

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

**Problemas de Corte e Empacotamento
na Indústria de Móveis: Um Estudo de Caso**

Roberto Cavali

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 087

Roberto Cavali

**Problemas de Corte e Empacotamento na
Indústria de Móveis: Um Estudo de Caso**

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto, para a
obtenção do título de Mestre em Matemática Apli-
cada.

Orientador: Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira
Rangel

São José do Rio Preto

2004

Cavali, Roberto.

Problemas de corte e empacotamento na indústria de móveis : um estudo de caso / Roberto Cavali – São José do Rio Preto : [s.n.], 2004
77 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Maria do Socorro Nogueira Rangel

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Pesquisa operacional. 2. Planejamento da produção. 3. Otimização matemática. 4. Problema do corte de estoque. 5. Geração de colunas. 6. Corte guilhotinado. I. Rangel, Maria do Socorro Nogueira. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 519.8

COMISSÃO JULGADORA

Titulares

Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel - Orientadora

Prof. Dr. Robinson Hoto

Prof. Dr. Trajano Pires da Nóbrega Neto

Suplentes

Prof. Dr. Clóvis Perin Filho

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

*Aos meus pais Alda e Antonio,
à minha irmã Patrícia,
e ao meu amor Fernanda.*

Dedico.

Agradecimentos

À minha orientadora professora Socorro, por me aceitar neste projeto. Pela paciência, dedicação e ensinamentos (muitos ensinamentos!) passados à mim ao longo da realização deste trabalho.

Aos professores Mário Sérgio Stipp e Marco A. Succi por consolidarem a motivação deste trabalho trazendo até nós as dificuldades das empresas de móveis do pólo moveleiro de Votuporanga.

Ao Paulo, gerente de produção da Empresa de Móveis Luapa, pela atenção e simpatia com que sempre nos recebeu e pela disposição em colaborar com este projeto.

Aos professores Ranga, Heloísa, Geraldo, Masayoshi e Socorro pelas disciplinas ministradas.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Aos amigos Cassius, Moisés, Pitanguí e Serjão. Obrigado pelos favores realizados, estudos compartilhados e diversões proporcionadas.

Aos amigos da pós: Janilson, Vanessa Bertoni, Fernando, Flávio, Valeriano, Fábio, Gléber, André, Vanessa Botta e André (menininho).

Aos meus amigos de república: Artur, Nilton, Oreste, Fernando e Marcos. Pela amizade com a qual superamos muitas dificuldades e respeitamos nossas diferenças. Obrigado por contribuírem de forma direta para esta minha conquista e pelo divertido convívio que mantivemos.

Ao amigo Rodrigo por facilitar minha vinda à Rio Preto. E também, ao Jefferson e Pedro pelos favores prestados no início desta caminhada.

Aos meus pais, que são os maiores responsáveis por esta minha conquista. Obrigado pela torcida, compreensão e por sempre incentivarem meus estudos.

À minha irmã Patrícia, que nunca duvidou dos meus objetivos. Sempre me motivou de forma direta e a qual devo boa parte desta jornada.

À minha namorada Fernanda, pelo respeito, apoio, paciência e carinho.

Resumo

Diariamente, em indústrias de móveis, painéis retangulares de madeira são cortados em retângulos menores para a manufatura de seus produtos. Por causa da possível perda de material envolvida neste processo e de sua influência no custo dos produtos, existe a necessidade de um planejamento prévio para a realização dos cortes. Na maioria das empresas de móveis situadas na região Noroeste do estado de São Paulo, este planejamento é feito manualmente e não é uma tarefa simples. O enfoque deste trabalho é analisar a utilização de um sistema computacional no planejamento do corte de painéis de madeira. Esta ferramenta é capaz de resolver o problema do corte bidimensional segundo o algoritmo de dois estágios de Gilmory e Gomore. Aspectos práticos encontrados no corte dos painéis e estratégias adotadas pelas empresas no planejamento da produção são abordados. Além disso, apresentamos os resultados de um estudo computacional com base em dados reais de uma das empresas visitadas.

Palavras-chave: otimização inteira, planejamento da produção, corte de estoque, geração de colunas, corte guilhotinado.

Abstract

In the furniture industries, the cut of rectangular plates to produce smaller rectangular pieces is an every day task. To reduce the waste of material involved in this process and its influence in the cost of the products, a previous planning for the cuts is necessary. In the majority of the furniture companies situated at Northwest region of the state of São Paulo, the generation of cutting patterns is made manually and it is not a simple task. The goal of this work is to analyze the use of a computational system in the cutting patterns generation. This computational system is able to solve the two-dimensional cutting stock problem by the 2-stage Gilmore and Gomore method. Practical aspects found in the cutting patterns generation and strategies adopted for the companies in the production planning are discussed. We also report some results of the application of the computacional system to the cutting patterns generation based on real data of one company.

Keywords: integer optimization, production planning, cutting stock, column generation, guillotine cuts.

Sumário

| | |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Problemas de Corte e Empacotamento | 4 |
| 1.1 Classificação dos Problemas | 4 |
| 1.2 Modelagem Matemática do Problema do Corte Bidimensional | 8 |
| 1.3 Resolução do Problema do Corte Bidimensional | 13 |
| 1.3.1 Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe | 13 |
| 1.4 O Método Simplex com Geração de Colunas | 17 |
| 1.4.1 Método de Enumeração Implícita com Geração de Colunas | 20 |
| 1.5 Geração de Padrões de Corte | 24 |
| 1.5.1 Método em Dois Estágios de Gilmore e Gomory | 26 |
| 1.5.2 Estratégia de Busca em Grafo-E/OU | 28 |
| 2 A Indústria de Móveis na Região Noroeste do Estado de São Paulo | 32 |
| 2.1 A Indústria de Móveis no Brasil | 32 |
| 2.2 O Pólo Moveleiro de Votuporanga | 34 |
| 2.3 A Linha de Produção de um Móvel | 35 |
| 2.3.1 O Corte da Matéria-Prima | 36 |
| 2.4 Planejamento da Produção | 40 |
| 2.4.1 Modelo Geral para o Problema Combinado | 41 |
| 2.4.2 Problema Combinado sem Custo de Preparação | 44 |

| | | |
|----------|----------------------------------------------------|-----------|
| 3 | Estudo Computacional | 47 |
| 3.1 | As Empresas Visitadas | 47 |
| 3.2 | A Empresa de Móveis Luapa | 49 |
| 3.3 | O Sistema CorteBi Original | 53 |
| 3.4 | Adaptações Realizadas no Sistema CorteBi | 53 |
| 3.5 | Coleta dos Dados | 56 |
| 3.6 | Resultados do Estudo Computacional | 59 |
| 4 | Considerações Finais | 70 |
| | Referências Bibliográficas | 73 |

Introdução

Por causa de fatores econômicos e exigências do mercado, as indústrias estão sempre buscando inovações para seus produtos e maior eficiência em sua produção. Por outro lado, o meio acadêmico está constantemente criando e investigando teorias que possam resolver problemas nos mais variados contextos. Como ferramenta para a resolução de problemas práticos, ao longo dos anos, os modelos de programação linear e de programação inteira mostraram-se muito eficientes. Desde 1947, quando G. B. Dantzig desenvolveu o método *Simplex* para resolver problemas de planejamento da força aérea dos Estados Unidos, modelos de programação linear podem ser resolvidos com eficiência. Os avanços computacionais também contribuíram para o aumento na utilização dessas ferramentas, permitindo que os modelos crescessem em complexidade. Hoje é possível encontrar sistemas desenvolvidos em pesquisas acadêmicas ou pacotes comerciais, tais como CPLEX (ILOG, 2001) e X-PRESS (Dash optimization, 2001), capazes de resolver problemas de programação linear ou inteira de grande porte.

Na região Noroeste do estado de São Paulo encontram-se os pólos moveleiro de Votuporanga e Mirassol. As indústrias de móveis desta região tem processo de fabricação similares. Em consequência disto, enfrentam quase as mesmas dificuldades e adotam estratégias semelhantes a fim de melhorar seus processos. A principal matéria-prima utilizada nestas indústrias é o painel de madeira. É no corte desse material que surge um de seus principais problemas: a perda de material. A perda de material é parte crucial no custo final dos produtos. Além disso, o melhor aproveitamento da matéria-prima está relacionado com a

determinação da forma com que os painéis devam ser cortados. Esta tarefa requer um esforço muito grande do profissional responsável. Na maioria das empresas este processo é “manual”, ou seja, não há o uso de um sistema computacional específico (Stipp (2002), Cavali e Rangel (2003, 2004)).

O enfoque deste trabalho é o planejamento do corte de painéis de MDF para a produção de móveis em indústrias do pólo moveleiro de Votuporanga, em particular da Empresa de Móveis Luapa (Luapa). Tendo em vista as exportações ou maiores espaços no mercado nacional, o uso de MDF tem aumentado por parte das empresas no intuito de inovar seus produtos. Entretanto, o MDF tem um custo mais elevado que os outros tipos de painéis, aumentando o interesse de algumas indústrias do pólo moveleiro de Votuporanga em buscar alternativas para melhor planejar o corte destes materiais. Trata-se de um importante problema de otimização, conhecido na literatura como **problema do corte bidimensional** (ver por exemplo, Belov e Scheithauer (2003), Rangel (1989)). Por causa de restrições de integralidade e do grande número de variáveis, o problema do corte bidimensional não é de fácil resolução. Mas existem na literatura diversas abordagens para se obter a solução ótima do problema.

O objetivo deste trabalho consiste em investigar as características e dificuldades envolvidas no corte da matéria-prima nas indústrias de móveis, e avaliar o comportamento do sistema computacional CorteBi (Rangel e Perin, 1989), diante de dados reais das empresas produtoras de móveis. Além disso, verificamos que o uso desta ferramenta computacional pode contribuir no planejamento da produção dessas empresas.

O modelo utilizado para o problema do corte bidimensional é apresentado no **Capítulo 1**, assim como algumas abordagens de resolução encontradas na literatura. No **Capítulo 2** apresentamos algumas características das indústrias de móveis no Brasil e do pólo moveleiro de Votuporanga, descrevemos o processo de fabricação de um móvel e alguns aspectos importantes encontrados no corte dos painéis de madeira e no planejamento da produção dos móveis. O **Capítulo 3**

descreve as empresas visitadas durante a elaboração deste trabalho e o estudo computacional realizado utilizando dados da empresa Luapa. As conclusões do trabalho e perspectivas para trabalhos futuros são apresentados no **Capítulo 4**.

Capítulo 1

Problemas de Corte e Empacotamento

Modelos de programação linear e de programação inteira são ferramentas eficientes no tratamento de muitos problemas do cotidiano industrial. Entretanto, a resolução de alguns modelos não é trivial, especialmente daqueles com um número muito grande de variáveis. Os avanços computacionais tem estimulado o desenvolvimento de novas abordagens para a resolução desses modelos, ou ainda, a aplicação de técnicas já existentes em situações até então não investigadas. Neste capítulo, apresentamos uma classe de problemas conhecida na literatura como *problemas de corte e empacotamento* (Dyckhoff, 1990). Em particular, apresentamos o *problema do corte bidimensional* e algumas técnicas envolvidas na sua resolução.

1.1 Classificação dos Problemas

A fabricação de peças mediante o corte de objetos maiores aparece com frequência em vários contextos industriais, como na produção de papel, papelão, móveis, vidro, chapas de aço, circuito impresso, entre outros. Estes problemas possuem características distintas, por exemplo, o número de dimensões relevantes no corte

ou tipo e frequência de cortes permitidos. Mas, apresentam uma estrutura semelhante, isto é, os dados básicos para estes problemas são dois conjuntos:

- um conjunto de unidades disponíveis em estoque, que chamaremos simplesmente de **objetos**;
- e um conjunto de peças a serem produzidas, que chamaremos de **itens**.

Além disso, um **critério** deve ser utilizado para a produção dos itens a partir dos objetos em estoque. Por exemplo: maximizar o número de itens produzidos; minimizar a perda de material; minimizar o custo dos objetos utilizados.

Ao longo dos anos, diversos autores (Gilmore e Gomory (1961, 1963, 1965), Christofides e Whitlock (1977), Lodi, Martello e Vigo (2002), Morabito (1994), Vanderbeck (1999), Belov e Scheithauer (2002)) realizaram pesquisas abordando estes problemas nos mais variados contextos. Desta forma, é possível encontrar na literatura problemas com a mesma estrutura lógica sob diferentes nomes:

- Empacotamento de faixas (*strip packing*), problema da mochila (*knapsack problem*);
- Carregamento de containers (*containers loading*), Carregamento de paletes (*pallets loading*);
- Corte de estoque (*cutting stock*), *trim loss problem*, *bin packing problem*.

Com base nos diferentes nomes encontrados na literatura e na grande quantidade de artigos publicado sobre este assunto, Dyckhoff (1990) propôs uma tipologia para esta classe de problemas que designou de **problemas de corte e empacotamento** - PCE (*cutting and packing problems*). Apesar de serem tarefas completamente diferentes do ponto de vista prático, os problemas de corte e empacotamento podem ser abordados, matematicamente, com as mesmas formulações e estratégias de resolução. O exemplo a seguir ilustra como estes problemas estão relacionados.

Exemplo 1.1. Consideremos objetos (figura 1.1 a)) e itens (figura 1.1 b)). A figura 1.1 c) ilustra dois esquemas que podem ser usados no corte dos objetos para a fabricação dos itens. Mas, a figura 1.1 c) também representa maneiras de alocar caixas (itens) em paletes (objetos), caracterizando um problema de **empacotamento**.

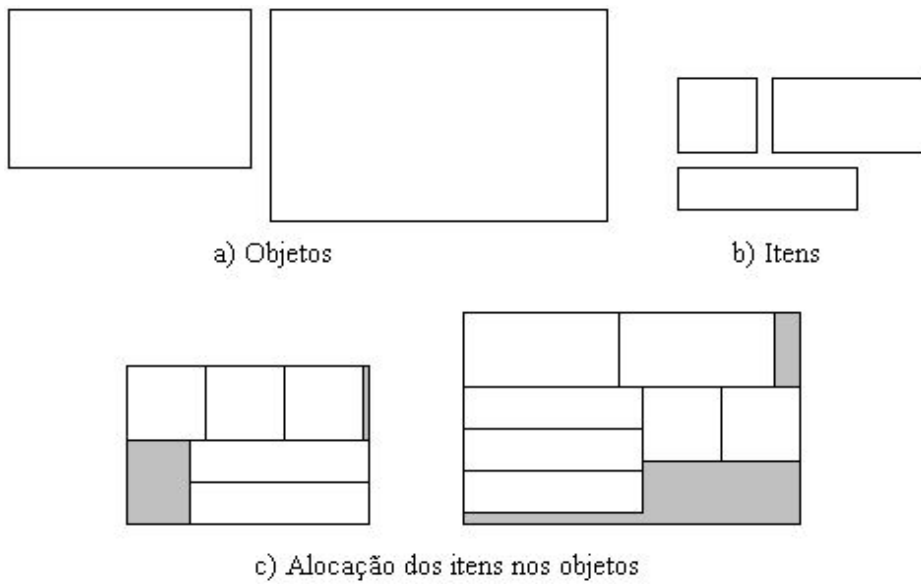


Figura 1.1: Estrutura básica de problemas de corte e empacotamento

Em seu estudo, Dyckhoff (1990) extraiu características importantes desses problemas (dimensão, variedades das formas dos objetos e dos itens, variação da quantidade de objetos e itens, restrições no corte, entre outras) e construiu uma tipologia formada por quatro caracteres $\alpha/\beta/\gamma/\delta$ representando a combinação de quatro propriedades relativas ao problema. Abaixo temos uma lista de todos os significados possíveis para os quatro caracteres $\alpha/\beta/\gamma/\delta$, totalizando assim 96 notações para os possíveis problemas.

1. Dimensão (α):

- (1) unidimensional;
- (2) bidimensional;

- (3) tridimensional;
 - (N) n-dimensional, ($n > 3$).
2. Tipos de tarefa (β):
- (B) Todos os objetos disponíveis devem ser usados e apenas uma seleção de itens será produzida;
 - (V) Todos os itens devem ser produzidos a partir de uma seleção de objetos.
3. Variedade dos objetos (γ):
- (O) Um objeto;
 - (I) Vários objetos idênticos;
 - (D) Vários objetos diferentes.
4. Variedade dos itens (δ):
- (F) Baixa demanda de itens com formatos diferentes;
 - (M) Alta demanda de itens com vários formatos;
 - (R) Alta demanda de itens com pouca variação dos formatos;
 - (C) Itens com formatos congruentes.

Exemplo 1.2. *Sejam os itens da figura 1.1 b) produtos a serem obtidos de acordo com os seguintes pedidos:*

230 produtos do tipo 1;

150 produtos do tipo 2;

300 produtos do tipo 3.

Suponhamos que os objetos figura 1.1 a) estejam estocados em quantidades suficientes para atender os pedidos pelos itens e o objetivo do problema seja minimizar o uso dos objetos para a fabricação dos produtos.

Podemos classificar este exemplo como $2/V/D/R$. O número 2 corresponde a um problema bidimensional, a letra V indica que todos os itens devem ser produzidos (atendimento do pedido), mas nem todos os objetos precisam ser utilizados, D significa que os objetos são diferentes em relação ao formato e R indica que a variação dos tipos de itens é pequena mas a demanda é relativamente alta.

1.2 Modelagem Matemática do Problema do Corte Bidimensional

No problema do corte bidimensional, duas dimensões são relevantes no processo de corte: o comprimento (L) e a largura (W). Os objetos são retângulos com medidas (L, W) e os itens são retângulos menores pertencentes ao conjunto $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$. Cada item i , $i \in \mathcal{M}$, tem uma demanda d_i e um tamanho (l_i, w_i) .

