

IGOR THIAGO MINARI RAMOS

**PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS PARA SISTEMAS
NÃO LINEARES BASEADOS NA DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DE QUADRADOS
CONSIDERANDO A SATURAÇÃO DOS ATUADORES**

IGOR THIAGO MINARI RAMOS

**PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS PARA SISTEMAS
NÃO LINEARES BASEADOS NA DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DE QUADRADOS
CONSIDERANDO A SATURAÇÃO DOS ATUADORES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2022

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R175p Ramos, Igor Thiago Minari.
Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares baseados na decomposição em soma de quadrados considerando a saturação dos atuadores / Igor Thiago Minari Ramos. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2022
90 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2022

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Controlador chaveado. 2. Modelos fuzzy polinomiais. 3. Sistemas não lineares incertos. 4. Soma de quadrados. 5. Saturação nos atuadores.


Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

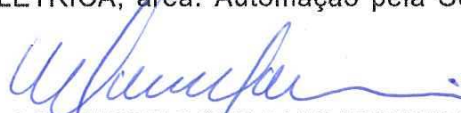
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

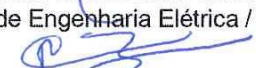
TÍTULO DA TESE: Projetos de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares baseados na decomposição em soma de quadrados considerando a saturação dos atuadores

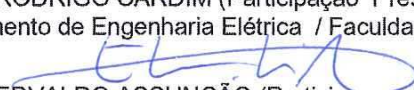
AUTOR: IGOR THIAGO MINARI RAMOS

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

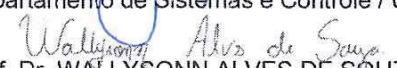
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Profa. Dra. GRACE SILVA DEAECTO (Participação Presencial)
Departamento de Sistemas e Controle / Universidade de Campinas - UNICAMP


Prof. Dr. WALLYSSON ALVES DE SOUZA (Participação Virtual)
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Ilha Solteira, 05 de agosto de 2022

À todos que acreditaram em mim e me ajudaram a encontrar o caminho.

AGRADECIMENTOS

Durante o doutorado experimentei vários desafios, tanto pessoais quanto profissionais. Através da ajuda de vários amigos posso dizer que superei diversos desses obstáculos, e sou grato pela ajuda e confiança de todos.

Em especial, agradeço a todos os meus alunos, que no início tiveram paciência comigo, me deram feedbacks e me ajudaram a ser o professor que me tornei. Agradeço também a todos os alunos que orientei e ajudei na orientação, foi muito bom trabalhar com todos. Fico feliz por saber que construímos algo juntos e pude contribuir para a formação de excelentes profissionais.

Agradeço também ao meu orientador, pelos conselhos, confiança e incentivo. Eu admiro o seu esforço e dedicação como professor, pesquisador e amigo. Admiro a sua bondade e desejo de ajudar a todos.

Não posso deixar de agradecer ao Uiliam, um amigo que me aconselhou, motivou e me ajudou em muitos desafios. Agradeço a ele por me ajudar em vários trabalhos, que sem a sua ajuda e o seu esforço, não conseguiria finalizá-los.

Agradeço aos colegas e amigos de república, com quem tive muitos momentos felizes e almoços animados. Durante a elaboração deste trabalho fiz vários amigos e colegas em Ilha Solteira, tanto do meu laboratório quanto de outros. Cada pessoa teve a sua importância neste trabalho e sou grato pela convivência, paciência e convívio que tive com todos.

Agradeço a UNESP pela oportunidade que tive de lecionar as matérias de Instalações Elétricas, a Unileto pela confiança no meu trabalho como professor e pesquisador. Agradeço também a Avibras, pela oportunidade de colocar em prática os meus conhecimentos e também adquirir novos na área de guiamento, controle e navegação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Tudo pode ser tirado de uma pessoa, exceto uma coisa:
a liberdade de escolher sua atitude em qualquer
circunstância da vida.”

Viktor Frankl

“Um, lembre-se de olhar para as estrelas e não para
baixo, para seus pés. Dois, nunca desista do trabalho.
Trabalho dá significado e propósito, e a vida está vazia
sem eles. Três, se você tiver sorte o suficiente para
encontrar o amor, não o deixe ir embora.”

Stephen Hawking

RESUMO

Neste trabalho são propostos novos métodos de projeto de controladores robustos chaveados para uma classe de sistemas não lineares descrita por modelos *fuzzy* polinomiais considerando funções de pertinência desconhecidas. Inicialmente é apresentada uma revisão sobre os modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS) e polinomiais, descrevendo uma comparação entre algumas metodologias de projeto dos controladores chaveados robustos para sistemas não lineares descritos por esses modelos. As análises da estabilidade e estabilização de sistemas não lineares descritos através de modelos *fuzzy* polinomiais são realizadas considerando uma candidata à função de Lyapunov polinomial e as restrições são descritas através da decomposição em soma de quadrados (do inglês, *Sum of Squares* - SOS). Os resultados obtidos utilizando esta metodologia são menos conservadores e apresentam uma região de factibilidade maior do que os modelos *fuzzy* TS com as restrições descritas através de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). Podemos observar que os modelos *fuzzy* polinomiais e as restrições de projeto descritas em SOS são uma extensão, respectivamente, dos modelos *fuzzy* TS e das restrições descritas em LMIs. A primeira metodologia proposta teve como objetivo minimizar um limitante superior de um índice quadrático (custo garantido) baseado na saída e no sinal de controle do sistema. A minimização do custo garantido pode assegurar que a resposta do sistema seja rápida, sem muitas oscilações e com um sinal de controle adequado para a implementação dos controladores. A seguir, considerando que atualmente muitos controladores são implementados através de hardwares, foram propostos projetos de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* baseado em SOS, cujos controladores não são compostos por funções complexas dependentes das variáveis de estados. Desta forma, tem-se a redução da complexidade na implementação dos controladores. Além disso, pode-se observar que muitos sistemas estão sujeitos a distúrbios ou incertezas no sinal de controle e a saturação dos atuadores. Dessa forma, foram propostos procedimentos para o projeto de controladores robustos chaveados que consideram estes requisitos. Através dos resultados obtidos das análises teóricas e exemplos numéricos, foi possível mostrar as vantagens das metodologias propostas.

Palavras-chave: Controlador chaveado. Modelos *fuzzy* polinomiais. Sistemas não lineares incertos. Soma de quadrados (SOS). Saturação nos atuadores.

ABSTRACT

In this thesis, new design methods for robust switched controllers are proposed for a class of nonlinear systems described by fuzzy polynomial models considering that the membership functions are unknown. Initially, a review of the fuzzy TS and polynomial models is presented, describing a comparison between the design of robust switched controllers for nonlinear systems described by these models. The analysis of the stability and stabilization of nonlinear systems described by polynomial fuzzy models is realized considering a candidate for the polynomial Lyapunov function and the constraints are described through the sum of squares decomposition (SOS). The results obtained using this methodology are less conservative and present a greater region of feasibility than the fuzzy TS models with the constraints described by linear matrix inequalities (LMIs). We can see that the polynomial fuzzy models and the constraints described by SOS are an extension, respectively, of the TS fuzzy models and the constraints described by LMIs. The first proposed methodology aimed to minimize an upper bound of a quadratic index (guaranteed cost) based on the output and the control signal of the system. Guaranteed cost minimization can ensure that the system response is fast, without too many oscillations and with a control signal suitable for the controllers implementation. Next, considering that currently many controllers are implemented through hardware, designs of robust switched controllers were proposed for nonlinear systems described by polynomial *fuzzy* models based on SOS whose controllers are not complex functions dependent on state variables. In this way, the complexity of controllers implementation is reduced. In addition, it can be observed that many systems are subject to disturbances or uncertainties in the control signal and the saturation of the actuators. In this way, a design of robust switched controllers was proposed that consider these requirements. Through the results obtained through theoretical analyzes and numerical examples, it was possible to show the advantages of the proposed methodology.

Keywords: Switched controller. Polinomial fuzzy models. Uncertain nonlinear systems. Sum of Squares (SOS). Actuator saturation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Setor não linear do sistema (35) representado pelos modelos <i>fuzzy</i> Takagi-Sugeno (36) e polinomiais (37).	29
Figura 2	Região de factibilidade do sistema (38) descrito por Modelos <i>fuzzy</i> TS utilizando o Teorema 1, considerando $ x_2 \leq 20$	31
Figura 3	Plano de fase do sistema (38) considerando a lei de controle chaveada (22) com os ganhos (43), sendo a condição inicial representado por um círculo (○) e a final por um quadrado (□).	32
Figura 4	Variáveis de estado do sistema (65) e a lei de controle chaveada (45) (sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o índice de chaveamento $\sigma(t)$).	41
Figura 5	A trajetória de estado do sistema (97) em malha aberta. A condição inicial e final são indicadas por um círculo azul (○) e por um quadrado azul (□), respectivamente.	52
Figura 6	A trajetória de estado do sistema (97) em malha fechada. A condição inicial e final são indicadas por um círculo azul (○) e por um quadrado azul (□), respectivamente.	53
Figura 7	Trajetoária de estado do sistema (169) em malha fechada. a condição inicial e final são indicadas por um círculo azul (○) e um quadrado azul (□), respectivamente.	55
Figura 8	Trajetoária de estado do sistema (169) e a função de Lyapunov, considerando o parâmetro incerto $c_b = 0,76$, e $\hat{x}(x(0)) = [-7 \ 4]^T$. Sistema em malha fechada utilizando a lei de controle chaveado (92) e (102).	56
Figura 9	Sinal de controle $u(t)$, a regra de chaveamento $\sigma(t)$ e $\phi(t)$, considerando o parâmetro incerto $c_b = 0,76$, e $\hat{x}(x(0)) = [-7 \ 4]^T$. O sistema em malha fechada utilizando a lei de controle chaveada (92) e (102).	56
Figura 10	Sinal de controle saturado $\text{sat}_l(u_l(t))$	59
Figura 11	Representação de possíveis trajetórias de estado e das regiões $\mathcal{X}$ (124), $\mathcal{L}(H_k)$ (112) e $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$ (113) no plano $x_1(t) \times x_2(t)$	70
Figura 12	Levitador Magnético.	73
Figura 13	Região de factibilidade obtida com o Teorema 9 sem termos polinomiais (○) e a metodologia de controladores chaveados proposta em (ALVES et al., 2016) (x).	75
Figura 14	Os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_k)$ e $\mathcal{E}(MP(x)M^T)$, para o levitador magnético.	77

Figura 15	Posição ($\check{x}_1(t) = y(t)$), sinal de controle ($u(t) = i^2(t) - i_0^2$), índices σ e φ da simulação do levitador magnético (160), utilizando a lei de controle chaveado (109) e (158).	78
Figura 16	Trajectoria do sistema (169) em malha fechada. As condições iniciais e finais são indicadas por um círculo azul ($\circ$) e um quadrado azul ($\square$), respectivamente. Os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_k(x))$ e $\mathcal{E}(MP(x)M^T)$	80
Figura 17	Trajectoria das variáveis de estado x_1 e x_2 , sinal de controle $u(t)$ e os índices de chaveamento σ e φ do sistema não linear incerto (152), usando a lei de controle robusto chaveado (109) e (158).	80

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{K}_r$	Conjuntos dos números $\{1, 2, \dots, r\}$.
M^T	Transposta da matriz real M .
$M > (\geq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) positiva.
$M < (\leq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) negativa.
I	Matriz identidade.
$ z $	Valor absoluto de um número real z .
$\ x\ $	Norma euclidiana do vetor $x \in \mathbb{R}^n$: $\ x\ = \sqrt{x^T x}$.
$\arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* \{h_i\}$	Menor índice $j \in \mathbb{K}_r$ tal que, para o conjunto $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$, $h_j = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$; por exemplo, dado um conjunto $H = \{h_1 = 3, h_2 = 1, h_3 = 6, h_4 = 3, h_5 = 1\}$, sendo $r = 5$, então $\arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* \{h_i\} = \min\{2, 5\} = 2$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES	10
1.2	OBJETIVOS	14
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	14
2	MODELOS <i>FUZZY</i> POLINOMIAIS E DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DE QUADRADOS	16
2.1	DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DE QUADRADOS	16
2.2	MODELOS <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO	20
2.3	MODELOS <i>FUZZY</i> POLINOMIAIS	22
2.4	EXEMPLO NUMÉRICO COMPARANDO OS MODELOS <i>FUZZY</i>	28
2.5	EXEMPLO NUMÉRICO DE CONTROLE CHAVEADO	30
2.6	CONCLUSÕES PARCIAIS	33
3	CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO PARA MINIMIZAR O CUSTO GARANTIDO	34
3.1	PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO	34
3.2	EXEMPLO NUMÉRICO CONSIDERANDO O CUSTO GARANTIDO	39
3.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	41
4	CONDIÇÕES RELAXADAS PARA O PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS	43
4.1	PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO RELAXADO	43
4.2	DISTÚRBIOS E/OU INCERTEZAS NO SINAL DE CONTROLE	49
4.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS	50
4.3.1	Exemplo numérico 1	50
4.3.2	Exemplo numérico 2	53
4.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	57
5	CONTROLE ROBUSTO DE MODELOS <i>FUZZY</i> POLINOMIAIS INCERTOS SUJEITO A SATURAÇÃO DOS ATUADORES	58
5.1	CONTROLE CHAVEADO CONSIDERANDO A SATURAÇÃO DOS ATUADORES	58
5.2	CONSIDERANDO DISTÚRBIOS E/OU INCERTEZAS NO SINAL DE CONTROLE	70

5.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS CONSIDERANDO A SATURAÇÃO DOS ATUA- DORES	72
5.3.1	Exemplo numérico 3	72
5.3.2	Exemplo numérico 4	78
5.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	81
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a motivação e os objetivos desejados com este trabalho. Ao final deste capítulo, apresenta-se a organização do texto.

1.1 CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Com o crescimento de novas tecnologias e a complexidade dos novos sistemas dinâmicos a serem controlados, tem-se aumentado a necessidade e a procura por controladores que garantam índices de desempenho desejado e a precisão da operação ou processo. Como exemplo de sistemas dinâmicos com dinâmica complexa e que envolvem tecnologias atuais, tem-se os helicópteros não tripulados (KENDOUL, 2012), sistemas aeroespaciais (NAIDU; CALISE, 2001), manipuladores robóticos (SAGE; MATHELIN; OSTERTAG, 1999) e entre outros sistemas.

A maioria dos sistemas dinâmicos encontrados no mundo real e não idealizado, tem natureza não linear, são incertos e estão sujeitos a distúrbios (SLOTINE; LI et al., 1991; GUO; CAO, 2014; ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b). Deve-se observar que, mesmo com o avanço nas pesquisas na área de controle, a análise e o projeto dos controladores para sistemas não lineares incertos estão entre os problemas mais desafiadores da teoria de controle, sendo que ainda não há uma metodologia universal para a análise da estabilidade, desempenho e projeto de controladores para tais sistemas (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004; GUO; CAO, 2014; HUNG; GAO; HUNG, 1993; GUERRA; SALA; TANAKA, 2015).

Na área de controle, houve um grande avanço na análise da estabilidade e no projeto de controladores para tais sistemas com a teoria introduzida pelo matemático russo Alexandr Mikhailovich Lyapunov. O método proposto determina as propriedades de estabilidade do sistema não linear pela construção e análise ao longo do tempo de uma função “energia”, não havendo, portanto a necessidade de resolver as equações diferenciais que descrevem o sistema (SLOTINE; LI et al., 1991).

A estabilidade e estabilização de muitos sistemas de controle pode ser garantida através da utilização de uma candidata a função de Lyapunov (SLOTINE; LI et al., 1991; BOYD et al., 1994; TANAKA et al., 2009). O projeto de controladores utilizando uma candidata a função de Lyapunov pode ser utilizado considerando sistemas lineares ou não lineares.

Considerando a análise da estabilidade e o projeto de controladores para sistemas lineares e não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS, comumente são utilizadas candidatas a função de Lyapunov quadráticas (BOYD et al., 1994; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANAKA;

WANG, 2004; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003). Desta forma, as restrições da análise da estabilidade e o projeto dos controladores pode ser formulado através de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs).

Através dos modelos *fuzzy* TS e da metodologia apresentada por Taniguchi et al. (2001), os sistemas não lineares podem ser exatamente representados em uma região de operação por subsistemas lineares combinados através das funções de pertinência. Portanto, os controladores são projetados considerando uma determinada região de operação, mas fora desta região não pode-se garantir a estabilidade do sistema e os índices de desempenho requeridos (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANAKA; WANG, 2004; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; SOUZA et al., 2014b; ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b; OLIVEIRA et al., 2018a).

Desta forma, torna-se adequado considerar no projeto dos controladores a região de operação do sistema. Além disso, pode-se considerar que se a condição inicial do sistema pertence a região de operação especificada, durante o transitório o sistema permanecerá na região de operação (ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b). Deve-se ter em mente que esta consideração aumenta a complexidade no projeto dos controladores, podendo ser utilizados métodos que flexibilizem as condições de projeto.

Com o objetivo de reduzir o conservadorismo na análise da estabilidade e no projeto de controladores para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS, os modelos *fuzzy* polinomiais foram propostos como uma extensão (TANAKA et al., 2009). Sabendo-se que os modelos *fuzzy* polinomiais possuem modelos locais polinomiais dependentes do vetor de estado do sistema, o número de subsistemas necessários para descrever um sistema não linear será igual ou menor se comparado com os modelos *fuzzy* TS. Além disso, o setor não linear do modelo *fuzzy* polinomial fica mais próximo da função não linear, o que diminui o conservadorismo no projeto dos controladores (RAMOS et al., 2019).

Conhecendo-se os valores de máximo e mínimo das não linearidades e incertezas, pode-se descrever os sistemas não lineares de forma exata através de modelos *fuzzy* polinomiais, como a combinação de modelos locais polinomiais dependente das funções de pertinência, sem a necessidade de limitar o projeto a uma determinada região de operação (RAMOS et al., 2019; TANAKA et al., 2009; KIM; PARK; JOO, 2016; GUELTON et al., 2013; CAO et al., 2014). Desta forma, o projeto dos controladores para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais pode tornar o sistema globalmente assintoticamente estável, resultado difícil de ser alcançado considerando os modelos *fuzzy* TS (RAMOS et al., 2019; TANAKA et al., 2009).

Deve-se destacar que o projeto de controladores para sistemas descritos por modelos *fuzzy* polinomiais não pode ser solucionado diretamente através de LMIs. Utilizando a metodologia apresentada em Parrilo (2000), pode-se decompor polinômios multivariados em uma soma de quadrados. Esta metodologia é uma extensão das LMIs, pois permite que as restrições dos

projetos de controladores possuam termos polinomiais e não apenas constantes (TANAKA et al., 2009; KIM; PARK; JOO, 2016; TANAKA et al., 2016; RAMOS et al., 2019).

Portanto, as restrições do projeto dos controladores descritas como uma decomposição em soma de quadrados possibilita a utilização de candidatas a função de Lyapunov polinomiais, que são mais complexas que as quadráticas e diminuem o conservadorismo no projeto dos controladores, obtendo desta forma maiores regiões de factibilidade e/ou melhores índices de desempenho (RAMOS et al., 2018; BIZARRO, 2021).

Considerando as vantagens descritas anteriormente sobre os modelos *fuzzy* polinomiais e a decomposição em soma de quadrados, em Tanaka et al. (2016), os autores propuseram uma nova metodologia para o projeto de controladores e apresentaram importantes resultados para evitar o problema do conservadorismo. Em Kim, Park e Joo (2016), os autores apresentaram o projeto de controladores robustos considerando funções de pertinência imperfeitas. Em Ramos et al. (2019), os autores apresentaram o projeto de controladores robustos considerando incertezas politópicas e a minimização do limitante superior de um custo garantido.

Em Gassara, Hajjaji e Chaabane (2016) os autores propuseram controladores robustos considerando que os atuadores do sistema estão sujeitos a saturação. Em Yum e Wang (2013) e Ramos et al. (2018) os autores consideraram, no projeto dos controladores, a utilização da taxa de decaimento com o objetivo de reduzir o tempo de transitório do sistema.

Devemos observar que as funções de pertinência dos modelos *fuzzy* polinomiais utilizadas para descrever os sistemas não lineares podem ser incertas, complexas ou difíceis de serem obtidas (SOUZA et al., 2014b; ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b; OLIVEIRA et al., 2018a). A metodologia de controladores chaveados robustos, proposta neste trabalho, não depende das funções de pertinência para compor o sinal de controle, como os controladores baseados na compensação paralela distribuída (CPD) (TANAKA et al., 2009). Desta forma, caso as funções de pertinência sejam incertas, não se pode utilizar diretamente os controladores baseados na CPD (RAMOS et al., 2019).

Projetos de controladores chaveados similares considerando sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* TS são apresentados na literatura. Em Souza et al. (2014b) foi verificado o aumento da região de factibilidade utilizando controladores chaveados. Em Alves et al. (2016) foi proposto o projeto de controladores chaveados robustos sujeito a saturação dos atuadores, neste trabalho também foi possível observar que os controladores chaveados podem reduzir o sinal de controle. Em Oliveira et al. (2018b) foi proposta uma extensão do trabalho anterior considerando a minimização do índice H_∞ . Estes controladores chaveados propostos na literatura apresentam maior região de factibilidade que os controladores com um único ganho.

Recentemente estão sendo realizadas pesquisas envolvendo o projeto de controladores chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais (RAMOS et al.,

2019; RAMOS et al., 2019). Sendo que a descrição dos sistemas não lineares em modelos *fuzzy* polinomiais, o estudo da estabilidade e projeto de controladores baseado na CPD foi apresentado inicialmente em (TANAKA et al., 2009). Após a metodologia apresentada neste trabalho, foi realizado o desenvolvimento de projeto de controladores considerando índices de desempenho, robustez entre outros requisitos de projeto de controladores.

Em Tanaka, Ohtake e Wang (2009) são propostos controladores para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais considerando a minimização de um limitante superior do custo garantido. Em Li e Wang (2012) utilizando a metodologia proposta em Tanaka, Ohtake e Wang (2009), são projetados controladores robustos para sistemas não lineares. O custo garantido utilizado é um versátil índice quadrático, que usualmente proporciona um bom desempenho do sistema de controle, baseado na minimização das variáveis de estado e do sinal de controle do sistema (CAUN et al., 2018). Esta teoria também é aplicada para o projeto de servos sistemas, em que se pode especificar as condições iniciais do controlador (TEIXEIRA et al., 2006).

Desta forma, baseado em Ramos et al. (2018), em (RAMOS et al., 2019) são propostos controladores chaveados robustos para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais considerando a minimização do limitante superior de um índice quadrático, obtendo dessa forma um custo garantido. Através da utilização dos controladores chaveados, não será necessário o conhecimento ou estimativa das funções de pertinência para compor o sinal de controle. Técnicas como a compensação paralela distribuída (CPD) fazem uso das funções de pertinência para compor o sinal de controle (TANAKA; WANG, 2004).

Observando que em muitos trabalhos que utilizam candidatas a função de Lyapunov polinomiais, os controladores podem depender de funções racionais, dificultando a implementação desses controladores (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004; JENNAWASIN; NARIKIYO; KAWANISHI, 2010; TANAKA et al., 2012; KIM; PARK; JOO, 2016). Em Kim, Park e Joo (2016) é proposto um projeto de controlares robustos para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais considerando variáveis de folga, que reduzem o conservadorismo no projeto dos controladores, além disso, é considerado que os controladores dependem apenas de funções polinomiais.

Portanto, baseado em Kim, Park e Joo (2016), serão propostos controladores polinomiais chaveados robustos para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais, considerando variáveis de folga no projeto dos controladores. E também, baseado em Alves et al. (2016) serão propostos controladores que garantem a robustez do sistema na presença de distúrbios ou incertezas no sinal de controle.

Sabendo que em aplicações práticas o sinal de controle deve ser limitado, baseado em Gassara, Hajjaji e Chaabane (2016), Alves et al. (2016), Oliveira et al. (2018a), neste trabalho também será considerada a saturação dos atuadores no projeto dos controladores.

Dos resultados obtidos em (GUERRA; VERMEIREN, 2004; TANAKA et al., 2009; OLIVEIRA et al., 2018a), pode-se observar que a complexidade da candidata a função de Lyapunov pode aumentar a região de factibilidade. Portanto, será proposta uma nova candidata a função de Lyapunov com o objetivo de expandir a região de factibilidade no projeto dos controladores.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é propor novas leis de controle chaveado, considerando uma classe de sistemas não lineares e incertos descritos de forma exata por modelos *fuzzy* polinomiais. Serão considerados como requisitos no projeto dos controladores, a minimização do limitante superior de um índice quadrático, distúrbios ou incertezas no sinal de controle e que os atuadores estão sujeitos a saturação. Para atingir estes objetivos, são propostos os seguintes objetivos secundários:

- Descrever de forma exata um sistema não linear com incertezas politópicas utilizando modelos *fuzzy* polinomiais, sendo conhecidas as não linearidades e também os valores de máximo e mínimo das incertezas.
- Propor projetos de controladores para os sistemas descritos anteriormente com as restrições baseadas na decomposição em soma de quadrados. Será considerado que o sinal de controle não dependa das funções de pertinência, que podem ser incertas ou difíceis de serem obtidas.
- Apresentar exemplos e simulações que demonstrem as vantagens dos métodos propostos.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Para uma apresentação adequada do tema e dos resultados obtidos, esse trabalho está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 serão apresentados os conceitos gerais sobre modelos *fuzzy* TS e polinomiais, estabelecendo os conceitos necessários para o desenvolvimento e compreensão do trabalho. Além disso, será possível comparar e diferenciar o projeto de controladores com restrições descritas em termos de LMIs e SOS.
- No Capítulo 3 será proposto o projeto de controladores robustos chaveados para uma classe de sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais considerando as funções de pertinência desconhecidas e, como requisito do projeto de controle, a minimização de um limitante superior de um índice quadrático (custo garantido) relacionado a

saída e ao sinal de controle do sistema. Essa abordagem tem como objetivo diminuir o tempo de transitório e as oscilações do sistema, com um sinal de controle adequado.

- No Capítulo 4 serão propostos controladores chaveados robustos para a mesma classe de sistemas não lineares do capítulo anterior considerando que os controladores não dependerão de funções racionais, mas apenas de funções polinomiais. Deve ser observado que em implementações práticas, funções racionais presentes na lei de controle levam a um alto esforço computacional do hardware. Além disso, serão consideradas nas restrições dos projetos de controladores, variáveis de folga com o objetivo de aumentar a região de factibilidade. Como requisito no projeto dos controladores, será considerado que o sinal de controle está sujeito a distúrbios ou incertezas.
- No Capítulo 5, além dos projetos de controladores chaveados robustos propostos considerarem a mesma metodologia e requisitos de projeto do capítulo anterior, também será considerado que os atuadores estarão sujeito a saturação dos atuadores, com o objetivo de aproximar os resultados obtidos de implementações práticas reais.
- No Capítulo 6 serão apresentadas as conclusões sobre o trabalho proposto. Diante dos resultados obtidos e o estado da arte do problema estudado, serão descritas as perspectivas para trabalhos futuros.

Neste trabalho, as implementações computacionais foram feitas no MATLAB. Problemas sintetizados a partir de LMIs foram implementadas através da interface YALMIP (LOFBERG, 2004), com o solver SeDuMi (STURM, 1999). Para os problemas sintetizados com SOS, foram implementados através da interface SOSTOOLS (PAPACHRISTODOULOU; PRAJNA, 2002) com o solver SeDuMi.

Será utilizada a seguinte notação: $\mathbb{K}_r = \{1, 2, \dots, r\}, r \in \mathbb{N}$. $Y(\alpha, x)$ representa uma matriz genérica tal que $Y(\alpha, x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i Y_i(x)$, sendo que $\alpha_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{K}_r$, e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. O menor índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$, tal que, para o conjunto de números reais $H = \{h_1, \dots, h_r\}$, $h_\sigma = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$ é denotado por $\arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$. A notação $\mathbf{He}\{\bullet\}$ é uma forma resumida para $(\bullet) + (\bullet)^T$. I_{n_u} representa a matriz identidade com ordem n_u . Por simplicidade, considere $\alpha_i(z(t)) = \alpha_i, \forall i \in \mathbb{K}_r$, $x(t) = x$ e $u(t) = u$.

2 MODELOS FUZZY POLINOMIAIS E DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DE QUADRADOS

Neste capítulo são apresentados os conceitos gerais sobre sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* polinomiais e a decomposição em soma de quadrados. Será possível comparar os modelos *fuzzy* polinomiais com os modelos *fuzzy* TS, assim como as restrições do projeto de controladores formuladas por decomposição em soma de quadrados com as desigualdades matriciais lineares.

