

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

DANIEL MARTIN GASLAC GALLARDO

Dinâmica dos pequenos corpos de Netuno e o sistema Kepler-90

Guaratinguetá

2021

Daniel Martin Gaslac Gallardo

Dinâmica dos pequenos corpos de Netuno e o sistema Kepler-90 :

Trabalho de Pós Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Pós Graduação em FÍSICA da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em FÍSICA .

Orientadora: Prof^a Dr^a. Silvia Maria Giuliatti Winter

Guaratinguetá

2021

Gallardo, Daniel Martin Gaslac
G163d Dinâmica dos pequenos corpos de Netuno e o sistema Kepler-90 /
Daniel Martin Gaslac Gallardo – Guaratinguetá, 2021
144 f. : il.
Bibliografia: f. 126-131

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2021.
Orientadora: Prof^a Dr^a Silvia Maria Giuliatti Winter

1. Radiação solar. 2. Satélites Órbitas. 3. Planetas Órbitas.
4. Telescópios. I. Título.

CDU 551.521.1(043)

Luciana Máximo
Bibliotecária-CRB-8/3595

DANIEL MARTIN GASLAC GALLARDO

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: DOUTORADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof.ª. Dr.ª. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
Orientador - UNESP

participou por videoconferência



Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA
UNESP

participou por videoconferência



Prof. Dr. VALERIO CARRUBA
UNESP

participou por videoconferência



Prof. Dr. NELSON CALLEGARI JÚNIOR
IGCE / UNESP

participou por videoconferência



Prof. Dr. ELBERT EINSTEIN NEHRER MACAU
UNIFESP

participou por videoconferência

Dezembro de 2021

DADOS CURRICULARES

DANIEL MARTIN GASLAC GALLARDO

NASCIMENTO 09/11/1989 - La Victoria / Lima-Perú

FILIAÇÃO Celestino Gaslac Culqui
Ysabel Gallardo Suazo

2008 / 2013 Bacharelado em Física (Graduação)
Universidad del Callao

2014 / 2016 Mestrado em Física (Pós Graduação)
Universidade Estadual Paulista-UNESP

Esta tese é dedicada aos meus pais Celestino e Ysabel,
pelo apoio e conselhos dados..

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Ysabel e Celestino, que dignamente me apresentaram à importância da família e o caminho da honestidade e persistência. E à minha família pelo estímulo e paciência a mim transmitidos. A Prof^a. Silvia Giuliatti, meu orientadora, pela oportunidade de realizar este trabalho ao lado de alguém que inspira sabedoria; meu respeito e admiração pela sua serenidade, capacidade de análise do perfil de seus alunos, e pelo seu dom no ensino da ciência, inibindo sempre a vaidade em prol da simplicidade e eficiência. A realização de um projeto de pesquisa como este só foi possível com o apoio de vários colaboradores. Aos membros do grupo de dinâmica orbital e planetologia da FEG UNESP, sem este apoio esta luta seria mais complicada. Especialmente à Jady, Nilce, Patricia e Giuliano. Em especial aos professores Othon, Ernesto, Rafael e Julio pelos conselhos e amizade nestes quatro anos de doutorado que, direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma. O meu reconhecimento e gratidão. Aos amigos Alonso, Mariela, Angel, Alessandro e Rosana, os precursores de tudo, que exemplificam a ética e competência profissionais, com dedicação e aprimoramento contínuos e também pelo incentivo e oportunidade de convívio pessoal. Especialmente quero agradecer à Kelly, por conseguir me auxiliar neste último ano e que conseguiu, de alguma maneira, me fazer recuperar a motivação e inspiração que eu já havia perdido. Meus eternos agradecimentos a ela que, sem saber, me ajudou nos momentos mais difíceis.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

RESUMO

O sistema de anéis e satélites de Netuno foi descoberto (e o sistema de arcos de Netuno confirmado) durante a passagem da sonda espacial Voyager 2 em 1989 (SMITH et al., 1989). O sistema interno de Netuno possui um conjunto de sete satélites denominados Naiade, Thalassa, Despina, Galatea, Larissa, Hipocampo, Proteus e Tritão, além dos anéis Galle, Le Verrier, Lassell, Arago, anel coorbital de Galatea, e Adams. Neste trabalho analisamos a estabilidade da região interna do sistema de Netuno através dos mapas de difusão para um conjunto de partículas-teste sob a influência gravitacional de todos os satélites do sistema interno. Forças dissipativas como a pressão de radiação solar (para partículas micrométricas) e o arrasto devido ao plasma serão incluídas no estudo dos anéis. As partículas estarão inicialmente em órbitas excêntricas, onde serão assumidos os valores de excentricidade geométrica no intervalo de 0 a 0.04. O anel de Galle é o mais próximo ao planeta e está longe dos satélites, sendo localizado em uma região estável. Enquanto a borda interna do anel de Lassell (com largura igual a 4000 km) apresenta uma região estável dependente do valor da excentricidade. O mesmo ocorre com os anéis Le Verrier e Adams, esses anéis são estáveis para pequenos valores de excentricidade. Esses anéis podem sobreviver à perturbação dos satélites próximos para valores de $e < 0.012$. Quando a força de radiação solar é considerada, os anéis compostos por partículas de $1 \mu\text{m}$ apresentam um tempo de vida de 10^4 anos, enquanto as partículas maiores ($10 \mu\text{m}$ de raio) podem sobreviver até 10^5 anos.

Observações feitas pelo Telescópio Kepler durante quatro anos mostraram que existem sistemas multiplanetários, cujos planetas estão distribuídos de forma similar ao Sistema Solar (BORUCKI et al., 2010; BORUCKI et al., 2011). O sistema Kepler-90 apresenta um conjunto formado por oito planetas b , c , i , d , e , f , g e h , em distância crescente da estrela. Os planetas g e h são similares aos gigantes gasosos, enquanto os planetas d , e e f são similares às superterras. A configuração do sistema é similar ao Sistema Solar, pequenos planetas estão próximos e os maiores estão distantes da estrela, embora o planeta externo tenha uma distância orbital igual a 1 UA. Através da análise de frequência e simulações numéricas de longo período, analisamos a estabilidade das órbitas dos planetas para um conjunto de parâmetros, como a massa, o semieixo maior e excentricidade. Realizamos simulações numéricas para analisar três diferentes intervalos de excentricidade: o primeiro intervalo é de 0 a 1×10^{-3} , o segundo intervalo é de 1×10^{-3} a 1×10^{-2} e o terceiro intervalo é de 1×10^{-2} a 1×10^{-1} . Os valores de excentricidade, argumento do pericentro, longitude do nodo ascendente e longitude média foram escolhidos aleatoriamente em cada intervalo de excentricidade. Os resultados mostram que os planetas com excentricidades que pertencem aos dois primeiros intervalos são estáveis, enquanto a maioria dos planetas com excentricidade 1×10^{-2} a 1×10^{-1} são ejetados do sistema. A variação da excentricidade dos planetas nos dois primeiros intervalos indicam que o planeta h é dominante, sendo importante para a estabilidade do sistema Kepler-90. Identificamos as ressonâncias de movimento médio 5:4 e 3:2 dos planetas b e c e g e h , respectivamente. Simulamos numericamente um conjunto de partículas nos "sistemas Kepler-90", através do mapa de difusão, onde identificamos quatro regiões estáveis entre as órbitas dos planetas c - i , i - d , d - e , e além da órbita do planeta h sendo identificadas como regiões 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Os platôs associados às ressonâncias são identificadas com o planeta i e o planeta h . Os resultados mostraram que as partículas-teste estão em ressonância de movimento médio

2:3, 5:6, 7:8 e 9:10 com o planeta i , e 1:2, 3:4, 3:5, 3:7 e 3:8 com planeta h .

PALAVRAS-CHAVE: Mapa de difusão. Pressão de radiação Solar. Sistema de Netuno. Kepler-90.

ABSTRACT

Neptune rings and small satellites system was discovered during the passage of Voyager 2 in 1989. The Neptune inner system has a cluster of seven satellites Naiade, Thalassa, Despina, Galatea, Larissa, Hippocampus, Proteus, and Triton and the rings Galle, Le Verrier, Lassell, Arago, Galatea's coorbital, and Adams. In this work we analyze the stability of the inner region of the Neptune system through diffusion maps for a set of test particles under the gravitational influence of all satellites. Dissipative forces such as the solar radiation force (for micrometric particles) and the drag due to the plasma are included in the study of the rings. The particles in both cases are initially in eccentricity orbits, the geometric eccentricity values range in the interval from 0 to 0.04. The Galle ring, which is close to the planet and away from the inner satellites, is located in a stable region. Whereas, the inner edge of the Lassell ring (width of about 4000 km) is in a stable region that depends on the value of the eccentricity. Le Verrier and Adams rings also are stable for small values of the eccentricity. These rings can survive for the perturbation of the satellites for values of $e < 0.012$. When the solar radiation force is included, rings composed of $1 \mu\text{m}$ particles have a lifetime of 10^4 years, while larger particles ($10 \mu\text{m}$ radius) can survive up to 10^5 years.

Observations performed by the Kepler Telescope over four years have shown that multi-planetary systems exist, whose planets are distributed similar to our Solar System (BORUCKI et al., 2010; BORUCKI et al., 2011). The Kepler-90 system has eight planets b, c, i, d, e, f, g and h , in increasing distance from the star. Planets g and h are similar to the gas giants, while planets d, e and f are similar to super-Earths. This system is similar to the Solar System, small planets are close and larger ones are away from the star, although the outer planet has an orbital distance equals to 1 UA. The frequency map analysis and long period numerical simulations are used to analyze the stability of the planets' orbits, for a set of parameters such as, the mass, semi-major axis, and eccentricity. We perform numerical simulations to analyze three different intervals of eccentricity: the first interval is from 0 to 1×10^{-3} , the second interval is from 1×10^{-3} to 1×10^{-2} , and the third interval is from 1×10^{-2} to 1×10^{-1} . The values of the eccentricity, argument of pericenter, longitude of the ascending node, and mean longitude were chosen randomly in each eccentricity interval. The results show that the planets with eccentricities belonged to the first two intervals are stable, while most of the planets with eccentricities 1×10^{-2} to 1×10^{-1} are ejected from the system. The eccentricity variation of the planets in the first two intervals indicate that the planet h is dominant in the systems being important for the stability of the Kepler-90 system. We identify the 5:4 and 3:2 mean motion resonances between planets b and c and g and h , respectively. We numerically simulated a set of particles in the "Kepler-90 systems", through diffusion maps. We identify four stable regions between the orbits of planets $c-i, i-d, d-e$, and beyond the orbit of planet h being identified as regions 1, 2, 3 and 4, respectively. The plateaus associated with the resonances are identified with planet i and planet h . The results showed that the test particles are in mean motion resonances 2:3, 5:6, 7:8 and 9:10 with planet i , and 1:2, 3:4, 3:5, 3:7 and 3:8 with planet h .

KEYWORDS: Diffusion map. Pressure Solar radiation. Netuno inner system. Kepler-90.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Os resultados apresentados na Figura foram extraídos do artigo de Robutel e Laskar (2001). A figura mostra a curva de frequência, semieixo maior inicial vs $\frac{n}{n_8}$ das partículas com excentricidade igual a 0.15. Os platôs correspondem as RMMs com o planeta Netuno.	28
Figura 2	Esboço da localização dos satélites internos e a Tritão e os anéis do sistema de Netuno. Observamos que os maiores anéis, o Anel Galle e o Lassell, apresentam uma largura de ~ 2000 km e ~ 4000 km, respectivamente.	30
Figura 3	Arcos do anel Adams (Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem).	31
Figura 4	Evolução temporal dos elementos geométricos a , e e I dos satélites internos de Netuno quando não é considerado o satélite Tritão no sistema. O tempo de integração numérica foi de $\sim 1.2 \times 10^5$ anos. Na figura (a), (b) e (c) os satélites são identificados com os seguintes cores: roxo (Naiade), verde (Thalassa), azul-celeste (Despina), Laranja (Galatea), amarelo (Larissa), azul (Hipocampo) e vermelho (Proteus).	36
Figura 5	Evolução temporal dos elementos geométricos a , e e I dos satélites internos de Netuno incluindo o satélite Tritão no sistema. O tempo de integração numérica foi de $\sim 1.2 \times 10^5$ anos. Na figura (a), (b) e (c) os satélites são identificados com os seguintes cores: roxo (Naiade), verde (Thalassa), azul-celeste (Despina), Laranja (Galatea), amarelo (Larissa), azul (Hipocampo) e vermelho (Proteus).	37
Figura 6	A figura apresenta o zoom da evolução temporal da inclinação geométrica dos satélites internos de Netuno incluindo o Tritão, no intervalo de tempo de 49.1×10^3 anos a 49.3×10^3 anos. Na figura (a), (b) e (c) os satélites são identificados com os seguintes cores: roxo (Naiade), verde (Thalassa), azul-celeste (Despina), Laranja (Galatea), amarelo (Larissa), azul (Hipocampo) e vermelho (Proteus).	38
Figura 7	Mapa de análise de frequência na região do anel Galle, do satélite Naiade. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cuja nomenclatura são mostradas na parte superior. Os números localizados na parte superior apresentados em cor preta correspondem as RMMs de Galateia e a partícula. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Naiade. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas.	41

- Figura 8 Mapa de difusão dos anéis Le Verrier-Lassell-Arago e os satélites Thalassa e Despina. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor preto, azul-preto, laranja, marrom e azul pertencem as RMMs dos satélites Naiade, Thalassa, Galatea, Larissa, Proteus, e a partícula, respectivamente. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Thalassa e Despina. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas. 42
- Figura 9 Mapa de difusão dos anéis coorbital de Galatea e Adams e o satélite Galatea. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor laranja e marrom pertencem as RMMs dos satélites Galatea, Larissa e a partícula, respectivamente. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Galatea. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas. 43
- Figura 10 Curva de frequência das partículas teste para todos os valores de excentricidade. Os platôs, indicados por uma flecha, representam as RMMs do satélite Galatea e a partícula. 44
- Figura 11 Mapa de difusão do satélite Larissa e o conjunto de partículas teste. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor preto, azul-preto, laranja e marrom pertencem as RMMs dos satélites Naiade, Thalassa, Galatea, Larissa e a partícula, respectivamente. A RMM de Despina e a partícula é identifica com o número 1:2d. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Larissa. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região corresponde às partículas ejetadas. . . . 45

- Figura 12 Mapa de difusão do satélite Hipocampo. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor laranja, marrom, verde e azul pertencem as RMMs dos satélites, Galatea, Larissa, Hipocampo, Proteus, e a partícula, respectivamente. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Hipocampo. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas. 46
- Figura 13 Mapa de difusão do satélite Proteus. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor azul pertencem as RMMs do satélite Proteus e a partícula. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Proteus. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou as partículas ejetadas do sistema. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas. 47
- Figura 14 Curva de frequência na região do satélite Proteus. Os platôs, indicados por uma flecha, representam as RMMs do satélite Proteus e a partícula. 47
- Figura 15 A figura mostra o tempo de difusão do sistema interno de Netuno no intervalo de $0.6D_{AA}$ a $2.2D_{AA}$. Os círculos em preto indicam a localização dos satélites. . . 48
- Figura 16 Tempo de difusão dos anéis do sistema de Netuno. Os pontos em cor azul, preto, vermelho, roxa, verde e marrom indicam o valor médio t_D para cada valor de excentricidade (ver a figura da esquerda e direita). Na figura da esquerda mostra o decaimento do valor médio do tempo de difusão do anel Le Verrier (cor vermelha), no tanto, o anel Galle apresenta um comportamento quase constante e o anel Lassell apresenta uma variação de t_D , decaindo aproximadamente uma ordem de grandeza. A figura da direita mostra o decaimento do valor médio de t_D dos anéis Adams e Arago, no tanto, o anel Galatea apresenta um valor médio de t_D de $\sim 10^5$ anos. 49

Figura 17	Mapa de difusão do anel Le Verrier (no intervalo de semi-eixo maior geométrico de $0.84459D_{AA}$ a $0.84619D_{AA}$) e a borda do anel Lassell localizado no semi-eixo maior geométrico igual a $0.8453D_{AA}$. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números são as RMM de Despina e a partícula. A linha inclinada é o raio do pericentro de Despina. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas.	50
Figura 18	Curva de frequência com excentricidade iguais a 0 e 0.002. Os platôs, indicados por uma flecha, representam as RMMs do satélite Despina e a partícula.	51
Figura 19	Curva de frequência para partículas teste com excentricidade 0.004 a 0.01. Os platôs, indicados por uma zeta, representam as RMMs do satélite Despina e a partícula.	52
Figura 20	Evolução temporal do ângulo ressonante $\phi_{53:52}$ para diferentes valores de excentricidade.	52
Figura 21	Mapa de difusão a vs λ do anel Le Verrier. A figura mostra a dinâmica global do anel Le Verrier (no intervalo de semi-eixo maior geométrico de $0.84459D_{AA}$ a $0.84619D_{AA}$) e a borda do anel Lassell para as partículas com um valor de excentricidade geométrico inicial igual a 1×10^{-4} . A linha tracejada vertical localizada no semieixo maior $0.84459D_{AA}$ indicam a borda do anel Le Verrier e a linha tracejada vertical localizada no semieixo maior $0.8453D_{AA}$ indica a borda do anel Lassell. Os lóbulos de cor verde representam às partículas que estão em RMM. Os números da parte superior da figura indicam a RMM de Despina e a partícula.	53
Figura 22	Curva de frequência do Anel Le Verrier para partículas com excentricidade igual a 1×10^{-4} . Os platôs, indicados pelos números, representam as RMMs do satélite Despina e a partícula.	54
Figura 23	A figura mostra a intensidade das forças que atuam no sistema de anéis de Netuno em função da distância. As localizações dos satélites e dos anéis são exibidos na figura como linhas tracejadas verticais. A curva referente a J_2 está representada como uma linha. A linha tracejada inclinada, localizada no médio da figura, representa o efeito gravitacional de Tritão e a linha tracejada horizontal representa o efeito da pressão de radiação solar.	55
Figura 24	Variação no tempo da excentricidade de uma partícula representativa de cada anel. O nome do anel é mostrado na parte superior de cada figura. Cada sub-figura possui dois gráficos, sem e com os efeitos da pressão da radiação solar. Os efeitos da pressão da radiação solar são responsáveis pelo pequeno aumento na excentricidade da partícula de $1\mu\text{m}$	56

Figura 25	Grade a vs R , satélites hipotéticos no sistema de Netuno, a paleta de cores indica o tempo de vida dos satélites hipotéticos.	59
Figura 26	Grade a vs R , satélites hipotéticos no sistema de Netuno.	60
Figura 27	Esboço da localização dos planetas do sistema Kepler-90. A figura mostra o tamanho do raio de cada planeta (R_p).	63
Figura 28	A figura mostra a estabilidade dos planetas nos três diferentes intervalos de excentricidade para os diferentes sistemas propostos do sistema Kepler-90. Cada símbolo apresentado na figura indica o Log D obtido para cada planeta. O Log D indica a intensidade da regularidade ou irregularidade da órbita dos planetas considerando que: se o Log D está suficientemente próximo à zero o planeta possuirá uma órbita irregular. Assumimos que os planetas com valores de Log $D < -3$ apresentam órbitas regulares, e caso contrário, os planetas apresentam órbitas irregulares.	70
Figura 29	As figuras mostram a variação do valor mínimo, máximo e a média da excentricidade dos planetas nos três intervalos de excentricidade. O primeiro gráfico está relacionado ao primeiro intervalo de excentricidade, a Figura (b) e a Figura (c) estão relacionadas ao segundo e terceiro intervalo de excentricidade, respectivamente.	71
Figura 30	Primeiro intervalo de excentricidade: os planetas apresentam diferentes valores de Log D cuja intensidade pode ser observada nas subfiguras. Cada subfigura é identificada para cada planeta em cada sistema proposto.	72
Figura 31	Os planetas que estão localizados no segundo intervalo de excentricidade apresentam gráficos similares aos observados na Figura 30, com exceção do planeta c	73
Figura 32	As figuras mostram o valor mínimo, máximo e a média de Log D dos sistemas propostos nos dois primeiros intervalos de excentricidade. A Figura (a) está relacionada ao primeiro intervalo e a Figura (b) está relacionada ao segundo intervalo de excentricidade. As partes inferiores e superiores das linhas verticais apresentam o nome do planeta que obtiveram os valores mínimos e máximos de Log D	75
Figura 33	Os valores mínimos, máximos e a média do Log D dos sistemas nominais que sobreviveram no terceiro intervalo de excentricidade.	76

- Figura 34 Os histogramas mostram os planetas com órbitas mais sensíveis, o $\text{Log } D_{max}$ representa os planetas com órbitas regulares e o $\text{Log } D_{min}$ representa os planetas com órbitas que podem ser regulares ou irregulares, dependendo do tempo de integração. A Figura (a) apresenta os planetas do primeiro intervalo de excentricidade, a Figura (b) contém os planetas do segundo intervalo de excentricidade, a Figura (c) mostra a porcentagem dos planetas do primeiro intervalo de excentricidade que apresentam $\text{Log } D_{min}$ e $\text{Log } D_{max}$ quando o tempo de integração é de $10^5 T_h$, e finalmente a Figura (d) é similar à Figura (c) mas para o segundo intervalo de excentricidade. 77
- Figura 35 As figuras mostram a evolução temporal dos ângulos $\phi_{5:4}$ e $\phi_{3:2}$ de um sistema selecionado do primeiro intervalo de excentricidade. A Figura(a) e a Figura(c) são um zoom no intervalo de tempo de 0 a 190 anos do ângulo ressonante $\phi_{5:4}$. Figura (b) e Figura (d) são a evolução temporal do ângulo ressonante $\phi_{5:4}$ para um tempo total de 1.2×10^4 anos. Os ângulos ressonantes $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ seguem a evolução da equação $5\lambda_c - 4\lambda_b - \varpi_b$ (Figura (a) e Figura (b)), e $5\lambda_c - 4\lambda_b - \varpi_c$ (Figura (c) e Figura (d)), respectivamente. Os gráficos (e) e (g) são um zoom no intervalo de tempo de 0 a 500 anos para o ângulo $\phi_{3:2}$. Figura (f) e Figura (h) mostram a evolução do ângulo $\phi_{3:2}$ para um tempo total de 1.2×10^4 anos. Figura (e) e Figura (f) mostra o comportamento de $\phi_{3:2}^{(1)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_g$. Figura (g) e Figura (h) seguem a evolução da equação $\phi_{3:2}^{(2)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_h$ 80
- Figura 36 Os gráficos correspondem à evolução temporal dos ângulos $\phi_{5:4}$ e $\phi_{3:2}$ de outro sistema selecionado do primeiro intervalo de excentricidade. Apresentamos um zoom do comportamento dos ângulos nos mesmos intervalos de tempo que na Figura 35 para os ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ (Figura (a)), $\phi_{5:4}^{(2)}$ (Figura (c)), $\phi_{3:2}^{(1)}$ (Figura (e)) e $\phi_{3:2}^{(2)}$ (Figura (g)). Os ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$, $\phi_{5:4}^{(2)}$, $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ seguem as mesmas equações que foram apresentadas na Figura 35. A Figura (d) mostra o comportamento intermitente por escala de tempo de curto e longo período para o ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$ 81
- Figura 37 Os ângulos ressonantes envolvidos nos gráficos para um sistema do segundo intervalo de excentricidade. Os gráficos apresentados são similares aos da Figura 36. A descrição do comportamento dos ângulos ressonantes são apresentados no texto. 84
- Figura 38 Os gráficos (a) e (c) são um zoom no intervalo de tempo de 0 a 500 anos do ângulo ressonante $\phi_{3:2}$. A Figura (b) e Figura (d) mostram a evolução do ângulo ressonante $\phi_{3:2}$ para um tempo total de 1.2×10^4 anos. Os ângulos ressonantes seguem as equações $\phi_{3:2}^{(1)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_g$ (Figura (a) e Figura (b)), e $\phi_{3:2}^{(2)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_h$ (Figura (c) e Figura (d)), para o par planetário $g-h$ 85

Figura 39	Os mapas de difusão no espaço de fase a vs e correspondem aos sistemas do primeiro intervalo de excentricidade. Os resultados apresentados nas Figura (a) e Figura (b) mostram a dinâmica geral dos dois sistemas K90-1a e K90-2a. Cada retângulo é plotado e centrado nas condições iniciais das partículas teste. A paleta de cores indica os valores de $\text{Log } D$. As regiões de cor azul correspondem a regiões estáveis, se a cor é vermelha as regiões serão instáveis. As zonas brancas em ambas figuras corresponderam a partículas ejetadas dos sistemas ou que sofreram colisão com os planetas, ou com a estrela.	92
Figura 40	A figura mostra a dinâmica global dos dois sistemas nomeados K90-3a e K90-4a do primeiro intervalo de excentricidade (Figura (c) e Figura (d)). As figuras são similares à Figura 39. As zonas brancas em ambas figuras corresponderam as partículas ejetadas dos sistemas ou que sofreram colisão com os planetas, ou com a estrela.	93
Figura 41	A figura mostra o mapa de difusão no espaço de fase a vs e para o sistema K90-5a.	94
Figura 42	O histograma indica a porcentagem do número de partículas teste que colidem com os planetas ou com o corpo central dos sistemas K90-1a até K90-5a, e também as partículas que são ejetadas de cada sistema. Esses sistemas pertencem ao primeiro intervalo de excentricidade. Podemos identificar cada sistemas através da paleta de cores.	95
Figura 43	Os resultados apresentados na figura correspondem aos mapas de difusão no espaço de fase a vs e dos sistemas K90-1b e K90-2b, pertencentes ao segundo intervalo de excentricidade. O regime de cores indica se uma órbita é regular ou irregular no sistema proposto. As linhas tracejadas são as linhas de colisão de todos os planetas. As zonas brancas no mapa representam aquelas partículas teste que sofreram ejeção ou colidiram com os planetas ou com o corpo central.	97
Figura 44	Mapas de difusão no espaço de fase a vs e dos sistemas K90-3b e K90-4b no segundo intervalo de excentricidade. Figura (h) e Figura (i) seguem as mesmas regras indicadas na Figura 43. As zonas com cor azul são regiões estáveis e as zonas de cor vermelha são regiões instáveis.	98
Figura 45	Mapa de difusão no espaço de fase a vs e para o sistema nominal K90-5b. . . .	99
Figura 46	O histograma indica a porcentagem do número de partículas teste que colidem com os planetas ou com o corpo central dos sistemas K90-1b até K90-5b, e também as partículas que são ejetadas de cada sistema. Esses sistemas pertencem ao segundo intervalo de excentricidade. Podemos identificar cada sistemas através da paleta de cores.	100
Figura 47	Apresentamos o comportamento do $\text{Log } (t_D)_{\text{médio}}$ das partículas que sobreviveram o tempo total de integração numérica para cada valor de excentricidade. As quatro regiões estáveis são apresentadas nas Figura (a) (região 1), Figura (b) (região 2), Figura (c) (região 3) e Figura (d) (região 4) que apareceram nos sistemas do primeiro intervalo de excentricidade.	101

- Figura 48 Figura (a), Figura (b), Figura (c) e Figura (d) mostram o valor médio do tempo de difusão das partículas que apresentam órbitas regulares e irregulares nas quatro regiões estáveis, as quais são caracterizadas pelo $\log_{10} (t_D)_{médio}$ para cada valor de excentricidade. As condições iniciais dos planetas nos sistemas pertencem ao segundo intervalo de excentricidade. 102
- Figura 49 Mapa de difusão no espaço de fase a vs e entre a órbita do planeta c e 0.1555 UA. Os elementos orbitais dos planetas correspondem ao sistema K90-1b que pertence ao segundo intervalo de excentricidade. As cores correspondem à paleta de cores que segue os valores de $\text{Log } D$. O gráfico segue o mesmo regime mostrado na Figura 45. A linha tracejada corresponde ao raio do pericentro do planeta c e o raio de apocentro do planeta i 104
- Figura 50 Mapa de difusão no espaço de fase a vs e entre as órbitas das partículas localizadas no intervalo de semieixo maior 0.1556 UA até 0.226 UA. As cores correspondem à paleta de cores que seguem os valores de $\text{Log } D$. A linha tracejada corresponde aos raios do pericentro e apocentro do planeta i 105
- Figura 51 Os ângulos ressonantes $\varphi_{1:2b}^{(1)}$, $\varphi_{1:2b}^{(2)}$ (figuras do lado esquerdo) libram em torno de zero e 180° com amplitudes constantes, respectivamente. Os ângulos ressonantes $\varphi_{1:2c}^{(1)}$ e $\varphi_{1:2c}^{(2)}$, apresentados na figura do lado direito, libra e circula e libra, respectivamente. 106
- Figura 52 Apresentamos a evolução temporal dos ângulos ressonantes $\varphi_{5:4i}^{(1)}$, $\varphi_{5:4i}^{(2)}$ que libram em torno de zero e 240° , respectivamente. De mesmo modo, a figura a direita apresenta o comportamento temporal dos ângulos ressonantes $\varphi_{9:7i}^{(1)}$, $\varphi_{9:7i}^{(2)}$ que libram em torno de 180° e 300° , respectivamente. 106
- Figura 53 Apresentamos a evolução temporal dos ângulos ressonantes $\varphi_{3:2i}^{(1)}$, $\varphi_{3:2b}^{(2)}$, $\varphi_{4:3i}^{(1)}$ e $\varphi_{4:3i}^{(2)}$ cujas amplitudes são maiores que as amplitudes das outras partículas que libram nos ângulos ressonantes apresentados anteriormente. Note que o ângulo ressonante $\varphi_{3:2i}^{(1)}$ e $\varphi_{3:2i}^{(2)}$ (figuras a esquerda) libram em torno de zero e 240° , respectivamente. No caso dos ângulos ressonantes $\varphi_{4:3i}^{(1)}$ e $\varphi_{4:3i}^{(2)}$ (figuras a direita) também libram em torno de zero e 240° , respectivamente. 107
- Figura 54 Os ângulos ressonantes $\varphi_{9:8i}^{(1)}$ e $\varphi_{9:8i}^{(2)}$ libram em torno de 180° e 60° , respectivamente. Isto também ocorre para os ângulos ressonantes $\varphi_{10:9i}^{(1)}$ e $\varphi_{10:9i}^{(2)}$. Os 4 ângulos ressonantes $\varphi_{9:8i}^{(1)}$, $\varphi_{9:8i}^{(2)}$, $\varphi_{10:9i}^{(1)}$ e $\varphi_{10:9i}^{(2)}$ apresentam amplitudes de $\sim 60^\circ$. 107
- Figura 55 Curva de frequência na região do planeta h para o primeiro intervalo de excentricidade. Cada figura representa um "sistema Kepler-90". Plotamos a razão entre o movimento médio das partículas teste (n_p) e o movimento médio do planeta h vs o semieixo maior inicial das partículas teste. Os platôs correspondem às RMM localizadas na curva correspondendo as ressonâncias 1:1 e 3:4 com o planeta h , localizadas nos semieixos maiores igual a 0.996 UA e 1.22 UA, respectivamente. Todos os valores de excentricidade foram incluídos na figura. 109

Figura 56	Curva de frequência na região do planeta h para o segundo intervalo de excentricidade. A curva de frequência está definida de acordo com o indicado na Figura 55. Os platôs foram identificados nos sistemas para as partículas em RMM 3:4 com o planeta h . Observamos que as partículas em RMM 1:1 com o planeta h não estão sempre no mesmo intervalo de excentricidade. Todos os valores de excentricidade foram incluídos na figura.	110
Figura 57	Mapa de difusão no espaço de fase a vs e além da órbita do planeta h . Os dados dos planetas correspondem aos valores indicados no segundo intervalo de excentricidade. O gráfico segue o mesmo regime sinalado na Figura 45 para o tratamento das partículas teste. As linhas tracejadas são as linhas dos raios do pericentro do planeta g e do planeta h	111
Figura 58	Os resultados apresentados nessa figura mostram o comportamento da curva de frequência além da órbita do planeta h , cujos dados dos elementos orbitais dos planetas foram extraídos do segundo intervalo de excentricidade. Plotamos a razão entre o movimento médio das partículas teste (n_p) e o movimento médio do planeta h vs o semieixo maior inicial das partículas. Os platôs apareceram no intervalo de excentricidade de 0 a 0.06 correspondendo às RMMs 3:5 e 1:2 com o planeta h	112
Figura 59	As curvas de frequência no intervalo de excentricidade das partículas de 0.08 a 0.30. O regime que cumpre a curva de frequência é similar ao indicado na Figura 58. Os platôs correspondem as RMMs 3:5 e 1:2 com o planeta h . Esses platôs podem ser visualizados em todas as sub figuras da Figura 59.	113
Figura 60	Os ângulos ressonantes $\varphi_{1:2h}$, $\varphi_{3:4h}$ e $\varphi_{3:5h}$ que aparecem na Figura 59 libram em torno de 180° , com amplitudes de 130° , 60° e 100° , respectivamente. As amplitudes são constantes até o tempo final da integração numérica de 9×10^3 anos.	114
Figura 61	O histograma apresenta a quantidade de asteroides localizados no Cinturão Principal em relação ao semieixo maior no intervalo de 1.5 UA a 4.5 UA. A nomenclatura das ressonâncias de movimento médio estão localizadas na parte superior da figura. As lacunas podem ser visualizadas na figura.	115
Figura 62	Mapa de difusão no espaço fase a vs e . A nomenclatura das RMMs está localizada na parte superior das figuras e as RMMs são identificadas com linhas tracejadas verticais. As linhas tracejadas inclinadas mostram os raios do pericentro do planeta b e do apocentro do planeta i	116
Figura 63	Plotamos os mapas, semieixo maior vs excentricidade (Figura (a) e (b)) e semi-eixo maior vs inclinação (Figura (c) e (d)) dos planetas menores do Cinturão de Kuiper, através dos dados observacionais extraídos da lista de objetos trans-netunianos da website Center (2021a).	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros físicos do planeta Netuno	29
Tabela 2 – Parâmetros físicos dos satélites internos próximos ao planeta Netuno	29
Tabela 3 – Parâmetros dos anéis de Netuno	31
Tabela 4 – As componentes da posição (x, y, z) e velocidade (v_x, v_y, v_z) dos satélites de Netuno. Esses valores foram extraídos de NASA (2017c) para a data 2017-02-01.	35
Tabela 5 – Elementos geométricos dos satélites do sistema interno de Netuno obtidos da Tabela 3.1.	35
Tabela 6 – Valores numéricos das frequências principais dos satélites obtidos através de Šidlichovský e Nesvorný (1997).	50
Tabela 7 – Tempo de vida das partículas de $1\mu\text{m}$ e $10\mu\text{m}$, devido ao efeito do arrasto de Poynting-Robertson	57
Tabela 8 – Tempo de vida das partículas de $1\mu\text{m}$ e $10\mu\text{m}$, devido ao efeito do arrasto por plasma.	57
Tabela 9 – Variação da excentricidade geométrica em função do tempo dos satélites internos, cujo tempo de integração é de $\sim 10^5$ anos	58
Tabela 10 – Parâmetros físicos dos planetas e a estrela do sistema Kepler-90. Os valores foram extraídos de Cabrera et al. (2014).	64
Tabela 11 – Dados para a equação (3) para os planetas com valores de semieixo maior ≤ 0.1 UA e para valores de $a > 0.1$ UA. As variáveis M_0 , b , w e p são constantes.	65
Tabela 12 – Parâmetros físicos dos planetas e a estrela do sistema Kepler-90. Os valores foram extraídos de Contreras e Boley (2018), Shallue e Vanderburg (2018).	66
Tabela 13 – Raios dos planetas que foram estimadas por Robnik e Seljak (2020). Calculamos os valores da massa dos planetas utilizando o método de raio-massa definido na equação (1).	66
Tabela 14 – Semieixo maior, excentricidade e inclinação dos planetas do sistema Kepler-90. Os valores foram extraídos de Contreras e Boley (2018) e Shallue e Vanderburg (2018).	67
Tabela 15 – Porcentagens das ressonâncias de movimento médio e sob o efeito das ressonâncias entre os planetas b e c , e g e h , no primeiro intervalo de excentricidade.	79
Tabela 16 – Similar à Tabela 15 para o segundo intervalo de excentricidade.	79
Tabela 17 – Largura da região coorbital dos planetas.	95
Tabela 18 – Elementos orbitais dos sistemas nominais selecionados para o sistema Kepler-90 tomados do primeiro intervalo de excentricidade.	142
Tabela 19 – Elementos orbitais dos sistemas nominais selecionados para o sistema Kepler-90 tomados do segundo intervalo de excentricidade.	143

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
2	MÉTODO DE ANÁLISE DE FREQUÊNCIA	25
2.1	MAPA DE DIFUSÃO	26
2.2	DIFUSÃO	27
2.3	RESSONÂNCIA DE MOVIMENTOS MÉDIOS (RMM)	28
3	SISTEMA DE NETUNO	29
3.1	NETUNO, ANÉIS E SATÉLITES INTERNOS A TRITÃO	29
3.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	34
3.3	EVOLUÇÃO ORBITAL DOS SATÉLITES DO SISTEMA INTERNO DE NETUNO	36
3.4	ESTUDO DA REGIÃO INTERNA DO SISTEMA DE NETUNO	39
3.4.1	Dinâmica do sistema interno	39
3.4.1.1	Região do anel Galle e satélite Naiade	41
3.4.1.2	Região dos anéis Le Verrier-Lassell-Arago e os satélites Thalassa e Despina . . .	42
3.4.1.3	Região do anel coorbital de Galatea, Adams e os satélites Galatea e Larissa	43
3.4.1.4	Região dos satélites Hipocampo e Proteus	45
3.5	TEMPO DE DIFUSÃO DO SISTEMA GLOBAL	48
3.6	RMM NO ANEL LE VERRIER	51
3.7	FORÇAS DISSIPATIVAS NOS ANÉIS DE NETUNO	55
3.8	SATÉLITES HIPOTÉTICOS NO SISTEMA INTERNO DE NETUNO	58
3.9	DISCUSSÃO DO CAPÍTULO	61
4	SISTEMA KEPLER-90	62
4.1	ESTUDO DINÂMICO DO SISTEMA KEPLER-90	64
4.1.1	Estabilidade dos planetas	69
4.1.2	RMM dos planetas	79
4.2	DISCUSSÃO DO CAPÍTULO	88
5	ANÁLISE DE UM CONJUNTO DE PARTÍCULAS TESTE NO SISTEMA KEPLER-90	90
5.1	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	91
5.2	RMM ENTRE AS ÓRBITAS DOS PLANETAS C E I	104
5.3	RMM ALÉM DA ÓRBITA DO PLANETA H	108
5.3.1	Dinâmica das partículas teste além da órbita do planeta h	111
5.4	ESTRUTURA DAS REGIÕES 1 E 4 DO SISTEMA KEPLER-90	114
5.5	DISCUSSÕES DO CAPÍTULO	120

6	DISCUSSÃO GERAL	122
	REFERÊNCIAS	126
	APÊNDICE A – ALGORITMO FMFT	132
A.1	ALGORITMO MFT	132
A.2	ALGORITMO FMFT	135
	APÊNDICE B – ELEMENTOS GEOMÉTRICOS	137
B.1	VETOR POSIÇÃO PARA ELEMENTOS GEOMÉTRICOS	138
B.2	ELEMENTOS GEOMÉTRICOS PARA VETOR POSIÇÃO	140
	APÊNDICE C – ELEMENTOS ORBITAIS DOS SISTEMAS NOMINAIS .	142
	ANEXO A – ARTIGO PUBLICADO	144

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos dois sistemas diferentes, a região interna do sistema de Netuno e o sistema Kepler-90.

Netuno, um planeta gasoso, é o último planeta do Sistema Solar, sendo o menor planeta entre os outros planetas gigantes. As sondas Voyager trouxeram descobertas e informações importantes sobre os anéis de Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Lançada em 20 de agosto de 1977, a missão Voyager 2 teve como objetivo aproximar-se dos planetas gigantes Urano e Netuno e extrair a maior quantidade de informação dos planetas e seus satélites.

Após a descoberta dos seis satélites internos e anéis de Netuno em 1989 pela sonda espacial Voyager 2 (SMITH et al., 1989), foi descoberto outro satélite interno chamado Hipocampo. Através do Telescópio Espacial Hubble foi possível obter melhores imagens do sistema interno de Netuno. Showalter et al. (2013) descobriram um novo satélite através do Telescópio Espacial em 2013, inicialmente denominado S/N2004 N1 e agora é conhecido como o satélite Hipocampo (SHOWALTER et al., 2019). Esse pequeno satélite orbita entre os satélites Larissa e Proteus.

É importante ressaltar que a descoberta desses satélites Naiade, Thalassa, Despina, Galatea, Larissa, Hipocampo e Proteus e os anéis planetários Galle, Le Verrier, Lasell, Arago, anel coorbital de Galatea, e o anel Adams no sistema interno de Netuno, reforça a importância de se ter mais informação de regiões estáveis que existem no sistema, como também o comportamento geral das órbitas das partículas dos anéis.

Miner, Wessen e Cuzzi (2007) sugeriram que o satélite Despina aparentemente não afeta gravitacionalmente o anel Le Verrier, apesar de que a ressonância de Lindblad 53:52 está localizada no centro do anel Le Verrier. Eles concluíram que a falta de não-homogeneidade azimutal ou estrutura radial pode excluir os efeitos gravitacionais do satélite Despina. Pater et al. (2018) mostraram que o brilho dos anéis Le Verrier e Adams provavelmente apresentam partículas com propriedades físicas similares.

Showalter et al. (2019) estimaram os elementos orbitais dos sete satélites, sendo incluído também o satélite Tritão, através de dados extraídos do Telescópio Espacial Hubble. Eles sugeriram que o satélite Hipocampo é produto de uma colisão de um corpo externo com o satélite Proteus, sendo Hipocampo um fragmento desse evento catastrófico. Brozović et al. (2019) estudaram a estabilidade orbital dos satélites internos identificando a ressonância de movimentos médios $73:69$ entre os satélites Naiade e Thalassa ($73\lambda_{Thalassa} - 69\lambda_{Naiade} - 4\Omega_{Naiade}$). Eles sugeriram que os satélites Hipocampo e Proteus estão em ressonância de movimentos médios 11:13.

Após a descoberta do primeiro exoplaneta por Mayor e Queloz (1995), muitos exoplanetas e sistemas multi-planetários foram descobertos através de diversas técnicas e Telescópios, tal como o Telescópio Espacial Kepler. Observações feitas pelo Telescópio Kepler durante quatro anos, mostraram que existem sistemas multi-planetários, cujos planetas estão distribuídos de forma similar ao Sistema Solar (BORUCKI et al., 2010; BORUCKI et al., 2011).

O sistema multi-planetário KOI-351 é identificado como o sistema Kepler-90. Esse sistema contém oito planetas em torno da estrela KOI-351, onde os planetas internos *b* e *c* estão próximos da estrela, os

planetas i , d , e e f são intermediários e os planetas g e h são os mais externos, sendo que o planeta h está a uma distância orbital de 1 UA. Os raios dos planetas b e c são da ordem de $1.3R_{\oplus}$, enquanto que os planetas g e h são similares aos planetas gigantes do Sistema Solar e os planetas d , e e f são similares às super-terras (CABRERA et al., 2014).

Cabrera et al. (2014) estudaram a estabilidade do sistema Kepler-90 através de um conjunto de simulações numéricas por um tempo de 10^7 anos, embora nesse trabalho, os planetas b e c podem ser ignorados nas simulações numéricas. Além disso, nesse trabalho foi adotada uma série de estimativas com relação a massa dos planetas. Eles confirmaram que o sistema é um sistema hierárquico e que os planetas b e c estão em ressonância de movimentos médios 5:4.

Contreras e Boley (2018) mostraram, através de simulações numéricas, que o sistema Kepler-90 é estável, embora tenham assumido a excentricidade dos planetas igual a zero. Eles também estimaram a massa e o semieixo maior de cada planeta. Eles identificaram que os planetas b e c estão em ressonância de movimentos médios 5:4 e os planetas g e h estão em ressonância de movimentos médios 3:2. Além disso, Shallue e Vanderburg (2018) identificaram o planeta i localizado entre as órbitas dos planetas c e d .

Liang, Robnik e Seljak (2021) realizaram simulações numéricas de longo período para estudar a evolução orbital do planeta g e do planeta h , e observaram que os ângulos ressonantes, ϕ_g e ϕ_h , associados à ressonância 3:2 de movimentos médios desses planetas, em alguns períodos de tempo libra e em outros circula.

É importante ressaltar que a descoberta do planeta i , e a não estimativa dos valores de excentricidade dos planetas b , c , i , d , e , f , g e h reforça a importância de estudar a estabilidade do sistema assumindo diferentes intervalos de excentricidade para os planetas.

Portanto, o objetivo geral do trabalho é identificar as regiões de estabilidade de dois sistemas, o sistema de Netuno e Kepler-90, utilizando o método de análise de frequência.

O primeiro objetivo específico deste trabalho é estudar a evolução orbital de um conjunto de partículas na região interna do sistema de Netuno através da análise de frequência, onde estão os satélites (Naiade, Thalassa, Despina, Galatea, Larissa, Hipocampo e Proteus) e seus anéis (Galle, Le Verrier, Lassell, Arago, anel coorbital de Galatea e o Adams) para diferentes valores de excentricidade das partículas. Também serão analisados os efeitos da pressão de radiação solar em partículas pequenas (da ordem de μm), que compõem os anéis de Netuno.

O segundo objetivo específico deste trabalho é estudar a dinâmica dos planetas b , c , i , d , e , f , g e h do sistema Kepler-90 através do método de análise de frequência para três intervalos diferentes de excentricidade. Também estudaremos a dinâmica de um conjunto de partículas na região de semieixo maior de 0.06 UA a 2 UA para diferentes valores de excentricidade.

No Capítulo 2 apresentamos a metodologia que é utilizada em ambos sistemas.

No Capítulo 3 apresentamos uma revisão bibliográfica sobre os sete satélites internos e os cinco anéis do sistema interno de Netuno. Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos utilizando o método descrito no Capítulo 2.

No Capítulo 4 apresentamos uma revisão bibliográfica sobre os oito planetas do sistema Kepler-90. Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos ao assumir três intervalos de excentricidade para

os oito planetas.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos ao incluir conjuntos de partículas teste nos dez "sistemas Kepler-90" que foram selecionados aleatoriamente do capítulo 3. Neste capítulo selecionamos um sistema representativo e analisamos as regiões entre as órbitas dos planetas c e i , e além da órbita do planeta h .

No Capítulo 6 é apresentada uma discussão geral.

2 MÉTODO DE ANÁLISE DE FREQUÊNCIA

O método de análise de frequência é uma ferramenta que fornece informações da dinâmica global de sistemas multidimensionais e identifica comportamentos caóticos em sistemas dinâmicos para qualquer número arbitrário de graus de liberdade. A análise de frequência é baseada na análise das variações em função do tempo das frequências fundamentais de um sistema Hamiltoniano. Laskar (1990), Laskar (1993) mostraram que a análise de frequência permite estimar se uma órbita é regular ou irregular em um tempo de integração de curto período, além de estimar o tamanho das zonas caóticas no domínio da frequência. Laskar (1990), Laskar (1993) estudaram o comportamento caótico do Sistema Solar através desse método, o qual foi aplicado para uma série de problemas dinâmicos como apresentados em Nesvorný e Morbidelli (1998), Robutel e Laskar (2001), Muñoz-Gutiérrez e Winter (2017), Gaslac et al. (2020), Roberts e Muñoz-Gutiérrez (2020) e Muñoz-Gutiérrez et al. (2021).

O algoritmo da análise de frequência desenvolvido por Laskar, Froeschlé e Celletti (1992) busca calcular as frequências fundamentais do sistema. Laskar, Froeschlé e Celletti (1992) realizaram o fundamento matemático da análise de frequência considerando que a Hamiltoniana de um sistema dinâmico integrável de n graus de liberdade, definida como $H(J, \theta)$, é da forma:

$$H(J, \theta) = H_0(J) + \epsilon H_1(J, \theta) \quad (1)$$

onde ϵ é um parâmetro adimensional que pode variar de 0 a 1, ou seja, quando $\epsilon = 0$ a equação (1) não há perturbação no sistema, e quando $\epsilon = 1$ a equação (1) apresenta uma perturbação no sistema.

Assumimos um sistema de n graus de liberdade considerando que o sistema é integrável (para $\epsilon = 0$). Através de transformações canônicas, o sistema é reduzido a variáveis de ação-ângulo (J_j, θ_j) . A Hamiltoniana dependerá apenas das variáveis de ação, e a equação (1) fica da forma: $H(J, \theta) = H_0(J)$ onde $j=1,2,3,...,n$ para um sistema de n -graus de liberdade. De modo que, as variáveis de ação da Hamiltoniana são constantes do movimento, $\dot{J}_j = 0$, enquanto as variáveis de ângulo evoluírem da seguinte maneira:

$$\dot{\theta}_j = \frac{\partial H_0(J_j)}{\partial J_j} = \nu_j(J) \quad (2)$$

onde $\nu_j(J)$ são as frequências fundamentais do movimento.

Robutel e Laskar (2001) e Muñoz-Gutiérrez e Winter (2017) sugeriram que nos experimentos numéricos não é comum trabalhar com variáveis de ação-ângulo. De modo que, ainda podemos considerar algumas variáveis dinâmicas que estejam relacionadas às variáveis de ação-ângulo. Portanto, a variável dinâmica z'_j é definida como $z'_j = J'_j \exp(i\theta'_j) = f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$, onde $z_j = J_j \exp(i\theta_j)$. Isto significa que qualquer variável f será uma função que estará próxima da unidade.

Apesar que (J'_j, θ'_j) não são variáveis de ação-ângulo, a análise de $z'_j(t)$ ainda nos dará as frequências fundamentais (ν_j) . Para movimentos periódicos e quase-periódicos essas frequências fundamentais serão constantes.

Se recuperarmos as frequências fundamentais em diferentes intervalos de tempo de uma integração

numérica, poderemos determinar a existência de movimento periódico. Se as frequências permanecerem quase constantes o sistema será regular, e se as frequências variarem isto mostrará a existência de uma irregularidade (LASKAR; FROESCHLÉ; CELLETTI, 1992).

Portanto, neste trabalho calcularemos a frequência principal, ν , usando a equação de Euler definida como

$$z'_j = a(t)e^{i\lambda(t)} \quad (3)$$

Para obter a frequência principal das órbitas das partículas utilizamos o algoritmo da transformada de Fourier de frequência modificada (FMFT), que está descrito em Šidlichovský e Nesvorný (1997) e disponível na página web publicada pelo autor¹. O programa de Šidlichovský e Nesvorný (1997) será descrito no Apêndice A.

2.1 MAPA DE DIFUSÃO

Seguindo o algoritmo descrito no Apêndice A podemos construir o mapa de difusão através dos seguintes passos:

- 1.- Os valores dos ângulos de fase ($\theta_j = \theta_{j0}$) são fixos para qualquer valor das variáveis de ação (J_0),
- 2.- integramos numericamente as trajetórias, a partir das condições iniciais (J_0, θ_0) em um tempo de integração T ,
- 3.- Buscamos uma aproximação quasi-periódica da trajetória utilizando o algoritmo FMFT (ŠIDLICHOVSKÝ; NESVORNÝ, 1997),
- 4.- identificamos as frequências principais ou fundamentais (ν) do item [3].

O mapa é definido como:

$$F_{\theta_0}^T : J \implies \nu \quad (4)$$

onde $F_{\theta_0}^T$ converge em uma função suave dos conjuntos de torus invariantes de KAM. As regiões caóticas podem ser identificadas se os torus invariantes são destruídos, identificado pela irregularidade do mapa $F_{\theta_0}^T$ (ROBUTEL; LASKAR, 2001).

O mapa de difusão pode ser aplicado para um conjunto de partículas teste em um sistema, tipo estrela com planetas ou um sistema tipo planeta com satélites. O efeito gravitacional das partículas teste é nulo nos dois tipos de sistemas. As frequências correspondentes aos planetas ou aos satélites serão fixadas, sendo suficiente para estudar o mapa de frequência (equação 4) em um espaço de três dimensões das variáveis tipo ação (ROBUTEL; LASKAR, 2001). Para qualquer partícula teste as três variáveis de tipo ação são os elementos orbitais a , e e i (semieixo maior, excentricidade e inclinação), cujas três variáveis de ação são associadas aos ângulos M , ω e Ω (anomalia média, argumento do nodo ascendente, longitude de nodo ascendente).

¹ Nesvorný (2018) visitado em 09/01/2018

Podemos construir o mapa de difusão definindo os valores dos ângulos iniciais M_0 , ω_0 e Ω_0 iguais a zero para as partículas teste. Construiremos numericamente o mapa de difusão para a variável de ação inicial (a_0, e_0, i_0) para calcular as frequências fundamentais das trajetórias, cujas frequências estão relacionadas ao movimento médio (n_p), à frequência do pericentro (g) e à frequência do nodo (s):

$$F^T : (a_0, e_0, i_0) \implies (n_p, g, s) \quad (5)$$

segundo o indicado por Robutel e Laskar (2001) limitaremos o estudo ao cálculo da frequência de curto período (determinar o valor de movimento médio), utilizando o tempo de integração numérica de $10^4 T_p$ (onde T_p é o período de um planeta ou satélite dependendo do sistema). Além disso, fixamos um valor específico da inclinação inicial, sendo o mapa reduzido a

$$F_{i_0}^T : (a_0, e_0) \implies n_p \quad (6)$$

A equação (6) mostra a localização aproximada das ressonâncias de movimentos médios.

Como estudaremos o sistema interno de Netuno na subseção 2.5 é necessário incluir uma nova transformação dos elementos orbitais para elementos geométricos devido à perturbação do corpo central gerada pelo seu formato. Portanto, na seguinte subseção desenvolveremos uma descrição dos elementos geométricos.

2.2 DIFUSÃO

Seguindo o item [3] da subseção 2.2.3, identificamos as partículas que sobreviveram o tempo total da integração numérica. Robutel e Laskar (2001) indicaram que a frequência principal de $z'(t)$ estará relacionada ao movimento médio, n_p , da órbita. A função $z'(t)$, através da análise de frequência, é definida como:

$$z'(t) = \alpha_0 e^{(i\nu_0 t)} + \sum_j^N \alpha_j e^{(i\nu_j t)}, \quad (7)$$

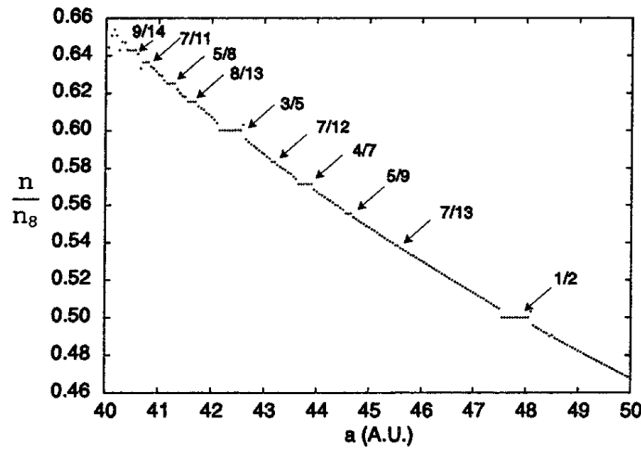
onde $\nu_0 = n_p$ no caso do movimento Kepleriano. Mas não é o caso, ambos valores de $|\alpha_0|$ e ν_0 são próximos aos, mas não são iguais, semieixo maior inicial e ao movimento médio, respectivamente. No entanto, as amplitudes dos seguintes termos são de 100 a 1000 vezes menores para as trajetórias quase-periódicas, portanto, as variações na frequência principal, ν_0 , serão suficientes para fornecer uma estimativa da estabilidade da órbita.

O parâmetro da difusão (D) é definido como (CORREIA et al., 2005):

$$D = \frac{|\nu_{1t} - \nu_{2t}|}{T} \quad (8)$$

onde ν_{1t} e ν_{2t} são as frequências principais calculadas no item [3] da subseção 2.2.3, T é metade do tempo total da integração numérica.

Figura 1 – Os resultados apresentados na Figura foram extraídos do artigo de Robutel e Laskar (2001). A figura mostra a curva de frequência, semieixo maior inicial vs $\frac{n}{n_8}$ das partículas com excentricidade igual a 0.15. Os platôs correspondem as RMMs com o planeta Netuno.



Fonte: Robutel e Laskar (2001).

2.3 RESSONÂNCIA DE MOVIMENTOS MÉDIOS (RMM)

Determinar o movimento médio das partículas teste, ajudará a identificar as regiões associadas às RMM. Todas as partículas teste que apresentam o mesmo valor ressonante tem um valor aproximado de n_p (ROBUTEL; LASKAR, 2001). Se o movimento é Kepleriano, a partícula seguirá a equação (9)

$$\frac{dn}{da} \approx -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}a_0^{-5/2} \quad (9)$$

onde $\mu = GM_{sol}$ e a_0 é o semieixo maior inicial das partículas.

De modo que é importante estimar a dimensão da largura das RMMs para os diferentes valores de excentricidade encontradas na curva de frequência (ver a Figura 1). Dessa maneira, identificaremos a estrutura da ressonância no mapa dinâmico a vs e (WISDOM, 1980), dado que a largura das RMMs aumenta quando a excentricidade aumenta (WISDOM, 1980; HADDEN; LITHWICK, 2018). Os pontos espalhados na curva de frequência são partículas que apresentam órbitas excêntricas, devido à superposição de RMMs sendo consideradas como zonas caóticas (CHIRIKOV, 1979; WALKER; FORD, 1969; WISDOM, 1980; HADDEN; LITHWICK, 2018) ou regiões com partículas com órbitas irregulares que foram identificadas pelo parâmetro de difusão (ver a Figura 1).

Na seguinte capítulo estudaremos a dinâmica do sistema interno de Netuno incluindo o efeito gravitacional do satélite Tritão e também estudaremos as regiões entre as órbitas dos satélites utilizando o método de análise de frequência. Nos capítulos 4 e 5 estudaremos a dinâmica do sistema Kepler-90 usando as ferramentas apresentadas neste capítulo.

3 SISTEMA DE NETUNO

3.1 NETUNO, ANÉIS E SATÉLITES INTERNOS A TRITÃO

Netuno é o planeta mais afastado do Sistema Solar, sendo parte dos planetas exteriores ou gigantes gasosos do sistema. Atualmente, o sistema de Netuno possui catorze satélites, sendo que o último satélite descoberto em 2013 é o satélite Hipocampo, que está localizado entre os satélites Larissa e Proteus (SHOWALTER et al., 2013) (ver a Figura 2).

Netuno também possui seis anéis conhecidos, que são os anéis Galle, Leverrier, Lassell, Arago, anel coorbital de Galatea e o Adams. Esses anéis foram descobertos pela sonda espacial Voyager 2 em 1989 (SMITH et al., 1989), sendo o anel Adams relativamente jovem devido à estrutura azimutal dos anéis (ESPOSITO, 2002; ESPOSITO, 2014; WINTER; MADEIRA; SFAIR, 2020).

Os elementos orbitais estimados para o planeta Netuno são: semieixo maior (a) é igual a 30.068 Unidades Astronômicas ($UA = 1.495978707 \times 10^8$ km), excentricidade (e) é igual a 0.00858587, e a inclinação (i) é igual a 1.76917° . Seu período orbital é de 164.79 anos (época JD 2451545.0 (J2000)).

Os parâmetros físicos do planeta Netuno estão apresentados na Tabela 1, sendo esses valores utilizados nas simulações numéricas. Esses parâmetros físicos são a constante GM é o parâmetro gravitacional do sistema, M é a massa, R é o raio, e J_2 e J_4 são os coeficientes gravitacionais.

Tabela 1 – Parâmetros físicos do planeta Netuno

Constante	Valor	Referência
$GM_{sistema}$ ($\text{km}^3 \text{s}^{-2}$)	6836527.100580397 ± 10	Jacobson (2009)
M_J (10^{24})	102.41 ± 0.01	Jacobson (2009)
R_J (km)	25225	Jacobson (2009)
J_2 (10^{-6})	$3408.428530717952 \pm 4.5$	Jacobson (2009)
J_4 (10^{-6})	-33.398917590066 ± 2.9	Jacobson (2009)

Fonte: NASA (2017a).

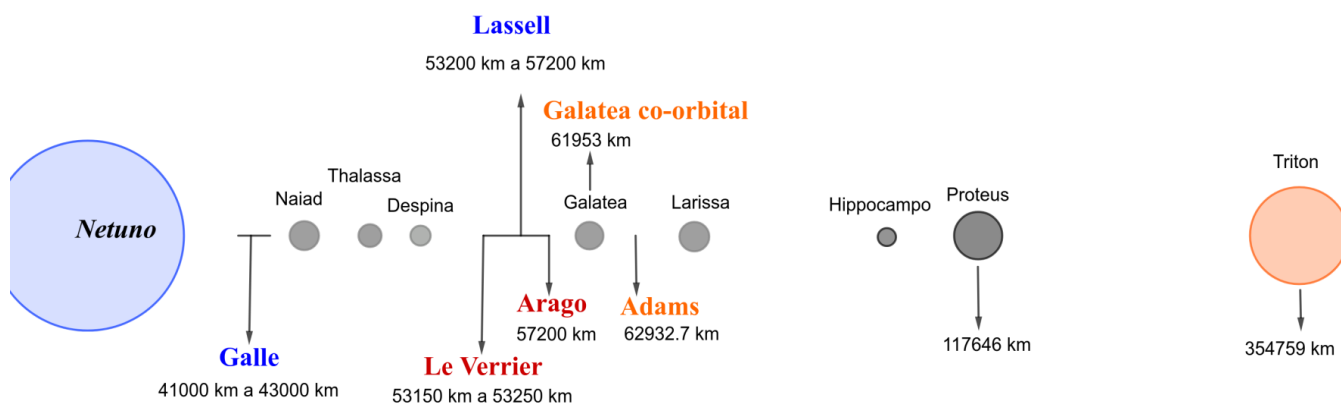
Tabela 2 – Parâmetros físicos dos satélites internos próximos ao planeta Netuno

Satélite	GM (km^3/s^2)	Média do raio (km)	Densidade (g/m^3)	Referência
Naiade	0.013	33 ± 3	1.3	Karkoschka (2003)
Thalassa	0.025	41 ± 3	1.3	Karkoschka (2003)
Despina	0.14	75 ± 3	1.3	Karkoschka (2003)
Galatea	0.25	88 ± 4	1.3	Karkoschka (2003)
Larissa	0.33	97 ± 3	1.3	Karkoschka (2003)
Hipocampo	0.0003	9	1.3	Showalter et al. (2013)
Proteus	3.36	210 ± 7	1.3	Karkoschka (2003)
Tritão	1427.6 ± 1.9	1353.4 ± 0.9	2.059 ± 0.005	Thomas (2000)

Fonte: NASA (2017b).

O anel Galle está localizado no intervalo de 41000 km a 43000 km a partir do centro do planeta, sendo o anel mais próximo a Netuno. Esse anel não apresenta nenhuma borda externa ou interna

Figura 2 – Esboço da localização dos satélites internos e a Tritão e os anéis do sistema de Netuno. Observamos que os maiores anéis, o Anel Galle e o Lassell, apresentam uma largura de ~ 2000 km e ~ 4000 km, respectivamente.



Fonte: Próprio autor

distinta. O anel Galle é largo, difuso e a quantidade de poeira é maior que a dos outros anéis (MINER; WESSEN; CUZZI, 2007).

Os satélites Naiade, Thalassa e Despina são os satélites interiores que estão entre os anéis Galle e Le Verrier. Os parâmetros físicos desses satélites são apresentados na Tabela 2. Os anéis Le Verrier, Lassell e Arago são os três anéis planetários localizados a ~ 53000 km, ~ 56000 km, ~ 57200 km, respectivamente, a partir do centro do planeta. As propriedades desses anéis estão apresentadas na Tabela 3.

Miner, Wessen e Cuzzi (2007) sugeriram que o satélite Despina aparentemente não afeta gravitacionalmente o anel Le Verrier, apesar do satélite estar bem próximo ao anel. Eles encontraram que a posição da ressonância de Lindblad 53:52 está localizada próxima ao centro do anel Le Verrier, e que a ressonância 54:53 está localizada a 13.1 km do satélite Despina. Eles concluíram que a falta de não-homogeneidade azimutal ou de estrutura radial pode excluir os efeitos gravitacionais do satélite Despina.

Galatea é o satélite que possui um anel coorbital (PATER et al., 2018). Miner, Wessen e Cuzzi (2007) sugeriram que o satélite Galatea pode ser o responsável pela formação do anel coorbital devido às colisões de objetos interplanetários em sua superfície. O satélite Galatea está próximo ao anel Adams. Esse anel é um anel externo e irregular, contendo partes mais densas, denominadas de arcos.

Observações feitas por Pater et al. (2005) verificaram que os anéis de Netuno permaneceram de forma similar às imagens enviadas pela sonda Voyager 2 (1989), porém, os arcos do anel Adams apresentaram diferenças significativas, como localização e intensidade, em relação ao arco Fraternidade (ver a Figura 3). Esse arco apresenta um movimento médio orbital de 820.118 ± 0.0001 graus/dia. Pater et al. (2005) sugeriram que o efeito gravitacional entre Galatea e os arcos do anel Adams poderia ser responsável por este comportamento.

