

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

LUCIANO HENRIQUE SILIANO RICCO

INTERFERÊNCIA FANO ANTISSIMÉTRICA ASSISTIDA POR UM
FÉRMION DE MAJORANA

Ilha Solteira
2016



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DOS MATERIAIS

"Interferência Fano antissimétrica assistida por um férmion de Majorana"

Luciano Henrique Siliano Ricco

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência dos Materiais. Especialidade: Física da Matéria Condensada.

Prof. Dr. Antonio Carlos Ferreira Seridonio
Orientador

Ilha Solteira
2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R494i Ricco, Luciano Henrique Siliano.
Interferência fano antissimétrica assistida por um férmion de majorana /
Luciano Henrique Siliano Ricco. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2016
103 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Física da Matéria
Condensada, 2016

Orientador: Antonio Carlos Ferreira Seridonio
Inclui bibliografia

1. Efeito fano. 2. Transporte quântico. 3. Férmion de Majorana. 4.
Interferômetro do tipo Aharonov-Bohm. 5. Fio de Kitaev.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Interferência Fano Antissimétrica Assistida por um Férmion de Majorana.

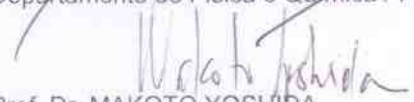
AUTOR: LUCIANO HENRIQUE SILIANO RICCO

ORIENTADOR: ANTONIO CARLOS FERREIRA SERIDONIO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em CIÊNCIA DOS MATERIAIS, área: FÍSICA DA MATERIA CONDENSADA, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. ANTONIO CARLOS FERREIRA SERIDONIO
Departamento de Física e Química / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. CLAUDIO LUIZ CARVALHO
Departamento de Física e Química / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. MAKOTO YOSHIDA
Departamento de Física / Universidade Estadual Paulista - UNESP

Ilha Solteira, 29 de janeiro de 2016

*Aos meus pais, **Janete** e **Ricco**, que me deram todas as condições necessárias para moldar meu caráter, as quais permitiram que eu construísse meu alicerce moral sólido ao longo dos anos.*

*A minha amada **Karen**, que mostrou seu amor incondicional, me apoiando e desempenhando um papel fundamental nas horas mais difíceis.*

*A minha tia-madrinha **Jane**, por todo amor e carinho que sempre demonstrou, ajudando não só a mim, mas à toda minha família.*

Apesar do seu uso contrário, não há na palavra "espiritual" nenhuma inferência necessária de que estamos falando de algo que não seja matéria, ou algo que esteja fora do domínio da ciência. De vez em quando sinto-me livre para empregar a palavra. A ciência não é só compatível com a espiritualidade; é uma profunda fonte de espiritualidade. Quando reconhecemos nosso lugar na imensidão de anos-luz e no transcorrer das eras, quando compreendemos a complexidade, a beleza e a sutileza da vida, então o sentimento sublime, misto de júbilo e humildade, é certamente espiritual. Como também são "espirituais" as nossas emoções diante da grande arte, música ou literatura, ou os atos de coragem altruísta exemplares como os de Mahatma Gandhi ou Martin Luther King.

Carl Sagan, O mundo assombrado pelos demônios.

Agradecimentos

À oprotunidade que me foi dada pela complexidade da teia da vida e pela estranha aleatoriedade do Universo, de fazer o que me traz grande satisfação à alma e ao intelecto, permitindo que eu entenda pequenas frações da exuberante forma de como se comporta a natureza e contribua de forma ínfima para o desenvolvimento científico e produção de conhecimento.

À toda minha família, principalmente aos meus pais, Ricco e Janete, ao meu irmão Lucas, aos meus avós, Arlindo e Lourdes, aos meus tios, Paulo e Jane e primos Mariana e Mateus, por todo apoio e compreensão. Sem eles minha caminhada se tornaria impossível.

À minha noiva Karen, por todo suporte, amor e dedicação que teve à mim, o que permitiu que eu me empenhasse mais durante todo o Mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Carlos Ferreira Seridonio, pela amizade, pela paciência, pelos ensinamentos, pela confiança em meu trabalho, por ajudar no desenvolvimento de minhas habilidades e pela vontade contagiante em estudar problemas que estão na fronteira do conhecimento.

Ao Prof. Marcos Sergio Figueira da Silva, da UFF, pela amizade, pela valiosa colaboração, pelos ensinamentos, pela atenção e confiança depositada em minha pessoa.

Aos amigos e companheiros do grupo de pesquisa, Yuri Marques, Robyson Machado e Luis Henrique Guessi, pela cumplicidade no trabalho e por todo apoio dado na construção dos projetos desenvolvidos.

Por fim, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, processo 2014/14143-0, pelo suporte financeiro, sem o qual seria praticamente impossível a realização desta pesquisa.

Resumo

Investigou-se teoricamente um sistema composto por um interferômetro do tipo Aharonov-Bohm com dois pontos quânticos, onde um deles encontra-se acoplado à um fio de Kitaev na fase topológica, nos casos em que se desconsidera a interação de Coulomb entre os pontos quânticos (caso não interagente) e quando a mesma é levada em conta (caso interagente). Na primeira situação, verificou-se a presença robusta da anomalia de voltagem zero para ambos os regimes de interferência Fano adotados. Além do mais, constatou-se que o estado de Majorana isolado possui uma maneira singular de quebrar a simetria dos perfis de densidade de transmitância em função da diferença simétrica de energia dos pontos quânticos e da energia de Fermi dos terminais metálicos. Tais perfis podem ser obtidos experimentalmente por medidas de condutância. Na situação de pontos quânticos interagentes em ressonância, verificou-se que a razão entre a magnitude da repulsão de Coulomb e o acoplamento fio-ponto quântico altera a largura da anomalia de voltagem zero em ambos os regimes Fano analisados. Esse fato sugere que a correlação eletrônica influencia o tempo de vida do estado de Majorana no ponto quântico hibridizado diretamente com o fio. Ademais, para a situação de pontos quânticos não ressonantes, a inversão dos valores de energia dos mesmos também modifica a largura da anomalia de voltagem zero, fenômeno que não ocorre para o caso não interagente. Acredita-se que o dispositivo proposto neste trabalho constitui um mecanismo experimental alternativo para detectar excitações de Majorana.

Palavras-chave: Efeito Fano, transporte quântico, férmion de Majorana, interferômetro do tipo Aharonov-Bohm, fio de Kitaev.

Abstract

We investigate theoretically a setup composed by an Aharonov-Bohm-like interferometer with two quantum dots, where one of them is coupled to a Kitaev wire within the topological phase, which is explored in two cases: (i) the interdot Coulomb correlation is disregarded (noninteracting case) and (ii) the same is taken into account (interacting case). In the situation (i), we verify the presence of the zero-bias anomaly for the both Fano regimes of interference adopted. Furthermore, we found that an isolated Majorana state has a particular way of breaking the symmetry in transmittance profiles, which can be accessed experimentally by performing electrical conductance measurements. In the situation (ii), for interacting quantum dots in resonance, we notice that the ratio between the Coulomb repulsion strength and the wire-dot coupling changes the width of the zero-bias peak for both Fano regimes analyzed. This feature suggests that the electronic correlation modifies the Majorana state lifetime in the dot directly coupled to the wire. Moreover, for the off-resonance situation, the swap between the energy levels of the dots also changes the width of the Majorana peak, which is not observed in the noninteracting case. The results obtained here can guide experimentalists that pursuit a way of revealing Majorana signatures.

Keywords: Fano effect, quantum transport, Majorana fermion, Aharonov-Bohm-like interferometer, Kitaev wire.

Lista de Figuras

- 1.1 Ilustração do dispositivo experimental para construção do fio de Kitaev. Um nanofio semicondutor (em azul) com forte acoplamento SO é colocado próximo a um supercondutor do tipo onda- s , sob ação de um campo magnético externo. Nessas condições há indução de supercondutividade do tipo onda- p no nanofio. As estrelas em vermelho representam os MBSs.
- Fonte: V. Mourik *et al*, Science 336, 1003 (2012). 2
- 1.2 A: Medidas de condutância em função da voltagem aplicada obtidas por Mourik *et al*. [19], onde pode-se verificar a presença da ZBA caracterizadas por picos centrados em $V = 0$. B: Microscopia eletrônica de varredura do aparato experimental, em que N e S representam os contatos normal e supercondutor, respectivamente. As estrelas em vermelho indicam as posições dos supostos MBSs.
- Fonte: V. Mourik *et al*, Science 336, 1003 (2012). 3
- 1.3 A: Ilustração do experimento proposto por S. N.-Perge *et al* [31]. B e C: Imagem topográfica da amostra obtida, onde se verificou a presença dos MBSs nas bordas da cadeia atômica, nos sítios indicados por 1 e 7, como consequência da ZBA nas medidas de condutância correspondentes.
- Fonte: S. N.-Perge *et al*, Science 346, 602 (2014). 4

1.4	Esquema do dispositivo proposto: um fio de Kitaev na fase topológica, que hospeda MBSs em suas extremidades (semi-esferas brancas), está lateralmente acoplado a um interferômetro <i>spinless</i> do tipo Aharonov-Bohm. Esse dispositivo é composto por dois terminais metálicos (<i>Bottom</i> (B) e <i>Top</i> (T)) e dois pontos quânticos (QDs), com níveis de energia dados por $\varepsilon_1 = -\Delta\varepsilon/2$ e $\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon/2$, onde $\Delta\varepsilon$ representa a diferença simétrica de energia entre os mesmos. U é intensidade da interação de Coulomb entre os QDs e V é a amplitude de tunelamento entre os terminais e os QDs. O acoplamento direto entre terminais metálicos é dado por V_{BT} . O fio é acoplado ao QD 1 com intensidade λ . A sobreposição entre as funções de onda (integral de overlap) do MBS 1 e MBS 2 é dado por ε_M e φ é a voltagem do sistema.	5
1.5	[1]Ilustração do fio de Kitaev na chamada fase trivial. Pode-se notar que só os férmions de Majorana pertencentes ao mesmo sítio da rede (elipses em lilás) estão conectados, como determina o Hamiltoniano da Eq.(1.6). Fonte: J. Alicea , Rep. Prog. Physics. 75, 076501, (2012).	9
1.6	[1]Representação esquemática do fio de Kitaev na fase topológica, onde só há acoplamento entre Majoranas de sítios adjacentes da rede, de acordo com a Eq.(1.7). Nesse cenário, estados de Majorana isolados emergem nas bordas do fio. Fonte: J. Alicea , Rep. Prog. Physics. 75, 076501, (2012).	10

1.7	(a) Impureza adsorvida em um hospedeiro metálico, onde V representa o parâmetro de hibridização. O processo de tunelamento eletrônico entre a ponta de STM e o hospedeiro pode ocorrer de duas formas, isto é, há uma probabilidade dos elétrons passarem pela impureza, com amplitude t_d , ou de tunelarem para o hospedeiro de forma direta, com amplitude t_c . Ainda há uma terceira possibilidade, na qual os elétrons percorrem o trajeto hospedeiro-impureza, sem tunelar para a ponta. (b)[34] Perfis de interferência Fano, modulados pela Eq.(1.8), que indicam o caminho preferencial de tunelamento eletrônico no sistema.	11
3.1	[35]Gráfico de densidade da transmitância [Eq. (2.21)] em função da diferença simétrica de energias $\Delta\varepsilon$ para os QDs e da energia de Fermi ε em unidades de Γ , dentro do regime Fano $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$): (a) o interferômetro do tipo Aharonov-Bohm encontra-se desacoplado do fio de Kitaev, levando a um efeito Fano simétrico. (b) O interferômetro está hibridizado com o fio de Kitaev semi-infinito através do QD 1 e, portanto, o efeito Fano é antissimétrico. A estrutura central em $\varepsilon = 0$ fornece a ZBA devido ao MBS 1. Em ambos os painéis a cor laranja indica um comportamento de um isolante perfeito.	27
3.2	[35]Gráfico de densidade da transmitância [Eq. (2.21)] em função da diferença simétrica $\Delta\varepsilon$ para os QDs e da energia de Fermi ε em unidades de Γ , para o regime oposto de Fano $x = 1$ ($q_b \rightarrow 0$): a estrutura central em $\varepsilon = 0$ fornece a ZBA reversa, devido ao MBS 1. Nos painéis (a) e (b) as regiões em vermelho denotam o comportamento de um condutor perfeito, ao contrário do que foi constatado na Fig. 3.1.	28
3.3	[35]Gráfico de densidade da transmitância [Eq. (2.21)] em função da diferença simétrica $\Delta\varepsilon$ para os QDs e da energia de Fermi ε em unidades de Γ , para o caso em que se considera um RF com modo de energia zero acoplado ao interferômetro em regimes opostos de Fano: (a) $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$) e (b) $x = 1$ ($q_b = 0$).	29

- 3.4 [35] Transmitância em função da diferença simétrica $\Delta\varepsilon$, com a energia de Fermi $\varepsilon = 0$, em unidades de Γ , dentro do regime de Fano $x = 0$, considerando comprimentos L distintos do fio de Kitaev, o qual está relacionado com parâmetro de sobreposição de funções de onda (*overlap*) $\varepsilon_M \sim e^{-L/\xi}$. Considera-se também o caso de um RF com modo de energia zero. 30
- 3.5 [35] Transmitância determinada pela [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi ε , em unidades de Γ , no regime Fano $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$), para o dispositivo proposto na Fig. 1.4, com $\varepsilon_M = 10^{-7}$. No painel (a), $\Delta\varepsilon = 8\Gamma$, a curva em verde é para a situação em que o MBS 1 está presente, enquanto a curva em azul descreve o caso do interferômetro livre. O painel (b) descreve a diferença simétrica de energia inversa, $\Delta\varepsilon = -8\Gamma$, onde apenas os picos satélites dos QDs para o caso livre (curva azul) e a ZBA (curva vermelha) permanecem nas mesmas posições com respeito ao que é encontrado no painel (a). Em ambos os painéis, o pico Majorana (ZBA) emerge, caracterizado por uma amplitude de aproximadamente 1/2. Essa estrutura é robusta perante a inversão de energias dos dots, em contraste com os picos satélites dos mesmos, quando o fio de Kitaev é desconectado do interferômetro. 31
- 3.6 [35] Transmitância determinada pela [Eq. (2.21)], em função da energia de Fermi ε , em unidades de Γ , no regime Fano $x = 1$ ($q_b = 0$), com $\varepsilon_M = 10^{-7}$. As situações descritas em (a) e (b) representam os casos contrários àqueles mostrados nos painéis correspondentes aos da Fig. 3.5. 33

- 3.7 [35] Transmitância determinada pela [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi ε , em unidades de Γ , no regime Fano $x = 1$ ($q_b = 0$), para a situação em que se desconsidera o QD 2, no esquema da Fig. 1.4, com $\varepsilon_M = 10^{-7}$. (a), $\varepsilon_1 = -4\Gamma$, representa a situação em que o MBS 1 está presente, enquanto a curva em azul corresponde ao caso em que o interferômetro está livre. Já o caso descrito em (b) mostra a situação de diferença simétrica de energia inversa, i.e., $\Delta\varepsilon = 4\Gamma$, onde a anti-ressonância satélite do QD 1 para o caso do interferômetro livre aparece a cima do nível de Fermi dos terminais, como esperado, e a ZBA, representada pela curva em vermelho se mantém, como averiguado em (a). Portanto, em ambos os casos, a anti-ressonância Majorana (ZBA) surge, caracterizada por uma amplitude de $1/2$ 34
- 3.8 [36] Transmitância [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi dos terminais metálicos para os dois regimes de Fano distintos. Os casos a esquerda [(a), (b) e (c)] mostram o regime em que o transporte eletrônico ocorre exclusivamente pelos QDs ($x = 0$, $q_b \rightarrow \infty$), enquanto as situações a direita evidenciam o regime de Fano oposto, no qual o transporte eletrônico dá-se preferencialmente através dos terminais metálicos ($x = 1$, $q_b = 0$). 36
- 3.9 [36] Perfis de transmitância [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi dos terminais metálicos mostram o efeito da interação de Coulomb entre os QDs na assinatura Majorana para os distintos regimes de Fano: (a) $x = 0$, $q_b \rightarrow \infty$ e (b) $x = 1$, $q_b = 0$ 37
- 3.10 [36] Transmitância [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi dos terminais metálicos na situação em que os níveis energéticos dos QDs estão fora de ressonância, acarretando em uma diferença de energia finita $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. A linha verde representa a situação em que $\varepsilon_1 = -4\Gamma$ e $\varepsilon_2 = -8\Gamma$, enquanto que a linha em vermelho pontilhado descreve o caso onde $\varepsilon_1 = -8\Gamma$ e $\varepsilon_2 = -4\Gamma$. Os casos (a) e (b) representam o regime Fano $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$) e $x = 1$ ($q_b = 0$), respectivamente, com os correspondentes *insets* para a situações não interagentes. 38

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O fio de Kitaev	7
1.2	O Efeito Fano	10
2	O Modelo Teórico	13
2.1	Hamiltoniano	13
2.2	Transmitância	14
2.3	Funções de Green dos Pontos Quânticos	18
2.3.1	Caso não interagente	19
2.3.2	Caso interagente: Aproximação de Hubbard I	21
3	Resultados e Discussão	26
3.1	Caso não interagente	26
3.2	Caso interagente	35
4	Conclusões	39
	Referências Bibliográficas	41
A	O método da equação de movimento	45
B	A Aproximação de Hubbard I	56

Capítulo 1

Introdução

Há quase um século, o físico italiano Ettore Majorana propôs, no contexto de Física de altas energias, a existência de férmions que constituem suas próprias antipartículas. Os mesmos ficaram conhecidos como férmions de Majorana. Em Física da Matéria Condensada, tais férmions não são partículas elementares, mas surgem como excitações ou quasipartículas [1, 2]. Nesse âmbito, duas quasipartículas de Majorana separadas entre si podem definir um único férmion regular não local. Essa interessante propriedade permite que esses férmions peculiares sejam utilizados na construção de um *quantum bit* (qubit) protegido, isto é, livre do seu entorno e imune à fenômenos de decoerência quântica. O qubit é considerado como unidade fundamental para o desenvolvimento da computação quântica. Por isso, desde a última década, pesquisadores que atuam na área de informação quântica têm buscado dispositivos baseados em férmions de Majorana [3, 4].

Nesse cenário, os chamados supercondutores topológicos têm sido amplamente estudados, uma vez que em determinadas condições podem hospedar estados de Majorana ligados (MBSs - *Majorana bound states*) em suas bordas [5–7]. O fio de Kitaev na chamada fase topológica é um exemplo [5], o qual consiste de um nanofio unidimensional (1D) com supercondutividade do tipo onda- p . Tal dispositivo suporta, em suas bordas, MBSs (detalhes sobre o citado fio serão explorados mais a frente). Experimentalmente, o mesmo pode ser construído utilizando um nanofio semicondutor com forte acoplamento spin-órbita (SO), próximo à um supercondutor do tipo onda- s e sob a ação externa de um campo magnético (ver Fig. 1.1). Nessas condições, a supercondutividade topológica

do tipo onda- p é induzida no nanofio, devido ao chamado efeito de proximidade [8–10].

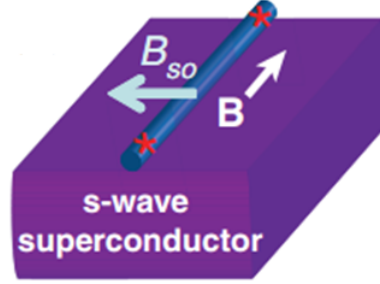


Figura 1.1: Ilustração do dispositivo experimental para construção do fio de Kitaev. Um nanofio semicondutor (em azul) com forte acoplamento SO é colocado próximo a um supercondutor do tipo onda- s , sob ação de um campo magnético externo. Nessas condições há indução de supercondutividade do tipo onda- p no nanofio. As estrelas em vermelho representam os MBSs.

Fonte: V. Mourik *et al*, Science 336, 1003 (2012).

Uma forma de detectar os MBSs em experimentos de transporte eletrônico é acoplá-los à dispositivos quânticos, como os denominados pontos quânticos (QDs - *quantum dots*), por exemplo [11–22]. No caso de um único QD acoplado à um MBS [14], é teoricamente predito a manifestação da anomalia de voltagem zero (ZBA - *zero-bias anomaly*) na condutância, cuja a amplitude é dada por $0.5G_0$, onde $G_0 = \frac{e^2}{h}$ é o *quantum* de condutância. A citada manifestação da ZBA, deve-se ao fenômeno de vazamento do MBS, que possui modo de energia zero, para o QD [15]. A ZBA foi experimentalmente detectada pela primeira vez por Mourik *et al.* [19], em um nanofio de antimoneto de índio fundido com ouro e nitrito de titânio com nióbio, onde se supôs a existência dos MBSs devido ao fato de a ZBA persistir nas medidas de condutância, mesmo com a aplicação de altas voltagens e campos magnéticos (ver Fig. 1.2). No entanto, sabe-se que outros fenômenos físicos podem levar ao aparecimento da ZBA, como, por exemplo, o efeito Kondo [23–27]. Com essa perspectiva, a detecção das excitações de Majorana torna-se, então inconclusiva.

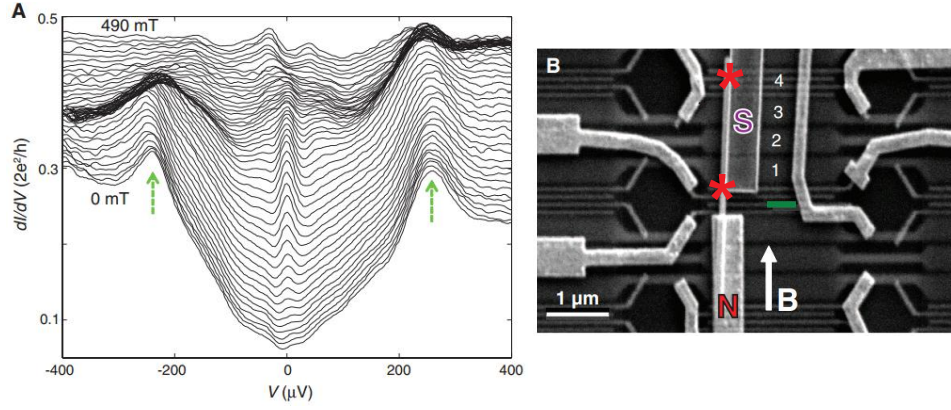


Figura 1.2: A: Medidas de condutância em função da voltagem aplicada obtidas por Mourik *et al.* [19], onde pode-se verificar a presença da ZBA caracterizadas por picos centrados em $V = 0$. B: Microscopia eletrônica de varredura do aparato experimental, em que N e S representam os contatos normal e supercondutor, respectivamente. As estrelas em vermelho indicam as posições dos supostos MBSs.

Fonte: V. Mourik *et al.*, Science 336, 1003 (2012).

Dada a dificuldade de se obter e detectar os MBSs, propostas alternativas vêm sendo apresentadas. Algumas delas utilizam cadeias ferromagnéticas depositadas em superfícies supercondutoras do tipo onda- s , com forte acoplamento spin-órbita (Fig. 1.3) [28–31]. Tais dispositivos funcionam como simuladores do fio de Kitaev, visto que a supercondutividade do tipo onda- p é, induzida na cadeia ferromagnética, dando origem à MBSs em suas bordas. Recentemente, tal proposta foi realizada, onde utilizou-se átomos de Ferro em uma superfície supercondutora de Chumbo [31]. Por meio de uma ponta de STM (*Scanning Tunneling Microscope*), foram efetuadas medidas de condutância ao longo da cadeia ferromagnética, nas quais se verificou a presença da ZBA em suas bordas, sugerindo assim a presença dos MBSs nesses locais. Entretanto, a ZBA obtida no citado experimento não está exclusivamente associada à presença dos MBSs [32], uma vez que pode ser consequência de efeitos das impurezas magnéticas ou desordem. Portanto, a questão da detecção dos Majoranas em sistemas de Matéria Condensada ainda não foi completamente resolvida.

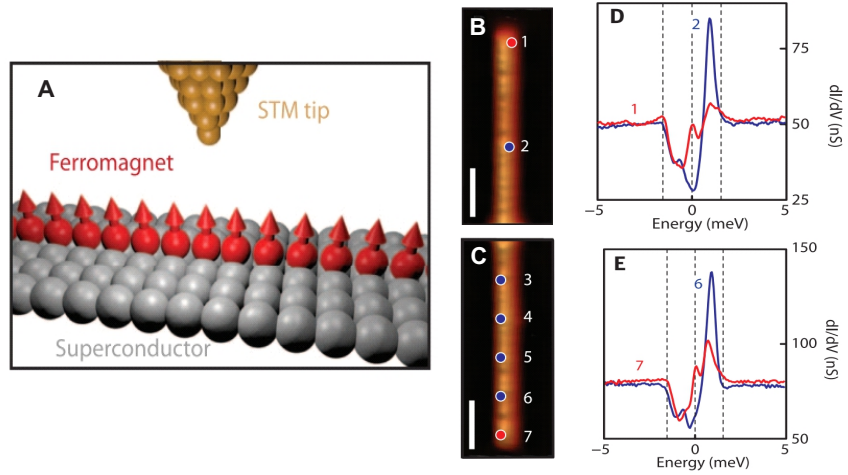


Figura 1.3: A: Ilustração do experimento proposto por S. N.-Perge *et al* [31]. B e C: Imagem topográfica da amostra obtida, onde se verificou a presença dos MBSs nas bordas da cadeia atômica, nos sítios indicados por 1 e 7, como consequência da ZBA nas medidas de condutância correspondentes.

Fonte: S. N.-Perge *et al*, Science 346, 602 (2014).

Diante ao que foi exposto, novas propostas com o intuito de se detectar os MBSs tornam-se necessárias. Nesse espírito, no presente trabalho propõe-se e faz-se uma análise minuciosa do sistema descrito na Fig. 1.4, composto por um interferômetro *spinless* do tipo Aharonov-Bohm com dois QDs, onde um deles está acoplado a uma das bordas de um fio de Kitaev, que encontra-se na fase topológica. Vale ressaltar que o sistema *spinless* (sem spin) pode ser obtido experimentalmente por meio da aplicação de um campo magnético intenso o suficiente para ocasionar um desdobramento Zeeman nos níveis energéticos dos QDs e dos terminais metálicos. Nessa condição, somente uma orientação de spin prevalecerá no sistema.

Investigou-se o sistema proposto nas seguintes situações: (i) não interagente, onde a interação de Coulomb entre os QDs é nula e (ii) interagente, na qual considerou-se a interação coulumbiana. Em ambos os casos, foram considerados fenômenos de interferometria eletrônica para a investigação de possíveis assinaturas que surgem devido à presença das excitações de Majorana no sistema. Nesse sentido, a interferência Fano mostra-se apropriada [33]. O citado fenômeno, que será discutido mais a frente, emerge da competição entre caminhos pelos quais os elétrons itinerantes podem passar, ou seja, entre o contínuo de energia (terminais metálicos) e níveis discretizados (presentes nos

QDs). Portanto, padrões de interferência característicos de MBSs podem ser constados em perfis de transmitância e, conseqüentemente, em possíveis medidas de condutância (a relação entre condutância e transmitância será apresentada na próxima seção).

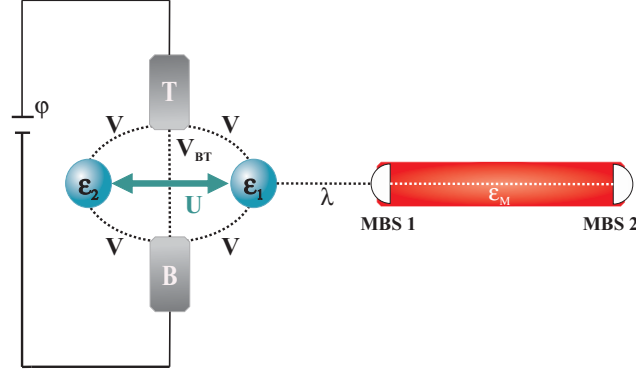


Figura 1.4: Esquema do dispositivo proposto: um fio de Kitaev na fase topológica, que hospeda MBSs em suas extremidades (semi-esferas brancas), está lateralmente acoplado a um interferômetro *spinless* do tipo Aharonov-Bohm. Esse dispositivo é composto por dois terminais metálicos (*Bottom*(B) e *Top*(T)) e dois pontos quânticos (QDs), com níveis de energia dados por $\varepsilon_1 = -\Delta\varepsilon/2$ e $\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon/2$, onde $\Delta\varepsilon$ representa a diferença simétrica de energia entre os mesmos. U é intensidade da interação de Coulomb entre os QDs e V é a amplitude de tunelamento entre os terminais e os QDs. O acoplamento direto entre terminais metálicos é dado por V_{BT} . O fio é acoplado ao QD 1 com intensidade λ . A sobreposição entre as funções de onda (integral de overlap) do MBS 1 e MBS 2 é dado por ε_M e φ é a voltagem do sistema.

Na situação não interagente ($U = 0$) [35], verificou-se a presença da ZBA, que permaneceu robusta e independente do regime Fano de interferência adotado. Adicionalmente, desenvolveu-se uma nova maneira para verificar a presença dos MBSs, a qual vai além da constatação característica da ZBA: Por meio de simulações de transmitância em função da diferença simétrica dos níveis de energia dos QDs e da energia de Fermi dos terminais metálicos, constatou-se que o MBS tem uma maneira singular de quebrar a simetria de tais perfis de transmitância. Isto é, as excitações decorrentes dos férmions de Majorana presentes no sistema possuem padrões de interferência característicos, que se manifestam nos perfis de transmitância do sistema. Os mesmos podem ser acessados experimentalmente por meio de medidas de condutância. Vale ressaltar que o sistema não interagente é realizável quando consideram-se QDs afastados o suficiente para desprezar a interação de Coulomb.

Já para o caso interagente ($U \neq 0$) [36], investigou-se o efeito da repulsão eletrônica entre os QDs sobre a assinatura Majorana convencional, ou seja, na ZBA. Sabe-se que a presença da interação de Coulomb no modelo introduz um termo de quatro operadores no Hamiltoniano que o descreve e portanto, são necessárias técnicas de aproximação para resolver o sistema de funções de Green que será posteriormente obtido. No presente trabalho, utiliza-se a aproximação de Hubbard I [37], válida para $T \gg T_K$, onde T representa a temperatura do sistema e T_K a temperatura Kondo [38]. O método de Hubbard I é um procedimento bem estabelecido e amplamente utilizado na literatura, o qual permite capturar a Física de um dado sistema desde que fora do regime Kondo.

Vale mencionar que o denominado efeito Kondo ocorre quando há um acoplamento do tipo antiferromagnético entre o spin localizado do QD e os spins dos elétrons de condução dos terminais metálicos. Especificamente, para $T \ll T_K$ os elétrons de condução formam uma nuvem com o intuito de blindar o momento magnético localizado no QD. Como consequência desse processo, verifica-se na condutância um pico centrado no nível de Fermi do QD, denominado pico Kondo. Embora o sistema aqui proposto seja *spinless*, ainda é possível que o mesmo apresente efeito Kondo, visto que um sistema de dois QDs *spinless* pode ser mapeado em um modelo efetivo com spin, descrito por um único QD [38]. Nessa situação, o pseudo momento magnético localizado no QD é blindado pelos elétrons de condução dos terminais metálicos, por meio de uma interação de troca antiferromagnética, como ocorre no efeito Kondo convencional. Portanto, com o intuito de evitar tal efeito e garantir a validade da aproximação empregada, considera-se $T \gg T_K$. Além do mais, fora do citado regime de validade, a ZBA verificada seria o resultado da competição entre o MBS e o efeito Kondo [39].

Os resultados obtidos para a situação interagente mostraram que a ZBA, com amplitude característica de 0.5, se fez presente nos perfis de transmitância, mesmo sob efeito da correlação eletrônica entre os QDs, apresentando pequenas flutuações em torno do citado valor. Verificou-se também que, para o caso em que os QDs estão em ressonância (mesmos valores de energia), a razão entre a magnitude da repulsão de Coulomb e do acoplamento QD-fio modificou a largura da ZBA, revelando portanto que a repulsão eletrônica entre

os QDs afeta o tempo de vida do Majorana no QD diretamente acoplado ao fio. Além do mais, a largura da ZBA também é influenciada pelos valores dos níveis energéticos dos QDs, peculiaridade que não ocorre para o caso não interagente.