2.1 DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DE QUADRADOS

Muitos problemas de controle podem ser analisados através da negatividade e positividade de funções relacionadas a uma candidata à função “energia” dependente do vetor de estado do sistema, chamada de candidata a função de Lyapunov. Desta forma, a complexidade da candidata a função de Lyapunov influencia na análise da estabilidade e estabilização dos sistemas (SLOTINE; LI et al., 1991).

Com o avanço dos softwares e hardwares computacionais, puderam ser consideradas funções de Lyapunov cada vez mais complexas para o projeto dos controladores considerando diversos índices de desempenho (BOYD et al., 1994; TANAKA et al., 2009) e reduzindo o conservadorismo no projeto dos controladores.

Atualmente pode-se encontrar na literatura diversos trabalhos que consideram uma candidata a função de Lyapunov quadrática, devido as restrições no projeto dos controladores poderem ser descritas através de desigualdades matriciais lineares (LMIs) (TANAKA; WANG, 2004; BOYD et al., 1994; MOZELLI et al., 2009; ALVES et al., 2016; CAUN et al., 2018; OLIVEIRA et al., 2018b). As LMIs podem ser solucionadas utilizando a interface Yalmip (LOFBERG, 2004) com o solver SeDuMi (STURM, 1999).

Com o objetivo de se utilizar candidatas à funções de Lyapunov mais complexas e reduzir o conservadorismo na análise da estabilidade e projeto de controladores, foi proposta a metodologia de decomposição em soma de quadrados (SOS). O SOS constitui um método flexível para resolver problemas relacionados à engenharia de controle, possibilitando assim como as LMIs, transformar diversos problemas de controle solucionáveis de maneira eficiente via algoritmos computacionais (TANAKA et al., 2009; CAO et al., 2014; PARRILO, 2004). O SOS pode solucionar problemas que envolvam muitas variáveis e polinômios multivariados, assim como matrizes polinomiais multivariadas. As restrições em SOS podem ser solucionadas através da

interface SOSTOOLS (PAPACHRISTODOULOU et al., 2013), utilizando o solver SeDuMi (STURM, 1999) e a resposta ser verificada através da interface SOSOPT (SEILER, 2013) utilizando o comando “issos”.

O problema geral de testar a positividade global de uma função polinomial multivariada é, de fato, um problema complexo e pode envolver um alto custo computacional. Para evitar a complexidade inerente, uma das condições pode ser dada pela existência de uma decomposição em soma de quadrados das funções polinomiais (PARRILO, 2000). Deste modo, serão consideradas restrições na classe geral de funções polinomiais multivariadas para se determinar a positividade global.

Um polinômio $p(x)$ com grau $2d$ é um SOS se existe polinômios $q_i(x), i \in \mathbb{K}_{n_p}$ tal que $\mathcal{F}(x) = \sum_{i=1}^{n_p} q_i^2(x)$. Portanto, se $\mathcal{F}(x)$ é um SOS, então $\mathcal{F}(x) \geq 0$. Desta forma, existe uma matriz semidefinida positiva $\mathcal{P} \geq 0$ tal que $\hat{x}^T(x) \mathcal{P} \hat{x}(x)$, sendo que $\hat{x}(x)$ é um vetor coluna cujos elementos são todos monômios em x com dimensão não maior do que d . Desta forma, será apresentada a proposição a seguir.

Proposição 1. (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) Seja $\mathcal{F}(x)$ um polinômio multivariado dependente de $x \in \mathbb{R}^n$ de grau $2d$. Além disso, considere que $\hat{x}(x)$ é um vetor coluna com todos os seus elementos sendo monômios em x com grau não maior que d . Então, $\mathcal{F}(x)$ é um SOS se, e somente se, existe uma matriz semidefinida positiva $\mathcal{P}$ tal que

$$\mathcal{F}(x) = \hat{x}^T(x) \mathcal{P} \hat{x}(x). \quad (1)$$

Desta forma, a decomposição em soma de quadrados pode ser formulada como um problema semidefinido, sendo que a solução para o problema será encontrar uma matriz $\mathcal{P}$ (PARRILO, 2000; TANAKA et al., 2009). Deve-se ter em mente que nem todo polinômio multivariado semidefinido positivo pode ser decomposto em SOS, sendo assim, esta metodologia possui limitações contudo, constitui um caso mais geral do que a análise apenas de restrições polinomiais quadráticas, como as LMIs.

Como exemplo da decomposição em soma de quadrados, considere o seguinte polinômio apresentado em Parrilo (2000), sendo $\mathcal{F}(x_1, x_2) = 2x_1^4 + 2x_1^3x_2 - x_1^2x_2^2 + 5x_2^4$. Definindo o vetor de monômios $\hat{x}(x)$ composto pelos seguintes elementos $\hat{x}_1(x) = x_1^2$, $\hat{x}_2(x) = x_2^2$, $\hat{x}_3(x) = x_1x_2$, portanto, o polinômio pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_1, x_2) &= 2x_1^4 + 2x_1^3x_2 - x_1^2x_2^2 + 5x_2^4 = \hat{x}^T(x) \mathcal{P} \hat{x}(x) \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 + 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz simétrica $\mathcal{P}$ não é necessariamente única e o polinômio multivariado $\mathcal{F}(x_1, x_2)$, possuindo duas variáveis x_1 e x_2 , pode ser representado na forma quadrática para qualquer valor real de λ .

Considerando $\lambda = 3$, a matriz $\mathcal{P}$ pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\mathcal{P} = L^T L, \quad L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Deve-se observar que a decomposição $\mathcal{P} = L^T L$ é uma condição para que a matriz simétrica $\mathcal{P}$ seja semidefinida positiva (CHEN, 1998). Deste modo, o polinômio $\mathcal{F}(x_1, x_2)$ pode ser decomposto na seguinte soma de quadrados:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} ((2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 x_2)^2 + (x_2^2 + 3x_1 x_2)^2). \quad (3)$$

Uma decomposição em soma de quadrados para um polinômio multivariado $\mathcal{F}(x)$ pode ser obtida utilizando programação semidefinida, uma vez que equivale a procurar por um elemento $\mathcal{P}$ na intersecção do cone de matrizes semidefinidas positivas e um conjunto definido por algumas restrições afins que surgem de (1).

A utilização da programação semidefinida para o estudo da não negatividade distingue de outras abordagens pela sua adaptabilidade e o fato de que ela pode ser facilmente estendida ao caso incerto, quando deseja-se um polinômio semidefinido positivo $\mathcal{F}(x)$ sujeito a condições adicionais (PARRILO, 2000). Este último recurso é importante em muitos problemas relacionados com o estudo da estabilidade e estabilização de sistemas lineares e não lineares.

Em muitos problemas relacionados com a teoria de controle, deseja-se encontrar um polinômio definido positivo. Desta forma, se $\mathcal{F}(x) - \varepsilon(x)$ é um SOS, sendo $\varepsilon(x) > 0$ para $x \neq 0$ um polinômio conhecido, então $\mathcal{F}(x) > 0$ para $x \neq 0$.

O produto direto ou produto de Kronecker, que será utilizado a seguir para o relaxamento das condições polinomiais, é denotado por $\otimes$. O produto de Kronecker é um operador em que duas matrizes de dimensões arbitrárias resulta em um bloco matricial (GRAHAM, 1981). Dadas as matrizes $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ formada pelos elementos a_{ij} e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ formada pelos elementos b_{kl} , define-se o produto de Kronecker de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$ como a matriz $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ dada por:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

A seguir será apresentada uma proposição importante com relação ao relaxamento de condições polinomiais.

Proposição 2. (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) Suponha que é dada uma matriz polinomial simétrica $\mathcal{F}(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ de grau $2d$ dependente de $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, seja $\hat{x}(x)$ um vetor coluna cujos elementos são todos monômios dependentes de x com grau não maior que d . Considere as seguintes condições:

1. $\mathcal{F}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $v^T \mathcal{F}(x) v$ é um SOS, sendo que $v \in \mathbb{R}^N$;
3. Existe uma matriz positiva semidefinida Q tal que
 $v^T \mathcal{F}(x) v = (v \otimes \hat{x}(x))^T Q (v \otimes \hat{x}(x))$, em que $\otimes$ denota o produto de Kronecker.

Então, $1 \Leftarrow 2$ e $2 \Leftrightarrow 3$.

Demonstração. $1 \Leftarrow 2$: sendo $v^T \mathcal{F}(x) v$ uma soma de quadrados implica que a desigualdade $v^T \mathcal{F}(x) v \geq 0$ para todo $(v, x) \in \mathbb{R}^{N+n}$, que é uma consequência equivalente a $\mathcal{F}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$2 \Leftrightarrow 3$: Esta equivalência segue como um caso especial da 1. O vetor de monômios pode ser escolhido da forma $v \otimes \hat{x}(x)$, devido ao resultado em Reznick (1978), que caracteriza os monômios que podem aparecer na forma quadrática (1). Os detalhes serão omitidos por estarem fora do escopo do trabalho. $\square$

A seguir será apresentado um lema que será útil na formulação das restrições utilizando SOS.

Lema 1. (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) Para uma matriz polinomial simétrica $\mathcal{P}(x)$ que é não singular para todo x , tem-se que

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x)}{\partial x_i} = -\mathcal{P}(x) \left(\frac{\partial \mathcal{P}^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) \mathcal{P}(x). \quad (4)$$

Demonstração. Como $\mathcal{P}(x)$ é não singular, tem-se que $\mathcal{P}(x) \mathcal{P}^{-1}(x) = I$, sendo I uma matriz identidade de dimensões adequadas. Diferenciando ambos os lados com respeito a x_i obtém-se

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}(x)}{\partial x_i} \right) \mathcal{P}^{-1}(x) + \mathcal{P}(x) \left(\frac{\partial \mathcal{P}^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Multiplicando a equação pela direita por $\mathcal{P}(x)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{P}(x)}{\partial x_i} \right) + \mathcal{P}(x) \left(\frac{\partial \mathcal{P}^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) \mathcal{P}(x) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{P}(x)}{\partial x_i} &= -\mathcal{P}(x) \left(\frac{\partial \mathcal{P}^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) \mathcal{P}(x). \end{aligned}$$

Que resulta em (4) e a prova está concluída. $\square$

2.2 MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Considere o sistema não linear abaixo,

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (5)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada do sistema. As funções não lineares $f(x(t))$ e $g(x(t))$ estão relacionadas com a dinâmica do sistema e a entrada do sinal de controle respectivamente, podendo ser não polonomiais e incertas.

O modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno pode representar de forma exata, comumente em uma região de operação, sistemas não lineares incertos. Os modelos *fuzzy* TS são descritos por regras SENTÃO que representam as relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema não linear. A descrição local da planta dinâmica (5) a ser controlada está disponível em termos dos modelos locais:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t), \end{aligned} \quad (6)$$

sendo que $i = 1, 2, \dots, n_r$, o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, o vetor de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, o vetor de saída $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$. A informação acima é então fundida com

as regras Se-Então disponíveis, sendo que a i -ésima regra pode ter a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : & \text{ Se } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{Então } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n_r$, $\mathcal{M}_j^i$, $j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto *fuzzy* j da regra i , $x(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas.

Como apresentado em Taniguchi et al. (2001), dado o par $(x(t), u(t))$, o vetor de saída final do sistema *fuzzy* é inferido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}, \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}, \end{cases} \quad (8)$$

sendo

$$\begin{aligned} z(t) &= [z_1(t) \quad z_2(t) \quad \dots \quad z_p(t)], \quad \omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mathcal{M}_j^i(z(t)_j), \\ \sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) &> 0, \quad \omega_i(z(t)) \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$. $\mathcal{M}_j^i(z(t)_j)$ é o “peso” do conjunto *fuzzy* M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$.

Define-se “peso” normalizado e/ou função de pertinência de cada regra, como sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}. \quad (10)$$

De (9) e (10) tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i(z(t)) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_{n_r}. \quad (11)$$

Portanto, de (8)-(11), a equação (8), pode ser escrita da seguinte forma (TANIGUCHI et al., 2001)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] = A(\alpha(z(t))) x(t) + B(\alpha(z(t))) u(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) C_i x(t) = C(\alpha(z(t))) x(t). \end{cases} \quad (12)$$

sendo $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) = 1$ e $\alpha_i(z(t)) \geq 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$. Baseado nos trabalhos de (TANIGUCHI et al., 2001; ALVES et al., 2016; SANTIM et al., 2012), o número de regras *fuzzy* necessário para representar de forma exata o sistema não linear será igual a $n_r = 2^{s_1}$, sendo s_1 , neste caso, igual ao número de incertezas e não linearidades distintas presentes no sistema.

Baseado em (SOUZA et al., 2013; SOUZA, 2013) e sendo a matriz $B(\alpha)$ conhecida, ou seja, não depende de incertezas ou não linearidades, considere a lei de controle chaveada descrita a seguir que independe das funções de pertinência

$$\begin{aligned} u &= -K_\sigma x(t), \\ \sigma &= \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_{n_r}} \{-x^T(t)X^{-1}BK_i x(t)\}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_{n_r}, \end{aligned} \quad (13)$$

sendo $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$. Desta forma, através de (12) e (13), o sistema em malha fechada pode ser representado da seguinte forma

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(z(t)))x(t) + Bu(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t))(A_i - BK_\sigma)x(t). \quad (14)$$

O projeto dos controladores chaveados pode ser realizado através do teorema apresentado a seguir.

Teorema 1. (SOUZA, 2013) *Considere um sistema não linear e incerto descrito por modelos fuzzy TS em malha fechada representado por (14) através da lei de controle chaveada (13) e que existe uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

$$A_i X + X A_i^T - B M_i - M_i^T B^T < 0, \quad (15)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$. Então, a origem $x = 0$ é assintoticamente estável com a lei de controle chaveada (13), sendo que os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_i X^{-1}$.

Demonstração. A prova pode ser obtida em (SOUZA, 2013). □

Na próxima seção será apresentado os modelos *fuzzy* polinomiais, que são uma extensão dos modelos *fuzzy* TS. Também será apresentado uma extensão para a lei de chaveamento (13) e para o Teorema 1.

2.3 MODELOS FUZZY POLINOMIAIS

Utilizando o conceito de setor não linear, os modelos *fuzzy* polinomiais podem representar o sistema (5) de forma exata. Esses modelos são descritos por regras SE-ENTÃO, que repre-

sentam localmente ou globalmente as relações de entrada e saída de um sistema não linear. O conjunto de regras pode ser obtido conforme a equação a seguir:

Regra i :

$$\begin{aligned} &\text{Se } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ &\text{Então } \begin{cases} \dot{x} = A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t), \\ y = C(x(t))\hat{x}(x(t)), \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

sendo que $i = 1, 2, \dots, n_r$, $j = 1, 2, \dots, p$. $\mathcal{M}_j^i \in [0, 1]$ é o conjunto *fuzzy* j da regra i , $z_j(t)$ é uma variável premissa. n_r denota o número de regras *fuzzy*. As matrizes $A_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ e $C(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ são matrizes polinomiais dependentes do vetor de estado $x(t)$. $\hat{x}(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é um vetor coluna cujos elementos são todos monômios dependentes de $x(t)$. Será considerado que $\hat{x}(x(t)) = 0$ somente se $x(t) = 0$.

Portanto, $A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)$ é um vetor polinomial, sendo que cada vetor polinomial será chamado de subsistema ou modelo local. Então o modelo *fuzzy* (16) pode conter não linearidades (termos polinomiais) em cada parte consequente. Neste trabalho, cada variável premissa $z_j(t)$ pode ser composta pelo vetor de estado do sistema ou dependentes de incertezas. Portanto, será considerado que cada variável premissa pode não estar sempre disponível.

O número de regras *fuzzy* mínimo para representar de forma exata o sistema (5) será igual a $n_r = 2^{s_2}$, sendo s_2 o número de termos não polinomiais mais o número de incertezas distintos no sistema, portanto, p número de regras será menor que utilizando modelos *fuzzy* TS. Como apresentado em Tanaka et al. (2009), dado o par $(x(t), u(t))$, o vetor de saída final do sistema *fuzzy* é inferido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) (A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}, \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) C_i(x(t))\hat{x}(x(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}, \end{cases} \quad (17)$$

sendo

$$z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)], \quad \omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)), \quad \sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) > 0, \quad \omega_i(z(t)) \geq 0, \quad (18)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, $M_j^i(z_j(t))$ é o “peso” do conjunto *fuzzy* M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$. O peso normalizado e/ou função de pertinência $\alpha_i, i \in \mathbb{K}_{n_r}$, de cada regra, como sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}. \quad (19)$$

De (18) e (19) pode-se observar que

$$\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i(z(t)) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_{n_r}. \quad (20)$$

Portanto, das equações (17)-(20), a equação (16) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) [A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)] \\ \quad = A(\alpha(z(t)), x(t))\hat{x}(x(t)) + B(\alpha(z(t)), x(t))u(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) C_i(x(t))\hat{x}(x(t)) = C(\alpha(z(t)), x(t))\hat{x}(x(t)). \end{cases} \quad (21)$$

Deve-se observar que se $\hat{x}(x(t)) = x(t)$ e $A(\alpha(z(t))) = A(\alpha(z(t)), x(t))$ e $B(\alpha(z(t))) = B(\alpha(z(t)), x(t))$ são matrizes constantes para todo i , então tem-se que o subsistema não linear $A(\alpha(z(t)), x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)$ é reduzido em $A(\alpha(z(t)))x(t) + B(\alpha(z(t)))u(t)$, equivalente aos subsistemas lineares dos modelos *fuzzy* TS. Portanto, os modelos *fuzzy* TS são um caso particular dos modelos *fuzzy* polinomiais.

Como os modelos *fuzzy* TS possuem parte consequente linear, desta forma, conseguirão representar de forma globalmente exata apenas uma classe restrita de sistemas não lineares, como os sistemas dependentes de funções senoidais (TANAKA; WANG, 2004). De forma menos conservadora, os sistemas *fuzzy* polinomiais podem representar de forma globalmente exata uma classe de sistemas não lineares dependentes de funções polinomiais e senoidais, garantindo que o sistema controlado seja globalmente assintoticamente estável (TANAKA et al., 2009; RAMOS et al., 2019).

Neste capítulo será utilizado a lei de controle chaveada proposta em (RAMOS et al., 2018) para sistemas polinomiais não lineares e utilizada em (RAMOS et al., 2019) para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais. Considerando que $B(x) = B_i(x)$, ou seja, $B(x)$ é conhecida e não depende de termos incertos e não polinomiais, a lei de controle a seguir seleciona um ganho de realimentação polinomial $K_\sigma(x(t))$ que pertence a um conjunto de ganhos $\{K_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\hat{x}}}, i \in \mathbb{K}_{n_r}\}$ dada a seguir:

$$u = -K_\sigma(x(t))\hat{x}(x(t)),$$

$$\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_{n_r}} \{-\hat{x}^T(x(t))X^{-1}(\tilde{x}(t))T(x(t))B(x(t))K_i(x(t))\hat{x}(x(t))\}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_{n_r}, \quad (22)$$

sendo que a matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{\hat{x}}}$ sendo a matriz Jacobiana do vetor $\hat{x}(x(t))$, cujos elementos são dados por:

$$T^{ij}(x(t)) = \frac{\partial \hat{x}_i(x)}{\partial x_j}, \quad (23)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_{\tilde{x}}}$ e $j \in \mathbb{K}_{n_{\tilde{x}}}$. Para esclarecer as outras notações, considere que $A^k(x(t))$ denota a linha k da matriz $A(\alpha(z(t)), x(t))$ e dado $\kappa = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ sendo o conjunto de índices da matriz $B(\alpha(z(t)), x(t))$ cujas linhas correspondentes são iguais a zero. $\tilde{x}(t)$ denota um vetor coluna em que cada elemento é um polinômio dependente do vetor de estado $x(t)$ tal que $\tilde{x}(t) = [x_{k_1}(t) \ x_{k_2}(t) \ \dots \ x_{k_m}(t)]^T, k_i \in \kappa$. A matriz $X(\tilde{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$ será definida posteriormente.

Deve-se observar que a lei de controle (22) independe do conhecimento das funções de pertinência que podem ser complexas e/ou difíceis de serem obtidas. De (21) e (22), considerando por simplicidade que $\alpha(z(t)) = \alpha$ e omitindo a representação do tempo (t) nas variáveis que dependem dele, o sistema em malha fechada pode ser representado da seguinte forma:

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(x)u = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i (A_i(x) - B(x)K_{\sigma}(x))\hat{x}(x). \quad (24)$$

Caso a matriz $B(\alpha, x)$ dependa de termos não polinomiais ou incertos, pode ser utilizado a mesma análise presente em (RAMOS et al., 2019). Considere o sistema não linear e incerto descrito por modelos *fuzzy* polinomiais a seguir:

$$\dot{\check{x}} = \check{A}(\alpha, \check{x})\hat{\check{x}}(\check{x}) + \check{B}(\alpha, \check{x})u, \quad \check{A}(\alpha, \check{x}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \check{A}_i(\check{x}), \quad \check{B}(\alpha, \check{x}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \check{B}_i(\check{x}), \quad (25)$$

sendo $\check{x}$ o vetor de estado da planta e $\hat{\check{x}}(\check{x})$ um vetor de monômios em função do $\check{x}$.

Seja $v \in \mathbb{R}^{n_u}$ a derivada temporal do vetor de entrada de controle $u \in \mathbb{R}^{n_u}$. Defina x_{n_x+l} e v_l , tais que $\dot{x}_{n_x+l} = \dot{u}_l = v_l$, ou seja, $x_{n_x+l} = u_l = \int_0^t v_l(\tau) d\tau, l = 1, 2, \dots, n_u$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\check{x}} = \check{A}(\alpha, \check{x})\hat{\check{x}}(\check{x}) + \check{B}(\alpha, \check{x})u, \\ \dot{x}_{n_x+1} = v_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_x+n_u} = v_{n_u}, \end{cases} \quad (26)$$

ou equivalente (BARMISH, 1983),

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(x)v, \quad (27)$$

sendo

$$x = \begin{bmatrix} \check{x}^T & x_{n_x+1} & \dots & x_{n_x+n_u} \end{bmatrix}^T, \quad A(\alpha, \check{x}) = \begin{bmatrix} \check{A}(\alpha, \check{x}) & \check{B}(\alpha, \check{x}) \\ 0_{n_u \times n_{\check{x}}} & 0_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_u} \\ I_{n_u \times n_u} \end{bmatrix}.$$

Das considerações acima, nota-se que o sistema (27) é equivalente ao sistema (21), sendo $\hat{x}(x) \in \mathbb{R}^{(n_{\check{x}}+n_u) \times 1}$. Assim, pode-se adotar a lei de chaveamento (22) pode ser utilizada, considerando que $v = -K_{\sigma}(x)\hat{x}(x)$, $K_{\sigma} \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_{\check{x}}+n_u)}$.

Deve ser observado que se na lei de chaveamento (22) o vetor $\hat{x}(x) = x$, as matrizes $B(\alpha, x) = B(x)$, $A(\alpha, x) = A(x)$ e $K_\sigma = K_\sigma(x)$, a matriz $T(x)$ uma matriz identidade de dimensões apropriadas, tem-se que a lei de controle chaveada se torna igual a proposta em (SOUZA, 2013). Portanto, a lei de controle chaveada apresentada em (22) é um caso mais geral, e como poderá ser constatado neste capítulo, apresenta resultados menos conservadores.

Como os subsistemas dos modelos *fuzzy* polinomiais podem ser polinômios dependentes do vetor de estado, o projeto dos controladores não poderá ser realizado diretamente utilizando desigualdades matriciais lineares. Desta forma, considere o teorema a seguir apresentado em (RAMOS et al., 2019) e (RAMOS et al., 2018).

Teorema 2. (RAMOS et al., 2018; RAMOS et al., 2019) Considere um sistema não linear e incerto descrito por modelos *fuzzy* polinomiais em malha fechada representado por (24) através da lei de controle chaveada (22) e que existe uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$, matrizes polinomiais $M_i(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\tilde{x}}}$ tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$v^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) v \text{ é SOS,} \quad (28)$$

$$v^T \left(T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - T(x)B(x)M_i(x) - M_i^T(x)B^T(x)T^T(x) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k \hat{x}(x)) + \varepsilon_{2i}(x)I \right) v \text{ é SOS,} \quad (29)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, sendo $\varepsilon_1(x), \varepsilon_{2i}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$; $v \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}}}$ é um vetor que independe de x e $T(x) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_x}$ é uma matriz polinomial definida em (23). Então, a origem $x = 0$ é assintoticamente estável com a lei de controle chaveada (22), sendo que os ganhos do controlador são dados por $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) > 0$, condição esta estabelecida na restrição (28) para todo $x \neq 0$. Defina $\dot{V}_{u\sigma}(x)$ a derivada temporal de $V(x)$ para o sistema em malha fechada (24), com a lei de controle chaveada (22). Tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u\sigma}(x) &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\dot{\hat{x}} + \hat{x}^T(x)\dot{X}^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)[A(\alpha, x) - B(x)K_\sigma(x)]\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \dot{x}_k \right) \hat{x}(x) \end{aligned} \quad (30)$$

Como $B_i^k(x) = 0$ para $k \in \kappa$, tem-se que:

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) \left(A_i^k(x)\hat{x}(x) \right), \quad (31)$$

para $k \in \kappa$. Por outro lado, considerando x_i em que $i \notin \kappa$ e sabendo que a matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x})$ não contém tais variáveis de estado, logo tem-se:

$$\frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_i} = 0. \quad (32)$$

Portanto, de (30) e (31), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u\sigma}(x) &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)[A(\alpha, x) - B(x)K_\sigma(x)]\hat{x}(x) \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)A(\alpha, x)\hat{x}(x) - 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_\sigma(x)\hat{x}(x) \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (33)$$

Assim, note que de (22), e lembrando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual do que qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto,

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{ -\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)\hat{x}(x) \} \leq -\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i(x) \right) \hat{x}(x).$$

Portanto, de (33) e da lei de controle $\sum_{i=1}^{n_r} -\alpha_i K_i(x)$ e (22) observa-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u\sigma}(x) &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)A(\alpha, x)\hat{x}(x) + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{ -\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)\hat{x}(x) \} \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) \\ &\leq 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)A(\alpha, x)\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x) \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i(x) \right) \hat{x}(x) \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)[A(\alpha, x) - B(x)K(\alpha, x)]\hat{x}(x) \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)[A(\alpha, x) + B(x)u_\alpha]\hat{x}(x) \\ &\quad + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \right) \hat{x}(x) = \dot{V}_{u\alpha}(x). \end{aligned}$$

A condição (29) estabelece para todo $x \neq 0$ que

$$\begin{aligned} T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - T(x)B(x)M_i(x) \\ - M_i^T(x)B^T(x)T^T(x) - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k \hat{x}(x)) < 0, \end{aligned} \quad (34)$$

Multiplicando (34) pela direita por $\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})$ e pela esquerda pelo seu transposto, utilizando o resultado apresentado no Lema 1 tem-se que $\dot{V}_{u\alpha}(x) < 0$ e desta forma, $\dot{V}_{u\sigma}(x) \leq \dot{V}_{u\alpha}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, e assim a demonstração esta concluída. $\square$

Facilmente pode-se observar que o Teorema 2 é uma extensão do Teorema 1, considerando restrições com polinômios multivariados, sendo este um caso mais geral.

Além disso, os controladores obtidos através do Teorema 2 podem não ser polinomiais, pois são dependentes da inversa de uma matriz polinomial $X^{-1}(\tilde{x})$, o que torna esses ganhos difíceis de serem implementados. No próximo subcapítulo será apresentado conceitos gerais sobre decomposição em soma de quadrados (SOS), que será a metodologia utilizada para encontrar a solução para as restrições do Teorema 2.

2.4 EXEMPLO NUMÉRICO COMPARANDO OS MODELOS FUZZY

Baseado em (RAMOS et al., 2019; RAMOS, 2018), considere o seguinte sistema não linear representado a seguir:

$$\dot{x} = f(x) = \sin(x)(2x)^2 + 75x = (4x \times \sin(x) + 75)x = g(x)x. \quad (35)$$

Para construção dos modelos locais e das funções de pertinência dos modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, será necessário limitar o sistema em uma região de operação, considerando por exemplo que $x \in [-26,5 \ 26,5]$. Desta forma, os modelos locais e as funções de pertinência, para a operação nesta região são representados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= \max_{|x| \leq 26,5} (g(x)) = 178,8119, & a_2 &= \min_{|x| \leq 26,5} (g(x)) = -19,3317, \\ \alpha_1 &= \frac{g(x) - \min_{|x| \leq 26,5} (g(x))}{\max_{|x| \leq 26,5} (g(x)) - \min_{|x| \leq 26,5} (g(x))}, & \alpha_2 &= 1 - \alpha_1. \end{aligned} \quad (36)$$

sendo a_1 e a_2 os modelos locais *fuzzy* Takagi-Sugeno, α_1 e α_2 as funções de pertinência.