Definição 1.1 (Padrão de corte). *Entende-se por padrão (ou plano) de corte, a disposição sem sobreposição dos itens dentro de um objeto, resultando em uma seqüência de cortes a serem efetuados para a obtenção dos itens.*

O problema do corte bidimensional consiste em determinar padrões de corte para a obtenção dos itens demandados a partir do corte dos objetos em estoque de acordo com um critério pré-estabelecido.

Associado a um padrão de corte está um vetor inteiro não negativo:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix},$$

tal que a_{ij} representa a quantidade de vezes que o item do tipo i aparece no respectivo padrão de corte j (figura 1.2). Vamos considerar todos os padrões de

corte possíveis conhecidos e usar o critério de minimizar o número de objetos cortados. Supondo que os objetos disponíveis em estoque são suficientes para atender a demanda de itens, o problema do corte bidimensional pode então ser modelado da seguinte forma (Rangel, 1989):

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{j=1}^n x_j \\ \text{s. a: } & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = d_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \text{ e inteiro} \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

no qual x_j é a quantidade de vezes que o padrão de corte j é utilizado.

Podemos ter um mesmo vetor associado a padrões de corte diferentes. Neste caso dizemos que os padrões de corte são *equivalentes* (figura 1.3). Retângulos resultantes de um padrão de corte que não pertencem ao conjunto de itens \mathcal{M} são considerados **perdas**. Seja s_j a perda de material no padrão de corte j , isto é,

$$s_j = LW - \sum_{i \in \mathcal{M}} l_i w_i a_{ij}.$$

Um outro critério que pode ser usado no modelo (1.1) é minimizar a perda total, ou seja:

$$\min \sum_{j=1}^n s_j x_j.$$

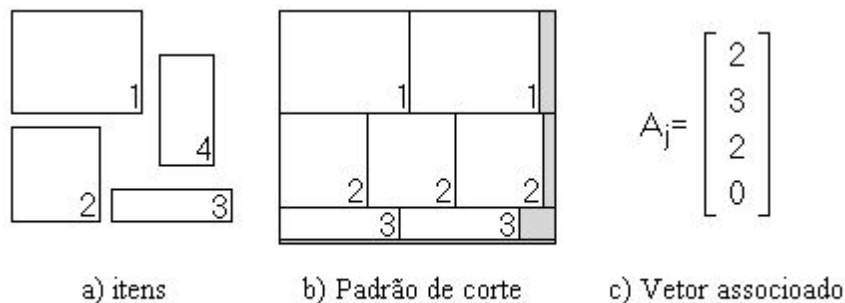


Figura 1.2: Padrão de corte

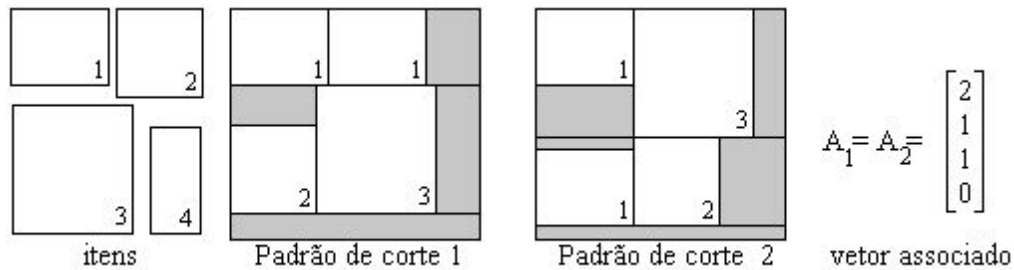


Figura 1.3: Padrões de corte equivalentes

Dependendo do contexto em que o problema está inserido, algumas restrições (as vezes de natureza física) devem ser consideradas e podem influenciar na determinação dos padrões de corte, por exemplo: o tipo e o número de cortes permitidos em cada padrão de corte; a quantidade de tipos de itens permitidos em um padrão de corte; orientação dos itens no objeto.

Cortes guilhotinados

Um corte é chamado do tipo guilhotina quando é feito por toda extensão do objeto, de uma extremidade até a extremidade oposta, paralelo as outras duas extremidades. Assim, quando feito em um retângulo produz dois novos retângulos de dimensões menores (ver figura 1.4 a)). Esta é uma restrição comum nas indústrias de móveis e origina de uma limitação imposta pelo equipamento utilizado para os cortes (Klempous, Kotowski e Szlachcic, 1996).

Cortes não-guilhotinados (figura 1.4 b)) estão fortemente relacionados aos problemas em que não há o corte físico da placa, geralmente chamados de problemas de empacotamento (Y-GG e M-K Kang (2002), Morabito e Arenales (1995), Leung, Yung e Troutt (2001)).

Número de estágios

Uma outra restrição bastante freqüente é a limitação dos estágios no processo de corte. Consideramos um estágio os cortes guilhotinados feitos na mesma direção

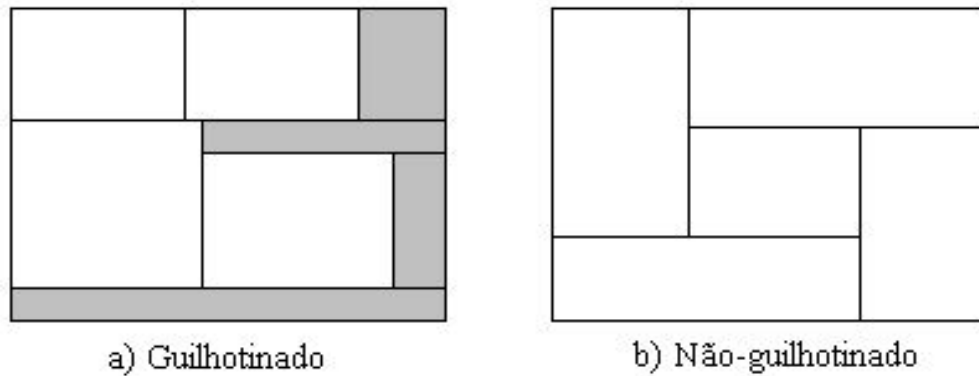


Figura 1.4: Tipos de cortes

(horizontal ou vertical). Assim um corte em dois estágios, consiste em cortar o objeto mudando somente uma vez a direção dos cortes. No caso do corte em dois estágios, existe mais uma classificação: cortes em dois estágios exatos e cortes em dois estágios não-exatos (Morabito e Garcia, 1998). No corte em dois estágios exato (figura 1.5 a)), todos os itens de uma mesma faixa possuem a mesma largura. No caso não-exato é permitido em cada faixa itens com larguras menores ou iguais à largura da faixa (figura 1.5 b)). Neste último caso, um terceiro estágio, chamado ajuste, é realizado para a obtenção dos itens. Um corte em três estágios é ilustrado na figura 1.5 c)).

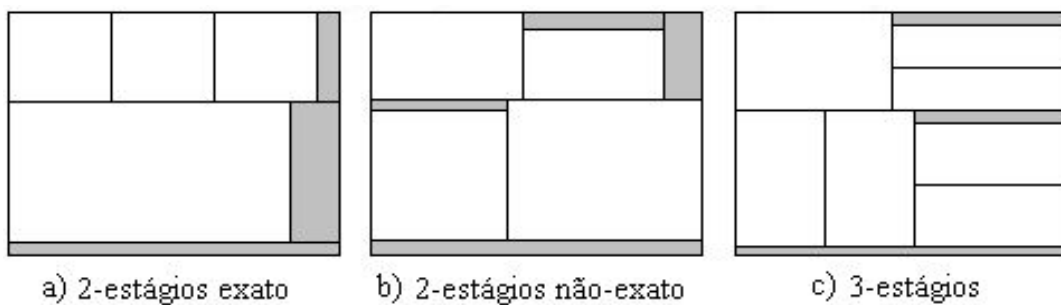


Figura 1.5: Número de estágios em um padrão de corte

Problema restrito

Uma restrição natural que deve ser considerada é a capacidade física do objeto, ou seja, um padrão de corte não pode conter uma quantidade de itens cuja soma de suas áreas é maior que a área do objeto. Para tal, considerando a_{ij} , a quantidade de vezes que o item i aparece no padrão de corte j , devemos impor

$$a_{ij} \leq \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor, \quad (1.2)$$

para que o padrão de corte j seja viável. Entretanto, existem problemas cuja demanda d_i de alguns itens é estritamente menor que o lado direito da inequação (1.2), estes problemas são chamados **problemas restritos**. Caso contrário, quando $d_i \geq \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor$, $\forall i \in \mathcal{M}$, o problema é dito irrestrito (Morabito e Arenales, 1996).

Rotação dos itens

A *orientação fixa* dos itens no objeto é uma condição que aparece em certos problemas. Dizemos que os itens tem orientação fixa (figura 1.6 a)), quando os padrões de corte são produzidos sem que a rotação de 90 graus dos itens seja permitida. Quando a rotação é permitida (figura 1.6 b)) em um problema com m itens, na geração dos padrões de corte o problema passa a ter $2m$ itens. Exceto quando algum item $i \in \mathcal{M}$ não possa ser rotacionado:

$$l_i > W \quad \text{ou} \quad w_i > L.$$

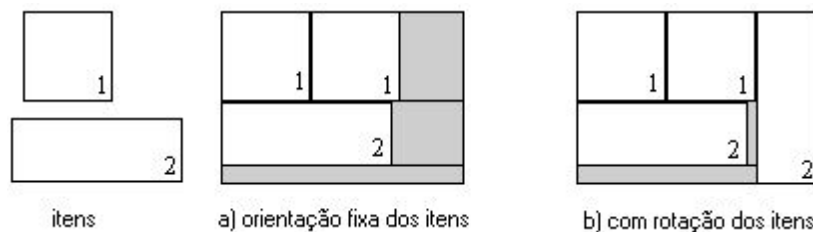


Figura 1.6: Orientação dos itens

1.3 Resolução do Problema do Corte Bidimensional

Resolver o problema (1.1) não é trivial, pelo contrário, a restrição de integridade sobre as variáveis x_j ($j = 1, \dots, n$) e o grande número de padrões de corte possíveis (n) tornam o problema difícil de ser resolvido. De um modo geral, as formulações de problemas práticos como modelos de programação linear ou programação inteira, resultam em modelos com um número muito alto de restrições ou variáveis. Assim, no que diz respeito à capacidade de memória computacional, esses modelos tornam-se muito difíceis de serem resolvidos.

A resolução de problemas com alto número de variáveis ou restrições, chamados problemas de grande porte, ganhou avanços significativos em 1960 com a publicação do *princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe* (Lasdon, 1970). A partir desta data, uma técnica derivada deste trabalho, chamada *geração de colunas* começou a ser utilizada em outros procedimentos, ampliando as possibilidades de resolução de problemas de grande porte, particularmente do problema do corte bidimensional.

1.3.1 Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe

Para contornar as dificuldades na resolução de um problema com número elevado de restrições, a estratégia de decomposição é “quebrar” este problema em dois problemas que serão resolvidos separadamente.

Um dos problemas, corresponde a um conjunto geral de restrições e é chamado *problema mestre*. Este problema é equivalente ao problema original e possui um número reduzido de restrições, mas com muito mais colunas. O problema mestre é resolvido sem a consideração explícita de todas estas colunas (problema mestre restrito), que são geradas somente quando o método *Simplex* “precisa” delas, mediante a resolução do segundo problema, chamado subproblema

sendo $\hat{A}_0x = d_0$ a restrição de acoplamento.

Por simplicidade, vamos assumir que o poliedro

$$\mathcal{P} = \{x \mid A_1 = d_1, x \geq 0\} \quad (1.5)$$

seja limitado (esta condição pode ser relaxada). Como \mathcal{P} é convexo, qualquer elemento de \mathcal{P} pode ser escrito como

$$x = \sum_{j=1}^P \lambda_j x^j \quad (1.6)$$

com

$$\sum_{j=1}^P \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad (1.7)$$

sendo x^j , $j = 1, \dots, P$ os pontos extremos do poliedro \mathcal{P} (Bertsimas e Tsitsiklis, 1997).

Em relação ao problema (1.4) procuramos por uma solução de (1.5) que satisfaça a restrição de acoplamento $\hat{A}_0x = d_0$ e minimize z . Então, consideremos as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} \hat{A}_0x = d_0 &\Leftrightarrow \hat{A}_0\left(\sum_{j=1}^P \lambda_j x^j\right) = d_0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^P (\hat{A}_0x^j)\lambda_j = d_0. \end{aligned}$$

Ajustando a função objetivo temos

$$\begin{aligned} z = cx &\Leftrightarrow z = c\left(\sum_{j=1}^P \lambda_j x^j\right) \\ &\Leftrightarrow z = \sum_{j=1}^P (cx^j)\lambda_j. \end{aligned}$$

Logo, o problema (1.4) é equivalente a:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = \sum_{j=1}^P (cx^j)\lambda_j \\
 \text{s. a:} \quad & \sum_{j=1}^P (\hat{A}_0x^j)\lambda_j = d_0 \\
 & \sum_{j=1}^P \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Para simplificar a notação, seja:

$$\hat{A}_0x^j = q_j \quad \text{e} \quad cx^j = f_j, \tag{1.9}$$

substituindo (1.9) em (1.8):

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = \sum_{j=1}^P f_j\lambda_j \\
 \text{s. a:} \quad & \sum_{j=1}^P q_j\lambda_j = d \\
 & \sum_{j=1}^P \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

O problema (1.10) é chamado de problema mestre, e é equivalente ao problema (1.4). O problema mestre possui $m_0 + 1$ restrições (linhas), comparadas com as $m_0 + m_1$ restrições de (1.4). E também tem tantas colunas quanto o número de pontos extremos (P) do poliedro \mathcal{P} , que pode ser da ordem de milhares. Portanto, para resolver o problema (1.10) sem a consideração explícita de todas as suas colunas, pode-se utilizar a técnica de geração de colunas descrita na próxima seção.

1.4 O Método Simplex com Geração de Colunas

Consideremos o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. a:} \quad & \sum_{j=1}^n A_j x_j = d \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{1.11}$$

no qual, A_j e d são vetores m -dimensionais ($m < n$).

Vamos supor conhecida uma solução básica viável inicial (x_B), e também a matriz B associada a esta solução (B tem posto m). Seja c_B os coeficientes de custo das variáveis básicas, os *multiplicadores Simplex* associados a esta base são:

$$\pi = c_B B^{-1}.$$

Para tentar melhorar o valor de z , devemos calcular o valor dos coeficientes das variáveis não-básicas, chamados *custos reduzidos*, e dados pela expressão $\bar{c}_j = c_j - \pi A_j$. Se

$$\min_j \bar{c}_j = c_s < 0,$$

e a variável x_s entrar na base, o valor de z é melhorado. Maiores detalhes sobre o método *Simplex* podem ser encontrados em (Bazaraa, Jarvis e Hanif (1990), Murty (1983)).

Caso o problema (1.11) contenha um número elevado de colunas, a procura por c_s mediante o cálculo e comparação de todos os custos reduzidos pode ser impraticável computacionalmente, pois precisamos avaliar **todas** as colunas não-básicas. Assim, vamos considerar explicitamente somente as variáveis básicas, deixando as colunas não-básicas “fora” do problema (1.11), mas supondo que são conhecidas implicitamente. Afinal, em problemas práticos, devido as imposições da natureza do problema, estas colunas tem uma “estrutura” definida. Portanto, sabemos como “construí-las”.

Para escolhermos a coluna que deve entrar na base, basta resolvermos o subproblema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_j - \pi A_j \\ \text{sendo } & A_j \text{ uma coluna do problema (1.11).} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Dependendo de c_j e da “estrutura” de A_j , várias técnicas podem ser usadas para resolver (1.12). Note que a vantagem na geração de colunas é que não há necessidade do armazenamento de todas as colunas. Além disso, provavelmente nem todas entrariam na base ao longo do método *Simplex*.

Gilmore e Gomory (1961, 1963, 1965) utilizaram o método *Simplex* com Geração de Colunas para resolver o problema do corte unidimensional e bidimensional. Inicialmente a restrição de integralidade, $x_j \in \mathbb{Z}_+$, do problema (1.1) é relaxada para $x_j \in \mathbb{R}_+$ definindo assim o seguinte problema de programação linear que chamaremos de problema relaxado:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^n x_j \\ \text{s. a: } & Ax = d \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.13}$$

O problema relaxado (1.13) é então resolvido pelo método *Simplex* com geração de colunas. Este procedimento consiste em iniciar o método *Simplex* com uma base contendo m colunas (m padrões de corte). As colunas da matriz identidade correspondem a padrões de corte, as quais possuem apenas um item (vide figura 1.7 a)). Considerando a capacidade do objeto, podemos também construir uma base formada pelos **padrões de corte homogêneos**, ou seja, uma matriz em que cada coluna represente a produção de somente um tipo de item (vide figura 1.7 b)), formando uma base inicial viável para o problema irrestrito (1.13).

A geração de colunas é feita através da resolução de um problema auxiliar especial. Seja π a variável dual associada a restrição $Ax = d$ de (1.13). A coluna candidata a entrar na base deve corresponder a variável com o menor

custo relativo - regra de Dantzig (Bazaraa, Jarvis e Hanif, 1990), isto é,

$$\min 1 - \pi A_j.$$

Sendo o vetor A_j um padrão de corte. Assim o problema auxiliar a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi y \\ \text{s. a: } \quad & y := \text{um padrão de corte.} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Trata-se de um outro problema de corte, que considera o corte de apenas um objeto (classe 2/B/O/).

