



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

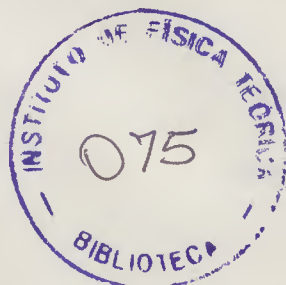
42

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/94

Possibilidade de Confinamento no Modelo SU(2)-Cor

Ana Lucia Barbosa



Orientador

Prof. Dr. Ruben Aldrovandi.

Maio 1994

**POSSIBILIDADE DE CONFINAMENTO
NO MODELO SU(2)-COR**

Ana Lucia Barbosa

Orientador: Ruben Aldrovandi

**Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista**

1994

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu pai, João Carlos, e à minha mãe, Maria da Glória, por terem sido os primeiros a acreditar em mim e a apoiar-me sempre.

Um agradecimento especial ao Dr. Manuel Orlane, pela sua orientação e apoio durante a realização deste trabalho.

Um agradecimento também ao Dr. António Costa, pela sua orientação e apoio durante a realização deste trabalho.

Agradeço também ao Dr. João Carlos, pelo seu apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço ao Dr. Manuel Orlane, pelo seu apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Agradeço também ao Dr. António Costa, pelo seu apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Um agradecimento especial ao Dr. Manuel Orlane, pela sua orientação e apoio durante a realização deste trabalho.

**A Manuel, Orlane,
Ana Maria e Wagner**

AGRADECIMENTOS

A Ruben Aldrovandi pela paciência e dedicação demonstradas durante a orientação desse trabalho e pelas agradáveis conversas que contribuíram fortemente para minha formação pessoal.

Aos professores Carlos O. Escobar, Sérgio F. Novaes, B. M. Pimentel Escobar pelas discussões e sugestões bibliográficas.

Aos meus pais e a minha irmã pelo apoio e incentivo, em especial ao meu pai pelo carinho, pela coragem e por tudo que me ensinou.

A Wagner Wuo pela grande ajuda no dia a dia e por sua capacidade de compreender os anseios da alma humana.

Aos colegas do Instituto de Física Teórica, em especial a Luciene Pontes Freitas por sua amizade e pelas discussões tão gratificantes e a Ivan por suas tão doces e encorajadoras palavras.

A Marina, Alexandre, Marcelo e Ana Luíza pela disposição de sempre ajudar.

E à CAPES pelo importante apoio financeiro.

RESUMO

Nessa dissertação, nosso objetivo é estudar, usando métodos geométricos, o comportamento de partículas que possuam "cor SU2".

A dissertação está dividida em três partes. A primeira (capítulo 1 a 4) se refere à quantização de teorias de gauge e à implementação exata da versão não abeliana da lei de Gauss na teoria Hamiltoniana para o grupo SU(2). Introduzimos uma variável invariante de gauge que é um tensor métrico e obtemos uma interpretação geométrica para os "campos magnéticos". Na segunda parte (capítulo 5) estudamos a geometria do hiperespaço hiperbólico de dimensão quatro. Na última parte (capítulos 6 e 7) propomos e discutimos uma solução para a equação de Yang-Mills (grupo SU(2)) que pode sugerir o confinamento de partículas que possuam "cor SU2".

Palavras-chave: teorias de gauge, lei de Gauss, geometria hiperbólica, confinamento.

Areas de conhecimento: 1.05.01.01-0
1.05.03.01-3
1.05.03.02-1

ABSTRACT

In this work we study the behavior of $SU(2)$ -color particles applying a geometrical approach.

This work is divided in three main parts. The first one (chapter 1 to 4) shows the quantization of gauge theories and the exact implementation of the non-abelian version of Gauss' law in the Hamiltonian approach for $SU(2)$. We introduce a gauge invariant variable which is a metric tensor and obtain a geometrical interpretation for the "magnetic fields". In the second part (chapter 5) we study the geometry of the four dimensional hyperbolic hyperspace. In the last part (chapter 6 and 7) we propose and discuss a solution for Yang-Mills equations ($SU(2)$ group) that may suggest the confinement of $SU(2)$ -color particles.

Key words: gauge theories, Gauss' law, hyperbolic geometry, confinement.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. FORMALISMO CANÔNICO PARA TEORIAS DE GAUGE	3
2.1 Introdução.....	3
2.2 Quantização e implementação da lei de Gauss	5
3. VARIÁVEIS INVARIANTES DE GAUGE	11
3.1 Introdução.....	11
3.2 A nova variável.....	12
4. A DENSIDADE DE ENERGIA ELÉTRICA E A GEOMETRIA ESPACIAL.....	17
4.1 Geometria espacial	17
4.2 Densidade de energia elétrica	21
4.3 A interpretação geométrica de B^{ai}	23
4.3.1 Triadas	23
4.3.2 O referencial B^{ai}	26
4.4 Sobre a curvatura.....	27
5. GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA.....	30
5.1 Introdução.....	30
5.2 Projeção estereográfica.....	31
5.2.1 Projeção estereográfica da esfera S^2 no plano E^2	31
5.2.2 O caso hiperbólico.....	33
5.3 O hiperespaço hiperbólico.....	36
5.4 Curvatura.....	37
6. O MODELO RIEMANNIANO	40
6.1 Introdução.....	40
6.2 Geodésicas, confinamento e liberdade assintótica.....	44
7. DISCUSSÃO FINAL.....	46
APÊNDICE A.....	52
APÊNDICE B.....	54
B.1 Introdução.....	54
B.2 Geodésicas	55
B.2.1 Transformações homográficas.....	56
B.2.2 As geodésicas do semi-plano superior.....	60
BIBLIOGRAFIA CITADA	66

1. INTRODUÇÃO

"The usual goal of every geometrical approach to interaction is to find a space in which the studied fields become standard geometrical objects. This makes it possible to apply the powerful and well-developed methods of geometry, algebra and topology to study the properties of the solutions of the classical equations of motion and field equations, which are frequently nonlinear..."¹

As equações de Yang-Mills governam os campos mediadores de interação. No caso abeliano elas correspondem ao par de equações de Maxwell que contém termos de fonte (lei de Gauss e lei de Ampère-Maxwell). Quando o grupo de gauge envolvido é um grupo não-abeliano as equações de Yang-Mills são não-lineares e portanto de difícil resolução analítica. Uma interpretação geométrica dos campos de Yang-Mills como se refere a citação acima poderia dar a essa teoria um maior poder para prever o comportamento das partículas a ela associadas. Comportamento esse em muitos casos bem estabelecido experimentalmente, mas que carece de previsão teórica. Esse é particularmente o caso para os efeitos não perturbativos.

Dentro do formalismo Lagrangeano é possível construir uma ação a partir da qual as equações de Yang-Mills são obtidas como equações de Euler-Lagrange. Na quantização dessa teoria, é preferível utilizar o formalismo Hamiltoniano. Neste, no entanto, uma das equações de Yang-Mills (a versão não-abeliana da lei de Gauss) não aparece como uma equação de Hamilton. A lei de Gauss é implementada como um vínculo sobre o espaço dos estados, porém para um gauge particular. É a implementação exata dessa lei que vai motivar a procura de variáveis invariantes de gauge.

¹ Konopleva N P & Popov V N 1981: Gauge Fields, Harwood, Chur, Switzerland; capítulo III.

Essas variáveis foram encontradas por FHJL². Além de permitirem a implementação exata da lei de Gauss, elas trazem à luz uma geometria associada ao grupo SU(2). Geometria essa que serviu de base para propormos nessa dissertação um modelo ("Modelo Riemanniano") no qual os "campos magnéticos" dados por

$$B^{ai} = \frac{\delta^{ai}}{(1 - r^2)}$$

são soluções das equações de Yang-Mills para o grupo SU(2)-cor. A interpretação geométrica desses campos em termos de tríadas (referenciais móveis de Cartan, a três dimensões) permite a previsão do comportamento de uma partícula que possui "cor-SU(2)". Entre elas encontra-se o confinamento dessa partícula e sua liberdade assintótica.

No segundo capítulo dessa dissertação expomos os problemas mencionados acima, referentes à formulação Hamiltoniana e à quantização das teorias de gauge. O terceiro e o quarto capítulo referem-se ao trabalho de FHJL e à interpretação geométrica dos campos "magnéticos". O quinto capítulo é uma apresentação da geometria riemanianna para espaços de curvatura constante e não nula, em particular o hiperespaço hiperbólico. O conteúdo dsse capítulo, juntamente com o trabalho de FHJL é que nos permite propor o "Modelo Riemanniano" apresentado no 6º capítulo. No 7º capítulo fazemos uma recapitulação e discutimos a existência e validade de outros possíveis modelos dentro da teoria geométrica de FHJL.

² D.Z. Freedman, P.E. Haagensen, K. Johnson e J.I. Latorre, MIT preprint CTP#2238, agosto 1993. Indicado por "FHJL" de agora em diante.

2. FORMALISMO CANÔNICO PARA TEORIAS DE GAUGE

Encontrar o formalismo canônico para uma certa teoria significa identificar as variáveis canônicas, coordenadas e momentos, definir uma Hamiltoniana e obter as equações do campo como equações de Hamilton.

2.1 Introdução

Para fixar notação¹ vamos considerar uma teoria de gauge para o grupo SU(N) consistindo de um campo ψ^n de spin $\frac{1}{2}$ e de um campo vetorial de gauge A_μ^a , pertencentes respectivamente às representações do grupo de dimensão N (representação fundamental) e $M = N^2 - 1$ (representação adjunta), portanto, o índice n varia de 1 até N e o índice a de 1 até M. O índice μ refere-se ao espaço-tempo: varia de 0 a 3.

A densidade Lagrangeana invariante sob transformações de gauge do SU(N)

$$\psi \rightarrow \psi' = U \psi, \quad (2.1)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + U \partial_\mu U^{-1},$$

com $U = U(x)$ pertencente ao SU(N), é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi. \quad (2.2)$$

Aqui,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix},$$

com cada ψ^n sendo um spinor de Dirac de quatro componentes; além disso,

¹ A apresentação a seguir é baseada em :
Lee T. D. 1981: Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood, New York; capítulo 19,
Jackiw R. 1980: Rev. Mod. Phys. 52 661 e

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.3)$$

e

$$D_\mu ()_\nu^a = \partial_\mu ()_\nu^a + f_{bc}^a A_\mu^b ()_\nu^c \quad (2.4)$$

é a derivada covariante.

Dois exemplos de teoria nessas condições são:

1) a teoria de Yang-Mills, cujo grupo de simetria é o SU(2); tendo por geradores as matrizes 2×2

$$T_a = \frac{1}{2} \sigma_a,$$

onde os σ_a 's são as matrizes de Pauli;

2) a Cromodinâmica Quântica, que é a teoria de gauge para as interações fortes, com simetria dada pelo grupo SU(3)-cor. Esse sistema consiste de quarks e gluons. Os quarks são representados pelos campos de Dirac ψ_q^n com q denotando sabor u,d,s,c... e n denotando cor: $n = 1, 2$ e 3 .

Os gluons são descritos pelos campos de gauge A_μ^a , "a" é o índice de cor de gluon, variando de 1 até 8. O grupo SU(3) tem como geradores as matrizes 3×3

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a,$$

onde os λ_a 's são as matrizes de Gell-Mann. Para o SU(N) há $N^2 - 1$ T_a 's que satisfazem

$$T_a = T_a^\dagger;$$

$$\text{Tr}(T_a T_b) = -\frac{1}{2} g_{ab}, \quad \text{onde } g_{ab} \text{ é a métrica de Killing} \quad (2.5)$$

e n é a dimensão do grupo

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T^c.$$

Vamos agora nos restringir a sistemas envolvendo apenas partículas de gauge. Chegaremos mais tarde a uma interpretação geométrica do espaço dos campos A_μ que pode sugerir o confinamento (ou "blindagem") dessas partículas. Se considerarmos os campos de matéria ψ^n teremos que associar

a cada ponto da variedade base, além de um exemplar do grupo $SU(N)$, também um espaço de Hilbert \mathfrak{H}^X .²

A densidade Lagrangeana (2.2) fica:

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a. \quad (2.6)$$

Em analogia com a Eletrodinâmica, os campos "elétricos" E_i^a e "magnéticos" B_i^a são definidos como

$$E^{ai} \equiv \frac{1}{g^2} F^{ai0} = \frac{1}{g^2} (\partial^i A^{a0} - \partial^0 A^{ai} + f_{bc}^a A^{bi} A^{c0}) \quad (2.7)$$

e

$$B^{ai} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}^a = \varepsilon^{ijk} (\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + \frac{1}{2} f_{bc}^a A_j^b A_k^c) \quad (2.8)$$

onde g é a constante de acoplamento.

Obtemos da Lagrangeana (2.6) as equações de Yang-Mills na ausência de fontes,

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} + f_{bc}^a A_\mu^b F^{c\mu\nu} = 0. \quad (2.9)$$

Para $\nu = 0$ e para $\nu = i$ ($i = 1, 2, 3$) obtemos respectivamente as versões não-abelianas da lei de Gauss

$$D_k E^{ak} = \partial_k E^{ak} + f_{bc}^a A_k^b E^{ck} = 0, \quad (2.10)$$

e da lei de Ampère-Maxwell

$$\partial_0 E^{ai} = (\nabla \times B)^{ai} + \varepsilon^{ijk} f_{bc}^a A_j^b B_k^c + f_{de}^a A_0^d E^{ei}. \quad (2.11)$$

2.2 Quantização e implementação da lei de Gauss

Tomando como variáveis canônicas as "coordenadas" A_i^a e seus momentos conjugados Π^{ai} e usando a densidade Lagrangeana de Yang-Mills (2.6) calculamos os momentos canonicamente conjugados a A_i^a ,

² Becher P., Böhm M., Joos H. 1984 : Gauge Theories of Strong and Electroweak

$$\Pi^{ai} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial A_i^a} = E^{ai}. \quad (2.12)$$

Impomos, então, relações de comutação a tempos iguais:

$$[A_i^a(\vec{x}, t), E^{bj}(\vec{y}, t)] = i\delta^{ab}\delta_i^j\delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.13)$$

Devido a antissimetria de $F_{\mu\nu}$, o momento canonicamente conjugado a A_0^a se anula, o que é incompatível com a relação de comutação (2.13). Para manter essa relação de comutação faremos um tratamento de tal forma que A_0^a terá dentro da teoria um papel diferenciado das demais "coordenadas" A_i^a . Conforme mostraremos, usando o método de Faddeev³, A_0^a será um parâmetro de Lagrange associado a um vínculo de importância fundamental para a quantização da teoria.

A princípio escrevemos a ação em termos das variáveis independentes F e A

$$I = -\frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{tr}[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]. \quad (2.14)$$

Com o objetivo de isolar A_0 e eliminar termos quadráticos nas derivadas temporais, fazemos uso das definições (2.7) e (2.8) na ação (2.14), obtendo

$$I = -\frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{tr}[-2g^2(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i + [A_i, A_0])E^i + g^4 E^i E^i + B^i B^i]; \quad (2.15)$$

integrando por partes e tirando o traço, temos

$$I = -\frac{1}{g^2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} [g^4 E^{ai} E_a^i + B^{ai} B_a^i] - g^2 E_a^i \partial_0 A_i^a + g^2 A_0^a (\partial_i E_a^i + f_{adb} A_i^d E^{bi}) \right\}.$$

Lembremos que, variando a ação acima em relação a A_0^a , tínhamos obtido a lei de Gauss: na teoria Lagrangeana essa lei é uma equação do movimento. No entanto, não há termos envolvendo a derivada temporal de A_0^a e o aspecto da última expressão para a ação sugere que A_0^a seja um

parâmetro de Lagrange, com a lei de Gauss como vínculo correspondente. Veremos abaixo que esse é realmente o caso.