Diferente dos modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, o setor não linear dos modelos *fuzzy* polinomiais será construído a partir de modelos locais não lineares. Desta forma, torna-se possível em muitos casos encontrar um setor global para um sistema não linear, garantindo a exata representação da função não linear por modelos *fuzzy* polinomiais. Portanto, considerando como

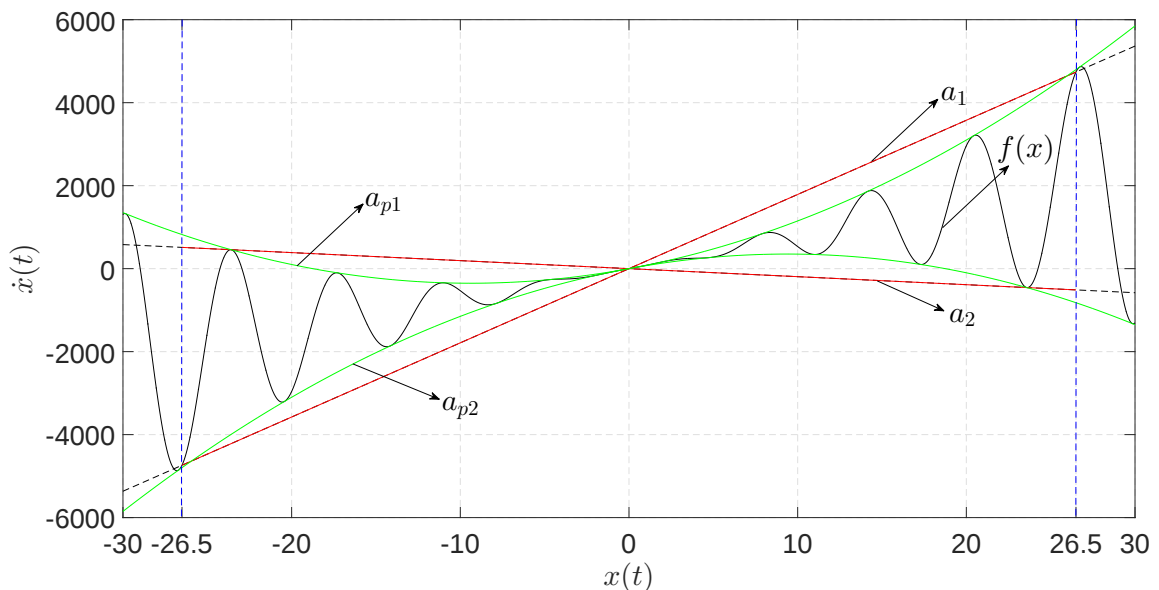
exemplo o sistema (35), os modelos locais polinomiais a_{1p} e a_{2p} , e as funções de pertinência α_{1p} e α_{2p} são representados a seguir:

$$\begin{aligned} a_{1p} &= \max(\sin(x))(2x)^2 + 75x = (2x)^2 + 75x, \\ a_{2p} &= \min(\sin(x))(2x)^2 + 75x = -(2x)^2 + 75x, \\ \alpha_{1p} &= \frac{\sin(x) - \min(\sin(x))}{\max(\sin(x)) - \min(\sin(x))}, \quad \alpha_{2p} = 1 - \alpha_{1p}. \end{aligned} \quad (37)$$

Observe que os modelos *fuzzy* polinomiais possuem modelos locais com termos polinomiais, o que possibilita nesse caso encontrar uma representação da função não linear (35) de forma exata para $x \in (-\infty, \infty)$, não sendo necessário limitar o sistema em uma região de operação como realizado para os modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno.

Na Figura 1 pode-se visualizar o setor não linear utilizando modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno através dos modelos locais lineares (linha contínua em vermelho), que transformam-se nos setores locais limitados em $-d < x < d$ (linha tracejada em azul), sendo $d = 26,5$. Além disso, na Figura 1 pode-se visualizar o setor não linear utilizando modelos *fuzzy* polinomiais com os modelos locais não lineares (linha contínua em verde). Pode-se observar que o setor não linear construído através de modelos locais não lineares é mais próximo da função não linear $f(x)$ (35) (linha contínua em preto) que o setor construído utilizando modelos locais lineares e possibilita a construção de um setor não linear global, sem a necessidade de considerar uma região de operação limitada para representar o sistema de forma exata (RAMOS, 2018).

Figura 1 - Setor não linear do sistema (35) representado pelos modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (36) e polinomiais (37).



Fonte: (RAMOS et al., 2019; RAMOS, 2018)

Desta forma, como os modelos *fuzzy* polinomiais possuem um setor não linear mais próxima da função não linear que os modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, pode-se obter uma redução do conservadorismo no projeto dos controladores, pois restringe a classe de funções que seriam representadas pelos modelos locais *fuzzy*.

2.5 EXEMPLO NUMÉRICO DE CONTROLE CHAVEADO

Nesta seção será apresentado um exemplo numérico com o objetivo de comparar o Teorema 2 com o projeto de controladores chaveados apresentado no Teorema 1 para sistemas não lineares incertos descritos de forma exata em uma região de operação por modelos *fuzzy* TS. Considere agora o seguinte sistema não linear incerto (TANAKA et al., 2009):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (-1 + \Delta_a(t) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2)x_1 + x_2 + x_1u, \\ \dot{x}_2 &= -2\sin(x_1) - 6x_2 + 7u,\end{aligned}\tag{38}$$

supondo que a incerteza $\Delta_a(t)$ satisfaz a condição $|\Delta_a(t)| \leq c$. Desta forma, através dos modelos *fuzzy* TS, o sistema pode ser representado de forma exata considerando 8 modelos locais e restringindo o sistema em uma região de operação. Portanto o projeto dos controladores não garantirá a estabilidade global do sistema.

Para representar o sistema (38) em uma região de operação, considere $x_1 \in [-d_1, d_1]$ e $x_2 \in [-d_2, d_2]$, em que d_1 e d_2 são constantes satisfazendo $0 < d_1 < \infty$ e $0 < d_2 < \infty$. O modelo *fuzzy* TS pode ser obtido da seguinte forma:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^8 \alpha_i(z) [A_i x + B_i u],\tag{39}$$

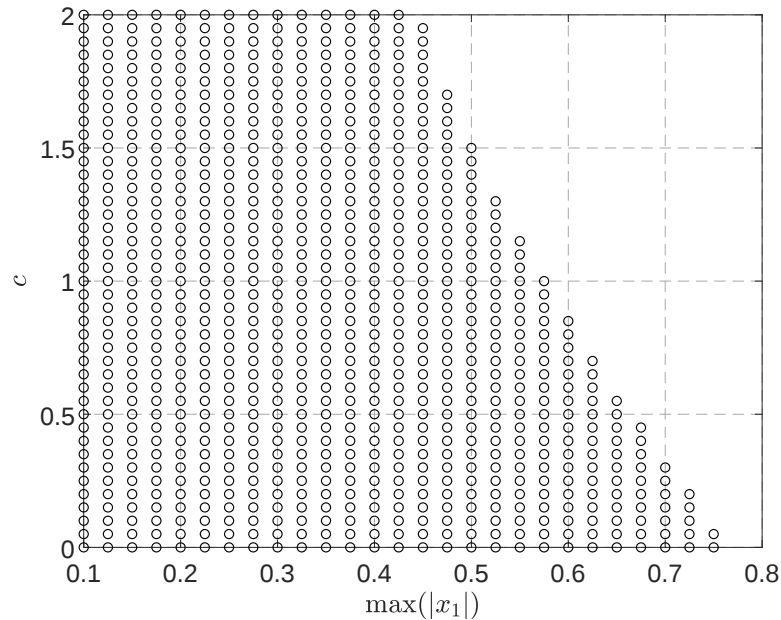
sendo que $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, $z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \Delta_a(t) \end{bmatrix}^T$,

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} k_{\max} & 1 \\ h_{\min} & -6 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} k_{\max} & 1 \\ h_{\min} & -6 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} k_{\max} & 1 \\ h_{\max} & -6 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} k_{\max} & 1 \\ h_{\max} & -6 \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} k_{\min} & 1 \\ h_{\min} & -6 \end{bmatrix}, & A_6 &= \begin{bmatrix} k_{\min} & 1 \\ h_{\min} & -6 \end{bmatrix}, \\ A_7 &= \begin{bmatrix} k_{\min} & 1 \\ h_{\max} & -6 \end{bmatrix}, & A_8 &= \begin{bmatrix} k_{\min} & 1 \\ h_{\max} & -6 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_3 = B_5 = B_7 &= \begin{bmatrix} d_1 \\ 7 \end{bmatrix}, & B_2 = B_4 = B_6 = B_8 &= \begin{bmatrix} -d_1 \\ 7 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{min} &= \min_{|x_1| < d_1} \left(\frac{-2\text{sen}(x_1)}{x_1} \right), & h_{max} &= \max_{|x_1| < d_1} \left(\frac{-2\text{sen}(x_1)}{x_1} \right), \\
k_{min} &= \min_{|x_1| < d_1, |x_2| < d_2} \left(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 + \Delta_a(t) \right), \\
k_{max} &= \max_{|x_1| < d_1, |x_2| < d_2} \left(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 + \Delta_a(t) \right).
\end{aligned} \tag{40}$$

Como a variável premissa depende de termos incertos, a função de pertinência também dependerá. Considerando que $|x_2| \leq 20$, a região de factibilidade do Teorema 1 em função da região de operação e da incerteza $\Delta_a(t)$, pode ser visualizada na Figura 2.

Figura 2 - Região de factibilidade do sistema (38) descrito por Modelos *fuzzy* TS utilizando o Teorema 1, considerando $|x_2| \leq 20$.



Fonte: Próprio autor.

Desta forma, pode ser observado que a região de factibilidade é em função do valor máximo da incerteza e da região de operação do sistema. De acordo com (21), a descrição global e exata do sistema não linear (38) pode ser realizada através da utilização de quatro modelos locais polinomiais descritos a seguir

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(z) \{A_i(x)\hat{x} + B(x)u\} \tag{41}$$

sendo $x = \hat{x}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, $z = \begin{bmatrix} x_1 & \Delta_a(a) \end{bmatrix}$ e

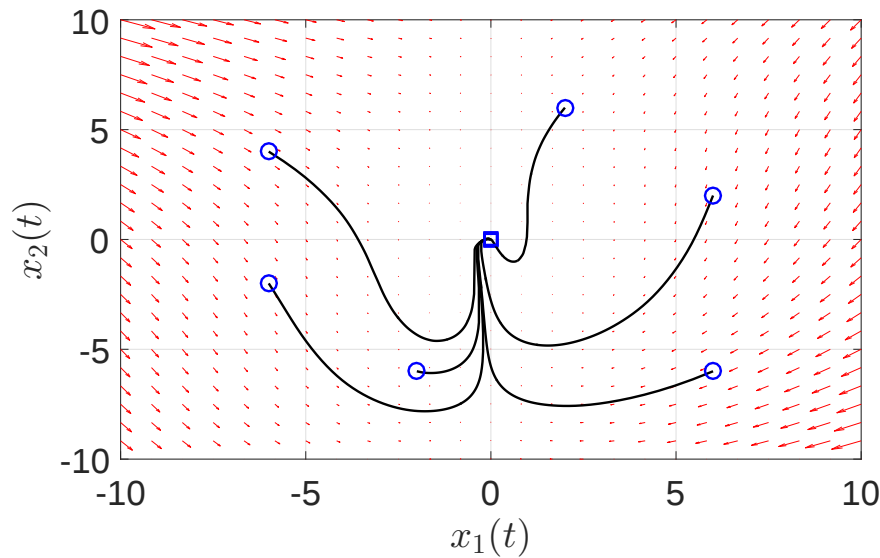
$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 + c & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - c & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \\
A_3 &= \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 + c & 1 \\ 0,4344 & -6 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - c & 1 \\ 0,4344 & -6 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Considerando que $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$, o projeto dos controladores utilizando o Teorema 2 é factível até $c \leq 0,39$, o mesmo valor obtido com a metodologia proposta em (CAO et al., 2014) de acordo com (TANAKA et al., 2016), mas sem a necessidade de utilizar o conhecimento das funções de pertinência na composição do sinal de controle. Esta é uma das vantagens do controlador chaveado em relação a metodologia proposta em (CAO et al., 2014). Os ganhos para o controlador chaveado (22) encontrados através do Teorema 2 considerando $c = 0,39$ são dados a seguir:

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \begin{bmatrix} 1,83x_1 + 0,12x_2 + 0,22 & -0,04 \end{bmatrix}, K_2(x) = \begin{bmatrix} 1,72x_1 + 0,11x_2 + 0,25 & -0,04 \end{bmatrix}, \\ K_3(x) &= \begin{bmatrix} 1,83x_1 + 0,11x_2 + 0,11 & -0,04 \end{bmatrix}, K_4(x) = \begin{bmatrix} 1,83x_1 + 0,12x_2 + 0,10 & -0,04 \end{bmatrix}, \\ X^{-1}(\tilde{x}) &= \begin{bmatrix} 0,03742 & 8 \times 10^{-15} \\ 8 \times 10^{-15} & 0,0027 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

Deve-se observar que os ganhos são polinomiais, o que flexibiliza o projeto dos controladores chaveados. Na Figura 3 pode-se visualizar o plano de fase do sistema incerto considerando $\Delta_a = 0,39 \times \sin(200\pi t)$, sendo que o sistema realimentado é globalmente assintoticamente estável.

Figura 3 - Plano de fase do sistema (38) considerando a lei de controle chaveada (22) com os ganhos (43), sendo a condição inicial representado por um círculo ($\circ$) e a final por um quadrado ($\square$).



Fonte: Próprio autor.

Como pode ser visualizado na Figura 2, a factibilidade dos controladores chaveados apresentados no Teorema 1 para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS dependerá da região de operação do sistema. O projeto pode ser factível para valores grandes de incerteza considerando regiões de operação pequenas, mas o valor máximo de incerteza admissível para

se conseguir factibilidade no projeto dos controladores diminui com o aumento da região de operação.

O controlador chaveado apresentado no Teorema 2 garante a estabilidade global do sistema não linear descrito por modelos *fuzzy* polinomiais para um determinado valor de incerteza. Pode ser considerada também uma região de operação nos modelos *fuzzy* polinomiais, de acordo com os requisitos de projeto, e desta forma, obter uma região de factibilidade para maiores valores de incerteza.

2.6 CONCLUSÕES PARCIAIS

Através do exemplo apresentado na Seção 2.1 foi possível verificar que a decomposição em soma de quadrados é uma extensão das desigualdades matriciais lineares. Deve-se ter em mente que as restrições no projeto de controladores descritas como LMIs podem ser solucionadas através do SOS, pois este é um caso mais geral.

Pode ser observado através das Seções 2.2 e 2.3 que os modelos *fuzzy* TS, que possuem parte consequente linear, são um caso particular dos modelos *fuzzy* polinomiais, cuja parte consequente é não linear. Como apresentado em (RAMOS et al., 2019), os modelos locais não lineares se aproximam mais da função linear, reduzindo o conservadorismo na descrição dos sistemas não lineares por modelos *fuzzy*.

Além disso, a análise da estabilidade e estabilização de sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais pode ser realizada considerando uma candidata a função de Lyapunov polinomial, que é menos conservador e uma caso mais geral que a candidata a função de Lyapunov quadrática considerada comumente na elaboração do projeto de controladores, como em (BOYD et al., 1994; ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b).

Além disso, através do exemplo apresentado na Seção 2.5 podemos verificar que o projeto dos controladores para pequenas regiões de operação pode garantir maiores valores de incerteza. Considerando o projeto para grandes regiões de operação ou a descrição global do sistema não linear através dos modelos *fuzzy* polinomiais, o valor máximo da incerteza poderá não ser menor.

No próximo capítulo será apresentado o projeto de controladores robustos para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* considerando a minimização do limitante superior de um índice quadrático (custo garantido).

3 CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO PARA MINIMIZAR O CUSTO GARANTIDO

3.1 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO

Neste capítulo será apresentado o projeto de controladores chaveados para sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* polinomiais considerando a minimização do limitante superior de um índice quadrático relacionado com o sinal de saída e o sinal de controle do sistema.

É usual que alguns projetos de controladores considerem um custo garantido como índice de performance e o minimizem (TANAKA; OHTAKE; WANG, 2009; DEAECTO et al., 2010; BIZARRO, 2021; SILVA et al., 2021). Em Deaecto et al. (2010) a minimização do custo garantido foi relacionado com a dissipação de energia térmica de conversores CC-CC. Em Silva et al. (2021) e Bocca et al. (2022) a minimização do custo garantido relacionado a saída do sistema reduziu as oscilações e o tempo de transitório do sistema. Em Bizarro (2021) e Carniato et al. (2020) o custo garantido foi utilizado como um índice de desempenho no projeto da lei de chaveamento.

Considerando que o sistema não linear incerto (5) descrito por modelos *fuzzy* polinomiais em (21) considerando que as matrizes $B(\alpha, x) = B(x)$ e $C(\alpha, x) = C(x)$ são conhecidas, ou seja, não dependem de termos não polinomiais ou incertezas. Desta forma, o sistema não linear pode ser representado pela combinação convexa dos subsistemas não lineares com as funções de pertinência da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i [A_i(x)\hat{x}(x) + B(x)u] = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(x)u, \\ y = C(x)\hat{x}(x). \end{cases} \quad (44)$$

Da mesma forma como apresentado na Seção 2.3, as funções de pertinência serão incertas pois dependerão das incertezas variantes no tempo presentes no sistema. Desta forma, será considerado a seguinte lei de controle chaveada que seleciona um controlador polinomial $K_\sigma(x)$ que pertence a um conjunto de ganhos $\{K_i(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\hat{x}}}, i \in \mathbb{K}_{n_r}\}$ dado por:

$$\begin{aligned} u &= u_\sigma = -K_\sigma(x)\hat{x}(x), \\ \sigma &= \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_{n_r}} \left\{ -2\hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})T(x)B(x)K_i(x)\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x)K_i^T(x)SK_i(x)\hat{x}(x) \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

sendo a matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{\hat{x}}}$ definida em (23), $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$ relacionada com a candidata a

função de Lyapunov e $S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$. De (44) e (45), será considerado o sistema em malha fechada a seguir

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(x)u_\sigma = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \left(A_i(x) - B(x)K_\sigma(x) \right) \hat{x}(x). \quad (46)$$

Caso matriz $B(\alpha, x)$ seja não conhecida, ou seja, dependa de termos não polinomiais ou incertezas, pode ser utilizada a mesma metodologia apresentada na Seção 2.3 com o objetivo de que a matriz $B(\alpha, x) = B(x)$ seja conhecida. Desta forma, pode ser utilizado a lei de chaveamento (45) e o projeto de controladores que será apresentado neste capítulo.

A lei de controle chaveada (45) será utilizada para minimizar o limitante superior do índice de performance descrito a seguir

$$J = \int_0^\infty \left(y^T(t)Ry(t) + u^T(t)Su(t) \right) dt, \quad (47)$$

sendo $R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ são matrizes definidas positivas, para qualquer condição inicial $\hat{x}(x(0))$.

O projeto de controle irá considerar que a condição inicial pertence a um conjunto convexo de condições iniciais representada da seguinte forma:

$$x(0) = \sum_{m=1}^{n_{x_0}} \lambda_m x_m(0), \quad \sum_{m=1}^{n_{x_0}} \lambda_m = 1, \quad (48)$$

sendo que $\lambda_m \geq 0$, para todo $m \in \mathbb{K}_{n_{x_0}}$, considerando que n_{x_0} pertence ao conjunto dos número inteiros maior que zero.

Baseado em (SOUZA et al., 2013; RAMOS et al., 2018; ALVES et al., 2018) uma condição suficiente para o projeto dos controladores considerando a lei de chaveamento (45) e o sistema não linear incerto representado por modelos *fuzzy* polinomiais (44) será apresentado o teorema a seguir.

Teorema 3. (RAMOS et al., 2019) *Considere um sistema não linear incerto descrito por modelos fuzzy polinomiais (46) e o índice de performance J em (47) sendo, $R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ são matrizes definidas positivas. Se existe uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$, matrizes $M_i(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\tilde{x}}}$ e escalares $\gamma > 0$ e $\beta > 0$, tal que o problema de otimização a seguir é factível*

$$\begin{aligned} & \underset{X(\tilde{x}), M_i(x)}{\text{minimize}} \quad \gamma \\ & \text{sujeito à} \\ & v_1^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) v_1 \quad \text{é SOS} \end{aligned} \quad (49)$$

$$v_2^T \begin{bmatrix} \gamma & \hat{x}^T(x_m(0)) \\ \hat{x}(x_m(0)) & X(\tilde{x}) \end{bmatrix} v_2 \quad \text{é SOS} \quad (50)$$

$$-v_3^T \begin{bmatrix} \Psi_i + \varepsilon_{2i}(x)I & X(\tilde{x})C^T(x) & -M_i^T(x) \\ C(x)X(\tilde{x}) & -R^{-1} & 0 \\ -M_i(x) & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix} v_3 \text{ é SOS} \quad (51)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Psi_i &= T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) - T(x)B(x)M_i(x) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - M_i^T(x)B^T(x)T^T(x) \\ &\quad - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} A_i^k(x)\hat{x}(x) + 2\beta X(\tilde{x}), \end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ e $m \in \mathbb{K}_{n_{x_0}}$, sendo v_1, v_2 e v_3 são vetores que independem de x . $\varepsilon_1(x) > 0$ e $\varepsilon_{2i}(x) > 0$ para $x \neq 0$. A lei de controle (45), sendo $K_j(x) = M_j(x)X^{-1}(\tilde{x})$, torna o sistema não linear incerto (46) assintoticamente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual a β . Deste modo, será garantido o índice de performance em (47) $J < \gamma$ para todas as condições iniciais $x(0)$ definidas em (48).

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov definida a seguir $V_\sigma(x) = \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$ sendo $X^{-1}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$ é uma matriz polinomial simétrica. A condição (49) implica que $X(\tilde{x})$ e $X^{-1}(\tilde{x})$ são matrizes positivas definidas para todo x e desta forma $V(x)$ é uma função polinomial definida positiva. De (46), (45) e (23) tem-se ao longo da trajetória de estado do sistema,

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma(x) &= \hat{x}^T(x)\dot{X}^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \dot{\hat{x}}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x) \\ &= \hat{x}^T(x) \left(X^{-1}(\tilde{x})T(x)(A(\alpha, x) - B(x)K_\sigma(x)) + (A^T(\alpha, x) - K_\sigma^T(x)B^T(x))T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A^k(\alpha, x)\hat{x}(x) \right) \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (52)$$

Por outro lado, assumindo que as condições no Teorema 3 são satisfeitas, então aplicando o complemento de Schur duas vezes com relação a última linha e coluna de (51), é encontrado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_i + M_i^T(x)SM_i(x) & X(\tilde{x})C^T(x) \\ C(x)X(\tilde{x}) & -R^{-1} \end{bmatrix} &< 0, \\ \Psi_i + M_i^T(x)SM_i(x) + X(\tilde{x})C^T(x)RC(x)X(\tilde{x}) &< 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Pre e pós multiplicando a segunda restrição em (53) por $X^{-1}(\tilde{x})$, fazendo $K_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x})$, considerando o resultado do Lema 1, então multiplicando o resultado por α_i e fazendo a soma de $i = 1$ até n_r , pode-se encontrar

$$X^{-1}(\tilde{x})T(x)(A(\alpha, x) - B(x)K(\alpha, x)) + (A^T(\alpha, x) - K^T(\alpha, x)B^T(x))T^T(x)X^{-1}(\tilde{x}) \quad (54)$$

$$+ \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A^k(\alpha, x) \hat{x}(x) + 2\beta X^{-1}(\tilde{x}) + \left[\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i K_i^T(x) S K_i(x) + C^T(x) R C(x) \right] < 0.$$

Da lei de controle (45) e sabendo que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual que qualquer combinação convexas dos elementos deste conjunto, note que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \hat{x}^T(x) \left[-2X^{-1}(\tilde{x}) T(x) B(x) K_i(x) + K_i^T(x) S K_i(x) \right] \hat{x}(x) \\ \geq \hat{x}^T(x) \left[-2X^{-1}(\tilde{x}) T(x) B(x) K_\sigma(x) + K_\sigma^T(x) S K_\sigma(x) \right] \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (55)$$

Considerando o índice de performance J dado em (47) e adicionando

$$\begin{aligned} \hat{x}^T(x) \left(X^{-1}(\tilde{x}) T(x) A(\alpha, x) + A^T(\alpha, x) T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \right. \\ \left. + C^T(x) R C(x) + 2\beta X^{-1}(\tilde{x}) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A^k(\alpha, x) \hat{x}(x) \right) \hat{x}(x) \end{aligned}$$

em ambos os lados da equação (55), tem-se

$$\dot{V}_\sigma + 2\beta \hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) + H_\sigma \leq \dot{V}_\alpha + H_\alpha + 2\beta \hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x), \quad (56)$$

sendo

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma &= \hat{x}^T(x) \left[X^{-1}(\tilde{x}) T(x) A(\alpha, x) + A^T(\alpha, x) T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A^k(\alpha, x) \hat{x}(x) \right. \\ &\quad \left. - X^{-1}(\tilde{x}) T(x) B(x) K_\sigma(x) - K_\sigma^T(x) B^T(x) T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \right] \hat{x}(x), \\ \dot{V}_\alpha &= \hat{x}^T(x) \left[X^{-1}(\tilde{x}) T(x) A(\alpha, x) + A^T(\alpha, x) T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X^{-1}(\tilde{x})}{\partial x_k} A^k(\alpha, x) \hat{x}(x) \right. \\ &\quad \left. - X^{-1}(\tilde{x}) T(x) B(x) K(\alpha, x) - K^T(\alpha, x) B^T(x) T^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \right] \hat{x}(x), \\ H_\sigma &= \hat{x}^T(x) \left(C^T(x) R C(x) + K_\sigma^T(x) S K_\sigma(x) \right) \hat{x}(x), \\ H_\alpha &= \hat{x}^T(x) \left(C^T(x) R C(x) + \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i^T(x) S K_i(x) \right) \hat{x}(x). \end{aligned}$$

De (54), note que para $x \neq 0$, $\dot{V}_\alpha + H_\alpha + 2\beta \hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) < 0$. Então, considerando (56), pode ser observado que, para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma + H_\sigma + 2\beta \hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) &< 0 \\ \dot{V}_\sigma + 2\beta \hat{x}^T(x) X^{-1}(\tilde{x}) \hat{x}(x) &< -H_\sigma. \end{aligned} \quad (57)$$

Observando que R e S são matrizes definidas positivas, de (57) pode ser obtido que $\dot{V}_\sigma \leq -2\beta \hat{x}^T(x)X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$. Está é uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do sistema (46) com a lei de chaveamento (45), com uma taxa de decaimento maior ou igual a β (BOYD et al., 1994). De (57) e sabendo que $X^{-1}(\tilde{x}) > 0$, segue que $\dot{V}_\sigma < -H_\sigma$. desta observação, integrando de 0 a ∞ e sabendo que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, por que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, considerando (47), tem-se que

$$J < \hat{x}^T(x(0))X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(0)) = V_\sigma(x(0)). \quad (58)$$

Além disso, multiplicando (50) por λ_m e somando de $m = 1$ até n_{x_0} e então aplicando o complemento de Schur com respeito a segunda linha e coluna, da equação (48), pode-se encontrar que

$$\gamma \geq \hat{x}^T(x(0))X^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(0)). \quad (59)$$

De (58) e (59), é garantido que $J < \gamma$ para todo $\hat{x}(x_m(0))$, e assim a prova está concluída. $\square$

Considerando a seguinte lei de controle

$$u = -K(x)\hat{x}(x), \quad (60)$$

note que a esta lei de controle tem apenas um único ganho polinomial e é independente das funções de pertinência. O sistema em malha fechada é dada por

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \left(A_i(x) - B(x)K(x) \right) \hat{x}(x). \quad (61)$$

Portanto, o próximo teorema apresenta o projeto considerando a lei controle (60).