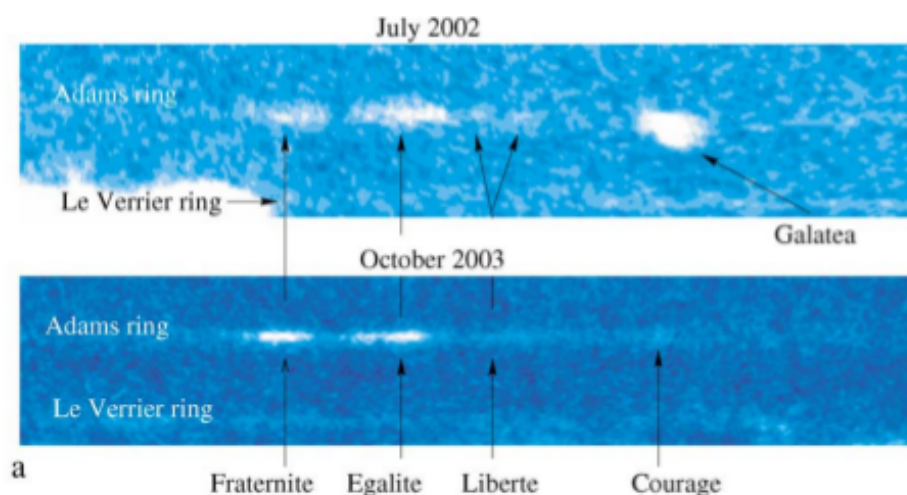
Esposito (2002) mostrou que todos os anéis de Netuno estão no limite de Roche do planeta, onde as forças de maré destruíram um corpo fluido. Ele sugeriu também que o planeta apresenta uma região dominada pelo campo magnético e de partículas carregadas, isto é devido à alta inclinação do campo magnético de Netuno, sendo nomeada de magnetosfera do planeta. As partículas capturadas na

Tabela 3 – Parâmetros dos anéis de Netuno

Anéis	Localização (largura $W(km)$)	Profundidade ótica	Fração de poeira (%)
Galle	42000 km ($W = \sim 2000$ km)	$\sim 10^{-4}$	?
Le Verrier	53200 ($W = \sim 100$ km)	3×10^{-3}	4 - 70
Lassell	55200 ($W = \sim 4000$ km)	$\sim 10^{-4}$	?
Arago	57200 ($W = 100$ km)	?	?
Galatea co-orbital	61953 km		
Adams	62933 km ($W = 15$)	$\sim 3 \times 10^{-3}$	30-50
Adams arcos	62933 km ($W = 10$)	$\sim 10^{-1}$	50

Fonte: Pater et al. (2018).

Figura 3 – Arcos do anel Adams (Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem).



Fonte: Pater et al. (2005).

magnetosfera são repetidamente deslocadas além das órbitas dos satélites e anéis. Além disso, essas partículas podem ser absorvidas pelos satélites e como material dos anéis.

Os satélites Larissa, Hipocampo e Proteus são os satélites mais afastados do sistema interno de Netuno. Entre os satélites Larissa e Hipocampo não existem corpos descobertos até agora. Existem trabalhos que estudaram a dinâmica dos satélites internos, além de propor a formação dos anéis internos do sistema de Netuno. Portanto faremos uma breve revisão geral desses trabalhos.

Zhang e Hamilton (2007) analisaram o histórico ressonante da evolução orbital dos satélites Proteus e Larissa devido à migração por maré, os dois satélites provavelmente passaram pela ressonância de movimentos médios 2:1, 1000 anos atrás. Eles utilizaram um método numérico para excitar a excentricidade e inclinação obtendo restrições na densidade média dos satélites e seus parâmetros de dissipação por maré (Q). Zhang e Hamilton (2007) identificaram uma forte ressonância de movimentos

médios de três corpos entre Larissa, Proteus e Tritão, isto é devido à massa e inclinação do satélite Tritão, onde as perturbações seculares de Tritão afetam consideravelmente a ressonância de movimentos médios entre Larissa e Proteus.

Zhang e Hamilton (2008) investigaram a evolução orbital dos satélites internos de Netuno. Nesse estudo foram incluídos os satélites de tamanho médio como Galatea e Despina. O objetivo de Zhang e Hamilton (2008) foi estudar a dinâmica dos satélites assumindo que a inclinação de cada satélite é igual a zero e que as ressonâncias orbitais excitaram as inclinações durante a migração por maré. Como resultado foi obtido que as inclinações orbitais dos satélites Proteus, Galatea e Despina são consistentes se densidade desses satélites estiver no intervalo $0.4 < \bar{\rho} < 0.8 \text{ g/cm}^3$. No caso do satélite Larissa, a variação da inclinação é alta devido provavelmente a uma captura ressonante anterior com os satélites Naiade ou Thalassa.

Showalter et al. (2013) analisaram as imagens obtidas pelo telescópio espacial Hubble (TEH) durante os anos 2004 a 2009. Essas imagens foram comparadas às imagens obtidas pela sonda Voyager 2. O resultado dessa análise das imagens permitiu determinar a evolução orbital dos arcos desde o momento que as primeiras imagens foram obtidas (Voyager 2). Desde que foram identificados os quatro arcos do sistema de Netuno em 1989, Showalter et al. (2013) afirmaram que os dois primeiros arcos estão desaparecendo, mas os outros arcos permanecem estáveis. Além disso, a descoberta de um satélite chamado S/2004 N1 (SHOWALTER et al., 2013), nomeado Hipocampo, que orbita entre os satélites Larissa e Proteus, apresenta um movimento médio de 378.907 ± 0.001 graus por dia e o valor do seu semieixo maior é 105.283 km.

Showalter et al. (2017) afirmaram que sem o confinamento dos arcos, esses teriam sobrevivido pouco tempo devido ao "Keplerian shear". Showalter et al. (2017) encontraram que o semieixo maior dos arcos estão próximos, ~ 10 m, a uma ressonância de movimentos médios de três corpos, sendo os satélites Galatea e Larissa os responsáveis pela ressonância.

Showalter et al. (2019) estimaram os elementos orbitais dos sete satélites usando os dados obtidos pelo TEH, além de confirmar a existência do satélite Hipocampo entre as órbitas dos satélites Larissa e Proteus através das observações realizadas entre os anos 2004 e 2016. Eles sugeriram que o satélite Hipocampo seja produto de uma colisão entre o satélite Proteus e um corpo externo ao sistema de Netuno.

Brozović et al. (2019) estudaram a dinâmica dos sete satélites internos considerando, nas simulações, o efeito do satélite Tritão. Eles identificaram que os satélites Naiade e Thalassa estão em ressonância de movimentos médios 73:69, sendo o ângulo ressonante definido por $73\lambda_{Thalassa} - 69\lambda_{Naiade} - 4\Omega_{Naiade}$. Eles também concluíram que os satélites Hipocampo e Proteus estão próximos da ressonância de movimentos médios 13:11.

Charnoz et al. (2017) sugeriram que o mecanismo de formação dos anéis de Netuno pode ser devido aos pequenos satélites, através do processo de erosão ou destruição via bombardeamento de meteoritos. Como o raio dos satélites está no intervalo de 10 a 100 km, esses satélites poderiam ser uma fonte importante de material para os anéis. A re-acreção incompleta devido à maré pode fornecer uma explicação natural para a coexistência de anéis e satélites. Eles consideraram que os impactos de meteoritos foi importante para a configuração final do sistema interno de Netuno.

Isto motivou o estudo da dinâmica dos satélites da região interna do sistema de Netuno incluindo um conjunto de partículas teste. Esse estudo será apresentado nas seções 2.3 e 2.4. A descoberta do satélite Hipocampo foi importante para estudar em detalhes a dinâmica dos anéis e determinar regiões estáveis localizadas entre as órbitas dos satélites. Além disso, analisaremos a região interna considerando satélites hipotéticos, esse estudo será discutido na seção 2.5.

Na seguinte seção utilizaremos o método descrito no capítulo anterior para estimar as regiões estáveis ou instáveis do sistema interno de Netuno.

3.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para dar início aos conjuntos de simulações numéricas devemos utilizar os dados apresentados na Tabela 4, que foram extraídos do site web HORIZONS² para o dia Juliano 2457785.5, que corresponde a data de 1 de Fevereiro de 2017. Os dados de posição e velocidade apresentados na Tabela 4, deveram ser transformados para elementos orbitais geométricos (Tabela 5). Isto é importante para que possamos reduzir as perturbações de curto período (ver Apêndice B), e assim realizar estimações apropriadas para o cálculo da difusão de cada órbita de cada satélite do sistema interno de Netuno, e também para o conjunto de partículas teste que serão incluídos na próxima seção.

Utilizamos o pacote computacional MERCURY (CHAMBERS, 1999), que permite simular um conjunto de n -corpos que orbitam ao redor de um corpo central e o integrador numérico Bulirsch e Stoer (1966) que está incluído no pacote.

Tabela 5 observamos que as variáveis $a_{Geo}(D_{AA})$ é o semieixo maior, e_{Geo} é a excentricidade, I_{Geo} é a inclinação, ϖ_{Geo} é a longitude de pericentro, Ω_{Geo} é a longitude de nodo ascendente e λ_{Geo} é a longitude média, todos são elementos geométricos. Notamos que o semieixo maior geométrico está normalizado como D_{AA} que é a distância do centro de Netuno até o anel Adams, sendo $D_{AA} = 62932.7$ km.

O primeiro conjunto de simulações numéricas será de longo período, onde estudaremos a evolução temporal dos elementos orbitais a , e e i dos satélites internos do sistema de Netuno, com e sem o efeito gravitacional do satélite externo Tritão. O tempo de integração numérica será de $\sim 1.2 \times 10^5$ anos. Isto é importante para o trabalho já que definiremos a estabilidade ou não dos satélites internos como primeiro passo.

Levar em consideração que o pacote computacional MERCURY não incluí a opção para elementos orbitais geométricos. Utilizaremos a Tabela 4 como dados de entrada no arquivo big.in, ao finalizar as simulações numéricas, os resultados deveram ser transformados para elementos orbitais geométricos.

O segundo conjunto de simulações numéricas será de curto período, onde estudaremos a evolução orbital dos satélites internos e usaremos o método de análise de frequência para analisar a dinâmica global dos satélites. Estimando a difusão das órbitas e o tempo de difusão dos satélites e assim compará-los aos resultados apresentados para uma evolução orbital de longo período. Isto será abordado na subseção 3.4.

² NASA (2017c)

Tabela 4 – As componentes da posição (x, y, z) e velocidade (v_x, v_y, v_z) dos satélites de Netuno. Esses valores foram extraídos de NASA (2017c) para a data 2017-02-01.

Satélite	posição (km)	velocidade (km/dias)
Naiade	-4.861598101194755E+03	-1.022607376451960E+06
	4.792192785052824E+04	-1.007473952748110E+05
	-2.513901855087704E+03	5.737149709031385E+04
Thalassa	-4.536127084395342E+04	4.281143792543722E+05
	-2.123161142809179E+04	-9.145989649730624E+05
	-6.882101766768756E+00	-1.064699239230846E+04
Despina	3.691546376852450E+04	7.013763660435721E+05
	-3.735597748047257E+04	6.933922389982601E+05
	-4.305177328186073E+02	5.299076528200922E+03
Galatea	-6.092150479333453E+04	1.639911934009283E+05
	-1.118656310246041E+04	-8.931195696477976E+05
	-1.351794468076787E+01	-8.423057548930225E+03
Larissa	3.220023154660776E+04	-7.497834172900536E+05
	6.607288323931834E+04	3.643338200205931E+05
	7.839652855768873E+02	7.040661389542341E+03
Hipocampo	1.048292427174439E+05	6.050417340226601E+04
	-9.118392454374658E+03	6.939273288189896E+05
	-4.486626166000306E+02	1.032242074417382E+04
Proteus	7.244449534921265E+04	-5.191391052146224E+05
	9.268331408207947E+04	4.052542585486157E+05
	1.474307246998542E+03	8.462041124334502E+03
Tritão	-3.384649833000187E+05	1.122533770419439E+05
	9.055438292073048E+04	3.353923148048871E+05
	5.562943106087373E+04	1.370100134831567E+05

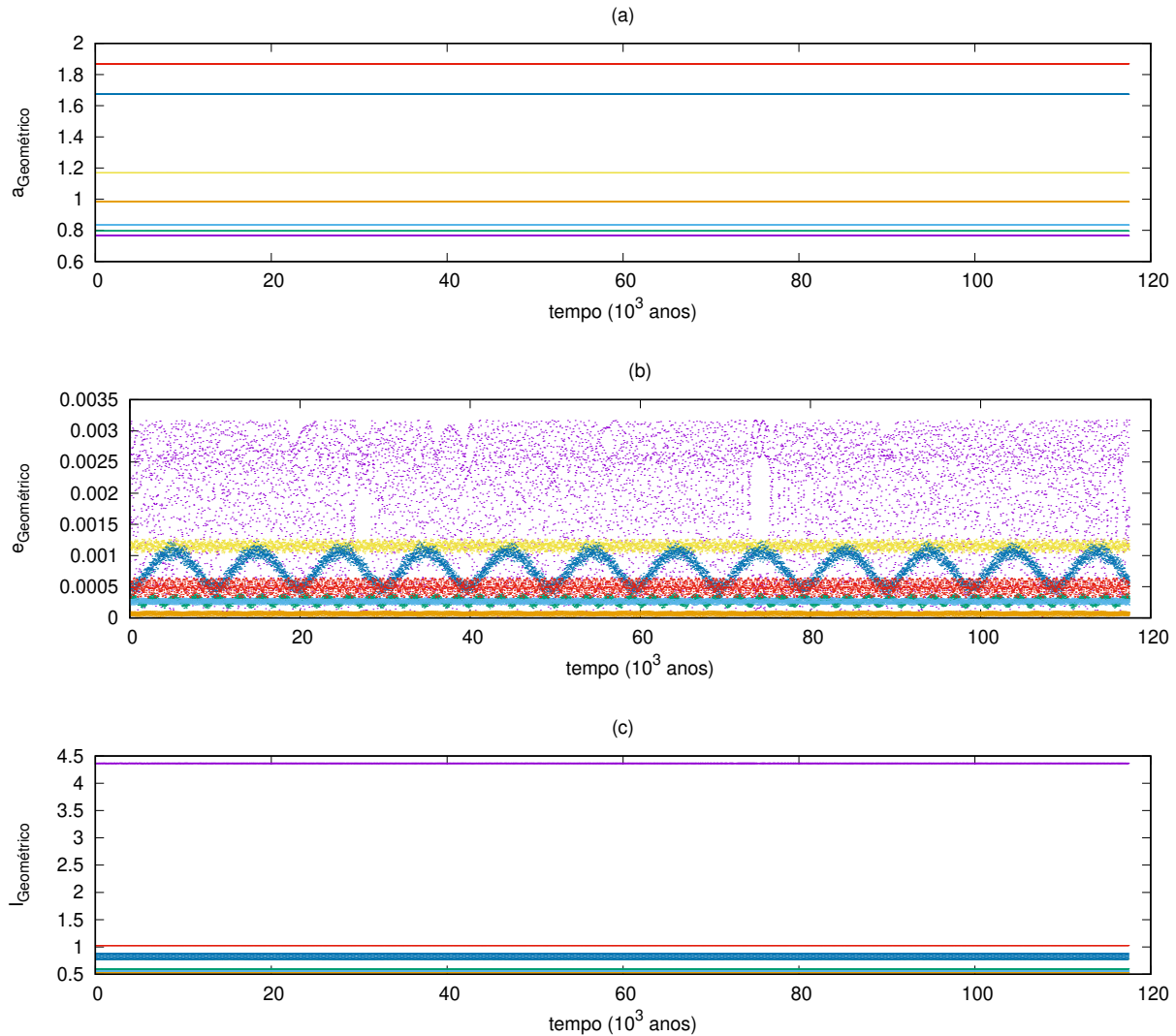
Fonte: NASA (2017c).

Tabela 5 – Elementos geométricos dos satélites do sistema interno de Netuno obtidos da Tabela 3.1.

Satélite	$a_{Geo}(D_{AA})$	e_{Geo}	$I_{Geo}(^{\circ})$	$\varpi_{Geo}(^{\circ})$	$\Omega_{Geo}(^{\circ})$	$\lambda_{Geo}(^{\circ})$
Naiade	0.7662936974	0.0028933904	4.3629736556	188.2828786823	138.9038344642	96.0416928089
Thalassa	0.7955775163	0.0003268493	0.6033164215	20.7223081675	24.3345566865	205.0851889228
Despina	0.8345261894	0.0002964914	0.5612815661	50.2566688896	11.4590451697	314.6928820767
Galatea	0.9842950420	0.0000704953	0.5311472156	182.0518196399	9.0559635089	190.4038414171
Larissa	1.1685233905	0.0010692628	0.7796604322	129.5811402013	12.4127449149	64.1321648913
Hipocampo	1.6727265144	0.0004180706	0.8832101088	344.0241374017	11.0844491331	355.0179103288
Proteus	1.8691460666	0.0003309937	1.0283412166	165.5275467689	7.7072669384	52.0269988864

Fonte: próprio autor

Figura 4 – Evolução temporal dos elementos geométricos a , e e I dos satélites internos de Netuno quando não é considerado o satélite Tritão no sistema. O tempo de integração numérica foi de $\sim 1.2 \times 10^5$ anos. Na figura (a), (b) e (c) os satélites são identificados com os seguintes cores: roxo (Naiade), verde (Thalassa), azul-celeste (Despina), Laranja (Galatea), amarelo (Larissa), azul (Hipocampo) e vermelho (Proteus).



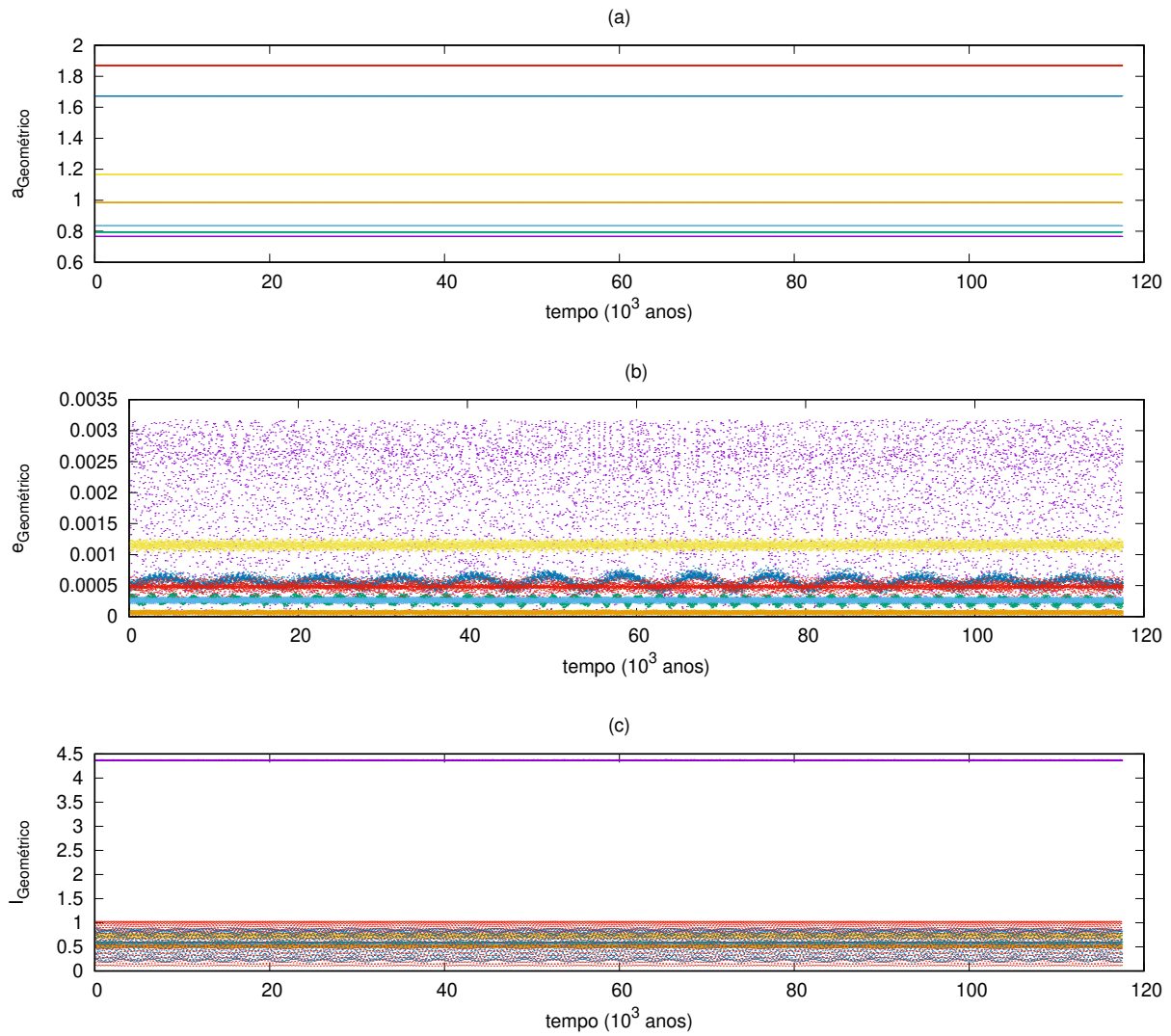
Fonte: próprio autor

3.3 EVOLUÇÃO ORBITAL DOS SATÉLITES DO SISTEMA INTERNO DE NETUNO

As simulações numéricas de longo período são relevantes no estudo da evolução orbital dos corpos celestes. Portanto, fizemos dois conjuntos de simulações numéricas, o primeiro conjunto contém os satélites Naiade, Thalassa, Despina, Galatea, Larissa, Hipocampo e Proteus e o conteúdo do segundo conjunto são todos os satélites internos de Netuno mais o satélite Tritão.

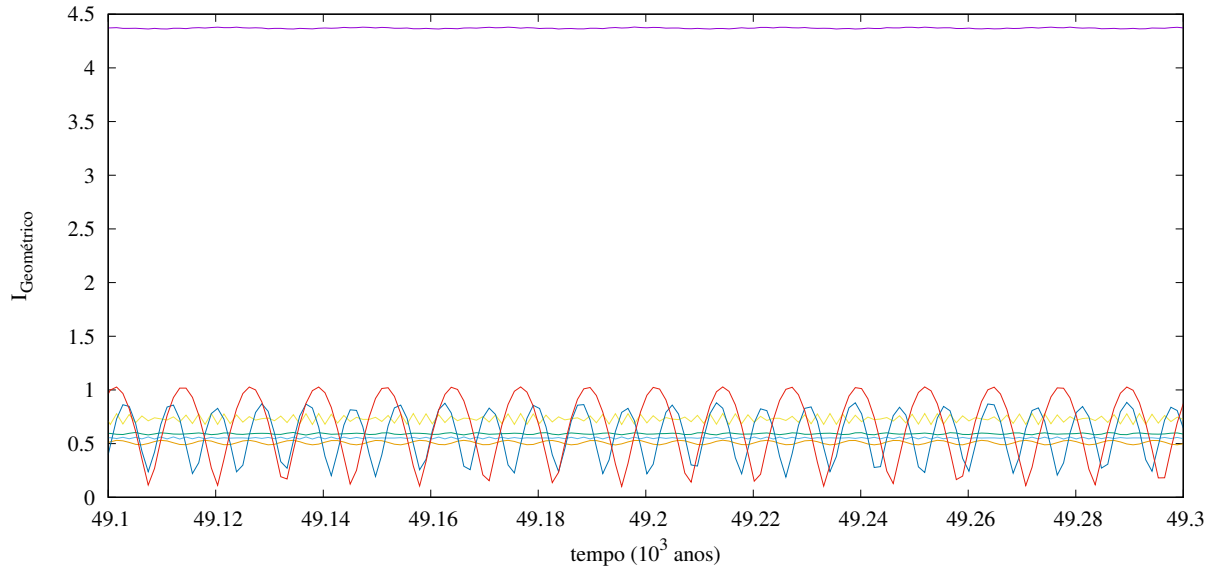
A Figura 4 e a Figura 5 mostram as simulações numéricas dos satélites internos de Netuno e outra simulação numérica incluindo o efeito gravitacional de Tritão, respectivamente. Na Figura 4(a), (b) e (c), as cores apresentadas se referem aos satélites: Naiade de cor roxo, Thalassa de cor verde, Despina de cor azul-celeste, Galatea de cor laranja, Larissa de cor amarelo, Hipocampo de cor azul e Proteus de

Figura 5 – Evolução temporal dos elementos geométricos a , e e I dos satélites internos de Netuno incluindo o satélite Tritão no sistema. O tempo de integração numérica foi de $\sim 1.2 \times 10^5$ anos. Na figura (a), (b) e (c) os satélites são identificados com os seguintes cores: roxo (Naiade), verde (Thalassa), azul-celeste (Despina), Laranja (Galatea), amarelo (Larissa), azul (Hipocampo) e vermelho (Proteus).



Fonte: próprio autor

Figura 6 – A figura apresenta o zoom da evolução temporal da inclinação geométrica dos satélites internos de Netuno incluindo o Tritão, no intervalo de tempo de 49.1×10^3 anos a 49.3×10^3 anos. Na figura (a), (b) e (c) os satélites são identificados com os seguintes cores: roxo (Naiade), verde (Thalassa), azul-celeste (Despina), Laranja (Galatea), amarelo (Larissa), azul (Hipocampo) e vermelho (Proteus).



Fonte: próprio autor

cor vermelho.

Na Figura 4(a) observamos que os satélites mantêm os semieixo maiores geométricos constante ao longo do tempo da integração numérica. Na Figura 4(b) observamos que o satélite Naiade apresenta a maior amplitude de excentricidade geométrica em relação aos outros satélites. Também é possível observar que as excentricidades dos satélites Thalassa, Galatea e Hipocampo apresentam uma evolução orbital periódica, sendo que para o satélite Galatea essa evolução tem curta periodicidade, e para o satélite Hipocampo a amplitude na excentricidade é maior. As excentricidades dos demais satélites permanecem constantes ao longo do tempo. Na Figura 4(c) notamos que os satélites Naiade até Proteus mostram comportamentos constantes na inclinação geométrica.

Na Figura 5 notamos que o comportamento dos satélites internos diferem em relação à excentricidade e inclinação geométricas. Na Figura 5(a) não observamos diferenças notórias de $a_{Geométrico}$ dos satélites internos quando comparamos com a Figura 4(a) (a relação de cores são as mesmas para cada satélite mostrado anteriormente). Na Figura 5(b) notamos que os satélites Thalassa e Hipocampo apresentam valores menores de amplitude de $e_{Geométrico}$, que o mostrado na Figura 4(b). Na Figura 5(c) identificamos variações de inclinação geométrica, sendo as maiores variações de $I_{Geométrico}$ para os satélites Larissa, Hipocampo e Proteus (ver a Figura 6).

Isto indica que o efeito gravitacional de Tritão deve ser considerado nas simulações numéricas de curto período que será desenvolvido neste capítulo através do mapa de frequência.

3.4 ESTUDO DA REGIÃO INTERNA DO SISTEMA DE NETUNO

Nesta seção analisaremos a dinâmica do sistema de Netuno mediante a análise de frequência dos satélites internos e também de um conjunto de partículas teste. Estudaremos o sistema interno através do mapa de difusão considerando o satélite Tritão. Identificaremos regiões estáveis, regiões caóticas e localizaremos ressonâncias de movimento médio.

3.4.1 Dinâmica do sistema interno

Desenvolveremos um estudo da dinâmica do sistema dos satélites internos de Netuno e das partículas teste para um tempo de integração numérica de 10^4 vezes o período orbital do último satélite. Para o intervalo de semieixo maior geométrico de $0.6004D_{AA}$ a $1.29D_{AA}$, o satélite Larissa é o satélite mais externo, e o tempo da simulação numérica será de $10^4 T_L$ (T_L é o período orbital do satélite Larissa)(~ 18 anos), o outro intervalo de semieixo maior geométrico é $1.3D_{AA}$ a $2.2009D_{AA}$ que será simulado para um tempo de $10^4 T_P$ (T_P é o período orbital do satélite Proteus)(35 anos), sendo Proteus o satélite mais externo.

O sistema analisado é formado por 10 corpos: Netuno, 8 satélites (corpos massivos) e uma partícula teste. Na simulação numérica utilizamos um conjunto de 59000 partículas teste. Os parâmetros físicos dos corpos massivos são dados na Tabela 1 e Tabela 2. As condições iniciais da posição e velocidade dos satélites foram extraídas da Tabela 4. As condições iniciais das partículas teste foram selecionadas da seguinte maneira:

- o semieixo maior geométrico a , medido em relação ao centro do sistema, assumimos valores de $0.6004D_{AA}$ até $2.2009D_{AA}$, com passo de $\Delta a = 3 \times 10^{-4}D_{AA}$;
- a excentricidade geométrica foi considerada entre os valores de 0.0 a 0.04 com passo de $\Delta e = 4 \times 10^{-3}$;
- a inclinação geométrica das partículas estão em relação ao plano equatorial de Netuno e são iguais a zero;
- assumimos que ϖ_{Geo} , Ω_{Geo} e λ_{Geo} são iguais a zero.

As partículas teste estão organizadas na grade retangular do plano espaço-fase a vs e . Notar que o conjunto de partículas teste está inicialmente em elementos orbitais geométricos, depois são transformados em elementos orbitais osculadores ou vetores de estado seguindo as equações apresentadas por Renner e Sicardy (2006). Logo, inserimos os dados de posição e velocidade das partículas teste no arquivo small.in do pacote MERCURY. Além disso, consideramos para o corpo central os harmônicos zonais J_2 e J_4 cujos valores estão apresentados na Tabela 1.

Ao finalizar a integração numérica, transformamos os resultados obtidos nos arquivos de saída *.aei (posição e velocidade) para os elementos orbitais geométricos, seguindo o indicado por Renner e Sicardy (2006). Notar que para as partículas teste os elementos orbitais geométricos angulares foram assumidos iguais a zero, seguindo o sugerido por Robutel e Laskar (2001).

Portanto, construímos o mapa de análise de frequência usando a equação $z'(t) = a_{Geo}(t) \exp(i\lambda_{Geo})$ para cada partícula teste, onde a_{Geo} é o semieixo maior geométrico e λ_{Geo} é a longitude média da órbita. Aplicamos o FMFT, descrito por Šidlichovský e Nesvorný (1997), em $z'(t)$ em dois intervalos diferentes de tempo que são de 0 a T e de T a $2T$, onde $2T$ é o tempo total da integração numérica. Desta maneira, obtemos dois valores de frequência principal para cada intervalo de tempo, os quais serão chamados de ν_1 e ν_2 .

Robutel e Laskar (2001) e Correia et al. (2005) mostraram que o cálculo do parâmetro da difusão (D) para cada partícula teste é definido como:

$$D = \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{T}$$

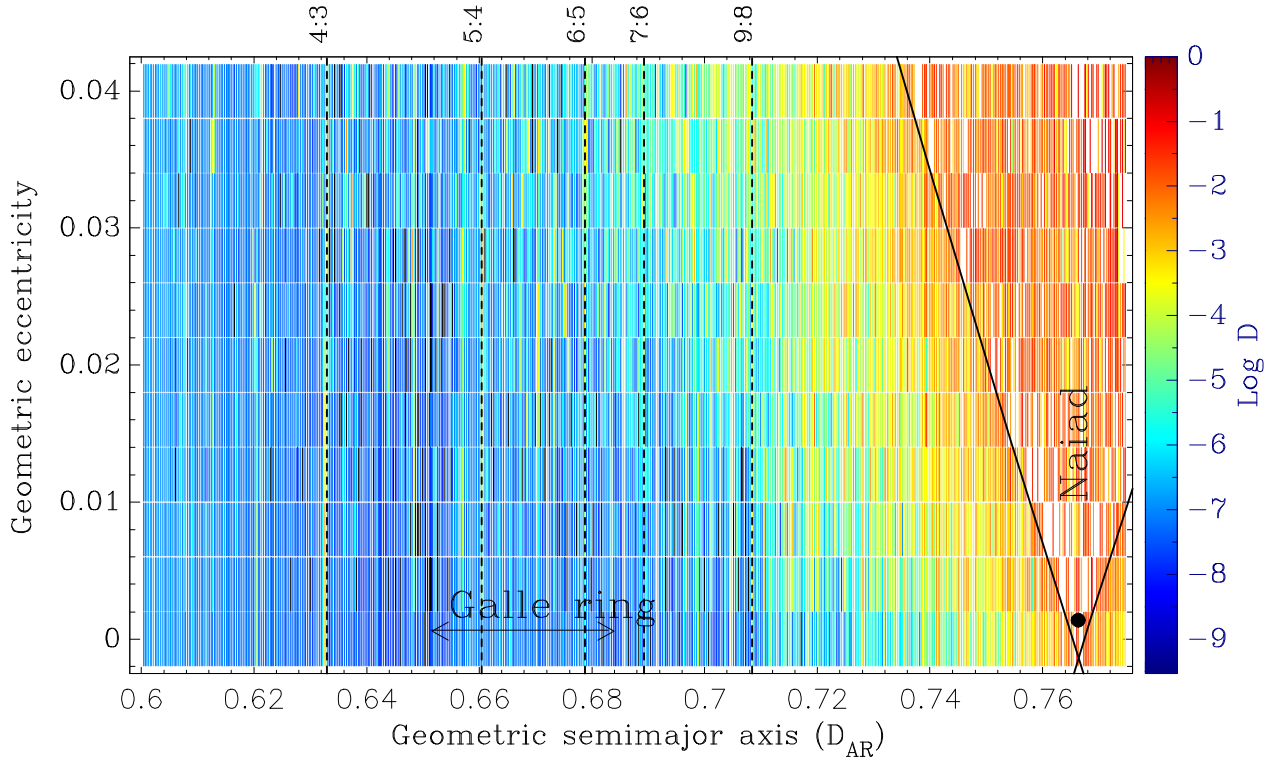
Se uma partícula teste não consegue finalizar a simulação numérica devido à ejeção ou colisão com os corpos massivos, essas não serão consideradas no resultado final.

No caso em que uma partícula teste sobrevive até o tempo final da integração numérica, podemos identificar se essa órbita é estável ou não estável. Quando a diferença $|\nu_2 - \nu_1|$ apresenta um valor alto indicaremos que a órbita é instável ou irregular, e quando a diferença das frequências principais são da ordem $\sim 10^{-6}$ a $\sim 10^{-9}$ indicaremos que a órbita é estável.

Também é possível estimar o tempo de difusão (t_D) em anos para cada partícula teste. Muñoz-Gutiérrez e Winter (2017) estimaram o t_D como o inverso do produto do parâmetro D e o período da órbita (P) de cada partícula teste. Além disso, indicaram que o t_D é uma estimativa do tempo aproximado para que alguma variação no movimento médio das órbitas das partículas seja percebido.

A escala da paleta de cores nas figuras a_{Geo} vs e_{Geo} e a_{Geo} vs λ_{Geo} variam de acordo com o $\log D$ para cada partícula teste. Cada partícula teste estará localizada em sua posição inicial nas grades a vs e e a vs λ . As ressonâncias de movimento médio são identificadas nas Figura 7, Figura 8, Figura 9, Figura 11, Figura 12 e Figura 13, onde as cores que identificam as ressonâncias de movimento médio de primeira e segunda ordem (e ordem maiores) são identificadas da seguinte forma: os números localizados na parte superior das imagens de cor preta são as RMMs com Naiade, os números de cor azul preto indicam as RMMs com Thalassa, os números de cor laranja indicam as RMMs com Galatea, os números de cor marrom as RMMs com Larissa, os números de cor verde as RMMs com Hipocampo e os números de cor azul as RMMs com Proteus. Os números que tenham a letra "d" ao lado representam as RMMs com Despina.

Figura 7 – Mapa de análise de frequência na região do anel Galle, do satélite Naiade. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cuja nomenclatura são mostradas na parte superior. Os números localizados na parte superior apresentados em cor preta correspondem as RMMs de Galateia e a partícula. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Naiade. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas.



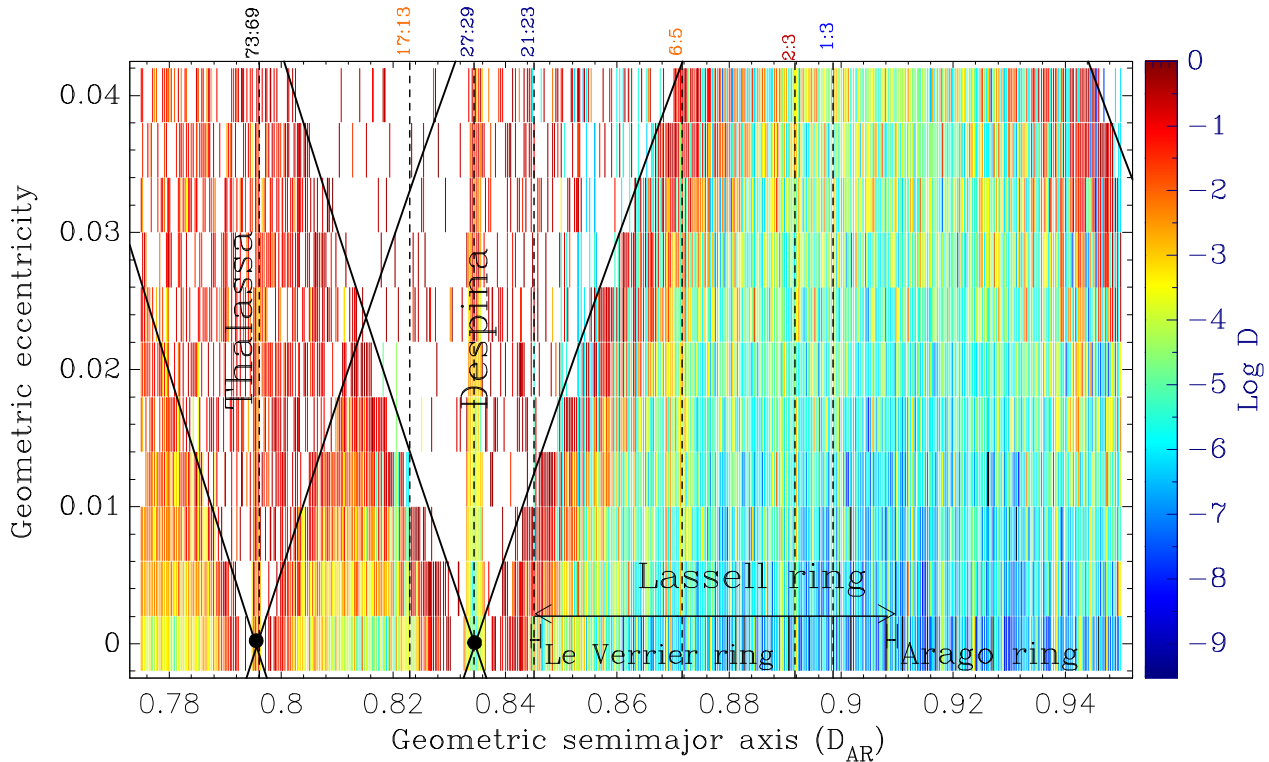
Fonte: próprio autor

3.4.1.1 Região do anel Galle e satélite Naiade

O anel Galle é identificado na Figura 7 de acordo com a Tabela 3, portanto, o anel Galle está localizado no intervalo de a_{Geo} de $0.6515D_{AA}$ a $0.6833D_{AA}$ considerando o valor da excentricidade do anel igual a zero. O satélite Naiade está localizado em $0.7663D_{AA}$ e não aparece a formação de partículas coorbitais. Os resultados apresentados na Figura 7 mostram que o anel Galle possui partículas teste em órbitas regulares. Observamos que as partículas que estão próximas ao satélite apresentam um $\text{Log } D$ próximo de zero sendo partículas com órbitas irregulares.

Identificamos duas ressonâncias de movimento médio de primeira ordem entre o satélite Naiade e partículas do anel Galle. Ditas RMMs são as RMM 5:4 e 6:5. Encontramos partículas teste em RMM 4:3 com o satélite Naiade sendo perturbadas significativamente. Essas partículas apresentam diferentes valores de $\text{Log } D$ no intervalo de ~ -6.5 a ~ -3 . As RMMs são identificadas no gráfico como linhas tracejadas verticais e as flechas horizontais mostram as bordas interna e externa do anel Galle. As linhas diagonais delimitam a posição dos raios de pericentro e apocentro dos corpos massivos sendo apresentados nas Figura 7, Figura 8, Figura 9, Figura 11, Figura 12 e Figura 13 para cada satélite do sistema interno.

Figura 8 – Mapa de difusão dos anéis Le Verrier-Lassell-Arago e os satélites Thalassa e Despina. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor preto, azul-preto, laranja, marrom e azul pertencem as RMMs dos satélites Naiade, Thalassa, Galatea, Larissa, Proteus, e a partícula, respectivamente. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Thalassa e Despina. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas.



Fonte: próprio autor

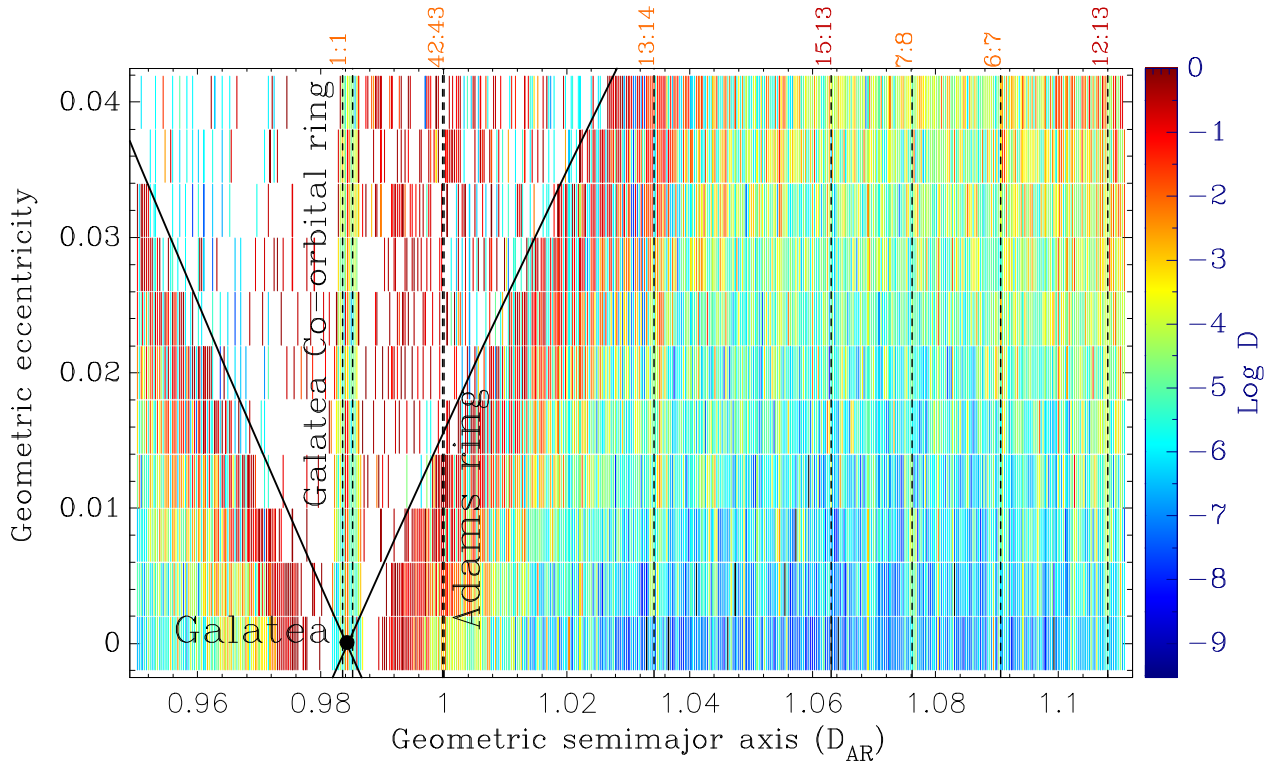
3.4.1.2 Região dos anéis Le Verrier-Lassell-Arago e os satélites Thalassa e Despina

Na Figura 8 observamos os satélites Thalassa, Despina e o conjunto de anéis. Os satélites Thalassa e Despina estão localizadas no a_{Geo} igual a $0.7956D_{AA}$ e $0.8346D_{AA}$, respectivamente. Os anéis estão localizados ao longo do semieixo maior de acordo com a Tabela 1 considerando o valor da excentricidade igual a zero. Portanto, o anel Le Verrier, Lassell e Arago são encontrados na Figura 8 nos seguintes intervalos de semieixo-maior geométrico que são: de $0.8445D_{AA}$ a $0.8461D_{AA}$, de $0.8453D_{AA}$ a $0.9089D_{AA}$ e de $0.9081D_{AA}$ a $0.9097D_{AA}$, respectivamente.

Na Figura 8 notamos regiões estáveis entre as órbitas dos satélites Thalassa e Despina, as partículas com excentricidade iguais a zero apresentam um valor médio de $\text{Log } D$ de -5.5, as partículas com outros valores de excentricidade apresentam valores similares ao valor médio de $\text{Log } D$ para as partículas que estão próximos à RMM 17:13 com o satélite Galatea. Verificamos que as partículas que apresentam o $\text{Log } D$ no intervalo de 0 a -3 são partículas teste que apresentam órbitas irregulares.

Notamos que o satélite Despina (maior que os satélites Naiade, Thalassa e Hipocampo) consegue "limpar" a região ao seu redor. Observamos que o satélite Despina apresenta partículas coorbitais cujo

Figura 9 – Mapa de difusão dos anéis coorbital de Galatea e Adams e o satélite Galatea. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor laranja e marrom pertencem as RMMs dos satélites Galatea, Larissa e a partícula, respectivamente. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Galatea. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas.



Fonte: próprio autor

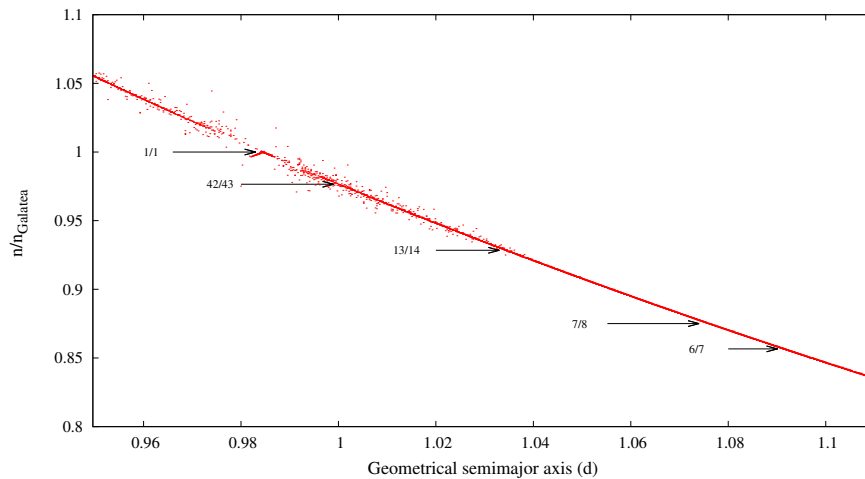
valor médio de $\text{Log } D$ é de -6 e o valor médio de tempo de difusão ($\bar{t}_D$) dessas partículas é igual a 2.5×10^8 anos. Além disso, observamos que o anel Le Verrier apresenta partículas teste com órbitas regulares e irregulares. Na Figura 8 observamos que as partículas desse anel estão "aparentemente" sob efeito da ressonância de movimentos médios 21:23 com o satélite Thalassa. Analisando o anel Lassell, notamos que surgem três ressonâncias de movimento médio 6:5 com o satélite Galatea, 2:3 com o satélite Larissa e 1:3 com o satélite Proteus (ver a Figura 8).

3.4.1.3 Região do anel coorbital de Galatea, Adams e os satélites Galatea e Larissa

A Figura 9 mostra o comportamento dinâmico das partículas teste próximo ao satélite Galatea e os anéis coorbital de Galatea e Adams. Galatea está localizada no a_{Geo} igual a $0.9843D_{AA}$ e o anel coorbital de Galatea está no intervalo de a_{Geo} de $0.9836D_{AA}$ a $0.9852D_{AA}$ e o anel Adams está no intervalo de semieixo maior geométrico de $0.9998D_{AA}$ a $1.0001D_{AA}$. Observamos que o satélite Galatea "limpa" as partículas que estão ao seu redor.

Identificamos as ressonâncias de movimento médio entre as partículas teste com os satélites Galatea e Larissa (ver a Figura 9). Ditas RMMs são a 1:1, 42:43, 13:14, 7:8 e 6:7 com o satélite Galatea e

Figura 10 – Curva de frequência das partículas teste para todos os valores de excentricidade. Os platôs, indicados por uma flecha, representam as RMMs do satélite Galatea e a partícula.



Fonte: próprio autor

as RMMs 15:13 e 12:13 com o satélite Larissa. Notamos que o anel coorbital de Galatea apresenta partículas teste com órbitas regulares e irregulares, dependendo do valor da excentricidade.

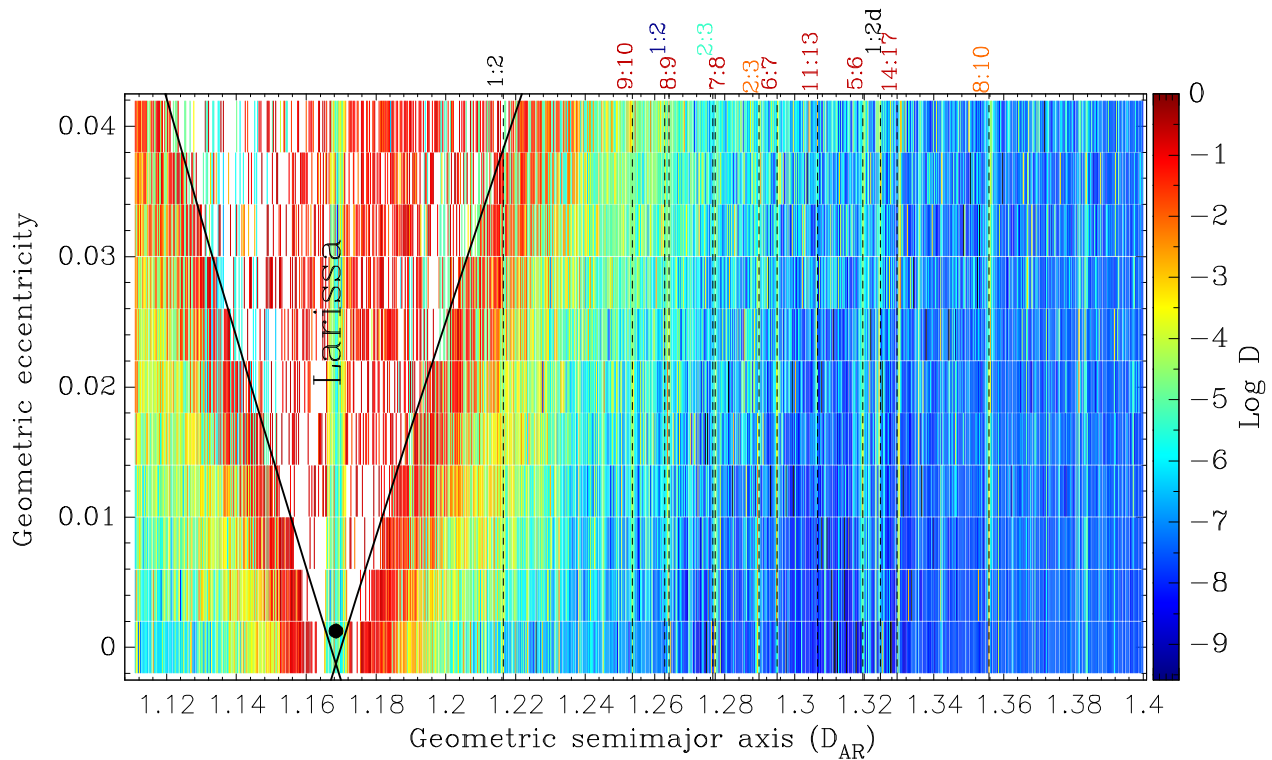
O anel coorbital de Galatea apresenta um valor médio de $\text{Log } D$ igual a -4, o que sugere que o valor médio de $\bar{t}_D$ é igual a 1.959×10^8 anos. Observamos que o anel Adams apresenta um valor médio de $\text{Log } D$ igual a -1.5, que sugere que o valor médio de tempo de t_D desse anel é igual a 5.2×10^5 anos.

Levando em consideração que o valor do movimento médio (n_p) é próximo aos valores das frequências principais, como foi definido na seção 2.2, encontramos as RMMs através da curva de frequência na região do satélite Galatea.

A Figura 10 mostra a curva de frequência na região do satélite Galatea no gráfico do semieixo maior geométrico vs a relação de $n_p/n_{Galatea}$. Os resultados apresentados na Figura 10 mostram que as RMMs podem ser identificadas na região do satélite Galatea (linhas horizontais ou platôs) Robutel e Laskar (2001).

Na Figura 11 observamos que o satélite Larissa remove partículas que estão ao seu redor. Identificamos que as partículas que permanecem próximas ao satélite apresentam um valor médio de $\text{Log } D$ próximo de zero. Notamos no gráfico que o satélite Larissa apresenta partículas coorbitais no intervalo da excentricidade geométrica de 0 até 0.04 cujo valor médio de $\text{Log } D$ é de -5. As ressonâncias de movimento médio entre as partículas teste com os satélites, Larissa e Galatea são identificadas na parte superior da Figura 11.

Figura 11 – Mapa de difusão do satélite Larissa e o conjunto de partículas teste. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor preto, azul-preto, laranja e marrom pertencem as RMMs dos satélites Naiade, Thalassa, Galatea, Larissa e a partícula, respectivamente. A RMM de Despina e a partícula é identifica com o número 1:2d. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Larissa. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região corresponde às partículas ejetadas.



Fonte: próprio autor

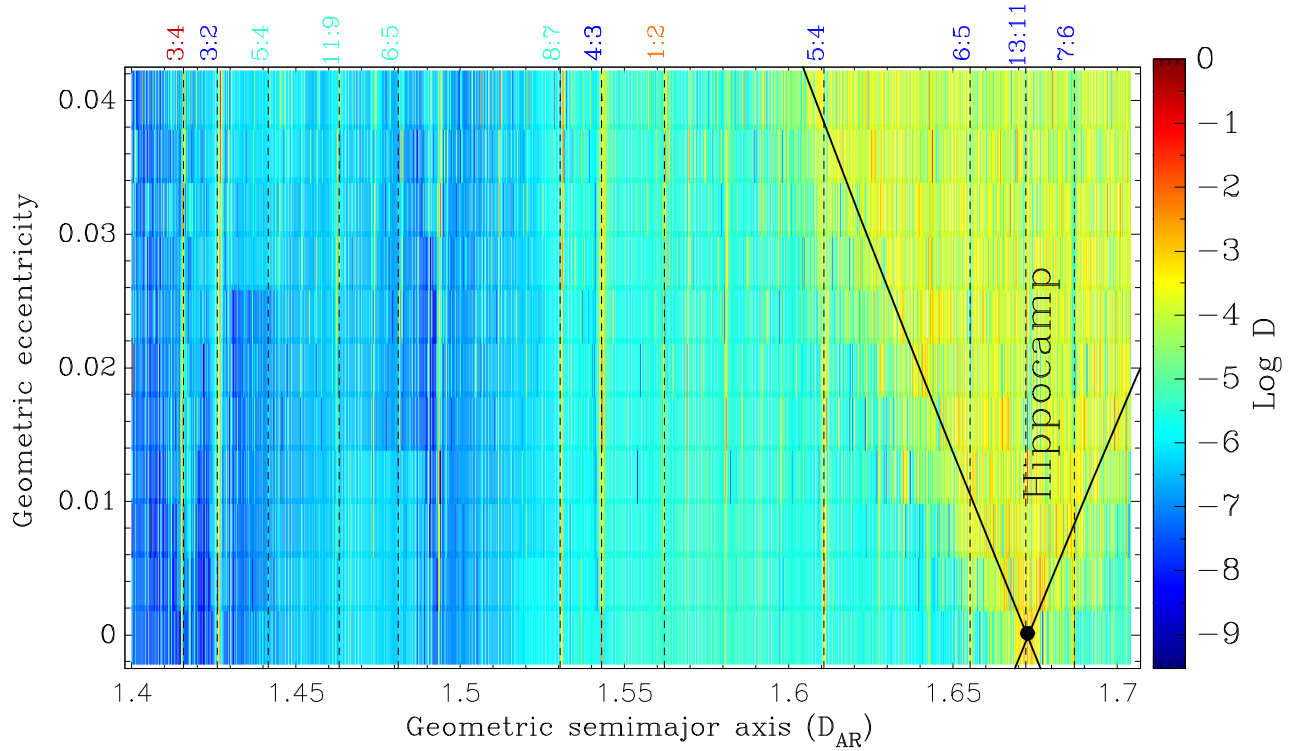
3.4.1.4 Região dos satélites Hipocampo e Proteus

Nas simulações numéricas observamos que as partículas teste localizadas no intervalo de semieixo maior de $1.26D_{AA}$ a $1.6D_{AA}$ apresentam valores de $\text{Log } D$ no intervalo de -6 a -9.5, sendo partículas com órbitas regulares. Observamos que as partículas em torno de Hipocampo não são perturbadas o suficiente para serem removidas. Segundo as observações mais recentes, no intervalo de $1.01D_{AA}$ até além da órbita de Tritão, não foi possível observar um anel, mas pode ser provável encontrar um satélite (SHOWALTER et al., 2019).

A Figura 12 mostra partículas em RMM, por exemplo, a RMM 3:4 com o satélite Larissa, e as RMMs 5:4, 11:9, 6:5 e 8:7 com o satélite Hipocampo. Além disso, temos as RMMs 4:3, 5:4, 6:5 e 7:6 com Proteus apresentadas na Figura 12, sendo que nessa região o valor de $\text{Log } D$ está entre -3 e -5. Notamos que o satélite Proteus forma coorbitais cujo valor médio de t_D das órbitas dessas partículas coorbitais são de $\sim 10^6$ anos. Verifica-se que os satélites Proteus e Hipocampo estão sob o efeito da RMM 13:11 (BROZOVIĆ et al., 2019).

Na Figura 13 observamos que o satélite Proteus é massivo e as partículas teste que estão ao seu

Figura 12 – Mapa de difusão do satélite Hipocampo. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor laranja, marrom, verde e azul pertencem as RMMs dos satélites, Galateia, Larissa, Hipocampo, Proteus, e a partícula, respectivamente. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Hipocampo. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas.



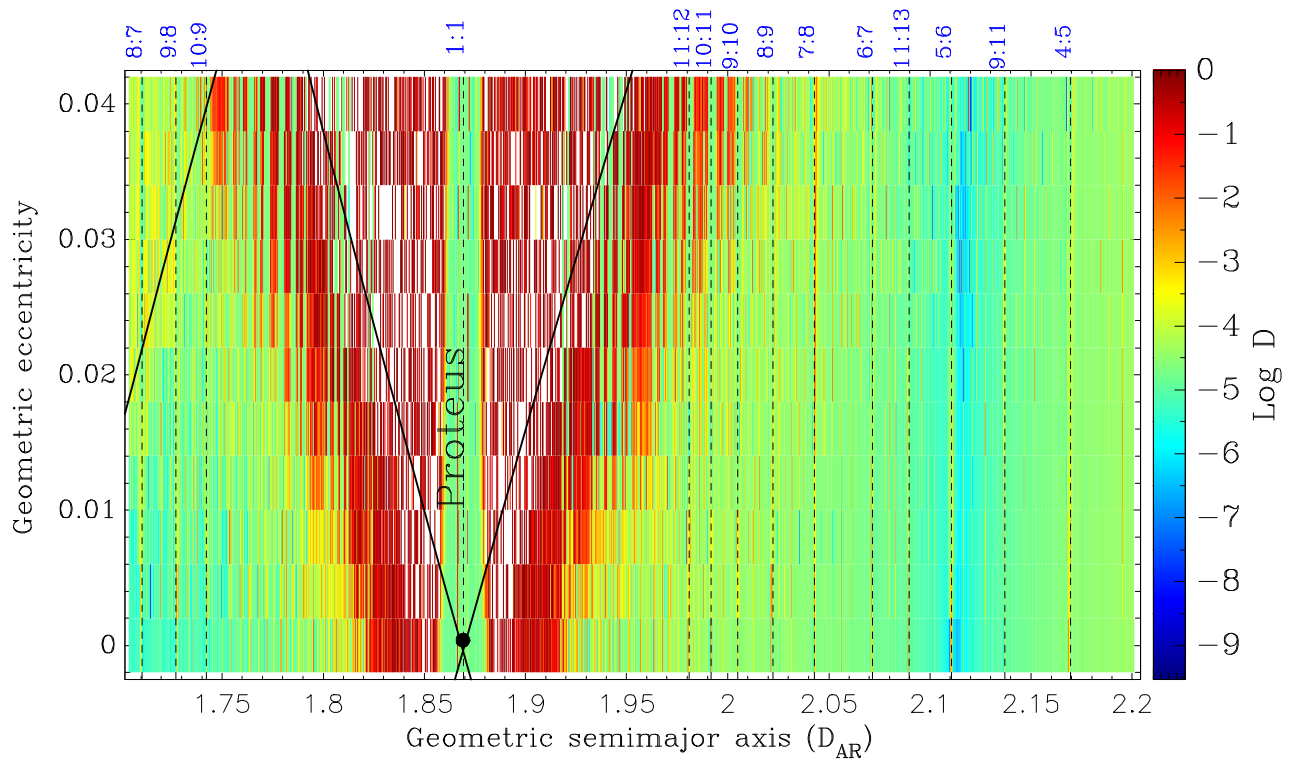
Fonte: próprio autor

redor são removidas. Notamos que um conjunto de partículas que estão em torno desse satélite sobreviveram o tempo total da simulação. No entanto, essas partículas apresentam valores de $\text{Log } D$ próximos de zero. Isto sugere que para simulações de longo período essas partículas serão ejetadas do sistema ou irão colidir com os outros corpos massivos.

Observamos que entre as duas RMMs 5:6 e 9:11 com Proteus, existe uma região de partículas teste com um valor de $\text{Log } D$ no intervalo de -5.5 a -9.0. Também notamos que todas as RMMs são com o satélite Proteus cujos valores das RMMs estão apresentados na parte superior da Figura 13.

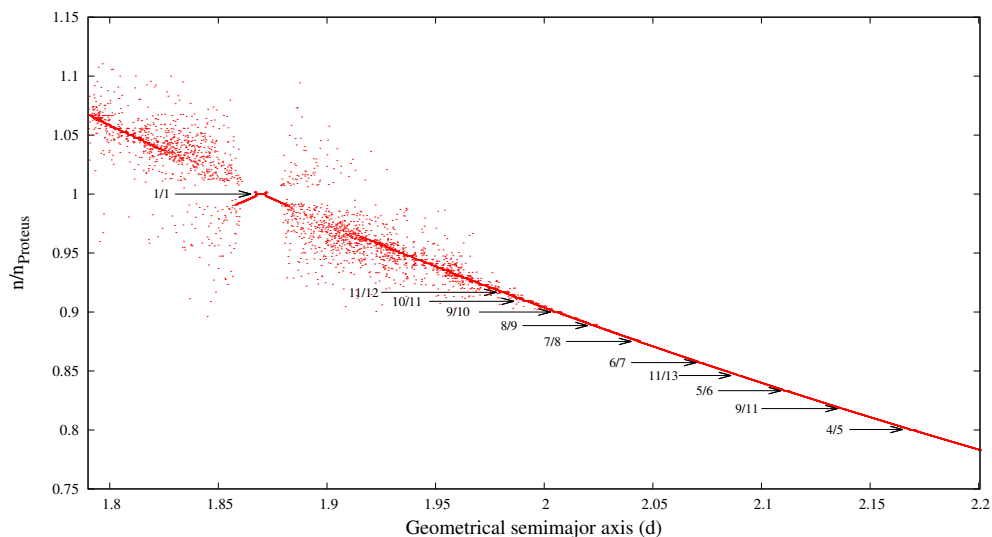
Identificamos as RMMs na curva de frequência próximas à região do satélite Proteus (ver a Figura 14). Na figura do semieixo maior geométrico vs n_p/n_{Proteus} . Na Figura 14 observamos que a curva de frequência apresenta descontinuidade, isto pode ser devido à sobreposição das ressonâncias de movimento médio de ordem superior e/ou o efeito gravitacional que exerce o satélite Proteus.

Figura 13 – Mapa de difusão do satélite Proteus. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números apresentados em cor azul pertencem as RMMs do satélite Proteus e a partícula. As linhas inclinadas são os raios de apocentro e pericentro de Proteus. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou as partículas ejetadas do sistema. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas.



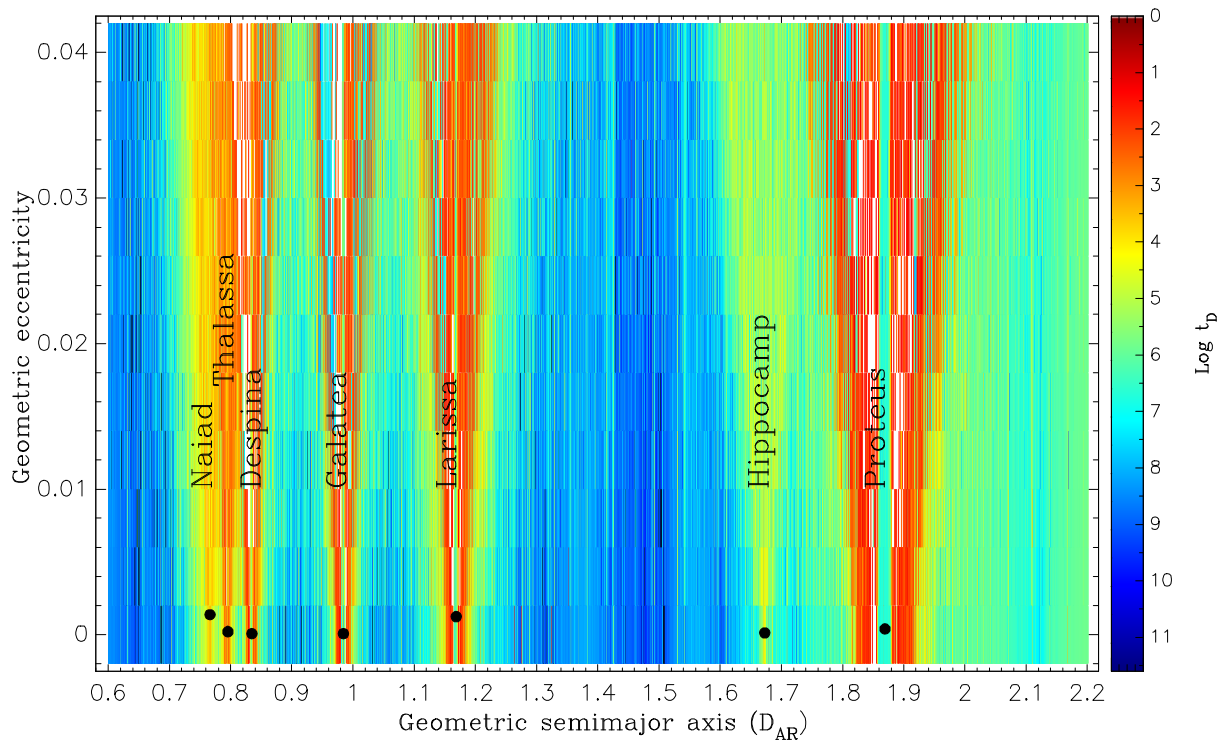
Fonte: próprio autor

Figura 14 – Curva de frequência na região do satélite Proteus. Os platôs, indicados por uma flecha, representam as RMMs do satélite Proteus e a partícula.