A Hamiltoniana é

$$H = H_0 + \mathcal{G}[A_0] \quad (2.16)$$

onde definimos

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ g^2 E_a^i E_a^i + \frac{1}{g^2} B_a^i B_a^i \right\} \quad (2.17)$$

e

$$\mathcal{G}[A_0] = \int d^3x A_0^a(x) \mathcal{G}_a(x,t). \quad (2.18)$$

com

$$\mathcal{G}_a(x,t) \equiv (D_i E^i)_a = (\partial_i E_a^i + f_{adb} A^d_i E^{bi}). \quad (2.19)$$

O comutador entre \mathcal{G}_a e \mathcal{G}_b a tempos iguais é dado por

$$[\mathcal{G}_a(x), \mathcal{G}_b(y)] = if_{ab}^c \mathcal{G}_c(y) \delta^3(x-y) \quad (2.20)$$

e portanto

$$[\mathcal{G}[A_0], H] \neq 0. \quad (2.21)$$

A expressão (2.19), quando igualada a zero, é a própria lei de Gauss; o que se espera é que esta lei seja obtida dentro de uma teoria Hamiltoniana como uma equação de Hamilton. Para tanto é preciso primeiramente estabelecer uma Hamiltoniana. O critério para o estabelecimento de tal Hamiltoniana é que ela deve levar a uma teoria quântica consistente.

O problema pode ser colocado em termos da evolução temporal de funções (ou melhor, funcionais) que dependem das variáveis canônicas A_i e E^i . Sendo $f = f(A_i, E^i)$ um tal funcional, consideramos ter ele sentido físico se sua transformação sob translações temporais infinitesimais for bem definida. As equações do movimento são dadas por

$$\frac{df}{dt} = [f, H_0] + [f, \int d^3x A_0^a(x) \mathcal{G}_a(x,t)]. \quad (2.22)$$

A arbitrariedade da equação acima está no comutador de f com $\mathcal{G}[A_0]$, já que $[\mathcal{G}[A_0], H] \neq 0$. Portanto para que a equação do movimento de f esteja bem definida é necessária a condição

$$[f, \int d^3x A^a_0(x) \mathcal{G}_a(x,t)] = 0 \quad (2.23)$$

ou $[\mathcal{G}[A_0], H] = 0$. Essas duas condições são trivialmente satisfeitas por uma Hamiltoniana que se limite a H_0 .

Isso pode ser obtido com a escolha do gauge temporal $A_0=0$. A escolha de outros gauges como o gauge de Coulomb ou o gauge axial são escolhas inconvenientes já que levam respectivamente a equações diferenciais de difícil solução e a vínculos que não podem ser facilmente incorporados numa teoria quântica⁴.

Temos então

$$H = H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{g^2} B^{ai} B_a^i + g^2 E^{ai} E_a^i \right\}. \quad (2.24)$$

Portanto com a escolha do gauge temporal a dinâmica do sistema fica bem estabelecida. E mais, a Hamiltoniana acima é invariante sob transformações de gauge.

Dentro dessa teoria Hamiltoniana $\mathcal{G}_a(x)$ são os geradores infinitesimais das transformações de gauge independentes do tempo com parâmetro de gauge $\delta\alpha^a$, como pode ser visto pelos comutadores

$$[\mathcal{G}[\delta\alpha], H] = 0,$$

$$\delta A^a_i = i[\mathcal{G}[\delta\alpha], A^a_i] = D_i \delta\alpha^a(x) = \partial_i \delta\alpha^a(x) + f^a_{bc} A^b_i(x) \delta\alpha^c(x),$$

$$\delta E^{ai} = i[\mathcal{G}[\delta\alpha], E^{ai}] = f^a_{bc} E^{bi}(x) \delta\alpha^c(x), \quad (2.25)$$

$$\delta B^{ai} = i[\mathcal{G}[\delta\alpha], B^{ai}] = f^a_{bc} B^{bi}(x) \delta\alpha^c(x),$$

onde

⁴Sobre a escolha de outros gauges veja Goldstone J. & Jackiw R. 1978: Phys. Lett.

$$\mathcal{G}[\delta\alpha] = \int d^3y \delta\alpha^a(y) \mathcal{G}_a(y). \quad (2.26)$$

É com a Hamiltoniana H_0 que quantizamos a teoria de Yang-Mills. Apesar de dela ser invariante de gauge e levar a uma mecânica quântica consistente, a lei de Gauss não é obtida a partir das equações de Hamilton. Usando essas equações obtemos apenas a equação (2.11) e a definição $\partial_0 A_i^a = g^2 E_i^a$.

Mas como $[\mathcal{G}[A_0], H_0] = 0$, uma autofunção $|\psi\rangle$ de H pode ser escolhida para ser simultaneamente autofunção de G_a , escolhendo o autovalor zero, impomos sobre o espaço de Hilbert a condição subsidiária

$$\mathcal{G}_a(x) |\psi\rangle = 0 \quad (2.27)$$

e assim a lei de Gauss é implementada na teoria. Uma outra consequência de $[\mathcal{G}[A_0], H_0] = 0$ é que, uma vez determinado um subespaço do espaço de Hilbert em um ponto do espaço tempo, esse espaço permanecerá sempre o mesmo.

Voltando às equações (2.16) e (2.18) chegamos à interpretação de Faddeev na qual

$$\mathcal{G}_a(x) \equiv (D_i E^i)_a = (\partial_i E_a^i + f_{adb} A_i^d E^{bi}) = 0 \quad (2.28)$$

é um vínculo da teoria e A_0 é o multiplicador de Lagrange correspondente a esse vínculo. As variáveis A_i^a e E^{bi} para as quais definimos as relações de comutação (2.13) não são todas independentes e devem satisfazer o vínculo (2.28). Os observáveis da teoria são funcionais de A_i e E^i e estão restritos ao subespaço determinado por (2.28) e pela definição de B_i^a em (2.8).

Sendo A_0 não mais uma "coordenada" e sim um parâmetro de Lagrange, não mais associamos a ela um momento canonicamente conjugado e portanto as relações de comutação (2.13) ficam definidas apenas para as demais componentes A_i e seus momentos conjugados. É interessante notar que o fato de Π^{a0} ser igual a zero significa que a mudança de variáveis das velocidades para os momentos $\partial_0 A_\mu \rightarrow \Pi_\mu$ é singular. Ao

fazer uma transformação de quatro variáveis para três variáveis é esperado o aparecimento de um vínculo⁵.

A implementação da lei de Gauss como foi mostrada não é exata, pois só mediante a escolha do gauge temporal foi possível associar um subespaço do espaço de Hilbert a cada ponto da variedade base. E mais, a dinâmica do sistema também foi estabelecida mediante a escolha do gauge.

Como f depende de A , o qual se transforma de maneira não covariante sob transformações de gauge, a discussão feita acima só é válida para esse gauge. Na equação

$$\frac{df}{dt} = [f, H_0]$$

é possível ver que se f for uma função de variáveis invariantes de gauge a dinâmica do sistema fica bem estabelecida, já que H_0 é ele mesmo invariante sob transformações de gauge. Da condição (2.27) temos que se os estados físicos do espaço de Hilbert dependessem das tais variáveis independentes de gauge a lei de Gauss seria exatamente implementada.

Na próxima secção discutimos a existência de variáveis invariantes de gauge que permitem a implementação exata da lei de Gauss.

⁵ Ramond P. 1981: *Field Theory - A Modern Primer*, Benjamin/Cummings

3. VARIÁVEIS INVARIANTES DE GAUGE

3.1 Introdução

Conforme foi mencionado, a dificuldade de tratar a lei de Gauss reside no fato do potencial vetor A^a_i não se transformar covariantemente sob transformações de gauge. Uma possível solução para o problema seria uma formulação da teoria em termos de variáveis que se transformam covariantemente.

Goldstone e Jackiw¹ sugeriram o uso do campo elétrico como variável fundamental, conseguindo dessa forma implementar a lei de Gauss exatamente na teoria de gauge do grupo SU(2) para gluons. Porém essa implementação levou a uma Hamiltoniana complicada, difícil de ser utilizada em cálculos concretos.

Quanto ao uso de variáveis magnéticas, Simonov² usou uma "representação polar" do potencial vetor a qual permitiu a remoção de graus de liberdade de gauge, porém a Hamiltoniana e a medida funcional obtidas eram não-locais.

A discussão que faremos a seguir tem como base o trabalho apresentado por K. Johnson³ em 1992 e por FHJL⁴ em 1993. Johnson propôs uma transformação canônica para o campo magnético B^{ai} e seu conjugado C^a_i , os quais se transformam homogeneamente. A lei de Gauss é então satisfeita por funcionais de estado $\psi[\phi^{ij}]$ que só dependem da variável tensorial invariante de gauge $\phi^{ij} = B^{ai}B^{aj}$.

¹ Goldstone J. & Jackiw R. 1978: Phys. Lett. **74B** 81.

² Simonov Y. A. 1985: Sov. J. Nucl. Phys. **41** 835.

³ Johnson K. 1992: QCD - 20 Years Later, Aachen, June 1992.

⁴ D.Z. Freedman, P.E. Haagensen, K. Johnson e J.I. Latorre, MIT preprint CTP#2238, agosto 1993.

3.2 A nova variável

A discussão feita a partir daqui é válida para o grupo SU(2), portanto o índice a varia de 1 a 3. A constante de estrutura associada a esse grupo é o símbolo anti-simétrico de Levi-Civita

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{para número par de permutações} \\ -1 & \text{para número ímpar de permutações} \\ 0 & \text{para índices idênticos} \end{cases} \quad (3.1)$$

Considere-se a possibilidade de descrever o espaço de configuração do sistema usando B^{ai} e não A^a_i . Em três dimensões espaciais (e somente três), eles possuem o mesmo número de componentes espaciais. Mas essa não é a única consideração a fazer. O campo magnético satisfaz a identidade de Bianchi

$$\partial_i B^i = 0 \quad (3.2)$$

no caso abeliano, e

$$D_i B^{ai} = \partial_i B^{ai}(x) + \varepsilon^a_{bc} A^b_i(x) B^{ci} = 0 \quad (3.3)$$

para a teoria não-abeliana. Dessa forma, B^i está vinculado a duas componentes independentes no caso abeliano e não pode ser usada como variável. A identidade de Bianchi não-abeliana, por outro lado, não é um vínculo sobre B^{ai} , mas sim uma relação entre B^{ai} e A^a_i que é compatível com a definição (2.8). Portanto, B^{ai} não apresenta, a priori, obstáculo algum em ser usado como "coordenada".

A passagem para o novo sistema de coordenadas pode ser descrita por uma transformação canônica (dependente do ponto) das variáveis conjugadas (A^a_i, E^{aj}) para um novo conjunto (B^{ai}, C^a_j) ou por uma mudança de variáveis numa representação de Schrödinger onde o operador A^a é diagonal e seu momento conjugado E^a é representado por uma diferenciação funcional,

$$E^{ai} = -i \frac{\delta}{\delta A^a_i(x)} .$$

O primeiro método foi utilizado por Johnson³. Em FHJL⁴ foi utilizado o segundo ponto de vista, o qual adotaremos aqui. B^{ai} é uma variável dependente no espaço de configuração original e a mudança de variável é dada por

$$E^{ai} = -i \frac{\delta}{\delta A^a_i(x)} = -i \int d^3y \frac{\delta B^{bj}(y)}{\delta A^a_i(x)} \frac{\delta}{\delta B^{bj}(y)} = -i \epsilon^{ijk} D_i \frac{\delta}{\delta B^{ak}} . \quad (3.4)$$

O gerador das transformações de gauge então age sobre os funcionais de estado como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^a(x) \psi[B] &= D_i E^{ai} \psi[B] = \\ &= -i \epsilon^{ijk} D_i D_j \frac{\delta}{\delta B^{ak}} \psi[B] \\ &= -i \epsilon^{abc} B^{bi}(x) \frac{\delta}{\delta B^{ci}(x)} \psi[B]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O objetivo é então escrever uma variável ϕ que seja invariante de gauge. Como B^{ai} se transforma covariantemente sob transformações de gauge, ϕ não pode ser linear em B^{ai} .

E mais, usando a expressão

$$\delta B^{ai} = i [\mathcal{G}[\delta\alpha], B^{ai}] = f^a_{bc} B^{bi}(x) \delta\alpha^c(x), \quad (3.6)$$

para calcular

$$\delta\phi = [\mathcal{G}[\delta\alpha], \phi] \quad (3.7)$$

é possível mostrar que para ϕ ser invariante de gauge, ou seja

$$\delta\phi = [\mathcal{G}[\delta\alpha], \phi] = 0, \quad (3.8)$$

essa variável deve ser proporcional a um número par de variáveis B .

Outro critério a ser usado é o número de componentes necessárias da variável ϕ para descrever o conteúdo de uma configuração de campos invariantes de gauge, esse número é seis.⁵

A escolha mais simples é o "tensor" simétrico positivo

$$\phi^{ij} = \gamma_{ab} B^{ai} B^{bj} \quad (3.9)$$

que é invariante sob transformações de gauge

$$\delta\phi^{ij} = [\mathcal{G}[\delta\alpha], \phi^{ij}] = 0 \quad (3.10)$$

e possui 6 componentes independentes. γ_{ab} é a métrica (normalizada) de Killing-Cartan do grupo. Para o SU(2), $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$.

Qualquer funcional $\psi[\phi]$ irá satisfazer o vínculo $\mathcal{G}_a(x)|\psi\rangle = 0$, como é possível ver pela última expressão de (3.5).

Apesar de ϕ^{ij} possuir 6 componentes independentes, que é o número correto necessário para descrever uma configuração de campos independentes de gauge, ele não é plenamente satisfatório porque não fornece uma descrição completa do subespaço invariante de gauge do espaço de configuração. Naturalmente, $\det(B^{ai}) \equiv \det B$, é um invariante independente, mas $(\det B)^2$ pode ser expresso em termos de ϕ , portanto somente o sinal de $\det B$ é independente. Dessa maneira, para usar ϕ seria necessário introduzir o rótulo $\beta = \pm$ e considerar $\psi[\phi, \beta]$.

Esse problema pode ser evitado com a introdução de uma outra variável independente de gauge a qual possui a mesma dimensão de B^{ai} , o "tensor"

⁵ Na teoria não abeliana a determinação dos graus de liberdade físicos não é feita de maneira direta como no caso abeliano. A introdução do gauge de Coulomb na teoria quantizada leva a ambiguidades e a versão não-abeliana da lei de Gauss possui soluções que não separam de maneira natural E_a e A_a em componentes transversais e longitudinais. O melhor método para tratar sistemas vinculados parece ser a versão de Faddeev-Popov da integral de Feynman.

Veja: Huang K. 1982: Quarks Leptons & Gauge Fields, World Scientific, Singapura; capítulo VIII.

$$G_{ij} = \gamma_{ab} B^a_i B^b_j \det B, \quad (3.11)$$

onde a matriz (B^a_i) é a inversa de (B^{ai}) , $\gamma_{ab} B^{ai} B^b_j = \delta^i_j$.

Usando a expressão

$$\varepsilon^{abc} \det B = \varepsilon_{ijk} B^{ai} B^{bj} B^{ck}, \quad (3.12)$$

temos

$$\det G = \det B \quad (3.13)$$

e portanto G_{ij} é definido positivo ou negativo.

A relação entre G e ϕ é

$$\phi^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{iks} \varepsilon^{jmn} G_{km} G_{sn} = G^{ij} \det G. \quad (3.14)$$

Para potenciais A^a_i constantes, a variável G_{ij} se reduz a

$$G_{ij} = A^a_i A^a_j \quad (3.15)$$

que é a variável usada por Lüscher⁶ para descrever campos de gauge constantes sobre o toro.

$G_{ij} = \gamma_{ab} B^a_i B^b_j \det B$ é a variável invariante de gauge que implementa exatamente a lei de Gauss na teoria quantizada.

Uma vez tendo encontrado a variável invariante de gauge, resta agora expressar a Hamiltoniana em termos dessa variável.

Para isso começamos por escrevê-la na forma

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \left[\frac{1}{g^2} (B^{ai})^2 + g^2 (E^{ai})^2 \right] \right\}, \quad (3.16)$$

onde usamos a métrica γ_{ab} dada acima.

