

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU

Marielena Fonseca Tófoli

Solução do Fluxo de Potência Ótimo Reativo com Variáveis Discretas
utilizando um Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de
Correção de Inércia

Bauru

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU

Marielena Fonseca Tófoli

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno

**Solução do Fluxo de Potência Ótimo Reativo com Variáveis Discretas
utilizando um Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de
Correção de Inércia**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Faculdade de Engenharia de Bauru, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"(UNESP), como um dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Bauru

2017

Tófoli, Marielena Fonseca.

Solução do fluxo de potência ótimo reativo com variáveis discretas utilizando um método de pontos interiores/exteriores com estratégia de correção de inércia / Marielena Fonseca Tófoli, 2017
111 f.

Orientador: Leonardo Nepomuceno

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2017

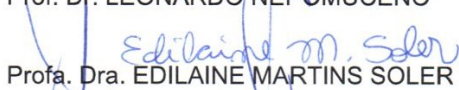
1. Sistemas de Energia. 2. Fluxo de potência ótimo reativo. 3. Método de solução. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MARIELENA FONSECA TÓFOLI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

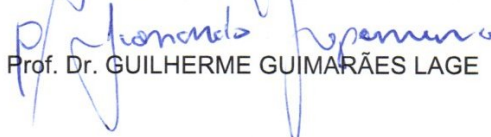
Aos 02 dias do mês de junho do ano de 2017, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB/videoconferência, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Prof. Dr. GUILHERME GUIMARÃES LAGE do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal de São Carlos, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MARIELENA FONSECA TÓFOLI, intitulada **SOLUÇÃO DO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO COM VARIÁVEIS DISCRETAS UTILIZANDO UM MÉTODO DE PONTOS INTERIORES E EXTERIORES COM ESTRATÉGIA DE CORREÇÃO DE INÉRCIA**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: __ APROVADO __ __ __ . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO



Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER



Prof. Dr. GUILHERME GUIMARÃES LAGE

“À minha mãe, Leila, a qual me mostrou o significado do infinito diante de tanto amor.

Ao meu pai, Gerson, o qual hoje é meu céu.”

Agradecimentos

Ao professor Dr. Leonardo Nepomuceno, por acreditar e depositar sua confiança em mim para o desenvolvimento deste trabalho. Pela disponibilidade, paciência e excelente orientação ao me passar ensinamentos. Agradeço a amizade e todos os conselhos, críticas construtivas e palavras de incentivo. Mostrou-me que além de ser um exemplo de profissional, é um exemplo de pessoa, a qual tive a honra de conhecer e trabalhar junto.

À minha mãe, por ser a minha motivação diária e pela sua forma de amor.

Ao meu pai, que em memória, me conforta.

À minha companheira de todos os dias, Karen. Agradeço pelo apoio, respeito, paciência, carinho e pelo seu café.

Aos professores do programa de Pós-Graduação pelos ensinamentos. Em especial, Dr. Antônio Roberto Balbo, Dra. Edilaine Martins Soler e Dra. Edméa Cássia Baptista os quais tive a honra de receber de maneira direta, atenção, ensinamentos e colaborações.

À professora Dra. Edilaine Martins Soler e ao professor Dr. Guilherme Lage, por participarem da banca de avaliação e pelas contribuições científicas.

Aos amigos de laboratório pelos estudos e amizade. Em especial, o Rafael Ramos de Souza, pelo companheirismo no aprendizado e pela implementação computacional base a qual ajudou no desenvolvimento deste trabalho. Augusto César Pereira e Daisy Paes Silva, por todo o companheirismo e momentos de muita risada. Ao Tiago Forti da Silva, pela paciência majestosa em transmitir ensinamentos, companhia, longas conversas e estradas.

Aos amigos, Genildo Carlos Perpétuo Dada e Mário Rodrigues. Agradeço por contarem e aconselharem sobre experiências de vida, pelas palavras mágicas em conversas em longas viagens.

À UNESP pela oportunidade de aprendizado e seus funcionários, em especial à Seção Técnica de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Bauru, pelas informações e presteza.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

“É onde a atenção está que a energia flui e o resultado aparece.”

(T.Harv Eker)

Resumo

O problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) tem como objetivo otimizar um critério associado a potência reativa do sistema elétrico, levando em conta os limites físicos e técnicos-operacionais do mesmo. O problema de FPOR é formulado como um problema de programação não-linear com variáveis contínuas e discretas. Em muitos trabalhos da literatura, as variáveis discretas do problema de FPOR são consideradas como contínuas e a solução obtida é ajustada para o valor discreto mais próximo do conjunto de valores discretos pré-estabelecidos. Tal abordagem descaracteriza a representação real do problema associado ao sistema elétrico, além de resultar em soluções não ótimas ou até mesmo em soluções infactíveis. Este trabalho propõe uma abordagem de solução para tratar as variáveis discretas do problema de FPOR. Utiliza-se uma função penalidade senoidal que penaliza as variáveis discretas quando estas assumem valores que não pertencem ao conjunto discreto pré-estabelecido. A metodologia geral de solução proposta, utiliza métodos de pontos interiores e exteriores em conjunto com o método de penalidade para o tratamento das variáveis discretas. Mostra-se que a função penalidade senoidal introduz dificuldades para a convergência do método de pontos interiores e exteriores para pontos de mínimos. Para a correção deste problema, propõe-se uma estratégia de correção de inércia de modo a garantir a obtenção de mínimos locais do problema penalizado. O método de solução proposto foi implementado em Matlab e aplicado aos sistemas elétricos IEEE 14, 30, 57 e 118 barras. Os resultados obtidos evidenciam a eficiência da abordagem proposta.

Palavras-chave: Fluxo de Potência Ótimo Reativo. Otimização não-linear. Variáveis Discretas. Método de Pontos Interiores e Exteriores. Correção de Inércia.

Abstract

The Reactive Optimal Power Flow (FPOR) has the objective of optimizing a criterion associated with the reactive power of the electric system, taking into account the physical and technical-operational limits of the same. The FPOR problem is formulated as a nonlinear programming problem with continuous and discrete variables. In many works of the literature, the discrete variables of the FPOR problem are considered to be continuous and the solution obtained is adjusted to the nearest discrete value of the set of pre-set discrete values. Such an approach de-characterizes the actual representation of the problem associated with the electrical system, as well as resulting in non-optimal solutions or even infeasible solutions. This work proposes a solution approach to treat the discrete variables of the FPOR problem. A sinusoidal penalty function is used that penalizes the discrete variables when they assume values that do not belong to the pre-established discrete set. The proposed general solution methodology uses interior and exterior point methods in conjunction with the penalty method for the treatment of discrete variables. It is shown that the sinusoidal penalty function introduces difficulties for the convergence of the method to minimum points. In order to correct this problem, a strategy of correction of inertia is proposed in order to guarantee the obtaining of local minimums of the penalized problem. The proposed solution method was implemented in Matlab and applied to IEEE 14, 30, 57 and 118 buses. The results obtained evidenced the efficiency of the proposed approach.

Keywords: Reactive Optimal Power Flow. Nonlinear optimization. Discrete Variables. Interior/Exterior Points Method. Inertia Correction.