Fonte: próprio autor

Figura 15 – A figura mostra o tempo de difusão do sistema interno de Netuno no intervalo de $0.6D_{AA}$ a $2.2D_{AA}$. Os círculos em preto indicam a localização dos satélites.



Fonte: próprio autor

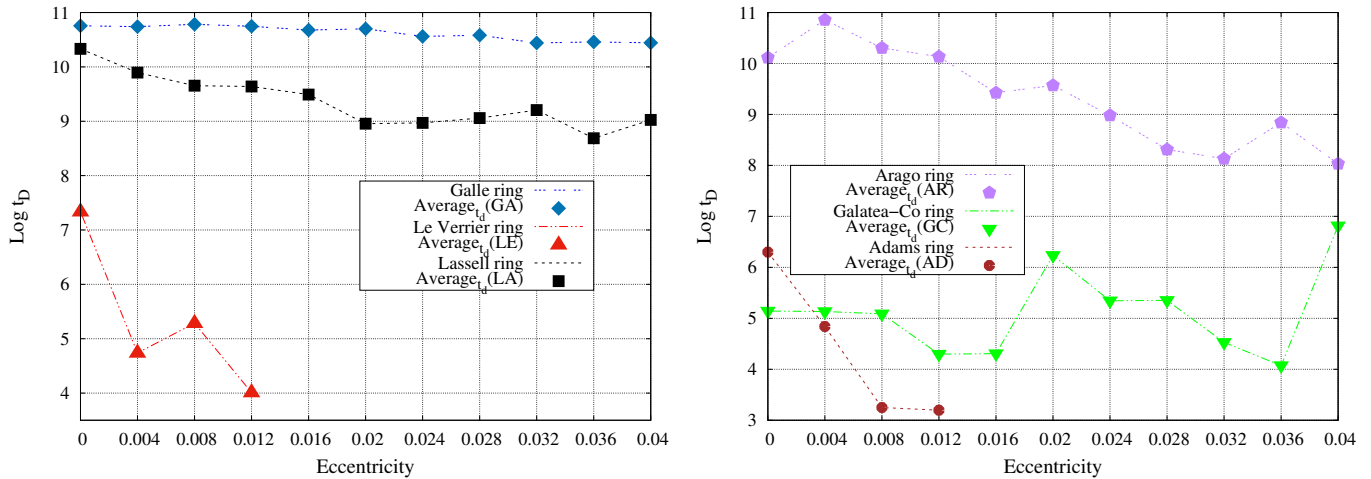
3.5 TEMPO DE DIFUSÃO DO SISTEMA GLOBAL

Os resultados apresentados na Figura 15 mostram o panorama global do sistema interno de Netuno. Observamos que existem partículas teste que apresentam órbitas regulares nos intervalos $[0.6D_{AA} : 0.7D_{AA}]$, $[0.85D_{AA} : 0.95D_{AA}]$ e $[1.2D_{AA} : 1.5D_{AA}]$.

A Figura 16 mostra o comportamento dos anéis do sistema de Netuno em função da excentricidade versus o tempo de difusão das partículas teste. Calculamos o valor médio de t_d das órbitas de cada partícula teste para cada valor de excentricidade, sendo a tendência de maior estabilidade as órbitas das partículas teste que estão no anel Galle (em cor azul). Observamos que a tendência de valor médio de t_d dos anéis Lassell (em cor preto) e Arago (em cor roxa) diminuem a medida que aumenta o valor da excentricidade.

O comportamento do anel Le Verrier (em cor vermelha) difere dos outros anéis mencionados anteriormente. Esse anel somente pode assumir os valores de excentricidade de zero a 0.012. Para maiores valores de excentricidade as partículas desse anel tem $\text{Log } D$ igual a zero. Notamos que na Figura 16 a curva que mostra o anel Adams (em cor marron) decai conforme aumenta o valor da excentricidade. As partículas com valores de excentricidade maiores que 0.012 não sobrevivem até o final da simulação numérica. O anel coorbital de Galatea (em cor verde) é estável para todos os valores de excentricidade.

Figura 16 – Tempo de difusão dos anéis do sistema de Netuno. Os pontos em cor azul, preto, vermelho, roxa, verde e marrom indicam o valor médio t_D para cada valor de excentricidade (ver a figura da esquerda e direita). Na figura da esquerda mostra o decaimento do valor médio do tempo de difusão do anel Le Verrier (cor vermelha), no tanto, o anel Galle apresenta um comportamento quase constante e o anel Lassell apresenta uma variação de t_D , decaindo aproximadamente uma ordem de grandeza. A figura da direita mostra o decaimento do valor médio de t_D dos anéis Adams e Arago, no tanto, o anel Galatea apresenta um valor médio de t_D de $\sim 10^5$ anos.



Fonte: próprio autor

Resultado global das partículas teste e os satélites no sistema de Netuno

Os resultados das simulações numéricas mostraram que 80.7% das partículas teste sobreviveram até o tempo final da simulação numérica. 19.3% das partículas colidiram com os satélites, onde 0.6% das partículas teste colidiram com Naiade, 1.5% do total de partículas colidiram com Thalassa, 3.3%, 3.7% e 3.5% do total colidiram com os satélites Despina, Galatea e Larissa, respectivamente. Somente uma pequena porcentagem (mesmo que 0.%) das partículas colidiram com o satélite Hipocampo e 6.6% do total de partículas teste colidiram com o satélite Proteus, a maior taxa de colisão.

Analisando a porcentagem de partículas teste que sobreviveram até o tempo final da integração numérica, podemos definir intervalos de estabilidade através da intensidade de $\text{Log } D$. De modo que, encontramos que 8.9% e 6.8% das partículas teste que sobreviveram no sistema não permaneceram por muito tempo, esses conjuntos estão nos intervalos de $\text{Log } D$ de $[0 : -1.5]$ e $] -1.5 : -3.0]$, respectivamente. Os conjuntos de partículas teste com porcentagens de 37.2% e 27.8% apresentam órbitas regulares com valores de $\text{Log } D$ nos intervalos de $] -3.0 : -6.0]$ e $] -6.0 : -9.5]$, respectivamente. Portanto, 65% das partículas teste que estão no intervalo de $\text{Log } D$ $] -3.0 : -9.5]$ apresentam tempo de difusão de 10^4 anos e 10^{11} anos.

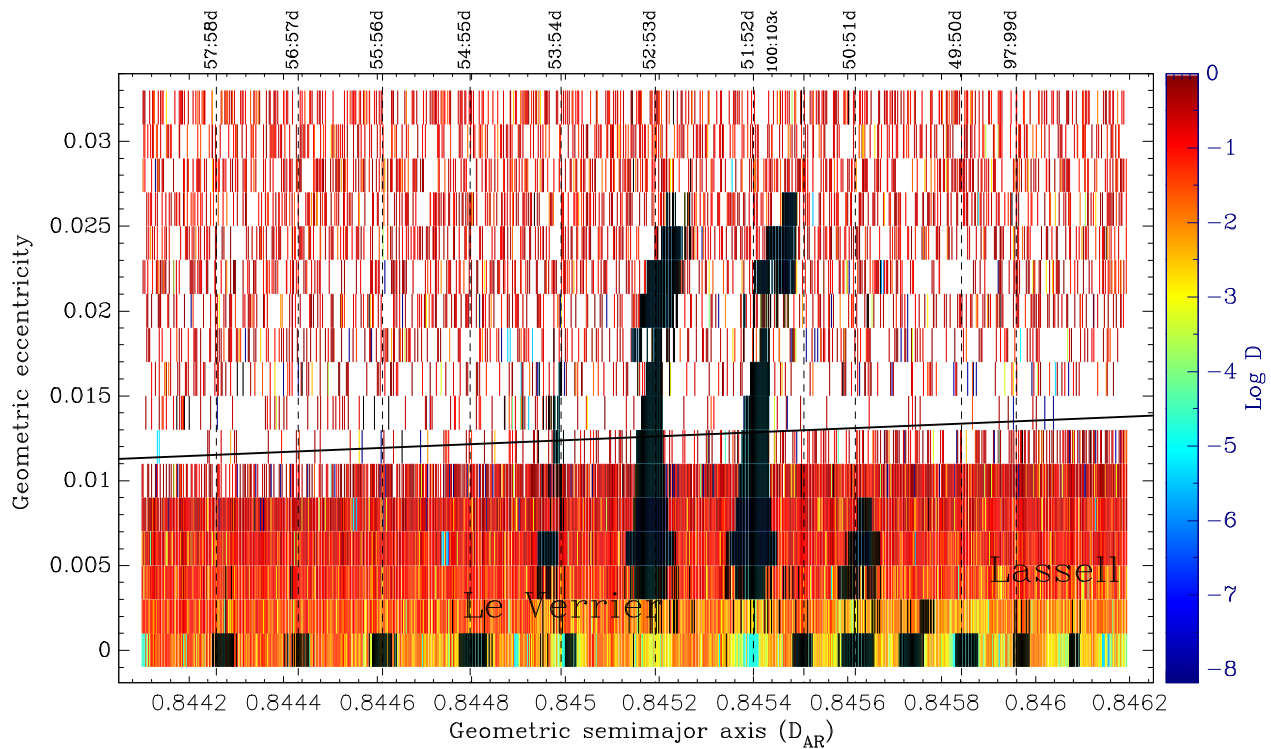
Encontramos uma RMM 73:69 entre Naiade e Thalassa através da divisão das frequências principais dos dois satélites (ver a Tabela 6), confirmando o indicado por Brozović et al. (2019). Encontramos RMMs entre os satélites Thalassa e Despina, Naiade e Despina, e Hipocampo e Proteus que são 27:29, 22:25 e 11:13, respectivamente.

Tabela 6 – Valores numéricos das frequências principais dos satélites obtidos através de Šidlichovský e Nesvorný (1997).

Satélite	(°/dia)	
Naiade	1241.02502653931	N
Thalassa	1172.93295274301	T
Despina	1091.71358955160	D
Galatea	852.135074265312	G
Larissa	658.696375953605	L
Hipocampo	384.534521924908	H
Proteus	325.530886043363	P

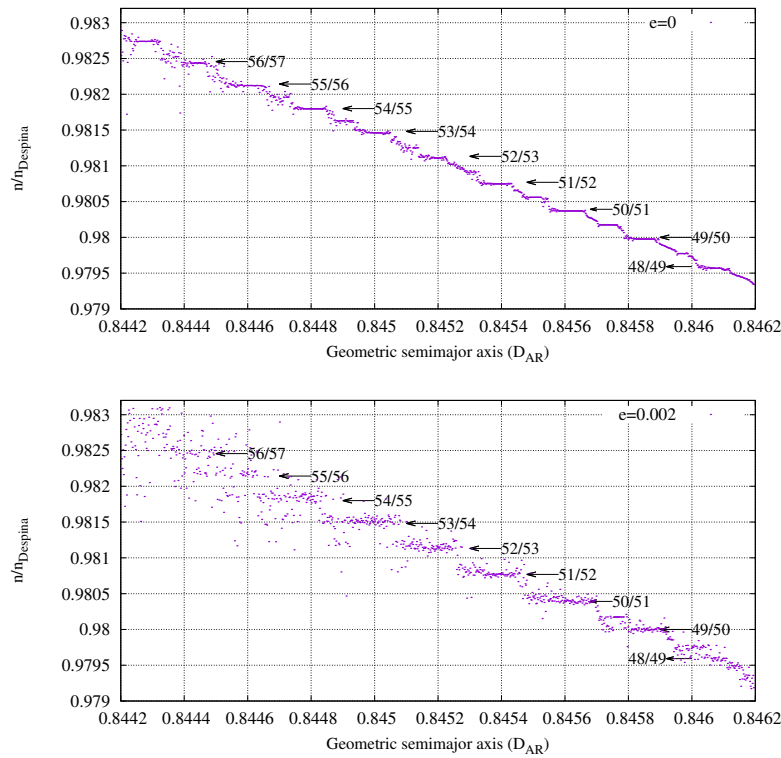
Fonte: próprio autor

Figura 17 – Mapa de difusão do anel Le Verrier (no intervalo de semi-eixo maior geométrico de $0.84459D_{AA}$ a $0.84619D_{AA}$) e a borda do anel Lassell localizado no semi-eixo maior geométrico igual a $0.8453D_{AA}$. As linhas tracejadas verticais correspondem as RMMs cujos números são mostrados na parte superior. Esses números são as RMM de Despina e a partícula. A linha inclinada é o raio do pericentro de Despina. A paleta de cores define a intensidade de $\text{Log } D$, se está próximo de zero a órbita das partículas são irregulares e se $\text{Log } D < -5$ a órbita das partículas são regulares. A região branca corresponde às partículas teste que colidiram com os satélites ou Netuno, ou essa região branca corresponde às partículas ejetadas.



Fonte: próprio autor

Figura 18 – Curva de frequência com excentricidade iguais a 0 e 0.002. Os platôs, indicados por uma flecha, representam as RMMs do satélite Despina e a partícula.



Fonte: próprio autor

3.6 RMM NO ANEL LE VERRIER

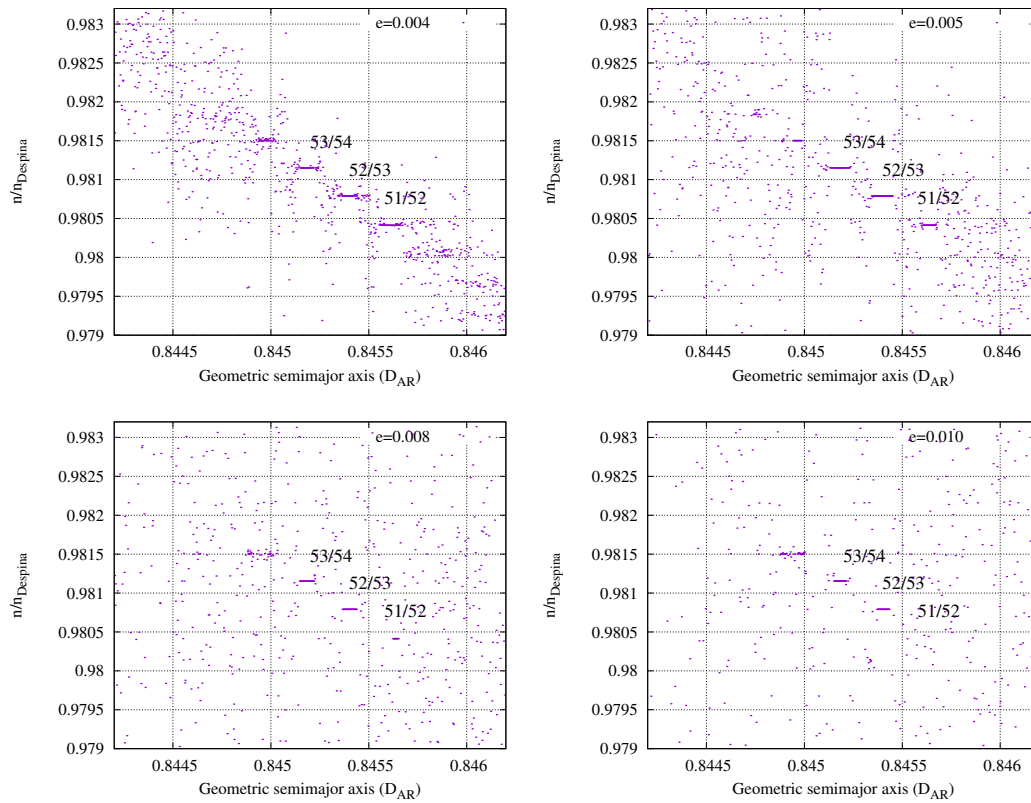
Os resultados apresentados na Figura 17 mostram o zoom da dinâmica das partículas teste no intervalo do anel Le Verrier até a borda inicial do anel Lassell para um conjunto de 22000 partículas teste no intervalo de semieixo maior geométrico de $0.8441D_{AA}$ a $0.846194D_{AA}$, com o passo de $2 \times 10^{-6}D_{AA}$, e os valores de e_{Geo} no intervalo de 0.0 a 0.032, com passo de 2×10^{-3} . Os outros elementos orbitais geométricos são iguais a zero, e o tempo da integração numérica foi de $10^4 T_L$. Observamos três RMMs as quais são a RMM 52:53, 51:52 e 50:51 com o satélite Despina, no intervalo de excentricidade de 0.00 a 0.025. Notamos que a largura da ressonância é percebida se reduzirmos o passo de semieixo maior geométrico (ver a Figura 17).

A Figura 18 mostra a curva de frequências das partículas em relação à frequência do satélite Despina, para as partículas com excentricidade igual a zero e igual a 0.002. A Figura 18 mostra os platôs associadas as RMMs 56:57, 55:56, 54:55, 53:54, 52:53, 51:52, 50:51, 49:50 e 48:49 com o satélite Despina. Observamos que para as partículas teste em RMM com excentricidade igual os platôs são pouco definidos (ver a Figura 18).

Na Figura 19 observamos partículas teste nas RMMs 53:54, 52:53 e 51:52 que estão presentes na curva de frequência para valores de excentricidade de 0.004 até 0.01. Os pontos espalhados são as partículas teste que possuem órbitas irregulares.

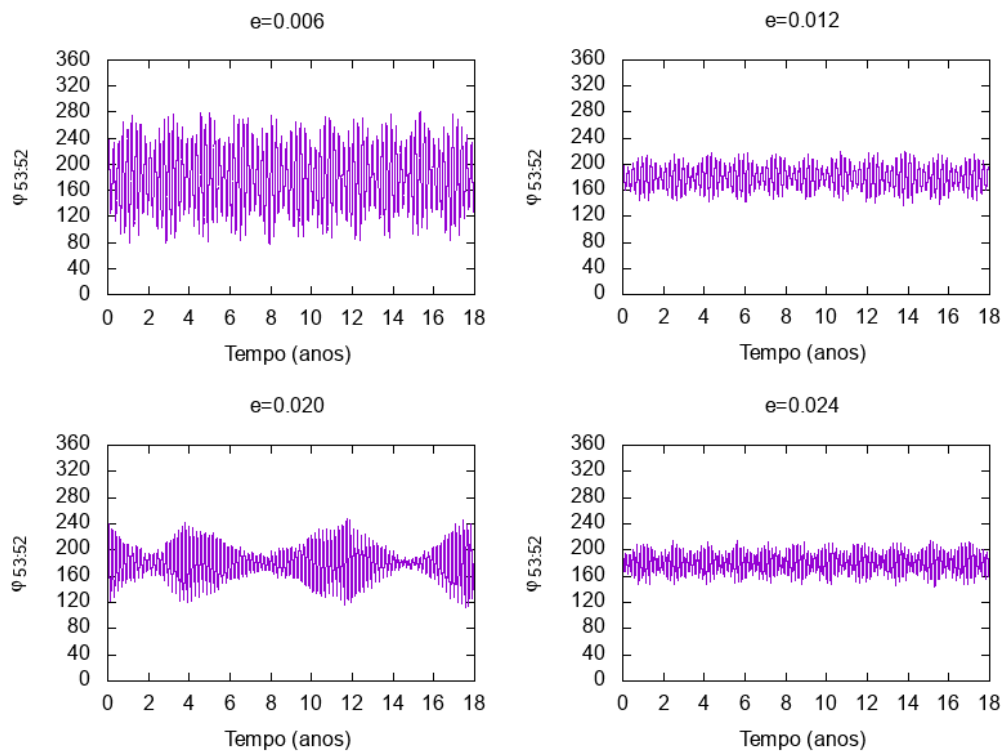
Os resultados apresentados nas Figura 18 e Figura 19 mostram que existem RMMs no anel Le

Figura 19 – Curva de frequência para partículas teste com excentricidade 0.004 a 0.01. Os platôs, indicados por uma zeta, representam as RMMs do satélite Despina e a partícula.



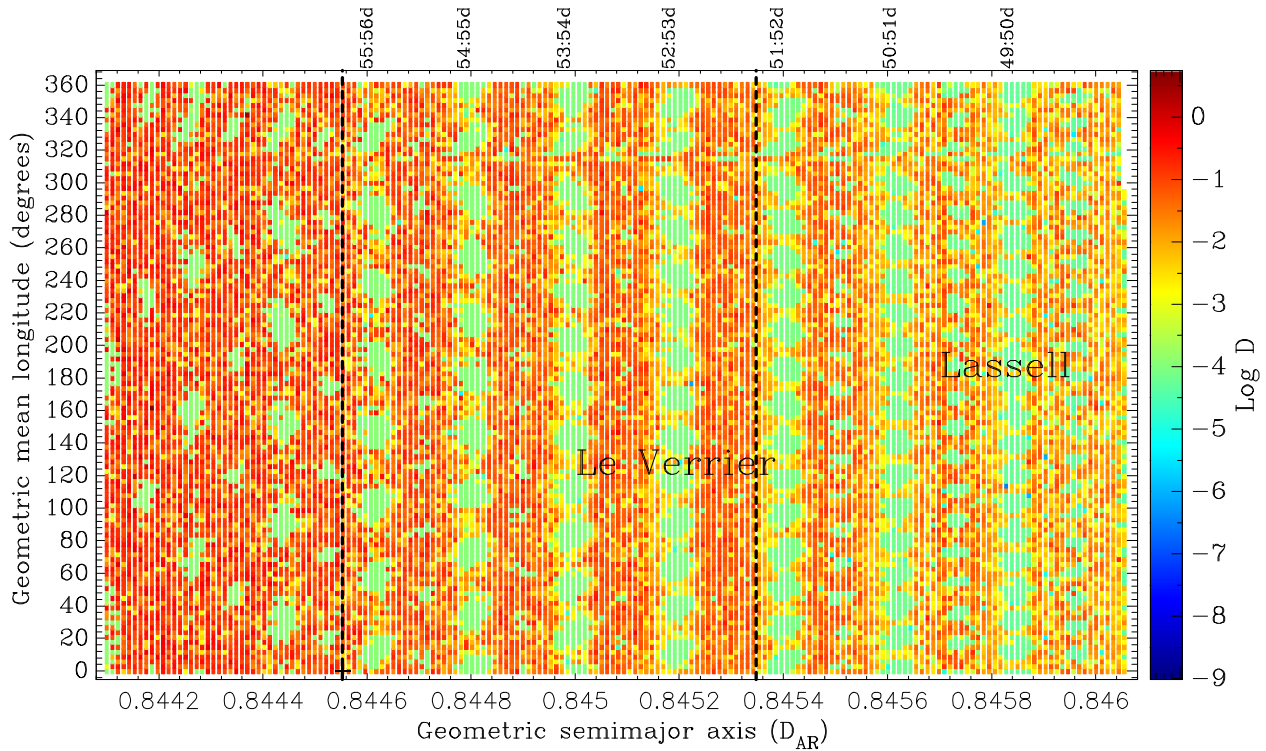
Fonte: próprio autor

Figura 20 – Evolução temporal do ângulo ressonante $\phi_{53:52}$ para diferentes valores de excentricidade.



Fonte: próprio autor

Figura 21 – Mapa de difusão a vs λ do anel Le Verrier. A figura mostra a dinâmica global do anel Le Verrier (no intervalo de semi-eixo maior geométrico de $0.84459D_{AA}$ a $0.84619D_{AA}$) e a borda do anel Lassell para as partículas com um valor de excentricidade geométrica inicial igual a 1×10^{-4} . A linha tracejada vertical localizada no semieixo maior $0.84459D_{AA}$ indicam a borda do anel Le Verrier e a linha tracejada vertical localizada no semieixo maior $0.8453D_{AA}$ indica a borda do anel Lassell. Os lóbulos de cor verde representam às partículas que estão em RMM. Os números da parte superior da figura indicam a RMM de Despina e a partícula.



Fonte: próprio autor

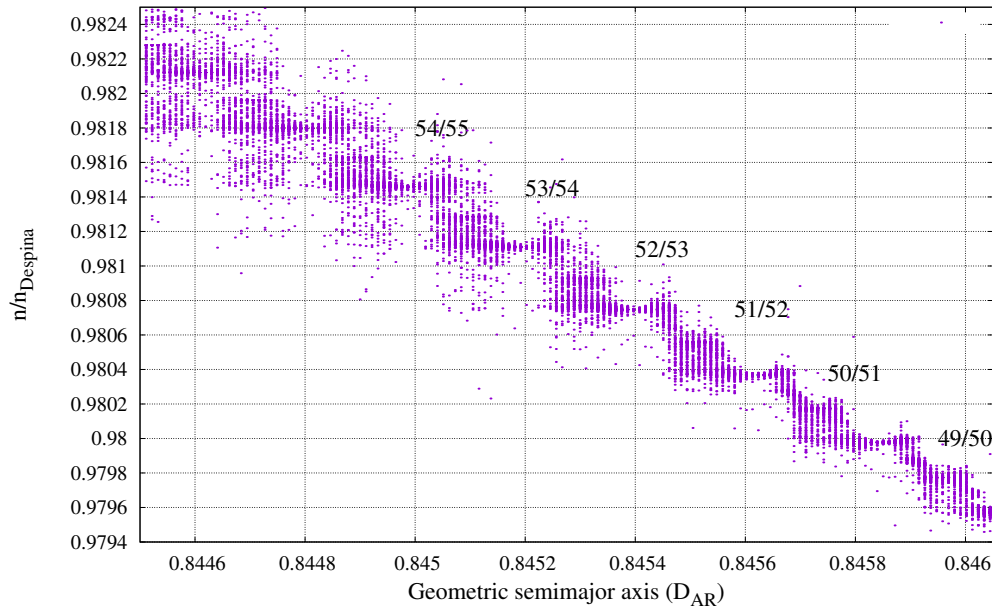
Verrier e na borda do anel Lassell, confinados para os valores de excentricidade de 0 a 0.026. Essas RMMs separam as bordas dos dois anéis.

Os resultados apresentados anteriormente mostram que as partículas com ângulo ressonante $\phi_{53:52} = 53\lambda_{particula} - 52\lambda_{Despina} - \varpi_{Despina}$ libram em torno de 180° . As amplitudes dos ângulos ressonantes diferem dependendo dos valores de excentricidade, ou seja, valores iguais a 0.006, 0.012, 0.020 e 0.024 (ver a Figura 20).

Agora estamos interessados em estudar o comportamento dinâmico das partículas teste na grade a_{Geo} vs λ_{Geo} para um conjunto de partículas com excentricidade igual a 1×10^{-4} , e assim analisar a largura das RMM no anel Le Verrier.

A Figura 21 mostra a dinâmica do anel Le Verrier para um conjunto de 22000 partículas teste, cujo valor da longitude média (λ_{Geo}) está distribuído no intervalo de 0° a 360° . Os outros elementos orbitais angulares são iguais a zero. A grade a vs λ foi gerada para observar as ressonâncias de movimento médio que aparecem no anel Le Verrier e o tamanho da largura dessas RMMs. O tempo da integração numérica foi de $10^4 T_{Larissa}$. Observamos que aparecem colunas de partículas de cor verde que estão em RMMs com o satélite Despina. Observamos que a borda interna do anel Lassell está próxima à

Figura 22 – Curva de frequência do Anel Le Verrier para partículas com excentricidade igual a 1×10^{-4} . Os platôs, indicados pelos números, representam as RMMs do satélite Despina e a partícula.



Fonte: próprio autor

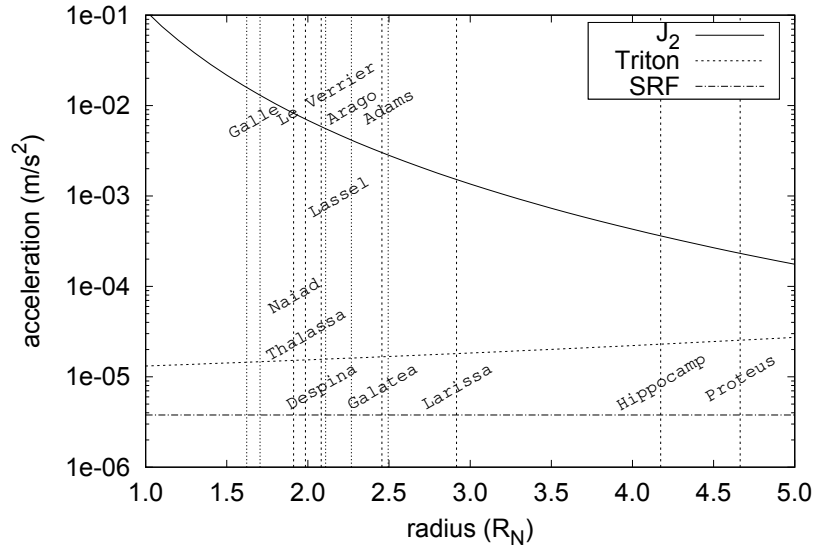
ressonância 51:52 com Despina, localizada no semieixo maior geométrico igual a $0.845399678 D_{AA}$.

A Figura 22 mostra as ressonâncias de movimento médio com Despina no anel Le Verrier sendo as RMMs de primeira ordem de 54:55 até 49:50. A largura da RMM 51:52 é aproximadamente $8 \times 10^{-5} D_{AA}$ (~ 5 km).

Na simulação numérica todas as partículas teste sobreviveram até o tempo final. Notamos que 67.8% das partículas teste que estão no intervalo de $\log D$ de 0 até -3.0 apresentam órbitas irregulares. 32.2% das partículas teste que estão no intervalo de $\log D$ de -3.0 até -7.3 apresentam órbitas regulares e continuaram no sistema por um longo tempo de difusão.

Os limites do anel Le Verrier estão mostrados por linhas tracejadas. A borda interna do anel Lassell está apresentada na cor preta. Observamos que a partir de $0.84536 D_{AA}$ aparece uma quantidade de partículas estáveis que estão em RMM de ordem superior.

Figura 23 – A figura mostra a intensidade das forças que atuam no sistema de anéis de Netuno em função da distância. As localizações dos satélites e dos anéis são exibidos na figura como linhas tracejadas verticais. A curva referente a J_2 está representada como uma linha. A linha tracejada inclinada, localizada no médio da figura, representa o efeito gravitacional de Tritão e a linha tracejada horizontal representa o efeito da pressão de radiação solar.



Fonte: próprio autor

3.7 FORÇAS DISSIPATIVAS NOS ANÉIS DE NETUNO

Com relação à dinâmica dos anéis de Netuno, mostramos (na seção 3.5) que os anéis estão localizados em regiões estáveis, alguns anéis são estáveis para pequenos valores de e . No entanto, como esses anéis são compostos de partículas muito pequenas, essas partículas sofrem os efeitos de forças dissipativas, como a força da pressão de radiação solar. A Figura 23 mostra a intensidade da força devido ao achatamento de Netuno (a_{oblat}), a força da pressão de radiação solar (a_{SRF}) e os efeitos gravitacionais do satélite Tritão (a_T) para uma partícula de $1\mu\text{m}$. Essas equações são dadas por (MURRAY; DERMOTT, 1999; MIGNARD, 1984)

$$a_{oblat} = \frac{3GM_N J_2 R_N^2}{a^4} \quad (1)$$

$$a_{SRF} = \frac{3\Phi Q_{pr}}{4c\rho r} \quad (2)$$

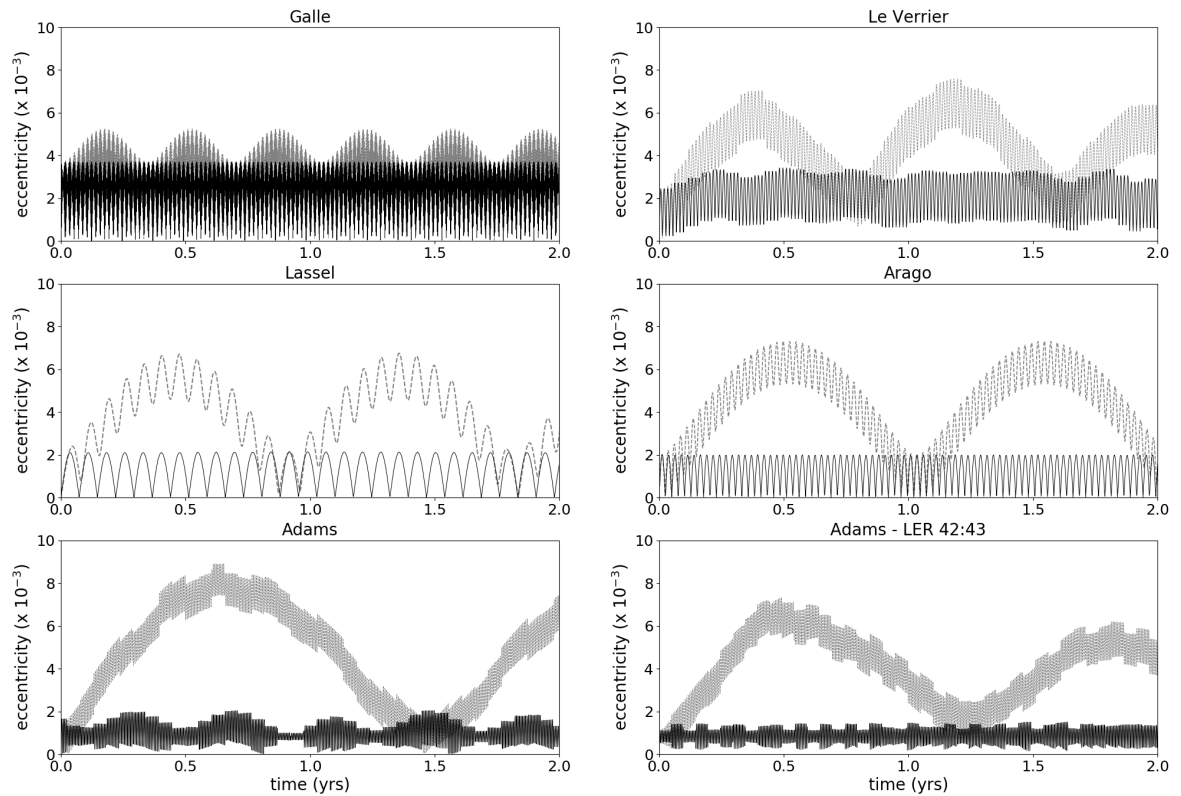
$$a_T = \frac{Gm_T}{(a - a_T)} \quad (3)$$

onde Φ é o fluxo solar, Q_{pr} é uma constante que assumimos ser igual a 1 (MIGNARD, 1984), c é a velocidade da luz, ρ é a densidade da partícula (assumimos o valor igual a 1g/cm^3), r é o raio da partícula, m_T e a_T são a massa e o semieixo maior do satélite Tritão, respectivamente.

Na Figura 23, a força da radiação solar produz menos efeito nas partículas quando comparada aos efeitos de J_2 de Netuno e os efeitos gravitacionais do satélite Tritão.

Para analisar os efeitos desta força dissipativa foi realizado um conjunto de simulações numéricas para as partículas do anel sob os efeitos de J_2 e J_4 de Netuno e os oito satélites. O sistema também foi

Figura 24 – Variação no tempo da excentricidade de uma partícula representativa de cada anel. O nome do anel é mostrado na parte superior de cada figura. Cada sub-figura possui dois gráficos, sem e com os efeitos da pressão da radiação solar. Os efeitos da pressão da radiação solar são responsáveis pelo pequeno aumento na excentricidade da partícula de $1\mu\text{m}$.



Fonte: próprio autor

analisado sob o efeito da força da pressão de radiação solar. A Figura 24 mostra a variação temporal da excentricidade de uma partícula representativa localizada em cada anel, Galle, Le Verrier, Lassell, Arago e Adams (com e sem o efeito da ressonância com Galatea).

A excentricidade de uma partícula de $1\mu\text{m}$ aumenta devido aos efeitos da pressão de radiação solar. No entanto, esse acréscimo é pequeno (Figura 24). Todas as excentricidades permanecem na ordem de 10^{-3} . Existem dois gráficos relacionados ao anel de Adams, o gráfico denominado Adams-LER 42:43 leva em consideração a ressonância com o satélite Galatea. O confinamento devido a esta ressonância diminui o acréscimo da excentricidade da partícula do anel. O anel Adams e seus arcos foram investigados por Winter, Madeira e Sfair (2020).

Devido ao aumento do valor de excentricidade, as partículas do anel podem alterar suas excursões radiais. Nesse caso as partículas não cruzam as órbitas de nenhum satélite. As bordas dos anéis Le Verrier, Lassell e Arago apresentam um aumento na sobreposição (ver a Figura 24).

Com relação ao anel co-orbital de Galatea nossos resultados mostraram que embora todas as pequenas partículas permaneçam confinadas azimuthalmente (nenhuma colisão com Galatea foi detectada), a menor partícula ($1\mu\text{m}$ de raio) realiza oscilações radiais de cerca de 900 km, enquanto a oscilação

Tabela 7 – Tempo de vida das partículas de $1\mu m$ e $10\mu m$, devido ao efeito do arrasto de Poynting-Robertson

anel	t (10^4 anos) - $1\mu m$	t (10^6 anos) - $10\mu m$	cruza a órbita de
Galle	50	5	Netuno
Le Verrier	1.1	0.11	Despina
Lassel	4.8	0.48	Despina
Arago	8.5	0.85	Despina
Adams	1.6	0.16	Galatea

Fonte: próprio autor

Tabela 8 – Tempo de vida das partículas de $1\mu m$ e $10\mu m$, devido ao efeito do arrasto por plasma.

anel	t (anos) - $1\mu m$	t (anos) - $10\mu m$	cruza a órbita de
Galle	400	4000	Naiad
Le Verrier	800	8000	Galatea
Lassel	700	7000	Galatea
Arago	600	6000	Galatea
Adams	1400	1400	Larissa

Fonte: próprio autor

de uma partícula de $10\mu m$ de raio é de apenas ~ 120 km. Essas excursões radiais não cruzam a borda interna do anel de Adams. Partículas maiores ($30\mu m$, $50\mu m$ e $100\mu m$ de raio), como esperado, permanecem próximas à região co-orbital. Em 10^5 anos, o semieixo maior da menor partícula diminui até 7000 km, cruzando o anel Arago e a borda externa do anel Lassel (57200 km).

A escala de tempo por decaimento das pequenas partículas causadas pela componente de Poynting-Robertson dá o tempo que cada anel cruzará a órbita do satélite e, portanto, seu tempo de vida. A componente de Poynting-Robertson da força da radiação solar gera uma diminuição secular no semieixo maior da partícula, e a escala de tempo (τ_{pr}) pode ser dada por (MIGNARD, 1984)

$$\tau_{pr} \sim 10^6 r. \quad (4)$$

Partículas de $1\mu m$ do anel Galle colidiram com Netuno em 5×10^5 anos, enquanto as partículas maiores ($10\mu m$ de raio) apresentam um tempo de 5×10^6 anos para alcançar Netuno. Os anéis Le Verrier, Lassel, Arago e Adams possuem tempos de vida semelhantes, as pequenas partículas ($1\mu m$ de raio) chegarão à órbita de um determinado satélite em 10^4 anos e as partículas maiores ($10\mu m$ de raio) em 10^5 anos. Esses valores são apresentados na Tabela 7.

O arrasto devido ao plasma também pode reduzir o tempo de vida das partículas do anel, no entanto, não incluímos essa força devido as poucas informações no sistema de Netuno. A força azimutal causada pelos íons nas partículas do anel é dada por Hedman et al. (2013)

$$F_{PD} = \pi a^2 (n - n_N)^2 r^2 \rho_i. \quad (5)$$

onde n_N é a taxa de rotação ($n_N \sim 10.9$ rad/dia) e ρ_i é a densidade de massa de íons de plasma. O

Tabela 9 – Variação da excentricidade geométrica em função do tempo dos satélites internos, cujo tempo de integração é de $\sim 10^5$ anos

Satélite	Intervalo($e_{Geométrico}$)
Naiade	[0; 0.003145]
Thalassa	[0; 0.000371]
Despina	[0; 0.000343]
Galatea	[0; 0.000223]
Larissa	[0; 0.001571]
Hipocampo	[0; 0.000534]
Proteus	[0; 0.000714]

Fonte: próprio autor

efeito do arrasto do plasma aumenta o semieixo maior das partículas na região dos anéis. A variação de tempo estimada do semieixo maior é

$$\frac{da}{dt} \sim 10^{-2} \left(\frac{\rho_i}{1 \text{ amu/cm}^3} \right) \left(\frac{1 \mu m}{r} \right) \text{ km/year} \quad (6)$$

assumimos que o plasma está composto principalmente por H^+ (1 amu) e o número da densidade é igual a $10^3/\text{cm}^3$ (LYONS, 1995). Obtemos que o semieixo maior das partículas de tamanho de $1 \mu m$ aumenta na ordem de 10 km por ano. O tempo para as partículas do anel cruzarem a órbita do satélite externo é dado na Tabela 8.

3.8 SATÉLITES HIPOTÉTICOS NO SISTEMA INTERNO DE NETUNO

Segundo Renner et al. (2014) satélites com raios menores que 6 km não poderiam ser detectados pela sonda Voyager 2 durante sua passagem pelo sistema de Netuno (SMITH et al., 1989; PORCO et al., 1995). Devido a isto, consideramos analisar um conjunto de satélites hipotéticos que poderia estar presente no sistema, sem serem vistos pela sonda.

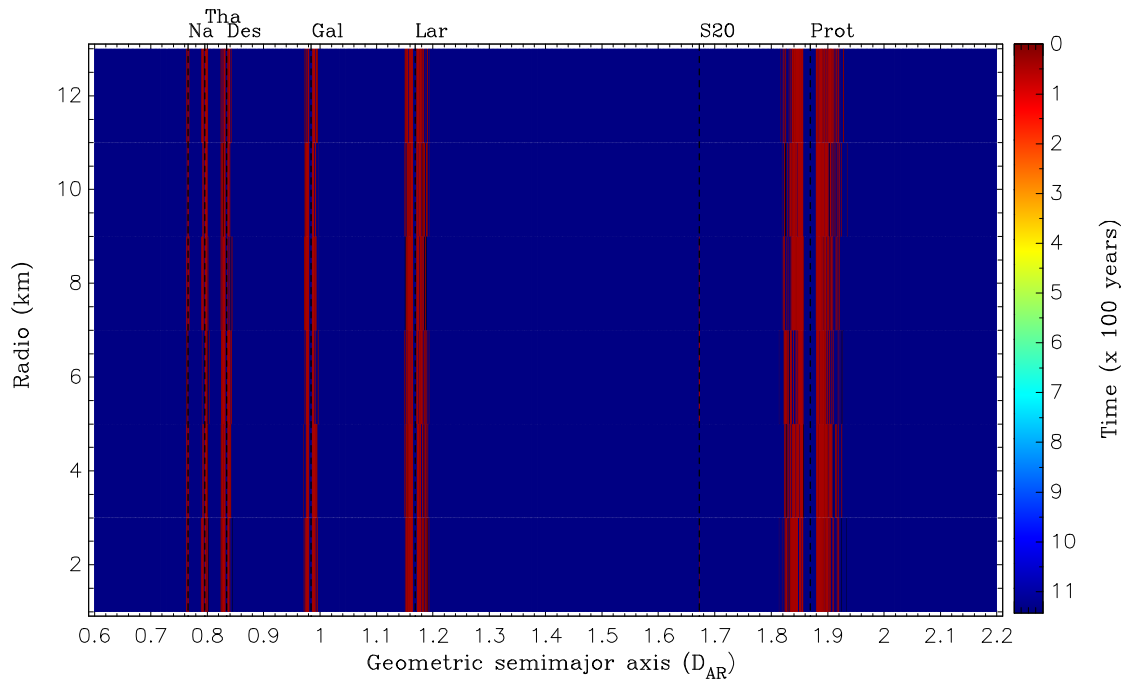
Utilizamos o integrador Bulirsch-Stoer do pacote MERCURY para realizar as simulações numéricas. As condições iniciais para os elementos orbitais geométricos são geradas para o intervalo de semieixo maior de $0.6D_{AA}$ a $2.2D_{AA}$. Os valores de excentricidade (e), inclinação (i), longitude de pericentro (ϖ), longitude do nodo ascendente (Ω) e longitude média (λ) foram assumidos iguais a zero.

Os parâmetros físicos dos satélites hipotéticos são os seguintes: a densidade (ρ) é igual a 1.3 g/cm^3 que é igual aos satélites internos, o raio dos satélites hipotéticos (R_{sh}) está no intervalo de 2 km até 12 km e a massa do satélite hipotético (M_{sh}) é calculada de acordo com a equação $M_{sh} = V_{sh}\rho$, onde $V = \frac{4}{3}\pi R_{sh}^3$ e V_{sh} é o volume do satélite hipotético.

O total de corpos utilizados nas simulações numéricas foi 15996 satélites hipotéticos. Ditos satélites foram colocados cada um no arquivo de entrada big.in. Isto indica que foram realizadas 15996 simulações numéricas. O tempo total da integração numérica para cada simulação numérica foi 1141.8 anos ou $\sim 10^6 T_{Galatea}$ ($T_{Galatea}$ é o período orbital de Galatea).

Na Figura 25 observamos que os satélites hipotéticos sofrem a maior perturbação quando estão próximos aos satélites de Netuno. Os satélites hipotéticos (em cor vermelha) têm um tempo de vida

Figura 25 – Grade a vs R , satélites hipotéticos no sistema de Netuno, a paleta de cores indica o tempo de vida dos satélites hipotéticos.



Fonte: próprio autor

menor que os outros que estão afastados (em cor azul). As linhas tracejadas indicam as localizações dos satélites do sistema de Netuno no semieixo maior geométrico. A Figura 25 mostra que os satélites hipotéticos mais perturbados apresentam um tempo de vida menor que ~ 300 anos.

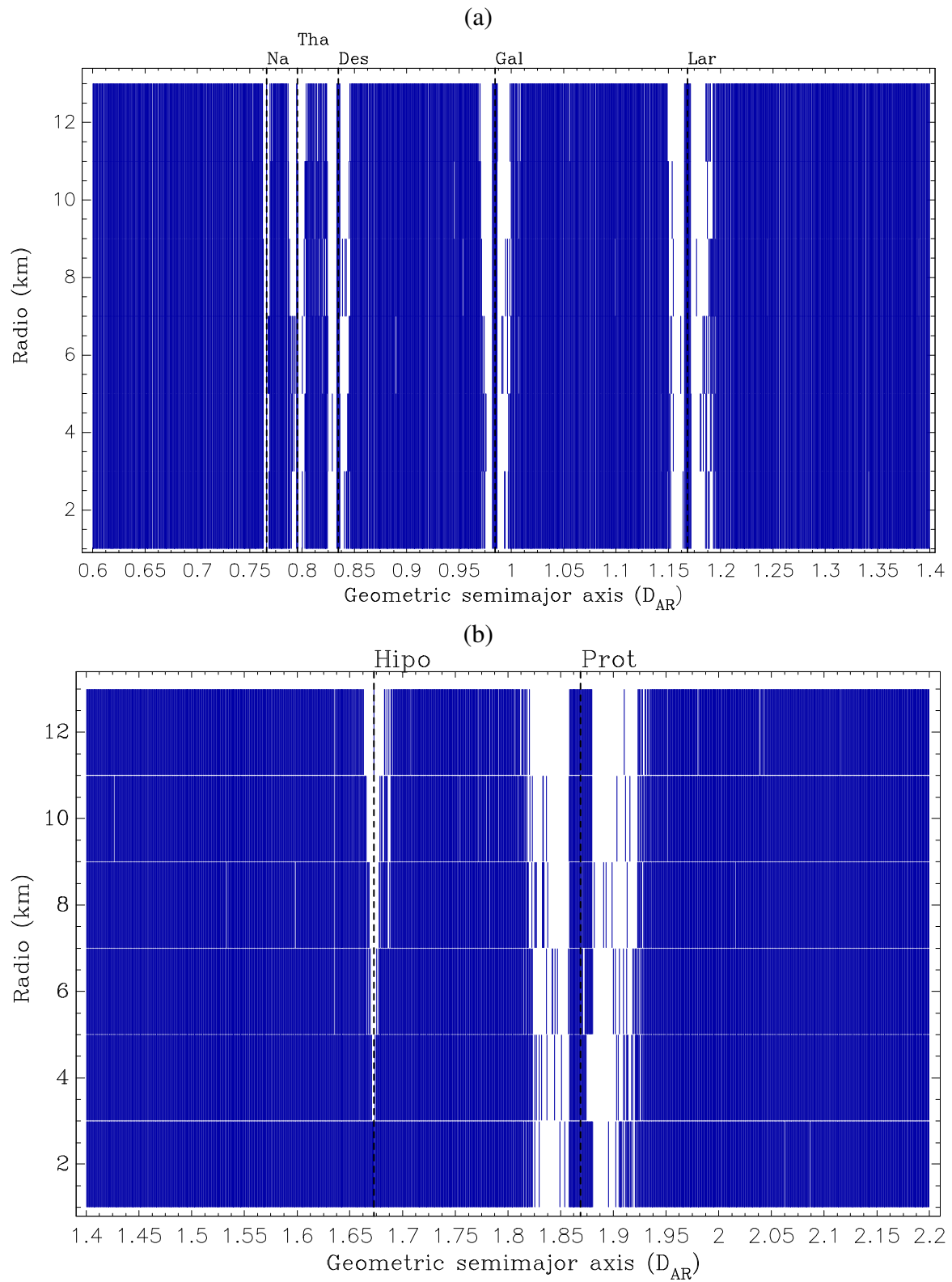
Santos (2010) selecionou um conjunto de satélites hipotéticos que não induzem um acréscimo no valor da excentricidade da ordem de 10^{-3} nas órbitas dos satélites do sistema de Plutão, Nix e Hidra. A Tabela 9 mostra os intervalos da variação da excentricidade geométrica dos satélites internos do sistema de Netuno cujo tempo de integração foi $\sim 10^5$ anos. Deste modo, garantimos o valor máximo que pode alcançar cada satélite conhecido e assim determinar se os satélites internos são perturbados pelos satélites hipotéticos.

Portanto, excluimos os satélites hipotéticos que podem causar algum acréscimo no valor da excentricidade dos satélites internos (Figura 26(a) e Figura 26(b)) escolhendo os menores valores de excentricidade que $e_{Geométrico}(max) + 10^{-4}$. Selecionamos somente aqueles satélites hipotéticos que não induzem um acréscimo no valor da excentricidade na ordem de 10^{-4} .

As Figura 26(a) e Figura 26(b) apresentam o tempo final das simulações numéricas dos satélites hipotéticos incluindo o ajuste, devido à condição dos intervalos de excentricidade máxima que pode alcançar cada satélite conhecido. Além disso, nas Figura 26(a) e Figura 26(b) observamos que podem existir satélites hipotéticos coorbitais a cada satélite do sistema de Netuno.

Identificamos que o valor da excentricidade dos satélites internos não sofreram uma perturbação considerável, portanto podem existir mais satélites no sistema interno de Netuno, desde que tenham raio menor que 12 km.

Figura 26 – Grade a vs R , satélites hipotéticos no sistema de Netuno.



Fonte: próprio autor

3.9 DISCUSSÃO DO CAPÍTULO

Verificamos que o tempo de vida das partículas teste nos anéis Galle e Lassell estão no intervalo de tempo de difusão de 10^9 anos a 10^{11} anos para todos os valores de excentricidade. O anel Le Verrier está no intervalo de tempo de difusão de 10^4 anos a 10^7 anos para valores de excentricidade de 0 a 0.012. No entanto, quando diminuimos o passo dos semieixo maior, aparecem partículas em ressonância para maiores valores de excentricidade. Essas partículas sobreviveram, no intervalo de excentricidade de 0 a 0.025, com um tempo de difusão de 10^6 anos.

O anel Arago é estável, cujo tempo de difusão das partículas teste está no intervalo de tempo de 10^8 anos até 10^{11} anos, para partículas teste com valores de excentricidade de 0 e 0.004. O tempo de difusão do anel co-orbital de Galatea está no intervalo de 10^4 anos a 10^7 anos.

Mostramos que as RMMs 52:53 e 53:54 com o satélite Despina, sugeridas por Miner, Wessen e Cuzzi (2007), aparecem no anel Le Verrier. Além disso, encontramos um conjunto de partículas que estão em RMM. Essas partículas possuem valores de excentricidade iguais a zero. Identificamos que a RMM 51:52 com o satélite Despina aparece na borda do anel Lassell, cujos ângulos ressonantes das partículas libram em torno de 180° (ver a Figura 17 e Figura 20). O conjunto de partículas teste em RMM 52:53 e 53:54 podem ser a causa do pico da intensidade do brilho na borda interna do anel Le Verrier, seguindo o dado observacional apresentado por Pater et al. (2018).

Os resultados apresentados para os anéis indicam que eles são estáveis. Realizamos um estudo detalhado do sistema interno incluindo o efeito da força de radiação Solar e o arrasto de plasma.

A pressão da radiação solar é importante para as partículas do anel de Júpiter, Saturno, Urano e até mesmo Plutão. No sistema de Netuno, essa força dissipativa causa apenas pequenas variações nas excentricidades das partículas do anel. As excentricidades das partículas do anel são da ordem de 10^{-3} devido às perturbações gravitacionais dos satélites essas permanecem nesta mesma ordem. As partículas não cruzam as órbitas dos satélites quando esses novos valores de excentricidade são assumidos.

O tempo de vida das partículas dos anéis é provavelmente devido à diminuição do semieixo maior causado pelos efeitos seculares da componente do arrasto de Poynting-Robertson. A vida útil dos anéis que possuem partículas do tamanho de $1 \mu\text{m}$ é de $\sim 10^4$ anos, e 10^5 anos quando as partículas são maiores ($10 \mu\text{m}$ de raio). O arrasto do plasma pode ser uma força dissipativa importante, mas precisamos de mais informações para analisar os efeitos nas partículas dos anéis.

A maior parte dos resultados apresentados nesse capítulo foram publicados na revista *Astrophysics and Space Science Springer* que está no Anexo A.

4 SISTEMA KEPLER-90

A procura de exoplanetas em diferentes sistemas extrassolares está sendo realizada com sucesso há décadas. Observações realizadas pelos telescópios até o momento confirmaram 4521 exoplanetas e 3353 sistemas planetários de acordo com o censo da NASA¹. Por exemplo, a estrela *HD 34445* que foi descoberta no ano 2010, possui um sistema planetário formado por 6 planetas com os valores de semieixo maior no intervalo de 0.2687 UA a 6.36 UA e valores de excentricidade no intervalo de 0.014 até 0.090 (GEORGAKARAKOS; DOBBS-DIXON, 2019). Por outro lado, temos o sistema TRAPPIST-1 contendo 7 exoplanetas confirmados pelo Telescópio Espacial Spitzer (DUCROT et al., 2020), com o intervalo de semieixo maior compreendido entre 0.01154 UA e 0.06189 UA. A dinâmica desse sistema foi estudada por Luger et al. (2017), Grimm et al. (2018), Agol et al. (2021) que verificaram que todos os planetas estão em ressonância de movimentos médios.

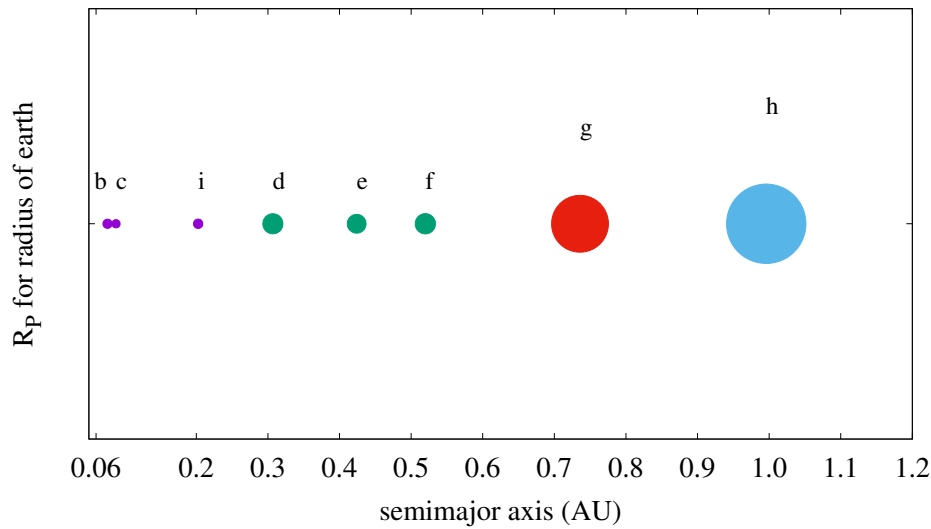
Existe um conjunto de sistemas extrassolares nomeados "*Sistemas com planetas internos bem compactados*", cuja característica principal é concentrar a maior quantidade de planetas próximos à estrela, ou seja, com semieixo maior próximo a 0.1 UA (RAGOZZINE; TEAM, 2012). Por exemplo, o sistema Kepler-80 que possui 6 planetas, sendo o planeta *f* o mais interno do sistema com semieixo maior igual a 0.0175 UA, e o planeta mais externo com semieixo maior de ~ 0.1418 UA (MACDONALD et al., 2016; SHALLUE; VANDERBURG, 2018).

Observações feitas pelo Telescópio Kepler durante quatro anos mostraram que existem sistemas multi-planetários, que possuem entre uma ou oito planetas (BORUCKI et al., 2010; BORUCKI et al., 2011). Isto colaborou no desenvolvimento de vários modelos dinâmicos sobre a estabilidade dos planetas em diferentes sistemas extrassolares, principalmente nos sistemas Kepler. Migaszewski, Słonina e Goździewski (2012) analisaram a estabilidade do sistema Kepler-11, e identificaram que o sistema possui ressonâncias de movimentos médios dos planetas, sendo a superposição dessas RMMs a principal fonte de instabilidade no sistema. Por outro lado, Mahajan e Wu (2014) identificaram os tipos de órbitas dos planetas dos "sistemas Kepler-11", se são regulares ou irregulares, utilizando o mapa de frequência para vários valores de semieixo maior e excentricidade. Nesse estudo eles encontraram RMMs entre os planetas para determinados valores de semieixo maior e excentricidade, e verificaram que a instabilidade ocorre para valores de excentricidade maior que 0.04.

O sistema multi-planetário KOI-351 é identificado como o sistema Kepler-90. Lissauer et al. (2014) realizaram uma análise estatística através do método de trânsito dos sistemas Kepler-90, Kepler-102, Kepler-122, Kepler-132, Kepler-223, Kepler-238, Kepler-292 e Kepler-296 e estimaram os valores aproximados dos raios dos planetas do sistema Kepler-90 através de um refinamento de dados utilizando o método de variações de tempo de trânsito. Cabrera et al. (2014) identificaram estatisticamente a presença dos planetas *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* e *h* através do método de trânsito planetário. Os parâmetros físicos dos planetas foram determinados através do método de variações de tempo de trânsito, além disso, foram estimados o semieixo maior e o período dos planetas. Cabrera et al. (2014) verificaram que o sistema Kepler-90 é um sistema hierárquico e que os planetas *b* e *c* estão em ressonância de

¹ Exoplanet (2021) visitado em 27/09/2021

Figura 27 – Esboço da localização dos planetas do sistema Kepler-90. A figura mostra o tamanho do raio de cada planeta (R_p).



Fonte: Próprio autor

movimentos médios 5:4. Além disso, Shallue e Vanderburg (2018) identificaram o planeta i localizado entre as órbitas dos planetas c e d (ver Figura 27).

Portanto, o sistema Kepler-90 contém oito planetas em torno da estrela KOI-351 onde os planetas internos b e c estão próximos da estrela, os planetas i , d , e e f são intermediários e os planetas g e h são os mais externos, sendo que o planeta h está a uma distância orbital de 1 UA (ver Figura 27). O tamanho dos planetas b e c são de aproximadamente $1.3R_{\oplus}$, os planetas g e h são de $\sim 8R_{\oplus}$ e $\sim 11R_{\oplus}$, respectivamente e os planetas d , e e f são de $\sim 2.8R_{\oplus}$. O sistema Kepler-90 está localizado a 2545 anos-luz da Terra.

Cabrera et al. (2014) estudaram a estabilidade do sistema Kepler-90, verificando a estabilidade através de um conjunto de simulações numéricas. Embora nesse trabalho, os planetas b e c podem ser ignorados nas simulações numéricas e foi adotada uma série de estimativas com relação as massas dos planetas. Contreras e Boley (2018) mostraram que existe estabilidade no sistema Kepler-90 também através de simulações numéricas com os 7 planetas que foram descobertos, estimando o raio dos planetas e seus semieixos maiores.

Liang, Robnik e Seljak (2021) realizaram simulações numéricas de longo período para estudar a evolução orbital do planeta g e do planeta h e observaram que os ângulos ϕ_g e ϕ_h podem estar associados a RMM 3:2 desses planetas em alguns períodos de tempo libram e em longos períodos de tempo os ângulos ϕ_g e ϕ_h circulam.

Neste capítulo analisaremos a estabilidade dinâmica dos "sistemas Kepler-90" através do método do mapa de análise de frequência. Exploraremos diferentes valores de excentricidade com a finalidade de estimar o intervalo de excentricidade dos planetas que torna esse sistema estável. Além disso, foram identificadas algumas RMM entre os planetas. Esses resultados foram comparados aos resultados obtidos por Contreras e Boley (2018). Com a descoberta do planeta i , entre os planetas c e d , devemos realizar um novo estudo dinâmico do sistema, com a inclusão desse planeta nas simulações numéricas (SHALLUE; VANDERBURG, 2018; GEORGAKARAKOS; DOBBS-DIXON, 2019). Embora seja

um planeta pequeno, se comparado aos dois planetas gigantes externos, ele poderá alterar a dinâmica da região entre os planetas c e d .

Tabela 10 – Parâmetros físicos dos planetas e a estrela do sistema Kepler-90. Os valores foram extraídos de Cabrera et al. (2014).

	massa($M_{\odot}$)	raio($R_{\odot}$)
estrela	1.2	1.2
planetas	massa($M_{\oplus}$)	raio($R_{\oplus}$)
b	~ 3	1.31
c	~ 3	1.19
d	~ 10	2.86
e	~ 10	2.66
f	~ 10	2.89
g	12	8.07
h	254.25	11.36

Fonte: Cabrera et al. (2014).

4.1 ESTUDO DINÂMICO DO SISTEMA KEPLER-90

As simulações numéricas de longo período são relevantes para o estudo detalhado da dinâmica orbital dos corpos. Nesse capítulo será apresentado um estudo sobre a evolução orbital dos planetas pertencentes ao sistema Kepler-90. As simulações numéricas de longo período serão desenvolvidas com a finalidade de compreender o comportamento orbital dos planetas considerando os valores iniciais dos elementos orbitais, de acordo com Cabrera et al. (2014), Contreras e Boley (2018) e Shallue e Vanderburg (2018).

Estimar os valores das massas dos planetas do sistema Kepler-90 é uma tarefa complexa, por isso, daremos uma descrição de como está sendo abordado esse tema na literatura. Cabrera et al. (2014) utilizaram o método das variações do tempo de trânsito (TTV) e a análise da curva de luz para estimar os valores das massas dos planetas b , c , d , e , f , g e h (ver a Tabela 10). Eles analisaram a dinâmica do sistema utilizando os valores aproximados obtidos para as massas dos planetas (ver a Tabela 10) através do pacote computacional MERCURY (CHAMBERS, 1999). Cabrera et al. (2014) mostraram que o sistema Kepler-90 é um sistema hierárquico, ou seja, os planetas internos são pequenos planetas, os planetas médios são como as super-terras e os planetas externos são como os planetas gasosos, onde o último planeta h orbita a uma distância radial de ~ 1 UA. Também identificaram que os planetas g e h devem apresentar valores de excentricidade menores que 0.095 e 0.025, respectivamente, e que os planetas b e c estão em RMM 4:5, os planetas g e h estão em RMM 5:8 e os planetas g e f estão em RMM 5:3. Encontraram também uma cadeia ressonante $\varphi_{def} = \lambda_d - 3\lambda_e + 2\lambda_f \sim 0$ entre os planetas d , e e f .

Contreras e Boley (2018) estimaram a massa dos planetas b , c , d , e , f , g e h através de fórmulas empíricas. Essas fórmulas empíricas estão de acordo com a relação de raio-massa obtido na literatura. Eles realizaram simulações numéricas de n -corpos e também a teoria secular para estudar a estabilidade do sistema Kepler-90 incluindo um corpo externo do tipo Júpiter. Contreras e Boley (2018) encontraram que o sistema Kepler-90 apresentam RMM para os pares planetários $b - c$ e $g - h$.

Tabela 11 – Dados para a equação (3) para os planetas com valores de semieixo maior ≤ 0.1 UA e para valores de $a > 0.1$ UA. As variáveis M_0 , b , w e p são constantes.

	$a/UA \leq 0.1$	$a/UA > 0.1$
$M_0 [M_\oplus]$	1756.7	1308.7
$b[R_\oplus]$	11.684	11.858
w	1.646	1.635
p	2.489	2.849

Fonte: Han et al. (2014).

Wright et al. (2011)² desenvolveram um website denominado Exoplanet Orbit Database (EOD) que é um repositório de base de dados para os diferentes sistemas extrassolares. Han et al. (2014) apresentaram a versão 2 de EOD, onde estão descritas as fórmulas empíricas para estimar a massa dos planetas, cujas equações foram apresentadas por Lissauer et al. (2011), Mordasini et al. (2012) e Weiss e Marcy (2014).