A solução ótima x^* do problema relaxado (1.13), pode ser fracionária. Neste caso, x^* não é uma solução viável para o problema (1.1), devido a restrição de integralidade. Seja \tilde{y} uma aproximação inteira para x^* obtida por truncamento:

$$\tilde{y} = (\lfloor x_1^* \rfloor, \dots, \lfloor x_m^* \rfloor)^T.$$

Esta solução inteira não é uma solução viável para o problema (1.1) caso

$$A\tilde{y} < d \tag{1.15}$$

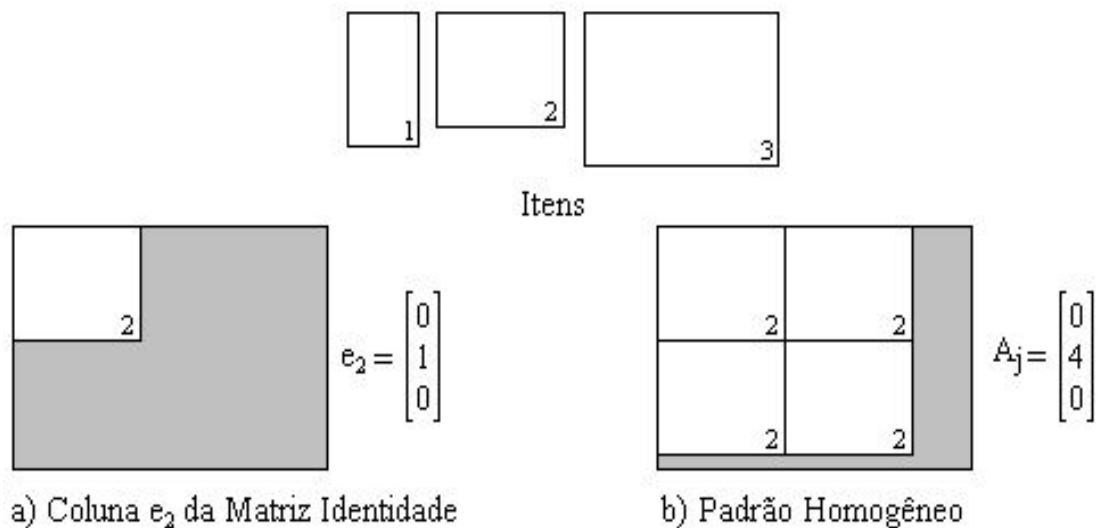


Figura 1.7: Coluna da matriz identidade e padrão homogêneo

o que provoca o não atendimento da demanda. Seja r o vetor dado por:

$$r = d - A\tilde{y},$$

o vetor r é chamado demanda residual.

Para atender totalmente a demanda, podemos gerar mais padrões de corte usando heurísticas (Lodi, Martello e Vigo, 2002), ou resolver novamente o problema (1.1) agora considerando uma demanda residual:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_j x_j \\ \text{s. a:} \quad & Ax = r \\ & x \geq 0 \text{ e inteiro} \end{aligned} \tag{1.16}$$

A resolução de (1.16) através do método *Simplex* com geração de colunas, impõe a consideração de padrões de corte restritos. Observe que, novamente podemos ter uma nova demanda residual, e assim um novo problema residual. Este procedimento é repetido até que o truncamento resulte na solução nula. Caso ainda haja demanda não atendida, uma heurística gulosa pode ser utilizada para atender a demanda restante (Pinto, 1999).

1.4.1 Método de Enumeração Implícita com Geração de Colunas

O Método de Enumeração Implícita com Geração de Colunas, também conhecido como *branch-and-price*, é um procedimento para resolver problemas de programação inteira com um grande número de variáveis. Trata-se do método *branch-and-bound* (Wolsey, 1998) com o uso da técnica de geração de colunas em cada nó da árvore de enumeração implícita (Barnhart et al., 1998). Por causa do grande número de variáveis, resolve-se a relaxação linear do problema inteiro com um número reduzido de colunas (problema mestre restrito). A otimalidade da solução é verificada com uso do problema *pricing*. Caso uma coluna seja encontrada para entrar na base, esta é adicionada ao problema mestre

que é reotimizado. Se não houver coluna candidata à base e a solução atual violar a restrição de integralidade, então são realizadas operações de ramificação (*branching*).

A dificuldade neste tipo de abordagem é que as restrições de ramificação convencionais podem afetar a estrutura do problema *pricing* tornando-o intratável. Por isto, esquemas especiais de ramificação devem ser desenvolvidos para não destruir a estrutura do subproblema de geração de coluna em cada nó da árvore *branch-and-bound*.

Vance (1998) estudou este procedimento em duas formulações para o problema do corte unidimensional (1/V/I/R). Este problema consiste em encontrar o número mínimo de objetos de comprimento L para atender uma demanda d_i de itens de comprimentos l_i , para $i = 1, \dots, m$. Consideremos a seguinte formulação para o problema:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K y_k \\
 \text{s. a:} \quad & \sum_{k=1}^K x_{ik} = d_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^m a_i x_{ik} \leq Ly_k \quad k = 1, \dots, K \\
 & y_k \in \{0, 1\} \quad k = 1, \dots, K \\
 & x_{ik} \geq 0 \text{ e inteiro } i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

sendo $y_k = 1$ se o objeto k é usado e $y_k = 0$ caso contrário, x_{ik} é o número de vezes que o item i é cortado no objeto k , e K é o número máximo de objetos em estoque. O primeiro conjunto de restrições exige que a demanda seja cumprida e o segundo exige que a soma dos comprimentos dos itens não supere o comprimento do objeto.

Aplicando o princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe no modelo (1.17),

a restrição

$$\sum_{i=1}^m a_i x_{ik} \leq Ly_k$$

para cada objeto k é substituída pela combinação convexa dos pontos extremos $(x_{1k}^j, \dots, x_{mk}^j)^T$ $j = 1, \dots, P$ do envoltório convexo de

$$\{x_{ik} : \sum_{i=1}^m a_i x_{ik} \leq Ly_k, \quad x_{ik} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

A formulação resultante é

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^K \lambda_k^j \\ \text{s. a:} \quad & \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^K x_{ik}^j \lambda_k^j = d_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^P \lambda_k^j = 1 \quad k = 1, \dots, K \quad (a) \\ & \sum_{j=1}^P x_{ik}^j \lambda_k^j \text{ inteiros} \quad k = 1, \dots, K \quad (b) \\ & \lambda_k^j \geq 0 \quad j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Se todos os objetos k tiverem o mesmo comprimento, o conjunto de padrões de corte factíveis para cada objeto k é idêntico. Neste caso, a formulação (1.18) pode ser simplificada. Consideremos todas as colunas que representam soluções viáveis para

$$\{x_{ik} : \sum_{i=1}^m a_i x_{ik} \leq Ly_k, \quad x_{ik} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, m\}$$

ao invés dos pontos extremos do envoltório convexo. Exigindo $\lambda_k^j \in \{0, 1\}$ as restrições de convexidade (a) e integralidade (b) de (1.18) podem ser omitidas. Vamos substituir x_{ik}^j por x_i^j e λ_k^j por variáveis inteiras μ^j de tal forma que:

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k^j = \mu^j \Rightarrow \sum_{k=1}^K x_{ik}^j \lambda_k^j = x_i^j \mu^j.$$

Logo, obtemos uma outra formulação, que foi introduzida na literatura por Gilmore e Gomory (1961):

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{j=1}^{P'} \mu^j \\
\text{s. a: } & \sum_{j=1}^{P'} x_i^j \mu^j = d_i \quad i = 1, \dots, m \\
& \mu^j \geq 0 \quad \text{e inteiro} \quad j = 1, \dots, P'.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Em seu estudo, Vance (1998) constatou que a relaxação linear de (1.18) e (1.19) oferecem o mesmo limitante para o valor da solução ótima inteira.

Na formulação de restrições de ramificação para os modelos (1.18) e (1.19) devemos encontrar uma restrição que elimine a solução atual fracionária e ofereça um problema *pricing* tratável. Para o modelo (1.18) uma solução da relaxação linear é infactível se,

$$\sum_{j=1}^P x_{ik}^j \lambda_k^{j*}$$

tem alguma componente $j = r$ fracionária, com valor α . Um esquema de ramificação é exigir que:

$$\sum_{j=1}^P x_{ik}^j \lambda_k^j \leq \lfloor \alpha \rfloor$$

ou

$$\sum_{j=1}^P x_{ik}^j \lambda_k^j \geq \lceil \alpha \rceil.$$

Estas restrições forçam o problema mestre restrito à eliminar, para cada objeto k , as colunas que violam o limitante superior $\lceil \alpha \rceil$ na componente r ou o limitante inferior $\lfloor \alpha \rfloor$. Quando um novo padrão de corte é gerado para o objeto k o limitante $\lceil \alpha \rceil$ ou $\lfloor \alpha \rfloor$ sobre a componente r é adicionado ao problema *pricing*. Neste caso, os subproblemas a serem resolvidos em cada nó da árvore de enumeração diferem somente pelos limitants impostos sobre suas variáveis.

As restrições de ramificação para o modelo (1.19) são bem mais complexas. Vanderbeck (1999) propôs restrições especiais para este caso, nas quais as colunas são obtidas por uma transformação binária do problema da mochila

(problema *princing*). Em seu estudo comparou estas restrições com outros esquemas propostos na literatura. Além disso, investigou a inclusão no algoritmo *branch-and-price* de técnicas consideradas eficientes para *branch-and-bound*, como planos de corte, heurísticas de arredondamento, limitantes, entre outras. Recentemente, Belov e Scheithauer (2003) também investigaram o uso de combinações do *branch-and-price* com planos de corte para o problema do corte unidimensional e bidimensional, e constataram que o uso destas técnicas separadamente são menos eficientes do que quando combinadas.

1.5 Geração de Padrões de Corte

A resolução do problema (1.14), gerar um padrão de corte, pode ser feita por diferentes estratégias e existem vários trabalhos com esse propósito (Fayard e Zissimopoulos (1995), Hifi e Zissimopoulos (1996), Alvarez-Valdés, Parajón e Tamarit (2002)). Em razão do grande número de padrões de corte possíveis em diversos problemas e considerando a existência de padrões de corte equivalentes, regras que possam diminuir o número de padrões de corte irrelevantes podem ser extremamente úteis. Christofides e Whitlock (1977), apresentaram algumas regras para evitar a construção de padrões de cortes equivalentes, diminuindo consideravelmente o número de padrões de cortes possíveis.

Efeitos de simetria

Considerando o retângulo (L, W) , se efetuarmos um corte em $x = l_1$ (figura 1.8) produziremos dois retângulos: (l_1, W) e $(L - l_1, W)$. Porém estes mesmos dois retângulos poderiam ser obtidos com o corte em $x = L - l_1$. Para evitarmos este tipo de duplicação, basta impor a condição $x \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$.

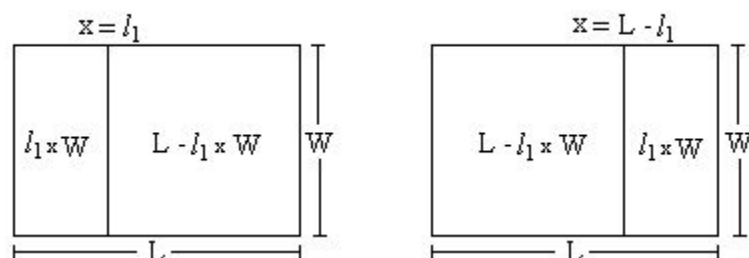


Figura 1.8: Efeito de simetria

Efeitos de Ordenação

Suponha que o retângulo (L, W) seja cortado em $x_1 = l_1$, produzindo (l_1, W) e $(L - l_1, W)$. Agora suponha que $(L - l_1)$ seja cortado em $x_2 = l_2$ ($l_1 < l_2 \leq \lfloor \frac{L-l_1}{2} \rfloor$), produzindo (l_1, W) , $(l_2 - l_1, W)$ e $(L - l_2, W)$. Estes mesmos três retângulos poderiam ser produzidos se considerássemos primeiro o corte em $x_1 = l_2$ e depois o corte em $x_2 = l_1$ em (l_2, W) . Para evitar este tipo de duplicação basta considerarmos a seguinte regra: se um corte é feito em $x = l_1$, todos os cortes seguintes devem ser feitos em $x > l_1$.

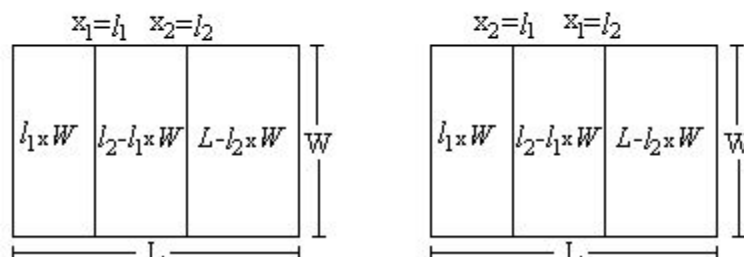


Figura 1.9: Efeitos de ordenação

Cortes Normais

Se o retângulo (L, W) é cortado verticalmente na posição $x = l_1$, então no padrão de corte final deve haver uma combinação de itens $i \in \mathcal{M}$ ($w_i \leq W$), tais que a soma de seus comprimentos seja exatamente l_1 . Caso isto não ocorra, um corte

na posição $x' \leq x$ pode ser feito levando ao mesmo modelo de corte final (figura 1.10).

Assim podemos reduzir os cortes verticais ao longo de L para o conjunto:

$$\mathcal{X} = \left\{ x : x = \sum_{i \in \mathcal{M}} \alpha_i l_i, \quad 1 \leq x \leq L - l_0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq d_i \text{ e inteiro} \right\}$$

sendo $l_0 = \min\{l_i, i \in \mathcal{M}\}$. Analogamente definimos \mathcal{Y} , o qual é o conjunto referente aos cortes horizontais ao longo da largura W .

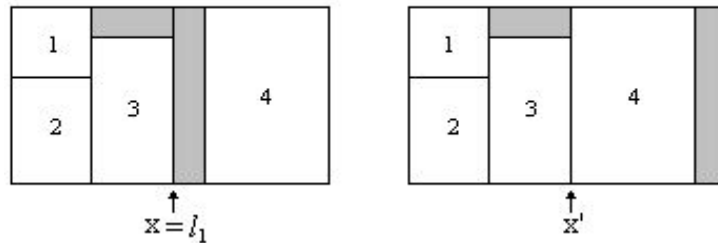


Figura 1.10: Padrão de corte normalizado

A utilização dos efeitos de simetria, ordenação e o corte normal reduzem consideravelmente o número de padrões de corte possíveis. Mas, ainda podemos ficar com um número extremamente grande de colunas, justificando assim a resolução do problema (1.1) pelo método *Simplex* com geração de colunas (seção 1.4) ou pelo método *branch-and-price* (página 20). Nas próximas seções discutimos os métodos para gerar padrões de corte propostos por Gilmore e Gomory (1965) e Morabito e Arenales (1996).

1.5.1 Método em Dois Estágios de Gilmore e Gomory

O método em dois estágios proposto por Gilmore e Gomory (1965) para a resolução do problema (1.14) consiste em dividir o objeto (L, W) em faixas ao longo do comprimento L (primeiro estágio). Em seguida cortar verticalmente as faixas a fim de produzir os itens (segundo estágio).

Suponhamos inicialmente que todos os itens a serem produzidos estejam organizados em ordem não-decrescente de largura, isto é:

$$w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq \dots \leq w_m.$$

Assim, para a geração do melhor padrão de corte - solução do problema (1.14), inicialmente são construídas faixas de largura w_i considerando apenas os itens do conjunto $W_i = \{j, w_j \leq w_i\}$. As faixas assim construídas implicarão na geração de padrões de corte em dois estágios não-exatos. Para a obtenção de padrões de corte em dois estágios exatos, as faixas devem ser construídas considerando os itens do conjunto $W_i = \{j, w_j = w_i\}$.

Logo, o primeiro estágio consiste em resolver para cada i o seguinte problema da mochila:

$$\begin{aligned} \pi_i^* = \max \quad & \pi_1 r_{i1} + \pi_2 r_{i2} + \pi_3 r_{i3} + \dots + \pi_k r_{ik} \\ \text{s.a:} \quad & l_1 r_{i1} + l_2 r_{i2} + l_3 r_{i3} + \dots + l_k r_{ik} \leq L \\ & r_{ik} \in \mathbb{Z}_+ \quad k \in W_i. \end{aligned}$$

E o segundo estágio consiste em resolver mais um problema da mochila:

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi_1^* t_1 + \pi_2^* t_2 + \pi_3^* t_3 + \dots + \pi_m^* t_m \\ \text{s.a:} \quad & w_1 t_1 + w_2 t_2 + w_3 t_3 + \dots + w_m t_m \leq W \\ & t_i \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Obtendo assim, o valor ótimo para (1.14). O padrão de corte A_j gerado é:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \text{ com } a_{ij} = \sum_{k=1}^m t_k r_{ik}$$

Portanto, gerar um padrão de corte corresponde a resolver $m + 1$ problemas da mochila. Utilizando técnicas de *programação dinâmica* (Hillier e Lieberman (1988), Antonio et al. (1999)) resolvemos os m problemas da mochila refe-

rentes ao primeiro estágio de uma só vez, e assim, a geração do padrão de corte se resume em resolver apenas **dois** problemas da mochila.

1.5.2 Estratégia de Busca em Grafo-E/OU

Nesta seção discutimos uma abordagem proposta por Morabito e Arenales (1996) referente ao problema do corte bidimensional guilhotinado - um estudo para o caso não-guilhotinado pode ser visto em Morabito e Arenales (1995).