⁶ Lüscher M. & Münster G. 1984: Nucl. Phys. **B232** 445.

A densidade de energia magnética é

$$\frac{1}{2g^2} \delta_{ii'} \gamma_{ab} [B^{ai} \psi] [B^{bi'} \psi^*] = \frac{1}{2g^2} \delta_{ii'} \gamma_{ab} B^{ai} B^{bi'} |\psi|^2, \quad (3.17)$$

utilizando a definição (3.9) e a relação (3.14), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g^2} \delta_{ii'} \gamma_{ab} B^{ai} B^{bi'} |\psi|^2 &= \frac{1}{2g^2} \delta_{ii'} \phi^{ii'} |\psi|^2 \\ &= \frac{1}{2g^2} (\delta^{jj'} \delta^{kk'} - \delta^{jk'} \delta^{kj'}) G_{jj'} G_{kk'} |\psi|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A densidade de energia elétrica é

$$\frac{1}{2} g^2 \delta_{ii'} \frac{\delta \psi^*}{\delta A^a_{i'}(x)} \frac{\delta \psi}{\delta A^a_{i'}(x)} \equiv \delta_{ii'} \mathcal{E}^{ii'}, \quad (3.19)$$

e escrevê-la em termos de G_{ij} não é tão imediato quanto para a densidade de energia magnética. Ao tentar realizar essa tarefa é que se descobre a geometria espacial associada à teoria de gauge do grupo $SU(2)$.

4. A DENSIDADE DE ENERGIA ELÉTRICA E A GEOMETRIA ESPACIAL

4.1 Geometria espacial

Numa etapa intermediária é utilizada a variável ϕ e depois retorna-se a G .

Aplicando a regra de cadeia funcional e usando as equações (2.8) e (3.9) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_i^a} \psi[\phi] &= \frac{\delta B^{bk}}{\delta A_i^a} \frac{\delta \phi^{mn}}{\delta B^{bk}} \frac{\delta \psi[\phi]}{\delta \phi^{mn}} \\ &= 2\epsilon^{ijk} \left[B^{al} \partial_j \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{kl}} + D_j B^{al} \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{kl}} \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $D_j B^{al} = \partial_j B^{al} + \epsilon^{ade} A_j^d B^{el}$.

Definindo uma quantidade tipo conexão Γ^m_{lj} como

$$-D_j B^{am} \equiv B^{al} \Gamma^m_{lj}, \quad (4.2)$$

a expressão (4.1) pode ser escrita como

$$\frac{\delta}{\delta A_i^a} \psi[\phi] = 2 \epsilon^{ijk} B^{al} \left[\delta^m_l \partial_j - \Gamma^m_{lj} \right] \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{km}}. \quad (4.3)$$

Antes de prosseguir na determinação da densidade de energia elétrica, é conveniente analisar as propriedades de Γ' .

Multiplicando (4.2) por B^{ai} obtém-se

$$\phi^{il} \Gamma^m_{lj} \equiv -B^{ai} D_j B^{am}. \quad (4.4)$$

Reescrevendo a expressão acima trocando os índices i e m entre si e somando com (4.4) vem

$$\partial_j \phi^{im} + \Gamma^i{}_{lj} \phi^{lm} + \Gamma^m{}_{lj} \phi^{il} = 0 \quad (4.5)$$

que se assemelha a uma condição de compatibilidade métrica para ϕ^{im} , já que seria a derivada covariante nula de um tensor contravariante de segunda ordem.

Diferenciando (4.2) e usando essa definição novamente obtém-se

$$D_i(B^a{}^l \Gamma^m{}_{lj}) \equiv -D_i D_j B^{am} \quad (4.6)$$

$$B^{ak}(\partial_i \Gamma^m{}_{kj} - \Gamma^l{}_{ki} \Gamma^m{}_{lj}) = -D_i D_j B^{am}.$$

Reescrevendo na última expressão acima trocando os índices i e j entre si e subtraindo o resultado de (4.6) temos

$$\begin{aligned} \partial_i \Gamma^m{}_{kj} - \partial_j \Gamma^m{}_{ki} - \Gamma^l{}_{ki} \Gamma^m{}_{lj} + \Gamma^l{}_{kj} \Gamma^m{}_{li} &= -B^a{}_k [D_i, D_j] B^{am} \\ &= -\epsilon^{abc} \epsilon_{ijl} B^a{}_k B^{bl} B^{cm} \\ &= -\epsilon_{ijl} \epsilon^{lmn} B^a{}_k B^a{}_n \det B \\ &= \delta^m{}_j G_{ki} - \delta^m{}_i G_{kj}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Observando (4.5) vê-se que Γ' poderia ser interpretada como uma conexão se ϕ^{il} fosse um tensor, conexão esta que daria origem ao tensor de curvatura (4.7). Se ambas as quantidades ϕ^{il} e G_{ij} se transformassem como tensores as equações (4.5) e (4.7) seriam compatíveis, porém a equação (3.14) mostra que ϕ e G não podem os dois se transformarem como tensores¹. Como a variável G está bem definida para quaisquer dos sinais de $\det B$ ela será escolhida como tensor. Vamos, então, buscar uma equação de compatibilidade métrica para G .

Substituindo (3.14) em (4.5) e definindo Γ convenientemente como

¹ Da relação $\phi^{ij} = G^{ij} \det G$, tem-se que $\det G$ é o determinante da transformação dessas duas variáveis, portanto, se uma das variáveis for um tensor a outra será um pseudo-tensor ou tensor densidade.

$$\Gamma^i{}_{lj} = -\frac{1}{2} \delta^i{}_l \partial_j \ln(\det G) + \Gamma^i{}_{lj} \quad (4.8)$$

ou equivalentemente

$$\frac{B^{al}}{\sqrt{\det G}} \Gamma^i{}_{lj} = -D_j \left(\frac{B^{ai}}{\sqrt{\det G}} \right), \quad (4.9)$$

(4.5) se torna

$$\partial_j G^{im} + \Gamma^i{}_{lj} G^{lm} + \Gamma^m{}_{lj} G^{il} = 0. \quad (4.10)$$

Usando a definição de derivada covariante de um tensor covariante de ordem 2

$$\partial_j M_{ik} - \Gamma^m{}_{ij} M_{mk} - \Gamma^m{}_{kj} M_{im} = 0.$$

é possível, com base na equação (4.10), mostrar que

$$\partial_j G_{ik} - \Gamma^m{}_{lj} G_{mk} - \Gamma^m{}_{kj} G_{im} = 0, \quad (4.11)$$

Γ é, portanto, uma conexão que preserva a métrica.

Substituindo (4.8) em (4.7) o termo $\partial_j \ln(\det G)$ desaparece e encontra-se que o tensor de curvatura da conexão Γ satisfaz

$$R^l{}_{kij} \equiv \partial_i \Gamma^l{}_{kj} - \partial_j \Gamma^l{}_{ki} + \Gamma^m{}_{kj} \Gamma^l{}_{mi} - \Gamma^m{}_{ki} \Gamma^l{}_{mj} = \delta^l{}_j G_{ki} - \delta^l{}_i G_{kj}, \quad (4.12)$$

enquanto o tensor de Ricci obedece a

$$R_{kj} = R^l{}_{klj} = -2G_{kj}. \quad (4.13)$$

Contraindo mais uma vez obtem-se $R = G^{kj} R_{kj} = -6$ para a curvatura escalar. A expressão (4.13) é a "condição de Einstein" para o tensor de Ricci.

Voltando a (4.8) e (4.2) tem-se que a conexão Γ que aparece em (4.11) não é simétrica nos dois índices inferiores, não sendo, portanto, a conexão de Levi-Civita da métrica. Os coeficientes da conexão Γ podem ser escritos sob a forma

$$\Gamma^i_{kj} = \{\Gamma^i_{(kj)} + \Gamma^i_{[kj]}\} \quad (4.14)$$

onde os parêntesis e colchetes indicam simetrização e anti-simetrização, respectivamente. A parte anti-simétrica $\Gamma^i_{[kj]}$ se transforma como um verdadeiro tensor, o tensor de torção T:

$$T^i_{kj} = \Gamma^i_{[kj]} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}), \quad (4.15)$$

que é anti-simétrico nos índices k e j. Usando (4.10) podemos calcular a parte simétrica² $\Gamma^i_{(kj)}$, obtendo

$$\Gamma^i_{(kj)} = \overset{\circ}{\Gamma}^i_{kj} - T^i_{jk} - T^i_{kj}, \quad (4.16)$$

onde

$$\overset{\circ}{\Gamma}^i_{kj} = \frac{1}{2} G^{im} (\partial_j G_{km} + \partial_k G_{mj} - \partial_m G_{kj}) \quad (4.17)$$

Substituindo (4.16) e (4.15) em (4.14), tem-se

$$\Gamma^i_{kj} = \overset{\circ}{\Gamma}^i_{kj} - K^i_{kj}. \quad (4.18)$$

onde definimos a contorção K

$$K^i_{kj} = (-T^i_{kj} + T^i_{jk} + T^i_{kj}), \quad (4.19)$$

Um vínculo sobre a geometria surge ao se aplicar a identidade de Bianchi das teorias de gauge (3.3). Quando aplicada a (4.4) encontra-se $\Gamma^i_{ki} = 0$. Usando (4.8) e (4.18) vê-se que isso é equivalente a uma condição adicional sobre a contorção

²A decomposição da conexão em partes simétrica e anti-simétrica que usaremos difere da adotada por FHJL. Para eles, a parte simétrica se limita a conexão de Levi-Civita e como consequência identificam a parte anti-simétrica da conexão com a contorção. Não encontramos motivo algum para na equação (4.16) anular os termos de torção. Adotaremos portanto as expressões (4.16) e (4.19) seguindo a referência: Kobayashi S. and Nomizu K. 1963: Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, New York; capítulo 3, página 146.

$$K^i_{ki} = 0. \quad (4.20)$$

As equações (4.10) a (4.13), (4.17), (4.18) e (4.20) definem completamente a geometria espacial associada ao subespaço invariante de gauge do espaço de configuração da teoria de gauge do grupo SU(2).

É válido enfatizar que, dado um potencial A^a_i , o campo magnético B^{ai} , a métrica G_{ij} e a conexão Γ^i_{jk} podem ser calculadas diretamente pela fórmulas (2.8), (3.11) e (4.9) respectivamente. K e R podem então ser calculados por (4.18) e (4.14) respectivamente.

A derivada covariante D_i definida em (2.4) é a derivada covariante da teoria de gauge que só "enxerga" índices de gauge.

Com o aparecimento dessa nova geometria espacial definimos a derivada covariante espacial ∇_i e $\overset{\circ}{\nabla}_i$ com e sem torção respectivamente, e.g., de um vetor covariante

$$\begin{aligned} \nabla_j V_i &\equiv \partial_j - \Gamma^k_{ij} V_k \\ \overset{\circ}{\nabla}_j V_i &\equiv \partial_j - \overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij} V_k. \end{aligned} \quad (4.21)$$

R e $\overset{\circ}{R}$ denotam respectivamente curvaturas com e sem torção.

4.2 Densidade de energia elétrica

Utilizando (4.3), (4.8) e o tensor de torção

$$T^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = K^i_{jk} - K^i_{kj} \quad (4.22)$$

obtem-se

$$\frac{\delta \psi}{\delta A^a_i} = 2 \varepsilon^{ijk} B^{al} \left(\tilde{\nabla}_j \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{kl}} + \frac{1}{2} T_{jk}{}^m \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{ml}} \right)$$

$$\equiv 2 \varepsilon^{ijk} B^{al} \mathbf{D}_j \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{kl}}, \quad (4.23)$$

onde

$$\tilde{\nabla}_j \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{kl}} \equiv \partial_j \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{kl}} - \Gamma^m_{kj} \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{ml}} - \Gamma^m_{lj} \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{km}} + \frac{1}{2} \partial_j (\ln \det G) \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{kl}}. \quad (4.24)$$

Essa expressão é precisamente a derivada covariante de um tensor densidade covariante de peso -1.

É possível agora escrever a densidade de energia elétrica usando (4.23):

$$\frac{1}{2} g^2 \delta_{ii'} \frac{\delta \psi^*}{\delta A^a_i} \frac{\delta \psi}{\delta A^a_{i'}} \equiv 2 g^2 \delta_{ii'} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{i'j'k'} \left(\mathbf{D}_j \frac{\delta \psi^*}{\delta \phi^{kl}} \right) \left(\mathbf{D}_{j'} \frac{\delta \psi}{\delta \phi^{k'l'}} \right). \quad (4.25)$$

Se em vez dos funcionais $\psi[\phi]$ forem considerados os funcionais $\psi[G]$ será possível finalmente escrever a densidade de energia elétrica em termos de G . Isso é feito usando-se (4.23) juntamente com a regra de cadeia

$$\frac{\delta}{\delta \phi^{kl}} = \frac{\delta G_{pq}}{\delta \phi^{kl}} \frac{\delta}{\delta G_{pq}} \quad (4.26)$$

e a expressão (3.14), dando

$$\frac{\delta}{\delta \phi^{kl}} = \frac{1}{2 \det G} (G_{pq} G_{kl} - 2 G_{pk} G_{lq}) \frac{\delta}{\delta G_{pq}}. \quad (4.27)$$

Então (4.26) fica

$$\frac{\delta \psi}{\delta A^a_i} = \frac{\varepsilon^{ijk} B^{al}}{\det G} (G_{pq} G_{ml} - 2 G_{pm} G_{lq}) (\delta^m_k \tilde{\nabla}_j - K_{jk}{}^m) \frac{\delta \psi}{\delta G_{pq}}, \quad (4.28)$$

devido à equação de compatibilidade métrica a derivada covariante $\tilde{\nabla}_j$ age diretamente sobre $\frac{\delta \psi}{\delta G_{pq}}$, com o detalhe de que agora essa derivada covariante age sobre um tensor densidade contravariante de peso +1, de tal

forma que as conexões e o termo de densidade em (4.24) sofrem mudança de sinal.

A Hamiltoniana (2.24) pode então ser escrita na forma

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2g^2} (\delta^{jj'} \delta^{kk'} - \delta^{jk'} \delta^{kj'}) G_{jj'} G_{kk'} + \frac{1}{2g^2} \delta_{ii'} \frac{\delta}{\delta A_i^a} \frac{\delta}{\delta A_{i'}^a} \right\}, \quad (4.29)$$

com $\frac{\delta}{\delta A_i^a}$ dada por (4.28).

4.3 A Interpretação geométrica de B^{ai}

4.3.1 *Tríadas*³

O objetivo dessa subsecção é introduzir o processo de redução de fibrado e chegar aos referenciais ortonormais (tríadas) que por sua vez estão relacionados aos campos magnéticos B^{ai} , conforme será exposto na próxima subsecção.

Dada uma variedade diferencial M e um conjunto aberto $U \subset M$, um conjunto $\{X_i\}$ de m campos vetoriais é uma base local de campos (ou referencial local) se, para todo $p \in U$, $\{X_i\}$ for uma base para o espaço tangente a M em p , $T_p M$. Cada X_{ip} é um vetor tangente a M em p e os X_{ip} 's são linearmente independentes.

Seja $B_p M$ o conjunto de todas as bases lineares para $T_p M$. Cada base de $T_p M$ pode ser caracterizada por uma matriz $m \times m$, necessariamente não-singular e conseqüentemente inversível. As bases de $T_p M$ podem ser relacionadas umas com as outras mediante a ação de outras matrizes $m \times m$, as matrizes de mudança de base, que por sua vez constituem o grupo linear $GL(m, \mathbb{R})$ das matrizes reais $m \times m$. Com as propriedades das bases definidas acima e com a introdução de uma operação que as relaciona tem-se que essas

³ Aldrovandi R. 1992: *Physical Geometry - Mathematical Language for Theoretical Physics*, Instituto de Física Teórica, São Paulo, Brasil.

constituem também o grupo linear $GL(m, \mathbb{R})$. $B_p M$ é portanto, um espaço vetorial e um grupo, o grupo $GL(m, \mathbb{R})$.