Han et al. (2014)³ definiram os intervalos da relação raio-massa para os exoplanetas a partir dos valores de raio. Esses intervalos são

$$M_p = \begin{cases} M_{WM} & R < R_\oplus \\ (1-x)M_{WM} + xM_L & R_\oplus \leq R < 4R_\oplus \\ M_L & 4R_\oplus \leq R < 6R_\oplus, \\ \min(M_M, M_{Jup}) & 6R_\oplus \leq R < b \\ M_{Jup} & R \geq b \end{cases} \quad (1)$$

onde a função x é igual a $(R_p/R_\oplus - 1)/3$, utilizado para a transição entre M_{WM} e M_L .

M_{WM} é dado por (WEISS; MARCY, 2014)

$$\frac{M_{WM}}{M_\oplus} = \begin{cases} 0.615 \left(0.717 + \frac{R_P}{R_\oplus} \right) \left(\frac{R_P}{R_\oplus} \right)^3 & R < 1.5R_\oplus \\ 2.69 \left(\frac{R_P}{R_\oplus} \right)^{0.93} & 1.5R \leq R \leq 4R_\oplus \end{cases} \quad (2)$$

M_L é dado por $M_p/M_\oplus = (R_p/R_\oplus)^{2.06}$ (LISSAUER et al., 2011) e M_M é dado por (MORDASINI et al., 2012):

$$\log_{10} \left(\frac{M_p}{M_0} \right) = -\omega \left(\frac{b}{R_p/R_\oplus} - 1 \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3)$$

onde os dados necessários para o cálculo da equação (3) estão na Tabela 11.

Para estimar o valor das massas dos planetas b e c , Weiss e Marcy (2014) utilizaram as seguintes equações:

$$\rho_P = 2.43 + 3.39 \left(\frac{R_P}{R_\oplus} \right) \text{ gcm}^{-3}, \quad R_P < 1.5R_\oplus \quad (4)$$

² Database (2020b) vistado em 01/01/2020

³ Database (2020a) vistado em 01/01/2020

Tabela 12 – Parâmetros físicos dos planetas e a estrela do sistema Kepler-90. Os valores foram extraídos de Contreras e Boley (2018), Shallue e Vanderburg (2018).

	massa ($M_{\odot}$)	raio($R_{\odot}$)
estrela	1.2	1.2
planetas	massa ($M_{\oplus}$)	raio($R_{\oplus}$)
b	2.4	-
c	1.7	-
d	7.9	-
e	6.9	-
f	8.1	-
g	69.1	-
h	297.9	-
i	2.05	1.32

Fonte: Contreras e Boley (2018) e Shallue e Vanderburg (2018).

Tabela 13 – Raios dos planetas que foram estimadas por Robnik e Seljak (2020). Calculamos os valores da massa dos planetas utilizando o método de raio-massa definido na equação (1).

planetas	Método PG		Método spline	
	raio($R_{\oplus}$)	Massa($M_{\oplus}$)	raio ($R_{\oplus}$)	Massa($M_{\oplus}$)
b	1.22	2.16	1.29	2.65
c	1.22	2.16	1.36	3.21
d	2.63	7.27	2.83	7.91
e	2.49	6.88	2.72	7.55
f	2.70	7.49	2.69	7.45
g	7.72	63.57	7.72	63.57
h	10.81	248.93	10.82	250.46
i	1.02	1.13	0.810	0.50

Fonte: Robnik e Seljak (2020).

$$\frac{M_P}{M_{\oplus}} = \left(\frac{\rho_P}{\rho_{\oplus}} \right) \left(\frac{R_P}{R_{\oplus}} \right)^3 \quad (5)$$

Os valores das massas dos planetas *b* e *c* foram estimadas através da equação (5). Os valores das massas estimadas para os planetas *d* a *h* foram calculados utilizando a equação (1). Notamos que os resultados obtidos através das equações (1) e (5) são valores aproximados ao indicado pelo site. Desse modo, observamos que os valores estimados para as massas dos planetas estão próximos aos valores apresentados por Contreras e Boley (2018) (Tabela 12), com exceção do planeta *i*.

Shallue e Vanderburg (2018) identificaram o planeta *i* através de método "deep learning". O cálculo estatístico realizado por Shallue e Vanderburg (2018) determinaram os parâmetros físicos do planeta *i*, como o raio, o intervalo de massa, e seus elementos orbitais, tais como o semieixo maior e a inclinação (ver a Tabela 12 e a Tabela 14).

O plano de referência do sistema Kepler-90 foi determinado pela média das inclinações orbitais dos 7 planetas, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, e *h*, sendo o valor médio da inclinação igual a 89.68° (CONTRERAS; BOLEY, 2018).

Robnik e Seljak (2020) calcularam os valores dos raios dos planetas do sistema Kepler-90 incluindo

Tabela 14 – Semieixo maior, excentricidade e inclinação dos planetas do sistema Kepler-90. Os valores foram extraídos de Contreras e Boley (2018) e Shallue e Vanderburg (2018).

planetas	$a(\text{UA})$	e	$i(^{\circ})$
b	0.076	—	0.28
c	0.088	—	0.00
d	0.307	—	0.03
e	0.424	—	0.11
f	0.520	—	0.09
g	0.736	—	0.12
h	0.996	—	0.08
i	0.2027	—	0.48

Fonte: Contreras e Boley (2018) e Shallue e Vanderburg (2018).

o planeta i , através de dois métodos diferentes: o método de processo Gaussiano (PG) e o ajuste de "spline" que é um método frequentemente utilizado na literatura que ajuda a eliminar a variação estelar. Os valores estimados para os raios dos planetas do sistema Kepler-90 estão apresentados na Tabela 13.

Utilizamos os valores dos raios obtidos por Robnik e Seljak (2020) para estimar as massas dos planetas através do mesmo método utilizado pelo catálogo de website (HAN et al., 2014) e Contreras e Boley (2018), e obtivemos valores aproximados para os planetas b até o planeta g . No caso do planeta h observamos uma diferença de massa de $\sim 40M_{\oplus}$ comparado com os dados apresentados no catálogo do website (HAN et al., 2014) e em Contreras e Boley (2018).

Robnik e Seljak (2021) estimaram o período orbital dos planetas b, c, d, e, f, g e h , exceto o planeta i . Os resultados indicam que o período orbital dos planetas b, c, d, e e f são similares ao estimado por Cabrera et al. (2014), o período orbital dos planetas g e h não foram apresentados devido às variações de tempo de trânsito.

Liang, Robnik e Seljak (2021) estimaram os valores das massas dos planetas g e h através de uma nova análise dos TTVs utilizando o modelo desenvolvido por Robnik e Seljak (2020). Os valores das massas estimadas para os planetas g e h são iguais a $15M_{\oplus}$ e $203M_{\oplus}$, respectivamente. As excentricidades médias estimadas para os dois planetas g e h são 0.045 e 0.035, respectivamente.

Utilizamos esses dados obtidos por Contreras e Boley (2018) para estudar a dinâmica do sistema Kepler-90, que foram corroborados com os valores indicados no catálogo do site. Trabalhos recentes sugerem que os valores dos raios dos planetas são diferentes (ver a Tabela 13). Para estimar os valores da massa, seguindo as equações (1) e (5), obteríamos valores distintos para os planetas g e h , ou seja, $6M_{\oplus}$ e $40M_{\oplus}$, respectivamente.

Salientando que Geroyannis (2020) concluiu que o valor do raio da estrela KOI-351 é de aproximadamente $1.2073R_{\odot}$, cujo valor está próximo ao estimado por Cabrera et al. (2014) e ao valor utilizado por Contreras e Boley (2018) (Tabela 10 e Tabela 12).

Devido ao fato de que as simulações numéricas de longo período exigem um custo computacional alto, e que o estudo neste capítulo está centrado em determinar a estabilidade do sistema, decidimos utilizar uma ferramenta poderosa que ajudaria a compreender, do mesmo modo que as simulações de longo período, o comportamento das órbitas dos planetas do sistema Kepler-90. Na literatura existem trabalhos relacionados ao estudo da dinâmica orbital dos planetas utilizando a análise de frequência,

inclusive o estudo da ressonância entre os planetas, por exemplo, o estudo da RMM 3:1 entre os planetas b e c no sistema 55 Cancri realizado por Marzari, Scholl e Tricarico (2005). Por outro lado, temos o estudo dinâmico da estabilidade do sistema Kepler-11, Mahajan e Wu (2014) identificaram os tipos de órbitas dos planetas dos "sistemas Kepler-11" se são regulares ou irregulares através do mapa de frequência, além de encontrar as RMMs entre os planetas.

Portanto, estudaremos a análise de frequência aplicada a cada um dos planetas nas simulações numéricas para um tempo de integração de $10^4 T_h$ (T_h período orbital do planeta h). Depois, calcularemos a frequência dos planetas utilizando o algoritmo computacional desenvolvido por Šidlichovský e Nesvorný (1997). Realizaremos uma estimativa do parâmetro de difusão para determinar o tipo da órbita de cada planeta, seja regular ou irregular, sendo estimado o tempo de difusão, cujos parâmetros sugerem a permanência ou não dos planetas nos "sistemas Kepler-90".

Porém, devemos:

- primeiro compreender o comportamento orbital dos planetas. Para tal será necessário realizar simulações numéricas de "longo período"
- segundo, definiremos as condições iniciais apropriadas para os planetas para calcular a difusão das órbitas.
- terceiro, aplicaremos a análise de frequência para cada planeta no sistema Kepler-90 para definir a estabilidade do sistema.
- quarto, incluiremos as partículas teste e identificaremos as regiões estáveis no sistema que será estudado no próximo capítulo.

4.1.1 Estabilidade dos planetas

Nesta subseção, estudaremos a estabilidade dos planetas do sistema Kepler-90. Analisaremos a dinâmica do sistema para três intervalos diferentes de valores de excentricidade para cada planeta. O primeiro intervalo de excentricidade é de 0 até 10^{-3} , o segundo intervalo de excentricidade é de 10^{-3} até 10^{-2} e o terceiro intervalo de excentricidade é de 10^{-2} até 10^{-1} . Os valores de excentricidade, argumento do pericentro (ω), longitude do nodo ascendente (Ω) e a longitude média (λ) foram escolhidos aleatoriamente em cada intervalo de excentricidade. As condições iniciais de a e i dos planetas do sistema Kepler-90 foram extraídos de Contreras e Boley (2018) e Shallue e Vanderburg (2018) cujas condições iniciais foram extraídas da Tabela 12 e da Tabela 14.

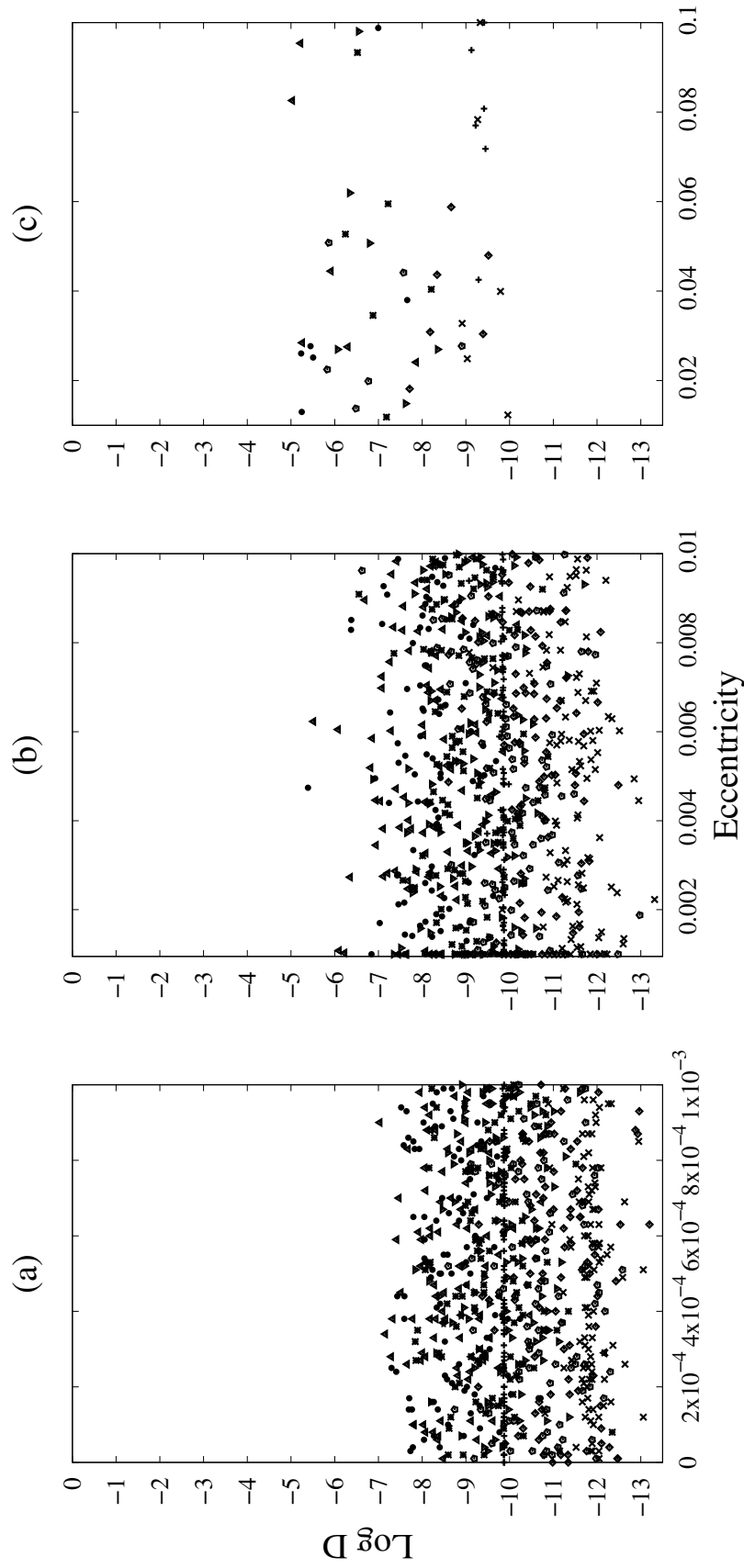
Definimos que um sistema nominal ou sistema proposto é referido as condições iniciais dos elementos orbitais dos planetas. Esse sistema nominal é instável seguindo os seguintes critérios: se um dos planetas cruza a órbita de outro planeta, se há colisão entre os planetas ou se um planeta foi ejetado do sistema. A colisão ocorre quando a distância entre os planetas é a soma dos raios dos planetas. Também definimos a $\Delta e = e_{max} - e_{min}$, onde e_{min} e e_{max} são os valores mínimo e máximo da excentricidade. Esses valores mínimo e máximo são extraídos da evolução temporal da excentricidade para cada planeta. A $(\Delta e)_{min}$ e $(\Delta e)_{max}$ são obtidas das variações mínimas e máximas para cada planeta dos diferentes sistemas nominais. A $(\Delta e)_{média}$ é obtida da média das variações de excentricidade para cada planeta.

Executamos 100 simulações numéricas para cada intervalo de excentricidade cujo tempo de integração foi de $10^4 T_h$ (T_h é o período orbital do planeta h). Depois, aplicamos o algoritmo computacional de análise de frequência (ŠIDLICHOVSKÝ; NESVORNÝ, 1997) para cada arquivo de saída para cada planeta nos três intervalos de excentricidade.

A variável dinâmica $z'_j(t) = a(t)e^{i\lambda(t)}$ será utilizada para estimar as frequências principais nos intervalos de tempo de integração de 0 a T e de T a $2T$, onde $2T$ é o tempo total da integração numérica. Devemos levar em consideração que a é a amplitude associada ao semieixo maior inicial e o λ é a frequência associada à anomalia média inicial. De modo que podemos calcular o parâmetro de difusão das órbitas dos planetas que são apresentados nos mapas de excentricidade versus $\log D$ (ver a Figura 28).

A Figura 28 mostra os resultados dos tipos de órbitas dos planetas nos diferentes sistemas propostos nos três intervalos de excentricidade, no gráfico definido como e vs $\log D$. Os resultados mostraram que em 100% das simulações numéricas nos dois primeiros intervalos de excentricidade, os planetas sobreviveram até o tempo final da integração numérica. Enquanto no terceiro intervalo de excentricidade os planetas têm na maioria dos casos órbitas irregulares que não cumprem as regras de estabilidade, sendo que somente 6% dos sistemas propostos sobreviveram o tempo total da simulação numérica.

Figura 28 – A figura mostra a estabilidade dos planetas nos três diferentes intervalos de excentricidade para os diferentes sistemas propostos do sistema Kepler-90. Cada símbolo apresentado na figura indica o $\text{Log } D$ obtido para cada planeta. O $\text{Log } D$ indica a intensidade da regularidade ou irregularidade da órbita dos planetas considerando que: se o $\text{Log } D$ está suficientemente próximo à zero o planeta possuirá uma órbita irregular. Assumimos que os planetas com valores de $\text{Log } D < -3$ apresentam órbitas regulares, e caso contrário, os planetas apresentam órbitas irregulares.



Fonte: próprio autor

Figura 29 – As figuras mostram a variação do valor mínimo, máximo e a média da excentricidade dos planetas nos três intervalos de excentricidade. O primeiro gráfico está relacionado ao primeiro intervalo de excentricidade, a Figura (b) e a Figura (c) estão relacionadas ao segundo e terceiro intervalo de excentricidade, respectivamente.

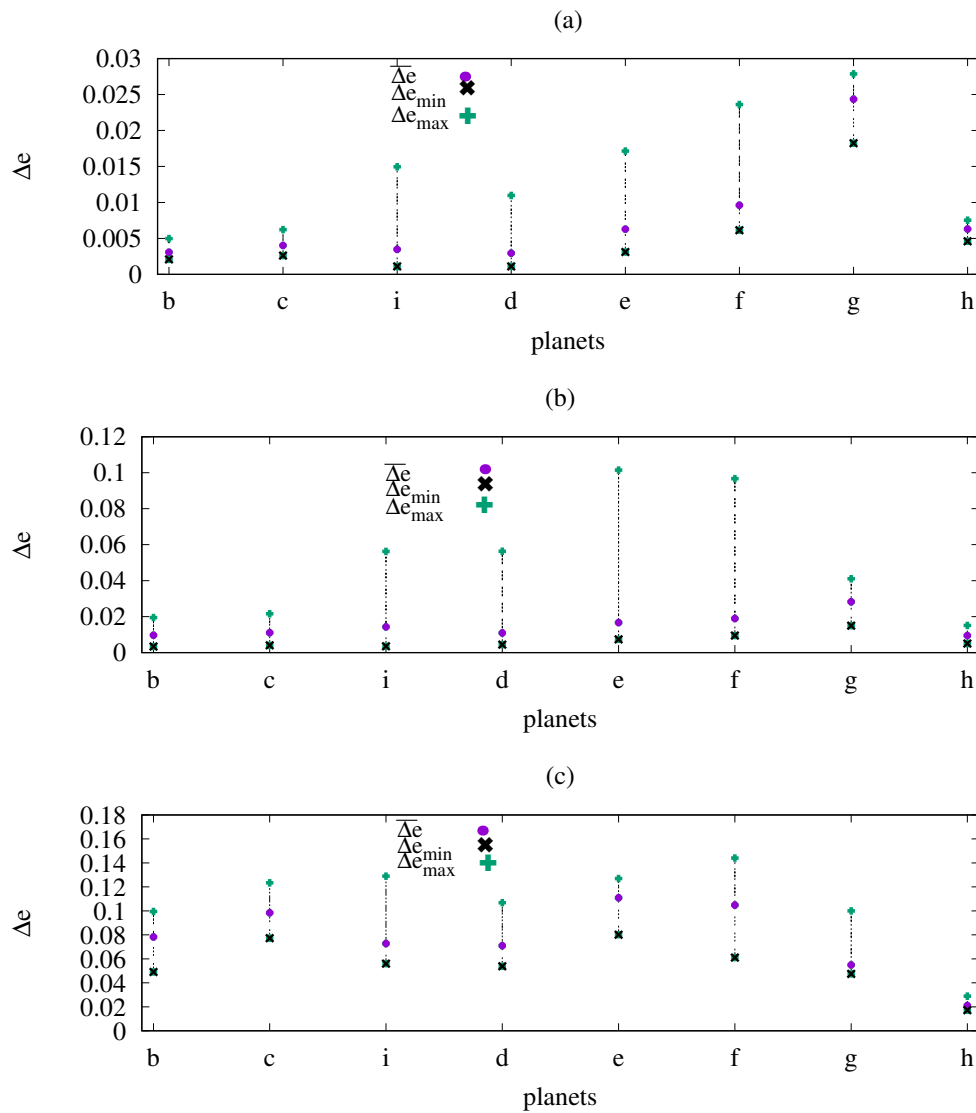
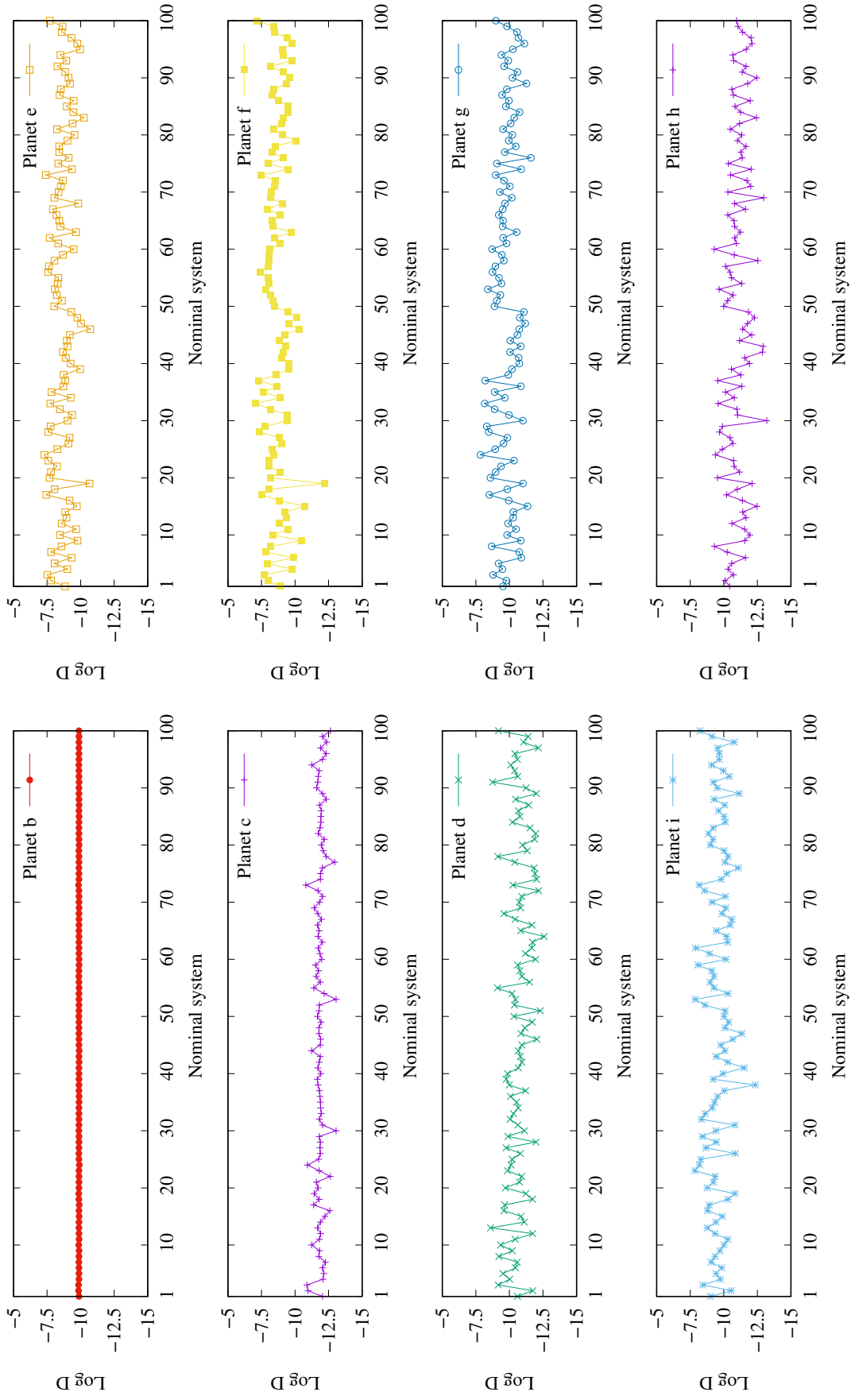
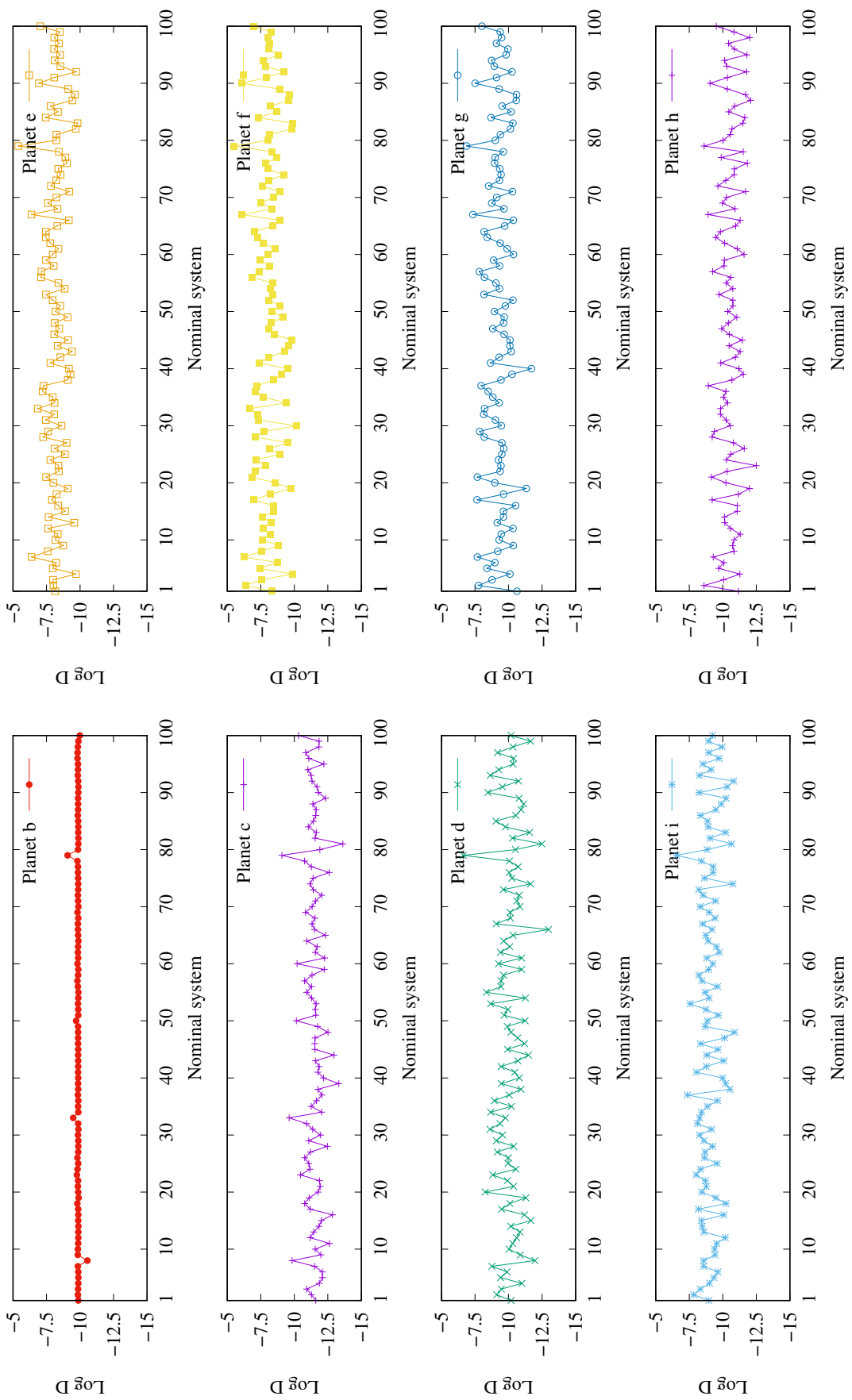


Figura 30 – Primeiro intervalo de excentricidade: os planetas apresentam diferentes valores de Log D cuja intensidade pode ser observada nas subfiguras. Cada subfigura é identificada para cada planeta em cada sistema proposto.



Fonte: próprio autor

Figura 31 – Os planetas que estão localizados no segundo intervalo de excentricidade apresentam gráficos similares aos observados na Figura 30, com exceção do planeta *c*.



Fonte: próprio autor

De modo que, no terceiro intervalo de excentricidade em 65% dos sistemas propostos os planetas colidem entre si, em 11% dos sistemas um dos planetas cruza a órbita de outro planeta, em 18% dos sistemas os planetas foram ejetados. Observa-se que os planetas, que na maioria das vezes são ejetados, são os planeta f e e (ver a Figura 28).

Os resultados mostraram que os planetas que pertencem ao primeiro intervalo de excentricidade apresentam valores de $\text{Log } D$ no intervalo de -13 a -7, e os planetas com $\text{Log } D$ do segundo intervalo de excentricidade estão entre -13 a -5.5. Portanto, podemos garantir que os planetas nos sistemas propostos estão em órbitas regulares nesses dois intervalos.

Identificamos que no primeiro intervalo de excentricidade os planetas b , c , i , d , e , f , g e h apresentam uma média de $\text{Log } D$ de -9.9, -11.9, -10.7, -9.6, -8.7, -8.7, -9.8 e -11.1 respectivamente, o que mostra que no primeiro intervalo de excentricidade os planetas são estáveis. Além disso, calculamos as variações mínimas, máximas e a variação média da excentricidade dos planetas dos sistemas propostos do primeiro intervalo, e obtivemos que o planeta g apresenta uma alta variação de valores de $(\Delta e)_{\min}$, $(\Delta e)_{\max}$ e $(\Delta e)_{\text{media}}$, sendo esses valores iguais a 0.0182368, 0.0278684 e 0.0243601 respectivamente, comparados aos valores obtidos para os outros planetas (Figura 29(a)).

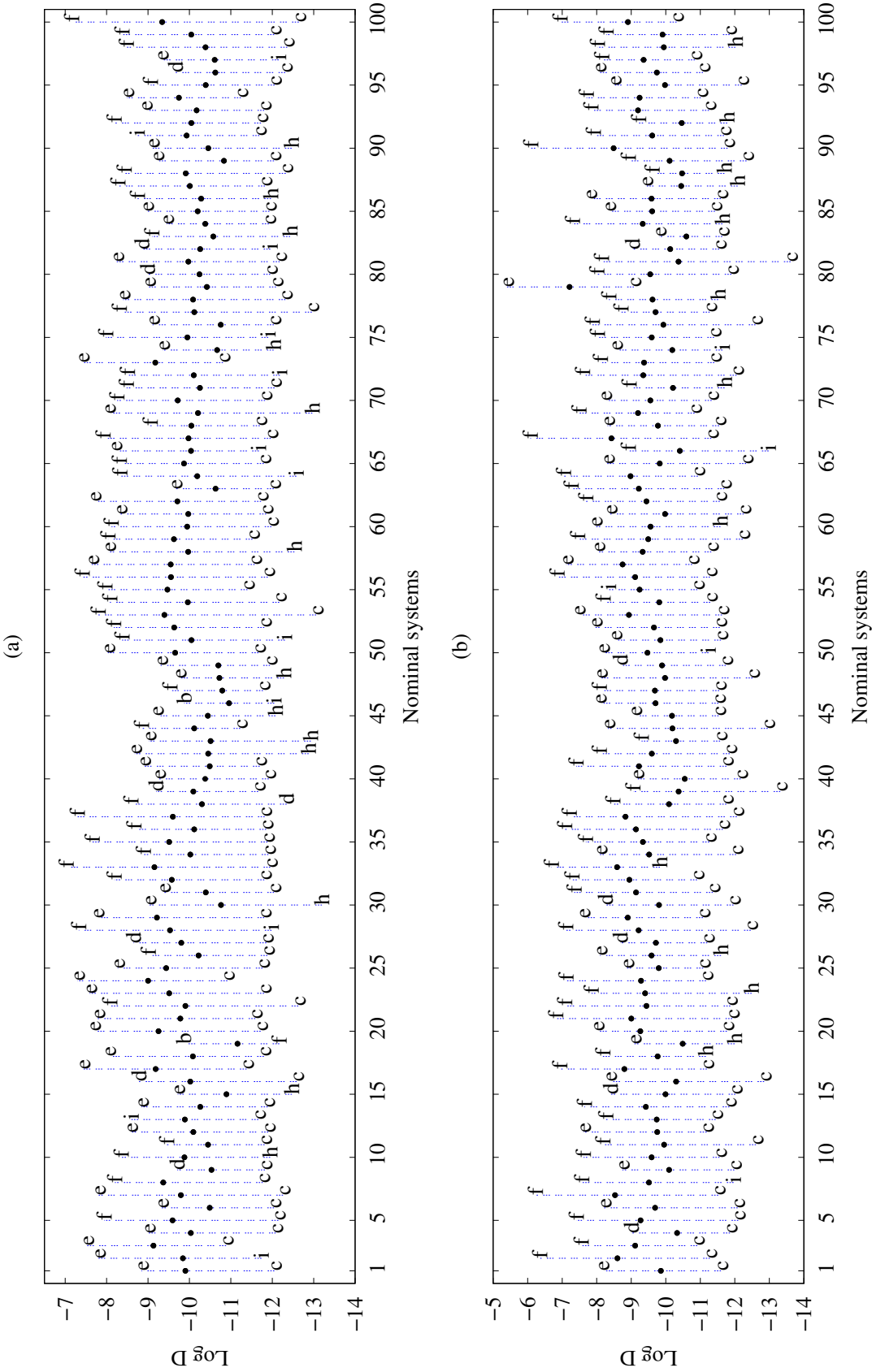
Identificamos que no segundo intervalo de excentricidade, a média de $\text{Log } D$ dos planetas b , c , i , d , e , f , g e h são -9.8, -11.5, -9.0, -8.2, -8.1, -9.2, -10.5 e -10.1, respectivamente. Os resultados obtidos de $\text{Log } D$ mostram que os planetas do segundo intervalo estão em órbitas estáveis. Notamos que as variações mínimas, máximas e a variação média da excentricidade dos planetas são altas para os planetas i , d , e e f como pode ser observado na Figura 29(b).

A variação média da excentricidade nos dois primeiros intervalos é alta para "os planetas g ", e a variação média da excentricidade para "os planetas h " é baixa. Notamos que a variação da excentricidade desses dois planetas são diferentes devido à diferença de massa que existe entre os planetas g e h . Além disso, notamos que para os planetas mais internos, a variação média da excentricidade é menor, isto é devido ao fato de que os planetas internos sofrem menos os efeitos dos planetas g e h (ver a Figura 29).

Também pode ser observado no terceiro intervalo de excentricidade (ver a Figura 29(c)), apesar de que somente uma pequena porcentagem dos sistemas sobreviveram até o tempo total da simulação numérica, que os "planetas h " mostraram variações mínima e máxima de excentricidade muito próximas ao valor médio. No entanto, os outros planetas apresentam valores maiores de variação de excentricidade.

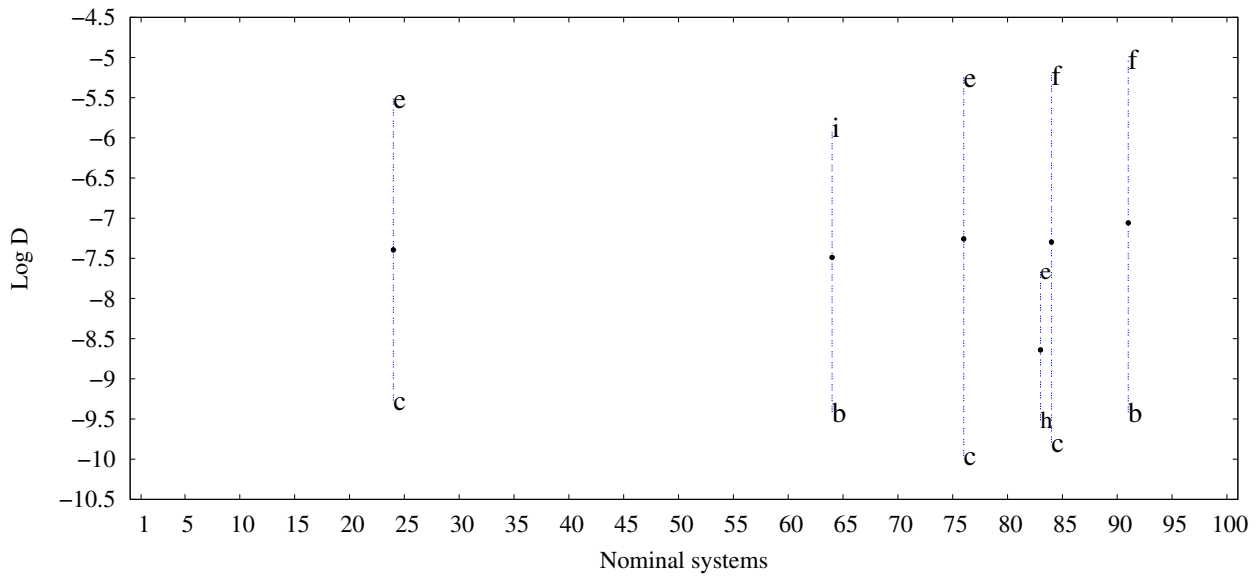
Analisando o parâmetro de difusão de cada planeta nos dois primeiros intervalos de excentricidade, podemos identificar o comportamento da órbita de cada planeta, seja regular ou irregular. Na Figura 30 observamos que no primeiro intervalo de excentricidade, para os planetas b e c , o $\text{Log } D$ são praticamente constantes em quase todos os sistemas propostos. Notamos que os valores de $\text{Log } D$ do planeta i até o planeta h apresentam variações para cada sistema, embora sejam pequenas.

Figura 32 – As figuras mostram o valor mínimo, máximo e a média de Log D dos sistemas propostos nos dois primeiros intervalos de excentricidade. A Figura (a) está relacionada ao primeiro intervalo e a Figura (b) está relacionada ao segundo intervalo de excentricidade. As partes inferiores e superiores das linhas verticais apresentam o nome do planeta que obtiveram os valores mínimos e máximos de Log D .



Fonte: próprio Autor

Figura 33 – Os valores mínimos, máximos e a média do Log D dos sistemas nominais que sobreviveram no terceiro intervalo de excentricidade.



Fonte: próprio Autor

No segundo intervalo de excentricidade os "planetas b " apresentam valores similares aos do primeiro intervalo em quase todos os sistemas propostos. Os Log D para os demais planetas têm valores diferentes em cada sistema proposto, sendo que os "planetas d ", e e f mostram uma maior variação de Log D em suas órbitas (ver a Figura 31).

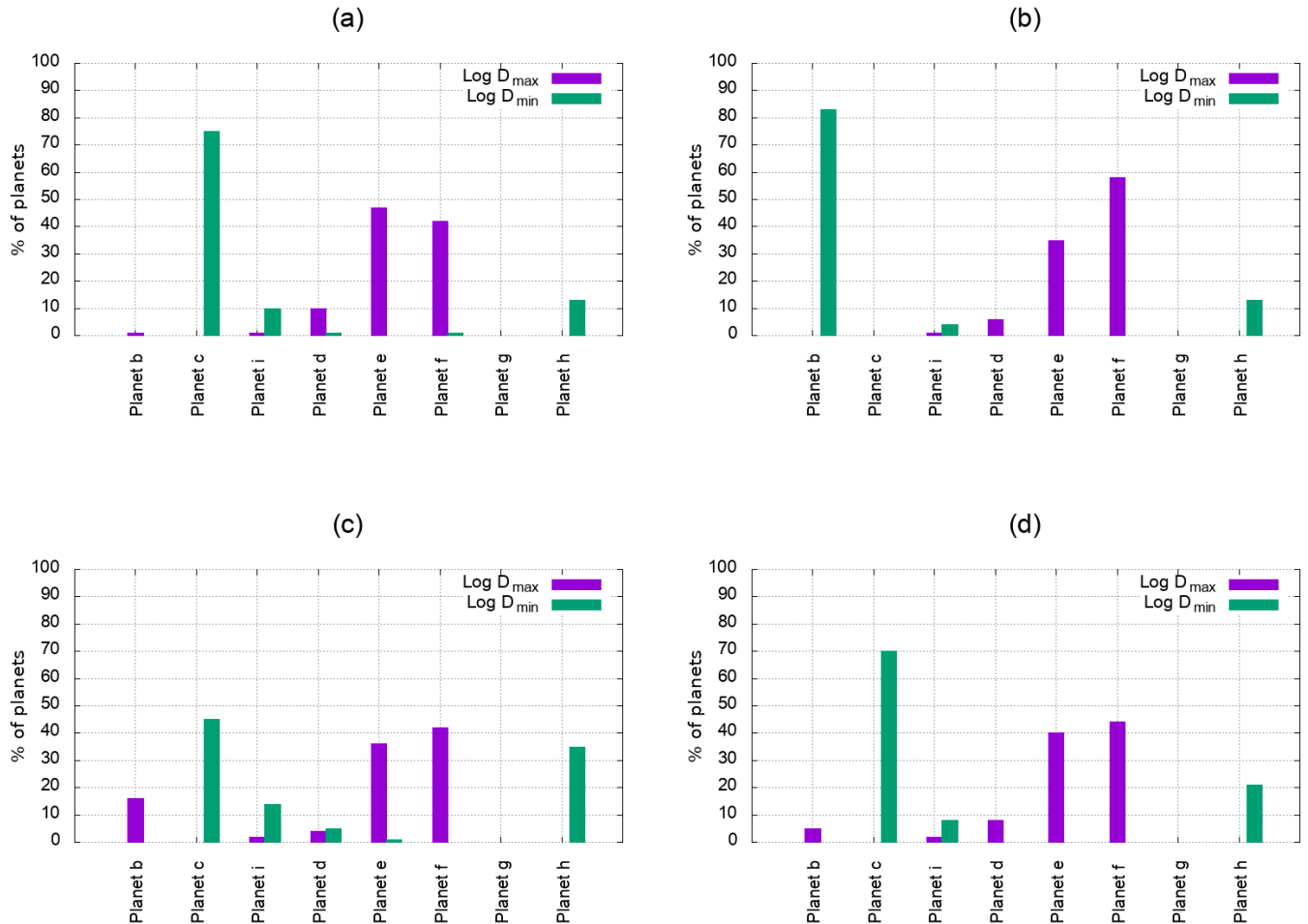
A Figura 30 e a Figura 31 podem ser resumidas na Figura 32 porque a partir de agora o interesse será analisar os sistemas propostos individualmente. Nos intervalos de excentricidade para os planetas observamos que o comprimento das linhas verticais estão relacionadas à sensibilidade das órbitas.

No primeiro intervalo de excentricidade observamos que os planetas que apresentam os maiores valores de Log D são: 47% dos casos são os "planetas e ", os "planetas f " com 42% e 10%, 1% e 1% para os planetas d , i e b , respectivamente (ver Figura 32(a) e Figura 34(a)). Do mesmo modo encontramos planetas com Log D mínimo que são: 75% dos "planetas c ", 13% dos "planetas h ", e 10%, 1% e 1% dos "planetas i ", f e d , respectivamente (ver Figura 32(a) e Figura 34(a)). Notamos que os valores de mínimo e máximo de Log D estão localizados nos sistemas 9 e 53, os quais são definidos pelos planetas c - e e os planetas c - f , respectivamente (ver Figura 32(a) e Figura 34(a)).

No segundo intervalo de excentricidade os planetas que alcançam o maior valor (em módulo) de Log D máximo são: 58% dos "planetas f " com 58%, seguido de 35% dos "planetas e ", e 6% e 1% dos "planetas d " e i , respectivamente. Os planetas com valor mínimo de Log D são os "planetas c ", h e i cujas porcentagens são de 83%, 13% e 4%, respectivamente (ver Figura 32(b) e Figura 34(b)). Identificamos que os planetas que apresentam valores de log D mínimo e máximo são encontrados nos sistemas 83 e 90, cujos planetas são c - f e c - e , respectivamente (ver Figura 32(b) e Figura 34(b)). No terceiro intervalo de excentricidade observamos que 5% dos sistemas apresentam uma variação de Log D de ~ 4 e 1% do sistema tem uma variação de Log $D \sim 2$ (ver Figura 33).

De acordo com os resultados apresentados na Figura 32(a) e na Figura 32(b) (e resumidos na

Figura 34 – Os histogramas mostram os planetas com órbitas mais sensíveis, o $\text{Log } D_{\max}$ representa os planetas com órbitas regulares e o $\text{Log } D_{\min}$ representa os planetas com órbitas que podem ser regulares ou irregulares, dependendo do tempo de integração. A Figura (a) apresenta os planetas do primeiro intervalo de excentricidade, a Figura (b) contém os planetas do segundo intervalo de excentricidade, a Figura (c) mostra a porcentagem dos planetas do primeiro intervalo de excentricidade que apresentam $\text{Log } D_{\min}$ e $\text{Log } D_{\max}$ quando o tempo de integração é de $10^5 T_h$, e finalmente a Figura (d) é similar à Figura (c) mas para o segundo intervalo de excentricidade.



Fonte: próprio Autor

Figura 34) observamos que no sistema 79 no segundo intervalo de excentricidade, o planeta *e* apresenta $\text{Log } D$ máximo quando comparado aos outros planetas nos outros sistemas propostos. De modo que, acrescentamos o tempo da simulação numérica até $10^5 T_h$, e os resultados mostraram que o sistema 79 se torna instável devido ao planeta *e* colidir com o planeta *d* no tempo de 55166.749 anos.

Os sistemas propostos que sobreviveram no terceiro intervalo de excentricidade foram integrados novamente até $10^5 T_h$, cujos resultados mostraram que os sistemas não sobreviveram até o final da simulação numérica. No sistema 24 o planeta *e* foi ejetado do sistema em 16949.48 anos. No sistema 64 o planeta *e* colidiu com o planeta *d* em 43580 anos, no sistema 76 o planeta *e* colidiu com o planeta *f* em 11750.2 anos, no sistema 83 o planeta *e* colidiu com o planeta *f* em 78831 anos, no sistema 84 o

planeta f colidiu com o planeta g e no sistema 91 o planeta f colidiu com o planeta e em 32176.4 anos.

Comparamos a Figura 34(a) e Figura 34(c) do primeiro intervalo de excentricidade, observamos que os planetas que apresentam órbita sensível são os planetas e e f . No segundo intervalo de excentricidade a sensibilidade das órbitas dos planetas d , e e f são sempre encontradas (ver a Figura 34(b) e a Figura 34(d)).

Na seguinte subseção, analisaremos as ressonâncias de movimento médio (RMM) 5:4 entre os planetas b e c e a ressonância de movimentos médios (RMM) 3:2 entre os planetas g e h para todos os sistemas propostos nos dois intervalos de excentricidade.

Tabela 15 – Porcentagens das ressonâncias de movimento médio e sob o efeito das ressonâncias entre os planetas b e c , e g e h , no primeiro intervalo de excentricidade.

planetas	ângulos	ressonância (%)		sob efeito da ressonância (%)				
				intermitência em escala de tempo			libração lenta	circulação lenta
		libra	circula	curta (c)	longa (l)	c & l		
b e c	$\phi_{5:4}^{(1)}$	2	0	16	3	23	26	30
	$\phi_{5:4}^{(2)}$	7	0	45	2	24	9	13
g e h	$\phi_{3:2}^{(1)}$	10	0	9	11	0	62	8
	$\phi_{3:2}^{(2)}$	25	0	64	1	1	8	1

Fonte: próprio autor

Tabela 16 – Similar à Tabela 15 para o segundo intervalo de excentricidade.

planetas	ângulos	ressonância (%)		sob efeito da ressonância (%)				
				intermitência em escala de tempo			libração lenta	circulação lenta
		libra	circula	curta (c)	longa (l)	c & l		
b e c	$\phi_{5:4}^{(1)}$	0	16	11	1	0	0	72
	$\phi_{5:4}^{(2)}$	0	13	23	0	2	0	62
g e h	$\phi_{3:2}^{(1)}$	9	0	56	3	0	10	22
	$\phi_{3:2}^{(2)}$	6	2	57	1	0	5	29

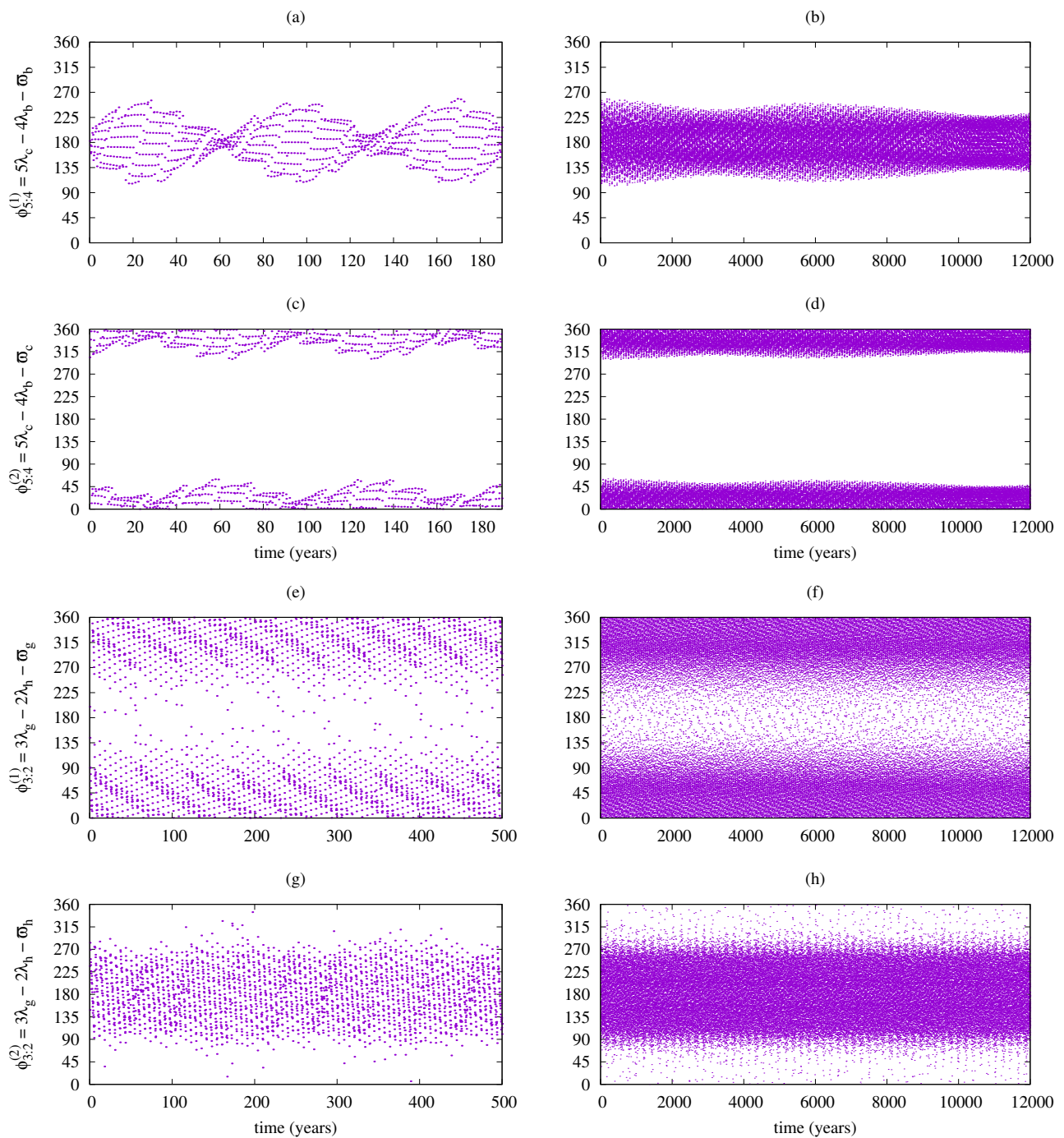
Fonte: próprio autor

4.1.2 RMM dos planetas

O ângulo ressonante representa a configuração ressonante possivelmente existente em um par planetário. Um sistema só está em ressonância se um ângulo libra em torno de algum valor de equilíbrio. Fisicamente, a libração do ângulo significa que as conjunções entre os planetas sempre irão se repetir em torno de uma linha determinada. Essa linha (das conjunções) pode estar ligada ao pericentro do perturbador (corrotação) ou do perturbado (Lindblad).

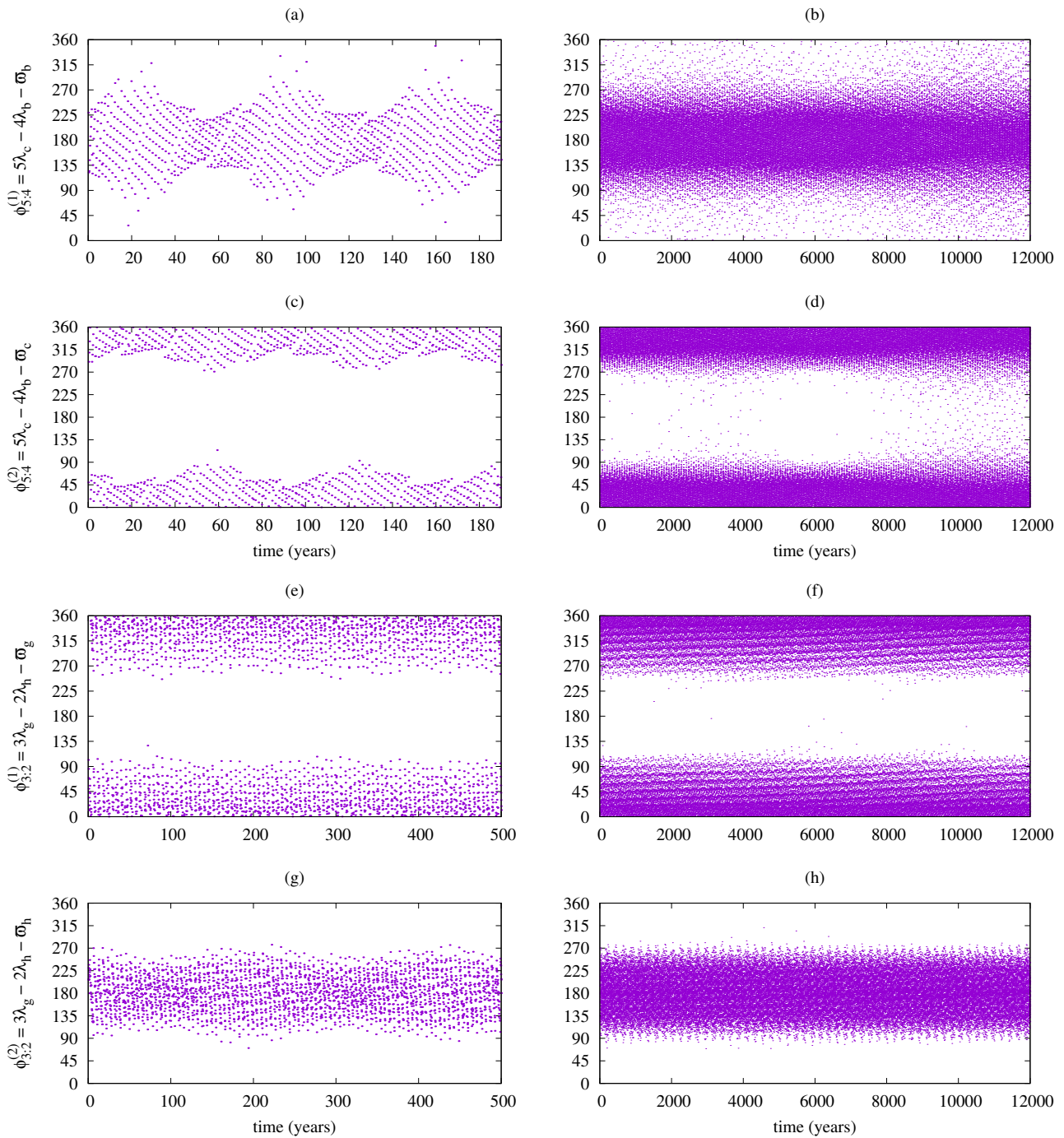
Analizamos a existência da ressonância de movimentos médios nos pares planetários b - c e g - h nos dois primeiros intervalos de excentricidade. As ressonâncias avaliadas são a ressonância de movimentos médios 5:4 dos planetas b e c e a RMM 3:2 dos planetas g e h . Identificamos o comportamento dos ângulos que alteram de circulação para libração (ou ao contrário), e denominamos tal comportamento como intermitente. Essa intermitência pode ser por uma escala de tempo curta, longa ou curta & longa (ver Figura 37(b) e (d)). Destacamos também o comportamento do ângulo quando este libra lentamente ou circula lentamente, e quando, está associado à ressonância de movimentos médios (ver as Figura 35(b) e (d), Figura 36(f) e (h)). As equações dos ângulos que identificaremos são as

Figura 35 – As figuras mostram a evolução temporal dos ângulos $\phi_{5:4}$ e $\phi_{3:2}$ de um sistema selecionado do primeiro intervalo de excentricidade. A Figura(a) e a Figura(c) são um zoom no intervalo de tempo de 0 a 190 anos do ângulo ressonante $\phi_{5:4}$. Figura (b) e Figura (d) são a evolução temporal do ângulo ressonante $\phi_{5:4}$ para um tempo total de 1.2×10^4 anos. Os ângulos ressonantes $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ seguem a evolução da equação $5\lambda_c - 4\lambda_b - \varpi_b$ (Figura (a) e Figura (b)), e $5\lambda_c - 4\lambda_b - \varpi_c$ (Figura (c) e Figura (d)), respectivamente. Os gráficos (e) e (g) são um zoom no intervalo de tempo de 0 a 500 anos para o ângulo $\phi_{3:2}$. Figura (f) e Figura (h) mostram a evolução do ângulo $\phi_{3:2}$ para um tempo total de 1.2×10^4 anos. Figura (e) e Figura (f) mostra o comportamento de $\phi_{3:2}^{(1)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_g$. Figura (g) e Figura (h) seguem a evolução da equação $\phi_{3:2}^{(2)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_h$.



Fonte: próprio autor

Figura 36 – Os gráficos correspondem à evolução temporal dos ângulos $\phi_{5:4}$ e $\phi_{3:2}$ de outro sistema selecionado do primeiro intervalo de excentricidade. Apresentamos um zoom do comportamento dos ângulos nos mesmos intervalos de tempo que na Figura 35 para os ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ (Figura (a)), $\phi_{5:4}^{(2)}$ (Figura (c)), $\phi_{3:2}^{(1)}$ (Figura (e)) e $\phi_{3:2}^{(2)}$ (Figura (g)). Os ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$, $\phi_{5:4}^{(2)}$, $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ seguem as mesmas equações que foram apresentadas na Figura 35. A Figura (d) mostra o comportamento intermitente por escala de tempo de curto e longo período para o ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$.



Fonte: próprio autor

seguintes:

$$\phi_{5:4}^{(1)} = 5\lambda_c - 4\lambda_b - \varpi_b$$

$$\phi_{5:4}^{(2)} = 5\lambda_c - 4\lambda_b - \varpi_c$$

$$\phi_{3:2}^{(1)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_g$$

$$\phi_{3:2}^{(2)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_h$$

sendo o ângulo ressonante $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ entre os planetas b e c e $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ entre os planetas g e h .

RMM dos planetas no primeiro intervalo

Analisaremos a ressonância de movimentos médios 5:4 dos planetas b e c e a ressonância de movimentos médios 3:2 dos planetas g e h de forma individual em cada sistema. Depois identificaremos se às duas ressonâncias existem em um mesmo sistema.

Avaliamos a RMM dos planetas b e c , e encontramos que em 2% dos sistemas que sobreviveram o tempo total da simulação numérica apresentam o ângulo ressonante $\phi_{5:4}^{(1)}$ para os planetas b e c cuja amplitude do ângulo ressonante é de 70° . Esse ângulo libra em torno de 180° até o tempo final da simulação numérica de 1.2×10^4 anos (ver a Figura 35(a) e (b)). Além disso, encontramos que em 7% dos sistemas, o ângulo ressonante $\phi_{5:4}^{(2)}$ para os planetas b e c libram em torno de zero.

Seguindo o que foi dito na subseção anterior, identificamos que 98% dos sistemas mostram que os planetas b e c estão sob efeito da RMM 5:4. O ângulo $\phi_{5:4}^{(1)}$ apresenta intermitência por uma escala de tempo curta, longa e curta & longa, em 16%, 3% e 23% dos sistemas, respectivamente.

A libração lenta e circulação lenta do ângulo são identificadas para o par planetário $b - c$ em 26% e 30% dos sistemas, respectivamente. No caso do ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$ para os mesmos planetas, encontramos que em 93% dos sistemas, os planetas b e c estão sob efeito da RMM, onde o ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$ é intermitente nas escalas de tempo curta, longa e curta & longa em 45%, 2% e 24% dos sistemas, respectivamente. Também, identificamos que em 9% e 13% dos sistemas o ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$ libra lentamente e circula lentamente, respectivamente.

Analizamos a RMM 3:2 para o par planetário $g - h$, e encontramos que 10% dos sistemas apresentam o ângulo ressonante $\phi_{3:2}^{(1)}$ que libra em torno de zero. Em 90% dos sistemas os mesmos planetas estão sob efeito da RMM, onde 9% e 11% dos sistemas o ângulo apresenta intermitência em escala de tempo curta & longa, respectivamente. Além disso, encontramos que em 62% e 8% dos sistemas, os ângulos $\phi_{3:2}^{(1)}$ libram lentamente e circulam lentamente, respectivamente. Para este ângulo ($\phi_{3:2}^{(1)}$) não foi identificada a intermitência por escala de tempo curta & longa nos sistemas.

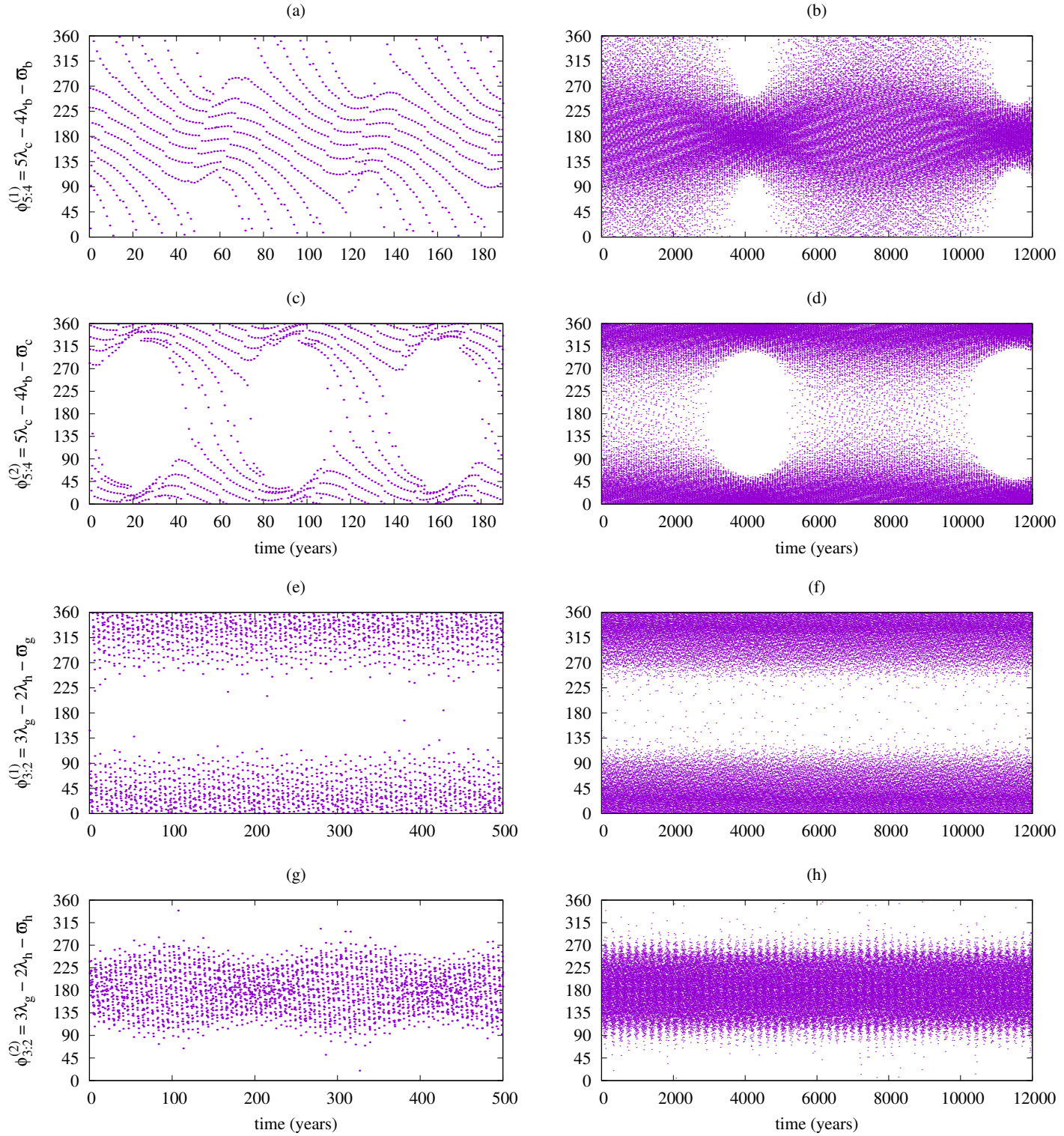
Para o ângulo ressonante $\phi_{3:2}^{(2)}$, encontramos que em 25% dos sistemas, o ângulo $\phi_{3:2}^{(2)}$ libra em torno de 180° mantendo uma amplitude de 100° até 1.2×10^4 anos (ver a Figura 36(g) e (h)). Em 75% dos sistemas o par planetário $g - h$ estão sob efeito da RMM, onde em 64% dos sistemas, o ângulo $\phi_{3:2}^{(2)}$ mostra intermitência por escala de tempo curta. Além disso, encontramos que em 8% e 1% dos sistemas, o ângulo $\phi_{3:2}^{(2)}$ tem uma libração lenta e circulação lenta, respectivamente.

