3], se os elementos estão associados, é como se eu tivesse pegando aqui [ela indica V na figura 3]. Não vai mudar nada pra gente. O que vai mudar é a operação. Seria, eu tô fazendo a mesma coisa em espaços diferentes. Só o que muda é, na verdade, a operação e é o que vai tá me dando a mesma dimensão.

Na direção de resolver o problema proposto, Betty e seu grupo vão a lousa apresentar, à turma, novas considerações a respeito da investigação:

Mel: Então, a gente começou colocando o que a gente / a gente queria saber se era possível encontrar um espaço vetorial, que tinha os vetores em R2 e tinha dimensão R3. Então, a gente chamou este espaço de V, né? [Ela escreve na lousa: $V = (IR^2, \oplus, *)$]. Então, **esse era o espaço R2 de vetores**, com as operações não-usuais, que eu não sei quais são. Então, aí a gente fez referência ao que você tava falando, né? [Ela vai para frente do diagrama de Venn, feito na lousa, onde está representado o IR^2 e o IR^3, vide figura 5 abaixo] **Na hora que a gente fala dessa função, a gente vai considerar só o conjunto R2 e não o espaço,** agora. Por isso eu, só podia falar de função, por enquanto, não de transformação. Então, eu tenho que encontrar três vetores, que vão ser a base que gera esse espaço. Então, os vetores v_1, v_2 e v_3 tal que [ela escreve na lousa: $v_1 = (v_1', v_1'')$, $v_2 = (v_2', v_2'')$, $v_3 = (v_3', v_3'')$]. Tá, e aí isso aqui a gente vai ver depois, que é a base que gera esse espaço. Então, nós vimos que pra fazer essa relação / pra chegar nessa conclusão a gente tinha que ter uma função bijetora, né? Pra que tivesse um / meu espaço tivesse dimensão três, a gente tinha que ter essa função que levasse três vetores [de V] em três vetores do R3. E, aí, se ela é bijetora, a gente tinha f^{-1} aqui [vide figura 5]. Agora comecei a me perder um pouco. Eu tenho que agora, a gente vai ter que fazer os vetores. Era o v_1 e v_2 mesmo que a gente pega, né? [Ela pergunta para a Betty].[64]

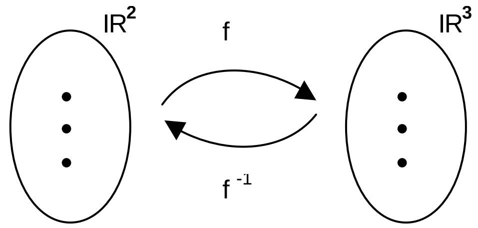

Figura 5

Betty: Isso.

Mel: Mas aí eu posso falar de a,b / essa é a operação do nosso espaço que agora eu vou falar dele [ela diz isto enquanto escreve: (a,b) $\oplus$ (c,d) =]. Isto aqui é o mesmo que [e escreve (a,b) $\oplus$ (c,d) = $f^{-1}(f(a,b) + f(c,d))$]. Tá, porque a inversa é que volta nesses mesmos dois vetores que tô tomando aqui.

Betty: Quando eu escrevo isso [ela indica a adição definida na lousa por Mel], **é o mesmo que eu estar operando em R3**, com operação usual que eu conheço e através da inversa dessa função, eu acabo operando em R2. É como se eu pegasse o conjunto R3, desse uma nova cara pra ele. Porque, se existe uma bijeção entre R2 e R3, então, cada elemento corresponde a um outro. Cada elemento de R2 corresponde a um elemento de R3 [ela indica na figura 5].

Mila: /De V/

Betty: [Olhando para Mila] **Não, tô pensando nos conjuntos, de R2 em R3.** Então qual que é a idéia? Como é bijetora, **eu conheço R3 com as operações usuais e ele tem dimensão 3** Por isso é que a gente tomou ele. Porque a gente conhece o conjunto que tem a dimensão 3. Então, se eu sei operar aqui [ela indica o IR^3 na figura 5] e eu quero um conjunto com vetores de R2, eu vou dar uma nova cara pro R3. Fazendo o quê? Definindo as operações de modo que esse conjunto [ela indica o IR^2 na figura 5] basta ter dimensão 3.

Mel: Porque, se fosse as usuais continuaria tendo dimensão 2. Por isso é que eu tô falando pra ela dessa outra operação.

Betty: Isso. Aí /

As ações enunciativas de Betty e Mel – sua enunciação e o esboço gráfico da figura 5 – nos sugerem um processo de transformação dos objetos IR^2 e IR^3 que, num momento, são vistos como conjuntos; noutros, como espaços vetoriais[65]. Na continuação, o grupo segue expondo suas idéias:

[64] Grifos nossos.
[65] Vide grifos anteriores.

Mel: /Falta/ a multiplicação por escalar.

Betty: Aí, pra definir a multiplicação a gente define assim [ela escreve na lousa: $\alpha.(a,b) = f^{1}(\alpha.f(a,b))$]. Então, definindo dessa forma, a gente vai verificar aquelas oito propriedades de espaço vetorial.
[...] A gente tava com uma dúvida quando a gente define dessa forma [ela indica a adição escrita na lousa por Mel], por f ser bijetora é como que a gente tivesse mascarando o R3. Poxa, se acontece tudo com o R3 e existe essa bijeção, então a gente não precisa demonstrar as oito propriedades. Porque, se vale as oito propriedades pra R3 com as operações usuais, então, vai valer as oito propriedades em R2 com as operações que eu defini dessa forma [ela indica novamente as operações escritas na lousa]. Porque eu tô usando a função f, que é bijetora, pra definir as operações.

A dúvida do grupo estava em saber se bastava ser bijetora para garantir que as oito propriedades de espaço vetorial valeriam para V, como definido por elas, ou, em não satisfazendo, se haveria necessidade de ser uma transformação linear. Betty tenta esclarecer a questão através do seguinte comentário sobre a ação da função f e da transformação linear T:

Betty: Então, essa f, eu só sei que ela é uma função bijetora que associa o conjunto R2 e R3. Então, não sei nada de operação. Então, é a partir dela que a gente vai tá definindo a operação. Por isso é que a gente não fala em transformação.
[...] Eu acho que, na verdade, eu acho o que ajuda a ver melhor isso aí, é a gente definir a f de R2 em R3 [ela escreve na lousa: $f: IR^2 \rightarrow IR^3$]. No final, depois que a gente verifica que vale as oito propriedades, a gente vai ter o quê? Uma T, uma transformação linear, que leva o espaço V em R3 [ela escreve na lousa: $T: V \rightarrow IR^3$] onde V quem é? É R2 com as operações mais e estrela [ela escreve na lousa: $V = (IR^2, \oplus, *)$]. E, R3 com as operações usuais, né? [Ela escreve na lousa: $IR^3 = (IR^3, +,\cdot)$]. Eu acho que a diferença / eu acho que ajuda a verificar nisso a f / eu não pensei nas operações ainda. Agora, quando eu vou usar os espaços vetoriais, aí sim, eu vou ter uma transformação linear.

Esse parece ser o momento onde Betty começa a mudar sua maneira de operar com os objetos IR2 e IR3. Agora ela aplica a função f aos conjuntos IR2 e IR3 e a transformação linear aos espaços vetoriais V = (IR2, $\oplus$, $*$) e IR3 = (IR3, $+,\cdot$), sugerindo constituí-los como estruturas algébricas. Porém, no caminho para a resolução do problema proposto, surgiu a dúvida da existência da função bijetora, que foi resolvida da seguinte maneira:

Betty: O que a gente discutiu foi o seguinte: quem me garante que existe essa função bijetora? Eu não sei explicar porquê, mas o Rodrigo me garantiu que existe um resultado, que me garante que existe uma função bijetora de R2 em R3. E essa função é justamente a função de Cantor.
[...] a idéia aqui foi a seguinte: eu tenho um intervalo fechado zero, um, em R. Esse resultado me garante o quê? Que existe uma bijeção, do intervalo fechado, zero, um, em R2, tá? Se vale pra esse intervalo, vale para zero, dois fechado em R2, né? Então,

eu posso estender o resultado pra todo plano, né? A reta tem uma bijeção em todo plano. Agora no espaço, o que que acontece? Eu vou fazer a mesma coisa: existe um intervalo fechado, que leva esse quadrado, num cubo de lado um. Então, quer dizer, isso aqui estendendo desse quadrado pro cubo eu vou estender do plano pro espaço, né? Que é o que vai me garantir que existe essa bijeção. Mas, a gente só sabe que ele existe, a gente não sabe falar nada mais sobre isso. E por isso é que a gente não define essa função que a gente tomou como sendo bijetora. Porque é uma função altamente descontínua. Porque a gente não consegue definir uma função que leva esse intervalo nesse quadrado, como vai ser a cara dela. É por isso que a gente não deu uma lei pra ela. Que ela existe, ela existe.

Assim, a função de Cantor, ao ser incorporada ao discurso do grupo, vem garantir a existência da bijeção. Após as discussões com os colegas de turma, Betty passa a demonstrar as oito propriedades relacionadas às operações de adição e multiplicação por escalar de espaço vetorial, como definidas por elas.

Nesse momento, em sua produção de significados, Betty constitui os seguintes objetos: transformação linear, função bijetora, teorema de Cantor, as propriedades ligadas às operações de adição e multiplicação por escalar da definição de espaço vetorial, entre outros objetos.

Como indiquei anteriormente, os objetos IR^2 e IR^3 passaram por um processo de mudanças na sua constituição. Num primeiro momento, ela os constituiu como espaços vetoriais, mas sem menção a estrutura algébrica. Aos poucos foi ficando claro em que momento eles deveriam ser entendidos como conjuntos e em que momento eles deveriam ser constituídos como espaços vetoriais. Ela então conclui que, na bijeção f: $IR^2 \rightarrow IR^3$, esses objetos são conjuntos e, na transformação linear T: $V \rightarrow IR^3$, tais objetos têm uma estrutura de espaço vetorial indicada da seguinte maneira: $V = (IR^{2,} \oplus, *)$ e $IR^3 = (IR^3, +, \cdot)$.

A constituição do núcleo se dá a partir das seguintes estipulações locais:

- IR^3, com as operações usuais, tem dimensão 3;
- IR^2, com as operações usuais, tem dimensão 2;
- f: $IR^2 \rightarrow IR^3$, bijetora, existe, pela função de Cantor;
- As operações em jogo são as operações de adição e multiplicação por escalar, dadas por: $(a,b) \oplus (c,d) = f^1 [f(a,b) + f(c,d)]$; e $\alpha * (a,b) = f^{-1}[\alpha.f(a,b)]$.
- T: $V \rightarrow IR^3$ é linear.

A leitura do processo de produção de significados de Betty nos permitiu fazer as seguintes considerações a respeito de sua dinâmica:

i) Houve um processo de transformação dos objetos IR^2 e IR^3 durante a produção de significados de Betty. Ao longo do processo, vários significados foram produzidos por Betty para os objetos IR^2 e IR^3. Em sua primeira fala, IR^2 é o conjunto de pares ordenados e IR^3 é o conjunto de ternas ordenadas. Instantes depois, ela faz um esboço na lousa, indicando que naquele momento IR^3 era constituído como o espaço (geométrico) e o IR^2 eram os planos que constituíam o IR^3. Em produções de significados posteriores, IR^2 e IR^3 são vistos como espaços vetoriais, mas pensados, por vezes, como conjuntos, para finalmente tomar esses objetos, na bijeção, como conjuntos e, na transformação linear, como tendo uma estrutura algébrica.

ii) No processo de nucleação, isto é, no processo de constituição e transformação de estipulações locais, operações e lógicas, observo, no decorrer da produção de significados de Betty, o afastamento de certas estipulações locais, como se elas afastassem até desaparecer e a transformação de outras no núcleo. Mais especificamente, após a primeira fala de Betty, o esboço gráfico representando o sistema de eixos coordenados tridimensional, não apareceu mais nas justificações de Betty, como também as estipulações locais: IR^2 é o plano, IR^3 é o espaço. Não se viu mais, em nenhum momento, vestígios de produção de significados "geométricos" sendo produzidos. Por outro lado, $V = (IR^2, \oplus, *)$ e $IR^3 = (IR^3, +, \cdot)$ vão se constituindo em estipulações locais. Houve também, ao longo do processo de nucleação, a incorporação de novas estipulações locais. Há um processo sutil de transformação do que em um momento são novos objetos e em outro, se tornam estipulações. Esse é o caso da bijeção. Num primeiro momento, Betty o constitui em objeto (14 de setembro); na aula seguinte (21 de setembro), a bijeção parece ser uma estipulação local cuja ação é usada para operar na construção das operações de adição e multiplicação por escalar. Penso que tal fato ocorreria também com a função de Cantor, caso o processo continuasse. Isto porque Betty e Mel acenam para essa possibilidade quando dizem: "a propriedade existe" [Betty], "Existe e é válido [o resultado]. Então eu vou usar, né? Foi isso que a gente pensou" [Mel].

iii) Observo ainda, ao longo dos dias, uma mudança nos interlocutores de Betty. A primeira fala nos sugere que o que Betty tinha a dizer estava na direção dos significados, digamos, da Geometria Analítica, porém, aos poucos e através da intervenção do personagem Rodrigo, ela vai se voltando para uma direção que podemos caracterizar como sendo dos significados algébricos, da Álgebra Linear.

iv) Observo, também, transformações ocorridas nas operações, isto é, no que Betty esteve fazendo com os objetos. Como indicamos anteriormente, Betty, inicialmente, procura somar pares de vetores para obter uma terna, operando, segundo ela, com a idéia de isomorfismo. Em substituição a esse modo de operar, ela passa a usar a ação da função bijetora que, segundo ela, lhe permite "associar" par e terna. Aos poucos, ela começa a incorporar a ação da transformação linear na direção de associar $V = (IR^2, \oplus, *)$ e $IR^3 = (IR^3, +, \cdot)$, com o objetivo de indicar que V tem dimensão 3, através da identificação com o espaço vetorial R3 que possui dimensão 3.

§ 2. A produção de significados de Ades

Passarei agora a fazer a leitura do processo de produção de significados de Ades, ao longo da atividade de resolver o problema proposto. Na primeira produção de significados de Ades a respeito do problema proposto, ele comenta:

Ades: Sim, mas no começo, né?, quando a gente começou a considerar que seria, por exemplo, o canto da sala ali, as três paredes, o chão e as duas paredes. [...] Aí eu também pensei no seguinte: quando você pega dois vetores paralelos, você considera que é o mesmo vetor. Tanto é que você faz soma, regra do paralelogramo, etc., fazendo a transposição do vetor. Então, o vetor paralelo a ele mesmo, a um outro vetor é o mesmo vetor. Assim sendo todos os vetores / se você tem dois vetores paralelos que tão formando o plano, por exemplo, no fundo da sala, e você transpõe esse vetor, mexe pra cá, por exemplo, você tem um outro plano. [...] O conjunto das classes de eqüipolência, não seria R3? [...] O conjunto das classes de eqüipolência seria o R3. E daí me veio a idéia de que o espaço seria uma expansão do plano, né? Na medida em que você não considera ser diferentes; na medida que você considera os dois vetores paralelos, como sendo o mesmo vetor, então o que você está fazendo é uma expansão do próprio plano. Então o espaço seria uma expansão do próprio plano.

Ele segue explicando sua maneira de operar:

Ades: [...] Você teria vários planos que estariam em R2. Então, você teria um espaço vetorial R2. Como o plano paralelo é o plano paralelo formado por esse mesmo espaço vetorial R2, corresponderia ao mesmo plano. Na medida em que você não muda, na medida em que você tá compondo esse R2 com dois vetores, você pode compor um outro plano desse mesmo R2 por dois vetores paralelos aos dois primeiros, você tem o mesmo plano. Então você fez uma expansão daquele plano no espaço, ou seja, você deixou de ter R2 e passou a ter R3, mas o plano continua sendo o mesmo. Por que continua sendo o mesmo? Porque você tá com dois vetores paralelos, formando um plano paralelo. E esses dois vetores são paralelos, portanto, são os mesmos vetores que formaram o R2.

[...] Eles estão formando planos paralelos, certo? Se você fizesse enviesado, aí não. Aí já não, aí você sai. Todos os paralelos em função daqueles mesmos dois. Se você mudar um deles, aí não. Porque no começo a gente pensou isso, né? Quer dizer, mudando um outro / mudando um terceiro, você já não teria mais planos paralelos. Aí a gente pensou: Bom! e fixando a princípio, fixando uma coordenada, você cairia nos paralelos. E esses paralelos seriam o mesmo? Aí eu tô achando que seria porque seria classe de equivalência, né? Baseado nisso, baseado no vetor que você usa ou você transpõe o vetor e considera o mesmo vetor. Ou seja, dois vetores paralelos são o mesmo vetor, não é um vetor diferente. Desde que ele tenha mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido é o mesmo vetor, tá? Então dois vetores gerariam um plano. Então os dois vetores paralelos a esses dois, gerariam um outro plano paralelo. Mas que seria o mesmo, que seria equivalente [...] eu procurei enxergar melhor embora, né?, a dimensão, o limite do enxergar que eu digo, imaginar, ver mesmo mentalmente, fica nos três, né? Então eu considero que é um caminho arriscado na medida que nós tamos fazendo isso só pra três dimensões, o que nós tamos falando seria n.

Sua maneira de operar está ligada à sua leitura do problema proposto. No enunciado do problema – investigue se é possível existir um espaço vetorial real onde IR^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3, – ele lê: obter IR^3 a partir de IR^2. Assim, sua produção de significados se volta para responder a esta questão.

A reconstituição de seus argumentos parece seguir, em resumo, a seqüência: dois vetores paralelos são o mesmo vetor e dois vetores paralelos formam um plano; dois vetores paralelos a outros dois vetores paralelos formam planos paralelos; fixado um plano e tomando um outro plano paralelo, obtém-se o IR^3.

No processo de produção de significados o objeto IR^2 é o plano; IR^3 é o espaço; vetor é constituído em objeto como segmento orientado; classe de equivalência refere-se a um conjunto de planos a partir da variação de uma coordenada e o objeto “um espaço vetorial IR^2” parece referir-se a um conjunto de planos. Observamos as seguintes estipulações locais:

- IR^2 tem dimensão 2;

- $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3;
- Dois vetores paralelos são o mesmo vetor;
- Dois vetores paralelos formam/geram um plano.

As operações com os objetos são: transposição de vetor, paralelismo de vetores e planos, expansão de planos e "visualização", ocorrendo da seguinte maneira: posso transpor vetores paralelos; dois vetores paralelos a outros dois vetores paralelos formam planos paralelos e os planos devem ser paralelos, "se você fizesse enviesado, aí não". Pois, em coerência com a operação expansão do plano, os planos têm que ser paralelos. Ele opera de modo a tentar enxergar, em oposição à maneira de operar das colegas de grupo: "E elas tentaram a partir das propriedades, pensar, mostrar que aquilo era verdadeiro ou não. E eu fui procurando enxergar". Observo que "enxergar" é entendido por Ades como uma operação legítima. Além disso, sua fala sobre dimensão – o limite de enxergar, como ele diz – nos sugere, como afirmei anteriormente, que para ele o espaço tem dimensão 3.

Porém, vemos que, apesar de operar dessa maneira, ele deixa transparecer que não considera o problema resolvido; ele diz: "Eu não consigo caracterizar bem, mas é assim que eu vejo. Exatamente isso que eu quero fazer, essa ligação de um com outro eu não consegui fazer, desde que a gente aprenda algebricamente, né?"

Ele continua produzindo significados, na direção de resolver seu problema. Vejo assim que outras estipulações locais são incorporadas, por exemplo: "eu pensei exatamente nos planos, infinitos planos, né? Porque o plano também é infinito na sua dimensão plana, né?" E segue indicando sua maneira de operar: "Então, vão dizer, pra cá é infinito, pra cá e pra lá. Na medida em que você faz vários planos paralelos, você começou a gerar o espaço, né?"

No seu diálogo com Diva sobre o que seria o plano para ele, sua resposta é:

Ades: Bom, quando eu pego dois vetores linearmente independentes [ele faz um gesto com a mão mostrando o polegar e o indicador]. A união desses dois vetores linearmente independentes. [...]

Com estas ações enunciativas, Ades nos sugere, momentaneamente, que poderia mudar a direção de sua produção de significados, mas aos poucos, ele volta a operar da mesma maneira que anteriormente, quando é perguntado por Diva sobre o que é o R3:

Ades: É a expansão do R2. Eu não falei em grossura, falei em expansão. [...] Então crio planos paralelos. Na hora que eu criei esses planos paralelos é só a gente pensar no conjunto de todos esses planos paralelos eu tenho o R3.
[...] é por aí que eu tô pensando, quer dizer, quando você vai definir R3? Quando você estabelece uma distância a esse plano original, vamos dizer assim. Porque embora se você tá imaginando que eles existem, né?, você tem como referência só o R2. A partir do R2 você pode definir o R3. É só você estabelecer outro ponto. Aí você tá definindo, né?. Vão dizer que você tem a parede como referência só e tem uma mosquinha voando. Você vai definir a posição dessa mosquinha em relação à parede. Daí você tá falando de espaço, você não eliminou a parede. Você tem que ter a parede. Agora, não precisa ter outra parede na mosquinha, né? Cê tem uma coordenada, você definiu o espaço ali, em função daquela sua parede que é o R2, entendeu? Porque é assim que eu tô pensando. [...] Se você não tiver um plano como referência, não tem como estabelecer o terceiro. [...] E a referência é um plano.

Enquanto vai produzindo significados, Ades vai explicitando mais algumas estipulações locais ligadas a sua forma de operar, tais como, o plano é a união de dois vetores linearmente independentes, o plano é infinito, os planos geradores do R3 são contínuos, o plano não tem espessura. E as operações continuam sendo mantidas.

Na entrevista que realizei com o seu grupo com o intuito de saber sobre o encaminhamento do problema proposto até aquele momento, ele comentou:

Ades: [...] Pra mim ficou bem mais claro que é possível, né? Tô começando a ver com mais clareza a relação que existe entre o R2 e o R3. Pra mim, na verdade, eu venho de outra área, eu vejo de outra maneira, né? O primeiro conflito com elas duas, que são mais matemáticas, é com / não / a partir de propriedades você consegue ver. Você demonstrou a propriedade, então aquilo é verdade. Eu vejo isso de outra maneira, eu tento compreender aquilo de uma forma mais visual ou mais interpretativa, talvez, né? Eu quero enxergar que aquilo é possível. E foi nesse sentido que eu comecei a caminhar. Agora, essa semana eu vou me empenhar em transformar isso que eu tentei formular, agora, que eu chamo de ver, em operações. Porque, realmente, se você não conseguir escrever isso de uma forma inteligível, fica muito difícil, você explicar ou convencer alguém de que aquilo é verdade, né? Pra mim, ficou bem mais claro a questão de como aparece o R3 no R2. A princípio, tava aparecendo uma coisa meio mágica, meio desconexa, não? Porque, se você pode acrescentar ao R3, você dá mais uma dimensão, sem adulterar ou deturpar aquele vetor que era dois. De repente, ele tem mais uma dimensão, que passa a ser três. Então, isso pra mim ficou mais claro, quer dizer, que é possível. Só não consegui ainda colocar isso dentro de uma linguagem matemática explícita.

Na continuação, ele comenta:

Ades: É, porque, eu pensei um pouquinho nesse sentido; quando você tem dois vetores, se você pega a soma vetorial desses dois vetores, você vai ter um terceiro vetor, que vai ser coplanar, por exemplo, vai tá no mesmo plano. Se você dá uma terceira coordenada, você joga esse plano pra cima. Você continua tendo R2, num espaço três. Porque essa terceira coordenada representa a terceira dimensão. Então, pra mim, ficou mais claro. Eu, ainda, não tô conseguindo demonstrar, mas ficou mais claro que, na medida que eu tenho aquela sobreposição de planos, que a gente chegou a comentar lá / eu tô insistindo na mesma tecla [Maria Luiza e Judy riem]. Pode tá completamente errado, mas eu continuo insistindo naquilo. Você começa a formar o espaço, entendeu? Então, na medida que você tá na terceira coordenada, você tá acrescentando planos. E sempre, esse plano no espaço vetorial dois. A hora que você acrescenta a terceira, você gerou um R3.

Observo, assim, que sua maneira de operar estava sendo mantida, que sua leitura do problema proposto ainda era a mesma: obter IR^3 a partir de IR^2. E sua tentativa de resolução passava por colocar suas idéias numa linguagem matemática explícita. As operações sugerem, agora, a transformação do vetor: "você dá mais uma dimensão, sem adulterar ou deturpar, aquele vetor que era dois. De repente, ele tem mais uma dimensão, que passa a ser três".

A última produção de significados de Ades acontece no dia em que o professor apresenta a solução para o problema proposto. O professor diz:

Prof: [...] Eu vou abrir o jogo pra vocês: é, a Betty tá certa, a resposta é sim e tudo o que ela disse é mais do que suficiente; a não ser mostrar, por exemplo, que existe a bijeção, né? Entre o R2 e o R3. E aí você pega o livro do Halmos e tá lá, né? Mesmo que você não queira acompanhar a demonstração, no livro do Halmos, tá lá.

Após tecer um comentário a respeito do que ocorreu em sala de aula, o professor diz: "Aí eu pergunto pra vocês: o que que é dimensão? Por que que a dimensão do plano é 2? O plano [ênfase no artigo o]". Isto motivou Ades a falar o que leva ao seguinte diálogo entre os dois:

Ades: Bom, isto porque eu tinha aprendido que o plano é de dimensão 2.

Prof: Não, mas me diz o que é / minha pergunta é: por que você diz que o plano tem dimensão 2? O plano é bidimensional? O espaço é tridimensional?

Ades: Você tem um comprimento e uma largura (ele usa o dedo indicador e o polegar para indicar) e se limita a aquilo. Você descreve um par de coordenadas, por exemplo, e daí, acaba. Eu enxergo o plano no espaço, mas eu enxergo o plano, entendeu? Como o Lufran, falou: "giro, na hora que eu girei, eu tenho um espaço", eu também acho isso, eu também vejo isso. Mas o que é girar? Eu não sei matematicamente o que é esse girar.

Prof: A gente tá na questão da dimensão.

Ades: Ã?

Prof: Me diga tudo o que você quer dizer pra mim, dizer o que é dimensão pra você, no sentido de plano tem dimensão 2 e o espaço tem dimensão 3. Que foi o que apareceu.

Ades: Bom, voltando ao convencional, que é a única coisa que eu posso ver, né? Na hora que eu coloco mais uma forma de estender esse plano, né? Quando estende, quando eu consigo estender esse plano, que é aquela idéia de um monte de planos do lado do outro (inaudível) dimensão, ou deslocar o plano. Eu vejo mais como deslocar o plano. Na hora que eu desloco o plano, eu estendo isto pra uma visão de espaço.

Note que Ades diz: "Bom, voltando ao convencional, que é a única coisa que eu posso ver, né?" Ele parece sugerir que o professor está falando de "outro lugar", que não aquele que ele está falando. E ao dizer isso, ele pode estar dizendo que de onde ele fala também é legítimo; tanto é que ele continua falando. O professor continua o diálogo:

Prof: Mas, o que quer dizer / é isto que eu quero saber? O que quer dizer a seguinte frase: o espaço tem dimensão 3? Isto que dizer o quê, pra vocês?

Ades: Que eu consigo diferenciar três aspectos, vão dizer, naquilo que eu tô fazendo, naquilo que eu tô vendo, né? Quando a gente fala, que eu não vejo a parte de cima, (ele se refere à tampa da carteira) se eu ponho o estojo, eu tô enxergando um pedaço aqui, que se a gente encostar, eu derrubo ele, certo? Aqui tá o plano, o plano dessa cadeira, (ele toca a tampa da carteira) eu passo a mão e não vejo nada, eu boto o estojo, eu derrubo o estojo. Tem alguma coisa aí que eu não tô vendo, que existe e que tá na minha concepção.

Lufran: Professor, um plano, por exemplo, pode existir duas medidas e o espaço seria três eixos que o senhor tá querendo dizer, né?

Prof: Essa é a questão. Esse objeto é tão natural, tão isso que não pode ser mais nada. Ó eu vou pegar a sua frase, vou levar a sério o que você disse: são duas medidas. Se eu imaginar aquela lousa ali como sendo um plano, eu posso fazer ali vinte medidas; eu meço assim, assim (ele vai sugerindo com a mão, outros jeitos de medir). Sim, mas a questão é: será que se eu fixar dois, eu não vou poder pôr outros? É isso que vocês estão falando?

Ades: Ah tá, você percebeu outra coisa.

Prof: É vocês que estão dizendo pra mim? (...)

Ades: Ó professor, deixa só falar uma coisa sobre aquele problema que você colocou, pra não voltar depois. A diferença entre um plano e o espaço, no caso, é que você teria, vamos dizer assim, no espaço mais / o mesmo ponto no plano, poderia representar vários pontos no espaço, entendeu? Se você tem um 2,3, (ele se refere ao par (2,3)) no plano, se você coloca outra dimensão que vai pro R3, aquele 2,3, pode ser (2,3,2), (2,3,1,), (2,3,4), e você passa a ter uma reta, certo? Ou não?

Observe que, na fala anterior, Ades procura uma nova maneira de explicar o que ele diz ser a diferença do plano e do espaço. O problema proposto pelo professor ainda é, para ele, obter o IR^3 a partir do IR^2. E ele vai insistir nesse ponto como veremos no que segue:

Prof: Não sei.

Ades: Mas você entendeu o que eu quis dizer?

Prof: Eu /

Ades: /Por exemplo/, quando eu tô no plano, (2,3) é só (2,3); se eu acrescento outra dimensão, esse ponto passa a ser vários pontos no espaço. Porque qualquer ponto que tenha aquela barra, aquele risco, (2,3), se eu ponho (2,3,1), eu tô aqui com o ponto no espaço, se eu tenho (2,3,2), eu passei para o outro ponto no espaço. Pra outro plano, mas estou no espaço. E aí, se pensar em R3, eu tenho um ponto distinto, quando no R2, eu só tinha o mesmo ponto (2,3). Cê entendeu o que eu falei?

Prof: Eu acredito que sim. Mas o que eu não sei se entendi é por que você tá dizendo isso? Eu entendi a construção que você fez.

Ades: Eu tô dizendo isso porque foi uma forma de eu distinguir o R2 do R3.

Esse diálogo nos faz acreditar que, apesar de o professor apresentar a resposta do problema proposto, Ades ainda acredita na sua construção como sendo legítima. Os objetos que ele constitui ainda são os mesmos da sua primeira fala: vetores são segmentos orientados, representados por pares e ternas, IR^2 é o plano, IR^3 é o espaço. O objeto dimensão, agora, é explicitado como a quantidade de informação necessária para localizar um ponto no plano ou no espaço. Sobre dimensão dois, ele diz: "Você tem um comprimento e uma largura e se limita a aquilo. Você descreve um par de coordenadas, por exemplo, e daí, acaba". Sobre dimensão três, ele diz: "Que eu consigo diferenciar três aspectos, vão dizer, naquilo que eu tô fazendo, naquilo que eu tô vendo, né?"

Em resumo, ao olhar para o processo de produção de significados de Ades com o intuito de pensar na dinâmica do processo, vemos a constituição dos objetos se mantendo a mesma ao longo de todo o processo: vetor, entendido como segmento orientado; IR^2 é o plano, um elemento formativo do IR^3; IR^3 é o espaço.

O processo de nucleação, isto é, de constituição e transformação do núcleo, foi de incorporação de estipulações locais ao longo do processo, da seguinte maneira esquemática:

[IR^2 tem dimensão 2, IR^3 tem dimensão 3, dois vetores paralelos são o mesmo vetor, dois vetores paralelos formam/geram um plano] $\rightarrow$ [IR^2 tem dimensão 2, IR^3 tem dimensão 3, dois vetores paralelos são o mesmo vetor, dois vetores paralelos formam/geram um plano, o plano é infinito, o plano é a união de dois vetores linearmente independentes, os planos geradores do **IR**^{3} são contínuos, o plano não tem espessura]

As operações foram, ao longo do processo: estender/deslocar/ acrescentar, que a meu ver, são sinônimas de expandir, por exemplo: “Na hora que eu desloco o plano, eu estendo isto pra uma visão de espaço”; “Quando eu tô no plano, (2,3) é só (2,3), se eu acrescento outra dimensão, esse ponto passa a ser vários pontos no espaço”. Além disso, ele opera com o “enxergar” da seguinte maneira: “Eu enxergo o plano no espaço, mas eu enxergo o plano”.

Do que observei, constato que Ades produziu significados, do início ao fim, na direção de um mesmo interlocutor, independente de tudo o que ele ouviu em sala de aula. É possível que sua leitura do problema proposto tenha contribuído para esse estado de coisas. Ao entender que o problema a ser solucionado seria obter IR^3 a partir de IR^2 – isso era o novo –, ele passou a operar nessa direção. A meu ver, o problema assim entendido já havia sido resolvido, por ele, na primeira aula, quando ele diz: “o espaço seria uma expansão do plano”. A questão passou a ser, então, apresentar uma justificativa plausível para o professor e a turma. Por algum motivo, o que ele dizia não era satisfatório como resposta ao problema. Vimos várias vezes ele dizendo: “Eu não consigo caracterizar bem, mas é assim que eu vejo. Exatamente isso que eu quero fazer, essa ligação de um com outro eu não consegui fazer, desde que a gente aprenda algebricamente, né?” (31 de agosto); ou “Só não consegui ainda colocar isso mesmo numa linguagem matemática explícita” (28 de setembro). A questão de saber o porquê dessa atitude já não é mais possível, tendo apenas caráter especulativo. Poderia ser porque ele acredita que suas justificações não eram suficientes para satisfazer o professor – seu antigo colega de turma na escola e, agora, um pesquisador. Ou ele entendia que naquele espaço a justificativa aceitável deveria ser outra e não aquela que ele tinha. Também, o fato de Ades não ter encontrado nenhuma oposição à sua fala – a não ser a divergência com as colegas de grupo – pode tê-lo feito acreditar na legitimidade do que estava dizendo.

§ 3. O processo de produção de significados de Azul

A primeira fala de Azul a respeito do problema proposto foi:

Azul: [...] nós nos atemos primeiro em verificar tudo isso: o que era espaço vetorial, corpo, escalar. E a primeira impressão nossa, a minha e a do Mega, era sim; e da Muiara, não. Então, nós começamos a mudar a pergunta; porque se a pergunta fosse: numa dimensão 3 as possibilidades do R2, tá? Agora, se é R2, para você chegar numa dimensão 3, não teria essa possibilidade; porque a dimensão 3, ela tem que incluir.

Na aula seguinte, seu grupo acreditou ter resolvido o problema proposto. A resposta a que chegaram é expressa por Muiara a partir de um texto escrito pelo grupo, nos seguintes termos:

Muiara: Nós colocamos assim: "por mais vetores reais que consideremos, se não tivermos pelo menos um ponto fora do R2 não podemos obter a dimensão três". [...] R2, temos como figura a parede, um plano como a gente usualmente pensa. E esse outro ponto fora seria a mosca. Se não tiver isso definido, então, como é que vai gerar a dimensão três? Então, eu acho que acaba caindo numa coisa assim: se a mosca tá fora do plano é porque existe alguma coisa além dele, né? Pelo menos, dá origem a essa dimensão três. Então sem esse elemento fora do R2, nós respondemos, também, que não.

Azul toma a palavra para dizer:

Azul: Se você tem o conjunto de vetores em R2, tá? Por mais que você trabalhar operações neles / nós vimos que era / com isto nós vimos até na outra aula / toda a parte de espaço vetorial e o que realmente era espaço vetorial, o que que acontecia, o que que precisa, por que que era? Daí, nós chegamos à conclusão que se eles estiverem realmente em R2, se eu não tiver nada fora dele, não tem como ter uma outra dimensão. Se fosse só pra colocar como sendo vetores de R2, pelo menos eu sinto assim. Claro, que, no início, na outra aula, nós tínhamos pensado assim: se a gente mudar / cadê a pergunta? / Se nós mudarmos a pergunta, como ela colocou também, né? Aqui, se em vez de colocar "investigue se é possível existir um espaço vetorial real e que tenha dimensão três, onde R2 é o conjunto de todos os vetores do espaço?" Se eu tô afirmando que ele tem dimensão três, daí eu consigo retirar o que é R2. Mas, no texto do jeito que está, eu acho que não dá.

Maria Luiza: Eu não sei o seu nome, mas a pergunta que ele fez e a resposta sim, gostaria que você dissesse por quê.

Azul: Não, porque se você / a pergunta foi assim ó, "investigue se é possível existir um espaço vetorial real e que tenha dimensão três, onde R2 é o conjunto de vetores do espaço". Então, se eu já tenho a dimensão três, eu consigo tirar tudo de R2. Se eu já tenho a dimensão três, eu consigo tirar todos os R2. Se já está gerado o três, eu consigo o dois.

Mel: Mas todos?

Azul: Se eu tiver uma dimensão 3, tá. Se eu tenho uma dimensão 3, aí eu posso tirar sempre o R2 [ênfase na palavra sempre].

Mel: Tá.

Maria Luiza: Desde que seus vetores sejam de R2, mas você tá na dimensão 3.

Azul: Mas, se eu tô na dimensão 3, é claro que eu vou ter vetor 2, do R2.

Maria Luiza: Qualquer um?

Azul: Claro, porque ó, vão supor, eu vou colocar, como dimensão 3, aquele canto lá da parede, tá? Então, dimensão 3 vai me dar largura e altura e profundidade, tá? Se eu tenho isso aí, é claro que eu vou ter sempre. Sempre.

[Uma voz]: Sempre?

Azul: Se eu tirar uma dela, sempre vou ter dois?

Ela fica em silêncio por um tempo, e volta a falar instigada por Maria Luiza:

Maria Luiza: Quando você falou sim, eu perguntei pra você na hora daquela questão. A minha dúvida era a seguinte; se você tiver então / você colocou o plano aqui, como se fosse a sala, né? Então imagine que você tenha um vetor que tá saindo lá do cantinho da sala, tá assim, digamos, perpendicular. Esse vetor você considera que ele tem coordenadas no R2, então?

Azul: [...] Pra mim, agora, ficou claro, assim, eu não vou dizer que todos. Realmente, todos, não. Mas se eu tiver dimensão 3, eu tenho certeza que eu vou ter R2. Agora, se eu tiver dimensão 2, eu tenho certeza que eu não tenho R3.

Maria Luiza: Quando você falou, você falou assim: qualquer vetor poderia ser do R2. Foi a fala dela antes.