1.1 O fio de Kitaev

Como já mencionado previamente, o fio de Kitaev é um candidato promissor para a realização dos MBSs. O mesmo foi proposto em 2001, pelo físico russo Alexei Kitaev, época em que desenvolvia projetos relacionados a computação quântica para a Microsoft [5]. Trata-se de um *toy model* composto por um nanofio unidimensional, *spinless* e com supercondutividade do tipo onda- p . Tal fio, que pode ser descrito como uma rede *tight-binding*, possui o seguinte Hamiltoniano [1, 5]:

$$H = -\mu \sum_x c_x^\dagger c_x - \frac{1}{2} \sum_x (t c_x^\dagger c_{x+1} + \Delta e^{i\phi} c_x c_{x+1} + \text{H.c.}), \quad (1.1)$$

onde μ é o potencial químico, $t \geq 0$ descreve o *hopping* entre primeiros vizinhos e $\Delta \geq 0$ representa a amplitude de ligação do par de Cooper para supercondutividade do tipo onda- p , com fase ϕ correspondente. Por simplicidade, considera-se o parâmetro de rede a unidade.

Pode-se decompor os operadores fermiônicos c_x em termos de dois férmions de Majorana, ou seja:

$$c_x = \frac{e^{-i\phi/2}}{2} (\gamma_{B,x} + i\gamma_{A,x}) \quad (1.2)$$

e

$$c_x^\dagger = \frac{e^{i\phi/2}}{2} (\gamma_{B,x} - i\gamma_{A,x}), \quad (1.3)$$

onde os operadores a direita obedecem as seguintes relações canônicas para férmions de Majorana: $\gamma_{\alpha,x} = \gamma_{\alpha,x}^\dagger$ e $\{\gamma_{\alpha,x}, \gamma_{\alpha',x'}\} = 2\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{xx'}$, as quais permitem constatar que $\gamma_{\alpha,x}^2 = 1$. Substituindo as relações expressas nas Eq.(1.2) e Eq.(1.3) no Hamiltoniano da

Eq.(1.1), tem-se que:

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{\mu}{4} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{B,x} + i \gamma_{B,x} \gamma_{A,x} - i \gamma_{A,x} \gamma_{B,x} + \gamma_{A,x} \gamma_{A,x}) \\
&- \frac{t}{8} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{B,x+1} + i \gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} - i \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1} + \gamma_{A,x} \gamma_{A,x+1}) \\
&+ \frac{t}{8} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{B,x+1} + i \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1} - i \gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} + \gamma_{A,x} \gamma_{A,x+1}) \\
&- \frac{\Delta}{8} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{B,x+1} + i \gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} + i \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1} - \gamma_{A,x} \gamma_{A,x+1}) \\
&+ \frac{\Delta}{8} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{B,x+1} - i \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1} - i \gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} - \gamma_{A,x} \gamma_{A,x+1}) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{\mu}{4} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{B,x} + i \gamma_{B,x} \gamma_{A,x} - i \gamma_{A,x} \gamma_{B,x} + \gamma_{A,x} \gamma_{A,x}) \\
&- i \frac{t}{4} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} - \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1}) \\
&- i \frac{\Delta}{4} \sum_x (\gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} + \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1}).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Utilizando as relações canônicas descritas anteriormente, a Eq.(1.4) torna-se:

$$H = -\frac{\mu}{2} \sum_{x=1}^N (1 + i \gamma_{B,x} \gamma_{A,x}) - \frac{i}{4} \sum_{x=1}^{N-1} (\Delta + t) \gamma_{B,x} \gamma_{A,x+1} - \frac{i}{4} \sum_{x=1}^{N-1} (\Delta - t) \gamma_{A,x} \gamma_{B,x+1}. \tag{1.5}$$

Esse é o Hamiltoniano que descreve o fio de Kitaev em termos de operadores de Majorana.

Considera-se dois casos limites propostos por Kitaev. O primeiro, denomina-se **fase trivial** e ocorre quando $\mu < 0$ e $t = \Delta = 0$. Nessa situação, o Hamiltoniano da Eq.(1.5) apresenta somente o primeiro termo, ou seja:

$$H = -\frac{\mu}{2} \sum_{x=1}^N (1 + i\gamma_{B,x}\gamma_{A,x}). \quad (1.6)$$

Assim, na fase trivial, Majoranas do mesmo sítio da rede conectam-se e não há nenhuma ligação entre aqueles que pertencem à sítios vizinhos adjacentes (ver Fig.1.5).

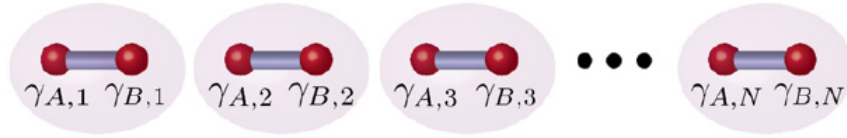


Figura 1.5: [1] Ilustração do fio de Kitaev na chamada fase trivial. Pode-se notar que só os férmions de Majorana pertencentes ao mesmo sítio da rede (elipses em lilás) estão conectados, como determina o Hamiltoniano da Eq.(1.6).

Fonte: J. Alicea, Rep. Prog. Physics. 75, 076501, (2012).

Já no outro limite, chamado de **fase topológica**, $\mu = 0$ e $t = \Delta \neq 0$. Nessas condições, a Eq.(1.5) transforma-se em:

$$H = -i\frac{t}{2} \sum_{x=1}^{N-1} \gamma_{B,x}\gamma_{A,x+1}, \quad (1.7)$$

isto é, somente férmions de Majorana de sítios adjacentes da rede estão conectados. Essa situação permite que dois estados de Majorana, nomeadamente $\gamma_{A,1}$ e $\gamma_{B,N}$, localizados nas bordas da cadeia, estejam desacoplados do resto do fio (ver Fig.1.6). Tais Majoranas isolados são potenciais candidatos para a realização do *quantum bit*, pois o fato de estarem desacoplados de seu entorno evita perdas de informação por fenômenos de decoerência quântica, por exemplo [1].

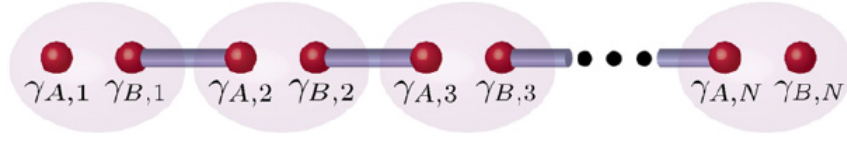


Figura 1.6: [1]Representação esquemática do fio de Kitaev na fase topológica, onde só há acoplamento entre Majoranas de sítios adjacentes da rede, de acordo com a Eq.(1.7). Nesse cenário, estados de Majorana isolados emergem nas bordas do fio.

Fonte: J. Alicea, Rep. Prog. Physics. 75, 076501, (2012).

1.2 O Efeito Fano

O efeito Fano foi descoberto por Ugo Fano em 1961, quando o mesmo analisava linhas atômicas espectrais que apresentavam assimetria em processos de absorção [33, 34]. No entanto, apesar de ter surgido num cocontexto de física atômica, o efeito Fano também ocorre em nanoestruturas, como pontos quânticos, por exemplo [34]. De forma sucinta, o citado efeito ocorre devido à fenômenos de interferência quântica entre caminhos distintos de tunelamento eletrônico, os quais estão entre um contínuo de energia e níveis discretizados.

Com intuito de explicar melhor tal efeito, analisa-se o esquema ilustrado na Fig.1.7(a). Trata-se de um sistema composto por uma impureza adsorvida em um hospedeiro metálico, com parâmetro de hibridização V . Sobre a impureza, nota-se a presença de uma ponta de STM. Como pode ser visto, há probabilidade de os elétrons tunelarem entre a ponta de STM e o hospedeiro metálico por dois caminhos distintos. No primeiro, o processo de tunelamento acontece de forma direta, com amplitude t_c . Já no segundo, os elétrons passam pela impureza, com amplitude t_d . A competição pela preferência de tunelamento entre esses dois prováveis caminhos definem padrões de interferência Fano, que quantitativamente são expressos pelo chamado fator de Fano extrínseco, dado por:

$$q_{ex} = (\pi\Gamma\rho_0)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t_d}{t_c}\right), \quad (1.8)$$

onde Γ é o parâmetro de Anderson e ρ_0 é a densidade de estados do metal hospedeiro.

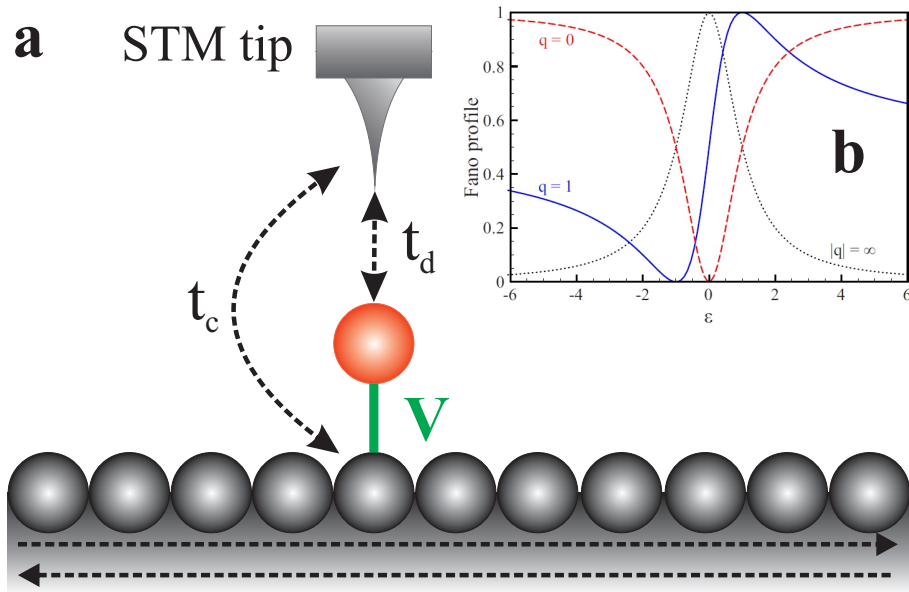


Figura 1.7: **(a)** Impureza adsorvida em um hospedeiro metálico, onde V representa o parâmetro de hibridização. O processo de tunelamento eletrônico entre a ponta de STM e o hospedeiro pode ocorrer de duas formas, isto é, há uma probabilidade dos elétrons passarem pela impureza, com amplitude t_d , ou de tunelarem para o hospedeiro de forma direta, com amplitude t_c . Ainda há uma terceira possibilidade, na qual os elétrons percorrem o trajeto hospedeiro-impureza, sem tunelar para a ponta. **(b)**[34] Perfis de interferência Fano, modulados pela Eq.(1.8), que indicam o caminho preferencial de tunelamento eletrônico no sistema.

Assim, por meio da razão $\frac{t_d}{t_c}$, o q_{ex} dita qual será o padrão de interferência Fano no sistema. Nesse sentido, quando $t_d \gg t_c$, $q_{ex} \rightarrow \infty$ e a condutância detectada pela ponta de STM apresenta uma ressonância (curva em preto-pontilhado da Fig.1.7(b)), indicando que houve interferência construtiva. Já para o caso em que $t_d \ll t_c$, $q_{ex} \rightarrow 0$ e o perfil de condutância apresenta uma anti-ressonância (curva em vermelho-tracejado da Fig.1.7(b)), a qual é consequência de um processo de interferência destrutiva. Para valores intermediários de q_{ex} , os perfis de condutância mostram uma mistura de ressonância e anti-ressonância (curva em azul da Fig.1.7(b)).

Além dos canais de tunelamento já citados, os elétrons podem percorrer o trajeto impureza-hospedeiro, sem tunelar para a ponta de STM. O fator de Fano que descreve os perfis de interferência nesse trajeto é chamado de intrínseco, sendo definido da seguinte maneira:

$$q_{\text{int}} = \frac{1}{\Gamma} \text{Re}\{\Sigma_{\text{auto-energia}}\}, \quad (1.9)$$

onde $\Sigma_{\text{auto-energia}}$ é justamente a auto-energia do sistema. Em hospedeiros metálicos, $\Sigma_{\text{auto-energia}} = 0$ no chamado limite de banda larga e, conseqüentemente q_{int} torna-se irrelevante.

Ressalta-se que o fator de Fano e os respectivos canais de tunelamento para o dispositivo proposto neste trabalho (Fig. 1.4) serão definidos no próximo capítulo (ver Eq. (2.25)).

Capítulo 2

O Modelo Teórico

2.1 Hamiltoniano

O sistema esquematizado na Fig. 1.4 é descrito pelo seguinte Hamiltoniano, proposto por Liu e Baranger [14], levando em consideração dois QDs:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & \sum_{\alpha k} \tilde{\varepsilon}_{\alpha k} c_{\alpha k}^{\dagger} c_{\alpha k} + \sum_j \varepsilon_j d_j^{\dagger} d_j + V \sum_{kj} (c_{\alpha k}^{\dagger} d_j + \text{H.c.}) \\ & + V_{BT} \sum_{kq} (c_{Bk}^{\dagger} c_{Tq} + \text{H.c.}) + U d_1^{\dagger} d_1 d_2^{\dagger} d_2 + \mathcal{H}_{\text{MBSs}},\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde os elétrons dos terminais metálicos $\alpha = B, T$ (bottom/top) são descritos pelo operador $c_{\alpha k}^{\dagger} (c_{\alpha k})$, para criação (aniquilação) de um elétron em um estado quântico indicado pelo número de onda k e energia $\tilde{\varepsilon}_{\alpha k} = \varepsilon_k - \mu_{\alpha}$, em que μ_{α} é o potencial químico. Adota-se o calibre $\mu_B = \Delta\mu$ e $\mu_T = -\Delta\mu$, onde $\mu_B - \mu_T = 2\Delta\mu = e\varphi$ é a diferença de energia potencial elétrica entre os terminais, com $e > 0$ sendo a carga do elétron e φ a diferença de potencial. Já para os QDs, $d_j^{\dagger} (d_j)$ cria (aniquila) um elétron em um dado estado ε_j , com $j = 1, 2$ e U representa a intensidade da repulsão de Coulomb entre os respectivos pontos quânticos. A hibridização dos QDs com os reservatórios é V e V_{BT} é o acoplamento direto entre os mesmos. Além do mais,

$$\mathcal{H}_{\text{MBSs}} = i\varepsilon_{\text{M}}\Psi_1\Psi_2 + \lambda(d_1 - d_1^\dagger)\Psi_1 \quad (2.2)$$

descreve o fio de Kitaev na fase topológica. Note que, para $j = 1$, o QD 1 está acoplado ao MBS 1, descrito pelo operador $\Psi_1 = \Psi_1^\dagger$, com a intensidade de acoplamento dada por λ . Já o MBS 2, representado por $\Psi_2 = \Psi_2^\dagger$, está ligado ao MBS 1 por meio de um parâmetro de sobreposição de funções de onda (integral de overlap), dado por $\varepsilon_{\text{M}} \sim e^{-L/\xi}$, onde L é a distância entre o MBSs (comprimento do fio) e ξ é o comprimento de coerência característico do estado supercondutor.

2.2 Transmitância

No intuito de se calcular a transmitância $\mathcal{T}(\varepsilon)$ do sistema proposto, utiliza-se a fórmula de Landauer-Büttiker para a condutância G a voltagem zero [42], dada por

$$G = \frac{e^2}{h} \int d\varepsilon \left(-\frac{\partial f_{\text{F}}}{\partial \varepsilon} \right) \mathcal{T}(\varepsilon), \quad (2.3)$$

onde e é a carga eletrônica, h é a constante de Planck e f_{F} é a distribuição de Fermi-Dirac.

Antes de iniciar o cálculo da transmitância propriamente dito, é necessário efetuar uma transformação sobre o Hamiltoniano da Eq. (2.1), isto é:

$$\begin{pmatrix} c_{Bk} \\ c_{Tk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ok} \\ c_{ek} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

com c_{ok} e c_{ek} sendo os operadores de condução ímpar(odd) e par(even), respectivamente.

Essa transformação permite expressar a Eq. (2.1) como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_o + \tilde{\mathcal{H}}_{tun} = \mathcal{H}_{\varphi=0} + \tilde{\mathcal{H}}_{tun}, \quad (2.5)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_e &= \sum_k \varepsilon_k c_{ek}^\dagger c_{ek} + \sum_j \varepsilon_j d_j^\dagger d_j + \sqrt{2}V \sum_{jk} (c_{ek}^\dagger d_j + \text{H.c.}) \\
&+ U d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 + V_{BT} \sum_{kq} c_{ek}^\dagger c_{eq} + \mathcal{H}_{\text{MBSs}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

representa a parte do sistema acoplada aos QDs, através de uma hibridização efetiva $\sqrt{2}V$, enquanto

$$\mathcal{H}_o = \sum_k \varepsilon_k c_{ok}^\dagger c_{ok} - V_{BT} \sum_{kq} c_{ok}^\dagger c_{oq} \tag{2.7}$$

descreve a parte desacoplada. No entanto, elas estão conectadas entre si devido ao termo de tunelamento do Hamiltoniano, dado por

$$\tilde{\mathcal{H}}_{tun} = -\Delta\mu \sum_k (c_{ek}^\dagger c_{ok} + c_{ok}^\dagger c_{ek}). \tag{2.8}$$

Uma consequência direta do regime de voltagem zero aqui adotado ($\varphi \rightarrow 0$), é o fato de $\Delta\mu \rightarrow 0$. Assim, $\tilde{\mathcal{H}}_{tun}$ é um termo perturbativo. Nesse caso, de acordo com a teoria de resposta linear, a transmitância é dada por

$$\mathcal{T}(\varepsilon) = (2\pi V_{BT})^2 \tilde{\rho}_e(\varepsilon) \tilde{\rho}_o(\varepsilon), \tag{2.9}$$

em que $[\mathcal{H}_e, \mathcal{H}_o] = 0$ e $\tilde{\rho}_e(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(\tilde{\mathcal{G}}_{\Psi_e \Psi_e})$ e $\tilde{\rho}_o(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(\tilde{\mathcal{G}}_{f_o f_o})$ são as densidades de estados locais (LDOS) para os Hamiltonianos das Eq. (2.6) e Eq. (2.7), respectivamente.

De acordo com a definição de função de Green retardada no domínio temporal t , tem-se que:

$$\mathcal{G}_{\Psi_e \Psi_e} = \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t) \text{Tr} \left\{ \varrho_e [\Psi_e(t), \Psi_e^\dagger(0)]_+ \right\}, \tag{2.10}$$

onde $\theta(t)$ é a função degrau, ϱ_e é a matriz densidade para Eq. (2.6) e

$$\Psi_e = f_e + (\pi\Gamma\rho_0)^{1/2} q \sum_j d_j \tag{2.11}$$

é o operador de campo, com $f_e = \sum_q c_{eq}$. Além do mais,

$$\Gamma = 2\pi V^2 \rho_0 \quad (2.12)$$

é o parâmetro de Anderson e $q = (\pi\Gamma\rho_0)^{-1/2}(\frac{\sqrt{2}V}{2V_{BT}})$.

Com o intuito de obter uma expressão para a transmitância do sistema, deve-se calcular a função de Green retardada no espaço das energias ε , cuja a definição no domínio temporal está expressa na Eq. (2.10). Para isso, emprega-se o método da equação de movimento (EOM - *equation of motion*) [42] (Ver Apêndice A), que pode ser sumariamente definido de acordo com a seguinte expressão:

$$(\varepsilon + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{AB} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}^\dagger]_+ + \tilde{\mathcal{G}}_{[\mathcal{A}, \mathcal{H}_i] \mathcal{B}}. \quad (2.13)$$

Para a função de Green retardada $\tilde{\mathcal{G}}_{AB}$, os operadores fermiônicos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são aqueles utilizados no Hamiltoniano $\mathcal{H}_i$. Assim, para $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \Psi_e$ e $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_e$, obtém-se

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\Psi_e \Psi_e} = \tilde{\mathcal{G}}_{f_e f_e} + (\pi\Gamma\rho_0) q^2 \sum_{jl} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} + 2(\pi\Gamma\rho_0)^{1/2} q \sum_j \tilde{\mathcal{G}}_{d_j f_e}. \quad (2.14)$$

De acordo com as Eq. (2.6) e Eq. (2.13), para $\mathcal{A} = \mathcal{B} = f_e$, juntamente com a Eq. (2.14), tem-se que

$$\tilde{\mathcal{G}}_{f_e f_e} = \frac{\pi\rho_0(\bar{q} - i)}{1 - \sqrt{x}(\bar{q} - i)} + \pi\rho_0\Gamma \left[\frac{(\bar{q} - i)}{1 - \sqrt{x}(\bar{q} - i)} \right]^2 \sum_{jl} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}. \quad (2.15)$$

Obtém-se também a função de Green retardada mista

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_j f_e} = \sqrt{\pi\Gamma\rho_0} \frac{(\bar{q} - i)}{1 - \sqrt{x}(\bar{q} - i)} \sum_l \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}, \quad (2.16)$$

por meio da aplicação da Eq. (2.13), considerando $\mathcal{A} = d_j$, $\mathcal{B} = f_e$ e $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_e$, com os parâmetros

$$x = (\pi\rho_0 V_{BT})^2 \quad (2.17)$$

e

$$\bar{q} = \frac{1}{\pi\rho_0} \sum_k \left(\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_k} \right). \quad (2.18)$$

Além do mais, como pode ser visto na Eq. (2.9), é necessário calcular a LDOS $\tilde{\rho}_o(\varepsilon)$. Nesse sentido, define-se

$$\mathcal{G}_{f_o f_o} = \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t) \text{Tr} \left\{ \varrho_o [f_o(t), f_o^\dagger(0)]_+ \right\}, \quad (2.19)$$

com $f_o = \sum_{\tilde{q}} c_{o\tilde{q}}$. De acordo com as Eq. (2.7) e Eq. (2.19), fazendo $\mathcal{A} = \mathcal{B} = f_o$ e $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_o$ na Eq. (2.13), encontra-se que

$$\tilde{\mathcal{G}}_{f_o f_o} = \frac{\pi\rho_0(\bar{q} - i)}{1 + \sqrt{x}(\bar{q} - i)}. \quad (2.20)$$

Por fim, substituindo as Eq. (2.15), Eq. (2.16) e Eq. (2.20) na Eq. (2.9), obtém que

$$\mathcal{T}(\varepsilon) = \mathcal{T}_b + \sqrt{\mathcal{T}_b \mathcal{R}_b} \bar{\Gamma} \sum_{j\tilde{j}} \text{Re}\{\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\tilde{j}}}\} - (1 - 2\mathcal{T}_b) \frac{\bar{\Gamma}}{2} \sum_{j\tilde{j}} \text{Im}\{\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\tilde{j}}}\}, \quad (2.21)$$

onde

$$\bar{\Gamma} = \frac{2\Gamma}{1 + x} \quad (2.22)$$

é o acoplamento efetivo entre os QDs e o reservatório,

$$\mathcal{T}_b = \frac{4x}{(1 + x)^2} \quad (2.23)$$

representa a transmitância de fundo e

$$\mathcal{R}_b = 1 - \mathcal{T}_b = \frac{(1 - x)^2}{(1 + x)^2} \quad (2.24)$$

é a correspondente reflectância, ambas na ausência dos QDs e MBSs.

Vale salientar que o valor obtido para a transmitância [Eq. (2.21)] é uma generalização da Eq.(2) da referência [43], na qual se faz alusão a um dispositivo do tipo Aharonov-

Bohm, com apenas um QD e campo magnético ausente. Além do mais, no citado trabalho, é denominado pelos autores um parâmetro de Fano, dado por:

$$q_b = \sqrt{\frac{\mathcal{R}_b}{\mathcal{T}_b}} = \frac{(1-x)}{2\sqrt{x}}. \quad (2.25)$$

Destaca-se que, no presente trabalho, dois casos limites relacionados ao parâmetro acima são analisados: $q_b \rightarrow \infty$, denominado regime de acoplamento fraco entre os terminais, visto que a transmitância de fundo $\mathcal{T}_b = 0$; e o chamado limite de acoplamento forte $q_b \rightarrow 0$, onde $\mathcal{T}_b = 1$.

2.3 Funções de Green dos Pontos Quânticos

Com o objetivo de se obter a transmitância do sistema, será apresentado a seguir o cálculo relativo às funções de Green retardadas dos QDs $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}$, válido no chamado limite de banda larga. Mas antes disso, é necessário expressar os operadores de Majorana Ψ_1 e Ψ_2 em termos de um férmion não local η :

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^\dagger + \eta) \quad (2.26)$$

e

$$\Psi_2 = i\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^\dagger - \eta), \quad (2.27)$$

onde $\eta \neq \eta^\dagger$ e $\{\eta, \eta^\dagger\} = 1$. De acordo com a citada transformação, a Eq.(2) torna-se

$$\mathcal{H}_{\text{MBSs}} = \varepsilon_M(\eta^\dagger \eta - \frac{1}{2}) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger). \quad (2.28)$$

Por meio da aplicação do método da EOM (Ver Apêndice A) em

$$\mathcal{G}_{d_j d_l} = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\}, \quad (2.29)$$

juntamente com a transformação de Fourier para o espaço das energias ε , obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma - \delta_{j1}\Sigma_{\text{MBS1}})\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma \left[\sum_{\tilde{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\tilde{l}}} \right] \\
 &+ U [\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} + \lambda^2 \tilde{K} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}],
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde o índice $\bar{j}$ representa o oposto de j , ou seja, $j \leftrightarrow \bar{j} \equiv 1 \leftrightarrow 2$.

2.3.1 Caso não interagente

Desconsiderando a interação de Coulomb entre os QDs ($U = 0$), a Eq. (2.30) transforma-se em [35] :

$$(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma - \delta_{j1}\Sigma_{\text{MBS1}})\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} = \delta_{jl} + \Sigma \left[\sum_{\tilde{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\tilde{l}}} \right], \tag{2.31}$$

onde

$$\Sigma = -\frac{(\sqrt{x} + i)}{1 + x} \Gamma. \tag{2.32}$$

Ademais,

$$\Sigma_{\text{MBS1}} = \lambda^2 K (1 + \lambda^2 \tilde{K}) \tag{2.33}$$

representa a auto-energia devido ao acoplamento entre o QD 1 e o MBS 1, onde

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_M + i0^+} + \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon_M + i0^+} \right) \tag{2.34}$$

e

$$\tilde{K} = \frac{K}{\varepsilon + \varepsilon_1 + \tilde{\Sigma} - \lambda^2 K} \quad (2.35)$$

possuem a mesma forma dos parâmetros encontrados na Ref. 14, onde $\tilde{\Sigma}$ é o complexo conjugado de Σ . A solução da Eq. (2.31) fornece

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1} = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_1 - \Sigma - \Sigma_{\text{MBS1}} - \mathcal{C}_2} \quad (2.36)$$

como a função de Green do QD 1, onde

$$\mathcal{C}_j = \frac{\Sigma^2}{\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma} \quad (2.37)$$

é a auto-energia devido a presença do QD j . Nesse sentido, quando se considera $\mathcal{C}_j = 0$, a Eq. (2.36) se reduz a função de Green de apenas um único QD, como a encontrada na Ref. 14. Para o caso do QD 2, tem-se que

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2} = \frac{1 - \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}^0 \Sigma_{\text{MBS1}}}{\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma - \frac{\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}^0 \Sigma_{\text{MBS1}}}{\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}^0} - \mathcal{C}_1}, \quad (2.38)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}^0 = 1/(\varepsilon - \varepsilon_1 - \Sigma) \quad (2.39)$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}^0 = 1/(\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma) \quad (2.40)$$

representam as funções de Green correspondentes para um sistema de um único QD, sem acoplamento com Majoranas. Por último, as funções de Green mistas são:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_1} = \frac{\Sigma}{\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1} \quad (2.41)$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_2} = \frac{\Sigma}{\varepsilon - \varepsilon_1 - \Sigma - \Sigma_{\text{MBS1}}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_1}. \quad (2.42)$$

Por meio de uma análise das funções de Green obtidas, dadas pelas Eq. (2.36), Eq. (2.38), Eq. (2.41) e Eq. (2.42), verifica-se que $\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_2}$ podem ser encontradas apenas permutando os índices $1 \leftrightarrow 2$ das funções $\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_1}$, exclusivamente no caso em que $\Sigma_{\text{MBS1}} = 0$. Todavia, na situação oposta, ou seja, $\Sigma_{\text{MBS1}} \neq 0$, essa simetria perante a permutação de índices não é verificada. Esse último caso corresponde justamente aquele em que o fio de Kitaev está acoplado ao interferômetro, como representado na Fig. 1.4.

Da mesma forma que na Ref. 14, será feita uma comparação da quebra de simetria supracitada com aquela que vem de um acoplamento com um férmion regular com modo de energia zero (RF - *regular fermion*), onde Σ_{MBS1} será substituído por $\Sigma_{\text{RF}} = \frac{\lambda^2}{\varepsilon + i0^+}$ nas funções de Green dos QDs descritas anteriormente. Essa comparação permitirá reconhecer uma assinatura exclusiva, relacionada a quebra de simetria, que se deve ao acoplamento dos Majoranas com o interferômetro.

2.3.2 Caso interagente: Aproximação de Hubbard I

Quando se considera a interação eletrônica entre os QDs, pode-se verificar a presença de funções de Green de alta ordem, como a $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}$ e a $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}$ na Eq.(30). Após a aplicação do método da EOM nas mesmas, são obtidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} &= \delta_{jl} \langle n_{\bar{j}} \rangle + \sqrt{2}V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{n_{\bar{j}} c_{ek}, d_l} + \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek}, d_j, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_j, d_j, d_l}] \\ &+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{f^\dagger d_j, d_l} - \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger f, d_j, d_l} - \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_{\bar{j}} f, d_l}] \\ &+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_j, d_l} - \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger \eta^\dagger, d_j, d_l} - \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_{\bar{j}} \eta^\dagger, d_l}] \end{aligned} \quad (2.43)$$

e

$$\begin{aligned}
(\varepsilon + \varepsilon_j + U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l} &= \delta_{\bar{j}l} \langle d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \rangle + \sqrt{2}V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}}^\dagger c_{ek} d_j^\dagger, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j^\dagger, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{n_{\bar{j}} c_{ek}^\dagger, d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_{\bar{j}} f^\dagger, d_l} - \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}} f^\dagger d_j^\dagger, d_l} + \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{f d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger, d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_{\bar{j}} f, d_l} - \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}} f d_j^\dagger, d_l} + \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{f^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger, d_l}]. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

O cálculo das funções de Green de alta ordem deu origem à outras funções, também de alta ordem, que se calculadas novamente darão origem a outras novas. Assim, o termo quártico do Hamiltoniano [Eq. (2.1)], que descreve a repulsão de Coulomb entre QDs, introduz uma infinidade no sistema de equações e portanto, se faz necessária a aplicação de um método de aproximação para fechar o conjunto de funções de Green. No presente trabalho, utiliza-se um método inspirado na aproximação de Hubbard I [37], que pode ser resumido da seguinte forma:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ABCD} = \langle \mathcal{AB} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{CD}, \quad (2.45)$$

com $\langle \mathcal{AB} \rangle = \langle \mathcal{B}^\dagger \mathcal{A}^\dagger \rangle$. Os detalhes relacionados a citada aproximação podem ser vistos no Apêndice B. Como já foi discutido na introdução, a aproximação utilizada não é válida para $T \ll T_K$. Nessa situação, o efeito Kondo pode surgir e são necessários outros métodos para capturá-lo.