Índice

1	Introdução	15
2	O Problema de Fluxo de Potência Ótimo	20
2.1	O Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR)	21
2.1.1	O modelo do problema de FPOR com variáveis contínuas (FPOR) .	22
2.1.2	O modelo do problema de FPOR com variáveis discretas (FPOR-DM)	24
2.2	Descrição detalhada das funções relacionadas aos problemas de FPOR e FPOR-DM	25
2.3	Histórico do problema de FPO	28
3	Métodos de Otimização	39
3.1	O Método Dual-Lagrangiano	39
3.2	Métodos de Barreira Clássica	41
3.2.1	Descrição geral dos métodos	41
3.2.2	Método da Função Barreira Logarítmica Clássica	43
3.3	Método de Reescalamento Não-Linear	45
3.3.1	Descrição geral do método	45
3.3.2	Método da Função Barreira Logarítmica Modificada	49
3.4	Método de Função Penalidade	51
3.4.1	Descrição geral do método	51
3.4.2	Função Penalidade Senoidal	55
4	Método Proposto	58

4.1	Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de Correção de Inércia utilizando uma Função Penalidade para o tratamento das Variáveis Discretas - MPIEECIFP	60
4.1.1	Sistema para determinar as Direções de Busca	63
4.1.2	Estratégia de Correção de Inércia	68
4.1.3	Cálculo das direções	72
4.1.4	Cálculo do comprimento dos passos	77
4.1.5	Cálculo do novo ponto	78
4.1.6	Atualização dos parâmetros de barreira e estimadores de Lagrange .	78
4.1.7	Critério de Parada	79
4.1.8	O Algoritmo	79
5	Testes Numéricos	82
5.1	O sistema IEEE 14 barras	83
5.2	O sistema IEEE 30 barras	84
5.3	O sistema IEEE 57 barras	85
5.4	O sistema IEEE 118 barras	87
5.5	Solução do FPOR considerando todas as variáveis contínuas	89
5.6	Importância da Estratégia de Correção de Inércia	96
5.7	Comparação entre as funções de Barreira Logarítmica Clássica (FBLC) e Barreira Logarítmica Modificada (FBLM) aplicadas no MPIEECIFP para a solução do problema de FPOR-DM discreto	98
6	Conclusões e trabalhos futuros	103
7	Trabalhos decorrentes	106
	Referências	107

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros utilizados na solução dos problemas de FPOR.	89
5.2	Dados dos sistemas utilizados na solução dos problemas de FPOR.	90
5.3	FPOR Contínuo - Sistema IEEE 14 barras	91
5.4	FPOR Contínuo - Sistema IEEE 30 barras	92
5.5	FPOR Contínuo - Sistema IEEE 57 barras	93
5.6	FPOR Contínuo - Sistema IEEE 118 barras	94
5.7	FPOR-DM com e sem correção de inércia – Sistema IEEE 14 barras. . . .	96
5.8	FPOR-DM com e sem correção de inércia – Sistema IEEE 30 barras. . . .	97
5.9	FPOR-DM com e sem correção de inércia – Sistema IEEE 57 barras. . . .	97
5.10	FPOR-DM com e sem correção de inércia – Sistema IEEE 118 barras. . . .	97
5.11	Comparação entre MFBLC e MFBLM para a solução do FPOR-DM – Sistema IEEE 14 barras	99
5.12	Comparação entre MFBLC e MFBLM para a solução do FPOR-DM – Sistema IEEE 30 barras	100
5.14	Comparação entre MFBLC e MFBLM para a solução do FPOR discreto – Sistema IEEE 118 barras	101
5.13	Comparação entre MFBLC e MFBLM para a solução do FPOR-DM – Sistema IEEE 57 barras	102

Lista de Figuras

2.1	Modelo de um transformador ideal regulador em fase. [Lage, 2013]	27
3.1	$\gamma = 5$ para o parâmetro de penalidade. [Soler et al., 2013]	56
3.2	$\gamma = 0.2$ para o parâmetro de penalidade. [Soler et al., 2013]	56
5.1	Sistema Elétrico IEEE de 14 barras. Fonte: [Chistie, 2017].	84
5.2	Sistema Elétrico IEEE de 30 barras. Fonte: [Chistie, 2017].	85
5.3	Sistema Elétrico IEEE de 57 barras. Fonte: [Chistie, 2017].	87
5.4	Sistema Elétrico IEEE de 118 barras. Fonte: [Chistie, 2017].	88
5.5	Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 14 barras (FBLC).	91
5.6	Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 14 barras (FBLM).	91
5.7	Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 30 barras (FBLC).	92
5.8	Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 30 barras (FBLM).	92
5.9	Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 57 barras (função barreira logarítmica clássica).	93
5.10	Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 57 barras (função barreira logarítmica modificada).	94
5.11	Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 118 barras (função barreira logarítmica clássica).	95
5.12	Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 118 barras (função barreira logarítmica modificada).	95

Lista de Abreviaturas

DE	Despacho Econômico
FABLM	Função Auxiliar Barreira Logarítmica Modificada
FBLC	Função Barreira Logarítmica Clássica
FBLM	Função Barreira Logarítmica Modificada
FLC	Função Lagrangiana Clássica
FP	Fluxo de Potência
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
FPOA	Fluxo de Potência Ótimo Ativo
FPOAR	Fluxo de Potência Ótimo Ativo-Reativo
FPOR	Fluxo de Potência Ótimo Reativo
FPOR-DM	Fluxo de Potência Ótimo Reativo Discreto-Misto
GAMS	General Algebraic Modeling System
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
IPOPT	Interior Point OPTimizer
MBC	Método de Barreira Clássica
MBFLM	Método de Barreira Função Logarítmica Modificada
MDL	Método Dual-Lagrangiano
MFLC	Método da Função Lagrangiana Clássica
MPIEECIFP	Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de Correção de Inércia utilizando uma Função Penalidade para o tratamento das Variáveis Discretas
PNLDM	Programação Não Linear Discreto-Misto
SEP	Sistemas Elétricos de Potência

Capítulo 1

Introdução

Os Sistemas Elétricos de Potência (SEP) são sistemas extensos de instalações elétricas compostos basicamente por um conjunto de centrais de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica interligadas magneticamente entre si. O operador do SEP é responsável pelo fornecimento de eletricidade, com qualidade adequada e minimizando o custo e as interrupções [Monticelli, 1983] e [Nepomuceno & Santos, 1997]. Em função desta estrutura complexa, operadores e planejadores do SEP utilizam modelos de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) para análise e otimização do mesmo. O FPO foi proposto por Carpentier, em [Carpentier, 1962], ao incorporar no problema de Despacho Econômico (DE) as equações do Fluxo de Potência (FP) como restrições do problema. Em particular, o problema de FPO tem sido uma ferramenta importante para a determinação de um estado de operação otimizado do SEP. O FPO é modelado como um problema de programação não linear, com variáveis contínuas e discretas e equações e inequações algébricas que representam as restrições de igualdade e desigualdade do problema. Tais restrições representam o sistema elétrico considerando seus limites técnicos-operacionais.

Em muitas aplicações práticas, o FPO tem sido desacoplado nos subproblemas ativo (FPOA) e reativo (FPOR). No subproblema ativo, são tomadas somente as decisões relacionadas à potência ativa, que envolvem fundamentalmente o planejamento da operação energética de SEPs. Já no subproblema reativo, as decisões envolvem o despacho de potência reativa, cujas variáveis de controle são, basicamente, magnitudes de tensão e ge-

radores e condensadores síncronos, *taps* de transformadores em fase, susceptâncias *shunt* dos bancos de capacitores e reatores, etc. Modelos de FPO que integram a parte ativa e reativa são denominados de FPO Ativo-Reativo (FPOAR).

Até meados da década de 90, o setor elétrico era regulado pelo Estado e os subsistemas de geração, transmissão e distribuição eram, em sua grande maioria, de responsabilidade estatal. Entretanto, após a mudança de um modelo regulado pelo estado (verticalizado) para um modelo de competição (desverticalizado), surgiu a possibilidade de competição entre várias empresas responsáveis pela geração de energia elétrica. Essa estrutura competitiva gerou um ambiente de mercado de energia elétrica. No modelo regulado, a otimização de recursos era feita com foco na otimização dos custos totais dos subsistemas de geração. Já no modelo de mercado de eletricidade, a otimização de recursos tem como foco a competição. Para promover a competição, são feitos leilões de eletricidade em que os agentes geradores fornecem lances. O processo de tomada de decisão de geração é feito com base nestes lances (por meio da competição), utilizando modelos de leilão de energia [Pereira, 2015]. Mesmo em ambientes de mercados de eletricidade, os subsistemas de transmissão e distribuição de energia elétrica geralmente permanecem sob regulação, pois estabelecer a competição nestas áreas é uma tarefa complexa.