Azul: [...] meu pensamento é esse: se eu tenho dimensão 3, eu consigo R2, nele, tá? E se eu tenho dimensão 2, eu não consigo R3. Então, eu acho que, no início, sei lá.

Diva: Eu ainda não entendi essa história da dimensão. Eu não entendi no grupo dela aí [referindo-se ao grupo anterior]. Não tô entendendo no seu grupo. Essa história da dimensão.

Azul: Não é só, por exemplo, largura e comprimento? Não seria a dimensão 2? Largura e comprimento? Pra mim, é infinito. Mas, largura e comprimento. Quando eu tenho alguma coisa a mais, daí eu tenho dimensão três?

Azul vai reiterando sua fala inicial; noto que, da maneira como ela constitui o enunciado do problema em texto não é, da sua perspectiva, possível resolvê-lo. Como ela diz: “No texto do jeito que está, eu acho que não dá”. Então para produzir significados, ela precisa alterá-lo. Mas, por que o enunciado do problema precisa ser alterado? Nossa resposta se baseia primeiro, na leitura de Azul, do problema. Para ela, o enunciado do problema propõe obter IR^3 de IR^2. Segundo, com que objetos ela opera. Note que a dimensão é constituída em objeto, como a quantidade de informação necessária para localizar um ponto no plano ou no espaço. Sobre os objetos IR, IR^2 e IR^3 ela diz:

Azul: [...] O que que é o R pra mim? [ela traça uma reta na lousa] Pra mim é pegar todo o sistema nosso de numeração. Pra mim, seria isso aqui [ela faz riscos sobre a reta sugerindo pontos] todos os pontos, infinitos pontos, pra mim é R. Se eu fizer mais uma [ela traça uma reta perpendicular à anterior] e colocar infinitos pontos aqui ó, pra mim é outro R. Agora se eu unir isso aqui infinitamente, pra mim é R2. Eu não sei se pra mim é tão /eu vejo assim, isso aqui tudo unido, certinho é o R2. Daqui, aí, tira um ponto fora, desse ponto que tá aqui fora eu relaciono aqui, eu faço o R3. [com a mão, ela sugere um ponto fora do plano da lousa]. Pra mim é isso. Eu não sei se eu tô simplificando alguma coisa demais, mas tenho essa visão. Eu acho assim, se eu quiser o R3 eu tenho eu tenho que tirar um ponto fora daquele R2, se eu ligar, eu tenho R3. Se eu conseguir montar uma terceira dimensão; se eu pegar um outro ponto fora dessa terceira e ligar, vou ter R4. Agora, eu não consigo visualizar essa quarta, o R4. Mas eu acredito que nesta mesma medida e proporção deve existir.

Logo, para Azul, o objeto IR é constituído como a reta real; IR^2, como o plano cartesiano e IR^3, como o espaço físico. Assim, olhando desta perspectiva, não é possível obter IR^3 de IR^2, mas é possível obter IR^2 e IR^3.

Na fala de Azul, observo que ela possivelmente, tenha ido aos livros-texto e lá tenha encontrado as definições de espaço vetorial, corpo e dimensão. Além disso, ela esteve presente às aulas onde Betty apresentou seu encaminhamento de resolução do problema. Porém, ao que parece, ela não constituiu esses resíduos de enunciação em texto. Notamos que ao longo das aulas, Azul foi silenciando. Ao longo de dois meses a totalidade de sua fala reduziu-se ao que foi apresentado anteriormente. Ao final desses dois meses de discussão, na aula em que a solução do problema foi apresentada, ela ainda comenta:

Azul: Interessante que desde o início, esse problema, eu achava assim, se fosse possível mudar, como você falou agora [referindo-se ao professor], “dimensão três, onde R2 é o conjunto de vetores desse espaço”. Eu sempre achei que fosse assim.

Mas, do outro jeito, eu acho difícil de entender isso. Por exemplo, se eu mudar isso aqui ó, assim, vão supor, se eu falasse assim: “investigue se é possível existir um espaço vetorial real de dimensão três, onde R2 é o conjunto de vetores do espaço”. Pra mim, isso é claro assim. Se eu mudar isso aqui, eu não consigo perceber a mesma coisa. [...]. Não sei, pra mim, fica claro, eu consigo, assim, meu cérebro acha isso perfeito. Se eu mudar a ordem, não consigo encontrar razão pra isso. Eu acho interessante isso. Agora, se eu falar assim, “a dimensão três onde R2”, aí, pra mim, faz razão. Eu não consigo encontrar a mesma razão no outro texto. Não tem assim, como provar isso. Eu tô pensando, porque só mudando a seqüência, muda pra mim, a razão. Se eu falar isso, é desde o início. Lembra que eu comentei que, pra mim, mudando, eu via nitidamente que sim. É interessante, eu não consigo encontrar a razão. Eu tenho que pensar bem, até que conexão tá fazendo o meu cérebro, pra entender, de uma maneira assim. Que é desde o início que eu tava com a mesma dúvida. [...]

Ao que parece, Azul opera em relação ao que é o dado para ela. Ela passa por todo o processo operando com os objetos IR^2, IR^3, dimensão como elucidamos anteriormente; seu núcleo se mantém estável, isto é, as estipulações locais – a dimensão do IR^2 é 2 e a dimensão do IR^3 é 3 – se mantêm fixas, não transformando durante o processo.

Com o objetivo de estender um pouco nosso olhar para o que está acontecendo com Azul, suponhamos que nosso objetivo, enquanto professor, seja intervir na direção de que ela resolva o problema. Vejamos, da ótica do MTCS, o que está acontecendo. Se considerarmos que, para resolver o problema, é preciso operar com a noção de espaço vetorial como uma estrutura algébrica e com a de dimensão de uma perspectiva também algébrica – número de vetores de uma base do espaço vetorial considerado –, vemos que Azul estaria frente a um limite epistemológico. O que designamos por limite epistemológico é a impossibilidade de produzir significados para o resíduo de uma enunciação numa certa direção devido a sua maneira de operar. Sendo assim, se ela não mudar sua maneira de operar, ela não resolverá o problema proposto. Do que estamos observando, com o caso de Azul e outros colegas seus, é que estar frente a um limite epistemológico pode levar ao ponto de paralisar o processo de produção de significados.

§ 4. Produzindo significados

Nossa leitura do processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa acima nos permitiu fazer as seguintes considerações:

i) Observei que Betty, Ades e Azul, produziram diferentes significados para o problema proposto, com maneiras de operar próprias, com constituição de diferentes objetos, o que, por conseqüência, nos sugere dinâmicas próprias. Acredito, pela análise global que fizemos, que podemos estender esta afirmação para os 18 sujeitos de pesquisa. Decorre desse fato que, com respeito à produção de significados, podemos dizer que não existe uma dinâmica do processo, mas dinâmicas, peculiares a cada sujeito. Além do mais, uma das possíveis conseqüências desta consideração se refere à impossibilidade de qualquer tentativa de categorização dos sujeitos de pesquisa através de sua produção de significados. Assim, em termos de pesquisa, não podemos falar em possíveis representantes de algum modo de produção de significados.

ii) A análise do processo de produção de significados de Betty indicou que todos os elementos que constituem o processo – os objetos, o processo de nucleação, a maneira de operar, a fala na direção de interlocutores, entre outros – estão interligados, de modo que mudanças em um deles provocariam transformações em todos os outros. E são essas transformações que caracterizam a dinâmica do processo. Porém, existem também, outros fatores que interferem nessa dinâmica como, por exemplo, a questão da legitimidade.

iii) O estudo da dinâmica do processo de produção de significados de Betty, Ades e Azul evidenciou três processos diferentes, do que nós chamaremos de impermeabilidade. Por um lado, Betty e Ades, ao que parece, tornaram-se impermeáveis a tudo o que estava sendo dito naquela sala de aula, por acreditar na legitimidade de suas produções de significados, operando assim, de modo a não "se deixar contaminar, um pela produção de significados do outro", por exemplo. Por outro lado, a impermeabilidade de Azul parece ser decorrente da não constituição daqueles resíduos de enunciação, presentes em sala de aula, em texto.

iv) Nossa observação evidenciou ainda que grande parte dos alunos como Azul, começaram produzindo significados a partir do que lhes eram familiares e não foram muito longe falando, talvez, pelo fato de, como comentamos anteriormente, não constituírem aqueles resíduos de enunciação em texto ou por não acharem legítimo dizer algo naquela direção.

Capítulo 7: Considerações finais

Neste capítulo tecerei algumas considerações de caráter conclusivo, agora de posse das informações coletadas ao longo dos dois capítulos anteriores, buscando fechar as questões que propositalmente foram sendo deixadas em aberto. Indicarei, também, algumas novas questões de investigação que o presente estudo indicou.

O primeiro aspecto observado que determinou a dinâmica do processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa foi a constituição do enunciado do problema em texto. Pois, nesse momento, o processo se pôs em marcha, desencadeando a constituição de objetos, a constituição de núcleos, a fala na direção de interlocutores, entre outras coisas, que foram sendo determinadas pela leitura desses sujeitos do problema proposto. Por exemplo, como vimos, para Ades o enunciado do problema proposto foi constituído em texto como: obter IR3 a partir de IR^2. E essa leitura determinou todo o seu processo de produção de significados. Em outros casos, porém, o enunciado do problema não foi constituído em texto por alguns sujeitos.

Nosso olhar para a história dos objetos IR^2 e IR^3 – isto é, o processo de constituição e mudança dos objetos IR^2 e IR^3 no interior da atividade – revelou alguns aspectos importantes com respeito à dinâmica do processo. Observamos que, em alguns casos, existiram transformações nesses objetos. Por exemplo, nas ações enunciativas de Betty, identificamos IR^2 e IR^3, num determinado momento sendo constituídos como o plano e o espaço respectivamente; noutro, constituído como espaços vetoriais e, em outros, constituídos como conjuntos. Observamos aí mudanças sutis acontecendo às vezes num curto intervalo de tempo. Por outro lado, algumas pessoas constituíram esses objetos como: IR^2 é o plano, IR^2 tem dimensão 2 (comprimento e largura), IR^3 é o espaço (físico), IR^3 tem dimensão 3 (comprimento, largura e altura). E isso foi o que elas disseram, não produzindo outros significados para esses objetos.

A produção de significados dos sujeitos de pesquisa, na interação face a face, revelou uma característica do processo de impermeabilização na produção de significados, que influenciou fortemente sua dinâmica e que nos chamou a atenção por sua recorrência. Com o termo impermeabilização queremos designar a postura do sujeito de não compartilhar novos interlocutores, diferentes daqueles para o qual ele estava voltado, de não se propor a produzir significados numa outra direção. O caso típico e extremo que ocorreu em nosso estudo foi apresentado por Ades. A despeito de tudo o que foi dito em sala de aula, em nenhum momento, ele produziu significados em outra direção diferente daquela em que ele estava operando inicialmente. Observamos também o processo de impermeabilização na produção de significados de Betty e Azul, o que nos sugere que são várias as possibilidades que levam à impermeabilização no processo: ou por acreditar na legitimidade do que diz, por entender que não há por que dizer de outra forma; ou por não poder produzir significados em outras direções – por estar, naquele momento, frente a um limite epistemológico –, ou ainda, por entender que não seja legítimo falar naquela direção.

A questão da legitimidade na produção de significados – isto é, do que o sujeito julga ser legítimo ou não dizer – foi algo recorrente no processo, chegando a ser um dos fatores que determinaram sua dinâmica. Por exemplo, Azul sugeriu mudar o enunciado do problema por acreditar não ser legítimo, para ela, obter IR^3 de IR^2 (sua leitura do problema). Acreditamos que a legitimidade do que é dito é uma das características do processo de produção de significados.

Nosso estudo do processo de nucleação – constituição e transformações de um núcleo – revelou que eles podem, ao longo do processo de produção de significados, sofrerem mudanças, transformações nas estipulações locais com maior ou menor intensidade, ou se manterem estáveis, no sentido de que as estipulações locais se mantêm as mesmas durante o processo. O primeiro caso pode ser representado pelo processo de nucleação de Betty, onde observamos algumas estipulações sendo constituídas e depois se afastando, dando lugar a outras; e essas últimas, elas próprias, passam por mudanças com a incorporação de novos elementos. No processo de nucleação de Ades, por exemplo, não observamos o afastamento, nem a aproximação de estipulações locais; pois o movimento, nesse caso, se deu através de uma crescente incorporação de "novas" estipulações ao núcleo, em relação às já constituídas. O segundo caso, referente ao caráter estável do processo de nucleação, foi observado na produção de significados de Azul, cujo núcleo foi constituído ao longo de todo o processo pelas estipulações locais: IR^2 é o plano, IR^2 tem dimensão dois, IR^3 é o espaço, IR^3 tem dimensão três[66]. Tais estipulações locais se mantiveram fixas ao longo de todo o processo. Outra vez, como mencionamos no processo de impermeabilização, esse estado de coisas, possivelmente, tenha tido motivos variados sobre os quais poderíamos, no momento, só especular.

Outro ponto importante sobre a dinâmica do processo diz respeito à mudança nos interlocutores. Vimos, por exemplo, que Betty iniciou produzindo significados na direção de alguns interlocutores, que, para efeito de caracterizar uma direção, diremos que foi na direção da produção de significados geométricos; para depois, se voltar a uma direção na qual se produziriam significados algébricos. Outros sujeitos, porém, se voltaram para falar numa única direção ao longo de todo o processo. Outros sujeitos, ainda, mudaram a direção de sua produção de significados na tentativa de resolver o problema proposto.

Duas conclusões globais podem ser tiradas de nossa investigação. Primeira, o estudo da dinâmica evidenciou que todos os sujeitos de pesquisa que produziram significados para o problema proposto, o fizeram, de diferentes modos, operando de modo peculiar, uns em relação aos outros.

A segunda conclusão a que chegamos, fruto das leituras desenvolvidas, nos sugerem que todos os elementos que constituem o processo de produção de significados – a constituição e transformação dos objetos, o processo de nucleação, a fala na direção de interlocutores, as legitimidades – estão interligados, e são inter-dependentes, de modo que mudanças ocorridas em um deles provocariam transformações em todos os outros. E são essas transformações que caracterizam a dinâmica do processo.

Um aspecto central de tudo o que analisamos e que devemos levar a sério, a despeito de considerá-lo óbvio, é o fato de que os diferentes modos de produção de significados, gerando diferentes dinâmicas no processo, aconteceram a partir de um mesmo enunciado (problema proposto).

Passemos, agora, a discutir algumas novas questões que nossa investigação evidenciou como possibilidades de investigação futura.

---

[66] Com dimensão se referindo à quantidade de informação que necessitamos para localizar um ponto no plano e no espaço.

Esta pesquisa aponta, entre outras coisas, para a importância do papel que a interação e a intervenção podem vir a ocupar no processo de produção de significados de nossos alunos e, como conseqüência, nos processos de ensino e aprendizagem. Nosso interesse, em investigações futuras, se voltará para questões do tipo: que possibilidade de comunicação pode existir entre aqueles/aquelas que estavam produzindo significados na direção dos interlocutores de Ades e aqueles/aquelas que estavam produzindo significados na direção dos interlocutores de Betty? Ou, caso seja objetivo do ensino que os alunos aprendam a produzir significados na direção dos significados matemáticos, como intervir de modo que aqueles que estiveram produzindo significados em outras direções, mudem a direção de seus interlocutores? Por exemplo, em nossa investigação atual, como intervir na produção de significados de Ades para que ele produza significados que lhe permitam resolver o problema proposto? Ou ainda, como intervir na produção de significados de alunos para que eles passem a produzir significados na direção de interlocutores que desconhecem? Este é o caso, por exemplo, do aluno recém-ingresso na universidade que, no primeiro semestre letivo, tem seu primeiro contato com objetos da Álgebra Linear, para os quais ele nunca, possivelmente, havia produzido significados. Como, por exemplo, espaço vetorial, entendido como uma estrutura algébrica, e dimensão de um espaço vetorial, definida de uma perspectiva algébrica, diferente da associação usual como algo geométrico.

Nossa investigação indicou, ainda, a existência de outras questões importantes que surgiram durante nossa análise. Por exemplo, pelas características da relação que foi instituída na interação face a face nessa sala de aula, observamos, em vários momentos, a negociação e a defesa de modos de produção de significados pelas pessoas. Alguns destes episódios nos remeteram às considerações de outros autores como, por exemplo, Oswald Ducrot (1977, p.16), quando diz:

> O ato de tomar a palavra não é, com efeito, ao menos nas formas de civilização que conhecemos, nem um ato livre, nem um ato gratuito. Não é livre, no sentido em que certas condições sejam satisfeitas para que se tenha o direito de falar, e de falar desta ou daquela maneira. Não é gratuito, no sentido em que toda fala deve apresentar-se como motivada, como respondendo a certas necessidades ou visando a certos fins.

> Assim, para o ouvinte, considera-se legítima a atitude de perguntar se o locutor estava autorizado a falar como falou, e quais as intenções que poderia ter quando o fez.

Os trabalhos de Ducrot trazem à discussão o implícito na enunciação, os subentendidos no discurso, questões que devem ser discutidas e avaliadas, oportunamente, à luz de nossos pressupostos, para que possamos ampliar nosso entendimento do processo de produção de significados.

Outro ponto que observamos em campo diz respeito ao silêncio no processo de produção de significados. Esse é um tema que pretendemos investigar e que nos colocaria em diálogo, por exemplo, com pesquisadores que trabalham com Análise do Discurso. Em particular, por nosso interesse pessoal, gostaríamos de manter um diálogo com Orlandi (1995), que discute o silêncio em sua obra intitulada “As formas do silêncio: no movimento dos sentidos”. Assim, essas são algumas das questões que foram surgindo ao longo da investigação.

A importância desta pesquisa, para nós, reside no fato de ela ser mais um passo na direção de nosso entendimento do processo de produção de significados de nossos alunos para que possamos, com mais informações, ter uma interação e uma intervenção mais efetiva em suas produções de significados, no sentido expresso por Lins (1999, p.85) ao dizer:

> Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos.

Referências Bibliográficas

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. 2.ed. São Paulo: Pioneira, 2001.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar**. Campinas: Papirus, 1995. (Série Prática Pedagógica).

ANDRÉ, M. E. D. A. Tendências atuais da pesquisa na escola. **Caderno Cedes**, Campinas, ano XVIII, n. 43, p.47-57, dez.,1997.

ARISTÓTELES. **Arte e retórica poética**. [S.l.]: Tecnoprint, s.d.

AUSTIN, J. L. **Quando dizer é fazer:** palavras e ação. Porto Alegre: Artes Médicas, 1990.

BALDINO, R. R. O “mundo-real” e o dia-a-dia na produção de significados matemáticos. **Bolema**, Rio Claro, ano 11, n.12, p.1-11, 1996.

BERGER, P. I.; LUCKMANN, T. **A construção social da realidade**. 14.ed. Petrópolis: Vozes, 1997.

BERLO, D. K. **O processo da comunicação:** introdução à teoria e à prática. São Paulo: Martins Fontes, 1979.

BLIKSTEIN, I. **Kaspar Hauser ou a fabricação da realidade**. 2.ed. São Paulo: Cultrix, 1985.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BOLEMA: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro-SP: IGCE – Depto. de Matemática, 1985. Semestral.

BOLETIM GEPEM. Rio de Janeiro: GEPEM, 1976. Semestral.

BOURBAKI, N. **Théorie des ensembles:** structures. n. 1, v. XXII, cap. 4, Paris: Hermann, 1966. (Éléments de Mathématique)

BOOTH, W. C.; COLOMB, G. G.; WILLIAMS, J. M. **A arte da pesquisa**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BRUNER, J. **Atos de significação**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997a.

BRUNER, J. **Realidade mental, mundos possíveis**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997b.

CALLIOLI, C. A. ET AL. **Álgebra linear e aplicações**. 6. ed. rev. São Paulo: Atual, 1993.

CASSOL, A. **Produção de significados para a derivada:** taxa de variação. 1997. 178p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

CHAMIE, L. M. S. A relação aluno-Matemática: alguns dos seus significados. **Bolema**, ano 6, n.7, p.23-29, 1991.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. 5.ed. São Paulo: Vozes, 1990.

CIANI, A. B. Análise do desencontro de falas aluno-professor e a contribuição da teoria dos campos semânticos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 1998, São Leopoldo-RS. **Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Leopoldo: UNISINOS/SBEM, 1998. p.711-713.

DANCY, J. **Epistemologia contemporânea**. Rio de Janeiro: Edições 70, 1985.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Ed.). Handbook of qualitative research. Thousand Oaks: Sage Publications, 1994.

DERRIDA, J. **Limited Inc**. Campinas: Papirus, 1991.

DUCROT, O. **Princípios de Semântica Lingüística:** dizer e não dizer. São Paulo: Cultrix, 1977.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Ed. SBEM, 1993. Semestral.

EDUCATION STUDIES IN MATHEMATICS: an international journal. Dordrecht, Boston e London: Kluwer. Trimestral.

GODINO, J. D.; BATANERO, M. C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.4, n.3, p.325-353, 1994.

GODINO, J. D. Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. **UNO-Rev. de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n.25, p.77-87, 2000.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 2.ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

GOODMAN, N. **Of mind and other matters**. London: Harvard University Press, 1984.

GROWS, D. A. (Org.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 1992.

GUSDORF, G. **A fala**. Rio de Janeiro: Editora Rio, 1977.

HAGUETTE, T. M. F. **Metodologias qualitativas na sociologia**. Petrópolis: Vozes, 1990.

HESSEN, J. **Teoria do conhecimento**. 8.ed. Coimbra: Armênio Amado, 1987.

JOURNAL RESEARCH MATHEMATICS EDUCATION. Virginia: NCTM. Published five times on year: November, January, March, May and July.

KLUTH, V. S. O que acontece no encontro sujeito-Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 1998, São Leopoldo-RS. **Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Leopoldo: UNISINOS/SBEM, 1998. p.196-198.

KLUTH, V. S. Do significado da interrogação para a investigação em Educação Matemática. **Bolema**, ano 14, n.15, p.69-82, 2001.

LEONTIEV, A. N. **O Desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Moraes, s.d.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia y personalidad**. Mexico: Cartago, 1984.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebric thinking is.** 1992. 330p. Thesis (Phd) – University of Nottingham, Nottingham.

LINS, R. C. Um quadro de referência para entender-se o que é o pensamento algébrico. MEC –INEP, 1993a (Mimeogr.)

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases de pesquisa. **Revista da SBEM – SP**, Campinas, v.1(1), p.75-91, set., 1993b.

LINS, R. C. Álgebra e pensamento algébrico na sala de aula. **A Educação Matemática em revista – SBEM**, Blumenau, v.2(2), p.26-31, 1º sem., 1994a.

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Revista Dynamis**, Blumenau, v.1(7), p.29-39, abr./jun., 1994b.

LINS, R. C. Campos semánticos y el problema del significado en álgebra. **UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n.1, p.45-56, jul., 1994c.

LINS, R. C. Epistemologia e Matemática. **Bolema**, Rio Claro, ano 9, n.esp.3, p.35-46, mar., 1995.

LINS, R. C. Struggling for survival: the production of meaning. In: BSRLM, 1996, Sheffied (UK). **Anais...** Sheffied (UK): BSRLM, February,1996a.

LINS, R. C. Notas sobre o uso da noção de conceito como unidade estruturante do pensamento. In: ESCOLA LATINO – AMERICANA SOBRE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA – ELAPEF, 3., 1996b, Canela - RS. **Anais do III ELAPEF** Canela, 1996b. p.137-141.

LINS, R. C. Luchar por la supervivencia: la producción de significado. **UNO-Rev. de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n.14, p.39-46, out., 1997a.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997b. (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p.75-94.

LINS, R. C. The production of meaning for algebra: a perspective based on a theorical model of semantic fields. In: SUTHERLAND, R. et al. (Ed.). **Perspectives on school algebra**. London: Kluwer Academic Publishers, 2001. p.37-60.

LINS, R. C. et al. Of course IR^3 is blue! Developing an approach to turn a mathematics course into a mathematics education course. In: INTERNATIONAL CONFERENCE AN THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2., 2002, Heronissos – Creta – Grécia. **Proceedings of the Second International Conference an the Teaching of Mathematics**, jul., 2002a. 1 CD – Rom.

LINS, R. C. **Análise sistemática e crítica da produção acadêmica e da trajetória profissional**. 2002b. 87p. Tese (Livre – Docência) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986. (Temas básicos de educação e ensino).

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna:** análise de uma impregnação mútua. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.

MARCUSCHI, L. A. **Análise da conversação**. 4.ed. São Paulo: Ática, 1998.

MEIRA, L. Atividade algébrica e produção de significados em Matemática: um estudo de caso. In: DIAS, M. G. B. B.; SPINILLO, A. G. (orgs.). **Tópicos em psicologia cognitiva**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1996. p.168-192.

MEIRA, L. Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. s.n.t. (mimeogr.)

OGDEN, C. K.; RICHARDS, I. A. **O significado de significado:** um estudo da influência da linguagem sobre o pensamento e sobre a ciência do simbolismo. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky:** aprendizado e desenvolivimento – um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1995.

OLIVEIRA, R. **Pensando algebricamente antes da 7ª série:** uma outra perspectiva sobre os processos de construção do conhecimento. 1997. 151p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear**. 2002. 187p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

ORLANDI, E. P. **A linguagem e seu funcionamento:** as formas do discurso. 4.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

PENNA, A. G. **Comunicação e linguagem**. Rio de Janeiro: Eldorado, 1976.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogénese e História das Ciências**. Lisboa: Dom Quixote, 1987.

POLONI, A. **Sobre a produção de significado por um grupo de alunos quando da proposição de um certo texto do chamado discurso matemático**. 1997. 176p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 1994, 1995, 1998.

RECHERCHES EM DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES. Grenoble: Ed. La Pensée Sauvage. Quadrimestral.

REIS, R. M. M. Produção de significado para dez por cento. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 1998, São Leopoldo-RS. **Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Leopoldo: UNISINOS/SBEM, 1998. p. 443-445.

SAD, L. A. **Cálculo diferencial e integral:** uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 1998. 371p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

SAUSSURE, F. **Curso de lingüística geral**. 2.ed. São Paulo: Cultrix, s.d.

SILVA, A. M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear**. 1997. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

SILVA, A. M., LINS, R. C. An analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra. In: INTERNATIONAL CONFERENCE AN THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2., 2002, Heronissos – Creta – Grécia. **Proceedings of the Second International Conference an the Teaching of Mathematics**, jul., 2002a. 1 CD – Rom.

UNO: Revista de didáctica de las Matemáticas. Barcelona: Graó, 1994. Trimestral.

VAN DER VEER, R.; VALSINER, J. **Vygotsky:** uma síntese. São Paulo: Edições Loyola, 1996.

VIGOTSKI, L. S. **Teoria e método em psicologia**. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 5.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R. **A história do comportamento:** o macaco, o primitivo e a criança. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 3.ed. São Paulo: Ícone, 1988.

WERTSCH, J. V. **Vygotsky y la formación social de la mente**. Barcelona: Paidós, 1988.

WERTSCH, J. V. **Voices of the mind:** a sociocultural approach to mediated action. Cambridge: Harvard University Press, 1991.

WERTSCH, J. V.; DEL RIO, P.; ALVAREZ, A. **Estudos socioculturais da mente**. Porto Alegre: Art Med, 1998.

YAGUELLO, M. **Alice no país da linguagem:** para compreender a lingüística. Lisboa: Ed. Estampa, 1991.

ZETETIKÉ. Campinas: CEMPEM – FE/UNICAMP, 1993. Semestral.

Anexo A
Transcrições

Dia 24 de Agosto

Prof[67]: Bom, o encaminhamento que eu queria dar agora é o seguinte: cada um dos grupos vir até a frente e dizer do jeito que quiser o que pensou, tá? Não se trata de um relatório particularizado; não, não é nada disso. Mas é dizer, olha, a gente olhou pra isso, pra isso, fez isso, fez isso, pensou nisso, achou isto. Nós vamos juntar tudo que apareceu aqui [...] se der tempo, de uma maneira sintetizada, mas, que todo mundo ouça por onde é que os grupos foram, tá? Esse é um momento interessante porque é a hora que a gente vai começar ver, em que medida, houve convergência de idéias, de coisas pra onde olhou e, em que medida, houve divergências. E depois a gente pode olhar no que isso tem a ver, tá? Então, os grupos, um de cada vez, por favor. [...] [Enquanto o grupo 2 se dirige para falar o professor faz o seguinte comentário] Ó, o interessante é que os três falem, porque não é um relator, alguém vai lembrar de uma coisa relevante, né?

Grupo 2: Role, Lufran e Diva

Diva: Pode começar [ela fala dirigindo-se a Role e continua falando]. Quer dizer, a gente não sabe se pensou bobagem, ou não? [Risos]

Role: Bom, eu não convenço na parte técnica, mas, eu me preocupei primeiro na interpretação de texto, tá? E fiquei mais ouvindo os dois do que interferindo, né? No início, não interferi porque, uma, eu percebi diferenças entre eles. E o conhecimento deles, nessa parte, é maior que o meu. Então eu procurei observar, né? No fim a gente chegou a conclusão que tem visões um pouco diferenciadas, né? Mas aí no finalzinho a gente chegou a uma conclusão que talvez não seja a correta, né? [...] E, realmente, a gente quebrou bastante a cabeça e tentamos aí chegar a um acordo. E no finalzinho teve um problema aí no texto que deixou a gente com dois resultados. Nessas condições aí [olhando para o enunciado do problema na lousa] houve uma resposta, [na sequência o que ele diz é inaudível]. Uma palavrinha é suficiente para alterar o resultado, né? O professor ficou o tempo todo na teoria, né? [Referindo-se a Lufran]

Lufran: É, nós chegamos na teoria [...] que não daria. No R2, não daria pra corresponder a R3, por causa da dimensão. Não foi isso que nós chegamos? Seria um só, só se fosse uma coordenada zero, não seria isso?

Role: Para y zero.

---

[67] Nas transcrições das falas as seguintes convenções foram utilizadas: a) os sujeitos de pesquisa são identificados pelos seus pseudônimos, o professor pela abreviação Prof e o pesquisador por Pesq; b) Colchetes são usados para indicar gestos, expressões e atitudes dos sujeitos de pesquisa; c) Palavras entre barras indicam sobreposição de falas; d) Uma barra indica interrupção súbita ou mudança na direção de uma fala; e) Reticências indicam pausa prolongada; f) Reticências entre colchetes indicam omissão de partes da transcrição e g) Aspas indicam que o sujeito de pesquisa esta lendo o que esta dizendo.

Lufran: É isso, z valesse zero.

Role: O R2 estaria no R3 né?

Lufran: Isso, foram uma das conclusões.

Diva: Ó, nas nossas anotações, o que a gente fez foi o seguinte: a gente primeiro considerou a visão do texto; o que que era um espaço vetorial, em seguida, porque a gente tava querendo saber o que é dimensão, né? E como é que a gente chega para analisar a dimensão de um espaço vetorial. E aí, nós fomos chegando a conclusão do seguinte, que, por exemplo, se a gente tomar o espaço R2; o espaço R2, ele vai ter dimensão 2, né? E, por exemplo, se eu pego uma reta passando pela origem, inclusive, a reta é um conjunto de vetores do R2. Pensou uma coisa assim? Aí, pra tentar concluir o exercício dele, a gente foi analisar o seguinte; então vai ver a dimensão, os subconjuntos que estão dentro de cada espaço. A gente pensou o seguinte: ó, quando a dimensão, “o R2 é o conjunto de vetores desse espaço” [lendo na lousa e colocando ênfase no artigo o]. Ó, se a gente pensar, o R2 é o conjunto de vetores desse espaço, então dá a impressão que o R2 tá coincidindo com o próprio espaço, né? Tá dando essa impressão? Agora, se por acaso, eu pensasse, por exemplo, o R2 é um conjunto de vetores deste espaço; então poderia pensar, por exemplo, que o R3 poderia ser o espaço que tivesse o espaço R2. A gente chegou a essas idéias.

Grupo 1: Betty, Mel e Mila

Mila: [...] A gente chega assim porque vocês foram falando e a gente ficou lá , ichi, a gente também pensou isso?

Mel: Foi o <u>o</u> também, exatamente o <u>o</u> e a gente até levantou para poder vir falar.

Mila: Porque foi assim, logo que a gente começou, a gente quis recordar o que era espaço vetorial, que a gente tava meio esquecido? Quis recordar também o que era dimensão. Aí, depois, a gente ficou assim: será que o professor errou o texto, colocar aquela pegadinha; não sei? A gente ficou pensando assim: o conjunto de vetores [ela coloca ênfase no artigo o]. A gente ficou pensando será que é falha do texto ou ele quis colocar de propósito. Então, a gente ficou com essa dificuldade aqui: é o conjunto de vetores desse espaço [apontando na lousa para o enunciado do problema]. Não foi gente? A gente ficou se pegando o tempo todo nisso aqui. Aí foi que /

Mel: /É a gente/ foi ver uns teoremas, né?, que a gente encontrou de dimensão. E aí, se eu tenho um espaço vetorial V de dimensão n; e aí a gente foi ver a relação de subespaço com espaço dimensão. Então o subespaço desse espaço vai ter que ser menor ou igual a n. Então, a gente pensou o seguinte: se R2 coincide com esse espaço que eu tô falando então se R2 é o único [ela diz isto enfaticamente – o único] subespaço então, eu não poderia ter dimensão três. Por quê? A gente também já viu um teorema onde dizia que, se a dimensão do subespaço coincide com a dimensão do espaço, então, a dimensão só pode ser a própria, que é dois. Então, a gente diria que não é dimensão três. Agora, a gente chegou a pensar que o R2 pode ser subespaço e, um do R3. Que aí a dimensão pode ser R3. Quer falar aquele problema? [Se dirigindo a Betty]

Betty: Mas a gente tá com um pequeno problema. Quando a gente pega um vetor em R3 a gente pode escrever x, y, z e em R2, x, y [ela escreve na lousa: (x,y,z) e (x,y)]. Mas, se a gente coloca o ponto zero aqui a gente pode falar que isso é equivalente a isso [isto é que (x,y,0) equivale a (x,y)], ou seja,(x,y) / [enquanto falava ela fazia um esboço na lousa cuja reprodução está na figura 1 abaixo]

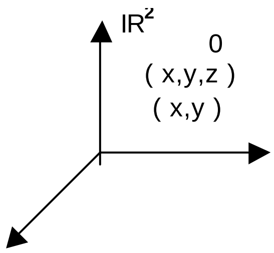

Figura 1

Mel: [Coincide geometricamente]

Betty: Coincide geometricamente em R2, tipo, considera esse plano né?, que seria meu R2 [ela marca na figura 1 o que ela esta chamando de R2]. Mas, se eu tô trabalhando no R3, equivale a dizer a mesma coisa?

Mel: Porque aí, aqui vai ser x, y e z [marcando nos eixos coordenados] tá, aí eu tô considerando o R3. Aí eu tenho aqui vão supor x, y; e esse x, y pode ser x, y, zero; se eu considerar R3... Por isso que a gente só finalizou dizendo que se o R2 pode ser subespaço, o R2 é subespaço, o R2 é subespaço de R3 e aí é a mesma coisa. Aí a gente ficou na dúvida que geometricamente isso aqui é o mesmo vetor [a questão aqui é se (x,y) é o mesmo vetor que (x,y,0)].

Betty: Tipo, eu posso pegar um plano aqui também [ela indica um outro plano na figura 1] e aí? Vai ser um vetor pertencente ao R2 também?

Mel: Não, mas aí é que eu falava para ela que a única coisa que eu podia dizer já que a dimensão era três era considerar esse último sendo zero. Porque aí eu tenho: R2 é o conjunto de vetores desse espaço que eu tô procurando. Mas eu posso considerar esse espaço como caindo aqui e sendo todos aqui com o último sendo zero e aí a dimensão é três.

Diva: Mas não sai do plano?

Mel: Não sai do plano, mas, fica nesse plano, certo? Por isso que todos os vetores / por isso que o conjunto de vetores desse espaço é R2, não tá saindo do plano, mas eu tô considerando quem? Dimensão três.

Mega: O importante é que todos esses vetores, nesse plano seu, por exemplo, numa coordenada elas sejam todas nulas.

Mel: Isso, numa coordenada. E aí essa coordenada tem que ser exatamente isso ou se eu falo x, zero e y, então /

Mega: /Não/

Mel: Não, zero e z, eu tô falando que é o plano XZ.

Mega: É, se você adotar pra x igual a zero você tem o plano YZ, para y igual a zero o plano XZ e assim /

Mel: /E assim sucessivamente/

Mega: /Sucessivamente/

Mel: Aí eu tô considerando dimensão 3, mas tô caindo no plano, e aí eu posso dizer que o R2 é o conjunto de vetores porque é o plano. Mas aí a gente não tinha certeza porque não conseguia demonstrar isso algebricamente, né?

Role: Nós pensamos que fosse um sanduíche [...] de planos.

Mel: E foi o que ela falou /

Ades: /Quando/ você não define o z é diferente de você, né? Porque você tá afirmando que x e y você conhece, tá no plano. Mas, você não está afirmando em qual plano, né? Aí você tá definindo uma classe.

Mel: Tá, não, mas eu /

Ades: /Esse/ z tá obscuro, você não disse que é zero. Mas eu acho que você disse que é zero. Você definiu z. Então, você definiu um plano só. Na medida que você não define o z, né? Nem como zero, nem define que você tá só em duas dimensões, aí você tem uma classe de equivalência. Porque você não disse quem é? Pode ser qualquer um que satisfaça x,y.

Mel: Claro, mas isso é o que me garante, que eu vou ter a dimensão 3, mas eu vou ter [inaudível].

Diva: Mas a questão da dimensão aí ela taria ligada também a questão dos vetores serem independentes. E ali, não sei, acho que, ia ser um pouco difícil você provar, se você tivesse /

Mel: /Uma base/

Diva: É uma base L.I., porque com o zero lá /

Mel: /O zero/ não pode. Essa é a nossa dúvida também. Porque aí, todos sendo L.D, eu não tenho a base que gera em R3.

Diva: Em R3, para poder ter aquela dimensão 3 lá.

Mel: Isso, foi isso que quando o professor chegou e falou fim [ela quer dizer, o término do tempo destinado a discutir os problema nos grupos], então, a gente só quis colocar essa discussão e considerar que R2 pode ser subespaço de R3 e portanto, dimensão 3. Nossa conclusão, né?, é de que é possível existir um espaço vetorial.

Mila: [Ela fala baixinho alguma coisa para Mel, que não é possível ouvir na fita, mas, que parece ser relativo a resposta do problema]

Mel: Tinha que chegar a qual era?...