Aplicando o método descrito pela Eq. (2.45) nas Eq. (2.43) e Eq. (2.44), obtém-se que

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} &= \delta_{jl} \langle n_{\bar{j}} \rangle + \langle n_{\bar{j}} \rangle \Sigma \left[\sum_l \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}(\varepsilon) \right] + \delta_{j1} \langle n_{\bar{j}} \rangle \Sigma_{\text{MBS1}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l} \\
&+ \delta_{j1} U \langle n_{\bar{j}} \rangle \lambda^2 \tilde{K} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\varepsilon + \varepsilon_j + U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l} &= \delta_{jl} \langle d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \rangle - \langle n_{\bar{j}} \rangle \tilde{\Sigma} \left[\sum_l \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_l} \right] + \delta_{j1} \langle n_{\bar{j}} \rangle K \lambda^2 \tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_l} \\
&- \delta_{j1} \langle n_{\bar{j}} \rangle K \lambda^2 \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l},
\end{aligned} \tag{2.47}$$

com

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_l} = \frac{-U \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}}{\left(\varepsilon + \varepsilon_j + \tilde{\Sigma} - \delta_{j1} \lambda^2 K \right)} - \delta_{j1} \lambda^2 \tilde{K} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l}. \tag{2.48}$$

Além do mais, nas Eq. (2.46) e Eq. (2.47), os valores esperados $\langle n_{\bar{j}} \rangle$ e $\langle d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \rangle$ são dados por

$$\langle n_{\bar{j}} \rangle = \left(-\frac{1}{\pi} \right) \int d\varepsilon f_F(\varepsilon) \text{Im} \left[\tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}} d_{\bar{j}}}(\varepsilon) \right] \tag{2.49}$$

e

$$\langle d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \rangle = \left(-\frac{1}{\pi} \right) \int d\varepsilon f_F(\varepsilon) \text{Im} \left[\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}}}(\varepsilon) \right], \tag{2.50}$$

respectivamente. Pode-se constatar nas Eq. (2.49) e Eq. (2.50) que é necessário um cálculo autoconsistente para se obter o número de ocupação eletrônica para os QDs $\langle n_{\bar{j}} \rangle = \langle d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \rangle$ e o valor esperado do par de Cooper delocalizado $\langle d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \rangle$. Como essa última quantidade é induzida nos QDs devido a presença do fio de Kitaev, espera-se que ela seja menor em comparação ao número de ocupação eletrônica usual [39]. Tal hipótese foi confirmada nos processos computacionais de cálculo autoconsistente.

Após alguns cálculos envolvendo as Eq. (2.30), Eq. (2.46), Eq. (2.47) e Eq. (48), são obtidas as seguintes relações:

$$(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma^{(j)} - \delta_{j1} \Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}}) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_j} = 1 + \frac{U \langle n_{\bar{j}} \rangle}{(\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+)} + \Sigma^{(j)} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{j}}} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma^{(j)} - \delta_{j1}\Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}})\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{j}}} &= \delta_{j1}U\lambda^2\tilde{K}_U\langle d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \rangle \left(\frac{U\langle n_{\bar{j}} \rangle}{\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+} + 1 \right) \\
&+ \Sigma^{(j)}\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{j}}},
\end{aligned} \tag{2.52}$$

onde

$$\tilde{K}_U = \frac{\tilde{K}}{(\varepsilon + \varepsilon_j + U - \sigma + \delta_{j1}\langle n_{\bar{j}} \rangle U \lambda^2 \tilde{K})}, \tag{2.53}$$

com

$$\sigma = \frac{\tilde{\Sigma}\langle n_{\bar{j}} \rangle U}{\varepsilon + \varepsilon_j + \tilde{\Sigma} - \delta_{j1}\lambda^2 K}. \tag{2.54}$$

Nota-se também que

$$\Sigma^{(j)} = \Sigma \left(1 + \frac{U\langle n_{\bar{j}} \rangle}{\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+} \right) \tag{2.55}$$

e

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}} &= \Sigma_{\text{MBS1}} + \frac{U\langle n_2 \rangle \Sigma_{\text{MBS1}}}{(\varepsilon - \varepsilon_1 - U + i0^+)} \\
&- U\langle n_2 \rangle \lambda^2 \tilde{K}_U \left(\frac{U\langle n_2 \rangle}{\varepsilon - \varepsilon_1 - U + i0^+} + 1 \right) (\Sigma_{\text{MBS1}} - \tilde{\Sigma} \lambda^2 \tilde{K})
\end{aligned} \tag{2.56}$$

são as novas auto-energias obtidas, as quais devem-se à presença da repulsão de Coulomb entre os QDs. Pode-se constatar que as Eq.(2.55) e Eq.(2.56) transformam-se nas Eq.(2.32) e Eq.(2.33) quando se faz $U = 0$. Utilizando as Eq.(2.51) e Eq.(2.52), encontra-se explicitamente a função de Green retardada para o QD 1, dada por

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1} = \frac{\gamma[\gamma + \Sigma^{(1)}U\lambda^2\tilde{K}_U\langle d_1^\dagger d_2^\dagger \rangle]\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}^U}{\gamma^2 - \mathcal{C}_2} + \frac{(\Sigma^{(1)})^2}{\gamma^2 - \mathcal{C}_2}\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}^U, \tag{2.57}$$

com $\gamma = (\varepsilon - \varepsilon_1 - \Sigma^{(1)} - \Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}})$, $\mathcal{C}_2 = \frac{(\Sigma^{(1)})^2 (\Sigma^{(2)})^2}{(\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma^{(2)})^2}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_j}^U &= \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma^{(j)} - \delta_{j1} \Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}})} \\ &+ \frac{U \langle n_{\bar{j}} \rangle}{(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma^{(j)} - \delta_{j1} \Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}})(\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+)}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

As outras funções Green do sistema dependem, de alguma forma, da $\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}$, de acordo com as seguintes relações:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_1} = \frac{\Sigma^{(2)}}{(\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma^{(2)})} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}, \quad (2.59)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2} = \tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}^U + \frac{\Sigma^{(2)}}{(\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma^{(2)})} \tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_1}, \quad (2.60)$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_2} = U \lambda^2 \tilde{K}_U \langle d_1^\dagger d_2^\dagger \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}^U + \frac{\Sigma^{(1)}}{\gamma} \tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}. \quad (2.61)$$

Capítulo 3

Resultados e Discussão

3.1 Caso não interagente

Elucidam-se agora as características relacionadas à citada antissimetria das funções de Green para o caso em que se considera $U = 0$, utilizando a expressão encontrada para a transmitância [Eq. (2.21)], com $\lambda = 4\Gamma$, para o caso em que o fio de Kitaev está acoplado ao interferômetro. Se ε , na citada equação, é a grandeza variável, a transmitância $\mathcal{T}$ torna-se, então, função da energia de Fermi $\varepsilon = \mu_T = \mu_B$ dos terminais metálicos [12, 13]. Como mostra a Eq. (2.3), a transmitância de um dado sistema pode ser obtida experimentalmente por meio de medidas de condutância G , em unidades de $G_0 = e^2/h$, para temperaturas $T \rightarrow 0$, fixando as voltagens dos terminais metálicos, no intuito de ajustar o nível de Fermi. Vale salientar que a diferença simétrica de energias dos QDs $\Delta\varepsilon$, a energia de Fermi ε e ε_M são estimados em unidades do parâmetro de Anderson Γ .

Na Fig. 3.1, é apresentado o gráfico de densidade da transmitância em função da diferença simétrica $\Delta\varepsilon$ e do nível de Fermi ε , para o regime Fano em que $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$). O painel (a) mostra a situação na qual o fio de Kitaev está desacoplado do interferômetro, o que leva a uma interferência Fano simétrica, devido à simetria das funções de Green dos QDs perante a permutação de índices, como discutido brevemente no final da Sec. 3. Devido à essa característica, constata-se no citado gráfico regiões especulares em relação à linha tracejada, denominada como linha de simetria.

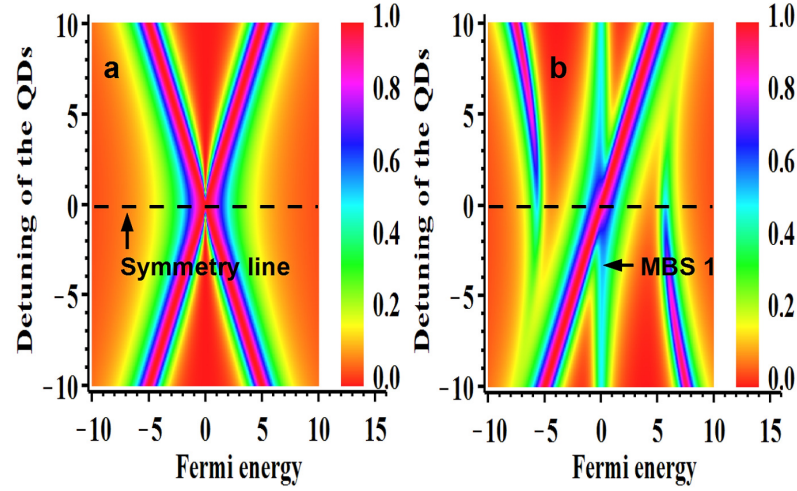


Figura 3.1: [35] Gráfico de densidade da transmitância [Eq. (2.21)] em função da diferença simétrica de energias $\Delta\varepsilon$ para os QDs e da energia de Fermi ε em unidades de Γ , dentro do regime Fano $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$): (a) o interferômetro do tipo Aharonov-Bohm encontra-se desacoplado do fio de Kitaev, levando a um efeito Fano simétrico. (b) O interferômetro está hibridizado com o fio de Kitaev semi-infinito através do QD 1 e, portanto, o efeito Fano é antissimétrico. A estrutura central em $\varepsilon = 0$ fornece a ZBA devido ao MBS 1. Em ambos os painéis a cor laranja indica um comportamento de um isolante perfeito.

Por outro lado, na situação em que se considera o fio de Kitaev semi-infinito ligado ao interferômetro ($\varepsilon_M = 10^{-7}$), a característica especular em relação a linha de simetria deixa de existir, visto que as funções de Green dos QDs $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_j}$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}$ não podem mais ser determinadas por uma simples permutação de índices $j \longleftrightarrow l$ nas funções $\tilde{\mathcal{G}}_{d_l d_l}$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{d_l d_j}$ respectivamente, onde $l, j = 1 \dots 2$. Essa peculiar característica é evidenciada no painel (b) da Fig. 3.1, em que visualiza-se claramente a distorção do padrão encontrado no painel (a) da mesma figura. Isto é, devido a presença do MBS 1 isolado, pode-se reconhecer o efeito Fano com padrão antissimétrico, caracterizado pelo perfil apresentado no painel (b), onde a região central é a ZBA devido ao MBS 1, a qual ocorre para $\varepsilon = 0$ e qualquer valor de $\Delta\varepsilon$.

A Fig. 3.2 exhibe justamente o regime Fano oposto ao da figura anterior, ou seja, $x = 1$ ($q_b \rightarrow 0$). Vale relembrar que, nesse limite o tunelamento direto dos elétrons entre os terminais é dominante à aquele que se dá via QDs. No painel (a) dessa mesma figura, o fio de Kitaev é removido e, como consequência, observa-se a mesma característica especular encontrada na Fig. 3.1(a), mas com um regime reverso de interferência, ou seja, as regiões de cor laranja apresentam agora cor vermelha. Essa troca mostra que as regiões

perfeitamente isolantes agora são condutoras.

Já na Fig. 3.2(b), na presença do fio de Kitaev semi-infinito, observa-se o padrão inverso ao que se encontra na Fig. 3.1(b), onde o efeito Fano antissimétrico ainda se faz presente, visto que também se constata a antissimetria em relação a linha tracejada. Portanto, a diferença entre os painéis (a) e (b) das Fig. 3.1 e Fig. 3.2 evidencia que a emergência de novas regiões condutoras e isolantes, com respeito as encontradas nos painéis (a) de ambas as figuras, pode ser considerada como assinaturas de um MBS isolado. Além do mais, a ZBA devido ao MBS 1 é também invertida.

É digno de nota que as diagonais remanescentes nas Fig. 3.1(b) e Fig. 3.2(b) devem-se a presença do QD 2, que embora desacoplado do fio de Kitaev, “sente” o MBS 1, como pode ser visto na Eq. (2.38), onde nota-se a presença da auto-energia $\Sigma_{\text{MBS1}} = \lambda^2 K(1 + \lambda^2 \tilde{K})$. Como consequência disso, constata-se um pequeno desvio nas inclinações dessas diagonais, em relação as observadas nas Fig. 3.1(a) e Fig. 3.2(a), onde $\Sigma_{\text{MBS1}} = 0$.

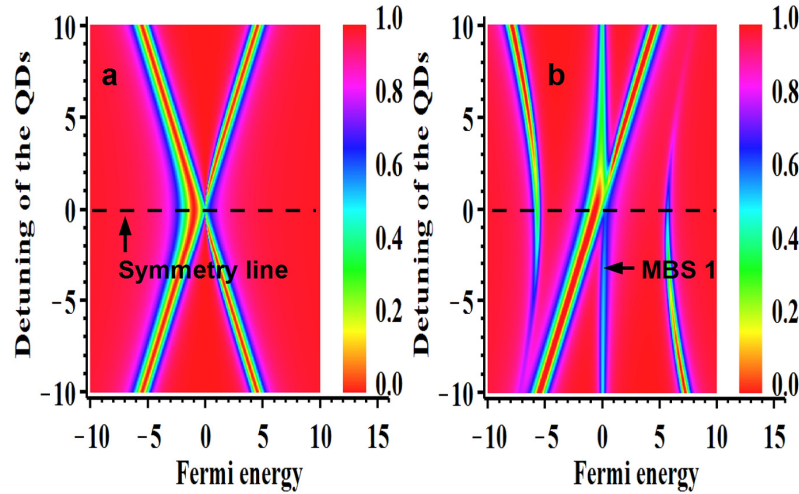


Figura 3.2: [35] Gráfico de densidade da transmitância [Eq. (2.21)] em função da diferença simétrica $\Delta\varepsilon$ para os QDs e da energia de Fermi ε em unidades de Γ , para o regime oposto de Fano $x = 1$ ($q_b \rightarrow 0$): a estrutura central em $\varepsilon = 0$ fornece a ZBA reversa, devido ao MBS 1. Nos painéis (a) e (b) as regiões em vermelho denotam o comportamento de um condutor perfeito, ao contrário do que foi constatado na Fig. 3.1.

Na Fig. 3.3, são evidenciados os resultados para ambos os limites Fano ($x = 0$ e $x = 1$), considerando o caso em que RF com modo de energia zero está ligado ao interferômetro, por meio de um acoplamento direto com o QD 1. Como se pode verificar, a forma como a simetria é quebrada é diferente daquela apresentada quando se considera o acoplamento

com o fio de Kitaev. Em outras palavras, os padrões de quebra de simetria das Fig. 3.1(b) e Fig. 3.2(b) não correspondem aos observados nas Fig. 3.3(a) e (b), respectivamente. Consequentemente, essa diferença mostra que os padrões constatados nas Fig. 3.1(b) e Fig. 3.2(b) constituem assinaturas robustas, devido ao MBS isolado. No que diz respeito as diagonais relacionadas ao QD 2, para o caso do RF a mudança nas inclinações é significativamente menor do que aquela apresentada para o caso do MBS 1. Isso ocorre porque na situação de RF, a auto-energia Σ_{RF} é proporcional somente à λ^2 .

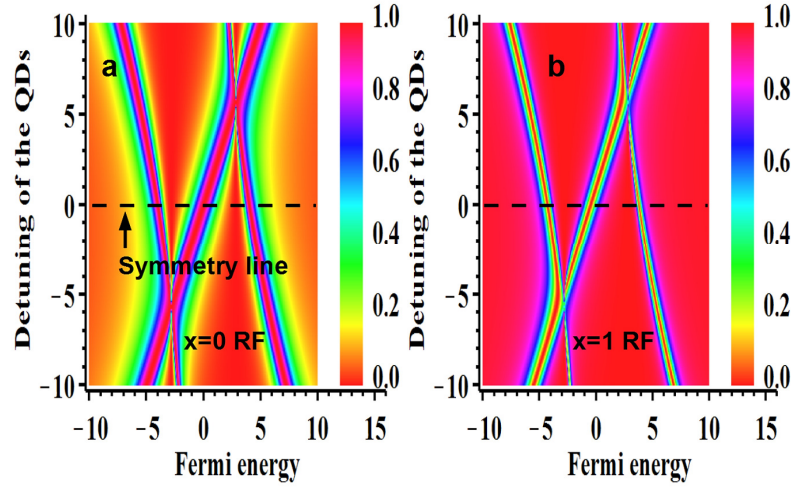


Figura 3.3: [35] Gráfico de densidade da transmitância [Eq. (2.21)] em função da diferença simétrica $\Delta\varepsilon$ para os QDs e da energia de Fermi ε em unidades de Γ , para o caso em que se considera um RF com modo de energia zero acoplado ao interferômetro em regimes opostos de Fano: (a) $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$) e (b) $x = 1$ ($q_b = 0$).

Na Fig. Fig. 3.4, apresenta-se a transmitância para o caso particular em que os terminais estão em ressonância com o MBS 1, considerando o acoplamento fraco entre os mesmos ($x = 0$, $q_b \rightarrow \infty$). Dois comprimentos de fio distintos são analisados: (i) o fio de Kitaev é semi-infinito e (ii) o caso finito. Para a primeira configuração, com $\varepsilon_M = 10^{-7}$, pode-se notar (curva em vermelho) que a transmitância é aproximadamente meio quando $|\Delta\varepsilon| \rightarrow \infty$, enquanto evolui para uma unidade no limite em que $|\Delta\varepsilon| \rightarrow 0$.

Constata-se que o valor unitário da transmitância, ou seja, seu valor máximo, ocorre para o caso em que os QDs estão em ressonância com o MBS 1 ($\Delta\varepsilon = 0$). Nessa condição, os dois QDs e o MBS 1 permitem um tunelamento ressonante perfeito através do nível de Fermi dos terminais. Já no caso em que se está distante de $\Delta\varepsilon = 0$, a transmitância apresenta o valor de meia unidade. Isso deve-se a presença de um MBS isolado, que pode

ser descrito como um estado de meio elétron (veja a semi-esfera no lado esquerdo do fio de Kitaev da Fig. 1.4) e esta é a única parte do sistema que está em ressonância com o nível de Fermi dos terminais. Para o caso em que $0 < |\Delta\varepsilon| < \infty$, o tunelamento ressonante devido aos QDs não é perfeito. Portanto, a transmitância varia entre $1/2 < \mathcal{T} < 1$.

No caso (ii), em que se considera o fio finito, observa-se uma flutuação unitária da transmitância em função de $\Delta\varepsilon$, diferente do que foi constatado no sistema semi-infinito. Isso pode ser percebido nas curvas azul e verde, para $\varepsilon_M = 10^{-3}$ e $\varepsilon_M = 10^{-2}$, respectivamente. Em ambas, averigua-se que a transmitância atinge o seu valor máximo em $\Delta\varepsilon = 0$, mas desaparece quando $|\Delta\varepsilon|$ é aumentado.

Essa variação no valor máximo da transmitância tem a seguinte origem física: quando o fio é finito, o MBS 2 (veja a semi-esfera no lado direito do fio de Kitaev da Fig. 1.4) combina-se com o MBS 1, formando assim um estado de férmion regular delocalizado η , como descrito pela Eq. (2.28). Como o parâmetro $\varepsilon_M \sim e^{-L/\xi}$, o *overlap* entre os MBSs será maior quanto menor o comprimento do fio L . Além do mais, os perfis de transmitância em função de $\Delta\varepsilon$ apresentam larguras mais nítidas (note que a linha em azul possui largura mais nítida que a linha em verde).

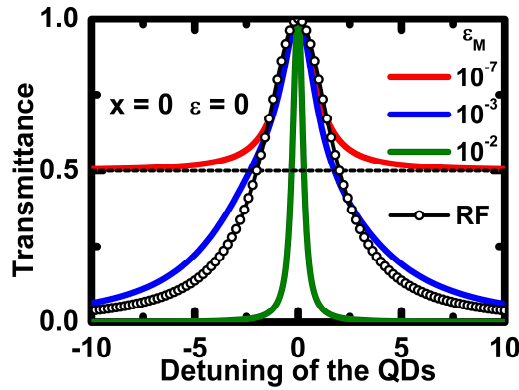


Figura 3.4: [35] Transmitância em função da diferença simétrica $\Delta\varepsilon$, com a energia de Fermi $\varepsilon = 0$, em unidades de Γ , dentro do regime de Fano $x = 0$, considerando comprimentos L distintos do fio de Kitaev, o qual está relacionado com parâmetro de sobreposição de funções de onda (*overlap*) $\varepsilon_M \sim e^{-L/\xi}$. Considera-se também o caso de um RF com modo de energia zero.

Tanto no caso (i) quanto no caso (ii), o efeito Fano é simétrico, visto que se observa uma simetria de espelho, em relação à $\Delta\varepsilon = 0$, na Fig. 3.4. Na mesma figura, também

é mostrado o caso em que o interferômetro está hibridizado com um RF de modo zero, representado pela curva em círculos pretos. Nota-se que a flutuação da transmitância ainda permanece em torno de uma unidade, como esperado, devido a natureza regular do estado eletrônico do QD. Entretanto, a largura da ressonância difere dos casos (i) e (ii), descritos anteriormente, uma vez que agora se tem Σ_{RF} como auto-energia, a qual é independente do tamanho do fio, ao contrário do que acontece em Σ_{MBS1} .

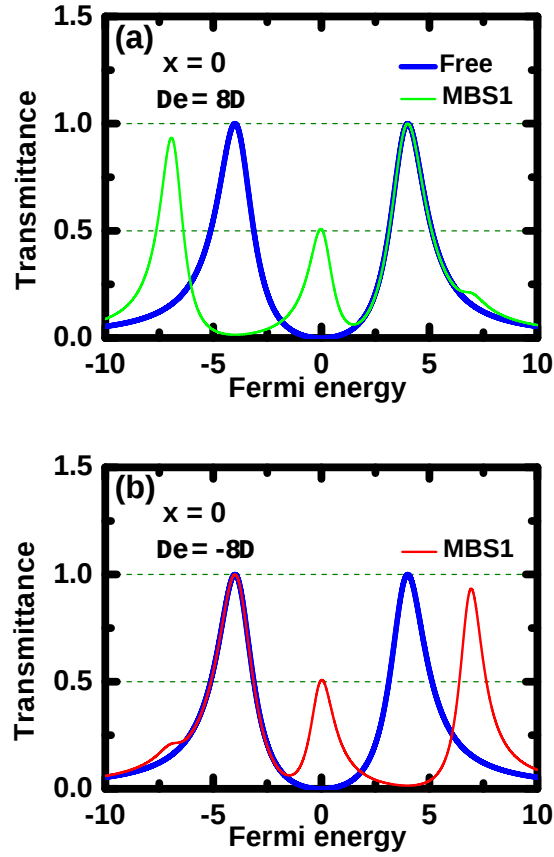


Figura 3.5: [35] Transmitância determinada pela [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi ε , em unidades de Γ , no regime Fano $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$), para o dispositivo proposto na Fig. 1.4, com $\varepsilon_M = 10^{-7}$. No painel (a), $\Delta\varepsilon = 8\Gamma$, a curva em verde é para a situação em que o MBS 1 está presente, enquanto a curva em azul descreve o caso do interferômetro livre. O painel (b) descreve a diferença simétrica de energia inversa, $\Delta\varepsilon = -8\Gamma$, onde apenas os picos satélites dos QDs para o caso livre (curva azul) e a ZBA (curva vermelha) permanecem nas mesmas posições com respeito ao que é encontrado no painel (a). Em ambos os painéis, o pico Majorana (ZBA) emerge, caracterizado por uma amplitude de aproximadamente $1/2$. Essa estrutura é robusta perante a inversão de energias dos dots, em contraste com os picos satélites dos mesmos, quando o fio de Kitaev é desconectado do interferômetro.

Na Fig. 3.5, averigua-se os perfis de transmitância em função da energia de Fermi, com

diferenças simétricas de energia dos QDs fixas, para o caso do limite Fano $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$), nas situações de presença e ausência do fio de Kitaev semi-infinito ($\varepsilon_M = 10^{-7}$). Com esse intuito, consideram-se duas situações: (a) $\Delta\varepsilon > 0$ e (b) $\Delta\varepsilon < 0$. As peculiaridades da primeira situação são apresentadas na Fig. 3.5(a), onde pode-se constatar dois picos satélites, tanto na linha em azul como na em verde, os quais são consequência do valor da diferença simétrica escolhida, $\Delta\varepsilon = 8\Gamma$, para os QDs. Nota-se que, para o caso em que se considera a hibridização com o MBS 1 (curva verde), a diferença simétrica de energias é maior que aquela observada no caso do interferômetro livre (curva azul). Isso deve-se à renormalização do nível do QD 1, $\varepsilon_1 = -4\Gamma$, hibridizado com o fio de Kitaev, enquanto o QD 2, com $\varepsilon_2 = 4\Gamma$, encontra-se desacoplado do mesmo, como esquematizado na Fig. 1.4. Na Fig. 3.5(b), onde $\Delta\varepsilon = -8\Gamma$, as posições dos citados picos satélites na transmitância, para os casos do interferômetro livre (curva azul) e acoplado ao MBS 1 (curva vermelha) ainda se fazem presentes, da mesma forma que foram constatados no caso (a). Por outro lado, os picos satélites apresentados para o caso em que o MBS 1 está presente não dizem respeito a nenhum resultado relacionado à característica de quebra de simetria, previamente discutida para o sistema de funções de Green. Assim, ressalta-se que a ZBA é, portanto, imune a inversão das energias dos QDs, revelando a robustez do MBS 1, sendo caracterizado por uma transmitância de amplitude próxima à $1/2$.

Na Fig. 3.6, são apresentados os padrões de transmitância para o regime Fano $x = 1$ ($q_b = 0$), contrastando ao da Fig. 3.5. Como pode ser visto, as ressonâncias presentes nas Fig. 3.5(a) e (b) são substituídas por anti-ressonâncias nas Fig. 3.6(a) e (b), respectivas. Dessa forma, a ZBA é agora representada por uma curva do tipo “poço”, que varia em torno de $1/2$, dependendo do sinal de $\Delta\varepsilon$. Uma discussão detalhada desse mecanismo de flutuação é feita na Ref. 16. Essa instabilidade da assinatura Majorana, i.e., a flutuação na amplitude da ZBA pode ser removida com o descarte do QD 2, como mostrado na Fig. 3.7, com $\varepsilon_M = 10^{-7}$, onde pode-se verificar que a anti-ressonância é estável em $\mathcal{T} = 1/2$, tanto para $\varepsilon_1 = -4\Gamma$ quanto para $\varepsilon_1 = 4\Gamma$. A dependência dessa assinatura Majorana com a energia para um único QD também ocorre para o limite de Fano $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$). Tal dependência é devidamente tratada na Ref. 15.

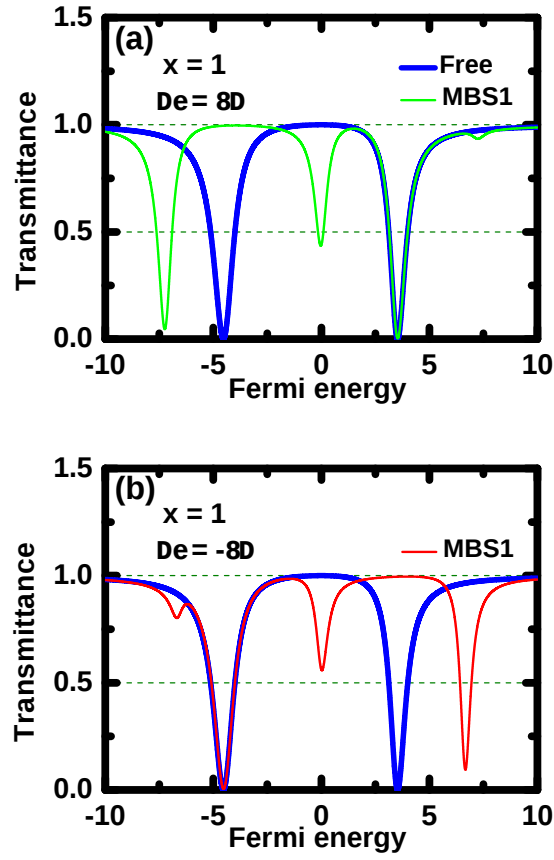


Figura 3.6: [35]Transmitância determinada pela [Eq.(2.21)], em função da energia de Fermi ε , em unidades de Γ , no regime Fano $x = 1$ ($q_b = 0$), com $\varepsilon_M = 10^{-7}$. As situações descritas em (a) e (b) representam os casos contrários àqueles mostrados nos painéis correspondentes aos da Fig. 3.5.

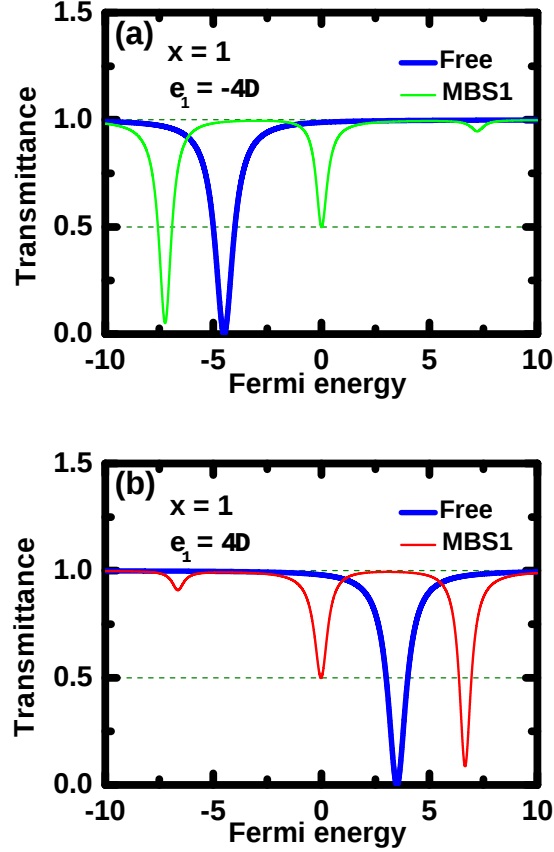


Figura 3.7: [35] Transmitância determinada pela [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi ε , em unidades de Γ , no regime Fano $x = 1$ ($q_b = 0$), para a situação em que se desconsidera o QD 2, no esquema da Fig. 1.4, com $\varepsilon_M = 10^{-7}$. (a), $\varepsilon_1 = -4\Gamma$, representa a situação em que o MBS 1 está presente, enquanto a curva em azul corresponde ao caso em que o interferômetro está livre. Já o caso descrito em (b) mostra a situação de diferença simétrica de energia inversa, i.e., $\Delta\varepsilon = 4\Gamma$, onde a anti-ressonância satélite do QD 1 para o caso do interferômetro livre aparece a cima do nível de Fermi dos terminais, como esperado, e a ZBA, representada pela curva em vermelho se mantém, como averiguado em (a). Portanto, em ambos os casos, a anti-ressonância Majorana (ZBA) surge, caracterizada por uma amplitude de $1/2$.

Ademais, de acordo com a Fig. 3.7, o caso de um único QD não permite a manifestação da quebra de simetria característica do sistema de funções de Green, que só ocorre para o sistema de dois QDs, como apresentado elucidativamente neste trabalho. Dito isso, somente o sistema com um par de QDs permite explorar como a já mencionada quebra de simetria ocorre em distintas situações, nomeadamente para os caso em que se considera o interferômetro livre, lateralmente acoplado com um férmion regular ou com um fio de Kitaev na fase topológica. Cada um dos casos quebra a simetria de uma maneira particular e, são justamente essas diferenças que permitem identificar a presença de um

Majorana isolado no sistema. Aos olhos dessa nova proposta, a assinatura Majorana não fica restrita somente a vizinhança da ZBA, devido a natureza de modo zero de energia para tal excitação, mas se espalha ao longo de todo espaço gerado por ε e $\Delta\varepsilon$, como apresentado nos gráficos de densidade das Fig. 3.1 e Fig. 3.2(b). Já as situações descritas em (a) das citadas figuras, bem como a mostrada na Fig. 3.3 não apresentam assinaturas que apontam a presença de Majoranas, devido a forma distinta de se quebrar a propriedade de simetria, diferente daquela consequente dos MBSs.