O conjunto

$$BM = \bigcup_{p \in M} B_p M \quad (4.30)$$

de todas as bases na variedade M pode ser dotado de uma estrutura de variedade diferencial. É então chamado o *fibrado das bases lineares* sobre M . M é a variedade base, cada $B_p M$ é uma fibra e o grupo $GL(m, \mathbb{R})$ que atua em cada fibra é chamado grupo de estrutura. Como $B_p M$ é ela própria $GL(m, \mathbb{R})$, a fibra e o grupo de estrutura coincidem, nesse caso o fibrado é um fibrado principal, representado por

$$BM = (M, GL(m, \mathbb{R}), \pi), \quad (4.31)$$

onde π é uma projeção $\pi : BM \rightarrow M$, com $\pi(\{X_{ip}\} \in B_p M) = p$.

É possível substituir $GL(m, \mathbb{R})$ por algum subgrupo de tal forma que um subfibrado é obtido. Nesse processo, chamado redução de fibrado, cada base de BM define na variedade M uma métrica Riemanniana.

O grupo $GL(m, \mathbb{R})$ tem o grupo ortogonal $O(m)$ como um subgrupo, portanto o fibrado BM pode ser reduzido ao fibrado $OM = (M, O_p M, O(m), \pi)$ onde $O_p M$ é o conjunto das bases ortogonais em $T_p M$. $T_p M$ é isomorfo ao espaço euclidiano E^m no qual existe um produto interno invariante sob a ação do grupo $O(m)$. Em E^m a base canônica $\{K_i\}$ é definida como colunas cujo j -ésimo elemento é δ_{ij} . Um referencial $b \in BM$ dado por $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ pode ser visto como uma aplicação linear

$$\begin{aligned} b: E^m &\rightarrow T_{\pi(b)} M \\ b(K_j) &= b_j. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sendo uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais de mesma dimensão, a aplicação b é um isomorfismo. Ela escolhe o membro b_j da base como o representante do vetor canônico K_j pertencente a E^m . Consequentemente, dois vetores X e Y de $T_{\pi(b)} M$ são imagens de dois vetores r e s de E^m :

$$X = b(r) = b(r^i K_i) = r^i b(K_i) = r^i b_i \quad . \quad (4.33)$$

Para o produto interno invariante em E^m dado por

$$(r,s) = \eta_{ij} r^i s^j, \quad (4.34)$$

e dados dois vetores X e Y como em (4.33), uma métrica pode ser definida por

$$g(X,Y) = (b^{-1}X, b^{-1}Y) = (r,s). \quad (4.35)$$

É possível mostrar que g é uma métrica Riemanniana. Esse processo pode ser visto de outra maneira: dada uma métrica Riemanniana g em M , toma-se o subconjunto em BM formado por $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ os quais são ortogonais de acordo com g . O fibrado resultante, OM , é o fibrado dos referenciais ortogonais em M .

O caso de nosso interesse é o grupo $SO(3)$. Os índices variam portanto de 1 a 3. Dada uma base natural $\{\partial_i\}$, uma base geral $\{h_j\}$ de BM tem elementos

$$h_j = h_j^i \partial_i \quad (4.36)$$

e sua base dual é $\{h^c\}$,

$$h^c = h_i^c dx^i \quad (4.37)$$

onde $\{dx^i\}$ é a base dual a $\{\partial_i\}$ e

$$h^c(h_j) = h_i^c h_j^i = \delta^c_j. \quad (4.38)$$

Para reduzir para o fibrado OM , impomos ortogonalidade por algum g :

$$g(h_i, h_k) = g_{ab} h_i^a h_k^b = \eta_{ik} \quad (4.39)$$

η_{ik} é o delta de Kronecker.

Podemos então calcular

$$\begin{aligned}
 g(X, Y) &= g_{ab} dx^a(X) dy^b(Y) = g_{ab} h_a^i h^i(X) h_k^b h^k(Y) \\
 &= \eta_{ik} h^i(X) h^k(Y) = \eta_{ik} h_a^i h_b^k X^a Y^b.
 \end{aligned}$$

Como os vetores X e Y são arbitrários,

$$g_{ab} = \eta_{ik} h_a^i h_b^k. \quad (4.40)$$

Nas expressões (4.39) e (4.40) reconhecemos nesses referenciais ortonormais os campos de tríadas h_a^i . Cada base $\{h_i\}$ determina uma métrica por (4.40), ela leva a métrica euclidiana em outra métrica Riemanniana.

De (4.36) e (4.37) temos que uma tríada nunca pode ser nula e será igual a unidade quando a base escolhida for uma base holônoma. As tríadas pertencem a estrutura diferencial da variedade.

4.3.2 O referencial B^{ai}

Considere as quantidades

$$b^{ai}(x) = \frac{1}{|\det B|^{1/2}} B^{ai}(x) \quad (4.41)$$

$$b^a_i(x) = |\det B|^{1/2} B^a_i(x) \quad (4.42)$$

que são elementos de matrizes inversas uma da outra. Para $\det B > 0$, b^a_i é um referencial ortonormal para G_{ij} , e está bem definido para $\det B < 0$.

O campo magnético associado à métrica G_{ij} é então definido por

$$B^{ai} = \sqrt{\det G} b^{ai}. \quad (4.43)$$

Então (4.9) pode ser escrita como

$$\Gamma^i_{kj} = b^{ai} D_j b^a_k$$

$$= b^{ai}(\partial_j b^a_k + \varepsilon^{abc} A^b_j b^c_k), \quad (4.44)$$

a qual pode ser rearranjada como

$$\partial_j b^a_k - \Gamma^i_{kj} b^a_i + \varepsilon^{abc} A^b_j b^c_k = 0 \quad (4.45)$$

da qual podemos identificar o potencial vetor como a conexão de spin

$$\begin{aligned} \varepsilon^{abc} A^c_j &\equiv -\omega_j^{ab} \\ A^c_j &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{abc} b^{ak} (\partial_j b^b_k - \Gamma^i_{kj} b^b_i). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Usando a definição acima, a equação (4.45) pode ser escrita

$$\Gamma^i_{kj} = b^{ai} \omega_j^{ac} b^c_k + b^{ai} \partial_j b^a_k, \quad (4.47)$$

mostrando que Γ e ω diferem entre si apenas por uma mudança de referencial. São portanto apenas componentes de uma mesma conexão em diferentes referenciais.

A equação (4.44) é uma equação que relaciona a conexão com as tríadas b^a_k . Conforme foi mencionado, dentre as propriedades das tríadas está que elas são quantidades inerentes à estrutura diferencial do fibrado das bases lineares, diferentemente da conexão, que é colocada a mão quando se quer decompor no fibrado principal vetores em suas componentes horizontais e verticais.

4.4 Sobre a curvatura

Usando as equações obtidas de uma maneira tal que as características particulares da métrica G_{ij} não são levadas em conta chegamos às equações (4.5) e (4.6). A primeira igualdade da equação (4.7) também é obtida de maneira natural, mas a segunda igualdade requer o uso da expressão do comutador das derivadas covariantes, que é proporcional a $F_{\mu\nu}$, um resultado geral das teorias de gauge. Para o grupo $SU(2)$ esse comutador será proporcional a alguma componente B^{ia} . Esse fato, juntamente com a

definição da métrica G_{ij} em termos dos campos "magnéticos" é o que nos permite escrever a última igualdade da equação (4.7).

Usando a equação (4.5) para obter uma expressão para a derivada covariante de G_{ij} é que convenientemente definimos a expressão (4.8) e assim chegamos a expressão (4.11).

Substituindo (4.8) em (4.7) chegamos a expressão (4.12) para a curvatura, através da qual obtemos a curvatura escalar

$$R = -6.$$

Os resultados obtidos dependem somente do resultado geral das teorias de gauge sobre o comutador das derivadas covariantes e do fato da variável conveniente para a implementação exata da lei de Gauss ser escrita em termos dos campos "magnéticos" conforme a equação (3.11).

$R=-6$ é portanto um resultado geral para o grupo $SU(2)$ com métricas definidas como em (3.11).

Discutiremos a seguir o papel da contorção K .

De (4.12) temos que o tensor de curvatura não depende dessa contorção. É possível usando a definição de Γ dada pela equação (4.8) e com o auxílio da equação (4.2) notar que essa conexão só depende, como era de se esperar, de considerações gerais sobre as teorias de gauge, do grupo $SU(2)$ e da definição (3.11).

De (4.18) é possível obter uma idéia preliminar sobre o papel da contorção. Note que $\overset{\circ}{\Gamma}$ depende das características particulares da métrica, portanto K deve compensar essa dependência de alguma forma para que as considerações acima sobre Γ e a curvatura sejam mantidas.

Substituindo $\Gamma^l_{kj} = \overset{\circ}{\Gamma}^l_{kj} - K^l_{kj}$ em (4.12) tem-se

$$\begin{aligned} R^l_{kij} \equiv & \partial_i \overset{\circ}{\Gamma}^l_{kj} - \partial_j \overset{\circ}{\Gamma}^l_{ki} - \overset{\circ}{\Gamma}^m_{ki} \overset{\circ}{\Gamma}^l_{mj} + \overset{\circ}{\Gamma}^m_{kj} \overset{\circ}{\Gamma}^l_{mi} - \partial_i K^l_{kj} + \partial_j K^l_{ki} - K^l_{mi} \overset{\circ}{\Gamma}^m_{kj} \\ & - K^m_{kj} \overset{\circ}{\Gamma}^l_{mi} + K^l_{mj} \overset{\circ}{\Gamma}^m_{ki} + K^m_{ki} \overset{\circ}{\Gamma}^l_{mj} + K^m_{kj} K^l_{mi} - K^m_{ki} K^l_{mj}, \end{aligned}$$

o tensor de Ricci fica

$$R^i_{kij} \equiv \overset{\circ}{R}_{kj} - \partial_i K^i_{kj} - K^m_{kj} \overset{\circ}{\Gamma}^i_{mi} + K^i_{mj} \overset{\circ}{\Gamma}^m_{ki} + K^m_{ki} \overset{\circ}{\Gamma}^i_{mj} - K^m_{ki} K^i_{mj},$$

onde usamos (4.20).

A curvatura escalar R fica

$$R = \overset{\circ}{R} - K^{mj}_i K^i_{mj}, \quad (4.48)$$

onde usamos (4.11).

Portanto a contorção K e a curvatura $\overset{\circ}{R}$ sempre se compensam de tal forma a manter a curvatura invariante $R = -6$.

Conforme foi mostrado a contorção K tem seu papel na densidade de energia elétrica e portanto na Hamiltoniana.

O caso mais simples ocorre para $K = 0$, o que implica que a curvatura estritamente riemanniana seja $\overset{\circ}{R} = -6$, que é a curvatura associada à geometria hiperbólica, que por sua vez é confinante. Essa geometria hiperbólica e o caso de contorção nula é que estudaremos nos próximos capítulos.

5. GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA

5.1 Introdução¹

O postulado de Euclides das paralelas diz que, dada uma reta L e um ponto P que não pertença a essa reta, existe uma única reta que passa por P e nunca encontra L . O debate que se estendeu durante séculos sobre esse postulado tinha como questão central o problema da independência, ou seja, se esse postulado era independente ou se poderia ser deduzido a partir dos outros postulados. O debate teve seu fim por volta da metade do século XIX com a construção de espaços nos quais os demais postulados eram válidos, enquanto o postulado das paralelas era violado. O caminho através do qual foi encontrada a solução mostrou a existência de novos tipos de espaços. Tais espaços "não-euclidianos" são atualmente chamados de "espaços Riemannianos" e suas características estão profundamente ligadas às propriedades métricas desses espaços. Apesar da palavra "espaço" ter adquirido um sentido mais geral, independente da métrica, vamos no presente capítulo usar esse termo para denotar espaços métricos. O principal fato sobre espaços não-euclidianos era expresso pela afirmação de serem esses espaços curvos., porém, mais tarde foi mostrado que a curvatura de um espaço não é necessariamente relacionada a uma métrica. Na realidade, a curvatura é uma propriedade de uma conexão. A métrica determina uma conexão especial, a conexão de Levi-Civita (representada pelo símbolos de Christoffel escritos em uma base de covetores conveniente), a única conexão que possui simultaneamente duas propriedades importantes: ela preserva a métrica e possui torção nula. A curvatura de um espaço métrico é a curvatura dessa conexão e o espaço é dito curvo quando o tensor de Riemann correspondente, R_{ijkl} é não nulo.

Um espaço é dito plano quando $R^i_{jkl} = 0$. Consequentemente a curvatura escalar R^{ij}_{ij} é constante, zero nesse caso. Espaços Euclidianos são planos, já que a conexão de Levi-Civita de uma métrica euclidiana possui

¹Essa introdução é baseada em Aldrovandi R. 1992: *Physical Geometry - Mathematical Language for Theoretical Physics*, Instituto de Física Teórica, São Paulo; Capítulo V.

tensor de Riemann nulo. Um espaço Riemanniano é dito ser de curvatura constante quando sua curvatura escalar R é constante, e os desvios mais simples do caso euclidiano são aqueles espaços para os quais R é uma constante não-nula. Quando $R > 0$, o espaço possui curvatura positiva e quando $R < 0$ ele é um espaço de curvatura negativa. A esfera S^2 é um exemplo de espaço de curvatura positiva, já um hiperbolóide é um exemplo de espaço de curvatura negativa.

O objetivo desse capítulo é apresentar um estudo sobre um espaço Riemanniano de curvatura negativa constante, o hiperespaço hiperbólico

$$X^2 + Y^2 + W^2 - Z^2 = -L^2, \quad (5.1)$$

onde X , Y , W e Z são as coordenadas de um ponto sobre esse espaço. O estudo consiste em determinar a projeção estereográfica de (5.1) no hiperplano E^3 , definindo assim, sobre E^3 uma métrica não-euclidiana.

Na secção seguinte apresentaremos a definição de projeção estereográfica da esfera S^2 e do espaço hiperbólico no plano E^2 que depois generalizaremos para o caso acima.

5.2 Projeção estereográfica

5.2.1 Projeção estereográfica da esfera S^2 no plano E^2 .

Seja S^2 uma esfera de raio L , tangente a um plano xy . As coordenadas de um ponto sobre a esfera são dadas por X , Y e Z e de um ponto do plano são dadas por x e y . O ponto da esfera tangente ao plano possui coordenadas $(X, Y, Z) = (0, 0, -L)$. Excluindo-se o pólo norte $N = (0, 0, L)$ e imaginando-se que exista uma fonte de luz nesse ponto, toma-se para cada ponto $P \in S^2$ a sua sombra $F(P)$ no plano xy (figura 1).

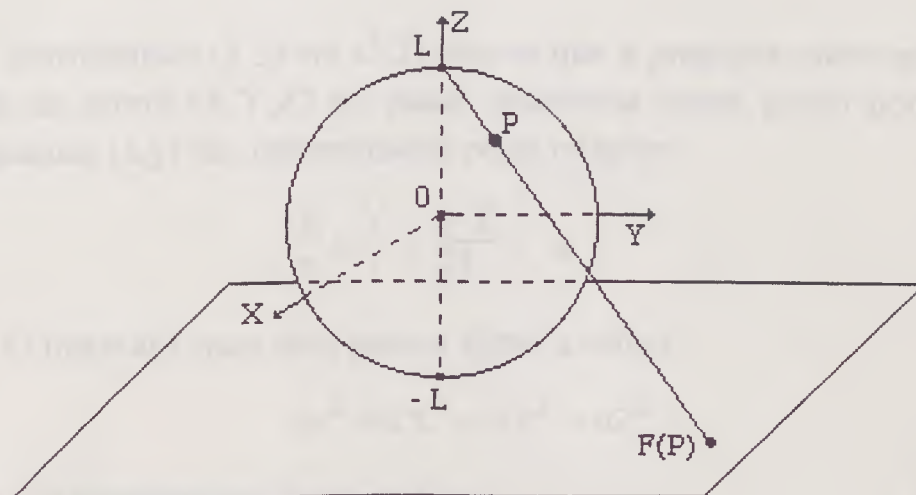


figura 1 - Projeção estereográfica da esfera S^2 no plano E^2 .