Consideremos um retângulo $A = (L, W)$ (figura 1.11 a)) e um padrão de corte a ser produzido (figura 1.11 b)). Por meio de um corte vertical (guilhotinado) no retângulo A produzimos dois novos retângulos, B e C , chamados *sucessores* de A . Em seguida cortamos independentemente B e C produzimos novos retângulos: D e E - sucessores de B ; F e G - sucessores de C . Por fim, cortamos E produzindo H e I . Note que neste exemplo, B, C e E são retângulos intermediários e foram omitidos no padrão de corte (figura 1.11 b)). Os retângulos D, F, G, H são itens produzidos e o retângulo I corresponde a uma perda no padrão de corte. O grafo da figura 1.12 representa a seqüência de cortes que resultam no padrão de corte da figura 1.11 b).

Definição 1.2. (Definição de nó) *Cada retângulo gerado por um corte (horizontal ou vertical) será representado por um nó no grafo. No exemplo da figura 1.12, o nó A é chamado nó inicial. A cada retângulo gerado, temos um problema similar ao original a ser resolvido.*

Definição 1.3. (Definição de arco) *A decisão de cortar um retângulo (ramificar um nó) é representado por um arco- E que liga um nó aos seus nós sucessores. É necessário considerarmos um tipo de corte especial, que quando aplicado em um retângulo deixa-o intacto, chamado θ -cut. Qualquer nó obtido de um θ -cut que não permite arcos emanando dele é chamado nó final, por exemplo D, F, G, H, I na figura 1.12. Um nó final (l, w) tal que $l < \min\{l_i, i \in \mathcal{M}\}$ ou $w < \min\{w_i, i \in$*

\mathcal{M} aceita somente um θ -cut e representa perda em um padrão de corte (retângulo I).

O conjunto resultante formado pelo conjunto de nós e arcos é chamado grafo-E/OU.

Definição 1.4. (Caminho completo) Consideremos a seguinte seqüência de arcos em um grafo-E/OU: partindo do nó inicial escolha somente um arco (arco-E ou θ -cut), e de cada nó sucessor ligado a este nó escolha novamente somente um arco, e prossiga assim até que todos os nós sucessores sejam nós finais. Esta seqüência é chamada caminho completo. Se um nó final corresponde a um item, então seu valor é o peso daquele item (por exemplo a sua área), caso contrário seu valor é zero e é considerado perda. A soma dos valores dos nós de um caminho completo é o valor do caminho.

Existe uma função sobrejetora entre o conjunto de todos os caminhos completos em um grafo-E/OU e o conjunto de todos os padrões de corte, isto é,

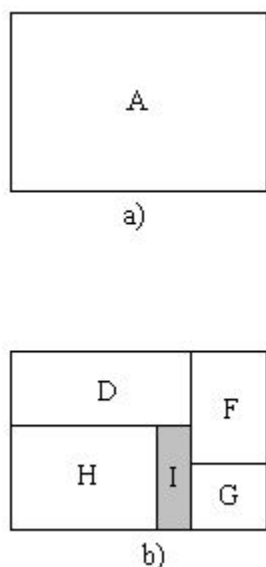


Figura 1.11: Padrão de corte

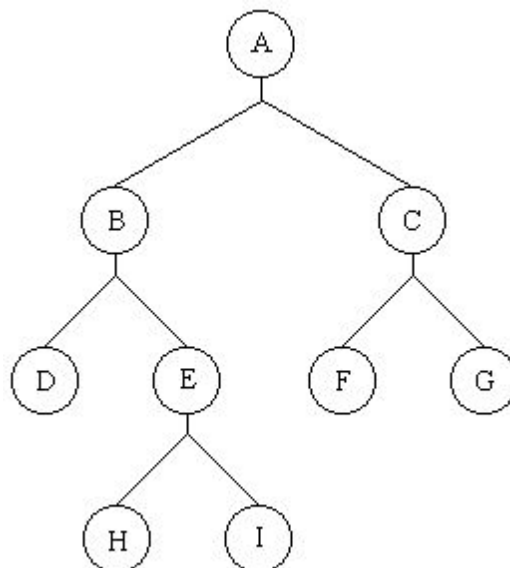


Figura 1.12: grafo-E/OU

para cada padrão de corte existe pelo menos um caminho completo cuja seqüência de arcos produz o padrão de corte (Morabito e Arenales, 1996).

Os autores propuseram a resolução do problema (1.14) através de uma estratégia de busca para encontrar o padrão de corte mais valioso no grafo-E/OU. Este tipo de abordagem conta com um obstáculo que cresce proporcionalmente com as dimensões do problema, ou seja, a enumeração completa de todos os nós é computacionalmente impraticável. Portanto, para que a resolução deste tipo de problema seja viável, precisamos de algumas regras para diminuir o espaço de busca, isto é, diminuir a quantidade dos padrões de corte viáveis que sejam equivalentes ou mesmo indesejáveis.

Morabito e Arenales (1996) descrevem em seu trabalho limitantes e heurísticas para reduzir o número de nós desinteressantes e também propõem a utilização das regras propostas por Christofides e Whitlock (1977) para se evitar os padrões de corte equivalentes.

Para percorrer o grafo-E/OU descrito acima, Morabito e Arenales combinaram duas estratégias: *BackTracking* (BT) e *HillClimbing* (HC) (Pearl, 1984).

- BT é uma variação de *depth-first search*. Ela sempre escolhe para explorar o nó recentemente gerado, e posteriormente retorna para explorar os demais nós.
- HC sempre escolhe o melhor sucessor e descarta os nós restantes.

Impondo um limite de profundidade *depth bound* (DB) em BT, as estratégias BT e HC podem ser combinadas gerando primeiro todos os nós acima do DB mediante BT, e então escolhemos o melhor caminho completo segundo HC.

Algoritmo BT-HC

- 1: Seja RAIZ uma lista que contenha inicialmente somente o nó inicial. Um nó em RAIZ é chamado nó-raiz. Defina DB como um limite de profundidade para cada expansão de um nó-raiz.

2: Enquanto RAIZ é diferente de vazio, faça:

3: Seja s o primeiro nó pertencente a RAIZ. Gere todos os sucessores de s , usando a estratégia BT e respeitando DB. Tire s de RAIZ.

4: Escolha o caminho mais valioso partindo de s e descarta os caminhos restantes, usando a estratégia HC. Se um nó deste caminho está a uma profundidade igual a DB e não é um nó final, coloque-o em RAIZ.

No passo 3, a geração dos sucessores do nó-raiz s deve considerar as regras propostas por Christofides e Whitlock (1977), o método *branch-and-bound* e eventualmente alguma heurística para a redução do espaço de busca.

Segundo Morabito e Arenales (1996), uma vantagem na utilização do algoritmo BT-HC é a baixa exigência de memória computacional em relação as técnicas mais usuais baseadas em programação dinâmica de Gilmore e Gomory (1965).

Capítulo 2

A Indústria de Móveis na Região Noroeste do Estado de São Paulo

Neste capítulo apresentamos algumas das características da indústria de móveis no Brasil e do pólo moveleiro de Votuporanga-SP. Para isto, utilizamos como fonte o trabalho de Stipp (2002). Com base em visitas realizadas à algumas empresas de Votuporanga e trabalhos da literatura, descrevemos aspectos gerais do planejamento da produção nestas indústrias. O enfoque é no corte da matéria-prima e sua relação com o problema do corte bidimensional discutido no Capítulo 1. Por fim, apresentamos uma proposta para o planejamento da produção que envolve o acoplamento de dois problemas que na prática são resolvidos separadamente: o *problema de dimensionamento de lotes* e o *problema de corte de estoque*.

2.1 A Indústria de Móveis no Brasil

A indústria de móveis no Brasil é caracterizada pelo uso de várias matérias-primas, diferentes tecnologias e a manufatura de grande diversidade de produtos. Existem diferentes padrões de organização industrial e produtores especializados em certos produtos. É comum a coexistência de equipamentos modernos e obsoletos em algumas fábricas.

De acordo com os produtos manufaturados e dos diversos mercados pode-se classificar as indústrias em: móveis para residências, móveis para escritórios e móveis especiais (específicos para a indústria aeronáutica, automobilística e aplicações médicas). Em relação à matéria-prima uma outra divisão torna-se possível: móveis de metal, madeira, junco, estofados, e outros.

O enfoque deste trabalho está no estudo do planejamento da produção em indústrias de móveis de madeira residenciais. Este segmento da indústria pode ainda ser classificado em dois grandes grupos:

- a) Indústria de móveis torneados;
- b) Indústria de móveis retilíneos.

Os móveis torneados apresentam uma mistura de formas retilíneas e curvilíneas, sendo a principal matéria-prima a madeira bruta (cerejeira, mogno, imbuia) ou de reflorestamento (pinus, eucalipto). Os móveis retilíneos de madeira são lisos e geralmente apresentam um *design* simples. A principal matéria-prima usada pode ser o Aglomerado, o Compensado, o MDF (*medium density fiberboard*) ou OSB o (*oriented strand board*).

O segmento de móveis retilíneos é o mais avançado tecnologicamente. Nos últimos anos, os painéis de fibra de madeira, as vezes chamados de *hardboard* (Morabito e Garcia, 1998) como é o caso do MDF e o OSB, vem ganhando espaço entre as indústrias do setor. A preferência por estes materiais se justifica no fato de que, por causa da consistência e densidade, o MDF e o OSB podem receber alguns dos tratamentos dados à madeira maciça. Assim, é possível um melhor acabamento e inovações no *design* dos produtos, algo que os outros tipos de painéis não permitem. Entretanto, estes materiais possuem um alto custo e exigem um maior investimento em máquinas. Portanto, é fundamental para os produtores um bom aproveitamento destes materiais, o que exige um melhor planejamento na elaboração dos padrões de corte.

Uma outra característica da indústria de móveis no Brasil é que, apesar de dispersa geograficamente, apresenta uma concentração em **Pólos regionais**, como os pólos de Mirassol e Votuporanga, situados na região Noroeste do estado de São Paulo. As regiões Sul e Sudeste do país (RS, SC, ES, PA, SP, MG, RJ) são detentoras dos principais pólos moveleiros do Brasil.

2.2 O Pólo Moveleiro de Votuporanga

A cidade de Votuporanga (em tupi-guarani: Votu = brisa, ar; Poranga = suave, bonita) está localizada a uma distância de 520 km da capital do estado. Fundada em 1935, conquistou a condição de município em 30 de novembro de 1944, anos depois de ter sido elevada a distrito de Tanabi.

Fatores como a cultura do café, o avanço da estrada de ferro Alta Araraquarense e a rota de gado proveniente do Mato Grosso com destino à barretos contribuíram no passado para a aglomeração de pessoas na região. Rica em mata nativa, a região possuía várias espécies de madeira de lei (cedro, jequitibá, aroeira, peroba, entre outras), este cenário contribuiu para o surgimento das primeiras serrarias e posteriormente para as primeiras fábricas de móveis, que naquela época apresentavam um caráter artesanal.

Hoje em dia o cenário de produção de um móvel é bem diferente, pois o aspecto artesanal quase já não existe, superado por meios que permitem alta produção, boa variedade de produtos, processos rápidos e principalmente mão-de-obra menos especializada e conseqüentemente um custo de produção menor. Este tipo de cenário, em que os trabalhadores realizam poucas tarefas, simples e repetitivas, foi introduzido na região em 1962 com a fundação da Indústrias de Móveis A. B. Pereira (ainda hoje a maior fábrica de região).

Iniciativas como a criação do Plano de Amparo e Incentivo Industrial de Votuporanga em 1970 (I PLAMIVO) ¹ e posteriormente da AIRVO (Associação

¹Autorizando a prefeitura a doar terrenos e promover incentivos fiscais.

Industrial de Votuporanga) reforçando culturas de cooperação, levaram o crescimento do pólo moveleiro de Votuporanga até o patamar de segundo maior pólo moveleiro do país já na década de 90, sendo que o primeiro é o pólo moveleiro de Bento Gonçalves (RS).

2.3 A Linha de Produção de um Móvel

Os processos na produção de um móvel de madeira, em particular do tipo retilíneo, não variam muito entre as pequenas e médias empresas de Votuporanga. A linha de produção descrita a seguir é baseada nas informações colhidas na Empresa de Móveis Luapa, e não difere muito da encontrada nas empresas visitadas. As principais diferenças estão em estágios específicos de algum produto ou na modernidade de certos equipamentos. Basicamente, a principal matéria-prima usada é o painel de madeira, mas existe a possibilidade da utilização da madeira bruta em alguns móveis. Entretanto, a madeira bruta vem pré-cortada dos fornecedores e assim não entra no processo de corte que estamos interessados.² Desconsiderando por enquanto o desenvolvimento do produto, o primeiro passo a ser realizado na produção são cortes nos painéis de madeira. Geralmente, esta etapa é feita por uma seccionadora, que é uma máquina própria para o corte de painéis. Sua utilização permite uma produção mais rápida devido a possibilidade de cortes em vários painéis simultaneamente. Este tipo de equipamento é capaz de realizar apenas cortes guilhotinados, produzindo assim, somente itens retangulares.

Os itens produzidos na seccionadora vão para o setor de usinagem, que é responsável pelos processos que darão outros formatos a estas peças por meio de serras e ferramentas específicas. Nesta etapa são realizadas também operações de furações e frezza (um tipo de acabamento para tirar as irregularidades prove-

²A madeira é cortada apenas em seu comprimento, não caracterizando assim o corte bidimensional.

nientes da usinagem) e a colagem ou colocação de bordas. Os componentes seguem então para o setor de pintura e posteriormente para a colocação de acessórios (puxadores das portas e gavetas, fechaduras). Os produtos então são levados para o setor de estoque onde são armazenados em caixas específicas (alguns produtos são armazenados montados). Um esquema da linha de produção é apresentado na figura 2.1.

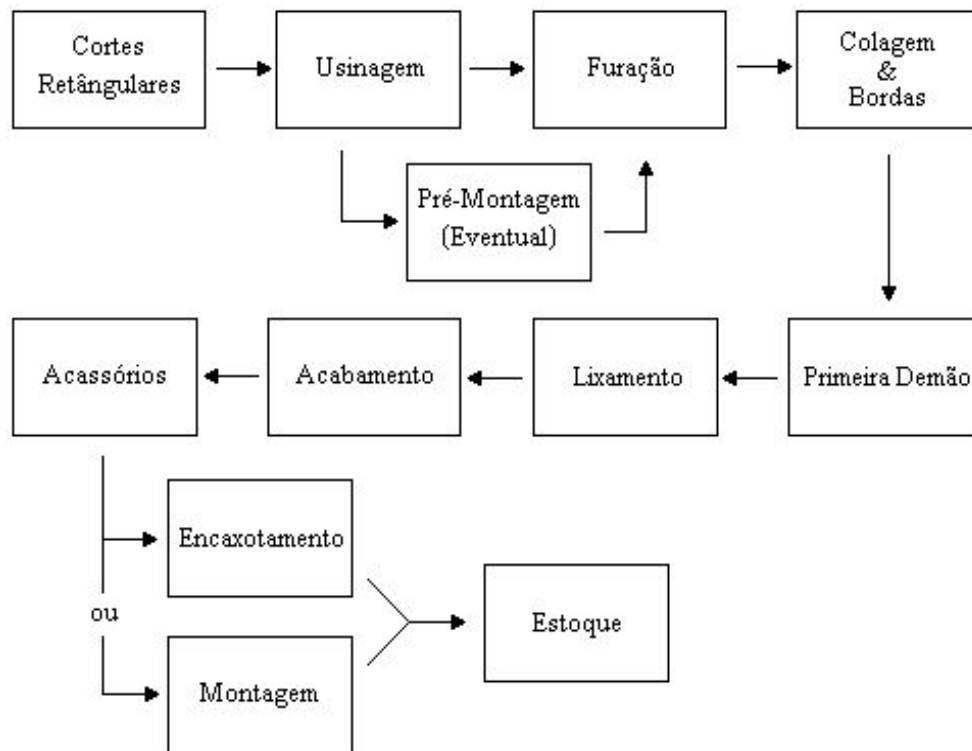


Figura 2.1: Linha de produção em uma fábrica de móveis

2.3.1 O Corte da Matéria-Prima

O corte da matéria-prima nas indústrias de móveis retilíneos requer uma atenção especial por parte dos produtores. Desta etapa dependem o custo dos produtos e a velocidade da produção. A larga utilização de painéis de madeira, aliada ao fato de que estes painéis provém de fornecedores diferentes, e portanto, possuem

variações de preço, qualidade e dimensões, exigem um estudo cuidadoso no corte destes objetos, pois o desperdício de material afeta significativamente o custo final do produto. Uma prática comum nas empresas do pólo moveleiro de Votuporanga para minimizar a perda de matéria-prima é determinar as dimensões dos móveis de acordo com as dimensões dos painéis utilizados. Ocorrendo alterações nas medidas dos painéis, os móveis podem ter suas especificações alteradas também.

O sucesso no corte da matéria-prima está fortemente associado à eficácia dos padrões de corte utilizados. A aplicação de um modelo do problema do corte bidimensional nas indústrias de móveis, está sujeita a consideração de alguns fatores tais como: o objetivo a ser alcançado, imposições da máquina de corte, produtividade, características dos objetos a serem cortados, entre outros. Além disso, cada indústria tem seu conjunto particular de restrições e a consideração de algumas destas restrições dependem do objetivo do estudo realizado.