No que diz respeito ao problema reativo, investigado neste trabalho, o FPOR tem como objetivo a minimização de um critério de otimização associado ao sistema de transmissão (e.g. as perdas na transmissão, perfil de tensão, etc.), sujeito ao atendimento dos limites nas magnitudes de tensão, gerações de potência reativa nas unidades geradoras, e os valores discretos de *taps* de transformadores e susceptâncias *shunt* de bancos de capacitores e reatores de barra. Assim, o FPOR é um problema de otimização não linear, de grande porte, com variáveis discretas e contínuas e pertence à classe de problemas de Programação Não Linear Discreto-Misto (PNLDM). Nos modelos clássicos de FPOR, a natureza discreta dos *taps* de transformadores e das susceptâncias *shunt* é inicialmente desprezada (por meio de relaxação destas restrições), e as soluções contínuas obtidas são aproximadas para o valor discreto mais próximo. Entretanto, recentemente, a natureza discreta destas

variáveis tem sido considerada diretamente no modelo. O modelo de FPOR em que as variáveis discretas são representadas sem aproximações contínuas, é aqui denominado de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Discreto-Misto (FPOR-DM). Os problemas de PNLDM são de difícil resolução devido às não linearidades das funções envolvidas e às variáveis discretas. No problema de FPOR-DM, as variáveis associadas à potência ativa são fixadas e as variáveis associadas à potência reativa são ajustadas de modo a otimizar o critério desejado. Neste trabalho, minimizam-se as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão.

O tratamento das variáveis discretas por meio de relaxações contínuas e posterior arredondamento para os valores discretos mais próximos não representa com precisão a operação de transformadores e bancos de capacitores/reatores. Na prática, estes equipamentos podem ser ajustados apenas por valores discretos (de acordo com as configurações de fabricação destes equipamentos). Assim, abordagens de solução para o problema de FPOR-DM com estratégias para o tratamento das variáveis discretas têm sido investigadas [Soler et al., 2013], [Lage, 2013], [Silva, 2016] e [Tófoli et al., 2016].

Em [Soler et al., 2013], as restrições de integralidade são relaxadas e tratadas por meio de uma função penalidade senoidal quadrática. Esta função senoidal é construída de modo que suas raízes coincidam com os valores discretos pré-determinados. Assim, a penalização da função objetivo por meio desta função, faz com que as variáveis originalmente discretas tendam iterativamente aos valores discretos pré-especificados. A função penalidade senoidal pode ser utilizada tanto para conjuntos com valores igualmente espaçados ou não. Entretanto, a representação discreta para as variáveis associadas aos bancos de capacitores/reatores, as quais podem não apresentar valores igualmente espaçados, por meio da técnica proposta em [Soler et al., 2013] fica dificultada ao se utilizar *solvers*. Este problema foi resolvido em [Lage, 2013], o qual utiliza a função senoidal proposta por [Soler et al., 2013] por partes, a qual pode ser utilizada para o tratamento de conjuntos discretos igualmente espaçados ou não. Uma função penalidade do tipo polinomial é proposta em [Silva, 2016], com o objetivo de tratar conjuntos discretos igualmente espaçados ou não, a função proposta é um polinômio de ordem n^2 escrito em função de n fatores de

primeiro grau, o polinômio obtido é elevado ao quadrado de modo que suas raízes sejam pontos de mínimo da função. Em todas estas abordagens, os autores utilizaram o pacote computacional *Interior Point OPTimizer* (IPOPT). Em [Tófoli et al., 2016], um método de pontos interiores/exterior é proposto para a solução do FPOR-DM em que a função penalidade senoidal proposta em [Soler et al., 2013] é utilizada para o tratamento das variáveis discretas.

Este trabalho tem como objetivo propor um método de pontos interiores/exterior com base nas funções barreira logarítmica e logarítmica modificada para a solução do FPOR-DM em que as variáveis discretas são tratadas de forma eficiente. O método aqui proposto para a solução do FPOR-DM tem como base os métodos de pontos interiores e/ou exterior propostos em [Wächter & Biegler, 2005], [Baptista et al., 2006], [Pinheiro, 2012] e [Souza, 2016]. A ideia geral do método consiste em utilizar a função penalidade senoidal descrita em [Soler et al., 2013] para o tratamento das variáveis discretas. O problema contínuo, obtido a partir da relaxação das variáveis discretas e inserção do termo de penalidade na função objetivo, é resolvido utilizando-se o Método da Função Lagrangiana Clássica (MFLC) para o tratamento das restrições de igualdade e o Método de Barreira Função Logarítmica Modificada (MBFLM) [Polyak, 1992] para o tratamento das restrições de desigualdade. O método proposto é capaz de operar tanto na região factível quanto na região infactível do problema, daí a denominação de método de ponto interior/exterior.

Neste trabalho, mostra-se que a utilização de funções penalidade senoidal para o tratamento de variáveis discretas introduz, de forma artificial, vários pontos de mínimo e máximo locais. Assim, para evitar que a solução tenda para os pontos indesejados de máximo local, ou sela, é necessário que alguma estratégia de convergência global seja adotada. Para isso, neste trabalho adota-se a estratégia de correção de inércia, baseada no teorema de Sylvester [Wright, 1997]. Nesta estratégia, a diagonal da matriz de direções do método é iterativamente perturbada de modo a possuir um número específico de autovalores positivos, negativos e nulos, com a finalidade de obtenção de pontos de mínimo do problema, evitando, assim, os pontos indesejados de máximo e de sela do problema.

A implementação do método proposto foi realizada em linguagem Matlab a partir de uma base computacional desenvolvida em [Souza, 2016]. Testes numéricos com os sistemas IEEE de 14, 30, 57 e 118 barras mostram a eficiência do método proposto. Uma análise dos resultados é realizada mostrando-se a necessidade da correção de inércia para garantir a convergência para os pontos de mínimos da função objetivo penalizada.

O trabalho está organizado como segue: no Capítulo 2, é apresentada a formulação do problema de FPOR e um breve histórico de métodos de solução propostos na literatura para este problema. No Capítulo 3, são descritos os principais métodos utilizados para a solução do problema de FPOR com variáveis contínuas e discretas. No Capítulo 4, é apresentado o método proposto, denominado como o Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de Correção de Inércia utilizando uma Função Penalidade para o tratamento das Variáveis Discretas (MPIEECIFP). No Capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos pelo método proposto. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho. E por fim, no Capítulo 7 são apresentados os trabalhos decorrentes desta pesquisa.

Capítulo 2

O Problema de Fluxo de Potência Ótimo

Neste capítulo apresentam-se aspectos gerais dos problemas de FPO e de FPOR e um breve histórico dos métodos de solução para estes problemas. O problema de FPO, elaborado matematicamente em 1962 por Carpentier [Carpentier, 1962], tem o propósito de determinar um ponto de operação do SEP que otimize um determinado critério da rede, respeitando as restrições físicas e operacionais do sistema. O FPO é formulado como um problema de otimização não linear de grande porte com restrições de igualdade e desigualdade e com variáveis de otimização contínuas e discretas. O FPO pode ser formulado com foco na parte ativa (FPOA), ou com foco na parte reativa (FPOR). O FPOA têm como objetivo geral definir níveis de geração de potência ativa em cada barra geradora do sistema, ou seja, determina a potência ativa necessária para que o SEP opere de maneira adequada. Já o problema de FPOR, utiliza as decisões obtidas pela solução do problema de FPOA de forma fixa e otimiza algum critério associado à potência reativa do SEP, tais como o ajuste de tensão e minimização de perdas de potência.

O FPOR é o problema abordado neste trabalho e, por característica de solução deste problema, as variáveis associadas à potência ativa tem seus valores fixados e as variáveis associadas à potência reativa tem seus valores ajustados de maneira que otimize o critério desejado respeitando as restrições físicas e operacionais do sistema. O problema de

FPOR, é descrito por meio de dois modelos matemáticos: um denominado de problema de FPOR com variáveis contínuas e outro de problema de FPOR-DM, com variáveis discretas. No primeiro, as variáveis discretas do problema são relaxadas por meio da utilização de variáveis contínuas; já no segundo, tais variáveis são efetivamente tratadas como discretas. Apresentam-se neste capítulo também, as expressões matemáticas dos modelos do problema de FPOR, tais como suas restrições físicas e operacionais assim como a função objetivo. O modelo do problema de FPOR que será abordado neste trabalho é o que contém a representação das variáveis discretas, o qual está mais próximo da realidade do sistema elétrico.