Teorema 4. *Considere um sistema não linear incerto descrito por modelos fuzzy polinomiais (44) com a lei de controle (61) e o índice de performance J em (47) sendo, $R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e $S \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ são matrizes definidas positivas. Se existe uma matriz simétrica polinomial $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$, matrizes $M_i(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\tilde{x}}}$ e escalares $\gamma > 0$ e $\beta > 0$, tal que o problema de otimização a seguir é factível*

$$\begin{aligned} & \underset{X(\tilde{x}), M_i(x)}{\text{minimize}} && \gamma \\ & \text{sujeito à} && \\ & v_1^T (X(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) v_1 && \text{é SOS} \end{aligned} \quad (62)$$

$$v_2^T \begin{bmatrix} \gamma & \hat{x}^T(x_m(0)) \\ \hat{x}(x_m(0)) & X(\tilde{x}) \end{bmatrix} v_2 \quad \text{é SOS} \quad (63)$$

$$-v_3^T \begin{bmatrix} \Phi_i + \varepsilon_{2i}(x)I & X(\tilde{x})C^T(x) & -M^T(x) \\ C(x)X(\tilde{x}) & -R^{-1} & 0 \\ -M(x) & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix} v_3 \text{ é SOS} \quad (64)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Psi_i = & T(x)A_i(x)X(\tilde{x}) - T(x)B(x)M(x) + X(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - M^T(x)B^T(x)T^T(x) \\ & - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial X(\tilde{x})}{\partial x_k} A_i^k(x) \hat{x}(x) + 2\beta X(\tilde{x}), \end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $m \in \mathbb{K}_{n_{x_0}}$, sendo v_1, v_2 e v_3 são vetores que independem de x . $\varepsilon_1(x) > 0$ e $\varepsilon_{2i}(x) > 0$ para $x \neq 0$. Então a lei de controle (60), sendo $K(x) = M(x)X^{-1}(\tilde{x})$, torna o sistema não linear incerto (61) assintoticamente estável com uma taxa de decaimento igual ou maior que β . Deste modo, será garantido o índice de performance em (47) $J < \gamma$ para todas as condições iniciais $x(0)$ definidas em (48).

Demonstração. É similar a prova do Teorema 3. □

Na seção a seguir serão apresentados exemplos numéricos que evidenciaram as vantagens do controlador proposto nesta seção.

3.2 EXEMPLO NUMÉRICO CONSIDERANDO O CUSTO GARANTIDO

Considere o seguinte sistema não linear baseado em (CAO et al., 2014):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-1 + (1 + \Delta(t))x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2)x_1 + x_2 + x_1u, \\ \dot{x}_2 &= -2\text{sen}(x_1) - 6x_2 + 7u, \end{aligned} \quad (65)$$

sendo $\Delta(t)$ uma incerteza satisfazendo $|\Delta(t)| \leq 0.2$ para todo t . Todos os resultados de simulação neste exemplo foi considerando $\Delta(t) = 0.2\text{sen}(200\pi t)$. Contudo deve ser observado que $\Delta(t)$ é considerado incerto, mas o módulo é igual ou menor do que 0,2. Portanto, o sistema não linear incerto pode ser exatamente representado por modelos *fuzzy* polinomiais como em (44), sendo $\hat{x}(x) = x$ e

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \begin{bmatrix} -1 + 1, 2x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \\ A_2(x) &= \begin{bmatrix} -1 + 1, 2x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0, 4344 & -6 \end{bmatrix}, \\ A_3(x) &= \begin{bmatrix} -1 + 0, 8x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4(x) &= \begin{bmatrix} -1 + 0,8x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0,4344 & -6 \end{bmatrix}, \\
B_1(x) = \dots = B_4(x) &= \begin{bmatrix} x_1 & 7 \end{bmatrix}^T, \quad C(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{66}$$

deve ser observado que a matriz $B(x)$ é conhecida, pois não depende de termos não polinomiais ou incertos. Portanto, a lei de controle chaveada (45) pode ser diretamente utilizada, sem a necessidade de se adicionar integradores como descrito na Seção 2.3.

Teoremas 3 e 4 são utilizados para projetar os controladores, considerando uma taxa de decaimento especificada como $\beta = 0$, o conjunto de condições iniciais $\hat{x}(x_1(0)) = \begin{bmatrix} -10 & -10 \end{bmatrix}^T$, $\hat{x}(x_2(0)) = \begin{bmatrix} -10 & 10 \end{bmatrix}^T$, $\hat{x}(x_3(0)) = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix}^T$, e $\hat{x}(x_4(0)) = \begin{bmatrix} 10 & 10 \end{bmatrix}^T$, as matrizes $R = 0,1 \times I$ e $S = 0,1$, sendo I uma matriz identidade de dimensões apropriadas e os elementos de cada ganho são polinômios de ordem igual a 0, 1 e/ou 2, e os polinômios $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_{2i}(x) = 0.01$ em ambos os projetos.

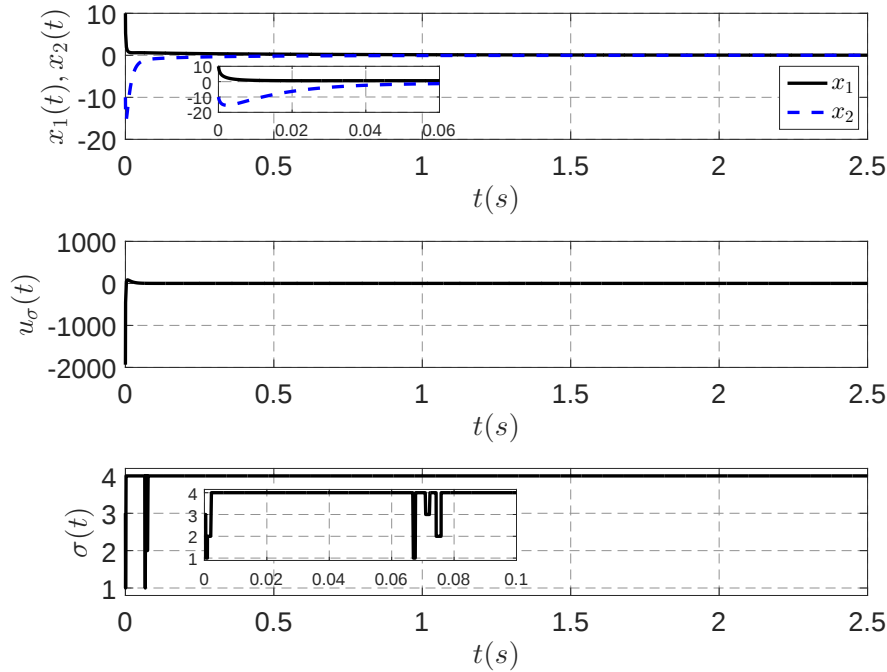
O projeto com o controlador com um único ganho apresentado no Teorema 4 não foi factível, contudo o projeto do controlador chaveado apresentado no Teorema 3 foi factível, com os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
X(\tilde{x}) &= \begin{bmatrix} 0,4883 & -6,8917 \times 10^{-5} \\ -6,8917 \times 10^{-5} & 8,4715 \end{bmatrix}, \\
K_1(x) &= \begin{bmatrix} 19,5783x_1 - 0,33x_2 - 0,7253 \\ 1,469 \times 10^{-4}x_1 - 6,9621 \times 10^{-6}x_2 + 7,775 \end{bmatrix}^T, \\
K_2(x) &= \begin{bmatrix} 18,403x_1 - 0,2748x_2 - 0,7519 \\ 1,376 \times 10^{-4}x_1 - 6,6387 \times 10^{-6}x_2 + 7,250 \end{bmatrix}^T, \\
K_3(x) &= \begin{bmatrix} 19,9278x_1 - 0,2657x_2 - 0,4955 \\ 1,496 \times 10^{-4}x_1 - 6,8856 \times 10^{-6}x_2 + 7,951 \end{bmatrix}^T, \\
K_4(x) &= \begin{bmatrix} 21,32x_1 - 0,2636x_2 - 0,1373 \\ 1,602 \times 10^{-4}x_1 - 7,1521 \times 10^{-6}x_2 + 8,626 \end{bmatrix}^T,
\end{aligned} \tag{67}$$

o limitante superior do custo garantido obtido foi $\gamma = 216,59$.

Considerando a condição inicial $\hat{x}(x_2(0)) = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix}$, a Figura 4 mostra as variáveis de estado do sistema (65) e a lei de controle chaveada (45) (sinal de controle u e a regra de chaveamento $\sigma(t)$) com os ganhos polinomiais obtidos em (67).

Figura 4 - Variáveis de estado do sistema (65) e a lei de controle chaveada (45) (sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o índice de chaveamento $\sigma(t)$).



Fonte: Próprio autor.

Portanto, como visto na Figura 4, o sistema não linear incerto (65), descritos por modelos *fuzzy* polinomiais em malha fechada como em (46), com a lei de controle chaveada (45) e ganhos polinomiais torna o sistema assintoticamente estável, utilizando todos os ganhos calculados. O valor do índice de (obtido através da equação (47)) durante a simulação foi $J = 74,02$.

Deve-se destacar que as funções de pertinência não foram utilizadas na composição do sinal de controle pois ela depende da incerteza do sistema, e deste modo, se torna mais complexo de obtê-las ao longo do transitório do sistema. Desta forma, observamos que a lei de chaveamento pode ser aplicada com mais facilidade que aquelas que utilizam as funções de pertinência para compor o sinal de controle.

3.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Baseado em (SOUZA, 2013; RAMOS et al., 2018; ALVES et al., 2018) foi apresentado neste capítulo uma lei de controle chaveada para minimizar o limitante superior de um índice quadrático (custo garantido) para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais.

A lei de controle chaveada (45) torna o sistema assintoticamente estável para um conjunto de condições iniciais, considerando parâmetros incertos, sendo que os valores de máximo e mínimo das incertezas conhecido. Sabendo que a função de pertinência pode ser incerta, a lei de controle chaveada (45) não depende das funções de pertinência para compor o sinal de

controle.

Através do exemplo numérico apresentado na Seção 3.2 pode ser visto que a lei de controle chaveada torna o sistema assintoticamente estável e é menos conservativa que a lei de controle com um único ganho. Sendo que a lei de controle com um único ganho foi utilizado para comparação pois o sinal de controle também não depende das funções de pertinência.

No próximo capítulo será proposto projeto de controladores com condições mais relaxadas que os apresentados até agora.

4 CONDIÇÕES RELAXADAS PARA O PROJETO DE CONTROLADORES CHAVEADOS

4.1 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO RELAXADO

Inicialmente, deve ser observado que as lei de controle chaveado apresentado em (22) e (45) dependem que a matriz $B(\alpha, x)$ do modelo *fuzzy* polinomial (21) seja conhecida, ou seja $B(\alpha, x) = B(x)$ não dependendo de termos não polinomiais ou incertezas do sistema. A metodologia apresentada na Seção 2.3 quando a matriz $B(\alpha, x)$ é desconhecida pode influenciar na região de factibilidade.

Desta forma, a nova de lei de chaveamento proposta utiliza matrizes auxiliares $Q_j(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, $j \in \mathbb{K}_{n_r}$, para escolher o índice σ . A lei de controle é definida da seguinte forma:

$$u_{\sigma} = -K_{\sigma}(x)\hat{x}(x), \quad \sigma = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_{n_r}} \{ \hat{x}^T(x) Q_j(x) \hat{x}(x) \}, \quad (68)$$

sendo $\sigma \in \mathbb{K}_{n_r}$ é o menor índice j que resulta no menor valor de $\hat{x}^T(x) Q_j(x) \hat{x}(x)$, $j \in \mathbb{K}_{n_r}$. De (21) e (68), o sistema em malha fechada pode ser representado como

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z) \{ A_i(x) - B_i(x) K_{\sigma}(x) \} \hat{x}(x). \quad (69)$$

Em muitos projetos de controladores apresentados na literatura (TANAKA et al., 2009; CAO et al., 2014; RAMOS et al., 2019; RAMOS et al., 2019) e nos Capítulos 2 e 3 para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* polinomiais os controlares dependem da matriz polinomial $X^{-1}(\tilde{x})$. Deste modo, considerando que a matriz $X^{-1}(\tilde{x})$ contém polinômios com ordem maior que zero, os elementos das matrizes $X(\tilde{x})$ e $K_j(x)$, $j \in \mathbb{K}_{n_r}$ podem não ser polinomiais, mas funções racionais. Em implementações práticas, funções racionais presentes na lei de controle tem um custo computacional de implementação maior (KIM; PARK; JOO, 2016).

Considere a seguinte expressão nula que será utilizada nos teoremas a serem propostos

$$\begin{aligned} & 2 \left(\hat{x}^T(x) N + \mu \hat{x}^T(x) N \right) \times \left(-\hat{x}(x) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(T(x) A_i(x) - T(x) B_i(x) K_{\sigma}(x) \right) \hat{x}(x) \right) = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

sendo N uma matriz arbitrária com dimensões apropriadas.

Observação 1. Para demonstrar que a expressão (70) é nula, de (69) e (23) pode ser observado

que

$$\dot{\hat{x}}(x) = T(x) \sum_{i=1}^r \alpha_i(z) \{A_i(x) - B_i(x) K_\sigma(x)\} \hat{x}(x).$$

Deste modo, a equação (70) pode ser reescrita como

$$2 \left(\hat{x}^T(x) N + \mu \dot{\hat{x}}^T(x) N \right) \times \left(-\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}(x) \right) = 0, \quad (71)$$

porque $(-\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}(x)) = 0$.

O teorema a seguir, usando a lei de controle chaveado (68) propõe a estabilização de uma classe de sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* polinomiais como em (21) sem o conhecimento das funções de pertinência para compor o sinal de controle da lei de controle chaveado (68).

Teorema 5. *Considere um sistema não linear incerto representado por modelos fuzzy polinomiais como em (44). Suponha que existem matrizes simétricas $J(\tilde{x})$, $\hat{Q}_i(x(t))$, $\hat{Z}_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$, uma matriz constante $L \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$ e escalares $\mu > 0$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$v_1^T (J(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x) I) v_1 \quad \text{é SOS}, \quad (72)$$

$$-v_2^T \begin{bmatrix} \Phi_i(x) & * \\ J(\tilde{x}) - L^T + \mu (T(x) A_i(x) L) & -\mu (L + L^T) + \hat{Z}_i(x) + \varepsilon_{2i}(x) I \end{bmatrix} v_2 \quad \text{é SOS}, \quad (73)$$

$$-v_3^T \begin{bmatrix} \mathbf{He} \{ -T(x) B_i(x) M_j(x) \} - \hat{Q}_j(x) & * \\ \mu (-T(x) B_i(x) M_j(x)) & -\hat{Z}_i(x) \end{bmatrix} v_3 \quad \text{é SOS}, \quad (74)$$

sendo

$$\Phi_i(x) = \mathbf{He} \{ T(x) A_i(x) L \} + \hat{Q}_i(x) + \varepsilon_{2i}(x) I + \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{\partial J(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x) \hat{x}(x)), \quad (75)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_{n_r}$, sendo $\varepsilon_1(x), \varepsilon_{2i}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, e v_1, v_2, v_3 vetores que são independentes de x com dimensões apropriadas. Então a lei de controle chaveada (68) torna a origem do sistema $x = 0$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, sendo $K_i(x) = M_i(x) L^{-1}$ e $Q_i(x) = L^{-T} \hat{Q}_i(x) L^{-1}$.

Demonstração. Considere a seguinte função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}^T(x) P(\tilde{x}) \hat{x}(x)$ sendo $P(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$ uma matriz simétrica polinomial. De (74) observe que $Z_i(x) \geq 0$ e de (73), $\mu (L + L^T) - Z_i(x) - \varepsilon_{2i}(x) I > 0$. Então, como $\mu > 0$ e $\varepsilon_{2i}(x) > 0$, segue que $L + L^T > \mu^{-1} (Z_i(x) + \varepsilon_{2i}(x) I) > 0$ e então existe a matriz L^{-1} . A restrição (72) implica que $J(\tilde{x})$, considerando a definição $J(\tilde{x}) = L^{-T} P(\tilde{x}) L^{-1}$ é positiva definida para todo x , e $V(x)$ é uma função definida positiva para

todos os valores de x . Portanto, a derivada no tempo da candidata a função de Lyapunov $V(x)$ é calcula como:

$$\dot{V}(x) = 2\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x)\dot{P}(\tilde{x})\hat{x}(x). \quad (76)$$

Adicionando a expressão nula (70) em (76), pode-se encontrar

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \left\{ 2\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) \right) \hat{x}(x) \right. \\ & + 2\mu\hat{x}^T(x)N(T(x)A_i(x) - T(x)B_i(x)K_\sigma(x))\hat{x}(x) \\ & + 2\hat{x}^T(x)N(T(x)A_i(x) - T(x)B_i(x)K_\sigma(x))\hat{x}(x) \\ & \left. - 2\hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) - 2\mu\hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Agora, suponha que exista matrizes simétricas $Q_j(x)$, $Z_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, tal que

$$\begin{aligned} & 2\mu\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x) \\ & + 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x) \leq \hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x) + \dot{\hat{x}}(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x). \end{aligned} \quad (78)$$

Então, multiplicando (78) por α_i , e fazendo a soma de $i = 1$ até n_r , e trocando o índice j por σ , obtém-se

$$\begin{aligned} & 2\mu\hat{x}^T(x)N(-T(x)B(\alpha, x)K_\sigma(x))\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B(\alpha, x)K_\sigma(x))\hat{x}(x) \\ & = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(2\mu\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_\sigma(x))\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_\sigma(x))\hat{x}(x) \right) \\ & \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(\hat{x}^T(x)Q_\sigma(x)\hat{x}(x) + \dot{\hat{x}}(x)Z(\alpha, x)\dot{\hat{x}}(x) \right). \end{aligned} \quad (79)$$

Considerando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual que qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto. De (68) e lembrando que $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, observe que

$$\hat{x}^T(x)Q_\sigma(x)\hat{x}(x) = \min_{i \in \mathbb{K}_{n_r}} \{ \hat{x}^T(x)Q_i(x)\hat{x}(x) \} \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{x}^T(x)Q_i(x)\hat{x}(x).$$

Então, de (79), temos que

$$\begin{aligned} & 2\mu\hat{x}^T(x)N(-T(x)B(\alpha, x)K_\sigma(x))\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B(\alpha, x)K_\sigma(x))\hat{x}(x) \\ & \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(\hat{x}^T(x)Q_i(x)\hat{x}(x) + \dot{\hat{x}}^T(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x) \right). \end{aligned} \quad (80)$$

De (77) e (80), para $x \neq 0$, observe que $\dot{V}(x) < 0$ se

$$2\hat{x}(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) \right) \hat{x}(x) - 2\hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) - 2\mu\hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) \quad (81)$$

$$+ 2\mu\hat{x}^T(x)NT(x)A_i(x)\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)NT(x)A_i(x)\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x)Q_i(x)\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x) < 0.$$

Considerando $\Omega(x) = \text{diag}\{N^T, N^T\} \times \begin{bmatrix} \hat{x}^T(x) & \dot{\hat{x}}^T(x) \end{bmatrix}^T$, pre multiplicando por $\Omega^T(x)$ e pós multiplicando por $\Omega(x)$ as restrições (74) e (73) e fazendo as seguintes mudanças de variáveis $L = N^{-T}$, $M_j(x) = K_j(x)N^{-T}$, $J(\tilde{x}) = N^{-1}P(\tilde{x})N^{-T}$, $\hat{Q}_i(x) = N^{-1}Q_i(x)N^{-T}$, $\hat{Z}_i = N^{-1}Z_i(x)N^{-T}$, pode-se concluir que as restrições (78) e (81) são satisfeitas, respectivamente. Portanto, a prova do Teorema 5 está concluída. $\square$

Observação 2. Se $\hat{x}(x) = x$, $P(\tilde{x})$, $A_i(x)$, $B_i(x)$, $Q_j(x)$, $Z_i(x)$ e $K_j(x)$, $i, j \in \mathbb{K}_{n_r}$, são matrizes constantes, então a condição do Teorema 5 e a lei de chaveamento (68) é reduzido ao projeto de controladores chaveados baseado em modelos fuzzy TS proposto em (SOUZA et al., 2013). A metodologia proposta no Teorema 5 introduz mais variáveis de decisão que a lei de controle chaveado proposta nos trabalhos (RAMOS et al., 2019; RAMOS et al., 2018; RAMOS et al., 2019). A partir da abordagem apresentada neste capítulo, se os elementos da matriz $B(\alpha, x)$ são não polinomiais ou incertos, não é necessário a utilização de integradores no projeto de controladores.

Pode ser observado que o Teorema 5 pode ser utilizado para projetar controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy polinomiais com incertezas politópicas como em (RAMOS et al., 2018). Do mesmo modo que em (ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b; RAMOS et al., 2019), controladores com um único ganho são utilizados para comparar os resultados obtidos com o controlador chaveado. O teorema a seguir apresenta o projeto de controle robusto com um único ganho.

Teorema 6. Considere um sistema não linear incerto descrito por modelos fuzzy polinomiais (21). Se existe uma matriz simétrica polinomial $J(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$, uma matriz polinomial $M(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\tilde{x}}}$, uma matriz constante $L \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$ e um escalar $\mu > 0$, tal que as seguintes restrições são satisfeitas:

$$v_1^T (J(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) v_1 \quad \text{é SOS}, \quad (82)$$

$$-v_2^T \begin{bmatrix} \Phi_i^{(1,1)}(x) & * \\ \Phi_i^{(2,1)}(x) & -\mu(L + L^T) + \varepsilon_{2i} \end{bmatrix} v_2 \quad \text{é SOS}, \quad (83)$$

sendo

$$\Phi_i^{(1,1)}(x) = \mathbf{He}\{T(x)A_i(x)L - T(x)B_i(x)M(x)\} + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial J(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) + \varepsilon_{2i}(x)I,$$

$$\Phi_i^{(2,1)}(x) = J(\tilde{x}) - L^T + \mu(T(x)A_i(x)L - B_i(x)M(x)),$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, sendo $\varepsilon_1(x), \varepsilon_{2i}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, são polinômios não negativos, e v_1, v_2 são vetores que independem de x com dimensões apropriadas. Então a lei de controle $u = -K(x)\hat{x}(x)$ torna a origem do sistema $x = 0$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, sendo $K(x) = M(x)L^{-1}$.

Demonstração. A prova é semelhante a apresentada no Teorema 5 considerando $K_\sigma(x) = K(x)$. $\square$

O teorema a seguir mostra que se o projeto dos controladores é factível com um único ganho $K(x)$ relacionado com a lei de controle $u = -K(x)\hat{x}(x)$, então o projeto dos controladores chaveados (68) também será.

Teorema 7. Suponha a existência de uma matriz polinomial simétrica $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$, uma matriz polinomial $M(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\tilde{x}}}$, uma matriz constante $L \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$ e um escalar $\mu > 0$ tal que as restrições (82) e (83) são factíveis sendo $\varepsilon_1(x), \varepsilon_{2i}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Os vetores v_1, v_2 são independentes de x . Então a origem do sistema (21), com a lei de controle $u = -K(x)\hat{x}(x)$, cujo sistema em malha fechada é representado por $\dot{x} = (A(\alpha, x) - B(\alpha, x)K(x))\hat{x}(x)$, é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Além disso, se existe $K_j(x)$, $j \in \mathbb{K}_{n_r}$, tal que $K_j(x) = M_j(x)L^{-1}(\tilde{x})$, as condições do Teorema 5, (72), (73) e (74) são satisfeitas.

Demonstração. Primeiramente, se (82) é satisfeita, então $P(\tilde{x})$ é uma matriz polinomial definida positiva, por que $J(\tilde{x}) = L^{-T}P(\tilde{x})L^{-1} > 0$. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V(x) = \hat{x}^T(x)P(\tilde{x})\hat{x}(x)$. Então, para o sistema não linear em malha fechada $\dot{x} = (A(\alpha, x) - B(\alpha, x)K(x))\hat{x}(x)$ e considerando a expressão nula (70), temos que para $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \sum_{i=1}^r \alpha_i \left\{ 2\hat{x}(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \mathbb{K}} \frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) \right) \hat{x}(x) \right. \\ & + 2\mu \hat{x}^T(x)N(T(x)A_i(x) - T(x)B_i(x)K(x))\hat{x}(x) \\ & + 2\hat{x}^T(x)N(T(x)A_i(x) - T(x)B_i(x)K(x))\hat{x}(x) \\ & \left. - 2\hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) - 2\mu \hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) \right\} < 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Se as condições (82) e (83) são satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, por que $\alpha_i \geq 0, i \in \mathbb{K}_{n_r}$, e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, então $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$, e a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema $\dot{x} = (A(\alpha, x) - B(\alpha, x)K(x))\hat{x}(x)$.

Como pode ser visto na prova do Teorema 5, a restrição (73) e (74) que as inequações (81) e (78), respectivamente, portanto

$$\begin{aligned} & 2\mu \hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x) \\ & \leq \hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x) + \hat{x}^T(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x), \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned}
& 2\hat{x}(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) \right) \hat{x}(x) \\
& + 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N(T(x)A_i(x))\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)N(T(x)A_i(x))\hat{x}(x) \\
& - 2\hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) - 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x)Q_i(x)\hat{x}(x) + \dot{\hat{x}}^T(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x) < 0, \quad (86)
\end{aligned}$$

e isso implica que a lei de controle (68) pode tornar o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (69) assintoticamente estável. Para mostrar que (84) implica em (81) e (78), considere $K_j(x) = K(x)$ e $Q_j(x) = 0$ para todo $j \in \mathbb{K}_{n_r}$. Então, de (84) pode ser observado que existe $\phi > 0$ pequeno o suficiente, desta forma, para $x \neq 0$ tem-se que:

$$\begin{aligned}
& 2\hat{x}(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) \right) \hat{x}(x) \\
& + 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N(T(x)A_i(x) - T(x)B_i(x)K(x))\hat{x}(x) \\
& + 2\hat{x}^T(x)N(T(x)A_i(x) - T(x)B_i(x)K(x))\hat{x}(x) \\
& + 2\hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) + 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) + \phi\hat{x}^T(x)\hat{x}(x) < 0. \quad (87)
\end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
Z_i(x) = & 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K(x))\hat{x}(x) \\
& + 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K(x))\hat{x}(x) + \phi\hat{x}^T(x)\hat{x}(x), \quad (88)
\end{aligned}$$

então (87) implica na factibilidade de (89):

$$\begin{aligned}
& 2\hat{x}(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x) \left(\sum_{k \in \kappa} \frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k} (A_i^k(x)\hat{x}(x)) \right) \hat{x}(x) \\
& + 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N(T(x)A_i(x))\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)N(T(x)A_i(x))\hat{x}(x) \\
& - 2\hat{x}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) - 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N\dot{\hat{x}}(x) + Z_i(x) < 0, \quad (89)
\end{aligned}$$

para $x \neq 0$, descrito em (81), para $Q_i(x) = 0$, $i \in \mathbb{K}_{n_r}$.

Observe que neste caso a restrição em (78) é também satisfeita para $x \neq 0$, então de (88) tem-se:

$$\begin{aligned}
& 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x) \\
& - \hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x) - \dot{\hat{x}}^T(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x) \\
& = 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x) + 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K_j(x))\hat{x}(x) \\
& - 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K(x))\hat{x}(x) - 2\hat{x}^T(x)N(-T(x)B_i(x)K(x))\hat{x}(x) - \phi\hat{x}^T(x)\hat{x}(x) \\
& = -\phi\hat{x}^T(x)\hat{x}(x) < 0. \quad (90)
\end{aligned}$$

e desta forma, a prova do Teorema 7 está concluída. $\square$

De acordo com o Teorema 7, se pode ser obtido um controlador $u = -K(x)\hat{x}$ formado por um único ganho polinomial, dependente do vetor de estado do sistema, é possível obter controladores polinomiais chaveados (68) tornando a origem do sistema controlado $x = 0$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

4.2 DISTÚRBIOS E/OU INCERTEZAS NO SINAL DE CONTROLE

Esta seção apresenta uma abordagem para suprimir uma classe de distúrbios, ou incertezas relacionadas com o sinal de controle. Inicialmente, considere uma classe de sistemas não lineares incertos que podem ser descritos por modelos *fuzzy* polinomiais da seguinte forma:

$$\dot{x} = A(x, \alpha)\hat{x}(x) + B(x, \alpha)u + B(x, \alpha)d(t), \quad (91)$$

sendo $B(\alpha, x) = B_0(x)g(z)$, $g(z) \geq 0$, $d(t)$ é um distúrbio ou incerteza sendo que $\rho_1 \leq d(t) \leq \rho_2$. Além disso, considere a lei de controle chaveado a seguir:

$$u = u_\sigma - \rho_\varphi, \\ \varphi = \arg \min_{i \in \{1,2\}}^* \left\{ -\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B_0(x)\rho_i \right\} \quad (92)$$

sendo u_σ a lei de controle chaveada definida em (68). Deste modo, considere o Teorema proposto a seguir.