3.2 Caso interagente

Segue abaixo a discussão relacionada aos efeitos da interação de Coulomb entre os QDs na assinatura Majorana convencional, ou seja, na ZBA. Toda a análise feita a partir daqui leva em conta a situação em que se considera o fio muito longo e portanto, não há *overlap* entre as funções de onda dos MBSs ($\varepsilon_M = 0$). Os perfis de transmitância [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi dos terminais metálicos podem ser vistos na Fig. 3.8, para o caso particular em que os níveis de energia dos QDs encontram-se em ressonância ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -8\Gamma$). As Fig. 3.8(a), (b) e (c) mostram a situação de regime de interferência Fano $q_b \rightarrow \infty$ ($x = 0$), na qual os elétrons itinerantes passam exclusivamente pelos QDs, enquanto as Fig. 3.8(c), (d) e (e) evidenciam o regime oposto, no qual os elétrons passam preferencialmente através dos terminais metálicos ($q_b = 0$, $x = 1$). Na Fig. 3.8(a), o fio de Kitaev encontra-se desacoplado dos QDs não interagentes ($U = 0$, $\lambda = 0$), situação que leva a uma ressonância centrada nos níveis de energia dos QDs. Para o caso interagente ($U = 16\Gamma$), ainda sem a presença do fio, a transmitância é caracterizada pelas denominadas bandas ou picos de Hubbard, representados por dois picos centrados em ε_j e $\varepsilon_j + U$, respectivamente, uma vez que se considera o ponto de simetria partícula-buraco ($2\varepsilon_j + U = 0$), também conhecido como regime de Anderson simétrico, para o Hamiltoniano do sistema. A Fig. 3.8(c) evidencia o caso em que o fio é fortemente acoplado ao interferômetro com os QDs interagentes ($\lambda = 80\Gamma$ e $U = 16\Gamma$). Verifica-se então, o surgimento da ZBA com amplitude de 0.5, mostrando que o MBS 1 vazou para o QD 1 [15]. Pode-se visualizar também os dois picos de Hubbard, que estão

levemente mais estreitos se comparados aos do caso anterior, devido a presença do fio no dispositivo. Para o regime de Fano oposto [Fig. 3.8(c), (d) e (e)], pode-se visualizar o mesmo comportamento constatado nas situações à esquerda, mas com picos substituídos por anti-ressonâncias, o que está de acordo com a teoria padrão de interferência Fano [33].

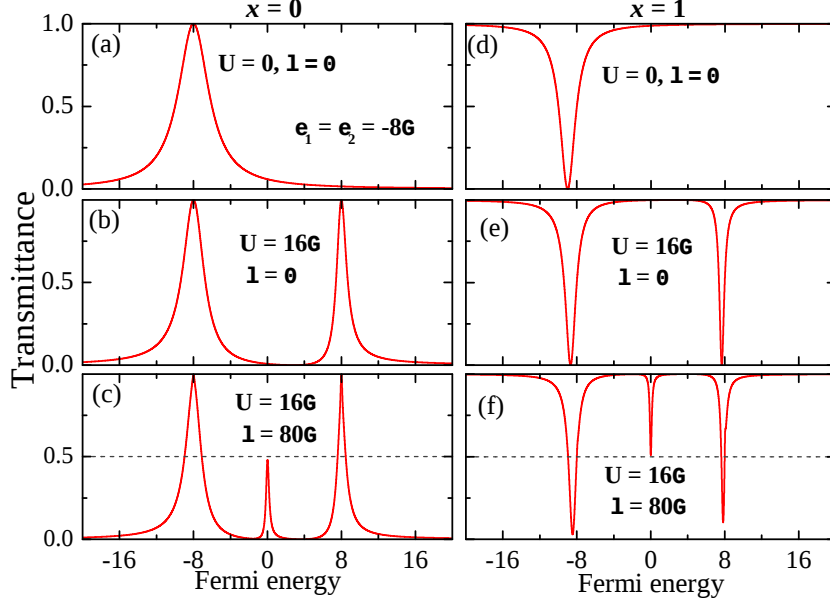


Figura 3.8: [36] Transmitância [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi dos terminais metálicos para os dois regimes de Fano distintos. Os casos a esquerda [(a), (b) e (c)] mostram o regime em que o transporte eletrônico ocorre exclusivamente pelos QDs ($x = 0$, $q_b \rightarrow \infty$), enquanto as situações a direita evidenciam o regime de Fano oposto, no qual o transporte eletrônico dá-se preferencialmente através dos terminais metálicos ($x = 1$, $q_b = 0$).

Na Fig. 3.9, analisa-se especificamente o efeito da repulsão de Coulomb na ZBA, para ambos os regimes de Fano. Os QDs ainda encontram-se na condição de ressonância e o fio está fortemente acoplado ao QD 1. A linha azul pontilhada descreve o caso não interagente ($U = 0$), onde pode-se verificar a ZBA apresenta uma largura considerável para os dois regimes Fano ($x = 0$ e $x = 1$). Nota-se também uma pequena diferença entre amplitudes quando os citados regimes são comparados: para o caso em que $x = 0$ [Fig. 3.9(a)], a amplitude é exatamente 0.5, enquanto que para $x = 1$ [Fig. 3.9(b)] a mesma apresenta um valor < 0.5 . Essa variação deve-se a presença do QD 2 e uma discussão mais detalhada desse ponto pode ser encontrada na Ref. [16]. Conforme se aumenta o valor da interação de Coulomb entre os QDs (linha preta tracejada para $U = 16\Gamma$ e linha vermelha para $U = 40\Gamma$), a ZBA torna-se mais estreita, além de apresentar uma flutuação

em torno da amplitude característica de 0.5. Essa notável mudança na largura da ZBA sugere que o tempo de vida do estado de Majorana no QD 1 aumenta devido aos efeitos de correlação eletrônica entre os QDs, uma vez que o tempo de vida de um dado estado é inversamente proporcional a largura da ressonância que o descreve [44].

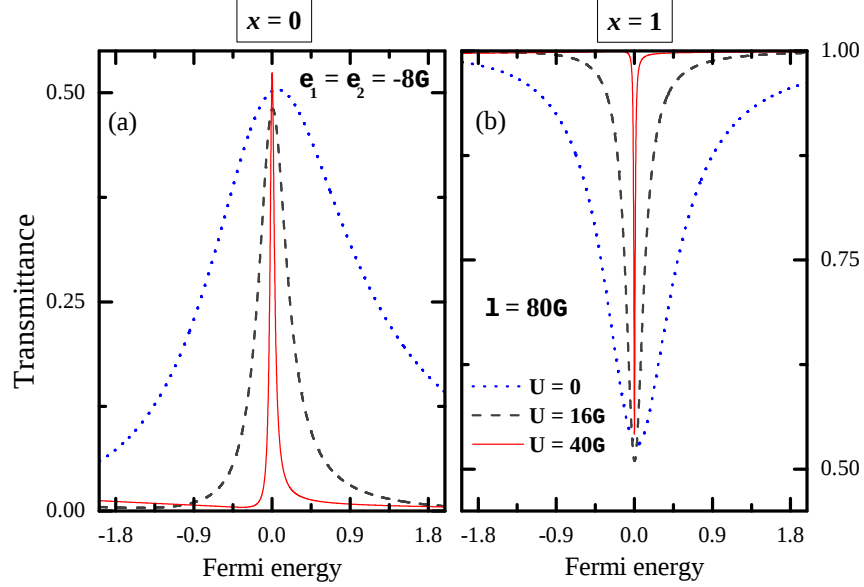


Figura 3.9: [36] Perfis de transmitância [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi dos terminais metálicos mostram o efeito da interação de Coulomb entre os QDs na assinatura Majorana para os distintos regimes de Fano: (a) $x = 0$, $q_b \rightarrow \infty$ e (b) $x = 1$, $q_b = 0$.

Na Fig. 3.10 podem ser visualizados perfis de transmitância [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi dos terminais metálicos para o caso interagente, na situação onde os níveis de energias dos QDs estão fora de ressonância ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$), levando assim à uma diferença de energia $\Delta\varepsilon$ finita. A Fig. 3.10(a) mostra o comportamento da transmitância para o regime Fano em que $x = 0$. O pico central (ZBA) é estreito e possui amplitude ligeiramente maior que 0.5 quando $\varepsilon_1 = -4\Gamma$ e $\varepsilon_2 = -8\Gamma$ (linha verde). Quando se faz uma inversão nos valores de tais níveis, ou seja, $\varepsilon_1 = -8\Gamma$ e $\varepsilon_2 = -4\Gamma$, a largura da ZBA aumenta de forma significativa e exibe uma amplitude de 0.5 (linha vermelha tracejada). Um comportamento similar é constatado para o regime de Fano oposto [Fig. 3.10(b)], mas assim como nos resultados anteriores, os picos são substituídos por anti-ressonâncias. Essas flutuações de largura e amplitude na ZBA não ocorrem para o caso não interagente, como pode ser visto nos *insets* de ambas as situações, além das já mostradas na seção

anterior. Sendo assim, o ajuste dos níveis de energia dos QDs também influencia de forma relevante o tempo de vida do estado de Majorana no QD 1. Esse comportamento singular sugere que, experimentalmente, a assinatura Majorana depende da posição relativa dos níveis energéticos dos QDs que compõem o dispositivo proposto.

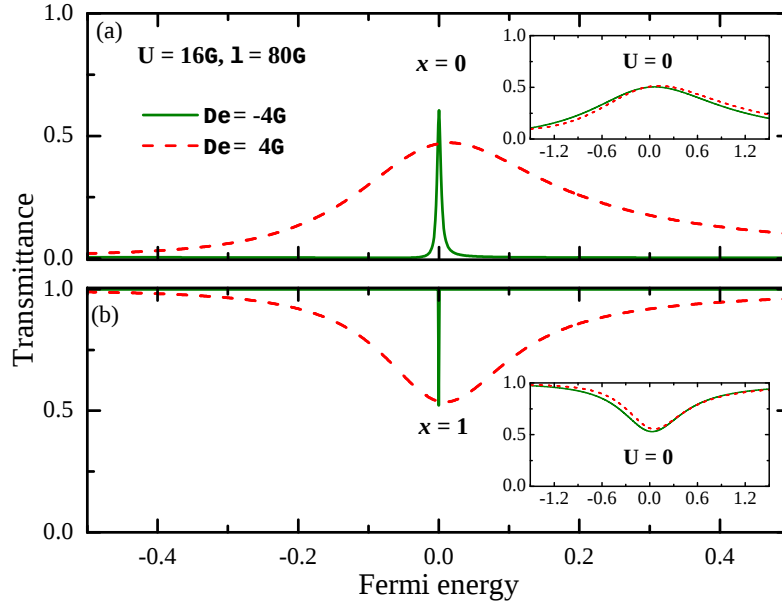


Figura 3.10: [36] Transmitância [Eq. (2.21)] em função da energia de Fermi dos terminais metálicos na situação em que os níveis energéticos dos QDs estão fora de ressonância, acarretando em uma diferença de energia finita $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. A linha verde representa a situação em que $\varepsilon_1 = -4\Gamma$ e $\varepsilon_2 = -8\Gamma$, enquanto que a linha em vermelho pontilhado descreve o caso onde $\varepsilon_1 = -8\Gamma$ e $\varepsilon_2 = -4\Gamma$. Os casos (a) e (b) representam o regime Fano $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$) e $x = 1$ ($q_b = 0$), respectivamente, com os correspondentes *insets* para a situações não interagentes.

Capítulo 4

Conclusões

Em síntese, explorou-se teoricamente um dispositivo formado por um fio de Kitaev na fase topológica, acoplado a um interferômetro *spinless* do tipo Aharonov-Bohm, com dois QDs, nas seguintes condições distintas: primeiro desconsiderou-se a interação de Coulomb entre os QDs (caso não interagente) e depois a mesma foi levada em conta (caso interagente). A análise dos resultados para a situação não interagente revela que as funções de Green dos QDs apresentam antissimetria perante a permutação de índices que representam os parâmetros de tais QDs. Propôs-se que essa peculiar característica pode ser verificada experimentalmente por meio de medidas de condutância de voltagem zero em função da energia de Fermi dos terminais metálicos e da diferença simétrica de energias dos QDs. Ainda nesse caso, também foi constatada uma forte dependência da transmitância com regimes de interferência Fano distintos, onde regiões isolantes e condutoras emergem como assinaturas de excitação de um único férmion de Majorana. Além do mais, pode-se constatar que a simetria da interferência Fano é recuperada quando o tunelamento eletrônico dá-se exclusivamente através dos QDs, com os terminais metálicos em ressonância com o modo zero de Majorana, resultando numa flutuação da transmitância, dada por meia ou uma unidade, para os casos em que o fio de Kitaev é semi-infinito ou finito, respectivamente.

Já para o caso interagente, verificou-se que a ZBA, devido ao MBS, manifesta-se na transmitância, mesmo sob a presença da repulsão de Coulomb entre os QDs. Para o caso em que os mesmos estão em ressonância, constatou-se que a largura da assinatura

Majorana (ZBA) diminui com o aumento da taxa entre a intensidade da repulsão de Coulomb e o acoplamento QD-fio (U/λ), apresentando também uma ligeira flutuação em torno do valor de amplitude característico de 0.5. O estreitamento da ZBA também ocorreu quando foram trocados os valores dos níveis energéticos dos QDs. Tais aspectos sugerem que a citada taxa U/λ , bem como a posição relativa dos níveis de energia dos QDs afetam de forma relevante o tempo de vida do estado de Majorana no QD próximo ao fio de Kitaev. Todos os resultados aqui obtidos podem ser úteis para guiar experimentos que têm o intuito de provar a existência das quasipartículas de Majorana em Física da Matéria Condensada.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Alicea, Rep. Prog. Phys. **75**, 076501, (2012).
- [2] S. R. Elliott and M. Franz, Rev. Mod. Phys. **87**, 137 (2015).
- [3] K. Flensberg, Phys. Rev. Lett. **106**, 090503 (2012).
- [4] M. Leijnse and K. Flensberg, Phys. Rev. Lett. **107**, 210502 (2012).
- [5] A.Y. Kitaev, Phys. Usp. **44**, 131 (2001).
- [6] R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **105**, 077001 (2010).
- [7] Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **105**, 177002 (2010).
- [8] A.A. Zyuzin, D. Rainis, J. Klinovaja, and D. Loss, Phys. Rev. Lett. **111**, 056802 (2013).
- [9] D. Rainis, J. Klinovaja, L. Trifunovic, and D. Loss, Phys. Rev. B **87**, 024515 (2013).
- [10] A. Zazunov, P. Sodano, and R. Egger, New J. Phys **15**, 035033 (2013).
- [11] Y. Cao, P. Wang, G. Xiong, M. Gong, and X.-Q. Li, Phys. Rev. B **86**, 115311 (2012).
- [12] Y.-X. Li and Z. M. Bai, J. Appl. Phys. **114**, 033703 (2013).
- [13] N. Wang, S. Lv, and Y. Li, J. Appl. Phys. **115**, 083706 (2014).
- [14] D. E. Liu and H. U. Baranger, Phys. Rev. B **84**, 201308(R) (2011).
- [15] E. Vernek, P. H. Penteado, A. C. Seridonio, and J. C. Egues, Phys. Rev. B **89**, 165314 (2014).

- [16] A. C. Seridonio, E. C. Siqueira, F. A. Dessotti, R. S. Machado, and M. Yoshida, J. Appl. Phys. **115**, 063706 (2014).
- [17] A. Ueda and T. Yokoyama, Phys. Rev. B **90**, 081405(R) (2014).
- [18] C.-H. Lin, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **86**, 224511 (2012).
- [19] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, Science **336**, 1003 (2012).
- [20] A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, and H. Shtrikman, Nat. Phys. **8**, 887 (2012).
- [21] E. J. H. Lee, X. Jiang, M. Houzet, R. Aguado, C. M. Lieber, and S. De Franceschi, Nat. Nanotechnol. **9**, 79 (2014).
- [22] E. J. H. Lee, X. Jiang, R. Aguado, G. Katsaros, C. M. Lieber, and S. De Franceschi, Phys. Rev. Lett. **109**, 186802 (2012).
- [23] A. F. Otte, M. Ternes, K. V. Bergmann, S. Loth, H. Brune, C. P. Lutz, C. F. Hirjibehedin, and A. J. Heinrich, Nature Physics **4**, 847 (2008).
- [24] V. Madhavan, W. Chen, T. Jamneala, and F. Crommie, Phys. Rev. B **64**, 165412 (2001).
- [25] N. Knorr, M. A. Schneider, L. Diekhöner, P. Wahl, and K. Kern, Phys. Rev. Lett. **88**, 096804 (2002).
- [26] C.Y.Lin, A. H. C. Neto, and B. A. Jones, Phys. Rev. Lett. **97**, 156102 (2007).
- [27] M. Ternes, A. J. Heinrich, and W. D. Schneider, J. Phys.: Condens. Matter **21**, 053001 (2009).
- [28] S. N.-Perge, I. K. Drozdov, B. A. Bernevig, and Ali Yazdani, Phys. Rev. B **88**, 020407(R) (2013).
- [29] A. Heimes, P. Kotetes, and G. Schön, Phys. Rev. B **90**, 060507(R) (2014).

- [30] J. Li, H. Chen, I. K. Drozdov, A. Yazdani, B. A. Bernevig, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **90**, 235433 (2014).
- [31] S. N.-Perge, I. K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A. H. MacDonald, B. A. Bernevig, and A. Yazdani, Science **346**, 602 (2014).
- [32] E. Dumitrescu, B. Roberts, S. Tewari, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **91**, 094505 (2015).
- [33] U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
- [34] A. E. Miroshnichenko, S. Flach, and Y. S. Kivshar, Rev. Mod. Phys. **82**, 2257 (2010).
- [35] F. A. Dessotti, L. S. Ricco, M. de Souza, F. M. Souza, and A. C. Seridonio, J. App. Phys. **116**, 173701 (2014).
- [36] L. S. Ricco, Y. Marques, F. A. Dessotti, M. de Souza and A. C. Seridonio, Phys. E, **78** (2016).
- [37] J. Hubbard, Proc. R. Soc. London A **276**, 238 (1963).
- [38] Q. F. Sun and H. Guo, Phys. Rev. B **66**, 155308 (2002).
- [39] D. A. Ruiz-Tijerina, E. Vernek, L. G. G. V. Dias da Silva and J. C. Egues, Phys. Rev. B, **91**, 115435 (2015).
- [40] A. W. Holleitner, C. R. Decker, H. Qin, K. Eberl, and R. H. Blick, Phys. Rev. Lett. **87**, 256802 (2001).
- [41] T. Hatano, T. Kubo, Y. Tokura, S. Amaha, S. Teraoka, and S. Tarucha, Phys. Rev. Lett. **106**, 076801 (2011).
- [42] H. Haug and A. P. Jauho, Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors, Solid-State Sciences Vol. 123 (Springer, New York, 1996).
- [43] W. Hofstetter, J. K. König, and H. Schoeller, Phys. Rev. Lett. **87**, 156803 (2001).

- [44] P. Phillips, Advanced Solid State Physics, 2nd Edition (Cambridge University Press, 2012).

Apêndice A

O método da equação de movimento

A função de Green retardada no espaço do tempo, para os operadores dos QDs, é definida da seguinte maneira

$$\mathcal{G}_{d_j d_l} = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \quad (\text{A.1})$$

onde $\theta(t)$ é a função degrau e ϱ_e representa a matriz densidade, relacionada ao Hamiltoniano da Eq. (2.6). No entanto, para se obter a transmitância do sistema, dada pela Eq. (2.21), é necessário o cálculo da função de Green retardada no espaço das energias ε . Por isso, aplica-se um método conhecido como equação de movimento (EOM - *equation of motion*) [42], que basicamente consiste em evoluir $\mathcal{G}_{d_j d_l}$ no tempo e, por meio de uma transformação de Fourier, obter a mesma no espaço das energias, ε . Os cálculos a seguir demonstram de forma instrutiva a aplicação do citado método:

Primeiro se evolui a Eq. (A.1) da seguinte forma :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{G}_{d_j d_l}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \delta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \\ &+ -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\partial_t d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$. Nota-se que é preciso evoluir o operador fermiônico d_j no tempo. Isso é feito usando a equação de Heisenberg:

$$\begin{aligned}
\partial_t d_j(t) &= -\frac{i}{\hbar} [d_j, \mathcal{H}_e] \\
&= \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \varepsilon_j d_j + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_k c_{ek} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) U d_j n_{\bar{j}} \\
&\quad - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \eta - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \eta^\dagger,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

em que os resultados obtidos vêm das seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
\sum_l \varepsilon_l [d_j, d_l^\dagger d_l] &= \sum_l \varepsilon_l (d_j d_l^\dagger d_l - d_l^\dagger d_l d_j) = \sum_l \varepsilon_l (d_j d_l^\dagger d_l + d_l^\dagger d_j d_l) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (d_j d_l^\dagger d_l + (\delta_{jl} - d_j d_l^\dagger) d_l) \\
&= \sum_l \delta_{jl} \varepsilon_l d_l = \varepsilon_j d_j,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} V \sum_{kl} [d_j, c_{ek}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ek}] &= \sqrt{2} V \sum_{kl} [d_j, c_{ek}^\dagger d_l] + \sqrt{2} V \sum_{kl} [d_j, d_l^\dagger c_{ek}] \\
&= \sqrt{2} V \sum_{kl} (d_j c_{ek}^\dagger d_l - c_{ek}^\dagger d_l d_j) \\
&\quad + \sqrt{2} V \sum_{kl} (d_j d_l^\dagger c_{ek} - d_l^\dagger c_{ek} d_j) \\
&= \sqrt{2} V \sum_{kl} (d_j c_{ek}^\dagger d_l - d_j c_{ek}^\dagger d_l) \\
&\quad + \sqrt{2} V \sum_{kl} (d_j d_l^\dagger c_{ek} + d_l^\dagger d_j c_{ek}) \\
&= \sqrt{2} V \sum_{kl} (d_j d_l^\dagger c_{ek} + (\delta_{jl} - d_j d_l^\dagger) c_{ek}) \\
&= \sqrt{2} V \sum_{kl} (d_j d_l^\dagger c_{ek} + \delta_{jl} c_{ek} - d_j d_l^\dagger c_{ek}) \\
&= \sqrt{2} V \sum_{kl} \delta_{jl} c_{ek} = \sqrt{2} V \sum_k c_{ek},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
U[d_j, d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2] &= U(d_j d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 - d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 d_j) \\
&= U(d_j d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 + d_1^\dagger d_1 (\delta_{j2} - d_j d_2^\dagger) d_2) \\
&= U(d_j d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 + \delta_{j2} d_1^\dagger d_1 d_2 - d_1^\dagger d_1 d_j d_2^\dagger d_2) \\
&= U(d_j d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 + \delta_{j2} d_1^\dagger d_1 d_2 + (\delta_{j1} - d_j d_1^\dagger) d_1 d_2^\dagger d_2) \\
&= U(d_j d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 + \delta_{j2} d_1^\dagger d_1 d_2 + \delta_{j1} d_1 d_2^\dagger d_2 - d_j d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2) \\
&= U(\delta_{j2} d_1^\dagger d_1 d_2 + \delta_{j1} d_1 d_2^\dagger d_2) \stackrel{j=1}{=} U(\delta_{j2} d_1^\dagger d_1 d_2 + \delta_{j1} d_1 d_2^\dagger d_2) \\
&= U d_j n_{\bar{j}}, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\sqrt{2}}[d_j, (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger)] &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}[d_j, d_1 \eta^\dagger] + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}[d_j, \eta d_1^\dagger] \\
&= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j d_1 \eta^\dagger - d_1 \eta^\dagger d_j) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j \eta d_1^\dagger - \eta d_1^\dagger d_j) \\
&= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j d_1 \eta^\dagger - d_j d_1 \eta^\dagger) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(-\eta d_j d_1^\dagger - \eta d_1^\dagger d_j) \\
&= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(-\eta d_j d_1^\dagger - \eta(\delta_{j1} - d_j d_1^\dagger)) \\
&= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(-\eta d_j d_1^\dagger - \eta \delta_{j1} + \eta d_j d_1^\dagger) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \eta \tag{A.7}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\sqrt{2}}[d_j, (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger)] &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}[d_j, d_1 \eta] - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}[d_j, d_1^\dagger \eta^\dagger] \\
&= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j d_1 \eta - d_1 \eta d_j) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j d_1^\dagger \eta^\dagger - d_1^\dagger \eta^\dagger d_j) \\
&= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j d_1 \eta - d_j d_1 \eta) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j d_1^\dagger \eta^\dagger + d_1^\dagger d_j \eta^\dagger) \\
&= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j d_1^\dagger \eta^\dagger + (\delta_{j1} - d_j d_1^\dagger) \eta^\dagger) \\
&= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_j d_1^\dagger \eta^\dagger + \delta_{j1} \eta^\dagger - d_j d_1^\dagger \eta^\dagger) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \eta^\dagger. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado da Eq. (A.3) na Eq. (A.2), encontra-se que:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{G}_{d_j d_l}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \delta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \varepsilon_j \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\}, \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\sum_k c_{ek}(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) U \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \\
&- \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\eta(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \\
&- \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\eta^\dagger(t), d_l^\dagger(0)]_+\}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

onde são definidas novas funções de Green retardadas no domínio temporal, dadas por

$$\mathcal{G}_{f_e d_l}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\sum_k c_{ek}(t), d_l^\dagger(0)]_+\}, \tag{A.10}$$

$$\mathcal{G}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+\}, \tag{A.11}$$

$$\mathcal{G}_{\eta d_l}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\eta(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \tag{A.12}$$

e

$$\mathcal{G}_{\eta^\dagger d_l}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\eta^\dagger(t), d_l^\dagger(0)]_+\}, \tag{A.13}$$

com $f_e = \sum_k c_{ek}$. Consequentemente, a Eq. (A.9) transforma-se em:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{G}_{d_j d_l}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \delta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \varepsilon_j \mathcal{G}_{d_j d_l}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \mathcal{G}_{f_e d_l}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) U \mathcal{G}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}(t) \\
&- \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \mathcal{G}_{\eta d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \mathcal{G}_{\eta^\dagger d_l}(t). \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Para se obter a função de Green retardada no espaço das energias ε , aplica-se a transformação de Fourier na Eq. (A.14), ou seja:

$$\begin{aligned}
\int dt \partial_t \mathcal{G}_{d_j d_l}(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon + i0^+)t} &= -\frac{i}{\hbar} \int dt \delta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\} e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon + i0^+)t} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \varepsilon_j \int dt \mathcal{G}_{d_j d_l}(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon + i0^+)t} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2}V \int dt \mathcal{G}_{f_e d_j}(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon + i0^+)t} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) U \int dt \mathcal{G}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon + i0^+)t} \\
&- \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \int dt \mathcal{G}_{\eta d_l}(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon + i0^+)t} \\
&- \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \int dt \mathcal{G}_{\eta^\dagger d_l}(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon + i0^+)t}. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade $\tilde{\mathcal{G}}_{AB}(\varepsilon) \equiv \tilde{\mathcal{G}}_{AB} = \int dt \mathcal{G}_{AB}(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\varepsilon + i0^+)t}$, a Eq. (A.15) transforma-se em:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \sqrt{2}V \tilde{\mathcal{G}}_{f_e d_l} + U \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\
&- \delta_{j1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_l} - \delta_{j1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_l}. \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Pode-se notar na Eq. (A.16) que novas funções de Green retardadas surgem e, portanto é preciso aplicar o método da EOM novamente. Começando por $\tilde{\mathcal{G}}_{f_e d_j} = \sum_k \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek} d_j}$, que é definida no espaço t como:

$$\mathcal{G}_{c_{ek} d_l}(t) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[c_{ek}(t), d_j^\dagger(0)]_+\}. \tag{A.17}$$

Como feito anteriormente,

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{G}_{c_{ek} d_l}(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \delta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[c_{ek}(t), d_j^\dagger(0)]_+\} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\partial_t c_{ek}(t), d_j^\dagger(0)]_+\}. \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t c_{ek}(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)[c_{ek}, \mathcal{H}_e] = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_p \varepsilon_p [c_{ek}, c_{ep}^\dagger c_{ep}] + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) V_{BT} \sum_{pq} [c_{ek}, c_{ep}^\dagger c_{eq}] \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_{pl} [c_{ek}, c_{ep}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ep}],
\end{aligned} \tag{A.19}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\sum_p \varepsilon_p [c_{ek}, c_{ep}^\dagger c_{ep}] &= \sum_p \varepsilon_p (c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{ep} - c_{ep}^\dagger c_{ep} c_{ek}) = \sum_p \varepsilon_p (c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{ep} + c_{ep}^\dagger c_{ek} c_{ep}) \\
&= \sum_p \varepsilon_p (c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{ep} + (\delta_{kp} - c_{ek} c_{ep}^\dagger) c_{ep}) \\
&= \sum_p \varepsilon_p (c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{ep} + \delta_{kp} c_{ep} - c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{ep}) = \sum_p \varepsilon_p \delta_{kp} c_{ep} \\
&= \varepsilon_k c_{ek},
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{pq} [c_{ek}, c_{ep}^\dagger c_{eq}] &= \sum_{pq} (c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{eq} - c_{ep}^\dagger c_{eq} c_{ek}) = \sum_{pq} (c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{eq} + c_{ep}^\dagger c_{ek} c_{eq}) \\
&= \sum_{pq} (c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{eq} + (\delta_{kp} - c_{ek} c_{ep}^\dagger) c_{eq}) \\
&= \sum_{pq} (c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{eq} + \delta_{kp} c_{eq} - c_{ek} c_{ep}^\dagger c_{eq}) = \sum_{pq} \delta_{kp} c_{eq} \\
&= \sum_q c_{eq}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{pl} [c_{ek} c_{ep}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ep}] &= \sum_{pl} [c_{ek} c_{ep}^\dagger d_l] + \sum_{pl} [c_{ek} d_l^\dagger c_{ep}] \\
&= \sum_{pl} (c_{ek} c_{ep}^\dagger d_l - c_{ep}^\dagger d_l c_{ek}) + \sum_{pl} (c_{ek} d_l^\dagger c_{ep} - d_l^\dagger c_{ep} c_{ek}) \\
&= \sum_{pl} (c_{ek} c_{ep}^\dagger d_l + c_{ep}^\dagger c_{ek} d_l) + \sum_{pl} (d_l^\dagger c_{ep} c_{ek} - d_l^\dagger c_{ep} c_{ek}) \\
&= \sum_{pl} (c_{ek} c_{ep}^\dagger d_l + (\delta_{kp} - c_{ek} c_{ep}^\dagger) d_l) \\
&= \sum_{pl} (c_{ek} c_{ep}^\dagger d_l + \delta_{kp} d_l - c_{ek} c_{ep}^\dagger d_l) = \sum_l d_l.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Portanto,

$$\partial_t c_{ek}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \varepsilon_k c_{ek} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) V_{BT} \sum_q c_{eq} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_l d_l. \tag{A.23}$$

Com o resultado obtido na Eq. (A.23), a Eq. (A.17) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{c_{ek} d_j}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \delta(t) \text{Tr} \{ \varrho_e [c_{ek}(t), d_j^\dagger(0)]_+ \} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \varepsilon_k \mathcal{G}_{c_{ek} d_j}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) V_{BT} \sum_q \mathcal{G}_{c_{eq} d_j}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_l \mathcal{G}_{d_j d_l}(t).
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Aplica-se a transformação de Fourier na Eq. (A.24) da mesma forma que foi feito anteriormente. Assim, tem-se que

$$\sqrt{2} V \sum_k \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek} d_j} = \frac{2V^2 \sum_k \left(\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_k + i0^+} \right)}{[1 - V_{BT} \sum_k \left(\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_k + i0^+} \right)]} \left[\sum_l \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} \right]. \tag{A.25}$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
\sum_k \left(\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_k + i0^+} \right) &= \sum_k \frac{\varepsilon - \varepsilon_k - i0^+}{(\varepsilon - \varepsilon_k + i0^+)(\varepsilon - \varepsilon_k - i0^+)} \\
&= \sum_k \frac{\varepsilon - \varepsilon_k - i0^+}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon\varepsilon_k + \varepsilon_k^2 + (0^+)^2} \\
&= \sum_k \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{(\varepsilon - \varepsilon_k)^2 + (0^+)^2} - i \sum_k \frac{0^+}{(\varepsilon - \varepsilon_k)^2 + (0^+)^2} \\
&= \sum_k \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_k)} - i \sum_k \frac{0^+}{(\varepsilon - \varepsilon_k)^2} \\
&= \sum_k \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_k)} - i\pi \left[\frac{1}{\pi} \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) \right] \\
&= \sum_k \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_k)} - i\pi\rho_0 = \pi\rho_0(\bar{q} - i),
\end{aligned} \tag{A.26}$$

onde $\rho_0 = \frac{1}{\pi} \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k)$ é a densidade de estados dos terminais metálicos, $\delta(\varepsilon - \varepsilon_k) = \frac{0^+}{(\varepsilon - \varepsilon_k)^2 + (0^+)^2}$ e $\bar{q} = (\pi\rho_0)^{-1} \sum_k \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_k)}$ é o chamado parâmetro de Fano intrínseco. Utilizando o resultado da Eq. (A.26) a Eq. (A.25) transforma-se em:

$$\sqrt{2}V \sum_k \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}d_j} = \frac{2V^2\pi\rho_0(\bar{q} - i)}{[1 - V_{BT}\pi\rho_0(\bar{q} - i)]} \left[\sum_l \tilde{\mathcal{G}}_{d_jd_l} \right]. \tag{A.27}$$

No chamado limite de banda larga, $\bar{q} \rightarrow 0$ e portanto,

$$\sqrt{2}V \sum_k \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}d_j} = \frac{-i2V^2\pi\rho_0}{[1 + iV_{BT}\pi\rho_0]} \left[\sum_l \tilde{\mathcal{G}}_{d_jd_l} \right]. \tag{A.28}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{-i2V^2\pi\rho_0[1 - iV_{BT}\pi\rho_0]}{[1 + iV_{BT}\pi\rho_0][1 - iV_{BT}\pi\rho_0]} &= \frac{-i2V^2\pi\rho_0[1 - iV_{BT}\pi\rho_0]}{1 + (V_{BT}\pi\rho_0)^2} \\
&= \frac{-i\Gamma[1 - i\sqrt{x}]}{1 + x} = \frac{\Gamma[-i1 - \sqrt{x}]}{1 + x} \\
&= -\frac{(\sqrt{x} + i)}{1 + x} \Gamma \Rightarrow \\
\Sigma &= -\frac{(\sqrt{x} + i)}{1 + x} \Gamma,
\end{aligned} \tag{A.29}$$

com $x = (V_{BT}\pi\rho_0)^2$ e $\Gamma = 2V^2\pi\rho_0$, denominado parâmetro de Anderson. Assim,

$$\tilde{\mathcal{G}}_{f_e d_j} = \sum_k \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek} d_j} = \Sigma [\sum_l \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}]. \quad (\text{A.30})$$

Utilizando esse resultado [Eq. (A.30)] na Eq. (A.16), tem-se que

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma [\sum_{\tilde{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\tilde{l}}}] + U \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\ &- \delta_{j1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_l} - \delta_{j1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_l} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

No mesmo espírito, é necessário aplicar a EOM novamente para encontrar as expressões da $\tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_l}$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_l}$. Feito isso, descobre-se que a

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_l} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}(\varepsilon - \varepsilon_M + i0^+)} [\tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l}] \quad (\text{A.32})$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_l} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon_M + i0^+)} [\tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l}], \quad (\text{A.33})$$

onde, por meio do mesmo procedimento tem-se que

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_l} = -U \frac{\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}}{(\varepsilon + \varepsilon_1 + \tilde{\Sigma})} + \frac{\lambda \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_l}}{\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon_1 + \tilde{\Sigma})} + \frac{\lambda \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_l}}{\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon_1 + \tilde{\Sigma})}, \quad (\text{A.34})$$

com $\tilde{\Sigma}$ sendo o complexo conjugado de Σ . Por meio da substituição das Eq. (A.32) e Eq. (A.33) na Eq. (A.34), obtém-se a seguinte relação:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_l} = -U \frac{\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_j}}{(\varepsilon + \varepsilon_1 + \tilde{\Sigma} - \lambda^2 K)} - \lambda^2 \tilde{K} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l}, \quad (\text{A.35})$$

onde as definições de K e $\tilde{K}$ podem ser vistas na Sec. 2.3.