[Várias pessoas falam ao mesmo tempo e ela então continua]

Mel: Sim, porque, por quê? Porque, no caso, o R2 pode ser subespaço de R3 e aí tem a dimensão três.

Diva: Mas nesse caso não encontrou o o?

Mel: Então, a gente voltou nesse tipo de discussão, e a aquilo que você falou. Se eu considerar o único, aí aquilo que a gente falou no começo, coincide e aí não pode dar dimensão 3. Agora, se for um, aí pode dar dimensão 3, né? Então é só isso.

Grupo 3 : Ane, Pinho e Morgana

Morgana: A princípio achamos que não, que não era possível. Mas, assim, no acho mesmo. E aí começamos a questionar: vetores, espaço vetorial, dimensão; fomos por essa linha. Aí fomos, chegando a separar alguns pontos que eram mais os principais.

Pinho: É a gente pensou nessa possibilidade aqui [referindo-se ao esboço na lousa que o grupo anterior havia deixado], de escolher, digamos um, colocar mais uma coordenada e essa coordenada zero e aí você teria o R2 como subespaço do R3. Mas aí a gente verificou que embora o R2 seja um subespaço do R3, como espaço vetorial, ele continua tendo dimensão 2, né? Ou seja, ele tá dentro do R3, mas esse subespaço formado / a gente pensou ou desse jeito ou em outro plano 0YZ qualquer coisa assim, XY. Se você zerar qualquer uma dessas coordenadas, fixar uma delas como zero e deixar as outras duas variando, você tem, digamos, um conjunto digamos, que é análogo ao R2, mais ele continua tendo dimensão 2. Uma outra possibilidade que a gente tentou, foi deixar livre isso, ou seja, pensar todas as triplas que tenham, pelo menos, uma coordenada zero, tá? Mas só que aí a gente verificou que isso nem chegava a ser um espaço vetorial, por quê? Usando a soma usual, a gente conseguia montar um contra-exemplo né?, que, por exemplo, sei lá, se você pegar (0,1,2) e (1,0,0) esses dois vetores tão no conjunto que a gente imaginou, ou seja, todos os dois tem pelo menos uma coordenada zero. Mas, quando eu somo os dois, com a soma usual, o que que acontece? Vai dar (1,1,2) e aí não dá no espaço vetorial que a gente tá. Pra continuar sendo espaço o resultado da soma tem que dá dentro do conjunto, né? E, então, a gente chegou a ter certeza que acha que não [risos]. Uma outra coisa que a gente pensou em explorar é que a gente tava trabalhando só com as operações usuais; que a gente chamou, né? As somas de vetores e os pares ordenados que a gente sabe. Agora, a gente vê nos livros, quando a gente aprende Álgebra Linear, espaço vetorial que, ás vezes, o professor define uma operação que ele chama de soma, mas que não é aquela soma que a gente tá acostumado. Só que a gente não chegou a explorar essa parte. Então, pelo que a gente explorou, a gente acha que não.

[Ane, o outro membro do grupo, não fez nenhum comentário]

Grupo 4: Azul, Mega e Muiara

Muiara: Nós estivemos bastante parte do tempo na interpretação da pergunta, naquele, o corpo, aqui; o conjunto, e aqui, é possível existir um [apontando para o enunciado do problema escrito na lousa]. Como o primeiro grupo anunciou também. E fizemos figuras, desse tipo [referindo-se aos esboços na lousa deixados pelo grupo 1]. Temos esse plano em oito pedaços para poder analisar retas, origem, vetor. As perguntas ficavam meio assim: - o R3 é composto de planos; ele é um espaço formado de planos, os planos de retas. E aí, será que a soma das retas é um plano? Será a soma dos planos é um espaço? Aí acabávamos esbarrando naquilo ali: é um ou é o todo em volta? A parte mais das operações /

Mega: /É, nós/ discutimos essa questão dos três planos, as coordenadas, daí nós pensamos, assim, nesse escalar também. Se você multiplicar por um escalar, verificando todas as propriedades que seguem para que seja / as condições para que seja um espaço vetorial, né? Então, a gente /eu falei/ uma delas é que seja combinação linear. Como é que é? Agora eu me perdi?

Azul: Não, nós nos atemos primeiro em verificar em verificar tudo isso: o que era espaço vetorial, corpo, escalar. E a primeira impressão nossa, a minha e a do Mega, era sim; e da Muiara, não. Então, nós começamos a mudar a pergunta; porque se a pergunta fosse: - numa dimensão 3 as possibilidades do R2, tá? Agora, se é R2, para você chegar numa dimensão 3, não teria essa possibilidade; porque a dimensão 3 ela tem que incluir.

Mega: R2 está contido no R3.

Azul: Eu sei que nós primeiro achamos que sim, achamos que não, voltamos, fizemos e chegamos a essa possibilidade só.

Mega: Se você basear numa dimensão, numa zero, né? Mas, aí eu posso, e aí como é que fica se eu tiver duas zeros? [Escrevendo na lousa: (1,0,0)] Se eu tiver duas zeros isso aqui vai ser uma reta, x, entendeu? Onde eu só tenho uma variação numa coordenada isso aqui vai ser uma reta. Quando eu tenho duas isso aqui vai ser um plano, daí se eu tiver três vai ser o R3, vai ser o espaço. Ficamos discutindo isso também. E as considerações que a gente fez são as que já foram ditas aí também. Mas, então a gente achou que de R2 para R3 é possível, agora, fazer o caminho inverso, não. Até fizemos, elaboramos essa mesma pergunta de três formas diferentes, né?

Muiara: É, nos atemos a um, o.

Mega: Daí uma era sim e a outra não.

Grupo 5 : Ades, Judy e Maria Luiza

Maria Luiza: Bom, nós também andamos pelo mesmo caminho que, acho, todo mundo, né? Começamos relembrando e vendo o que era espaço vetorial; a gente foi ver o que era subespaço, fomos ver dimensão também, né? Como o grupo da Mel lá, viu dimensão. E a gente parou para ver como é que a gente ia fazer. Pensamos também no que ele falou de sair do R2 e ir pro R3 [referido-se a fala anterior do Mega] ou então, lendo de outra forma, entendemos que era o R3 e que lá dentro existia o R2, que a gente tava procurando. Aí a nossa conclusão a priori, a minha e a dele era que / e a tua também, né? Todo mundo achou que sim, todo mundo achava que era possível e chegou a conclusão final que não [risos]. Então, a Judy explica um pouquinho o que a gente fez.

Judy: O que a gente pensou é que como pede um espaço real de dimensão três, então esse espaço podia ser o R3, todo. Mas aí, logo de cara, a hipótese ali fala que não [referindo-se ao enunciado do problema na lousa] que os vetores todos são do R2. Então todo volume dessa caixinha [indicando o sistema de eixos coordenados esboçado na lousa] não poderia tá contido. Quando variasse tudo aqui, né? Não poderia pertencer [referindo-se ao vetor anotado na lousa]. Aí a gente pensou: então são os três planos, a união dos três planos. Mas aí, a nossa última pergunta agora, assim, foi: - mas qual a dimensão da união dos três planos? Será que é três? A gente ainda não teve tempo de responder isso. Mas aí, se a gente pegasse assim, um vetor aqui e outro aqui e somasse, daria isso aqui que ele falou que não também [referindo-se a soma efetuada por Pinho].

Maria Luiza: /Que não dá/

Judy: Sendo real de dimensão três, aí ficou difícil a gente achar um outro que pudesse.

Maria Luiza: A priori, agora a gente achou que sim, agora a gente acha que não [risos].

Judy: Quando a gente pensou nessa união dos três, aí eu propus pra eles, por que não os planos paralelos? Aí a gente até pediu ajuda pra um grupo ou pra outro, assim, que achasse alguma coisa de que, o que que é um plano paralelo? Aí achou vetores eqüipolentes, classes de eqüipolência; em que um plano paralelo, ele precisa de três vetores pra ser determinado. Então, ele não era de dimensão dois. Precisaria do vetor que distancia aqui da origem, né? Foi o que a gente assim /

Mega: /Quer dizer/ que esse plano seria origem mínima de dois vetores? É isso?

Maria Luiza: Como?

Judy: É o plano que a gente tava procurando, os planos paralelos /

Mega: /Inaudível/

Maria Luiza: /Isso, é, exato/

Mega: Dois vetores.

Maria Luiza: Dois vetores.

Judy: Dois vetores [...]

Mega: Não só paralelos como diagonais [...]

Judy: Não, se fosse assim, diagonais, é não poderia porque precisaria de uma combinação e da outra aqui. Então também não poderia, por isso só que a gente pensou, só os paralelos.

Maria Luiza: E sairia do R3, já não satisfaria aquilo que a gente queria, que era R2. Aí as combinações já tava descartada de cara, por isso que a gente pensou nos paralelos.

Judy: Tudo o que a gente pensou, foi cada vez a gente chegava que não, não, não; mas a gente não achou nada que sim, só que não.

Ades: Sim, mas no começo, né?, quando a gente começou a considerar que seria, por exemplo, o canto da sala ali, as três paredes, o chão e as duas paredes.

Judy: A união dos três

Ades: Aí eu também pensei no seguinte: quando você pega dois vetores paralelos, você considera que é o mesmo vetor, tanto é que você faz soma, regra do paralelogramo, etc; fazendo a transposição do vetor. Então, o vetor paralelo a ele mesmo; a um outro vetor é o mesmo vetor. Assim sendo todos os vetores; se você tem dois vetores paralelos que tão formando o plano, por exemplo, no fundo da sala, e você transpõe esse vetor, mexe pra cá, por exemplo, você tem um outro plano.

Maria Luiza: As classes de eqüipolência.

Ades: As classes de eqüipolência. O conjunto das classes de eqüipolência, não seria R3? Quer dizer, elas estão discordando de mim, mas eu ainda tô pensando dessa forma.

Maria Luiza: É.

Judy: A gente não sabe a resposta

Ades: Mas, eu ainda estou pensando dessa forma. O conjunto das classes de eqüipolência seria o R3. E daí me veio a idéia de que o espaço seria uma expansão do plano, né? Na medida em que você não considera ser diferentes; na medida que você considera os dois vetores paralelos, como sendo o mesmo vetor, então o que você está fazendo é uma expansão do próprio plano. Então o espaço seria uma expansão do próprio plano. Dentro desse ponto de vista, eu ainda continuo discordando e achando que é R3.

Maria Luiza: Aqui deu muita briga.

Ades: É.

Maria Luiza: Então foi isso aí.

Prof: Que é o R3 o quê?

Ades: Que é possível você obter o espaço vetorial R2; não, péra aí? [Olhando para o enunciado do problema na lousa]

Maria Luiza: Que é possível você obter um espaço vetorial real.

Ades: R3 a partir de R2, que seria esse plano.

Maria Luiza: De dimensão três.

Ades: De dimensão três, desculpe, é? Você teria vários planos que estariam em R2. Então, você teria um espaço vetorial R2. Como o plano paralelo é o plano paralelo formado por esse mesmo espaço vetorial R2, corresponderia ao mesmo plano. Na medida em que você não muda, na medida em que você tá compondo esse R2 com dois vetores, você pode compor um outro plano desse mesmo R2 por dois vetores paralelos aos dois primeiros, você tem o mesmo plano. Então você fez uma expansão daquele plano no espaço, ou seja, você deixou de ter R2 e passou a ter R3 mas, o plano continua sendo o mesmo. Por quê continua sendo o mesmo? Porque você tá com dois vetores paralelos, formando um plano paralelo. E esses dois vetores são paralelos, portanto, são os mesmos vetores que formaram o R2. Pelo menos, foi assim que eu pensei, mas, não sei se tá certo.

Mega: Você falou dois mais dois paralelos a esses dois aqui?

Ades: É, eles estão formando o mesmo R2.

Mega: R2, mas eles estão formando o mesmo plano? Não, né?

Ades: Eles estão formando planos paralelos, certo? Se você fizesse enviesado, aí não. Aí já não, aí você sai. Todos os paralelos em função daqueles mesmos dois. Se você mudar um deles, aí não. Porque no começo a gente pensou isso, né? Quer dizer, mudando um outro / mudando um terceiro você já não teria mais planos paralelos, aí a gente pensou, bom, e fixando a princípio, fixando uma coordenada você cairia nos paralelos. E esses paralelos seriam o mesmo? Aí eu tô achando que seria porque seria classe de equivalência, né? Baseado nisso, baseado no vetor que você usa ou você transpõe o vetor e considera o mesmo vetor. Ou seja, dois vetores paralelos são o mesmo vetor, não é um vetor diferente. Desde que ele tenha mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido é o mesmo vetor, tá? Então dois vetores gerariam um plano. Então os dois vetores paralelos a esses dois, gerariam um outro plano paralelo. Mas que seria o mesmo, que seria equivalente... Querem discordar mais um pouco? [Dirigindo-se a Maria Luiza e Judy].

Maria Luiza: É a gente discordou nisto, né? Mas, não sei.

Ades: Elas foram mais / eu procurei enxergar melhor embora, né?, a dimensão, o limite do enxergar que eu digo, imaginar, ver mesmo mentalmente, fica nos três né? Então eu considero que é um caminho arriscado na medida que nós tamos fazendo isso só pra três dimensões, o que nós tamos falando seria n. E elas tentaram partir das propriedades, pensar, mostrar que aquilo era verdadeiro ou não. E eu fui procurando enxergar, a discussão foi por aí e nós não chegamos num acordo.

Maria Luiza: Não chegamos num acordo. É isso aí.

Grupo 6: Duda, Maria Helena e Teka

Duda: Acho que a gente não tem muita coisa a mais pra acrescentar que os outros grupos já falaram. Nós fomos pelo mesmo caminho: recordar o que era espaço vetorial, base, dimensão e tudo o mais. A princípio a gente achava que era possível, agora, no final, a gente já nem sabe [risos]. A Maria Helena, no início, começava a dizer assim, era possível porque a base era sempre n+1.

Maria Helena: Eu lembrava que eu tinha visto alguma coisa em algum lugar dizendo que quando a gente ia calcular a base era alguma coisa de dimensão, por exemplo, se você estava no R2 a dimensão era dois mais um. Eu sabia que já tinha visto isso em algum lugar. Mas aí, procurando, procurando no livro a gente viu que se tratava de polinômio, né? Então quer dizer, não tinha nada a ver com aquilo lá que a gente tava procurando. Aí voltamos tudo no zero de novo e começamos a estudar tudo outra vez. Mas, ficamos naquela discussão, uma hora a gente tinha certeza de que sim, outra hora tinha certeza /

Duda: /Tinha certeza/ mas, não conseguia, assim, um caminho para provar, depois voltava atrás achando que não.

Maria Helena: A gente ia colocando todas as definições, escrevia tudo direitinho, aí a gente chegava lá e dizia ah, mas e se for o, se for um? Aí a gente voltava outra vez, e ficamos.

Teka: Nós ficamos na discussão também daquela questão que vocês colocaram lá: ou é o conjunto ou é um, né? Se for o tem uma visão, se for um, a gente passa a ter outra; isso na nossa discussão. Esse é o ponto da nossa dúvida e a gente questiona, questiona e cai nessas duas posições. Não sei se é por aí que a gente precisaria / na verdade, a gente, assim, tinha uma certa certeza, entre aspas, né? Procuramos, assim, caminhar em função do sim e agora, a gente não sabe nem se sim ou se não?

Após a fala do grupo 6, o professor termina a aula propondo uma tarefa para ser discutida na aula seguinte. Na lousa ele escreve: O que é IR^2?O que é IR^3? Ele diz:

Prof: [...] Então a minha pergunta para vocês, pra cada um de vocês, que eu gostaria até que vocês não conversassem uns com os outros, vocês façam o que quiserem para responder isso aí. Mas, o que é o R2 pra cada um de vocês, tá? O que que é não é nem o R2, porque senão vai ficar o, um, R2 [risos da turma]. Que é que é R2? Tá aqui um objeto, esse aqui é o nome de uma coisa, eu quero que vocês digam que coisa que é essa? E esse aqui [indicando o IR^3] é o nome de uma coisa eu queria que vocês me dissessem que coisa que é essa? Esse foi o objeto introduzido, novo [referindo-se ao IR^3], tá? Então de algum modo, o que vocês estão pensando precisou disso pra produzir significado pra essa tarefa. Para que vocês pudessem falar a partir dela. Então essas duas seriam minhas perguntas.

Dia 31 de agosto

A aula tem início com o professor escrevendo na lousa a tarefa deixada na aula anterior: O que é IR^2? O que é IR^3?

Prof: Lembrando a vocês que o motivo que eu tive pra colocar, deixar essas duas perguntas, foi que o R2 era um objeto colocado no próprio problema, pra vocês investigarem. E eu queria saber mais o que é pra vocês? E o R3 uma coisa que apareceu muito, na fala de vocês, repetidas vezes. Então, eu coloco duas perguntas: O que é R2? O que é R3? Eu queria saber o que vocês pensaram ou o que provavelmente tenham procurado? Eu queria ouvir de vocês, o que vocês pensaram sobre isto?

Lufran: O R2 seria, posso falar?

Prof: Pode, pode?

Lufran: O R2 seria, de um modo geral, seria um plano, o R3 seria o espaço. O R2 é um conjunto de pares ordenados x, y que corta todo o plano e o R3 seria o espaço. Eu entendi isso. Eu não vejo outra coisa que possa ser o R3, que já um par ordenado, também de três coordenadas, que corta, que cobre todo o espaço, as três dimensões.

Role: Posso ler isso aqui? Então, a gente pensou o R2 geometricamente, né? Representamos todos os vetores em x, y, né? No cartesiano, “todos os pares x, y com origem em O tal que preenche todo o plano”. E o R3, também, a terna x,y,z, e a gente mostrou que preenchia o espaço, né? Então nós pensamos dessa forma o R2 e o R3.

[Silêncio após o término da fala de Role]

Prof: [...], o silêncio de vocês, vocês estão concordando ou não tão concordando? [Risos]

Ades: Bom, eu continuo achando que / bom, R2 é o plano, não tem dúvida, né? Mais fácil à gente enxergar quando você projeta os planos, esses planos ou faz a união de todos esses planos, você obtém o espaço, né? Ou obtém o R3. Então, o R2 para mim é uma, uma, não sei se uma simplificação, mas um elemento formativo do R3. Então você coloca esse plano, esse R2, em todas as direções, você obtém o espaço. Aliás, aí tem uma coisa interessante também, não sei se vocês sabem? O ganso só enxerga em duas dimensões. O ganso e o marreco. Então, você não precisa por ele num cercado. Você passa um risco no chão e ele não sai daquele risco porque ele tá vendo aquela linha como se fosse uma barreira. Então pode fazer a experiência, põe lá e passa um risco, uma tinta branca, cal; ele não sai do lugar. Porque ele não enxerga o R3. Ele enxerga só o R2, ele tem visão em duas dimensões. Então, aquele risco para ele significa uma parede, limitado, né? Eu enxergo dessa maneira. Tem o espaço, seria a parede, né? Só que nós conseguimos discernir isso, conseguimos distinguir o R3 do plano. Então, a gente não vê a parede mas, vê a terceira dimensão que seria / ele está simplesmente no plano, né? Uma vez que aquela dimensão não existe pra ele, ele tá no plano. Porque eu tenho a capacidade de enxergar uma terceira dimensão. Na medida que eu não tenho a capacidade de enxergar essa terceira dimensão, dois e três é a mesma coisa. Agora, se eu expandir esse dois em todas as direções, eu consigo enxergar o R3. Eu não consigo caracterizar bem mas é assim que eu vejo. Exatamente isso que eu quero fazer, essa ligação de um com outro eu não consegui fazer, desde que a gente aprenda algebricamente, né?

Role: Posso fazer uma complementação, não sei, também pensei nessa situação. Seria como se fosse um caderno, o plano, né? [Ele levanta o caderno brochura]. Você vai girando ele, você vai abrindo todos eles. Não seria como se fosse um sanduíche [ele faz gestos com a mão sugerindo planos paralelos]. Mas esse giro que desse a terceira dimensão.

Ades: Agora, eu pensei exatamente nos planos, infinitos planos, né? Porque o plano também é infinito na sua dimensão plana, né? Então, vão dizer, pra cá é infinito, pra cá e pra lá. Na medida em que você faz vários planos paralelos, você começou a gerar o espaço, né? /

[Maria Helena faz um gesto sugerindo planos paralelos na vertical e diz alguma coisa que o áudio da câmera não capta; Ades observa seus gestos e passa a explicar voltando-se para ela]

Ades: Mas, se você coloca, se o plano é infinito pra cá e pra cá, então essas dimensões também aparecem na hora que você gera esse plano. Uma folha é um plano [abrindo a capa do caderno]. O caderno já é o plano, com vários planos em seguida, já é o plano paralelo que você tem terceira dimensão que é o espaço. Você extrapolando pra cá e pra cá é infinito. Você tem o espaço todo, né? Porque aqui você não tem limitação. No plano você não tem limitação, o plano já é infinito. A limitação seria aqui [ele usa o caderno como plano e indica a limitação para fora do plano do caderno]. Então se você coloca / imaginar todos planos paralelos a esse plano, você tem o espaço.

[Lufran faz um comentário inaudível e eles ficam conversando]

[...]

Pinho: [...] A gente pensou no R2 como sendo, em princípio, um par ordenado de números reais. A gente pensou por que R2? R2 a gente viu que é uma notação simplificada para um produto cartesiano, né?, um número real por um número real, reais pelos reais. Então, no princípio, a gente pensou nisso como uma coisa não tão visual só, simplesmente, pares ordenados de números reais. Depois a gente começou a ver que significado a gente pode dar para esse par ordenado, a gente pode representar um plano /

[Várias pessoas começam a falar ao mesmo tempo]

Prof: /Pessoal/, olha só, a gente falou que é importante todo mundo aprender a ouvir, né? Lembra que a gente tava falando?

Pinho: Então a gente tentou ver que significados a gente pode dar pro R2, pode ser um ponto num sistema de coordenadas, um vetor nas coordenadas de um vetor e um número complexo. As três coisas que a gente pensou. O R3 seria, digamos, um produto cartesiano, R cartesiano R cartesiano R, uma tripla ordenada de números reais, né? Aí depois a gente ficou pensando por que que surgiu o R3, né? A gente tava falando do elemento que a gente tava considerando, era o R2. A gente pode pensar, em princípio, a grosso modo, com o R2 sendo, digamos, um caso particular do R3. Quando a gente fixa um desses três elementos da tripla, né? Se a gente fixar um é, só duas tão variando e a gente pode considerar isso como o R2 disfarçado. E a mesma coisa, R3 tem significados que a gente pode dar pra ele: um ponto no espaço, um vetor no espaço, seria um número complexo, mais aí a gente parou por aí [sorri e faz sinais com as mãos em negativa].

Morgana: Faço minhas as palavras dele.

Mega: Eu, pelo que eu pesquisei aqui, né? Consegui obter alguma definição, né? Depois os livros que a gente andou pesquisando. Então, antes a gente transcreveu pra cá. Que “R2 seria o conjunto de pares ordenados de números reais que se indica por R2, um espaço vetorial de dimensão dois. R2 é um espaço vetorial de dimensão dois porque qualquer vetor desse espaço pode ser considerado uma combinação linear de outros dois vetores dados. Assim, i,j – definição deles né? – dois vetores ortogonais, linearmente independentes. Cada vetor v se exprime de maneira única como combinação linear de i,j; isto é, existe um único par x,y de números reais tais que esse vetor v é o x na direção i mais um y na direção j”. Daí, a gente faz a mesma analogia para R3. Quer dizer, o que me chamou a atenção aqui, é o que o autor fala assim, né?: - dois vetores ortogonais, linearmente independentes.

Prof: Que livro é?

Mega: Esse é esse aqui [ele mostra o livro]... Alfredo Steinbruch e este aqui também é do Alfredo mas com o Paulo Winterle e é o mesmo que estudei um pouquinho de Geometria Analítica nesse aqui [mostrando outro livro]. Também tem o da coleção Schaum.

Muiara: Lipschutz.

Mega: Lipschutz... Vimos o que é base também, né? Então /

Prof: /Vamos/ ficar só no que é R2 e R3, só pra gente ter esse bloco, tá?

Mega: Tá certo.

Muiara: Nós também vimos sobre, R2 é o elemento formador de R3 e R3 de R4. R2 é formado de R. Uma combinação de espaços.

Mega: Eu posso ter Rn também, né? Quando for falar da base e dimensão, daí fala que posso ter qualquer n, né? Também encontramos alguma coisa que a Maria Helena falou de n+1, também.

Após essas fala faço uma intervenção que não foi combinada anteriormente com o professor. Considerando as coisas que estava ouvindo, resolvi introduzir na discussão algo, que na minha concepção, não fizesse sentido, para os presentes, de ser dito ali – uma sala de aula de Matemática. Na verdade eu não conseguia ter a menor expectativa de como todos receberiam. A única coisa que me ocorreu foi dizer e sair da sala para que não desse chance as pessoas de brincarem com a minha fala. Eu queria que elas levassem a sério o que eu dizia.

Pesq: Eu tenho que fazer um xerox ali, eu posso falar uma coisa que eu nunca comentei? Quer dizer, eu sempre achei o R3 bem mais interessante que o R2. Eu sempre vejo cor no R3.

Prof: Vejo?

Pesq: Cor. O R3, para mim, ele é azul. Eu estava pensando em dizer isso. Talvez pelo espaço? Vou fazer uma cópia e já volto.

Pensei em usar uma cor qualquer, mas a escolha do azul foi porque, até para mim, naquele momento, dizer qualquer outra cor como, por exemplo, vermelho; não fazia o menor sentido.

[Logo depois que digo isso e saio a Diva pede a palavra]

Diva: Posso fazer uma pergunta para o colega? [Referindo-se ao Ades].

Prof: Pode.

Diva: Porque ele definiu o R2 como sendo o plano. O que que é o plano pra ele?

[Ninguém entende, de início, para quem a pergunta se dirige]

Ades: Pra mim, o que seria o plano?

Diva: O que seria o plano pra você?

Ades: Bom, quando eu pego dois vetores linearmente independentes [ele faz um gesto com a mão mostrando o polegar e o indicador]. A união desses dois vetores linearmente independentes.

Diva: Aí, é que eu pergunto pelo seguinte, que você falou assim, quando você referiu ao R3, seria quase como se fosse uma /

Role: /Sobreposição/

Diva: De planos, né?

Ades: Paralelos.

Diva: Paralelos. Então, plano pra você teria / como é que seria esse plano?

Ades: Bom, eu tô entendendo o plano como uma folha de papel infinita.

.

Diva: Essa folha de papel infinita, ela tem quantas dimensões?

Ades: Duas. Só definido pelos dois vetores l.i.

Diva: Mas, por mais fina que fosse a folha de papel, ela não seria tridimensional?

Ades: Não, pelo menos pelo que eu compreendo não, né? Não tem a terceira, né? Não tem essa terceira dimensão.

Diva: Mas se ela não tivesse dimensão como é que você fosse sobrepor uma sobre a outra não ia formar nada. Se ela não tiver dimensão, né? [Olhando para o professor] Se ela não tiver uma terceira dimensão. Porque aí na hora que você vai colocando uma sobre a outra ia fazer diferença. Então, teria que ter um mínimo de espessura pra hora que você fosse colocando uma sobre a outra, ela fosse formando uma outra, sei lá?

Ades: Tá, entendi. Só que eu não pensei em termos de espessura, né? Eu pensei foi em termos de localização, entendeu? Não de espessura. Porque, o que me fez começar a pensar assim foi à direção lá do vetor, né? Quando você vai fazer operação com vetor, você consegue transpor o vetor, não é o que a gente chama o mesmo vetor. Na verdade, ele tá no mesmo lugar no espaço. Usa lá a regra do paralelogramo. Eu coloco o vetor, desde que eu não mude as três características: módulo, direção e sentido; eu considero que é o mesmo vetor. Esta mesma analogia eu fiz com os vetores que formavam o plano. Eu posso formar um plano com dois vetores ortogonais, né? Então eu tô mudando essa localização, quando eu falo em paralelo, não tô pensando em espessura, tô pensando em localização... entendeu?

Diva: [Ela balança a cabeça em negação e diz] Não. Não consegui ver a idéia dele. Não consegui, não consegui ver. Foi por isso que eu perguntei.

Ades: Você concorda que cê pode mudar a posição do vetor sem mudar o vetor? Considerando que esse vetor é o mesmo. Então, eu tô fazendo a mesma coisa com o plano. Qual é a espessura do vetor?

Diva: Qualquer lugar, e você quer trazer o vetor pra origem, uma coisa assim?

Ades: Isso.

Diva: Hum?

Ades: Isso, eu te pergunto então, pelo seu raciocínio: - Qual é a espessura do vetor?

Diva: Eu não pensei nisso?

Ades: Não tem nenhuma, entendeu? Por isso que eu digo: - é uma questão de localização e não de espessura. Você me perguntou da espessura do plano, não tem.

Diva: Como é que é localizado, então, o vetor no que você chama de R3?

Ades: Como localizaria o vetor?

Diva: É, no caso do que você tá chamando de R3?

Ades: Não, mais ainda não falamos nisso, né?

Diva: Não eu tô perguntando porque do jeito que você tá descrevendo, eu achei, entendi, foi, isso aí? Como é que seria esse R3 pra você? Porque a gente também tá definindo o R3, né? Então, como seria esse R3?

Ades: A partir do R2, né? Que foi a pergunta do professor? Como seria esse R3 a partir do R2?

Diva: Não, você não falou que é a partir do R2 não, falou? Você falou o que que é o R3, né? [Dirigindo a fala ao professor]

Role: Só foi o que apareceu, R3, né?

Ades: Não porque a pergunta inicial, né?

Prof: Vocês tem escrito, né? A pergunta inicial, a pergunta pra investigar, ela tá escrita pra se alguém quiser ler, tá?

Ades: Não, o problema é o seguinte: você me perguntou o que que é o R3 dentro do que eu imaginei?

Diva: Hum, hum?

Ades: É a expansão do R2. Eu não falei em grossura, falei em expansão. Se você gerar planos paralelos, você modifica; você tem dois vetores aqui, tá? [Ele mostra a mão e usa os dedos indicador e polegar como se fossem vetores] Você muda um pouquinho no espaço. Pode, não pode?

Diva: No espaço? Eu falei no plano.

Ades: Desculpe, é, no espaço não pode? Mudo novamente. Então crio planos paralelos. Na hora que eu criei esses planos paralelos é só a gente pensar no conjunto de todos esses planos paralelos eu tenho o R3.

Role: Mas aí o senhor teria um monte de vetores paralelos, né? [...]

Ades: Seriam os dois vetores iniciais que eu tenho e todos os paralelos a eles. Teria uma classe de vetores paralelos a este, por exemplo, [referindo-se ao dedo indicador] e uma classe de vetores paralelos a esse [referindo-se ao polegar].

Maria Helena: Mas e esse aqui? [Ela indica com a caneta um vetor perpendicular ao plano formado pelos dois dedos, indicador e polegar].

Role: Justamente é esse que determina a terceira dimensão.

Maria Helena: O R3 é assim [ela faz um gesto sugerindo três direções].

Mega: Eu acho que eles têm que ser linearmente independentes. Linearmente, né?, independentes. Agora pra compor o R2 eles tem que ter uma mesma origem, os dois vetores, comum. E para compor o R3, vai ter que ter uma mesma origem também. Por exemplo, posso até pensar um ângulo poliédrico, entendeu? Um ângulo tetraédrico, pentaédrico, hexaédrico. De onde de um vértice partem n arestas, como quiser. Eu tenho vários planos, várias faces assim, colocadas.

Lufran: Por isso é que eu imaginei o vetor girando, as três projeções.

Ades: Mas quando você gira, você muda a direção do vetor; você tá mudando o vetor. Quando você coloca paralelo, você não muda.

Lufran: Entendi.

Mega: E se você pegar dois vetores só? Pode pegar esse vetor e esse vetor, eles formam um plano? [Ele usa as duas mãos e coloca os dedos indicadores de forma que eles estejam em posição que lembra duas retas reversas]. Esse vetor e esse vetor formam um plano? Tem que ser paralelos?

Ades: Não, não, ortogonais.

Mega: Ortogonais? Tá, mas, daí cê fala ortogonais [seus gestos sugerem dúvida].

Ades: O R2, que gera o R3.

Mega: Não sei se eu tô com a idéia de retas reversas, né? Tudo o mais, né? Mas, pra mim, fica difícil; não sei se eu tô enganado? Isso aqui, não sei se forma um plano [ele exibe os dedos indicadores como se estivessem em retas reversas]. Pra mim, não forma. Agora, isso aqui sim, [colocando os dedos indicadores paralelos, girando-os sempre em paralelo]. Isso aqui sim, tá formando um plano. Agora, pra fazer o R2 eles tem que ter essa dimensão, né? R2 e R3 [ele passa, agora, a usar uma só mão para sugerir que eles devem ter uma mesma origem. Quando fala de R2 usa o polegar e o indicador e quando fala de R3 ele inclui mais um dedo].

Muiara: [Muiara toma a palavra] Queria colocar uma questão: - planos paralelos, eles não teriam essa espessura?

Diva: Não eu tô perguntando assim, eu perguntei pra ele o que era plano pra ele? Aí ele tá falando que o plano é uma coisa infinita?

Ades: Tem duas dimensões, né?

Diva: Então tem duas dimensões.

Ades: Não tem a terceira, não tem espessura.

Diva: Aí eu falei, se não tem a terceira, se eu vou pegar um monte de planos paralelos, eu não vou sair do lugar?

Muiara: Acaba sendo todos coincidentes com o primeiro, se não considerar esse afastamento.

Diva: Teria esse afastamento?

Mega: Sei lá, planos paralelos são independentes. São independentes planos paralelos? [Ele faz gestos com a mão sugerindo planos paralelos]. [...]

Diva: Aí o R3 seria cheio de vazios?

Ades: Não, como eles fossem contínuos [ele faz gestos com a mão sugerindo que contínuos, quer dizer, um plano após o outro].

Diva: Voltou a distanciá-los? [Ela diz e sorri de um jeito irônico]

Mega: [...] A interseção entre dois planos paralelos é vazia, né?

Muiara: Isto aí faz lembrar a busca da menor partícula [ela fala e sorri].

Role: Eu acho que começa com uma geometria, passa por uma geometria aí, né? Passa num ponto, né? Fica difícil até ser aceito, mas são definições de ponto, tá? Eu vi um livro com mais de trinta definições, não é? Fala de definições absurdas, assim, que você tem um ponto quando você tem duas retas [o que ele diz na seqüência é inaudível].

Mega: Não é teoria do ponto é axioma.

Role: Sim, mas existem pessoas que tentaram definir, tá certo? Nós aceitamos porque uma concepção, assim, bastante elementar, né?

Mega: É, pra mim, é conceitos primitivos.

Role: É conceitos primitivos, mas existem mais de trinta, né?, definições. Todo mundo ensina o que que é um ponto: - é a intersecção entre duas retas. Mas, se você não definiu um ponto, como você tá falando de reta? Qualquer um? O professor tá acostumado a falar assim, né?, não é verdade? Então depois vem a reta e o plano que que é? Três pontos, terceira projeção, desde que não sejam lineares, né?

Mega: Ou uma reta e um ponto formam um plano, certo?

Role: Mas aí, pra mim, não tem espessura, né? Aí o plano, as duas dimensões / é a mesma coisa você falar / é você tem um número, qual mais próximo desse? No caso de planos qual seria essa distância? Nenhuma, né? [...].

Ades: Mais é por aí que eu tô pensando, quer dizer, quando você vai definir R3? Quando você estabelece uma distância a esse plano original, vamos dizer assim. Porque embora se você tá imaginando que eles existem, né? Você tem como referência só o R2. A partir do R2 você pode definir o R3. É só você estabelecer outro ponto. Aí você tá definindo, né? Vão dizer que você tem a parede como referência só e tem uma mosquinha voando você vai definir a posição dessa mosquinha em relação a parede. Daí você tá falando de espaço, você não eliminou a parede. Você tem que ter a parede. Agora, não precisa ter outra parede na mosquinha, né? Cê tem uma coordenada você definiu o espaço ali, em função daquela sua parede que é o R2, entendeu? Porque é assim que eu tô pensando.

Role: O que eu tenho visto é o seguinte: todos nós, o que nós costumamos fazer é escrever o nome do que nós consideramos, um plano, tá? [...] Mas aí fica difícil você põe um ponto na lousa, o aluno não quando não consegue localizar esse ponto, tá? Aí cê fala aqui o ponto. Então, aí aparecem aquela idéia da terceira dimensão. Como é que você sabe que aí antes tem que dar as referências, pegar todo o seu ambiente e a partir do seu ambiente, construir essa condição, né? Dar a porta como referência, o que é vértice, o que é ponto, né? Então, realmente, até difícil a gente imaginar isso, percebe, não é tão simples, né?

Ades: Sim, mas, por exemplo, quando você começa com duas dimensões e vai definir um ponto com quatro. Aí é fácil, cê puxar o terceiro, aí você entra com outro, né? Baseado no quê? No primeiro que você já tem no quadro, não é? Você não pode definir esse terceiro sem ter o plano, sem ter o quadro, né? Porque daí, à medida que você fala aqui [com um gesto sugere que esta marcando um ponto no espaço], por onde você começa? Por algum plano, aí você estabelece o terceiro. Se você não tiver um plano como referência, não tem como estabelecer o terceiro.

Role: Cê sempre vai ter que ter referência, se não, não tem como.

Ades: E a referência é um plano. Porque se for ponto a ponto, você tem que estabelecer um plano, para depois estabelecer o terceiro, né?

Prof: Pessoal, vou interferir só pra permitir que outras pessoas também possam se manifestar, tá?

Azul: Eu queria colocar aí na lousa uma coisa que eu não sei? Agora eu vou fazer até o papel de quando o aluno tem / pode ser até que seja totalmente errada. Mas, eu acho assim, pra mim, é uma coisa bem simples, eu não sei se tô totalmente fora disso ou se / o que que é o R pra mim? [Ela traça uma reta na lousa] Pra mim é pegar todo o sistema nosso de numeração. Pra mim, seria isso aqui [ela faz riscos sobre a reta sugerindo pontos] todos os pontos, infinitos pontos, pra mim é R. Se eu fizer mais uma [ela traça uma reta perpendicular à anterior] e colocar infinitos pontos aqui ó, pra mim é outro R. Agora se eu unir isso aqui infinitamente, pra mim é R2. Eu não sei se pra mim é tão / eu vejo assim, isso aqui tudo unido, certinho é o R2. Daqui, aí, tira um ponto fora, desse ponto que tá aqui fora eu relaciono aqui, eu faço o R3 [com a mão, ela sugere um ponto fora do plano da lousa]. Pra mim é isso. Eu não sei se eu tô simplificando alguma coisa demais, mas tenho essa visão. Eu acho assim, se eu quiser o R3 eu tenho que tirar um ponto fora daquele R2, se eu ligar eu tenho R3. Se eu conseguir montar uma terceira dimensão; se eu pegar um outro ponto fora dessa terceira e ligar vou ter R4. Agora, eu não consigo visualizar essa quarta, o R4. Mas, eu acredito que nesta mesma medida e proporção, deve existir.