No modelo (1.1) da página 9, todos os objetos em estoque são iguais (2/V/I/R). Entretanto, isto pode não ser válido nas indústrias de móveis, onde a matéria-prima varia segundo os fornecedores. Além disso, o estoque pode não ser suficiente para o atendimento da demanda. Para representar estas situações é necessário fazer algumas adaptações no modelo (1.1). Em Morabito e Arenales (2000) encontramos um modelo que representa este tipo de cenário (2/V/D/R). Considerando:

- K número de tipos de objetos
- $L_k \times W_k$ tamanho dos objetos do tipo k , $k = 1, 2, \dots, K$
- D_k quantidade disponível de objetos do tipo k , $k = 1, 2, \dots, K$
- c_k custo unitário do objeto do tipo k , $k = 1, 2, \dots, K$
- n_k número de padrões de corte associados ao objeto k , $k = 1, 2, \dots, K$
- m número de tipos de itens
- $l_i \times w_i$ tamanho dos itens do tipo i , $i = 1, 2, \dots, m$
- d vetor m -dimensional de demanda dos itens do tipo i , $i = 1, 2, \dots, m$
- A_j^k padrão de corte j associado ao objeto k , $k = 1, 2, \dots, K$, $j = 1, 2, \dots, n_K$

o modelo é

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{j=1}^{n_1} c_1 x_{j1} + \sum_{j=1}^{n_2} c_2 x_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{n_K} c_K x_{jK} \\
\text{sujeito a:} \quad & \sum_{j=1}^{n_1} A_j^1 x_{j1} + \sum_{j=1}^{n_2} A_j^2 x_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{n_K} A_j^K x_{jK} = d \\
& \sum_{j=1}^{n_1} x_{j1} \leq D_1 \\
& \sum_{j=1}^{n_2} x_{j2} \leq D_2 \\
& \vdots \\
& \sum_{j=1}^{n_K} x_{jK} \leq D_K \\
& x_{jk} \geq 0, \quad \text{inteiros}, \quad j = 1, \dots, n_k, \quad k = 1, \dots, K
\end{aligned} \tag{2.1}$$

A variável de decisão x_{jk} representa o número de objetos do tipo k cortados usando padrão de corte j .

O custo ($c_k, k = 1, \dots, K$) atribuído a cada objeto pode representar diferentes situações: o preço segundo o fornecedor; o “peso” dado ao tipo de painel preferido, os painéis com melhor qualidade e que ofereçam um melhor acabamento podem ter um peso menor do que os de qualidade inferior; a perda em cada padrão de corte. Neste último caso, o custo associado à cada objeto k é

$$c_k = L_k W_k - \sum_{i=1}^m l_i w_i a_{ij}^k, \tag{2.2}$$

isto é, a perda do padrão de corte j usando o objeto k . Na expressão (2.2), a_{ij}^k representa o número de itens do tipo i no padrão de corte j associado ao objeto k .

A qualidade dos padrões de corte, está sujeita às restrições do equipamento de corte e aos critérios dos produtores. A maioria dos equipamentos utilizados neste tipo de indústria só realizam cortes guilhotinados. O número de estágios é outro fator que afeta a qualidade dos padrões de corte, podemos ter

padrões de corte com n -estágios, mas na prática encontramos a utilização de padrões de corte com dois, três ou quatro estágios, sendo mais comum os padrões de corte em dois estágios (Hifi e Zissimopoulos (1996), Klempous, Kotowski e Szlachcic (1996), Morabito e Garcia (1998)).

A preferência por padrões de corte em dois estágios se justifica pelo tempo de processamento das máquinas para efetuar tais cortes. Como os padrões de corte em três estágios exigem uma etapa a mais para serem processados, o tempo total gasto para a realização de todos os cortes será maior em um padrão de corte em três estágios comparado ao de dois estágios. Assim, para que a produtividade não seja muito afetada, a maioria das empresas preferem os padrões de corte em dois estágios. Por outro lado, padrões de corte em três ou quatro estágios possibilitam um melhor aproveitamento dos painéis, o que significa menor perda de material.

O balanço entre a perda de material e o tempo de produção é um aspecto bastante interessante e importante para as indústrias (Morabito e Arenales, 2000), pois a perda de material aumenta o custo final dos produtos e o processo de corte dos painéis pode ser o “gargalo” de uma produção.

Outra imposição proveniente do equipamento a ser considerada é a espessura da serra. De uma maneira geral, a espessura das serras encontradas nas máquinas variam de 4.2 mm a 5 mm . Para considerarmos a perda provocada pela espessura da serra basta adicionarmos nos tamanhos dos objetos e dos itens o devido valor (Morabito e Arenales, 2000). Isto é, consideremos que a espessura da serra seja σ , os tamanhos dos objetos e dos itens devem ser ajustados respectivamente para:

$$(L_k + \sigma) \times (W_k + \sigma) \quad \text{e} \quad (l_i + \sigma) \times (w_i + \sigma). \quad (2.3)$$

Caso a espessura da serra seja desconsiderada em problemas práticos, os padrões de corte produzidos podem ser impossíveis de serem reproduzidos na prática (este fato será rediscutido na seção 3.4).

2.4 Planejamento da Produção

Nas indústrias de móveis, além da perda de material no corte da matéria-prima e o custo que isto provoca nos produtos finais, existem outros custos que poderiam ser tratados juntamente com o corte da matéria-prima. Mas, na prática estes custos são tratados separadamente, trata-se dos custos de estoque e dos custos de preparação das máquinas (*setup*).

Os custos de estoque e preparação das máquinas são balanceados pela decisão da quantidade de produtos finais (móveis) que devem ser produzidos ao longo de um horizonte de planejamento. Antecipando a produção de alguns produtos finais, os custos associados à preparação das máquinas e ao corte podem ser minimizados. Por outro lado, os custos de estoque podem aumentar, forçando um retardamento da produção. O problema de decidir a quantidade de produtos fabricados é conhecido na literatura como *problema de dimensionamento de lotes* (Trigeiro, Thomas e McClain (1989), Araujo e Arenales (2000), Ferreira (2002)).

Minimizar os custos de estoque e preparação das máquinas separadamente da otimização do processo de corte pode elevar os custos globais. Assim, um estudo na tentativa de otimizar conjuntamente o problema de dimensionamento de lotes e o problema de corte de estoque pode ser economicamente interessante para as empresas.

Gramani (2001) estudou a fusão desses dois problemas, que denominou de Problema Combinado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque, ou simplesmente **Problema Combinado**. Obviamente, a junção de dois problemas de difícil resolução gera um problema combinado muito mais difícil de resolver, pois em consequência das restrições de acoplamento, uma solução ótima para o problema combinado provavelmente não será uma simples composição de cada solução ótima dos problemas separados. Em seu estudo, Gramani apresenta um modelo geral para o problema combinado e propõe três variações deste problema e suas respectivas estratégias de resolução. Além disso, a autora compara o

resultados destes métodos com a resolução dos dois problemas separadamente. Apresentaremos aqui, o modelo geral e uma das variações do problema propostos por Gramani (2001).

2.4.1 Modelo Geral para o Problema Combinado

O problema combinado consiste em decidir a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período do horizonte de planejamento, que minimize não somente os custos de produção, preparação e estocagem (problema de dimensionamento de lotes), mas também a quantidade de objetos a serem cortados (problema de corte de estoque).

O modelo que será apresentado considera as seguintes hipóteses:

- i)* Apenas um tipo de objeto ($L \times W$) e em quantidade suficiente para atender a demanda;
- ii)* O período considerado será um turno de trabalho em uma indústria;
- iii)* Haverá custo de preparação se houver produção em determinado turno.

Consideremos também, as seguintes definições:

P : número de produtos finais a serem produzidos

T : número de períodos

m : número de tipos de itens a serem cortados

n : número de padrões de corte para o objeto ($L \times W$)

c_{pt} : custo de produção do produto final p no período t

h_{pt} : custo de estocagem do produto final p no período t

cp : custo do objeto

hp_{it} : custo de estocagem do item do tipo i no período t

d_{pt} : demanda do produto final p no período t

r_{ip} : número de itens do tipo i necessários para formar uma unidade do produto final p

v_j : tempo gasto para cortar um objeto no padrão de corte j

C_t : tempo limite para o corte dos objetos em cada período t

s_{pt} : custo de preparação para produzir o produto final p no período t

a_{ij} : número de itens do tipo i no padrão de corte j

x_{pt} : quantidade do produto final p produzido no período t

I_{pt} : quantidade do produto final p em estoque no fim do período t

IP_{it} : quantidade de itens do tipo i em estoque no fim do período t

y_{jt} : quantidade de objetos cortados usando o padrão de corte j no período t

Q : constante de valor alto

z_{pt} : variável binária:

$$z_{pt} = \begin{cases} 1 & \text{se as máquinas estão preparadas para a produção do produto } p \text{ no período } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Existe uma relação importante a ser considerada no problema combinado, que surge entre a demanda de um produto final (móvel) e a demanda de itens (seus componentes). Tendo conhecida a produção dos produtos finais, é simples obter a demanda de seus itens, expressa por $\sum_{p=1}^P r_{ip}x_{pt}$, sendo r_{ip} a quantidade de itens do tipo i para produzir uma unidade do produto do tipo p , e x_{pt} é a quantidade produzida do produto p no período t . Para modelar esse problema, consideremos as seguintes restrições:

BALANÇO DE ESTOQUE DE PRODUTOS FINAIS: esse conjunto de restrições considera o balanço de estoque de produtos finais e assegura o atendimento da demanda em cada período:

$$x_{pt} + I_{p,t-1} - I_{pt} = d_{pt} \quad i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T$$

BALANÇO DE ESTOQUE DAS PEÇAS: esse conjunto de restrições garante a produção dos itens necessários para fabricação dos produtos finais em cada período:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_{jt} + IP_{i,t-1} - IP_{it} = \sum_{p=1}^P r_{ip} x_{pt} \quad i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T$$

CAPACIDADE DA SERRA: esse conjunto de restrições limita o corte de objetos respeitando o tempo limite da serra:

$$\sum_{j=1}^n v_j y_{jt} \leq C_t \quad t = 1, \dots, T$$

PRODUÇÃO: esse conjunto de restrições garante que só haverá produção ao longo do período t se as máquinas estiverem preparadas:

$$x_{pt} \leq Q \cdot z_{pt} \quad t = 1, \dots, T$$

Assim, o modelo para o problema combinado com o objetivo de minimizar o custo total: custo da produção (c_{pt} , h_{pt} , s_{pt}) somado ao custo do processo de corte (cp , hp_{it}), pode ser descrito como:

$$\min \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T (c_{pt} x_{pt} + h_{pt} I_{pt} + s_{pt} z_{pt}) + \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T hp_{it} IP_{it}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a: } & x_{pt} + I_{p,t-1} - I_{pt} = d_{pt} && p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} y_{jt} + IP_{i,t-1} - IP_{it} = \sum_{p=1}^P r_{ip} x_{pt} && i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T \\ & \sum_{j=1}^n v_j y_{jt} \leq C_t && t = 1, \dots, T \\ & x_{pt} \leq Q \cdot z_{pt} && t = 1, \dots, T \\ & x_{pt}, I_{pt} \geq 0 && p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T \\ & y_{jt} \geq 0 \text{ e inteiros} && j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \\ & IP_{it} \geq 0 && i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T \\ & z_{pt} \in \{0, 1\} && p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T. \end{aligned} \tag{2.4}$$

O modelo combinado reúne três fatores que dificultam sua resolução: a integralidade das variáveis y_{jt} ; as variáveis binárias de preparação z_{pt} e a grande quantidade de padrões de corte possíveis.

2.4.2 Problema Combinado sem Custo de Preparação

Uma das variações propostas por Gramani (2001) consiste em considerar o modelo geral (2.4) com as seguintes alterações:

- i) desconsiderar os custos de preparação;
- ii) relaxar a integridade das variáveis y_{jt} .

Devido a estas alterações, o modelo resultante (descrito a seguir) é adequado para situações em que os custos de preparação das máquinas são irrelevantes e além disso, a relaxação da restrição de integralidade sobre as variáveis y_{jt} sugere altas demandas em cada período, pois desta forma, o arredondamento das soluções encontradas para y_{jt} torna-se satisfatório. O modelo segundo as alterações i) e ii) pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T (c_{pt}x_{pt} + h_{pt}I_{pt}) + \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T cp \cdot y_{jt} + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T hp_{it}IP_{it} \\
\text{sujeito a:} \quad & x_{pt} + I_{p,t-1} - I_{pt} = d_{pt} && p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T \\
& \sum_{j=1}^n a_{ij}y_{jt} + IP_{i,t-1} - IP_{it} = \sum_{p=1}^P r_{ip}x_{pt} && i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T \\
& \sum_{j=1}^n v_j y_{jt} \leq C_t && t = 1, \dots, T \\
& x_{pt}, I_{pt} \geq 0 && p = 1, \dots, P; t = 1, \dots, T \\
& y_{jt} \geq 0 && j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \\
& IP_{it} \geq 0 && i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Considerando as alterações i) e ii) o modelo geral tornou-se um modelo de programação linear, mas continuou oferecendo dificuldade na resolução devido ao grande número de padrões de corte possíveis. Sendo assim, para a resolução do novo modelo (2.5) foi proposto o método *Simplex* com geração de colunas.

Para facilitar a notação vamos reescrever o modelo (2.5) como se segue:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{t=1}^T (c_t x_t + h_t I_t) + \sum_{t=1}^T cp \cdot y_t + \sum_{t=1}^T hp_t IP_t \\
 \text{sujeito a: } \quad & d_t = x_t + I_{t-1} - I_t & t = 1, \dots, T \\
 & 0 = -R x_t + A y_t + IP_{t-1} - IP_t & t = 1, \dots, T \\
 & C_t \geq V y_t & t = 1, \dots, T \\
 & y_t \geq 0 & t = 1, \dots, T \\
 & x_t, I_t \geq 0 \text{ e } I_0 \text{ conhecido} & t = 1, \dots, T \\
 & IP_t \geq 0 \text{ e } IP_0 \text{ conhecido} & t = 1, \dots, T
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

sendo A uma matriz $m \times n$ tal que cada coluna corresponde a um padrão de corte.

Assim, para a resolução do modelo (2.6), o método *Simplex* com geração de colunas deve ser iniciado substituindo a matriz A pela matriz formada pelos padrões homogêneos H , e o método segue de acordo com o seguinte algoritmo:

1. Leia $(c_t, cp_t, h_t, ph_t, C_t, R, H, V)$; $A^0 \leftarrow H$; $k = 0$; Pare=Falso

Enquanto Pare=Falso faça:

Início (1)

2. Resolva o modelo (2.6) com $A = A^k$;
3. Seja π_t o multiplicador obtido no passo 2.

Resolva os T problemas a seguir:

para $t = 1$ até T faça

Início (2)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \pi_t A_j^t \\
 \text{s. a: } \quad & A_j^t \text{ corresponde a um padrão de corte}
 \end{aligned}$$

Fim (2)

4. Escolha a melhor coluna A_j^t com o menor custo relativo;
5. Se o custo relativo da coluna escolhida for não negativo, a solução atual é ótima para o problema global, então Pare=Verdade;

6. Caso contrário, se o custo relativo da coluna escolhida for negativo, inclua essa coluna na matriz de restrições do problema, faça $k = k + 1$ e volte ao passo 2.

Fim (1)

Em seu estudo, Gramani (2001) constatou que o problema combinado antecipa a produção de certos lotes de itens, aumentando os custos de estoque, mas obtendo uma vantajosa diminuição na quantidade de objetos usados. Desta forma, quando comparada a resolução do problema combinado com a resolução separada dos problemas de dimensionamento de lotes e de corte de estoque, os resultados (diminuição dos custos globais) são favoráveis ao problema combinado.

Capítulo 3

Estudo Computacional

Neste capítulo, fazemos um estudo da aplicação do sistema *CorteBi* (Rangel e Perin, 1989), desenvolvido para a resolução do problema do corte bidimensional (2/V/I/), na indústria moveleira. Apresentamos as modificações feitas no sistema para adaptá-lo as particularidades deste tipo de manufatura e os resultados computacionais obtidos utilizando o *CorteBi* para resolver problemas com base nos dados de uma empresa do pólo moveleiro de Votuporanga.

As características das empresas visitadas e alguns de seus problemas discutidos neste capítulo, enfatizam que o uso de uma ferramenta computacional específica para a construção dos padrões de corte pode contribuir para agilizar o desenvolvimento dos produtos (*design*), o planejamento da produção e a tomada de decisão na compra da matéria-prima.

3.1 As Empresas Visitadas

No período de fevereiro de 2003 a fevereiro de 2004 foram feitas visitas a diversas empresas da região Noroeste do estado de São Paulo.

Elued

A empresa Elued é de pequeno porte e se limita à fabricação de camas e alguns tipos de criado-mudo. A elaboração dos padrões de corte é manual e as dimensões dos móveis são planejadas de forma a minimizar o desperdício de material.

A principal matéria-prima utilizada é madeira bruta pré-cortada, mas o MDF também é utilizado em pequena quantidade. Esta empresa não possui seccionadora devido ao baixo uso de MDF, $50 m^3/mês$.¹

Cosmo

A Cosmo é a maior empresa visitada, aqui não só o tamanho da empresa é significativo, mas também o alto nível de informatização do maquinário utilizado e do planejamento da produção. Quanto a matéria prima, esta indústria utiliza aglomerados, compensados, MDF, madeira-bruta e lâminas de madeira.

O padrão de corte é elaborado com o auxílio de uma ferramenta computacional específica. Existe um banco de dados dos produtos, itens e dimensões, assim como as dimensões e a quantidade em estoque dos objetos. O padrão de corte obtido com o aplicativo não atende a certos detalhes da linha de produção da empresa, sendo necessário um ajuste manual. A informatização do planejamento dos padrões de corte permite que, ao contrário de outras, esta empresa planeje seus móveis independentemente das dimensões da matéria-prima. Primeiro são planejados os móveis considerando a estética, depois fazem um protótipo e em seguida se for aprovado é então feito o estudo para os padrões de corte. Os padrões de corte são armazenados na seccionadora que é informatizada. Apenas o processo de rotação das placas para o corte é manual, porém determinado pela máquina.