Agora, se faz necessária alguma álgebra para obter a relação geral, expressa na Eq. (2.30). Começa-se substituindo as Eq. (A.32) e Eq. (A.33) na Eq. (A.31):

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma \left[\sum_{l \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} \right] + U \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\
&- \delta_{j1} \frac{\lambda^2}{2(\varepsilon - \varepsilon_M + i0^+)} [\tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_j} - \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_j}] \\
&- \delta_{j1} \frac{\lambda^2}{2(\varepsilon + \varepsilon_M + i0^+)} [\tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_j} - \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_j}] \Rightarrow \quad (\text{A.36})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma \left[\sum_{l \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} \right] + U \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\
&- \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_M + i0^+)} + \frac{1}{(\varepsilon + \varepsilon_M + i0^+)} \right] \lambda^2 \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_j} \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_M + i0^+)} + \frac{1}{(\varepsilon + \varepsilon_M + i0^+)} \right] \lambda^2 \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_j} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma \left[\sum_{\bar{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{l}}} \right] + U \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\
&- K \lambda^2 \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_l} + K \lambda^2 \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l}. \quad (\text{A.37})
\end{aligned}$$

Então, substitui-se a Eq. (A.35) na Eq. (A.37):

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma \left[\sum_{\bar{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{l}}} \right] + U \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\
&- K \lambda^2 \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1^\dagger d_l} + K \lambda^2 \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma)\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma[\sum_{\bar{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{l}}}] + U\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\
&- K\lambda^2 \delta_{j1} \left\{ -U \frac{\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}(\varepsilon)}{(\varepsilon + \varepsilon_1 + \tilde{\Sigma} - \lambda^2 K)} - \lambda^2 \tilde{K} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l} \right\} \\
&+ K\lambda^2 \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l} \Rightarrow \\
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma)\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma[\sum_{\bar{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{l}}}] + U\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\
&+ \delta_{j1} \lambda^2 U \frac{K}{(\varepsilon + \varepsilon_1 + \tilde{\Sigma} - \lambda^2 K)} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l} \\
&+ \delta_{j1} \lambda^2 K (1 + \lambda^2 \tilde{K}) \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l}(\varepsilon) \Rightarrow
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma)\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma[\sum_{\bar{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{l}}}] + U\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} \\
&+ \delta_{j1} \lambda^2 \tilde{K} U \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l} + \delta_{j1} \Sigma_{\text{MBS}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_l} \Rightarrow
\end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma - \delta_{j1} \Sigma_{\text{MBS}})\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} &= \delta_{jl} + \Sigma[\sum_{\bar{l} \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{\bar{l}}}] \\
&+ U[\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} + \lambda^2 \tilde{K} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}],
\end{aligned} \tag{A.40}$$

que é a mesma expressão descrita na Eq. (2.30).

Appendix B

A Aproximação de Hubbard I

Observa-se na Eq. (A.40) a presença de duas funções de Green retardadas de alta ordem ($\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}$), as quais devem-se à presença de um termo quártico no Hamiltoniano [Eq. (2.1)] que descreve a interação de Coulomb entre os QDs. Aplica-se então o método da EOM (Apêndice A) nas citadas funções de alta ordem, começando com $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}$, definida no espaço t como:

$$\mathcal{G}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}(t) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr} \{ \varrho_e [d_j(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+ \}, \quad (\text{B.1})$$

com sua respectiva derivada dada por

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{G}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}(t) = & \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \delta(t) \text{Tr} \{ \varrho_e [d_j(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+ \} \\ & + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr} \{ \varrho_e [\partial_t d_j(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+ \}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Aplicando a equação de Heisenberg:

$$\begin{aligned}
\partial_t d_j(t) n_{\bar{j}}(t) &= -\frac{i}{\hbar} [d_j n_{\bar{j}}, \mathcal{H}_e] \\
&= \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_l \varepsilon_l [d_j n_{\bar{j}}, d_l^\dagger d_l] + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_{kl} [d_j n_{\bar{j}}, (c_{ek}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ek})] \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) U [d_j n_{\bar{j}}, d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2] \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [d_j n_{\bar{j}}, (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger)] + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [d_j n_{\bar{j}}, (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger)], \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sum_l \varepsilon_l [d_j n_{\bar{j}}, d_l^\dagger d_l] &= \sum_l \varepsilon_l [d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}, d_l^\dagger d_l] \\
&= \sum_l \varepsilon_l (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger d_l - d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) = \sum_l \varepsilon_l (d_j d_{\bar{j}}^\dagger (\delta_{\bar{j}1} - d_l^\dagger d_{\bar{j}}) d_l - d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (\delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l - d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} d_l - d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (\delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l - d_j d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_l d_{\bar{j}} - d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (\delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j d_l^\dagger d_{\bar{j}} + d_j d_l^\dagger d_l d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (\delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j d_l^\dagger d_{\bar{j}} + (\delta_{jl} - d_l^\dagger d_j) d_l d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (\delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j d_l^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{jl} d_l d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_l^\dagger d_j d_l d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (\delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j d_l^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{jl} d_l d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_l^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (\delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j d_l^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{jl} d_l d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) = \varepsilon_j d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} = \varepsilon_j d_j n_{\bar{j}}, \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{kl} [d_j n_{\bar{j}}, (c_{ek}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ek})] &= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} (c_{ek}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ek}) - (c_{ek}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ek}) d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}^\dagger d_l + d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger c_{ek} - c_{ek}^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_l^\dagger c_{ek} d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_{kl} (-c_{ek}^\dagger d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l + d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger c_{ek} - c_{ek}^\dagger d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + d_l^\dagger d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}) \\
&= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + d_l^\dagger d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) c_{ek} - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l + d_l d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + (\delta_{jl} - d_j d_l^\dagger) d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) c_{ek} - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - d_j d_l d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + \delta_{jl} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_j d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) c_{ek} \\
&\quad - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - d_j (\delta_{l\bar{j}} - d_{\bar{j}}^\dagger d_l) d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + \delta_{jl} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}}) c_{ek} \\
&\quad - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j d_{\bar{j}} + d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + \delta_{jl} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}}) c_{ek} \\
&\quad - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j d_{\bar{j}} - d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l) \\
&= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + \delta_{jl} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + d_j d_{\bar{j}}^\dagger (\delta_{\bar{j}l} - d_{\bar{j}}^\dagger d_l) c_{ek} \\
&\quad - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger (-\delta_{l\bar{j}} d_j d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_{kl} (d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + \delta_{jl} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{\bar{j}l} d_j d_{\bar{j}}^\dagger - d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger) c_{ek} - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger (-\delta_{l\bar{j}} d_j d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_{k,l} (\delta_{jl} c_{ek} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{\bar{j}l} c_{ek} d_j d_{\bar{j}}^\dagger) - \sum_k c_{ek}^\dagger (-\delta_{l\bar{j}} d_j d_{\bar{j}}) \\
&= c_{ek} \sum_{k,l} \delta_{jl} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + c_{ek} \sum_{k,l} \delta_{\bar{j}l} d_j d_{\bar{j}}^\dagger + c_{ek}^\dagger \sum_{k,l} (\delta_{l\bar{j}} d_j d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_k (c_{ek} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + c_{ek} d_j d_{\bar{j}}^\dagger - c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j), \tag{B.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d_j n_{\bar{j}}, (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger)] &= d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger) - (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger) d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \eta^\dagger + d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta d_1^\dagger - d_1 \eta^\dagger d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} - \eta d_1^\dagger d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \eta^\dagger - \eta d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger - \eta d_1^\dagger d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= (-d_j d_j^\dagger d_1 d_{\bar{j}} + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger - \eta (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + (\delta_{j1} - d_j d_1^\dagger) d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= (-d_j d_j^\dagger d_1 d_{\bar{j}} + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger - \eta (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + (\delta_{j1} - d_j d_1^\dagger) d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= (-d_j (\delta_{1\bar{j}} - d_1 d_j^\dagger) d_{\bar{j}} + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&\quad - \eta (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_j d_j^\dagger d_1^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= (-\delta_{1\bar{j}} d_j d_{\bar{j}} + d_j d_1 d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&\quad - \eta (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_j d_j^\dagger (\delta_{\bar{j}1} - d_{\bar{j}} d_1^\dagger)) \\
&= (-\delta_{1\bar{j}} d_j d_{\bar{j}} + d_j d_1 d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&\quad - \eta (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger - d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger) \\
&= (-\delta_{1\bar{j}} d_j d_{\bar{j}} - d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&\quad - \eta (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger - d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger) \\
&= -\delta_{1\bar{j}} d_j d_{\bar{j}} \eta^\dagger - \eta (\delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}}^\dagger) \\
&= -\delta_{1\bar{j}} \eta^\dagger d_j d_{\bar{j}} - \delta_{j1} \eta d_j^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{\bar{j}1} \eta d_j d_{\bar{j}}^\dagger, \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d_j n_{\bar{j}}, (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger)] &= d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger) - (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger) d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \eta - d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger \eta^\dagger - d_1 \eta d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_1^\dagger \eta^\dagger d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \eta - d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger \eta^\dagger + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta - d_1^\dagger d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger \\
&= (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + d_1 d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta - (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_1^\dagger d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&= (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 - d_j d_1 d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta - (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + (\delta_{j1} - d_j d_1^\dagger) d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&= (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 - d_j (\delta_{\bar{j}1} - d_{\bar{j}}^\dagger d_1) d_{\bar{j}}) \eta - (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + (\delta_{j1} - d_j d_1^\dagger) d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&= (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 - \delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}} + d_j d_j^\dagger d_1 d_{\bar{j}}) \eta - (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - d_j d_1^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&= (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 - \delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}} - d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1) \eta - (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_j d_j^\dagger d_1^\dagger d_{\bar{j}}) \eta^\dagger \\
&= -\delta_{\bar{j}1} d_j d_{\bar{j}} \eta - (d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{\bar{j}1} d_j d_j^\dagger - d_j d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger) \eta^\dagger \\
&= -\delta_{\bar{j}1} \eta d_j d_{\bar{j}} - \delta_{j1} \eta^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{\bar{j}1} \eta^\dagger d_j d_j^\dagger. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Diante de tais resultados, a Eq. (B.3) transforma-se em:

$$\begin{aligned}
\partial_t d_j(t) n_{\bar{j}}(t) &= -\frac{i}{\hbar} [d_j n_{\bar{j}}, \mathcal{H}_e] \\
&= \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \varepsilon_j d_j n_{\bar{j}} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_k (c_{ek} d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_j^\dagger c_{ek} d_j - c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) U d_j n_{\bar{j}} \\
&\quad - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (-\delta_{1\bar{j}} \eta^\dagger d_{\bar{j}} d_j + \delta_{j1} \eta d_j^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{\bar{j}1} d_j^\dagger \eta d_j), \\
&\quad - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (\delta_{\bar{j}1} \eta d_j d_{\bar{j}} + \delta_{j1} \eta^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{\bar{j}1} \eta^\dagger d_j d_j^\dagger) \tag{B.9}
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{G}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \delta(t) \text{Tr} \{ \varrho_e [d_j(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+ \} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \varepsilon_j \mathcal{G}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) U \mathcal{G}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_k \mathcal{G}_{c_{ek} d_j^\dagger d_{\bar{j}}, d_l}(t) \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_k \mathcal{G}_{d_j^\dagger c_{ek} d_j, d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \sum_k \mathcal{G}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l}(t) \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{1\bar{j}} \mathcal{G}_{\eta^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \mathcal{G}_{\eta d_j^\dagger d_{\bar{j}}, d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{1\bar{j}} \mathcal{G}_{d_j^\dagger \eta d_j, d_l}(t) \\
&- \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{\bar{j}1} \mathcal{G}_{\eta d_j d_{\bar{j}}, d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \mathcal{G}_{\eta^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}, d_l}(t) \\
&- \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{\bar{j}1} \mathcal{G}_{\eta^\dagger d_j d_j^\dagger, d_l}(t), \tag{B.10}
\end{aligned}$$

onde foram definidas novas funções de Green retardadas da mesma forma que no Apêndice anterior.

Por meio da transformação de Fourier na Eq. (B.10), obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} &= \text{Tr} \{ \varrho_e [d_j(0) n_{\bar{j}}(0), d_l^\dagger(0)]_+ \} \\
&+ \sqrt{2} V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek} d_j^\dagger d_{\bar{j}}, d_l} + \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek} d_j, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger \eta d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_j^\dagger d_{\bar{j}}, d_l} \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_j d_{\bar{j}}, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}}^\dagger \eta^\dagger d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}, d_l}, \tag{B.11}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\varrho_e[d_j(0)n_{\bar{j}}(0),d_j^\dagger(0)]_+\} &= \text{Tr}\{\varrho_e(d_j n_{\bar{j}} d_l^\dagger + d_l^\dagger d_j n_{\bar{j}})\} \\
&= \text{Tr}\{\varrho_e(d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + d_l^\dagger d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}})\} \\
&= \text{Tr}\{\varrho_e(d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + (\delta_{jl} - d_j d_l^\dagger) d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}})\} \\
&= \text{Tr}\{\varrho_e(d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + \delta_{jl} d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_j d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger)\} \\
&= \delta_{jl} \text{Tr}\{\varrho_e d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}\} \\
&= \delta_{jl} \langle d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \rangle = \delta_{jl} \langle n_{\bar{j}} \rangle.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} &= \delta_{jl} \langle n_{\bar{j}} \rangle \\
&+ \sqrt{2}V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}, d_l} + \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek} d_j, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}}^\dagger \eta d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \eta, d_l} \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_{\bar{j}} d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}}^\dagger \eta^\dagger d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger, d_l}.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Da mesma forma, calcula-se $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}$, definida no espaço dos tempos como:

$$\mathcal{G}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}(t) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j^\dagger(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \tag{B.14}$$

e sua derivada:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{G}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \delta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[d_j^\dagger(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+\} \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \theta(t) \text{Tr}\{\varrho_e[\partial_t d_j^\dagger(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+\},
\end{aligned} \tag{B.15}$$

onde

$$\begin{aligned}
\partial_t d_j^\dagger(t) n_{\bar{j}}(t) &= -\frac{i}{\hbar} [d_j^\dagger n_{\bar{j}}, \mathcal{H}_e] \\
&= \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \left(-\varepsilon_j d_j^\dagger n_{\bar{j}}\right) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sqrt{2} V \left(\sum_k d_j^\dagger c_{ek} d_j^\dagger - \sum_k c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j^\dagger - \sum_k d_j^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}^\dagger \right) \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) U \left(-d_j^\dagger n_{\bar{j}}\right) \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger - \delta_{1\bar{j}} d_{\bar{j}} \eta^\dagger d_j^\dagger + \delta_{\bar{j}1} \eta d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \right) \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(\delta_{1j} d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta - \delta_{\bar{j}1} d_{\bar{j}} \eta d_j^\dagger + \delta_{\bar{j}1} \eta^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \right), \tag{B.16}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\sum_l \varepsilon_l [d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l^\dagger d_l] &= \sum_l \varepsilon_l [d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}, d_l^\dagger d_l] \\
&= \sum_l \varepsilon_l (d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger d_l - d_l^\dagger d_l d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l (d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger d_l - d_l^\dagger (\delta_{lj} - d_j^\dagger d_l) d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}) \\
&= \sum_l \varepsilon_l \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger d_l - \delta_{lj} d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + d_l^\dagger d_j^\dagger d_l d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_l \varepsilon_l \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger d_l - \delta_{lj} d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_j^\dagger d_l^\dagger (\delta_{l\bar{j}} - d_{\bar{j}}^\dagger d_l) d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_l \varepsilon_l \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger d_l - \delta_{lj} d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} + d_j^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} d_l d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_l \varepsilon_l \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger d_l - \delta_{lj} d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} d_l \right) \\
&= \sum_l \varepsilon_l \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger d_l - \delta_{lj} d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} + d_{\bar{j}}^\dagger d_j^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} d_l \right) \\
&= \sum_l \varepsilon_l \left(-\delta_{lj} d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_l \varepsilon_l \left(-\delta_{lj} d_l^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} + \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} \right) = -\varepsilon_j d_j^\dagger n_{\bar{j}}, \tag{B.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{kl} [d_j^\dagger n_{\bar{j}}, (c_{ek}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ek})] &= \sum_{kl} \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} (c_{ek}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ek}) - (c_{ek}^\dagger d_l + d_l^\dagger c_{ek}) d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_{kl} \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}^\dagger d_l + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger c_{ek} - c_{ek}^\dagger d_l d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - d_l^\dagger c_{ek} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_{kl} \left(-c_{ek}^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger c_{ek} - c_{ek}^\dagger d_l d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} + d_l^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek} \right) \\
&= \sum_{kl} \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + d_l^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \right) c_{ek} - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l + d_l d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_{kl} \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_l^\dagger d_{\bar{j}} \right) c_{ek} - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - d_l d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_{kl} \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \left(\delta_{\bar{j}l} - d_{\bar{j}} d_l^\dagger \right) \right) c_{ek} \\
&\quad - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - \left(\delta_{l\bar{j}} - d_{\bar{j}}^\dagger d_l \right) d_j^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_{kl} \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger + \delta_{\bar{j}l} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger - d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l^\dagger \right) c_{ek} \\
&\quad - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger + d_{\bar{j}}^\dagger d_l d_j^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \sum_{kl} \delta_{\bar{j}l} c_{ek} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger + d_{\bar{j}}^\dagger \left(\delta_{l\bar{j}} - d_{\bar{j}}^\dagger d_l \right) d_j^\dagger \right) \\
&= \sum_{kl} \delta_{\bar{j}l} c_{ek} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l - \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger + \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger - d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_l \right) \\
&= \sum_{kl} \delta_{\bar{j}l} c_{ek} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger - \sum_{kl} c_{ek}^\dagger \left(-\delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger + \delta_{l\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \right) \\
&= \sum_k d_{\bar{j}}^\dagger c_{ek} d_j^\dagger - \sum_k c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j^\dagger - \sum_k d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}^\dagger, \tag{B.18}
\end{aligned}$$

[illegible]

(B.19)

$$\begin{aligned}
[d_j^\dagger n_{\bar{j}}, (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger)] &= d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger) - (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger) d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \eta^\dagger + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \eta d_1^\dagger - d_1 \eta^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} - \eta d_1^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \eta^\dagger - \eta d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_1 d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger - \eta d_1^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + \left(\delta_{j1} - d_j^\dagger d_1 \right) d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \right) \eta^\dagger - \eta \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_1^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - d_j^\dagger d_1 d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} \right) \eta^\dagger - \eta \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_1^\dagger d_{\bar{j}} \right) \\
&= \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - d_j^\dagger \left(\delta_{1\bar{j}} - d_{\bar{j}}^\dagger d_1 \right) d_{\bar{j}} \right) \eta^\dagger \\
&\quad - \eta \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \left(\delta_{\bar{j}1} - d_{\bar{j}}^\dagger d_1^\dagger \right) \right) \\
&= \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{1\bar{j}} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \right) \eta^\dagger \\
&\quad - \eta \left(d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{\bar{j}1} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger - d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger \right) \\
&= \delta_{j1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger - \delta_{1\bar{j}} d_{\bar{j}} \eta^\dagger d_j^\dagger + \delta_{\bar{j}1} \eta d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger
\end{aligned} \tag{B.20}$$

e

$$\begin{aligned}
[d_j^\dagger n_{\bar{j}}, (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger)] &= d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger) - (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger) d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \eta - d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger \eta^\dagger - d_1 \eta d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} + d_1^\dagger \eta^\dagger d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} \\
&= d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \eta - d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger \eta^\dagger + d_1 d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta - d_1^\dagger d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger \\
&= \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + d_1 d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} \right) \eta - \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_1^\dagger d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} \right) \eta^\dagger \\
&= \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + \left(\delta_{1j} - d_j^\dagger d_1 \right) d_j^\dagger d_{\bar{j}} \right) \eta - \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_j^\dagger d_j^\dagger d_1^\dagger d_{\bar{j}} \right) \eta^\dagger \\
&= \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + \delta_{1j} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - d_j^\dagger d_1 d_j^\dagger d_{\bar{j}} \right) \eta \\
&\quad - \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_j^\dagger d_j^\dagger d_1^\dagger d_{\bar{j}} \right) \eta^\dagger \\
&= \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + \delta_{1j} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - d_j^\dagger \left(\delta_{\bar{j}1} - d_{\bar{j}}^\dagger d_1 \right) d_{\bar{j}} \right) \eta \\
&\quad - \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger \left(\delta_{\bar{j}1} - d_{\bar{j}}^\dagger d_1 \right) \right) \eta^\dagger \\
&= \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1 + \delta_{1j} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - \delta_{\bar{j}1} d_j^\dagger d_{\bar{j}} - d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1 \right) \eta \\
&\quad - \left(d_j^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger + \delta_{\bar{j}1} d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger - d_j^\dagger d_{\bar{j}}^\dagger d_{\bar{j}} d_1^\dagger \right) \eta^\dagger \\
&= \delta_{1j} d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta - \delta_{\bar{j}1} d_{\bar{j}} \eta d_j^\dagger + \delta_{\bar{j}1} \eta^\dagger d_j^\dagger d_{\bar{j}}.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Com o resultado obtido na Eq. (B.16), a Eq. (B.15) transforma-se em:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{G}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \delta(t) \text{Tr} \{ \varrho_e [d_j^\dagger(t) n_{\bar{j}}(t), d_l^\dagger(0)]_+ \} \\
&\quad - \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \varepsilon_j \mathcal{G}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar} \right) U \mathcal{G}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \sqrt{2} V \sum_k \mathcal{G}_{d_j^\dagger c_{ek} d_j^\dagger, d_l}(t) \\
&\quad - \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \sqrt{2} V \sum_k \mathcal{G}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j^\dagger, d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \sqrt{2} V \sum_k \mathcal{G}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}^\dagger, d_l}(t) \\
&\quad + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \delta_{j1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \mathcal{G}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger, d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \delta_{1\bar{j}} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \mathcal{G}_{d_{\bar{j}} \eta^\dagger d_j^\dagger, d_l}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \delta_{1\bar{j}} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \mathcal{G}_{\eta d_{\bar{j}} d_j^\dagger, d_l}(t) \\
&\quad + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \delta_{j1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \mathcal{G}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta, d_l}(t) - \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \delta_{1\bar{j}} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \mathcal{G}_{d_{\bar{j}} \eta d_j^\dagger, d_l}(t) + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \delta_{1\bar{j}} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \mathcal{G}_{\eta^\dagger d_{\bar{j}} d_j^\dagger, d_l}(t).
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Seguindo o procedimento utilizado, aplica-se a transformação de Fourier na Eq. (B.22), o que permite reescrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon + \varepsilon_j + U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l} &= \text{Tr}\{\varrho_e[d_j^\dagger(0)n_{\bar{j}}(0), d_l^\dagger(0)]_+\} \\
&+ \sqrt{2}V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek} d_j^\dagger, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j^\dagger, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}^\dagger, d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger, d_l} - \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}} \eta^\dagger d_j^\dagger, d_l} + \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_j^\dagger d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta, d_l} - \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}} \eta d_j^\dagger, d_l} + \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_j^\dagger d_l}].
\end{aligned} \tag{B.23}$$

onde $\text{Tr}\{\varrho_e[d_j^\dagger(0)n_{\bar{j}}(0), d_l^\dagger(0)]_+\} = \delta_{jl} \langle d_j^\dagger d_j^\dagger \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon + \varepsilon_j + U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l} &= \delta_{jl} \langle d_j^\dagger d_j^\dagger \rangle + \sqrt{2}V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek} d_j^\dagger, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j^\dagger, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}^\dagger, d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger, d_l} - \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}} \eta^\dagger d_j^\dagger, d_l} + \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_j^\dagger d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta, d_l} - \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_{\bar{j}} \eta d_j^\dagger, d_l} + \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_j^\dagger d_l}].
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Verifica-se que a evolução das funções de Green de alta ordem $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}$ e $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}$, por meio do método da EOM, dá origem a novas funções de Green de alta ordem [Eq. (B.13) e Eq. (B.24)]. Se essas novas fossem calculadas, as mesmas dariam origem a outras funções de Green de alta ordem. Então, faz-se necessária a aplicação de um método de aproximação que permita resolver o sistema de funções de Green. O método aqui empregado é motivado pelo de Hubbard I [37], que consiste basicamente em transformar uma função de Green de quatro operadores em uma média de dois operadores, multiplicada por uma função de Green de dois operadores, ou seja, $\tilde{\mathcal{G}}_{ABCD} = \langle \mathcal{AB} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{CD}$. A seguir, aplica-se a citada aproximação de forma pormenorizada na Eq. (B.13):

$$\begin{aligned}
(\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} &= \delta_{jl} \langle n_{\bar{j}} \rangle \\
&+ \sqrt{2} V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}, d_l} + \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek} d_j, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l}] \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{1\bar{j}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger \eta d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta, d_l} \\
&+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_{\bar{j}} d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger \eta^\dagger d_j, d_l} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger, d_l}.
\end{aligned} \tag{B.25}$$

De acordo com o método de Hubbard I :

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} c_{ek}, d_l} \simeq \langle d_j^\dagger d_{\bar{j}} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek} d_l}, \tag{B.26}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek} d_j, d_l} \simeq \langle d_j^\dagger c_{ek} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}, \tag{B.27}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l} \simeq \langle c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}, \tag{B.28}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_{\bar{j}} d_j, d_l} \simeq \langle \eta^\dagger d_{\bar{j}} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}, \tag{B.29}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger \eta d_j, d_l} \simeq \langle d_j^\dagger \eta \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}, \tag{B.30}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta, d_l} \simeq \langle d_j^\dagger d_{\bar{j}} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_l}, \tag{B.31}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_{\bar{j}} d_j, d_l} \simeq \langle \eta d_{\bar{j}} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}, \tag{B.32}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_j^\dagger d_j, d_l} \simeq \langle d_j^\dagger \eta^\dagger \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} \tag{B.33}$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_{\bar{j}} \eta^\dagger, d_l} \simeq \langle d_j^\dagger d_{\bar{j}} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_l}. \tag{B.34}$$

No entanto, tem-se que $\langle \mathcal{AB} \rangle = \langle \mathcal{B}^\dagger \mathcal{A}^\dagger \rangle$. Tal propriedade permite escrever as seguintes relações de igualdade:

$$\langle d_{\bar{j}}^\dagger c_{ek} \rangle = \langle c_{ek}^\dagger d_{\bar{j}} \rangle, \quad (\text{B.35})$$

$$\langle \eta^\dagger d_{\bar{j}} \rangle = \langle d_{\bar{j}}^\dagger \eta \rangle \quad (\text{B.36})$$

e

$$\langle \eta d_{\bar{j}} \rangle = \langle d_{\bar{j}}^\dagger \eta^\dagger \rangle \quad (\text{B.37})$$

Assim, a Eq. (B.25) transforma-se em

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l} &= \delta_{jl} \langle n_{\bar{j}} \rangle + \langle n_{\bar{j}} \rangle \sqrt{2} V \sum_k \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek} d_l} \\ &- \delta_{j1} \langle n_{\bar{j}} \rangle \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta d_l} - \delta_{j1} \langle n_{\bar{j}} \rangle \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \tilde{\mathcal{G}}_{\eta^\dagger d_l}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Pode-se verificar que a função de Green de alta ordem $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_{\bar{j}}, d_l}$ depende de funções de Green que já foram calculadas no Apêndice A e, portanto já são conhecidas. Da mesma forma, calcula-se a $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_{\bar{j}}, d_l}$.

Probing the antisymmetric Fano interference assisted by a Majorana fermion

F. A. Dessotti, L. S. Ricco, M. de Souza, F. M. Souza, and A. C. Seridonio

Citation: [Journal of Applied Physics](#) **116**, 173701 (2014); doi: 10.1063/1.4898776

View online: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4898776>

View Table of Contents: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/116/17?ver=pdfcov>

Published by the [AIP Publishing](#)

Articles you may be interested in

[Fano interference and a slight fluctuation of the Majorana hallmark](#)

J. Appl. Phys. **115**, 063706 (2014); 10.1063/1.4865503

[Tunneling transport through multi-quantum-dot with Majorana bound states](#)

J. Appl. Phys. **114**, 033703 (2013); 10.1063/1.4813229

[The Aharonov-Bohm-Fano interferometer as a spin-manipulating device](#)

J. Appl. Phys. **109**, 074315 (2011); 10.1063/1.3559270

[Coulomb-modified equilibrium and nonequilibrium properties in a double quantum dot Aharonov–Bohm–Fano interference device](#)

J. Appl. Phys. **107**, 073702 (2010); 10.1063/1.3311641

[Impurity-modified Fano effect in a double quantum dot Aharonov–Bohm interferometer](#)

J. Appl. Phys. **106**, 013710 (2009); 10.1063/1.3159033

A promotional banner for the 2014 Special Topics section of AIP APL Materials. The banner has an orange background with a white border. At the top, the text '2014 Special Topics' is written in a large, white, sans-serif font. Below this, there are five circular icons, each containing a different material structure and a label: 'PEROVSKITES' (red and black geometric pattern), '2D MATERIALS' (blue and red hexagonal pattern), 'MESOPOROUS MATERIALS' (green and yellow porous structure), 'BIOMATERIALS/ BIOELECTRONICS' (yellow and green cellular structure), and 'METAL-ORGANIC FRAMEWORK MATERIALS' (brown and orange crystalline structure). At the bottom left, the 'AIP | APL Materials' logo is displayed. At the bottom right, a red ribbon banner contains the text 'Submit Today!' in white.