No modelo do problema de FPOR abordado neste trabalho, a função objetivo corresponde às perdas de potência ativa nas linhas de transmissão e as restrições de igualdade e desigualdade correspondem, respectivamente, às leis físicas de Kircchoff e limites operacionais do SEP. As variáveis utilizadas para otimizar a função objetivo são denominadas de variáveis de otimização e são dadas pelas magnitudes de tensões das barras (V), os ângulos de tensões das barras (θ), os *taps* dos transformadores nos ramos (t) e as suscetâncias *shunt* nos bancos de capacitores e reatores (b^{sh}) do sistema, em que (t) e (b^{sh}) são as variáveis discretas do problema.

A seguir, o problema de FPOR e FPOR-DM são descritos em detalhes [Monticelli, 1983].

2.1 O Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR)

O problema de FPOR envolvendo as formulações contínua e discreta são descritos respectivamente nas Seções 2.1.1 e 2.1.2.

2.1.1 O modelo do problema de FPOR com variáveis contínuas (FPOR)

Neste modelo as variáveis discretas do problema de FPOR são representadas como variáveis contínuas com limitantes inferiores e superiores, podendo assumir qualquer valor dentro deste intervalo.

O modelo contínuo do problema de FPOR é dado em (2.1):

$$\text{Minimizar} \quad P(V, t, \theta) \quad (2.1a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \Delta P_k(V, t, \theta) = 0, \quad \forall k \in G' \cup C \quad (2.1b)$$

$$\Delta Q_k(V, t, \theta, b^{sh}) = 0, \quad \forall k \in C \quad (2.1c)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, t, \theta, b^{sh}) \leq Q_{G_k}^{max}, \quad \forall k \in G \quad (2.1d)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}, \quad \forall k \in B \quad (2.1e)$$

$$t_{km}^{min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{max}, \quad \forall k, m \in T \quad (2.1f)$$

$$b_k^{shmin} \leq b_k^{sh} \leq b_k^{shmax}, \quad \forall k \in B_{sh} \quad (2.1g)$$

em que:

Índices

k : são os índices associados às barras;

km : representam o ramo de interligação entre as barras k e m .

Variáveis

V : é o vetor que representa as magnitudes de tensão do sistema;

t : é o vetor que representa os *taps* dos transformadores do sistema;

θ : é o vetor que representa os ângulos de magnitude de tensão do sistema;

b^{sh} : é o vetor que representa as susceptâncias *shunts* dos bancos de capacitores e reatores do sistema.

Constantes

$b_k^{sh^{min}}$ e $b_k^{sh^{max}}$: são os valores dos limitantes inferior e superior da susceptância *shunt* da barra k , respectivamente;

t^{min} e t^{max} : são os valores dos limitantes inferior e superior da variável t ;

V^{min} e V^{max} : são os valores dos limitantes inferior e superior da variável V .

Conjuntos

B : é conjunto de todas as barras do sistema;

B_{sh} : é o conjunto das barras do sistema com bancos de capacitores/reatores instalados;

C : é o conjunto das barras de carga do sistema;

G : é o conjunto das barras de tensão controlada do sistema;

G' : é o conjunto das barras de tensão controlada do sistema com exceção da barra *slack*;

T : é o conjunto dos transformadores do sistema.

Funções

$\Delta P_k(V, t, \theta)$: é a função que representa o balanço de potência ativa líquida na barra k ;

$\Delta Q_k(V, t, \theta, b^{sh})$: é a função que representa o balanço de potência reativa líquida na barra k ;

$P(V, t, \theta)$: é a função de perdas de potência ativa do sistema de transmissão;

$Q_{G_k}(V, t, \theta, b^{sh})$: é a função que representa a geração de potência reativa nas barras com controle de tensão.

A função (2.1a) representa a função de perdas de potência ativa nas linhas de transmissão; as equações (2.1b) e (2.1c) representam as restrições físicas do sistema, representadas pelo balanço de potência ativa e reativa, respectivamente; as restrições (2.1d) representam a faixa de operação permitida para a potência reativa gerada nas barras com unidades geradoras; as restrições (2.1e) representam os limites canalizados das magnitudes de tensão; as restrições (2.1f) e (2.1g) representam os limites canalizados nas variáveis *tap* dos transformadores e susceptância *shunt* dos bancos de capacitores e reatores, respectivamente, com seus respectivos limites de operação. Nota-se pelas restrições (2.1f) e (2.1g)

que a natureza discreta destas variáveis está relaxada na faixa composta pelos menores e maiores valores discretos dos respectivos conjuntos discretos.

2.1.2 O modelo do problema de FPOR com variáveis discretas (FPOR-DM)

O modelo de FPOR discreto denominado neste trabalho como FPOR-DM, tem basicamente a mesma estrutura do problema contínuo, porém a natureza das variáveis discretas é representada de forma adequada. Matematicamente, este problema é descrito em (2.2):

$$\text{Minimizar} \quad P(V, t, \theta) \quad (2.2a)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \Delta P_k(V, t, \theta) = 0, \quad \forall k \in G' \cup C \quad (2.2b)$$

$$\Delta Q_k(V, t, \theta, b^{sh}) = 0, \quad \forall k \in C \quad (2.2c)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, t, \theta, b^{sh}) \leq Q_{G_k}^{max}, \quad \forall k \in G \quad (2.2d)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}, \quad \forall k \in B \quad (2.2e)$$

$$t_{km} \in \Gamma_{km}, \quad \forall km \in T \quad (2.2f)$$

$$b_k^{sh} \in B_k^{sh}, \quad \forall k \in B_k^{sh}, \quad (2.2g)$$

em que:

Conjuntos

B_k^{sh} : é o conjunto pré-determinado de valores discretos para as susceptâncias *shunts* dos bancos de capacitores e reatores associados à barra k ;

Γ_{km} : é o conjunto pré-determinado de valores discretos para os *taps* dos transformadores da linha km .

As restrições (2.2f) definem os conjuntos discretos para os *taps* dos transformadores enquanto as restrições (2.2g) definem os conjuntos discretos para as susceptâncias *shunt* dos bancos de capacitores e reatores, respectivamente. Neste modelo, nota-se pelas restri-

ções (2.2f) e (2.2g) que a natureza discreta destas variáveis está representada de maneira adequada por seus conjuntos discretos.

Os elementos dos conjuntos discretos (tanto para os *taps* de transformadores quanto para as susceptâncias *shunt* de barra) podem variar, assim como o espaçamento entre eles (os elementos podem estar igualmente espaçados entre si ou não). Para as variáveis associadas aos *taps* dos transformadores, os conjuntos dos valores discretos são considerados igualmente espaçados para todos os ramos. Para as variáveis associadas aos bancos de capacitores e reatores *shunt*, os elementos do conjunto dos valores discretos podem variar de um banco para outro, e podem possuir espaçamentos irregulares entre si.

As funções matemáticas relacionadas aos problemas (2.1) e (2.2) são detalhadas na Seção 2.2.

2.2 Descrição detalhada das funções relacionadas aos problemas de FPOR e FPOR-DM

Com base em [Monticelli, A. J. & Garcia, A. V., 2003], as funções que aparecem na formulação matemática dos problemas de FPOR e FPOR-DM são apresentadas a seguir.

As funções de balanço de potência ativa $\Delta P_k(V, t, \theta)$ e reativa $\Delta Q_k(V, t, \theta, b^{sh})$ líquidas na barra k , são dadas por (2.3) e (2.4), respectivamente:

$$\Delta P_k(V, t, \theta) = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V, t, \theta) - P_{G_k} + P_{C_k} \quad (2.3)$$

$$\Delta Q_k(V, t, \theta, b^{sh}) = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(V, t, \theta, b^{sh}) - Q_{G_k} + Q_{C_k} - Q_k^{sh}(V, b^{sh}), \quad (2.4)$$

em que:

P_{G_k} : representa a potência ativa gerada na barra k ;

P_{C_k} : representa a potência ativa consumida na barra k ;

Q_{G_k} : representa a potência reativa gerada na barra k ;

Q_{C_k} : representa a potência reativa consumida na barra k ;

$P_{km}(V, t, \theta)$: é a função que representa a potência ativa fluindo da barra k para a barra m ;

$Q_{km}(V, t, \theta, b^{sh})$: é a função que representa a potência reativa fluindo da barra k para a barra m ;

$Q_k^{sh}(V, t, \theta, b^{sh})$: é a função que representa a potência reativa gerada na barra k por um banco de capacitor/reator *shunt* conectado à barra k ;

Ω_k : representa o conjunto das barras m diretamente conectadas à barra k ;

m : é o índice que representa a barra vizinha à barra k .