Role: Essa visão acho que nós temos, porque nós aprendemos isso na escola, né? Então é uma coisa que nós carregamos. Mas eu acho que a profundidade é um pouco maior que isso, né? Até o R é difícil da gente compreender, né? Não é verdade? Nós fizemos um curso /

Duda: /Eu acho só/ que a gente tá fantasiando um pouquinho aqui. A visão que ele tá tendo ali de planos paralelos no R3 eu não consigo [enquanto fala, ela faz gestos com as mãos sugerindo planos enfileirados].

Lufran: No R2 se você gira aqui é outro plano, mas eu não vejo o R2 sendo aquele plano, só existe aquele plano. Aquele que você falou, vai passando pra cá...

Ades: Só girar assim [ele exibe o polegar e o indicador].

Lufran: Eu imaginei assim, aqui tem um aqui, um vetor aqui, se você gira o plano aqui; o R2 é o plano só, tão girando e todos aqueles outros tão rodando é o espaço. É o caso do ponto, vai dando aqueles pontos [...].

Role: Tem que ter um eixo, né?

Lufran: Vai girando / não é o plano; o R2 não é aquele plano fixo, pode ser outro R2. O R2, mas, girando é o R3.

Maria Helena: [Pega uma folha de papel, coloca-a na vertical e a faz girar] Não é assim que você tá falando, fixa ele assim e gira aqui em volta?

Lufran: É, R2 girando gera o R3 inteiro.

Maria Helena: Ah, é isso.

Role: Você vê usando um pouquinho de geometria, né? Você pega um triângulo, você fixa um eixo nele, você gira ele, você produz um toro, tá? Isso aí produz uma terceira dimensão, você gera uma terceira, um movimento a partir do eixo, né?

[...]

Prof: Bom, o tempo acabou. É o seguinte: eu vou pedir pra vocês voltarem a discutir, a investigar, a tentar responder aquela pergunta geral da aula passada. E eu só vou pedir pra vocês, como primeira tarefa, cada grupo vai me dizer, quais são as noções ou conceitos, pra quem quiser chamar, que estão envolvidos naquela tarefa, naquela pergunta?

Mila: No problema inicial?

Prof: No problema inicial, tá. Como se dissesse assim, quais são todas as coisas das quais nós estamos falando aqui e que estão naquele texto. Olhar para aquele texto e falar. É como se eu dissesse, por exemplo, posso pegar artigo de jornal e olhar quais são todos os nomes próprios que aparecem nesse artigo ou quais são todos os verbos que aparecem nesse artigo. Só o que tá escrito lá. Então, vocês vão olhar quais são todas as coisas que eu poderia dizer assim, que aparecem ali, tá? E aquela é a pergunta que vocês tem escrita do jeito que ela está escrita. Tá bom? Daí eu vou passar nos grupos para ver o que vocês colocaram, mas, vocês já vão engrenando na continuação da discussão.

[Após a reunião dos grupos, todos se reúnem na sala para retomar a discussão]

Prof: Alguns grupos chegaram a uma resposta para aquela pergunta, que eu pedi para investigar. Eu vou pedir para esses dois grupos apresentarem os argumentos deles, apresentarem as respostas e aí a gente discute, tá? [...] Então vamos lá?

[O grupo 6 é o primeiro a se apresentar]

Maria Helena: Pessoal, então a gente começou assim, a hora que ele pediu pra relatar que nem receitinha /

Prof: /Questão de ordem/, a resposta de vocês para aquela pergunta é sim é possível, ou não, não é possível?

Maria Helena: Não, não é possível.

Prof: Tá.

Maria Helena: Então, a hora que a gente começou a relatar as coisinhas que precisava, aí a gente colocou: par ordenado, vetores, espaço vetorial, número real, conjunto, dimensão e corpo de escalar. É isso que ele ta falando aí, no exercício, que a gente colocou. Aí depois, a gente começou a pensar nessas coisas só que ele colocou aqui. Aí foi falado um monte, de aí então assim, aí a gente desenhou no papel, fizemos um monte de desenhinho. Mas aí, depois, o professor veio pedir para a gente escrever tudo isso que a gente tava falando pra ver se tinha sentido mesmo. Então, eu vou ler o que a gente escreveu, depois eu rabisco na lousa pra gente ver. Então a gente escreveu assim: “lendo o problema verificamos que R2 é o conjunto dos pares ordenados, formado por números reais”. Ele tá falando isso lá [referindo-se ao enunciado do problema proposto]. “Esses pares ordenados no plano cartesiano ortogonal geram pontos de coordenadas x e y.” Não é? Que x pertence ao real e y pertence ao real. Então assim [ela fala e esboça dois eixos coordenados perpendiculares na lousa]. É isso que a gente quer dizer que vai formar um monte de pares ordenados. E aí, o que que acontece? [Ela volta a ler] “Os vetores resultantes dessas coordenadas reais formam um conjunto de vetores do R2 [...] e geram um espaço vetorial de dimensão 2.”

Betty: Como essas coordenadas são determinadas?

Maria Helena: x e y, x pertencente com reais, y pertencente com reais. Aí essas coordenadas formam vetores, esses vetores formam o espaço vetorial de dimensão 2, não é? Ponto. “Portanto, se torna impossível nessas condições, existir um espaço vetorial real que tenha dimensão 3.” Porque ele não falou nada. Ele só perguntou se é possível existir o espaço vetorial nessas condições que ele colocou, com dimensão 3. É possível? Eu acho que não. Eu acho não, eu tenho certeza diante disso aqui [referindo-se às anotações do caderno], que não. Agora se tiver outra possibilidade, pelo amor de Deus.

Duda: Essa é a conclusão que nós chegamos.

Maria Helena: A gente chegou nisso, acabou, ponto.

Prof: Esclarecimentos? Que nem assembléia de sindicato: esclarecidos? [Risos da turma] Depois a gente entra no debate.

Maria Helena: Pronto.

Prof: Não, não, primeiro eu queria saber se as pessoas consideram bem entendido o que vocês disseram? Depois, que a gente vai entrar na parte se elas concordam ou não?

Maria Helena: Todo mundo entendeu?

Mel: Então, vocês consideram que o espaço vetorial procurado é o R2?

Maria Helena: Sim.

Duda: A pergunta não é essa.

Teka: Dimensão dois, R2 gera um espaço vetorial de dimensão dois.

Mel: Tá, mas então o espaço vetorial procurado é o R2, só pode ser o R2?

Prof: Questão de ordem, [ele faz um sinal com a mão como quem pede tempo e pergunta para Mel] onde você leu essa palavra que eles puseram, que se esta procurando o espaço vetorial?

[Maria Helena e Duda falam ao mesmo tempo]

Prof: Péra, péra aí, questão de ordem não pode interromper [risos].

Mel: Eu estou querendo saber, se existe um espaço vetorial cujos vetores são do R2 e esse espaço tem que ter dimensão 3. Esse é o espaço vetorial que eu quero saber se existe, ou seja, eu tô procurando vê se existe este espaço. Aí eu tô perguntando pra elas, se esse espaço, que elas estão falando que não existe, este espaço que eu procurei, porque elas formaram o espaço como sendo R2, portanto não pode ter dimensão 3.

Maria Helena: Não, eu não tomei o espaço como R2, assim, o espaço tem que ser R2. Eu fiz tudo que tá falando no problema. O problema me falou isso. Que ele pegou as coordenadas / oi?

Mila: E você chegou a essa conclusão?

Maria Helena: Não, eu não cheguei, eu fui fazendo /

Duda: [Olhando para o caderno na mão ela diz] Ele disse aqui que ó, “R2 é o conjunto de vetores desse espaço” [lendo].

Maria Helena: Desse espaço, desse espaço real.

Betty: Você só pode ter o R2?

Teka: Eu tô verificando o R2.

Maria Helena: Eu vi que no R2 não.

Diva: Como vocês chegaram a conclusão que esse conjunto de vetores, que ele / como é que você falou?

Maria Helena: [Lendo] [...] “Os vetores resultantes dessas coordenadas reais formam um conjunto de vetores do R2”. Isso é teoria.

Teka: A dimensão é dois porque eu tô usando /

Maria Helena: /A dimensão/ é dois.

Diva: Como vocês chegaram a essa conclusão?

Teka: Porque usou o par.

Diva: Por quê usou o par?

Maria Helena: Duas dimensões. Têm mais alguma dimensão? Não tô vendo outra dimensão aqui. Ele pegou o par.

Diva: O que seria pra vocês a dimensão do espaço?

Maria Helena: Né?, o espaço, a dimensão [ela indica os eixos coordenados esboçados na lousa].

Teka: Tô pensando em dois eixos, tô trabalhando em dois, R e R. Tô localizando nesse espaço. Assim a gente verificou.

Maria Helena: Então, a gente acha, que não [abaixando a voz].

Maria Luiza: Eu tenho uma pergunta para ti aqui. Quando você leu o problema tirando aquilo que está entre parênteses que diz: - isto é, R é o corpo de escalares; se você for ler e interpretar ele no português, eu poderia ler e queria que você me dissesse se sim ou não? Eu poderia ler assim: investigue se é possível existir um espaço vetorial real de dimensão 3 onde R2 é o conjunto de vetores desse espaço.

Maria Helena: [Ela repete] Investigue se é possível existir um espaço vetorial real /

Maria Luiza: /De dimensão 3/ onde R2 é o conjunto de vetores desse espaço.

Maria Helena: Aí cê já tá mudando o problema, eu acho?

Maria Luiza: Ah, isso altera o problema todo?

Maria Helena: Eu acho que sim.

Maria Luiza: Tá bom.

Prof: Por quê? Deixa eu até explicar. O meu material é o que vocês dizem e eu quero entender o que vocês estão dizendo. Então, perguntar, fazer essa pergunta, não é dizer assim, por quê? [Ele faz um gesto com os ombros de quem não está nem aí] Como quem diz ah? Na escola a gente sabe que se você perguntar para uma criança porque ela fez, ela já vai na hora ah, não e ia apagar, não vai? Não é comum isto. Se tivesse certo você não ia perguntar? Então, isso é um péssimo hábito, péssimo. Então, minha pergunta é: - que argumentos você tem para dizer que isso mudaria o problema?

Maria Helena: [Respondendo para Maria Luiza] Porque aí você já tá olhando por outro ponto de vista. Você já tá colocando que tem três dimensões.

Maria Luiza: Não, mas o que eu fiz foi interpretar ali, ó, se você pôr / a que se refere em que tenha dimensão três? A que se refere? A que objeto se refere àquela frase? Quem é que tem dimensão três?

Maria Helena: Ao espaço vetorial real.

Maria Luiza: Certo. Então, a pergunta que eu coloquei foi a seguinte: - investigue se é possível existir um espaço vetorial real de dimensão três, conforme vocês falaram a dimensão refere-se ao espaço vetorial, onde R2 é o conjunto de vetores desse espaço.

Maria Helena: Tá.

Maria Luiza: Então, eu mudei a questão?

Duda: Acho que você mudou só o verbo.

Maria Luiza: Mas, então, a sua solução continua válida para a minha questão?

Maria Helena: Eu acho que sim. Acho que sim, porque mesmo que você tenha o espaço tridimensional, se o seu conjunto de vetores é R2, ele é um espaço vetorial mas não de dimensão três.

Maria Luiza: Tá, mais aí a conclusão que vocês chegaram, tá dentro desse problema ou tá dentro do problema como vocês interpretaram? Porque vocês construíram um R2, né?

Maria Helena: Hum, hum.

Maria Luiza: Então, vocês deixaram de lado essa dimensão três?

Maria Helena: Não, não deixei de lado.

Teka: Pra ter R2 eu não preciso da dimensão três.

Maria Helena: Não, não deixei de lado eu coloquei /

Duda: /Pra ter um/ espaço vetorial gerado por R2 eu não preciso da terceira dimensão.

Maria Helena: E pra isso aqui que ele colocou dimensão dois. Você não tá vendo a dimensão três aqui? [Referindo-se ao esboço na lousa].

Duda: Que nem elas tinham colocado na aula passada, colocando uma das coordenadas zero. Aí você tem três dimensões mas o vetor não é o mesmo, né? Não é o vetor gerado pelo R2.

Teka: É outro espaço.

Duda: É outro espaço.

Prof: Bom, se estão esclarecidos?

Betty: Eu só queria colocar uma coisa. Se você olhar pra R2 como sendo elementos de um conjunto e a partir disso você definir operações de modo que tenha dimensão três; Você ainda continuaria olhando desse modo? É, pros eixos ortogonais como vocês disseram? Não sei se vocês tão entendendo?

Duda/Maria Helena/Teka: [Falando juntas] Não, não.

Betty: Tipo assim, cê tem R2, seu conjunto de vetores, tá? A partir disso, é possível você definir operações de modo que eu não vá olhar para o par ordenado x,y?

Maria Helena: Somar vetor, multiplicar vetor.

Betty: Isso, tipo, eu vou somar vetores x mais y de uma maneira que eu não faça a mesma coisa que eu tô acostumada a fazer no plano usualmente, de modo, vão supor, a obter uma terna, não sei?

Maria Helena: Eu não sei assim, como. Como que você vai somar vetor com duas pra você ter três?

Duda: Você tem duas coordenadas, com é que você geraria a terceira? Que operação seria?

Betty: Então, é será que não seria o caso de definir uma operação pra tá determinando um espaço vetorial de dimensão 3? Porque da maneira que vocês fizeram deu a impressão que, ao fazer dessa forma, o conjunto R2 com as operações usuais; aí sim vai ter dimensão dois. Aí eu mudaria a pergunta: - será que tem uma outra operação que isso ocorra?

Duda: Não sei. Eu não sei.

Maria Helena: Não, a gente não pensou em nada disso. Pensamos só assim, nas coisas / bom, não chegamos a mexer nisso, não sei. Não sei se pode.

Duda: Não cogitamos essa possibilidade.

Prof: Esse fato, de que ela disse isso e você disse não sei se pode, vocês disseram. Muda a sua resposta ou não?

Duda: Não, necessitaria de mais investigação, mas...

Maria Helena: /Mas/, lendo o problema, a gente acredita nisso; nisso que a gente falou. Assim, se existe essa operação e vier falar ó, assim da pra fazer, nesse jeito, falhou nisso, nisso... Mas, por enquanto, eu acredito nisso que a gente falou.

Prof: Você tá dizendo / você concorda ou não / a observação da Betty que pode ser que não tem nada a ver com o que tá escrito lá no texto, tá?

Maria Helena: Eu acho que não tem nada a ver.

Prof: Não tem nada a ver? Não faz o menor sentido esse comentário que ela fez com relação ao que tá dito no texto? Essa é que é a questão. Se você disser que não, então, você não precisa levar isso em consideração.

Duda: Quando você falou assim: - é possível existir um espaço vetorial, nós não levamos isso em consideração; essa pergunta dela, essa outra operação aí, não usual. Então, se a gente levar isso em consideração, pode ser até que a gente mude, a gente vai pesquisar mais.

Prof: Então, a minha pergunta é se vocês tão querendo ou não levar isso em consideração? Entendeu? Se olhando / vocês tem o texto /

Maria Helena: /Hum, hum/

Prof: Essa consideração da Betty, nesse contexto, num tem nada a ver, entendeu? Não procede, esse comentário dela não procede. Não diz respeito ao que a gente tá fazendo. Aí vocês podem / mantém naturalmente a resposta. Se vocês disserem que procede; talvez isso mude a resposta de vocês, talvez não? Mas, são vocês que vão tomar a decisão, entendeu?

Teka: Dentro do que a gente pensou não procede.

Duda: Dentro do que a gente pensou não.

Teka: Dentro da nossa discussão, dentro do que a gente visualizou, não.

Duda: Mas eu acho que a pergunta é possível? Tem que ter mais investigação? A gente não considerou isto?

Teka: Mas, assim, da forma como nós pensamos, eu acho que a colocação não procede, nós não pensamos nisto.

Prof: Vocês não pensaram, mas vocês, por acaso, admitem que o que a Betty colocou abre uma possibilidade que vocês não investigaram e que, portanto, é possível que a resposta seja outra, ou não? Vocês admitem isso ou não? É isso que eu tô querendo saber? Se a possibilidade [...] é legítima com relação a este texto, ou não? Ou não sabe?

Teka: Não consigo imaginar como? [Falando baixinho]

[Uma outra voz, que parece ser da Diva, comenta em voz baixa: não consigo viajar nisso não?].

Duda: Voltando para a leitura do texto /

Teka: /Como faria isso?/ Como? Que condições? Qual operação? Como seria isso? Pra dizer pra você que sim ou não eu precisaria entender o como?

Prof: Então você não sabe?

Teka: Não sei como.

Prof: Não, não, você tá dizendo para a gente que você não acredita que isso seja possível?

Teka: Eu não consigo imaginar como seja, o que ela me disse. Não consigo visualizar o que ela tá me dizendo.

Prof: Agora, isso que você disse: - eu não consigo ver como seja.

Teka: Sim.

Prof: Quer dizer, que implica ou quer dizer que você não acredita, que não dá pra fazer?

Teka: Eu acredito que não, não consigo visualizar, acho que não. Como isso é possível? Acho que não?

Prof: E vocês?

Maria Helena: Eu acho que não. Eu acho que isso que a gente fez, dentro do texto tá fechado.

Duda: Eu diria não sei?

Prof: Por quê?

Duda: Se eu levo em consideração o que ela tá dizendo eu pesquiso mais. Eu diria que eu não sei se é possível.

Prof: Se é possível o quê?

Duda: Existir o espaço vetorial, essas operações que ela tá me dizendo, não sei?

Prof: Esse teu não sei tá querendo dizer / [risos cortam a fala do professor e ele retoma] isso quer dizer que você tá mudando a resposta de não era possível para não sei?

Duda: [Não sei se é possível]

Prof: Mudou sua resposta?

Duda: Fiquei na dúvida agora /

Prof: Então, de algum modo, você está incorporando o comentário dela como legítimo dentro da investigação proposta?

Duda: Isso.

Prof: Então você mudou a sua resposta, é isso? É isso?

Duda: É, é, não tô dizendo nem que é nem que não é mais só tô /

Prof: /Sim/, tua resposta nesse momento, não é mais não é possível, agora é não sei?

Duda: Isto.

Prof: E as duas continuam dizendo que não é possível?

Maria Helena: Tá?

Prof: Não sei? [Risos]

Prof: [...] Vão ver se alguém tem algum comentário, né?

Maria Helena: Quem mais?

Pinho: Eu acho o seguinte /

Prof: [As pessoas conversam e o professor diz:] Péra aí pessoal?

Pinho: Eu acho que a questão é pertinente porque quando a gente investiga, digamos, quando a gente tenta entender o que é um espaço vetorial e descobre que o espaço vetorial, digamos, é algo que é composto, digamos, tem quatro coisas num espaço vetorial que é um conjunto de vetores, um conjunto de escalares e as duas operações. Na sua pergunta, você fixa duas dessas coisas, que é o conjunto de vetores e o corpo de escalares, não fala nada sobre as duas operações, né? Então, a gente trabalhando com as operações usuais, pelos exemplos que a gente chegou, parece que com as operações usuais, realmente não dá pra ter um espaço com dimensão três. Agora, com as operações não-usuais a gente também não sabe porque não investigou isso. Então, por isso, eu acho que a questão dela [se referindo a Betty] é pertinente.

Prof: [O que o professor diz é inaudível]

Duda: Eu tô levando em consideração. Eu disse, não investiguei por esse lado as operações não-usuais, pode até ser né?, e foi por isso que eu disse não sei. Já ficou, já mudaria a minha resposta.

Prof: Vocês entenderam o que ele disse? Vocês sabem repetir o que ele disse? Vocês poderiam repetir o que ele disse?

Teka: Que dentro do que você colocou não foi citado as operações. E pelas operações usuais, ele acha que não. Agora, pelas não convencionais, ele não investigou isso. Então, que ele acha pertinente. Ele não investigou as não-usuais, não é isso?

Prof: Tem alguém que acha que o que ele disse não foi igual ao que ela disse?

Mel: Ela falou diferente.

Prof: Qual é a diferença?

Mel: Não, ele falou que pra ter espaço vetorial tinha que ter quatro coisas, né? Um conjunto de vetores, um conjunto de escalares, as operações de adição e multiplicação. Aí ela falou que, quis dizer, acho que ela embutiu, tinha os outros dois e ela falou só as operações.

Prof: E aí não falou a mesma coisa?

Mel: É, não falou a mesma coisa.

Prof: Então, eu tô levando isso a sério. Eu acho que tem o motivo pelo qual ela não falou. Por isso eu pedi para ela repetir. Você seria capaz de repetir desde o começo mas, por algum motivo, ela achou que não precisava.

Teka: Porque eu acho que ela [referindo-se a Betty] só se baseou na operação, então, é na operação que ele tá discordando. Não é a operação que é o problema que ela colocou? Então a discussão dele foi nesse sentido. Como o resto era isso, isso, isso, mas não a operação.

Duda: Tem o conjunto de vetores, tem o corpo de escalares, não tá definidas as operações? Então, nós consideramos só as usuais. Não é isso? [Ela fala olhando para o professor como quem espera uma resposta]

Teka: Não convencionais, não consigo ver como? [Ela fala em voz baixa]

Duda: Ué, operações não-usuais geram espaço vetorial? [Ela faz o questionamento olhando para o professor como quem espera uma resposta, após um breve intervalo de silêncio ela continua] De acordo com a definição que a gente tem de espaço vetorial, né?

Mel: Ele não fala assim. Ele não fala que tinha que ser usual.

Duda: Ele não fala. Exatamente. Aqui no texto dele, não é isso? [Apontando para o caderno]

Mel: Não, na definição de espaço vetorial.

Duda: Ele fala que sejam definidas as operações de adição e multiplicação por escalar que atendam aqueles axiomas, né?

Prof: Antes, vocês olharam a definição de espaço vetorial, não olharam? Quer dizer, vocês viram que tinha que ter esses quatro componentes? Vocês lembram de ter visto isto?

Teka: Nós tivemos a discussão do corpo, o que era um espaço e etc.

Prof: Sim, mas, em particular, eu queria saber se vocês viram na definição de espaço vetorial, vocês viram esses quatro elementos que ele citou? Vocês lembram de ter visto em algum momento neste curso ou em algum livro que vocês leram isto? Vocês lembram? [Duda e Teka ficam caladas] Então, a questão interessante do ponto de vista meu, de entender como que é que vocês estão pensando, é porque que vocês não consideraram, não discutiram operações? Entendeu? Não olharem para o lado das operações, apesar de vocês concordarem que o texto fala só do conjunto de vetores e do conjunto de escalares. Então, eu / esse é o tal do meta-curso, vou falar como é que eu tô pensando, eu vou, falo assim: - deve ter um motivo, que eu quero entender, para as pessoas, dada essa situação, não se preocuparem com as operações como possibilidades. Porque é como ela colocou, o fato de que eu não consigo conceber, eu não conheço nenhuma outra operação, tá? Pra você te convence que não existe [dirigindo-se para Teka], pra ela não convence [se referindo a Duda]. Mas no grupo enquanto grupo, vocês não / vocês tomaram uma coisa /

Duda: [A gente] não discutiu sobre isto.

Prof: Então, eu agora fico fazendo hipóteses aqui na minha cabeça, que eu só não vou dizer pra não contaminar a história, não é que eu quero sonegar, porque se não, contamina mesmo. E eu acho legal cada um pensar, eu acho legal cada um fazer hipóteses sobre isso. Eu quero que vocês falem sobre isto, tendo esses elementos na frente /

Teka: Nós pensamos na adição que estaria nesse espaço mesmo e na multiplicação, não é só?

Duda: Nós pensamos nas operações usuais dentro do espaço. Não pensamos em outra coisa. Não consigo imaginar o que precisa mais.

Prof: Não tem mais? Vou abrir espaço para o outro grupo.

[O próximo grupo vem então à frente apresentar à turma a resolução do problema]

Muiara: Nós colocamos assim: “- por mais vetores reais que consideremos, se não tivermos pelo menos um ponto fora do R2 não podemos obter a dimensão três”. E aí como figura que a gente poderia aproveitar / como você se chama mesmo?

Ades: Eu? Ades.

Muiara: Ades. R2, temos como figura a parede, um plano como a gente usualmente pensa. E esse outro ponto fora, seria a mosca. Se não tiver isso definido, então, como é que vai gerar a dimensão três? Então, eu acho que acaba caindo numa coisa assim: se a mosca tá fora do plano é porque existe alguma coisa além dele, né? Pelo menos, dá origem a essa dimensão três. Então sem esse elemento fora do R2, nós respondemos, também, que não. E concordamos com o argumento do grupo anterior, né? Agora /

Azul: /Se você/ tem o conjunto de vetores em R2, tá? Por mais que você trabalhar operações neles / nós vimos que era / com isto nós vimos até na outra aula / toda a parte de espaço vetorial e o que realmente era espaço vetorial, o que que acontecia, o que que precisa, por que que era? Daí, nós chegamos a conclusão que se eles estiverem realmente em R2, se eu não tiver nada fora dele, não tem como ter uma outra dimensão. Se fosse só pra colocar como sendo vetores de R2, pelo menos eu sinto assim. Claro, que no início, na outra aula, nós tínhamos pensado assim: se a gente mudar / cadê a pergunta? / Se nós mudarmos a pergunta, como ela colocou também, né? Aqui, se em vez de colocar “investigue se é possível existir um espaço vetorial real e que tenha dimensão três, onde R2 é o conjunto de todos os vetores do espaço?” Se eu tô afirmando que ele tem dimensão três, daí eu consigo retirar o que é R2. Mas, no texto do jeito que está, eu acho que não dá.

Muiara: O que a Diva falou hoje também, sobre, temos um plano e vamos colocando planos paralelos sobre ele, se esses planos paralelos forem determinados pela distância, isto é, um espaço; isto acaba colocando planos coincidentes. Não sai da dimensão dois.

Maria Luiza: Eu não sei o seu nome, mas a pergunta que ele fez e a resposta sim, gostaria que você dissesse por quê?

Azul: Não, porque se você / a pergunta foi assim ó, “investigue se é possível existir um espaço vetorial real e que tenha dimensão três, onde R2 é o conjunto de vetores dos espaço”. Então, se eu já tenho a dimensão três, eu consigo tirar tudo de R2. Se eu já tenho a dimensão três, eu consigo tirar todos os R2. Se já está gerado o três eu consigo o dois.

Mel: Mas todos?

Azul: Se eu tiver uma dimensão 3, tá. Se eu tenho uma dimensão 3, aí eu posso tirar sempre o R2 [ênfase na palavra sempre].

Mel: Tá.

Maria Luiza: Desde que seus vetores sejam de R2, mas você tá na dimensão 3.

Azul: Mas, se eu tô na dimensão três é claro que eu vou ter vetor 2, do R2.

Maria Luiza: Qualquer um?

Azul: Claro, porque ó, vão supor, eu vou colocar, como dimensão 3, aquele canto lá da parede, tá? Então, dimensão 3 vai me dar largura e altura e profundidade, tá? Se eu tenho isso aí é claro que eu vou ter sempre. Sempre.

[Uma voz]: Sempre?

Azul: Se eu tirar uma dela, sempre vou ter dois?

Judy: Não é isso que o Callioli fala aqui, na página 48 ó: [com o livro aberto sobre o colo ela lê] “observemos que os elementos de R2 e os de R3 são de natureza distinta e assim sendo não deve o leitor cometer o engano de dizer que R2 é subconjunto do R3”.

[Azul fica em silêncio]

Mega: Eu acho que não dá pra dizer que é subconjunto, mas / é tem uma definição aqui que fala que, generaliza pra Rn, né? Se as operações é / ele tá falando assim que [olhando no livro sobre a mesa] / a definição de espaço vetorial / se as operações definidas em Rn / deixa eu ver. Bom, deixa eu colocar aqui o que eu entendi. Primeiro eu defini o que era espaço vetorial. Então ele fala, K é um determinado corpo e V é o conjunto não vazio de operações, operações de adição e multiplicação. Então o que é espaço vetorial?

Prof: Você pode ler?

Mega: Posso. Então, “seja K um corpo K e seja V um conjunto não vazio com operações de adição e multiplicação por escalar que determinam para qualquer u,v”. Certo, esse u,v pertence a esse / deixa eu colocar [ele vai escrevendo na lousa e falando: K é o corpo, né? Os elementos de K são a,b,c,tá? [Ele escreve na lousa K = {a, b, c}] V é o espaço. Mas, esse V que é o espaço que não é vazio, né? Com operações de adição e multiplicação por escalar que determina para todo u e v pertencente a V. “Então quais são os elementos pertencentes ao espaço vetorial? u, v [ele escreve na lousa: V = {u, v ...}]. As operações u mais v pertence a V, um escalar a vezes u, u pertence a V; b vezes v pertence a V”. Então esse V ele é chamado de espaço vetorial sobre este [indicando na lousa o K]. Então é essa que ele tá colocando aqui. Daí, pra frente aqui ele fala aqui que a demonstração que esse K elevado a dois / os elementos desse corpo aqui [indicando na lousa] é um espaço vetorial / nós podemos dizer que é / “as operações de R elevado a n com as operações lá definidas é um espaço vetorial sobre R”. O que eu entendi que as operações de R2 são operações definidas sobre R, sobre o R. Agora espaço vetorial , ele fala de um, ele fala de maneira que você vai precisar organizar, então posso ter dupla, eu posso ter tripla, eu posso ter um conjunto de matrizes, eu posso ter várias coisas aí [abaixando a voz]. Mas, por exemplo, eu pra mim agora eu entendi que R3 seriam as operações definidas sobre R2 ou até sobre R.

Prof: Quero saber como isso tudo se relaciona pra esse seu estudo, pra /

Mega: /Eu acho/ que eles são distintos, certo?

Prof: Eles quem?

Mega: R3 e R2.

Prof: Então você tá concordando com ela [referindo-se a Judy] ou com sua companheira de grupo?

Mega: R3 pra mim, R3 é distinto de R2.

Prof: Mas, você tá concordando com /

Mega: /Eu tô concordando/ com ela, eu estou concordando com ela [ele aponta para Judy]. Que R3 e R2 são distintos.

Judy: Mas, e de não ser subconjuntos?

Mega: As operações de R3 estão sobre R2, sobre R2. Agora é esse sobre, eu tô buscando realmente o que que é esse sobre, né? Não consegui ainda pegar com as duas mãos, ainda [ele faz o gesto de pegar].

Muiara: O Callioli fala aí, não confunda o leitor dizendo que R2 é subconjunto de R3?

Judy: Isso.

Muiara: E acrescenta?

Judy: Não, só fala que depois pode, de uma certa maneira, ser considerado idêntico aquele conjunto que a gente coloca o x, y e o zero. Ele vai falar, só que eu não achei onde ele vai falar que pode ser.

Mel: A gente chegou a ver isso, ele vai falar depois, mas não adiantou muito mais, quer dizer /

Betty: /É eu achei/ que resolveu para explicar essa sua dúvida, até tava procurando pra ler e ver como tá escrito, né?

Mega: A gente estudou também sobre base e dimensão, não fala sobre isso? Pode falar?

Prof: [Inaudível]

Mega: Então, eu tenho aí dimensão e base, deixa eu colocar pra vocês. Quando um número finito de n vetores, v1, v2, v3 até vn linearmente independentes; então eu tô falando que para definir esse R2 eu vou precisar de vetores que são linearmente independentes. Então, linearmente independentes é, por exemplo, em R2, um, zero e o outro, zero, um. Então, o um, zero e o zero, um vão definir a base pra gerar todos os outros vetores de R2 que serão combinação desses dois vetores. Daí, eu abro pra R3. O que que gera o R3, né? A base seria, um, zero, zero; zero, um, zero; zero, zero, um; né? São esses três vetores, que todos as vetores do R3 são combinações lineares desses três, né? Então, eles são linearmente independentes. Então por isso que pra mim, R3 é distinto de R2. É definido, um, zero, zero; zero, um, zero; zero, zero, um. Precisa ser alguma coisa, que seja combinação linear disso. Agora, posso dizer que zero, um vai ser combinação linear de zero, um, zero? [Ele escreve na lousa (1,0),(0,1,0)]. Não consigo ver ligação? Não consigo ver ligação?

Mila: [Ela parece encontrar no livro o que a Judy não havia encontrado e começa a ler] Tá assim: “provar que o espaço vetorial R2 é isomorfo ao subespaço U de x, y, z pertencente a R3 tal que z é igual a zero (U = {(x,y,z) / z = 0}), do R3. Solução, a função f de R2 em R3 dada por f de x, y é igual a x, y, zero, é linear e injetora e sua imagem é o subespaço U. Logo R2 e U são isomorfos”. Foi o que a gente viu, né? [Ela fala olhando para Betty] Mas não adiantou muito não.

Mega: O iso vem do dois, né? É isomorfo.

Muiara: A mesma forma os dois apresentam, uma correspondência biunívoca entre.

Mega: Então, quando o professor colocou a questão dele, várias coisas vieram na minha cabeça, deixa eu colocar, não tenho nada a perder mesmo [risos]. Então, eu vou colocar. Primeiro, ele falou do espaço vetorial. Se ele falou de real, eu entendi real e o expoente aqui todo mundo sabe que é um, né? [Na lousa ele escreve R e coloca o expoente 1 subscrito] Depois, ele fala assim, onde R2 é o conjunto de vetores desse espaço [ele aponta para o R na lousa enquanto fala]. O conjunto de vetores desse espaço [ele repete prestando atenção ao que diz e coça a cabeça]. Mas esse espaço aqui [indicando o R na lousa], R2 formado em R1? Eu posso voltar assim?

[Alguém diz]: Não, os valores são tomados em R.

Mega: Ã, é isso? [Ele parece não prestar atenção ao que foi dito].

[Várias pessoas falam ao mesmo tempo]: Não.

Mega: [Lendo] “onde R é o corpo de escalares”. [Ele comenta] O corpo de escalares, tudo bem? Então, são os números, né? [continua lendo] “onde R2 é o conjunto de vetores desse espaço”. Então ele tá associando?

Betty: O espaço é o espaço vetorial.

Mila: Esse é o espaço vetorial.

Mega: O espaço vetorial, mas qual?

Betty: O que tem dimensão três, esse que você não sabe qual é.

Mega: Mas, então, por que ele fala de espaço vetorial real?

Mel: Porque o corpo de escalares é R.

Mega: É o real. Ah, então, tá ok? Então, daí, então o “R2 é o conjunto de vetores desse espaço que tenha dimensão três?” [Lendo]

Mel: A única coisa que pra gente não ficou claro era isso. O conjunto de vetores desse espaço era R2 e o espaço tinha dimensão três. Eu tinha que saber se existia esse espaço de dimensão três, cujo conjunto de vetores fosse de R2.

Maria Luiza: Isso, aproveitando a pergunta que ela fez / não sei o seu nome qual é?

Mega: Mega.

Maria Luiza: Não, o dela?

Azul: Azul.

Maria Luiza: Quando você falou sim, eu perguntei pra você na hora daquela questão. A minha dúvida era a seguinte; se você tiver então / você colocou o plano aqui, como se fosse a sala, né? Então imagine que você tenha um vetor que tá saindo lá do cantinho da sala tá assim, digamos, perpendicular. Esse vetor você considera que ele tem coordenadas no R2, então?

Azul: Não, eu acho que / eu andei agora pensando, eu tô vendo / colocando isso, que na minha opinião se eu tenho a dimensão três, / não é que / claro, não são todos / mas, eu forçosamente vou ter / agora eu tô vendo mais claro isso / eu vou ter R2 na dimensão três, agora o contrário não pode ser. Se eu tenho dimensão 2 eu não posso ter R3. É isso que eu quero colocar? Pra mim, agora, ficou claro, assim, eu não vou dizer que todos. Realmente, todos, não. Mas se eu tiver dimensão 3, eu tenho certeza que eu vou ter R2. Agora, se eu tiver dimensão 2, eu tenho certeza que eu não tenho R3.

Mega: Você poderia repetir a pergunta?

Azul: /Então/, pra mim ficou claro. Agora, eu não sei se é isso que eu consegui passar na hora que eu falei? Entendeu?

Maria Luiza: Quando você falou, você falou assim: qualquer vetor poderia ser do R2. Foi a fala dela antes.

Azul: Foi, mas agora /

Maria Luiza: [Ela responde ao Mega] /Eu perguntei/, se qualquer um de dimensão três estaria no R2? Aí, eu propus pra ela pensar no vetor que fosse esse que eu falei. E perguntei se ele era formado pelo R2 ou pelo R3? Aí, ela /

Azul: /Sabe, o que eu queria colocar/, eu sei, na hora que eu me expressei, eu acabei não colocando o meu pensamento. Mas, meu pensamento é esse: se eu tenho dimensão três, eu consigo R2, nele, tá? E se eu tenho dimensão 2, eu não consigo R3. Então, eu acho que, no início, sei lá.

Maria Luiza: A resposta, então, não seria /

Azul: /Em relação a isso?/ Eu acho que sim. Eu acho que toda dimensão três eu consigo, não é que todos serão, mas eu consigo R2. O de dimensão 2 eu não consigo R3, pelo menos isso eu acredito, tá?

Mel: Então, qual é a sua resposta?

Azul: Não, que eu tinha colocado antes e eu, realmente, reconheço que eu me expressei mal. Eu queria dar essa resposta, entendeu? E acabei mudando.

Maria Luiza: Sua resposta continua sendo sim?

Azul: Não, sim em relação a isso [risos].

Maria Luiza: Sim é possível ou não, não é possível?

Azul: Em relação ao problema ou em relação a isso que você perguntou?

Mel: A justificativa dela parece que é pro sim e não pro não?

Maria Luiza: É.

Azul: Não, eu acho que não, porque aqui, eu tô respondendo, que no início, eu realmente, me expressei mal, tá? Eu queria colocar isso, que; é isso, se eu tenho dimensão 3, eu consigo R2. Se eu tenho dimensão 2, eu não consigo R3.

Maria Luiza: Tá, mediante isto, a tua resposta para o problema?