Probing the antisymmetric Fano interference assisted by a Majorana fermion

F. A. Dessotti,¹ L. S. Ricco,¹ M. de Souza,² F. M. Souza,³ and A. C. Seridonio^{1,2}

¹*Departamento de Física e Química, Unesp - Univ Estadual Paulista, 15385-000 Ilha Solteira, São Paulo, Brazil*

²*Departamento de Física, IGCE, Unesp - Univ Estadual Paulista, 13506-900 Rio Claro, São Paulo, Brazil*

³*Instituto de Física, Universidade Federal de Uberlândia, 38400-902 Uberlândia, Minas Gerais, Brazil*

(Received 8 September 2014; accepted 9 October 2014; published online 3 November 2014)

As the Fano effect is an interference phenomenon where tunneling paths compete for the electronic transport, it becomes a probe to catch fingerprints of Majorana fermions lying on condensed matter systems. In this work, we benefit of this mechanism by proposing as a route for that an Aharonov-Bohm-like interferometer composed by two quantum dots, being one of them coupled to a Majorana bound state, which is attached to one of the edges of a semi-infinite Kitaev wire within the topological phase. By changing the Fermi energy of the leads and the symmetric detuning of the levels for the dots, we show that opposing Fano regimes result in a transmittance characterized by distinct conducting and insulating regions, which are fingerprints of an isolated Majorana quasiparticle. Furthermore, we show that the maximum fluctuation of the transmittance as a function of the detuning is half for a semi-infinite wire, while it corresponds to the unity for a finite system. The setup proposed here constitutes an alternative experimental tool to detect Majorana excitations.

© 2014 AIP Publishing LLC. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4898776>]

I. INTRODUCTION

In the field of high-energy Physics, Ettore Majorana proposed, almost a century ago, the existence of fermions that form their own antiparticles. In condensed matter Physics, such fermions emerge as quasiparticle excitations.¹ Remarkably, two distant Majorana quasiparticles can define a single nonlocal regular fermion, which provides a protected qubit, free of the environment and immune to the decoherence phenomenon. Such a bit thus can be considered as the fundamental unity for the achievement of a quantum computer. For this reason, in the last decade, the run for devices based on Majoranas started in the field of quantum information.^{2,3} In this scenario, the superconducting state is the most promising environment for the feasibility of Majorana fermions, in particular, the *p*-wave and spinless type.

The Kitaev wire within the topological phase⁴ is an example, since Majorana fermions emerge as zero-energy modes bounded to the edges of such a system. From the experimental point of view, the realization of *p*-wave superconductivity can be performed by putting an *s*-wave superconductor close to a semiconducting nanowire with strong spin-orbit interaction placed perpendicular to a huge magnetic field. In such conditions, *p*-wave superconductivity is induced on the nanowire due to the so-called proximity effect.^{5–7}

In the context of quantum transport,^{8–19} in particular for a single quantum dot (QD) hybridized with a Majorana bound state (MBS), a zero-bias anomaly (ZBA)^{11,12} in the conductance is predicted to appear, given by $G = 0.5G_0$, where $G_0 = e^2/h$ is the quantum of conductance. The ZBA has been observed experimentally in conductance measurements through a nanowire of indium antimonide merged to gold and niobium titanium nitride.¹⁶ In this system, Majoranas are supposed to exist as a result of the ZBA that persists to large magnetic fields and gate voltages. Such a

robustness of the ZBA has also been observed in the setup of a superconductor of aluminium close to a nanowire of indium arsenide.¹⁷

In this work, we follow the strategy of electronic interferometry to probe signatures arising from Majorana fermions. To that end, the Fano interference²⁰ is the proper way to accomplish the aforementioned goal. As such a phenomenon is due to the competition between paths of itinerant electrons that travel directly through an energy continuum (an electronic reservoir of a metallic lead for instance) and those that are discrete as found within QDs, patterns of interference then record imprints of Majorana excitations on transmittance profiles. Thereby, we explore the manifestation of the Fano effect in the quantum transport through an Aharonov-Bohm-like interferometer formed by two QDs,^{21,22} in which one of them is coupled to a MBS hosted by a semi-infinite Kitaev wire within the topological phase.

By calculating the transmittance of this device, we have found that the Fano interference exhibits an antisymmetric feature: the Green's functions $\hat{G}_{d,d_l}$ and $\hat{G}_{d_l,d_l}$ for the QDs cannot be determined by the exchange of the indexes $j \leftrightarrow l$ in $\hat{G}_{d,d_l}$ and $\hat{G}_{d_l,d_l}$, respectively, with $l, j = 1 \dots 2$. We propose that such a feature can be captured experimentally by performing measurements of the zero-bias conductance as a function of the Fermi energy of the leads and the symmetric detuning $\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$ in the QDs, where $\epsilon_1 = -\frac{\Delta\epsilon}{2}$ and $\epsilon_2 = \frac{\Delta\epsilon}{2}$ represent the energy levels of the QDs.²³ As a result, contrasting Fano limits reveal distinct conducting and insulating regions, which are signatures of an isolated Majorana quasiparticle.

Moreover, we have determined that the symmetric Fano effect is recovered when electrons travel only through the QDs and the Fermi energy of the leads is in resonance with the Majorana zero mode. As a consequence, the transmittance as a function of the symmetric detuning exhibits a

maximum fluctuation of half for the semi-infinite Kitaev wire, contrasting with the unity variation observed in the case of a finite system. In the former situation, the maximum fluctuation of the transmittance is halved due to the half fermion nature of the isolated MBS, while the latter represents the situation where two MBSs displaced far apart are coupled and thus forming a nonlocal Dirac fermion delocalized over the wire edges.

This paper is organized as follows: in Sec. II, we develop the theoretical model for the system sketched in Fig. 1 by deriving the expression for the transmittance through such a device and the Green's functions of the QDs. The results are present in Sec. III and in Sec. IV, we summarize our concluding remarks.

II. THE MODEL

In order to mimic the system outlined in Fig. 1, we employ the Hamiltonian proposed by Liu and Baranger,¹¹ taking two QDs into account

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha k} \tilde{\epsilon}_{\alpha k} c_{\alpha k}^\dagger c_{\alpha k} + \sum_j \epsilon_j d_j^\dagger d_j + V \sum_{\alpha k j} (c_{\alpha k}^\dagger d_j + \text{H.c.}) + V_{BT} \sum_{kp} (c_{Bk}^\dagger c_{Tp} + \text{H.c.}) + \mathcal{H}_{\text{MBSs}}, \quad (1)$$

where the electrons in the lead $\alpha = B, T$ (bottom/top) are described by the operator $c_{\alpha k}^\dagger$ ($c_{\alpha k}$) for the creation (annihilation) of an electron in a quantum state labeled by the wave number k and energy $\tilde{\epsilon}_{\alpha k} = \epsilon_k - \mu_\alpha$, with μ_α as the chemical potential. Here, we adopt the gauge $\mu_B = \Delta\mu$ and $\mu_T = -\Delta\mu$, with $\mu_B - \mu_T = 2\Delta\mu = e\varphi$ as the bias between the leads, being $e > 0$ the electron charge and φ the bias-voltage. For the QDs, $d_j^\dagger$ (d_j) creates (annihilates) an electron in the state ϵ_j , with $j = 1, 2$. V is the hybridization of the QDs with the leads, V_{BT} is the lead-lead coupling and

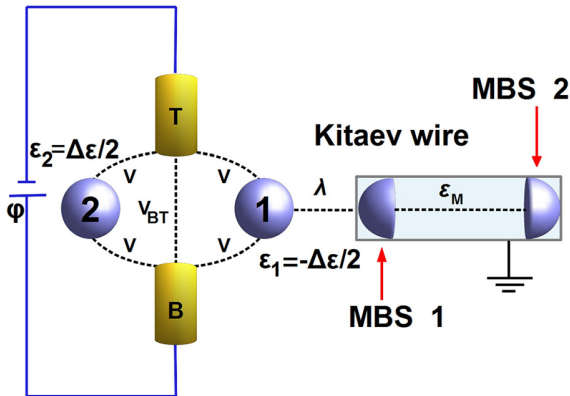


FIG. 1. Aharonov-Bohm-like interferometer with MBSs hosted by a Kitaev wire within the topological phase: two leads are coupled to two QDs hybridized with a MBS 1; the half-electron state is represented by the semi-sphere in the left side of the wire. The tunneling parameters between the QDs and the leads are V and the lead-lead coupling is V_{BT} . The symmetric detuning in the QDs is $\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$, where $\epsilon_1 = -\frac{\Delta\epsilon}{2}$ and $\epsilon_2 = \frac{\Delta\epsilon}{2}$ represent the energy levels of the QDs. The coupling strength of the QD 1 with the MBS 1 is λ . ϵ_M couples the MBS 1 to the MBS 2 (the semi-sphere in the right side of the wire). The bias φ of the setup approaches zero.

$$\mathcal{H}_{\text{MBSs}} = i\epsilon_M \Psi_1 \Psi_2 + \lambda(d_1 - d_1^\dagger)\Psi_1, \quad (2)$$

for the Kitaev wire within the topological phase. In particular for $j = 1$, the QD 1 is coupled to the MBS 1 described by the operator $\Psi_1^\dagger = \Psi_1$. The strength of this coupling is λ . The MBS 2 given by $\Psi_2^\dagger = \Psi_2$ is connected to the MBS 1 via the coefficient $\epsilon_M \sim e^{-L/\xi}$, with L as the distance between the MBSs and ξ as a coherence length. In what follows, we derive the Landauer-Büttiker formula for the zero-bias conductance G .²⁴ Such a quantity is a function of the transmittance $\mathcal{T}(\epsilon)$ as follows:

$$G = \frac{e^2}{h} \int d\epsilon \left(-\frac{\partial f_F}{\partial \epsilon} \right) \mathcal{T}(\epsilon). \quad (3)$$

We begin with the transformations $c_{Bk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{ek} + c_{ok})$ and $c_{Tk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{ek} - c_{ok})$ on the Hamiltonian of Eq. (1), which depends on the *even* and *odd* conduction operators c_{ek} and c_{ok} , respectively. These definitions allow us to express Eq. (1) as $\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_o + \tilde{\mathcal{H}}_{\text{tun}} = \mathcal{H}_{\varphi=0} + \tilde{\mathcal{H}}_{\text{tun}}$, where

$$\mathcal{H}_e = \sum_k \epsilon_k c_{ek}^\dagger c_{ek} + \sum_j \epsilon_j d_j^\dagger d_j + \sqrt{2}V \sum_{jk} (c_{ek}^\dagger d_j + \text{H.c.}) + V_{BT} \sum_{kp} c_{ek}^\dagger c_{ep} + \mathcal{H}_{\text{MBSs}}, \quad (4)$$

represents the Hamiltonian part of the system coupled to the QDs via an effective hybridization $\sqrt{2}V$, while

$$\mathcal{H}_o = \sum_k \epsilon_k c_{ok}^\dagger c_{ok} - V_{BT} \sum_{kp} c_{ok}^\dagger c_{op}, \quad (5)$$

is the decoupled one. However, they are connected to each other by the tunneling Hamiltonian $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{tun}} = -\Delta\mu \sum_k (c_{ek}^\dagger c_{ok} + c_{ok}^\dagger c_{ek})$.

As in the zero-bias regime $\Delta\mu \rightarrow 0$, due to $\varphi \rightarrow 0$, $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{tun}}$ is a perturbative term and the linear response theory ensures that

$$\mathcal{T}(\epsilon) = (2\pi V_{BT})^2 \tilde{\rho}_e(\epsilon) \tilde{\rho}_o(\epsilon), \quad (6)$$

where $\tilde{\rho}_e(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(\tilde{\mathcal{G}}_{\psi_e \psi_e})$ is the local density of states (LDOS) for the Hamiltonian of Eq. (4) and

$$\mathcal{G}_{\Psi_e \Psi_e} = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr} \left\{ \rho_e [\Psi_e(t), \Psi_e^\dagger(0)]_+ \right\}, \quad (7)$$

gives the retarded Green's function in the time domain t , where $\theta(t)$ is the Heaviside step function, ρ_e is the density-matrix for Eq. (4), $\Psi_e = f_e + (\pi\Delta\rho_0)^{1/2} q \sum_j d_j$ is a field operator, with $f_e = \sum_p c_{ep}$, the Anderson parameter $\Delta = 2\pi V^2 \rho_0$ and $q = (\pi\rho_0\Delta)^{-1/2} (\frac{\sqrt{2}V}{2V_{BT}})$.

To calculate Eq. (7) in the energy domain ϵ , we should employ the equation-of-motion (EOM) method^{24,25} summarized as follows:

$$(\epsilon + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{AB} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}^\dagger]_+ + \tilde{\mathcal{G}}_{[\mathcal{A}, \mathcal{H}_i]B}, \quad (8)$$

for the retarded Green's function $\tilde{\mathcal{G}}_{AB}$, with $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ as fermionic operators belonging to the Hamiltonian $\mathcal{H}_i$. By considering $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \Psi_e$ and $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_e$, we find

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\Psi_e \Psi_e} = \tilde{\mathcal{G}}_{f_e f_e} + (\pi \rho_0 \Delta) q^2 \sum_{jl} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} + 2(\pi \rho_0 \Delta)^{1/2} q \times \sum_j \tilde{\mathcal{G}}_{d_j f_e}. \quad (9)$$

From Eqs. (4), (8) with $\mathcal{A} = \mathcal{B} = f_e$ and (9), we obtain

$$\tilde{\mathcal{G}}_{f_e f_e} = \frac{\pi \rho_0 (\bar{q} - i)}{1 - \sqrt{x}(\bar{q} - i)} + \pi \rho_0 \Delta \left[\frac{(\bar{q} - i)}{1 - \sqrt{x}(\bar{q} - i)} \right]^2 \times \sum_{jl} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}(\varepsilon), \quad (10)$$

and the mixed Green's function

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_j f_e} = \sqrt{\pi \Delta \rho_0} \frac{(\bar{q} - i)}{1 - \sqrt{x}(\bar{q} - i)} \sum_l \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}, \quad (11)$$

determined from Eq. (8) by considering $\mathcal{A} = d_j$, $\mathcal{B} = f_e$ and $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_e$, with the parameter $x = (\pi \rho_0 V_{BT})^2$ and $\bar{q} = \frac{1}{\pi \rho_0} \sum_k \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_k}$.

Additionally, for the Hamiltonian of Eq. (5), we have the LDOS $\tilde{\rho}_o(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(\tilde{\mathcal{G}}_{f_o f_o})$, with

$$\mathcal{G}_{f_o f_o} = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr} \left\{ \varrho_o [f_o(t), f_o^\dagger(0)]_+ \right\}, \quad (12)$$

and $f_o = \sum_{\bar{q}} c_{o\bar{q}}$. We notice that $\tilde{\mathcal{G}}_{f_o f_o}$ is decoupled from the QDs. Thereby, from Eqs. (5) and (12), we take $\mathcal{A} = \mathcal{B} = f_o$ and $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_o$ in Eq. (8) and we obtain

$$\tilde{\mathcal{G}}_{f_o f_o} = \frac{\pi \rho_0 (\bar{q} - i)}{1 + \sqrt{x}(\bar{q} - i)}. \quad (13)$$

Thus the substitution of Eqs. (9), (11), and (13) in Eq. (6) leads to

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\varepsilon) = & \mathcal{T}_b + \sqrt{\mathcal{T}_b \mathcal{R}_b} \tilde{\Delta} \sum_{jj'} \text{Re} \{ \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{j'}}(\varepsilon) \} \\ & - (1 - 2\mathcal{T}_b) \frac{\tilde{\Delta}}{2} \sum_{jj'} \text{Im} \{ \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_{j'}}(\varepsilon) \}, \end{aligned} \quad (14)$$

where $\tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{1+x}$ is an effective dot-lead coupling, $\mathcal{T}_b = \frac{4x}{(1+x)^2}$ represents the background transmittance, and $\mathcal{R}_b = 1 - \mathcal{T}_b = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$ is the corresponding reflectance, both in the absence of the QDs and MBSs.

We emphasize that Eq. (14) is the generalization of Eq. (2) found in Ref. 26 for an Aharonov-Bohm-like device of a single QD, but without an applied magnetic field. Yet, in Ref. 26 the authors introduce $q_b = \sqrt{\frac{\mathcal{R}_b}{\mathcal{T}_b}} = \frac{(1-x)}{2\sqrt{x}}$ as the Fano parameter. Here, we focus on two cases: the case $q_b \rightarrow \infty$, which we call by regime of weak coupling lead-lead due to the background transmittance $\mathcal{T}_b = 0$, and the strong coupling limit $q_b = 0$ characterized by $\mathcal{T}_b = 1$.

We calculate the Green's functions $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}$ within the wide-band limit. To obtain them, we first express the Majorana operators Ψ_1 and Ψ_2 in terms of a nonlocal Dirac fermion state η as follows: $\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^\dagger + \eta)$ and $\Psi_2 = i\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^\dagger - \eta)$, with $\eta \neq \eta^\dagger$ and $\{\eta, \eta^\dagger\} = 1$. We verify that Eq. (2) transforms into

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{MBSs}} = & \varepsilon_M \left(\eta^\dagger \eta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (d_1 \eta^\dagger + \eta d_1^\dagger) \\ & + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (d_1 \eta - d_1^\dagger \eta^\dagger). \end{aligned} \quad (15)$$

By applying the EOM on

$$\mathcal{G}_{d_j d_l} = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr} \left\{ \varrho_e [d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+ \right\}, \quad (16)$$

and changing to the energy domain ε , we obtain the following relation:

$$(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma - \delta_{jl} \Sigma_{\text{MBS1}}) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} = \delta_{jl} + \Sigma \sum_{l \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l}, \quad (17)$$

with $\Sigma = -\frac{(\sqrt{x}+i)}{1+x} \Delta$ and $\Sigma_{\text{MBS1}} = \lambda^2 K(1 + \lambda^2 \tilde{K})$ as the self-energy due to the MBS 1 coupled to the QD 1, $K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_M + i0^+} + \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon_M + i0^+} \right)$ and $\tilde{K} = \frac{K}{\varepsilon + \varepsilon_1 + \Sigma - \lambda^2 K}$ have the same forms as found in Ref. 11, where $\tilde{\Sigma}$ is the complex conjugate of Σ . Thus the solution of Eq. (17) provides

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1} = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_1 - \Sigma - \Sigma_{\text{MBS1}} - \mathcal{C}_2}, \quad (18)$$

as the Green's function of the QD 1, with $\mathcal{C}_j = \frac{\Sigma^2}{\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma}$ as the self-energy due to the presence of the j th QD.

For $\mathcal{C}_2 = 0$, we highlight that Eq. (18) is reduced to the Green's function of the single QD system found in Ref. 11. In the case of the QD 2, we have

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2} = \frac{1 - \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}^0 \Sigma_{\text{MBS1}}}{\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma - \frac{\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}^0}{\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}^0} \Sigma_{\text{MBS1}} - \mathcal{C}_1}, \quad (19)$$

where $\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}^0 = 1/(\varepsilon - \varepsilon_1 - \Sigma)$ and $\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}^0 = 1/(\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma)$ represent the corresponding Green's functions for the single QD system without Majoranas. The mixed Green's functions are

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_1} = \frac{\Sigma}{\varepsilon - \varepsilon_2 - \Sigma} \tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1} \quad (20)$$

and

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_2} = \frac{\Sigma}{\varepsilon - \varepsilon_1 - \Sigma - \Sigma_{\text{MBS1}}} \tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}. \quad (21)$$

By inspecting Eqs. (18), (19), (20), and (21), we verify that the functions $\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_1}$ and $\tilde{\mathcal{G}}_{d_1 d_2}$ can be found by the exchange of the indexes $1 \leftrightarrow 2$ in $\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_2}$ and $\tilde{\mathcal{G}}_{d_2 d_1}$, respectively, just in the case of $\Sigma_{\text{MBS1}} = 0$. Nevertheless, in the opposite situation, namely, for $\Sigma_{\text{MBS1}} \neq 0$, this symmetry is not verified, which corresponds to the Kitaev wire coupled to the interferometer as outlined in Fig. 1.

Following Ref. 11, we compare the aforementioned symmetry breaking with the one that arises from a Regular Fermionic (RF) zero mode attached to the interferometer instead of the MBS 1. In such a case, one can show that

Σ_{MBS1} is replaced by $\Sigma_{\text{RF}} = \frac{\lambda^2}{\varepsilon + i0^+}$ in the Green's functions above. Thus the comparison proposed will allow us to isolate exclusively Majorana signatures from those due to a standard QD side-coupled to the interferometer.

It is worth mentioning that the Green's functions for the QDs derived in this work are exact as expected since the Hamiltonian of Eq. (1) is quadratic. From the experimental point of view, this feature can be feasible by keeping the two QDs far apart in such a way that the interdots Coulomb repulsion U becomes negligible to ensure the applicability of the present approach, otherwise the term $Ud_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2$ should be added to Eq. (1). In this situation, an interacting self-energy Σ_U enters in the Green's functions and leads to a dephasing rate $-\text{Im}(\Sigma_U)/\hbar$ that competes with $-\text{Im}(\Sigma)/\hbar$, $-\text{Im}(\Sigma_{\text{MBS1}})/\hbar$ and $-\text{Im}(\mathcal{C}_j)/\hbar$. Particularly, if U is relevant in the regime of extremely low temperatures, it will be possible to induce a Kondo effect²⁷ and a ZBA determined by the interplay between such a phenomenon and the Majorana zero mode should appear. To avoid the emergence of the Kondo resonance in the ZBA of the transmittance, we thereby assume two QDs far apart to fulfill the assumption $U = 0$.

III. RESULTS AND DISCUSSION

Below, we investigate the antisymmetric feature of the Green's functions by employing the expression for the transmittance (Eq. (14)) with $\lambda = 4\Delta$ in the case of the Kitaev wire coupled to the interferometer. By varying ε in Eq. (14), the transmittance T becomes a function of the Fermi energy $\varepsilon = \mu_T = \mu_B$ of the leads.^{9,10} According to Eq. (3), this transmittance can be obtained experimentally via the conductance G in units of $G_0 = e^2/h$ for temperatures $T \rightarrow 0$ just by attaching gate voltages to the metallic leads in order to tune the Fermi level. Additionally, we estimate the symmetric detuning $\Delta\varepsilon$, the Fermi energy ε and ε_M in units of the Anderson parameter Δ .

In Fig. 2, the density plot of the transmittance is presented as a function of the symmetric detuning $\Delta\varepsilon$ and the Fermi energy ε for the Fano regime $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$). The panel (a) exhibits the situation in which the Kitaev wire is

decoupled from the interferometer, thus leading to the symmetric Fano interference arising from symmetric Green's functions by the permutation of the indexes in the parameters of the QDs. As a result, the density plot is characterized by specular regions with respect to the dotted-black line labeled as symmetry line.

On the other hand, for a semi-infinite Kitaev wire ($\varepsilon_M = 10^{-7}$) attached to the interferometer, the specular feature is not observed as the aftermath of the Green's functions $\hat{G}_{d_j d_j}$ and $\hat{G}_{d_j d_l}$ for the QDs, which cannot be determined by the exchange of the indexes $j \leftrightarrow l$ in $\hat{G}_{d_l d_l}$ and $\hat{G}_{d_l d_j}$, respectively, with $l, j = 1 \dots 2$. Such a hallmark is shown in the panel (b) of Fig. 2, where we clearly visualize the distortion of the pattern found in panel (a): the antisymmetric Fano effect for the limit $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$) assisted by the isolated MBS 1 can be recognized by the current antisymmetric pattern of (b). In the latter, the central region is the ZBA due to the MBS 1, which occurs for $\varepsilon = 0$ and any value of $\Delta\varepsilon$.

Fig. 3 exhibits the opposite Fano regime, which is determined by $x = 1$ ($q_b = 0$). In this limit, the tunneling of electrons through the leads is dominant with respect to that via the QDs. In panel (a) of Fig. 3 for the Kitaev wire removed, we observe the specular feature as the corresponding found in Fig. 2(a), but with the regime of interference reversed: note that the orange color regions become replaced by the red type. This swap indicates that a perfect insulating behavior changes to a conducting one as pointed out in Fig. 3(a).

In the presence of a semi-infinite Kitaev wire, the reversed pattern of Fig. 2(b) is given by Fig. 3(b), where the antisymmetric Fano effect manifests itself via the antisymmetric upper and lower parts of this figure. As a result, the difference between panels (a) and (b) of Figs. 2 and 3 reveals that the emergence of new insulating and conduction regions with respect to those found in panels (a) of both figures can be considered as fingerprints of an isolated MBS. Additionally, the ZBA due to the MBS 1 is also reversed. It is worth mentioning that the remaining diagonals in Figs. 2(b) and 3(b) are due to the QD 2, which even decoupled from the MBS 1 is still sensitive to it as Eq. (19) ensures via the self-energy $\Sigma_{\text{MBS1}} = \lambda^2 K(1 + \lambda^2 \bar{K})$. As we can notice, such a dependence yields a slight change in the slopes of

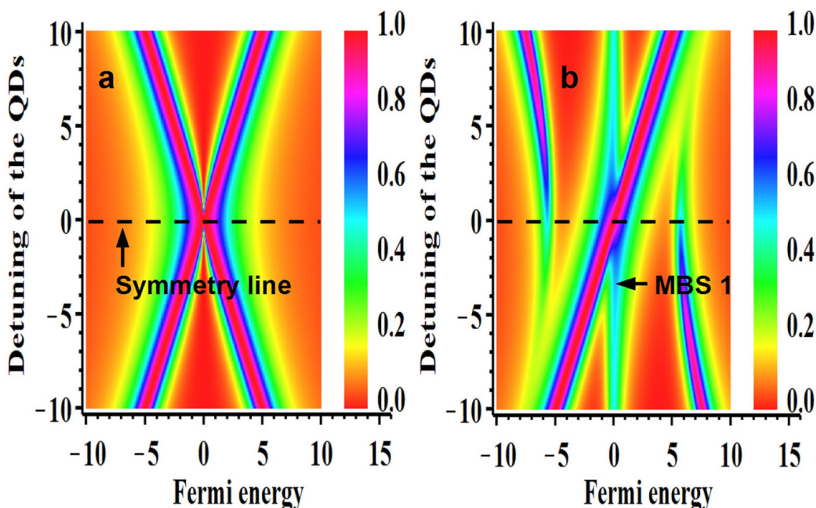


FIG. 2. Density plot of the transmittance (Eq. (14)) as a function of the symmetric detuning $\Delta\varepsilon$ for the QDs and the Fermi energy ε in units of Δ within the Fano regime $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$): (a) The Aharonov-Bohm-like interferometer is decoupled from the Kitaev wire leading to a symmetric Fano effect. (b) The interferometer is hybridized with a semi-infinite Kitaev wire via the QD 1: the Fano effect is antisymmetric. The central structure at $\varepsilon = 0$ gives the ZBA due to the MBS 1. In both panels, the orange color denotes a perfect insulating behavior.

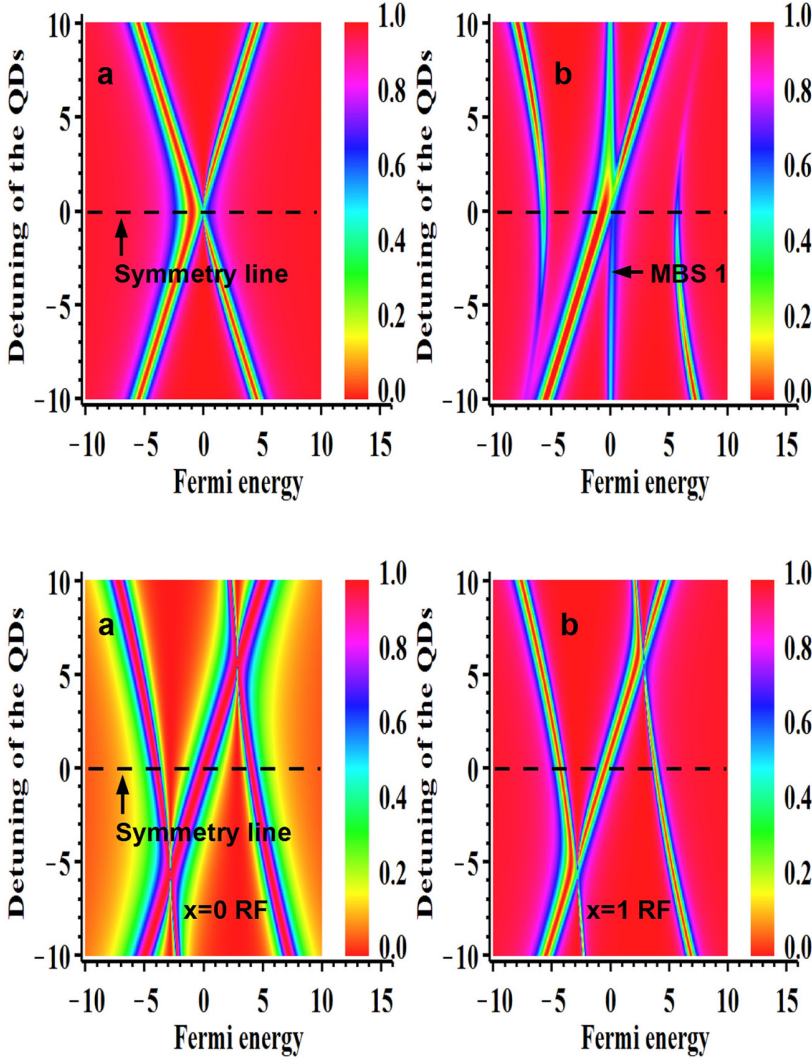


FIG. 3. Density plot of the transmittance (Eq. (14)) as a function of the symmetric detuning $\Delta\epsilon$ for the QDs and the Fermi energy ϵ in units of Δ for the opposite Fano regime $x=1$ ($q_b=0$): the central structure at $\epsilon=0$ gives the reversed ZBA due to the MBS 1. In panels (a) and (b) the red regions denote a perfect conducting behavior, which is the reversed of that found in Fig. 2.

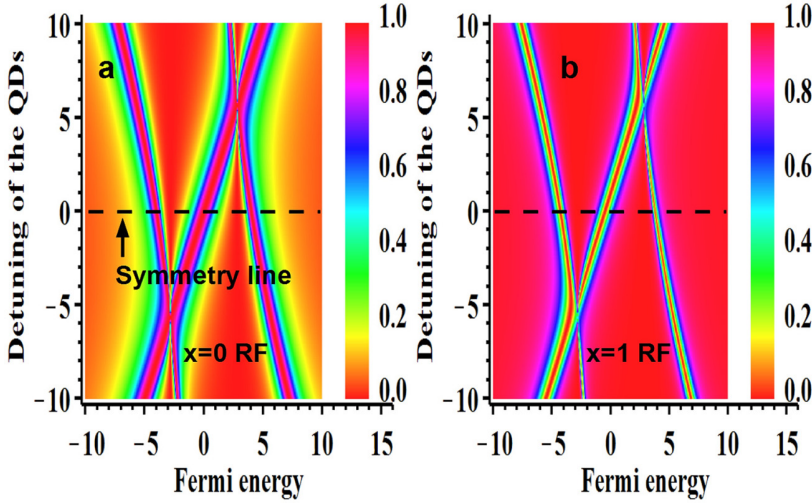


FIG. 4. Density plot of the transmittance (Eq. (14)) as a function of the symmetric detuning $\Delta\epsilon$ for the QDs and the Fermi energy ϵ in units of Δ for a RF zero mode coupled to the interferometer in opposite Fano regimes: (a) $x=0$ ($q_b \rightarrow \infty$) and (b) $x=1$ ($q_b=0$).

these diagonals with respect to those observed in Figs. 2(a) and 3(a) obtained with $\Sigma_{\text{MBS1}} = 0$.