$F(P)$ tem então a forma

$$F(P) = (x,y) = \left(\frac{HX}{h}, \frac{HY}{h} \right); \quad (5.2)$$

h e H são as distâncias de P e $F(P)$ ao eixo z , respectivamente (figura 2).

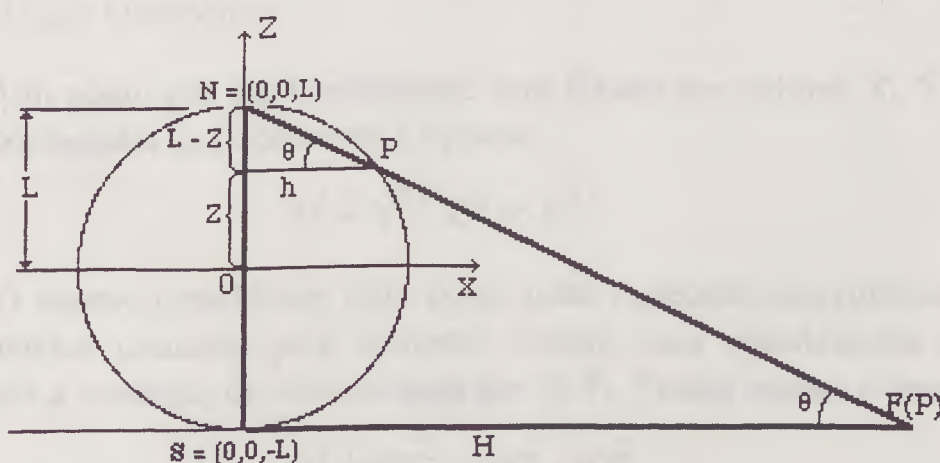


figura 2 - Projeção estereográfica dos pontos da esfera pertencentes ao plano $Y=0$.

Da semelhança de triângulos da figura acima temos:

$$\frac{H}{2L} = \frac{h}{L-Z}. \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.2) tem-se que a projeção estereográfica dos pontos da esfera (X,Y,Z) no plano determina nesse plano pontos cujas coordenadas (x,y) são determinadas pelas relações

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{L-Z}{2L} \equiv a. \quad (5.4)$$

O intervalo entre dois pontos sobre a esfera

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (5.5)$$

escrito em coordenadas do plano fica

$$ds^2 = \frac{1}{(1+r^2)^2} (dx^2 + dy^2), \quad (5.6)$$

onde $r^2 \equiv \frac{x^2 + y^2}{4L^2}$ e $a = \frac{1}{1+r^2}$.

5.2.2 O caso hiperbólico

Um ponto em um hiperbolóide será fixado por valores X , Y e Z de suas coordenadas que obedecem à equação

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -L^2. \quad (5.7)$$

O espaço hiperbólico visto como uma variedade mergulhada no E^3 tem métrica induzida pela inclusão, porém suas coordenadas devem satisfazer a condição de vínculo dada por (5.7). Temos, então, o intervalo

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dZ^2. \quad (5.8)$$

Para fazer a projeção estereográfica escolhemos o ponto $(0,0,L)$ como centro da projeção. Projetamos cada ponto do hiperbolóide no plano tangente ao ponto $(0,0,-L)$ (vértice do ramo inferior)(figura 3).

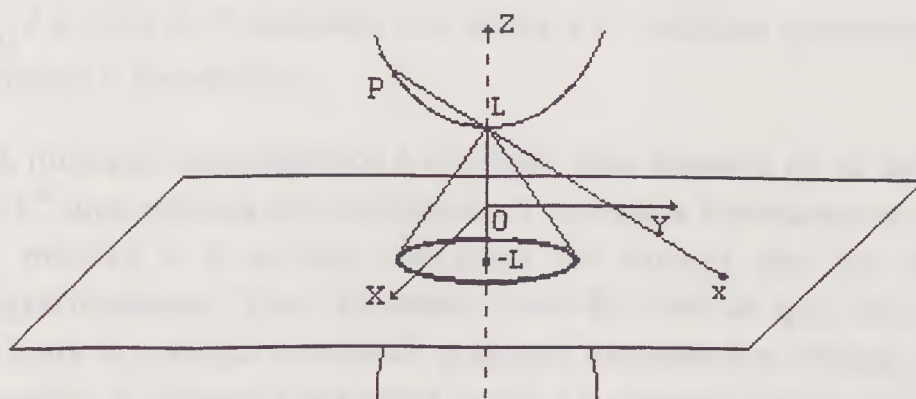


figura 3 - Projeção estereográfica do hiperbolóide no plano E^2 .

De maneira semelhante ao caso esférico as coordenadas do plano x, y, z e do hiperbolóide X, Y, Z estão relacionadas por

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{L-Z}{2L} \equiv a. \quad (5.9)$$

O intervalo (5.8) escrito em coordenadas do plano fica

$$ds^2 = \frac{1}{(1-r^2)^2} (dx^2 + dy^2), \quad (5.10)$$

onde r^2 é definida de maneira igual ao caso esférico, porém aqui

$$a = \frac{1}{1-r^2}. \quad (5.11)$$

Tanto (5.6) como (5.10) podem ser escritas na forma

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.12)$$

onde i e j variam de 1 a 2, sendo $x^1 = x$ e $x^2 = y$.

A métrica g_{ij} é dada por

$$g_{ij} = \frac{1}{(1 \pm r^2)^2} \delta_{ij}, \quad (5.13)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, e os sinais + e - indicam respectivamente o caso esférico e hiperbólico.

A projeção estereográfica é portanto, uma maneira de se definir para o plano E^2 uma métrica não-euclidiana. A curvatura Riemanniana associada a nova métrica é a mesma curvatura do espaço que foi projetado estereograficamente. Esse resultado vem do fato de que dois espaços ligados entre si por uma isometria² possuem localmente a mesma curvatura Riemanniana. A isometria nos casos acima é a projeção estereográfica³.

Fazendo o limite em que $Z \rightarrow \infty$, usando (5.9) e (5.11), temos $r^2 \rightarrow 1$, ou seja

$$x^2 + y^2 = 4L^2. \quad (5.14)$$

Os pontos que pertencem ao ramo superior do hiperbolóide são projetados no plano na região exterior à circunferência (5.14) e os pontos do ramo inferior são projetados na região interior a essa circunferência.

O plano E^2 com a métrica

$$g_{ij} = \frac{1}{(1 - r^2)^2} \delta_{ij} \quad (5.15)$$

é chamado plano de Lobachevsky. A região desse plano interior à circunferência (5.14) é chamada superfície de Poincaré. Uma partícula teste que percorra uma geodésica no ramo superior do hiperbolóide terá como projeção de seu movimento no plano E^2 uma geodésica desse plano. A projeção no espaço de Poincaré do movimento de uma partícula que tende ao infinito do espaço hiperbólico é uma curva que se aproxima da circunferência limite (5.14), porém sem nunca atingí-la. (As geodésicas da

² Uma isometria $I: M \rightarrow N$ de superfícies no E^3 é uma aplicação biunívoca de M em N que preserva o produto interno entre vetores.

³ A demonstração de ser a projeção estereográfica uma isometria é apresentada no apêndice A.

superfície de Poincaré e as curvas correspondentes no hiperbolóide estão calculadas no apêndice B).

5.3 O hiperespaço hiperbólico

Consideremos agora em E^4 o hiperespaço hiperbólico dado por

$$X^2 + Y^2 + W^2 - Z^2 = -L^2. \quad (5.1)$$

Os pontos $Z = +L$ e $Z = -L$ correspondem, como na subsecção anterior, aos vértices do ramo superior e inferior do "hiperbolóide", respectivamente (figura 4).

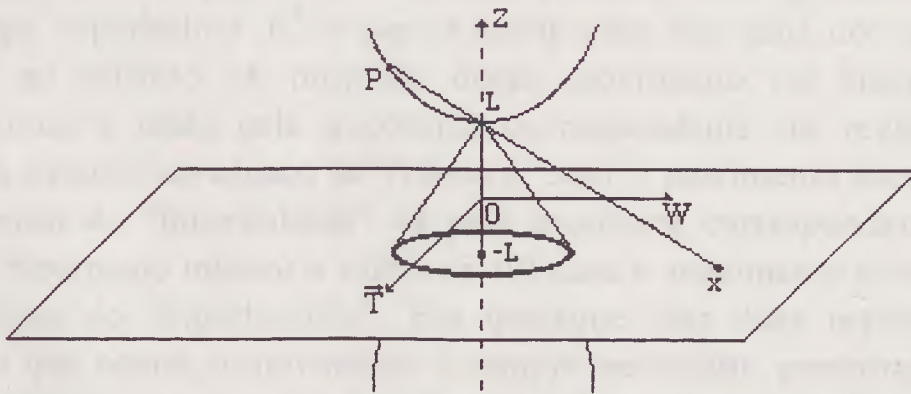


figura 4 - Projeção estereográfica do hiperespaço hiperbólico no hiperplano (O vetor \vec{T} representa os eixos X e Y).

Generalizando a projeção estereográfica apresentada acima obtemos novamente as relações

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{W}{w} = \frac{L-Z}{2L} \equiv a, \quad (5.16)$$

onde x , y e w são as coordenadas de um ponto pertencente ao hiperplano E^3 .

A projeção estereográfica define, então, sobre o hiperplano a métrica

$$g_{ij} = \frac{1}{(1 - r^2)^2} \delta_{ij}, \quad (5.17)$$

com os índices i e j variando de 1 a 3, e

$$r^2 = \frac{x^2 + y^2 + w^2}{4L^2}. \quad (5.18)$$

No limite $Z \rightarrow \infty$, temos $r^2 \rightarrow 1$, ou seja, os pontos do infinito do hiperespaço hiperbólico são projetados na esfera

$$x^2 + y^2 + w^2 = 4L^2. \quad (5.19)$$

O hiperplano E^3 com a métrica (5.17) é chamado plano de Lobachevsky e a região limitada pela esfera (5.19) é chamada espaço de Poincaré.

Suponha uma partícula teste que percorra uma geodésica no hiperespaço hiperbólico E^4 e que se afaste cada vez mais do vértice, tendendo ao infinito. A projeção desse movimento no hiperplano tridimensional é dada pela geodésica correspondente na região do hiperplano exterior ao espaço de Poincaré, caso o movimento ocorra no ramo superior do "hiperbolóide" ou pela geodésica correspondente na região do hiperplano interior à esfera (5.19) caso o movimento ocorra no ramo inferior do "hiperbolóide". Em quaisquer das duas regiões do hiperplano que ocorra o movimento é sempre necessário percorrer uma distância infinita para que a esfera limite (5.19) seja atingida. Portanto, uma partícula que percorra uma geodésica do ramo inferior do "hiperbolóide" tem, a três dimensões seu movimento confinado no espaço de Poincaré.

5.4 Curvatura

A métrica associada ao hiperplano E^3 quando da projeção da hiperesfera S^4 sobre ele é uma generalização do caso apresentado em 5.2.1 e é dada por

$$g_{ij} = \frac{1}{(1 + r^2)^2} \delta_{ij},$$

O tensor de Ricci é dado por

$$R_{jk} = \pm \frac{1}{2L^2} g_{jk} \quad (5.23)$$

e a curvatura Riemanniana é

$$R = \pm \frac{6}{L^2}. \quad (5.24)$$

com $r^2 = x^2 + y^2 + w^2$ e i e j variando de 1 a 3.

As componentes da conexão de Levi-Civita associada às métrica

$$g_{ij} = \frac{1}{(1 \pm r^2)^2} \delta_{ij} \equiv n^2 \delta_{ij} \quad (5.20)$$

para i e j variando de 1 até 3 e os sinais $+$ e $-$ indicando, respectivamente, o caso "esférico" e "hiperbólico", são dadas por

$$\Gamma_{jk}^i = \pm \frac{n}{2L^2} [\delta^{im} x_m \delta_{jk} - x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij}]. \quad (5.21)$$

Usando $\partial_r n = \mp \frac{n^2}{2L^2} x_r$, encontramos

$$\partial_r \Gamma_{jk}^i = \pm \frac{n}{2L^2} [\delta_r^i \delta_{jk} - \delta_{jr} \delta_{ik} - \delta_{kr} \delta_{ij}] - \frac{1}{2L^2} [\delta^{ib} x_b x_r \delta_{jk} - x_j x_r \delta_{ik} - x_k x_r \delta_{ij}]$$

e portanto

$$\partial_r \Gamma_{jk}^i - \partial_k \Gamma_{jr}^i = \pm \frac{n}{2L^2} [\delta_r^i \delta_{jk} - \delta_{jr} \delta_{ik}] - \frac{n^2}{4L^2} [\delta^{ib} x_b (x_r \delta_{jk} - x_k \delta_{jr}) + x_j (x_k \delta_r^i - x_r \delta_k^i)].$$

Com o auxílio de (5.21), calculamos

$$\Gamma_{mr}^i \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mk}^i \Gamma_{jr}^m = \frac{n^2}{4L^2} [\delta^{ib} x_b (x_r \delta_{jk} - \delta_{jr} x_k) + x^2 (\delta_k^i \delta_{jr} - \delta_r^i \delta_{jk}) + x_j (\delta_r^i x_k - \delta_k^i x_r)].$$

Portanto, para o tensor misto de curvatura

$$R_{jrk}^i = \partial_r \Gamma_{jk}^i - \partial_k \Gamma_{jr}^i + \Gamma_{mr}^i \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mk}^i \Gamma_{jr}^m,$$

encontramos

$$R_{jrk}^i = \pm \frac{1}{2L^2} [\delta_r^i g_{jk} - \delta_k^i g_{jr}]. \quad (5.22)$$

6. O MODELO RIEMANNIANO

6.1 Introdução

No capítulo 4 chegamos a seguinte expressão para o tensor de curvatura:

$$R^l_{kij} = \delta^l_j G_{ki} - \delta^l_i G_{kj}, \quad (4.12)$$

que depende apenas do tensor métrico. Essa expressão foi obtida a partir de dois resultados: o primeiro deles referente ao comutador das derivadas covariantes, um resultado geral das teorias de gauge; o segundo é o fato da variável conveniente para a implementação exata da lei de Gauss ser escrita em termos dos campos "magnéticos" conforme a equação (3.11). A partir de (4.12) obtemos a curvatura escalar R , que é igual a -6 para o grupo de gauge $SU(2)$.

Dada uma métrica

$$G_{ij} = \gamma_{ab} B^a_i B^b_j, \quad (6.1)$$

podemos através de (4.17) calcular as componentes da conexão de Levi-Civita e depois a curvatura estritamente Riemanniana $\overset{\circ}{R}$ que pode ser positiva, negativa ou nula.

A expressão

$$R = \overset{\circ}{R} - K^{mj}_i K^i_{mj} \quad (4.48)$$

indica que $\overset{\circ}{R}$ e a parte que contém a contorção sempre se compensam de tal forma a manter o valor de R .