As funções que representam os fluxos de potência ativa P_{km} e reativa Q_{km} em um ramo km dependem do elemento deste ramo (e.g. linhas de transmissão, transformadores defasadores e em fase, etc.). Para as linhas de transmissão, as expressões gerais dos fluxos de potência ativa e reativa são dadas conforme (2.5) e (2.6), respectivamente:

$$P_{km}(V, t, \theta) = g_{km}V_k^2 - V_kV_mg_{km}\cos(\theta_{km}) - V_kV_mb_{km}\sin(\theta_{km}) \quad (2.5)$$

$$Q_{km}(V, t, \theta, b^{sh}) = -(b_{km} + b_{km}^{sh})V_k^2 + V_kV_mb_{km}\cos(\theta_{km}) - V_kV_mg_{km}\sin(\theta_{km}), \quad (2.6)$$

em que: $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$.

Para os fluxos P_{mk} e Q_{mk} , as expressões podem ser obtidas, respectivamente, pela troca do índice k pelo índice m .

Para os transformadores em fase, as expressões gerais para fluxos de potência ativa P_{km} e reativa Q_{km} nas linhas dependem do modelo do transformador adotado. Seja o modelo de transformador adotado na Figura 2.1. O modelo deste transformador consiste em um auto-transformador ideal com relação de transformação $a_{km} = 1$ e uma admitância série de y_{km} (para transformadores em fase, o qual é adotado neste trabalho, tem-se $a_{km} = t_{km}$, dado por um número real). Com a aplicação da lei de Kirchhoff e relações

entre magnitudes dos nós no circuito, as equações para as correntes I_{km} e I_{mk} são determinadas [Monticelli, 1983].

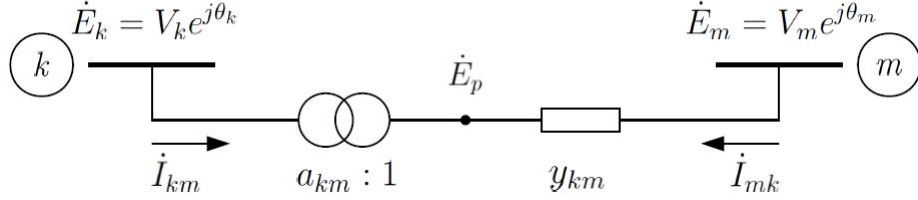


Figura 2.1: Modelo de um transformador ideal regulador em fase. [Lage, 2013]

Assim, se a barra k estiver localizada no lado de alteração do *tap* do transformador, os fluxos de potência ativa e reativa são dados conforme (2.7) e (2.8).

$$P_{km}(V, t, \theta) = g_{km} \left(\frac{V_k}{t_{km}} \right)^2 - \frac{V_k V_m}{t_{km}} g_{km} \cos(\theta_{km}) - \frac{V_k V_m}{t_{km}} b_{km} \sin(\theta_{km}) \quad (2.7)$$

$$Q_{km}(V, t, \theta, b^{sh}) = - \left(\frac{b_{km}}{t_{km}^2} + b_{km}^{sh} \right) V_k^2 + \frac{V_k V_m}{t_{km}} b_{km} \cos(\theta_{km}) - \frac{V_k V_m}{t_{km}} g_{km} \sin(\theta_{km}), \quad (2.8)$$

E, para os fluxos de potência ativa e reativa P_{mk} e Q_{mk} (se a barra k não estiver localizada no lado de alteração do *tap* do transformador), as expressões são dados conforme (2.9) e (2.10), respectivamente:

$$P_{mk}(V, t, \theta) = g_{km} V_k^2 - \frac{V_k V_m}{t_{km}} g_{km} \cos(\theta_{km}) - \frac{V_k V_m}{t_{km}} b_{km} \sin(\theta_{km}) \quad (2.9)$$

$$Q_{mk}(V, t, \theta, b^{sh}) = - (b_{km} + b_{km}^{sh}) V_k^2 + \frac{V_k V_m}{t_{km}} b_{km} \cos(\theta_{km}) - \frac{V_k V_m}{t_{km}} g_{km} \sin(\theta_{km}). \quad (2.10)$$

Para a função que representa a potência reativa gerada na barra k por um banco de capacitor/reator *shunt*, $Q_k^{sh}(V, t, \theta, b^{sh})$, tem-se a expressão:

$$Q_k^{sh}(V, b^{sh}) = b_k^{sh} V_k^2 \quad (2.11)$$

em que b_k^{sh} é a susceptância *shunt* do banco de capacitor/reator conectado à barra k e V_k é a magnitude de tensão da barra k .

As perdas de potência ativa nas linhas de transmissão são dadas conforme (2.12):

$$P(V, t, \theta) = \sum_{(km) \in \Lambda} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right), \quad (2.12)$$

em que $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$.

Na Seção 2.3, será apresentado um breve histórico dos métodos de solução para o problema de FPO e FPOR que foram propostos na literatura, assim como métodos que tratam as variáveis discretas do problema de FPOR e foram utilizados como base para o desenvolvimento deste trabalho.

2.3 Histórico do problema de FPO

Com base neste histórico, os trabalhos associados à funções lagrangianas, funções de barreira, funções penalidade e métodos de pontos interiores e exteriores foram base para o desenvolvimento deste trabalho.

Quando Carpentier em 1962 formulou o problema de FPO, como mencionado no início do Capítulo 2, ele o resolveu transformando-o em um problema de programação não linear irrestrito através da função lagrangiana. Posteriormente, aplicou à esta função as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) que resultou em um sistema de equações não lineares. O sistema obtido foi linearizado para aplicar o método iterativo para sistemas lineares Gauss-Seidel, a solução deste sistema é a solução do problema quando as condições de KKT forem satisfeitas. As condições de KKT apresentam propriedades e características particulares, as quais são detalhadas em [Bazaraa et al., 2006].

Em torno do mesmo período que Carpentier propôs a formulação do problema de FPOR, este fora marcado por [Fiacco, 1968], [Frisch, 1955] e [Carroll, 1961] pelo início da utilização dos métodos de barreira para a resolução de problemas de programação não linear restrito. O método apresentava problemas de mau condicionamento da matriz hes-

siana à medida que o parâmetro de barreira tendia a 0 e dificuldades em relação a escolha dos parâmetros de barreira, perdendo sua popularidade na época. Logo, por volta da década de 80, [Karmarkar, 1984], retomou com os métodos de barreira citados anteriormente com o método de tempo polinomial para programação linear. O método proposto por Karmarkar era cerca de 50 vezes mais eficiente que o método Simplex proposto em 1947 por Dantzig. O objetivo do método proposto por Karmarkar era caminhar pelo interior da região factível do problema, assim, caracterizando o método como um método de pontos interiores.

No final da década de 60, [Dommel & Tinney, 1968], propuseram o método do gradiente reduzido para a solução do FPO. Este método utiliza procedimentos associados com o gradiente para determinar o estado ótimo das variáveis de controle do problema e, também, utiliza estratégias para a transformação do problema restrito em um problema irrestrito. Multiplicadores de Lagrange tratam as restrições de igualdade do problema e parâmetros de penalidade tratam as restrições de desigualdade do mesmo. Nessa abordagem, uma função lagrangiana transforma o problema restrito em um problema irrestrito e a técnica do gradiente projetado é utilizada para as variáveis de controle que atingem seus limites. Através do gradiente reduzido da função objetivo em relação às variáveis de controle do problema, são determinados os valores das mesmas. A solução do método é dada quando a norma do gradiente da função lagrangiana, em relação às variáveis de controle do problema, é menor que uma tolerância pré-estabelecida. Este método possui algumas limitações que podem comprometer a convergência, um fator crítico para o bom desempenho do método é a determinação do tamanho do passo para o ajuste das variáveis de controle, o qual mostra-se muito sensível aos ajustes (e.g. passos muito grandes apresentam convergência "zigue-zague" próxima a solução ótima e, passos muito pequenos fazem com que o método tenha uma convergência lenta). Testes numéricos foram realizados em um sistema elétrico de 3 barras.