Nesta empresa a furação e frezza são feitas em uma mesma máquina informatizada. Uma pintura manual é feita nas bordas dos itens. Os itens são

¹Dados da visita realizada em 24/02/2003.

acumulados antes que a pintura das partes planas seja feita. Esta pintura é realizada por uma máquina cujo custo operacional é alto e portanto quando ligada trabalha o dia todo sem folgas.

3.2 A Empresa de Móveis Luapa

A Empresa de Móveis Luapa (Luapa) produz apenas móveis residenciais de madeira retilíneos, sendo seus principais produtos armários de 3,4 ou 5 portas, camas (solteiro e casal), cômodas e criados.² Todos em 3 tipos de acabamento (mogno, marfim, cerejeira). Em sua linha de produção contam com uma máquina seccionadora manual operada por dois funcionários para os cortes dos painéis. A produção média mensal desta empresa é de 20 lotes (um por dia) - totalizando 1000 móveis. Um exemplo de produção mensal pode ser:

- 1 lote de criado;
- 2 lotes de cômoda;
- 3 lotes de camas;
- 14 lotes de armário (entre 3P, 4P e 5P).

A produção varia de acordo com os pedidos e o estoque da empresa. No entanto, um dia de trabalho sempre corresponde a fabricação de somente um móvel (um lote). A quantidade de móveis (peças) em um lote independe dos pedidos ou do estoque, mas existe uma variação nesta quantidade de acordo com épocas de maior (final de ano) ou menor venda, como pode ser constatado na tabela 3.1.

A criação dos padrões de corte nesta empresa é feita manualmente pelo gerente de produção. O software CAD é usado para o desenhar os padrões de corte. Porém todo o processo de alocação dos itens no objeto é feito “mentalmente” pelo responsável. Uma planilha de cálculo é usada como banco de dados

²Última visita em fevereiro de 2004.

Tabela 3.1: Variação dos lotes entre agosto e novembro

| | agosto(2003) | novembro(2003) |
|----------------------|---------------------|-----------------------|
| 1 lote de Armário 3p | 40 peças | 60 peças |
| 1 lote de Armário 4p | 35 peças | 50 peças |
| 1 lote de Armário 5p | 30 peças | 40 peças |
| 1 lote de Criado | 300 peças | 350 peças |
| 1 lote de Cômoda | 100 peças | 120 peças |
| 1 lote de Camas | 150 peças | 150 peças |

e armazena dados referentes aos móveis produzidos pela fábrica: seus itens, dimensões e quantidades dos itens, assim como a especificação do tipo de material a ser utilizado. Este profissional utiliza todo seu conhecimento para elaborar os padrões de corte que sejam interessantes segundo alguns critérios. De acordo com os critérios usados, um bom padrão de corte deve possuir duas características principais.

A primeira delas, é que o padrão de corte não deve baixar a produtividade, ou seja, um padrão de corte que contenha vários itens diferentes exige muitos ajustes na seccionadora (um para cada medida a ser cortada), além da movimentação do painel para que os cortes sejam realizados nas duas direções (horizontal e vertical). Esta movimentação é feita manualmente por dois funcionários, assim, caso um padrão de corte tenha itens com medidas variadas, seu corte torna-se trabalhoso e atrasa a produtividade. A seccionadora da Luapa permite apenas dois ajustes diferentes, então um bom padrão de corte deve conter no máximo dois itens com medidas distintas. Em alguns casos, é possível conseguir bons padrões de corte com mais de dois itens diferentes, mas neste caso, procura-se utilizar itens com algumas medidas iguais. O padrão de corte ilustrado na figura 3.1, é composto por quatro itens diferentes, mas três deles (1, 2 e 3) possuem a mesma largura (452 *mm*). Assim para o corte das faixas é

necessário apenas um ajuste na seccionadora. Em seguida cada faixa é cortada verticalmente, exigindo também poucos ajustes.

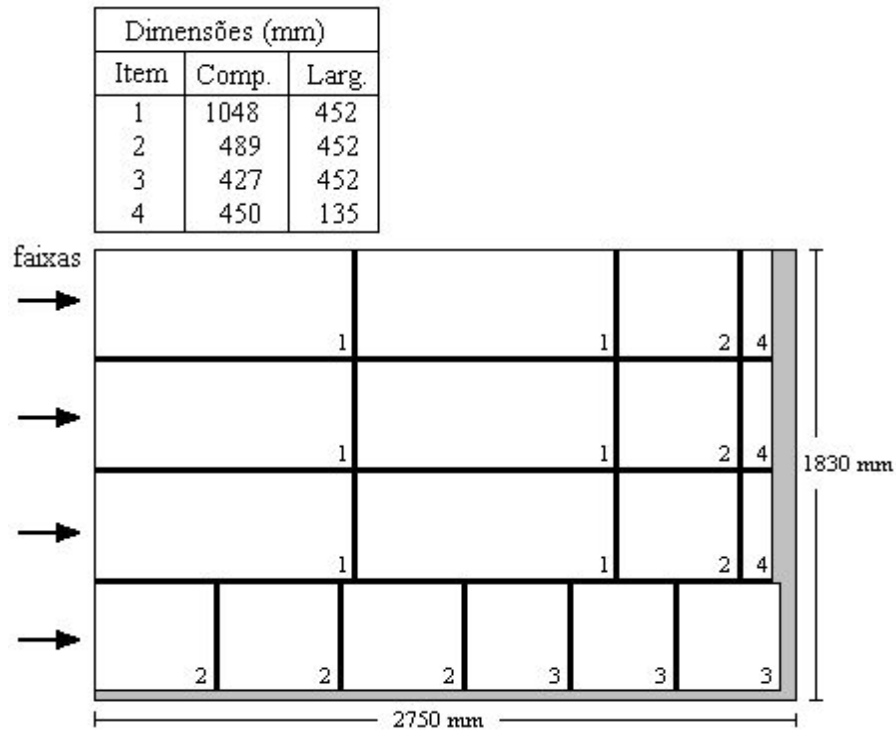


Figura 3.1: Um padrão de corte da Luapa

O segundo critério levado em conta na elaboração de um bom padrão de corte é referente a perda de material. Segundo o gerente de produção da Luapa, o tolerável é 6% de perda por padrão de corte. A perda por padrão de corte é calculada segundo a expressão (3.1) abaixo.

$$\text{perda no padrão de corte } j = 100 \cdot \left[1 - \left(\frac{\sum_{i \in A_j} l_i w_i}{LW} \right) \right]. \quad (3.1)$$

No caso da figura 3.1, a perda é de 2,197%. Portanto, na Luapa a preferência é pelos padrões de corte homogêneos (desde que apresentem uma perda aceitável) ou

por padrões de corte com no máximo dois tipos de itens com medidas diferentes. Desta forma, o corte do painel exige poucos ajustes permitindo mais agilidade na produção.

Percebemos assim, que a elaboração de padrões de corte não é uma tarefa simples para as empresas. Além dos critérios acima mencionados, existe a natureza combinatória do problema, isto é, o número possíveis de padrões de corte é da ordem de centenas de milhares dependendo das dimensões do problema.

A elaboração de padrões de corte é uma das principais tarefas na produção dos móveis, principalmente nas pequenas e médias empresas, pois existe uma variação muito grande nos tamanhos dos painéis utilizados. As pequenas e médias empresas não conseguem comprar grandes quantidades de matéria-prima, e portanto não conseguem exigir dos fornecedores uma homogeneidade nos tamanhos dos painéis, que muitas vezes é ditado pelas grandes empresas. Assim, a cada nova medida de painel, novos padrões de corte devem ser formulados.

Um sistema computacional específico para a elaboração de padrões de corte poderia ser algo valioso para estas indústrias. A sua utilização contribuiria para dar maior liberdade na criação dos produtos (*design*), para possibilitar um melhor planejamento da produção, e poderia agilizar a tomada de decisões na compra da matéria-prima diante de painéis de fornecedores distintos. Como foi salientado ao longo deste capítulo, esses pólos possuem em sua maioria pequenas e médias empresas, e estas por sua vez, enfrentam as mesmas dificuldades devido a falta de uma ferramenta eficiente para gerar os padrões de corte. Assim, mesmo que este estudo seja feito com base na Luapa, ele tem um caráter abrangente no sentido de lidar com problemas comuns a várias as empresas da região Noroeste do estado.

3.3 O Sistema CorteBi Original

Desenvolvido por Rangel e Perin (1989) em linguagem Pascal, o sistema **CorteBi** é uma ferramenta computacional capaz de resolver PCE classificados como 2/V/I/ mediante o método *Simplex* com geração de colunas. A geração de colunas é feita usando o algoritmo de Gilmore e Gomory (1965) descrito na seção 1.5.1. Na geração de colunas, os primeiros m problemas da mochila referentes ao primeiro estágio são resolvidos de uma só vez com o uso da programação dinâmica, o problema da mochila correspondente ao segundo estágio é resolvido por enumeração implícita. Portanto, o sistema resolve o problema do corte bidimensional produzindo padrões de cortes guilhotinados em dois estágios não-exatos.

A solução inteira é obtida arredondando a solução da relaxação linear do problema 1.1. Existe a opção para a resolução dos problemas **sem folga** ($Ax = b$) ou **com folga** ($Ax \geq b$). Quando utilizada a primeira opção, pode acontecer o não atendimento da demanda devido ao arredondamento da solução da relaxação linear. O sistema não possui dispositivos para contornar esta deficiência no atendimento da demanda. A interface com o usuário é bastante simples, via MS-DOS. Os dados de entrada são passados ao sistema via arquivo texto, a saída de dados é feita por impressão na tela e também por arquivos. Mais detalhes sobre os algoritmos implementados no sistema CorteBi podem ser obtidos em Rangel (1989).

3.4 Adaptações Realizadas no Sistema CorteBi

O sistema CorteBi não foi desenvolvido especificamente para a indústria de móveis, assim três adaptações foram necessárias. No entanto, uma restrição importante na elaboração dos padrões de corte já estava incorporada ao sistema CorteBi original: cortes guilhotinados em dois estágios (não-exatos).

A primeira adaptação realizada foi em relação à espessura da serra usada

nos cortes dos painéis. Para incorporar esta restrição no sistema CorteBi utilizamos o mecanismo descrito na seção 2.3.1 (pág. 39). A resolução do problema do corte bidimensional sem considerar a espessura da serra produz soluções inadequadas para aplicações práticas. Os padrões de corte assim produzidos podem ser inviáveis, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 3.1. Consideremos um objeto de 297x283 milímetros e dois itens com dimensões 129x61 e 99x99 milímetros e as respectivas demandas: 4 e 2. Resolvendo o problema com o uso do CorteBi, sem considerarmos a serra obtemos o resultado ilustrado na figura 3.2 a). Esta resposta não serve para uma aplicação real, pois este padrão de corte é impossível de ser realizado se considerarmos a espessura da serra, no caso 4.5 mm. Note que $99 \times 3 + 4.5 \times 3 = 310.5$, isto é, o comprimento total dos itens alocados na terceira faixa é maior que o comprimento do objeto. Se a espessura da serra for considerada pelo sistema, um novo padrão de corte é gerado (figura 3.2 b)).

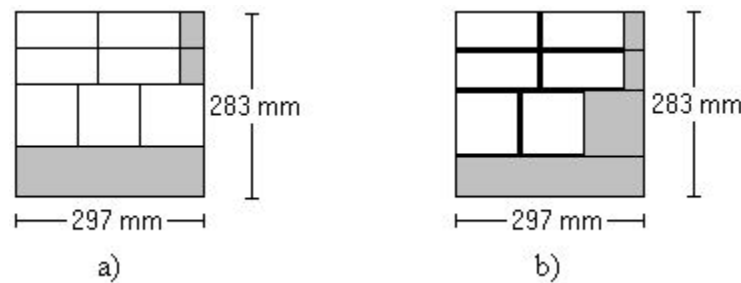


Figura 3.2: Espessura da serra no padrão de corte

A segunda modificação foi a inclusão do cálculo da perda de material ocorrida em cada padrão de corte e a perda total de material. A perda de material por padrão de corte foi introduzida no sistema conforme a expressão (3.1) da página 51. Já a perda total foi incluída da seguinte forma:

$$\text{perda total} = \left[1 - \frac{\text{área produzida}}{\text{área utilizada}} \right] \cdot 100.$$

A área utilizada refere-se à soma das áreas de todos os objetos utilizados, isto é,

$$\text{área utilizada} = z^* \cdot LW.$$

sendo z^* o número de objetos cortados para a produção dos itens, obtido em virtude do arredondamento da solução ótima do problema relaxado. A área produzida corresponde à soma das áreas de todos os itens fabricados, e é calculada da seguinte forma:

i) determinamos a soma das área dos itens produzidos no padrão de corte j :

$$\sum_{i \in A_j} l_i w_i$$

ii) multiplicamos este valor pela quantidade de vezes que o padrão de corte j é utilizado (y_j^*):

$$\left(\sum_{i \in A_j} l_i w_i \right) \cdot y_j^*$$

Note que y_j^* corresponde a solução arredondada do problema relaxado.

iii) calculamos a área total produzida:

$$\text{área produzida} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \in A_j} l_i w_i \right) \cdot y_j^*$$

A terceira modificação realizada foi a inclusão da opção de resolver o problema considerando a rotação dos itens. Este tipo de opção não é necessariamente uma exigência por parte das empresas de móveis como é o caso da espessura da serra e do cálculo da perda, pelo contrário, existem alguns tipos de painéis que não permitem a rotação dos itens (compensados, por exemplo). Mas, como foi constatado que em alguns padrões de corte da Luapa a rotação era utilizada, esta propriedade foi incorporada ao CorteBi.

Para incluir a rotação dos itens no sistema foi necessário alterar a entrada e a saída dos dados do subproblema de geração de colunas (Cavali e Rangel,

2004). Considerando um problema com m itens, no qual a rotação de todos os itens é viável, os dados de entrada do subproblema de geração de colunas terá $2m$ itens (itens originais + itens rotacionados). Mas, a coluna gerada que entrará na base do método *Simplex* deve conter apenas m itens. Assim, a criação dos itens rotacionados é feita da seguinte forma:

para $i = 1$ até m faça

$$l_{m+i} \leftarrow w_i$$

$$w_{m+i} \leftarrow l_i$$

$$\pi_{m+i} \leftarrow \pi_i$$

fim.

A coluna j gerada com estes dados terá $2m$ itens, para ajustá-la ao problema fazemos:

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + a_{m+i,j} \quad i = 1, \dots, m.$$

Note que o “peso” (variável dual) do item $m + i$ deve ser o mesmo peso do item i . Além disso, não é necessário mexer nas demandas, pois não entram nos cálculos do subproblema de geração de colunas. Apesar de não mencionado, antes da rotação dos itens é feito um teste de factibilidade, ou seja, a rotação se restringe aos itens tais que $l_i \leq W$ e $w_i \leq L$.

3.5 Coleta dos Dados

Na fabricação de um determinado móvel, vários itens (componentes do móvel) devem ser produzidos. Entretanto, cada item possui especificações como: comprimento, largura, espessura, tipo de matéria-prima, entre outras. Assim, nem todos os itens provém de um mesmo tipo de objeto. Na Luapa, os componentes obtidos com o uso dos painéis de MDF são produzidos separadamente de acordo com as seis espessuras dos painéis utilizados (3 mm , 6 mm , 15 mm , 18 mm , 20 mm e 25 mm). Portanto, para gerar os padrões de corte associados com a produção de

um móvel podemos ter que resolver até seis problemas do corte bidimensional, um para cada tipo de objeto.

Para realizar os testes computacionais, vamos considerar a produção da empresa Luapa realizada durante três semanas do mês de novembro de 2003 segundo dados simulados pelo gerente de produção, como mostra a tabela 3.2. A quantidade de móveis em cada lote corresponde aos dados na tabela 3.1.

Tabela 3.2: Produção semanal da empresa Luapa em novembro de 2003

| 1 ^a semana | 2 ^a semana | 3 ^a semana |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1 lote de arm. 4P | 1 lotes de arm. 4P | 1 lote de cômoda |
| 1 lote de arm. 5P | 1 lote de arm. 4P | 1 lotes de arm. 4P |
| 1 lote de arm. 4P | 1 lote de arm. 5P | 1 lote de arm. 5P |
| 1 lote de arm. 5P | 20 arm. 3P e 30 arm. 4P | 1 lote de arm. 4P |
| 1 lote de cama | 30 arm. 3P e 30 arm. 5P | 1 lote de criado |

Com base nas tabelas 3.1 e 3.2 e nos seis tipos de painéis necessários para a fabricação dos móveis, os dados foram agrupados em 40 exemplares do problema do corte bidimensional. Entretanto, alguns destes exemplares são pequenos (número de itens menor que cinco) e foram considerados desinteressantes para nossa análise. Desta forma, consideraremos apenas os exemplares formulados com mais de quatro itens, totalizando 17 exemplares a serem resolvidos conforme a tabela 3.3. Estes 17 exemplares simulam a forma de trabalho da Luapa, ou seja, o corte diário para a produção de apenas um lote. A tabela 3.3 apresenta para cada exemplar, o número de itens, o intervalo de variação da demanda, a demanda total, a demanda média e o desvio padrão.