Teorema 8. *Considere que as condições do Teorema 5 para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy (21) considerando a lei de controle chaveado (68) são satisfeitos, sendo $K_i(x) = M_i(x)L^{-1}$ e $Q_i(x) = L^{-T}\hat{Q}_i(x)L^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}_r$. Então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema não linear incerto (91) com a lei de controle (92) é assintoticamente estável.*

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov polinomial $V(x) = \hat{x}^T(x)P(\tilde{x})\hat{x}(x)$, $P(\tilde{x}) = P^T(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}} \times n_{\tilde{x}}}$. Então, considerando o sistema representado em (91) com a lei de controle chaveado (92), temos que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x)\dot{P}(\tilde{x})\hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x) \left(A(x, \alpha)\hat{x}(x) + B(x, \alpha)(u_\sigma - \rho_\varphi) + B(x, \alpha)d(t) \right) + \hat{x}^T(x)\dot{P}(\tilde{x})\hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x) \left(A(x, \alpha)\hat{x} + B(x, \alpha)u_\sigma \right) \\ &\quad + 2\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B(x, \alpha)(d(t) - \rho_\varphi) + \hat{x}^T(x)\dot{P}(\tilde{x})\hat{x}(x). \end{aligned} \quad (93)$$

Da prova do Teorema 5 e sabendo que $B(\alpha) = B_0(x)g(z)$, $g(z) \geq 0$ para todo $x \neq 0$,

$$\dot{V} < 2\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B_0(x)(d(t) - \rho_\varphi)g(z(t)). \quad (94)$$

Deve ser observado que a função $d(t)$ pode ser reescrita como uma combinação convexa da

$$d(t) = \tau_1(t)\rho_1 + \tau_2(t)\rho_2; \quad (95)$$

sendo $\tau_1(t), \tau_2(t) \geq 0$ e

$$\sum_{i=1}^2 \tau_i(t) = 1; \quad \tau_2(t) = \frac{d(t) - \rho_1}{\rho_1 - \rho_2}; \quad \tau_1(t) = 1 - \tau_2(t).$$

Portanto, de (91) e (94)

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B(x, \alpha)d(t) - \hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B(x, \alpha)\rho_\varphi \\ &= \hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B_0(x) \sum_{i=1}^2 \tau_i(t)\rho_i + \min_{i \in \{1,2\}} \left\{ -\hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B_0(x)\rho_i \right\} \\ &\leq \hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B_0(x) \sum_{i=1}^2 \tau_i(t)\rho_i - \hat{x}^T(x)P(\tilde{x})T(x)B_0(x) \sum_{i=1}^2 \tau_i(t)\rho_i = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Como $g(z(t)) \geq 0$ para todo $x(t) \neq 0$, e de (94), (96) e do Teorema 5, $\dot{V}(x) < 0$. Então, a prova está concluída. $\square$

Observação 3. O Teorema 8 pode ser utilizado em conjunto com o Teorema 6 considerando um sistema não linear incerto descrito por modelos fuzzy polinomiais (21) com a lei de controle $u = -K(x)\hat{x}(x) - \rho_\varphi$, considerando $K(x) = M(x)L^{-1}$.

4.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.3.1 Exemplo numérico 1

Considere o sistema não linear apresentado em (TANAKA et al., 2009):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-1 + \Delta_a(t) + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2)x_1 + x_2 + x_1u, \\ \dot{x}_2 &= -2\sin(x_1) - 6x_2 + 7u, \end{aligned} \quad (97)$$

sendo que $\Delta_a(t)$ é um parâmetro incerto variante no tempo que satisfaz $|\Delta_a(t)| \leq c_a$ para todo $t \geq 0$, considerando que c_a é uma constante positiva conhecida. Neste exemplo será considerado $\Delta_a(t) = c_a \sin(200\pi t)$, e deve-se observar que os valores de máximo e mínimo são c_a e $-c_a$, respectivamente.

O sistema não linear incerto (97) pode ser exatamente descrito por modelos fuzzy polinomiais. Sabendo que o sistema contém um termo não polinomial distinto de uma incerteza, então, o número de regras necessário será $n_r = 4$. Considerando $\hat{x}(x) = x = [x_1 \ x_2]^T$ e que para todo

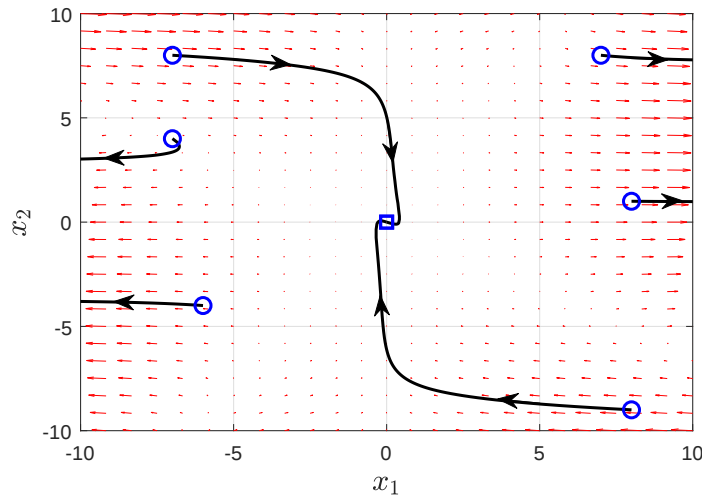
x_1 , temos que $-0,4344 \leq 2\sin(x_1)/x_1 \leq 2$, temos os seguintes modelos locais:

$$\begin{aligned}
 A_1(x) &= \begin{bmatrix} -1 + c_a + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \\
 A_2(x) &= \begin{bmatrix} -1 + c_a + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0,4344 & -6 \end{bmatrix}, \\
 A_3(x) &= \begin{bmatrix} -1 - c_a + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \\
 A_4(x) &= \begin{bmatrix} -1 - c_a + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0,4344 & -6 \end{bmatrix}, \\
 B_1(x) &= B_2(x) = \dots = B_4(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 7 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{98}$$

O sistema não linear incerto (97) pode ser representado por modelos *fuzzy* TS e controlados por controladores chaveados (SOUZA et al., 2014b; ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b) para todo $x_1 \in [-d_1 \ d_1]$, e $x_2 \in [-d_2 \ d_2]$, sendo d_1 e d_2 são constantes satisfazendo $0 < d_1 < \infty$ e $0 < d_2 < \infty$. Deste modo, os controladores chaveados baseados em modelos *fuzzy* TS serão localmente assintoticamente estáveis, como foi explorado no Capítulo 2.

É importante observar que usando a representação por modelos *fuzzy* polinomiais é necessário apenas 4 modelos locais para obter a representação global do sistema, sendo que não é necessário especificar uma região de operação e o projeto dos controladores é garantido para toda região $x_1 \in (-\infty \ \infty)$ e $x_2 \in (-\infty \ \infty)$. Na Figura 5 é representado o plano de fase do sistema em malha aberta, sendo o sinal de controle $u = 0$ e considerando $c_a = 0,39$.

Figura 5 - A trajetória de estado do sistema (97) em malha aberta. A condição inicial e final são indicadas por um círculo azul (○) e por um quadrado azul (□), respectivamente.



Fonte: Próprio autor.

O Teorema 5 foi usado para projetar controladores para que a origem do sistema em malha fechada fosse um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, considerando que os ganhos do controlador $K_j(x)$, $j \in \mathbb{K}_r$, são matrizes polinomiais sendo que cada elemento pode ser formado por monômios de ordem 0 e/ou 1, as matrizes simétricas polinomiais $Q_j(x)$ e $Z_i(x)$, $i, j \in \mathbb{K}_r$, podem ter em cada elemento monômios de ordem 0, 1, 2 e/ou 3, a matriz $J(\tilde{x})$ foi escolhida constante, $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_{2i}(x) = 0,001$ e a constante $\mu = 10^{-5}$.

A factibilidade obtida no projeto dos controladores foi igual a abordagem convexa em (CAO et al., 2014), cujo valor máximo de c_a obtido foi 0,39, mas é menor que o obtido com a abordagem não convexa apresentado em (TANAKA et al., 2009), cujo valor máximo de c_a foi 0,76. Contudo, o projeto dos controladores apresentado em (CAO et al., 2014) e (TANAKA et al., 2009) necessitam do conhecimento das funções de pertinência para compor o sinal de controle. É importante observar que as funções de pertinência podem ser incertas ou complexas de serem obtidas em implementações práticas.

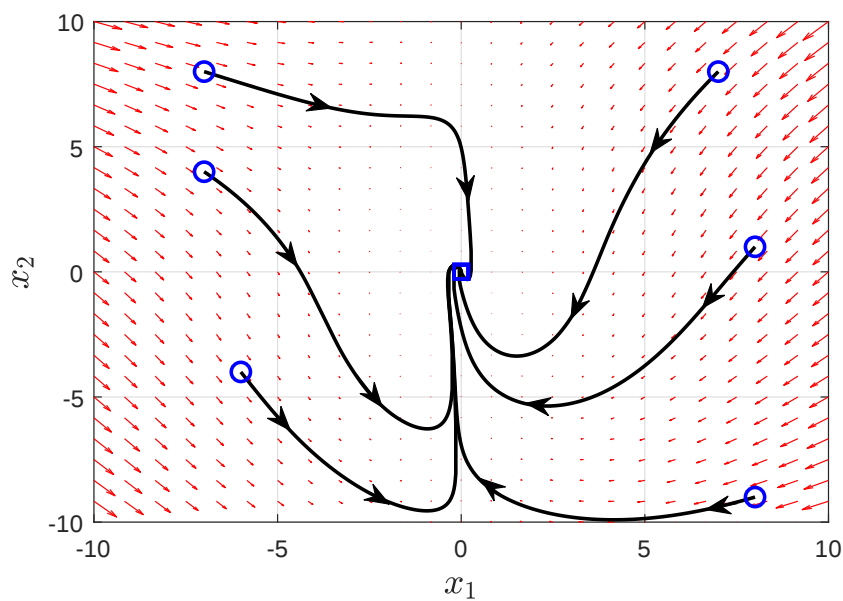
Portando, considerando no projeto dos controladores $c_a = 0,39$, os resultados a seguir foram obtidos:

$$\begin{aligned}
 P(\tilde{x}) &= \begin{bmatrix} 0,5069 & -3,7937 \times 10^{-5} \\ -3,7937 \times 10^{-5} & 7,2554 \end{bmatrix}, \\
 K_1(x) &= \begin{bmatrix} 2,2980x_1 + 0,8717x_2 + 1,4806 & 3,6221 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \\
 K_2(x) &= \begin{bmatrix} 2,2993x_1 + 0,8700x_2 + 1,2511 & 8,7464 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \\
 K_3(x) &= \begin{bmatrix} 2,2986x_1 + 0,8705x_2 + 1,1862 & 3,6349 \times 10^{-4} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{99}$$

$$K_4(x) = \begin{bmatrix} 2,2997x_1 + 0,8693x_2 + 1,2557 & 8,9546 \times 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

A Figura 6 mostra o plano de fase do sistema (97) em malha fechada, com a condição inicial e final representadas por um círculo azul e um quadrado azul, respectivamente, utilizando os ganhos apresentados em (99) e a lei de chaveamento (68). Deve-se observar que a origem do sistema em malha fechada é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Figura 6 - A trajetória de estado do sistema (97) em malha fechada. A condição inicial e final são indicadas por um círculo azul ($\circ$) e por um quadrado azul ($\square$), respectivamente.



Fonte: Próprio autor.

4.3.2 Exemplo numérico 2

Considere o sistema apresentado em (TANAKA et al., 2009) mas agora considerando a presença de uma incerteza no sistema e um distúrbio no sinal de controle:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \Delta_b(t)(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2)x_1 + x_2 + x_1(u + d(t)), \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - x_2, \end{aligned} \quad (100)$$

sendo $\Delta_b(t)$ é um parâmetro incerto que satisfaz a condição $|\Delta_b| \leq c_b$ para todo $t \geq 0$, considerando c_b uma constante positiva conhecida. De modo similar a incerteza do Exemplo Numérico 1, considere $\Delta_b(t) = c_b \sin(200\pi t)$. a variável $d(t) = 2(3 + 2\sin(200\pi t))$ é um distúrbio no sinal de controle sendo $2 \leq d(t) \leq 10$.

Portanto, o sistema não linear incerto pode ser exatamente representado por um modelo fuzzy polinomial incerto como descrito na equação (91). Deve ser observado que o sistema con-

têm um termo não polinomial e uma incerteza distintos, desta forma, o número de regras *fuzzy* será $r = 4$. Considerando $\hat{x}(x) = x = [x_1 \ x_2]^T$ e que para todo x_1 tem-se que $-1 \leq -\sin(x_1)/x_1 \leq 0,2172$, tem-se os seguintes modelos locais:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \begin{bmatrix} c_b(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2) & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_2(x) &= \begin{bmatrix} c_b(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2) & 1 \\ 0,2172 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_3(x) &= \begin{bmatrix} -c_b(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2) & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_4(x) &= \begin{bmatrix} -c_b(-1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2) & 1 \\ 0,2172 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_1(x) &= B_2(x) = \dots = B_4(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (101)$$

Para este exemplo, considere o projeto de controladores chaveados apresentados no Teorema 5 com a lei de controle chaveado definida em (92). O valor máximo de c_b para que as restrições do teorema sejam factíveis foi $c_b = 0,76$, sendo considerada uma matriz de ganhos polinomiais $K_j(x)$, $j \in \mathbb{K}_r$, que são formados por monômios da ordem de 0 e/ou 1, matrizes simétricas polinomiais $Q_j(x)$ e $Z_i(x)$, $i, j \in \mathbb{K}_r$, sendo que cada elemento da matriz pode ser formado por monômios da ordem 0, 1, 2 e/ou 3, a matriz $J(\tilde{x})$ foi escolhida constante, os polinômio $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_{2i}(x) = 10^{-5}$ e a constante $\mu = 10^{-5}$. Através dos controladores obtidos, a origem do sistema (169) em malha fechada é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Por outro lado, considerando o projeto de controladores apresentado no Teorema 6 e a lei de controle definida em (92) com um único ganho como discutido na Observação 2, para o Exemplo numérico 2 obteve-se $c_b \leq 0,62$ para que as restrições do Teorema sejam factíveis. Foi considerado as mesmas condições que o projeto dos controladores chaveados. Como observado no Teorema 7, se um sistema pode ser estabilizado com utilizando um controlador com um único ganho polinomial $K(x)$ relacionado com a lei de controle $u = -K(x)\hat{x}(x)$, então ele também pode ser controlado por um controlador com ganhos chaveados (68). Através deste exemplo foi demonstrado que existe casos em que o projeto dos controladores chaveados propostos no Teorema 5 são factíveis enquanto o projeto de controladores com um único ganho não são.

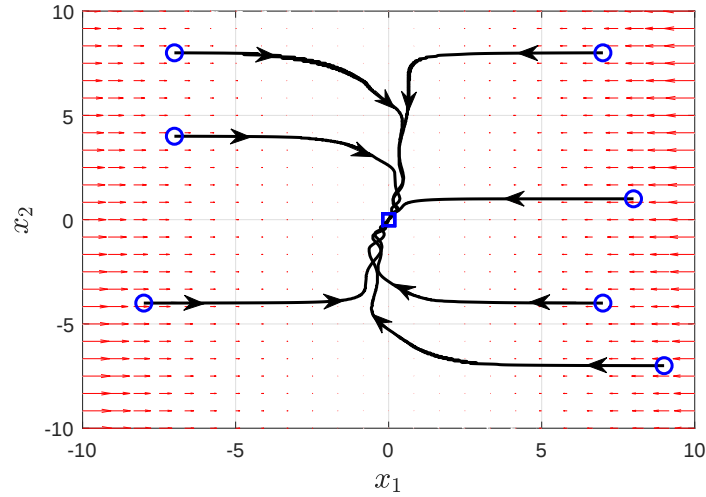
Portanto, considerando $c_b = 0,76$ e o projeto de controladores chaveados presente no teorema 5 com as condições discutidas anteriormente, podemos obter os seguintes resultados:

$$P(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0,8222 & 0,001 \\ 0,001 & 1,9996 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

$$\begin{aligned}
K_1(x) &= \begin{bmatrix} 0,9487x_1 + 0,0936x_2 + 0,2336 \\ 5,818 \times 10^{-7}x_1 + 4,459 \times 10^{-8}x_2 - 0,019 \end{bmatrix}^T, \\
K_2(x) &= \begin{bmatrix} 5,5364x_1 + 1,305x_2 + 2,4912 \\ 3,24 \times 10^{-6}x_1 - 3,91 \times 10^{-7}x_2 + 3,83 \times 10^{-4} \end{bmatrix}^T, \\
K_3(x) &= \begin{bmatrix} 0,9482x_1 + 0,0939x_2 + 0,2339 \\ -5,8 \times 10^{-7}x_1 + 4,43 \times 10^{-8}x_2 + 0,0192 \end{bmatrix}^T, \\
K_4(x) &= \begin{bmatrix} 5,5223x_1 + 1,3118x_2 + 2,5397 \\ 3,31 \times 10^{-6}x_1 - 4,04 \times 10^{-7}x_2 - 5,32 \times 10^{-5} \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

A Figura 7 mostra o plano de fase do sistema (169) em malha fechada com a lei de controle chaveada (92) e os ganhos apresentados em (102), considerando $\rho_1 = 2$ e $\rho_1 = 10$, com as condições iniciais e finais representadas através de um círculo e um quadrado azuis, respectivamente. É possível observar que a origem do sistema em malha fechada é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, mesmo na presença de distúrbios no sinal de controle.

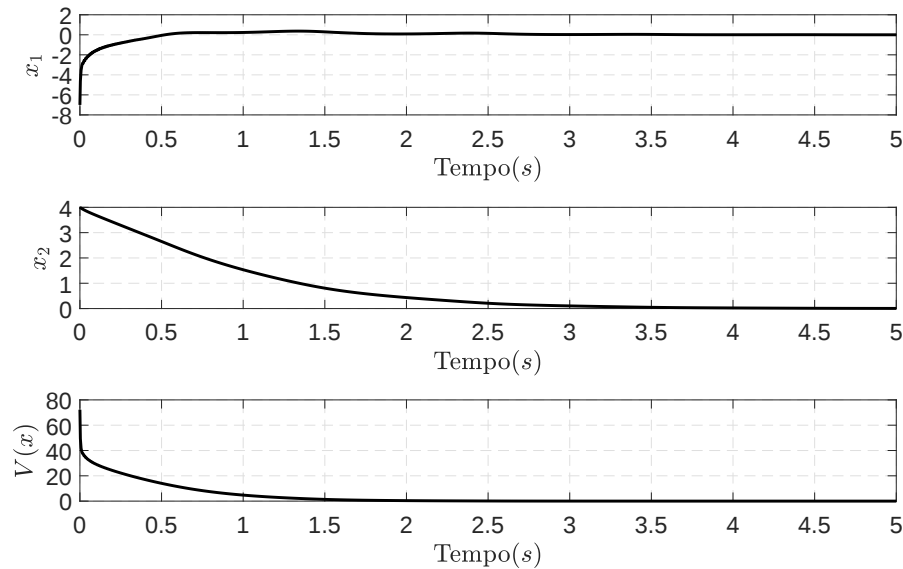
Figura 7 - Trajetória de estado do sistema (169) em malha fechada. a condição inicial e final são indicadas por um círculo azul ($\circ$) e um quadrado azul ($\square$), respectivamente.



Fonte: Próprio autor.

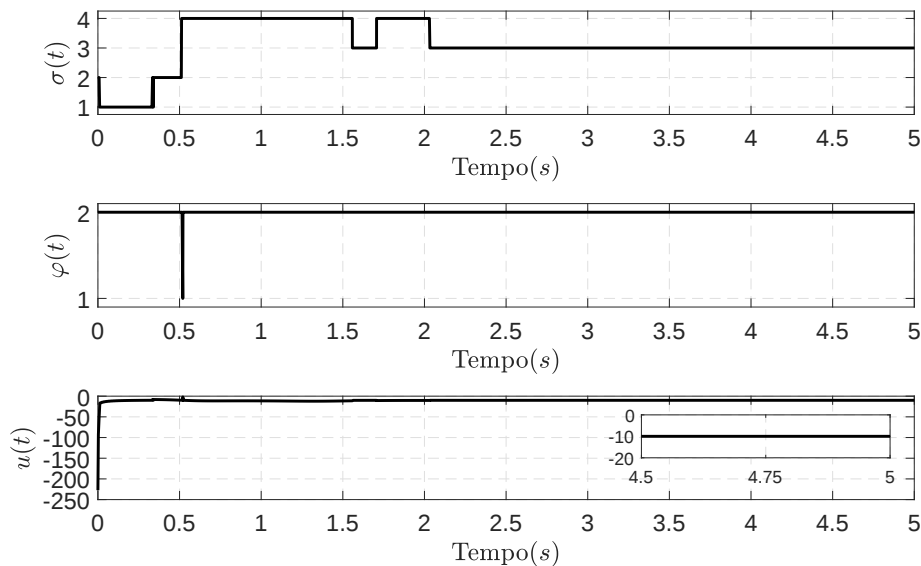
Com o objetivo de realizar a simulação, foi considerado $c_b = 0,76$ e a condição inicial $\hat{x}(x(0)) = [-7 \ 4]^T$. Os resultado da simulação são apresentados a seguir, a Figura 8 mostra as variáveis de estado do sistema e a transição temporal da função de Lyapunov. O sinal de controle $u(t)$, a regra de chaveamento $\sigma(t)$ e $\phi(t)$ (92) são apresentados na Figura 9.

Figura 8 - Trajetória de estado do sistema (169) e a função de Lyapunov, considerando o parâmetro incerto $c_b = 0,76$, e $\hat{x}(x(0)) = [-7 \ 4]^T$. Sistema em malha fechada utilizando a lei de controle chaveado (92) e (102).



Fonte: Próprio autor.

Figura 9 - Sinal de controle $u(t)$, a regra de chaveamento $\sigma(t)$ e $\varphi(t)$, considerando o parâmetro incerto $c_b = 0,76$, e $\hat{x}(x(0)) = [-7 \ 4]^T$. O sistema em malha fechada utilizando a lei de controle chaveada (92) e (102).



Fonte: Próprio autor.

Observe na Figura 9 que o sinal de controle é diferente de 0 para o tempo tendendo ao infinito, pois o distúrbio $d(t)$ é compensado no sinal de controle. Além disso, de acordo com

a regra de chaveamento $\sigma(t)$, todos os ganhos obtidos na equação (102) foram utilizados para minimizar a derivada da função de Lyapunov.

4.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foi proposto um novo projeto de controladores robustos chaveados para um sistema não linear com incertezas ou distúrbios no sinal de controle descrito por modelos *fuzzy* polinomiais. Os ganhos obtidos através da metodologia proposta são não racionais e deste modo, a implementação dos controladores se torna mais simplificada. Além disso, os controladores propostos não necessitam do conhecimento das funções de pertinência.

Através do Teorema 7, foi provado que se pode ser obtido controladores polinomiais com um único ganho que estabiliza o sistema, poderá ser obtido controladores com ganhos polinomiais chaveados também. Considerando o Exemplo numérico 2, é possível identificar casos em que o controlador chaveado obteve uma região de factibilidade maior que o controlador com um único ganho. Portanto, este exemplo mostra que a proposta dos controladores chaveados pode apresentar uma região de factibilidade maior que a obtida através de controladores com um único ganho.

Considerando implementações práticas, foi proposto uma metodologia efetiva para o tratamento de distúrbios ou incertezas no sinal de controle. Os exemplos numéricos mostraram as vantagens da metodologia proposta neste capítulo.

Em muitas implementações práticas deve ser considerada a saturação dos atuadores na lei de controle, desta forma, mesmo que ocorra a saturação do sinal de controle o sistema será estável. Desta forma, baseado nos resultados obtidos nesse capítulo, será proposto no próximo capítulo controladores chaveados sujeitos a saturação dos atuadores.

5 CONTROLE ROBUSTO DE MODELOS FUZZY POLINOMIAIS INCERTOS SUJEITO A SATURAÇÃO DOS ATUADORES

5.1 CONTROLE CHAVEADO CONSIDERANDO A SATURAÇÃO DOS ATUADORES

Neste Capítulo será apresentado o projeto de controladores robustos para modelos *fuzzy* polinomiais incertos sujeito a saturação dos atuadores. Desta forma, neste capítulo serão tratadas situações comuns em aplicações práticas, as incertezas na planta de controle, a saturação no atuador e incertezas e/ou distúrbios no sinal de controle. Por se tratar de um sistema não linear incerto, considera-se que as funções de pertinência não estão disponíveis para realimentação. Deste modo, será conveniente a utilização de uma lei de chaveamento que estimará as funções de pertinência, sendo que a lei de chaveamento proposta irá reduzir a derivada da função de Lyapunov.

Considere o sistema não linear descrito a seguir,

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))\text{sat}(u(t)), \quad (103)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o sinal de controle. As funções $f(x(t))$ e $g(x(t))$ relacionadas a dinâmica do sistema e a entrada do sinal de controle respectivamente, sendo que as funções $f(x(t))$ e $g(x(t))$ podem ser não polinomiais e incertas, $\text{sat}(u(t))$ indica que o sinal de controle $u(t)$ possui saturação. Deve ser observado que a principal diferença com o sistema descrito em (5) é a consideração da saturação nos atuadores. Neste caso, assim como abordado no Capítulo 2, o sistema pode ser descrito de forma localmente ou globalmente exata utilizando os modelos *fuzzy* polinomiais. A saturação dos atuadores será descrita a seguir:

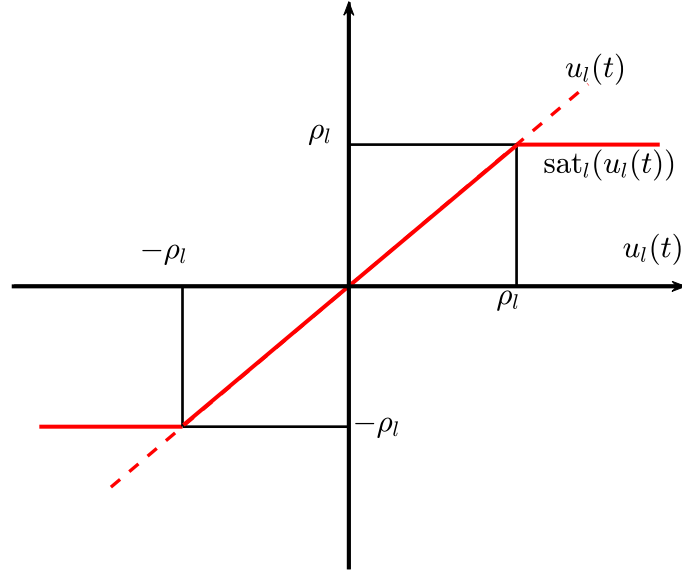
$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= \begin{bmatrix} \text{sat}_1(u_1(t)) & \cdots & \text{sat}_{n_u}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix}^T, \\ \text{sat}_l(u_l(t)) &= \text{sgn}(u_l(t)) \min\{\rho_l, |u_l(t)|\}, \end{aligned} \quad (104)$$

sendo $\rho_l > 0, \forall l \in \mathbb{K}_{n_u}$ possui valores conhecidos.

Portanto, podemos representar a saturação dos atuadores como representado a seguir:

$$\text{sat}(u) = \begin{bmatrix} \text{sat}(u_1) \\ \vdots \\ \text{sat}(u_{n_u}) \end{bmatrix}, \quad \text{sat}(u_m) = \begin{cases} -\rho_m, & \text{se } u_m < -\rho_m, \\ u_m, & \text{se } -\rho \leq u_m \leq \rho, \\ \rho_m, & \text{se } u_m > \rho_m, \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{K}_{n_u}, \quad (105)$$

sendo $\rho_m, m \in \mathbb{K}_{n_u}$, são constantes positivas com valores conhecidos. A saturação do sinal de controle está representada na figura abaixo.

Figura 10 - Sinal de controle saturado $\text{sat}_l(u_l(t))$.

Fonte: Próprio autor.