Nos trabalhos de [Sasson et al., 1973], foi utilizado o método da função penalidade para a resolução do problema de FPO. Este método foi o primeiro método a utilizar a matriz

hessiana da função objetivo na resolução do problema de FPO. A estratégia de solução deste método baseia-se em transformar um problema restrito em um problema irrestrito através de uma função lagrangiana, esta dada por uma função penalidade a qual objetiva-se à penalizar as restrições violadas, sejam elas de igualdade ou de desigualdade, de modo que estas funções são adicionadas à função objetivo do problema. O método é aplicado de maneira iterativa, onde, a cada iteração, todas as variáveis são atualizadas simultaneamente utilizando a matriz hessiana da função objetivo penalizada. Com a atualização das variáveis, os valores das penalidades são aumentados e a matriz hessiana da função penalidade é calculada. A solução do problema irrestrito é resolvida pelo método de Newton e dá-se quando todas as restrições são satisfeitas. O parâmetro penalidade influencia diretamente a matriz hessiana do problema, a qual pode-se tornar mal condicionada à medida que este cresça e, devido a matriz hessiana da função penalidade ser esparsa, é possível usar técnicas de esparsidade no processo computacional. O método mostrou-se eficiente e o esforço computacional é proporcional ao tamanho do sistema elétrico aplicado.

Na década de 80, no trabalho de [Sun et al., 1984], foi proposto o método de Newton com Penalidade para a solução do problema de FPO. Este método tem como estratégia de solução transformar um problema restrito em um irrestrito, dividi-lo em dois subproblemas (ativo e reativo) e combiná-los com as condições de KKT. Para a transformação do problema, as restrições de igualdade, problema ativo, são adicionadas à função objetivo do problema original por meio dos multiplicadores de Lagrange e, as restrições de desigualdade, problema reativo, são incorporadas à função objetivo do problema original por meio de multiplicadores de Lagrange e fatores de penalidade. A aplicação das condições de KKT nestes problemas, resulta em um sistema de equações o qual é solucionado pelo método de Newton e, a cada iteração, as variáveis primais e duais são atualizadas simultaneamente. A solução do método ocorre quando as condições de KKT forem satisfeitas e o método atinja uma precisão de convergência pré-estabelecida para o problema ativo. O método do conjunto ativo foi utilizado para identificar as restrições ativas na solução.

[Santos et al., 1988], no intuito de aperfeiçoar os métodos propostos nos trabalhos

de [Sasson et al., 1973] e [Sun et al., 1984], utilizaram o método da função lagrangiana aumentada. A estratégia de solução deste método consiste em transformar um problema restrito em um problema irrestrito através do tratamento das restrições do problema. As restrições de igualdade e desigualdade do problema são adicionadas à função objetivo por meio dos multiplicadores de Lagrange e, posteriormente, essa função lagrangiana é aumentada quando incorpora-se, novamente, na função objetivo do problema, as restrições de igualdade e desigualdade através de penalidades quadráticas. Neste método, a função lagrangiana aumentada é minimizada em relação às variáveis primais do problema utilizando o método de Newton e os multiplicadores de Lagrange são atualizados de forma que a função lagrangiana aumentada seja maximizada. O parâmetro de penalidade é atualizado de forma que garanta a existência de um ponto de sela da função lagrangiana aumentada e este, ainda, é controlado pelo método de modo a evitar problemas de mau condicionamento da matriz hessiana da função lagrangiana aumentada.

Por volta da década de 90, [Papalexopoulos et al., 1989] deu atenção para o problema FPO considerando as variáveis de controle discretas deste. Os autores propuseram um método que utiliza uma função penalidade a qual é uma aproximação linear da penalidade quadrática para o ajuste das variáveis discretas do problema. No trabalho dos autores, as variáveis discretas do problema de FPO que foram ajustadas para valores discretos, são as variáveis associadas aos *shunt* dos bancos de capacitores e reatores. Os multiplicadores de Lagrange, são responsáveis por transformar o problema restrito em um problema irrestrito, adicionando à função objetivo as restrições do problema com seus respectivos multiplicadores. Para as variáveis discretas, estas são tratadas por uma função penalidade a qual é inserida na função lagrangiana no decorrer das iterações, de modo a obrigar tais variáveis a assumirem, por meio de um arredondamento, o valor discreto mais próximo. Com o problema irrestrito obtido, os autores obtiveram um sistema de equações por meio da aplicação das condições de KKT na função lagrangiana do problema. O sistema de equações obtido é resolvido pelo método de Newton que a cada iteração, em sua solução, obtém-se passos para a atualização das variáveis. O método converge quando todas as restrições forem satisfeitas e todas as variáveis discretas assumirem valores discretos. O

método consiste basicamente em um método de arredondamento e, para avaliar a eficiência deste, o método foi aplicado aos sistemas elétricos IEEE de 100 e 1700 barras.

[Polyak, 1992], propôs uma função barreira modificada com o objetivo de evitar algumas dificuldades impostas pelos métodos de barreiras das décadas de 60, 70 e 80 os quais eram denominados como métodos de pontos interiores. O método de Polyak, tem por estratégia de solução a relaxação das restrições de desigualdade do problema, de modo que uma expansão da região factível do mesmo era obtida e possibilitava o método operar com estes novos pontos, ou seja, o método trabalhava com pontos externos à região factível original do problema, caracterizando-se como um método de pontos exteriores. Polyak ainda, anos depois, expandiu seu trabalho para uma teoria mais ampla combinando as melhores características do método de pontos interiores e do método de pontos exteriores, denominada de rescalamento não linear. Resultados mostram que o método de rescalamento não linear é superior aos métodos aplicados individualmente [Polyak & Teboulle, 1997] e [Polyak, 2002].

O método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores foi proposto por [Mehrotra, 1992a]. O método tem por estratégia de solução, uma previsão e correção das direções de busca a cada iteração. Inicialmente, no procedimento previsor, os termos não lineares da relação de complementariedade e o parâmetro de barreira logarítmica, $\mu > 0$, são desprezados. Em seguida, para o procedimento corretor, os termos não lineares e o parâmetro de barreira logarítmica são considerados, de modo a corrigir e melhorar as direções de busca do método proposto. Sensivelmente o método mostrou-se mais eficiente em relação aos métodos primais-duais já propostos.

Por volta da década de 90, [Papalexopoulos et al., 1989] deu atenção para o FPO considerando suas variáveis de controle discretas. Os autores propuseram um método que utiliza uma função penalidade para o ajuste das variáveis discretas do problema de FPO. Os multiplicadores de Lagrange são responsáveis por transformar o problema restrito em um problema irrestrito. Para o tratamento das variáveis discretas, estas são tratadas por

uma função penalidade (a qual consiste em uma aproximação linear da função penalidade quadrática) é adicionada à função lagrangiana do problema por um parâmetro de penalidade. Considerando todas as variáveis do problema como contínuas, o problema lagrangiano obtido é resolvido pelo método de Newton. A convergência do método dá-se quando todas as restrições do problema forem satisfeitas e todas as variáveis discretas assumirem valores discretos. As variáveis discretas neste método, quando se aproximam de valores discretos, estas têm seu valor fixado. Uma dificuldade apresentada no método é a utilização da função penalidade, esta tem de ter uma decisão de "como" e "quando" aplicar no decorrer das iterações. Testes computacionais com os sistemas elétricos de 100 e 1700 barras foram realizados e mostram a eficiência do método.

O início do método de pontos interiores para a solução do problema de FPOR foi dada por [Granville, 1994], denominado como método primal-dual barreira logarítmica. O método baseia-se, assim como os descritos anteriormente, em transformar um problema restrito em um problema irrestrito. Inicialmente, tratam as restrições de desigualdade de modo que estas se tornem restrições de igualdade por meio de acréscimos ou decréscimos de variáveis de folga ou excesso, respectivamente. A inserção das variáveis de folga ou excesso no problema criam restrições de desigualdades adicionais, estas responsáveis por manter tais variáveis com valores positivos. Deste modo, estas variáveis são tratadas pela função barreira logarítmica associada à um parâmetro de barreira a qual é adicionada à função objetivo do problema original, garantindo que estas variáveis sejam estritamente positivas. Em seguida, as restrições de igualdade são adicionadas à função objetivo por meio dos multiplicadores de Lagrange. Após o tratamento das restrições do problema, obtém-se a função lagrangiana do mesmo e nesta aplicam-se as condições de KKT, de modo a obter um sistema de equações o qual é resolvido pelo método de Newton. As variáveis primais e duais são atualizadas a cada iteração do método através das direções de busca obtidas. A solução do problema de FPOR é obtida quando todas as restrições forem satisfeitas e o parâmetro de barreira estiver próximo de zero. Este método apresenta dificuldade em sua inicialização e convergência, já que é necessário um ponto factível para a inicialização e, respectivamente, a convergência do método pode ser afetada pela

escolha inicial do parâmetro de barreira e sua regra de atualização. Testes numéricos foram realizados com os sistemas elétricos: sistema Sul/Sudeste brasileiro de 1832 barras e o sistema norte-americano de 3467 barras.