Vamos considerar o caso para o qual a contorção é nula e portanto,

$$\overset{\circ}{R} = -6. \quad (6.2)$$

De (4.18), temos que

$$\Gamma^i_{kj} = \overset{\circ}{\Gamma}^i_{kj}. \quad (6.3)$$

Conforme vimos no capítulo anterior, a curvatura (6.2) é característica de hiperespaços hiperbólicos e também está associada ao hiperplano de Lobachevsky. Nesse caso a métrica é dada por

$$G_{ij} = \frac{1}{(1 - r^2)^2} \delta_{ij}. \quad (6.4)$$

com r^2 definido em (5.18). O determinante associado a essa métrica é

$$\det G = \frac{1}{(1 - r^2)^6}. \quad (6.5)$$

Usando a definição da métrica invariante de gauge (3.11) e também $\det G = \det B$, encontramos

$$B^{ai} = \frac{\delta^{ai}}{(1 - r^2)^2} \quad (6.6)$$

e

$$B^a_i = \delta^{ai} (1 - r^2)^2. \quad (6.7)$$

Comparando (6.2) com (5.24) temos $L^2 = 1$. Para a conexão da métrica (6.4) que é determinada por (5.21), temos

$$\Gamma^i_{kj} = \overset{\circ}{\Gamma}^i_{kj} = \frac{-1}{2(1 - r^2)} [\delta^{im} x_m \delta_{jk} - x_j \delta^i_k - x_k \delta^i_j]. \quad (6.8)$$

A densidade de energia magnética (3.17) fica

$$\frac{1}{2g^2} \delta_{ii'} \gamma_{ab} B^{ai} B^{bi'} |\psi|^2 = \frac{3}{2g^2} \frac{1}{(1 - r^2)^4} |\psi|^2. \quad (6.9)$$

A densidade de energia elétrica (3.19) é dada por

$$\delta_{ii'} \epsilon^{ii'} = \frac{1}{2} g^2 \delta_{ii'} \frac{\delta \psi^*}{\delta A^a_i} \frac{\delta \psi}{\delta A^a_{i'}} \quad (6.10)$$

agora com

$$\frac{\delta\psi}{\delta A_i^a} = \varepsilon^{ijk} \delta^{al} (\delta_{pq} \delta_{ml} - 2\delta_{pm} \delta_{lq}) \delta^m_k \tilde{\nabla}_j \frac{\delta\psi}{\delta G_{pq}}. \quad (6.11)$$

Vamos estudar agora o comportamento das expressões (6.4) a (6.6), (6.8), (6.10) e (6.11) quando r tende a zero e quando r tende a 1.

Fazendo o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} B^{ai} = \delta^{ai}, \quad (6.12)$$

tem-se que a solução (6.6) é bem comportada para pequenas distâncias. O determinante (6.5) fica

$$\det G = 1 \quad (6.13)$$

e a métrica (6.3) torna-se

$$G_{ij} = \delta_{ij}, \quad (6.14)$$

que é a métrica euclidiana.

A densidade de energia (6.9) torna-se

$$\frac{1}{2g^2} \delta_{ii'} \gamma_{ab} B^{ai} B^{bi'} |\psi|^2 = \frac{3}{2g^2} |\psi|^2. \quad (6.15)$$

Com o uso de (4.24), $\frac{\delta\psi}{\delta A_i^a}$ fica

$$\frac{\delta\psi}{\delta A_i^a} = \varepsilon^{ijk} \delta^{al} (\delta_{pq} \delta_{ml} - 2\delta_{pm} \delta_{lq}) \delta^m_k \partial_j \frac{\delta\psi}{\delta G_{pq}}. \quad (6.16)$$

A conexão (6.8) fica

$$\Gamma_{kj}^i = \frac{-1}{2} [\delta^{im} x_m \delta_{jk} - x_j \delta^i_k - x_k \delta^i_j] \quad (6.17)$$

O limite para $r \rightarrow 1$ mostra que B^{ai} diverge assim como a métrica e o seu determinante e a conexão (6.8).

A divergência ocorre na densidade de energia magnética de maneira direta e na densidade de energia elétrica através da derivada (4.24). A Hamiltoniana (2.24) está portanto bem definida desde que os limites de integração estejam restritos ao intervalo $0 \leq r < 1$. Temos aí, então, uma barreira de energia.

A solução (6.6) fica particularmente interessante se lembrarmos o ente geométrico ao qual os campos B^{ai} estão associados:

$$B^{ai} = \sqrt{\det B} b^{ai}$$

$$B^a_i = \frac{1}{\sqrt{\det B}} b^a_i, \quad (6.18)$$

os b^a_i por sua vez são as "tríadas" definidas no capítulo 4.

A propriedade das tríadas que mais ressaltamos no capítulo 4, é a de que elas nunca se anulam, podendo ser identificadas à unidade para bases holônomas.

Com o auxílio de (6.6) e (6.5) escrevemos

$$b^a_i = \frac{\delta^a_i}{1 - r^2}. \quad (6.19)$$

Usando (6.8) e (6.19) podemos calcular o potencial vetor A^c_j dado por (4.46)

$$A^c_j = \frac{-1}{2(1 - r^2)} \epsilon^{abc} \delta^a_j \delta^{bm} x_m. \quad (6.20)$$

Para $r = 0$ temos

$$A^c_j = \frac{-1}{2} \epsilon^{abc} \delta^a_j \delta^{bm} x_m. \quad (6.21)$$

Essa expressão quando substituída em (2.8) leva ao resultado (6.12).

Quando $r \rightarrow 1$, o potencial vetor diverge. Nesse limite, que corresponde à esfera que determina o espaço de Poincaré, a tríada (6.19)

deixa de existir. Como para $r = 1$ cada b^a_i diverge e portanto $b^{ai} = 0$, não existe transformação que leve os campos do interior do espaço de Poincaré em campos no exterior desse espaço. Portanto, uma partícula teste¹ que seja descrita por campos B^{ai} como em (6.6) só pode ser detectada no interior da esfera $r^2 = 1$. Os campos (6.6) são, portanto, campos de curto alcance, limitados a uma certa região do espaço.

6.2 Geodésicas, confinamento e liberdade assintótica

O objetivo dessa secção é estudar o comportamento de uma partícula teste que sente a presença do potencial de gauge (6.20) e obter uma versão geométrica da liberdade assintótica.

Dada uma curva γ e seu campo de velocidades tangentes $V(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}$, a derivada covariante de um campo W ao longo da curva γ será $\frac{DW}{Dt} = \nabla_V W$. W será transportada paralelamente ao longo de γ se $\nabla_V W = 0$.

Uma curva γ é dita auto-paralela quando sua velocidade é transportada paralelamente ao longo de γ , ou seja, se a aceleração for $a = \frac{DV}{Dt} = \nabla_V V = 0$, que escrita em componentes é a equação

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (6.22)$$

Uma curva auto-paralela é chamada uma geodésica quando a conexão Γ for a conexão de Levi-Civita de alguma métrica, mas o nome é comumente utilizado em todos os casos. Na presença de torsão, é a auto-paralela que faz sentido.

A equação da geodésica vale quando da ausência de forças externas em um espaço curvo. Aqui, o termo em Γ representa o efeito da curvatura, ou seja, do potencial de gauge.

¹Partícula teste para nós significa uma partícula que não interage consigo mesma.

Na equação (4.46) e (4.47) vimos que o potencial de gauge e a conexão Γ são componentes de uma mesma conexão em diferentes referenciais. A partícula que sente o potencial A^c_j terá seu comportamento definido pela métrica que determina Γ . Ela percorrerá as geodésicas determinadas por essa conexão. Essas geodésicas porém são curvas que para grandes distâncias tendem a uma superfície limite sem todavia nunca atingí-la. Portanto a partícula teste que sente o potencial de gauge está confinada no espaço de Poincaré.

Que sentido tem "ir ao longo de uma geodésica" no presente contexto? Podemos arriscar uma interpretação. Como Γ é a mesma conexão que A (ou melhor, que ω), apenas vista em outra base, uma partícula é transportada paralelamente quando mantém a sua identidade, quando não "roda" no espaço interno. Assim, no modelo original de Yang-Mills com protons (isospin up) e neutrons (isospin down), um proton se conservará proton ao longo da geodésica. Ao longo de outra curva, uma partícula que seja inicialmente um proton adquirirá, à medida que avança, uma componente "down", tornando-se um núcleon de isospin indefinido.

Devido a barreira de energia existente quando $r \rightarrow 1$ uma partícula teste que sente o potencial A e percorre uma curva qualquer também está confinada no espaço de Poincaré.

Vejamos agora o que acontece para pequenas distâncias. Voltando ao caso $r = 0$, temos que para a métrica (6.13) as componentes da conexão de Levi-Civita são nulas. A equação da geodésica (6.22) torna-se

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0. \quad (6.23)$$

A equação da geodésica descreve o movimento de uma partícula livre de forças externas, o termo em Γ representando o efeito do potencial de gauge. Assim, esta última equação é a versão geométrica da liberdade assintótica.

7. DISCUSSÃO FINAL

A implementação exata da lei de Gauss na teoria de gauge quantizada para o grupo $SU(2)$ levou FHJL à descoberta de uma variável invariante de gauge. Variável em termos da qual escrevemos os funcionais de estado e os observáveis da teoria.

Essa variável é o tensor métrico $G_{ij} = \gamma_{ab} B^a_i B^b_j \det B$. Usando esse tensor e o resultado geral das teorias de gauge sobre o comutador das derivadas covariantes, chegamos a (4.12) para o tensor misto de curvatura e à curvatura escalar $R = -6$.

Encontramos uma expressão para a curvatura escalar R em termos da contorção K e da curvatura escalar estritamente Riemanniana $\overset{\circ}{R}$.

$$\boxed{R = \overset{\circ}{R} - K^{mj}_i K^i_{mj}} \quad (7.1)$$

Propusemos um modelo no qual a contorção é nula e portanto $\overset{\circ}{R} = -6$. Com base na geometria apresentada no capítulo 5 temos que o tensor métrico é

$$G_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1 - r^2)^2}, \quad (7.2)$$

e os campos são dados por

$$B^{ai} = \frac{\delta^{ai}}{(1 - r^2)^2}. \quad (7.3)$$

Para pequenos comprimentos de onda mostramos que a solução (7.3) prevê a liberdade assintótica da teoria. Para grandes comprimentos de onda essa solução diverge. Mostramos que uma partícula teste submetida a campos como (7.3) só pode ser detectada dentro da região $r^2 < 1$. Portanto o modelo de contorção nula ou "modelo Riemanniano" prevê a liberdade assintótica e o confinamento.

Podemos voltar à expressão (7.1) e indagar sobre as outras possíveis soluções para valores não nulos da contorção. Sendo a liberdade assintótica muito bem estabelecida dentro da teoria de gauge, vamos mostrar que essas soluções não a englobam a priori.

Para chegar à liberdade assintótica no capítulo 6 fizemos o limite dos pequenos comprimentos de onda e usamos a equação da geodésica com a conexão obtida nesse limite. Isso pode ser colocado de uma outra maneira, dada a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{ij} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (7.4)$$

e a expressão $\Gamma^i_{kj} = \{\Gamma^i_{(kj)} + \Gamma^i_{[kj]}\}$. Só é relevante para (7.4) a parte simétrica da conexão. No "modelo Riemanniano" essa parte coincide com a conexão de Levi-Civita que no limite $r \rightarrow 0$ se anula e portanto obtemos a versão geométrica da liberdade assintótica

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0. \quad (7.5)$$

No caso não Riemanniano (contorção não nula) a parte simétrica da conexão não se limita apenas à conexão de Levi-Civita e a equação da geodésica ganha dois termos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + (\overset{\circ}{\Gamma}^i_{kj} - T^i_{jk} - T^i_{kj}) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0. \quad (7.6)$$

Não é evidente que no limite $r = 0$ os termos entre parênteses se cancelem, o que é necessário para estabelecer a liberdade assintótica. Mesmo que tenhamos um modelo no qual para pequenos comprimentos de onda $\overset{\circ}{\Gamma} = 0$, não é imediato que a contorção se anule nesse limite.

Um exemplo de tal modelo é o caso "esférico" para o qual

$$G_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1 + r^2)^2}. \quad (7.7)$$

No limite $r = 0$ temos $G_{ij} = \delta_{ij}$ portanto $\overset{\circ}{\Gamma} = 0$. De forma semelhante ao que fizemos no caso "hiperbólico" encontramos os campos B^{ai}

$$B^{ai} = \frac{\delta^{ai}}{(1+r^2)^2}$$

$$B^a_i = \delta^a_i (1+r^2)^2 \quad (7.8)$$

portanto as tríadas

$$b^{ai} = \delta^{ai} (1+r^2)$$

$$b^a_i = \frac{\delta^a_i}{(1+r^2)}. \quad (7.9)$$

Usando (5.21) calculamos $\overset{\circ}{\Gamma}^i_{jk}$

$$\overset{\circ}{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2(1+r^2)} [\delta^{im} x_m \delta_{jk} - x_j \delta^i_k - x_k \delta^i_j]. \quad (7.10)$$

Substituindo (7.9) na expressão (4.44) e usando a derivada $\partial_r n = \frac{n^2}{2L^2} x_r$

(onde $n = \frac{1}{(1+r^2)}$) obtem-se

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{-x_j \delta^i_k}{2(1+r^2)} + \delta^{ai} \delta^c_k \epsilon^{abc} A^b_j. \quad (7.11)$$

A definição da contorção dada em (4.19) juntamente com a propriedade de anti-simetria da torção nos dois últimos índices pode ser usada para calcular o termo $(T^i_{jk} + T^i_{kj})$ da equação (7.6)

$$(T^i_{jk} + T^i_{kj}) = \frac{1}{2} (K^i_{kj} + K^i_{jk}). \quad (7.12)$$

O valor de K é obtido substituindo na expressão $\Gamma^i_{kj} = \overset{\circ}{\Gamma}^i_{kj} - K^i_{kj}$ os resultados (7.10) e (7.11)

$$K^i_{kj} = \frac{\delta^{im} x_m \delta_{jk}}{2(1+r^2)} - \frac{x_k \delta^i_j}{2(1+r^2)} - \delta^{ai} \delta^c_k \epsilon^{abc} A^b_j.$$

A expressão (7.12) fica

$$\begin{aligned} (T^i_{jk} + T^i_{kj}) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta^{im} x_m \delta_{jk}}{(1+r^2)} - \frac{1}{2(1+r^2)} (x_k \delta^i_j + x_j \delta^i_k) - \delta^{ai} \epsilon^{abc} (\delta^c_k A^b_j + \delta^b_j A^c_k) \right\}. \end{aligned}$$

Para $r = 0$, $x_k = 0$ e portanto

$$(T^i_{jk} + T^i_{kj}) = -\frac{1}{2} \delta^{ai} \epsilon^{abc} (\delta^c_k A^b_j + \delta^b_j A^c_k)$$

Nesse limite $B^{ai} = \delta^{ai}$ o que implica, usando a definição (2.8) que o potencial de gauge não se anula em $r = 0$. Se $A^b_j = \delta^b_j$ a expressão acima se anula, porém essa solução não é possível, já que ela viola a relação de comutação (2.13). A equação (7.6) nesse ponto fica

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} \delta^{ai} \epsilon^{abc} (\delta^c_k A^b_j + \delta^b_j A^c_k) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Portanto o caso "esférico" não estabelece a liberdade assintótica e não pode ser tomado como solução.

Examinado um pouco mais o caso esférico é fácil perceber que ele deveria ser excluído das possíveis soluções.

Os campos

$$B^{ai} = \frac{\delta^{ai}}{(1+r^2)^2}$$

só apresentam divergência para valores infinitos de r , sendo portanto campos de longo alcance, o que sabemos não ser o caso.

E mais: as geodésicas associadas à métrica (7.7) são as projeções estereográficas dos grandes arcos das hiperesfera S^3 , que não estão restritas a certas regiões do espaço.

O critério decisivo para a exclusão dessa solução foi o fato da parte simétrica da conexão conter, além da conexão de Levi-Civita, dois outros termos. A convenção adotada por FHJL, que mencionamos no capítulo 4, não permite essa seleção, uma vez que para eles a parte simétrica da conexão se limita a conexão de Levi-Civita. A solução esférica seria então, considerada possível.

Existe, portanto, para o grupo de gauge SU(2)-cor uma solução

$$B^{ai} = \frac{\delta^{ai}}{(1 - r^2)},$$

que prevê a liberdade assintótica e o confinamento de partículas que sentem o potencial de gauge.

É importante notar que o tratamento geométrico no qual nos baseamos (FHJL) só é válido para o grupo SU(2), que possui representação adjunta de dimensão 3. Para obter a tal variável invariante de gauge foi necessário fazer uma mudança das "coordenadas" A^c_k para um conjunto B^{ai} , e essa transformação foi possível porque a três dimensões (e somente a três) elas possuem o mesmo número de componentes.