Usando o conceito de setor não linear, uma representação do sistema não linear através de modelos *fuzzy* polinomiais será usada, sendo os modelos locais polinomiais incertos (TANAKA et al., 2009). As regras *fuzzy* são descritas a seguir:

Regra i :

$$\text{If } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \quad (106)$$

$$\text{Então } \dot{x} = A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))\text{sat}(u(t)),$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n_r$ e $j = 1, 2, \dots, p$. $z_j(t)$ é uma variável premissa. As funções de pertinência associadas a regra i e a variável premissa $z_j(t)$ é denotada por $\mathcal{M}_j^i(z_j(t)) \in [0, 1]$. n_r denota o número de regras *fuzzy*. Será considerado que cada variável premissa $z_j(t)$ pode ser composta pelas variáveis de estado ou incerteza do sistema. Portanto, as variáveis $z_j(t)$ podem não estar disponíveis para medição. As matrizes $A_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{\hat{x}}}$ e $B_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ são matrizes polinomiais dependentes do vetor de estado $x(t)$. $\hat{x}(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}}}$ é um vetor coluna cujos elementos são todos monômios dependentes de $x(t)$. Será considerado que $\hat{x}(x(t)) = 0$ se, e somente se, $x(t) = 0$.

O processo de defuzzificação do modelo (106) pode ser representado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) [A_i(x(t))\hat{x}(x(t)) + B_i(x(t))u] \\ &= A(\alpha(z(t)), x(t))\hat{x}(x(t)) + B(\alpha(z(t)), x(t))\text{sat}(u(t)), \end{aligned} \quad (107)$$

sendo $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]$. A função de pertinência $\alpha_i(z(t)) \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_r$,

$\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1$ associado a cada regra *fuzzy* é dado abaixo:

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\prod_{j=1}^p \mathcal{M}_j^i(z_j(t))}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^p \mathcal{M}_j^i(z_j(t))}. \quad (108)$$

Como observado anteriormente, as funções de pertinência serão incertas pois as variáveis premissas dependem das variáveis de estado e dos parâmetros incertos que podem ser variáveis no tempo. Deste modo, a lei de controle não pode depender das funções de pertinência. Portanto, será proposto uma lei de controle chaveado, que não requer o conhecimento das funções de pertinência.

A lei de controle chaveada não necessita adicionar integradores como nos trabalhos (RAMOS et al., 2018; RAMOS et al., 2019). A lei de chaveamento utilizará matrizes auxiliares $Q_j(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, $j \in \mathbb{K}_r$ para selecionar um índice de chaveamento σ . A lei de controle chaveado é definida a seguir:

$$u_{\sigma} = -K_{\sigma}(x)\hat{x}(x), \quad \sigma = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{ \hat{x}^T(x) Q_j(x) \hat{x}(x) \}, \quad (109)$$

sendo $\sigma \in \mathbb{K}_r$ o menor índice j que resulta no mínimo valor de $\{ \hat{x}^T(x) Q_j(x) \hat{x}(x) \}$. De (107) e (109), o sistema em malha fechada pode ser representado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \{ A_i(x) \hat{x}(x) + B_i(x) \text{sat}(-K_{\sigma}(x) \hat{x}(x)) \} \\ &= A(\alpha, x) \hat{x}(x) + B(\alpha, x) \text{sat}(-K_{\sigma}(x) \hat{x}(x)). \end{aligned} \quad (110)$$

Neste capítulo será proposto uma nova candidata polinomial da função de Lyapunov descrita a seguir:

$$V(x) = \hat{x}^T(x) M P(x) M^T \hat{x}(x), \quad (111)$$

sendo M e $P(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$. Portanto, a matriz simétrica $P(x)$ não é constante mas dependente do vetor de estado, a matriz M é constante e não necessariamente simétrica. Deve ser observado que a candidata a função de Lyapunov (111) proposta é mais geral que as utilizadas em (TANAKA et al., 2009; CAO et al., 2014; KIM; PARK; JOO, 2016; GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2016; RAMOS et al., 2019).

Sendo as matrizes $H_k(x) = [H_{k(1)}^T(x) \dots H_{k(n_u)}^T(x)]^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\hat{x}}}$, $k \in \mathbb{K}_r$, um vetor conhecido $\rho = [\rho_1 \dots \rho_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\rho_l > 0$, $l \in \mathbb{K}_{n_u}$, e um escalar conhecido $\delta > 0$. Conjuntos $\mathcal{L}(H_k(x))$ e $\mathcal{E}(M P(x) M^T, \delta)$ são definidos a seguir (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003; ALVES et

al., 2016; GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2016):

$$\mathcal{L}(H_k(x)) \triangleq \left\{ \hat{x}(x) \in \mathbb{R}^{n_x} : |H_{k(l)}(x)\hat{x}(x)| \leq \rho_l, l \in \mathbb{K}_{n_u}, k \in \mathbb{K}_r \right\}, \quad (112)$$

$$\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta) \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_x} : \hat{x}^T(x)MP(x)M^T\hat{x}(x) \leq \delta \right\}. \quad (113)$$

Considerando uma candidata a função de Lyapunov quadrática $V(x) = x^T P x$, o domínio de atração resultante tem necessariamente um formato elipsoidal. Considerando a candidata a função de Lyapunov polynomial (111) o domínio de atração não necessariamente necessita ser um elipsoide, mas pode resultar em outros formatos convexos, facilitando obter uma região de estabilidade maior do que utilizando as funções de Lyapunov quadráticas para sistemas não lineares. A seguir será definido o conjunto de matrizes $\mathcal{D}$ (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003; ALVES et al., 2016; GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2016)

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ D \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u} : d_{ii} = 0 \text{ ou } 1 \text{ e } d_{ij} = 0 \forall i \neq j \right\}, \quad (114)$$

sendo $d_{ij}, \forall (i, j) \in \mathbb{K}_{n_u} \times \mathbb{K}_{n_u}$ são os elementos da matriz D . Desse modo, o conjunto $\mathcal{D}$ tem 2^{n_u} matrizes. Baseado em (BOYD et al., 1994; HU; LIN; CHEN, 2002; ALVES et al., 2016) é proposto o lema a seguir, que tem o objetivo de prover uma condição suficiente que se satisfaz $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k(x))$.

Lema 2. Sendo o conjunto $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$ da equação (113) e o conjunto $\mathcal{L}(H_k(x))$ na equação (112). A restrição $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k(x))$ é satisfeita se as restrições

$$v^T \begin{bmatrix} \rho_{(l)}^2 \delta^{-1} & G_{k(l)}(x) \\ G_{k(l)}^T(x) & P(x) \end{bmatrix} v \text{ é SOS} \quad (115)$$

são satisfeitas para todo $k \in \mathbb{K}_r$ e $l \in \mathbb{K}_{n_u}$, sendo $G_{k(l)} = H_{k(l)}(x)M^{-T}$ e v é um vetor que independe de x com dimensões apropriadas.

Demonstração. Pre multiplicando (115) por $\text{diag}\{1, M\}$ e pós multiplicando por $\text{diag}\{1, M\}^T$ e realizando o complemento de Schur com relação a primeira linha e coluna, segue que:

$$MP(x)M^T - MG_{k(l)}^T(x)\rho_{(l)}^{-2}\delta G_{k(l)}(x)M^T \geq 0, \quad (116)$$

considerando $H_{k(l)}(x) = G_{k(l)}(x)M^T$, obtém-se que

$$\begin{aligned} MP(x)M^T - H_{k(l)}^T(x)\rho_{(l)}^{-2}\delta H_{k(l)}(x) &\geq 0, \\ MP(x)M^T &\geq H_{k(l)}^T(x)\rho_{(l)}^{-2}\delta H_{k(l)}(x). \end{aligned} \quad (117)$$

Pré multiplicando e pós multiplicando (117) por $\hat{x}^T(x)$ e a sua transporta, respectivamente,

assim se $\hat{x}(x) \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, então $\hat{x}^T(x)MP(x)M^T\hat{x}(x) \leq \delta$ e

$$\begin{aligned}\delta &\geq \hat{x}^T(x)MP(x)M^T\hat{x}(x) \geq \hat{x}^T(x)H_{k(l)}^T(x)\rho_{(l)}^{-2}\delta H_{k(l)}(x)^T(x)\hat{x}(x), \\ \rho_{(l)}^2 &\geq \hat{x}^T H_{k(l)}^T(x)H_{k(l)}(x)\hat{x}(x).\end{aligned}\quad (118)$$

Portanto, tem-se que $x \in \mathcal{L}(H_k(x))$ e pode-se concluir que $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k(x))$. $\square$

Baseado em (HU; LIN; CHEN, 2002, 2002; ALVES et al., 2016; GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2016) considere a seguinte observação.

Observação 4. Considere $K_k(x)$ e $H_k(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, \forall k \in \mathbb{K}_r$ sendo matrizes polinomiais, para $\hat{x}(x) \in \mathbb{R}^{n_x}$, se $x \in \mathcal{L}(H_k(x))$ então

$$\text{sat}(u) = \text{co} \left\{ \sum_{k=1}^r \alpha_k \left(D_s K_k(x) + D_s^- H_k(x) \right) \hat{x}(x) \right\}, \quad (119)$$

sendo $s \in \mathbb{K}_\eta, \eta = 2^{n_u}$ e “co” denota uma região convexa. Consequentemente, existe $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_\eta \geq 0$ e $\sum_{s=1}^\eta \lambda_s = 1$ tal que,

$$\text{sat}(u) = \sum_{s=1}^\eta \sum_{k=1}^r \lambda_s \alpha_k \left(D_s K_k(x) + D_s^- H_k(x) \right) \hat{x}(x). \quad (120)$$

Portanto, D_s é uma matriz diagonal n_u por n_u com elementos 1 ou 0 e $D_s^- = I_{n_u} - D_s$ representado em (114). Desta forma, existe 2^{n_u} possibilidades de matrizes deste tipo.

Para qualquer $x(t) \in \bigcap_{k=1}^r \mathcal{L}(H_k(x), \rho)$ para $k \in \mathbb{K}_r$, desde que $\lambda_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1$, tem-se que:

$$x(t) \in \mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j K_j(x) \hat{x}(x) \right). \quad (121)$$

Aplicando o resultado obtido na Observação 4, a realimentação de controle considerado a saturação dos atuadores (109) pode ser escrito como:

$$\text{sat} \left(K_\sigma(x) \hat{x}(x) \right) = \sum_{s=1}^\eta \lambda_s \left\{ D_s K_\sigma(x) \hat{x}(x) + D_s^- \sum_{j=1}^r \alpha_j H_\sigma(x) \hat{x}(x) \right\}, \quad (122)$$

sendo $\lambda_s \geq 0, \sum_{s=1}^\eta \lambda_s = 1$. Portanto, o sistema fuzzy polinomial em malha fechada pode ser

escrito como:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{s=1}^{\eta} \alpha_i \lambda_s \left\{ A_i(x) - B_i \left(D_s K_{\sigma}(x) + D_s^- H_{\sigma}(x) \right) \right\} \hat{x}(x). \quad (123)$$

O conjunto compacto considerando uma região de operação é obtido por (ALVES et al., 2016):

$$\mathcal{X} \triangleq \left\{ \hat{x}(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}}} : |S_{(h)} \hat{x}(x)| \leq \phi_h, h \in \mathbb{K}_{n_h} \right\}, \quad (124)$$

sendo $S = \begin{bmatrix} S_{(1)}^T & S_{(2)}^T & \dots & S_{(n_h)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_h \times n_{\hat{x}}}$ e os parâmetros $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{n_h} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_h}$ são conhecidos.

Definindo $T(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_x}$ como uma matriz polinomial cujos elementos (i, j) são dados da seguinte forma:

$$T^{ij}(x) = \frac{\partial \hat{x}_i(x)}{\partial x_j}, \quad (125)$$

para $i = 1, \dots, n_{\hat{x}}, j = 1, \dots, n_x$. Considere a seguinte expressão nula que será utilizada nos teoremas que serão propostos neste capítulo.

$$\begin{aligned} 2 \left(\hat{x}^T(x) M + \mu \hat{x}^T(x) M \right) \times \left(-\hat{\dot{x}}(x) + \sum_{i=1}^r \sum_{s=1}^{\eta} \alpha_i \lambda_s \left(T(x) A_i(x) \hat{x}(x) \right. \right. \\ \left. \left. - T(x) B_i(x) \left(D_s K_{\sigma}(x) + D_s^- H_{\sigma}(x) \right) \hat{x}(x) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (126)$$

Observação 5. Para demonstrar que a expressão (126) é nula, de (123) e (125) o leitor deve observar que:

$$\hat{\dot{x}} = T(x) \sum_{i=1}^r \sum_{s=1}^{\eta} \alpha_i \lambda_s \left\{ A_i(x) - B_i \left(D_s K_{\sigma}(x) + D_s^- H_{\sigma}(x) \right) \right\} \hat{x}(x). \quad (127)$$

Deste modo, a equação (126) pode ser escrita da seguinte forma:

$$2 \left(\hat{x}^T(x) N + \mu \hat{x}^T(x) N \right) \times \left(-\hat{\dot{x}}(x) + \hat{\dot{x}}(x) \right) = 0, \quad (128)$$

pois $(-\hat{\dot{x}}(x) + \hat{\dot{x}}(x)) = 0$.

A expressão (126) será importante para que os ganhos do controlador não sejam dependentes da inversa da matriz polinomial que forma a função de Lyapunov. Além disso, a utilização da expressão nula (126) possibilita adicionar matriz e termo constante que podem reduzir o conservadorismo no projeto dos controladores. Desta forma, baseado em (TANAKA et al., 2009; RAMOS et al., 2019; GASSARA; HAJAJI; CHAABANE, 2016; KIM; PARK; JOO, 2016), os ganhos do controlador não depende de uma função racional quando a função de Lyapunov não

é quadrática. Então, é possível implementar controladores reduzindo o esforço computacional do sistema de implementação.

Baseado em (GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2016), será considerado funções de Lyapunov polinomiais não restritivas. Considerando o sistema sujeito a saturação dos atuadores e limitado em uma região de operação de acordo com os limites físicos do sistema, é possível calcular os valores de $|\dot{x}_k| \leq \Lambda_k$, $\forall x \in \mathcal{O}(MP(x)M^T, \delta)$, sendo que $k \in \mathbb{R}^{n_x}$ indica a variável de estado. Desta forma, o seguinte teorema é proposto.

Teorema 9. *Considere o sistema incerto não linear (107) sujeito a saturação dos atuadores em uma região de operação $\mathcal{X}$ definido em (124), sendo $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\phi \in \mathbb{R}^{n_h}$, $S \in \mathbb{R}^{n_h \times n_x}$ e $\Lambda_k \geq |\dot{x}_k|$ são conhecidos. Se existe uma matriz simétrica polinomial $P(x)$, $\hat{Q}_i(x(t))$, $\hat{Z}_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, matrizes polinomiais $F_i(x)$, $G_i(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\hat{x}}}$, uma matriz constante $L \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$ e um escalar $\mu > 0$, tal que as seguinte condições sejam factíveis:*

$$v_1^T (P(x) - \varepsilon_1(x)I) v_1 \quad \text{é SOS}, \quad (129)$$

$$-v_2^T \begin{bmatrix} \Phi_i(x) + \varepsilon_{2i}(x)I & * \\ P(x) - L^T + \mu(T(x)A_i(x)L) & -\mu(L + L^T) + \hat{Z}_i(x) + \varepsilon_{2i}(x)I \end{bmatrix} v_2 \quad \text{é SOS}, \quad (130)$$

$$-v_3^T \begin{bmatrix} \Psi_{ijs} & * \\ \mu(T(x)B_i[-D_s F_j(x) + D_s^- G_j(x)]) & -\hat{Z}_i(x) \end{bmatrix} v_3 \quad \text{é SOS}, \quad (131)$$

$$v_4^T \begin{bmatrix} \rho_{(l)}^2 \delta^{-1} & G_{j(l)}(x) \\ G_{j(l)}^T(x) & P(x) \end{bmatrix} v_4 \quad \text{é SOS}, \quad (132)$$

$$v_5^T \begin{bmatrix} \phi_{(h)}^2 \delta^{-1} & * \\ LS_{(h)}^T & P(x) \end{bmatrix} v_5 \quad \text{é SOS}, \quad (133)$$

sendo

$$\Phi_i(x) = \mathbf{He}\{T(x)A_i(x)L\} + \hat{Q}_i(x) + \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{\partial P(x)}{\partial x_k} (\Lambda_k),$$

$$\Psi_{ijs} = \mathbf{He}\{T(x)B_i[-D_s F_j(x) + D_s^- G_j(x)]\} - \hat{Q}_j(x),$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, $l \in \mathbb{K}_{n_u}$, $h \in \mathbb{K}_{n_h}$, $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$, $D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I_{n_u} - D_s$, sendo $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_{2i}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, e v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 são vetores independentes de x com dimensões apropriadas. Então a lei de controle (109) tornam a origem do sistema $x = 0$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, sendo $K_i(x) = F_i(x)L^{-1}$ e $Q_i(x) = L^{-T} \hat{Q}_i(x)L^{-1}$. Portanto, o vetor de estado $x(t) \in \mathcal{X}$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov polinomial descrita em (111) sendo $P(x) = P^T(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$ é positiva definida e $M \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$. A restrição (129) implica que $V(x)$ é positiva definida para todo $x > 0$. Portanto, A derivada no tempo da candidata a função

de Lyapunov $V(x)$ é calculada a seguir:

$$\dot{V}(x) = 2\hat{x}^T(x)MP(x)M^T\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x)M\dot{P}(x)M^T\hat{x}(x). \quad (134)$$

Assumindo que $x \in \mathcal{L}(H_k(x))$ definido em (112), sendo $k \in \mathbb{K}_r$ então $x \in \mathcal{L}(H_\sigma(x))$ e $\text{sat}(-K_\sigma x)$ pode ser descrito como uma combinação convexa (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003; GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2016; ALVES et al., 2016)

$$\text{sat}(-K_\sigma(x)\hat{x}(x)) = \sum_{s=1}^{\eta} \lambda_s (D_s K_\sigma(x) + D_s^- H_\sigma(x)) \hat{x}(x), \quad (135)$$

sendo $\sigma \in \mathbb{K}_r$, $D_s \in \mathcal{D}$, $D_s^- = I_{n_u} - D_s \in \mathcal{D}$, sendo $\mathcal{D}$ descrito na equação (114), e $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$. Adicionando a expressão nula (126) em (134) e considerando o sistema incerto não linear descrito por modelos *fuzzy* polinomiais sujeito a saturação dos atuadores sendo que a saturação pode ser descrita em (120) e (135), pode-se obter a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \sum_{i=1}^r \sum_{s=1}^{\eta} \alpha_i \lambda_s \left\{ 2\hat{x}^T(x)MP(x)M^T\dot{\hat{x}}(x) \right. \\ & + \hat{x}^T(x)M\dot{P}(x)M^T\hat{x}(x) - 2\hat{x}^T(x)M\dot{\hat{x}}(x) \\ & - 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)M\dot{\hat{x}}(x) + 2\hat{x}^T(x)MT(x)A_i(x)\hat{x} \\ & - 2\hat{x}^T(x)MT(x)B_i(x) \left(D_s K_\sigma(x) + D_s^- H_\sigma(x) \right) \hat{x}(x) \\ & - 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)MT(x)B_i(x) \left(D_s K_\sigma(x) + D_s^- H_\sigma(x) \right) \hat{x}(x) \\ & \left. + 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)MT(x)A_i(x)\hat{x}(x) \right\} \leq 0. \end{aligned} \quad (136)$$

Agora, considerando que existe uma matriz simétrica $Q_i(x)$ e $Z_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, sendo $i \in \mathbb{K}_r$ de modo que

$$\begin{aligned} & - 2\hat{x}^T(x)MT(x)B_i(x) \left(D_s K_j(x) + D_s^- H_j(x) \right) \hat{x}(x) \\ & - 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)MT(x)B_i(x) \left(D_s K_j(x) + D_s^- H_j(x) \right) \hat{x}(x) \\ & \leq \hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x) + \dot{\hat{x}}(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x). \end{aligned} \quad (137)$$

Então, multiplicando (137) por α_i , e fazendo a soma de $i = 1$ até r , e substituindo o índice j por σ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(- 2\hat{x}^T(x)MT(x)B_i(x) \left(D_s K_\sigma(x) + D_s^- H_\sigma(x) \right) \hat{x}(x) \right. \\ & \quad \left. - 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)MT(x)B_i(x) \left(D_s K_\sigma(x) + D_s^- H_\sigma(x) \right) \hat{x}(x) \right) \\ & = - 2\hat{x}^T(x)MT(x)B(\alpha, x) \left(D_s K_\sigma(x) + D_s^- H_\sigma(x) \right) \hat{x}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)MT(x)B(\alpha, x)\left(D_s K_\sigma(x) + D_s^- H_\sigma(x)\right)\hat{x}(x) \\
& \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(\hat{x}^T(x)Q_\sigma(x)\hat{x}(x) + \dot{\hat{x}}(x)Z(x)\dot{\hat{x}}(x)\right).
\end{aligned} \tag{138}$$

Considerando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual que qualquer combinação convexa desses elementos deste conjunto. De (109) e lembrando que $\alpha_j \geq 0$ e $\sum_j \alpha_j = 1$, note que

$$\hat{x}^T(x)Q_\sigma(x)\hat{x}(x) = \min_{j \in \mathbb{K}_r}^* \{\hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x)\} \leq \sum_{j=1}^r \alpha_j \hat{x}^T(x)Q_j(x)\hat{x}(x),$$

então, de (138), tem-se que

$$\begin{aligned}
& -2\hat{x}^T(x)MT(x)B(\alpha, x)\left(D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma(x)\right)\hat{x}(x) \\
& -2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)MT(x)B(\alpha, x)\left(D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma(x)\right)\hat{x}(x) \\
& \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(\hat{x}^T(x)Q_i(x)\hat{x}(x) + \dot{\hat{x}}(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x)\right).
\end{aligned} \tag{139}$$

De (136) e (139), para $x \neq 0$, tem-se que $\dot{V}(x) < 0$, e considerando que $|\dot{x}_k| \leq \Lambda_k$, $\forall x \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, sendo que $k \in \mathbb{R}^{n_x}$ indica a variável de estado x_k se

$$\begin{aligned}
& \hat{x}^T(x)M\hat{x}^T(x)\left(\sum_{k \in n_x} \frac{\partial P(x)}{\partial x_k} \dot{x}_k\right)\hat{x}(x)M^T\hat{x}(x) \\
& + 2\hat{x}^T(x)MP(x)M^T\dot{\hat{x}}(x) - 2\hat{x}^T(x)M\dot{\hat{x}}(x) \\
& - 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)M\dot{\hat{x}}(x) + 2\hat{x}^T(x)MT(x)A_i(x)\hat{x} \\
& + 2\mu\dot{\hat{x}}^T(x)MT(x)A_i(x)\hat{x}(x) \\
& + \hat{x}^T(x)Q_i(x)\hat{x}(x) + \dot{\hat{x}}(x)Z_i(x)\dot{\hat{x}}(x) < 0
\end{aligned} \tag{140}$$

Considerando $\Omega(x) = \text{diag}\{M^T, M^T\} \times \begin{bmatrix} \hat{x}^T(x) & \dot{\hat{x}}^T(x) \end{bmatrix}^T$, pré multiplicando por $\Omega^T(x)$ e pós multiplicando por $\Omega(x)$ as restrições em (130) e (131) e fazendo a mudança de variáveis $L = M^{-T}$, $F_j(x) = K_j(x)M^T$, $\hat{Q}_i(x) = M^{-1}Q_i(x)M^{-T}$, $\hat{Z}_i = M^{-1}Z_i(x)M^{-T}$, $H_j(x) = G_j(x)M^T$, observe que de (131), $Z_i(x) \geq 0$ e, de (130), $\mu(L + L^T) - Z_i(x) - e_{2i}(x)I > 0$. Então, como $\mu > 0$ e $e_{2i}(x) > 0$, segue que $L + L^T > \mu^{-1}(Z_i(x) + e_{2i}(x)I) > 0$ e então pode-se calcular a matriz L^{-1} . Desta forma, pode-se encontrar as restrições (137) e (140), respectivamente.

Além disso, baseado no Lema 2, a primeira restrição (132) implica que $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k(x))$. Então, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, em seguida $x(0) \in \mathcal{L}(H_k(x))$ e a função de saturação descrita como uma combinação convexa na Observação 4 pode ser utilizada. Similamente a prova do Lema 2, a restrição (133) pode ser a prova que garante que $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$

$\subset \mathcal{X}$. Observe que, (132) e (133) garante que $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$ é um conjunto positivo invariante para o sistema em malha fechada (110). Desta forma, está é uma condição suficiente para que qualquer trajetória com $x(0) \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$ permaneça em $\mathcal{X}$ para todo $t > 0$ pois, durante a trajetória de estado do sistema em malha fechada, tem-se que $V(x) \leq 1$ para todo $t \geq 0$, isto é, o estado do sistema não sai do conjunto $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta) \subset \mathcal{X}$ definido em (124). Portanto, a prova está concluída. $\square$

Desta forma, se as condições do Teorema 9, estabilidade local considerando a saturação dos atuadores é garantida para todas as condições iniciais que $x(0) \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$. Portanto, é interessante exigir que para uma ou um conjunto de condições iniciais de interesse $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, ou seja, para toda condição inicial $x(0) \in \mathcal{X}$ pode-se obter que $x(0) \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$. Baseado em (CAO; LIN, 2003; ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b) o seguinte lema propõe condições que garantem $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$.

Lema 3. *Considere as condições do Teorema 9, conhecida a condição inicial desejada e que seja obtida por $\hat{x}(x) \in \mathcal{X}$. Então, a condição $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$ será satisfeita se*

$$v_1^T \begin{bmatrix} \delta^{-1} & * \\ -\hat{x}(x(0))\delta^{-1} & -P(x(0)) + L + L^T \end{bmatrix} v_1 \text{ é SOS.} \quad (141)$$

Demonstração. Pré multiplicando (141) por $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \delta & \hat{x}^T(x(0))M \end{bmatrix}$ e pós multiplicando por $\mathcal{U}^T$, e lembrando que $L = M^{-T}$, pode-se obter:

$$\begin{aligned} & \delta + \hat{x}^T(x(0))M\hat{x}(x(0)) + \hat{x}^T(x(0))M^T\hat{x}(x(0)) \\ & - \hat{x}^T(x(0))M^T\hat{x}(x(0)) - \hat{x}^T(x(0))M\hat{x}(x(0)) \\ & - \hat{x}^T(x(0))MP(x(0))M^T\hat{x}(x(0)) \geq 0, \end{aligned} \quad (142)$$

portanto

$$\begin{aligned} & \delta - \hat{x}^T(x(0))MP(x(0))M^T\hat{x}(x(0)) \geq 0 \\ & \delta \geq \hat{x}^T(x(0))MP(x(0))M^T\hat{x}(x(0)). \end{aligned} \quad (143)$$

Da definição do conjunto $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$ em (113), observe que (143) implica que $x(0) \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, então tem-se que $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$. Desta forma a prova está completa. $\square$

Frequentemente, no projeto de controladores, o controle por realimentação de estados pode resultar em altos valores para o sinal de controle, especificamente em implementações práticas isso pode se tornar um problema, fazendo com que altos sinais de controle tornem a implementação infactível. Desta forma, $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta) \subset \mathcal{L}(K_j)$ sendo $j \in \mathbb{K}_r$, é imposto no próximo

lema, pelo aumento da região $\mathcal{L}(K_j)$ em que a saturação dos atuadores ocorre e seja garantido a estabilidade, reduzindo a norma dos ganhos do controlador $K_j(x)$ no Teorema 9.

Lema 4. Considerando as condições do Teorema 9, um escalar $\gamma > 0$ e a condição para os conjuntos $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \gamma^{-1}) \subset \mathcal{L}(K_j)$. Usando o resultado do Lema 2, a condição para o projeto dos controladores pode ser imposto se a seguinte restrição

$$v_1^T \begin{bmatrix} \rho_k^2 \gamma & * \\ F_{j(k)}^T & P(x) \end{bmatrix} v_1 \text{ é SOS,} \quad (144)$$

for satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_{n_u}$. Observe que, $\mathcal{L}(K_j)$ é um conjunto semelhante ao conjunto $\mathcal{L}(H_j)$ abordado no Lema 2.

Demonstração. A prova é similar a prova do Lema 2. $\square$

Da mesma forma que realizado nos trabalhos (ALVES et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018b), o projeto de controladores robustos com um único ganho polinomial será utilizado, de tal forma que será possível compará-lo com o projeto de controladores robustos chaveados proposto e descrito no Teorema 9.