No ano de 1994, ainda, [Wu et al., 1994] para resolverem o problema de FPO, utilizaram uma variante do método de Newton-Raphson, denominada como método preditor-corretor, em conjunto com o método primal-dual barreira logarítmica para a solução do problema de barreira. Esta abordagem apresentou melhor convergência em relação a [Granville, 1994].

Em [Bakirtzis et al., 2002], na linha das meta-heurísticas, é apresentado um algoritmo genético que considera a natureza discreta do problema de FPOR. Este algoritmo genético tem base em análise, seleção, cruzamento, mutação e operações avançadas e específicas para este problema, considerando "soluções candidatas" e também a "qualidade" das mesmas. A desvantagem dos algoritmos genéticos é não garantir que a solução obtida seja a ótima do problema. Apresenta, também, um esforço computacional elevado quando aplicado à problemas de FPOR de grande porte.

Em 2004, [de Sousa et al., 2004] apresentam uma abordagem que consiste em substituir a função barreira logarítmica clássica pela função barreira logarítmica modificada na abordagem proposta pelo autor [Granville, 1994]. A estratégia de solução é a mesma, em que as condições de primeira ordem são aplicadas à função lagrangiana e o sistema de equações obtido é resolvido pelo método de Newton, combinando as melhores características dos métodos lagrangianos e de barreiras.

[Ding et al., 2004] utilizou o método de planos de corte para o tratamento das variáveis discretas associadas aos *taps* dos transformadores do problema de FPO. O método consiste em resolver uma sequência de linearizações do problema de FPO através do método de pontos interiores. A estratégia de solução do método é realizar cortes nas soluções obtidas para o problema, de modo que estas serão descartadas ou consideradas para a

próxima iteração de solução. As variáveis que assumem os valores discretos têm seus valores fixados e, para as que não assumem, é realizado um plano de corte definindo um novo problema linearizado. A solução do método é dada quando todas as variáveis discretas do problema assumem seus respectivos valores discretos permitidos.

[Baptista et al., 2006] apresentaram uma abordagem associada ao método de barreiras e da função lagrangiana aumentada. No método proposto, o problema restrito é transformado em irrestrito através do tratamento das restrições do problema. As restrições de igualdade são tratadas através dos multiplicadores de Lagrange; as restrições de desigualdade são tratadas pela função logarítmica aumentada; as restrições canalizadas são tratadas pelo método da barreira logarítmica. Com a função lagrangiana obtida, aplicam-se as condições de KKT de modo a obter um sistema de equações. O sistema obtido é solucionado através do método de Newton e dá-se a solução ótima quando as condições de KKT forem satisfeitas.

No trabalho de [Capitanescu & Wehenkel, 2010], são apresentadas três abordagens para a resolução do problema de FPO com variáveis discretas. Tais abordagens consistem em métodos iterativos que por estratégia de solução, assim como métodos heurísticos, fixam valores para as variáveis discretas e então o problema de FPO tem sua solução determinada em função das variáveis contínuas.

No trabalho de [de Sousa et al., 2012], uma proposta que associa os métodos primal-dual barreira modificada é apresentada. De modo a transformar o problema de FPOR restrito em um problema irrestrito insere-se variáveis de folga nas restrições de desigualdade transformando-as em restrições de igualdade. As variáveis de folga são tratadas pela função barreira logarítmica modificada de modo a garantir sua não negatividade e a expansão da região factível do problema original. Essa expansão da região e a utilização de uma função definida na fronteira, permite que a solução do problema esteja na fronteira da região original, o que difere-se da função barreira logarítmica clássica. Com a associação de uma função lagrangiana ao problema modificado, aplicam-se as condições

de KKT de modo que um sistema de equações é obtido e o mesmo é solucionado pelo método de Newton.

No trabalho de [Soler, 2011], o problema de FPOR é resolvido considerando suas variáveis discretas. No trabalho da autora, uma função penalidade senoidal e diferenciável é adicionada à função objetivo do problema para tratar as variáveis discretas. A estratégia de solução, consiste em considerar as variáveis como contínuas e penaliza-as quando estas não assumem valores discretos. A penalização ocorre ao inserir a função penalidade na função objetivo e, um parâmetro de penalidade é associado a esta função proposta, de modo que este é atualizado iterativamente. A solução do problema é dada quando todas as variáveis discretas do problema assumem valores discretos, assim, a função penalidade deve tender a zero. O problema penalizado obtido é solucionado por meio do método de pontos interiores. Os testes computacionais mostram que a abordagem proposta é eficiente para o tratamento das variáveis discretas do problema de FPOR. A solução do problema FPOR foi realizada pelo *solver* gratuito IPOPT com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 118 e 300 barras.

Em [Lage, 2013], o autor resolveu o problema de FPOR com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão. Cujas abordagem proposta pelo autor, baseia-se na resolução de uma sequência de problemas modificados pelo método da função lagrangiana barreira modificada-penalidade-discreto. Para a transformação de um problema irrestrito, o autor trata as restrições do problema. As variáveis discretas são tratadas como contínuas por funções penalidades senoidais propostas em [Soler, 2011], as quais são incorporadas à função objetivo do problema original; as restrições de complementaridade são transformadas em restrições de desigualdade equivalentes; as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade por meio das variáveis de folga não negativas. Com o problema irrestrito obtido, este torna-se um problema lagrangiano o qual a solução é obtida através da aplicação das condições necessárias de otimalidade. Testes computacionais com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 57 e 188 barras e com o sistema equivalente CESP 440 kV de 53 barras, mostram

a eficiência do método. O autor utilizou o *solver* gratuito IPOPT para determinar as condições necessárias de otimalidade do problema de barreira modificada-penalidade.

[Pinheiro et al., 2015] propuseram um método de pontos interiores e exteriores barreira logarítmica modificada primal-dual previsor-corretor com convergência global que utiliza estratégias de ajuste cúbico para resolver o problema de FPOR contínuo. O método proposto pelo autor baseia-se em: métodos de "rescalamento não-linear" o qual possui características particulares; estratégia de convergência global a qual garante somente direções de descida para o método; uma estratégia de ajuste cúbico que ajuda a preservar as derivadas de primeira e segunda ordem associadas às funções barreiras e, por fim, novas regras de atualização dos multiplicadores de Lagrange. O método destaca-se por satisfazer as condições de KKT, por garantir direções de descida e evitar mau condicionamento da matriz hessiana através da estratégia de convergência global e, também, pela redução do número de iterações para a convergência do método por meio das regras de atualização dos multiplicadores de Lagrange que também permitem obter soluções ótimas com um valor não muito próximo a zero para os parâmetros de barreira, o que favorece a estabilidade numérica do método.

Em [Silva, 2016], funções penalidade polinomiais foram propostas para a solução do problema de FPOR com variáveis discretas. O trabalho difere-se por tratar conjuntos discretos que possuem ou não espaçamentos regulares entre os elementos. A autora utilizou o método de pontos interiores para a solução do problema penalizado. A implementação foi realizada no *General Algebraic Modeling System (GAMS)* e utilizou o *solver* gratuito IPOPT. Testes computacionais com os sistemas IEEE de 14, 30, 118 e 300 barras, mostram a eficiência das abordagens propostas.