Fig. 4 shows the analysis of the transmittance for the Fano limits $x=0$ and $x=1$ in the case of a RF zero mode coupled to the interferometer via QD 1. As we can verify, the symmetry breaking is distinct with respect to that observed in the situation of a Kitaev wire present: the patterns of Figs. 2(b) and 3(b) do not match with those found in Figs. 4(a) and 4(b), respectively. Consequently, this difference ensures that the patterns of Figs. 2(b) and 3(b) constitute robust signatures due to an isolated MBS. In which concerns on the remaining diagonals of the QD 2 for the RF zero mode, the change in the slopes are weaker than for the MBS 1, since in the RF situation the self-energy Σ_{RF} is just proportional to λ^2 .

In Fig. 5, we present the transmittance through the interferometer for the leads in resonance with the MBS 1 for the case of weak coupling lead-lead characterized by $x=0$ ($q_b \rightarrow \infty$). This regime corresponds to the situation whereby electrons travel exclusively via the QDs, which are also in resonance with the MBS 1. Two distinct wire lengths are analyzed: (i) the semi-infinite Kitaev wire and (ii), the case of a finite system. For the setup (i) given by $\epsilon_M = 10^{-7}$, it is

possible to notice in the red lineshape that the transmittance approaches half for $|\Delta\epsilon| \rightarrow \infty$, while it evolves towards the unity in the limit $|\Delta\epsilon| \rightarrow 0$.

The unitary value of the transmittance occurs for the QDs in resonance with the MBS 1 ($\Delta\epsilon = 0$), thus leading to

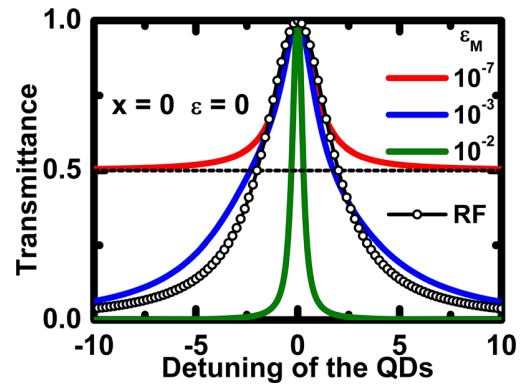


FIG. 5. Transmittance of Eq. (14) as a function of the symmetric detuning $\Delta\epsilon$ with Fermi energy $\epsilon = 0$ in units of Δ within the symmetric Fano regime $x=0$ for different lengths L of the Kitaev wire given by the parameter $\epsilon_M \sim e^{-L/\xi}$ in Eq. (2) as well as for the case of a RF zero mode.

the maximum transmittance, since the two QDs and the MBS 1 allow a perfect resonant tunneling through the Fermi level of the leads. Away from $\Delta\varepsilon = 0$, the transmittance becomes half the unity as a result of the isolated MBS 1, which is a half-electron state (see the semi-sphere in the left side of the Kitaev wire of Fig. 1) and the only piece of the system in resonance with the Fermi level of the leads. For $0 < |\Delta\varepsilon| < \infty$, the resonant tunneling due to the QDs is not perfect and the transmittance stays within the range $1/2 < \mathcal{T} < 1$. For the setup (ii), an unitary fluctuation in the transmittance as a function of $\Delta\varepsilon$ emerges in opposite to the value of half observed in the system (i): see the curves given by the blue and green colors, respectively, for $\varepsilon_M = 10^{-3}$ and $\varepsilon_M = 10^{-2}$. In both profiles, we verify that the transmittance reaches the unity for $\Delta\varepsilon = 0$, but it vanishes as we increase $|\Delta\varepsilon|$.

The variation of the maximum value of the transmittance has a simple physical origin: it arises from the presence of the MBS 2 (see the semi-sphere in the right side of the Kitaev wire of Fig. 1), which combines with the MBS 1 in order to form the regular and delocalized fermionic state η as Eq. (15) shows. Such a regular fermion adds an extra factor of half to the fluctuation of $\mathcal{T}$ and provides the unitary

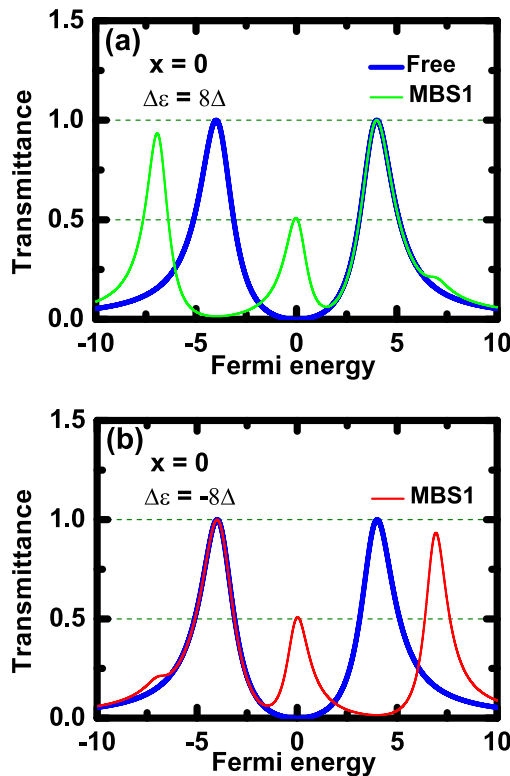


FIG. 6. Transmittance determined by Eq. (14) as a function of the Fermi energy ε in units of Δ in the Fano regime $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$) for the double QD setup of Fig. 1 with $\varepsilon_M = 10^{-7}$. In panel (a), we use $\Delta\varepsilon = 8\Delta$: the solid-green lineshape is for the situation of the MBS 1 present, while the blue curve corresponds to the free interferometer in which the Kitaev wire is absent. Panel (b): for the reversed detuning $\Delta\varepsilon = -8\Delta$, only the pronounced satellite peaks of the QDs in the free case (solid-blue lineshape) and the ZBA in the solid-red lineshape remain placed at the same positions with respect to those found in panel (a). In both panels a Majorana peak (ZBA) rises characterized by an amplitude nearby $1/2$. Such a central structure is robust against the gates swap in contrast to the pronounced satellite peaks of the QDs when the Kitaev wire is side-coupled to one of these dots.

suppression of the transmittance for $|\Delta\varepsilon| \rightarrow \infty$. Additionally, the bigger ε_M the shorter the length of the Kitaev wire according to the term $\varepsilon_M \sim e^{-L/\xi}$ in Eq. (2) and sharper the widths of the profiles of the transmittance as a function of $\Delta\varepsilon$ (notice that the green line is sharper than the corresponding blue one).

In situations (i) and (ii), the Fano effect is symmetric since the left and right sides of Fig. 5 are specular. We also show in Fig. 5 the interferometer hybridized with a RF zero mode instead of a MBS 1. Such a curve is given by the black-circle lineshape, in which we can notice that the fluctuation of the transmittance is still one as expected from the regular nature of the electronic state of the QD. However, the width of the resonance differs from those found in the finite wires analyzed as the aftermath of the functional form of the self-energy Σ_{RF} , which is size independent in opposite to Σ_{MBS1} .

In Fig. 6, we analyze the profiles of the transmittance as a function of the Fermi energy for fixed detunings $\Delta\varepsilon$ within the Fano limit $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$) in the situations of the semi-infinite Kitaev wire ($\varepsilon_M = 10^{-7}$) present and absent. To that end, we account two distinct scenarios: (a) $\Delta\varepsilon > 0$ and (b) $\Delta\varepsilon < 0$. The features of the former are printed in panel (a) where we can clearly visualize a couple of pronounced satellite peaks both in the solid-blue and green lineshapes, which are due to the imposed detuning $\Delta\varepsilon = 8\Delta$ for the QDs. Note that in the MBS 1 case (solid-green lineshape) the detuning is bigger than that observed in the free case (solid-blue lineshape of panel (a)) as expected due to the renormalization of

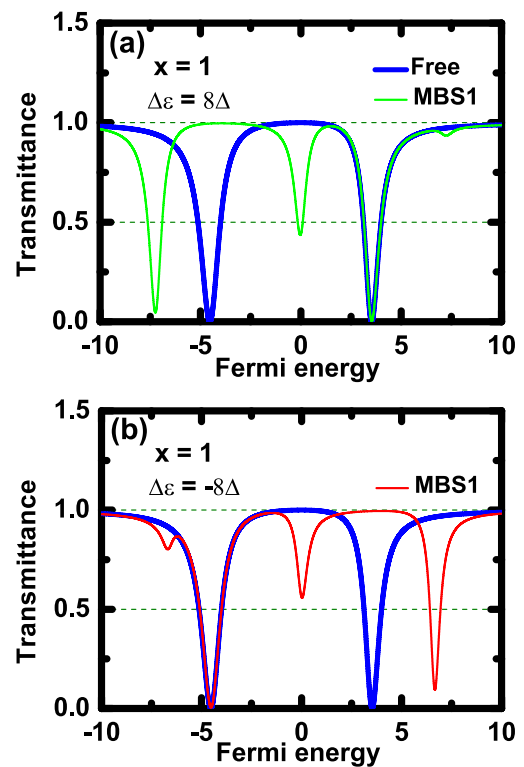


FIG. 7. Transmittance determined by Eq. (14) as a function of the Fermi energy ε in units of Δ in the Fano regime $x = 1$ ($q_b = 0$) for the double QD setup of Fig. 1 with $\varepsilon_M = 10^{-7}$. Panels (a) and (b): reversed patterns of panels (a) and (b) of Fig. 6.

the level $\varepsilon_1 = -4\Delta$ of the QD 1 hybridized with the Kitaev wire, since the QD 2 with $\varepsilon_2 = 4\Delta$ is decoupled from it as outlined in Fig. 1. For panel (b) in which $\Delta\varepsilon = -8\Delta$, the positions of the pronounced satellite peaks in the transmittance for the free interferometer (blue curve) as well as that of the ZBA in the solid-red lineshape (MBS 1 case) persist as those observed in panel (a). On the other hand, the pronounced satellite peaks in presence of the MBS 1 (red curve) do not as a result of the symmetry-breaking feature previously discussed for the system Green's functions. We stress that the ZBA is then immune against the swapping of gates thus revealing the robustness of the MBS 1, being characterized by a transmittance amplitude close to 1/2.

Fig. 7 contrasts the transmittance patterns of Fig. 6. The Fano regime $x = 1$ ($q_b = 0$) replaces the resonances in Fig. 6 by the antiresonances of Fig. 7 as can be seen in panels (a) and (b) of the same figure. Thus the ZBA is a Majorana dip that drops to above or below 1/2 depending on the sign of $\Delta\varepsilon$. A detailed discussion on the mechanism of such a fluctuation is addressed in Ref. 13 for an analogous Scanning Tunneling Microscope system. To remove this instability of the Majorana fingerprint, the QD 2 should be discarded by keeping $\varepsilon_M = 10^{-7}$ as shown in Figs. 8(a) and 8(b): in the single QD setup the dip of the transmittance stabilizes at 1/2

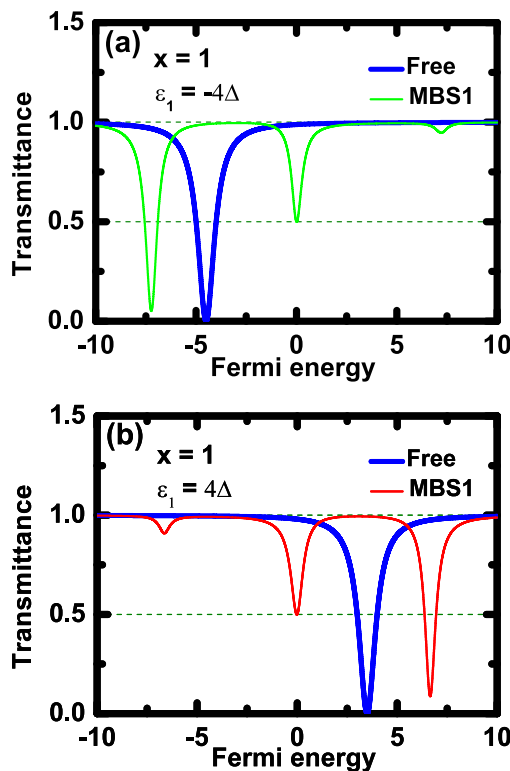


FIG. 8. Transmittance determined by Eq. (14) as a function of the Fermi energy ε in units of Δ in the Fano regime $x = 1$ ($q_b = 0$) for the situation without the QD 2 in the setup of Fig. 1 by considering $\varepsilon_M = 10^{-7}$. In panel (a), we use $\varepsilon_1 = -4\Delta$: the solid-green lineshape is for the situation of the MBS 1 present, while the blue curve corresponds to the free interferometer in which the Kitaev wire is absent. Panel (b): For the reversed QD level $\varepsilon_1 = 4\Delta$, the pronounced satellite dip of the QD 1 in the free case (solid-blue lineshape) appears above the Fermi level of the leads as expected and the ZBA in the solid-red lineshape persists as observed in panel (a). Thus in both panels a Majorana dip (ZBA) emerges characterized by an amplitude of 1/2.

both for $\varepsilon_1 = -4\Delta$ and $\varepsilon_1 = 4\Delta$. The independence of this hallmark with the gate voltage for a single QD also occurs in the opposite Fano limit $x = 0$ ($q_b \rightarrow \infty$) as widely treated in Ref. 12.

Additionally, we can conclude from Fig. 8 that the single QD setup avoids the manifestation of the symmetry-breaking feature in the system Green's functions, which are present in the double QD version of the interferometer as we have demonstrated in this work. Thus the methodology proposed here to pursuit Majorana bound states is not feasible by considering only one dot: the employment of a couple of QDs allows us to explore how the aforementioned symmetry is broken in distinct scenarios as those with a free interferometer, a side-coupled regular fermion and a Kitaev wire within the topological phase. Each one breaks the symmetry by its own way and the differences between these cases reveal the Majorana way of symmetry breaking: the signature of a Majorana is not restricted to the vicinity of the ZBA due to the zero mode nature of such an excitation, it spreads over the entire space spanned by ε and $\Delta\varepsilon$ in the density plots of panels (b) for Figs. 2 and 3. Panels (a) of Figs. 2 and 3 as well as Fig. 4 exhibit non Majorana fingerprints due to distinguished ways of breaking the symmetry property under consideration.

IV. CONCLUSIONS

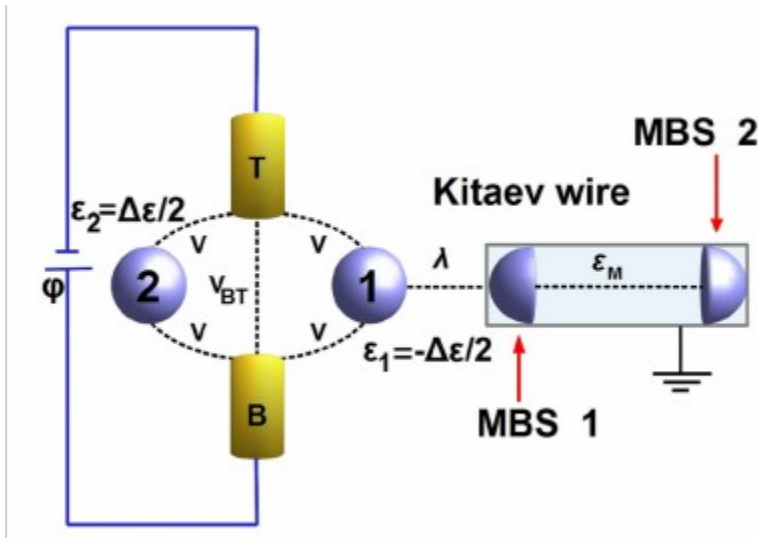
In summary, we have explored theoretically a semi-infinite Kitaev wire within the topological phase coupled to a double QD system. Our analysis reveals that the Green's functions of the QDs are antisymmetric under the permutation of the indexes that label the parameters of these dots. We propose that such a feature can be probed experimentally just by measuring the zero-bias conductance as a function of the Fermi energy of the leads and the symmetric detuning of the QDs levels.

Thereby, our results reveal a strong dependence of the transmittance on contrasting Fano regimes of interference, where conducting and insulating regions emerge as signatures of a single Majorana fermion excitation. We have demonstrated that the symmetric Fano interference is recovered in particular for the electron tunneling only via the QDs and with the metallic leads in resonance with the Majorana zero mode, thus resulting in a fluctuation of the transmittance given by half or unity, respectively, for a semi-infinite or finite Kitaev wire. The former situation corresponds to an isolated Majorana excitation, while the latter represents the bounding of two distant Majoranas and the formation of a nonlocal Dirac fermion. Both scenarios can be helpful to guide experiments whose purpose is to pursuit the existence of a single Majorana fermion or a pair formed by such a quasiparticle in condensed matter systems.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Brazilian agencies CNPq, CAPES, FAPEMIG, PROPe/UNESP, and 2014/14143-0 São Paulo Research Foundation (FAPESP). A. C. Seridonio and F. A. Dessotti are grateful to P. Sodano for valuable discussions.

- ¹J. Alicea, *Rep. Prog. Phys.* **75**, 076501 (2012).
- ²K. Flensberg, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 090503 (2012).
- ³M. Leijnse and K. Flensberg, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 210502 (2012).
- ⁴A. Y. Kitaev, *Phys. Usp.* **44**, 131 (2001).
- ⁵A. A. Zyuzin, D. Rainis, J. Klinovaja, and D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 056802 (2013).
- ⁶D. Rainis, J. Klinovaja, L. Trifunovic, and D. Loss, *Phys. Rev. B* **87**, 024515 (2013).
- ⁷A. Zazunov, P. Sodano, and R. Egger, *New J. Phys.* **15**, 035033 (2013).
- ⁸Y. Cao, P. Wang, G. Xiong, M. Gong, and X.-Q. Li, *Phys. Rev. B* **86**, 115311 (2012).
- ⁹Y.-X. Li and Z. M. Bai, *J. Appl. Phys.* **114**, 033703 (2013).
- ¹⁰N. Wang, S. Lv, and Y. Li, *J. Appl. Phys.* **115**, 083706 (2014).
- ¹¹D. E. Liu and H. U. Baranger, *Phys. Rev. B* **84**, 201308(R) (2011).
- ¹²E. Vernek, P. H. Penteado, A. C. Seridonio, and J. C. Egues, *Phys. Rev. B* **89**, 165314 (2014).
- ¹³A. C. Seridonio, E. C. Siqueira, F. A. Dessotti, R. S. Machado, and M. Yoshida, *J. Appl. Phys.* **115**, 063706 (2014).
- ¹⁴A. Ueda and T. Yokoyama, *Phys. Rev. B* **90**, 081405(R) (2014).
- ¹⁵C.-H. Lin, J. D. Sau, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **86**, 224511 (2012).
- ¹⁶V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, *Science* **336**, 1003 (2012).
- ¹⁷A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, and H. Shtrikman, *Nat. Phys.* **8**, 887 (2012).
- ¹⁸E. J. H. Lee, X. Jiang, M. Houzet, R. Aguado, C. M. Lieber, and S. De Franceschi, *Nat. Nanotechnol.* **9**, 79 (2014).
- ¹⁹E. J. H. Lee, X. Jiang, R. Aguado, G. Katsaros, C. M. Lieber, and S. De Franceschi, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 186802 (2012).
- ²⁰U. Fano, *Phys. Rev.* **124**, 1866 (1961).
- ²¹A. W. Holleitner, C. R. Decker, H. Qin, K. Eberl, and R. H. Blick, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 256802 (2001).
- ²²T. Hatano, T. Kubo, Y. Tokura, S. Amaha, S. Teraoka, and S. Tarucha, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 076801 (2011).
- ²³The current lack of symmetry in the system Green's functions was verified previously in an STM system with adatoms,¹³ but for a Fermi energy in resonance with the Majorana zero mode. In the case of a setup composed by QDs as the proposed in this manuscript, the Fermi level is an experimentally tunnable parameter thus allowing the feasibility of a situation away from the resonance condition.
- ²⁴H. Haug and A. P. Jauho, *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors*, Solid-State Sciences Vol. 123 (Springer, New York, 1996).
- ²⁵The EOM method can be found in great deal in K. Flensberg, *Phys. Rev. B* **82**, 180516(R) (2010) and within its supplementary material.
- ²⁶W. Hofstetter, J. König, and H. Schoeller, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 156803 (2001).
- ²⁷Q. F. Sun and H. Guo, *Phys. Rev. B* **66**, 155308 (2002).



Físicos brasileiros propõem modelo experimental para detectar férmion de Majorana

17 de novembro de 2014

Por José Tadeu Arantes

Agência FAPESP – Em 1938, Ettore Majorana, um físico italiano de 31 anos, desapareceu

sem deixar vestígios. Seu orientador, Enrico Fermi, que naquele mesmo ano ganhou o prêmio Nobel de Física, o comparou ao inglês Isaac Newton (1643-1727), posicionando-o vários degraus acima dos maiores expoentes de uma época fértil em gênios científicos.

As habilidades matemáticas de Majorana eram prodigiosas. Costumava esboçar proposições teóricas sofisticadas em maços de cigarro, que, depois, amassava e jogava fora, classificando aqueles escritos como pueris. Em março de 1932, propôs, alguns meses antes do alemão Werner Heisenberg (1901-1976), um modelo do núcleo atômico como constituído por prótons e nêutrons. Mas, apesar da insistência de Fermi, recusou-se a publicar qualquer artigo a respeito.

Quando desapareceu, suspeitou-se de que havia sido sequestrado pelo regime fascista de Benito Mussolini, porque sabia demais. Depois, verificou-se que planejava meticulosamente a desapareição.

Outras [hipóteses](#) foram apresentadas: fugiu porque, sabendo do potencial destrutivo da energia nuclear, não queria ser obrigado a trabalhar para os fascistas na produção da bomba atômica; fugiu porque, movido por uma intensa aspiração mística, decidiu isolar-se em um mosteiro ou transformar-se em andarilho. Há suspeitas de que tenha se refugiado na Argentina, passando a ganhar a vida como engenheiro. Mas não existe prova conclusiva sobre quaisquer dessas suposições.

Dos poucos trabalhos que publicou, o mais famoso foi [Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone](#) (*Teoria simétrica do elétron e do pósitron*), datado de 1937. Nele, apresentou a hipótese de uma partícula que teria a si mesma como antipartícula. A existência do neutrino

acabara de ser postulada por Fermi e Wolfgang Pauli, e Majorana sugeriu que o neutrino poderia ser essa partícula.

Genericamente, essa partícula hipotética, que é sua própria antipartícula, recebe o nome de férmion de Majorana. Oito décadas depois de sua proposição, o férmion de Majorana continua a suscitar forte interesse na comunidade dos físicos. As pesquisas atuais em relação a ele enfocam não apenas o neutrino, mas também quase-partículas constituídas por excitações em supercondutores.

“No contexto da matéria condensada [em que o número de constituintes do sistema (átomos, elétrons etc.) é extremamente elevado, produzindo interações muito intensas entre eles], os férmions de Majorana poderiam se manifestar não como partículas reais, a exemplo dos prótons ou dos elétrons, mas como quase-partículas, ou partículas aparentes, que descrevem o estado do supercondutor”, disse o físico Antonio Carlos Ferreira Seridonio, professor do Departamento de Física e Química da Universidade Estadual Paulista (Unesp), no campus de Ilha Solteira (SP), à **Agência FAPESP**.

Seridonio é coautor do artigo “[Probing the antisymmetric Fano interference assisted by a Majorana fermion](#)”, recentemente publicado como matéria de capa pelo periódico *Journal of Applied Physics*.

O artigo propõe um modelo experimental para a obtenção do férmion de Majorana. Tal modelo foi concebido por um grupo de pesquisadores e pós-graduandos da Unesp em Ilha Solteira e em Rio Claro e da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), liderados por Seridonio, Valdeci Mariano de Souza (Unesp-Rio Claro) e Fabrício Macedo de Souza (UFU).

O primeiro autor do artigo, Fernando Augusto Dessotti, é doutorando sob a orientação de Seridonio. E o segundo, o mestrando [Luciano Henrique Siliano Ricco](#), tem o apoio da FAPESP em pesquisa que trata do tema da matéria publicada.

Um sistema considerado forte candidato a exibir os férmions de Majorana enquanto quase-partículas é o chamado “[fio de Kitaev](#)”, proposto pelo físico russo Alexei Kitaev (nascido em 1963), atualmente professor do California Institute of Technology (Caltech), nos Estados Unidos.

“Em 2001, trabalhando na Microsoft, Kitaev dedicou-se ao objetivo de encontrar uma unidade básica para a computação quântica [o qubit ou bit quântico], que fosse capaz de resistir a perturbações externas do meio, possibilitando assim a construção do computador quântico. O modelo apresentado por ele consistiu em um fio finito supercondutor. Quando tal fio se encontra em uma condição específica, chamada de fase topológica, seria possível isolar um majorana em cada uma de suas pontas. E esse par de quase-partículas comporia o bit quântico”, relatou Seridonio.

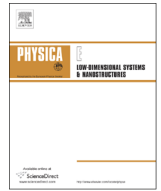
O artigo publicado por Seridonio e seu grupo no *Journal of Applied Physics* descreve uma via experimental para a detecção dessas quase-partículas. “Os componentes do aparato experimental que propomos já foram produzidos experimentalmente. Faltava integrá-los. Acreditamos que é uma questão de tempo para que isso ocorra. E o nosso trabalho aponta um caminho para isso”, afirmou.

O aparato utiliza um interferômetro de elétrons (empregado no estudo do comportamento ondulatório dos elétrons) semelhante ao interferômetro de Bohm-Aharonov [idealizado no final da década de 1950 pelo físico norte-americano naturalizado brasileiro David Bohm (1917 – 1992) e pelo físico israelense Yakir Aharonov (1932), então seu orientando].

“Nossa ideia foi acoplar esse interferômetro a um fio de Kitaev na fase topológica. O transporte de elétrons no interferômetro ficaria afetado pelos majoranas presentes nas pontas do fio de Kitaev. E, por meio da alteração produzida nos espectros das ondas eletrônicas, seria possível caracterizar os majoranas”, explicou Seridonio.

“Para o futuro, utilizaremos o interferômetro proposto para explorar uma outra classe de majoranas, as que geram uma corrente de quase-partículas nas bordas de um supercondutor”, acrescentou o pesquisador.

O artigo *Probing the antisymmetric Fano interference assisted by a Majorana fermion* (doi: 10.1063/1.4898776), de F.A. Dessotti e outros, pode ser lido em <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/116/17/10.1063/1.4898776>.



Effect of interdots electronic repulsion in the Majorana signature for a double dot interferometer



L.S. Ricco^a, Y. Marques^a, F.A. Dessotti^a, M. de Souza^{b,1}, A.C. Seridonio^{a,b,*}

^a Departamento de Física e Química, Unesp – Univ Estadual Paulista, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil

^b IGCE, Unesp – Univ Estadual Paulista, Departamento de Física, 13506-900, Rio Claro, SP, Brazil

HIGHLIGHTS

- The zero anomaly of a Majorana exists when interdots Coulomb interaction is finite.
- The ratio between Coulomb energy and the wire coupling modifies the zero anomaly.
- The swap between the levels of the dots changes the Majorana zero-bias peak.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 3 November 2015

Received in revised form

18 November 2015

Accepted 19 November 2015

Available online 22 November 2015

Keywords:

Kitaev wire

Double dot interferometer

Majorana bound states

Quantum dots

Fano effect

ABSTRACT

We investigate theoretically the features of the Majorana hallmark in the presence of Coulomb repulsion between two quantum dots describing a spinless double dot interferometer, where one of the dots is strongly coupled to a Kitaev wire within the topological phase. Such a system has been originally proposed without Coulomb interaction in Dessotti et al. (2014 [16]). Our findings reveal that for dots in resonance, the ratio between the strength of Coulomb repulsion and the dot-wire coupling changes the width of the Majorana zero-bias peak for both Fano regimes studied, indicating thus that the electronic interdots correlation influences the Majorana state lifetime in the dot hybridized with the wire. Moreover, for the off-resonance case, the swap between the energy levels of the dots also modifies the width of the Majorana peak, which does not happen for the noninteracting case. The results obtained here can guide experimentalists that pursuit a way of revealing Majorana signatures.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Recently, the pursuit for Majorana quasiparticles in condensed matter systems has attracted a lot of attention, since they are one of the most promising candidates to build a quantum bit, the fundamental structure of quantum computation [1,2]. In this sense, topological superconductors have been broadly studied, once they can host zero-energy modes of Majorana bound states (MBSs) in their edges [3–5]. The Kitaev wire within the topological phase is an example [3], since in such a proposal a 1D topological *p*-wave superconductor gives rise to MBSs attached to its edges. Experimentally, this setup can be implemented by putting a semiconductor nanowire, with strong spin–orbit coupling, close to

an *s*-wave superconductor and under an external magnetic field. In this situation, *p*-wave topological superconductivity is induced in the nanowire by the so-called proximity effect [6–9].

The MBSs can be detected in electronic transport measurements by attaching quantum objects to them, as for instance quantum dots (QDs) [10–21]. In the case of a single QD coupled to a MBS, a zero-bias anomaly (ZBA) is theoretically predicted to appear in the conductance, with amplitude $0.5G_0$, where $G_0 = e^2/h$ is the quantum of conductance [13]. The emergence of the ZBA is due to the leaking of the MBS zero-mode into the QD [14]. Such an anomaly was first detected experimentally by Mourik et al. [19], where the MBSs are supposed to exist once the ZBA in the conductance persists even at high gate voltages and magnetic fields. However, another physical phenomena can lead to the ZBA, as for instance the Kondo effect. Within this perspective, the detection of Majorana excitations becomes inconclusive.

Alternatives have been proposed in order to obtain the MBSs, involving ferromagnetic chains on top of *s*-wave superconductors with strong spin–orbit parameter [23–27]. Such a setup allows the

* Corresponding author at: Departamento de Física e Química, Unesp – Univ Estadual Paulista, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil.

E-mail address: seridonio@dfq.feis.unesp.br (A.C. Seridonio).

¹ Current address: Institute of Semiconductor and Solid State Physics, Johannes Kepler University Linz, Austria.

emulation of the Kitaev wire, once the p -wave topological superconductivity is induced in the ferromagnetic atoms, yielding MBSs at the chain boundaries. Recently, this proposal has been accomplished experimentally, by using Fe atoms on a Pb superconductor surface [26]. The electronic conductance features have been measured by using an STM tip, in which the ZBA was verified at the ends of the Fe chain, thus suggesting the presence of MBSs. However, the ZBA obtained cannot be associated exclusively to the presence of MBSs [28] and, therefore the issue of Majorana detection has not been solved completely yet.

In this scenario, in order to detect MBSs new proposals become necessary. In our previous work [16], we proposed theoretically a helpful tool to detect MBSs in a system composed by a spinless double dot interferometer, with two noninteracting QDs, where one of them is coupled to one edge of the Kitaev wire within the topological phase. Such a spinless system can be achieved experimentally by applying a magnetic field strong enough to provide a Zeeman splitting in the energy levels of the QDs and metallic leads as well. Thus, just one spin orientation prevails. We found that the ZBA is robust and independent on the Fano regime of interference [29]. Additionally, we developed a novel manner to verify the presence of MBSs, which looks beyond the ZBA signature: through simulations of transmittance as a function of the detuning for the energy levels of the QDs and Fermi energy for the metallic leads, we found that a MBS has a particular way of breaking the symmetry of such transmittance profiles, which can be experimentally accessed by conductance measurements. Here we explore the same device studied in the previous work (Fig. 1), but now we consider the Coulomb repulsion between the QDs employing the Hubbard I approximation [30] in order to close the system of Green functions. Such a mean field approach is valid for $T \gg T_K$, where T_K is the Kondo temperature [31]. Interestingly enough, it is possible to observe a Kondo peak even in the absence of the spin degree of freedom in our double dot system, i.e. in the spinless regime. Such a specific condition is requested to ensure the topological superconductivity in the framework of the Kitaev wire. According to Ref. [31], the spinless Hamiltonian for a double dot setup can be mapped into an effective one describing a single dot, in which the spin degree of freedom is restored, thus allowing the possibility of the Kondo effect when $T \ll T_K$. In this case, the *pseudo* localized moment of the dot is screened by those from the effective conduction band of the model via an antiferromagnetic exchange interaction, as in the standard Kondo effect. Such a

phenomenon can be prevented for $T \gg T_K$, which is the range wherein this work focus on, thus ensuring the employment of the Hubbard I approach. Such a method is a well-established procedure in the literature that allows to catch the key features concerning the Physics away from the Kondo limit. Otherwise, the ZBA would be the outcome of a competition between the Majorana and Kondo phenomena [32].