Teorema 10. Considere um sistema não linear incerto representado em (107) sujeito a saturação dos atuadores com uma região de operação $\mathcal{X}$, sendo $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\phi \in \mathbb{R}^{n_h}$ e $S \in \mathbb{R}^{n_h \times n_x}$ são conhecidos. Se existe uma matriz simétrica polinomial $P(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $G(x), F(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, uma matriz constante $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e um escalar $\mu > 0$, sendo que as seguintes condições sejam factíveis:

$$v_1^T (P(x) - \varepsilon_1(x)I) v_1 \text{ é SOS,} \quad (145)$$

$$-v_2^T \begin{bmatrix} \Phi_{is}^*(x) + \varepsilon_{2i}(x)I & * \\ \Psi_{is}^* & -\mu(L + L^T) + \varepsilon_{2i}(x)I \end{bmatrix} v_2 \text{ é SOS,} \quad (146)$$

$$v_3^T \begin{bmatrix} \rho_{(l)}^2 \delta^{-1} & G_{(l)}(x) \\ G_{(l)}^T(x) & P(x) \end{bmatrix} v_3 \text{ é SOS,} \quad (147)$$

$$v_4^T \begin{bmatrix} \phi_{(h)}^2 \delta^{-1} & * \\ LS_{(h)}^T & P(x) \end{bmatrix} v_4 \text{ é SOS,} \quad (148)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Phi_{is}^*(x) &= \mathbf{He} \{ T(x)A_i(x)L + T(x)B_i[-D_s F(x) + D_s^- G(x)] \} + \sum_{k \in \mathbb{K}} \frac{\partial P(x)}{\partial x_k} (\Lambda_k), \\ \Psi_{is}^* &= P(x) - L^T + \mu T(x) (A_i(x)L + B_i[-D_s F(x) + D_s^- G(x)]) \end{aligned} \quad (149)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r, l \in \mathbb{K}_{n_u}, h \in \mathbb{K}_{n_h}, s \in \mathbb{K}_{2n_u}, D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I_{n_u \times n_u} - D_s$, $\varepsilon_1(x), \varepsilon_{2i}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, e v_1, v_2, v_3 e v_4 são vetores com dimensões apropriadas que são independentes de

x . A lei de controle $u = -K(x)\hat{x}(x)$ torna a origem do sistema $x = 0$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, sendo $K(x) = F(x)L^{-1}$. Portanto, o vetor de estado $x(t) \in \mathcal{X}$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração. A prova é similar a prova do Teorema 9. □

O seguinte teorema estabelece que se as condições do Teorema 10 forem satisfeitas, então as condições do Teorema 9 também serão. Na Seção 5.3 através de exemplos, será mostrado que a região de factibilidade pode ser maior usando o projeto de controladores chaveados descrito no Teorema 9.

Teorema 11. *Se as condições dados no Teoremas 10 forem satisfeitos, então as condições no Teorema 9 também serão.*

Demonstração. Nas condições do Teorema 9, considere o caso particular sendo os ganhos dos controlador e as matrizes de decisão $K_j(x) = K(x)$, $G_j(x) = G(x)$ e $\hat{Q}_i = 0$, e pode-se observar que as restrições (129), (132) e (133) se tornam iguais as (145), (147) e (148) respectivamente. Portanto, é possível reescrever (130) e (131) como

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \mathbf{He}\{T(x)A_i(x)L\} + \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial P(x)}{\partial x_k}(\Lambda_k) & * \\ P(x) - L^T + \mu(T(x)A_i(x)L & -\mu(L + L^T)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & \hat{Z}_i(x) \end{bmatrix} < 0, \quad (150)$$

$$\Upsilon_{is} = \begin{bmatrix} \Psi_{is} & * \\ \mu(T(x)B_i[-D_s F(x) + D_s^- G(x)]) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & -\hat{Z}_i(x) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (151)$$

sendo

$$\Psi_{is} = \mathbf{He}\{T(x)B_i[-D_s F(x) + D_s^- G(x)]\},$$

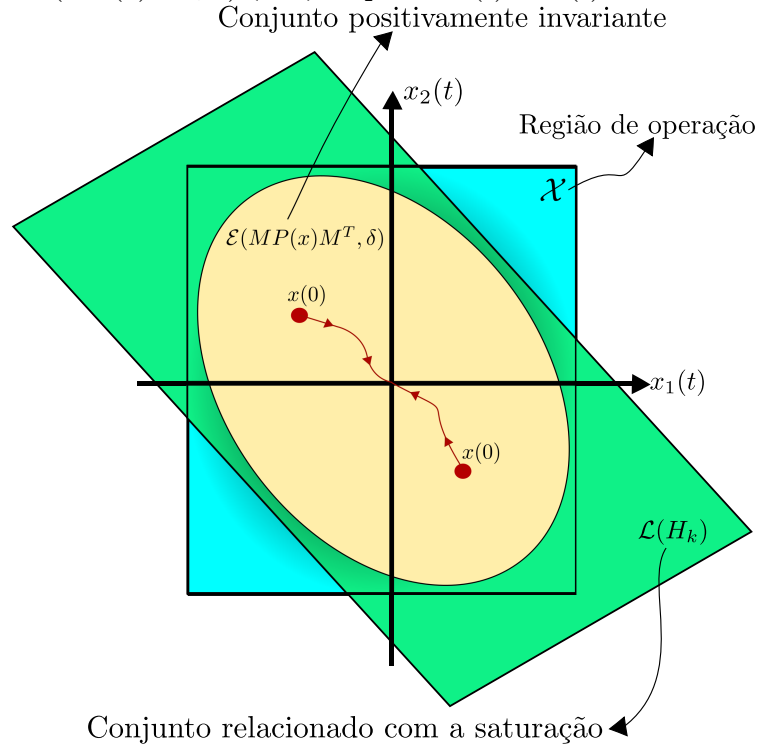
para todo $i \in \mathbb{K}_r, s \in \mathbb{K}_{2n_u}, D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I_{n_u} - D_s$, sendo para todo $x \neq 0$. Deve ser observado que $\Omega_i + \Upsilon_{is} < 0$ e esta inequação é igual a restrição (146). Então, existe um parâmetro pequeno o suficiente $\varepsilon > 0$ sendo que $\Omega_i + \Upsilon_{is} + \varepsilon I < 0$. Portanto a prova está completa. □

Na Figura 11 apresenta-se exemplos de possíveis trajetórias de estado, considerando $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)] \in \mathbb{R}^2$ de modo que seja possível visualizar os conjuntos, para um sistema em malha fechada usando os controladores projetados de acordo com a metodologia discutida neste capítulo. Observa-se que a condição inicial deve pertencer ao conjunto positivamente invariante, sendo $x(0) \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta) \subset \mathcal{X}$, desta forma, o conjunto positivamente invariante deve permanecer na região de operação estipulada para o sistema $\mathcal{X}$.

Desta forma, para toda a condição inicial pertencente ao conjunto positivamente invariante, o sistema será assintoticamente estável. Deve-se observar que o conjunto positivamente invari-

ante foi representado com um formato elipsoidal, mas poderá possuir outros formatos de acordo com a candidata a função de Lyapunov utilizada no projeto dos controladores.

Figura 11 - Representação de possíveis trajetórias de estado e das regiões $\mathcal{X}$ (124), $\mathcal{L}(H_k)$ (112) e $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$ (113) no plano $x_1(t) \times x_2(t)$.



Fonte: Próprio autor.

5.2 CONSIDERANDO DISTÚRBIOS E/OU INCERTEZAS NO SINAL DE CONTROLE

Nesta seção, baseado em (ALVES et al., 2016) e no Capítulo anterior, será apresentado uma abordagem para suprimir uma classe de distúrbios, ou incertezas relacionadas ao sinal de controle. Inicialmente, considere um sistema não linear incerto sujeito a saturação dos atuadores descrito por modelos *fuzzy* polinomiais:

$$\dot{x} = A(\alpha, x)\hat{x}(x) + B(\alpha, x)\text{sat}(u) + B(\alpha, x)d(t), \quad (152)$$

sendo $v_1 \leq d(t) \leq v_2$ e $v \in \mathbb{R}^{n_u}$, $B(\alpha, x) = B_0(x)g(z)$, $d(t)$ descreve um distúrbio ou incerteza $g(z(t)) \geq 0$ para todo $x(t) \neq 0$, v_1 e v_2 são conhecidos. Também, considere a lei de controle chaveada definida a seguir:

$$u = \text{sat}_0(u_\sigma) - v_\varphi, \\ \varphi = \arg \min_{i \in \{1, 2\}}^* \left\{ -\hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x)B_0(x)v_i \right\}, \quad (153)$$

sendo u_σ é a lei de controle definida em (109), a função de saturação $\text{sat}_0(\bullet)$ é definida em (104) substituindo ρ_l por $\rho_{0(l)} = \rho_l - \max_{i \in \mathbb{K}_2} \{|v_{i(l)}|\}$. Observe, para cada elemento u_l do vetor de controle $u = [u_1 \ \cdots \ u_{n_u}]^T$ e cada elemento do vetor $v_\varphi = [v_{\varphi(1)} \ \cdots \ v_{\varphi(n_u)}]^T$ tem-se que:

$$\begin{aligned} |u_l| &= |\text{sat}_0(u_{\sigma(l)}) - v_{\varphi(l)}| \\ &\leq |\text{sat}_0(u_{\sigma(l)})| + |v_{\varphi(l)}| \\ &\leq \rho_{0(l)} + \max_{i \in \mathbb{K}_2} \{|v_{i(l)}|\} \\ &= \rho_l - \max_{i \in \mathbb{K}_2} \{|v_{i(l)}|\} + \max_{i \in \mathbb{K}_2} \{|v_{i(l)}|\} = \rho_l. \end{aligned} \quad (154)$$

Portanto, $\text{sat}(u_l) = \text{sat}_0(u_{\sigma(l)}) - v_{\varphi(l)}$, então $\text{sat}(u) = \text{sat}_0(u_\sigma) - v_\varphi$. Desta forma, considere o teorema proposto a seguir.

Teorema 12. *Considere que as condições do Teorema 9 para um sistema não linear e incerto descrito por modelos fuzzy polinomiais (107) com a lei de controle (109) são satisfeitas, e que $K_i(x) = F_i(x)L^{-1}$ e $Q_i(x) = L^{-T}\hat{Q}_i(x)L^{-1}$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$. Então, o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema não linear incerto (152) com a lei de controle (153) é assintoticamente estável para toda condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(\text{MP}(x)M^T, \delta)$. Além disso, $x \in \mathcal{X}$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Considere uma função polinomial como candidata a função de Lyapunov descrita por $V(x) = \hat{x}^T(x)MP(x)M^T\hat{x}(x)$, sendo $P(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é uma matriz simétrica polinomial e M é uma matriz constante. Então, considerando o sistema representado em (152) com a lei de controle chaveado (153), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\hat{x}^T(x)MP(x)M^T\dot{\hat{x}}(x) + \hat{x}^T(x)M\dot{P}(x)M^T\hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)MP(\tilde{x})M^T T(x) \left(A(x, \alpha)\hat{x}(x) + B(\alpha, x)d(t) \right. \\ &\quad \left. + B(x, \alpha)(\text{sat}_0(u_\sigma) - v_\varphi) \right) + \hat{x}^T(x)M\dot{P}(x)M^T\hat{x}(x) \\ &= 2\hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x) \left(A(x, \alpha)\hat{x}(x) + B(x, \alpha)\text{sat}_0(u_\sigma) \right) \\ &\quad + 2\hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x)B(x, \alpha)(d(t) - v_\varphi) \\ &\quad + \hat{x}^T(x)M\dot{P}(x)M^T\hat{x}(x). \end{aligned} \quad (155)$$

Da prova do Teorema 9 e substituindo ρ_l por $\rho_{0(l)}$ na restrição (132) e utilizando $B(\alpha, x) = B_0(x)g(z)$, $g(z) \geq 0$ para todo $x \neq 0$,

$$\dot{V} < 2\hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x)B_0(x)(d(t) - v_\varphi)g(z(t)). \quad (156)$$

Observe que, o distúrbio ou incerteza $d(t)$ pode ser descrito como uma combinação convexa

$d(t) = \tau_1(t)v_1 + \tau_2(t)v_2$ sendo $\tau_1(t), \tau_2(t) \geq 0$ e

$$\sum_{i=1}^2 \tau_i(t) = 1; \quad \tau_2(t) = \frac{d(t) - v_1}{v_1 - v_2}; \quad \tau_1(t) = 1 - \tau_2(t). \quad (157)$$

Portanto, de (152) e (156),

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x)B(x, \alpha)d(t) - \hat{x}^T(x)MP(\tilde{x})M^T T(x)B(x, \alpha)v_\phi \\ &= \hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x)B_0(x) \sum_{i=1}^2 \tau_i(t)v_i + \min_{i \in \{1,2\}} \left\{ -\hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x)B_0(x)v_i \right\} \\ &\leq \hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x)B_0(x) \sum_{i=1}^2 \tau_i(t)v_i \\ &\quad - \hat{x}^T(x)MP(x)M^T T(x)B_0(x) \sum_{i=1}^2 \tau_i(t)v_i = 0. \end{aligned} \quad (158)$$

Como $g(z(t)) \geq 0$ para todo $x(t) \neq 0$, e de (156), (157) e do Teorema 9, $\dot{V}(x) < 0$, a prova está concluída. $\square$

5.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS CONSIDERANDO A SATURAÇÃO DOS ATUADORES

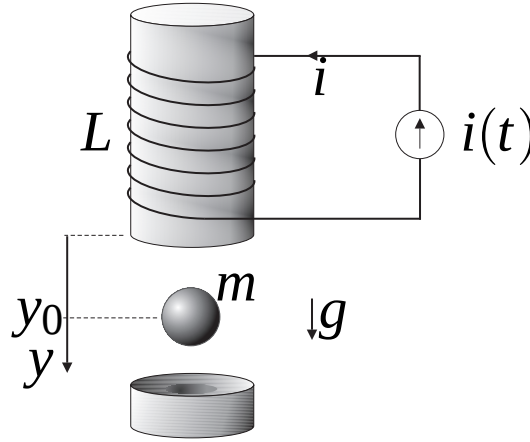
5.3.1 Exemplo numérico 3

Considere o levitador magnético ilustrado na Figura 12, cujo modelo matemático descrito em (ALVES et al., 2016; MARQUEZ, 2003) é dado por:

$$m\ddot{y}(t) = -k\dot{y} + mg - \frac{\psi\zeta i^2(t)}{2(1 + \zeta y^2(t))}, \quad (159)$$

sendo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade, $\psi = 0,460 \text{ H}$, $\zeta = 2 \text{ m}^{-1}$ e $k = 0,001 \text{ Ns/m}$ são constantes positivas, m é a incerteza da bola a ser levitada, $i(t)$ é a corrente elétrica, e $y(t)$ é a posição da bola.

Figura 12 - Levitador Magnético.



Fonte: Próprio autor.

Definindo as variáveis de estado como $\check{x}_1(t) = y(t)$ e $\check{x}_2(t) = \dot{y}(t)$. Então, (159) pode ser reescrito como (SANTIM et al., 2012):

$$\begin{aligned}\dot{\check{x}}_1(t) &= \check{x}_2(t), \\ \dot{\check{x}}_2(t) &= g - \frac{k}{m}\check{x}_2(t) - \frac{\psi\varsigma i^2(t)}{2m(1 + \varsigma\check{x}_1(t))^2}.\end{aligned}\quad (160)$$

Neste exemplo, o objetivo é projetar um controlador capaz de manter a bola em uma posição desejada $y(t) = \check{x}_1(t) = y_0$. Então, o ponto de equilíbrio do sistema (160) será $\check{x}_e = \begin{bmatrix} \check{x}_{1e} & \check{x}_{2e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y_0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Da segunda equação em (160), observe que o ponto de equilíbrio $\check{x}_2 = 0$ e $i = i_0$, sendo

$$i_0^2 = \frac{2mg}{\psi\varsigma}(1 + \varsigma y_0)^2. \quad (161)$$

Observe que o ponto de equilíbrio não é a origem do espaço de estado $\begin{bmatrix} \check{x}_1(t) & \check{x}_2(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Então, para a análise da estabilidade, a seguinte mudança de coordenadas é necessária:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \check{x}_1(t) - y_0, \quad x_2(t) = \check{x}_2(t), \quad u(t) = i^2(t) - i_0^2, \quad i.e., \\ \check{x}_1(t) &= x_1(t) + y_0, \quad \check{x}_2(t) = x_2(t), \quad i^2(t) = u(t) + i_0^2.\end{aligned}\quad (162)$$

Portanto, $\dot{x}_1(t) = \dot{\check{x}}_1(t)$, $\dot{x}_2(t) = \dot{\check{x}}_2(t)$ e, de (161), $i^2(t) = u(t) + i_0^2 = u(t) + \frac{2mg}{\psi\varsigma}(1 + \varsigma y_0)^2$.

Consequentemente, o sistema (160) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21}(z) \end{bmatrix} u(t), \\ f_{21}(z) &= \frac{g\zeta(\zeta x_1(t) + 2\zeta y_0 + 2)}{(1 + \zeta(x_1(t) + y_0))^2}, \quad f_{22}(z) = -\frac{k}{m}, \\ g_{21}(z) &= \frac{-\psi\zeta}{2m(1 + \zeta(x_1(t) + y_0))^2}, \end{aligned} \quad (163)$$

sendo $z = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & y_0 & m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$. Então, para encontrar os modelos locais, os valores de máximo e mínimo das funções f_{21} , f_{22} e g_{21} devem ser obtidos. Desta forma, será utilizada a metodologia proposta em (SANTIM et al., 2012).

Suponha que a posição desejada $y_0 \in [0,05 \ 0,1]$, a massa $m \in [0,05 \ 0,1]$, a região de operação $0 \leq \check{x}_1(t) \leq 0,15$ e considerando y_0 e m como as novas variáveis para especificação do domínio D_0 das função não lineares f_{21} , f_{22} e g_{21} , então:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{R}^4 : -0,1 \leq x_1(t) \leq 0,1, \quad 0,05 \leq y_0 \leq 0,1, \quad 0,05 \leq m \leq 0,1\}. \quad (164)$$

Contudo, com o domínio D_0 inicialmente considerado não é possível incluir as condições iniciais desejadas $x(0) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $x(0) = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 \end{bmatrix}^T$ no domínio do conjunto invariante $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, desta forma o conjunto de operação D_0 é estendido para

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{R}^4 : -0,11 \leq x_1(t) \leq 0,11, \\ &\quad 0,05 \leq y_0 \leq 0,1, \quad 0,05 \leq m \leq 0,1\}. \end{aligned} \quad (165)$$

e o domínio D_1 será utilizado no projeto dos controladores. Depois de calculados, os valores de máximo e mínimo das funções f_{21} , f_{22} , g_{21} e $u_0 = i_0^2$, no domínio D_1 , são obtidos:

$$\begin{aligned} 25,47 \leq f_{21}(z) \leq 50,11, \quad -0,02 \leq f_{22}(z) \leq -0,01, \\ -11,88 \leq g_{21}(z) \leq -2,28, \quad 1,29 \leq i_0^2(z) \leq 3,07. \end{aligned} \quad (166)$$

De (166), a equação (163) pode ser reescrita, considerando a saturação dos atuadores, como (110), sendo $r = 8$, $n_x = 2$, $n_u = 1$, $\hat{x}(x) = x$ e as matrizes A_i e B_i para $i \in \mathbb{K}_r$ são dadas a seguir:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 50,113 & -0,01 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 50,113 & -0,02 \end{bmatrix}, \\ A_5 = A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25,467 & -0,01 \end{bmatrix}, \quad A_7 = A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25,467 & -0,02 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_3 = B_5 = B_7 &= \begin{bmatrix} 0 & -2,281 \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

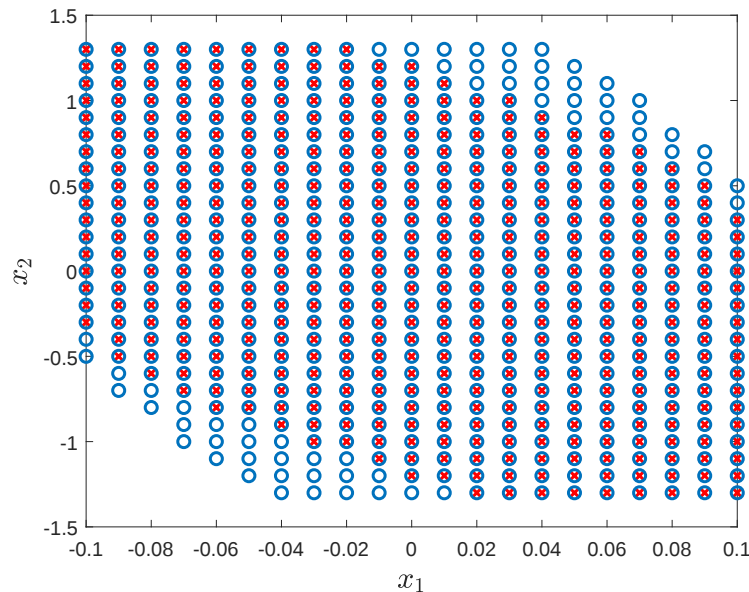
$$B_2 = B_4 = B_6 = B_8 = \begin{bmatrix} 0 & -11,88 \end{bmatrix}^T. \quad (167)$$

A região de operação no espaço de estado $\mathcal{X}$ descrito em (124) sendo $h = 1$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\phi = 0, 11$. Observe que $B(\alpha) = B_0 g(z)$, sendo $B_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ e a função que relaciona a entrada do sistema $g(z) = \frac{\psi \zeta}{2m(1 + \zeta(x_1 + y_0))^2} \geq 0$ para todo $z \neq 0$, e $g_0 = \max_{z \in D_1} \{g(z)\} = 11,8802$.

Então, encontrando a solução para as restrições apresentadas no Teorema 9, Lemas 3 e 4 considerando $\rho_0 = 7.4$, $\mu = 10^{-5}$, $\delta = 1$ e $\gamma = 0.5$. Além disso, o sistema está sujeito a saturação dos atuadores com uma região de operação $\mathcal{X}$, desta forma é possível obter que $|\dot{x}_1| \leq \Lambda_1 = 1,5$ e $|\dot{x}_2| \leq \Lambda_2 = 93,441$. Inicialmente, será realizado uma comparação com a metodologia apresentada em (ALVES et al., 2016) considerando os mesmos parâmetros e variáveis descritas anteriormente.

A Figura 13 mostra a região de factibilidade relacionada com a condição inicial, comparando o Teorema 9 sem termos polinomiais nas variáveis, obtendo desta forma uma comparação procedente com a metodologia de controle chaveado proposta em (ALVES et al., 2016). Desta forma, o projeto de controladores chaveados propostos foram reduzidos em restrições baseadas em LMIs e mesmo assim pode demonstrar uma região de factibilidade maior comparada com a metodologia proposta em (ALVES et al., 2016). Deve ser observado que este trabalho apresenta uma flexibilidade maior devido as restrições baseadas em SOS, pois são uma extensão das LMIs e por possuírem termos polinomiais, possuem maior flexibilidade.

Figura 13 - Região de factibilidade obtida com o Teorema 9 sem termos polinomiais ($\circ$) e a metodologia de controladores chaveados proposta em (ALVES et al., 2016) ($\times$).



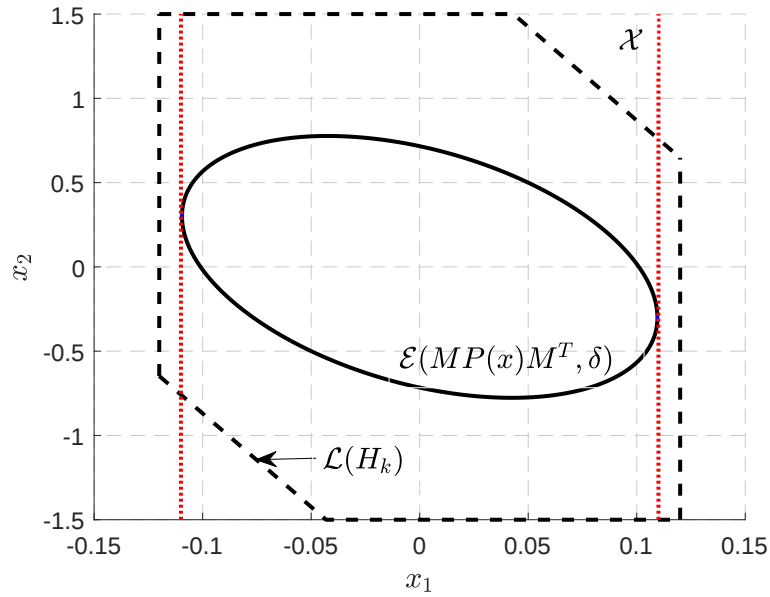
Fonte: Próprio autor.

Para a simulação do sistema, considere a condição inicial que pertence a região $\mathcal{X}$, $x_1(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $x_2(0) = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e pertence ao conjunto $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$. Deve ser observado que as condições iniciais pertencerão ao mesmo conjunto convexo de condições iniciais, então para todos os valores entre eles pertencerão ao conjunto $\mathcal{X}$. Considerando as condições apresentadas e resolvendo as restrições do Teorema 9, Lemas 3 e 4, são obtidos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 K_1(x) &= \begin{bmatrix} -40,7296 & -3,6600 \end{bmatrix}, & K_2(x) &= \begin{bmatrix} -19,5472 & -1,6148 \end{bmatrix}, \\
 K_3(x) &= \begin{bmatrix} -40,7479 & -3,6650 \end{bmatrix}, & K_4(x) &= \begin{bmatrix} -19,5506 & -1,6167 \end{bmatrix}, \\
 K_5(x) &= \begin{bmatrix} -35,7902 & -3,4662 \end{bmatrix}, & K_6(x) &= \begin{bmatrix} -17,1841 & -1,5810 \end{bmatrix}, \\
 K_7(x) &= \begin{bmatrix} -35,8126 & -3,4719 \end{bmatrix}, & K_8(x) &= \begin{bmatrix} -17,1880 & -1,5831 \end{bmatrix}, \\
 [Q_1|Q_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -739,9291 & -185,1259 & -941,8429 & -217,0369 \\ -185,1259 & -19,0645 & -217,0369 & -24,0590 \end{array} \right], \\
 [Q_3|Q_4] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -739,9220 & -185,2295 & -941,7178 & -217,1174 \\ -185,2295 & -19,1090 & -217,1174 & -24,1014 \end{array} \right], \\
 [Q_5|Q_6] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -455,2846 & -151,8624 & -640,4371 & -181,2188 \\ -151,8624 & -18,5796 & -181,2188 & -23,2768 \end{array} \right], \\
 [Q_7|Q_8] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -455,2962 & -151,9687 & -640,3426 & -181,3077 \\ -151,9687 & -18,6259 & -181,3077 & -23,3216 \end{array} \right], \\
 MP(x)M^T &= \begin{bmatrix} 98,0754 & 5,3573 \\ 5,3573 & 1,9499 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{168}$$

A Figura 14 mostra os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_k)$ e $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$ de acordo com a solução encontrada em (168).

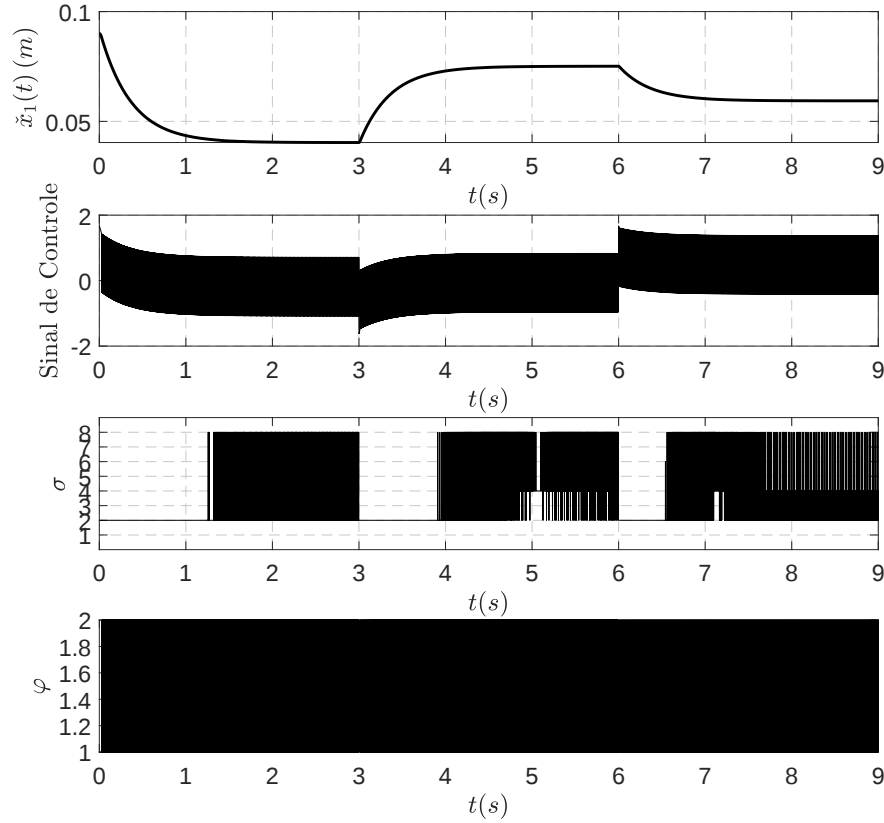
Figura 14 - Os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_k)$ e $\mathcal{E}(MP(x)M^T)$, para o levitador magnético.