Azul: Para o problema? Então, deixa eu ler de novo o problema [ela lê em voz alta o problema]. Então, se R2 é o conjunto dos vetores desse espaço, daí eu não posso ter uma dimensão 3. Se eu tô trabalhando isso, se eu tô trabalhando assim, eu tenho vetores todos R2. Eu acho que eu não posso dimensão 3. O contrário sim, se eu tivesse dimensão três eu poderia ter vetores R2.

Diva: Eu ainda não entendi essa história da dimensão. Eu não entendi no grupo dela aí [referindo-se ao grupo anterior]. Não tô entendendo no seu grupo. Essa história da dimensão.

Maria Helena: Mas, por quê? [Várias pessoas começam a falar ao mesmo tempo e a Diva retoma]

Diva: Por que você tá falando assim ó: a partir do R3 aí eu vou conseguir, o R, como é que é? Da dimensão 3 eu consigo a dimensão 2. Mas, a partir da dimensão 2 eu não consigo a dimensão 3? Então o que que é essa dimensão aí? É isso que eu quero saber? O que que é essa dimensão?

Azul: Não é só, por exemplo, largura e comprimento? Não seria a dimensão 2? Largura e comprimento? Pra mim, é infinito. Mas, largura e comprimento. Quando eu tenho alguma coisa a mais, daí eu tenho dimensão três?

Diva: Aí, nesse caso que a gente tá falando de espaços vetoriais, a idéia permanece? Essa idéia aí permanece?

Muiara: Pra mim permanece sim [falando ao longe].

Azul: Bom, não sei?

Muiara: Eu não vejo possibilidade /

Diva: Não, eu só perguntei, por causa da questão do enunciado; era saber quais as coisas que estavam no enunciado e que muda, por isso que eu perguntei? [Referindo-se à proposta do professor como tarefa do dia]

Azul: Não, nós pesquisamos cada um / mais ou menos, cada um, procuramos o que era par ordenado, que era números reais /

Mega: /Pra definir/ a dimensão precisa ter quantos vetores? Mas, contanto que eles sejam linearmente independentes. Então, se é R2, precisa de dois vetores linearmente independentes e daí gera base dois. Base três, três vetores linearmente independentes.

Diva: Mas, aí voltando a minha pergunta, né? Então, eu tô entendendo o que você tá querendo dizer. Como é que eu saio do espaço de dimensão 3 pra conseguir um espaço de dimensão 2? Pelo caminho que você falou?

[Alguém]: Repete a pergunta aí?

Azul: Se eu tenho a dimensão 3, o que que eu faço pra conseguir dimensão 2?

Mega: E se eu fizesse alguma coisa assim ó, não sei? [Ele esboça três eixos sugerindo a representação do sistema de coordenadas tridimensionais]. Pegar um ponto aqui tá? Eu vou colocar um vetor. Então, agora, esse vetor aqui, ele tá saindo, ele não tá pertencendo a nenhum plano. Digamos que eu tenha, não sei, X, Y, Z [ele coloca cada letra para nomear os eixos]; tenho aqui 3, 2 e1, né? [Marcando pontos nos eixos] Então, eu tenho esse vetor aqui. Então, eu tenho um vetor em R3. Agora, como eu posso gerar um vetor em R2? Se eu for gerar em R2, eu vou ter duas dimensões. Então, sei lá, eu vou bater uma foto, eu bato uma foto, eu vou bater uma foto desse vetor. A foto desse vetor, eu vou ter uma foto no plano ZY. Batendo uma foto aqui [ele sinaliza com a mão como se fosse de cima] eu vou ter uma foto aqui em XZ [deveria ser XY] e vou ter uma foto também no plano [ele se confunde] / XY, XZ e ZY. Então, eu tenho o vetor, mas aí eu tô falando de projeção. Projeção, né? [Ele parece não estar muito seguro agora] Agora eu posso dizer que depende / essas três aqui interligadas, vão me gerar essa daqui.

Diva: E onde tá o R2?

Mega: Pra mim R2 está XY, R2 [ele bate a mão na lousa]. R2 pra mim tá aqui, ZY [ele bate a mão na lousa sobre a figura]. R2 pra mim tá aqui, XZ [ele repete o gesto].

Mel: Mas, você pode ter um vetor no plano XY com a terna x, y, zero.

Mega: x, y, zero. É, mas se você tá falando x, y, zero [ele escreve na lousa (x,y,0)] quando a coordenada z é zero você tá falando só do plano XY, né?

Mel: Não, tô dizendo do plano de R3.

Mega: Ah, sim. Sim, daí, esse vetor x,y, por exemplo, estaria pertencendo / seria esse daqui tá, por exemplo, 3 e 2 [ele esboça um vetor no plano formado pelos eixos X e Y, com abscissa 3 e ordenada 2]. Então, mas ele pertence sim ao, é /

Mel: /Ele pertence/ ao plano.

Mega: Ele pertence ao plano e também pertence ao R3. Sim, ele pertence.

Mel: Ele tem dimensão?

Prof: /A pergunta/ é, a minha pergunta é: - esse vetor, o último que você desenhou, ele é um elemento do R2 ou um elemento do R3?

Mega: Tá. Como eu defini x, y, z, como eu defini x, y, z; ele é um vetor do R3. Que vai da origem até o ponto 3, 2 e 0 [ele escreve na lousa (3,2,0)]. Porque eu defini.

Prof: Você disse: - eu tenho o R2 aqui, eu tenho o R2 aqui, eu tenho o R2 aqui. Ali aonde? Essa é a minha segunda questão? Quando você fez com a mão assim você disse que tava no R3, me mostra onde o R2 está? [O professor está fora do campo de visão da câmera].

Mega: Não tenho, não tenho. É, sim e não. Pra defini R2 eu tenho que ter só dois eixos. Dois eixos para eles serem l.i. e eu já defini que ele tem três, né? Então esse daqui é uma combinação linear de R3 [indicando a terna (3,2,0) na lousa]. É um v de xi, yj mais zk [enquanto fala ele escreve na lousa v = xi + yj +zk]. Quer dizer, é o R2. O R2 não está aqui, aqui tá o R3 [indicando o plano XY na representação na lousa]. Pra eu falar que é R2, eu tenho que definir, então, três distintos, que seriam essas três variáveis agrupadas duas a duas. [Ele esboça na lousa três representações gráficas com dois eixos perpendiculares dois a dois: XY, XZ, YZ e apontando para eles diz:] Isso é R2, isso é R2 e isso é R2. Isoladamente; não aqui [indicando a representação tridimensional]. Eu agora retiro isso que eu falei; que eu tenho R2. Quando eu falei R2 é que eu ignorei o terceiro eixo, assumindo dois.

[Alguém pergunta]: Voltando a pergunta inicial do problema, continua sim ou não? Sim é possível; não, não é possível?

Muiara: Não, não é possível. Colocando o ponto /

Mega: /No R3/ não, né? ... Não posso falar, né? Se eu tô definindo R3, eu tenho que usar isso aqui e não isoladamente.

Muiara: Eu vou ler de novo a conclusão [...]

[Várias pessoas falam ao mesmo tempo]

Mega: Pra mim não dá.

Muiara: "Por mais vetores reais que consideremos, se não tivermos pelo menos um ponto fora de R2, não obteremos a dimensão três". Então, no momento que a gente compõe três, nós identificamos infinitos planos R2. Mas, se tomarmos isoladamente e tentarmos somar sem essa composição, dizendo, um ponto fora dele, não é possível [ela fala olhando para o que esta na lousa]. Resumiria, assim a figura. [Segue um silêncio e ela retoma] Quem nasceu primeiro, o ovo ou a galinha? O espaço R3 ou o ponto que tá fora dele? Acho que fica meio assim?

Azul: Tem algum grupo que chegou no sim? Só pra gente ouvir alguma coisa?

[Ninguém diz nada]

Pinho: Posso colocar uma pergunta? É, digamos que fosse possível, né? O que que teria de acontecer?

Mel: É isso que a gente tava querendo, quando ela falou das operações?

Betty: Se a gente conseguisse definir uma operação em cima do R2 de modo que a gente obtesse uma base com três vetores, aí sim a gente chegaria? Mas, o problema é como fazer isso? Agora, se a gente não conseguir? Como provar que não, entendeu? Se não for possível, claro, como provar que não?

Prof: Obrigado. Acho que o Amarildo (Pesq) queria fazer um comentário?

Pesq: Não, é que eu fui cobrado, de alguma maneira, que eu sai correndo daqui, falei uma coisa e fui embora, né? Aí eu queria só voltar a questão [...].

Mila: Não, ele falou assim, aí gente, eu acho que o R3, pra mim, é azul. Aí, ele fala e sai, ele deixa a coisa assim. Eu nem imagino, eu nem imagino cor para o espaço e ele fala numa cor azul. Então, isso me incomodou muito [...]. Como é que você consegue ver uma cor assim azul? Por que não amarelo? Por que não rosa?

Mel: Não, mas isso porque ele imagina o R3 azul, do tipo /

Mega: [Ele associa].

Mila: Por que o azul?

Pesq: Então, pra mim, é tão natural isso, que eu nem entendo quando você pergunta.

Azul: Porque o azul é harmônico.

Pesq: Em?

Azul: Porque o azul é uma cor harmônica.

Pesq: Você acha estranho também? [Dirigindo a palavra a Maria Luiza].

Maria Luiza: Não, eu ia perguntar que cor tem o R2? [Risos da turma]

Mila: E o R? [Risos novamente]

Muiara: Você fez uma associação. A gente associa R3 ao espaço, espaço com céu.

[Várias pessoas estão falando ao mesmo tempo em que ela fala]

Pesq: Não ouvi, você pode repetir?

Muiara: A gente associa R3 ao espaço. E o espaço, pra gente assim, na escola, em casa, é o céu. É uma associação só, mais nada.

Azul: Pensei isso na hora que você falou que azul é o espaço, né? De um modo geral o R3 é isso, é o espaço. O que é o espaço? Quando você olha para o céu, a coisa mais linda para observar é o azul.

Pesq: É, eu tinha pensado a questão do espaço mesmo. Mas para alguém não parece razoável isto?

Lufran: Ele é complexo. Esse azul quer dizer que ele é complexo?

Maria Luiza: Isso é sério, pra você mesmo?

Pesq: É.

Maria Luiza: Toda vez que você pensa no R3 você vê que ele é azul? [Ela esboça um sorriso]

[Várias pessoas falam ao mesmo tempo]

Lufran: [Inaudível]

Pesq: É, vou pensar mais nisso e vou tentar dar uma justificação. Eu falei o que eu tava sentindo na hora.

Mega: Por que, você se identifica com o azul? De achar que o R3 é azul. Você acha que o R3 tem cara de azul? Não tô zuando não, tô falando sério. Por que, às vezes, por exemplo, eu tenho uma simpatia pelo número 7, eu gosto do número sete, né? Eu acho o cinco muito barrigudo, né? E o quatro extremamente narigudo, cê entendeu? Eu conto essa história para os meus alunos e eles falam: - o Mega, você viaja muito na maionese. Mas de vez em quando eu faço isso de brincadeira, não é brincadeira! Não, o quatro pra mim é narigudo; o quatro não é narigudo?

Muiara: Quando eu falo em espaço eu acho difícil entender em R1 e R2. Apesar de que quando a gente tá escrevendo no caderno assim, você dá o espaço, por exemplo, salta uma linha. Você tá num plano e dá um espaço, e é no plano. Então, eu preciso me esforçar para pensar em espaço em R2. Quando eu tô numa linha também, coloco o número 1, por exemplo, aí eu dou um espaço coloco o 2 , aí eu dou um espaço. Mesmo sendo em dimensão um, eu me refiro a espaço mas, com um certo esforço. É muito mais natural na dimensão 3, a gente pensar no espaço porque ali ele ocupa todo o volume, né?

Diva: Eu fiquei pensando naquela aula que o pessoal falava a respeito de plano, aí depois, ele fala nessa questão. Aí eu comecei a pensar nas coisas que estão bem próximas de mim mesma, parece que eu não achei muita coisa de uma dimensão, não achei muita coisa de duas dimensões, parece que tudo tem três dimensões. Apenas eu não consegui ver como eu poderia pensar nisso daí dentro do problema dele. Então, na realidade, eu não consigo ver esse plano. Como é esse plano, assim, certinho, com duas dimensões. Eu não consigo ver esse plano. Eu não consigo ver também essa linha, que a gente fala: a linha tem só uma dimensão. Parece que eu consigo ver tudo, mas tudo com três dimensões. Então, eu ainda não consegui passar para a idéia do problema. Não consegui nem ver a idéia do problema. Mas eu acho assim, por mais que a gente falava assim o plano, bem fininho, bem transparente; ele deve ter uma dimensão, de espessura [ela faz gestos com os dedos sugerindo espessura]. Então, eu não tenho essa idéia de plano, aquele plano que não tenha as três dimensões. Eu não tenho essa idéia de linha que é uma linha com uma dimensão. Isto aí é o que tá mais me perturbando nesse exercício. Porque eu não vejo isso, não vejo isso daí, não consigo.

Muiara: Quando você tá usando a máquina de escrever, o computador, se você dá a tecla espaço o que que acontece?

Diva: Usando a máquina de escrever, eu dou a tecla espaço?

Muiara: Ou dá tecla /

Diva: /Não, você/ fala assim, eu acho assim, se eu pego uma linha, mas eu acho que essa linha, mesmo assim, se eu fosse lá e colocasse uma lente em cima dela, eu veria que ela não é tão fina quanto se apresenta.

Muiara: Ah, não é mesmo?

Diva: Então, então, ela não pode ter uma dimensão? Então, essa idéia, eu acho que no caso ali também, talvez a idéia fosse por aí. Como é que eu poderia mostrar, que na realidade, eu teria o conjunto de vetores do R2, mas, me dado em função do R2?

Muiara: Porque você tá levando as coisas materiais e essa infinitude, tão pequeno é tão pequeno quanto se queira ou zero?

Diva: Pois é, mais aí, por outro lado, ele fala: - tem dimensão três. Não posso levar do jeito que você tá falando?

Muiara: [Faz um gesto de que não pode e sorri]

Diva: Não posso pensar desse jeito.

Muiara: [Falando baixo] Não posso forçar.

[Alguém pergunta]: Então não existe R2 pra você, só R3?

Diva: Não, não teria. Porque, na verdade, pra mim, tudo ia ser com mais de uma dimensão, num ia ter uma dimensão, não ia ter duas dimensões. Porque se eu pensar numa coisa de duas dimensões, eu vou pensar numa coisa que eu tô vendo.

[Alguém fala ao mesmo tempo com ela e na continuação ela diz:]

Diva: Seria só mais no meu imaginário, né? Na minha idéia.

Prof: Pessoal, eu vou fazer parar por aqui, tá? Eu vou escrever uma frase na lousa e eu queria que vocês copiassem pra pensar sobre ela pra próxima aula.

[O professor escreve na lousa:]

“Aconteceu na mini-série ‘Presença de Anita’:

Nando tenta salvar seu casamento, depois de sua mulher, Lúcia Helena, descobrir que ele tinha uma amante. Quando Nando pergunta a Lúcia Helena se ela não o pode perdoar; ela diz: ‘Nando, não há mais espaço para você em minha vida’. Qual a dimensão desse espaço?”

Dia 14 de Setembro

Prof: Bom, agora, eu queria saber, se alguém, durante estas duas semanas, pensou alguma coisa com relação ao nosso problema. A investigação que tá proposta desde aquele primeiro dia. Se alguém quer acrescentar, comentar, ao que a gente já falou até aqui, sobre a investigação que foi posta.

Pinho: A pergunta da primeira aula?

Prof: A pergunta da primeira aula sobre / aquela: - investigue se é possível existir, começa assim.

Betty: Bom, eu, assim, fui conversar com outras pessoas pra discutir sobre o problema e aí eu conversando com o Rodrigo, aluno do 4º ano, ele me deu a sugestão de como tá definindo as operações, né? E a gente ficou discutindo um pouco. Então, eu queria assim, tá mostrando como seriam essas operações, porque, como a gente tinha dito um pouco antes, bastava definir as operações de soma e multiplicação por escalar para tá verificando se existia um espaço de dimensão três. Mas, pra isso, nosso grupo tinha comentado que bastava ter um isomorfismo, né? Aí, em conversa com ele, ele me disse, não; basta que ache uma bijeção entre os espaços R2 e R3. Porque o R3 tem dimensão três. Então, quer dizer, em R3 a gente encontra uma base que gera todo o espaço. Então, essa base tem três vetores, né? Então, quer dizer, se existe uma função que é bijetora, pela imagem inversa a gente vai conseguir também uma base de dimensão três, que gere este espaço, cujos vetores sejam R2. Então, a partir daí, a gente definiu as operações, porque, se a gente consegue estabelecer uma relação de modo que, eu tô pegando elementos de R3 e ao mesmo tempo, eu tô pegando os mesmos elementos de R2; é como se eu estivesse pegando o mesmo conjunto. O que vai mudar, são os elementos apenas. Não sei se deu, assim, pra entender? Se alguém concorda ou discorda?

Prof: Posso fazer uma pergunta? Só pra eu me localizar? Dado o que ela falou, alguém é capaz de vir aqui na lousa e mostrar o que que ela tá falando?

[Alguém diz alguma coisa, inaudível no áudio do vídeo, e o professor retruca:]

Prof: Não, eu queria saber se / ela falou um conjunto de coisas, tá? E ela parou de falar, o que pra mim, diria que ela acha que é ali que deve parar, que era suficiente. Eu quero saber, se alguém aqui que escutou, entendeu as palavras que ela disse? Se, alguém que escutou, entendeu as palavras que ela disse, se disporia de vir à lousa fazer, o que em outra circunstância, eu pediria pra ela mesma fazer?

[A turma fica em silêncio]

Prof: Bom, segunda pergunta: - eu queria saber se alguém tem alguma objeção ao que ela disse?

Lufran: Eu tive pensando o seguinte /

Prof: /Não, não/, desculpe, mais eu vou ser simples e direto. Eu quero saber se alguém tem alguma objeção? Se alguém acha que ela disse alguma coisa absurda, errada?

Judy: Ela falou assim, que não precisaria ser isomorfismo mas, uma aplicação que é injetora e sobrejetora é chamada isomorfismo. Então, como ela fala que precisa ser bijetora /

Betty: /Mais algumas propriedades/ além de ser bijetora.

Judy: Não, a definição tá /

Prof: Você lê a definição, por favor, então?

Judy: Uma aplicação linear que é injetora e sobrejetora é chamada isomorfismo.

Betty: Pra mim, eu acho que teria mais algumas propriedades, é para ser um isomorfismo.

[Mel e Betty trocam palavras e folheiam o livro]

Prof: Enquanto elas procuram, vou fazer uma pergunta, queria que vocês me respondessem com toda honestidade, tá? Quem de vocês está totalmente boiando com relação ao que foi dito aqui pelas duas?

[A turma fica em silêncio]

Prof: Quem de vocês está entendendo tudo do que está se passando em relação ao que ela falou?

[Risos na turma]

Prof: Terceira pergunta: quem de vocês está respondendo honestamente a minha pergunta?

[Risos na turma e as pessoas falam ao mesmo tempo]

Prof: Então, eu vou encaminhar da seguinte maneira, por exemplo, você falou que não precisa ser nem nada, nem tudo [referindo-se a algo que a Duda tinha dito], então, tenta localizar a gente onde você está entre o nada e o tudo? [...]

Duda: Tava até discutindo aqui um pouquinho com a Judy, antes da sua aula ao que eu tinha procurado em casa. Porque, na última aula, ela colocou [referindo-se a Betty] a questão das operações não-usuais, aí eu estava aí na frente e já me balançou um pouquinho. Porque, o que são mesmo as operações não-usuais? Deixa eu buscar isso aí e tal. Aí, eu estudei e encontrei exatamente essa questão do isomorfismo, né? De que o R2 possa ser escrito como uma tripla, com uma terceira componente sendo zero e tal. Mas, eu não consegui entender exatamente tudo que ela falou? Consegui me localizar naquilo que eu tinha estudado, naquilo que eu tinha visto, né? Mas, a questão das outras propriedades aí, que ela falou, ficou meio, pra mim, ficou confuso. Que outras propriedades seriam, que são necessárias?

Betty: É que a gente tinha visto /

Mel: [Falando com Betty e folheando o livro] Naquele exercício.

Betty: Tá definido assim, “entende-se por isomorfismo do espaço vetorial U no espaço vetorial V uma transformação linear f de U em V que seja bijetora. Um isomorfismo f de U em U é um automorfismo de U” [ela lê de um livro que pode ser Callioli e outros, 1993]. Então, na verdade, além de ser bijetora precisa ser uma transformação linear. Acho que aí fica a diferença, né? f seria também / é transformação linear. Porque se não, acho que não faz muito sentido falar em isomorfismo é a mesma coisa que ser bijetora. Não sei se foi isso que você queria dizer?

Judy: Não, é a palavra usada. Eu vou precisar de uma o quê bijetora?

Betty: Uma função bijetora.

Judy: Uma função bijetora.

Betty: Sim, quer dizer, se existir uma função que associa R2 de dimensão, é? / R2 não, um conjunto cujos vetores sejam R2, se essa função associar este espaço com R3; quer dizer, esse conjunto vai ter dimensão três. Por quê? Não? [Ela pergunta a Judy].

Judy: Por quê?

Betty: Porque o seguinte, imagina V o espaço cujos vetores sejam R2 com as operações mais e estrela, tá? Que eu defini e que não são as operações usuais. Se eu consigo fazer uma bijeção com o espaço de dimensão três, que a gente conhece, R3, quer dizer, que eu consigo encontrar uma base, assim, pra provar [ela faz um gesto com os dedos sugerindo colocar entre aspas a palavra provar] / esse é o caminho que eu usaria pra provar que o espaço tem dimensão 3. Tipo, eu pego a base de R3 que gera todo o espaço e consigo achar uma base nesse espaço que vai gerar, né? Com esse espaço, com as operações entre estrela e ... nem sei mais o que eu tinha falado. Estrela e mais. Eu acho que se eu fosse na lousa fazer um esqueminha, eu acho que nem mostrar a solução direto, acho que talvez, eu acho que melhoraria um pouco [ela levanta e se encaminha para a lousa].

[Já na lousa ela diz:]

Betty: Pra mim é o seguinte, eu defino o meu espaço [ela escreve na lousa: $V = (IR^2, +, *)$]. Seria o meu espaço procurado, cujo o conjunto de vetores sejam R2 e tenha dimensão três. E eu quero verificar o quê? [Ela mesmo responde] Se ele tem dimensão três? Pra isso o que que eu preciso? Encontrar uma base de vetores que eu não sei quem é [ela escreve na lousa: $\beta = \{(\ ), (\ ), (\ )\}$], que gere todo esse conjunto [referindo-se a V]. Então, quer dizer, se tiver três vetores e esses vetores forem L.I., eu consigo ver que este espaço tem dimensão três. Então, se existir uma bijeção com o R3 [ela esboça o diagrama da figura 2], eu consigo encontrar essa base. Por que que eu consigo? Vocês me dêem uma base em R3?

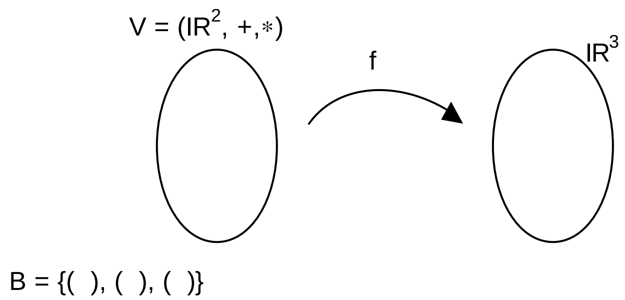

Figura 2

Pinho: Base canônica.

Betty: Base canônica, mas qual seria?

Pinho: Um, zero, zero; zero, um, zero; zero, zero, um [e ela escreve na lousa – vide figura 3].

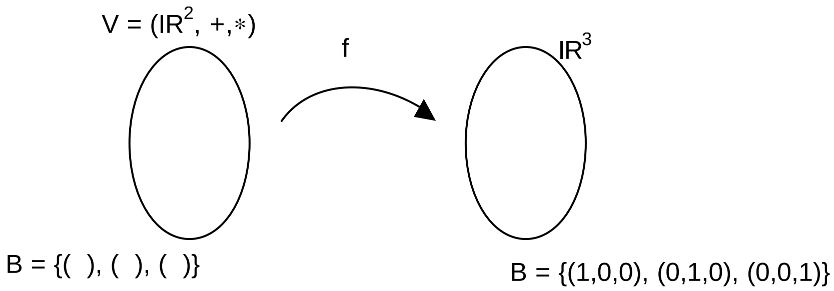

Figura 3

Betty: Então, assim, aqui é uma base. Agora, se existir essa bijeção, eu posso tá definindo as operações é..., em função dessa função bijetora [referindo-se a função f da figura 3]. Porque daí, eu pego aqui e trago pra cá [ela indica com um gesto o caminho de R3 para V]. Ou seja, pra essa base eu consigo os elementos / os vetores dessa base [ela olha para a turma e pergunta]. Até aqui, vocês concordam ou discordam, ou não entenderam nada do que eu falei?

Pinho: Pra reforçar um pouquinho, a bijeção que ela fala faz, praticamente, manda cada elemento do R2 ali, corresponder um elemento no R3.

Betty: Isso.

Pinho: De uma certa forma existiriam, digamos, casais unidos, né? Ou seja, o par desse elemento seria um único elemento no R3. Um par de elemento no R3 / uma função injetora, com imagens diferentes /

Lufran; /Você queria/ uma aplicação? É isso que você queria fazer? Queria uma aplicação pra jogar os elementos pra lá? Pra dar a bijeção, seria isso?

Betty: É, na verdade, não seria jogar os elementos pra lá.

Lufran; Jogar, assim, através de uma aplicação.

Betty: É, tipo, se tem tal aplicação, então eu consigo associar esses elementos com esses [ela indica os elementos de V com os de IR^3]. Então, eu consigo ter um espaço de dimensão três porque é como se esses conjuntos fossem iguais, equivalentes. Porque se eu pego aqui [ela indica o IR^3 na figura 3], se os elementos estão associados, é como se eu tivesse pegando aqui [ela indica V na figura 3]. Não vai mudar nada praticamente. O que vai mudar é a operação. Seria, eu tô fazendo a mesma coisa em espaços diferentes. Só o que muda é, na verdade, a operação e é o que vai tá me dando a mesma dimensão.

Prof: Posso fazer uma pergunta?

Betty: Pode.

Prof: Eu não tô entendendo porque você tá usando essa bijeção?

Betty: Eu tô usando pelo seguinte fato, eu queria definir as operações nesse conjunto [ela indica o V na lousa] de modo que esse conjunto tivesse dimensão três. Só que, pra isso a gente estabelece uma relação com o R3. Então, pra eu definir a soma, eu definiria como? [Ela vai contando e escrevendo na lousa] Eu pegava, vão supor, dois vetores (a,b) mais (c,d), aí eu esqueço um pouco isso aqui pra ver como eu fui definindo as operações em R3. Como é feita se eu tivesse a função, essa bijeção, de V em R3. A operação aqui seria [ela escreve na lousa: (a,b) $\oplus$ (c,d) = f^{-1} (f(a,b) + f(c,d))]. Aqui seria a operação usual e aqui seria a operação em V, tá? Só que isso, existindo a bijeção, é o mesmo que eu fazer isto aqui. Então eu deveria ter usado a função bijetora na operação. Pra conseguir a operação. Porque eu não conseguiria enxergar como eu opero em R3 e volto pro meu conjunto V. Aqui seriam os elementos de R2 e aqui de R3. [Na lousa ela verifica o que escreveu: (a,b) $\oplus$ (c,d) = f^{-1}(f(a,b) + f(c,d) e ela indica que f(a,b) = (x,y,z) e f(c,d) = (x',y',z')]. Não sei se ajudou, se não ajudou?

Pesq: Posso te perguntar?

Betty: Pode.

Pesq: Eu tô vendo você tentando achar a resposta desse problema. A minha pergunta pra você é a seguinte: - isto que você conversou com ele, tá na direção das coisas que você já vinha pensando?

Betty: Tá, mais ou menos, por causa da questão do isomorfismo. Pra mim é assim, se existisse o isomorfismo, então eu conseguiria é definir as operações de soma e multiplicação de modo que o conjunto tivesse dimensão três. Mas, aí a gente até ficou tentando achar e aí a gente não conseguiu, aí quando ele falou pra mim na função bijetora e se eu conseguisse definir a operação em função da função bijetora eu taria matando o meu problema. Aí eu acho que ajudou a encaminhar, porque, eu tava tentando mesmo definir bonitinho, achar uma operação tipo somando (a,b) mais (c,d), vai dar quem? Eu queria que desse uma terna. Na última reunião do nosso grupo, a gente tava querendo que isso virasse uma terna, mas não sai? Fiquei pensando, pensando. Mas, e se existe uma bijeção? Parece que fica mais fácil de definir. Foi por isso.

Alguém pergunta: Como você faria a multiplicação?

Mila: Faz desse lado [sugerindo o outro lado da lousa].

Betty: Desse? [Ela vai para o outro lado da lousa] Então a multiplicação por escalar seria α de (a,b) e eu vou pensar que eu tô operando em R3, no caso. E a imagem inversa para que eu caia no conjunto V. Não sei se tá claro a notação que eu tô fazendo? [Ela registra na lousa α.(a,b) = $\alpha.f^{-1}$(f(a,b)) e indica f(a,b) = (x,y,z)]

Maria Luiza: Betty, desculpe, mas eu não entendi porque essa função, ela é bijetora e ela não é uma transformação, satisfazendo as oito propriedades?

Betty: Oi?

Maria Luiza: Por que ela é bijetora e ela não é uma transformação [inaudível o que segue].

Betty: Então, as oito propriedades é para definir espaço vetorial, não é?

Maria Luiza: Tá, mais por que você diz que ela é bijetora [inaudível o que segue].

Betty: Então, agora, assim, eu tô na dúvida?

Judy: [Inaudível]

Mel: Ela falou que não era transformação? [Mostrando surpresa].

Betty: É, a princípio precisava ser bijetora, não precisava ser um isomorfismo. Mas, o que que definiu um isomorfismo? Uma transformação linear bijetora. Aí /

Mel: /Mas/, você está usando as operações /

Betty: /Então/, mas, essas operações, é isso que vai definir ser uma transformação linear? Pra mim, isso tá definindo as operações no meu espaço vetorial, mais /

Diva: /Eu fiquei/ pensando nessa coisa nessas semanas aí e eu fiquei pensando nas coisas mais simples possível. Por exemplo, quando você multiplica uma matriz, vão supor, uma matriz 3 por 2, multiplica por uma matriz x,y. Aí nesse caso cairia nesse exemplo seu?

Betty: Não entendi? Você tem a matriz, cai no exemplo?

Diva: Você tem a matriz 3 por 2, a matriz tem duas colunas. Aí é multiplicado pela matriz x,y [Diva vai falando enquanto Betty escreve na lousa].

Diva: [Inaudível]

Betty: Definição cê fala pra definir as operações /

Diva: /De espaço vetorial/

Betty: E a multiplicação?

Diva: É uma transformação linear ... porque quando a gente multiplica isso daí, ele vai dar uma terna, né? Quando multiplica.

Betty: Tá.

Diva: Eu fiquei assim, tentando analisar os exemplos assim, mais que a gente fica trabalhando em Álgebra Linear, né?

Betty: Você falou que vai dar uma terna? ... Mais aí, esse exemplo que você tá falando /

Diva: /Assim/ eu tentei pensar, por exemplo, eu não fiquei procurando, assim uma pergunta. Eu fiquei procurando que operações a gente podia trabalhar pra pensar nesse espaço de dimensão três, né?

Betty: Tá.

Diva: Ai eu fiquei procurando o que eu podia ver de transformações lineares. O que eu podia ver de transformações lineares, que que são transformações lineares. Ai foi que eu pensei nesses exemplos assim, matrizes [...] o que que poderia fazer com que a gente chegasse na solução desse problema.

Betty: É, eu acho que seria uma transformação linear, né?

Diva: Nesse caso, não ajudaria a gente?

Betty: É eu acho que a gente teria que ver como definir uma transformação linear. Será que ninguém pode assim / ninguém tem uma idéia do que seria transformação linear? Porque, pra mim, eu sempre pensei / não seria qualquer função, no caso, teria uma / a função quadrática, por exemplo, não seria uma transformação linear.

Mega: Sabe que você não poderia criar a função. Eu fiquei imaginando, já que o seu objetivo tá em tentar achar uma função que transforme é, duas dimensões, um par ordenado, numa terna, você poderia criar uma função. Mas aí você definiria essa função. Existe essa função.

Betty: Mas, eu acho que não tem necessidade de definir essa função. O meu objetivo não é transformar o par em terna e sim relacionar o par com a terna. Ou melhor, eu preciso relacionar a base de um espaço de dimensão 3 com esse espaço que eu quero. Na verdade, quero um espaço de dimensão três também, mas, o conjunto de vetores não é o R3, é o R2. Meu objetivo não é transformar o par, mas, em tá relacionando.
Mega: Tem uma função pra relacionar isto?

Betty: Sim, mas no início eu tomaria uma função arbitrária; precisaria tá definindo. Se definir melhor. Mas como definir?

Mega: Posso?

Betty: Hum, Hum.

Mega: [Ele levanta e vai a lousa] Eu fiquei imaginando, tem que ser linear, né? Eu tenho um vetor (a,b), certo? Digamos, que eu criasse uma função, pra somar dois vetores de R2, pra criar um de três. Bastaria ter o que na minha função? De forma que na minha lei, da minha função, eu tivesse algo assim, ó? [Ele escreve na lousa: (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d, a+b+c+d)]. Aí eu teria uma terna.

Betty: Você teria uma terna. Só que quando você vai verficar uma das primeiras propriedades lá, você tem três vetores [ela escreve na lousa: (a,b) + (c,d) + (z,w) =] Dessa maneira que tá definido eu acho que não vai satisfazer essa propriedade associativa, né? Porque eu tentei fazer isso /

Mega: Eu falei pra você, eu estaria tentando criar uma função.

Betty: Hum, Hum.

Mega: É possível. Essa aqui é minha função.

Betty: Mas essa função não seria uma terna, seria um par. Porque, ela tá em R2; não faria sentido ser uma terna? Eu só uso terna pra tá relacionando. Porque, minha base, vai ter três vetores. Quando eu opero com dois pares, dá um par. Foi por isso que eu tomei a função que eu não defini.

Mega: É, eu vi dois vetores sim, eu vou ter um par. Entendeu?

Betty: Sim, mas isto daqui não vai levar / não é um conjunto de R2. E eu preciso o quê? Que esta operação pertença a R2.

Mega: Eu acho que não dá.

Betty: Por isso que eu fiz a imagem inversa aqui. Porque, aqui, quando eu faço f de a,b eu vou ter uma terna, quando eu faço f de c,d eu vou ter uma terna. Mas, quando eu aplico a imagem inversa, eu tomo o par. Eu não saberia como definir essa função, né?

Mega: Essa coisa de imagem inversa é ida e volta.

Betty: Isso.

Mega: Tá bom.

Betty: Porque aqui [ela indica V na figura abaixo] daqui eu saio, tem um par. Eu aplico f, eu caio aqui, eu tenho uma terna [indicando o IR^3 na figura 4]. Então aqui eu tô operando com ternas e volto pra cá eu tenho pares [referindo-se a V na figura 4]. Só que aqui se eu tenho uma base, I.i., com três vetores [indicando o IR^3 na figura 4] a minha base aqui também vai ser I.i. com três vetores. Portanto, dimensão três.

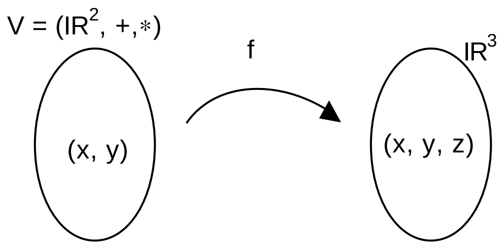

Figura 4

Mega: L.i., com três vetores. Aí você vai ter três vetores em duas dimensões? Isso é o que você tá querendo saber? Três daqui está associado a três daqui.

Betty: Por isso é /

Prof: Você concorda com o que ele disse?

Betty: Deixa eu ver se eu entendi o que ele disse.

Prof: Não, não. Eu vou pedir pra ele refletir o que ele disse? Eu quero saber se você concorda com ele?

Betty: [Risos]

Mega: Eu falei, que você tá falando, três do R2 estarem associados com outros três do R3.

Betty: Sim, só que, o que eu quis dizer é o seguinte, eu tenho uma base no R3 /

Prof: /Péra aí/, ele falou e você concordou. Por isso é que eu tô dizendo?

Betty: Eu concordei com o sentido /

Prof: Vou dizer com o que você concordou, que você falou pra ele. Ele falou assim: - Então quando eu pego de volta, eu vou ter três vetores no R2, dimensão 2, que são uma base, foi isso que ele falou.

Betty: De dimensão dois?

Mega: À volta /

Betty: Dimensão 3 /

Mega: /Dimensão dois/, na volta, se você tá falando que é operação inversa, eu tenho os três aqui, quando eu faço a volta eu vou ter três em R2.

Betty: Isso que eu tô falando pra ele mesmo. Um vetor da terna associado a um par, [...].

Prof: Eu vou pedir pra vocês pararem por um instante, pra eu fazer algumas observações?

Ades: [...] Eu tô entendendo parcialmente, eu tô entendendo o que está escrito. Até achei interessante àquela mudança que ela fez lá [apontando para a lousa] da inversa. Eu entendi, eu acho que eu entendi porque que a inversa voltaria pra dimensão 2. Apesar de pensar que três vetores no R2 seriam l.d. e não l.i., né? Era a dúvida que eu queria colocar, que eu tava vendo. Mas, de qualquer maneira achei interessante, né? A inversa não pode ser diretamente, tem que ser a inversa da operação, pra você voltar lá, entendeu? Mas /

Prof: /Você/ concorda com o que ele falou?

Betty: Não, porque quando eu disse que volta pra dimensão 2, eu não volto, eu continuo na dimensão três. O que eu vou tá fazendo, ao invés de eu tá operando com ternas eu tô operando com pares, quando eu faço essa volta.

Ades: E você permanece na, na /

Betty: /Eu continuo/ com dimensão três. Aí eu vou ter um conjunto de vetores l.i. que vai ser a base desse meu espaço?

Ades: Quais vetores, do R3?

Betty: Ã?

Ades: Do R3, a base continua sendo do R3.

Betty: A base, eu peguei a base usual do R3; quando eu faço essa inversão, eu não sei quem vai ser a minha f. Eu vou ter um conjunto de vetores l.i. que vai me gerar esse espaço V, de dimensão 3. Só que eu não sei quem são esses vetores.