Seguindo os resultados apresentados anteriormente, observamos que não encontramos os dois ângulos ressonante $\phi_{5:4}$ e $\phi_{3:2}$ que librem em um mesmo sistema nominal. Podemos afirmar que em 2%

dos sistemas, um dos ângulos libram com uma determinada amplitude (ver as Figura 35 e Figura 36), sendo que em outros sistemas nominais os pares planetários $b - c$ e $g - h$ estão sob o efeito da RMM 5:4 e 3:2, respectivamente.

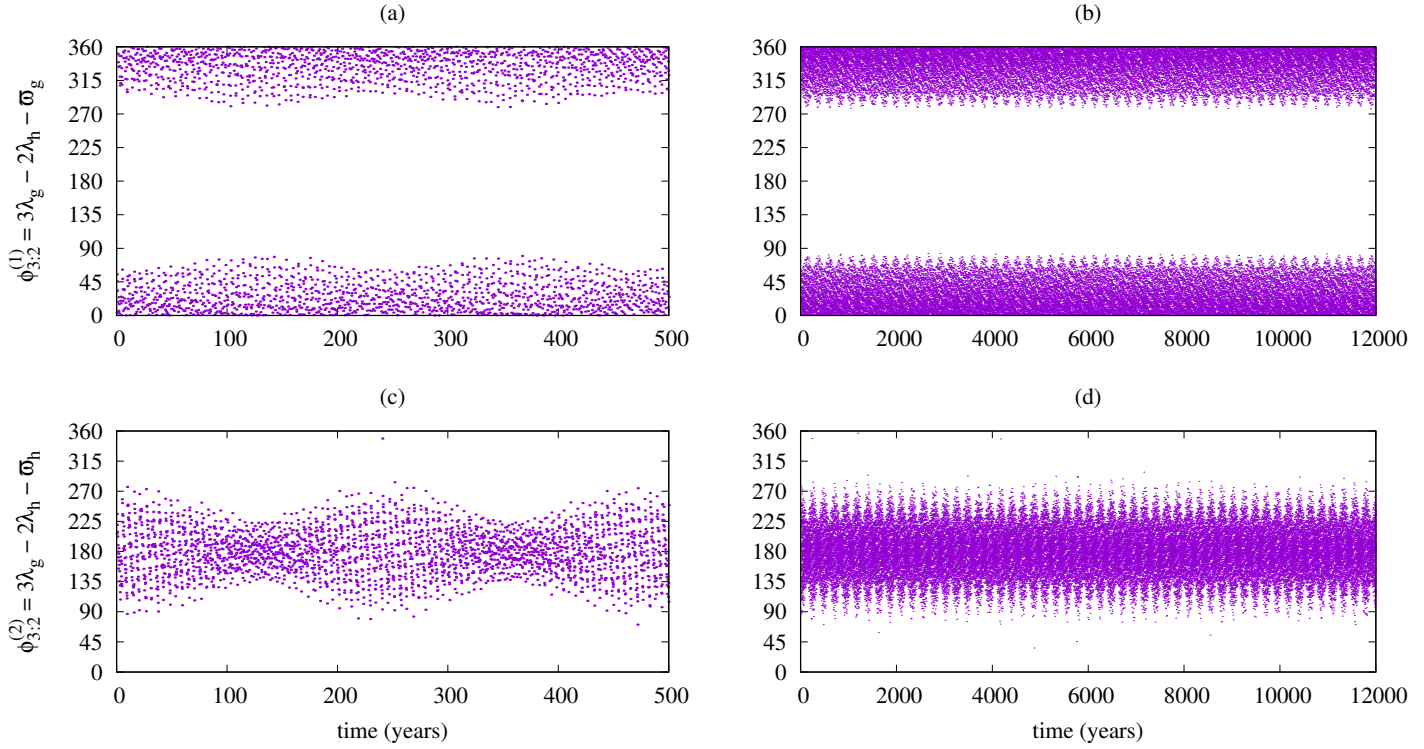
As RMMs 5:4 e 3:2 encontradas para os planetas b e c e g e h não coincidem no mesmo sistema, devido que os ângulos mostram sempre intermitência em curtos intervalos de tempo (ver a Tabela 15) ou simplesmente um ângulo libra.

Figura 37 – Os ângulos ressonantes envolvidos nos gráficos para um sistema do segundo intervalo de excentricidade. Os gráficos apresentados são similares aos da Figura 36. A descrição do comportamento dos ângulos ressonantes são apresentados no texto.



Fonte: próprio autor

Figura 38 – Os gráficos (a) e (c) são um zoom no intervalo de tempo de 0 a 500 anos do ângulo ressonante $\phi_{3:2}$. A Figura (b) e Figura (d) mostram a evolução do ângulo ressonante $\phi_{3:2}$ para um tempo total de 1.2×10^4 anos. Os ângulos ressonantes seguem as equações $\phi_{3:2}^{(1)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_g$ (Figura (a) e Figura (b)), e $\phi_{3:2}^{(2)} = 3\lambda_g - 2\lambda_h - \varpi_h$ (Figura (c) e Figura (d)), para o par planetário $g-h$.



Fonte: próprio autor

RMM dos planetas no segundo intervalo

No segundo intervalo de excentricidade analisamos a evolução temporal dos ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ para o par planetário $b - c$ e os ângulos $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ para o par planetário $g - h$.

Identificamos que em 16% dos sistemas, o ângulo $\phi_{5:4}^{(1)}$ para os planetas b e c circulam, e em 13% dos sistemas os ângulos $\phi_{5:4}^{(2)}$ também circulam. De modo que analisamos os sistemas onde os planetas estão sob efeito da RMM: em 72% e 62% dos sistemas os ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ dos planetas b e c apresentam circulação lenta, respectivamente. Também identificamos que o ângulo $\phi_{5:4}^{(1)}$ apresenta intermitência em escalas de tempo curta e longa em 11% e 1% dos sistemas, respectivamente. Para o ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$, encontramos que em 23% e 2% dos sistemas, o ângulo entre os planetas b e c mostram intermitência em escalas de tempo curta e curta & longa, respectivamente. Não identificamos nos sistemas ângulos que apresentem libração lenta, quando o par planetário $b - c$ está sob efeito da RMM. Encontramos que os dois ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ libram em períodos curtos de tempo.

Avaliamos a RMM 3:2 entre os planetas g e h , e identificamos que em 9% dos sistemas os ângulos ressonantes $\phi_{3:2}^{(1)}$ libram em torno de zero, em 91% dos sistemas o $\phi_{3:2}^{(1)}$ está sob efeito da RMM. 56% e 3% dos sistemas mostram intermitência em escala de tempo curta e longa, respectivamente. Também identificamos que em 10% e 22% dos sistemas, os planetas g e h estão sob efeito da RMM, o ângulo

está librando lentamente e circulando lentamente, respectivamente.

Encontramos que em 6% dos sistemas o ângulo ressonante $\phi_{3:2}^{(2)}$ libra em torno de 180° com uma amplitude de $\sim 100^\circ$. Além disso, identificamos que em 2% dos sistemas, o ângulo $\phi_{3:2}^{(2)}$ dos planetas g e h circulam. Em 94% dos sistemas, $\phi_{3:2}^{(2)}$ apresenta um comportamento sob efeito da ressonância (ver a Tabela 16).

Seguindo os resultados apresentados anteriormente, observamos que não encontramos um sistema onde existam os dois ângulos librando. A Figura 38 mostra o comportamento dos ângulos ressonantes $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$. Pode se notar que os ângulos libram até o tempo final da simulação numérica.

Resumimos as porcentagens dos ângulos que apareceram nos dois intervalos de excentricidade na Tabela 15 e Tabela 16, respectivamente. Notamos que é difícil encontrar um sistema nos dois intervalos de excentricidade que contenham os pares $\phi_{5:4}^{(1)}$, $\phi_{5:4}^{(2)}$ e $\phi_{3:2}^{(1)}$, $\phi_{3:2}^{(2)}$ para os planetas b e c , e os planetas g e h que librem no mesmo sistema.

Dado que apresentamos os resultados de forma geral, vamos estudar os sistemas mais representativos de cada intervalo de excentricidade. De modo que analisaremos os ângulos ressonantes dos sistemas mostrados nas Figura 35, Figura 36 e Figura 37, onde aparecem a RMM 5:4 dos planetas b e c e a RMM 3:2 para o par planetário $g - h$. Analisamos o argumento dos ângulos utilizando os seguintes critérios: o ângulo ressonante libra em torno de zero ou 180° , a escala de tempo de libração é curta, longa ou curta & longa, ou se o ângulo apresenta um comportamento de libração lenta ou circulação lenta.

Na Figura 35 observamos o comportamento do ângulo dos planetas b e c , e g e h em curto (ver a Figura 35(a) e Figura 35(b)) e longo (ver a Figura 35(c) e Figura 35(d)) período. A Figura 35(a) e Figura 35(b) mostram o ângulo ressonante $\phi_{5:4}^{(1)}$ librando em torno de 180° com máxima amplitude de $\sim 75^\circ$ mantida após 1.2×10^4 anos. O ângulo ressonante $\phi_{5:4}^{(2)}$, para o par planetário $b - c$, libram em torno de zero grau com uma amplitude de 50° , dito comportamento também é mantido até 1.2×10^4 anos. A Figura 35(e) mostra circulação em curtos períodos de tempo indicando que os planetas g e h estão sob o efeito da ressonância. A Figura 35(f) (maior tempo de simulação) apresenta um comportamento similar ao observado em um curto intervalo de tempo (Figura 35(e)), onde a maioria dos pontos do ângulo ressonante aparecem librando em torno de zero. A Figura 35(g) e a Figura 35(h) mostram o ângulo ressonante librando em torno de 180° com amplitudes mínimas e máximas de 100° e $\sim 179^\circ$, respectivamente.

Na Figura 36 observamos o comportamento dos ângulos ressonantes $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$, e $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ dos planetas b e c , e g e h , respectivamente. O ângulo $\phi_{5:4}^{(1)}$ libra lentamente em torno de 180° apresentando amplitude mínima de 70° e máxima de 179° (ver as Figura 36(a) e (b)). Também observamos que o ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$ apresenta um comportamento intermitente, cuja intermitência é em escala de tempo curta & longa (ver as Figura 36(c) e (d)). Nas Figura 36(c) e Figura 36(f), Figura 36(g) e Figura 36(h) os ângulos ressonantes $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ libram em torno de 0° e 180° , respectivamente, com poucos pontos fora da zona de libração.

A Figura 37 mostra a evolução temporal dos ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$, e $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$. A Figura 37(a) mostra a evolução temporal do ângulo $\phi_{5:4}^{(1)}$ circulando lentamente até 3000 anos, depois o ângulo ressonante

libra em torno de 180° no intervalo de tempo de 3000 anos a 5000 anos (Figura 37(b)). O ângulo $\phi_{5:4}^{(1)}$ circula lentamente até 11000 anos, e depois começa a librar. Observamos que o comportamento do ângulo $\phi_{5:4}^{(1)}$ no intervalo de longo período (Figura 37(b)) é intermitente, pois esse ângulo ressonante libra em determinados intervalos de tempo. A Figura 37(c) e Figura 37(d) mostram a evolução temporal do ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$ nos intervalos de 0 a 190 anos e de 0 a 1.2×10^4 anos. Por exemplo, na Figura 37(c) o ângulo $\phi_{5:4}^{(2)}$ apresenta intermitência em sua evolução temporal, sendo identificadas duas escalas de tempo curtas. Observa-se que o ângulo ressonante libra em torno de zero no intervalo de tempo de 0 a 45 anos, e circula no intervalo de tempo de 45 anos a 75 anos. Este comportamento é intermitente, sendo mantido até 3000 anos. Figura 37(d) notamos que o ângulo ressonante $\phi_{5:4}^{(2)}$ libra em torno de zero no intervalo de 3000 anos a 5000 anos, depois esse ângulo mantém o mesmo comportamento de intermitência nos mesmos intervalos de tempo até 10500 anos, onde novamente o ângulo ressonante começa a librar.

O ângulo ressonante $\phi_{3:2}^{(1)}$ libra em torno de zero (Figura 38(a)) com uma amplitude de 80° , e o ângulo ressonante $\phi_{3:2}^{(2)}$ também libra em torno de 180° (Figura 38(c)) com uma amplitude de 100° . Observamos que os ângulos ressonante $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ libram até o tempo final da simulação numérica de 1.2×10^4 anos (Figura 38(b) e (d)).

Na seguinte subseção apresentaremos as discussões do capítulo.

4.2 DISCUSSÃO DO CAPÍTULO

Os 100% dos sistemas do primeiro intervalo de excentricidade permanecem até o tempo final da integração numérica. Identificamos a RMM 5:4, onde a evolução temporal dos ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ para o par planetário $b - c$, classificamos como em RMM e sob o efeito da RMM. No entanto, encontramos que em 2% e 7% dos sistemas, os ângulos ressonantes $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ libram, e em 98% e 93% dos sistemas os ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ estão sob o efeito da ressonância de movimentos médios, respectivamente. Além disso, encontramos que na RMM 3:2 dos planetas g e h , os ângulos ressonantes $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ também são classificados da mesma forma. Observamos que em 10% e 25% dos sistemas, os ângulos ressonantes $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ libram, e em 90% e 75% dos sistemas os ângulos $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ estão sob o efeito da RMM, respectivamente.

No segundo intervalo de excentricidade todos os sistemas sobreviveram até 1.2×10^4 anos. Quando o tempo da simulação numérica é maior que $10^4 T_h$, ou seja, o tempo de integração é de $10^5 T_h$, 99% dos sistemas sobreviveram. Os ângulos ressonantes $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ dos planetas b e c libram e circulam em determinados intervalos de tempo, sendo um comportamento intermitente em escala de tempo curta, longa ou curta & longa. Encontramos que $\sim 92\%$ dos sistemas, os planetas g e h estão sob efeito da RMM 3:2 (ver a Tabela 16).

No terceiro intervalo de excentricidade, somente 6% dos sistemas permanecem até $10^4 T_h$, a instabilidade nos sistemas surge quando o tempo da simulação numérica é acrescentado até $10^5 T_h$. Os sistemas mostram instabilidade devido à colisão ou ejeção dos planetas, quando apresentam valores de $\text{Log } D$ próximos de zero.

Se o sistema Kepler-90 apresenta valores nos intervalos de excentricidade de zero a 10^{-3} e de 10^{-3} a 10^{-2} , observamos que os planetas b e c e g e h estão sob efeito das RMM 5:4 e RMM 3:2, respectivamente.

Cabrera et al. (2014) estimaram que os valores de excentricidade dos planetas g e h são menores que 0.025 e 0.095, respectivamente, sendo que para valores menores que 0.025 e 0.095 as órbitas dos planetas g e h são órbitas regulares. No estudo da dinâmica dos planetas g e h desenvolvido por Contreras e Boley (2018), eles definiram os valores iniciais da excentricidade dos planetas iguais a zero. Liang, Robnik e Seljak (2021) estimaram que o valor médio das excentricidades são iguais a 0.045 e 0.035, para os planetas g e h , respectivamente. Eles verificaram, através de simulações numéricas de longo período, a estabilidade das órbitas dos planetas g e h , e encontraram que os ângulos ressonantes desses planetas libram em curtos intervalos de tempo (LIANG; ROBNIK; SELJAK, 2021).

Entretanto, esses resultados são para os planetas g e h utilizando menores valores de massa, quando comparados com os valores de massa apresentados por Contreras e Boley (2018). Não foram apresentadas informações sobre os valores de massas dos outros 6 planetas do sistema (LIANG; ROBNIK; SELJAK, 2021).

Portanto, a massa dos planetas g e h nos três intervalos de excentricidade são importantes para a estabilidade dos sistemas analisados, sendo que o planeta h apresenta uma variação de excentricidade pequena comparada aos outros planetas, por ser o mais massivo dos 8 planetas.

Os planetas que possuem valores de excentricidade no terceiro intervalo e sobreviveram até $10^4 T_h$, quando aumentamos o tempo de simulação para $10^5 T_h$, esses planetas não sobrevivem. Isto ocorre

porque utilizamos os valores de massa dos planetas que foram extraídos de Contreras e Boley (2018).

Se modificamos os valores de massa para os planetas g e h , ou seja, assumimos valores menores que $69.1M_{\oplus}$ e $297.9M_{\oplus}$, respectivamente, os "sistemas Kepler-90" 70% sobrevivem até $10^4 T_h$, cujos valores de excentricidade dos planetas g e h podem ser comparados com os valores de excentricidade estimados por Liang, Robnik e Seljak (2021).

Executamos novas simulações numéricas com o objetivo de adotar os novos valores de massa para os planetas g e h (LIANG; ROBNIK; SELJAK, 2021), mas continuamos utilizando os valores de massa dos planetas b a f extraídos de Contreras e Boley (2018). As novas simulações numéricas foram executadas para um tempo de integração numérica de $10^5 T_h$. Os resultados mostraram que 100% dos sistemas dos dois primeiros intervalos de excentricidade sobreviveram o tempo total da simulação numérica, e somente 50% dos sistemas do terceiro intervalo de excentricidade sobreviveram até o tempo final de integração.

Portanto decidimos não assumir os valores de massa dos planetas g e h de Liang, Robnik e Seljak (2021) em conjunto com os valores de massa dos planetas b a f estimados por Contreras e Boley (2018), porque esses valores de massa foram estimados através de diferentes métodos. Por consistência, as condições iniciais dos valores de massa assumidos para os planetas b a h dos "sistemas Kepler-90" foram extraídos de Contreras e Boley (2018), cujos valores são aproximados aos valores de massa estimado por Han et al. (2014).

Os resultados apresentados anteriormente mostram que não aparecem cadeias ressonantes entre os quatro planetas i , d , e e f , ao contrário, identificamos que existem planetas que estão próximos da RMM 3:1 entre os planetas i e e , da RMM 11:5 entre os planetas d e f e da RMM 15:11 entre os planetas e e f . A cadeia ressonante estimada por Contreras e Boley (2018) é identificada entre os planetas d , e e f , cujo ângulo ressonante circula nos dois primeiros intervalos de excentricidade.

No próximo capítulo analisaremos os sistemas que sobreviveram incluindo um conjunto de partículas teste em cada sistema.

5 ANÁLISE DE UM CONJUNTO DE PARTÍCULAS TESTE NO SISTEMA KEPLER-90

O método de análise de frequência é utilizado para estudar a dinâmica dos sistemas extrassolares. Por exemplo, Correia et al. (2005) estudaram a estabilidade do sistema H2022206 através de simulações numéricas utilizando os dados observacionais extraídos do Telescópio CORALIE. Eles concluíram que a estabilidade do sistema é possível devido a RMM 5:1 entre o segundo e o primeiro planeta. Correia et al. (2009) estudaram a dinâmica do sistema HD 45364 e sugeriram que a configuração do sistema é estável devido a RMM 3:2 entre os planetas. Esse é o primeiro sistema de exoplanetas que apresenta esse tipo de RMM, além dos planetas Netuno e Plutão. Isto pode ser observado no mapa de difusão do sistema HD 45364 (CORREIA et al., 2009).

Existem outros trabalhos que utilizam o mapa de difusão para estudar a dinâmica dos sistemas multi-planetários, por exemplo, Correia et al. (2010) estudaram a dinâmica do sistema GJ 876 e concluíram que a estabilidade do sistema é devido a RMM 2:1 entre os planetas *b* e *c*. Lovis et al. (2011) analisaram o sistema HD 10180 utilizando o método de análise de frequência com o objetivo de identificar regiões estáveis, sendo essas regiões possíveis de abrigar planetas. Eles estimaram que o oitavo planeta pode estar localizado na zona habitável, cujo período orbital correspondente seria no intervalo de 300 dias a 350 dias.

Robutel e Laskar (2001) estudaram os efeitos dinâmicos dos planetas nas regiões entre as órbitas dos planetas do Sistema Solar, e também além da órbita do planeta Netuno. Eles identificaram ressonância no Cinturão de Kuiper através do método de análise de frequência. Couetdic et al. (2010) analisaram o sistema HD 202206 incluindo um conjunto de partículas teste com o objetivo de encontrar um planeta adicional no sistema. Eles encontraram que esse planeta pode sobreviver em uma pequena região que estaria em RMM 4:1 com o planeta *b*. O período orbital desse planeta seria de ~ 15 dias cuja massa estimada é similar à massa da Terra.

Os trabalhos apresentados anteriormente mostram a eficiência do método ao explorar a dinâmica global dos sistemas extrassolares. Existem trabalhos relacionados ao estudo da dinâmica global de regiões específicas no Sistema Solar que utilizam o mapa de difusão, por exemplo, Munõz-Gutiérrez e Winter (2017), Gaslac et al. (2020), Roberts e Muñoz-Gutiérrez (2020) e Muñoz-Gutiérrez et al. (2021) entre outros. Também encontramos trabalhos que discutem a estabilidade de objetos tipos troianos, de Júpiter, Saturno, Urano e Netuno que utilizam o método de análise de frequência.

Marzari, Tricarico e Scholl (2002) estudaram os objetos troianos de Saturno com valores de inclinação de 5° , 10° e 20° . Eles encontraram que a região de estabilidade diminui quando a inclinação aumenta e a região se torna instável quando a inclinação dos troianos é maior que 15° . Eles identificaram que o responsável pela instabilidade dos troianos com $I=20^\circ$ é a ressonância $2g_6 - g_5$. Marzari, Tricarico e Scholl (2003b) investigaram a estabilidade dos objetos tipo troianos próximos aos pontos Lagrangianos L_4 e L_5 de Júpiter. Eles utilizaram o mapa de análise de frequência para determinar a natureza caótica das órbitas. A região de estabilidade, onde os objetos tipos troianos são localizados, se torna instável para objetos que possuem valores de inclinação maior que 40° . Marzari, Tricarico e Scholl (2003a) analisaram a estabilidade dos objetos tipo troianos dos planetas Urano e Netuno

através do mapa de análise de frequência para os diferentes valores de inclinação. Eles também analisaram a órbita do objeto troiano 2001 QR322. A partir dos resultados eles concluiriam que o objeto 2001 QR322 está próximo de uma região estável dos objetos troianos de Netuno.

Neste capítulo analisaremos as regiões estáveis dos sistemas "Kepler-90" através do método do mapa de análise de frequência. As regiões são analisadas entre as órbitas dos planetas e além da órbita do último planeta, no intuito de verificar quais regiões podem abrigar pequenos objetos. No entanto é necessário selecionar os sistemas que sobreviveram o tempo total da simulação numérica por um período de $10^5 T_h$. A esses sistemas será adicionado um conjunto de partículas teste.

Nas seguintes subseções apresentamos os resultados das simulações numéricas dos cinco sistemas selecionados de cada intervalo de excentricidade. Depois, analisaremos os "sistemas Kepler-90" avaliando as órbitas das partículas, ou seja, se possuem órbitas regulares ou irregulares. Identificaremos as partículas em ressonância de movimentos médios entre as órbitas dos planetas e além do planeta h .

5.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

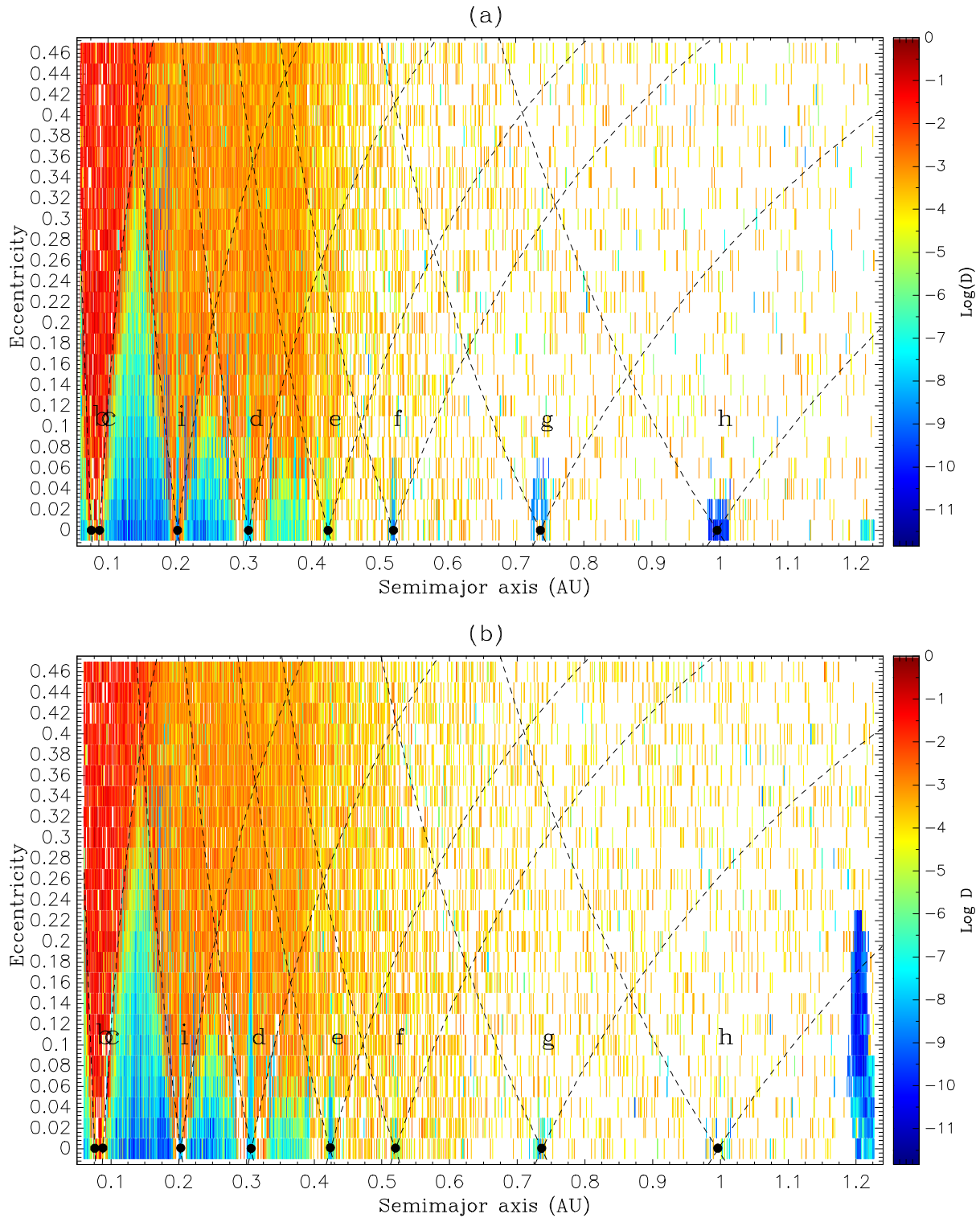
Estudamos a dinâmica de um conjunto de partículas teste sob o efeito dos planetas cujas condições iniciais foram extraídas dos sistemas estáveis, como verificado no capítulo 3. No entanto, selecionamos 5% dos sistemas de cada intervalo de excentricidade e incluímos um conjunto de partículas teste em cada "sistema Kepler-90". Os sistemas foram escolhidos aleatoriamente em ambos intervalos de excentricidade. Os sistemas do primeiro e segundo intervalos de excentricidade são nomeados como os sistemas K90-1a, K90-2a, K90-3a, K90-4a e K90-5a e os sistemas K90-1b, K90-2b, K90-3b, K90-4b e K90-5b, respectivamente.

As condições iniciais das partículas teste são as seguintes: o semieixo maior está no intervalo de 0.06 UA a 1.22624 UA com $\Delta a = 7 \times 10^{-4}$ UA, a excentricidade está no intervalo de 0 a 0.50 com $\Delta e = 2 \times 10^{-2}$, a inclinação e os elementos orbitais ω , Ω e λ são iguais a zero.

Em cada figura apresentada as linhas tracejadas são as curvas de colisão dos planetas. Cada retângulo representa o valor de $\text{Log } D$. As condições iniciais das partículas estão localizadas no espaço de fase a vs e . Se as partículas testes são ejetadas do sistema ou colidem com os corpos massivos, essas partículas são retiradas das figuras. Utilizaremos um conjunto de 40 000 partículas teste em cada sistema para cada intervalo de excentricidade, sendo um total de 400 000 partículas teste.

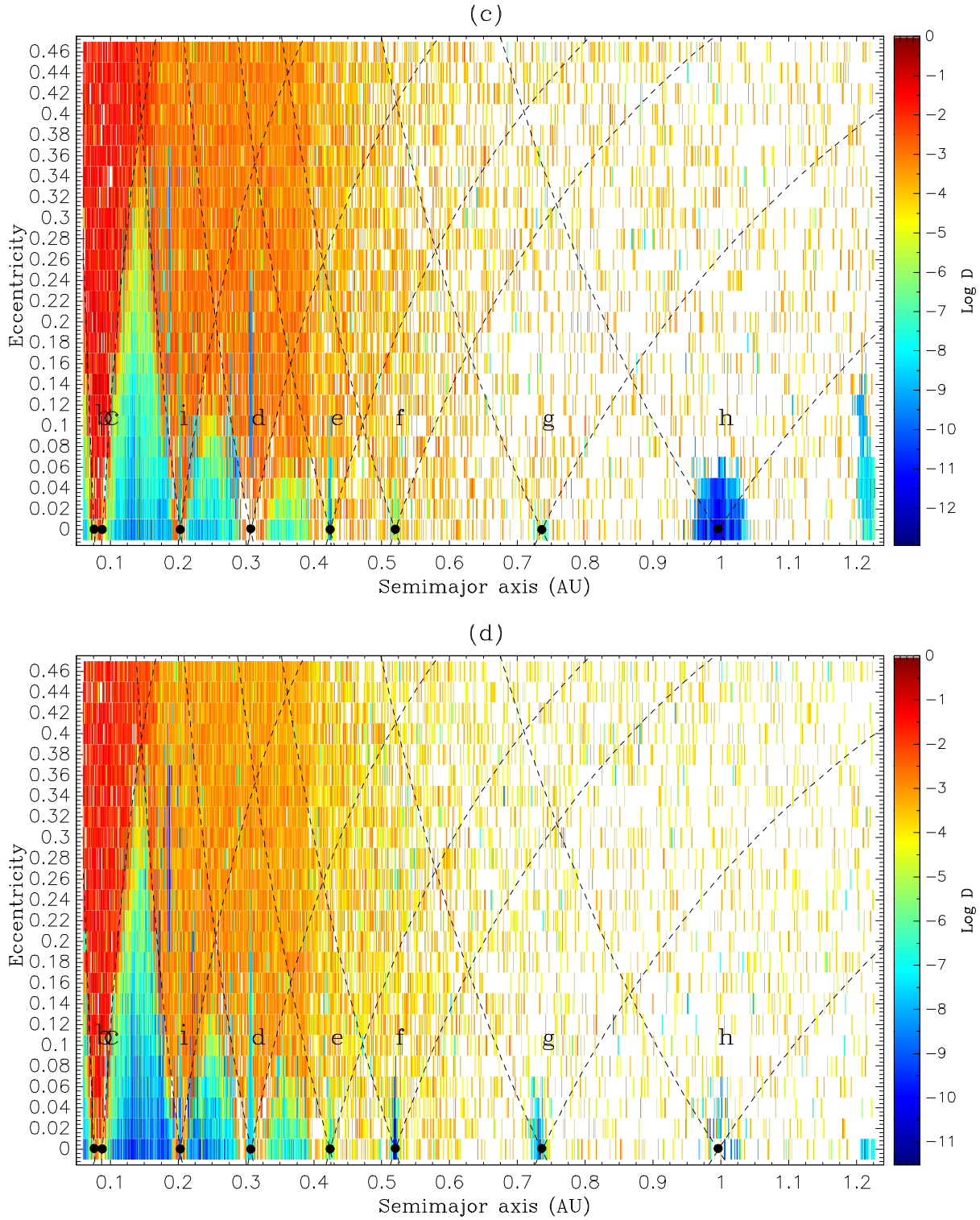
O tempo de integração nas simulações numéricas foi executado de acordo com o seguinte regime: o semieixo maior foi dividido em três intervalos de a , cada intervalo de a apresenta um tempo de integração diferente. O primeiro intervalo é de 0.06 UA a 0.17064 UA cujo tempo de integração é dado por $10^4 T_c$ (T_c é o período orbital do planeta c), o segundo intervalo é de 0.17134 UA a 0.392540 UA sendo o tempo de integração numérica de $10^4 T_d$ (T_d é o período orbital do planeta d) e o terceiro intervalo está definido de 0.39324 UA a 1.22624 UA, onde o tempo de integração numérica é dado por $10^4 T_h$ (T_h é o período orbital do planeta h).

Figura 39 – Os mapas de difusão no espaço de fase a vs e correspondem aos sistemas do primeiro intervalo de excentricidade. Os resultados apresentados nas Figura (a) e Figura (b) mostram a dinâmica geral dos dois sistemas K90-1a e K90-2a. Cada retângulo é plotado e centrado nas condições iniciais das partículas teste. A paleta de cores indica os valores de $\text{Log } D$. As regiões de cor azul correspondem a regiões estáveis, se a cor é vermelha as regiões serão instáveis. As zonas brancas em ambas figuras corresponderam a partículas ejetadas dos sistemas ou que sofreram colisão com os planetas, ou com a estrela.



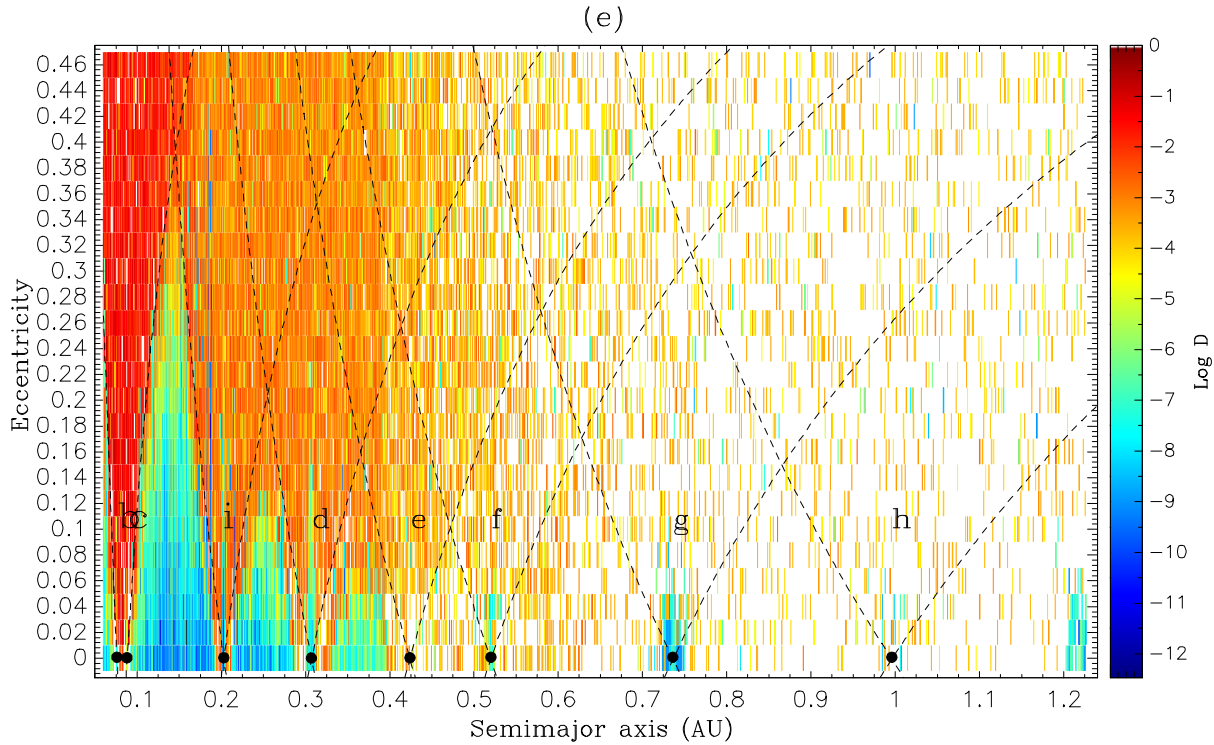
Fonte: próprio Autor

Figura 40 – A figura mostra a dinâmica global dos dois sistemas nomeados K90-3a e K90-4a do primeiro intervalo de excentricidade (Figura (c) e Figura (d)). As figuras são similares à Figura 39. As zonas brancas em ambas figuras corresponderam as partículas ejetadas dos sistemas ou que sofreram colisão com os planetas, ou com a estrela.



Fonte: próprio Autor

Figura 41 – A figura mostra o mapa de difusão no espaço de fase a vs e para o sistema K90-5a.



Fonte: próprio Autor

Dividimos em três tempos diferentes a integração numérica para calcular as frequências principais nos dois intervalos de tempo (ŠIDLICHOVSKÝ; NESVORNÝ, 1997). Portanto, analisaremos as regiões estáveis e coorbitais dos diferentes sistemas escolhidos aleatoriamente nos dois primeiros intervalos de excentricidade nos próximos dois itens.

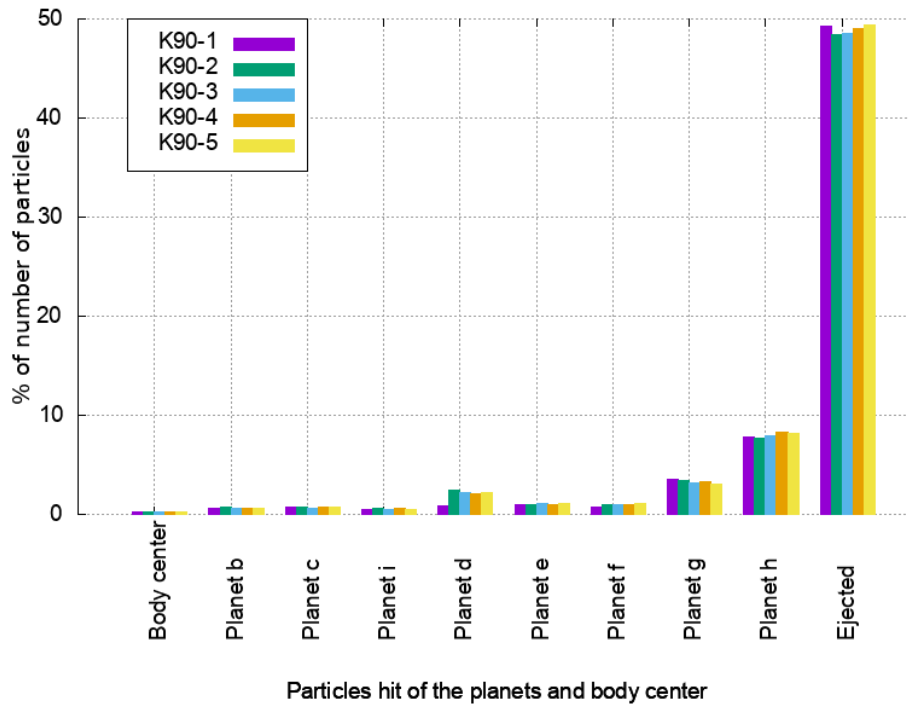
1.- Primeiro intervalo de excentricidade:

Os resultados apresentados nas Figura 39(a), Figura 39(b), Figura 40(c), Figura 40(d) e Figura 41(e) indicam a dinâmica dos "sistemas Kepler-90" utilizando como condições iniciais os elementos orbitais dos planetas que foram extraídos do primeiro intervalo de excentricidade (ver no Apêndice C a Tabela 18). Os sistemas apresentados são indicados por K90-1a a K90-5a.

Identificamos três regiões estáveis entre as órbitas dos planetas c e i , entre as órbitas dos planetas i , d e entre as órbitas dos planetas d e e (ver a Figura 39, Figura 40 e Figura 41). Observamos que além da órbita do planeta h existem partículas teste com órbitas regulares cujo $\text{Log } D$ é de aproximadamente igual a -7.5, para o valor de excentricidade igual a zero (ver a Figura 39(a) e Figura 40(d)). Também identificamos outros aglomerados de partículas teste além da órbita do planeta h , nos intervalos de excentricidade de 0 a 0.22, no intervalo de excentricidade de 0 a 0.12 e no intervalo de excentricidade de 0 a 0.06. O valor médio de $\text{Log } D$ para cada intervalo de excentricidade são aproximadamente -11, -8.5 e -7 (ver a Figura 39(b), Figura 40(c) e Figura 41(e)).

Distinguimos partículas coorbitais nos planetas i , d e e nos diferentes sistemas escolhidos (ver a

Figura 42 – O histograma indica a porcentagem do número de partículas teste que colidem com os planetas ou com o corpo central dos sistemas K90-1a até K90-5a, e também as partículas que são ejetadas de cada sistema. Esses sistemas pertencem ao primeiro intervalo de excentricidade. Podemos identificar cada sistemas através da paleta de cores.



Fonte: próprio Autor

Tabela 17 – Largura da região coorbital dos planetas.

planetas	$a \pm W_c$ (UA)	$(\pm) W_c$ (km)
b	0.076 ± 0.0007	2.1×10^5
c	0.088 ± 0.0007	2.1×10^5
i	0.2027 ± 0.0017	5.2×10^5
d	0.307 ± 0.0042	1.2×10^6
e	0.424 ± 0.0055	1.6×10^6
f	0.520 ± 0.0071	2.1×10^6
g	0.736 ± 0.0205	6.1×10^6
h	0.996 ± 0.0452	1.3×10^7

Fonte: próprio Autor

Figura 39 a Figura 41). De acordo com a equação dado por Murray e Dermott (1999)

$$W_c \sim \frac{1}{2} \mu^{1/3} a_p \quad (1)$$

onde μ é a razão de massa entre o planeta e a estrela e a_p é o semieixo maior do planeta. Estimamos a largura da região coorbital de cada planeta (ver a Tabela 17). Observamos que os planetas *b* e *c* apresentam valores pequenos de W_c e que o planeta *h* tem a maior largura da região coorbital entre os planetas.

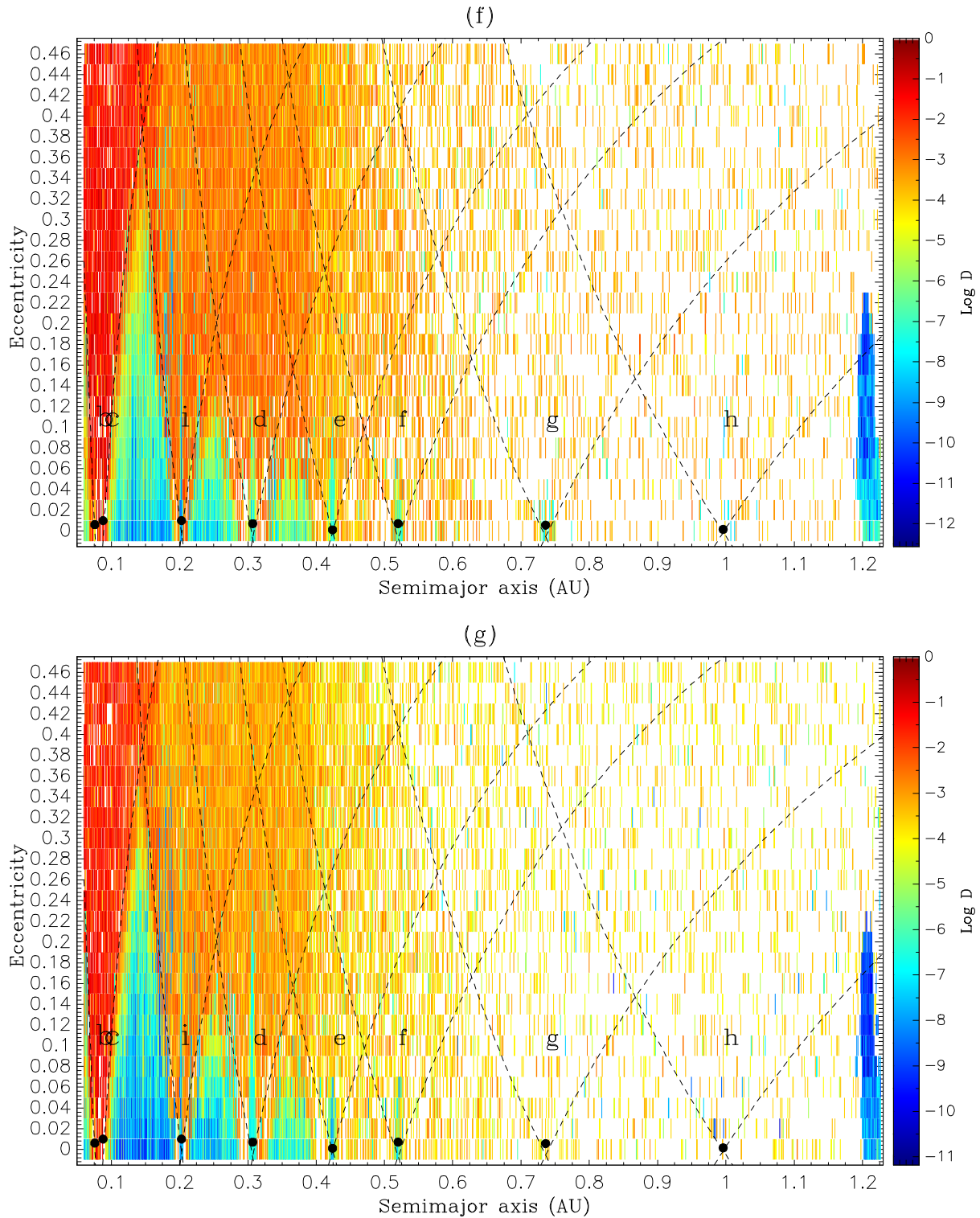
Calculamos o valor médio da máxima excentricidade que alcançam as partículas teste nas regiões coorbitais, como também o valor médio do Log D para os diferentes sistemas. Notamos que

o valor médio da excentricidade para as partículas coorbitais com todos os "planetas i " é de 0.155 e o valor médio de $\text{Log } D$ é de -7.1, nos "planetas d " é de 0.2 e a média de $\text{Log } D$ é de -7.9, e nos "planetas e " é de 0.05 com uma média de $\text{Log } D$ de -7. Isto sugere que as partículas coorbitais que estão presentes nessas regiões apresentam órbitas regulares, observando que a região coorbital do planeta d (ver a Figura 40(c)) está no intervalo de excentricidade de 0.06 a 0.24.

Os valores de máxima excentricidade que identificamos nos "planetas h " são de 0.02 e 0.04 cuja média de $\text{Log } D$ é de aproximadamente -11 (ver a Figura 39(a) e Figura 40(c)). Os resultados apresentados na Figura 41 mostram as regiões coorbitais dos planetas i , f e g . Identificamos que as regiões coorbitais desses planetas são pequenas, ao contrário da região coorbital do planeta d que apresenta maior quantidade de partículas.

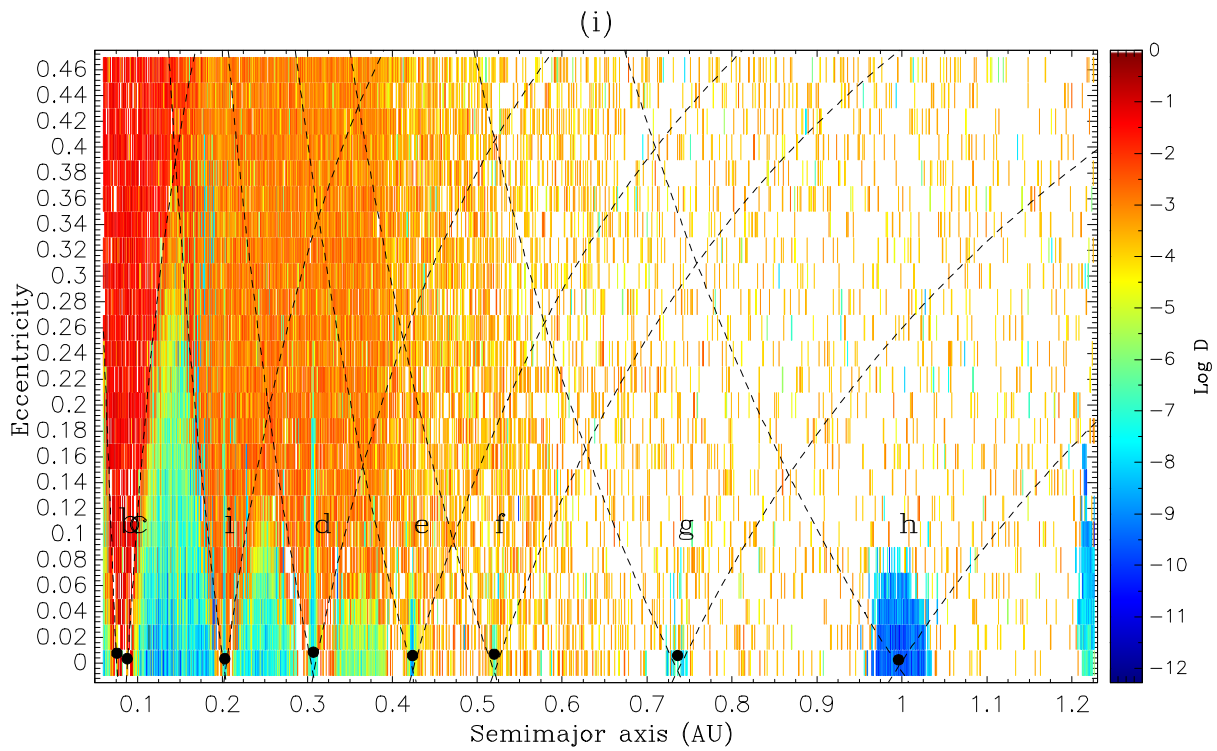
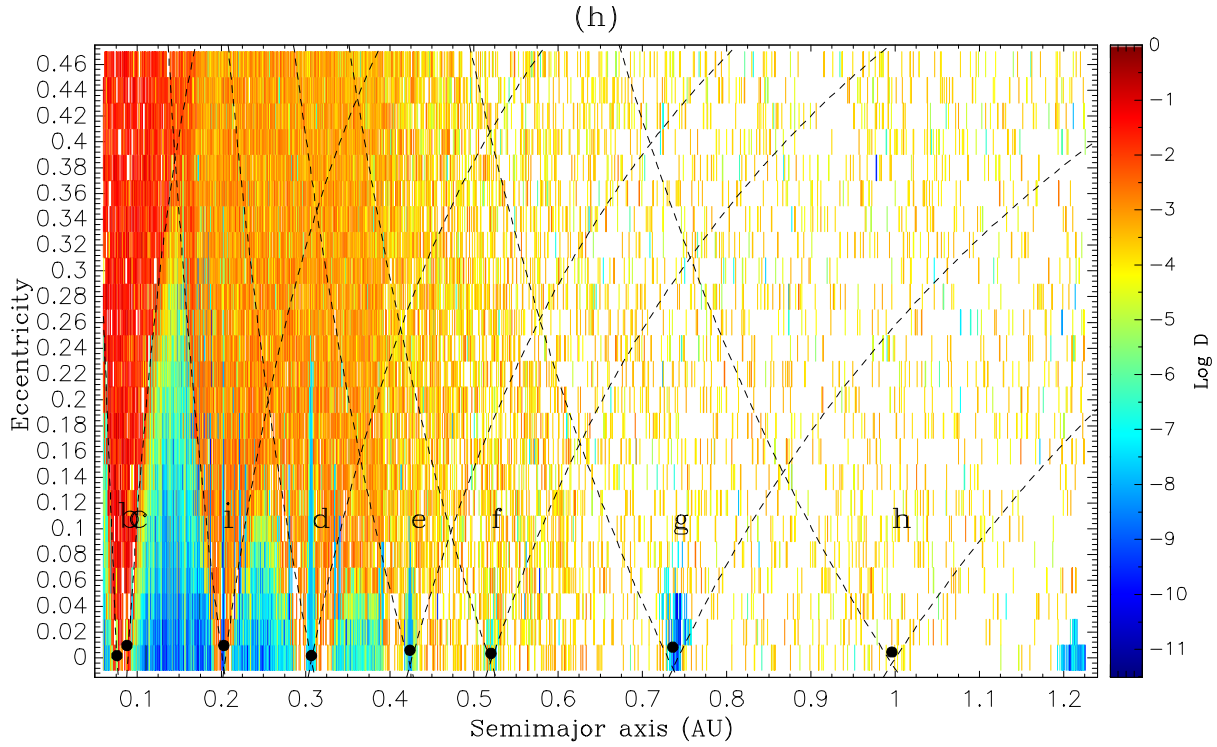
Seguindo o apresentado nas legendas da Figura 39 até Figura 41, observamos regiões em branco. Notamos que a maior quantidade de partículas teste colidem com os "planetas g " e h nos cinco sistemas, onde as porcentagens de colisões não são maiores que 10%. Além disso, nos sistemas K90-1a, K90-2a, K90-3a, K90-4a e K90-5a, observamos que menos de 5% das partículas teste colidem com os "planetas d " (ver a Figura 42). No entanto, o sistema K90-1a apresenta a menor porcentagem de partículas que colidem com o planeta d comparado aos outros sistemas. Notamos que $\sim 49\%$ das partículas teste são ejetadas dos cinco sistemas propostos (ver a Figura 42).

Figura 43 – Os resultados apresentados na figura correspondem aos mapas de difusão no espaço de fase a vs e dos sistemas K90-1b e K90-2b, pertencentes ao segundo intervalo de excentricidade. O regime de cores indica se uma órbita é regular ou irregular no sistema proposto. As linhas tracejadas são as linhas de colisão de todos os planetas. As zonas brancas no mapa representam aquelas partículas teste que sofreram ejeção ou colidiram com os planetas ou com o corpo central.



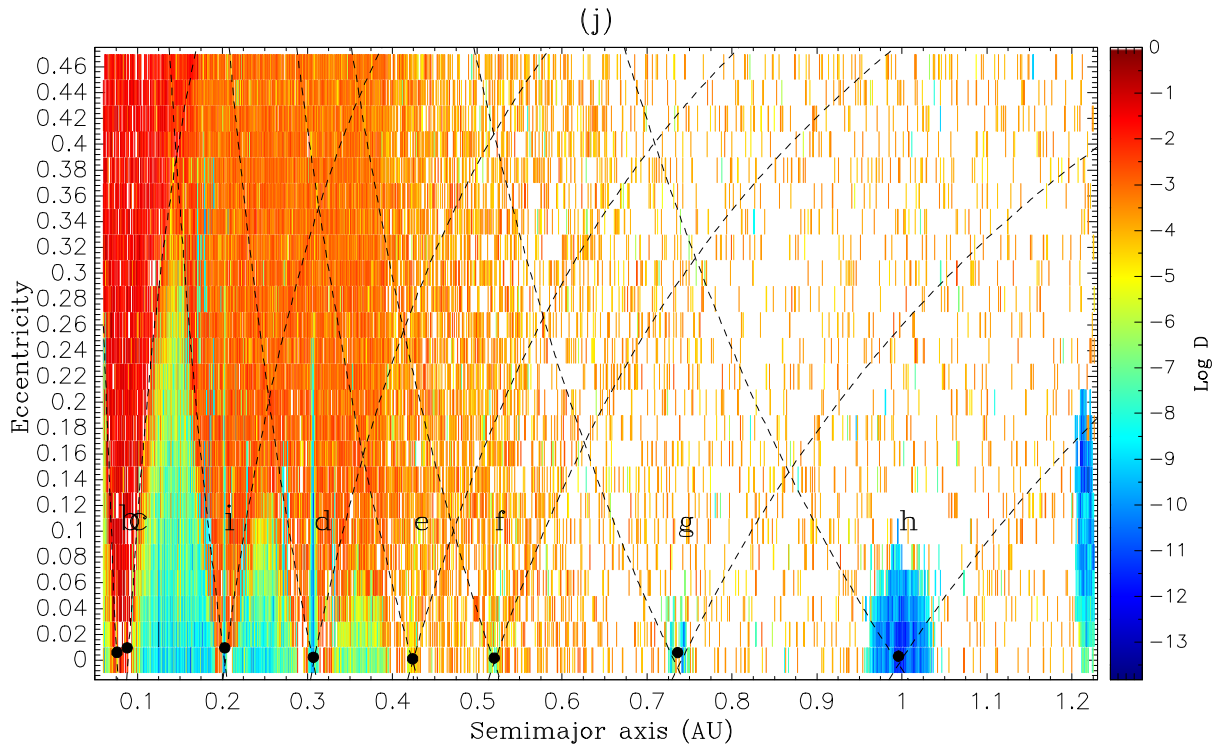
Fonte: próprio Autor

Figura 44 – Mapas de difusão no espaço de fase a vs e dos sistemas K90-3b e K90-4b no segundo intervalo de excentricidade. Figura (h) e Figura (i) seguem as mesmas regras indicadas na Figura 43. As zonas com cor azul são regiões estáveis e as zonas de cor vermelha são regiões instáveis.



Fonte: próprio Autor

Figura 45 – Mapa de difusão no espaço de fase a vs e para o sistema nominal K90-5b.



2.- Segundo intervalo de excentricidade:

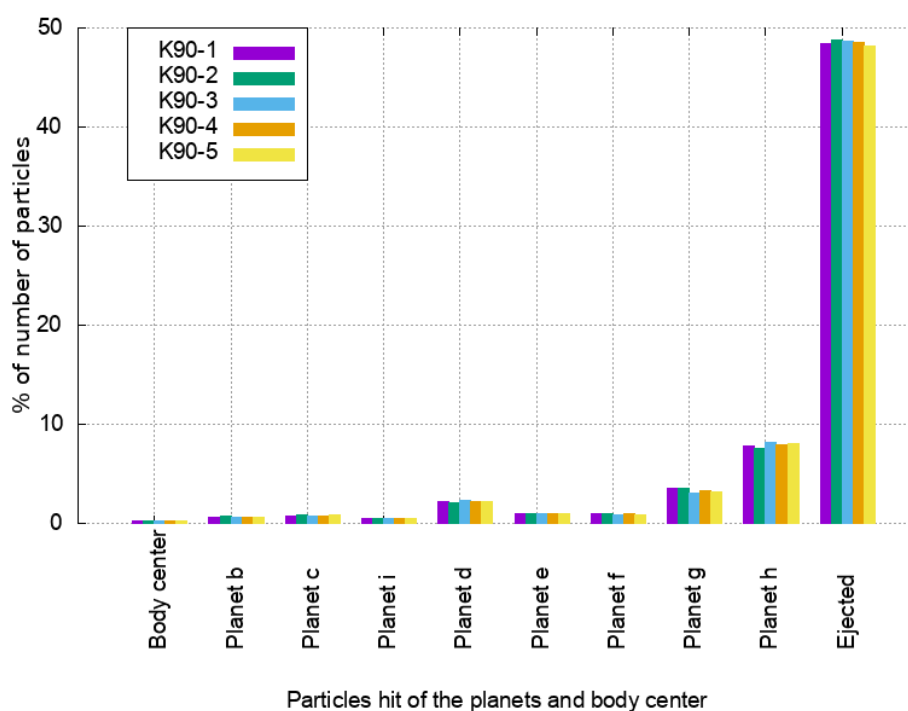
Estudamos o segundo conjunto de partículas teste sob efeito dos planetas pertencentes ao segundo intervalo de excentricidade. Esses sistemas são identificados como K90-1b, K90-2b, K90-3b, K90-4b e K90-5b. A dinâmica dos "sistemas Kepler-90" é apresentada na Figura 43, Figura 44 e Figura 45. As condições iniciais dos planetas estão apresentadas no Apêndice C (ver a Tabela 19) e as condições iniciais das partículas teste são as mesmas que as do item [1].

Identificamos três regiões estáveis entre as órbitas dos planetas c e i , i e d , e d e e , localizamos um aglomerado de partículas teste além da órbita do planeta h (ver a Figura 43, Figura 44 e Figura 45). Observamos que os aglomerados de partículas que estão além da órbita do planeta h apresentam diferentes intervalos de excentricidade de 0 a 0.22, de 0 a 0.20, de 0 a 0.02, de 0 a 0.16 e de 0 a 0.20 nos diferentes sistemas K90-1b, K90-2b, K90-3b, K90-4b e K90-5b, respectivamente (ver Figura 43(f), Figura 43(g), a Figura 44(h), a Figura 44(i) e a Figura 45).

Distinguimos partículas coorbitais nos "planetas i " (região coorbital), nos "planetas d ", nos "planetas e ", nos "planetas f " e nos "planetas g ". As partículas teste nas regiões coorbitais dos "planetas h " não são comuns neste intervalo de excentricidade. Pode ser devido ao fato em tais sistemas os "planetas h " e os "planetas g " apresentem valores próximos de anomalia média entre eles nas condições iniciais (ver Apêndice C, Tabela 19).

Calculamos o valor médio de máxima excentricidade que alcançam as partículas nas regiões coorbitais dos planetas nos cinco sistemas apresentados. O "planetas i " e d tem partículas coorbitais com um valor médio de máxima excentricidade de 0.168 e 0.196, cujo valor médio

Figura 46 – O histograma indica a porcentagem do número de partículas teste que colidem com os planetas ou com o corpo central dos sistemas K90-1b até K90-5b, e também as partículas que são ejetadas de cada sistema. Esses sistemas pertencem ao segundo intervalo de excentricidade. Podemos identificar cada sistemas através da paleta de cores.

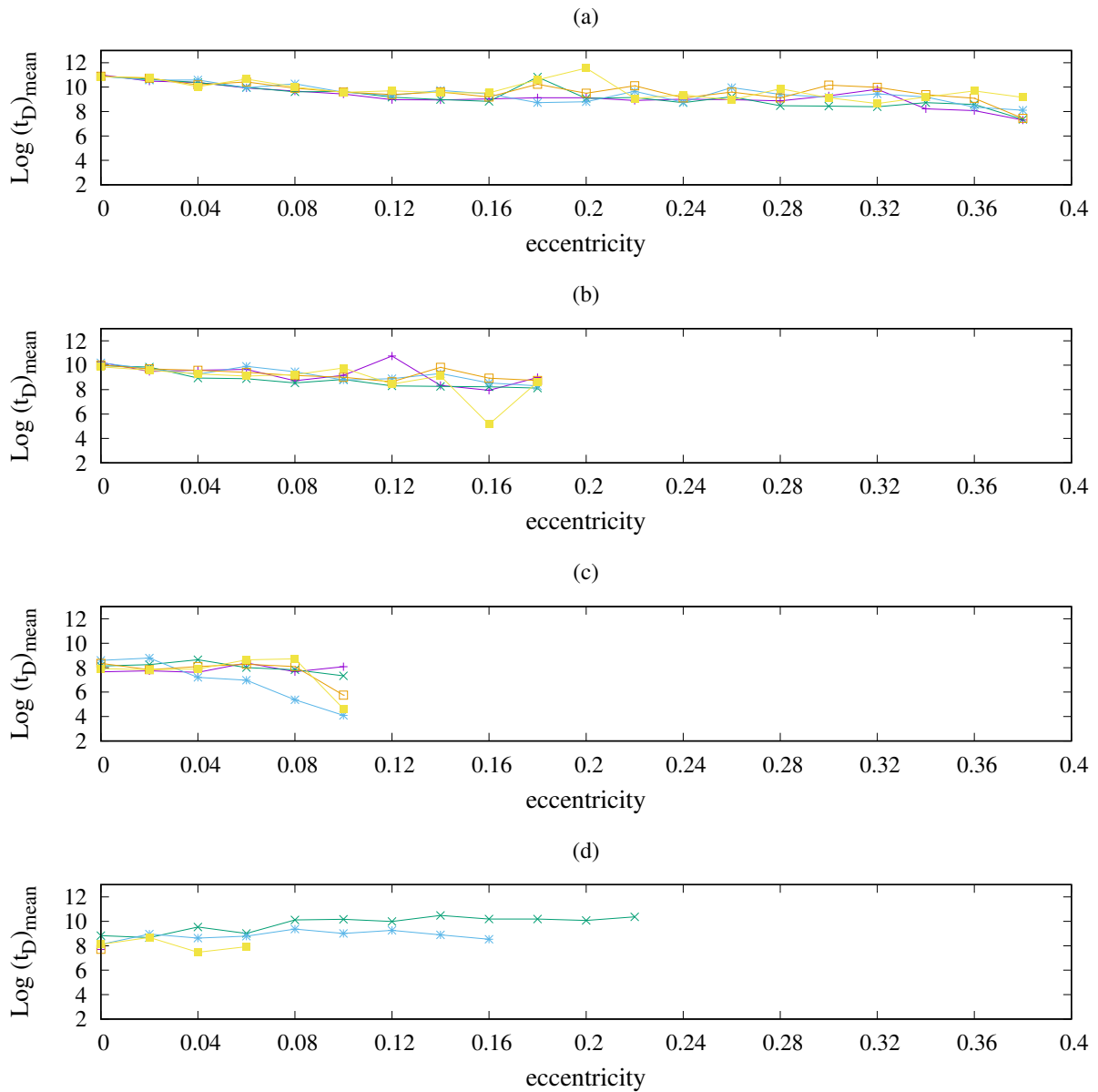


Fonte: próprio autor

de $\text{Log } D$ é de -7.58 e -7.46, respectivamente. O valor médio da máxima excentricidade nas regiões coorbitais dos "planetas e " e os "planetas f " são de 0.065 e 0.015 respectivamente, com exceção do sistema K90-5b apresentado na Figura 45. Observamos que as partículas que estão na região coorbital dos "planetas g " e dos "planetas h " possuem um valor médio de $\text{Log } D$ de aproximadamente -8.07 e -11.5, respectivamente, cujos valores foram encontrados para os sistemas K90-4b e K90-5b (ver a Figura 44(i) e a Figura 45).

Observamos que $\sim 49\%$ das partículas teste são ejetadas dos sistemas. Os "planeta d ", os "planetas g " e os "planeta h " apresentam a maior porcentagem de colisões. No entanto, as porcentagens de partículas teste que colidem com esses planetas não são maiores que 9% (ver a Figura 46).