O problema da generalização dos resultados para o grupo SU(3) está em estudo.

Para o grupo SU(3) a representação adjunta possui dimensão igual a oito. Os índices de A e B referentes ao grupo variam, portanto, de 1 até 8. Se quisermos manter a interpretação geométrica de B será necessário reduzir o grupo GL(4,R) a um grupo ortogonal de mesma dimensão da representação adjunta do SU(3). Esse grupo teria como fibra típica do fibrado tangente associado $T_p M$ o espaço euclidiano E^8 . Porém nessa dimensão espacial o tratamento apresentado nesse trabalho não é válido, pois, conforme mencionamos acima, não é possível efetuar a mudança de coordenadas $A \rightarrow B$.

Da mesma forma que as tríadas no caso tridimensional levam do SU(2) ao E^3 , o problema é encontrar uma aplicação que leve o SU(3) no

E^3 . Poderemos talvez nos inspirar no que acontece com os *winding numbers*, como mostrado por Coleman¹. É então possível usar um importante teorema devido a Raoul Bott. Esse teorema, válido para um grupo de Lie simples qualquer, G , estabelece que qualquer aplicação contínua do S^3 em G pode ser continuamente deformada numa aplicação em um subgrupo $SU(2)$ de G . Dessa maneira parece possível que resultados obtidos para o $SU(2)$ permaneçam válidos para um grupo de Lie simples arbitrário, em especial para $SU(N)$.

¹ Coleman S. 1979: "The Uses of Instantons", in Zichichi A.(ed.), *The Whys of Subnuclear Physics, Proceedings of the 1977 International School of Subnuclear Physics*. Erice, Itália, Plenum Press, New York.

APÊNDICE A

No capítulo 5 apresentamos a definição de projeção estereográfica e afirmamos ser essa transformação uma isometria: é isso que demonstraremos neste apêndice.

Um ponto sobre a esfera ou sobre o hiperbolóide é identificado pelas coordenadas X , Y e Z que satisfazem as equações

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= L^2, \\ X^2 + Y^2 - Z^2 &= -L^2, \end{aligned} \tag{A.1}$$

respectivamente.

Esses pontos são projetados estereograficamente no plano E^2 , os pontos sobre esse plano são identificados pela coordenadas x e y . Da projeção estereográfica obtemos as seguintes relações entre esses dois conjuntos de coordenadas

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{L-Z}{2L} \equiv a, \tag{A.2}$$

onde $a = \frac{1}{1 \pm r^2}$, com os sinais \pm indicando respectivamente o caso esférico e o caso hiperbólico.

Dos intervalos

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 \pm dZ^2, \tag{A.3}$$

identificamos as métricas

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

No plano E^2 a métrica é dada por

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1 \pm r^2)^2}. \tag{A.5}$$

APÊNDICE A

No capítulo 5 apresentamos a definição de projeção estereográfica e afirmamos ser essa transformação uma isometria: é isso que demonstraremos neste apêndice.

Um ponto sobre a esfera ou sobre o hiperbolóide é identificado pelas coordenadas X , Y e Z que satisfazem as equações

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= L^2, \\ X^2 + Y^2 - Z^2 &= -L^2, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

respectivamente.

Esses pontos são projetados estereograficamente no plano E^2 , os pontos sobre esse plano são identificados pela coordenadas x e y . Da projeção estereográfica obtemos as seguintes relações entre esses dois conjuntos de coordenadas

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{L-Z}{2L} \equiv a, \quad (\text{A.2})$$

onde $a = \frac{1}{1 \pm r^2}$, com os sinais \pm indicando respectivamente o caso esférico e o caso hiperbólico.

Dos intervalos

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 \pm dZ^2, \quad (\text{A.3})$$

identificamos as métricas

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

No plano E^2 a métrica é dada por

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1 \pm r^2)^2}. \quad (\text{A.5})$$

Definição: Sejam M e N duas superfícies em E^3 . Uma isometria dessas superfícies é uma aplicação biunívoca $I: M \rightarrow N$ que preserva o produto interno entre vetores.

"A projeção estereográfica é uma isometria".

Demonstração:

Dados dois vetores X e Y pertencentes a uma espaço com métrica G_{ij} o produto interno desses dois vetores é dado por

$$X^i Y_i = G_{ij} X^i Y^j. \quad (\text{A.6})$$

Usando as relações (A.2), temos

$$X^i Y_i = G_{ij} a x^i a y^j = G_{ij} a^2 x^i y^j. \quad (\text{A.7})$$

Como a projeção estereográfica leva um ponto do hiperbolóide ou da esfera (X, Y, Z) em $(x, y, 0)$, os índices da última soma de (A.4) vão somente de 1 a 2 e portanto a métrica G_{ij} torna-se δ_{ij} para os dois casos. Então

$$X^i Y_i = \frac{\delta_{ij}}{(1 \pm r^2)^2} x^i y^j = g_{ij} x^i y^j = x^i y_i. \quad (\text{A.8})$$

APÊNDICE B

Geodésicas da superfície de Poincaré

Este apêndice divide-se em duas partes: a primeira é um resumo da projeção estereográfica do hiperbolóide no plano E^2 , apresentada no capítulo 5; a segunda parte é o cálculo das geodésicas da superfície de Poincaré.

B.1 Introdução

Um ponto em um hiperbolóide será fixado por valores X , Y e Z de suas coordenadas que obedecem à relação

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -L^2. \quad (\text{B.1})$$

Projetamos estereograficamente os pontos desse hiperbolóide no plano E^2 . Para fazer essa projeção estereográfica escolhemos o ponto $(0,0,L)$ como centro da projeção, o plano E^2 é tangente ao ponto $(0,0,-L)$ (vértice do ramo inferior). (figura 5).

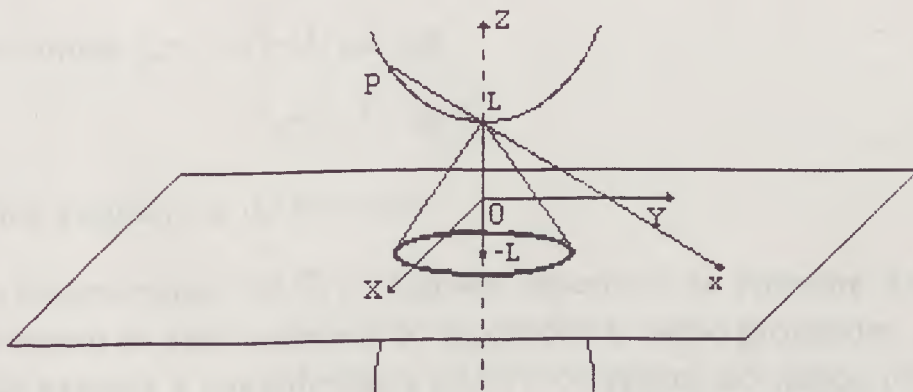


figura 5 - Projeção estereográfica do hiperbolóide no plano E^2 .

As coordenadas do plano x,y,z e do hiperbolóide X,Y,Z estão relacionadas por

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{L-Z}{2L} \equiv a, \quad (\text{B.2})$$

onde

$$r^2 = \frac{x^2 + y^2}{4L^2} \quad (\text{B.3})$$

e

$$a = \frac{1}{1 - r^2}. \quad (\text{B.4})$$

O intervalo $ds^2 = dX^2 + dY^2 - dZ^2$ escrito em coordenadas do plano fica

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2} (dx^2 + dy^2). \quad (\text{B.5})$$

O plano E^2 com a métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1 - r^2)^2} \quad (\text{B.6})$$

é chamado plano de Lobachevsky.

No limite $Z \rightarrow \infty$, $r^2 \rightarrow 1$, ou seja

$$x^2 + y^2 = 4L^2. \quad (\text{B.7})$$

que define a superfície de Poincaré.

A circunferência (B.7) é chamada superfície de Poincaré. Os pontos que pertencem ao ramo superior do hiperbolóide serão projetados no plano na região exterior à circunferência (B.7) e os pontos do ramo inferior do hiperbolóide serão projetados na região interior a essa circunferência.

B.2 Geodésicas

A projeção estereográfica é uma transformação conforme¹. Portanto, círculos são preservados, geodésicas são levadas em geodésicas e

¹Lavrentiev M. et Chabat B. 1954: Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Éditions MIR, Moscou; Capítulo 2.

o ângulo formado entre duas curvas no ponto de intersecção delas é também preservado.

Fazendo uso da propriedade acima, poderíamos encontrar as geodésicas sobre o hiperbolóide e projetá-las estereograficamente no plano, determinando assim, as geodésicas do espaço de Poincaré. Porém, a métrica escrita nas coordenadas do hiperbolóide é um tanto complicada e o número de componentes da conexão² é grande, levando a equações diferenciais de solução nada imediata.

Tentamos então trabalhar diretamente sobre o plano. O número de componentes da conexão da métrica (B.6) cai razoavelmente e obtemos como equações das geodésicas³

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{x}{2L^2(1-r^2)} \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] - \frac{y}{L^2(1-r^2)} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{y}{2L^2(1-r^2)} \left[\left(\frac{dy}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \right] - \frac{x}{L^2(1-r^2)} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0.$$

As equações diferenciais acima podem ser levadas em outro conjunto de equações diferenciais mais simples através de uma transformação homográfica, que será definida adiante. Como estamos interessados na superfície de Poincaré usaremos uma transformação homográfica que leve o disco num plano, ou melhor, no semi-plano superior.

B.2.1 Transformações homográficas.

Transformações homográficas são aquelas transformações conformes realizadas por funções homográficas. As condições para que uma função seja homográfica são fixadas pelo seguinte teorema:

²O termo conexão nesse texto será usado para a conexão de Levi-Civita da métrica do espaço considerado.

³A equação da geodésica é dada por

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0,$$

onde Γ é a parte simétrica da conexão, que para espaços Riemannianos (sem torção) é a conexão de Levi-Civita.

" Se uma função $f(z)$ é univalente e analítica⁴ em toda parte do plano fechado z , exceto no ponto C , ela é então uma função homográfica."

Tais funções são as únicas que realizam transformações univalentes de um plano z num plano w .

A função

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (\text{B.8})$$

onde a, b, c, d são constantes complexas, é homográfica com $ad - bc \neq 0$ ⁵.

A analiticidade da função w exceto em um ponto é garantida por $ad - bc \neq 0$:

"Seja $\frac{dw}{dz} = w'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$ a derivada de w em relação a z .

Como $ad - bc \neq 0$ ⁶ segue que a função é analítica exceto no ponto $z = -\frac{d}{c}$.

Como $w'(z) \neq 0$ não garante a univalência da transformação, vamos mostrar a univalência de w de outra maneira.

Na função (B.8), temos:

$$\text{para } z \rightarrow \infty, \quad w \rightarrow \frac{a}{c}$$

$$\text{para } z \rightarrow -\frac{d}{c}, \quad w \rightarrow \infty.$$

⁴Lavrentiev M. et Chabat B. 1954: Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Éditions MIR, Moscou; Capítulo 2.

⁵Se $ad - bc = 0$, a função w seria uma constante $w = \frac{b}{d}$ e a representação por ela realizada não seria conforme.

⁶Para que uma função $w = f(z)$ realize a representação conforme de um domínio D , é necessário e suficiente que ela dentro desse domínio seja:

- 1) univalente;
- 2) analítica;
- 3) para todo interior de D a derivada $f'(z)$ seja diferente de zero.

Escrevendo (B.8) como

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

temos:

$$\text{para } w \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \frac{-d}{c}$$

$$\text{para } w \rightarrow \frac{a}{c}, \quad z \rightarrow \infty.$$

É nesse sentido que a transformação homográfica realiza uma representação univalente do plano z no plano w : o infinito é levado em um ponto, e um único ponto representa o infinito qualquer que seja o sentido da transformação ($w \rightarrow z$ ou $z \rightarrow w$).

Dados dois domínios D e D^* (aqui o círculo e o semi-plano) queremos construir uma função que realize a transformação conforme de um desses domínios no outro. Este problema, conhecido como Problema Fundamental da Teoria das Transformações Conformes é que trataremos agora⁷.

Dados os domínios w e z , onde

$$w = u + iv \tag{B.9}$$

é o semi-plano superior (figura 6) e

$$z = x + iy \tag{B.10}$$

é o círculo de raio $2L$ (figura 7).

⁷ Veja Lavrentiev M. et Chabat B. 1954: Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Éditions MIR, Moscou; Capítulo 2.

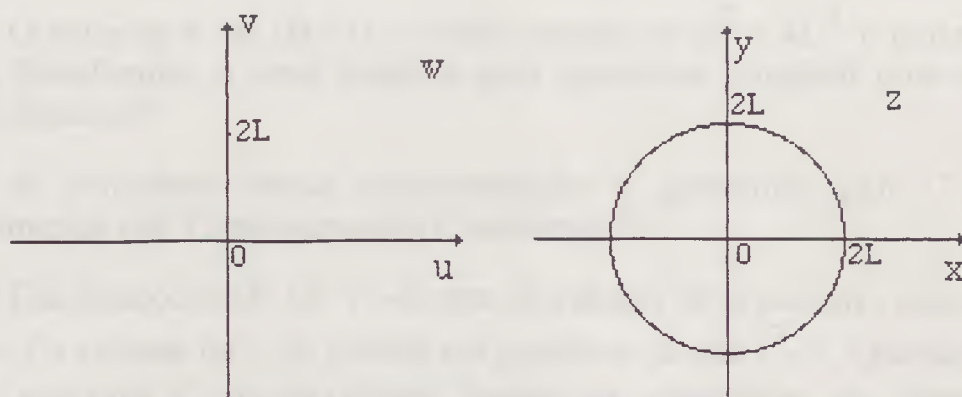


figura 6 - semi-plano superior w . figura 7 - círculo de raio $2L$.

Escolhemos no semi-plano superior um ponto que corresponda ao centro do círculo ($z=0$). O ponto convenientemente escolhido é $w = i2L$. Usando a propriedade dos pontos conjugados no círculo⁷, temos para $z \rightarrow \infty$ o ponto $w = -i2L$.

A função z será, então

$$z = \frac{k(w - i2L)}{w + i2L}. \quad (\text{B.11})$$

Substituindo (B.9) e (B.10) em (B.11) obtemos:

$$x = 2L \frac{(v^2 + u^2 - 4L^2)}{u^2 + (v + 2L)^2}, \quad (\text{B.12})$$

$$y = 2L \frac{-4Lu}{u^2 + (v + 2L)^2}, \quad (\text{B.13})$$

que possui inversa

$$u = \frac{-8Ly^2}{(x - 2L)^2 + y^2}, \quad (\text{B.14})$$

$$v = 8L \frac{8L^3(1 - r^2)}{(x - 2L)^2 + y^2}. \quad (\text{B.15})$$

O valor de k em (B.11) é obtido usando-se $|z|^2 = 4L^2$ e portanto $k = \pm 2L$. Escolhemos o sinal positivo pois queremos trabalhar com o semi-plano superior⁸.

A unicidade dessa transformação é garantida pelo Teorema Fundamental das Transformações Conformes⁹.

Das equações (B.14) ve-se que os valores de u podem variar de $-\infty$ a $+\infty$. Os valores de v só podem ser positivos já que $r^2 < 1$. Quando $r^2 \rightarrow 1$, $v \rightarrow 0$, portanto a circunferência limite da superfície de Poincaré é representada no semi-plano superior pela reta limite $v = 0$. Da mesma forma que ocorre no plano de Lobachevsky com a circunferência limite, é necessário percorrer uma distância infinita para se atingir a reta $v = 0$.

B.2.2 As geodésicas do semi-plano superior.

Usando (B.11) e (B.12) podemos escrever o intervalo

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2} (dx^2 + dy^2) \quad (\text{B.16})$$

nas coordenadas u e v do semi-plano:

$$ds^2 = \frac{L^2}{v^2} (du^2 + dv^2). \quad (\text{B.17})$$

A métrica é agora definida

$$g_{ij} = \delta_{ij} \frac{L^2}{v^2} \quad (\text{B.18})$$

e leva às seguintes equações diferenciais das geodésicas

⁸Para $k = -2L$ tem-se $v < 0$ e o ponto escolhido para representar o centro do círculo estaria fora do semi-plano superior.