Mega: Você tá associando três pares ordenados, tá certo? Com três ternas?

Ades: Do R2.

Betty: É do R2.

Ades: Você continuaria com dois vetores, com dimensão três?

Betty: Não, na verdade assim, eu tenho três vetores, na verdade são pares. Se esses três vetores forem l.i., linearmente independentes, e gerar todo o mesmo espaço então é de dimensão três o meu espaço. Só que eu não sei exibir, pra você, quem são esses vetores. Eu sei que a imagem inversa dá os vetores de R3 /

Ades: /Mas quando/ você volta, você não volta para o espaço 2?

Betty: Voltei para o conjunto de vetores R2.

Ades: Isso.

Betty: Mas, o meu espaço tem dimensão três. Embora eu esteja trabalhando com par, esse espaço tem dimensão três. Porque, o que vai determinar se eu tenho dimensão três, é o conjunto de vetores que geram o meu espaço. No caso, eu tenho três pares linearmente independentes, aí essa vai ser a minha base.

Ades: Minha dúvida e quando volta com dois.

Mel: Ele volta com a mesma base.

Prof: /Bom/, acabou a sessão, e eu vou dar um intervalo de 20 minutos, tá legal?

Mel: Aí, depois encaminha?

Prof: Depois encaminha, se ninguém propor outro encaminhamento, a gente volta pros grupos.

21 de setembro

Prof: Alguém tem alguma coisa a dizer que estudou, discutiu, pensou, viu, resolveu, qualquer coisa ligada àquela tarefa que era a investigação inicial? Que consta daquele texto inicial. Queria saber se alguém quer focar alguma coisa ou muitas coisas?

Morgana: Bom, nós a princípio, todas as vezes que você coloca algum problema no quadro, alguma questão, a gente fica se perguntando muito, o por que da situação? Se prende muito nesses por quês e sei lá. Em função de tá tentando entender sempre, a gente sai daqui sempre pensando qual vai ser a próxima sexta ou o que ficou daqui. E, eu tenho uma análise da primeira vez até agora, digamos assim, quando você colocou o problema, o primeiro problema nosso, em relação a aqueles espaços. A princípio, nós chegamos assim a pensar que você estivesse, fazendo uma análise de como estava o grau de conhecimento sobre Álgebra do pessoal; e aí matematicamente falando. Aí quando foi colocado o problema, que você jogou sobre uma mini-série, nossa, aí, extrapolou de vez a matemática. Então aí, nós chegamos a pensar por que fazer uma relação desse tipo? O que realmente o professor pensa, quando colocou uma questão nesse estilo? O que ele queria dizer com isso? Será que ele tem uma resposta pronta pra esse tipo de questionamento, né? Então, a gente ficou se perguntando, qual a relação que poderia existir? Até o primeiro momento, nós três aqui, nós não pensamos em decifrar o que era espaço, o que era dimensão, o que era a relação R, do espaço da mini-série com o espaço do problema. E sim, tentar entender a tua posição, o teu pensamento [ela fala olhando para o professor]. Foi assim, o que mais nos deixou assim, questionando, né? E aí eu queria saber também de vocês [falando para a turma], se vocês tiveram a mesma / já passaram por este tipo de questionamento? O que ele quis dizer? O que ele tentou fazer a gente enxergar, ou mudar a direção nossa? E depois eu queria uma posição tua também? [Ela diz olhando para o professor] Se é possível?

Role: Nós, pensamos igual a você. Comecei nessa linha de pensamento nosso, né? Mas, nós, todos aqui, nós procuramos ver se existia alguma questão similar, né? Então, nós chegamos a uma conclusão. Estou falando pelo grupo, se o grupo não concordar, né? [Ele fala se dirigindo a Diva] É que, é uma questão que obriga a gente a estudar bastante. Na verdade, a gente acaba se aprofundando em todo o assunto. E mesmo até esse momento, não percebi uma solução plausível, né? Aceitável, né? Então, essa é uma questão que faz a gente aprender, tentar chegar em algum lugar. Então, você vai avançando, até um momento, né? Quando você percebe, você viu todo o assunto, mesmo sem ter conseguido resolver a questão em si. Então, talvez seja uma técnica, né? Que faz com que a gente realmente desempenhe. A tendência e ter alguém pra ficar ali ensinando os caminhos. Porque, o professor tradicional, ele dá todo o caminho, baseado no método de provas, né? Mas é, eu vejo como professor, né? Que quando a gente dá esse caminho prontinho, fica muito fácil, fácil de esquecer também. Quando é complicado assim, faz com que a gente pense muito, né? E investigue mesmo, tentando chegar a esse objetivo aí. Se existe ou não, eu ainda não cheguei a conclusão. Mas, eu acredito que é uma questão, digamos assim, não seria difícil de ser colocada. Muita gente deve pensar nela, né? Por que ninguém deu uma solução pra isso? Onde é que vai estar essa solução?

Duda: /Eu concordo com você Role/, eu concordo com você quando você diz que é uma questão complexa, que levou a gente a estudar, mas você acha que essa metodologia, a gente poderia adotar com os nossos alunos?

[A fala de Duda, seja qual tenha sido a sua intenção, conduziu a fala de alguns alunos para uma outra direção, em relação à proposta do professor. Os alunos começaram a falar sobre metodologia, ensino, aprendizagem e escola entre outros assuntos. Depois de algum tempo, Mel tenta retomar a proposta do professor]

Mel: [Ela levanta o dedo e toma a palavra] Eu só queria interromper um pouquinho. Que eu acho que a gente tá desviando muito /

Role: /Ah, tá certo/

Mel: Não que, eu acho que, essa discussão é relevante que todo mundo aqui de alguma maneira interessou, né? Eu queria assim, só pra encaminhar, gente. Eu acho que eu cheguei aqui e até perguntei o que o professor tinha encaminhado para a aula. Acho que ele perguntou se alguém pensou no problema, né? Não que isso não seja relevante. Mas aí, eles colocaram o que o, como você chama mesmo?

Ades: Ades

Mel: O Ades interpretou de alguma maneira, acho que seria interessante até eles falarem, porque que eles perguntaram aquilo e se cai no que ele disse mesmo ou não? Assim, só pra gente /

Role: /Ah desculpe/, eu vou encerrar aqui. A conversa surgiu por causa dessa técnica que ele tá usando, realmente uma forma da gente começar a trabalhar em cima de alguma coisa, né? Eu acho que nesse caminho eu não vou chegar a algum lugar. Mas, que tá obrigando a gente a correr atrás. Embora, a gente tá estudando pra isso. E a discussão foi, no segundo grau, isso aí funciona? Difícil /

Mel: /Eu sei/, eu entendi, acho até que é válido. O método em si, desvia um pouco, não sei se todo mundo concorda?

Role: /Quando/ ela tiver trinta anos de carreira, aí ela vai ver o que que nós passamos [ele diz isso sorrindo].

Mel: Eu entendo, eu não sei se entendo, mas, achei que aqui a gente tem um objetivo. Não que / Eu não tô querendo dizer que isso não é importante. Só que, como integrante do grupo eu queria ver se todo mundo concorda em voltar pra aquilo.

Role: Olha, eu até acho, voltando, né? Eu até acho, eu não tô vendo como principal assunto aqui Álgebra Linear, mas aprendizagem [ele levanta o livro da coleção Schaum de Álgebra Linear]. Eu tô vendo isso. Eu tô vendo Álgebra sendo utilizada como um processo para aprendizagem, não importa, poderia ser outro assunto, né? Eu penso assim...

[...]

Pinho: Eu acho assim, que o que a gente colocou aqui, foi mais um conflito que existe, pela própria visão de aluno. A gente tá acostumado com uma forma de aprendizagem, uma coisa e quando a gente encontra uma que leva a gente a pensar de outra maneira, que te dá um problema de uma outra maneira, a gente sente a dificuldade e sente a curiosidade de você descobrir onde que aquilo pode levar a gente. Se aquilo vai levar a gente pra uma outra abordagem, uma outra forma de conhecimento, vai ampliar realmente a coisa. É a gente fica curioso pra saber se aquela pergunta tem resposta também. Talvez, seja um vício isso [...]

[...]

Mel: [Mel tenta entender a questão inicial que a Morgana levantou sobre a tarefa Presença de Anita] O que o professor queria chamar a atenção quando ele colocou a Presença de Anita?

Pinho: A gente colocou isso.

Mel: Ah, vocês colocaram isso.

Morgana: Só um pouquinho, eu acho assim, que no nosso entender, é que a princípio tava tudo direcionado muito aos termos matemáticos e aí quando ele colocou uma outra visão é como se extrapolasse a questão. E fazer você sair da questão matemática ali por um outro caminho, tentar uma outra resposta, entendeu? Então, é parar de seguir um único caminho, parar de tentar descobrir pra que que serve os termos matemáticos. Tentar procurá-los de uma outra forma.

Mel: Então, ontem / pode colocar o que a gente pensou disso? Nós também pensamos nessa relação, né? É ontem, na hora que eu, a Mila e a Betty, nós fomos estudar de novo o problema. Aí sim que a gente entendeu aquela questão da Anita de que dimensão era aquele espaço, porque no fundo a gente tava confundindo os espaços. E aí o espaço que tinha lá é o espaço lugar, enquanto que, o espaço que a gente discutia no problema, é espaço vetorial. E aí, eu acho que é isso que a gente ficava naquilo que ele disse de outras direções. Quando a gente ficava falando de espaço lugar, espaço geométrico, a gente não saia do lugar no problema. Porque, na verdade, a gente tinha que saber de que espaço a gente tava falando e era outro. Então, a gente chegou a essa conclusão; de que, aquela questão foi mais pra falar ó, isso é o espaço de que vocês, ás vezes, estão falando, e esse é o espaço vetorial.

Morgana: A mesma coisa tá direcionando porque foi muito falado dimensão dois, plano, largura e comprimento. Dimensão três, altura, largura, comprimento. Lá foi geometricamente visto. Tá, mas aí falar dimensão quatro, dimensão cinco e tentar ver geometria, geométrico. Isso não consegue, mas, não existe? Então, não faz sentido falar de dimensão dois como largura e comprimento e dimensão três, largura comprimento e altura, entendeu? Eu acho que a gente tava muito indo nessa direção, né? Até vários esquemas no quadro foram feitos, das três retas, né? E a quarta reta tem? E a quarta dimensão tem? E vai colocar mais um eixo? Eixo w? Qual o nome do eixo? Então, a nossa visão foi de extrapolar mesmo, a visão e parar de pensar dimensão dois, plano e dimensão três como volume, como um sólido.

[Após o silêncio da turma, ela continua].

Morgana: A gente gostaria de mostrar um probleminha, pra ver se vocês tentam nos ajudar, né? [Ela lê no caderno sobre a carteira] Ele é mais ou menos assim: “Existe um espaço vetorial em que o conjunto de vetores tem exatamente dois vetores?”

[Depois de um total silêncio da turma, Pinho diz algo para Morgana e sorri, ela então diz].

Morgana: Sem querer tá complicando mais, essa foi uma dificuldade; porque nós estamos vendo nos livros.

[Alguém pede a ela para repetir o problema]

Morgana: “Existe um espaço vetorial em que o conjunto de vetores tem exatamente dois vetores?”

Pinho: Independente da resposta desse problema, acho que, esse problema teve, com a gente, o mesmo efeito do que o problema que o professor colocou. Fez a gente pensar em tudo que se refere a espaços vetoriais, desde corpo de escalares, desde conjunto de vetores, as operações e depois de pegar com ele bastante e achar que tinha chegado numa resposta. A gente foi conferir a resposta do livro. Então, se a nossa resposta era sim, a do livro era não. Aí a gente não conseguiu entender [...].

[...]

Diva: [Inicia sua fala tentando discutir o problema proposto pela Morgana, e na continuação, ela comenta] Aí vocês falaram aí da questão geométrica, né? Mas assim, eu acho que, não sei. Eu acho assim que estudar Álgebra Linear segundo a geometria, acho que não é ruim. Porque, eu acho assim, que dá pra você, pelo menos, tentar entender que que é este espaço aqui. Porque, se não, você fica só pensando no vetor, às vezes, você não vê a extensão do conjunto, né? Olha, eu tô pensando em dois vetores, eu tô pensando em um vetor, não vê o tamanho daquele conjunto, entendeu? O conjunto é grande, não é conjunto pequenininho?

Mel: Eu acho assim, uma confusão que a gente fez, eu acho é que é isso que pra gente dificultou, ficar pensando geometricamente é porque, a gente fazia confusão do que é espaço vetorial e do que é o plano ou, o R2, R3, o conjunto, entendeu? Então, o espaço vetorial é uma estrutura e não aquilo, não aquele, o plano, o R3 /

Diva: /O plano/ tá dentro do que se chama de espaço vetorial.

Mel: Então, e aí assim, a gente falava, achando o tempo todo que espaço vetorial era aquilo. Na verdade, a gente esquecia as operações, né? E é isto que ajudou / que tinha que usar pra poder demonstrar o /

Diva: /Então/, alguns planos, determinado tipo de plano, caem naquelas propriedades. Então aí, você fala, ah não, esse plano é um espaço vetorial. Acho que seria mais assim, né?

Mel: Com as operações, né?

Diva: Pois é, você tem um plano, vale todas aquelas operações e aí você fala, ah não, então, esse tipo de plano, esse plano ele é um espaço vetorial. E aí quando você falou plano dava a impressão que qualquer plano que você pegasse era um espaço vetorial. Não era assim, porque nem sempre vai poder ser todas as operações.

Pinho: É, a dificuldade que eu vejo de se pensar só geometricamente, né? Quando você, por exemplo, ele colocou, a gente tá acostumado a ver o R2 como plano, dimensão dois, né? Quando ele pede pensar numa situação em que o R2 tenha dimensão três, aí o quê significa isso, né? A gente chegou até a estudar dimensão topológica, lá. Mas aí, a coisa que a gente tentou ficar só na parte algébrica, né? Então o que significaria uma situação em que o conjunto de vetores fosse o R2 e tivesse dimensão três? Digamos que existisse. A gente não sabe. Aqui no nosso grupo não sabe. Então digamos que existisse. O que que aconteceria? A gente tinha que encontrar três pares ordenados, três vetores do R2 e que fossem L.I., ou seja, formassem uma base. A gente vê a definição de L.I., ou seja, a única combinação linear desses três que dá zero, que dá o vetor nulo; teria que ser com todos os escalares zero. Então, quando a gente pensa nesses termos, acho que a geometria foi pro espaço [risos].

Mega: Tem uma pergunta também, que nós começamos a estudar ã / cadê a sua colega? [Olhando para trás, ele pergunta para Mel].

Mel: Ela veio, mas saiu.

Mega: Ah, tá. Porque ela tava falando em bijeção e a minha pergunta era se transformar de dois para três, é? Aquela função que ela tava querendo colocar pra gente, se existir aquela função, me garante que eu vou ter uma resposta do R2 no R3? Ou seja, uma transformação linear garante o que o professor colocou pra gente? É possível que R2 seja R3?

Pinho: Pelo o que a gente estudou, se existir o isomorfismo, como ela falou. Se existir essa função, como a situação diz isto, os espaços isomorfos, eles têm a mesma dimensão.

Mega: Então, mas, se eu conseguir achar uma função que vai de R2 pra R3 e volte de R3 pra R2, certo?

Pinho: Que seja linear.

Mega: Que seja linear. Eu posso falar que existe, então?

Pinho: Se aquela função que ela falou existir, a resposta do problema é sim.

Diva: [O que ela diz é inaudível]

Pinho: Posso só contar mais uma coisa que tava acontecendo no nosso grupo? A gente tava meio que convencido de que não. Então, o que que a gente tentou fazer. Vamos tentar uma prova / porque a gente tava convencido de que não, mas, não sabia mostrar que não. Então, vão tentar construir alguma coisa, algum argumento por absurdo. Sei lá, supor que existe, ou seja, se a gente supusesse que existe tal espaço, este espaço seria tal que teria três pares ordenados l.i., uma base com três pares ordenados. Então, a gente tentou fazer por absurdo mas, não conseguimos chegar em nenhum absurdo. Quando a Betty colocou aquilo, a gente achou que tinha achado a solução do nosso problema e chegar ao absurdo seria por aquele caso; supor que era aquela bijeção. Mas, também a gente não chegou.

Mega: Se nós, então, encontrarmos uma função, uma transformação de três vetores em R2 para R3 e depois conseguimos também voltar de R3, com os mesmos três vetores para esse R2, a resposta vai ser sim?

Pinho: Se essa transformação for um isomorfismo, ou seja, for uma bijeção linear a resposta é sim.

Mel: E ontem, a gente ainda questionou que não precisa ser isomorfismo, basta ser bijetora.

Pinho: Eu acho que se for só bijetora não funciona, porque, pelo que a gente viu, pelo o que a gente estudou, lá tinha que: espaços isomorfos tem a mesma dimensão, né? Agora existem bijeções; a gente não conseguiu construir nenhuma, mas a gente acredita existem bijeções do R3 para o R2. Agora a gente não sabe se existe alguma bijeção que seja linear. Se existir uma bijeção linear, ou seja, um isomorfismo, aí a resposta do problema vai ser sim. Aí, o que a gente tava tentando atacar agora, é mostrar que nenhuma bijeção de R2 pra R3 é linear. Mas esse a gente nem começou.

Mel: Porque a gente achou que quando a gente encontra essa função, eu vou fazendo do conjunto R2 em R3 e não do espaço V em R3; V com o espaço R3. E quando eu relaciono através de f, R2 com R3, os conjuntos, a solução é uma função bijetora, nesse caso. E aí, eu não vou tá mexendo com as operações e por isso que a gente não vai, necessariamente, ter uma transformação linear. E é por isso que não teve o isomorfismo. E a gente, tentou provar o que era um espaço vetorial, na hora que a gente faz a inversa. E aí, a gente / já conseguimos ver que só com a bijeção, nós vamos demonstrar todas as propriedades de espaço vetorial, pra aquele espaço V.

Pinho: A gente viu um resultado que era assim: todo espaço de dimensão três é isomorfo a R3. Assim, o resultado era mais geral: todo espaço de dimensão n é isomorfo a Rn. Ou seja, se tem dimensão três tem que existir um isomorfismo.

Mega: O que nós conseguimos verificar é que o R2 vai ser isomorfo a R3, como vocês falaram. A gente leu já bastante, contanto que uma das coordenadas, por exemplo, z, a cota, supostamente, ela seria uma constante. Não precisa ser zero; vai ser 1, vai ser 2, vai ser 3. A gente consegue colocar isso num gráfico, lá também. E nós conseguimos também uma função, a exemplo de transformações lineares em que você sai do R2 e vai para o R3. Até a gente bolou uma função que saísse do R3 para verificar se, se chegava nessa mesma função para R2. E a gente conseguiu. A gente pode mostrar? Agora, isso garante que é transformação de R2? Vocês querem dar uma olhada? [Ele se levanta e vai a lousa e com um livro na mão e começa a escrever] Então, a gente quer colocar aqui pra vocês o seguinte ó: uma transformação linear de R2 para R3, associa vetores v, de seus pares ordenados pertencente a esse R2, com vetores w, da terna em R3 e define a transformação T por / aí ele cita um exemplo [ele escreve na lousa T: $IR^2 \rightarrow IR^3$, T(x,y) = (3x, -2y, x-y)]. Então, ele colocou uma lei, né? Então isso que tá no livro do Winterle, Stenbruch e Winterle. Então, daí ele faz como seria, pegar um ponto, vão pegar o T(2,1) daí eu teria seis, -2 e eu teria 1 [na lousa ele escreve T(2,1) = (6,-2,1). Então, através dessa transformação, ela é linear T e essa terna, né? Bom, depois a gente chegou nisso daqui. Como a gente tava questionando / foi na sexta-feira / como a gente tava questionando ter uma transformação linear e a gente achou essa daqui do R2 pro R3, aí será que a gente consegue no caso da bijetora, voltar? Ou seja, achar uma outra transformação de R3 para R2, não é? Então, daí a gente teria que definir uma transformação [...] M. Agora, que tenha três coordenadas e que exista uma lei, pra transformar essas três coordenadas em duas coordenadas. Então, aqui, eu vou ter que ter um par ordenado. Então, aí a gente imaginou, né? Fazer isto aqui, pra botar ela pra lá, a inversa; tava falando de imagem inversa [ele escreve na lousa: M(x,y,z) = x/3, -y/2]. Então, o que que eu tenho daqui? Se eu pegar esse M desse ponto eu teria o seguinte [ele escreve na lousa: M(6,-2,1) = (2,1)]. [...] Se eu fiz pra esse ponto, mas, esse ponto era um ponto do livro. Daí, nós pegamos outros dois pontos, por exemplo, (4,5), (7,-2) fizemos isso daqui, passamos pra cá, e depois fizemos a volta e a gente viu que a gente conseguiu. Então, nós conseguimos associar três vetores que estariam em R3, com três vetores que estariam em R2. Três pares ordenados que estariam associados para três ternas. Então, agora, a nossa pergunta é: se isso aqui vale? E se isso daqui de repente prova?

Mel: Então, isso aí a gente até lembrou que no começo que a gente viu que aí, tudo bem, a gente fazia isso. Mas, quando a gente tinha que mostrar as operações é que a gente encalhava com as contas. Tudo bem, você montou aí a transformação. Só que aí, você tinha que falar da soma de dois vetores. Aí, no caso, o que acontece do outro lado. E a multiplicação por escalar que é aquelas duas propriedades. E aí, você fez essa parte?

Mega: Não.

[...]

Betty: Minha pergunta é a seguinte: você definiu a transformação; o que que essa definição pode te ajudar pra tá solucionando o problema?

Mega: Então, eu queria exatamente vê o seu questionamento. Porque você falou pra mim assim, se eu conseguir uma função, que eu consiga, que eu possa transformar, né? Daí, vai existir isso daí. Porque você ouviu do seu colega, uma coisa assim, entendeu? Então a gente tava buscando alguma coisa nesse sentido. A gente foi procurar em transformação linear a gente definiu uma função, que essa aqui tava no livro, foi mais cômoda. Mas, quando eu coloquei com você aqui na lousa, eu já tinha definido uma lei para transformar uma coisa em outra, né? O que era mais ou menos análogo. Então, a gente fez isso daqui nessa ânsia, né? De dizer assim, bom, isso aqui é possível; mas isso aqui me garante? Foi isso o que eu não tinha certeza. Agora se você for multiplicar por escalar [apontando para Mel] nós temos aqui multiplicação de escalares, nós podemos expressar isso aqui como combinação linear, desde que você fixe umas constantes aqui /

Mel: /Não/, a única coisa, voltando no problema. Se você usou a transformação você está considerando o espaço R2 e o espaço R3? /

Mega: /Sim/

Mel: E não os dois conjuntos. Porque aí que tá a diferença ela falava de função porque ela pegava o conjunto R2 e o conjunto R3 e aí quando eu queria falar do espaço eu tinha de falar das operações / da multiplicação por escalar e da soma lá. No espaço que eu quero encontrar são as não-usuais, que eu não sei que soma e multiplicação é aquela, já no R3 são as usuais, aí eu vou usar o espaço vetorial R3. E é nessa hora que a gente tinha que demonstrar que acontecia aquilo, era válido a multiplicação por escalar e a soma.

Mila: Você tá assumindo aí R2 como um espaço vetorial.

Mel: E é isso que a gente tá querendo só colocar.

Mega: Eu estou assumindo R2 como espaço vetorial [ele fala, olha as anotações e balança a cabeça sugerindo concordância].

Mel: Só que aí você não acha que, pro problema, num iria pra frente porque se eu considero o espaço vetorial R2, aí você vai considerar as operações usuais, e aí dimensão dele é 2. Só que eu tô querendo um espaço V, que tenha os vetores em R2 e a soma e a multiplicação lá, vai ser outra, né? Porque eu não sei como ela é. E aí a dimensão tem que ser três. Por causa da dimensão ser 3 é que a gente começa pelo conjunto e não pelo espaço. Porque se eu começar pelo espaço com a dimensão do espaço R2 com as operações de R2.

Mega: É, eu daí eu acho, não sei. Eu acho, a minha posição é mais pra não /

Mel: /Você/ entendeu? Entendeu?

Mega: Eu consegui absorver um pouco sim, do que você está querendo dizer. O que a gente verificou só, nas várias questões sobre isomorfismo, é que o R2 seria / a gente até escreveu aqui; “um subespaço R2 isomorfo a R3”. Então a gente falou que o R2 seria um subespaço de R3... Subespaço. Daí, a gente até mostrou / a gente achou o seguinte, o que seria isomorfo. E depois a gente divagou um pouquinho até pra R4. Que ele fala quando é isomorfismo. Quando uma das coordenadas for uma constante, não precisa ser necessariamente zero. Então, eu tenho o R3 aqui, [ele esboça na lousa o que representaria os três eixos coordenados] aqui eu teria um R2, um subespaço [ele indica o plano formado por dois eixos]. Se eu tomar z igual a 1, a gente tem o outro subespaço [ele esboça o que seria um plano paralelo ao anterior furando o eixo perpendicular ao plano dado]. Então, isso aqui seria pra nós é isomorfismo. Porque, várias vezes o livro fala que, seja uma constante. Ele sempre fixa uma constante de R2 pro R3. Então, eu fiz isso daqui. Mas, isso bastaria fazer também / eu tô tomando z, poderia fazer pra qualquer outras duas coordenadas, ou seja, ou x ou y ou z, sejam constantes.

Diva: Pra z ser igual a uma constante, vale as propriedades de soma e de multiplicação por escalar?

Mega: Então ele [referindo-se ao autor do livro] faz umas afirmações que sim, vale.

Alguém pergunta: [A pergunta é incompreensível]

Mega: Isomorfismo, pelo o que a gente entendeu, é que tem a mesma forma, né? [Ele repete] Pelo que a gente entendeu, é que tem a mesma forma. Então, o R3 só vai ter o mesmo formato de R2 se for isomorfo, né? E ele fala aqui [ele pega o livro de Álgebra Linear] que se eu colocar uma constante, eu tenho isomorfismo [ele começa a folhear o livro enquanto a Diva toma a palavra].

Diva: [...] Se quando você colocar uma constante, se os vetores desse espaço que você tá formando, é, eles vão formar um espaço vetorial? Essa aí é que tá sendo a nossa dúvida. Porque, a gente até fala assim, pode até existir essa bijeção, tá? Mas, esses vetores, eles tão determinando um espaço vetorial? Aquelas oito propriedades lá, da soma, tal; vale pra esse caso cujo z é uma constante?

Mel: Mas ele vai demonstrar, né? Tem que demonstrar todas elas.

Diva: Pois é, isso aí é que eu tô perguntando? Porque, se não valer, então, por exemplo, z igual a constante não vai ser um espaço vetorial.

Mega: Não vai ser um espaço vetorial?

Diva: Por exemplo, pega, por exemplo, o caso de um vetor que tem z igual a uma constante, pega dois vetores que tem z igual a uma constante, por exemplo. Como ficaria quando você somaria esses dois vetores?

Mega: Somar?

Diva: Dois vetores de z igual a uma constante.

Mega: Se dois vetores tiverem em z a mesma constante, eu somo. Agora, se esses dois vetores tiverem em z, constantes diferentes, lógico, aí não dá pra fazer isso aí.

Diva: Quem vê você falando parece que pode, por exemplo, tem um vetor do R2 e o correspondente dele tá lá em z igual a uma constante, é isso que eu tô perguntando. Do jeito que você falou, né? Não parece que é isso? Você tá falando assim, você tem os pares lá, os vetores lá em R2; aí pra cada um vetor lá em R2, existe um z igual a uma constante, um outro vetor correspondente a àquele, é isso, a idéia sua?

Mega: Não, eu só eu só defini assim / eu só peguei / eu só fiz o seguinte, eu só peguei a definição de isomorfismo, entendeu? E daí ele falou [o autor], z igual a zero, né? E daí, eu defini quando que vai ter um isomorfismo de R2 pra R3. É só isso que eu falei. Agora, olha, pra mim é, o que vai gerar R2 e R3 é o que eu já falei também, precisa de vetores que sejam gerados, que sejam l.i.. Os outros vetores vão ser todos combinações lineares.

Diva: Você tá falando assim; z igual a zero, né? Se eu pensar em z igual a zero e pensar no R2, neste caso, acho que você pode, sim, definir, sim isomorfismo. Porque se você pensar bem, parece que os dois estão em R2. Parece, não sei. Parece que os dois estão em R2. Então, cada ponto de x,y, estaria correspondendo a x,y,z. Então, isso aí, talvez fosse verdade. Mas, se o z for uma constante qualquer, z igual a 1; isso aí é que eu tava perguntando, porque você colocou aqueles pares lá /

Mega: /Eu acho que/ sim, se o z for uma constante pra todos esses outros vetores. Se todos os meus vetores forem definidos como x, y e 2 então eu posso dizer que tem isomorfismo.

Diva: Mais ai, esse isomorfismo é que tá me deixando [...] esses vetores, aí eles formam espaço vetorial? Essa é que é nossa dúvida?

Betty: Posso fazer uma pergunta pra vocês dois? O que que defini um espaço vetorial? O que que eu preciso ter, pra ter um espaço vetorial?

Mega: Pra mim, pra eu ter, além das propriedades aditivas, multiplicações por escalares e tudo mais, é que eu tenha vetor v, uma base, que seja, que eu possa / que nem a gente tomou a base canônica, um, zero, zero, um. Então, eu tenho esses geradores, esses dois vetores geradores e daí, os outros vetores podem ser são expressos através de combinação linear desses dois. Daí, isso que a gente viu em base e dimensão.

Betty: Mas, pra você definir um espaço vetorial, você não precisa, ainda, tá falando de base, né? Então, no caso você não precisaria tá se preocupando, a princípio, com os vetores l.i., né?

Mega: Sim, aí se verificar as propriedades, né? Contanto que verifique tal propriedade, tal propriedade, tal propriedade, então, aí sim, fica um pacote.

Betty: As operações?

Mega: As operações, ele fala das operações sim. É que depois a gente vai andando um pouquinho mais, define base e a gente tenta amarrar alguma coisa. Mas, se satisfaz as operações, então, tá bom [ele volta para o seu lugar].

Mel: Ontem, a gente ficou discutindo por um bom tempo de novo vendo isso aí, né? E a gente até pediu de novo a ajuda do Rodrigo, pra resolver a questão de que a gente não conseguia chegar a conclusão, se era ou não isomorfismo. Se tinha que ser transformação linear ou bastava ser função. E aí, ele deu lá a resposta dele e a gente só não acabou de demonstrar. Mas, a gente queria mostrar porque a gente falou um monte ontem. Pode ser? E a gente ficou tentando escrever a demonstração, né? Fiquei assim; o que que eu preciso que que eu tenho que ter, porque se não a gente se perde [...].

Prof: Só falar uma coisa só eu, agora, eu vou fazer o intervalo, a gente retoma depois, tá bom?

[Após o intervalo o professor retoma fazendo uma pergunta ao Mega]

Prof: Perguntar o Mega se ele pudesse ler o trecho em que ele fala sobre a questão do z constante serem isomorfos ao R3. Só que ele lesse o texto que fala isso.

Mega: Tô achando.

Prof: Eu achei que, aquela hora que você abriu o livro, eu pensei que tivesse na página, né? Mas, não é nada que precise agora. Mas tá claro qual é a questão? [Ele pergunta a turma] Quando ele fala aqui [ele aponta para a lousa].

Mega: É, deixa eu explicar uma coisa. Aqui o livro, ele fala z igual a zero. Daí, nós é que pensamos, na segunda-feira que nós nos reunimos, que se valia isso para z igual a zero, que eu pudesse tomar, se ele falou que z igual a zero uma constante, eu pudesse tomar uma outra constante. Então, isso foi nós. Foi de leitura nossa. Nós, daí porque aí a gente fez um primeiro desenho ali para z igual a zero e depois que a gente fez pra z igual a zero. Mas eu posso fazer isso aqui [faz um gesto com a mão] e elevando em 1, para z igual a 1. Como, ficaria para z igual a 1, z igual a 2, e foi nosso esse desenho.

Prof: Isso esclarece, porque eu queria ver como é que disse isso no texto. Mas, se vocês não leram isso no texto, então, agora, pra mim, tá esclarecido. Bom, então, por favor.

[O professor faz o convite ao grupo 1 para falar à turma]

Mel: Então, a gente começou colocando o que a gente / a gente queria saber se era possível encontrar um espaço vetorial, que tinha os vetores em R2 e tinha dimensão R3. Então, a gente chamou este espaço de V, né? [Ela escreve na lousa: V = (IR^2, ⊕, ∗)]. Então, esse era o espaço R2 de vetores, com as operações não-usuais, que eu não sei quais são. Então, aí a gente fez referência ao que você tava falando, né? [Ela vai para frente do diagrama de Venn, feito na lousa, onde está representado o IR^2 e o IR^3, vide figura 5 abaixo] Na hora que a gente fala dessa função, a gente vai considerar só o conjunto R2 e não o espaço, agora. Por isso eu só podia falar de função, por enquanto, não de transformação. Então, eu tenho que encontrar três vetores, que vão ser a base que gera esse espaço. Então, os vetores v_1, v_2 e v_3 tal que [ela escreve na lousa: $v_1 = (v_1', v_1'')$, $v_2 = (v_2', v_2'')$, $v_3 = (v_3', v_3'')$]. Tá, e aí isso aqui a gente vai ver depois que é a base que gera esse espaço. Então, nós vimos que pra fazer essa relação / pra chegar nessa conclusão a gente tinha que ter uma função bijetora, né? Pra que tivesse um / meu espaço tivesse dimensão três, a gente tinha que ter essa função que levasse três vetores [de V] em três vetores do R3. E, aí, se ela é bijetora, a gente tinha f^1 aqui [vide figura 5]. Agora comecei a me perder um pouco. Eu tenho que agora, a gente vai ter que fazer os vetores. Era o v_1 e v_2 mesmo que a gente pega, né? [Ela pergunta para a Betty].

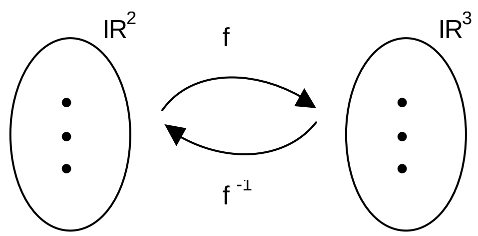

Figura 5

Betty: Isso.

Mel: Mas aí eu posso falar de a,b / essa é a operação do nosso espaço que agora eu vou falar dele [ela diz isto enquanto escreve: (a,b) ⊕ (c,d) =]. Isto aqui é o mesmo que [e escreve (a,b) ⊕ (c,d) = f^{-1}(f(a,b) + f(c,d))]. Tá, porque a inversa é que volta nesses mesmos dois vetores que tô tomando aqui.

Betty: Quando eu escrevo isso [ela indica a adição definida na lousa por Mel], é o mesmo que eu estar operando em R3, com operação usual que eu conheço e através da inversa dessa função, eu acabo operando em R2. É como se eu pegasse o conjunto R3, desse uma nova cara pra ele. Porque, se existe uma bijeção entre R2 e R3, então, cada elemento corresponde a um outro. Cada elemento de R2 corresponde a um elemento de R3 [ela indica na figura 5].

Mila: /De V/

Betty: [Olhando para Mila] Não, tô pensando nos conjuntos, de R2 em R3. Então qual que é a idéia? Como é bijetora, eu conheço R3 com as operações usuais e ele tem dimensão 3. Por isso é que a gente tomou ele. Porque a gente conhece o conjunto que tem a dimensão 3. Então, se eu sei operar aqui [ela indica o IR^3 na figura 5] e eu quero um conjunto com vetores de R2, eu vou dar uma nova cara pro R3. Fazendo o quê? Definindo as operações de modo que esse conjunto [ela indica o IR^2 na figura 5] basta ter dimensão 3.

Mel: Porque, se fosse as usuais continuaria tendo dimensão 2. Por isso é que eu tô falando pra ela dessa outra operação.

Betty: Isso. Aí /

Mel: /Falta/ a multiplicação por escalar.

Betty: Aí, pra definir a multiplicação a gente define assim [ela escreve na lousa: $\alpha.(a,b) = f^{1}(\alpha.f(a,b))$]. Então, definindo dessa forma, a gente vai verificar aquelas oito propriedades de espaço vetorial.

Mila: Agora, era bom colocar Betty, aquela dúvida que a gente ficou discutindo quase duas horas. Porque a gente pensou assim, que a bijeção podia tudo, né? Então na hora que levasse, que a gente tava ali no R3, e que voltasse pro R2 não precisasse mostrar as oito propriedades, não foi isso? Que a gente ficou na dúvida.

Betty: A gente tava com uma dúvida quando a gente define dessa forma [ela indica a adição escrita na lousa por Mel], por f ser bijetora é como que a gente tivesse mascarando o R3. Poxa, se acontece tudo com o R3 e existe essa bijeção então a gente não precisa demonstrar as oito propriedades. Porque, se vale as oito propriedades pra R3 com as operações usuais, então, vai valer as oito propriedades em R2 com as operações que eu defini dessa forma [ela indica novamente as operações escritas na lousa] Porque eu tô usando a função f, que é bijetora, pra definir as operações.

Mel: Porque aí quando eu somo com a usual, eu somo com a não usual, do lado de cá. Então, tudo o que eu tô fazendo aqui [ela indica o IR^3 na figura 5], na verdade, é o que eu tô fazendo aqui [ela indica o IR^2 na figura 5]. Então, a gente acha que, se pra R3 já tá demonstrado todas as propriedades e já sei que ele é um espaço vetorial com as operações usuais e através dele eu consigo fazer tudo aqui no meu espaço V, com essas não-usuais do mesmo jeito que eu fiz aqui, então, a gente tava questionando, já que é assim eu não preciso fazer a demonstração daquelas oito propriedades pra espaço vetorial. Porque se garante pro espaço R3, vai garantir pro meu espaço V. Só que /

Mila: A gente ficou pensando assim, o que garante que na hora que a gente tá somando lá e volta pra cá, que a soma, né?, tá /

Betty: /Que caiu/ no mesmo elemento.

Mila: Que pode cair no mesmo elemento.

Betty: Que vai cair nesse mesmo elemento, né?

Mel: Eu somo ali e eu somo aqui, mais quem vai garantir que o resultado dessa soma vai cair no resultado dessa soma.

Mila: É, e a gente ficou nessa dúvida, ficou nesse impasse.

Mel: É, porque eu não conheço essa função e eu não conheço as operações. Então, a gente ficou nesse impasse de eu simplesmente acho, tá na cara /

Mila: /Não/ gente, eu acho que pode. Aí, ficou naquele impasse.