Figura 47 – Apresentamos o comportamento do $\text{Log}(t_D)_{\text{médio}}$ das partículas que sobreviveram o tempo total de integração numérica para cada valor de excentricidade. As quatro regiões estáveis são apresentadas nas Figura (a) (região 1), Figura (b) (região 2), Figura (c) (região 3) e Figura (d) (região 4) que apareceram nos sistemas do primeiro intervalo de excentricidade.

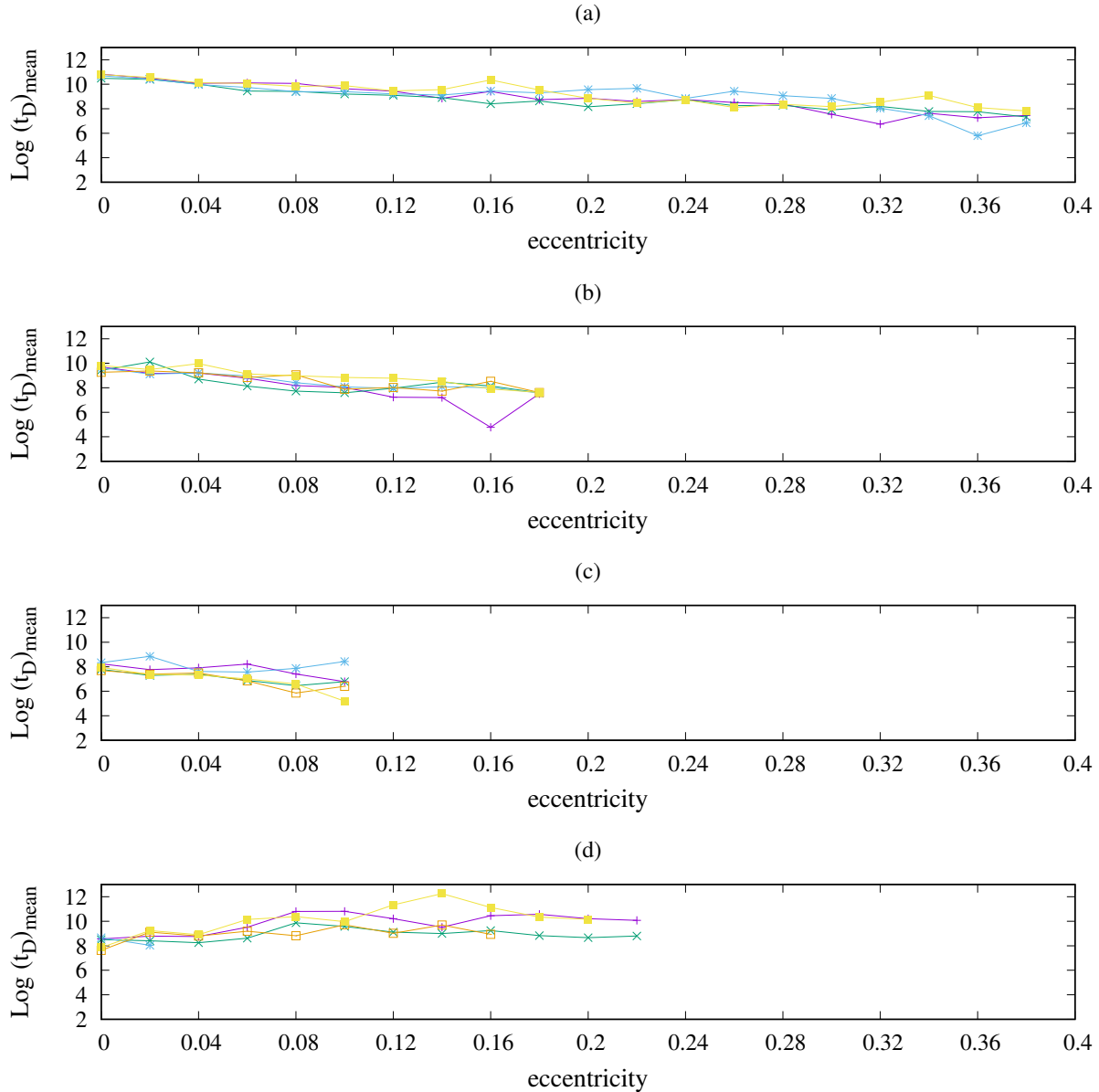


Fonte: próprio autor

Identificamos quatro regiões de estabilidade nos cinco mapas de difusão para quatro diferentes intervalos de excentricidade. As regiões são identificadas como região 1, partículas localizadas entre as órbitas dos planetas *c* e *i*, região 2 localizada entre as órbitas dos planetas *i* e *d*, região 3 localizada entre as órbitas dos planetas *d* e *e*, e por último o aglomerado de partículas localizado além da órbita do planeta *h*, denominada de região 4.

Analizamos os resultados do valor médio do tempo de difusão das quatro regiões de estabilidade do primeiro intervalo de excentricidade apresentados na Figura 47 e do segundo intervalo de excentricidade apresentados na Figura 48. Os resultados são apresentados em função do valor médio do tempo de difusão para cada valor de excentricidade das partículas localizadas nas regiões estáveis. O tempo de

Figura 48 – Figura (a), Figura (b), Figura (c) e Figura (d) mostram o valor médio do tempo de difusão das partículas que apresentam órbitas regulares e irregulares nas quatro regiões estáveis, as quais são caracterizadas pelo $\log_{10}(t_D)_{\text{médio}}$ para cada valor de excentricidade. As condições iniciais dos planetas nos sistemas pertencem ao segundo intervalo de excentricidade.



Fonte: próprio autor

difusão (T_D) é calculado da seguinte forma: estimamos o parâmetro de difusão (D) das órbitas das partículas cuja equação está definida em 8, depois, utilizamos a relação $(DP)^{-1}$, onde P é o período da partícula. Dessa maneira obtemos o tempo de difusão.

No primeiro intervalo de excentricidade, encontramos que as "regiões 1" estão em uma zona de alta estabilidade nos cinco mapas de difusão. Observamos que as partículas das "regiões 1" possuem valores de excentricidade no intervalo de 0 a 0.38 e apresentam um valor médio de $\text{Log } t_D$ no intervalo de 7.3 a 11 (ver a Figura 47(a)). Isto sugere que as partículas com valor médio de t_D diminuem quando o valor da excentricidade cresce, tornando-se as órbitas irregulares. Pode-se ver que as órbitas das

partículas teste tendem a ser irregulares nas regiões 2 e 3 (ver a Figura 47(b) e Figura 47(c)) sendo limitadas pelo valor da excentricidade das partículas. Nas "regiões 2" observamos que as partículas são estáveis no intervalo de excentricidade de 0 a 0.18 e nas "regiões 3", também são estáveis no intervalo de excentricidade de 0 a 0.10, cujos intervalos de valor médio de $\text{Log } t_D$ são de 8.1 a 10.2 e 4.1 a 8.6 para cada intervalo de excentricidade (ver a Figura 47(b) e Figura 47(c)), respectivamente.

As "regiões 4" apresentam um formato diferente que as "regiões 1", 2 e 3 nos cinco mapas de difusão. Observamos que os sistemas K90-1a e K90-4a apresentam um pequeno conjunto de partículas na região 4 com valores de excentricidade iguais a zero (ver a Figura 47(d)). Nos outros sistemas encontramos aglomerados de partículas teste, por exemplo, no sistema K90-2a, no intervalo de excentricidade de 0 a 0.22, o sistema K90-3a no intervalo de excentricidade de 0 a 0.16, o sistema K90-5a no intervalo de excentricidade de 0 a 0.06, cujos intervalos de valor médio de $\text{Log } t_D$ são de 8.8 a 10.4 para o sistema K90-2a, de 8.1 a 8.5 para o sistema K90-3a e de 7.9 a 8.1 para o sistema K90-5a (ver a Figura 47(d)).

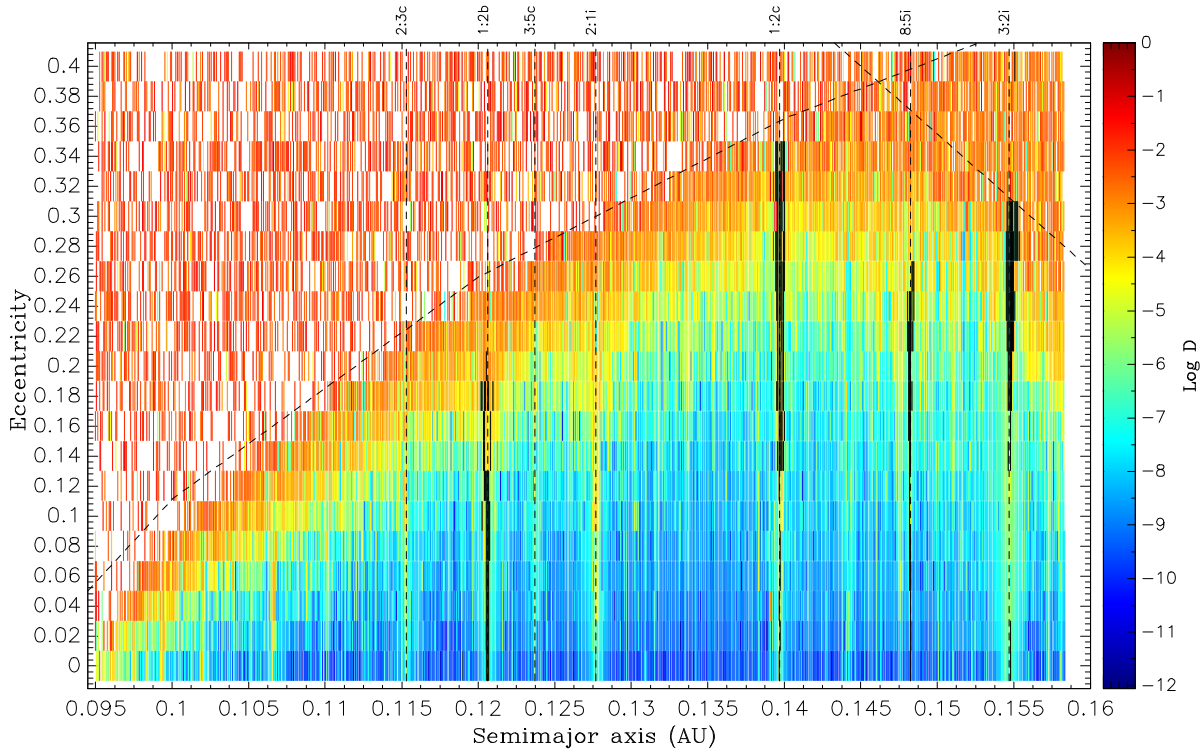
No segundo intervalo de excentricidade encontramos que a variação do valor médio de $\text{Log } t_D$ da região 1, região 2, e região 4 são maiores que no primeiro intervalo de excentricidade. Nas "regiões 1" dos mapas de difusão, observamos que as partículas teste estão no intervalo de excentricidade de 0 a 0.38 e apresentam um valor médio de $\text{Log } t_D$ de 5.8 a 11.1 (ver a Figura 48(a)). Nas "regiões 2" estão no intervalo de excentricidade de 0 a 0.18, onde o intervalo de valor médio de $\text{Log } t_D$ está no intervalo de 4.8 a 9.8 (ver a Figura 48(b)), nas "regiões 3", observamos que o intervalo de excentricidade é de 0 a 0.10, onde o intervalo de valor médio de $\text{Log } t_D$ está entre 5.2 e 8.3 (ver a Figura 48(c)).

No caso das "regiões 4" (ver a Figura 48(d)) notamos que nos sistemas K90-1b, K90-2b, K90-4b e K90-5b aparecem aglomerados de partículas que estão além da órbita do planeta h , cujos intervalos do valor médio de $\text{Log } t_D$ são de 8.5 a 10.1 no sistema K90-1b, de 8.5 a 9.9 no sistema K90-2b, de 7.8 a 10.2 no sistema K90-4b e de 8.9 a 9.7 no sistema K90-5b, sendo o intervalo de excentricidade para esse sistema de 0 a 0.16. O sistema K90-3b apresenta um conjunto de partículas que estão no intervalo de excentricidade de 0 a 0.02, onde o intervalo de valor médio de $\text{Log } t_D$ está de 8 a 8.7.

Os resultados apresentados anteriormente mostram que a mudança dos valores de excentricidade dos planetas, seguindo o regime estabelecido no segundo intervalo de excentricidade, faz com que as partículas apresentem órbitas irregulares nas "regiões 1", 2 e 3. Notamos que na região 4 do segundo intervalo de excentricidade é possível encontrar aglomerados de partículas além da órbita do planeta h . Se compararmos aos conjuntos de partículas que permanecem além da órbita do planeta h do primeiro intervalo de excentricidade, notaremos diferenças que devem ser consideradas.

Isto motivou a realizar uma melhor análise da região 1 e da região 4. Para isso selecionamos o sistema K90-2b para estudar as ressonâncias de movimento médio que surgem nessas duas regiões, utilizando o mapa de difusão no espaço fase a vs e . A análise do sistema será apresentada nas seguintes seções 4.2, 4.3 e 4.4.

Figura 49 – Mapa de difusão no espaço de fase a vs e entre a órbita do planeta c e 0.1555 UA. Os elementos orbitais dos planetas correspondem ao sistema K90-1b que pertence ao segundo intervalo de excentricidade. As cores correspondem à paleta de cores que segue os valores de $\text{Log } D$. O gráfico segue o mesmo regime mostrado na Figura 45. A linha tracejada corresponde ao raio do pericentro do planeta c e o raio de apocentro do planeta i .



Fonte: próprio autor

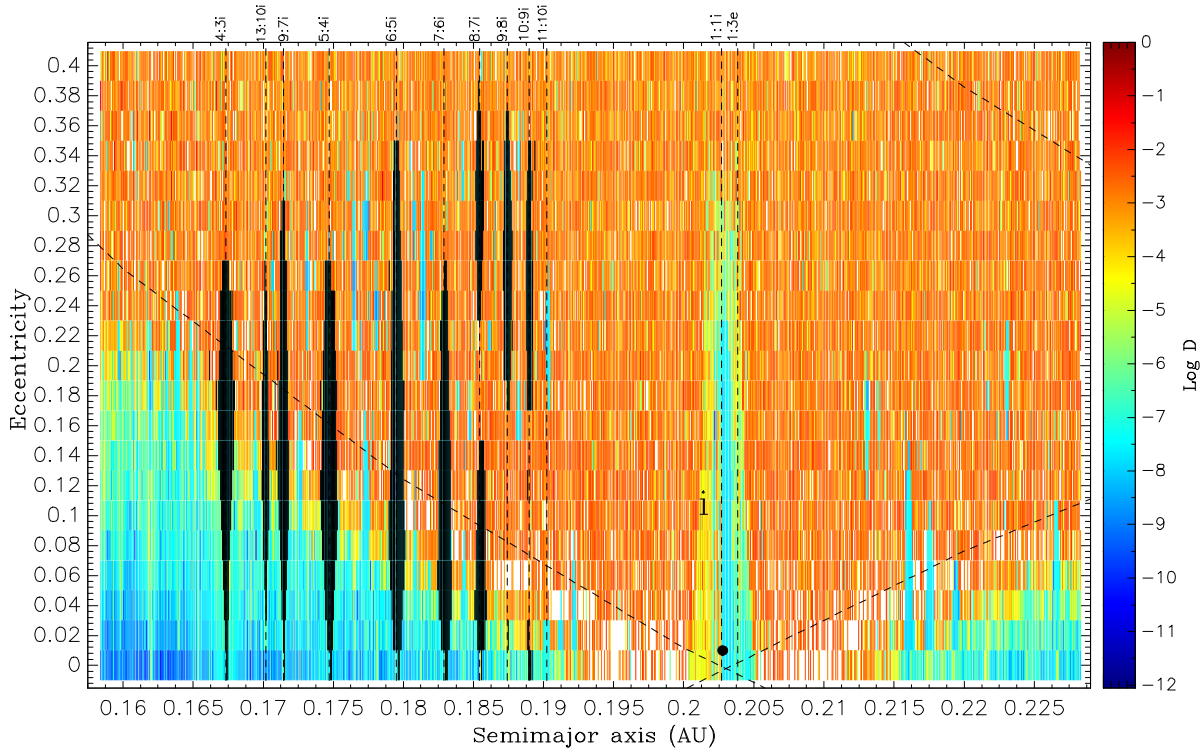
5.2 RMM ENTRE AS ÓRBITAS DOS PLANETAS C E I

Identificamos regiões estáveis entre as órbitas dos planetas c e i nos dois primeiros intervalos de excentricidade. Seleccionamos o sistema K90-2b apresentado na Figura 43 (g). De modo que refizemos a simulação numérica com o objetivo de reduzir o valor de Δa para localizar as ressonâncias de movimento médio que estão entre as órbitas dos planetas c e i . Definimos as novas condições iniciais para as partículas teste que são o semieixo maior está no intervalo de 0.095 UA a 0.22828 UA com $\Delta a = 7 \times 10^{-5}$ UA, a excentricidade está no intervalo de 0 a 0.40 com $\Delta e = 2 \times 10^{-2}$ e os outros elementos orbitais para as partículas teste são iguais a zero. O tempo total da integração numérica foi de $10^4 T_d$. Utilizamos um total de 40000 partículas teste distribuídas no mapa de difusão no espaço de fase a vs e .

Identificamos as ressonâncias de movimento médio de primeira e segunda ordens. Essas RMM são identificadas pela linha tracejada vertical cujo valor das ressonâncias são encontrados na parte superior das Figura 49 e Figura 50. A ressonância é identificada na curva de frequência cujo platô cresce em função de cada valor da excentricidade. Nos mapas de difusão, a largura da ressonância será identificada em preto.

Parte da análise das ressonâncias de movimento médio é identificar as RMM entre as órbitas dos planeta b e i , e analisar a evolução temporal dos ângulos ressonantes das partículas que libram ou

Figura 50 – Mapa de difusão no espaço de fase a vs e entre as órbitas das partículas localizadas no intervalo de semieixo maior 0.1556 UA até 0.226 UA. As cores correspondem à paleta de cores que seguem os valores de $\text{Log } D$. A linha tracejada corresponde aos raios do pericentro e apocentro do planeta i .



Fonte: próprio autor

circulam. De modo que os ângulos ressonantes, cujas RMM são de primeira ordem, entre os planetas b e c são apresentados como

$$\varphi_{1:2b}^{(1)} = 2\lambda_p - \lambda_b - \varpi_b \quad (2)$$

$$\varphi_{1:2b}^{(2)} = 2\lambda_p - \lambda_b - \varpi_p \quad (3)$$

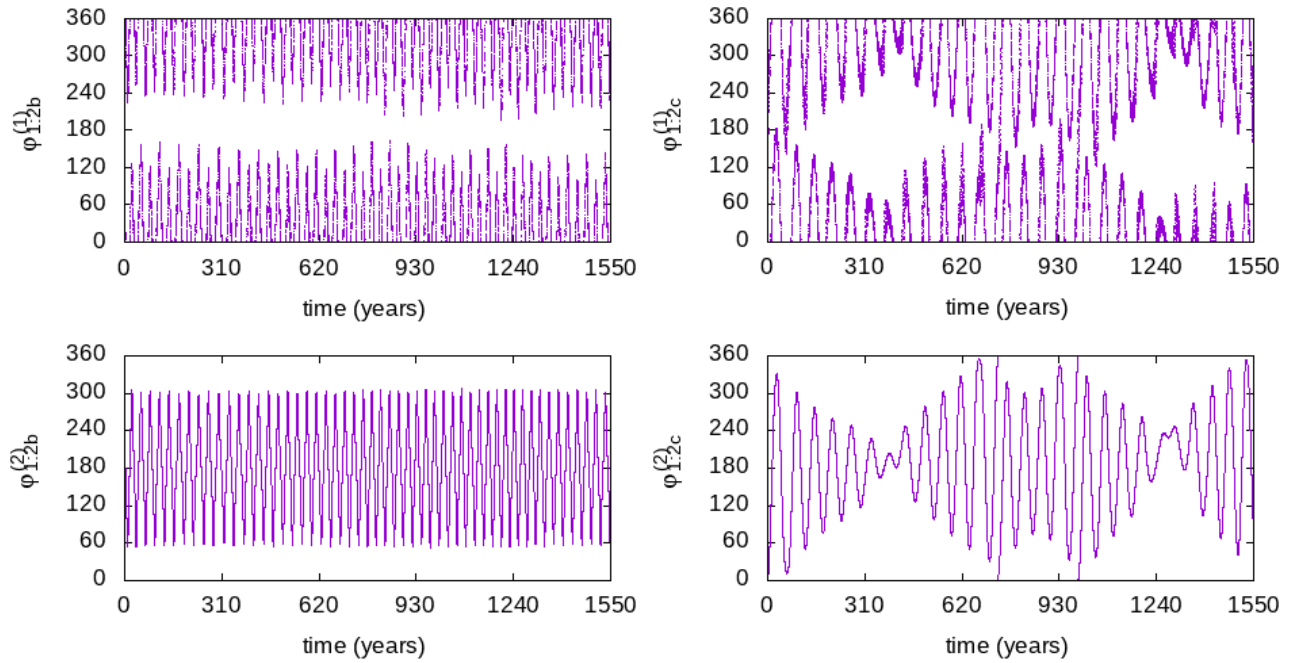
$$\varphi_{1:2c}^{(1)} = 2\lambda_p - \lambda_c - \varpi_c \quad (4)$$

$$\varphi_{1:2c}^{(2)} = 2\lambda_p - \lambda_c - \varpi_p \quad (5)$$

Identificamos os ângulos ressoantes $\varphi_{1:2b}$ e $\varphi_{1:2c}$, nos quais as ressonâncias foram localizadas entre as órbitas dos planetas c e i (ver a Figura 49). Consideramos que o símbolo (1) é para uma longitude de pericentro do corpo interno e o símbolo (2) representa a longitude de pericentro do corpo externo.

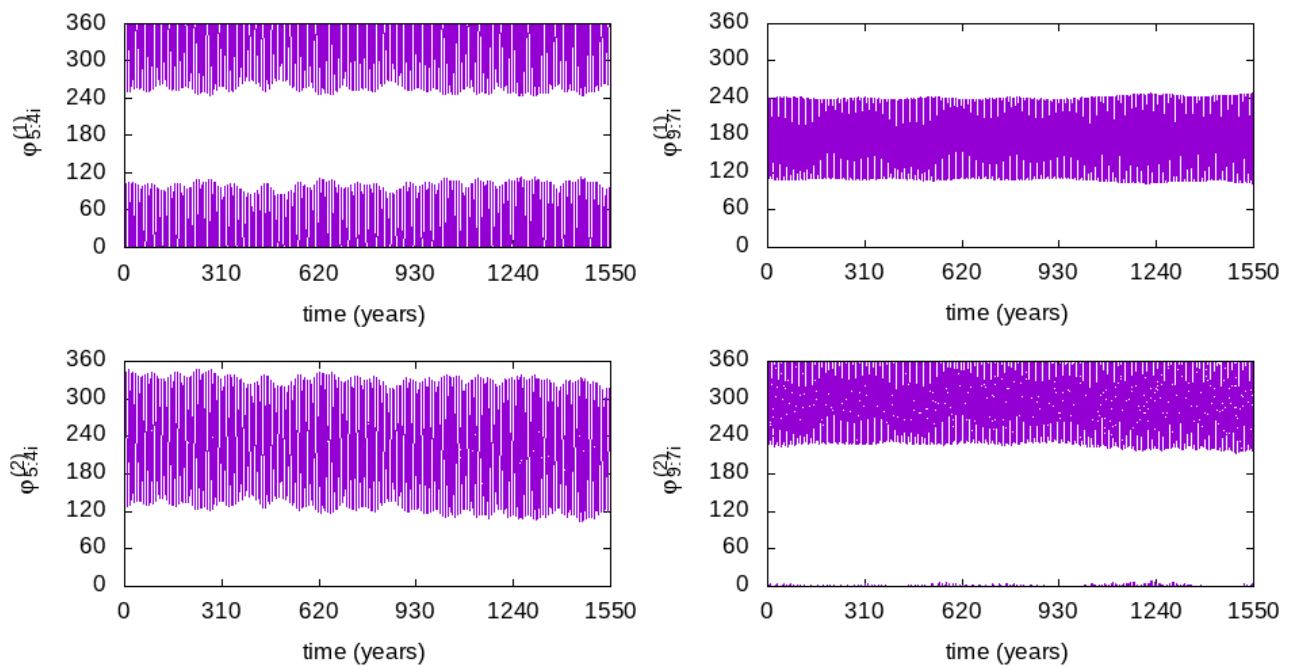
Os outros ângulos ressonantes identificados para as outras ressonâncias de movimento médio de

Figura 51 – Os ângulos ressonantes $\varphi_{1:2b}^{(1)}$, $\varphi_{1:2b}^{(2)}$ (figuras do lado esquerdo) libram em torno de zero e 180° com amplitudes constantes, respectivamente. Os ângulos ressonantes $\varphi_{1:2c}^{(1)}$ e $\varphi_{1:2c}^{(2)}$, apresentados na figura do lado direito, libra e circula e libra, respectivamente.



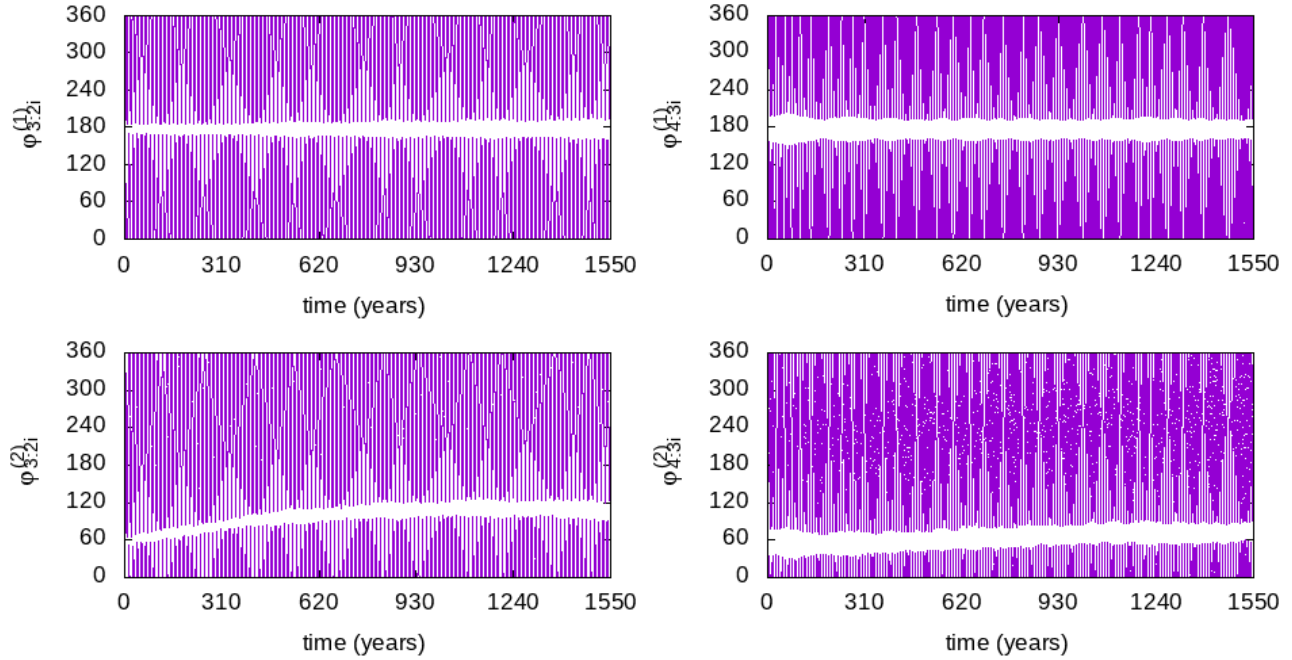
Fonte: próprio autor

Figura 52 – Apresentamos a evolução temporal dos ângulos ressonantes $\varphi_{5:4i}^{(1)}$, $\varphi_{5:4i}^{(2)}$ que libram em torno de zero e 240° , respectivamente. De mesmo modo, a figura a direita apresenta o comportamento temporal dos ângulos ressonantes $\varphi_{9:7i}^{(1)}$, $\varphi_{9:7i}^{(2)}$ que libram em torno de 180° e 300° , respectivamente.



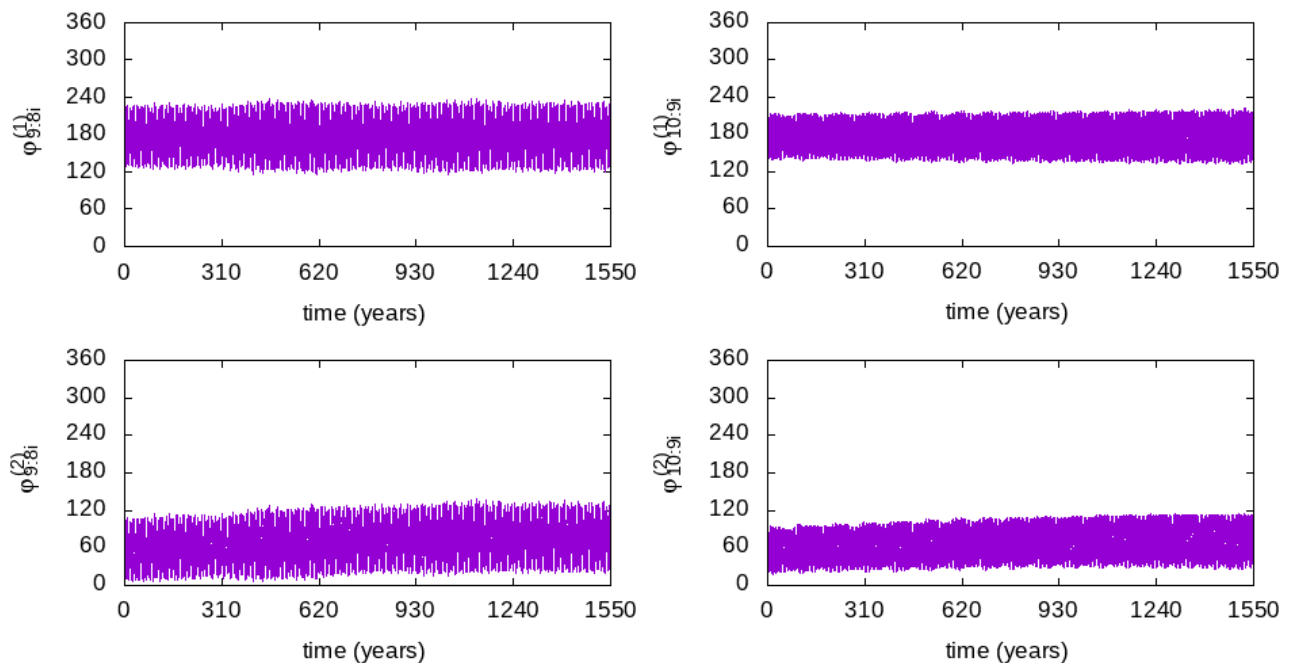
Fonte: próprio autor

Figura 53 – Apresentamos a evolução temporal dos ângulos ressonantes $\varphi_{3:2i}^{(1)}$, $\varphi_{3:2i}^{(2)}$, $\varphi_{4:3i}^{(1)}$ e $\varphi_{4:3i}^{(2)}$ cujas amplitudes são maiores que as amplitudes das outras partículas que libram nos ângulos ressonantes apresentados anteriormente. Note que o ângulo ressonante $\varphi_{3:2i}^{(1)}$ e $\varphi_{3:2i}^{(2)}$ (figuras a esquerda) libram em torno de zero e 240° , respectivamente. No caso dos ângulos ressonantes $\varphi_{4:3i}^{(1)}$ e $\varphi_{4:3i}^{(2)}$ (figuras a direita) também libram em torno de zero e 240° , respectivamente.



Fonte: próprio autor

Figura 54 – Os ângulos ressonantes $\varphi_{9:8i}^{(1)}$ e $\varphi_{9:8i}^{(2)}$ libram em torno de 180° e 60° , respectivamente. Isto também ocorre para os ângulos ressonantes $\varphi_{10:9i}^{(1)}$ e $\varphi_{10:9i}^{(2)}$. Os 4 ângulos ressonantes $\varphi_{9:8i}^{(1)}$, $\varphi_{9:8i}^{(2)}$, $\varphi_{10:9i}^{(1)}$ e $\varphi_{10:9i}^{(2)}$ apresentam amplitudes de $\sim 60^\circ$.



Fonte: próprio autor

primeira ordem que foram encontradas com o planeta i são apresentados a seguir

$$\varphi_{3:2i}^{(1)} = 3\lambda_i - 2\lambda_p - \varpi_p \quad (6)$$

$$\varphi_{3:2i}^{(2)} = 3\lambda_i - 2\lambda_p - \varpi_i \quad (7)$$

$$\varphi_{4:3i}^{(1)} = 4\lambda_i - 3\lambda_p - \varpi_p \quad (8)$$

$$\varphi_{4:3i}^{(2)} = 4\lambda_i - 3\lambda_p - \varpi_i \quad (9)$$

$$\varphi_{5:4i}^{(1)} = 5\lambda_i - 4\lambda_p - \varpi_p \quad (10)$$

$$\varphi_{5:4i}^{(2)} = 5\lambda_i - 4\lambda_p - \varpi_i \quad (11)$$

$$\varphi_{6:5i}^{(1)} = 6\lambda_i - 5\lambda_p - \varpi_p \quad (12)$$

$$\varphi_{6:5i}^{(2)} = 6\lambda_i - 5\lambda_p - \varpi_i \quad (13)$$

$$\varphi_{7:6i}^{(1)} = 7\lambda_i - 6\lambda_p - \varpi_p \quad (14)$$

$$\varphi_{7:6i}^{(2)} = 7\lambda_i - 6\lambda_p - \varpi_i \quad (15)$$

$$\varphi_{9:8i}^{(1)} = 9\lambda_i - 8\lambda_p - \varpi_p \quad (16)$$

$$\varphi_{9:8i}^{(2)} = 9\lambda_i - 8\lambda_p - \varpi_i \quad (17)$$

$$\varphi_{10:9i}^{(1)} = 10\lambda_i - 9\lambda_p - \varpi_p \quad (18)$$

$$\varphi_{10:9i}^{(2)} = 10\lambda_i - 9\lambda_p - \varpi_i \quad (19)$$

A evolução temporal de alguns dos ângulos ressonantes são apresentados na Figura 51, Figura 52, Figura 53 e Figura 54.

Os ângulos ressonantes de ordem maior que foram encontrados na Figura 50 são descritos abaixo

$$\varphi_{9:7i}^{(1)} = 9\lambda_i - 7\lambda_p - 2\varpi_p \quad (20)$$

$$\varphi_{9:7i}^{(2)} = 9\lambda_i - 7\lambda_p - 2\varpi_i \quad (21)$$

$$\varphi_{13:10i} = 13\lambda_i - 10\lambda_p - 3\varpi_p \quad (22)$$

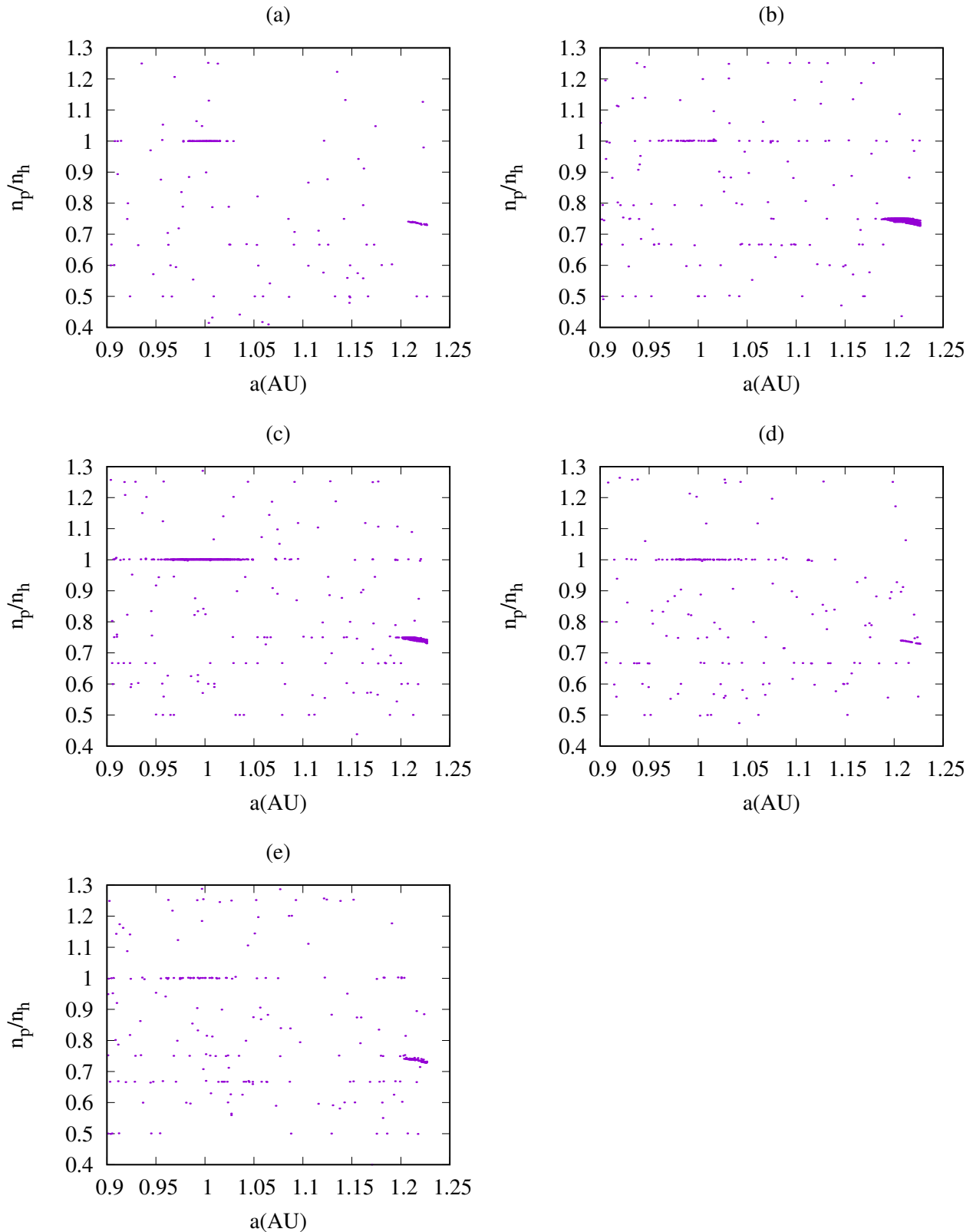
Notamos que o ângulo ressonante $\varphi_{9:7i}$ apresenta o mesmo comportamento temporal que os outros ângulos ressonantes encontrados anteriormente. O ângulo ressonante $\varphi_{13:10i}$ com o planeta i é de terceira ordem e libra em torno de zero e depois circula.

5.3 RMM ALÉM DA ÓRBITA DO PLANETA H

Conforme o indicado por Laskar, Froeschlé e Celletti (1992) e Laskar (1993), identificamos as partículas teste em RMM, cujos platôs, associados a cada ressonância (ROBUTEL; LASKAR, 2001), são apresentados nas Figura 55 e Figura 56.

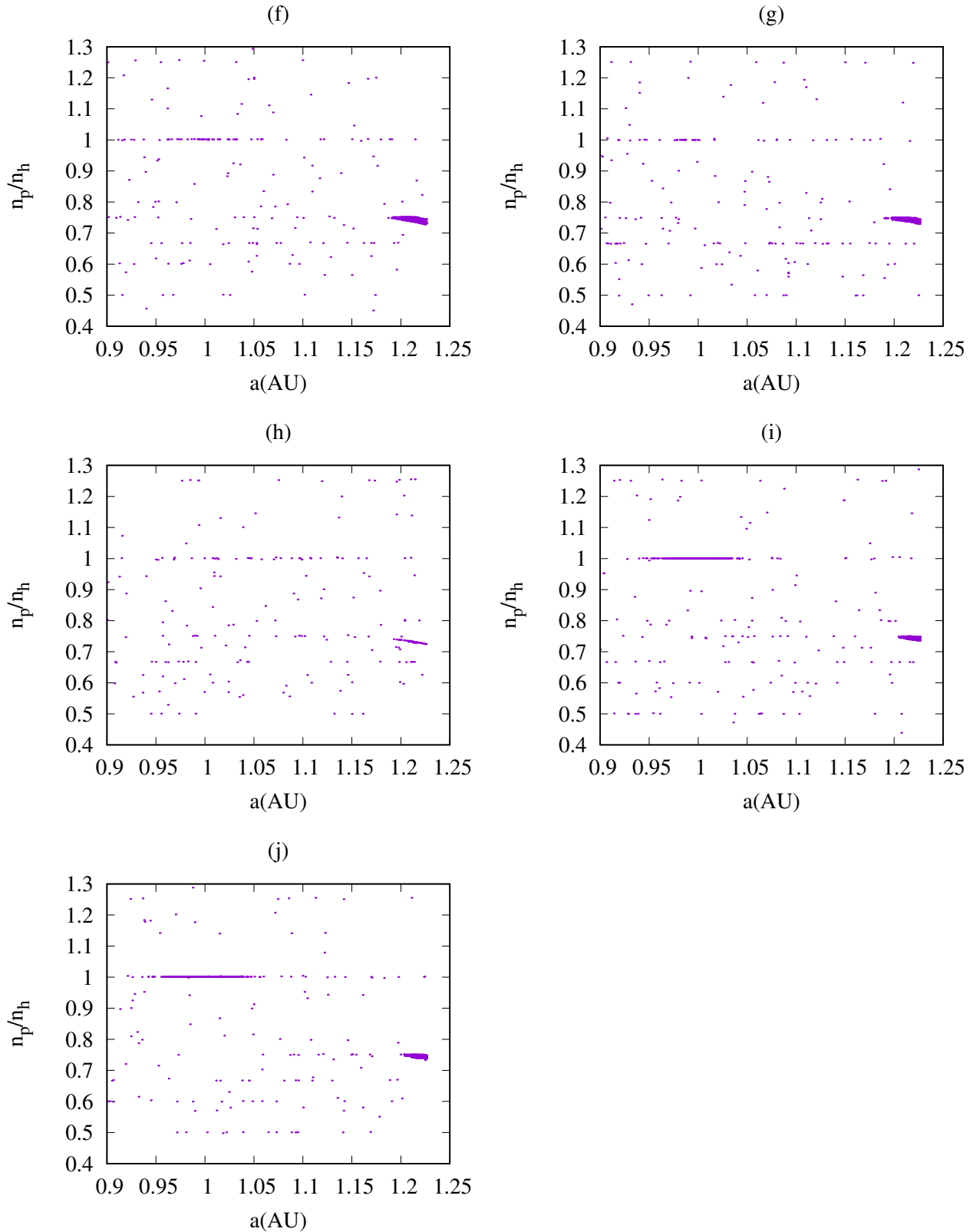
Na curva de frequência identificamos as partículas que sobreviveram o tempo total da integração numérica. Todos os valores de excentricidade para as partículas teste foram incluídos na curva de frequência. A curva de frequência ajuda a identificar os platôs que são associados as RMMs observadas nos mapas de difusão. De modo que plotamos as curvas de frequência no intervalo de semieixo maior de 0.9 UA a 1.23 UA para os dez "sistemas Kepler-90" que foram utilizados. Identificamos as

Figura 55 – Curva de frequência na região do planeta h para o primeiro intervalo de excentricidade. Cada figura representa um "sistema Kepler-90". Plotamos a razão entre o movimento médio das partículas teste (n_p) e o movimento médio do planeta h vs o semieixo maior inicial das partículas teste. Os platôs correspondem às RMM localizadas na curva correspondendo as ressonâncias 1:1 e 3:4 com o planeta h , localizadas nos semieixos maiores igual a 0.996 UA e 1.22 UA, respectivamente. Todos os valores de excentricidade foram incluídos na figura.



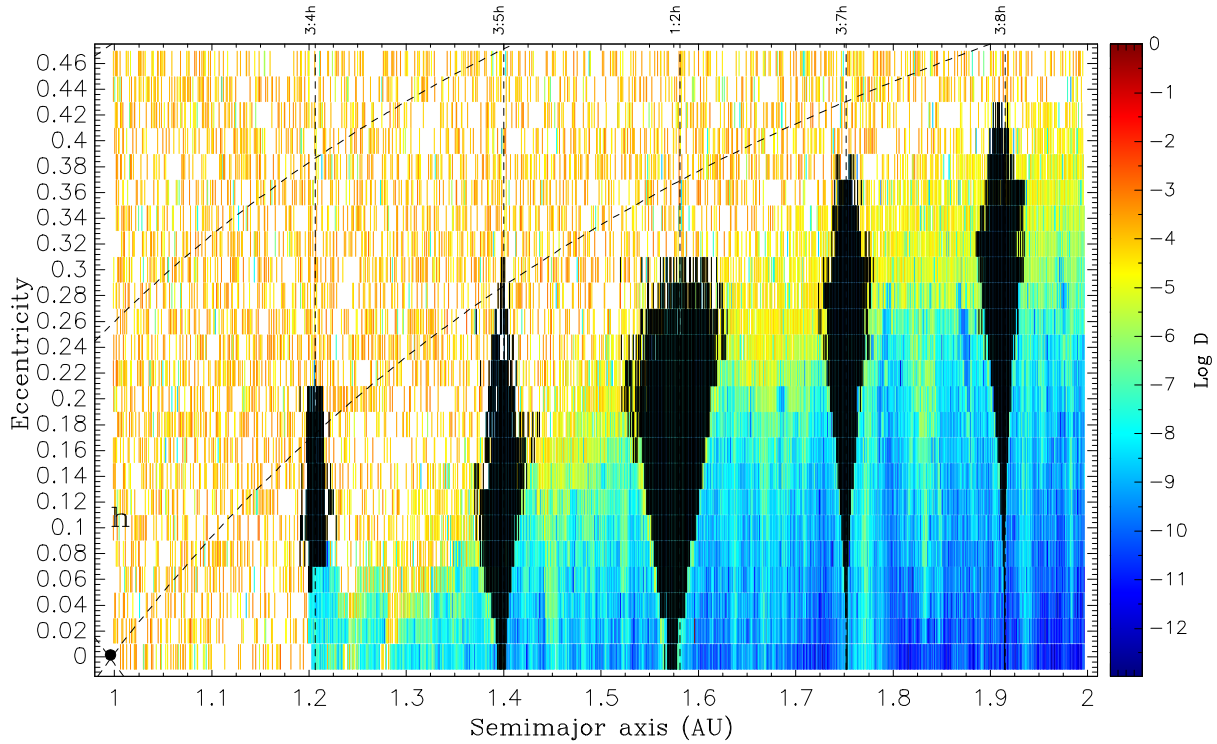
Fonte: próprio autor

Figura 56 – Curva de frequência na região do planeta h para o segundo intervalo de excentricidade. A curva de frequência está definida de acordo com o indicado na Figura 55. Os platôs foram identificados nos sistemas para as partículas em RMM 3:4 com o planeta h . Observamos que as partículas em RMM 1:1 com o planeta h não estão sempre no mesmo intervalo de excentricidade. Todos os valores de excentricidade foram incluídos na figura.



Fonte: próprio autor

Figura 57 – Mapa de difusão no espaço de fase a vs e além da órbita do planeta h . Os dados dos planetas correspondem aos valores indicados no segundo intervalo de excentricidade. O gráfico segue o mesmo regime sinalado na Figura 45 para o tratamento das partículas teste. As linhas tracejadas são as linhas dos raios do pericentro do planeta g e do planeta h .



Fonte: próprio autor

partículas que estão em RMM 1:1 e 3:4 com o planeta h . Essas duas ressonâncias foram encontradas em todos os sistemas nos dois intervalos de excentricidade.

Observamos que os platôs são identificados nas Figura 55 e Figura 56, onde a largura dos platôs muda em cada "sistema Kepler-90" para cada intervalo de excentricidade. As partículas teste que estão nos platôs estão localizadas no intervalo de semieixo maior de 0.99 UA a 1.01 UA e no intervalo de 1.19 UA a 1.21 UA.

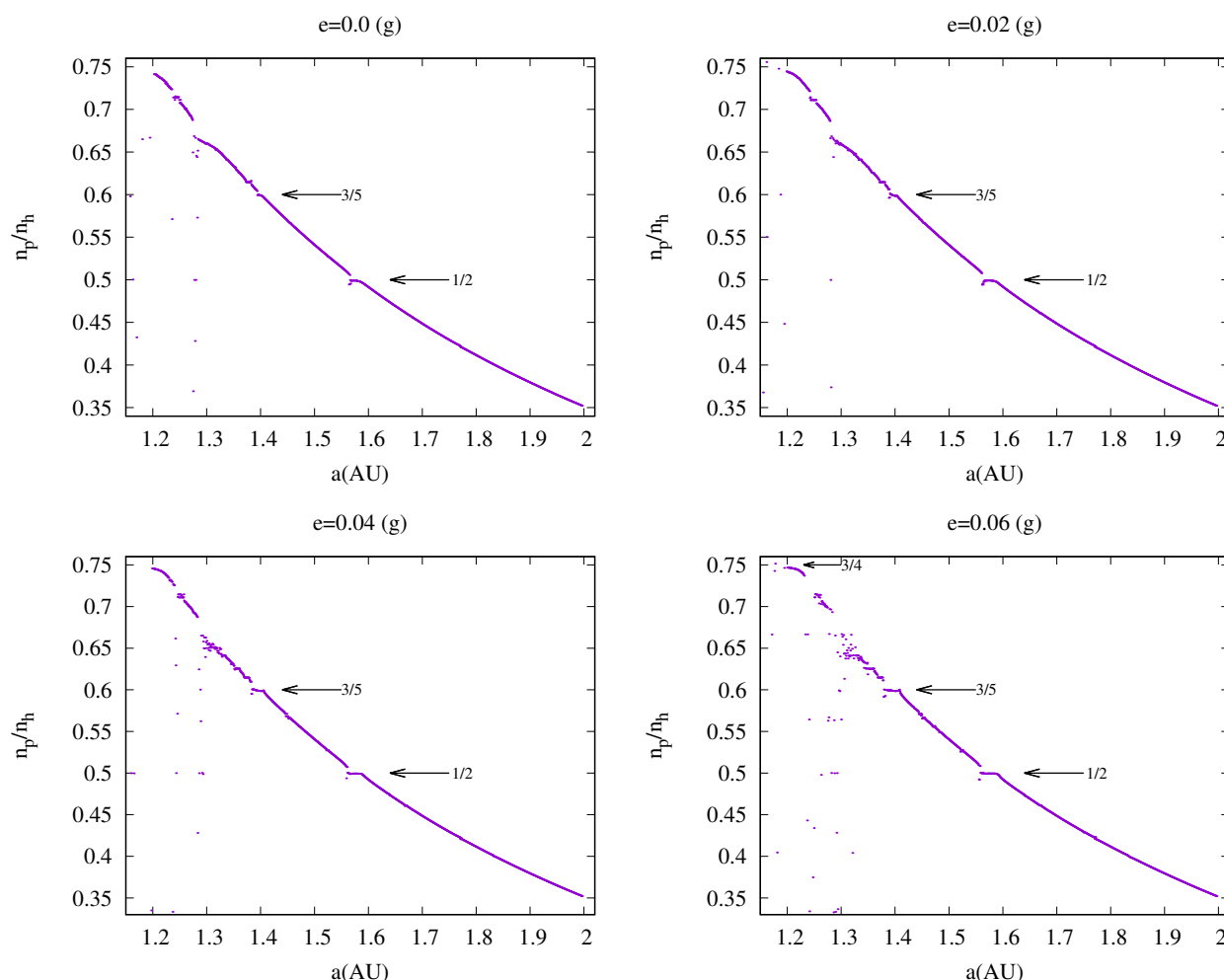
Isto motivou a realizar a análise da região 4 do sistema K90-2b. Na seguinte subseção incluiremos mais um conjunto de partículas teste, além da órbita do planeta h , com a finalidade de estudar o comportamento orbital nessa região.

5.3.1 Dinâmica das partículas teste além da órbita do planeta h

Escolhemos o sistema K90-2b, pertencente ao segundo intervalo de excentricidade, e incluímos um conjunto de partículas teste até 2.164940 UA. As condições iniciais das partículas teste são as mesmas que na seção anterior com a única diferença de que o intervalo de semieixo maior para as partículas é de 1 UA a 2.164940 UA.

Os resultados apresentados mostram regiões estáveis além da órbita do planeta h e também partículas em ressonância (Figura 57). Identificamos as partículas em RMM 1:2 com o planeta h no intervalo de semieixo maior de 1.57 UA a 1.615 UA e para valores de excentricidade de 0 a 0.26.

Figura 58 – Os resultados apresentados nessa figura mostram o comportamento da curva de frequência além da órbita do planeta h , cujos dados dos elementos orbitais dos planetas foram extraídos do segundo intervalo de excentricidade. Plotamos a razão entre o movimento médio das partículas teste (n_p) e o movimento médio do planeta h vs o semieixo maior inicial das partículas. Os platôs apareceram no intervalo de excentricidade de 0 a 0.06 correspondendo às RMMs 3:5 e 1:2 com o planeta h .



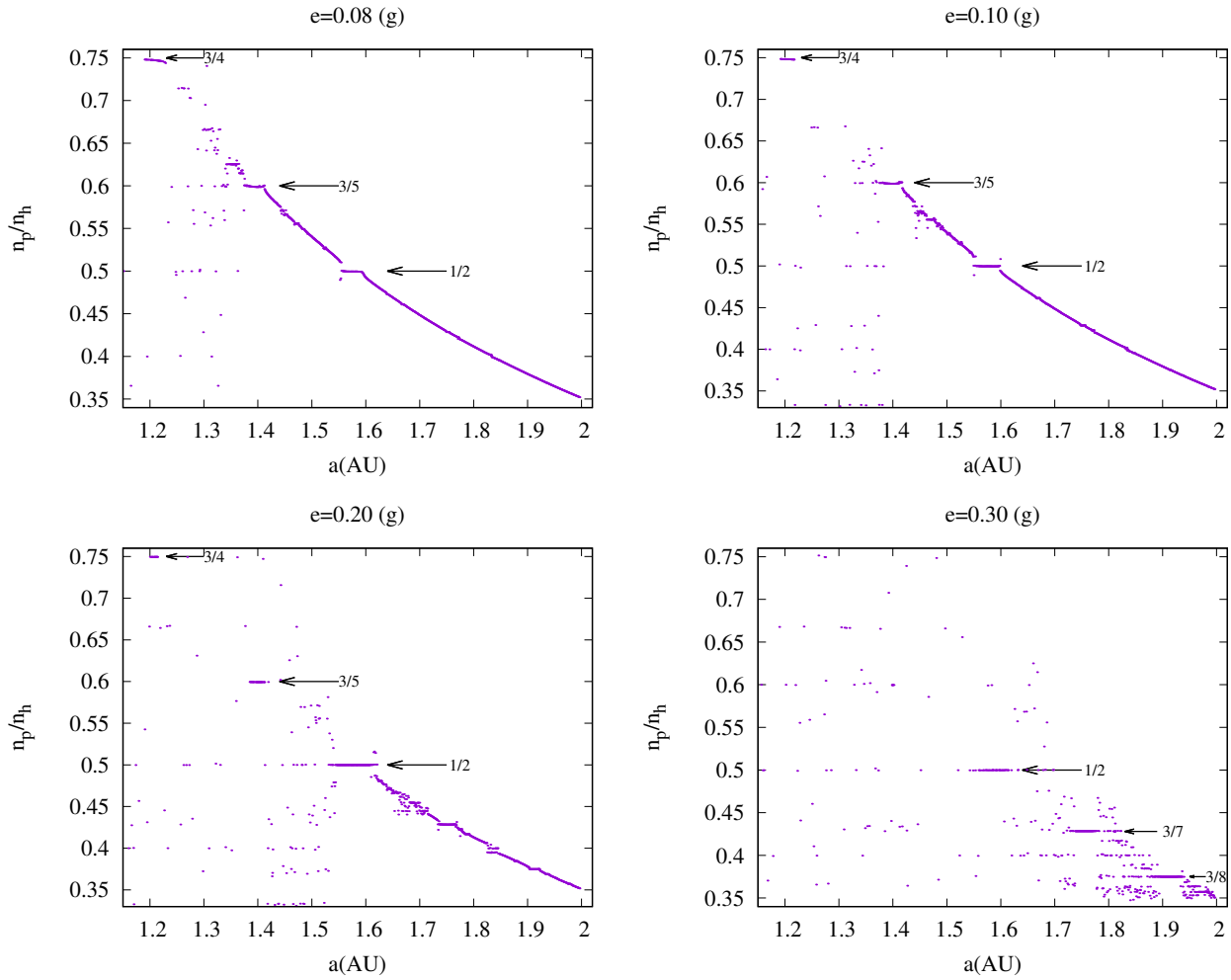
Fonte: próprio autor

Notamos que as partículas em ressonâncias de movimento médio estão apresentadas em cor preta (ver a Figura 57).

Para extrair informação sobre a localização das RMMs para cada valor de excentricidade, foi necessário plotar a curva de frequência, que sugere a localização aproximada das RMMs que estão sujeitas as partículas teste na região 4. Essas RMMs são identificadas através dos platôs em cada curva. Esses platôs podem ser observados nas Figura 58 e a Figura 59 para diferentes valores de excentricidade das partículas. Observamos que para as partículas em RMM 3:5 e 1:2 com o planeta h , os platôs crescem até valores altos de excentricidade.

Identificamos outros conjuntos de partículas em RMM, por exemplo, as partículas em RMM 3:4, 3:7 e 3:8 com o planeta h . Essas ressonâncias podem ser identificadas fazendo um zoom na curva de frequência no intervalo de semieixo maior de 1.195 UA a 1.21 UA e no intervalo de 1.75 UA a

Figura 59 – As curvas de frequência no intervalo de excentricidade das partículas de 0.08 a 0.30. O regime que cumpre a curva de frequência é similar ao indicado na Figura 58. Os platôs correspondem as RMMs 3:5 e 1:2 com o planeta h . Esses platôs podem ser visualizados em todas as sub figuras da Figura 59.



Fonte: próprio autor

1.91 UA. Note que a largura dos platôs diferem em cada valor de excentricidade (ver a Figura 59).

Analisamos um conjunto de partículas teste que estão em ressonância de movimentos médios com o planeta h cujos ângulos ressonantes são apresentados a seguir

$$\varphi_{1:2h} = 2\lambda_h - \lambda_p - \varpi_p \quad (23)$$

$$\varphi_{3:4h} = 4\lambda_h - 3\lambda_p - \varpi_p \quad (24)$$

$$\varphi_{3:5h} = 5\lambda_h - 3\lambda_p - 2\varpi_p \quad (25)$$

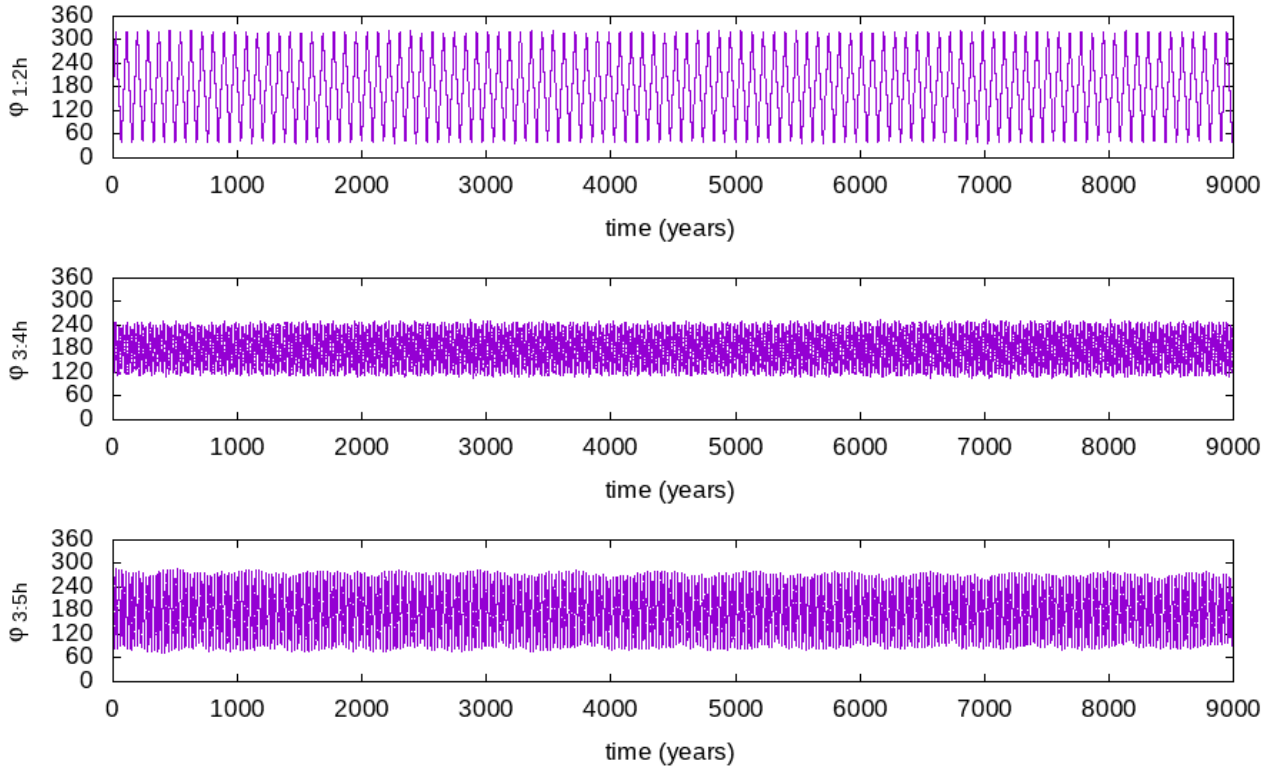
$$\varphi_{3:7h} = 7\lambda_h - 3\lambda_p - 4\varpi_p \quad (26)$$

$$\varphi_{3:8h} = 8\lambda_h - 3\lambda_p - 5\varpi_p \quad (27)$$

Esses ângulos ressonantes (ver a Figura 60) libram até o tempo final da integração numérica de $10^4 T_h$.

Na seguinte seção analisaremos a estrutura das regiões 1 e 4 do sistema Kepler-90.

Figura 60 – Os ângulos ressonantes $\varphi_{1:2h}$, $\varphi_{3:4h}$ e $\varphi_{3:5h}$ que aparecem na Figura 59 libram em torno de 180° , com amplitudes de 130° , 60° e 100° , respectivamente. As amplitudes são constantes até o tempo final da integração numérica de 9×10^3 anos.



Fonte: próprio autor

5.4 ESTRUTURA DAS REGIÕES 1 E 4 DO SISTEMA KEPLER-90

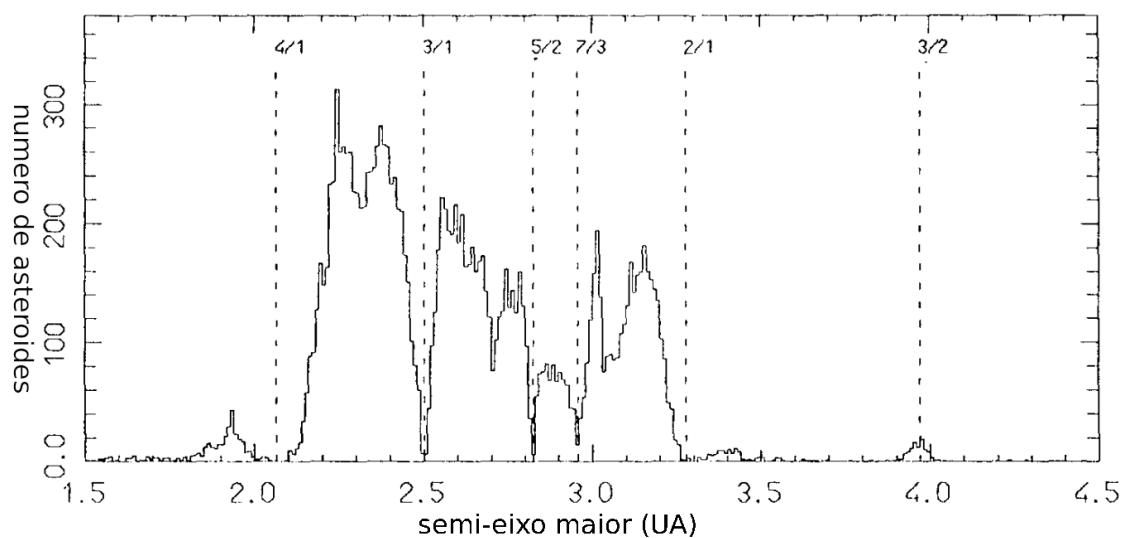
O estudo da dinâmica do Sistema Solar foram realizadas por diferentes autores como, por exemplo, Laskar (1990), Laskar (1994) e Robutel e Laskar (2001), com a finalidade de explorar a natureza caótica das órbitas dos planetas, como também das regiões entre os planetas do Sistema Solar. Portanto, realizamos uma breve revisão sobre o estudo das ressonâncias de movimento médio dos planetas menores obtidas no Cinturão Principal de asteroides (ver a Figura 61) e no Cinturão de Kuiper (ver a Figura 63). Talvez seja possível associar algumas estruturas que ocorrem no Sistema Solar com os resultados obtidos na subseção anterior.

Levar em consideração que o sistema Kepler-90 apresenta um conjunto de 8 planetas, similar ao Sistema Solar, cujas diferenças importantes entre esses dois sistemas são a distância orbital do último planeta, as massas entre as estrelas de cada sistema e os parâmetros físicos de cada planeta. Por exemplo, o planeta Netuno está localizado a uma distância orbital de ~ 30 UA quando comparado com o planeta h que está localizado a 1 UA no sistema Kepler-90. De modo que assumiremos que o sistema Kepler-90 está numa escala de 30 vezes menor que o Sistema Solar, e a diferença de massa entre as estrelas, a massa da estrela do sistema Kepler-90 ($1.2M_\odot$) é maior que a massa do Sol.