Fonte: Próprio autor.

Para as simulações do sistema de controle do levitador magnético, os ganhos de realimentação e as variáveis apresentadas em (168) necessárias para a lei de controle chaveada (109) e (158) foram utilizadas, a condição inicial $\check{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \end{bmatrix}^T$, $y_0 = 0,04$ e $m = 0,08 \text{ kg}$ para $0 \leq t < 3$ segundos; $y_0 = 0,075$ e $m = 0,05 \text{ kg}$ para $3 \leq t < 6$ segundos; $y_0 = 0,06$ e $m = 0,1 \text{ kg}$ para $6 \leq t < 9$ segundos. Então, pode ser visualizado na Figura 15 que o sistema é assintoticamente estável para diferentes condições iniciais pertencentes ao conjunto $\mathcal{E}(MP(x)M^T)$.

Figura 15 - Posição ($\check{x}_1(t) = y(t)$), sinal de controle ($u(t) = i^2(t) - i_0^2$), índices σ e φ da simulação do levitador magnético (160), utilizando a lei de controle chaveado (109) e (158).



Fonte: Próprio autor.

5.3.2 Exemplo numérico 4

Considere um sistema não linear com distúrbios no sinal de controle representado a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \text{sen}(x_1) - 0,3x_2^2 + (1 - \Delta_b)u - d(t), \\ \dot{x}_2 &= 1,5x_1 - 2x_2 - x_2^2,\end{aligned}\tag{169}$$

sendo $\Delta_b(t)$ um parâmetro incerto variante no tempo que satisfaz a condição $0 \leq \Delta_b \leq 0,2$ para todo $t \geq 0$. O sinal $d(t) = 2(3 + 2\text{sen}(200\pi t))$ é um distúrbio na entrada do sinal de controle tal que $2 \leq d(t) \leq 10$. Considere o seguinte domínio D_0 para o sistema não linear incerto:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{R}^3 : -3 \leq x_1(t) \leq 3, \quad -3 \leq x_2(t) \leq 3, \quad 0 \leq \Delta_b(t) \leq 0.2\}.\tag{170}$$

De (170), a equação (169) pode ser reescrita como (110) em que é considerado $\rho = 60$,

sendo $r = 4$, $n_x = 2$, e as matrizes $A_i(x)$ e $B_i(x)$ para $i \in \mathbb{K}_r$ são:

$$\begin{aligned} A_1(x) = A_2(x) &= \begin{bmatrix} 1 & -0,3x_2^2 \\ 1,5 & -2 - x_2^2 \end{bmatrix}, \\ A_3(x) = A_4(x) &= \begin{bmatrix} -0,2172 & -0,3x_2^2 \\ 1,5 & -2 - x_2^2 \end{bmatrix}, \\ B_1(x) = B_3(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad B_2(x) = B_4(x) = 0,8 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (171)$$

A região de operação no espaço de estado $\mathcal{X}$ é descrita em (124) sendo $h = 2$, $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ uma matriz identidade e $\phi = [3 \ 3]^T$. Observe que $B(\alpha) = B_0 g(z)$, sendo $B_0 = [1 \ 0]^T$ e a função $g(z) \geq 0$ para todo $z \neq 0$.

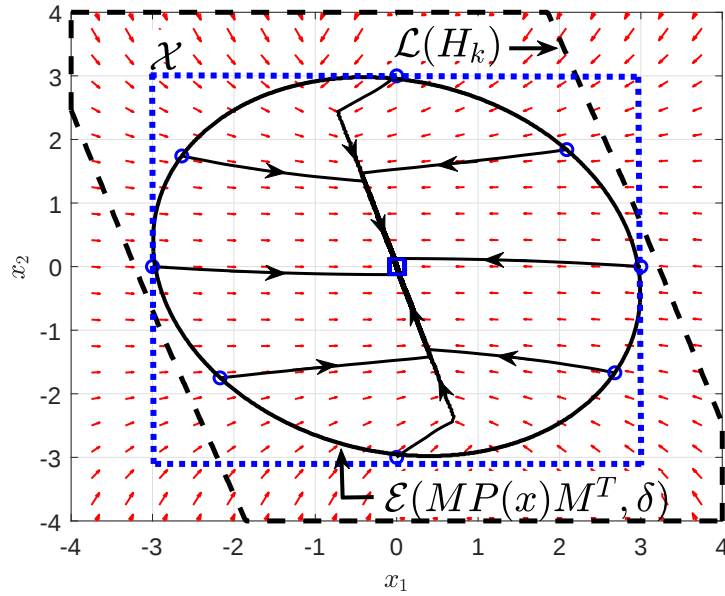
Então, resolvendo as restrições apresentadas no Teorema 9 e Lema 3, sendo $\rho_0 = 50$, $\mu = 10^{-5}$, $\delta = 1$ com a condição inicial $x_1(0) = [-1.5 \ 0]^T$ e $x_2(0) = [1.5 \ 0]^T$ pertencentes ao conjunto $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \begin{bmatrix} 5784,5397x_1^2 + 5780,2995x_2^2 - 12,2584x_2 + 5928,3508 \\ 1703,1124x_1^2 + 1702,7854x_2^2 - 9,4481x_2 + 1745,4879 \end{bmatrix}, \\ K_2(x) &= \begin{bmatrix} 5914,4764x_1^2 + 5910,8041x_2^2 - 13,3571x_2 + 6074,5906 \\ 1741,369x_1^2 + 1742,0366x_2^2 - 13,1212x_2 + 1791,3586 \end{bmatrix}, \\ K_3(x) &= \begin{bmatrix} 5784,5397x_1^2 + 5780,1534x_2^2 - 13,5082x_2 + 5753,8774 \\ 1703,1124x_1^2 + 1702,7261x_2^2 - 9,4672x_2 + 1699,7329 \end{bmatrix}, \\ K_4(x) &= \begin{bmatrix} 5914,4764x_1^2 + 5910,6369x_2^2 - 14,7883x_2 + 5882,6659 \\ 1741,369x_1^2 + 1741,9677x_2^2 - 13,1023x_2 + 1741,4473 \end{bmatrix}, \\ MP(x)M^T &= \begin{bmatrix} 0,1135 & 0,0151 \\ 0,01513 & 0,1143 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (172)$$

As matrizes $Q_i(x)$ sendo $i \in \mathbb{K}_4$ são formadas por monômios de segunda ordem e foram omitidas neste texto. Com as mesmas condições utilizadas no projeto dos controladores chaveados obtido anteriormente não foi possível obter factibilidade utilizando o Teorema 10. Considerando a condição inicial $x(0) = [2,5 \ -1]^T$ e $\Delta_b = 0,2$, a Figura 17 mostra a trajetória de estado, o sinal de controle e os índices de chaveamento σ e φ .

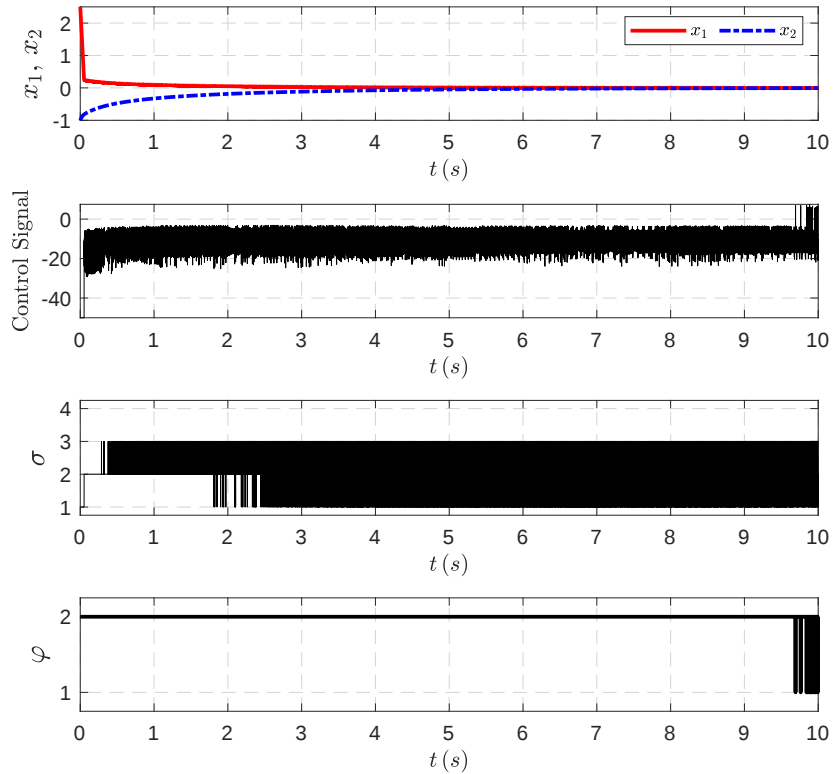
A Figura 16 apresenta o plano de fase do sistema (169) em malha fechada com a lei de controle chaveado (109) e (158) com os ganhos (172), sendo $v_1 = 2$ e $v_2 = 10$. Nesta figura também é possível observar os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_k(x))$ e $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$.

Figura 16 - Trajetória do sistema (169) em malha fechada. As condições iniciais e finais são indicadas por um círculo azul ($\circ$) e um quadrado azul ($\square$), respectivamente. Os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_k(x))$ e $\mathcal{E}(MP(x)M^T)$.



Fonte: Próprio autor.

Figura 17 - Trajetória das variáveis de estado x_1 e x_2 , sinal de controle $u(t)$ e os índices de chaveamento σ e φ do sistema não linear incerto (152), usando a lei de controle robusto chaveado (109) e (158).



Fonte: Próprio autor.

5.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Nesta seção foi proposto um novo projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares sujeito a saturação dos atuadores e distúrbios no sinal de controle. Foi considerada uma nova candidata a função de Lyapunov polinomial, reduzindo o conservadorismo no projeto dos controladores. Além disso, os controladores obtidos são polinomiais, não sendo dependentes de funções racionais, que podem dificultar a implementação desses controladores.

Através dos exemplos foi possível observar as vantagens da nova metodologia. A proposta do projeto de controladores obteve uma região de factibilidade maior que a obtida com o projeto dos controladores baseado em LMIs (ALVES et al., 2016). Além disso, através da descrição dos sistemas não lineares em modelos *fuzzy* polinomiais com as restrições de projeto descritas em termos de soma de quadrados, é possível flexibilizar as condições de projeto de controladores.

Tendo em vista que em muitas aplicações o sistema está sujeito a distúrbios ou incertezas no sinal de controle, foi considerado o projeto controladores capazes de suprimir esta classe de distúrbios e /ou incertezas.

A metodologia de projeto proposto fornece uma região invariante $\mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, na qual, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(MP(x)M^T, \delta)$, o vetor de estado do sistema controlado $x(t)$ para $t > 0$, permanece na região de operação considerada, mesmo considerando a saturação dos atuadores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados resultados sobre o controle chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos com saturação no atuador e distúrbios ou incertezas no sinal de controle. Os resultados foram obtidos considerando a representação exata destes sistemas por modelos *fuzzy* polinomiais incertos, que são uma extensão dos modelos *fuzzy* TS, considerando uma combinação convexa de modelos locais polinomiais, sendo portanto, não lineares. Utilizando esta metodologia para a representação de sistemas não lineares, as funções de pertinência podem ser incertas e/ou desconhecidas.

Inicialmente, no Capítulo 2, foi comparado o projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS e polinomiais, demonstrando que o projeto desses controladores para sistemas descritos por modelos *fuzzy* polinomiais são uma extensão dos modelos *fuzzy* TS, podendo obter uma região de factibilidade igual ou maior.

Além disso, o projeto de controladores chaveados para sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* polinomiais que possuem as restrições de projeto descritas por soma de quadrados, é uma metodologia flexível, podendo ser considerado nas restrições várias matrizes polinomiais e a minimização de índices de desempenho desejados, como descrito no Capítulo 3. As restrições de projeto descritas em termos de soma de quadrados é uma extensão das restrições descritas como LMIs, podendo obter uma região de factibilidade maior e/ou melhores índices de desempenho.

A partir da descrição de sistemas não lineares em modelos *fuzzy* polinomiais, o sistema pode ser descrito globalmente ou localmente de forma exata. Observando que na grande maioria das aplicações de controladores os sistemas possuem limitações físicas e saturação nos atuadores, desta forma as variáveis de estado serão limitadas. Portanto, no Capítulo 5 foi apresentado o projeto de controladores considerando a saturação nos atuadores e a representação local do sistema não linear incerto por modelos *fuzzy* polinomiais.

Através dos exemplos numéricos deste trabalho, pode-se observar que os resultados obtidos para o projeto de controladores chaveados para sistemas não lineares incertos obtiveram maiores regiões de factibilidade se comparando com aqueles considerando modelos *fuzzy* TS com as restrições descritas em termos de LMIs. Deste modo, este trabalho trouxe resultados importantes para a flexibilizar as restrições de projeto dos controladores para sistemas não lineares

incertos.

De modo geral, os resultados obtidos neste trabalho podem ser estendidos ao controle chaveado de sistemas polinomiais incertos, ou seja, representado por polinômios dependentes das variáveis de estado, não necessitando da descrição deste sistemas utilizando modelos *fuzzy* polinomiais, um exemplo desse tipo de sistema foi abordado em (RAMOS et al., 2018). Além disso, considerando que a utilização de candidatas a função de Lyapunov mais complexas e a utilização de ganhos polinomiais podem flexibilizar as condições de projeto do controlador, os resultados também podem ser estendidos para sistemas lineares com incertezas politópicas.

De acordo com os resultados obtidos neste trabalho e baseado na metodologia proposta em Oliveira et al. (2018b) pretende-se projetar controladores chaveados robustos com a minimização da norma H_∞ para a mesma classe de sistemas considerada neste trabalho. Além disso, como em muitas aplicações de controladores não possuíram todas as variáveis de estado disponível, baseado em Bocca et al. (2022) e Carniato et al. (2020) será considerado o projeto de controladores chaveados robustos com realimentação de saída para a mesma classe de sistemas descrita nesse trabalho.

Baseado em Oliveira et al. (2018a) e Santos (2020), a metodologia de projeto de controladores robustos chaveados apresentado neste trabalho também serão estendidos para a classe de sistemas não lineares e discretos no tempo descritos por modelos *fuzzy* polinomiais considerando a saturação dos atuadores.

Da pesquisa realizada originaram-se os seguintes trabalhos:

- RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO; ASSUNÇÃO, EDVALDO; CARDIM, RODRIGO; LAZARINI, ADALBERTO ZANATTA NEDER. On Robust Switched Controller Design to Minimize the Guaranteed Cost of Polynomial Fuzzy Systems. In: **2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems 2019**, New Orleans: [s.n.], 2019. p. na/na.
- RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO; ASSUNÇÃO, EDVALDO; CARDIM, RODRIGO; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ. Comparação do controle chaveado de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno e Polinomiais. In: **XIV Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações 2019**, São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos - USP: [s.n.], 2019. p. na/na.
- PERES, JADY CARDONA; RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO; ASSUNÇÃO, EDVALDO; CARDIM, RODRIGO. Projeto de controlador robusto chaveado com custo garantido para sistemas lineares incertos.

In: **XIV Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações 2019**, São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos - USP: [s.n.], 2019. p. na/na.

- SILVA, HYAGO RAMOM MARTINS; RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; CARDIM, RODRIGO; ASSUNÇÃO, EDVALDO; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO. Identification and Switched Control of an Aeropendulum System. In: **Congresso Brasileiro de Automática 2020**, Evento online: [S.l.: s.n.], 2020. p. na/na.
- BOCCA, LUCAS FAVI; RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ; BIZARRO, DOUGLAS BUYTENDORP; PERES, JADY CARDONA; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO. Projeto de Controladores Ótimos Robustos com Realimentação Estática de Saída. In: **Congresso Brasileiro de Automática 2020**, Evento online: [S.l.: s.n.], 2020. p. na/na.
- SILVA, HYAGO RAMOM MARTINS; CARDIM, RODRIGO; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO; ASSUNÇÃO, EDVALDO; RAMOS, IGOR THIAGO MINARI RAMOS. Switched Control and Tracking Application in Aeropendulum System using Fuzzy Models. In: **IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-2021)**. Luxembourg: [s.n.], 2021. p. na/na.
- DE SIMONE, TAMIRES SHIOKAWA; RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; BOCCA, LUCAS FAVI ; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ; BIZARRO, DOUGLAS BUYTENDORP; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO. Output feedback controller design for Quadratic Cost Minimization for Linear Systems with Polytopic Uncertainties. In: **14th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON 2021)**. São Paulo: [s.n.], 2021. p. na/na.
- RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ; OLIVEIRA, DIOGO RAMALHO DE; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO; CARDIM, RODRIGO; MACHADO, ERICA REGINA MARANI DARUICHI MACHADO; ASSUNÇÃO, EDVALDO. On Switched Controller Design for Robust Control of Uncertain Polynomial Nonlinear Systems Using Sum of Squares. **IFAC-PAPERSONLINE**, v. 51, p. 269-274, 2018.
- SILVA, HYAGO RAMOM MARTINS; RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ; CARDIM, RODRIGO; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO; ASSUNÇÃO, EDVALDO. Switched Control Design with Guaranteed Cost for Uncertain Nonlinear Systems Subject to Actuator Saturation. **IFAC-PAPERSONLINE**, v. 53, p. 8025-8030, 2020.
- BOCCA, LUCAS FAVI; RAMOS, IGOR THIAGO MINARI; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ; BIZARRO, DOUGLAS BUYTENDORP; ASSUNÇÃO, ED-

VALDO; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO. Robust Guaranteed Cost Switched Controller Design using Static Output Feedback. **Journal Of Control Automation And Electrical Systems**, v. 1, p. 1-14, 2021.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L.; OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; CAUN, R. P. Projeto de controlador com estrutura variável para minimização de custo quadrático utilizando a função mínimo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA-CBA, 25., 2018, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: SBA, 2018. p. 1–8.
- ALVES, U. N. L.; TEIXEIRA, M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.
- BARMISH, B. Stabilization of uncertain systems via linear control. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 28, n. 8, p. 848–850, 1983.
- BIZARRO, D. B. **Controle baseado em funções de Lyapunov polinomiais e controle robusto de sistemas chaveados afins com aplicações em conversores eletrônicos de potência**. 2021. 108 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Ilha Solteira, 2021.
- BOCCA, L. F.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; BIZARRO, D. B.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Robust guaranteed cost switched controller design using static output feedback. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer, v. 33, n. 1, p. 115–128, 2022.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
- CAO, K.; GAO, X. Z.; VASILAKOS, T.; PEDRYCZ, W. Analysis of stability and robust stability of polynomial fuzzy model-based control systems using a sum-of-squares approach. **Soft Computing**, Heidelberg, v. 18, n. 3, p. 433–442, March 2014.
- CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 11, n. 1, p. 57–67, 2003.
- CARNIATO, L. A.; CARNIATO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; JUNIOR, E. I. M.; ASSUNÇÃO, E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 93, n. 5, p. 1127–1146, 2020.
- CAUN, R. da P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. da P. LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. **Cogent Engineering**, Cogent OA, v. 5, n. 1457206, p. 1–27, 2018.

- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1998. 461 p.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A. Switched affine systems control design with application to dc–dc converters. **IET control theory & applications**, IET, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.
- GASSARA, H.; HAJJAJI, A. E.; CHAABANE, M. Control of time delay polynomial fuzzy model subject to actuator saturation. **International Journal of Fuzzy Systems**, Heidelberg, v. 18, n. 5, p. 763–772, Oct 2016.
- GRAHAM, A. **Kronecker products and matrix calculus with applications**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1981. 129 p.
- GUELTON, K.; MANAMANNI, N.; DUONG, C.-C.; KOUMBA-EMIANIWE, D. L. Sum-of-squares stability analysis of Takagi-Sugeno systems based on multiple polynomial Lyapunov functions. **International Journal of Fuzzy Systems**, Tapei, v. 15, n. 1, p. 1–8, 2013.
- GUERRA, T. M.; SALA, A.; TANAKA, K. Fuzzy control turns 50: 10 years later. **Fuzzy sets and systems**, Elsevier, v. 281, p. 168–182, 2015.
- GUERRA, T. M.; VERMEIREN, L. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form. **Automatica**, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 823–829, 2004.
- GUO, L.; CAO, S. Anti-disturbance control theory for systems with multiple disturbances: A survey. **ISA transactions**, Elsevier, v. 53, n. 4, p. 846–849, 2014.
- HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. **Automatica**, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 351–359, 2002.
- HUNG, J. Y.; GAO, W.; HUNG, J. C. Variable structure control: A survey. **IEEE transactions on industrial electronics**, IEEE, v. 40, n. 1, p. 2–22, 1993.
- JENNAWASIN, T.; NARIKIYO, T.; KAWANISHI, M. An improved SOS-based stabilization condition for uncertain polynomial systems. In: SICE ANNUAL CONFERENCE, n. 48, 2010, Tapei. **Proceedings...** Tapei: IEEE, 2010. p. 3030–3034.
- KENDOUL, F. Survey of advances in guidance, navigation, and control of unmanned rotorcraft systems. **Journal of Field Robotics**, Wiley Online Library, v. 29, n. 2, p. 315–378, 2012.
- KIM, H. S.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. Less conservative robust stabilization conditions for the uncertain polynomial fuzzy system under perfect and imperfect premise matching. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Heidelberg, v. 14, n. 6, p. 1588–1598, Dec 2016.
- LI, W.; WANG, W. Guaranteed cost control for polynomial fuzzy time delay systems by sum-of-squares approach. In: WORLD CONGRESS INTELLIGENT CONTROL AND AUTOMATION, 10., 2012, Beijing. **Proceedings...** Beijing: IEEE, 2012. p. 1806–1811.
- LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE

INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 34., 2004, Taipei. **Proceedings...** Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289.

MARQUEZ, H. J. *Nonlinear control systems: analysis and design*. [S.l.]: John Wiley Hoboken e N. JNJ, 2003.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; SOUZA, F.; MENDES, E. M. Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. **Automatica**, Oxford, v. 45, n. 6, p. 1580–1583, 2009.

NAIDU, D. S.; CALISE, A. J. Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: A survey. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 24, n. 6, p. 1057–1078, 2001.

OLIVEIRA, D. R. D.; SANTOS, G. R. D.; TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; ALVES, U. N. L. On switched control of discrete-time takagi-sugeno fuzzy systems with unknown membership functions. In: IEEE. 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. **Proceedings...** [S.l.], 2018. p. 1–8.

OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local H_∞ switched controller design for uncertain TS fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. **Fuzzy Sets and Systems**, Piscataway, v. 344, n. 1, p. 1–26, 2018.

PAPACHRISTODOULOU, A.; ANDERSON, J.; VALMORBIDA, G.; PRAJNA, S.; SEILER, P.; PARRILO, P. A. SOSTOOLS: sum of squares optimization toolbox for MATLAB. [S. l.: s. n.], 2013. Disponível em <<http://www.eng.ox.ac.uk/control/sostools>>, <<http://www.cds.caltech.edu/sostools>> e <<http://www.mit.edu/~parrilo/sostools>>. Acesso em: 4 jul 2017.

PAPACHRISTODOULOU, A.; PRAJNA, S. On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 41., 2002, Las Vegas. **Proceedings...** Las Vegas: IEEE, 2002. p. 3482–3487.

PARRILO, P. A. **Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization**. 2000. 209 f. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 2000. Disponível em: <www.mit.edu/parrilo/pubs/files/thesis.pdf>. Acesso em: 8 set 2016.

PARRILO, P. A. Sum of squares programs and polynomial inequalities. **SIAM**, v. 15, n. 2, p. 7–15, 2004.

PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; WU, F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach. In: ASIAN CONTROL CONFERENCE, 5., 2004, Melbourne. **Proceedings...** Melbourne: IEEE, 2004. v. 1, p. 157–165.

RAMOS, I. T.; ALVES, U. N.; OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C.; CARDIM, R.; MACHADO, E. R.; ASSUNÇÃO, E. On switched controller design for robust control of uncertain polynomial nonlinear systems using sum of squares. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 51, n. 25, p. 269–274, 2018.

- RAMOS, I. T.; ALVES, U. N. L.; TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; LAZARINI, A. Z. On robust switched controller design to minimize the guaranteed cost of polynomial fuzzy systems. In: IEEE. IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS - FUZZ-IEEE, 2019., 2019, New Orleans. **Proceedings...** New Orleans, 2019. p. 1–6.
- RAMOS, I. T. M. **Projetos de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares baseados na decomposição em soma de quadrados**. 2018. 99f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Ilha Solteira, 2018.
- RAMOS, I. T. M.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; ALVES, U. N. L. T. Comparação do controle chaveado de sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* takagi-sugeno e polinomiais. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON, 42., 2019, São Carlos. **Anais...** São Carlos: SBA, 2019. p. 1–7.
- REZNICK, B. Extremal PSD forms with few terms. **Duke Mathematical Journal**, Durham, v. 45, n. 2, p. 363–374, 1978.
- SAGE, H.; MATHELIN, M. D.; OSTERTAG, E. Robust control of robot manipulators: a survey. **International Journal of control**, Taylor & Francis, v. 72, n. 16, p. 1498–1522, 1999.
- SANTIM, M.; TEIXEIRA, M.; SOUZA, W. A. d.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2012, n. 1, p. 1–17, 2012.
- SANTOS, G. R. d. **Controle chaveado e H_∞ chaveado de sistemas não lineares incertos discretos no tempo descritos por modelos fuzzy TS considerando região de operação e saturação dos atuadores**. 2020. 168 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Ilha Solteira, 2020.
- SEILER, P. SOSOPT: a toolbox for polynomial optimization. [S. l.: s. n.], 2013. Disponível em: <<http://www.aem.umn.edu/AerospaceControl/>>. Acesso em: 4 jul 2017.
- SILVA, H. R.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; RAMOS, I. T. Switched control and tracking application in aeropendulum system using fuzzy models. In: IEEE. 2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. **Proceedings...** [S.l.], 2021. p. 1–6.
- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. et al. **Applied nonlinear control**. [S.l.]: prentice-Hall, 1991. 461 p.
- SOUZA, W. A. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas nao lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno**, 2013, 93 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Ilha Solteira, 2013.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M.; SANTIM, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2013, n. 1, p. 1–10, 2013.
- SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇAO, E. On switched regulator

design of uncertain nonlinear systems using Takagi–Sugeno fuzzy models. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014b.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Oxfordshire, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.

TANAKA, K.; OHTAKE, H.; SEO, T.; TANAKA, M.; WANG, H. O. Polynomial fuzzy observer designs: a sum-of-squares approach. **Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 42, n. 5, p. 1330–1342, 2012.

TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Guaranteed cost control of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. **Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 39, n. 2, p. 561–567, 2009.

TANAKA, K.; TANAKA, M.; CHEN, Y.-J.; WANG, H. O. A new sum-of-squares design framework for robust control of polynomial fuzzy systems with uncertainties. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 24, n. 1, p. 94–110, 2016.

TANAKA, K.; WANG, H. O. **Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2004. 309 p.

TANAKA, K.; YOSHIDA, H.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 17, n. 4, p. 911–922, 2009.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.

TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, Oct 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, N. A.; ASSUNÇÃO, E.; MACHADO, E. R. Design of fuzzy regulators with optimal initial conditions compensation. In: IEEE. IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS - FUZZ-IEEE, 2006., 2006, Vancouver. **Proceedings...** [S.l.], 2006. p. 84–91.

YUM, G. R.; WANG, W. Y. SOS-based fuzzy control of a wheeled mobile robot with decay rate. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS-SMC, 2013, Manchester. **Proceedings...** Manchester: IEEE, 2013. p. 4700–4705.