Mel: Ele foi discutir com a gente e eu achei, realmente que, então não. Porque fica parecendo, assim; pra gente fica claro que um mais um é dois até porque tá visto. Mas, a gente demonstra aquilo, em Estruturas Algébricas. E aí, porque que aqui a gente tem que demonstrar, apesar de tá tão claro pra gente. Não tá garantindo que isso aqui vai obedecer a todas as propriedades. Apesar da gente olhar pra aqui e falar, vai dá tudo certo. Então, mostrar realmente que dá tudo certo.

Pinho: Posso só colocar uma coisa, não sei se responde a pergunta, né? Mas, pelo o que a gente investigou nos livros. Por isso que pra nós a bijeção tem que ser linear. Se a bijeção for linear, você pode fazer esse pulo de um espaço pro o outro com liberdade.

Mila: Mesmo de R3 pro R2?

Pinho: Digamos que existisse o R2 nessa condição, né? Você poderia fazer isso. Porque, tem lá uma coisa lá do tipo, se você aplicar uma transformação linear de uma base, se a transformação é linear, né? O resultado que você obtém é uma base do outro espaço.

Mel: Tá, isso se é transformação, né?

Pinho: Então, digamos que exista /

Mel: /Se a f é uma transformação/

Pinho: É que essa f teria que ser uma transformação linear pra ter essa liberdade, pra poder acontecer isso que vocês falaram. Se eu somar, no R2 vai dar um resultado, se eu somar as imagens dele no R3, vai dar a imagem do resultado dessa; se a transformação for linear a gente acha que sim.

Betty: Então, a gente tava pensando /

Mel: /Por que/ é bijetora. A gente achava isso que você falou /

Betty: Relacionando as operações, né?

Pinho: Porque a linear, ela preserva também, digamos, uma certa forma /

Mel: /É o que/ garante as operações.

Betty: Mas a princípio, quando a gente foi definir, foi utilizar essa f para definir as operações, a gente não tinha operação.

Pinho: O problema é dizer quem é essa f, né?

Betty: Então, essa f, eu só sei que ela é uma função bijetora que associa o conjunto R2 e R3. Então, não sei nada de operação. Então, é a partir dela que a gente vai tá definindo a operação. Por isso é que a gente não fala em transformação.

Mel: Tá, mas, não foi aí que a gente ficou discutindo se era realmente transformação? Justamente por causa de, na hora que a gente chegou; vai ter que demonstrar as propriedades? Aí, se a gente falava que não, a gente falava que não, por causa da bijeção. Só que se aí é por causa da bijeção, além da bijeção ela tinha que ter / ela tinha que ser transformação por causa dessa linearidade que ele falou. [referindo-se a fala do Pinho]. Que é exatamente a soma dessas duas vai cair na soma desse sim. Aí, a gente falou, então, tem que ser transformação, né? Foi aí que a gente parou de novo e começou a discutir essa outra coisa. Agora, vai ser transformação ou função?

Betty: Eu acho que, na verdade, eu acho o que ajuda a ver melhor isso aí, é a gente definir a f de R2 em R3 [ela escreve na lousa: f: $\mathrm{IR}^2 \rightarrow \mathrm{IR}^3$]. No final, depois que a gente verifica que vale as oito propriedades, a gente vai ter o quê? Uma T, uma transformação linear, que leva o espaço V em R3 [ela escreve na lousa: T: V $\rightarrow \mathrm{IR}^3$] onde V quem é? É R2 com as operações mais e estrela [ela escreve na lousa: V = $(\mathrm{IR}^2, \oplus, *)$]. E, R3 com as operações usuais, né? [Ela escreve na lousa: $\mathrm{IR}^3 = (\mathrm{IR}^3, +, \cdot)$]. Eu acho que a diferença / eu acho que ajuda a verificar nisso a f / eu não pensei nas operações ainda. Agora, quando eu vou usar os espaços vetoriais, aí sim, eu vou ter uma transformação linear.

Mel: Só que, por que que a gente queria colocar a transformação antes.

Betty: Hum, Hum.

Mel: Quando surgiu a discussão do fato: eu preciso demonstrar as propriedades de espaço vetorial. Porque, por exemplo, se eu considero só a f e demonstro as propriedades, pronto. Eu não precisava, por enquanto, ser a transformação. Mas se, eu quero / como era aí? / se eu não quero demonstrar todas as propriedades eu tenho que falar que é uma transformação. Se eu não quero demonstrar todas as propriedades, eu tenho que falar que é uma transformação justamente porque ela vai levar /

Betty: Porque levava as operações / porque relacionava as operações em R3 com R2. Então a gente tava nessa dúvida.

Mel: Só que aí a gente não encontrou garantia, entendeu? Que levava. E por quê? Por que não tinha certeza se ia levar. Mas, o que ele tá falando é, se for transformação leva: é isto que ele quis colocar [referindo-se ao Pinho]. Por que que a gente não falava que era transformação? Porque, a gente começou simplesmente falando que era função, foi isso. E aí a gente falou, se for, transformação não preciso demonstrar. Aí a questão foi quando teve a intervenção do Rodrigo mesmo.

Betty: Pra gente o fato dessa f ser bijetora e valer as oito propriedades para R3 carregava todas as propriedades pra esse conjunto que eu tava querendo definir, esse V. Então, pra gente não precisava definir. E essa f que era bijetora passava a ser uma transformação linear.

Mel: Passava a ser quando considerava /

Betty: /É quando/ eu considerava que essa função bijetora tinha, digamos, o poder de carregar as propriedades de R3 para esse espaço que eu tava definindo.

Mel: Isso. Mas, nada me garantia que existia isso. Só que aí é que tá, o por quê disso. Se eu tô falando que existe uma função, a gente ficou questionando por que que não pode ser transformação?

Betty: Isso.

Mel: E aí é que aquele Teorema de Cantor, né? Que a gente desconhece, mas que vale pra gente. Fala aí [ela fala dirigindo-se a Betty].

Betty: O que a gente discutiu foi o seguinte, quem me garante que existe essa função bijetora? Eu não sei explicar porque, mas o Rodrigo me garantiu que existe um resultado, que me garante que existe uma função bijetora de R2 em R3. E essa função é justamente a função de Cantor.

Mel: É que falava de R em R2. Do intervalo num quadrado de lado um. Então, a gente podia fazer o R2, né? O quadrado levado num cubo.

Betty: De zero, um, vai / o intervalo fechado zero, um, no quadrado de lado um, a gente estende isso pra todo o plano, então, tem uma bijeção de R em R2. Agora, a gente faz a mesma coisa pro R3. Então, essa é a idéia, mas a gente não sabe falar sobre esse resultado, né? Única coisa que a gente sabe é que ele existe.

Pinho: Fica a pergunta, essa função então, seria um isomorfismo?

Betty: Seria uma função bijetora.

Pinho: Somente bijetora?

Betty: Função bijetora. Deixa eu só / a idéia aqui foi a seguinte: eu tenho um intervalo fechado zero, um, em R. Esse resultado me garante o quê? Que existe uma bijeção, do intervalo fechado, zero, um, em R2, tá? Se vale pra esse intervalo, vale para zero, dois fechado em R2, né? Então, eu posso estender o resultado pra todo plano, né? A reta tem uma bijeção em todo plano. Agora no espaço, o que que acontece? Eu vou fazer a mesma coisa: existe um intervalo fechado, que leva esse quadrado, num cubo de lado um. Então, quer dizer, isso aqui estendendo desse quadrado pro cubo eu vou estender do plano pro espaço, né? Que é o que vai me garantir que existe essa bijeção. Mas, a gente só sabe que ele existe, a gente não sabe falar nada mais sobre isso. E por isso é que a gente não defini essa função que a gente tomou como sendo bijetora. Porque é uma função altamente descontinua. Porque a gente não consegue definir uma função que leva esse intervalo nesse quadrado, como vai ser a cara dela. É por isso que a gente não deu uma lei pra ela. Que ela existe, ela existe.

Mega: Nós estávamos conversando na segunda-feira e a Muiara falou de uma brincadeirinha que ela fazia com os alunos, mas, que era levar de um plano para um /

Muiara: Sólido.

Mega: Sólido, né? Então, seria pegar, por exemplo, uma folha, né? E fazia girar em torno do seu eixo. A gente tem aquele sólido de revolução. Daí, eu tenho um plano gerando um sólido.

Muiara: Que é a segunda parte que você falou aí, o quadrado, gera um cubo. Que é a mesma maneira. Qual é essa função? O brinquedo, entre aspas, você gira meio círculo, que é uma figura plana, que forma uma esfera. Sabe aquele brinquedo assim /

Azul: /De puxar/

Muiara: De puxar /

Mega: /Papel/ que você enrola prendendo no fio e depois puxa. Que seria, os sólidos de revolução, né? Se você pegar o triângulo, você vai gerar / um triângulo retângulo, ce vai gerar um cone, e assim vai.

Muiara: Mas, a pergunta acaba sendo a mesma: como funciona isso, né? Que é isso que você tá fazendo? Como funciona isso? Mas, é análogo, né?

Mel: Não, então, aí eu acho assim, que a gente só usou o fato da gente saber que existe. Porque aqui, pra resolver o nosso problema, a gente não precisa ficar sabendo /

Betty: /Quem é/ essa função.

Mel: Quem é a função. Se a gente sabe que ela existe, então, basta eu mostrar o que eu tô querendo, que é a existência desse espaço.

Muiara: Os ingredientes a gente tem, mas tá faltando, a máquina que faça isso.

Mel: Mas, eu tô tomando esse aqui, sabe como? Como aqueles teoremas que a gente demonstra e que usa outros teoremas e usa outros axiomas, entendeu? Então, eu só vou usar disso.

Betty: A propriedade existe.

Mel: Existe e é válido. Então, eu vou usar, né? Foi isso que a gente pensou.

Muiara: Presos assim à Geometria Física, e não sai.

Mega: E a gente se questionou também o R4, no grupo, né? E daí, quando a gente viu do R2 pro R3, né? Pega o R2 e vai correndo num eixo, a gente pensou do R4 seria alguma coisa sei lá, pra nós, conjecturas, de pegar o R3, vão supor, colocar num recipiente e fazer esse recipiente correr num trilho, pra gente ter o R4. Se fosse possível visualizar isso aí. Mas, como eles falaram, não é legal isso aí, não é usual isso aí. Por isso é que a gente pára no R3.

Mel: Mas, outra coisa que eu queria só falar /

Pinho: /Por favor/, digamos, que você tenha direitinho como é que é essa função. Se ela é uma bijeção, ela vai ter inversa. Então, tenta ver se essa inversa funciona, ou seja, se ela funcionar / você colocar essa f como sendo a inversa /

Betty: /Da operação/

Pinho: Da operação. Se você conseguir mostrar todas as propriedades das operações de espaço vetorial pra essa f sendo essa função?

Betty: Então, na verdade, a gente não tá procurando propriedades para essa f.

Pinho: Não, pra operação que você definiu. Você definiu a operação, você tinha a operação como sendo / faz a operação na realidade no R3, pega o resultado e volta pro R2.

Betty: Isso.

Pinho: Então, se você conseguisse, sei lá, explicitar, direitinho, quem que é essa f e f^{-1}, acho que você pode verificar se vale as propriedades.

Mel: Não, aí a gente achou que não precisa nem vê quem é a f pra demonstrar as propriedades.

Betty: Sabe porque, eu não sei se eu tô entendendo o que você tá querendo dizer? Se eu sei quem que é essa f e f^{1} eu sei o que que é isso. Então, eu sei o que é isso. Então você me diz que eu não preciso demonstrar as propriedades.

Pinho: Não, eu tô dizendo, se você verificar se vale as propriedades, pra essa f /

Betty: /Pra essa f/, sem pensar nisso aí.

Pinho: Não, tô pensando nas duas coisas, tanto na f quanto na inversa dela.

Betty: Que é isso [ela indica na lousa: (a,b) $\oplus$ (c,d)].

Pinho: Que é isso, daí. Se você conseguir demonstrar que vale todas as propriedades de espaço vetorial, mais para isso você ia ter que verificar isso, teria que ver direitinho quem que é essa função.

Betty: Então, mas acho que nem precisa ter essa função. Porque a gente, a partir disso, já consegue verificar as oito propriedades.

Pinho: Aí você tá supondo que a função existe, não é?

Betty: Então, a gente tá supondo não, a gente tomou que existe, pelo resultado.

Pinho: Hum, hum.

Betty: Então, a hora que a gente vai demonstrar as propriedades, a gente não vai precisar da lei dela. Se tivesse, eu acho também que o problema seria resolvido do mesmo jeito. Mas, quando a gente tenta provar as propriedades é indiferente, da maneira que eu definir aqui.

Mel: Porque vai tá sempre voltando, né? Quando demonstra as propriedades a gente sempre vai usar isso aqui [ela indica o diagrama na lousa].

Pinho: Não, pra verificar justamente se vale, pra essa função, aquilo que vocês estavam se perguntando, né? Quando você soma /

Mel: /Isso que a gente demonstra/

Pinho: Por isso que assim, só é claro pra mim que funciona, se essa função for linear.

Betty: Então, mas pra mim a necessidade de tá demonstrando é o seguinte, eu somo esses dois caras, dá esse aqui e eu somo esses dois, dá esse aqui [ela sugere que dois vetores tomados em R3, dá um vetor de R3 e dois somados em V, o resultado está em V; ela conclui]; quem me garante, que esse vai corresponder a esse?

Pinho: Se a transformação for linear isso vale.

Mel: É isso que a gente falava só que /

Pinho: /Agora/, se a função for simplesmente uma bijeção, isso já não é garantido, né?

Betty: Então, mais você tá falando /

Mila: /Porque/ a bijeção só, não leva.

Pinho: É, não, ela leva e traz.

Mila: Ela leva e traz, né?

Pinho: Mas, não necessariamente, desse jeito, né? A linear eu tenho certeza, a soma daqueles dois /

Betty: /Sim, só que/, na verdade, aqui, quando eu tô pensando nessa função, eu não tô nem pensando na soma. Então, como eu vou poder tá associando esse elemento a esse? Se cê tá na transformação linear, isso vale. Mas, aqui eu tenho um conjunto um monte de coisa, do tipo, que esse elemento vai tá associado a esse. Mas eu não tô relacionando soma.

Mel: Porque, pra fazer tudo aquilo lá, a gente não vai precisar saber verificar que a soma tá lá, entendeu? Pra demonstrar todas as propriedades aqui de espaço vetorial, eu não vou precisar usar isso / eu vou precisar da transformação, eu não vou precisar do isomorfismo. Eu não vou usar a soma das funções pra ver se chega, entendeu? Pra demonstração das propriedades, eu só uso a f e não uso a soma das efes. A gente consegue demonstrar todas, sem ter que ser transformação linear.

Betty: Na verdade, você disse que acontece aquela correspondência se for uma transformação linear. Mas, quando eu tô falando da f, esse fato, pra mim, não importa. Isso só vai me importar no final do resultado, se eu quiser saber se existe um isomorfismo entre os dois espaços.

[Alguém pergunta]: Então, também não importa o resultado da f?

Betty: Não, importa. O que eu tô querendo dizer é o seguinte, o fato de eu tá associando os elementos por uma operação, quer dizer, tô somando dois elementos em R3, tá me dando um outro. Esse elemento, eu não tô querendo associar com o elemento de R2. O que eu tô querendo associar é apenas elemento com elemento, independente de eu ter a cara da f, ou não.

Mel: O que ele quis associar é na verdade o que ela tá querendo, entendeu? Eu acho que aí é que tá a questão. A gente sabe que existe a f por causa disso aqui que a gente viu agora, de Cantor. Só que a transformação a gente não sabe, entendeu? Por isso que eu vou usar só a f e demonstrar tudo pra f.

Betty: Então, mas, eu vou demonstrar porque as operações, pra mim, não tá importando no momento. Na verdade, eu nem tenho elas. Então, quer dizer, se eu tenho um conjunto aqui, cheio de elementos e aqui não importa as operações, eu só tô associando elemento com elemento. As operações eu vou tá definindo depois em função dessa função. Usando essa função, é que tá relacionando cada elemento.

Mel: Mas, é que, o que eu queria dizer, é que se eu soubesse que esse era transformação, eu matava essas operações.

Betty: Então, mas não tenho as operações. Eu não tenho, eu não tenho como saber das operações.

Pinho: Mas você pode ter por essa correspondência se a soma comuta, se é associativa /

Betty: /Quando/ eu tô nesse conjunto /

Mel/Betty/Pinho: [Falam ao mesmo tempo]

Pinho: Pela forma que você definiu essa função você tá dizendo, como é que eu vou somar no R2?

Betty: Tá.

Pinho: Eu vou somar no R2 assim, vou pegar a imagem desse outro no R3, eu vou pegar a imagem desse outro no R3, vou somar no R3, vou pegar o resultado do R3, que dá como resposta da soma, pra imagem /

Mel: /Só que/ na verdade a gente não sabe qual é essa soma.

Betty: Desse jeito que você tá falando, a gente supõe que isso acontece porque a função faz essa correspondência. Mas, pra definir a operação, a gente não tem certeza, se ela fez realmente isso, se isso aqui vai me definir o espaço vetorial [ela indica na lousa as operações].

Pinho: Aí eu digo pra você, se essa funçãozinha, for uma função linear, vai funcionar.

Betty: Então, mas o que eu tô querendo dizer /

Mel: /Mas/, se eu falasse que era linear eu tinha que saber o que fazia essas operações. Qual era a cara e eu não sei.

Pinho: Vocês não têm essa função?

Mel: Não, a gente não tem as operações, só que para falar da linearidade eu teria que ter. E aí eu tinha que buscar, mas não tem como porque não tenho as operações.

Betty: Na verdade, eu tô dizendo o seguinte, se você tem esse conjunto, você tem o R3, tá? Um conjunto com (x,y,z) onde cada elemento tá em R. E aqui, (x,y); tais que x,y também tá em R. Só que você não sabe isso aqui [ela escreve na lousa x+y], nesse conjunto [referindo-se a IR^2]; você não sabe como relacionar. E a principio, se eu não falar que eu tô usando a operação usual, você não sabe também, o que isso vai me dar, entendeu? [Ela escreve na lousa: x+y; agora, referindo-se a IR^3] Por isso, é que eu não posso tá pensando em transformação, ainda, porque eu só tô olhando pro conjunto. Aí depois é que eu vou definir aí sim, eu vou definir usando essa função e essa função, não tá usando a operação. Não sei se?

Pinho: Deixa eu pensar um pouco mais.

Mel: Porque, o que você falou / caiu de novo, porque pra eu falar que essa função é linear, você tem que falar assim, se ela for linear eu vou garantir que a soma aqui caísse, certo? Só que pra eu falar que ela é linear, pra eu falar que a transformação é linear, eu tinha que saber o que essa soma e essa multiplicação tão fazendo, dessa f, dessa f que você tá falando que é linear?

Betty: Na verdade, o que que é uma transformação linear?

Pinho: Hum, hum.

Mel: É, então falta isso, mas você não tem que obedecer aquilo, por exemplo [ela escreve na lousa: $f(a+b) = f(a) + f(b)$ e $\alpha.f(a) = f(\alpha a)$].

Betty: Agora, quando você tá verificando isso, você concorda que você tem a operação de soma que você conhece. Então, você tá associando f da soma /

Pinho: Hum, hum.

Mel: /Só que aqui/ tá a soma que eu não sei, né?

Betty: Então, da transformação você sabe /

Mel: /Da transformação/ eu tenho que saber, entendeu? Não tenho que saber?

Pinho: Não, porque assim, pelo que vocês escreveram na lousa, eu tô entendendo que vocês definiram uma operação de soma.

Betty: Aí então, a gente definiu essa operação de soma, usando essa função.

Pinho: /Usando essa soma/

Betty: Mas, na verdade, a gente tá usando essa função, a gente não tá olhando pra ela e pensando numa soma. Não tem nada a ver com a soma. A soma tá o quê? Definido em função dela.

Mel: Olha aqui quem eu tô usando, ó, pra soma usual no R3. Eu não tô precisando saber quem é a soma que eu tenho.

Pinho: Tá, então, vocês estão falando que quando vocês colocam aquele igual ali. Vocês tão dizendo que essa soma que vocês definiram, essa soma com o círculo, ela tem um resultado, né?

Betty: Ela tem um resultado, aí eu tô definindo ela. Como eu vou calcular com essa soma? Eu calculo dessa maneira. Aí o que que eu tô fazendo f(a,b) mais f(c,d) eu sei somar, quando eu considero a soma usual. Agora, antes disso, quem é essa f(a,b)? Se eu tô falando só na função f, pensando em conjunto, eu não tô pensando em tá relacionando os elementos por uma operação. A diferença tá aqui, nessa função. Quando eu tô pensando nela, eu não penso em operação. Eu só vou pensar em operação, a partir do momento que eu olhar pra isso aqui, considerando o conjunto mais as operações, lá eu ainda não pensei. Eu fui definir e aí eu passei a olhar pra elas.

Pinho: Não mas, pensa assim, digamos que você tenha essa função, você tem um exemplo de quem pode ser essa função aí? Aí você pode dizer quem é uma f(a,b) certo?

Betty: Tá.

Pinho: Vai ser um elemento de R3. Quem é um f(c,d), vai ser um elemento de R3. E você sabe somar elementos do R3, você tá considerando as somas usuais, tá?

Betty: Hum, hum.

Mega: Se essa função é uma bijeção, ela vai ter uma inversa, tá?

Betty: Tá.

Pinho: E do jeito que você escreveu ali, você tá dizendo que o resultado da soma é o resultado de você somar em R3 e pegar a inversa.

Betty: Isso.

Pinho: Então, você definiu uma soma?

Betty: Defini. Agora eu defini. Mas depois que eu tinha aquela f.

Pinho: Então, com a f você é capaz de verificar se a soma satisfaz as propriedades. Você sabe executar aquela soma, de alguma forma, né? Você definiu uma soma.

Mel: Mais aí o que você tá falando, eu sei executar a soma de dois elementos, vai ser a inversa daqui da soma. Mas, o que você tá falando seria que? Eu ia saber executar a soma?

Pinho: Digamos, se eu conheço uma f bijeção, aquela soma tá definida, né?

Betty: É definiu.

Pinho: Essa soma tá definida. Então, eu posso verificar se satisfaz as propriedades de /

Betty: /Se ela/ tá definida, sim, posso verificar as oito propriedades.

Mel: Não, ele falou as propriedades de?

Pinho: As propriedades de espaço vetorial, se é comutativa, se é associativa /

Mel: /Ah, isso aí sim/

[...]

Maria Luiza: Como é que é esse resultado que vocês estão usando aí, do Cantor, você pode repetir pra mim? Vocês generalizaram de R2 pra R3, ou existe o resultado do R2 pro R3?

Betty: Existe um resultado que fala, R em R2, R2 em R3 /

Maria Luiza: /Ah, vale/ [...] ah, tá?

Betty: Mas pra enxergar melhor a gente pensa em intervalo do R pra esse [ela indica o quadrado na lousa]. Mas, existe o resultado.

[Betty, então, passa a demonstrar as propriedades na lousa e ao terminar o professor toma a palavra]

Prof: Eu vou parar por aqui [...] vou propor alguns exercícios hoje. Só algumas coisas. Primeiro, eu fiquei pensando sobre aquela primeira pergunta, né? Eu nunca cheguei a pensar. Então, eu queria dizer algumas coisas. Primeiro, é que este é um curso de Educação Matemática. Então, eu gostaria que se vocês fossem pensar, questões desse tipo que vocês colocaram, que vocês pensassem que este é um curso de Educação Matemática. Eu queria observar como é interessante que, o fato / isto é uma coisa que a gente tem discutido bastante, o fato de que, nós [...] não estamos falando nada, aspas, né? Não dizendo nada. Eu queria que vocês pensassem um pouco sobre o que que isso pode tá causando. Eu consigo imaginar várias coisas, mais eu não quero substituir o que tá causando, pelo o que eu acho que tá causando, né? Se eu tivesse que ter uma resposta direta, por que eu coloquei aquela pergunta. Eu tava lá no fundo e eu acho que é legal deixar alguma coisa no fim da aula que sei lá, provoca algum movimento, né? E eu tava pensando o que que eu ia falar. O que que eu ia falar, o que que eu ia falar? E me veio aquilo na cabeça. Eu não tinha preparado aquela pergunta antes, né? Então, eu acho que do ponto de vista da formação do Educador Matemático é mais, pra mim, é mais relevante o fato de que eu tive que tomar uma decisão e que essa decisão não era planejada no sentido de que eu tinha uma lista de perguntas, ou não tenho uma lista de perguntas. E, só tem uma maneira de'u decidir. E de algum modo, sentir alguma coisa sobre o que tá acontecendo. Com certeza, aquilo pra mim, de algum modo tava relacionado ao que tava acontecendo. Agora, eu achei interessante aparecerem duas posições; uma, que era a prevalente, é que eu tinha uma intenção. Intenção, em que direção? Matemática, né? Eu queria dizer alguma coisa, Matemática pra vocês; mas, pra evitar / acho que o Role que colocou, né? Dizer, eu não disse tudo é como eu colocasse vocês na direção, como se eu tentasse chamar a atenção. E aí ia gerar a questão interessante é por que que eu não faria isso diretamente? E uma outra direção é que podia ser que simplesmente eu tivesse me juntando a vocês, né? Me juntando a vocês. Vocês iam falar coisas que / vocês falaram sobre a sensação; o Amarildo (pesq), por exemplo, a sensação que ele tem de que o espaço é azul ou sensações gerais, ou cinco ser barrigudo, o quatro ser narigudo.Talvez aquilo fosse, uma manifestação minha, de como que eu me juntava ao que vocês estavam dizendo, ou estavam sentindo, fazendo, como vocês estavam pensando. Então, era um pouco, uma forma de / seria uma forma de'u descobrir se eu tava falando virado pro mesmo lado que vocês, entendeu? Ou se eu estava dizendo alguma coisa / dizendo não é a frase é a frase com uma pergunta, né? Que ia na direção que vocês foram. Porque, como eu não estava me manifestando antes, a direção era de vocês. Vocês tomaram o total controle. Por isso que até eu comentei, que eu achava fantástico, na aula passada, a variedades de coisas que estavam surgindo, variedade de direções, maneiras de produzir significado. Agora, eu acho que uma coisa importante que apareceu aqui, um comentário que eu não vou lembrar quem falou, na fita a gente identifica, é que eu penso esse curso aqui como um curso de Educação através da Matemática. A questão do conteúdo; o conteúdo tá presente, até de uma maneira institucional: este é um curso de Álgebra Linear.

Mega: Vínculo só.

Prof: Como?

Mega: A Matemática é um vínculo.

Prof: Não, a Matemática tá presente de uma forma institucional, que está escrito lá. A ementa fala de Álgebra Linear, de conteúdos matemáticos e isso não é algo que a gente possa apagar. Agora, o que eu pessoalmente, e esta é outra decisão minha, que depende de como eu enxergo onde nós estamos: isto é uma Pós-Graduação em Educação Matemática, eu sou um educador matemático, vocês já fizeram um curso de Álgebra Linear antes, eu tenho o poder de mudar o curso, de não dar um curso de definição, teorema, demonstração ou um curso que fosse de outro modo, mas, que fosse um curso positivo. Este conjunto de coisas, permite que isto aqui possa estar acontecendo, né? Então, a questão que colocaram será que essa abordagem, supondo que isso é uma abordagem, né? Funcionaria num lugar x, né? Qualquer lugar que seja colocado, na escola, no ensino médio? Bom, isso precisa ser examinado, porque eu não sei qual é a estrutura. Eu sei esse lugar aqui, né? Então, essas assim, eu acho que são observações que eu quis falar. Do ponto de vista de chamar a atenção pras coisas que aconteceu / eu gostaria / eu não vou pedir isso por escrito. Não vou pedir pra ninguém pôr por escrito. Mas, eu gostaria que ficasse na cabeça de vocês, tenta voltar o filme do que aconteceu hoje, tá? Tenta sentar alguma ou algumas horas, volta o filme lá do começo, tenta passar a aula de novo inteirinha, tá? Que que aconteceu? Em que ordem? Não precisa lembrar todos os detalhes, por que isso só a fita gravaria. Que que aconteceu? Aconteceu o quê, depois o quê, aí aconteceu isso, aí alguém chamou a atenção, aí aconteceu isso. O filme dessa aula, só dessa aula. Bom aí eu vou deixar uma lista de exercícios pra vocês, que eu gostaria que vocês fizessem individualmente e entregasse semana que vem. Essa é uma pergunta que vocês vão trabalhar.

Morgana: O professor, só, deixa eu falar um pouquinho. Nós quando nós, quando surgiu esses questionamentos, né? Nós, só queremos dizer assim que a gente tem aprendido muito dessa forma. Tem liberado muitos pensamentos, buscas, em termos do conteúdo propriamente dito. Tem dado pra gente refletir em outras situações e aí acaba voltando as pessoas a perguntar: - Será que isso funcionaria no ensino médio ou fundamental ou superior, o que seja? Então, eu acho assim, a dinâmica, a estratégia que você tem usado, tem muito a colaborar. Eu acho que todo mundo tem a crescer muito. Eu acho assim, desde o primeiro dia até agora, há, houve um crescimento bem intenso quanto a participação que cada um tem buscado numa direção. Eu acho que isso é grandioso. Então, aí quando, nós colocamos as perguntas foi uma pergunta que fugiu. Mas eu acho que a maneira como tem se trabalhado, nossa, tá sendo muito interessante.

Prof: Eu só queria chamar a atenção em relação ao que você está dizendo que, não sei o quanto os outros notaram. Essa preocupação minha em tentar saber pra que lado eu tô falando; só vocês notaram, mas, é uma preocupação que eu tenho certeza que tá presente no funcionamento, na operação mental de cada um. Isso é uma declaração que eu faço, porque eu acho interessante, eu por exemplo, eu vou pensar sobre isso. Por quê, vocês pensaram? Que elementos podem ter feito que pra vocês fosse importante pensar e pros outros não. E aí eu não tô indo na direção dessa coisa de saber o que o professor faz, embora, eu acho até que por aí a gente possa fazer uma análise disso. É interessante a gente pensar o que que ou que papel tem fazer essa pergunta, entendeu? É claro que o Ades falou uma possibilidade. Eu quero saber o que você quer pra eu fazer e me dar bem.

Morgana: Não, não [ela diz coisas retrucando e sorrindo / risos na turma]

Prof: Não, não, mas a gente não pode abrir mão disso, é uma possibilidade real.

Morgana: É uma possibilidade.

Prof: Mas, eu imagino que têm outras. Pode ser que seja realmente pra saber, o porque que eu perguntei aquilo. Embora, você só quisesse fazer a pergunta porque a ansiedade em não saber a resposta era tão grande, pelo menos fazendo a pergunta a responsabilidade vira minha. A responsabilidade pela não resposta passa a ser minha. Se você nunca me perguntasse / você não perguntou, eu não respondo, entendeu? Então, eu acho que é uma / até porque é pontual, em relação aos outros grupos, as outras pessoas, eu acho que é interessante a gente pensar o que que isso poderia, o que poderia ter levado a explicitação. Você já me deram um quadro. Mas eu acho que pra todo mundo vale a pena pensar; por quê os outros não explicitaram? Pra mim é a mesma pergunta, né?

28 de setembro

Grupo 2: Diva, Lufran, Role

Pesq: [Falando do problema proposto] A gente gostaria de saber como ele está pra vocês? O quanto ele andou, avançou? O que vocês pensaram sobre ele? Essa é a questão.

Lufran: Tá meio obscuro ainda. Meio assim, a gente não sabe. Talvez seja por falta de base, conhecimento. Pelo menos, eu sinto desse jeito. Para mim, era uma coisa nova, uma coisa / anos que eu não tinha visto isto. Acho que ficou / já clareou alguma coisa, alguma clareza, muitos conceitos que eu não lembrava e que com o estudo, assim, conceitos matemáticos, de dimensão, de base, de espaço vetorial. Então, eu acho que isso daí valeu muito. No começo foi / eu não entendia nada, não entendia de isomorfis / [ele abaixa a voz e não fala a palavra inteira], de nada, não entendia. Quer dizer, valeu muito, pra mim, nessa parte. Talvez não seja isso que foi sua pergunta?

Pesq: Não, foi /

Lufran: /Foi isso/, foi isso aí. A meu ver foi isso, foi muito / faltava muito essa parte pra mim, conhecimento que / o método, pra estudar também. Talvez a gente não tá acostumado. Eu não tava acostumado, eu nunca estudei assim, foi a primeira vez na vida. Quer dizer, parece que você acaba aprendendo mesmo. É um jeito de você aprender mais. Eu acho que seria assim. Agora perante o curso, foi isso que eu achei, ele tem muita coisa que eu já aproveitei dele. Ás vezes, coisas assim que a gente nem imagina, por exemplo, na vida da gente. Por exemplo, à parte da dimensão que você / dimensão cê achava que dimensão era R2, R3, mas, que dimensão e espaço pode ser muitas outras coisas que você pode associar na vida; é isso que eu acho. Dimensão não é só isso, só a Álgebra Linear. Dimensão e espaço, é muita coisa, é um mundo em si. Vale pra mim, tá valendo muito, muito. Pelo menos, não no problema, mas, me valeu pra mim puxar muita coisa, que tava esquecido na minha cabeça. É isso.

Role: Agora eu falo. Eu acho que o problema é o mesmo, similar do senhor, né? A última vez que eu vi Álgebra linear faz aproximadamente aí, uns 27 anos, né? É, realmente, fica com um esquecimento, né? Quer dizer, e também as aulas eram totalmente tradicionais, né? Ce via isso, via aquilo, aqueles conceitos, né? E não refletia muito sobre aquilo. Então, eu pensei que esse curso fosse, mais ou menos, assim, tradicional. Que fosse rever isso e, realmente, agora, com tempo, de uma forma ensinada e não dessa forma que a gente faz, através de pesquisa. Nós mesmos estamos procurando os caminhos, né? E, em vista dessas questões serem, parecerem, em princípio, serem simples, né? Mas, elas são bastante complexas e faz com que a gente vai dando um passo e percebe que não encontra a solução; mais um passo, procura novamente, vai procurando. Quer dizer, nós estamos acabando por aprender toda álgebra, só com uma questão. Uma questão forçando a gente a ver tudo. Eu acho que a dificuldade nossa aqui, é, talvez, porque nós estamos nos encontrando só uma vez por semana, né? Então, não dá para manter muito contato pra ver o que cada um viu, né? E trocar umas idéias. Mas o pouco que sobra no comecinho [da aula] a gente conversa a respeito, né? Também, ainda, não tenho a solução disso. Talvez, eu ainda tô achando que a solução tá distante. Porque tá, realmente, muito difícil pra gente chegar. Não é uma questão tão imediatista assim, pá, cê resolve, né? Como essas questões que você pega no livro, são rápidas. Mas, eu acho que é uma maneira de obrigar a gente a pensar o tempo todo, raciocinar, investigar e procurar os caminhos [...].

Diva: É, eu acho assim que eu ainda não avancei muito no problema, não? Pelo menos, quando eu aprendia matemática ou esses anos que eu fui professora de Matemática, sempre que a gente vai procurar a solução de um problema, a gente tem que justificar dentro de uma teoria, né? E o que tá dando trabalho nesse problema é que eu não achei o ponto onde pegar pra tentar uma teoria. Aí eu fico pensando assim, se eu saísse desse preconceito de sempre procurar uma teoria. Aí, talvez, eu achasse a solução, né? Ou pelo menos, justificasse alguma coisa ou lançasse alguma. Então, eu acho que é mais é isso. Eu acho que / eu venho discutindo com eles; eu falo, gente? Mas, eu abro os livros de Álgebra Linear, eu procuro alguma coisa que eu não li, alguma coisa que / eu penso assim, ah, eu acho que não entendi isso daí. Aí eu busco outra teoria; mas, isso aí eu já li, eu já vi. Isso aí não funciona pra esse caso, né? Então, aí eu fico sempre buscando a questão da teoria. Então, eu achei que eu avancei, cê entendeu? Me obrigou a rever o curso de Álgebra Linear inteiro. Acho que isso aí eu avancei, né? Fazia um tempão que eu não via essa matéria. Mas, por outro lado, eu acho assim, com relação à solução, eu acho que eu avancei pouco, continua sendo um desafio. Como é que pode uma coisa assim sem resolver? [Risos] Tem jeito não, hein? Então, aí eu acho que a gente vai avançando [...].

Grupo 1: Betty, Mel, Mila

Pesq: Bom, a pergunta que a gente queria fazer pra vocês é: - como é que tá o problema pra vocês, hoje? O que vocês acham que sabem dele? Se vocês acham que já resolveram?

Mel: [Fala baixo e em direção a Betty] Não acabamos, né?

Mila: A gente ainda não concluiu?

Mel: Mas, aquele dia, a gente faltou demonstrar as oito propriedades. Que a gente achou que tinha que demonstrar as oito propriedades de espaço vetorial. Para falar que aquele espaço era um espaço vetorial, e.

Betty: Faltou mostrar também, qual era a dimensão.

Mel: A dimensão era três. Só que /

Betty: /Enquanto grupo/

Mel: Enquanto grupo / mas, a Betty já tinha até feito lá a demonstração das oito propriedades e a dimensão três também.

Mila: A gente ficou assim, parou, parou na questão da dimensão, da transformação /

Mel: /Isso/ a gente sabia que era uma função bijetora mas a gente tinha dúvida se era um homomorfismo. A gente não tinha certeza se tinha que ser uma transformação linear.

Betty: Isso.

Mila: Aí antes da gente provar as propriedades ficou discutindo isso, não foi?

Betty: A gente começou nos conceitos mesmo. A gente assim, é que nem no meu caso fiz uma conta ou duas, mas, os conceitos não tavam claros na minha cabeça. Tipo, ah, será que basta ser bijeção? E a gente usou bijeção pra fazer o cálculo. Mas, e se fosse uma transformação linear? Aí a gente começou a discutir o que que era isso e a gente não entrou nessas coisas da discussão. E a gente falou também / qual que foi aquela dúvida maior, que até a gente pôs na última aula? [Ela pergunta para as colegas]

Mel: Não era, se era transformação ou não? O fato era; se a gente falava que era função, eu não tinha certeza que a função inversa ia dá exatamente no, por exemplo, tinha o f(a) + f(b), não tinha certeza que f^{-1} ia cair em a+b. Por isso que a gente decidiu demonstrar todas as oito propriedades pra falar que é espaço vetorial. Aí só que ficou num porém, a gente conseguiu demonstrar tudo. Se conseguiu demonstrar tudo, significa que f(a+b) vai cair em a+b.

Betty: Isso.