O Sistema Solar apresenta uma região interna que abriga asteroides¹ localizados entre as órbitas de

¹ Center (2021b) vistado em 29/09/2021

Figura 61 – O histograma apresenta a quantidade de asteroides localizados no Cinturão Principal em relação ao semieixo maior no intervalo de 1.5 UA a 4.5 UA. A nomenclatura das ressonâncias de movimento médio estão localizadas na parte superior da figura. As lacunas podem ser visualizadas na figura.



Fonte: Moons (1996).

Marte e Júpiter. Essa região é denominada como o Cinturão Principal de Asteroides. Atualmente foram detetados 1 113 527 asteroides segundo o censo² da NASA, onde Vesta é o asteroide de maior diâmetro cujo valor é de ~ 530 km e o menor corpo no Cinturão de asteroides apresenta um diâmetro menor que 10 m. Isto indica que existe uma população de asteroides não detectada de aproximadamente 10^{13} objetos com diâmetros menores que 1 m (BOTTKE et al., 2005).

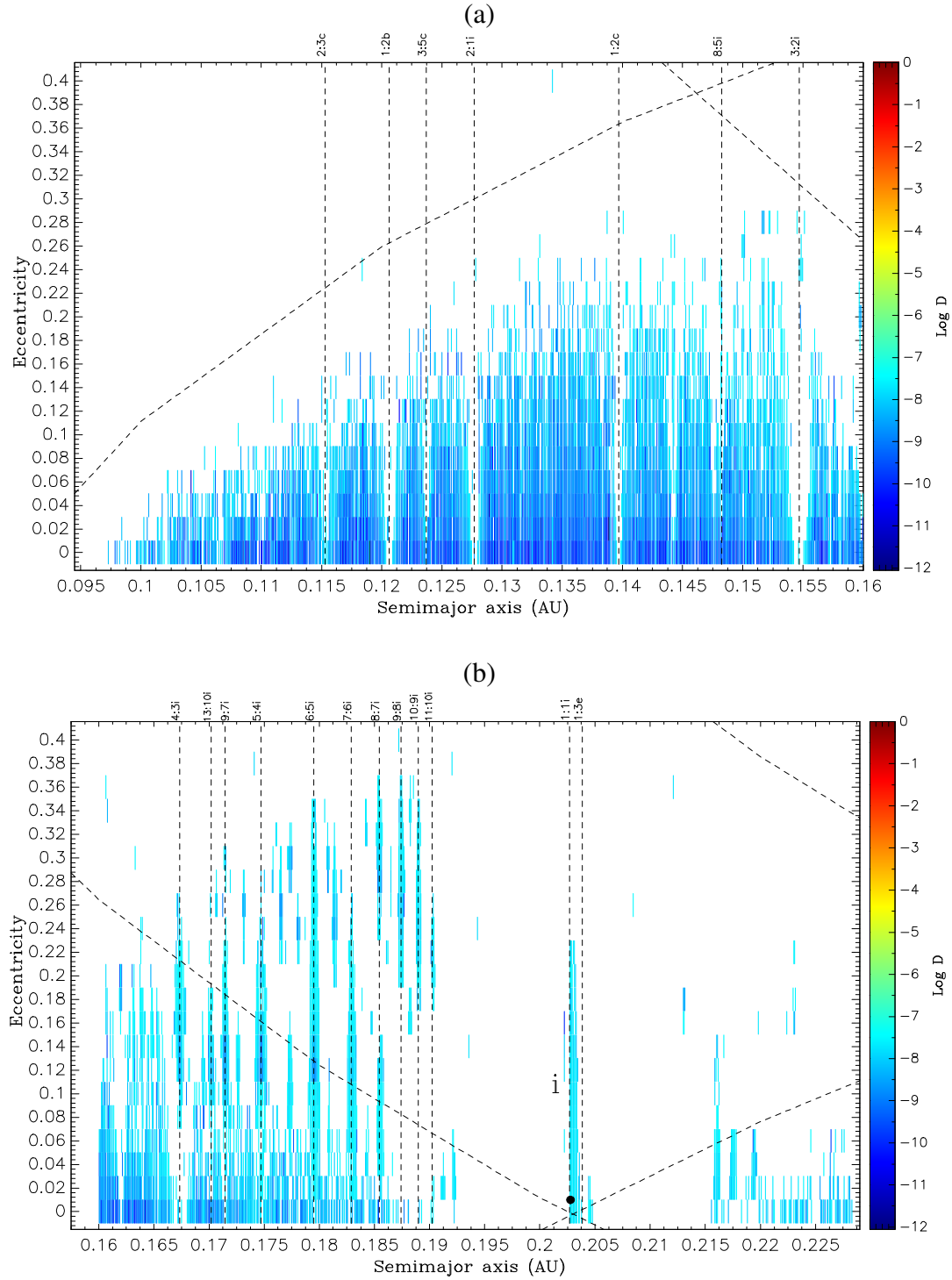
A dinâmica de Cinturão Principal de asteroides está sendo estudada há quase 154 anos. Kirkwood (1867) descobriu as falhas no Cinturão Principal para determinados valores de semieixo maior. Ele ordenou as órbitas dos asteroides conhecidos na época, identificando três maiores separações que ocorrem entre os asteroides que estão próximas das ressonâncias de movimento médio 9:4, 5:2 e 3:1 com o planeta Júpiter (ver a Figura 61). Também calculou a localização das ressonâncias de movimento médio 7:2, 7:3 e 2:1 com o planeta Júpiter, mas essas não foram associadas as falhas. Kirkwood sugeriu que essas falhas sejam resultado das conjunções sucessivas com Júpiter. Isto motivou o estudo da dinâmica das ressonâncias de movimento médio no Cinturão Principal, com o objetivo de compreender como surgem as lacunas/falhas de Kirkwood (MOONS, 1996).

Murray e Dermott (1999) apresentaram as várias hipóteses sobre a formação das falhas de Kirkwood. Uma das hipóteses é a gravitacional que pode ser compreendida através do problema de três corpos, por exemplo, Sol-Júpiter-asteroide. Trabalhos anteriores indicaram que este mecanismo (hipótese gravitacional) é o mais provável para dar origem às falhas de Kirkwood (DERMOTT; MURRAY, 1983).

O estudo da dinâmica orbital das famílias de asteroides foram realizadas com sucesso nas décadas passadas, por exemplo, o estudo da origem e dinâmica da família de asteroides de Vesta foi realizado por Marzari et al. (1996). Dermott et al. (2021) concluíram que a idade da família de asteroides de

² NASA (2021) visitado em 29/09/2021

Figura 62 – Mapa de difusão no espaço fase a vs e . A nomenclatura das RMMs está localizada na parte superior das figuras e as RMMs são identificadas com linhas tracejadas verticais. As linhas tracejadas inclinadas mostram os raios do pericentro do planeta b e do apocentro do planeta i .



Fonte: Próprio autor

Vesta é maior que 1.3G anos e pode ser comparada com a idade do Sistema Solar, além disso, eles estimaram que o cinturão interno inicialmente apresentou um conjunto de ~ 20 asteroides, sendo a fonte dos meteoritos condriticos (CLOUTIS; IZAWA; BECK, 2018) e de NEAs (asteroides próximos à terra).

De acordo com os resultados apresentados na seção 4.2 e seguindo o estudo realizado no Cinturão Principal de Asteroides, com o objetivo de identificar falhas no intervalo de semieixo maior de 0.095 UA a 0.16 UA e no intervalo de semieixo maior de 0.16 UA a 0.228 UA (ver a Figura 49 e Figura 50) excluimos as partículas com $\text{Log } D > -8$. No entanto, observamos que a região 1, entre as órbitas dos planetas c e i , é estável (ver a Figura 49) e a configuração da dinâmica das partículas sugere que existem falhas que podem estar associadas as RMMs de primeira, segunda e terceira ordens.

Dado que a região 1 é estável para a maioria das partículas com $\text{Log } D < -8$, assumiremos que as partículas com $\text{Log } D$ com valores menores que -8 possuem órbitas regulares e as partículas com $\text{Log } D$ maiores que -8 foram removidas das Figura 49 e Figura 50, sendo apresentadas somente as partículas com $\text{Log } D < -8$ na Figura 62. Isto permite observar as falhas devido às ressonâncias de movimento médio das partículas teste 1:2 com o planeta b , 2:1 com o planeta i , 1:2 com o planeta c e 3:2 com o planeta i . Levar em consideração que as partículas entre as RMM possuem um tempo de difusão de $\sim 10^{11}$ anos, ou ~ 100 G anos, sendo uma região estável (ver a Figura 62 (a)).

Os resultados apresentados na Figura 62 (b) mostra o comportamento geral das partículas. Observamos partículas teste que estão em RMM 4:3, 13:10, 9:7, 5:4, 6:5 e 7:6 com o planeta i . Também identificamos partículas em RMM 8:7, 9:8, 10:9 e 11:10 com o planeta i . Notamos que as partículas possuem um valor médio de tempo de difusão de $\sim 1.1 \times 10^{10}$ anos. As partículas coorbitais do planeta i são identificadas no intervalo de excentricidade de zero a 0.22 com um valor médio de t_D de $\sim 10^{10}$ anos.

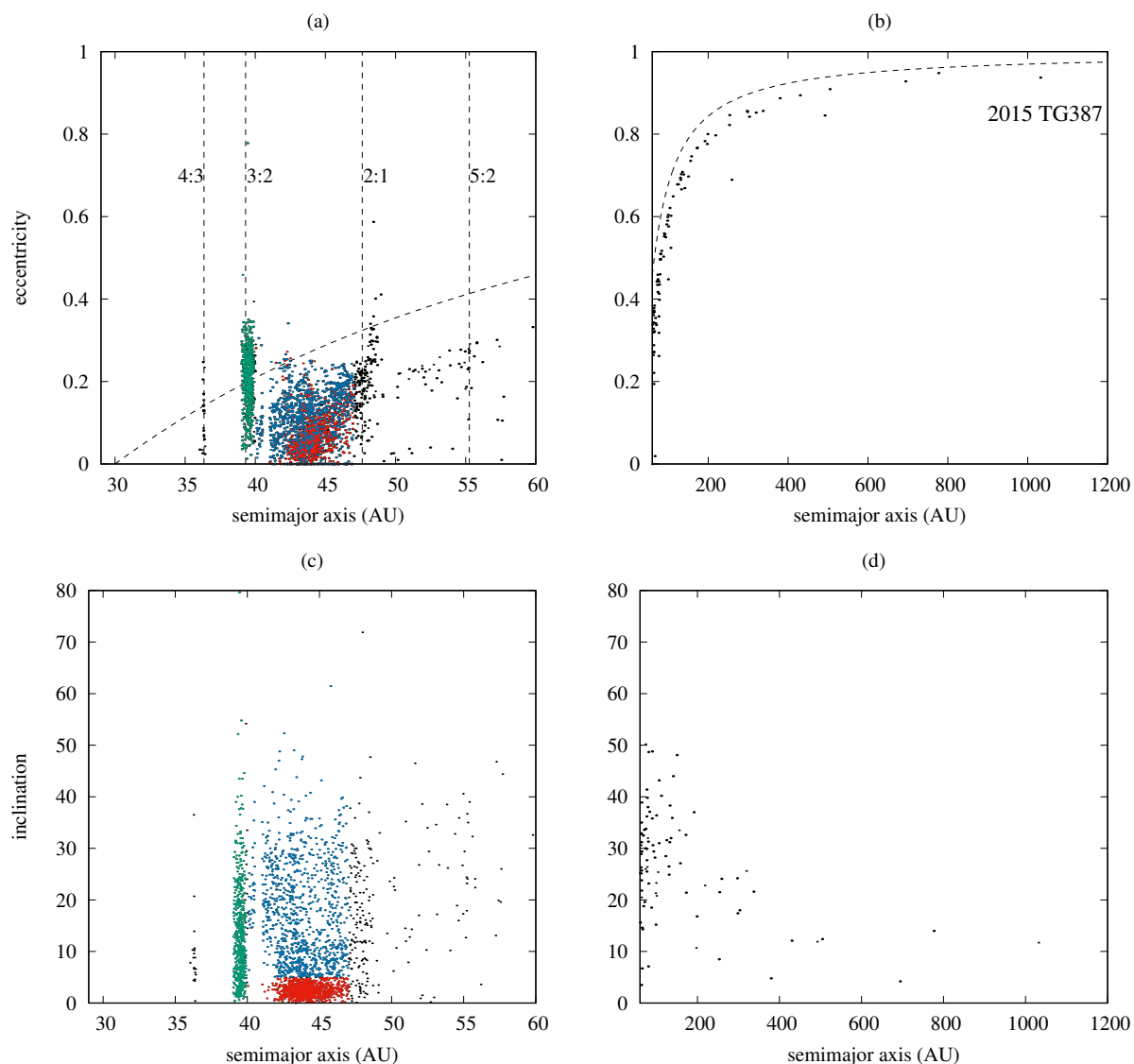
O sistema binário Plutão-Caronte, descoberto por Clyde Tombaugh em 1930 e Caronte por Christy & Harrington em 1978, faz parte do Cinturão de Kuiper. Outros objetos trans-netunianos³ foram descobertos desde 1992 até 2021 somando uma quantidade de ~ 2890 objetos, onde foram encontrados ~ 545 objetos em ressonância de movimentos médios 3:2 com Netuno (ver a Figura 63(a) e Figura 63 (b)). O objeto trans-netuniano externo 2015 TG387 é o mais afastado do Sistema Solar (ver a Figura 63(b)), está localizado a 1170 UA (SHEPPARD et al., 2019).

No entanto, o Cinturão de Kuiper está localizado na região de semieixo maior de 30 UA (a de Netuno) a 2000 UA (valor arbitrário). Esse intervalo de semieixo maior foi sugerido por Gladman, Marsden e VanLaerhoven (2008). Os objetos trans-netunianos foram classificados de acordo com suas propriedades dinâmicas (JEWITT; LUU; TRUJILLO, 1998; GLADMAN, 2002; GLADMAN; MARSDEN; VANLAERHOVEN, 2008) sendo divididos em objetos clássicos, ressonantes, do disco espalhado e os detached (disco espalhado fossilizado (NESVORNÝ, 2018)).

O Cinturão de Kuiper Clássico (CKC) abriga os objetos clássicos que estão localizados no intervalo de semieixo maior de 39.4 UA a 47.8 AU. O CKC está composto por corpos que não estão em ressonância. Nesta região estão os objetos frios, com $i < 5^\circ$ (pontos de cor vermelha na Figura 63(a)) e quentes, com $i > 5^\circ$ (pontos de cor azul na Figura 63(a)), cujas inclinações podem superar os 30° (ver a

³ Center (2021a) visitado em 29/09/2021

Figura 63 – Plotamos os mapas, semieixo maior vs excentricidade (Figura (a) e (b)) e semieixo maior vs inclinação (Figura (c) e (d)) dos planetas menores do Cinturão de Kuiper, através dos dados observacionais extraídos da lista de objetos trans-netunianos da website Center (2021a).



Fonte: Center (2021a).

Figura 63(c)). Foram encontrados objetos que estão em RMM com Netuno, cujos mais conhecidos são os que estão em RMM 1:2 e 2:3 denominados "plutinos" (pontos de cor verde, ver a Figura 63(a)) e "twotinos" (MALHOTRA, 2019).

Por outro lado, os objetos do disco espalhado (SDO) são aqueles que apresentam órbitas que evoluem e continuam evoluindo por encontros próximos com Netuno. Esses objetos são identificados quando a distância do periélio é de ~ 30 UA. Os objetos destacados estão localizados além da RMM 2:1 com Netuno ($a > 47.8$ UA) (ver a Figura 63(a) e (b)). Os objetos além de $a > 150$ UA (ver a na Figura 63(b)) são denominados SDO extremos (NESVORNÝ, 2018).

O Cinturão de Kuiper apresenta quatro conjuntos de objetos em RMM, as quais são a RMM 3:4, 2:3, 1:2 e 2:5 com Netuno (NESVORNÝ, 2018). Malhotra et al. (2018) investigaram o comportamento orbital das partículas em RMM 2:5 com o planeta Netuno, através de simulações numéricas incluindo o efeito gravitacional dos quatro planetas gigantes, e verificaram que a largura da ressonância é pequena

para valores pequenos de excentricidade. No entanto esse valor cresce com o aumento do valor da excentricidade, sendo similar para as RMM 1:2 e 2:3 com Netuno. Além disso, Malhotra (2019) encontrou outros pequenos conjuntos de objetos que estão em RMM 5:3 e 7:4 e outras RMMs de ordem superior com Netuno.

De acordo com os resultados apresentados na seção 4.3 e seguindo o estudo realizado no Cinturão de Kuiper, encontramos que a estrutura da região 4 é similar ao Cinturão Kuiper, numa escala de 30 vezes menos no semieixo maior, com algumas diferenças. Apesar da massa de Netuno ser $\sim 17M_{\oplus}$, esse planeta aglomera a maior quantidade de objetos trans-netunianos em RMM 2:3 (ver a Figura 63(a)), ao contrário do planeta h que não aglomera partículas teste em RMM 2:3 (ver a Figura 57).

Além disso, identificamos partículas teste em RMM 3:4 e 1:2 com o planeta h , cujas RMMs também são identificadas no Cinturão de Kuiper. Notar que o planeta h agrupa a maior quantidade de partículas teste nas RMMs 1:2 e 3:5.

As RMMs 3:7 e 3:8 com o planeta h no sistema K90-2b são similares a RMM 2:5 com Netuno, estudado por Malhotra et al. (2018), cuja diferença é a largura máxima da ressonância.

Na seguinte subseção apresentaremos as discussões do capítulo.

5.5 DISCUSSÕES DO CAPÍTULO

Os resultados encontrados para os "sistema Kepler-90" através das simulações numéricas e a análise de frequência das órbitas dos planetas, mostraram que os 100% e 99% dos sistemas no primeiro e segundo intervalo de excentricidade são estáveis e possuem órbitas regulares, respectivamente. O terceiro intervalo de excentricidade apresenta sistemas que não finalizaram as simulações numéricas para um tempo de integração numérica de $10^5 T_h$. Isto sugere que os valores de excentricidade dos planetas devem estar na faixa de excentricidade de 0 a 10^{-3} e de 10^{-3} a 10^{-2} .

Por isso selecionamos aleatoriamente cinco sistemas que sobreviveram nos dois primeiros intervalos de excentricidade, onde incluímos um conjunto de partículas teste. Observamos que entre as órbitas dos "planetas e " e h não encontramos regiões estáveis. Somente encontramos partículas com baixa excentricidade próximas aos planetas e , f , g e h . Isto pode ser devido ao valor máximo de variação de excentricidade que alcançam os planetas, ver a Figura 29(a) e Figura 29(b). Por exemplo, o valor máximo de variação de excentricidade que alcançam os planetas no primeiro intervalo de excentricidade que sugere que o planeta h perturba os planetas e e em consequência as partículas teste. Os planetas d , e , f , g e h limpam as regiões entre suas órbitas. Também encontramos regiões estáveis entre as órbitas dos planetas c e i , i e d , d e e e além da órbita do planeta h (ver a Figura 39 até Figura 45 e a Figura 57).

As regiões coorbitais não são sempre identificadas além da órbita do planeta e , no primeiro intervalo de excentricidade. Na Figura 39 (a), notamos partículas coorbitais nos planetas g e h . Isto pode ser devido ao valor inicial da anomalia média (M_0) dos planetas g e h . Neste caso o valor de M_0 desses planetas diferem de $\sim 30^\circ$ (ver o Apêndice C, Tabela 18). Na Figura 43 (g), notamos que os planetas g e h não apresentam partículas coorbitais, seus valores de M_0 estão próximos (ver o Apêndice C, Tabela 19).

Analizamos as regiões estáveis que estão localizadas entre as órbitas dos planetas c e i e além da órbita do planeta h . Identificamos onze RMMs entre as órbitas dos planetas b e i que são as RMMs 3:2, 4:3, 5:4, 6:5, 7:6, 9:8, 10:9, 9:7 e 13:10 com o planeta i . Também identificamos a RMM 1:2 com o planeta b e 1:2 com o planeta c . Além da órbita do planeta h , região estável, encontramos partículas teste em RMM. Essas ressonâncias foram identificadas nas curvas de frequências para os diferentes valores de excentricidade (ver a Figura 58 e Figura 59). Observamos que as partículas estão aglomeradas em RMM para valores de $\text{Log } D < -5$. Identificamos cinco RMM além da órbita do planeta h , as quais são a RMM 1:2, 3:4, 3:5, 3:7 e 3:8.

A região 1 está localizada entre as órbitas dos planetas c e i . Identificamos que essa região apresenta falhas que podem estar associadas às RMMs. Essas falhas estão presentes nos semieixos maiores que correspondem às RMMs 1:2 com o planeta c , 1:2 com o planeta b e 2:1 e 3:2 com o planeta i . Além disso, encontramos partículas em RMMs 4:5, 9:7, 5:4, 6:5 e 7:6 com o planeta i . Notar que a região 1 é estável nos dez "sistemas Kepler-90".

Além da órbita do planeta h , identificada como região 4, verificamos que o planeta h abriga o maior conjunto de partículas teste em RMM 1:2, quando comparado aos outros conjuntos de partículas que estão em outras RMMs. Também verificamos que as partículas teste em RMM 3:7 e 3:8 com o planeta h apresentam larguras para os valores de excentricidade de 0.26 e 0.32, respectivamente. Para valores

menores da excentricidade, a largura da ressonância é menor em ambos casos (ver a Figura 57).

Concluimos que o planeta h influencia a configuração final da região 4, porque é o mais massivo dos planetas do sistema Kepler-90.

E finalmente, fizemos um breve comparação entre o Cinturão Principal de asteroides e a região interna localizada entre os planetas b e i . Nessa região também aparecem falhas que podem estar associadas as ressonâncias, similar às Falhas de Kirkwood. O planeta h , assim como Netuno, influencia a região externa. Localizamos regiões onde objetos podem estar em ressonância com o planeta h , similar aos objetos localizados no Cinturão de Kuiper.

No próximo capítulo apresentaremos a discussão geral.

6 DISCUSSÃO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é estudar a estabilidade de dois sistemas, o sistema de Netuno e o sistema Kepler-90, através do método de análise de frequência.

No capítulo 3, a região interna do sistema de Netuno é analisada incluindo os efeitos gravitacionais de Naiade, Thalassa, Despina, Galatea, Larissa, Hipocampo, Proteus e Tritão, sobre um conjunto de partículas teste com diferentes valores de excentricidade. Simulamos partículas que valores iniciais em elementos orbitais geométricos, sendo portanto transformados para elementos orbitais osculadores, seguindo as equações apresentadas por Renner e Sicardy (2006). Depois, essas partículas foram simuladas numericamente. Nos diagramas $a \times e$, as partículas teste estão organizadas na grade retangular do espaço-fase a vs e , essas partículas são apresentadas em elementos orbitais geométricos, onde cada retângulo representa o valor inicial das partículas. Observamos regiões em que as partículas teste permanecem após $\sim 10^4 T_L$ no intervalo de semieixo maior de $0.6D_{AA}$ a $1.4D_{AA}$, e $\sim 10^4 T_P$, e no intervalo de semieixo maior de $1.4D_{AA}$ a $2.2D_{AA}$. Ao incluir o satélite Hipocampo, encontramos partículas que permanecem entre as órbitas de Hipocampo e Proteus, essas partículas apresentam um tempo de difusão de $\sim 10^6$ anos. Observamos que os satélites Despina, Galatea, Larissa e Proteus "limpam" a região em torno deles, permanecendo partículas coorbitais a esses satélites. As partículas que estão em torno dos satélites Naiade e Thalassa apresentam órbitas irregulares cujos valores de $\text{Log } D$ são próximos de zero.

Verificamos que o tempo de difusão das partículas teste nos anéis Galle e Lassell tem tempo de difusão de 10^9 anos a 10^{11} anos para todos os valores de excentricidade. O anel Le Verrier está no intervalo de tempo de difusão de 10^4 anos a 10^7 anos para valores de excentricidade de 0 a 0.012. No entanto, quando diminuimos o passo do semieixo maior, aparecem partículas em ressonância para maiores valores de excentricidade. Essas partículas sobreviveram, no intervalo de excentricidade de 0 a 0.025, com um tempo de difusão de 10^6 anos.

O anel Arago é estável, cujo tempo de difusão das partículas teste é de 10^8 anos até 10^{11} anos, para partículas teste com valores de excentricidade de 0 e 0.004. O tempo de difusão do anel co-orbital de Galatea está no intervalo de 10^4 anos a 10^7 anos.

Mostramos que as RMMs 52:53 e 53:54 com o satélite Despina, sugeridas por Miner, Wessen e Cuzzi (2007), são encontradas no anel Le Verrier. Além disso, também encontramos um conjunto de partículas que estão em RMM. Essas partículas possuem valores de excentricidade iguais a zero. Identificamos que a RMM 51:52 com o satélite Despina está localizada na borda do anel Lassell, cujos ângulos ressonantes das partículas libram em torno de 180° (ver a Figura 17 e Figura 20). O conjunto de partículas teste em RMM 52:53 e 53:54 podem ser a causa do pico de intensidade do brilho na borda interna do anel Le Verrier, seguindo o dado observacional apresentado por Pater et al. (2018).

Os resultados apresentados para os anéis indicam que eles são estáveis. Realizamos um estudo detalhado do sistema interno incluindo o efeito da força de radiação Solar e o arrasto de plasma.

A pressão da radiação solar é importante para partículas pequenas localizadas nos anéis de Júpiter, Saturno, Urano e até mesmo no sistema de Plutão (embora Plutão não possui um sistema de anéis).

No sistema de Netuno essa força dissipativa causa apenas pequenas variações nas excentricidades das partículas do anel. As excentricidades das partículas são da ordem de 10^{-3} devido às perturbações gravitacionais dos satélites, incluindo a pressão de radiação essas permanecem com a mesma ordem de grandeza. As partículas não cruzam as órbitas dos satélites quando esses novos valores de excentricidade são assumidos.

O tempo de vida das partículas dos anéis é provavelmente devido a diminuição do semieixo maior causado pelos efeitos seculares da componente do arrasto de Poynting-Robertson. O tempo de vida dos anéis que possuem partículas do tamanho de $1 \mu\text{m}$ é de $\sim 10^4$ anos, e 10^5 anos quando as partículas são maiores ($10 \mu\text{m}$ de raio). O arrasto do plasma pode ser uma força dissipativa importante, mas precisamos de mais informações para analisar os efeitos nas partículas dos anéis de Netuno.

Concluimos que o principal efeito que pode diminuir a população de grãos de poeira de tamanho μm nos anéis do sistema de Netuno é o efeito do arrasto de Poynting-Robertson. Além disso, verificamos que o sistema interno de Netuno possui uma região ampla, entre as órbitas dos satélites Larissa e Hipocampo, que pode abrigar um conjunto de objetos de tamanho menores que 6 km de raio.

Outro objetivo deste trabalho foi estudar a dinâmica do sistema Kepler-90 para três intervalos diferentes de valores de excentricidade para cada planeta. O primeiro intervalo de excentricidade é de 0 até 10^{-3} , o segundo intervalo de excentricidade é de 10^{-3} até 10^{-2} e o terceiro intervalo de excentricidade é de 10^{-2} até 10^{-1} . Os valores de excentricidade, argumento do pericentro (ω), longitude do nodo ascendente (Ω) e a longitude média (λ) foram escolhidos aleatoriamente em cada intervalo de excentricidade. As condições iniciais de a e i dos planetas do sistema Kepler-90 foram extraídos de Contreras e Boley (2018) e Shallue e Vanderburg (2018) cujas condições iniciais foram extraídas da Tabela 12 e da Tabela 14.

O tempo de integração das simulações numéricas foi de $10^4 T_h$. Após as simulações numéricas, aplicamos o algoritmo computacional de análise de frequência (ŠIDLICHOVSKÝ; NESVORNÝ, 1997) para cada arquivo de saída para cada planeta nos três intervalos de excentricidade.

100% dos sistemas pertencentes ao primeiro intervalo de excentricidade permanecem até o tempo final da integração numérica. Identificamos a RMM 5:4, onde a evolução temporal dos ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ dos planetas b com c classificamos como em RMM e sob o efeito da RMM. No entanto, encontramos que em 2% e 7% dos sistemas, os ângulos ressonantes $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ libram, e em 98% e 93% dos sistemas os ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ estão sob o efeito da RMM, respectivamente. Além disso, encontramos que na RMM 3:2 dos planetas g e h , os ângulos $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ também são classificados da mesma forma. Observamos que em 10% e 25% dos sistemas, os ângulos ressonantes $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ libram, e em 90% e 75% dos sistemas os ângulos $\phi_{3:2}^{(1)}$ e $\phi_{3:2}^{(2)}$ estão sob o efeito da RMM, respectivamente.

No segundo intervalo de excentricidade todos os sistemas sobreviveram até 1.2×10^4 anos. Quando o tempo da simulação numérica é maior que $10^4 T_h$, ou seja, o tempo de integração é de $10^5 T_h$, 99% dos sistemas sobreviveram. O comportamento dos ângulos $\phi_{5:4}^{(1)}$ e $\phi_{5:4}^{(2)}$ dos planetas b e c libram e circulam em determinados intervalos de tempo, sendo um comportamento intermitente em escala de tempo curta, longa ou curta & longa. Encontramos que em $\sim 92\%$ dos sistemas, os planetas g e h estão sob efeito da RMM 3:2 (ver a Tabela 16).

No terceiro intervalo de excentricidade, somente 6% dos sistemas permanecem até $10^4 T_h$, a instabilidade nos sistemas surge quando o tempo da simulação numérica é acrescentado até $10^5 T_h$. Os sistemas mostram instabilidade devido à colisão ou ejeção dos planetas, quando apresentam valores de $\text{Log } D$ próximos a zero.

Verificamos que a massa dos planetas g e h nos três intervalos de excentricidade são importantes para a estabilidade dos sistemas analisados, sendo que o planeta h apresenta uma variação de excentricidade pequena comparada aos outros planetas, por ser o mais massivo dos 8 planetas.

Se o sistema Kepler-90 apresenta valores de excentricidade nos dois primeiros intervalos de excentricidade, observamos que os planetas b e c e g e h estão sob efeito das RMM 5:4 e RMM 3:2, respectivamente.

Os resultados apresentados anteriormente mostram que não aparecem cadeias ressonantes entre os quatro planetas i , d , e e f , ao contrário, identificamos que existem planetas que estão próximos da RMM 3:1 dos planetas i e e , da RMM 11:5 dos planetas d e f e da RMM 15:11 dos planetas e e f . A cadeia ressonante estimada por Contreras e Boley (2018) é identificada entre os planetas d , e e f , cujo ângulo ressonante circula nos dois primeiros intervalos de excentricidade.

Também analisamos as regiões estáveis dos "sistemas Kepler-90" incluindo o efeito gravitacional dos planetas b , c , i , d , e , f , g e h , sobre um conjunto de partículas teste com diferentes valores de excentricidade. Seleccionamos aleatoriamente cinco "sistemas Kepler-90" que sobreviveram nos dois primeiros intervalos de excentricidade. Observamos que entre as órbitas dos "planetas e " e h não encontramos regiões estáveis. Somente encontramos partículas com baixa excentricidade próximas aos planetas e , f , g e h . Isto pode ser devido ao valor máximo de variação de excentricidade que alcançam os planetas, ver a Figura 29(a) e Figura 29(b). Por exemplo, o valor máximo de variação de excentricidade que alcançam os planetas no primeiro intervalo de excentricidade sugere que o planeta h perturba os planetas e em consequência as partículas teste. Os planetas d , e , f , g e h limpam as regiões entre suas órbitas. Também encontramos regiões estáveis entre as órbitas dos planetas c e i , i e d , d e e e além da órbita do planeta h (ver a Figura 39 até Figura 45 e a Figura 57).

As regiões coorbitais não são sempre identificadas além da órbita do planeta e , no primeiro intervalo de excentricidade. Na Figura 39 (a), notamos partículas coorbitais aos planetas g e h . Isto pode ser devido ao valor inicial da anomalia média (M_0) dos planetas g e h . Neste caso o valor de M_0 desses planetas difere de $\sim 30^\circ$ (ver o Apêndice C, Tabela 18). Na Figura 43 (g), notamos que os planetas g e h não apresentam partículas coorbitais, seus valores de M_0 estão próximos (ver o Apêndice C, Tabela 19).

Analisamos as regiões estáveis que estão localizadas entre as órbitas dos planetas c e i , e além da órbita do planeta h . Identificamos onze RMMs entre as órbitas dos planetas b e i que são as RMMs 3:2, 4:3, 5:4, 6:5, 7:6, 9:8, 10:9, 9:7 e 13:10. Também identificamos a RMM 1:2 com o planeta b e a RMM 1:2 com o planeta c . Além da órbita do planeta h , região estável, encontramos partículas teste em RMM. Essas ressonâncias foram identificadas nas curvas de frequências para os diferentes valores de excentricidade (ver a Figura 58 e Figura 59). Identificamos cinco RMM além da órbita do planeta h as quais são a RMM 1:2, 3:4, 3:5, 3:7 e 3:8.

A região 1 está localizada entre as órbitas dos planetas c e i . Identificamos que essa região apresenta falhas que podem estar associadas às RMMs. Essas falhas estão presentes nos semieixos maiores que correspondem às RMMs 1:2 com o planeta c , 1:2 com o planeta b e 2:1 e 3:2 com o planeta i . Além disso, encontramos partículas em RMMs 4:5, 9:7, 5:4, 6:5 e 7:6 com o planeta i . Notar que a região 1 é estável nos dez "sistemas Kepler-90".

Além da órbita do planeta h , identificada como região 4, verificamos que o planeta h abriga o maior conjunto de partículas teste em RMM 1:2, quando comparado aos outros conjuntos de partículas que estão em outras RMMs.

Concluimos que o planeta h influencia a configuração final da região 4, porque é o mais próximo e o mais massivo dos planetas do sistema Kepler-90. Além disso, fizemos um breve comparação entre o Cinturão Principal de asteroides e a região interna localizada entre os planetas b e i . Nessa região também aparecem falhas que podem estar associadas as ressonâncias, similar às Falhas de Kirkwood (observada para valores de $\text{Log } D < -8$). O planeta h , assim como Netuno, influencia a região externa. Localizamos regiões onde objetos podem estar em ressonância com o planeta h , similar aos objetos localizados no Cinturão de Kuiper.

Como trabalhos futuros podemos destacar a análise do campo magnético de Netuno com o intuito de verificar o efeito do arrasto de plasma nos anéis do planeta. No caso do sistema Kepler-90 são necessárias maiores informações dos parâmetros físicos dos planetas, dados esses que provavelmente serão fornecidos pelo Telescópio James Webb, ajudarão a obter maiores informações sobre a formação do sistema.

REFERÊNCIAS

- AGOL, E. et al. Refining the transit-timing and photometric analysis of trappist-1: Masses, radii, densities, dynamics, and ephemerides. **The Planetary Science Journal**, IOP Publishing, v. 2, n. 1, p. 1, 2021.
- BORDERIES, N.; LONGARETTI, P. Description and behavior of streamlines in planetary rings. **Icarus**, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 593–603, 1987.
- BORUCKI, W. J. et al. Kepler planet-detection mission: introduction and first results. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 327, n. 5968, p. 977–980, 2010.
- BORUCKI, W. J. et al. Characteristics of planetary candidates observed by kepler. ii. analysis of the first four months of data. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 736, n. 1, p. 19, 2011.
- BOTTKE, W. F. et al. Linking the collisional history of the main asteroid belt to its dynamical excitation and depletion. **Icarus**, v. 179, n. 1, p. 63–94, 2005. ISSN 0019-1035. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103505001958>.
- BROZOVIĆ, M. et al. Orbits and resonances of the regular moons of neptune. **Icarus**, Elsevier, p. 113462, 2019.
- BULIRSCH, R.; STOER, J. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 8, n. 1, p. 1–13, 1966.
- CABRERA, J. et al. The planetary system to kic 11442793: a compact analogue to the solar system. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 781, n. 1, p. 18, 2014.
- CENTER, M. P. **List Of Transneptunian Objects**. 2021. Disponível em: <https://minorplanetcenter.net/iau/lists/TNOs.html>. Acesso em: 29 sep. 2021.
- CENTER, M. P. **Minor Planet Names: Alphabetical List**. 2021. Disponível em: <https://minorplanetcenter.net/iau/lists/MPNames.html>. Acesso em: 29 sep. 2021.
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 304, n. 4, p. 793–799, 04 1999. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1999.02379.x>.
- CHARNOZ, S. et al. The origin of planetary ring systems. **arXiv preprint arXiv:1703.09741**, 2017.
- CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. **Physics reports**, Elsevier, v. 52, n. 5, p. 263–379, 1979.
- CLOUTIS, E. A.; IZAWA, M. R.; BECK, P. Reflectance spectroscopy of chondrites. In: **Primitive Meteorites and Asteroids**. [S.l.]: Elsevier, 2018. p. 273–343.
- CONTRERAS, A. G.; BOLEY, A. The dynamics of tightly-packed planetary systems in the presence of an outer planet: Case studies using kepler-11 and kepler-90. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 155, n. 3, p. 139, 2018.
- CORREIA, A. et al. The harps search for southern extra-solar planets-xix. characterization and dynamics of the gj 876 planetary system. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 511, p. A21, 2010.

CORREIA, A. et al. The coralie survey for southern extra-solar planets-xiii. a pair of planets around hd 202206 or a circumbinary planet? **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 440, n. 2, p. 751–758, 2005.

CORREIA, A. et al. The harps search for southern extra-solar planets-xvi. hd 45364, a pair of planets in a 3: 2 mean motion resonance. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 496, n. 2, p. 521–526, 2009.

COUETDIC, J. et al. Dynamical stability analysis of the hd 202206 system and constraints to the planetary orbits. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 519, p. A10, 2010.

DATABASE, E. O. **Repositorio de base de dados do sistema Kepler-90**. 2020. Disponível em: http://exoplanets.org/detail/KIC_11442793_b,KIC_11442793_c,KIC_11442793_d,KIC_11442793_e,KIC_11442793_f,KIC_11442793_g,KIC_11442793_h. Acesso em: 01 ene. 2020.

DATABASE, E. O. **Repositorio de base de dados para sistemas extrasolares**. 2020. Disponível em: <http://exoplanets.org/table>. Acesso em: 01 ene. 2020.

DERMOTT, S. F. et al. Dynamical evolution of the inner asteroid belt. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 505, n. 2, p. 1917–1939, 2021.

DERMOTT, S. F.; MURRAY, C. D. Nature of the kirkwood gaps in the asteroid belt. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 301, n. 5897, p. 201–205, 1983.

DUCROT, E. et al. Trappist-1: Global results of the spitzer exploration science program red worlds. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 640, p. A112, 2020.

ESPOSITO, L. **Planetary rings: a post-equinox view**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. v. 15.

ESPOSITO, L. W. Planetary rings. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 65, n. 12, p. 1741, 2002.

EXOPLANET, N. **Exoplanetas y sistemas extrasolares confirmados**. 2021. Disponível em: <https://exoplanets.nasa.gov/>. Acesso em: 27 sep. 2021.

GASLAC, D. G. et al. Analysing the region of the rings and small satellites of neptune. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 365, n. 1, p. 1–10, 2020.

GEORGAKARAKOS, N.; DOBBS-DIXON, I. Do the planets in the hd 34445 system really exist? **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 488, n. 3, p. 3818–3825, 2019.

GEROYANNIS, V. S. A numerical method for computing optimum radii of host stars and orbits of planets, with application to kepler-11, kepler-90, kepler-215, hd 10180, hd 34445, and trappist-1. **arXiv preprint arXiv:2009.09732**, 2020.

GLADMAN, B. Nomenclature in kuiper belt. **Highlights of Astronomy**, Cambridge University Press, v. 12, p. 193–198, 2002.

GLADMAN, B.; MARSDEN, B. G.; VANLAERHOVEN, C. Nomenclature in the outer solar system. **The Solar System Beyond Neptune**, Citeseer, v. 43, 2008.

GRIMM, S. L. et al. The nature of the trappist-1 exoplanets. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 613, p. A68, 2018.

- HADDEN, S.; LITHWICK, Y. A criterion for the onset of chaos in systems of two eccentric planets. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 156, n. 3, p. 95, 2018.
- HAN, E. et al. Exoplanet orbit database. II. updates to exoplanets.org. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, IOP Publishing, v. 126, n. 943, p. 827–837, sep 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1086/678447>.
- HEDMAN, M. M. et al. Of horseshoes and heliotropes: Dynamics of dust in the encke gap. **Icarus**, Elsevier, v. 223, n. 1, p. 252–276, 2013.
- JACOBSON, R. A. The orbits of the neptunian satellites and the orientation of the pole of neptune. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 137, n. 5, p. 4322, 2009.
- JEWITT, D.; LUU, J.; TRUJILLO, C. Large kuiper belt objects: the mauna kea 8k ccd survey. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 115, n. 5, p. 2125, 1998.
- KARKOSCHKA, E. Sizes, shapes, and albedos of the inner satellites of neptune. **Icarus**, Elsevier, v. 162, n. 2, p. 400–407, 2003.
- KIRKWOOD, D. **Meteoric astronomy: a treatise on shooting-stars, fire-balls, and aerolites**. [S.l.]: JB Lippincott & Company, 1867.
- LASKAR, J. The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones. **Icarus**, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 266–291, 1990.
- LASKAR, J. Frequency analysis of a dynamical system. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 56, n. 1-2, p. 191–196, 1993.
- LASKAR, J. Large-scale chaos in the solar system. **Astronomy and Astrophysics**, v. 287, p. L9–L12, 1994.
- LASKAR, J.; FROESCHLÉ, C.; CELLETTI, A. The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. application to the standard mapping. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 56, n. 2-3, p. 253–269, 1992.
- LIANG, Y.; ROBNIK, J.; SELJAK, U. Kepler-90: Giant transit-timing variations reveal a super-puff. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 161, n. 4, p. 202, 2021.
- LISSAUER, J. J. et al. Validation of kepler’s multiple planet candidates. ii. refined statistical framework and descriptions of systems of special interest. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 784, n. 1, p. 44, 2014.
- LISSAUER, J. J. et al. Architecture and dynamics of kepler’s candidate multiple transiting planet systems. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 197, n. 1, p. 8, 2011.
- LOVIS, C. et al. The harps search for southern extra-solar planets-xxviii. up to seven planets orbiting hd 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 528, p. A112, 2011.
- LUGER, R. et al. A seven-planet resonant chain in trappist-1. **Nature Astronomy**, Nature Publishing Group, v. 1, n. 6, p. 1–8, 2017.
- LYONS, J. R. Metal ions in the atmosphere of neptune. **Science**, JSTOR, p. 648–651, 1995.
- MACDONALD, M. G. et al. A dynamical analysis of the kepler-80 system of five transiting planets. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 152, n. 4, p. 105, 2016.

- MAHAJAN, N.; WU, Y. Stability of the kepler-11 system and its origin. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 795, n. 1, p. 32, 2014.
- MALHOTRA, R. Resonant kuiper belt objects: a review. **Geoscience letters**, SpringerOpen, v. 6, n. 1, p. 1–9, 2019.
- MALHOTRA, R. et al. Neptune's 5: 2 resonance in the kuiper belt. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 156, n. 2, p. 55, 2018.
- MARZARI, F. et al. Origin and evolution of the vesta asteroid family. **Astronomy and Astrophysics**, v. 316, p. 248–262, 1996.
- MARZARI, F.; SCHOLL, H.; TRICARICO, P. Frequency map analysis of the 3/1 resonance between planets b and c in the 55 cancri system. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 442, n. 1, p. 359–364, 2005.
- MARZARI, F.; TRICARICO, P.; SCHOLL, H. Saturn trojans: stability regions in the phase space. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 579, n. 2, p. 905, 2002.
- MARZARI, F.; TRICARICO, P.; SCHOLL, H. The matros project: stability of uranus and neptune trojans. the case of 2001 qr322. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 410, n. 2, p. 725–734, 2003.
- MARZARI, F.; TRICARICO, P.; SCHOLL, H. Stability of jupiter trojans investigated using frequency map analysis: the matros project. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 345, n. 4, p. 1091–1100, 2003.
- MAYOR, M.; QUELOZ, D. A jupiter-mass companion to a solar-type star. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 378, n. 6555, p. 355–359, 1995.
- MIGASZEWSKI, C.; SŁONINA, M.; GOŹDZIEWSKI, K. A dynamical analysis of the kepler-11 planetary system. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, The Royal Astronomical Society, v. 427, n. 1, p. 770–789, 2012.
- MIGNARD, F. Effects of radiation forces on dust particles in planetary rings. In: **IAU Colloq. 75: Planetary Rings**. [S.l.: s.n.], 1984. p. 333–366.
- MINER, E. D.; WESSEN, R. R.; CUZZI, J. N. **Planetary ring systems**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- MOONS, M. Review of the dynamics in the kirkwood gaps. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 65, n. 1, p. 175–204, 1996.
- MORDASINI, C. et al. Characterization of exoplanets from their formation-ii. the planetary mass-radius relationship. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 547, p. A112, 2012.
- MUÑOZ-GUTIÉRREZ, M. et al. Long-term dynamical stability in the outer solar system i: The regular and chaotic evolution of the 34 largest trans-neptunian objects. **arXiv preprint arXiv:2107.00240**, 2021.
- MUNÓZ-GUTIÉRREZ, M. A.; WINTER, S. G. Long-term evolution and stability of saturnian small satellites: Aegaeon, methone, anthe and pallene. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 470, n. 3, p. 3750–3764, 2017.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999.

- NASA. **Parâmetro físico de Netuno**. 2017. Disponível em: https://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_phys_par. Acesso em: 01 feb. 2017.
- NASA. **Parâmetro físico dos satélites de Netuno**. 2017. Disponível em: https://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_phys_par. Acesso em: 01 feb. 2017.
- NASA. **Posição e velocidade dos satélites de Netuno**. 2017. Disponível em: <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>. Acesso em: 01 feb. 2017.
- NASA. **Asteroid Classifications**. 2021. Disponível em: <https://solarsystem.nasa.gov/asteroids-comets-and-meteors/asteroids/in-depth/>. Acesso em: 29 sep. 2021.
- NESVORNY. **Programa do algoritmo da transformada de Fourier de frequência modificada**. 2018. Disponível em: <https://minorplanetcenter.net/iau/lists/TNOs.html>. Acesso em: 09 ene. 2018.
- NESVORNÝ, D. Dynamical evolution of the early solar system. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Annual Reviews, v. 56, p. 137–174, 2018.
- NESVORNÝ, D.; MORBIDELLI, A. Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 6, p. 3029, 1998.
- PATER, I. D. et al. The rings of neptune. In: _____. **Planetary Ring Systems: Properties, Structure, and Evolution**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. (Cambridge Planetary Science), p. 112–124.
- PATER, I. de et al. The dynamic neptunian ring arcs: evidence for a gradual disappearance of liberté and resonant jump of courage. **Icarus**, Elsevier, v. 174, n. 1, p. 263–272, 2005.
- PORCO, C. et al. Neptune and triton. **Univ. of Arizona Press, Tucson. This Page Intentionally Left Blank**, 1995.
- PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes in Fortran 77: volume 1, volume 1 of Fortran numerical recipes: the art of scientific computing**. [S.l.]: Cambridge university press, 1992.
- RAGOZZINE, D.; TEAM, K. The very compact five exoplanet system koi-500: Mass constraints from ttvs, resonances, and implications. In: **AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts# 44**. [S.l.: s.n.], 2012. v. 44.
- RENNER, S.; SICARDY, B. Use of the geometric elements in numerical simulations. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 94, n. 2, p. 237–248, 2006.
- RENNER, S. et al. Neptune’s ring arcs: Vlt/naco near-infrared observations and a model to explain their stability. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 563, p. A133, 2014.
- ROBERTS, A. C.; MUÑOZ-GUTIÉRREZ, M. A. Dynamics of small bodies in orbits between jupiter and saturn. **Icarus**, Elsevier, p. 114201, 2020.
- ROBNIK, J.; SELJAK, U. Kepler data analysis: Non-gaussian noise and fourier gaussian process analysis of stellar variability. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 159, n. 5, p. 224, 2020.
- ROBNIK, J.; SELJAK, U. Matched filtering with non-gaussian noise for planet transit detections. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 504, n. 4, p. 5829–5839, 2021.
- ROBUTEL, P.; LASKAR, J. Frequency map and global dynamics in the solar system i: Short period dynamics of massless particles. **Icarus**, Elsevier, v. 152, n. 1, p. 4–28, 2001.

- SANTOS, P. M. P. d. Análise da estabilidade da região externa do sistema plutão-caronte após a descoberta dos novos satélites nix e hidra: aplicação à sonda new horizons. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2010.
- SHALLUE, C. J.; VANDERBURG, A. Identifying exoplanets with deep learning: A five-planet resonant chain around kepler-80 and an eighth planet around kepler-90. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 155, n. 2, p. 94, 2018.
- SHEPPARD, S. S. et al. A new high perihelion trans-plutonian inner oort cloud object: 2015 tg387. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 157, n. 4, p. 139, 2019.
- SHOWALTER, M. et al. A three-body resonance confines the ring-arcs of neptune. In: **AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts**. [S.l.: s.n.], 2017. v. 49.
- SHOWALTER, M. et al. New satellite of neptune: S/2004 n 1. **Central Bureau Electronic Telegrams**, v. 3586, 2013.
- SHOWALTER, M. et al. The seventh inner moon of neptune. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 566, n. 7744, p. 350, 2019.
- SHOWALTER, M. R. et al. The neptune system revisited: New results on moons and rings from the hubble space telescope. In: **AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts**. [S.l.: s.n.], 2013. v. 45.
- ŠIDLICHOVSKÝ, M.; NESVORNÝ, D. Frequency modified fourier transform and its application to asteroids. In: **The Dynamical Behaviour of our Planetary System**. [S.l.]: Springer, 1997. p. 137–148.
- SMITH, B. A. et al. Voyager 2 at neptune: Imaging science results. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 246, n. 4936, p. 1422–1449, 1989.
- THOMAS, P. The shape of triton from limb profiles. **Icarus**, Elsevier, v. 148, n. 2, p. 587–588, 2000.
- WALKER, G. H.; FORD, J. Amplitude instability and ergodic behavior for conservative nonlinear oscillator systems. **Physical Review**, APS, v. 188, n. 1, p. 416, 1969.
- WEISS, L. M.; MARCY, G. W. The mass-radius relation for 65 exoplanets smaller than 4 earth radii. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 783, n. 1, p. L6, 2014.
- WINTER, S. G.; MADEIRA, G.; SFAIR, R. Neptune's ring arcs confined by coorbital satellites: dust orbital evolution through solar radiation. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 496, n. 1, p. 590–597, 2020.
- WISDOM, J. The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. **The Astronomical Journal**, v. 85, p. 1122–1133, 1980.
- WRIGHT, J. T. et al. The exoplanet orbit database. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, IOP Publishing, v. 123, n. 902, p. 412, 2011.
- ZHANG, K.; HAMILTON, D. P. Orbital resonances in the inner neptunian system: I. the 2: 1 proteus–larissa mean-motion resonance. **Icarus**, Elsevier, v. 188, n. 2, p. 386–399, 2007.
- ZHANG, K.; HAMILTON, D. P. Orbital resonances in the inner neptunian system: II. resonant history of proteus, larissa, galatea, and despina. **Icarus**, Elsevier, v. 193, n. 1, p. 267–282, 2008.

APÊNDICE A – ALGORITMO FMFT

No Apêndice A faremos uma descrição do programa de Šidlichovský e Nesvorný (1997), sendo apresentado o algoritmo Modified Fourier Transform (MFT) e depois o algoritmo Frequency Modified Fourier Transform (FMFT). O algoritmo FMFT depende do algoritmo MFT.

A.1 ALGORITMO MFT

Assumir uma função complexa

$$f(t) = k(t) + ih(t) \quad (1)$$

onde $k(t)$ e $h(t)$ apresentam valores reais, e a equação (1) está definida no intervalo de 0 a 2τ .

Šidlichovský e Nesvorný (1997) introduziram o produto interno, para duas funções f e g , definido como

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} f(t) \bar{g}(t) \chi(t) dt \quad (2)$$

onde $\chi(t)$ é a função de ponderação, sendo uma função positiva cuja norma é igual a 1. Para todos os cálculos, Šidlichovský e Nesvorný (1997) utilizaram o filtro de Hanning windows definido como (LASKAR; FROESCHLÉ; CELLETTI, 1992)

$$\chi(t) = 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \quad (3)$$

onde π/τ é igual a ν_0 .

Substituindo as funções f e g por $\exp(i\nu t)$ e $\exp(i\omega t)$ na equação (2) no intervalo de 0 a 2τ , cuja integral pode ser calculada pela regra de Simpson, obtemos a seguinte equação

$$\langle e^{i\nu t}, e^{i\omega t} \rangle = e^{i(\nu-\omega)\tau} Q(\nu, \omega) \quad (4)$$

onde $Q(\nu, \omega)$ é uma função real, definida como

$$Q(\nu, \omega) = \frac{\text{sen}((\nu - \omega)\tau)}{(\nu - \omega)\tau} \frac{\pi^2}{\pi^2 - (\nu - \omega)^2 \tau^2} \quad (5)$$

$$Q(\nu, \omega) = 1 \quad (6)$$

Se a função $f(t)$, na equação 1, for definida como:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A'_j e^{i\nu'_j t} \quad (7)$$

com $|A'_1| \geq |A'_2| \geq \dots$, o MFT tenta aproximar a função $f(t)$ com os N primeiros termos, sendo a seguinte função:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N A_j e^{i\nu_j t} \quad (8)$$

onde A_j e ν_j são próximos a A'_j e ν'_j . O primeiro passo do MFT é determinar ν_1 como σ , para que o valor absoluto da função

$$\varphi_1(\sigma) = \langle f(t), e^{i\sigma t} \rangle \quad (9)$$

seja realizado sobre um valor máximo. Assim A_1 é definido como

$$A_1 = \varphi_1(\nu_1) \quad (10)$$

Para o seguinte passo do MFT será utilizado como função de entrada a seguinte equação:

$$f_1(t) = f(t) - A_1 e^{i\nu_1 t} \quad (11)$$

De modo que precisamos determinar o m -ésimo passo para obter a frequência ν_m , sendo necessário definir equações preliminares. Por exemplo, definimos os vetores unitários

$$e_j = e^{i\nu_j(t-\tau)}. \quad (12)$$

Os vetores e_j não são ortonormais pois $\langle e_j, e_k \rangle = Q(\nu_j, \nu_k)$. Šidlichovský e Nesvorný (1997) formaram uma base ortogonal como

$$b_j = \sum_{k=1}^j \alpha_{kj} e_k, \quad (13)$$

Primeiro calculamos o m -ésimo passo de e_m e segundo os m coeficientes α_{mk} para valores de $k = 1, 2, \dots, m$, seguido das condições de ortonormalidade para os vetores $b_1, \dots, b_m$. Šidlichovský e Nesvorný (1997) escolheram o coeficiente $\alpha_{11} = 1$, sendo escolhidos todos os coeficientes reais, α_{ij} . No m -ésimo passo os coeficientes S_m são calculados

$$f = \sum_{j=1}^m S_j b_j + f_m, \quad (14)$$

onde S_j é igual a $\langle f, b_j \rangle$, sendo $\langle f_m, b_j \rangle = 0$ para valores de $j \leq m$.

Para o m -ésimo passo precisamos conhecer a função $f_{m-1}(t)$, os coeficientes α_{nk} (para $n < m$ e $k \leq n$) e os coeficientes S_k (para $k < m$). De modo que, para valores de $m = 2$ as variáveis f_1 , α_{11} e $S_1 = A_1$ são conhecidas. Para isso, Šidlichovský e Nesvorný (1997) desenvolveram um algoritmo para o cálculo do m -ésimo passo, que será descrito a seguir:

- 1.- cálculo de ν_m como σ para a função $\varphi_m = \langle f_{m-1}, e^{i\sigma t} \rangle$ tomado a partir de um valor máximo.

Isto é possível de obter aplicando a transformada rápida de Fourier (FFT) para estimar aproximadamente o f_{m-1} seguindo o método de Brent (PRESS et al., 1992) que determina com maior precisão o valor de ν_m . Šidlichovský e Nesvorný (1997) avaliaram o valor máximo de φ como $\varphi_m(\nu_m) = F_m e^{i\delta_m}$, onde F_m e δ_m são a amplitude e o ângulo de fase, respectivamente.

- 2.- Calcular b_m , ou os coeficientes α_{mk} para $k \leq m$. Os vetores b_j para $j < m$ são conhecidos a partir dos passos anteriores. Portanto

$$b_m = \alpha_{mm} \left(\sum_{j=1}^{m-1} B_j^{(m)} b_j + e_m \right) \quad (15)$$

obtemos os coeficientes $B_j^{(m)}$ de ortogonalidade de b_m para todo b_j para $j < m$

$$B_j^{(m)} = - \sum_{s=1}^j \alpha_{js} Q(\nu_m, \nu_s), \quad \text{para } j = 1, \dots, m-1 \quad (16)$$

e os coeficientes α_{mm} da condição $\langle b_m, b_m \rangle = 1$ que é

$$\alpha_{mm} = \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} |B_j^{(m)}|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (17)$$

sendo

$$\alpha_{mj} = \alpha_{mm} \sum_{s=j}^{m-1} B_s^{(m)} \alpha_{sj} \quad \text{para } j < m \quad (18)$$

- 3.- Cálculo de f_m . Da equação (14) temos o seguinte:

$$f_m = f_{m-1} - \langle f_{m-1}, b_m \rangle b_m \quad (19)$$

utilizando a equação (14) e a equação $\langle f_m, b_j \rangle = 0$ para valores de $j \leq m$, temos:

$$f_m = f_{m-1} - \alpha_{mm} F_m \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} \exp i [\nu_j t + (\nu_m - \nu_j) \tau + \delta_m] \quad (20)$$

onde as partes real e imaginária da equação (20) apresentam a seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} k_m &= k_{m-1} - \alpha_{mm} F_m \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} \cos i [\nu_j t + (\nu_m - \nu_j) \tau + \delta_m] \\ h_m &= h_{m-1} - \alpha_{mm} F_m \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} \operatorname{sen} i [\nu_j t + (\nu_m - \nu_j) \tau + \delta_m] \end{aligned} \quad (21)$$

4.- Cálculo de S_m através da equação

$$S_m = \langle f, b_m \rangle = \langle f_{m-1}, b_m \rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} \langle f_{m-1}, e_j \rangle \quad (22)$$

mas f_{m-1} é ortogonal para $b_1, \dots, b_{m-1}$ e, portanto, os vetores unitários $(e_1, \dots, e_{m-1})$ são ortogonais. No entanto,

$$S_{mm} = \alpha_{mm} F_m \exp i(\nu_m \tau + \delta_m) \quad (23)$$

depois do passo N , temos que

$$f = \sum_{j=1}^N S_j b_j + f_N = \sum_{s=1}^N e_s \sum_{j=s}^N S_j \alpha_{js} + f_N \quad (24)$$

Desprezando a variável f_N e comparando com as equações (24) e (8), encontramos que

$$A_s = \sum_{j=s}^N \alpha_{jj} \alpha_{js} F_j \exp i[(\nu_j - \nu_s)\tau + \delta_j] \quad (25)$$

O cálculo de ν_j e A_j se escreve como um loop com N passos, onde N é igual a 2^l , $l = 2, 4, \dots, 2k$ (k é um número inteiro). A função f_j é calculada e escrita em um arquivo com a mesma amostra do f .

A.2 ALGORITMO FMFT

Šidlichovský e Nesvorný (1997) sugeriram que não existem duas frequências principais com amplitudes significativas, próximas de ν_0 . Eles indicaram ser necessário realizar uma correção linear das frequências calculadas pelo MFT, apesar de que o erro pode ser pequeno quando calculamos as frequências principais com o MFT. Faremos uma breve revisão do algoritmo FMFT.

Assumir apenas duas frequências

$$f = C_1 e^{i(\omega_1 t + \beta_1)} + C_2 e^{i(\omega_2 t + \beta_2)} \quad (26)$$

onde $C_1 > C_2$, C_1 e C_2 são números reais.

No entanto,

$$\varphi(\sigma) = \langle f, e^{i\sigma t} \rangle = \sum_{j=1}^2 C_j Q(\omega_j, \sigma) \exp i[(\omega_j - \sigma)\tau + \beta_j] \quad (27)$$

calculamos ν_1 como σ para que a amplitude de $\varphi(\sigma)$ tome um valor máximo, devido ao fato de que ν_1 é igual a ω_1 apenas se a variável $Q(\omega_2, \sigma)$ é desprezível para $\sigma \sim \nu_1$. Sendo ν_1 calculado de acordo com a condição

$$\frac{d}{d\sigma} |\varphi(\sigma)|_{\sigma=\nu_1} = 0 \quad (28)$$

Substituindo a equação (27) na equação (28), obtemos o seguinte

$$C_1^2 Q(\omega_1, \nu_1) Q'(\omega_1, \nu_1) + C_2^2 Q(\omega_2, \nu_1) Q'(\omega_2, \nu_1) + C_1 C_2 [Q(\omega_1, \nu_1) Q'(\omega_2, \nu_1) + Q(\omega_2, \nu_1) Q'(\omega_1, \nu_1)] \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \beta_1 - \beta_2] = 0, \quad (29)$$

onde $Q'(\omega, \nu)$ é a derivada de $Q(\omega, \nu)$ com relação à variável ν . Šidlichovský e Nesvorný (1997) introduziram o erro ϵ como

$$\nu_1 = \omega_1 + \epsilon \quad (30)$$

sendo linearizada a equação (29) na equação (30) obtendo a seguinte equação

$$\epsilon = - \frac{C_2 Q'(\omega_1, \omega_2) \cos[(\omega_1 - \omega_2)\tau + \beta_1 - \beta_2]}{C_1 Q''(\omega_1, \omega_1)}, \quad (31)$$

onde $Q''(\omega_1, \omega_1)$ é a segunda derivada de $Q(\omega_1, \omega_1)$ em relação à variável ω_1 .

Šidlichovský e Nesvorný (1997) introduziram a equação

$$Q(y) = \frac{\sin y}{y} \frac{\pi^2}{\pi^2 - y^2} \quad (32)$$

cuja derivada primeira é

$$Q'(y) = \frac{1}{y} \frac{\pi^2}{\pi^2 - y^2} \left[\cos y + \frac{\sin y}{y} \frac{3y^2 - \pi^2}{\pi^2 - y^2} \right] \quad (33)$$

e a derivada segunda é

$$Q''(0) = \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (34)$$

onde y é igual a zero.

Finalmente, o cálculo das correções ϵ_j para ν_j , para N frequências, produz novas frequências $\nu_j - \epsilon_j$ sendo definida a equação erro como

$$\epsilon_j = \sum_{s>j}^N \frac{C_s Q'(y_{sj})}{C_j Q''(0)\tau} \cos(y_{sj} + \beta_s - \beta_j), \quad (35)$$

onde

$$y_{sj} = (\nu_s - \nu_j)\tau. \quad (36)$$

Além disso, as variáveis C_s, β_s são calculadas a partir de

$$A_s = C_s e^{i\beta_s} \quad (37)$$

e $Q'(y), Q''(0)$ são calculadas das equações (34), (35) e (36).

APÊNDICE B – ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

Os efeitos dinâmicos gerados pelo corpo central, seja por ser um corpo não esférico e/ou não homogêneo, deverão ser considerados nas simulações numéricas ao incluir as partículas teste. Dita condição inicial do corpo central indica que a órbita da partícula teste não permanecerá congelada, de modo que a órbita da partícula será modificada com o passar do tempo. O potencial gravitacional gerado pelo corpo central mostra que o primeiro termo da série corresponde a uma esfera com distribuição uniforme de massa, pelo qual os outros termos da série representarão perturbações.

No entanto, Renner e Sicardy (2006) sugeriram utilizar os elementos orbitais geométricos para uma partícula que gira ao redor de um planeta oblato, através da transformação do vetor posição para elementos orbitais geométricos e vice-versa. Essas transformações derivam da teoria epicíclica, sendo precisas até a ordem 2 da excentricidade e inclinação. O método é somente utilizado para propósitos computacionais, por exemplo, o estudo numérico da dinâmica dos anéis, pois todos os anéis conhecidos apresentam valores pequenos de excentricidades e inclinações.

Seguindo o sugerido por Renner e Sicardy (2006) as partículas que orbitam ao redor de um corpo oblato, os elementos orbitais osculadores podem apresentar significativas variações de curto período. Os elementos geométricos também podem sofrer variações de curto período, mas a amplitude é pequena e pode ser desprezível.

Os elementos geométricos são escritos em coordenadas cilíndricas cuja dedução desses elementos pode ser obtida em Borderies e Longaretti (1987). Estudamos a dinâmica de um conjunto de partículas teste que estão orbitando um corpo não-esférico cujas equações são em coordenadas cilíndricas. A solução é obtida através de uma expansão epicíclica, ou seja, uma expansão em torno de órbitas circulares e equatoriais, válido para órbitas com baixas excentricidade e inclinação.