Our findings reveal that the ZBA 0.5 characteristic amplitude of the MBS remains even in the presence of Coulomb repulsion between the QDs, with slight fluctuations around such a value. However, for the case of QDs in resonance, the ratio between the Coulomb repulsion and the QD-wire coupling modifies the ZBA width, revealing thus that the electronic interdots repulsion affects the Majorana state lifetime in the QD. Moreover, in the interacting system the width of the Majorana signature also is influenced by swapping the energy levels of the QDs, which does not occur without Coulomb repulsion.

2. Theoretical model

To describe the system presented in Fig. 1 we use the Hamiltonian inspired on the original proposal from Liu and Baranger [13]

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha k} \tilde{\epsilon}_{\alpha k} c_{\alpha k}^\dagger c_{\alpha k} + \sum_j \epsilon_j d_j^\dagger d_j + U d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 + \mathcal{H}_{\text{lead-dot}} + \mathcal{H}_{\text{lead-lead}} + \mathcal{H}_{\text{MBSs}}, \quad (1)$$

where the operator $c_{\alpha k}^\dagger$ ($c_{\alpha k}$) creates (annihilates) an electron in the lead $\alpha = B/T$ (Bottom/Top), with energy $\tilde{\epsilon}_{\alpha k} = \epsilon_k - \mu_\alpha$, wherein μ_α as the chemical potential and k is the wave number. We consider $\mu_B - \mu_T = 2\Delta\mu = e\varphi$ as the bias between the leads, where $e > 0$ is the electron charge and φ is the bias-voltage. $d_j^\dagger$ (d_j) creates (annihilates) an electron in the state ϵ_j in the QDs and U is the interdots Coulomb repulsion, with $j = 1, 2$. $\mathcal{H}_{\text{lead-dot}} = V \sum_{\alpha k j} (c_{\alpha k}^\dagger d_j + \text{H. c.})$, where V is the coupling amplitude between the leads and the QDs, and $\mathcal{H}_{\text{lead-lead}} = V_{BT} \sum_{kp} (c_{Bk}^\dagger c_{Tp} + \text{H. c.})$, with V_{BT} being the direct lead-lead hybridization. Furthermore,

$$\mathcal{H}_{\text{MBSs}} = i\epsilon_M \Psi_1 \Psi_2 + \lambda (d_1 - d_1^\dagger) \Psi_1 \quad (2)$$

describes an effective model for the Kitaev wire within the topological phase, where $\Psi_l = \Psi_l^\dagger$ is the Majorana operator, with $l = 1, 2$. The MBS 1 Ψ_1 and MBS 2 Ψ_2 are connected via $\epsilon_M \sim e^{-L/\xi}$, where L is the distance between them and ξ is the superconductor coherence length. The coupling strength between the MBS 1 and QD 1 is λ . According to the Landauer–Büttiker formula [33] for the zero-bias regime, the conductance depends on the transmittance $\mathcal{T}(\epsilon)$ as follows:

$$G = G_0 \int d\epsilon \left(-\frac{\partial f_F}{\partial \epsilon} \right) \mathcal{T}(\epsilon), \quad (3)$$

where f_F is the Fermi–Dirac distribution.

In order to obtain the transmittance, within the wide band limit, we perform the transformations $c_{Bk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{ek} + c_{ok})$ and $c_{Tk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{ek} - c_{ok})$ in the Hamiltonian of Eq. (1), which depends on the *even* and *odd* conduction operators c_{ek} and c_{ok} , respectively. Thus, Eq. (1) becomes $\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{tun}} = \mathcal{H}_{\varphi=0} + \mathcal{H}_{\text{tun}}$, where

$$\mathcal{H}_e = \sum_k \epsilon_k c_{ek}^\dagger c_{ek} + \sum_j \epsilon_j d_j^\dagger d_j + U d_1^\dagger d_1 d_2^\dagger d_2 + \sqrt{2}V \sum_{jk} (c_{ek}^\dagger d_j + \text{H. c.}) + V_{BT} \sum_{kp} c_{ek}^\dagger c_{ep} + \mathcal{H}_{\text{MBSs}} \quad (4)$$

describes effectively the couplings between leads and QDs via the

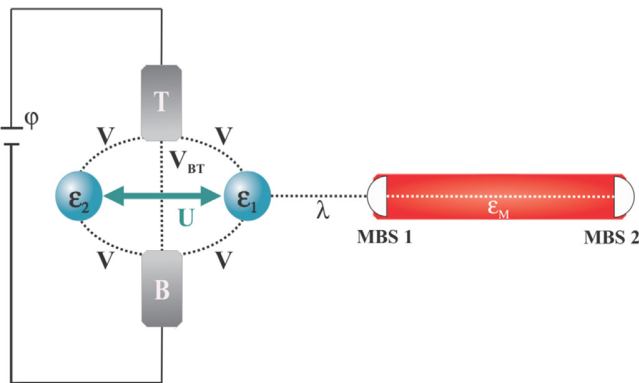


Fig. 1. Sketch of the system proposed: a Kitaev wire hosting Majorana bound states (MBSs) in its edges (white half-spheres) side-coupled to a spinless double dot interferometer. This device is composed by metallic leads (Bottom(B) and Top(T)) and two quantum dots, with energy levels ϵ_1 and ϵ_2 , respectively. U represents the intensity of the interdots Coulomb repulsion, V is the tunneling amplitude between the QDs and leads. The coupling lead-lead is given by V_{BT} . The wire is coupled to the QD 1 by the strength λ . The overlap between the wave functions of the MBS 1 and MBS 2 is denoted by ϵ_M and φ is the bias-voltage of the setup.

strength $\sqrt{2}V$ and $\mathcal{H}_0 = \sum_k \varepsilon_k c_{0k}^\dagger c_{0k} - V_{BT} \sum_{kp} c_{0k}^\dagger c_{op}$ is for the part of the system decoupled from the QDs. $\mathcal{H}_e$ is connected to $\mathcal{H}_0$ by the tunneling Hamiltonian $\mathcal{H}_{\text{tun}} = -\Delta\mu \sum_k (c_{ek}^\dagger c_{ok} + c_{ok}^\dagger c_{ek})$, which in the zero-bias regime is perturbative, since $\Delta\mu \rightarrow 0$ due $\varphi \rightarrow 0$. Thus, according to the linear response theory and by applying the equation of motion method (EOM) [33], the transmittance [16] is given by

$$\frac{\mathcal{T}(\varepsilon)}{\mathcal{T}_b} = 1 + (1 - q_b^2) \tilde{r} \sum_{jj} \text{Im}(\tilde{\mathcal{G}}_{dj, d_j}) + 2q_b \tilde{r} \sum_{jj} \text{Re}(\tilde{\mathcal{G}}_{dj, d_j}), \quad (5)$$

where $\mathcal{T}_b = \frac{4x}{(1+x)^2}$ represents the background transmittance with $x = (\pi\rho_0 V_{BT})^2$, ρ_0 is the leads density of states, $\tilde{r} = \frac{\Gamma}{1+x}$ is an effective QD-leads coupling, with $\Gamma = 2V^2\pi\rho_0$, and $q_b = \sqrt{\frac{\mathcal{R}_b}{\mathcal{T}_b}} = \frac{(1-x)}{2\sqrt{x}}$ is the Fano parameter [29,34], where $\mathcal{R}_b$ represents the corresponding background reflectance.

With the aim to get the retarded Green functions of the system, we first express the Majorana operators Ψ_1 and Ψ_2 in terms of a nonlocal regular fermion state f , according to the following relations: $\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f^\dagger + f)$ and $\Psi_2 = i\frac{1}{\sqrt{2}}(f^\dagger - f)$, with $f \neq f^\dagger$ and $[f, f^\dagger]_+ = 1$. Then, Eq. (2) becomes $\mathcal{H}_{\text{MBSs}} = \varepsilon_M(f^\dagger f - \frac{1}{2}) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_1 f^\dagger + f d_1^\dagger) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(d_1 f - d_1^\dagger f^\dagger)$.

The EOM procedure [33] can be summarized as

$$(\varepsilon + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{AB}} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}^\dagger]_+ + \tilde{\mathcal{G}}_{[\mathcal{A}, \mathcal{H}_i] \mathcal{B}}, \quad (6)$$

where $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{AB}}$ represents the retarded Green function in the energy domain ε , with $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ as fermionic operators belonging to the Hamiltonian $\mathcal{H}_i$. The Green function for the QD in the time domain t is definite by

$$\mathcal{G}_{d_j d_l}(t) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \text{Tr}\{\rho_e [d_j(t), d_l^\dagger(0)]_+\}, \quad (7)$$

wherein $\theta(t)$ is the Heaviside step function and ρ_e is the density-matrix for Eq. (4). By applying the EOM procedure in Eq. (7), we obtain

$$(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma - \delta_{j1} \Sigma_{\text{MBS1}}) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} = \delta_{jl} + \Sigma \left[\sum_{l \neq j} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_l} \right] + U [\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_j, d_l} + \lambda^2 \tilde{K} \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_j, d_l}], \quad (8)$$

where the index $\bar{j}$ represents the opposite of j , i.e., $j \leftrightarrow \bar{j} \equiv 1 \leftrightarrow 2$, with $\Sigma = -\frac{(\sqrt{x}+i)}{1+x} \Gamma$ and $\Sigma_{\text{MBS1}} = \lambda^2 K (1 + \lambda^2 \tilde{K})$ as the self-energies that appear in the noninteracting case [16], where $K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_M + i0^+} + \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon_M + i0^+} \right)$, $\tilde{K} = \frac{K}{\varepsilon + \varepsilon_1 + \tilde{\Sigma} - \lambda^2 K}$ and $\tilde{\Sigma}$ is the complex conjugate of Σ . We point out that making $U=0$ in Eq. (8), we obtain the same expression of the noninteracting system [Eq. (17) of Ref. [16]]. By applying the EOM approach in the same way we have performed above, we obtain the retarded Green functions of four operators $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_j, d_l}$ and $\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_j, d_l}$ given by

$$(\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j n_j, d_l} = \delta_{jl} \langle n_j \rangle + \sqrt{2}V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{n_j c_{ek}, d_l} + \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek}, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_j, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_j, d_l}] + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{f^\dagger d_j, d_l} - \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger f, d_l} - \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_j f, d_l}] + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_j d_j, d_l} - \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_j, d_l} - \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_j f, d_l}] \quad (9)$$

and

$$(\varepsilon + \varepsilon_j + U + i0^+) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger n_j, d_l} = \delta_{\bar{j}1} \langle d_j^\dagger d_j \rangle + \sqrt{2}V \sum_k [\tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger c_{ek}, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{c_{ek}^\dagger d_j, d_l} - \tilde{\mathcal{G}}_{n_j c_{ek}^\dagger, d_l}] + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_j f^\dagger, d_l} - \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j f^\dagger, d_l} + \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{f d_j^\dagger, d_l}] + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} [\delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{n_j f, d_l} - \delta_{j1} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j f, d_l} + \delta_{\bar{j}1} \tilde{\mathcal{G}}_{f^\dagger d_j^\dagger, d_l}], \quad (10)$$

with expectation values

$$\langle n_j \rangle = \langle d_j^\dagger d_j \rangle = \left(-\frac{1}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f_F(\varepsilon) \text{Im} \{ \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_j} \} \quad (11)$$

and

$$\langle d_j^\dagger d_j^\dagger \rangle = \left(-\frac{1}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f_F(\varepsilon) \text{Im} \{ \tilde{\mathcal{G}}_{d_j^\dagger d_j^\dagger} \}. \quad (12)$$

As one can see in Eqs. (11) and (12), a self-consistent calculation is required to obtain the electronic occupation number for the QDs $\langle n_j \rangle = \langle d_j^\dagger d_j \rangle$ and the expectation value of the delocalized Cooper pairing $\langle d_j^\dagger d_j^\dagger \rangle$. As the latter amount is induced in the QDs due to the presence of the Kitaev wire, such a quantity is expected to be smaller compared to the usual occupation number [32]. We have confirmed this feature in the self-consistent process.

In order to close the system of Green functions, we apply an approximation method motivated by the Hubbard I decoupling [30], which can be summarized as $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{ABCD}} = \langle \mathcal{AB} \rangle \tilde{\mathcal{G}}_{CD}$, with the property $\langle \mathcal{AB} \rangle = \langle \mathcal{B}^\dagger \mathcal{A}^\dagger \rangle$. After this procedure, we obtain:

$$\left(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma^{(j)} - \delta_{j1} \Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}} \right) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_j} = 1 + \frac{U \langle n_j \rangle}{(\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+)} + \Sigma^{(j)} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_j} \quad (13)$$

and

$$\left(\varepsilon - \varepsilon_j - \Sigma^{(j)} - \delta_{j1} \Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}} \right) \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_j} = \delta_{j1} U \lambda^2 \tilde{K}_U \langle d_j^\dagger d_j^\dagger \rangle \left(\frac{U \langle n_j \rangle}{\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+} + 1 \right) + \Sigma^{(j)} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j d_j}, \quad (14)$$

where $\tilde{K}_U = \frac{\tilde{K}}{(\varepsilon + \varepsilon_j + U - \sigma + \delta_{j1} \langle n_j \rangle U \lambda^2 \tilde{K})}$ and $\sigma = \frac{\tilde{\Sigma} \langle n_j \rangle U}{\varepsilon + \varepsilon_j + \tilde{\Sigma} - \delta_{j1} \lambda^2 \tilde{K}}$. Notice that we find

$$\Sigma^{(j)} = \Sigma \left(1 + \frac{U \langle n_j \rangle}{\varepsilon - \varepsilon_j - U + i0^+} \right) \quad (15)$$

and

$$\Sigma_{\text{MBS1}}^{\text{full}} = \Sigma_{\text{MBS1}} + \frac{U \langle n_2 \rangle \Sigma_{\text{MBS1}}}{(\varepsilon - \varepsilon_1 - U + i0^+)} - U \langle n_2 \rangle \lambda^2 \tilde{K}_U \left(\frac{U \langle n_2 \rangle}{\varepsilon - \varepsilon_1 - U + i0^+} + 1 \right) \times (\Sigma_{\text{MBS1}} - \tilde{\Sigma} \lambda^2 \tilde{K}) \quad (16)$$

as the self-energies dressed by the interdots Coulomb repulsion. We highlight that these expressions recover the well-known results for the noninteracting case $U=0$, as we found in Ref. [16].

3. Results and discussion

In what follows we discuss the effect of the Coulomb interdots correlation in the Majorana signature. The entire analysis performed here is for the case of a long wire, in such a way that the overlap between the wave functions of the MBSs can be neglected ($\varepsilon_M = 0$). Additionally, we adopt in our simulations the model parameters of the system Hamiltonian, in units of $\Gamma = 2V^2\pi\rho_0$. The transmittance profiles [Eq. (5)] as a function of the Fermi energy

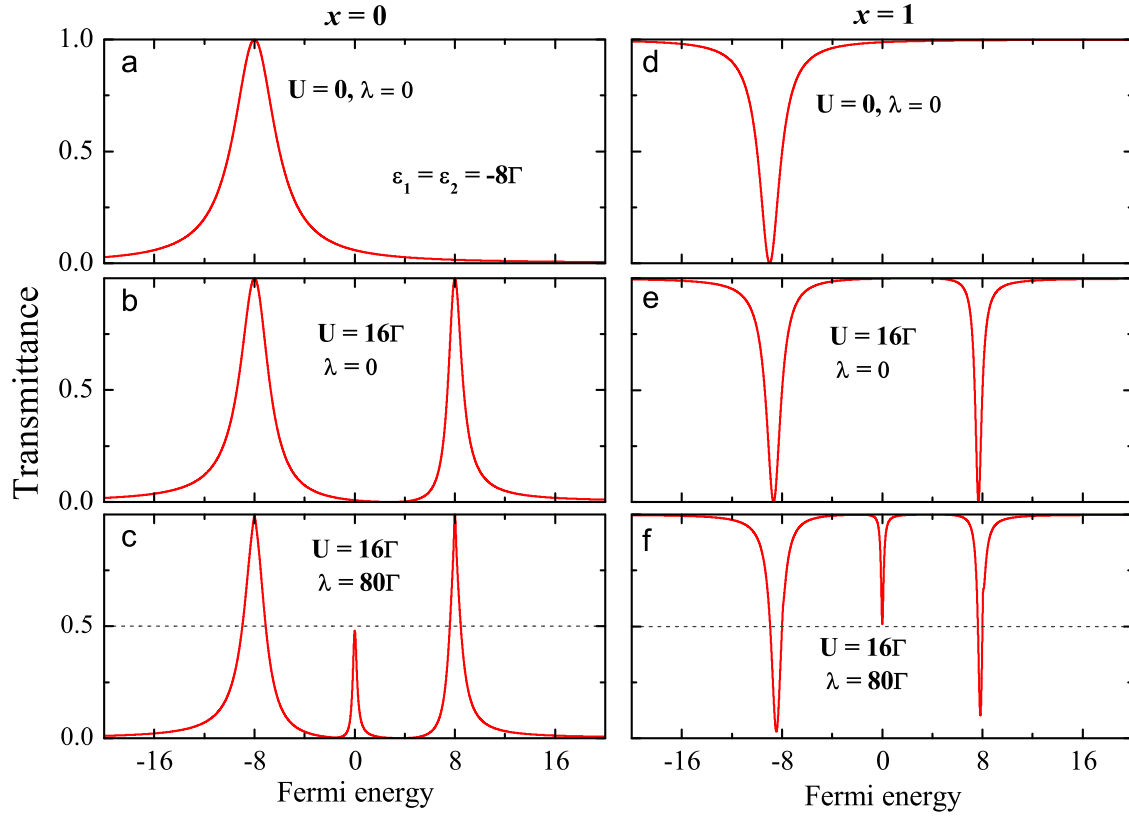


Fig. 2. Transmittance of Eq. (5) as a function of the leads Fermi energy for two distinct Fano regimes. The left panels [(a)–(c)] show the case wherein the electronic tunneling occurs via QDs ($x = 0$, $q_b \rightarrow \infty$), while the right panels [(d)–(f)] exhibit the opposite Fano regime, where the electronic path is preferentially through the metallic leads ($x = 1$, $q_b = 0$).

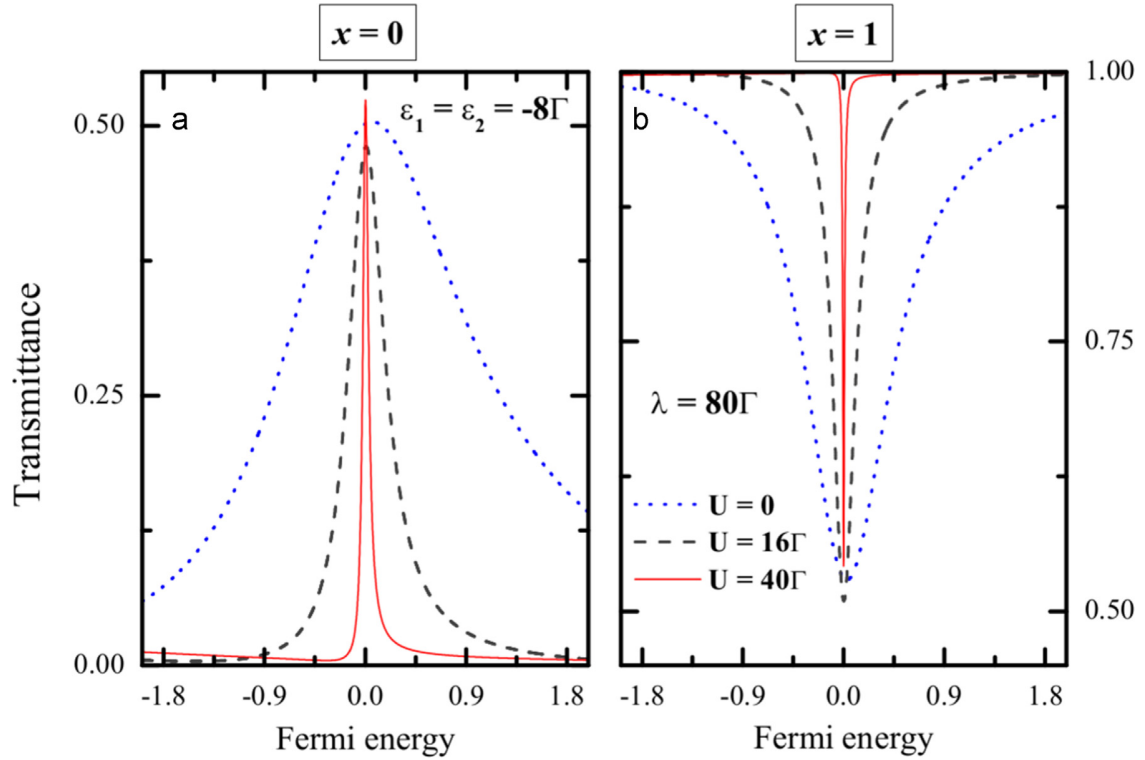


Fig. 3. Transmittance profiles of Eq. (5) as a function of leads Fermi energy display the effect of Coulomb interaction in the Majorana hallmark for distinct Fano regimes: (a) $x=0$, $q_b \rightarrow \infty$ and (b) $x=1$, $q_b = 0$. (For interpretation of the references to color in this figure caption, the reader is referred to the web version of this paper.)

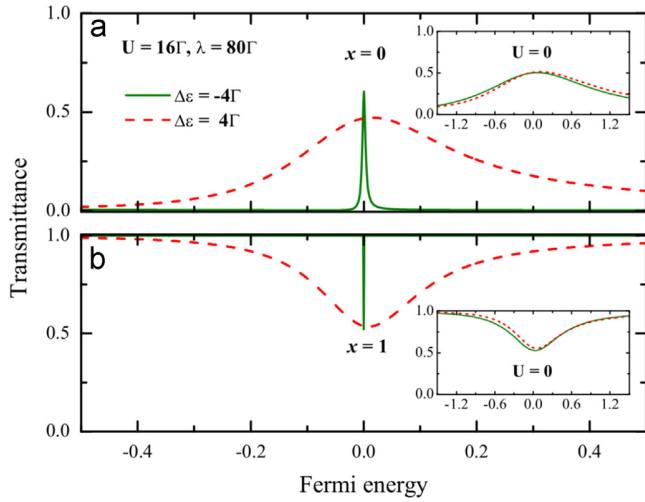


Fig. 4. Transmittance of Eq. (5) as a function of leads Fermi energy, in the situation where the energy levels of QDs are off-resonance, leading to a finite detuning $\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$. The green line represents the case where $\epsilon_1 = -4\Gamma$ and $\epsilon_2 = -8\Gamma$, while the dashed-red line depicts for $\epsilon_1 = -8\Gamma$ and $\epsilon_2 = -4\Gamma$. The panels (a) and (b) represent the Fano regime $x=0$ ($q_b \rightarrow \infty$) and $x=1$ ($q_b = 0$), where the corresponding insets describe the noninteracting scenario. (For interpretation of the references to color in this figure caption, the reader is referred to the web version of this paper.)

for metallic leads are presented in Fig. 2, in particular for the case of QDs in resonance ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = -8\Gamma$). The left panels [Fig. 2(a)–(c)] are for the Fano regime $q_b \rightarrow \infty$ ($x = 0$), where the electronic path is completely through the QDs, while the right panels [Fig. 2(d)–(f)] show the opposite case, where the electrons travel preferentially via leads ($q_b = 0$, $x = 1$). In Fig. 2(a), the Kitaev wire is decoupled from the noninteracting QDs ($U = 0$, $\lambda = 0$), and leads to a resonance pinned at the energy levels of these QDs. For the interacting case ($U = 16\Gamma$) [Fig. 2(b)], but still without wire, the transmittance profile displays the Hubbard bands, represented by two peaks pinned at ϵ_j and $\epsilon_j + U$, respectively, where we consider the particle-hole symmetric point ($2\epsilon_j + U = 0$) of the system Hamiltonian. Fig. 2(c) displays the case where the wire is strongly coupled to interferometer with interacting QDs ($\lambda = 80\Gamma$ and $U = 16\Gamma$). As one can see, a zero-bias peak with 0.5 amplitude emerges making explicit that the MBS 1 at the wire edge leaked into the QD 1. Such a panel also exhibits two peaks fixed at ϵ_j and $\epsilon_j + U$ as in the upper case, but slightly narrower, which is an effect due to the presence of the wire. The opposite Fano regime (right panels) presents the same behavior showed in Fig. 2(a)–(c), but the peaks are replaced by dips, in agreement with the standard Fano theory of interference [29].

In Fig. 3 we analyze the effect of the Coulomb repulsion in the Majorana signature, namely the ZBA, for both Fano regimes. The QDs are still in resonance and the wire is strongly coupled to QD 1. The dotted-blue line shows the noninteracting case ($U = 0$), where we can verify a ZBA characterized by a broad width in the two Fano cases ($x = 0$ and $x = 1$). Notice that there is a small difference between the amplitudes: for the case where $x=0$ [Fig. 3(a)] the amplitude is exactly 0.5, while in $x=1$ [Fig. 3(b)] it is <0.5 . Such a feature is due to the presence of the QD 2 and a more detailed discussion can be found in Ref. [15]. As we increase the Coulomb interaction (dashed-black line for $U = 16\Gamma$ and red line for $U = 40\Gamma$), the ZBA becomes narrower and shows a slight fluctuation around the 0.5 amplitude, verified in both Fano regimes. This change in the ZBA width suggests that the Majorana state lifetime within the QD 1 increases due to the electronic correlation effects between the QDs, since this lifetime is inversely proportional to

such a width [35].

Fig. 4 shows transmittance profiles [Eq. (5)] as a function of leads Fermi energy for the interacting case, in the situation where the energy levels of the QDs are off-resonance, leading to a finite detuning $\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$. The upper panel [Fig. 4(a)] shows the behavior of the transmittance for the Fano regime $x=0$. The Majorana peak is narrow and has an amplitude slightly higher than 0.5 when $\epsilon_1 = -4\Gamma$ and $\epsilon_2 = -8\Gamma$ (green line). By making a swap in the energy levels of the QDs, i.e. $\epsilon_1 = -8\Gamma$ and $\epsilon_2 = -4\Gamma$, the width of the Majorana peak increases significantly and exhibits a 0.5 amplitude (dashed-red line). A similar behavior is observed for the opposite Fano regime [Fig. 4(b)], but as in Figs. 2 and 3, the peaks are replaced by dips. Such fluctuations observed in the width and amplitude for the ZBA arising from the MBS do not occur for the noninteracting case, as can be seen in the insets of both panels. Thus, the tuning of the energy levels for the QDs also plays an important role in the Majorana state lifetime. This particular behavior suggests that experimentally, the Majorana signature depends on the relative positions of the energy levels for the QDs.

4. Conclusions

We have studied theoretically the effects of the Coulomb repulsion in the Majorana signature in a system composed of a spinless double dot interferometer with two interacting QDs, where one of them is strongly coupled to the MBS hosted at one edge of a Kitaev wire within the topological phase. We have found that the ZBA in the transmittance, due to the MBS, appears even in the presence of interdots Coulomb interaction. For QDs in resonance, the width of this Majorana hallmark decreases as we increase the ratio between the strength of the Coulomb repulsion and the dot-wire coupling (U/λ), together with a slight fluctuation around the 0.5 amplitude. This narrowing of the Majorana signature also occurs when a swap between the energy levels for the QDs is performed. Such a narrowing is not verified in the noninteracting case. These features then point out that the ratio U/λ and the relative position of the energy levels (detuning) for the QDs, constitute the key ingredients ruling the Majorana state lifetime in the QD next to the Kitaev wire. Our findings shed new light into the ZBA of MBSs in the presence of Coulomb correlations and can be helpful in the quest for Majorana signatures in condensed matter systems.

Acknowledgments

This work was supported by the Brazilian agencies CNPq, CAPES and São Paulo Research Foundation (FAPESP) – Grant 2014/14143-0.

References

- [1] J. Alicea, Rep. Prog. Phys. 75 (2012) 076501.
- [2] S.R. Elliott, M. Franz, Rev. Mod. Phys. 87 (2015) 137.
- [3] A.Y. Kitaev, Phys.—Usp. 44 (2001) 131.
- [4] R.M. Lutchyn, J.D. Sau, S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 077001.
- [5] Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 177002.
- [6] A.A. Zyuzin, D. Rainis, J. Klinovaja, D. Loss, Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 056802.
- [7] D. Rainis, J. Klinovaja, L. Trifunovic, D. Loss, Phys. Rev. B 87 (2013) 024515.
- [8] A. Zazunov, P. Sodano, R. Egger, New J. Phys. 15 (2013) 035033.
- [9] D. Roy, C.J. Bolech, N. Shah, Phys. Rev. B 86 (2012) 094503.
- [10] Y. Cao, P. Wang, G. Xiong, M. Gong, X.-Q. Li, Phys. Rev. B 86 (2012) 115311.
- [11] Y.-X. Li, Z.M. Bai, J. Appl. Phys. 114 (2013) 033703.
- [12] N. Wang, S. Lv, Y. Li, J. Appl. Phys. 115 (2014) 083706.
- [13] D.E. Liu, H.U. Baranger, Phys. Rev. B 84 (2011) 201308 (R).

- [14] E. Vernek, P.H. Penteado, A.C. Seridonio, J.C. Egues, *Phys. Rev. B* 89 (2014) 165314.
- [15] A.C. Seridonio, E.C. Siqueira, F.A. Dessotti, R.S. Machado, M. Yoshida, *J. Appl. Phys.* 115 (2014) 063706.
- [16] F.A. Dessotti, L.S. Ricco, M. de Souza, F.M. Souza, A.C. Seridonio, *J. Appl. Phys.* 116 (2014) 173701.
- [17] A. Ueda, T. Yokoyama, *Phys. Rev. B* 90 (2014) 081405 (R).
- [18] C.-H. Lin, J.D. Sau, S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* 86 (2012) 224511.
- [19] V. Mourik, K. Zuo, S.M. Frolov, S.R. Plissard, E.P.A.M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, *Science* 336 (2012) 1003.
- [20] A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, H. Shtrikman, *Nat. Phys.* 8 (2012) 887.
- [21] E.J.H. Lee, X. Jiang, M. Houzet, R. Aguado, C.M. Lieber, S. De Franceschi, *Nat. Nanotechnol.* 9 (2014) 79.
- [22] S.N. Perge, I.K. Drozdov, B.A. Bernevig, Ali Yazdani, *Phys. Rev. B* 88 (2013) 020407 (R).
- [23] A. Heimes, P. Kotetes, G. Schön, *Phys. Rev. B* 90 (2014) 060507 (R).
- [24] J. Li, H. Chen, I.K. Drozdov, A. Yazdani, B.A. Bernevig, A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* 90 (2014) 235433.
- [25] S.N. Perge, I.K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, J. Seo, A.H. MacDonald, B. A. Bernevig, A. Yazdani, *Science* 346 (2014) 602.
- [26] Y. Peng, F. Pientka, L.I. Glazman, F. von Oppen, *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015) 106801.
- [27] E. Dumitrescu, B. Roberts, S. Tewari, J.D. Sau, S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* 91 (2015) 094505.
- [28] U. Fano, *Phys. Rev.* 124 (1961) 1866.
- [29] J. Hubbard, *Proc. R. Soc. Lond. A* 276 (1963) 238.
- [30] Q.-f. Sun, H. Guo, *Phys. Rev. B* 66 (2002) 155308.
- [31] D.A. Ruiz-Tijerina, E. Vernek, L.G.G.V. Dias da Silva, J.C. Egues, *Phys. Rev. B* 91 (2015) 115435.
- [32] H. Haug, A.P. Jauho, *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors*, Springer Series in Solid-State Sciences, vol. 123, Springer, New York, 1996.
- [33] W. Hofstetter, J. König, H. Schoeller, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 156803.
- [34] P. Phillips, *Advanced Solid State Physics*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2012.