Mel: E aí, portanto, isso era uma transformação. Só, que ainda assim, a gente não tava convencida por causa daquele teorema de Cantor, né? Que ele dizia que, por causa daquela demonstração de Cantor, eu não podia ter uma transformação linear que levasse /

Betty: /É porque/, na verdade, a gente nem tinha soma, ainda, pra tá falando de transformação linear, né? Então, foi daí que a gente decidiu pensar que seria apenas uma função bijetora. Porque a gente tava falando /

Mel: /O antes/, ficou assim, não é uma transformação, porque eu não sei quais são as operações. Só que, na hora que acaba e vê que conseguimos demonstrar, fica aquilo; ah conseguimos, então, quer dizer, que isto é uma transformação. Só que, parece que, não tinha como fazer aquilo lá antes, pelo fato de não saber quem são as operações e até o final a gente não sabe quem é. Só que nós demonstramos todas as oito propriedades, pra aquelas operações desconhecidas, né? Então, ficou só nisso da gente / a gente não conseguiu chegar a uma conclusão, se era ou não era uma transformação linear, eu acho.

Betty: Não, eu acho que a gente chegou /

Mel: /Que não/ precisava falar que era transformação, não é?

Betty: Mas, não tinha como falar nela.

Mel: Então, não precisava falar delas, só que a discussão depois não era que ah, tá levando a inversa [ela fala olhando para Betty].

Betty: Então, é justamente isso, a gente precisava de alguma coisa para definir operações. Que que era a alguma coisa?

Mel: Só a função.

Betty: Só a função.

Mila: A gente só não sabia como era achar, descobrir, a cara dessa função.

Betty: Aí, depois que a gente demonstrou tudo. Aí é que a gente / como os dois espaços tinham dimensão três a gente podia concluir que tinha transformação linear. Mas, não é aquela f que a gente utilizou no começo. Aquela f, só tava relacionando é, conjunto e conjunto, né? E não espaço e espaço.

Mel: É essa, exatamente, foi essa a diferença. Que no começo a gente só transformou conjunto no conjunto, o R2 com R3. E pra ser transformação ele tá falando do espaço V no espaço R3. E aí, a gente não tinha certeza que essa função que a gente pegou, era essa transformação linear de V em R3. Porque a gente só tinha operado, por enquanto, com os conjuntos R2 e R3. Isso é que faltou falar? [Olhando para Betty].

Betty: Eu acho que a maior dificuldade nossa, nesse problema, no começo, foi enxergar R2 como conjunto. A gente tava pensando nele como espaço. Aí é que a gente começou a falar e se R2 for o próprio espaço, né?

Mel: Aí não tinha como.

Betty: Aí a gente passou a ver o subespaço e tal. Aí, é que depois a gente falou não, vamos ver como conjunto, mas pra dar esse salto aí, foi tempo.

Mila: Mesmo o problema dando que era corpo dos escalares, quando a gente tava tentando, resolvendo na lousa, mas gente tava aqui no problema e a gente, nem percebeu.

Betty: R2 conjunto de vetores?

Mila: É.

Betty: E R, corpo dos escalares. Mas, mesmo a gente lendo, R2 conjunto de vetores, a gente não viu como conjunto, a gente via como sendo espaço.

Mel: A gente viu como sendo, ou subespaço de R3 que a gente via que não tinha nada a ver que não era subespaço, ou era, o próprio conjunto R2 e a gente tinha que provar que o R2 podia ter dimensão três e aí a gente não saia do lugar. Mas, aí depois, saiu exatamente nisso que só o conjunto de vetores tava lá. ... Só, né?

Grupo 3: Pinho, Morgana e Ane.

Pesq: O que a gente queria saber, é como vocês estão vendo hoje, o problema proposto pra vocês no início do curso. O que vocês avançaram?

Morgana: [Olhando para o Pinho] Acho que você é o mais indicado, né? [Risos]

Pinho: Você pode fazer a pergunta de novo, só pra?

Pesq: Tá. Porque, a gente tava querendo ver com vocês / foi proposto um problema no início do curso, pra que vocês investigassem, e nossa pergunta é: - O que vocês tem a dizer sobre o problema? E aí você pode ir no quadro, rabiscar, o que vocês quiserem, ou dizer, qualquer coisa.

Pinho: No início a gente tava meio que / tenho que reaprender as coisas, né? De Álgebra Linear, o que era espaço vetorial, definição e tudo, né? Operações e tal. E algumas tentativas que a gente fez, foram até ingênuas, né? De tentar criar esse espaço vetorial. A partir de um determinado momento, a gente começou a acreditar que não existia e a tentar uma prova de que ele não existia. Mas, isto tudo foi meio destruído semana passada, com esse exemplo e os exercícios da lista. E, durante a semana, a gente tentou fazer o exercício. E a gente concluiu que, se existir uma bijeção do R2 pro R3, esse espaço vetorial existe. Porque, a gente mostra / define as operações daquela forma e mostra que todas as operações satisfazem as propriedades de espaço vetorial. ...

Pesq: Só te fazer uma pergunta. Você falou que vocês estavam tentando construir o espaço vetorial? /

Pinho: /Não/, a gente começou, a gente começou tentando fazer alguma coisa, alguns exemplos ingênuos, que a gente tentou. Foi na primeira aula já, né? E a gente viu que não dava certo, né? Depois, a gente começou a acreditar que ele não existia e a tentar mostrar, que ele não existia. Porque, embora a gente acreditasse que ele não existia, a gente não conseguia uma prova que ele não existisse. Na verdade, a gente tentou fazer alguma coisa por absurdo, né? Só que tudo que a gente tentava a gente não chegava a nenhum absurdo, né? E depois, quando a Betty veio com a idéia de isomorfismo a gente até achou, tá aí a solução do nosso absurdo, né? Só que a gente tentou e não chegamos a nenhum absurdo de novo pro problema. E quando o professor passou esses exercícios, semana passada, né? A gente foi fazer os exercícios. A conclusão que a gente chegou, quando viu tudo certinho, é que a moral da história é que se existir uma bijeção do R2 pro R3, e parece que existe, é possível criar esse espaço vetorial. Daquele jeito dado no exercício da lista da semana passada.

Morgana: Isso aí a gente havia discutido hoje já, durante a manhã. É por isso que na hora que você perguntou, se nós poderíamos nos expressar, eu falei nele porque, ele, em função de acreditar que não existisse, de repente? O professor, inverter a história, e agora a gente passar a acreditar que exista, a gente até / [risos]

Ane: É porque antes da Betty colocar sobre a bijeção, a gente achou que poderia ter uma saída através de operações não-usuais. Mas, a gente também não conseguiu né? Chegar? Mesmo achando que poderia haver, mas a gente não sabia que transformação seria essa ou o motivo.

Pesq: Mais alguma coisa?

Morgana: Eu acho que não.

Pesq: Quer dizer então, deixa eu só, pra fixar? Então, vocês estão na seguinte situação, antes dessa lista que ele passou, vocês tinham uma coisa em mente que era acreditar que o problema não tinha solução, é isso?

Alguém: Isso.

Pesq: E agora, com a resolução da lista, a contra gosto / [risos].

Morgana: É.

Pinho: A contra gosto [risos].

Pesq: Vocês agora / mas, este é o ponto que vocês estão hoje.

Morgana: Isso.

Pesq: Ótimo.

Grupo 5: Ades, Maria Luiza, Judy

Pesq: O caso é o seguinte, o professor propôs um problema no início do curso. E vocês estavam trabalhando sobre ele. A nossa pergunta é a seguinte: como é que hoje, vocês estão pensando neste problema? Quer dizer, se vocês já solucionaram, quais são os problemas? É isto que a gente quer de vocês.

Maria Luiza: A gente já tem uma idéia agora, bem mais formada que no início. A princípio, a gente teve a idéia de que seria possível, depois a gente entrou em conflito interno no grupo e disse que não era possível. Logo após a gente voltou dizendo que é possível. E, agora, [inaudível], não é? [Olhando para Judy] A gente até entrou em contato com o professor, na última aula. Que a gente agora pensa em / não demonstramos ainda, mas, mentalmente é possível. Quer dizer, a gente tá mais perto de dizer que é possível.

Pesq: Dá pra você esclarecer esse é possível?

Maria Luiza: É possível? A pergunta era?

Judy: A existência do espaço vetorial.

Maria Luiza: Isso, a gente acha que existe.

Judy: Investigar se existe

Maria Luiza: /Existir/ um espaço vetorial de dimensão três.

Judy: Satisfazendo as condições /

Ades: É, pra mim ficou mais claro, eu não entreguei a demonstração por causa de uma falha na comunicação essa semana. Ela conseguiu fazer. Eu não consegui operacionalizar, mostrar, mas eu pensei muito sobre o assunto. Pra mim, ficou bem mais claro que é possível, né? Tô começando a ver com mais clareza a relação que existe entre o R2 e o R3. Pra mim, na verdade, eu venho de outra área, eu vejo isso de outra maneira, né? O primeiro conflito com elas duas, que são mais matemáticas, é com / não / a partir de propriedades você consegue ver. Você demonstrou a propriedade, então aquilo é verdade. Eu vejo isso de outra maneira, eu tento compreender aquilo de uma forma mais visual, ou mais interpretativa, talvez, né? Eu quero enxergar que aquilo é possível. E foi nesse sentido que eu comecei a caminhar. Agora, essa semana eu vou me empenhar em transformar isso que eu tentei formular, agora, que eu chamo de ver, em operações. Porque, realmente, se você não conseguir escrever isso de uma forma inteligível, fica muito difícil, você explicar ou convencer alguém de que aquilo é verdade, né? Pra mim, ficou bem mais claro a questão de como aparece o R3 no R2. A princípio, tava aparecendo uma coisa meio mágica, meio desconexa, não? Porque, se você pode acrescentar ao R3; você dá mais uma dimensão, sem adulterar ou deturpar, aquele vetor que era dois. De repente, ele tem mais uma dimensão, que passa a ser três. Então, isso pra mim ficou mais claro, quer dizer, que é possível. Só não consegui ainda colocar isso dentro de uma linguagem matemática explícita.

Pesq: Eu vou insistir numa coisa. Vocês querem que eu leia o problema?

Maria Luiza: Ah, eu gostaria.

Pesq: [Faz a leitura do problema]

Maria Luiza: [Ela fala baixinho alguma coisa].

Pesq: Fala?

Maria Luiza: Não sabe o que é. É que na última aula, penúltima aula, hoje nós estamos no dia 28, então, dia 14, por aí, né? Nós estávamos com o grupo completo. Na aula da semana passada, nós não estávamos com ele completo. E, nós fomos trabalhar em cima disto e fomos até o quadro com o professor e explicamos pra ele que nós pensávamos, que era possível, por ser uma função bijetora, sobrejetora pra isso, injetora pra aquilo e tal. E nós chegamos, lá no quadro, a conclusão que era possível sim, não é? Mas, que nós não sabíamos, ainda, qual era a função. Que nós dizíamos que aquilo era uma transformação linear. Nós chegamos a esse ponto naquele dia da aula. Como, na última aula, a Judy não veio, e o professor passou esse trabalho aí [...] Eu acho que sim, né?

Judy: Pelas coisas que a Betty escreveu na lousa, aí a gente trabalhou em cima segunda e terça e /

Maria Luiza: /Exato/. E a gente chegou que era uma transformação, só que a gente não sabia qual era a função, né?

Judy: Eu já tinha ido conversar com a minha professora; nem falei nada na aula porque a Betty começou a falar tudo o que eu já tinha feito. Feito assim, conversando com a minha professora; não tinha nada escrito. A gente só ficou conversando e lendo o livro. Então, ela, a professora falou, por aqui você pode chegar a um sim e a um não. Vai ter alguma coisa que você vai conseguir perceber que tá falhando ou que não tá falhando. E você pode chegar a solução por aí. [...]

Pesq: Já que vocês tocaram, então, eu vou fazer uma pergunta? Do que a Betty e as meninas apresentaram, como é que aquilo / aquilo informou alguma coisa pra vocês?

Judy: A gente passou mais de uma semana vendo isomorfismo, né? Tudo que ela falou, já tava pensando /

Maria Luiza: /A gente/ falou pra ela, eu lembro, que não precisava ser só bijetora, tinha que ser também isomorfismo.

Judy: Foi isso que eu consegui conversar com ela, e o professor falou assim, se todo mundo tava entendendo aquilo que a gente tava falando, né?

Maria Luiza: E a gente aqui, vai pelo que a Betty tinha falado, e a gente conseguiu chegar a uma conclusão nossa, que foi junto com o professor no quadro. Em cima do que a gente tinha lido junto com a Judy, da experiência dela com a professora. E a experiência da Betty, Mel e da Mila, no quadro. [...]

Ades: É, porque, eu pensei um pouquinho nesse sentido; quando você tem dois vetores, se você pega a soma vetorial desses dois vetores, você vai ter um terceiro vetor, que vai ser coplanar, por exemplo, vai tá no mesmo plano. Se você dá uma terceira coordenada, você joga esse plano pra cima. Você continua tendo R2, num espaço três. Porque essa terceira coordenada representa a terceira dimensão. Então, pra mim, ficou mais claro. Eu, ainda, não tô conseguindo demonstrar, mas ficou mais claro que, na medida que eu tenho aquela sobreposição de planos, que a gente chegou a comentar lá / eu tô insistindo na mesma tecla [Maria Luiza e Judy riem]. Pode tá completamente errado, mas, eu continuo insistindo naquilo. Você começa a formar o espaço, entendeu? Então, na medida que você tá na terceira coordenada, você tá acrescentando planos. E sempre, esse plano no espaço vetorial dois. A hora que você acrescenta a terceira, você gerou um R3.

Maria Luiza: Nós temos aqui uma divergência. Agora, não tá tanto, né? Tinha bastante.

Ades: É.

Maria Luiza: Porque ele é físico, nós duas fomos pra área de matemática. E a gente queria dizer pra ele que a propriedade precisava demonstrar. E ele: - eu quero ver, se eu não enxergar não dá. E como é que fica o vetor? Mas olha o vetor é assim? Não, não; não aceito que as coisas sejam assim. Então, ele queria criar [risos].

Ades: É, mas não é verdade? O que significa pra mim? Aí eu comecei a ver uma coisa, talvez óbvia, mas que, para mim, não era óbvia. Quando você faz a soma vetorial, você faz A, B, três, quatro com cinco e seis; quando você somar três com cinco, quatro com seis, você vai ter exatamente aquele vetor que a gente obtém com a regra do paralelogramo; que é o que eu mais uso em Física. Quer dizer, a minha visão do vetor é essa. Por exemplo, quando eu somo, somo usando regra do paralelogramo ou polígono. Então, eu comecei a enxergar, que realmente aquela soma de coordenadas, dá o vetor soma. Pra mim, isso não era óbvio, porque eu nunca fiz esse tipo de associação.

Maria Luiza: É aí que a gente tinha /

Ades: /Exato/ aí começou a ficar mais claro, né? Diminuir a diferença, a distância, entre a visão matemática e a visão aplicada, vão dizer que eu tenho [...].

Judy: É, quando começou a ver espaço vetorial, ele olhou pra gente e: - que é espaço vetorial pra você? [Ela responde para ele] Satisfaz aquilo lá, é isso, assim, assim, assim. [Ele] Mas então o que que é? [Ea] Tem que satisfazer as propriedades. [Ele] Mas e o que que é? [Elas riem] [ela] Ele tava querendo ver o que era, sabe?

Maria Luiza: [Falando como se fosse ele] Me dá um exemplo, o que que é? [Risos].

Judy: Só lê lá.

Maria Luiza: Não tem que ser. Agora ficou mais perto, né?

Ades: Tá aproximando? [Ele sorri]

Maria Luiza: Mais alguma coisa?

Pesq: Vocês querem falar mais alguma coisa? Tá, tudo bem?

Ades: Acho que sim, né?

Grupo 4: Mega, Azul e Muiara:

Pesq: A questão é a seguinte gente, o professor colocou no início do curso um problema que vocês deveriam investigar. A gente só queria saber hoje, como é que tá o problema hoje pra vocês? O que vocês pensaram? O que vocês tem certeza? Se já tem uma solução pra ele, ou não? É só isso.

Mega: A nossa primeira posição era não, quando a gente fez a primeira exposição na lousa, não é verdade?

Azul: É.

Mega: Não é.

Azul: A nossa primeira foi não, assim, direto.

Mega: E depois nós fomos vendo os fatos novos, pra gente. E nós buscamos provar que era uma transformação linear, né? Se aquilo lá for possível, sim. Mais ainda, na minha opinião, eu continuo com a resposta não.

Muiara: Eu também continuo com a resposta não. E eu achei que foi muito rica a proposta no sentido da gente ir buscar, ir atrás da resposta; achei que foi bastante interessante. Apesar, que eu quero deixar claro também, que eu esperava, mais caminhos, mesmo do professor também.

Azul: Intervenção.

Muiara: Intervenção.

Azul: A gente esperava, assim, começar com alguma coisa e ter a intervenção do professor. Mas, não assim que a gente / não digo totalmente, mas colocar algumas coisas pra que /

Muiara: /Não/ deixasse tão perdido.

Azul: É porque a gente, às vezes, procura uma coisa e acha que tá perfeito, o caminho tá perfeito. E aí alguém faz uma pergunta e aí você, e daí, tipo, será que é isso mesmo? Não sei, aí eu esperava um pouquinho mais de intervenção do professor, né? Agora, essa semana nós até pensamos naquele problema, nós só pensamos na lista e a gente acabou, trabalhando na lista. Claro que tem muito na lista que tem a ver com o problema, mas, nós nem tentamos relacionar, tá?

Muiara: E, ainda, não fizemos como ele mandou; fazer independente /

Azul: /Ah é/, nós fizemos juntos.

Muiara: Fizemos juntos.

Azul: Achamos que no estágio que nós estamos, achamos que é o melhor tentar trabalhar junto, cada um coloca, discute, faz. Achamos esse é o melhor caminho. Quê mais?

Pesq: Não, só isso.

Mega: Só, ok!

[Eles levantam e o Mega volta para falar]

Mega: Na aula passada [risos e brincadeiras]. Na aula passada eu coloquei alguns espaços isomorfos, desenhei esses espaços isomorfos na lousa pensando que o z, a cota z, poderia ser uma constante, poderia ser zero e uma constante. Também a gente definiu que o zero a gente mostrou até pro professor, no livro, a gente fez uma conjectura que poderia ser z = 1, z = 2 e eu também coloquei isso na lousa. Mas depois da gente fazer algumas somas. Se for fazer uma soma usual com z = 1, z = 2, que não é possível com z uma constante. Agora com uma soma não usual, com tanto que você fixe z igual a tanto, daí seria possível. Então, a gente queria colocar essa ressalva aí, voltou já falando que precisava ser corrigido, a nossa falta, certo?

Pesq: Mais alguma coisa?

Azul: Eu acho que não?

Mega: A pergunta de vocês é só com relação ao exercício, é só isso?

Pesq: É, isso, como é? Mas se você quiser falar alguma coisa associado ao que houve na aula pode falar?

Muiara: Tá fazendo a gente estudar bastante.

Mega: Muito [...].

Grupo 6: Teka e Duda.

Pesq: A nossa questão é a seguinte, o professor propôs um problema no início do curso, e a gente queria saber em que altura do desenvolvimento, da resolução do problema vocês estão? O que vocês poderiam falar sobre o problema hoje?

Duda: Bom, no início eu tinha interpretado o problema de uma maneira errada, tá? Eu tinha entendido que, de R2 formava o R3, mas não como R2 sendo conjunto, já sendo espaço vetorial, né? Até que nós fomos lá na frente, falamos que não era possível e tudo mais, e minha interpretação inicial era essa, né? Então, aí, tava patinando, né? Nesse início. Até que aí, depois uma das alunas, acho que a Betty, questionou a questão das operações não-usuais. Como ficaria se as operações usadas não fossem as usuais e também, não foi só essa a colocação dela, a colocação da Maria Luiza de mudar um pouquinho a escrita do texto, não que mudou o enunciado do problema, mas aí é que eu comecei a enxergar pelo outro lado. Quer dizer, partir do conjunto e chegar no espaço vetorial, né? Bom, depois /

Teka: /O grupo/ ficou dividido [risos].

Duda: O grupo ficou dividido. Alguns falavam que sim, outros falavam que não. A gente não conseguia entrar num acordo. Depois houve um dia, que houve falta de dois componentes do grupo, então eu fiquei sozinha. Cê fica meio sem saber, que aí você vai participar de outro grupo, mas, a fala do grupo é diferente daquele que você estava, né? E quando, nós, retornamos na aula passada a Betty colocou daquela outra forma, né? Eu tinha até aquele momento antes dela colocar, estudado até isomorfismo, eu tinha até discutido com um outro colega que é o professor Samuel, já tinha feito essa disciplina. E ele falou o, seguinte, só vai ser possível, isso por telefone, não nada assim, discussão por escrito, né? E ele falou o seguinte só vai ser possível se tiver uma função de R2 em R3 que determine, esse espaço vetorial de três dimensões, tá? Entendi a fala dele, mas, eu não conseguia mostrar essa função. Como que seria. Então eu estacionei ai. Depois da fala da Betty que nós saímos na aula passada. Aí eu voltei a, entre aspas, a entender o que tava se passando, mas devido à fala dela, tá? Sozinha, eu não consegui chegar naquilo que ela falou.

Teka: Mesmo aquelas operações não-usuais a gente não conseguia visualizar. O que seria, como seria?

Duda: Eu até consegui entender as operações não-usuais, mas não conseguia definir como.

Teka: Como representar? Qual seria o caminho pra demonstrar isso? A aula passada com a gente não ficou, a gente não trabalhou, naquelas questões que o professor deixou para ser discutido hoje. A gente não teve a discussão em cima desse último momento. Mas, esse último momento dele, a gente tá sentindo que pegou um pouquinho o gancho que a Betty iniciou, né? Então, já tá começando a ficar mais claro pra gente conseguir tá percebendo o caminho.

Duda: É, os problemas colocados por ele, na última aula, acho que tem esse objetivo, da gente tá enxergando um pouquinho o caminho. E que a gente não pôde tá presente.

Pesq: Mais alguma coisa que vocês gostariam de falar? Porque, lembra do problema [o problema é lido]. Hoje vocês acham que é possível ou não existir?

Teka: Pela discussão que a gente não viu até o fim, a gente ainda tentou falar alguma coisa, a gente tá achando que é. Mas a gente, ainda não discutiu como provar isso, porque a gente não tem esse momento [...].

19 de outubro

[O professor inicia a aula com o objetivo em mente de resolver o problema proposto. Ele apresenta para os alunos um quadro geral do que viu acontecer em sala de aula até aquele momento. Apresentaremos a seguir algumas falas dessa aula relacionadas a atividade de resolver o problema proposto]

Prof: [...] eu queria perguntar pra vocês o seguinte: com relação àquela investigação inicial, tá? Que foi posta, com aquelas palavras. Como é que vocês estão? Queria que vocês falassem um pouco, como é que vocês estão pensando. Se vocês acham que o problema está resolvido ou não. Se vocês estão convencidos ou não de que, se alguém falou que tava resolvido, a solução faz sentido ou não. Se vocês têm questões. Eu queria ouvir vocês falarem sobre o problema matemático. Agora eu tô fazendo uma intervenção explícita. Não quero saber de casas baratas [mencionando uma fala anterior do Role], não quero saber de R3 azul, não quero saber de plano com espessura. Vamos produzir significados matemáticos. Essa minha intervenção, ela é brutal, porque ela pode dar uma silenciada terrível. Não, que vocês não saibam produzir significados matemáticos, mas, de repente, vocês podem ficar um pouco sensíveis assim, será que isso é um significado matemático? Que é a pergunta que você falou. [Apontando para alguém da turma] Como é que eu vou saber, não tem jeito? [...] E aí, como vocês estão pensando sobre o problema? [Ênfase no o]

[Os alunos ficam em silêncio, abrem as bolsas, retiram os cadernos, pensam. O professor segue fazendo várias tentativas na direção dos alunos se posicionarem, se pronunciarem, quanto à resposta sim, ou não do problema proposto. A seguir apresentaremos parte da discussão].

[...]

Prof: Quem já se decidiu se a resposta é sim ou, se a resposta é não? Por favor, levante a mão. [...] Não importa se acha que sim ou, se acha que é não, mas, não tem dúvida?

[Várias pessoas levantam a mão]

Prof: Ainda temos três pessoas em dúvida [são eles, Role, Diva e Lufran]. Você levantou a mão? [Ele pergunta para Judy] Então, temos quatro pessoas. ... Agora, quem acha que não é possível [ele repete o enunciado do problema] levanta a mão.

[Só o Mega levanta a mão]

Prof: Então, os outros que se decidiram, concluo que acham que sim, tá? Agora, uma pergunta pra esses que acham que sim. Posso sortear um de vocês pra ir a lousa explicar, valendo nota. Quem acha que eu posso sortear, entre os que disseram sim, quem se acha confiante, valendo nota, para explicar por que é possível?

[...]

Prof: Bom, parece que mesmo os que disseram sim, não há confiança o suficiente pra abrir o jogo nota, que é uma espécie de moeda. Ah, você levantou a mão?

Betty: Sim, só que, era mais ou menos o que eu já tinha dito, né? Por isso eu tava aqui pensando: - ir lá expor o que eu já disse, novamente?

Prof: Olha, que interessante, você já disse tudo aquilo, você tá convencida. O resto das pessoas, parece que sim, pero no mucho [...] E agora, o que que eu faço, né? Tô aqui nessa situação. Eu vou abrir o jogo pra vocês: - é a Betty tá certa, a resposta é sim e tudo o que ela disse é mais do que suficiente; a não ser mostrar, por exemplo, que existe a bijeção, né? Entre o R2 e o R3. E aí você pega o livro do Halmos e tá lá, né? Mesmo que você não queira acompanhar a demonstração, no livro do Halmos, tá lá. E agora, que que a gente faz, pra convencer vocês disso? Primeira pergunta? Eu posso ir lá, eu, repetir o que ela disse, posso fazer isso? Vai ficar diferente um pouco.

Mas, a questão é que vocês não ouviram. A questão é que vocês não entenderam? Porque que eu tô dizendo não entenderam. Porque, se vocês tivessem entendido, produzido significado para o que ela disse, vocês teriam se convencido, tá? Esse é um pressuposto que eu tenho, nessa nossa situação. Então, eu vou tentar uma coisa diferente, tá [ele usa de um exemplo para explicar a idéia do problema].

[...]

Prof: Bom, eu vou fazer essa pergunta antes de fazer minha próxima intervenção, tá? [...] Tem alguém, que tendo em vista isto o que eu disse e juntando, evidentemente, com tudo o mais que foi dito, né? O que a Betty disse e eu não vou repetir, né? Juntando isto com o que a Betty disse, alguém fala, agora eu entendi.

[...]

Azul: Interessante que desde o início, esse problema, eu achava assim, se fosse possível mudar, como você falou agora, “dimensão três, onde R2 é o conjunto de vetores desse espaço”. Eu sempre achei que fosse assim. Mas, do outro jeito, eu acho difícil de entender isso. Por exemplo, se eu mudar isso aqui ó, assim, vão supor, se eu falasse assim: “investigue se é possível existir um espaço vetorial real de dimensão três, onde R2 é o conjunto de vetores do espaço”. Pra mim, isso é claro assim. Se eu mudar isso aqui, eu não consigo perceber a mesma coisa.

Prof: Por que que, na primeira formulação, não dá?

Azul: Não sei, pra mim, fica claro, eu consigo, assim, meu cérebro acha isso perfeito. Se eu mudar a ordem, não consigo encontrar razão pra isso. Eu acho interessante isso. Agora, se eu falar assim, “a dimensão três onde R2”, aí, pra mim, faz razão. Eu não consigo encontrar a mesma razão no outro texto. Não tem assim, como provar isso. Eu tô pensando, por que só mudando a seqüência, muda pra mim, a razão. Se eu falar isso, é desde o início. Lembra, que eu comentei que, pra mim, mudando eu via nitidamente que sim. É interessante, eu não consigo encontrar a razão. Eu tenho que pensar bem, até que conexão tá fazendo o meu cérebro, pra entender de uma maneira assim. Que é desde o início que eu tava com a mesma dúvida. [...]

Prof: Engraçado, que eu não consigo produzir significado pra essa tua afirmação toda. Eu não consigo imaginar, que alguma coisa possa ser diferente. Eu não consigo imaginar.

Duda: Eu me lembro, que quando a gente foi fazer uma colocação lá na frente, a interpretação tinha sido não. Depois, a Maria Luiza mudou a palavra de lugar, e daí eu comecei a perceber diferente /

Azul: /Que era sim/

Prof: Bom, olha, o meu comentário agora, seria confiantemente, isso, que já era uma suspeita, desde o começo, o fato da gente ter usado esse problema, vem disso, da gente ter a expectativa, que esta idéia da qual eu vou falar agora é uma idéia problemática, na formação matemática da maioria das pessoas que eu conheço. E não são, vão chamar assim, matemáticos praticantes, que é o matemático que resolve problemas, publica, sabe, essa coisa? Vou falar uma palavra: estrutura. Essa palavra não entrou praticamente, nem uma vez em tudo o que foi dito. Ela apareceu na argumentação que elas fizeram [se referindo ao grupo da Betty] quase que de forma problemática, quase. Porque ela apareceu com uma dúvida, né? Se podia dizer uma coisa ou não podia. Eu tô fazendo um pouquinho de mistério, a palavra chave aqui é estrutura. Sabe o que esta acontecendo? Vocês não estão vendo isto. Vocês não tão / vendo que eu digo, enxergando. Isto não existe pra vocês. Que que é uma estrutura do ponto de vista matemático. Isto está completamente ausente. Sem isto é impossível resolver este problema. Elas chegaram perto. O grupo de vocês [acho que se referindo ao grupo do Pinho] falou alguma coisa sobre as operações, mais faltava a idéia de estrutura que dissesse: - olha, eu não sei se existem essas operações? Mas, se existirem, tudo bem? Existirem assim, confiantemente. A melhor solução que eu posso dar pro problema é essa. A minha expectativa não era chegar ao ponto de resolver completamente, era chegar nesse ponto, falar assim: - olha, depende, se tiverem operações que façam acontecer isso? Ó, eu vou fazer uma observação. O processo que aconteceu, foi mais ou menos o seguinte: R2, R2 é o plano, o plano tem dimensão 2, acabou. Vocês tentaram espernear com isso e voltavam, tentavam espernear e voltavam, ficavam em dúvida e voltavam. Vocês até, teve horas em que declararam dúvida, mas vocês voltavam, no fim, por trás, de algum jeito, era central isso aí: R2 é o plano, o plano obviamente tem dimensão 2, não tem jeito. Eu não sei do que esse cara tá falando? Vocês tentaram colocar um plano no espaço, tentaram gerar o espaço no plano, mas não tinha jeito. Era, o plano, o R2 e o R2 tem dimensão 2 e acabou. Vocês tão enxergando esse processo, que agora eu tô chamando a atenção pra isso? Vocês reconhecem isso que eu tô dizendo? Como as conversas iam e voltavam nesse ponto. O R2 é o plano, não sei, não imagino o que quer que eu faça. Alguém falava das operações, isso era praticamente ignorado. Elas fizeram a demonstração matemática inteira ali, só faltou demonstrar as propriedades, que eu pus lá na lista; mas elas resolveram o problema. Não adiantou nada. Eu não tô falando como crítica. Eu tô querendo chamar a atenção pro seguinte: existe um objeto chamado o plano pra vocês que é absolutamente forte, assim como existe o espaço, existe o plano [ele passa a mão na parede] e o espaço. E é inconcebível, eu tenho certeza que é, razoavelmente, inconcebível até para elas que fizeram a demonstração matemática, que que quer dizer o plano tem dimensão 3. Algum plano, sei lá? Já que o R2 é um plano, o plano, já não sei mais se é um ou o, tem dimensão três. O que que é isso? Aí eu pergunto pra vocês: - o que que é dimensão? Por que que a dimensão do plano é 2? O plano [ênfase no artigo o].

Ades: Bom, isto porque eu tinha aprendido que o plano é de dimensão 2.

Prof: Não, mas me diz o que é / minha pergunta é: - por que você diz que o plano tem dimensão 2? O plano é bidimensional? O espaço é tridimensional?

Ades: Você tem um comprimento e uma largura [ele usa o dedo indicador e o polegar para indicar] e se limita a aquilo. Você descreve um par de coordenadas, por exemplo, e daí, acaba. Eu enxergo o plano no espaço, mas eu enxergo o plano, entendeu? Como o Lufran, falou, giro, na hora que eu girei, eu tenho um espaço. Eu também acho isso, eu também vejo isso. Mas o que é girar? Eu não sei matematicamente o que é esse girar.

Prof: A gente tá na questão da dimensão?

Ades: Ã?

Prof: Me diga tudo o que você quer dizer, pra mim dizer, o que é dimensão pra você, no sentido de plano tem dimensão 2 e o espaço tem dimensão 3? Que foi o que apareceu.

Ades: Bom, voltando ao convencional, que é a única coisa que eu posso ver, né? Na hora que eu coloco mais uma forma de estender esse plano, né? Quando estende.

Quando eu consigo estender esse plano, que é aquela idéia de um monte de planos do lado do outro [inaudível] dimensão, ou deslocar o plano. Eu vejo mais como deslocar o plano. Na hora que eu desloco o plano, eu estendo isto pra uma visão de espaço.

Prof: Mas, o que quer dizer / é isto que eu quero saber? O que quer dizer a seguinte frase: - o espaço tem dimensão 3? Isto que dizer o quê, pra vocês?

Ades: Que eu consigo diferenciar três aspectos, vão dizer, naquilo que eu tô fazendo, naquilo que eu tô vendo, né? Quando a gente fala, aqui eu não vejo a parte de cima, [ele se refere à tampa da carteira] se eu ponho o estojo, eu tô enxergando um pedaço aqui, que se a gente encostar, eu derrubo ele, certo? Aqui tá o plano, o plano dessa cadeira, [ele toca a tampa da carteira] eu passo a mão e não vejo nada, eu boto o estojo, eu derrubo o estojo. Tem alguma coisa aí que eu não tô vendo, que existe e que tá na minha concepção.

Lufran: Professor, um plano por exemplo, pode existir duas medidas e o espaço seria três eixos que o senhor tá querendo dizer, né?

Prof: Essa é a questão? Esse objeto é tão natural, tão isso que não pode ser mais nada? Ó, eu vou pegar a sua frase, vou levar a sério o que você disse: - são duas medidas. Mas puta, se eu imaginar aquela lousa ali como sendo um plano, eu posso fazer ali vinte medidas; eu meço assim, assim [ele vai sugerindo com a mão, outros jeitos de medir].

Lufran: E se eu colocar um eixo.

Prof: Mas eu posso colocar cinco eixos, não posso colocar cinco eixos? [Dirigindo-se a Lufran] O que que me impede.

Lufran: [O que ele diz é inaudível]

Prof: Sim, mas a questão é: será que se eu fixar dois, eu não vou poder pôr outros? É isso que vocês estão falando?

Ades: Ah tá, você percebeu outra coisa.

Prof: É vocês que estão dizendo pra mim.

[...]

Ades: Ó professor, deixa só falar uma coisa sobre aquele problema que você colocou, pra não voltar depois? A diferença entre um plano e o espaço, no caso, é que você teria, vamos dizer assim, no espaço mais / o mesmo ponto no plano, poderia representar vários pontos no espaço, entendeu? Se você tem um 2, 3, [ele se refere ao par (2,3)] no plano, se você coloca outra dimensão que vai pro R3, aquele 2,3, pode ser (2,3,2), (2,3,1), (2,3,4), e você passa a ter uma reta, certo? Ou não?

Prof: Não sei.

Ades: Mas você entendeu o que eu quis dizer?

Prof: Eu /

Ades: /Por exemplo/, quando eu tô no plano, (2,3) é só (2,3), se eu acrescento outra dimensão, esse ponto passa a ser vários pontos no espaço. Porque qualquer ponto que tenha aquela barra, aquele risco, (2,3), se eu ponho (2,3,1) eu tô aqui com o ponto no espaço, se eu tenho (2,3,2) eu passei para o outro ponto no espaço. Pra outro plano, mas estou no espaço. E aí, se pensar em R3, eu tenho um ponto distinto, quando no R2, eu só tinha o mesmo ponto (2,3). Cê entendeu o que eu falei?

Prof: Eu, acredito que sim. Mas o que eu não sei se entendi é por que você tá dizendo isso? Eu entendi a construção que você fez.

Ades: Eu tô dizendo isso porque foi uma forma de eu distinguir o R2 do R3.

Anexo B

Questionário

Questionário

1. Nome: ____

2. Pseudônimo: ____

3. Naturalidade: ______________________

4. Data de nascimento: _________________

5. Nível de Instrução:

( ) Graduação em _____________________

( ) Especialização em __________________

( ) Mestrado em ______________________

6. Liste os cursos que você fez e que podem ter relação com o atual curso de Álgebra Linear:

Curso: ____

Instituição: ____

Nível: _____________________________

Curso: ____

Instituição: ____

Nível: _____________________________

Curso: ____

Instituição: ____

Nível: _____________________________

7. Você se lembra de ter estudado os seguintes conteúdos

i) Espaços Vetoriais:	( ) sim	( ) não
ii) Transformações Lineares:	( ) sim	( ) não
iii) Cardinalidade:	( ) sim	( ) não
iv) Dimensão:	( ) sim	( ) não
v) Base:	( ) sim	( ) não

Anexo C

Termo de Compromisso Ético

TERMO DE COMPROMISSO ÉTICO

Este termo de compromisso pretende esclarecer os procedimentos que envolvem a pesquisa, e a utilização dos dados nela coletados. Tem o objetivo de deixar o mais transparente possível a relação entre os envolvidos e o tratamento e uso das informações que serão colhidas.

As atividades realizadas, videografadas e transcritas, servirão como material para pesquisas que procuram entender melhor o processo de produção de significados na sala de aula de um curso de Álgebra Linear. O acesso aos registros videografados será exclusivo do grupo de pesquisa, que assume o compromisso de não divulgá-los, e os registros escritos das mesmas serão feitos preservando-se a identidade dos sujeitos em sigilo através dos pseudônimos por eles escolhidos. Nas pesquisas que utilizarem o material coletado não será feita menção ao ano e a Instituição onde o curso foi realizado para a preservação da identidade do grupo.

As informações provenientes da análise dessas entrevistas poderão ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos científicos e divulgadas a todos aqueles que se interessarem pelas pesquisas, na forma acima indicada.

Rio Claro, 30 de novembro de 2001.

Romulo Campos Lins

Amarildo M. Silva

Sujeito de Pesquisa