As componentes dos vetores de posição e velocidade são as seguintes (RENNER; SICARDY, 2006):

$$x = r \cos L, \quad (1)$$

$$y = r \sin L, \quad (2)$$

$$z = z, \quad (3)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos L - r \dot{L} \sin L, \quad (4)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin L + r \dot{L} \cos L, \quad (5)$$

$$\dot{z} = \dot{z}. \quad (6)$$

sendo L o ângulo azimutal relativo a um sistema de referência inercial. Três frequências básicas são: a frequência epicíclica horizontal (κ), a frequência epicíclica vertical (ν) e a frequência epicíclica angular (n), as quais são as responsáveis por caracterizar as oscilações radiais, verticais e o movimento angular do corpo, respectivamente. As equações das frequências epicíclicas são dadas por (RENNER;

SICARDY, 2006):

$$\begin{aligned} \kappa = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} & \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 + \frac{45}{16} \left(\frac{R}{a} \right)^4 J_4 - \frac{175}{32} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_6 - \frac{9}{32} \left(\frac{R}{a} \right)^4 J_2^2 \right] \\ & + \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[\frac{135}{64} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_2 J_4 - \frac{27}{128} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_2^3 - 9 \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \nu = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} & \left[1 + \frac{9}{4} \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 - \frac{75}{16} \left(\frac{R}{a} \right)^4 J_4 + \frac{245}{32} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_6 - \frac{81}{32} \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2^2 \right] \\ & + \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[\frac{675}{64} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_2 J_4 + \frac{729}{128} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_2^3 + 6 \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 e^2 - \frac{51}{4} \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} & \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 - \frac{15}{16} \left(\frac{R}{a} \right)^4 J_4 + \frac{35}{32} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_6 - \frac{9}{32} \left(\frac{R}{a} \right)^4 J_2^2 \right] + \\ & \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[\frac{45}{64} \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_4 + \frac{27}{128} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_2^3 + 3 \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 e^2 - 12 \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Se os coeficientes gravitacionais forem iguais a zero, todas as frequências serão iguais à frequência de movimento médio kepleriano, portanto, as equações (13), (14) e (15) são iguais a $\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$.

A seguir apresentamos o algoritmo gerado por Renner e Sicardy (2006) que relaciona os elementos orbitais geométricos com o vetor posição, utilizando os coeficientes gravitacionais J_2 , J_4 e J_6 da expansão do potencial, até os termos quadráticos na excentricidade e inclinação. As equações são apresentadas nas seguintes subseções.

B.1 VETOR POSIÇÃO PARA ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

A partir do vetor posição converteremos para elementos orbitais geométricos (de coordenadas cartesianas para cilíndricas) utilizando as seguintes equações:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (10)$$

$$L = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \quad (11)$$

$$\dot{r} = \dot{x} \cos L + \dot{y} \sin L, \quad (12)$$

$$\dot{L} = \frac{-\dot{x} \sin L + \dot{y} \cos L}{r} \quad (13)$$

Notar que a longitude L é definida no intervalo de $[0, 2\pi]$, onde $\arctan(\Re) =] -\pi/2, \pi/2[$ pelo qual deve ser modificado nos seguintes casos:

$$L = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad x < 0, \quad (14)$$

$$L = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi \quad \arctan(y/x) < 0, \quad (15)$$

$$L = \pi/2 \quad x = 0 \ y > 0, \quad (16)$$

$$L = 3\pi/2 \quad x = 0 \ y < 0. \quad (17)$$

Seguindo o indicado por Renner e Sicardy (2006), incluímos os parâmetros auxiliares como

$$\eta^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 - 2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 + \frac{75}{8} \left(\frac{R}{a} \right)^4 J_4 - \frac{175}{8} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_6 \right], \quad (18)$$

$$\chi^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 + \frac{15}{2} \left(\frac{R}{a} \right)^2 J_2 - \frac{175}{8} \left(\frac{R}{a} \right)^4 J_4 + \frac{735}{16} \left(\frac{R}{a} \right)^6 J_6 \right], \quad (19)$$

$$(20)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\nu + \kappa), \quad (21)$$

$$\alpha_2 = 2\nu - \kappa, \quad (22)$$

$$\alpha^2 = \alpha_1 \alpha_2. \quad (23)$$

Os efeitos dos coeficientes de gravidade são apresentados nas coordenadas r_C , L_C e z_C (RENNER; SICARDY, 2006):

$$r_C = ae^2 \left[\frac{3}{2} \frac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \cos 2(\lambda - \varpi) \right] + aI^2 \left[\frac{3}{4} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - 1 + \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right], \quad (24)$$

$$L_C = e^2 \left[\frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \right] \frac{n}{\kappa} \sin 2(\lambda - \varpi) - I^2 \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \frac{n}{\nu} \sin 2(\lambda - \Omega), \quad (25)$$

$$z_C = aIe \left[\frac{\chi^2}{2\kappa\alpha_1} \sin(2\lambda - \varpi - \Omega) - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa\alpha_2} \sin(\varpi - \Omega) \right], \quad (26)$$

$$\dot{r}_C = ae^2 \frac{\eta^2}{\kappa} \sin 2(\lambda - \kappa) - aI^2 \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \nu \sin 2(\lambda - \Omega), \quad (27)$$

$$\dot{L}_C = e^2 n \left[\frac{7}{2} - 3 \frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\kappa^2}{2n^2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) \cos 2(\lambda - \varpi) \right] + I^2 n \left[2 - \frac{\kappa^2}{2\eta^2} - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - \frac{\chi^2}{\kappa^2} \cos 2(\lambda - \varpi) \right], \quad (28)$$

$$\dot{z}_C = aIe \left[\frac{\chi^2}{2\kappa\alpha_1} (\kappa + \nu) \cos(2\lambda - \varpi - \Omega) + \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa\alpha_2} (\kappa - \nu) \cos(\varpi - \Omega) \right]. \quad (29)$$

onde os elementos orbitais geométricos são os seguintes:

$$a = \frac{r - r_C}{1 - \frac{\dot{L} - \dot{L}_C - n}{2n}}, \quad (30)$$

$$e = \sqrt{\left(\frac{\dot{L} - \dot{L}_C - n}{2n}\right)^2 + \left(\frac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa}\right)^2}, \quad (31)$$

$$I = \sqrt{\left(\frac{z - z_C}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{z} - \dot{z}_C}{a\nu}\right)^2}, \quad (32)$$

$$\lambda = L - L_C - 2\frac{n}{\kappa} \frac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa}, \quad (33)$$

$$\tan(\lambda - \varpi) = \frac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa \left(1 - \frac{r - r_C}{a}\right)}, \quad (34)$$

$$\tan(\lambda - \Omega) = \nu \frac{z - z_C}{\dot{z} - \dot{z}_C}. \quad (35)$$

B.2 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS PARA VETOR POSIÇÃO

Os elementos geométricos são definidos como semieixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (I), longitude do pericentro (ϖ), longitude do nodo ascendente (Ω) e longitude média (λ). Notar que r , L e z representam as coordenadas nos eixos x , y e z , respectivamente, no sistema de coordenadas cilíndricas cujas equações são definidas como (RENNER; SICARDY, 2006):

$$r = a \left[1 - e \cos(\lambda - \varpi) + e^2 \left(\frac{3}{2} \frac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \cos 2(\lambda - \varpi) \right) \right] + I^2 a \left[\frac{3}{4} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - 1 + \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right], \quad (36)$$

$$L = \lambda + 2e \frac{n}{\kappa} \text{sen}(\lambda - \varpi) + e^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \right) \frac{n}{\kappa} \text{sen} 2(\lambda - \varpi) - I^2 \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \frac{n}{\nu} \text{sen} 2(\lambda - \Omega), \quad (37)$$

$$z = aI \left[\text{sen}(\lambda - \Omega) + e \frac{\chi^2}{2\kappa\alpha_1} \text{sen}(2\lambda - \varpi - \Omega) - e \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa\alpha_2} \text{sen}(\varpi - \Omega) \right], \quad (38)$$

$$\dot{r} = a\kappa \left[e \text{sen}(\lambda - \varpi) + e^2 \frac{\eta^2}{\kappa^2} \text{sen} 2(\lambda - \varpi) - I^2 \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \frac{\nu}{\kappa} \text{sen} 2(\lambda - \Omega) \right] \quad (39)$$

$$\dot{L} = n \left[1 + 2e \cos(\lambda - \varpi) \right] + ne^2 \left[\frac{7}{2} - 3 \frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\kappa^2}{2n^2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) \cos 2(\lambda - \varpi) \right] + nI^2 \left[\left(2 - \frac{\kappa^2}{2n^2} - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right) \right], \quad (40)$$

$$\dot{z} = aI\nu \left[\cos(\lambda - \Omega) + e \frac{\chi^2(\kappa + \nu)}{2\kappa\alpha_1\nu} \cos(2\lambda - \varpi - \Omega) + e \frac{3}{2} \frac{\chi^2(\kappa - \nu)}{\kappa\alpha_2\nu} \cos(\varpi - \Omega) \right] \quad (41)$$

sendo que o vetor posição será transformado para coordenadas cartesianas utilizando a equação (1) até a equação (6).

Para obter os elementos geométricos devemos utilizar as frequências n , κ e ν , através de iterações

sucessivas como apresentado por Renner e Sicardy (2006):

- 1.- Assumir que $a = r$ e que $e, I, r_C, L_C, z_C, \dot{r}_C, \dot{L}_C$ e $\dot{z}$ são iguais a zero;
- 2.- Calcular os valores das frequências κ, ν e n com os valores das variáveis assumidos no item 1;
- 3.- Calcular novamente as frequências do item 2, e também os elementos orbitais geométricos e os termos de segunda ordem;
- 4.- Repetir o item 2 e o item 3 até a condição $|a_{i+1} - a_i| < \varepsilon$, onde ε é um parâmetro positivo definido como o fator de erro, e a_i é o i -ésimo valor do semieixo maior calculado na iteração.

As simulações numéricas que serão apresentadas na seção 2.3 utilizam as transformações descritas acima.

APÊNDICE C – ELEMENTOS ORBITAIS DOS SISTEMAS NOMINAIS

Tabela 18 – Elementos orbitais dos sistemas nominais selecionados para o sistema Kepler-90 tomados do primeiro intervalo de excentricidade.

Figura	planetas	e	$\omega(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$M(^{\circ})$	Log D
Figura 39(a)	b	0.00026	17.08717	264.98947	118.16431	-9.8444233
	c	0.00063	272.30774	356.77344	131.52188	-10.9647732
	i	0.00025	353.71805	260.15771	271.20807	-11.7383785
	d	0.00065	26.16686	227.38849	318.49451	-10.5564194
	e	0.00027	157.10809	275.93811	171.98341	-7.7990327
	f	0.00024	98.96638	129.33534	59.94252	-7.9759068
	g	0.00049	323.15622	327.31491	21.80314	-9.7751360
	h	0.00090	181.62820	185.86507	114.85184	-10.0927124
Figura 39(b)	b	0.00059	158.87270	54.43803	180.81882	-9.8699570
	c	0.00073	11.39634	18.58200	187.94278	-11.8001261
	i	0.00032	12.62140	88.25120	38.58493	-9.8611317
	d	0.00038	198.65857	214.98064	219.99976	-7.8420730
	e	0.00094	277.93085	184.73340	175.20515	-7.5918598
	f	0.00065	250.91846	146.71358	175.26575	-8.0697508
	g	0.00048	255.76198	192.31146	99.59286	-10.3469229
	h	0.00061	100.83733	253.21298	190.97620	-10.7190475
Figura 40(c)	b	0.00051	179.94061	262.67084	29.73510	-9.8735199
	c	0.00022	62.25368	138.67879	134.86371	-12.1689472
	i	0.00026	59.28643	308.34100	88.35368	-10.2121534
	d	0.00089	284.81625	347.11072	90.26839	-10.3157253
	e	0.00028	197.93286	258.80313	185.50449	-8.2974300
	f	0.00049	126.67271	309.05142	148.39568	-8.0799236
	g	0.00002	329.64743	345.42535	204.70747	-9.4110031
	h	0.00100	144.18817	211.55763	290.28772	-11.3338614
Figura 40(d)	b	0.00082	253.19942	323.24103	313.33539	-9.8731308
	c	0.00041	65.51311	199.59961	191.13498	-11.7300749
	i	0.00035	261.10486	349.91635	84.71764	-11.6671391
	d	0.00014	85.58865	288.56165	296.02808	-7.8956442
	e	0.00040	312.43985	216.85330	13.91745	-7.6945457
	f	0.00076	175.57637	352.29651	127.89090	-8.4692850
	g	0.00073	59.41544	316.39621	111.71791	-9.5297346
	h	0.00068	54.13359	103.62622	326.41446	-10.8128262
Figura 41(e)	b	0.00063	216.22029	174.80775	34.97892	-9.8765030
	c	0.00003	123.58675	282.58759	330.12842	-11.8937359
	i	0.00041	335.26599	95.72963	88.36475	-11.9022913
	d	0.00041	288.01157	51.09836	211.23181	-10.2125273
	e	0.00059	292.26422	244.96611	185.91872	-8.3322554
	f	0.00082	237.19148	198.48260	138.04433	-7.9830146
	g	0.00075	70.00214	45.99993	201.46402	-9.0686598
	h	0.00057	252.63628	218.72165	95.03397	-10.3341684

Fonte: próprio autor

Tabela 19 – Elementos orbitais dos sistemas nominais selecionados para o sistema Kepler-90 tomados do segundo intervalo de excentricidade.

Figura	planetas	e	$\omega(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$M(^{\circ})$	$\text{Log } D$
Figura 43(f)	b	0.00601	63.67693	298.20764	56.78318	-9.8359509
	c	0.00988	92.58067	84.09570	36.58945	-11.5554218
	i	0.00219	228.49820	250.56261	286.11713	-10.0353785
	d	0.00696	271.05847	241.02742	228.03471	-9.3825302
	e	0.00100	215.35796	81.72275	114.76001	-8.1608419
	f	0.00700	42.27728	274.52542	189.40430	-7.6204610
	g	0.00554	211.67599	118.67989	253.07616	-9.2999010
	h	0.00143	58.20754	174.71704	309.68124	-10.8375835
Figura 43(g) e Figura 57	b	0.00878	46.65928	123.63293	339.14496	-9.8331947
	c	0.00362	126.74171	29.03584	205.88078	-12.0588369
	i	0.00776	303.91248	177.58635	294.23395	-10.0518713
	d	0.00643	156.73508	126.83312	125.69647	-7.3548145
	e	0.00282	330.88263	225.41483	268.04880	-7.2675900
	f	0.00158	279.51028	90.70381	220.34076	-7.2114921
	g	0.00855	113.25866	219.04001	45.33191	-7.9520617
	h	0.00374	47.98553	94.27051	45.37113	-8.9238997
Figura 44(h)	b	0.00165	39.26994	130.02921	202.00784	-9.8508339
	c	0.00964	88.37798	8.58985	10.81441	-11.5254164
	i	0.00886	319.08658	328.76038	197.06442	-11.1907930
	d	0.00173	175.33725	293.19067	337.17908	-8.3270378
	e	0.00583	197.60628	169.83104	271.20120	-8.0751619
	f	0.00332	62.08511	184.66687	136.95351	-8.5064230
	g	0.00828	348.13358	1.71996	108.50021	-9.6689548
	h	0.00455	320.56302	303.67163	90.12814	-10.4840879
Figura 44(i)	b	0.00761	186.14505	141.04549	312.47693	-9.8321438
	c	0.00333	214.81293	280.87552	355.22241	-11.2782841
	i	0.00954	296.20746	279.73380	247.11505	-9.4320059
	d	0.00842	226.07941	276.62177	142.79584	-9.6197281
	e	0.00585	151.21840	288.57565	171.99312	-7.0858078
	f	0.00691	292.90399	198.33078	106.12544	-6.8590388
	g	0.00587	170.75517	323.51010	154.52682	-8.2020798
	h	0.00260	167.05176	0.01408	236.90326	-10.5934362
Figura 45(j)	b	0.00611	337.14124	293.91861	330.69681	-9.8555746
	c	0.00949	12.60286	137.56059	61.99422	-11.3972263
	i	0.00273	102.41344	103.81119	195.73766	-10.2484989
	d	0.00231	0.70982	50.35824	11.39754	-8.6298475
	e	0.00109	221.33340	70.88078	54.38782	-8.3691082
	f	0.00158	219.86295	197.75433	137.61252	-8.0278358
	g	0.00595	163.03969	248.39780	262.78275	-9.3515005
	h	0.00306	51.21217	323.33185	38.63308	-10.8551226

Fonte: próprio autor

ANEXO A – ARTIGO PUBLICADO

Neste anexo incluímos o artigo publicado durante o doutorado, intitulado "Analysing the region of the rings and small satellites of Neptune".



Analysing the region of the rings and small satellites of Neptune

D.M. Gaslac Gallardo¹ · S.M. Giuliatti Winter¹ · G. Madeira¹ · M.A. Muñoz-Gutiérrez²

Received: 30 July 2019 / Accepted: 23 December 2019
© Springer Nature B.V. 2020

Abstract The ring system and small satellites of Neptune were discovered during Voyager 2 flyby in 1989 (Smith et al. in *Science* 246:1422, 1989). In this work we analyse the diffusion maps which can give an overview of the system. As a result we found the width of unstable and stable regions close to each satellite. The innermost Galle ring, which is further from the satellites, is located in a stable region, while Lassell ring ($W = 4000$ km) has its inner border in a stable region depending on its eccentricity. The same happens to the Le Verrier and Adams rings, they are stable for small values of the eccentricity. They can survive to the close satellites perturbation only for values of $e < 0.012$. When the solar radiation force is taken into account the rings composed by $1 \mu\text{m}$ sized particles have a lifetime of about 10^4 years while larger particles ($10 \mu\text{m}$ in radius) can survive up to 10^5 years. The satellites Naiad, Thalassa and Despina can help replenish the lost particles of the Le Verrier, Arago and Lassell rings, while the ejecta produced by Galatea, Larissa and Proteus do not have enough velocity to escape from the satellite gravity.

Keywords Small satellites of Neptune · Rings of Neptune · Ring dynamics

1 Introduction

Six satellites of Neptune were discovered in 1989 during Voyager 2 flyby: Naiad, Thalassa, Despina, Galatea, Larissa and Proteus (Smith et al. 1989). Proteus is larger compared to the other five satellites, which have radius smaller than 100 km. Triton, the largest satellite, and Nereid completed the Neptune satellite system until the discovery of Hippocamp, the smallest satellite (about 17 km in radius, (Showalter et al. 2019)).

Voyager 2 cameras also imaged a ring system formed by Galle, Le Verrier, Lassell, Arago and Adams rings (Smith et al. 1989). Adams ring is a narrow ring composed by a sample of arcs named Couragé, Liberté, Fraternité, Egalité 1 and 2. These arcs have shown variations in brightness. Le Verrier and Arago rings are also narrow, while Lassell ring is larger and very faint. Galle ring is the innermost ring 2000 km wide. There is also a co-orbital ring with the satellite Galatea (Porco et al. 1995).

Several papers have analysed the origin of the rings of Neptune (Colwell and Esposito 1992, 1993) and the history of the inner small satellites (Banfield and Murray 1992; Zhang and Hamilton 2008). It is also worth to analyse the system nowadays and the connection between the satellites, specially the satellites close to the ring system.

The goal of this work is to analyse the region encompassing the orbits of the small satellites and the ring system of Neptune, as well as the interaction among the satellites and the ring particles. The paper is divided into 4 sections. In Sect. 2 we briefly describe the frequency map analysis (FMA) technique applied for the satellites region and the results regarding the diffusion maps. In Sect. 3 we analyse perturbative forces, solar radiation force and plasma drag, acting in the ring particles and the rôle of each satellite in production ring material. In the last section we discuss our results.

D.M. Gaslac Gallardo
daniel.gaslac-gallardo@unesp.br

¹ Grupo de Dinâmica Orbital & Planetologia, São Paulo State University-UNESP, Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333, Guaratinguetá, SP, 12516-410, Brazil

² Institute of Astronomy and Astrophysics, Academia Sinica, Taipei 10617, Taiwan

2 Satellites' region

In this section we analyse the region encompassing the orbits of the small satellites and the rings through the FMA technique. The FMA is useful in identifying chaotic regions in dynamical systems with arbitrary degrees of freedom. FMA has been successfully applied for several dynamical systems (Laskar 1990, 1993; Nesvorný and Morbidelli 1998; Robutel and Laskar 2001; Papaphilippou and Laskar 1998).

Following Munõz-Gutiérrez and Giulatti Winter (2017) we construct diffusion maps by performing a FMA of the quantity $z'(t) = a(t) \exp(i\lambda)$ for each test particle in a grid of initial conditions covering the Neptune's satellites and rings region. We applied the frequency modified Fourier transform (FMFT) algorithm (Šidlichovský and Nesvorný 1997) over $z'(t)$ on the adjacent time intervals $[0, T]$ and $[T, 2T]$, where T corresponds to half of the total integration time. We compare the main frequencies ν_1 and ν_2 from each time interval in order to calculate the diffusion parameter D , defined following Robutel and Laskar (2001), Correia et al. (2005) as

$$D = \frac{|\nu_1 - \nu_2|}{T},$$

The D parameter gives a measure of the stability of the orbit of each particle, since the value of $|\nu_1 - \nu_2|$ will be large for those particles in unstable orbits, whereas if this difference is small the particle will be in a stable orbit. The value of D is proportional to the value of $|\nu_1 - \nu_2|$. To construct the diffusion maps, the value of $\log D$ can be plotted

in a diagram $a \times e$, in colour scale, for each initial condition of the particle.

We also calculated the diffusion time-scale (t_D) which is an estimation of the time required for a diffusion of the orbit of the particle in the radial direction. It can be given by $t_D = (DP)^{-1}$, where P is the period of the orbit of the particle.

The numerical integration was carried out through the Mercury package (Chambers 1999) using the Burlish Stör integrator. The dynamical system is formed by Neptune, and its gravity coefficients J_2 and J_4 , the satellites Naiad, Thalassa, Despina, Galatea, Larissa, Hippocamp, Proteus and Triton and a sample of thousands of massless particles. Table 1 gives the physical parameters of Neptune: mass (M_N), radius (R_N), and the gravity coefficients J_2 and J_4 . Table 2 gives the physical parameters of the eight satellites. All the simulations were performed at the Saturn Cluster of the Group of Planetology and Orbital Dynamics at UNESP. The initial positions and velocities of each satellite are given in Table 4. These values were taken from the Horizons website for the Julian Day 2457785.5, which corresponds to the date February 1, 2017.

In order to eliminate the short periodic variations due to the gravity coefficients of Neptune we transform the positions and velocities of the satellites into the geometric elements (Renner and Sicardy 2006). The geometric elements given in Table 5 are the semimajor axis a ($\times D_{AR}$), where D_{AR} is the semimajor axis of the Adams ring ($D_{AR} = 62932.7$ km (Table 3)), the eccentricity e , the inclination I in degrees, and the angles ϖ , Ω and λ are the longitude of the pericentre, the longitude of the ascending node and the mean longitude, respectively. The parameters of the ring system, semimajor axis in km, width (W) in km and optical depth, are described in Table 3. All other orbital elements of the rings, i.e. e , I , ϖ , Ω and λ were taken as zero.

In order to produce the diffusion maps we performed numerical integrations of the system for a total time of 10^4 orbital periods of the most external satellite. In the range from $0.6004D_{AR}$ to $1.29D_{AR}$ the most external satellite is Larissa, therefore the numerical simulation lasted about 18 years. From $1.3D_{AR}$ to $2.2009D_{AR}$ the most external

Table 1 Parameters of Neptune. Extracted from Jacobson (2009)

Parameter	
GM (km ³ s ⁻²)	6835099.502439672 ± 10
M_N ($\times 10^{24}$)	102.41 ± 0.01
R_N (km)	25225
J_2 ($\times 10^{-6}$)	3408.428530717952 ± 4.5
J_4 ($\times 10^{-6}$)	−33.398917590066 ± 2.9

Table 2 Parameters of the satellites

Body	GM (km ³ /s ²)	Mean Radius (km)	Density (g/cm ³)	Reference
Naiad	0.013	33 ± 3	1.3	Karkoschka (2003)
Thalassa	0.025	41 ± 3	1.3	Karkoschka (2003)
Despina	0.14	75 ± 3	1.3	Karkoschka (2003)
Galatea	0.25	88 ± 4	1.3	Karkoschka (2003)
Larissa	0.33	97 ± 3	1.3	Karkoschka (2003)
Hippocamp	0.0003	17.4 ± 2	1.3	Showalter et al. (2013, 2019)
Proteus	3.36	210 ± 7	1.3	Karkoschka (2003)
Triton	1427.598 ± 1.9	1353.4 ± 0.9	2.059 ± 0.005	Jacobson (2009), Thomas (2000)

satellite is Proteus, therefore the duration of the numerical integration was about 35 years.

A sample of test particles were distributed in a rectangular diagram, $a \times e$. The initial values were adopted as follows: (i) the semimajor axis a was taken in the range $0.6004D_{AR}$ to $2.2009D_{AR}$, with a resolution $\Delta a = 3 \times 10^{-4}$, (ii) $0 \leq e \leq 0.04$, with $\Delta e = 4 \times 10^{-3}$, (iii) the

inclination I , longitude of the pericentre ϖ , longitude of the ascending node Ω and mean longitude λ were assumed to be zero.

The diffusion maps were generated for the region encompassing the orbits of the satellites Naiad to Proteus. The position of each satellite is identified by a black dot. In the following figures we describe each region in details.

Figure 1 shows the region where the Galle ring and Naiad are located. A coloured rectangle was plotted in the centre of each initial value of a and e . White rectangles indicate that the particle collided or was ejected from the system. The location and ratios of mean motion resonances (MMRs) with Naiad are indicated with black dashed lines and with labels at the top of the figure. The solid black curves correspond to the collision curves. The equations defining such curves are $a_s(1 + e_s) = a(1 - e)$ if $a \geq a_s$ and $a_s(1 - e_s) = a(1 + e)$ when $a \leq a_s$, where a , e , a_s , e_s are the semimajor axis and eccentricity of the particle and the satellite, respectively. The values of the semimajor axis and eccentricity of the satellites were obtained from Table 5. Particles entering this re-

Table 3 Parameters of Neptune's rings. Extracted from De Pater and Lissauer (2015), De Pater et al. (2019)

Rings	Location (km)	W (km)	Optical depth
Galle	42000	~2000	$\sim 10^{-4}$
Le Verrier	53200	~100	3×10^{-3}
Lassell	55200	~4000	$\sim 10^{-4}$
Arago	57200	~100	?
Galatea co-orbital	61953	~50	?
Adams	62933	~15	$\sim 3 \times 10^{-3}$
Adams arcs	62933	~10	$\sim 10^{-1}$

Table 4 Positions (x , y , z) and velocities (v_x , v_y , v_z) of the eight satellites in Neptune inner and Triton reference system (International Celestial Reference Frame—ICRF). The epoch for the state vectors is February 1, 2017 TDB. These values were extracted from the site web HORIZONS^a

Satellites	Position (km)	Velocity (km/day)
Naiad	-4.861598101194755E+03	-1.022607376451960E+06
	4.792192785052824E+04	-1.007473952748110E+05
	-2.513901855087704E+03	5.737149709031385E+04
Thalassa	-4.536127084395342E+04	4.281143792543722E+05
	-2.123161142809179E+04	-9.145989649730624E+05
	-6.882101766768756E+00	-1.064699239230846E+04
Despina	3.691546376852450E+04	7.013763660435721E+05
	-3.735597748047257E+04	6.933922389982601E+05
	-4.305177328186073E+02	5.299076528200922E+03
Galatea	-6.092150479333453E+04	1.639911934009283E+05
	-1.118656310246041E+04	-8.931195696477976E+05
	-1.351794468076787E+01	-8.423057548930225E+03
Larissa	3.220023154660776E+04	-7.497834172900536E+05
	6.607288323931834E+04	3.643338200205931E+05
	7.839652855768873E+02	7.040661389542341E+03
Hippocamp	1.048292427174439E+05	6.050417340226601E+04
	-9.118392454374658E+03	6.939273288189896E+05
	-4.486626166000306E+02	1.032242074417382E+04
Proteus	7.244449534921265E+04	-5.191391052146224E+05
	9.268331408207947E+04	4.052542585486157E+05
	1.474307246998542E+03	8.462041124334502E+03
Triton	-3.384649833000187E+05	1.122533770419439E+05
	9.055438292073048E+04	3.353923148048871E+05
	5.562943106087373E+04	1.370100134831567E+05

^a<https://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>

Fig. 1 Diffusion map for Naiad region. Galle ring is located from $0.651D_{AR}$ to $0.683D_{AR}$. The width of the ring can be indicated in the figure as a horizontal line. Dashed black lines indicate the location of the MMRs with Naiad. Blue colours correspond to stable regions, while redder colours denote unstable regions

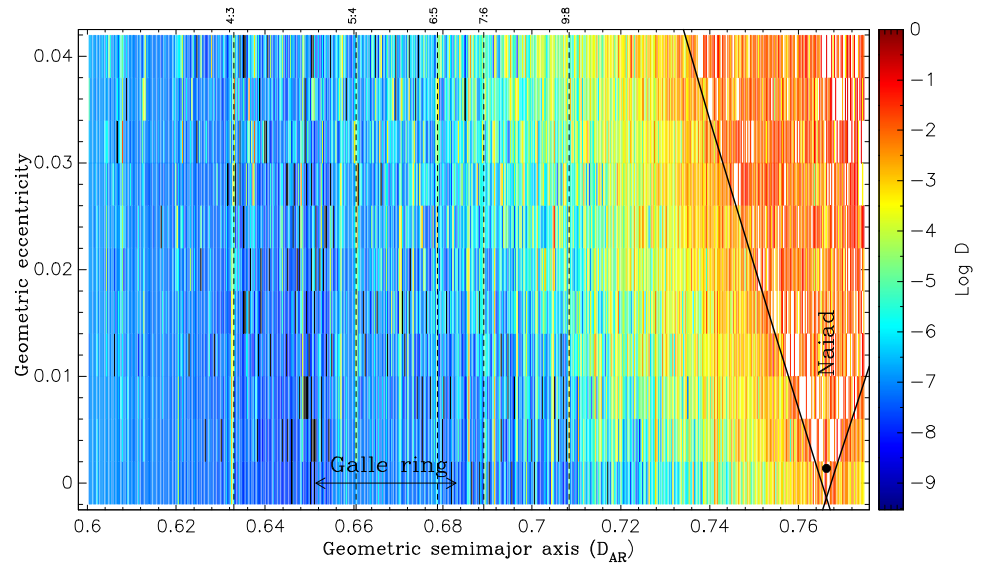
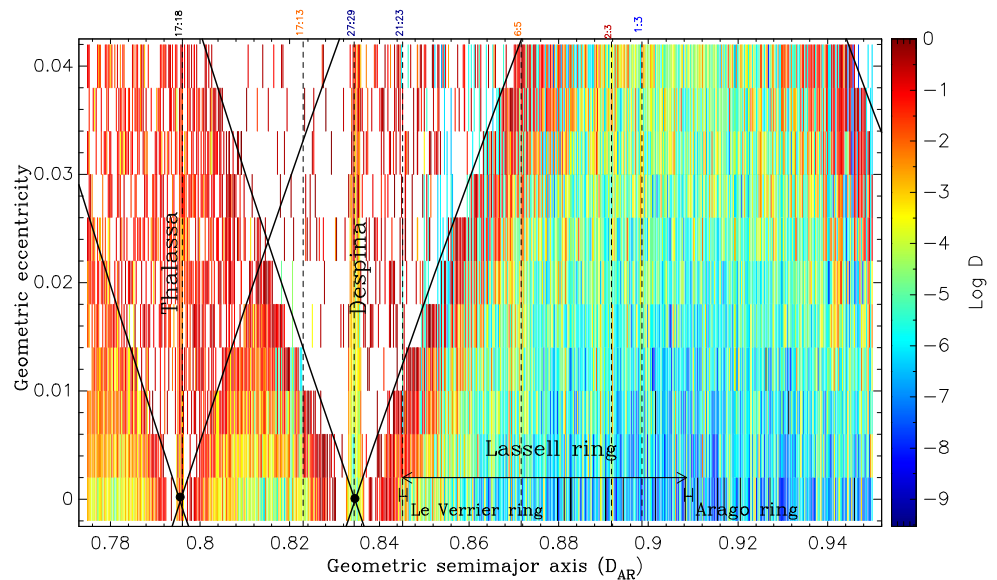


Table 5 Geometric elements of the inner satellites of Neptune system. These values were extracted from Table 4

Satellite	$a(D_{AR})$	e	I (°)	ϖ (°)	Ω (°)	λ (°)
Naiad	0.7662936974	0.0028933904	4.3629736556	188.2828786823	138.9038344642	96.0416928089
Thalassa	0.7955775163	0.0003268493	0.6033164215	20.7223081675	24.3345566865	205.0851889228
Despina	0.8345261894	0.0002964914	0.5612815661	50.2566688896	11.4590451697	314.6928820767
Galatea	0.9842950420	0.0000704953	0.5311472156	182.0518196399	9.0559635089	190.4038414171
Larissa	1.1685233905	0.0010692628	0.7796604322	129.5811402013	12.4127449149	64.1321648913
Hippocamp	1.6727265144	0.0004180706	0.8832101088	344.0241374017	11.0844491331	355.0179103288
Proteus	1.8691460666	0.0003309937	1.0283412166	165.5275467689	7.7072669384	52.0269988864

Fig. 2 Diffusion map for Thalassa and Despina regions. Despina cleared the unstable region. The MMRs with Naiad (in black colour), Thalassa (in dark blue), Galatea (in orange colour) and Larissa (in red colour) are indicated at the top of the figure



gion will cross the orbit of the satellite and will be likely ejected or will collide with the satellite. Most of the particles between these curves will collide with the satellite before the end of the numerical simulation. Since Naiad is a

small satellite, it will take longer time for clearing the region between these two curves. Galle ring is located between $0.651D_{AR}$ and $0.683D_{AR}$, in a stable region for almost any value of e .

Fig. 3 Diffusion map for Galatea region. Two rings, the co-orbital ring of Galatea and the Adams ring, are located in this region

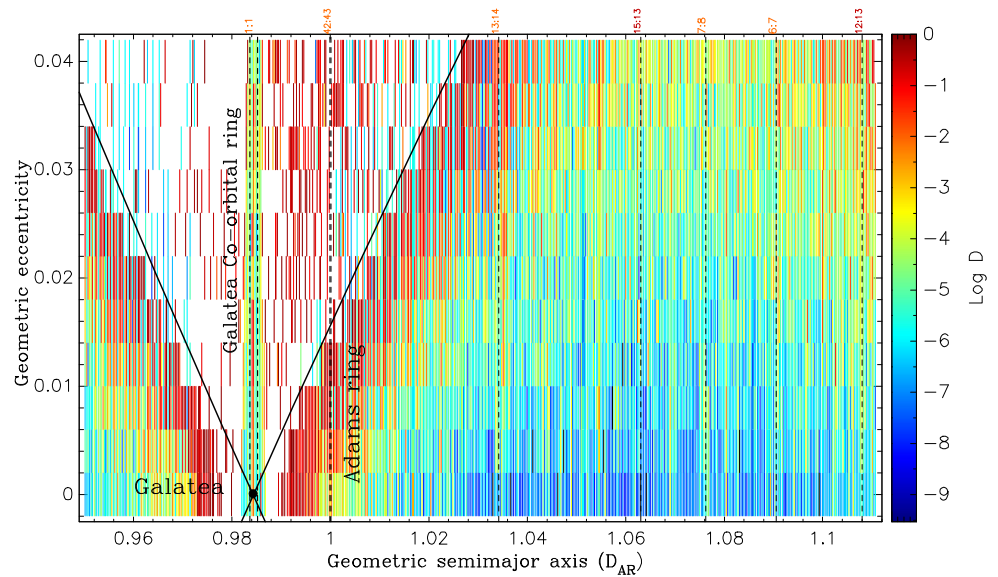
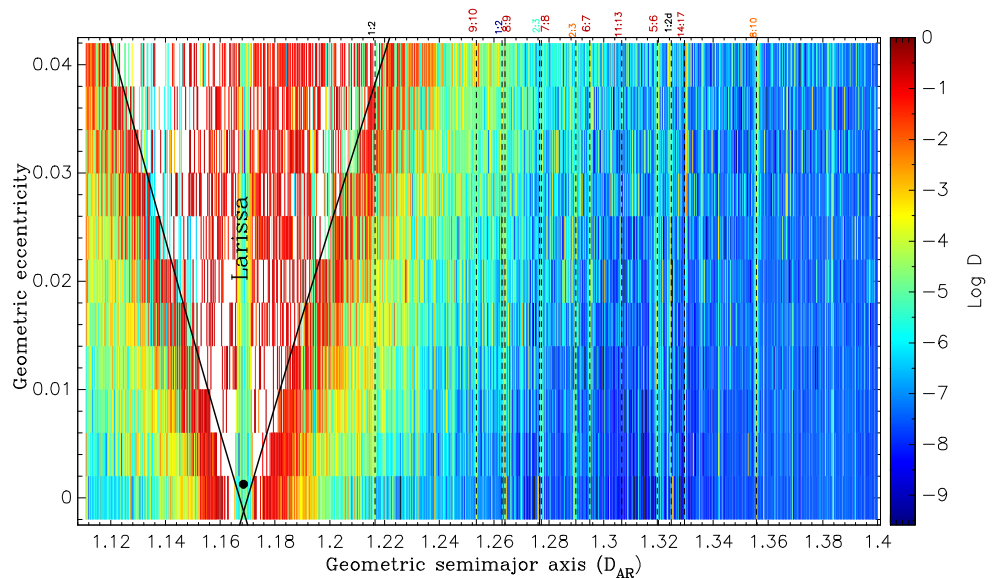


Fig. 4 Diffusion map for Larissa region. A stable region is located at $1.26D_{AR}$ – $1.4D_{AR}$

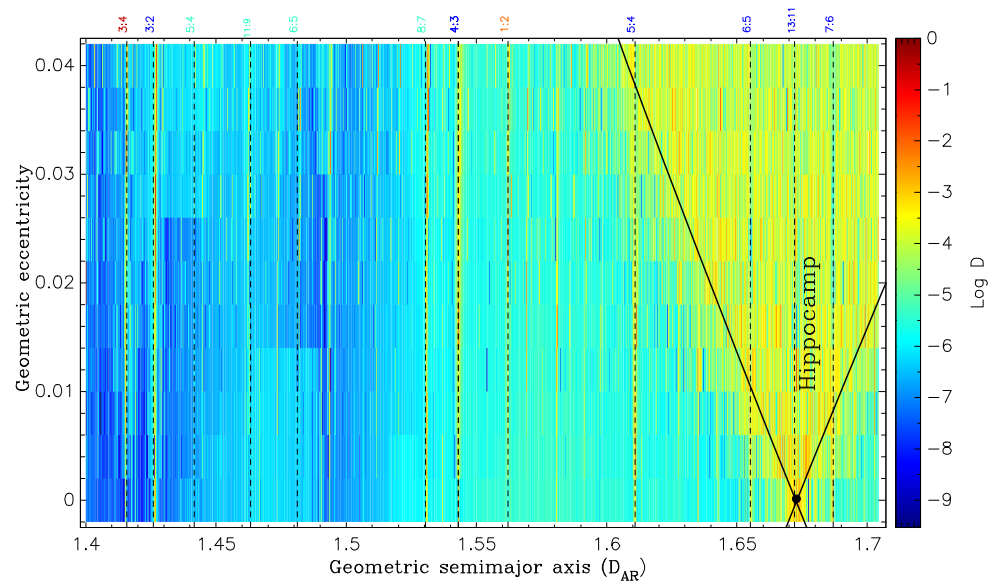


Thalassa and Despina cleared up the regions between the black curves in a short period of time (Fig. 2). Most of the region between these two satellites is unstable. Despina can hold a coorbital region for values of e smaller than 0.01 (blue rectangles). The MMRs ratios with Naiad (in black colour), Thalassa (in dark blue), Galatea (in orange colour) and Larissa (in red colour) are indicated in the top of the figure. Thalassa and Larissa are close to the 17:18 MMR and Despina and Thalassa are close to the 27:29 MMR. The inner edge of the Lassell ring ($0.845D_{AR}$) is located in an unstable region overlapping the outer edge ($0.846D_{AR}$) of the Le Verrier ring. The same overlap occurs between the outer edge of the Lassell ring ($0.908D_{AR}$) and the inner edge of the Arago ring ($0.908D_{AR}$).

Figure 3 shows the diffusion map for the region surrounding the satellite Galatea, its co-orbital ring, Adams ring and its arcs. The Adams ring is located at $1D_{AR}$. For small values of e the ring particles are in a stable region. The location of the coorbital ring and Adams ring are shown in black dashed lines. The MMRs are shown at the top of the figure, six MMRs with Galatea (in orange colour) and two MMRs with the satellite Larissa (in red colour). As can be seen the Adams ring is close to the 42:43 MMR with Galatea, as proposed by the confinement mechanism model.

Larissa region is stable from $1.26D_{AR}$ – $1.4D_{AR}$ (Fig. 4). The satellite clears the region between the diagonal black curves as expected. MMR's with Naiad (in black colour), Larissa (in red colour), Hippocamp (in green colour),

Fig. 5 Diffusion map for Hippocamp region. Due to the small effects of the satellite, this region is stable. Hippocamp can be in a 13:11 MMR with the satellite Proteus



Galatea (in orange colour) and Despina (1:2d) can be seen in the top of the figure.

Hippocamp is a very small satellite recently discovered by Showalter et al. (2019). The region surrounding this satellite is stable. Several first and second orders MMR with Proteus, Hippocamp and Galatea can be seen in the top of Fig. 5, one of this resonance is between Hippocamp and Proteus, 13:11 MMR. All the MMR's shown in Fig. 6 is with the satellite Proteus.

Figure 7 shows the diffusion time-scale map for all the region. An unstable region surrounds the satellite Proteus, the largest one. The diffusion time is about 10^2 years. A large stable region can be seen between the orbits of the satellites Larissa and Hippocamp. The rings are also in stable regions (Fig. 8), taking into account only the gravitational effects of the satellites. No dissipative forces were included in the system up to now.

Figure 8a shows the diffusion time-scale (t_D) for the Galle, Le Verrier and Lassell rings for different values of the eccentricity. The average t_D is relevant for the rings with large width. In fact it is relevant for the Lassell ring since it is located in different values of $\log D$ (Fig. 2). Galle ring is in a stable orbit with diffusion time of 10^{11} years, while the Le Verrier ring has an average diffusion time dependent on the eccentricity. This ring has a very short lifetime for values of $e = 0.012$. The Lassell ring has t_D about 10^9 years. Figure 8b shows the diffusion time-scale for the Arago, Galatea co-orbital and Adams rings. Arago ring has a diffusion time from 10^8 to 10^{11} years depending on the eccentricity, while the Adams ring particles can survive up to $e \sim 0.012$, after this value of e the ring particle enters the chaotic zone caused by the effects of Galatea. Galatea co-orbital ring can survive up to about 10^5 years.

3 Ring system under perturbative forces

Regarding the dynamics of Neptune's rings we showed (Sect. 2) that the rings are located in stable positions, some of them are stable only for small values of e . However since these rings are composed of very tiny particles, these particles suffer the effects of dissipative forces, such as the solar radiation force. Figure 9 shows the strength of the force due to the oblateness of Neptune (a_{oblat}), the solar radiation force (a_{SRF}) and the gravitational effects of the satellite Triton (a_T) on a $1 \mu\text{m}$ sized particle. These equations are given by (Murray and Dermott 1999; Mignard 1984):

$$a_{\text{oblat}} = \frac{3GM_N J_2 R_N^2}{a^4}$$

$$a_{\text{SRF}} = \frac{3\Phi Q_{\text{pr}}}{4c\rho r}$$

$$a_T = \frac{Gm_T}{(a - a_T)}$$

where Φ is the solar flux, Q_{pr} is a constant taken as 1 (Mignard 1984), c is the speed of light, ρ is the density of the particle (assumed to be 1 g/cm^3), r is the radius of the particle, m_T and a_T are the mass and semimajor axis of Triton, respectively.

As can be seen in Fig. 9 the solar radiation force produces less effects on the particles compared to the effects of J_2 and the gravitational effects of Triton.

In order to analyse the effects of this dissipative force a sample of numerical simulations of the ring particles under the effects of J_2 and J_4 of Neptune and all the eight satellites was carried out. Figure 10 shows the time variation of the eccentricity of a representative particle located in each ring, Galle, Le Verrier, Lassell, Arago and Adams rings.

Fig. 6 Diffusion map for Proteus region. All the MMRs shown in Fig. 6 are related to the satellite Proteus

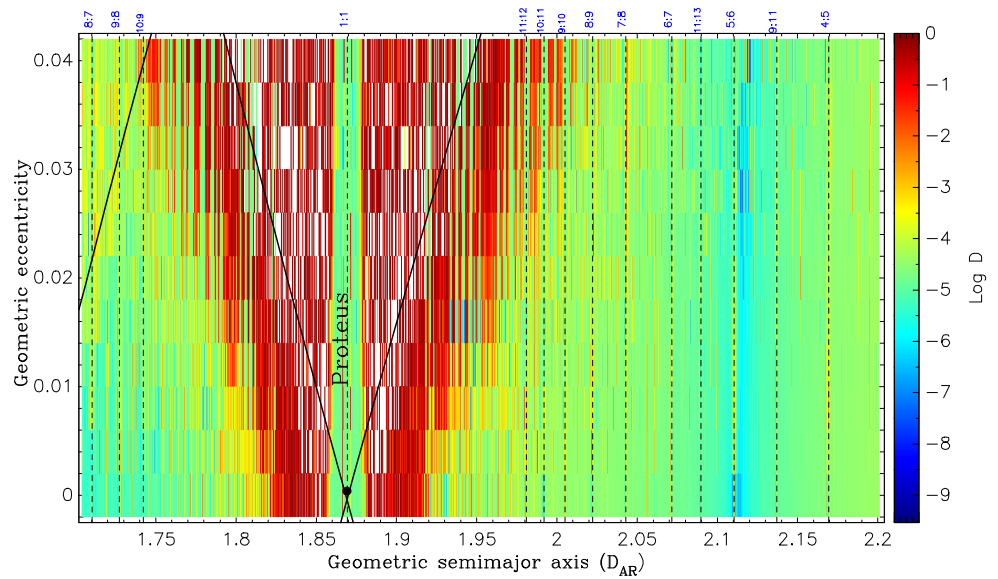


Fig. 7 Diffusion time-scale for the region. The satellites are indicated as black dots

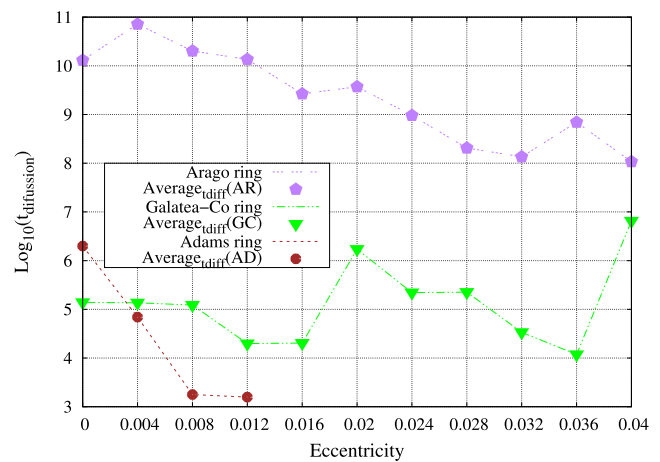
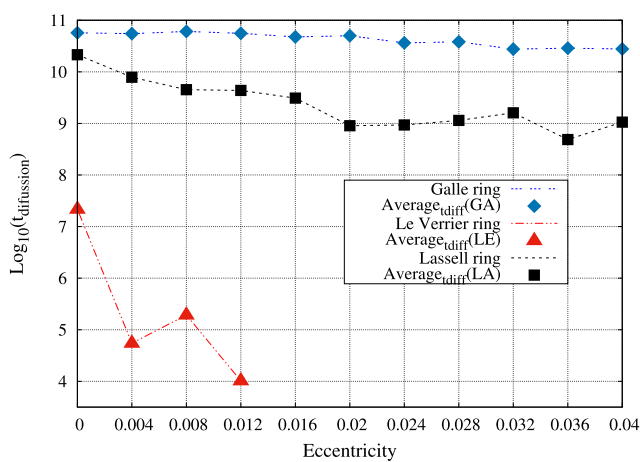
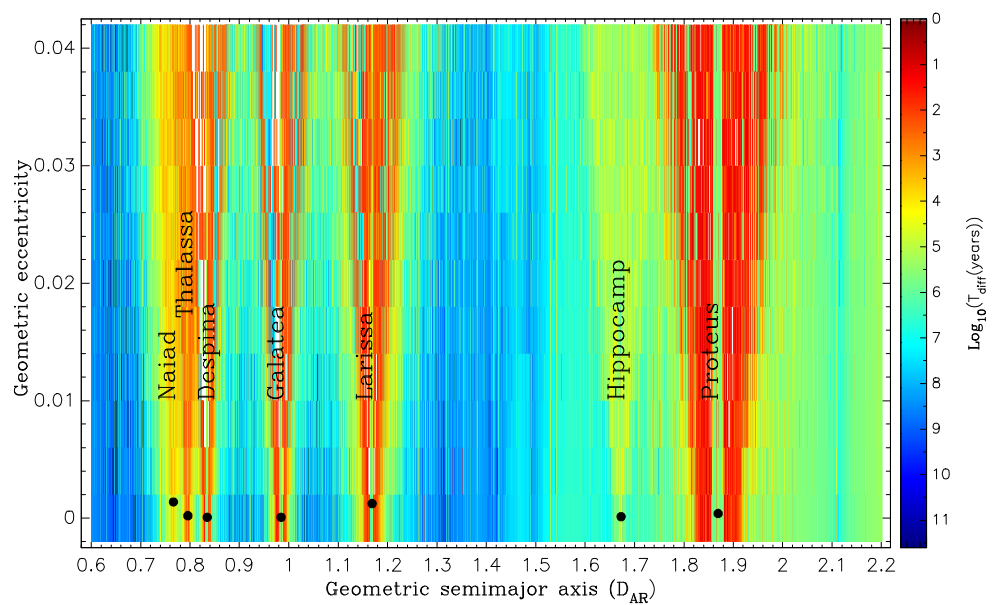


Fig. 8 Diffusion time-scale of the rings: (a) Galle, Le Verrier and Lassell rings and (b) Arago, Galatea co-orbital and Adams rings

The eccentricity of a representative 1 μm sized particle increases due to the effects of the solar radiation force. However this increase is small (Fig. 10). All the eccentricities remain of order 10^{-3} . There are two plots related to the Adams ring, the plot labelled Adams-LER 42:43 means that the ring particle is located in the resonance with the satellite Galatea. The confinement due to this resonance reduces the increase in the eccentricity of the ring particle. Adams ring and its arcs are under investigation by Giuliani Winter et al. (2019).

Due to the increase in the eccentricity, the ring particles can alter their radial excursions, but despite of that they will not cross the orbits of any satellite. The edges of Le Verrier, Lassel and Arago rings will have the overlap increased.

Concerning the co-orbital ring to Galatea our results showed that although all the small particles remained az-

imuthally confined (no collision with Galatea was detected), the smaller particle (1 μm in radius) performs radial oscillations of about 900 km, while the oscillation of a particle of 10 μm in radius is only ~ 120 km. These radial excursions do not cross the inner edge of the Adams ring. Larger particles (30 μm , 50 μm and 100 μm in radius), as expected, stay close to the co-orbital region. In 10^5 years the semimajor axis of the smaller particle decreases up to 7000 km, crossing the Arago ring and the outer edge of the Lassel ring (57 200 km).

The timescale for decay of the tiny particles caused by the Poynting-Robertson component gives the time each ring will cross the orbit of the satellite and therefore its lifetime. The Poynting-Robertson component of the solar radiation force provokes a secular decrease in the semimajor axis of the particle and the timescale (τ_{pr}) can be given by (Mignard 1984)

$$\tau_{\text{pr}} \sim 10^6 r$$

Galle 1 μm sized ring particles will collide with Neptune in 5×10^5 years while larger particles (10 μm in radius) will take 5×10^6 years to reach Neptune. Le Verrier, Lassel, Arago and Adams rings have similar lifetimes, small particles (1 μm in radius) will reach the orbit of a given satellite in 10^4 years and larger particles (10 μm in radius) in 10^5 years. These values are given in Table 6.

Plasma drag can also reduce the lifetime of the ring particles, however, we did not include these force due to few information on the Neptune plasmasphere. The azimuthal force caused by the plasmasphere's ions in the ring particles

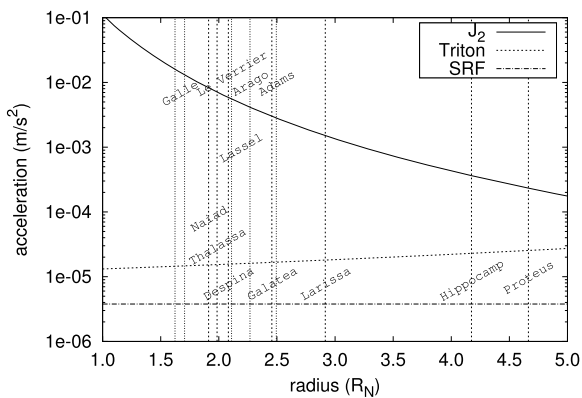


Fig. 9 Strength of the forces in Neptune ring system as a function of the distance. The locations of the satellites and the rings are displayed as vertical lines

Fig. 10 Time variation of the eccentricity of a representative particle of each ring. The name of the ring is shown in the top of each figure. Each plot has two curves, without and with the effects of the solar radiation pressure. The effects of this dissipative force is responsible for the small increase in the eccentricity of the 1 μm sized particle

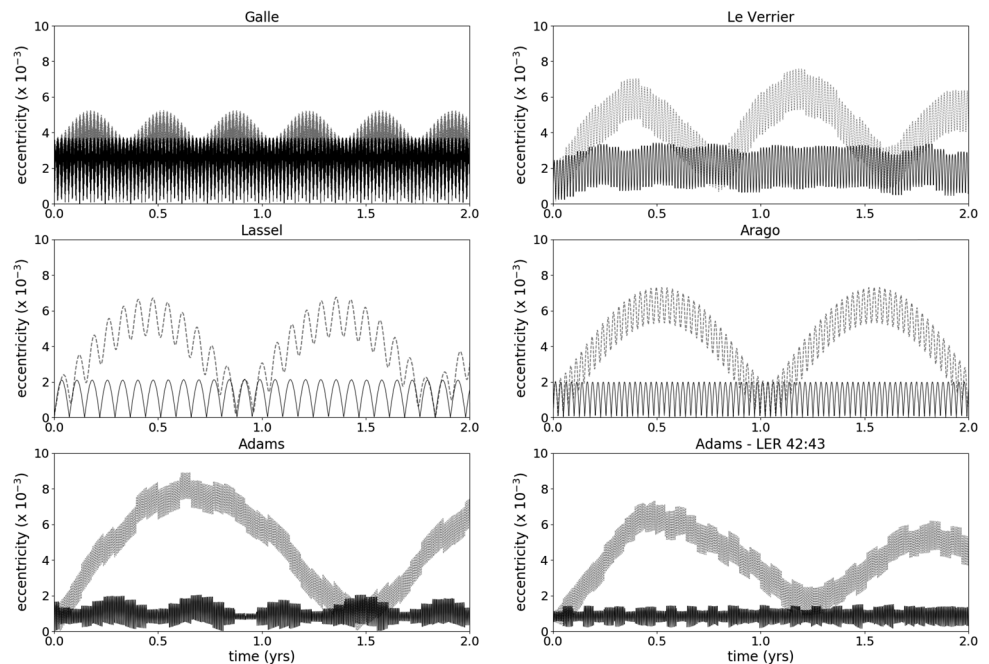


Table 6 Lifetime of the rings particles (1 μm and 10 μm in radius) due to Poynting-Robertson effects

Ring	t (10^4 years) – 1 μm	t (10^6 years) – 10 μm	Cross the orbit of
Galle	50	5	collide with Neptune
Le Verrier	1.1	0.11	Despina
Lassel	4.8	0.48	Despina
Arago	8.5	0.85	Despina
Adams	1.6	0.16	Galatea

Table 7 Lifetime of the rings particles (1 μm and 10 μm in radius) due to plasma drag effects

Ring	t (years) – 1 μm	t (years) – 10 μm	Cross the orbit of
Galle	400	4000	Naiad
Le Verrier	800	8000	Galatea
Lassel	700	7000	Galatea
Arago	600	6000	Galatea
Adams	1400	14000	Larissa

is given by (Hedman et al. 2013)

$$F_{\text{PD}} = \pi a^2 (n - n_N)^2 r^2 \rho_i$$

where n_N is Neptune's rotation rate ($n_N \sim 10.9$ rad/day) and ρ_i is the plasma ion mass density. The plasma drag effect increases the semimajor axis of the particles in the rings region. The estimated time variation of the semimajor axis is

$$\frac{da}{dt} \sim 10^{-2} \left(\frac{\rho_i}{1 \text{ amu/cm}^3} \right) \left(\frac{1 \mu\text{m}}{r} \right) \text{ km/year}$$

A very rough estimative was performed by assuming the plasmasphere as composed primarily of H^+ (1 amu) and number density as $10^3/\text{cm}^3$ (Lyons 1995). We obtained that the semimajor axis of 1 μm sized particles increases of order of 10 km per year. The time to the ring particles cross the orbit of the outer satellite is given in Table 7.

We can also analyse the rôle of each satellite in producing ring material. A satellite can produce material due to impacts of interplanetary dust particles (IDPs) onto its surface. The material ejected can feed a tenuous ring. By assuming the impactors mass flux at Neptune's region as $F_{\text{imp}}^\infty = 10^{-17} \text{ kg/(m}^2\text{s)}$ and the mean velocity of the impactors as $v_{\text{imp}}^\infty = 3.0 \text{ km/s}$ (Poppe 2016), we determined the mass flux F_{imp} and velocity v_{imp} of impactors enhanced by to the gravitational focusing of the planet through the algorithm described in Sfair and Giuliani Winter 2012 and Madeira et al. (2018). The mass production rate by an icy moon with radius R is (Koschny and Grün 2001; Krivov et al. 2003)

$$M^+ = 1.2 \times 10^{-6} R^2 F_{\text{imp}} v_{\text{imp}}^{2.46}$$

Figure 11 shows the mass production rate of the neptunian inner satellites Naiad, Thalassa, Despina, Galatea,

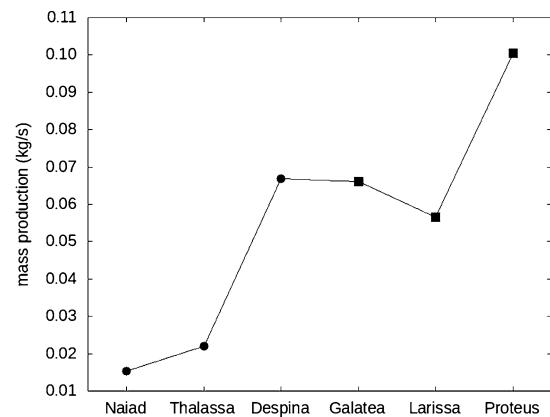


Fig. 11 Mass production rate of the neptunian inner satellites

Larissa and Proteus. The squares refer to the satellites whose escape velocity is higher than the velocity of the dust particles, while the circles are for the satellites whose escape velocity is smaller than the ejecta velocity. Therefore Galatea, Larissa and Proteus can produce dust particles, although most of the grains can not leave the satellites surface. The result regarding the satellite Galatea is derived from Giuliani Winter et al. (2019).

A crude estimative can be made by comparing the mass of the ring and the mass production of a satellite immersed on it. The mass of Neptune ring can be calculated using the algorithm presented in Sfair and Giuliani Winter 2012. Assuming $\tau = 3.3 \times 10^{-3}$ for the Le Verrier and Arago rings their masses are about $5 \times 10^8 \text{ kg}$ and $4.5 \times 10^8 \text{ kg}$, respectively. Lassel ring mass is about $6 \times 10^8 \text{ kg}$. Naiad, Thalassa and Despina can produce dust particles and populate these rings in less than 1000 years. However, these satellites are not immersed in these rings and part of these particles will be lost until they can reach the ring. Nevertheless Naiad, Thalassa and Despina may contribute to the ring population.

4 Discussion

The diffusion maps give an overview of the system populated by small satellites and ring particles of Neptune. The largest unstable region is surrounding Proteus, the large satellite. Between the satellites Larissa and Hippocamp is located the largest stable region. Several MMRs of first and second orders were identified, as examples, Thalassa and Larissa are close to the 17:18 MMR, Despina and Thalassa are close to 27:29 MMR and the recent discovery satellite Hippocamp is in the 13:11 MMR with Proteus.

When only gravitational force is present in the system most of the rings are located in stable regions. The innermost Galle ring is further from the satellites and is located in a stable region, while Lassel ring ($W = 4000$ km) has its inner border stable depending on its eccentricity. The same occurs to the Le Verrier ring, this ring can survive the perturbations caused by Despina only if its eccentricity is smaller than 0.012. Adams ring is also stable for values of $e < 0.012$.

Solar radiation pressure is important for the ring particles of Jupiter, Saturn, Uranus and even Pluto. In Neptune system this dissipative force causes only very small variations in the eccentricities of the ring particles. The eccentricities of the ring particles are of order 10^{-3} due to the gravitational perturbations of the satellites and stay at this same order even when the solar radiation force is taken into account. The particles do not cross the orbits of the satellites when these new values of eccentricity are assumed.

The lifetime of the rings particles is probably dictated by the decreasing in the semimajor axis due to secular effects of the Poynting-Robertson component of the solar radiation force. Although the lifetime caused by the perturbations of the nearby satellites is close to this value (Fig. 8). The lifetime of the rings composed by $1 \mu\text{m}$ sized particles is about 10^4 years and about 10^5 when the particles are larger ($10 \mu\text{m}$ in radius). The plasma drag may be an important dissipative force but we need further information to constrain its effects in the ring particles.

The satellites Naiad, Thalassa and Despina can help replenish the lost particles of Le Verrier, Arago and Lassel rings. The velocities of the ejecta particles are larger than the escape velocities and the ejecta particles can reach the rings. However, the satellites Galatea (Giuliatti Winter et al. 2019), Larissa and Proteus also produce ejecta material, but they do not have enough velocity to escape from the satellite gravity.

A paper by Brozović et al. (2019) was published during the revision of this work. Brozović et al. (2019) derived orbital fits for the small inner satellites of Neptune based on data obtained by telescopes, Voyager 2 and the Hubble Space Telescope. They found that the satellites Naiad and Thalassa are in a 73:69 inclination resonance, while Hippocamp and Proteus are in a 13:11 near mean motion resonance.

A detailed analysis of these probably resonances between the satellites and the satellites and ring particles are under investigation.

Acknowledgements The authors thank Fapesp (2016/24488-0, 2016/24561-0 and 2018/23568-6) and CNPq (309714/ 2016-8) for the financial support. This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior—Brasil (CAPES)—Finance Code 001.

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

References

- Banfield, D., Murray, N.: *Icarus* **99**(2), 390 (1992)
- Brozović, M., Showalter, M.R., Jacobson, R.A., French, R.S., Lissauer, J.J., de Pater, I.: *Icarus* **338**, 113462 (2019)
- Chambers, J.E.: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **304**(4), 793 (1999)
- Colwell, J.E., Esposito, L.W.: *J. Geophys. Res., Planets* **97**(E6), 10227 (1992)
- Colwell, J.E., Esposito, L.W.: *J. Geophys. Res., Planets* **98**(E4), 7387 (1993)
- Correia, A., Udry, S., Mayor, M., Laskar, J., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., Santos, N.: *Astron. Astrophys.* **440**(2), 751 (2005)
- De Pater, I., Lissauer, J.J.: *Planetary Sciences*, vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge (2015)
- De Pater, I., Renner, S., Showalter, M.R., Sicardy, B.: *arXiv preprint* (2019). [arXiv:1906.11728](https://arxiv.org/abs/1906.11728)
- Giuliatti Winter, S., Madeira, G., Sfair, R.: In preparation (2019)
- Hedman, M.M., Burns, J.A., Hamilton, D.P., Showalter, M.R.: *Icarus* **233**(1), 252 (2013)
- Jacobson, R.A.: *Astron. J.* **137**(5), 4322 (2009)
- Karkoschka, E.: *Icarus* **162**(2), 400 (2003)
- Koschny, D., Grün, E.: *Icarus* **154**(2), 391 (2001)
- Krivov, A.V., Sremčević, M., Spahn, F., Dikarev, V.V., Kholshchikov, K.V.: *Planet. Space Sci.* **51**(3), 251 (2003)
- Laskar, J.: *Icarus* **88**(2), 266 (1990)
- Laskar, J.: *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **56**(1–2), 191 (1993)
- Lyons, J.R.: *Science* **267**(5198), 648 (1995)
- Madeira, G., Sfair, R., Mourão, D., Giuliatti Winter, S.: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **475**(4), 5474 (2018)
- Mignard, F.: In: *IAU Colloq. 75: Planetary Rings*, p. 333 (1984)
- Munõz-Gutiérrez, M.A., Giuliatti Winter, S.: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **470**(3), 3750 (2017)
- Murray, C.D., Dermott, S.F.: *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge (1999)
- Nesvorný, D., Morbidelli, A.: *Astron. J.* **116**(6), 3029 (1998)
- Papaphilippou, Y., Laskar, J.: *Astron. Astrophys.* **329**, 451 (1998)
- Poppe, A.R.: *Icarus* **264**, 369 (2016)
- Porco, C., Nicholson, P., Cuzzi, J., Lissauer, J., Esposito, L.: *Neptune and Triton*. University of Arizona Press, Tucson (1995)
- Renner, S., Sicardy, B.: *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **94**(2), 237 (2006)
- Robutel, P., Laskar, J.: *Icarus* **152**(1), 4 (2001)
- Showalter, M., de Pater, I., Lissauer, J., French, R.: *Central Bureau Electronic Telegrams* **3586** (2013)
- Showalter, M., de Pater, I., Lissauer, J., French, R.: *Nature* **566**(7744), 350 (2019)
- Šidlichovský, M., Nesvorný, D.: In: *The Dynamical Behaviour of Our Planetary System*, p. 137. Springer, New York (1997)
- Smith, B.A., Soderblom, L.A., Banfield, D., Basilevsky, A., Beebe, R., Bollinger, K., Boyce, J., Brahic, A., Briggs, G., Brown, R., et al.: *Science* **246**(4936), 1422 (1989)
- Thomas, P.: *Icarus* **148**(2), 587 (2000)
- Zhang, K., Hamilton, D.P.: *Icarus* **193**(1), 267 (2008)