Uma outra categoria de exemplares foi criada para verificarmos se o aumento da demanda ou do número de itens nos exemplares tornam a perda total menor. Diante da definição da produção de uma semana, criamos exemplares que englobam o corte dos objetos necessários para toda a produção semanal. As-

Tabela 3.3: Tamanho dos exemplares para a produção diária

| Exemplar | N. de itens | Intervalo da demanda | Dem. total | Dem. média | Desvio padrão |
|-----------------|--------------------|---------------------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|
| <i>L1</i> | 5 | [150, 600] | 1800 | 360 | 203.47 |
| <i>L2</i> | 5 | [120, 360] | 1080 | 216 | 81.39 |
| <i>L3</i> | 7 | [60, 720] | 2460 | 351.43 | 257.43 |
| <i>L4</i> | 7 | [50, 300] | 1150 | 164.29 | 78.90 |
| <i>L5</i> | 7 | [80, 240] | 1040 | 148.57 | 63.12 |
| <i>L6</i> | 7 | [100, 900] | 2500 | 357.14 | 270.49 |
| <i>L7</i> | 7 | [120, 960] | 2360 | 337.14 | 277.01 |
| <i>L8</i> | 8 | [120, 480] | 1680 | 210 | 112.25 |
| <i>L9</i> | 8 | [30, 200] | 1050 | 131.25 | 59.46 |
| <i>L10</i> | 8 | [60, 240] | 1320 | 165 | 71.94 |
| <i>L11</i> | 9 | [30, 400] | 1490 | 165.56 | 99.46 |
| <i>L12</i> | 9 | [80, 780] | 2320 | 275.78 | 236.68 |
| <i>L13</i> | 9 | [120, 1080] | 3000 | 333.33 | 315.10 |
| <i>L14</i> | 9 | [50, 400] | 1550 | 172.22 | 977.50 |
| <i>L15</i> | 9 | [80, 320] | 1360 | 151.11 | 77.24 |
| <i>L16</i> | 9 | [60, 480] | 1860 | 206.67 | 117 |
| <i>L17</i> | 10 | [120, 720] | 3120 | 312 | 171.39 |

sim, foram criados 11 exemplares descritos na tabela 3.4. Esta tabela apresenta para cada exemplar, o número de itens, o intervalo de variação da demanda, a demanda total, a demanda média, o desvio padrão e a composição de cada exemplar baseada nos dados da tabela 3.3.

Tabela 3.4: Tamanho dos exemplares para a produção semanal

| Exemplar | N. de itens | Interv. da demanda | Dem. total | Dem. média | Desvio padrão | Composição |
|----------|-------------|--------------------|------------|------------|---------------|-------------------|
| sem118 | 6 | [150, 780] | 2580 | 430 | 242.90 | L1 * |
| sem325 | 7 | [320, 1400] | 4900 | 700 | 446.32 | * |
| sem103 | 8 | [260, 800] | 4380 | 547.50 | 199.23 | 2xL4-2xL5 * |
| sem320 | 8 | [240, 2760] | 7000 | 875 | 834.13 | 2xL6-L7 * |
| sem120 | 9 | [240, 3720] | 9380 | 1042.22 | 1084.45 | 2xL6-2xL7 * |
| sem203 | 9 | [270, 1020] | 5710 | 634.44 | 301.08 | 2xL4-L5-L9-L10 |
| sem215 | 9 | [270, 2000] | 7810 | 867.78 | 486.07 | 2xL14-L11-L15-L16 |
| sem115 | 11 | [260, 1440] | 7020 | 638.18 | 314.32 | L14-2xL15 * |
| sem220 | 11 | [300, 4620] | 12680 | 1152.73 | 1311.96 | 2xL6-L7-L12-L13 |
| sem303 | 12 | [240, 1280] | 6070 | 505.83 | 300.46 | 2xL4-L5 * |
| sem315 | 20 | [120, 2100] | 12480 | 624 | 541.90 | 2xL14-L15-L17 * |

(*) Composição inclui exemplares com número de itens < 5 .

3.6 Resultados do Estudo Computacional

Os testes computacionais aqui apresentados referem-se à resolução dos exemplares descritos na seção anterior (tabelas 3.3 e 3.4), com o uso do sistema CorteBi. Realizamos os testes computacionais divididos em duas partes: a primeira em relação aos dados da tabela 3.3 simulando o sistema de planejamento diário da Luapa, a segunda correspondendo ao planejamento semanal de acordo com os dados da tabela 3.4. Pretendemos avaliar o comportamento do sistema CorteBi diante de dados reais e também, comparar os resultados entre as duas categorias de exemplares com o objetivo de identificar as influências do aumento do número de itens ou da demanda nos resultados. Para os testes, utilizamos um micro computador AMD Athlon XP 2.6 GHz com 256 MB de memória RAM.

As tabelas 3.5 e 3.6 a seguir são referentes aos testes realizados **sem folga**

com base nos exemplares das tabelas 3.3 e 3.4 respectivamente. Nestas tabelas são apresentados os resultados dos exemplares resolvidos sem rotação dos itens e com rotação dos itens (dados em negrito). Os dados correspondem à demanda atendida (dem. at.), número de objetos cortados (N. de objetos), perda total de material (P. total) e tempo de processamento em segundos (CPU).

A tabela 3.7 apresenta os dados relativos ao planejamento diário e ao planejamento semanal (em negrito), referentes às semanas dois e três (veja tabela 3.2) e aos painéis de MDF de 3 mm e 15 mm de espessura. De acordo com a tabela 3.4, os exemplares sem203, sem215, sem303 e sem315 correspondem à produção da semana 2 - painel de 3 mm , semana 2 - painel 15 mm , semana 3 - painel de 3 mm e semana 3 - painel de 15 mm respectivamente. Os testes para o planejamento diário foram feitos utilizando os exemplares referentes à composição da respectiva semana, conforme descrito na tabela 3.4. Por exemplo, o valor 360 (número de objetos - tabela 3.7) referente ao planejamento diário da semana 2 - painel de 15 mm , pode ser obtido somando-se os valores da tabela 3.5 (número de objetos) de acordo com a composição do exemplar sem215 da tabela 3.6:

$$2xL14 + L15 + L11 + L16 \quad : \quad 2x(71) + 64 + 69 + 85 = 360.$$

Por fim, a tabela 3.8 mostra os resultados para os exemplares da tabela 3.4 resolvidos **com folga**. Note que neste caso a demanda atendida é de 100% para todos os exemplares.

Analisando a tabela 3.5 podemos perceber em todos os exemplares que o índice de demanda atendida foi superior a 96.26%, com exceção do exemplar L13 - sem rotação, o qual obteve um índice de 94.27%. Nos testes com rotação 76.47% dos exemplares obtiveram índices superiores a 98.5% de demanda atendida, contra 52.94% dos exemplares resolvidos sem a rotação dos itens. Já para os testes referentes ao planejamento semanal (tabela 3.6), os exemplares atingiram índices superiores a 98.6% de demanda atendida, com apenas um resultado abaixo deste valor: o exemplar sem325 com rotação obteve o índice de 95.43%. Na prática, o

Tabela 3.5: Produção diária (sem folga) - testes efetuados com orientação fixa e **com rotação**

| Exemplar | Dem. at. (%) | N. de objetos | N. padrões | P. total (%) | CPU (s) |
|------------|-----------------------|-------------------|----------------|-------------------------|------------------------|
| <i>L1</i> | 98.86 99.50 | 98 59 | 5 4 | 46.008 9.880 | 0.17 0.44 |
| <i>L2</i> | 100 99.81 | 135 130 | 5 5 | 18.527 16.253 | 0.06 0.11 |
| <i>L3</i> | 96.26 99.84 | 27 27 | 7 6 | 16.481 10.621 | 1.93 2.03 |
| <i>L4</i> | 99.91 99.91 | 140 140 | 7 7 | 13.742 13.736 | 0.17 0.27 |
| <i>L5</i> | 99.62 99.81 | 138 136 | 7 6 | 15.088 13.704 | 0.11 0.6 |
| <i>L6</i> | 97.60 96.08 | 31 30 | 7 5 | 15.670 15.171 | 1.65 3.51 |
| <i>L7</i> | 99.66 97.80 | 32 30 | 7 7 | 15.776 14.716 | 1.15 28.39 |
| <i>L8</i> | 98.57 98.99 | 73 71 | 7 8 | 7.154 3.923 | 0.17 0.28 |
| <i>L9</i> | 99.90 99.62 | 127 127 | 6 7 | 14.544 14.547 | 0.16 0.11 |
| <i>L10</i> | 99.77 99.47 | 167 165 | 8 8 | 14.856 13.959 | 0.16 0.72 |
| <i>L11</i> | 99.87 99.26 | 69 66 | 8 9 | 7.055 3.769 | 0.16 0.66 |
| <i>L12</i> | 97.16 97.41 | 27 27 | 8 9 | 15.179 13.693 | 22.24 10.98 |
| <i>L13</i> | 94.27 98.47 | 34 36 | 9 9 | 15.037 13.107 | 24.27 120.67 |
| <i>L14</i> | 98.26 99.10 | 71 69 | 8 9 | 7.007 3.691 | 0.22 0.22 |
| <i>L15</i> | 98.31 98.97 | 64 63 | 8 9 | 6.768 3.617 | 0.28 0.33 |
| <i>L16</i> | 98.92 99.84 | 85 83 | 8 9 | 6.921 3.698 | 0.17 0.38 |
| <i>L17</i> | 98.43 99.94 | 83 77 | 9 10 | 13.552 5.270 | 0.33 0.61 |

Tabela 3.6: Produção semanal (sem folga) - testes efetuados com orientação fixa e com rotação

| Exemplar | Dem. at. (%) | Número de objetos | Número de padrões | P. total (%) | CPU (s) |
|----------|-----------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|---------------------------|
| sem118 | 98.84 99.07 | 98 62 | 5 6 | 41.374 7.183 | 0.28 0.39 |
| sem325 | 98.69 95.43 | 33 31 | 7 7 | 9.476 8.524 | 1.1 5.16 |
| sem103 | 99.91 99.89 | 551 549 | 8 8 | 13.745 13.433 | 0.16 0.17 |
| sem320 | 98.80 98.60 | 90 89 | 8 8 | 15.448 14.885 | 5.82 16.64 |
| sem120 | 98.76 99.08 | 111 110 | 9 9 | 15.082 14.358 | 25.76 115.07 |
| sem203 | 99.98 99.98 | 705 705 | 8 8 | 13.596 13.596 | 0.17 0.22 |
| sem215 | 99.97 99.81 | 361 347 | 8 9 | 6.946 3.688 | 0.17 0.22 |
| sem115 | 99.80 99.96 | 283 273 | 10 11 | 6.976 3.323 | 0.33 0.33 |
| sem220 | 99.65 98.99 | 155 151 | 11 11 | 15.314 14.170 | 1028.81 5304.43 |
| sem303 | 99.90 99.95 | 589 577 | 12 12 | 9.304 7.357 | 0.33 0.38 |
| sem315 | 99.63 99.71 | 361 349 | 19 19 | 6.276 3.078 | 0.93 1.26 |

não atendimento total da demanda pode não ser um problema muito relevante. Visto que, por causa das altas demandas, o erro causado pelo arredondamento das soluções é desprezível. Além disso, o CorteBi permite a resolução dos exemplares com folga, permitindo o total atendimento das demandas.

Quanto ao número de objetos cortados, observando os dados da tabela 3.5 percebemos que nos testes com rotação este valor é sempre menor ou igual ao dos testes sem rotação. A única exceção foi o exemplar L13 que apresentou o valor 36 para o caso com rotação e 34 para o caso sem rotação. De uma maneira geral, a diferença entre esses valores foi pequena (≤ 3). Os exemplares L2 e L17 utilizaram cinco unidades de objetos a menos nos casos com rotação e no exemplar L1 a diferença foi de 39 unidades. Nos testes referentes à produção semanal, tabela 3.6, os casos com rotação também apresentaram resultados melhores do que os casos sem rotação, isto é, um menor número de objetos cortados. O exemplar sem118 obteve uma diminuição de 36 unidades no valor ótimo quando a rotação dos itens foi permitida. As diminuições no número de objetos utilizados nos casos com rotação sugerem um melhor aproveitamento dos objetos. Quando a rotação dos itens é permitida o número de itens praticamente dobra, aumentando as combinações de itens para a elaboração de padrões de corte viáveis.

No que diz respeito à perda de material, observando os dados da tabela 3.5 notamos que quando a rotação dos itens é permitida a perda de material diminui em relação aos testes sem a rotação dos itens. Este resultado já era esperado em razão da diminuição do valor ótimo nos casos com rotação. Em alguns exemplares (L1, L8, L11, L14 ao L17) a perda de material diminuiu consideravelmente. A mesma análise pode ser feita com relação à tabela 3.6, ou seja, quando a rotação é permitida a perda total tende à diminuir também na produção semanal. Aqui as maiores diferenças ocorreram nos exemplares sem118, sem115, sem215 e sem325.

De uma maneira geral, podemos perceber que o aumento no número de tipos de itens provocado pela rotação favorece um melhor aproveitamento

dos objetos. Mas, alguns exemplares apresentaram melhoras significativas nos resultados, isto é, a perda total diminuiu bruscamente quando resolvidos com a rotação dos itens. Nestes casos, constatamos que as proporções entre as medidas dos itens e do objeto também influenciaram nos resultados. Por exemplo, a figura 3.3 corresponde à um dos padrões de corte produzidos para o exemplar L1 - sem rotação dos itens. Note que a construção das faixas foi prejudicada por causa dos formatos e proporções dos itens. Mas, quando permitida a rotação dos itens (figura 3.4) padrões de corte com menor perda de material foram produzidos por causa da construção de faixas melhores. Assim, a perda total também diminuiu.

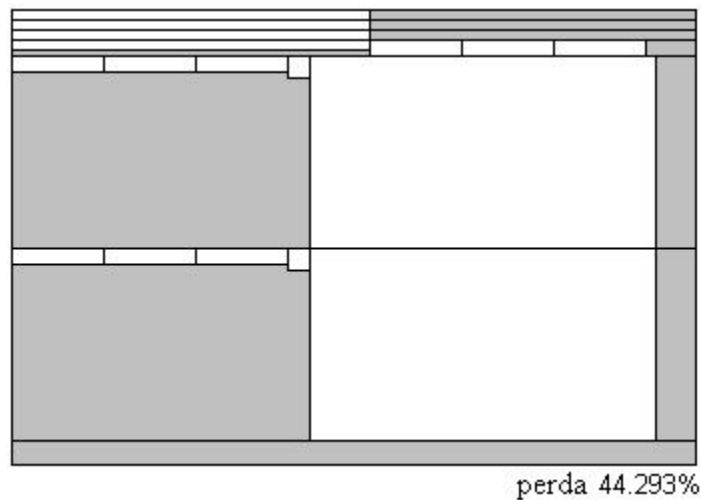


Figura 3.3: Padrão de corte sem rotação dos itens

Analisando a tabela 3.7 notamos que o aumento número de itens e da demanda provocada pela agregação da produção diária também pode contribuir para a diminuição da perda total. Note que os resultados apresentados nesta tabela foram obtidos para os itens com orientação fixa³. De fato, observando a coluna referente à semana dois percebemos pouca diminuição da perda de material quando considerado o planejamento semanal (dados em negrito). Ao passo que, na coluna referente à semana três é evidente a melhora na perda de material

³Para os casos com rotação a análise é semelhante.

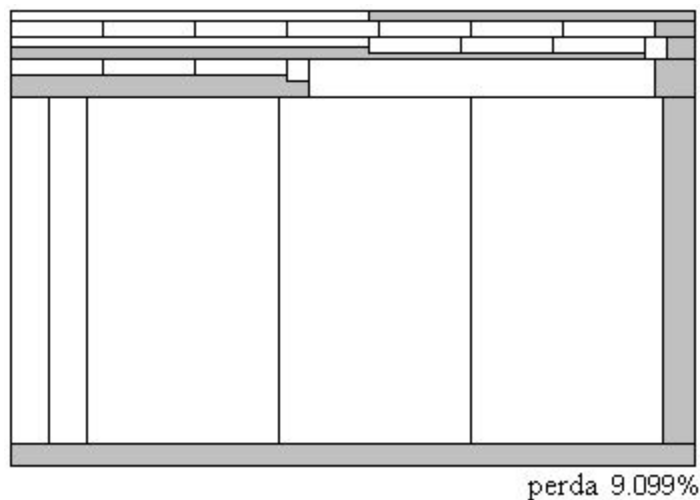


Figura 3.4: Padrão de corte com rotação dos itens

no planejamento semanal. Para o MDF de 3 mm de espessura a economia foi de 37.5% no metro quadrado de material perdido, e para o MDF de 15 mm de espessura esta economia foi de 34.37% . Esses resultados se justificam no fato de que a produção da semana dois é apenas de armários. Assim, quando considerado o planejamento semanal pouco se altera no número de tipos itens a serem cortados, pois existem muitos itens em comum entre os móveis a serem produzidos. Apenas a demanda sofre um aumento significativo. Por outro lado, na semana três além dos armários existe a produção de criados e cômodas, desta forma o planejamento semanal engloba uma variedade maior de tipos de itens e com isso o número de padrões de corte possíveis é bem maior. Portanto, a diminuição da perda total está ligada ao aumento do número de tipos itens, mais fortemente do que ao aumento da demanda.