⁹Teorema Fundamental das Transformações Conformes (Riemann 1851):

"Quaisquer que sejam dois domínios D e D^* simplesmente conexos (de fronteiras compostas por mais de um ponto), qualquer que seja o ponto z_0 em D , w_0 em D^* e o número α , existe uma e somente uma representação conforme $w = f(z)$ do domínio D no domínio D^* , tal que

$$f(z_0) = w_0 \text{ e } \arg f(z_0) = \alpha.$$

$$\frac{d\dot{u}}{ds} - \frac{2}{v} \dot{u} \dot{v} = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{d\dot{v}}{ds} + \frac{\dot{u}^2}{v} - \frac{\dot{v}^2}{v} = 0, \quad (\text{B.20})$$

Onde \dot{u} e \dot{v} indicam as derivadas de u e v em relação a s (comprimento de arco).

As soluções de (B.17) e (B.18) são:

a) retas $u = \text{constante} = cL$; (B.21)

b) semi-circunferências com centro $(u,v) = (\alpha L, 0)$ e raio βL , com α e β números reais quaisquer

$$(u - \alpha L)^2 + v^2 = \beta^2 L^2. \quad (\text{B.22})$$

A figura 8 mostra essas curvas para alguns valores de c , α e β .

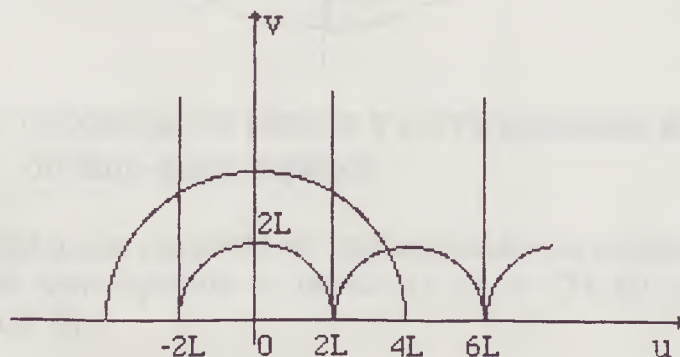


figura 8 - Geodésicas do semi-plano superior.

B.2.3 Geodésicas do espaço de Poincaré.

Vejamos agora o que acontece no espaço de Poincaré. Dividimos as soluções em duas partes correspondentes aos dois grupos de solução obtidos na subsecção anterior.

I) Para $u = \text{constante} = cL$ e com o auxílio de (B.14), temos como geodésicas no espaço de Poincaré as circunferências

$$16L(2x + \alpha y) = \gamma [(x - 2L)^2 + y^2] \quad (\text{B.25})$$

que leva a

$$x = -\alpha \frac{y}{2}. \quad (\text{B.26})$$

$\alpha = 0$ relaciona a reta $x = 0$ a semi-circunferência do semi-plano $u-v$ com centro $(0,0)$ e raio $2L$, como é possível calcular usando (B.22).

$\alpha \neq 0$ relaciona retas no plano $x-y$ com semi-circunferências no semi-plano $u-v$ que passam pelo ponto $(u,v) = (0,2L)$.

As figuras 10 e 11 mostram curvas para o caso $\gamma = 0$ no semi-plano $u-v$ e suas correspondentes no plano $x-y$.

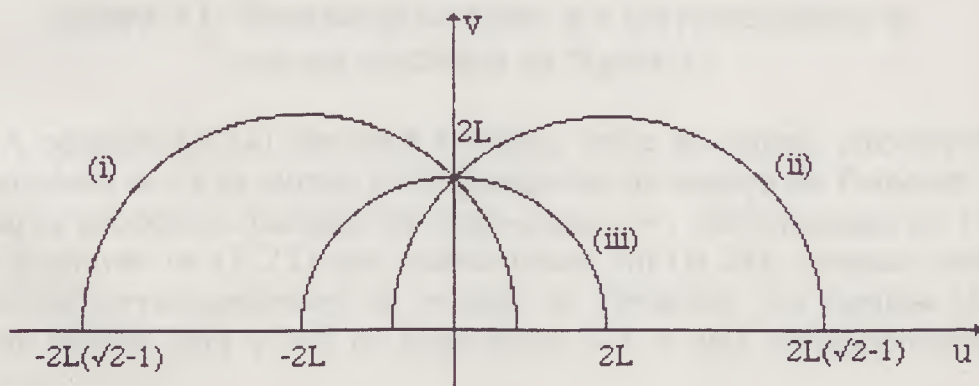


figura 10 - Algumas geodésicas do semi-plano superior para $\gamma = 0$.

$$(x - 2L)^2 + \left(y + \frac{4L}{c}\right)^2 = \frac{16L^2}{c^2}. \quad (\text{B.23})$$

O caso $c = 0$ corresponde à reta $y = 0$. A figura 9 mostra essas curvas para diversos valores de c .

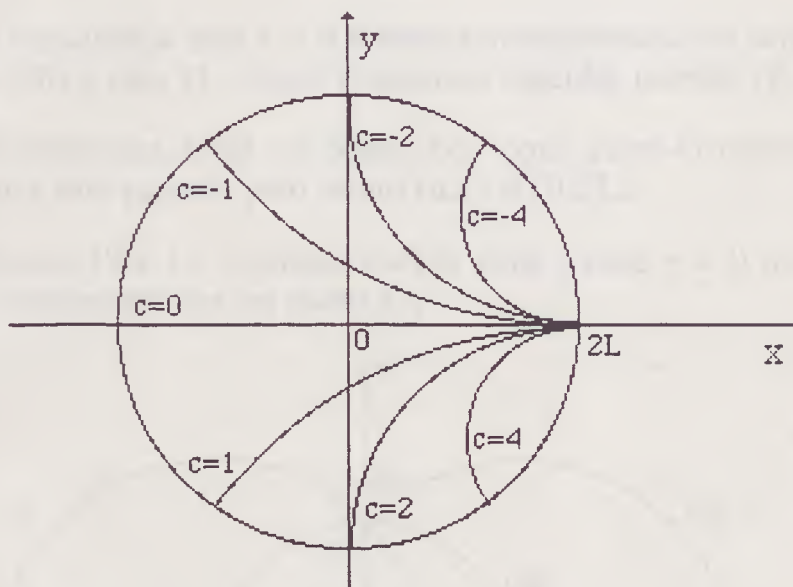


figura 9 - Geodésicas do plano x - y correspondentes às retas $u = cL$ do semi-plano superior.

As retas $u=c$ são todas paralelas se interceptando no infinito. A esse infinito do semi-plano corresponde o ponto $(x,y) = (2L,0)$ na superfície de Poincaré (figura 9).

II) Para as semi-circunferências descritas por (B.22) temos como geodésicas na superfície de Poincaré as curvas

$$\left[x - 2L\left(1 + \frac{8}{D}\right)\right]^2 + \left[y - 2L\left(1 + \frac{8L\alpha}{\gamma}\right)\right]^2 = 4L^2 \left[\frac{16\alpha^2}{\gamma^2} + \left(1 + \frac{8}{\gamma}\right)^2 - 1\right], \quad (\text{B.24})$$

onde $\gamma = \beta^2 - \alpha^2 - 4$. A equação (B.24) está definida para quaisquer valores de α e β tal que $\gamma \neq 0$.

Para $\gamma = 0$ é conveniente escrever a expressão (B.24) na forma

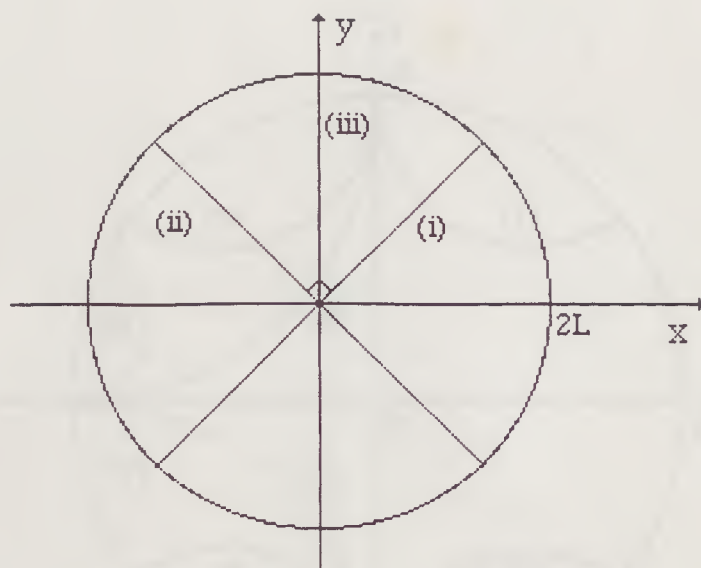


figura 11 - Geodésicas do plano x-y correspondentes às curvas mostradas na figura 10.

A equação (B.24) descreve a relação entre as demais circunferências do semi-plano u-v e as curvas correspondentes no espaço de Poincaré. Dada uma curva geodésica qualquer do semi-plano u-v, identificamos os valores de α e β através de (B.22) que substituímos em (B.24), obtendo assim as geodésicas correspondentes no espaço de Poincaré. As figuras 12 e 13 mostram curvas para $\gamma \neq 0$ no semi-plano u-v e suas correspondentes no plano x-y.

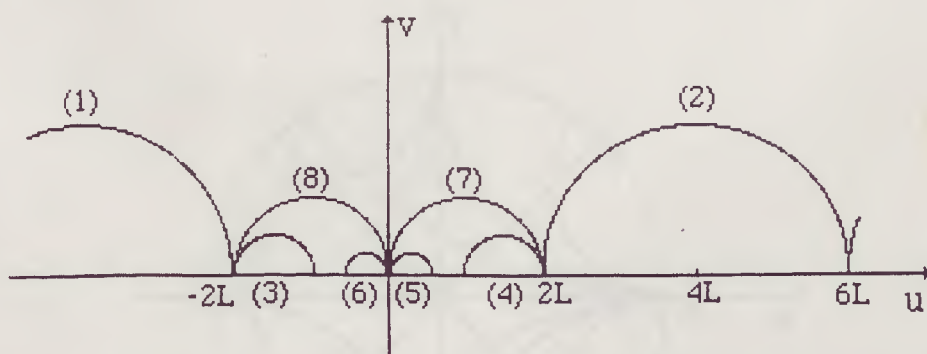


figura 12 - Geodésicas do semi-plano superior para $\gamma \neq 0$.

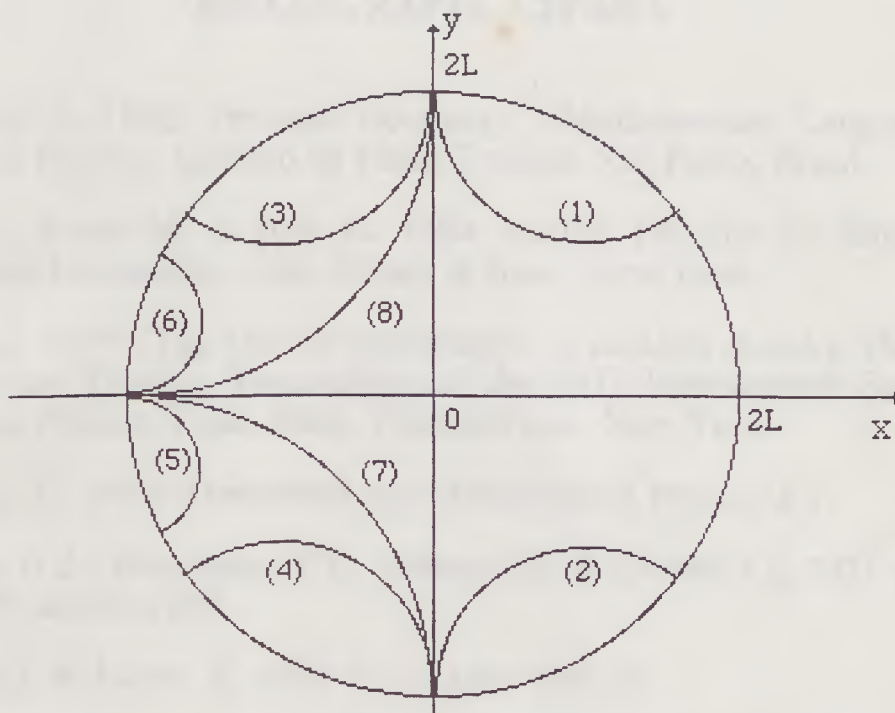


figura 13 - Geodésicas do plano x-y correspondentes às curvas mostradas na figura 12.

Resumindo, as geodésicas do espaço de Poincaré são retas e arcos de circunferências dadas por (B.23), (B.24) e (B.26) que tendem à circunferência limite $x^2 + y^2 = L^2$, sem porém, nunca atingi-la (figura 14).

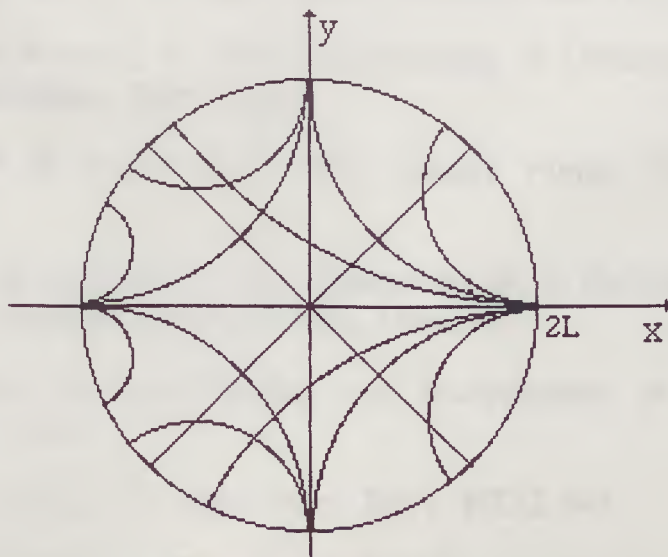


figura 14 - Algumas geodésicas da superfície de Poincaré.

BIBLIOGRAFIA CITADA

Aldrovandi R. 1992: Physical Geometry - Mathematical Language for Theoretical Physics, Instituto de Física Teórica, São Paulo, Brasil.

Becher P., Böhm M. & Joos H. 1984: Gauge Theories of Strong and Electroweak Interactions, John Willey & Sons, New York.

Coleman S. 1979: "The Uses of Instantons", in Zichichi A.(ed.), The Whys of Subnuclear Physics, Proceedings of the 1977 International School of Subnuclear Physics. Erice, Itália, Plenum Press, New York.

Faddeev L. D. 1969: Theoretical and Mathematical Physics 1 1.

Freedman D.Z., Haagensen P.E., Johnson K. & Latorre J.I.: MIT preprint CTP#2238, agosto 1993.

Goldstone J. & Jackiw R. 1978: Phys. Lett. **74B** 81.

Goldstone J. & Jackiw R. 1978: Phys. Lett. **78B** 226.

Huang K. 1982: Quarks Leptons & Gauge Fields, World Scientific, Singapura.

Jackiw R. 1980: Rev. Mod. Phys. **52** 661.

Johnson K. 1992: QCD - 20 Years Later, Aachen, June 1992.

Kobayashi S. & Nomizu K. 1963: Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, New York.

Konopleva N.P. & Popov V.N. 1981: Gauge Fields, Harwood, Chur, Switzerland.

Lavrentiev M. & Chabat B. 1954: Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Éditions MIR, Moscou.

Lee T. D. 1981: Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood, New York.

Lüscher M. & Münster G. 1984: Nucl. Phys. **B232** 445.

Lüscher M. 1983: Nuclear Physics **B219** 233.

Ramond P. 1981: Field Theory - A Modern Primer, Benjamin/Cummings Advanced Book Program, Massachusetts.