Infelizmente, a Luapa não possui em suas planilhas o controle da perda total para se fazer uma comparação com os resultados do CorteBi, mas o gerente de produção da Luapa aprovou este tipo de cálculo considerando-o como uma informação interessante para o levantamento dos custos. Além disso, o CorteBi produz padrões de corte com perdas abaixo de 6% (tolerância da Luapa) e padrões de corte com perdas acima deste valor. No entanto, muitas vezes padrões de corte

Tabela 3.7: Produção diária x Produção semanal

| | Semana 2 | | Semana 3 | |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | 3 mm | 15 mm | 3 mm | 15 mm |
| Número de objetos | 712 | 360 | 599 | 373 |
| | 705 | 361 | 589 | 361 |
| Área utilizada | 3583.14 | 1811.7 | 3014.47 | 1877.12 |
| | 3532.82 | 1816.73 | 2964.14 | 1816.73 |
| Perda (m^2) | 512.43 | 125.97 | 441.28 | 173.72 |
| | 482.37 | 126.19 | 275.78 | 114.02 |
| Perda (%) | 14.301 | 6.953 | 14.639 | 9.255 |
| | 13.596 | 6.946 | 9.304 | 6.276 |

com muita perda são pouco utilizados e padrões de corte com perdas pequenas são bastante utilizados balanceando o valor da perda total. Desta forma, para conclusões mais contundentes quanto à qualidade da perda total de material produzida pelas soluções do CorteBi uma investigação com acesso à mais dados da Luapa se faz necessária.

Em relação ao tempo de processamento, o sistema CorteBi apresentou um ótimo desempenho. De acordo com a tabela 3.5, 70.6% dos 34 exemplares foram resolvidos em menos de um segundo. O exemplar mais lento foi o L13 com rotação, que levou 120.67 segundos para ser resolvido. Na tabela 3.6 constatamos que dos 22 exemplares 59.1% foram resolvidos em menos de um segundo. Nesta categoria de exemplares estão os casos mais lentos. A saber, sem220 - sem rotação e com rotação. Este exemplar resolvido com rotação foi o único que precisou de mais de uma hora para ser resolvido - precisamente 1h 28min 24s. De uma maneira geral, os exemplares considerando a rotação dos itens levaram um tempo maior para serem resolvidos, mas diferença no tempo gasto entre os casos sem rotação e com rotação foi pequena. Apesar destes exemplares serem

Tabela 3.8: Testes efetuados com folga

| Exemplar | Sem Rotação | | | Com Rotação | | |
|----------|-------------------|-------------|--------|-------------------|---------------|----------------|
| | Número de objetos | Perda total | CPU | Número de objetos | Perda total | CPU |
| sem118 | 102 | 41.260 | 0.22 | 66 | 7.163 | 0.44 |
| sem325 | 36 | 9.490 | 1.15 | 35 | 8.523 | 4.89 |
| sem103 | 554 | 13.800 | 0.22 | 551 | 13.435 | 0.17 |
| sem320 | 92 | 15.398 | 4.44 | 92 | 14.790 | 13.34 |
| sem120 | 116 | 15.055 | 19.61 | 115 | 14.266 | 80.69 |
| sem203 | 707 | 13.596 | 0.27 | 706 | 13.589 | 0.60 |
| sem215 | 363 | 6.946 | 0.17 | 353 | 3.697 | 0.33 |
| sem115 | 285 | 6.969 | 0.27 | 279 | 3.316 | 0.61 |
| sem220 | 158 | 15.335 | 692.83 | 158 | 14.093 | 4202.79 |
| sem303 | 592 | 9.284 | 0.49 | 580 | 7.355 | 0.55 |
| sem315 | 370 | 6.258 | 0.98 | 361* | 3.088 | 8.02 |

(*) Solução da relaxação linear associada não é ótima (erro numérico).

“pequenos” ficou evidente que possuem características que influenciaram mais no tempo de processamento do que o “tamanho” dos exemplares. A avaliação da influência destas características na resolução do problem é um tópico interessante para ser estudado.

A tabela 3.8 mostra alguns resultados obtidos com a resolução dos exemplares com folga. Comparando seus dados com os da tabela 3.6 podemos constatar que: em relação ao tempo de processamento existem diferenças pequenas (tanto para mais quanto para menos). No caso de exigência no total atendimento da demanda, esta pouca diferença no tempo de processamento é bastante favorável para o uso industrial. Quanto ao valor ótimo, os casos com folga apresentaram um valor um pouco maior que nos casos sem folga, o que era esperado. A diferença no número de objetos cortados ficou entre uma e sete unidades a mais nos casos

com folga. Apenas o exemplar sem315 obteve um resultado diferenciado: quando utilizada a folga neste exemplar o valor foi de 11 objetos a mais do que no caso sem folga, mas a solução obtida não foi ótima. Esses resultados se justificam pelo fato de que com folga o sistema utiliza praticamente os mesmos padrões de corte usados no caso sem folga. A diferença está na frequência com que estes padrões de corte são usados.

Outro parâmetro a ser avaliado na qualidade das respostas do sistema CorteBi diz respeito à produtividade de seus padrões de corte, ou seja, a Luapa prefere os padrões de corte homogêneos ou aqueles com no máximo duas medidas diferentes na largura das faixas. Como tal restrição não foi incorporada ao sistema CorteBi, a maioria de seus padrões de corte não possuem tais características. As figuras 3.5 e 3.6 ilustram dois padrões de corte produzidos pelo CorteBi. Mesmo contendo um perda baixa de material, o padrão de corte da figura 3.5 não é ideal para a Luapa por causa a heterogeneidade de seus itens. Já o padrão de corte da figura 3.6 está dentro dos interesses da empresa.

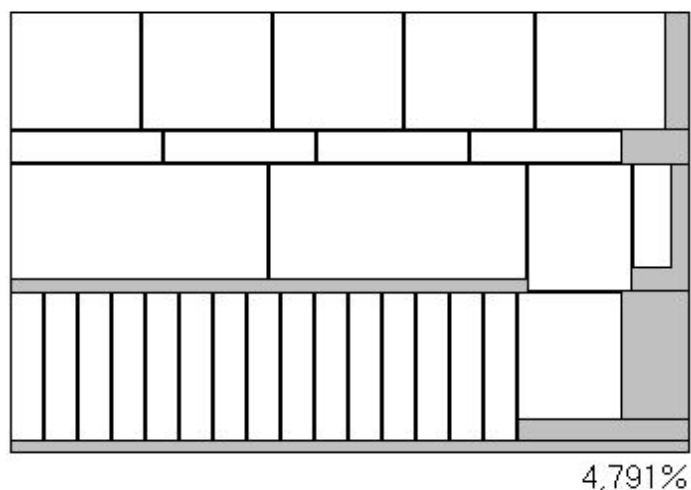


Figura 3.5: Padrão de corte rejeitado pela Luapa

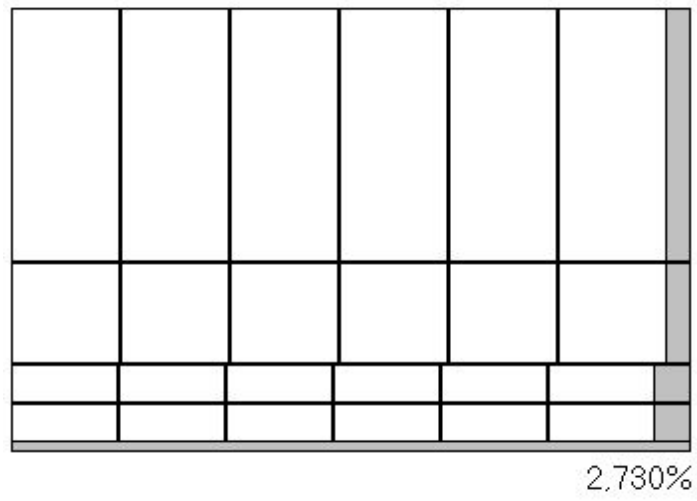


Figura 3.6: Padrão de corte aceito pela Luapa

Capítulo 4

Considerações Finais

As empresas do pólo moveleiro de Votuporanga-SP, particularmente a Luapa, resolvem o problema de gerar padrões de corte de uma maneira eficiente. Mas, o tempo gasto, uma vez que o processo é “manual”, é alto. Por causa da perda de material e do tempo gasto para a produção dos padrões de corte, a estratégia adotada nas empresas é o desenvolvimento dos produtos “amarrados” com as dimensões dos painéis de madeira. Existe também a dificuldade de realizar simulações no planejamento da produção, por exemplo, a possibilidade de optar por padrões de corte gerados para a produção de toda a semana, ou ainda, a combinação mais eficiente dos tipos de móveis a serem produzidos. Portanto, o uso de uma ferramenta computacional específica para gerar padrões de corte pode contribuir na melhoria de vários fatores:

- possibilitar a geração de padrões de corte de acordo com várias combinações de móveis a serem produzidos e determinar com rapidez a melhor alternativa;
- maior facilidade no cálculo dos custos dos produtos, uma vez que a perda de material ou o custo dos objetos podem ser incluídos no sistema;
- agilizar a tomada de decisão na compra de matéria-prima, visto que a rapidez do sistema permite simulações para a verificação de qual tamanho de

painel oferece as menores perdas;

- facilitar o dia-a-dia do gerente de produção caso haja alterações nas dimensões dos painéis, uma vez que quando isto acontece, os padrões de corte precisam ser revistos.

O sistema CorteBi mostrou-se eficiente na resolução dos exemplares do problema do corte bidimensional com base nos dados reais da indústria de móveis. As modificações realizadas no sistema tornaram-o capaz de produzir respostas mais próximas dos interesses industriais. A pouca diferença no tempo de processamento e na perda total entre os casos sem folga e com folga é um fator positivo para cenários com demandas muito altas, nos quais o erro causado pelo arredondamento é pequeno, ou em cenários com demandas baixas, quando a opção com folga pode ser necessária. A pequena variação no tempo entre os casos sem rotação e com rotação também é um importante aspecto a ser considerado, pois muitas vezes a rotação dos itens produziu menores perdas de material. Além disso, o aumento no número de tipos de itens mostrou-se relevante na melhora da perda total e não muito influente no tempo de processamento.

Como alterações futuras no CorteBi podemos sugerir a inclusão de “pesos” para os padrões de corte a fim de favorecer soluções que utilizem padrões de corte mais eficientes em relação à produtividade (por exemplo os padrões de corte com poucos itens). Outra sugestão seria o estudo comparativo entre o critério de minimizar o número de objetos cortados e o de minimizar a perda de material. Além disso, a construção de uma *interface* gráfica pode tornar o sistema mais atrativo e fácil de ser utilizado.

Foi possível constatar que investigar o planejamento da produção abordando o problema de dimensionamento de lotes juntamente com o problema de corte de estoque pode ser economicamente positivo, principalmente se resolvidos de forma acoplada (problema combinado, capítulo 2). A incorporação de heurísticas de arredondamento no CorteBi ou mesmo a resolução do problema do

corte bidimensional mediante o uso do *branch-and-price* com o objetivo de avaliar a qualidade das soluções inteiras são tópicos interessantes a serem aprofundados em trabalhos futuros.

A concentração das indústrias moveleiras em pólos regionais e a semelhança de seus problemas são fatores extremamente positivos para o desenvolvimento de uma ferramenta computacional específica para as indústrias do setor. Uma vez que sistemas como este são pouco encontrados, e muitos não são específicos para o setor moveleiro. Mesmo que um sistema computacional específico, como é o caso do CorteBi, não seja capaz de suprir todas as necessidades da empresa por causa de critérios adotados no planejamento da produção, este tipo de ferramenta ainda poderá ser útil como ponto de partida na geração de padrões de corte. A possibilidade de ajustes nas respostas do sistema é algo passível de ser considerado, principalmente em empresas menores onde a produção é menos padronizada.

Referências Bibliográficas

- ALVAREZ-VALDÉS, R., PARAJÓN, A., TAMARIT, J. M. (2002) A tabu search algorithm for large-scale guillotine (un)constrained two-dimensional cutting problems. *Computers & Operations Research*, v.29, p.925-947.
- ANTONIO, J., CHAUVET, F., CHU, C., PROTH, J-M. (1999) The cutting stock problem with mixed objectives: two heuristics based on dynamic programming. *European Journal Operational Research*, v.114, p.395-402.
- ARAÚJO, S. A., ARENALES, M. N. (2000) Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, método de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional*, v.20, n.2, p.287-306.
- BARNHART, C., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., SVELSBRGH, M. W. P., VANCE, P.H. (1998) Branch-and-price: column generation for solving huge integer programs. *Operations Research*, v.46, n.3, p.316-329.
- BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., HANIF, D. S. (1990) *Linear programming and network flows*, 2.ed. New York : John Wiley & Sons, 684p.
- BELOV, G., SCHEITHAUER, G. (2002) A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths. *European Journal Operational Research*, v.144, p.274-294.

- BELOV, G., SCHEITHAUER, G. (2003) A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting. *Technical Report MATH-HM-03*, 1-49.
- BERTSIMAS, D., TSITSIKLIS, J. N. (1997) *Introduction to Linear Optimization*, Belmont : Athena Scientific, 587p.
- CAVALI, R., RANGEL, S. (2003) O problema do corte bidimensional aplicado à indústria moveleira. *Anais do XXVI CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL*, São José do Rio Preto, SP.
- CAVALI, R., RANGEL, S. (2004) Production planning: a cutting stock problem in the furniture industry. *Trabalho aceito para apresentação no XII CONGRESSO LATINO IBEROAMERICANO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES*, Habana, Cuba.
- CHRISTOFIDES, N., WHITLOCK, C. (1977) An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, v.25, n.1, p.30-44.
- DASH OPTIMIZATION (2001) *X PRESS User's Manual*, Editions Eyrolles, Paris, France.
- DYCKHOFF, H. (1990) A typology of cutting and packing problems. *European Journal Operational Research*, v.44, p.145-159.
- FAYARD D., ZISSOMOPOULOS, V. (1995) An approximation algorithm for solving unconstrained two-dimensional knapsack problems. *European Journal of Operational Research*, v.84, p.618-632.
- FERREIRA, D. (2002) *Um modelo de dimensionamento de lotes aplicado em uma fábrica de bebidas*. São José do Rio Preto, 111p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

- GILMORE, P. C., GOMORY, R. E. (1961) A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, v.9, p.849-859.
- GILMORE, P. C., GOMORY, R. E. (1963) A linear programming approach to the cutting-stock problem-part II. *Operations Research*, v.11, p.863-888.
- GILMORE, P. C., GOMORY, R. E. (1965) MultiStage cutting stock problems of two and more dimensional. *Operations Research*, v.14, p.1045-1074.
- GRAMANI, M. C. N. (2001) *Otimização do processo de cortagem acoplado ao planejamento da produção*. Campinas, 118p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas.
- HIFI, M., ZISSOMOPOULOS, V. (1996) A recursive exact algorithm for weighted two-dimensional cutting. *European Journal of Operational Research*, v.91, p.553-564.
- HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. L. (1988) *Introdução a pesquisa operacional*, trad. Helena L. Lemos, São Paulo : Ed. da USP, 805p.
- ILOG (2001) *CPLEX 7.1 User's Manual*, ILOG S. A.
- KLEMPOUS, R., KOTOWSKI, J., SZLACHCIC, E. (1996) Interactive procedures in large-scale two-dimensional cutting stock problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v.66, p.323-331.
- LASDON, L. S. (1970) *Optimization Theory for Large Systems*, New York : The MacMillan Company.
- LEUNG, T. W., YUNG, C. H., TROUTT, M. D. (2001) Applications of genetic search and simulated annealing to the two-dimensional non-guillotine cutting stock problem. *Computers & Industrial Engineering*, v.40, p.201-214.

- LODI, A., MARTELLO, S., VIGO, D. (2002) Recent advances on two-dimensional bin packing problems. *Discrete Applied Mathematics*, v.123, p.379-396.
- MORABITO, R. (1994) Modelos de otimização para o problema de corte nas indústrias de papel e de móveis. *Gestão & Produção*, v.1, n.1, p.59-76.
- MORABITO, R., ARENALES, M., N. (1995) An AND/OR-graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal Operational Research*, v.84, p.599-617.
- MORABITO, R., ARENALES, M., N. (1996) Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR-graph approach. *European Journal Operational Research*, v.94, p.548-560.
- MORABITO, R., ARENALES, M. N. (2000) Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. *International Journal of Production Research*, v.38, n.12, p.2725-2742.
- MORABITO, R., GARCIA, V. (1998) The cutting stock problem in a hardboard industry: a case study. *Computatens Operations Research*, v.25, n.6, p.469-485.
- MURTY, K. G. (1983) *Linear programming*, New York : John Wiley & Sons, 482p.
- PEARL, J. (1984) *Heuristics: intelligent search strategies for computer problem solving*, California : Addison-Wesley Publishing Company, 382p.
- PINTO, M. J. (1999) *O problema de corte de estoque inteiro*. São Carlos. Dissertação (Mestrado em Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo.
- RANGEL, S. (1989) *O problema do corte bidimensional*. Campinas, 97p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas.

- RANGEL, S., PERIN FILHO, C. (1989) O problema do corte bidimensional. *Anais do XII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL*, São José do Rio Preto, SP.
- STIPP, M. S. M. (2002) *Cluster industrial: o pólo moveleiro de Votuporanga-SP, 1962-2002*. Araraquara. Dissertação (Mestrado em Economia) - Faculdade de Ciências e Letras, Universidade Estadual Paulista.
- TRIGEIRO, W. W., THOMAS, J., McCLAIN, J. O. (1989) Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, v.35, n.3, p.353-366.
- VANCE, P. H. (1998) Branch-and-Price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem. *Computacional Optimiztion and Application*, n.9, 211-228.
- VANDERBECK, F. (1999) Computational study of a column generation algorithm for bin packing and cutting stock problems. *Mathematical Programming*, Ser. A 86, p.565-594.
- WANG, P. Y. (1983) Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems. *Operations Research*, v.31, n.3, p.573-586.
- WOLSEY, L. A. (1998) *Integer programming*, New York : John Wiley & Sons, 264p.
- YOUNG-GUN, G., M-K KANG (2002) A new upper bound for unconstrained two-dimensional cutting and packing. *Journal of the Operational Research Society*, v.53, p.587-591