Em [Souza, 2016], um método primal-dual de pontos interiores e exteriores barreira logarítmica modificada foi proposto. O método consiste em trabalhar com a função barreira logarítmica modificada, com estratégias de teste quadrático e determinação de direções de busca combinadas. O teste quadrático é proposto como alternativa para o procedi-

mento de Cholesky (verifica a positividade da matriz hessiana do problema). As direções de busca combinadas, são dadas através de combinações das direções dos procedimentos previsor e corretor. O método foi implementado em Matlab, o qual é utilizado como base para este trabalho. Testes computacionais com os sistemas IEEE de 14, 30, 57 e 188 barras mostram a eficiência do método proposto.

No capítulo a seguir, os métodos de otimização que foram base para o desenvolvimento deste trabalho são apresentados detalhadamente.

Capítulo 3

Métodos de Otimização

O objetivo deste capítulo é apresentar uma breve introdução dos métodos utilizados para o tratamento de características específicas do problema de FPOR-DM, como as restrições de igualdade e desigualdade e as variáveis discretas. Os métodos apresentados são: método lagrangiano, método de barreira e de penalidade. A estratégia de correção de inércia, utilizada como estratégia de convergência global, será apresentada no Capítulo 4, em que se descreve o método proposto com o intuito de facilitar a compreensão do trabalho.

3.1 O Método Dual-Lagrangiano

Com base em [Bazaraa et al., 2006], descreve-se nesta seção o Método Dual-Lagrangiano. Este método é aplicado a problemas de otimização com restrições de igualdade. A ideia central do método consiste em, dado um problema de otimização não linear restrito, reescrever um problema de otimização não linear irrestrito equivalente, por meio da Função Lagrangiana Clássica (FLC).

Para a descrição deste método, considere o problema de programação não linear so-

mente com restrições de igualdade dado em (3.1):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a:} && g(x) = 0 \\ &&& x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que:

Ω é um conjunto aberto, tal que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são de classe C^2 .

Associada a este problema, define-se a função lagrangiana [Bazaraa et al., 2006], expressa por (3.2):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \tag{3.2}$$

em que $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ são os multiplicadores de Lagrange associados às respectivas restrições de igualdade, $g_i(x)$.

No método dual-lagrangiano, o problema restrito original dado em (3.1) é reescrito como um problema irrestrito equivalente dado em (3.3):

$$\underset{x \in \Omega, \lambda}{\text{Minimizar}} \quad L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x). \tag{3.3}$$

Apesar de o número de variáveis do problema equivalente (3.3) ser maior que o número de variáveis do problema original (3.1), o problema (3.3) pode ser resolvido por meio de métodos de otimização para problemas irrestritos. As condições necessárias de otimalidade de primeira ordem associadas a (3.3) são dadas pelo sistema de equações: $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$ [Bazaraa et al., 2006], que em geral é resolvido pelo método de Newton.

Em [Silva, 2014] é apresentado um algoritmo para o método dual-lagrangiano, detalhado no Algoritmo 1. Comumente, este método é utilizado associado à outros métodos como, por exemplo, métodos de barreira que tratam especificamente as restrições de desigualdade do problema.

Algoritmo 1: Algoritmo do Método Dual-Lagrangiano.

Determine a função Lagrangiana associada ao problema original;

Faça $k = 0$ como iteração inicial e entre com pontos iniciais $x^0 \geq 0$ e λ^0 irrestrito;

while as condições de KKT não forem satisfeitas para x^k e λ^k **do**

Resolva o problema Lagrangiano com λ^k fixo e obtenha uma solução x^{k+1} :

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \Omega} \left\{ L(x, \lambda^k) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k g_i(x) \right\}$$

Com a solução x^{k+1} , atualize os multiplicadores de Lagrange utilizando alguma heurística:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta \lambda^k$$

Faça $k = k + 1$ e volte para o passo 3.

end

x^k e λ^k são os pontos ótimo.

O método dual lagrangiano é geralmente utilizado para o tratamento das restrições de igualdade. Métodos para o tratamento das restrições de desigualdade são apresentados nas seções a seguir.

3.2 Métodos de Barreira Clássica

A ideia geral dos métodos de barreira clássica consiste em estabelecer uma barreira na fronteira da região factível de modo a evitar que os pontos obtidos durante o processo iterativo saiam do interior da região factível. Na Seção 3.2.1, descreve-se a teoria geral que embasa os métodos de barreira clássica. Na seção 3.2.2, um caso particular deste método, envolvendo a função barreira logarítmica clássica é descrito.

3.2.1 Descrição geral dos métodos

O Método de Barreira Clássica (MBC) é utilizado para o tratamento das restrições de desigualdades em problemas de otimização. Assim como o método Dual-Lagrangiano, os métodos de barreira transformam um problema restrito em um problema irrestrito equivalente através da função barreira. A função barreira é obtida a partir das restrições de desigualdade, sendo somada à função objetivo do problema, de modo a criar uma barreira que impede que os pontos saiam da região factível. Como a solução ótima ocorre na

fronteira da região factível, as soluções obtidas em cada iteração se deslocam do interior para a fronteira. Assim, os métodos de barreira no sentido clássico são caracterizados como uma técnica de pontos interiores [Bazaraa et al., 2006]. A inicialização do método de barreira pode ser trabalhosa devido à necessidade do conhecimento da região factível.

Para a descrição do método considere um problema de programação não linear com restrições de desigualdade, dado em (3.4):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) \leq 0 \\ &&& x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.4}$$

em que:

Ω é um conjunto aberto, tal que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são de classe C^2 .

Como estratégia de solução do método de barreira, reescreve-se o problema restrito (3.4) como um problema irrestrito (3.5) através da inserção da função barreira, dada por $B(x)$, na função objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad f(x) + \mu B(x), \tag{3.5}$$

em que $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ é denominado de *parâmetro de barreira*.

A função barreira $B(x)$ em (3.5) é dada por (3.6), em que $\phi : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e tem-se:

$$B(x) = \sum_{j=1}^p \phi(h_j(x)), \text{ em que } \begin{cases} \phi(y) \geq 0, \text{ se } y < 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(y) = \infty \end{cases} \tag{3.6}$$

De forma ideal, seria interessante que a função barreira $B(x)$ fosse nula para valores de $y < 0$ (região interior) e infinita no ponto $y = 0$ (fronteira), de modo que a influência da barreira ocorresse somente na fronteira. Entretanto, esta descontinuidade na função

$B(x)$ traria problemas computacionais para a solução do problema irrestrito (3.5). Assim, uma versão mais realista da função barreira é adotada em (3.6), em que a função é positiva para pontos interiores e tendendo a valores infinitos em pontos que tendem à $y = 0^-$. Nota-se que o produto μB se aproxima da função barreira ideal à medida que $\mu \rightarrow 0$, de modo que a soma $f(x) + \mu B(x)$ tende a $f(x)$.

Em [Silva, 2014] é apresentado um algoritmo para o método de barreira, dado pelo Algoritmo 2:

Algoritmo 2: Algoritmo do Método de Barreira.

Determine uma função barreira e associe ao problema original;

Faça $k = 0$ como iteração inicial, entre com o ponto inicial x^0 e com os parâmetros associados à barreira: o parâmetro de barreira $\mu^0 > 0$; o parâmetro de atualização da barreira $0 < \tau < 1$; e a precisão de convergência do método $\epsilon > 0$.

while $|\mu^k B(x^k)| > \epsilon$ **do**

 Resolva o problema barreira com μ^k fixo e obtenha uma solução x^{k+1} :

$$x^{k+1} = \arg \min_x \{f(x) + \mu^k B(x)\}$$

 Com a solução x^{k+1} , atualize o parâmetro de barreira:

$$\mu^{k+1} = \tau \mu^k$$

 Faça $k = k + 1$ e volte para o início do processo iterativo.

end

x^k é o ponto ótimo.

Na Subseção 3.2.2 descreve-se um caso particular dos métodos de barreira clássica, que é o método da função barreira logarítmica clássica. Outra classe de métodos de barreira que podem trabalhar no exterior da região factível, denominada de método de reescalamiento não linear, é descrita na seção 3.3.

3.2.2 Método da Função Barreira Logarítmica Clássica

O método da Função Barreira Logarítmica Clássica (FBLC) é um caso especial dos métodos de barreira clássica em que a função barreira logarítmica proposta por [Frisch,

1955] dada em (3.7) é utilizada:

$$\phi(y) = -\ln(-y). \quad (3.7)$$

Nota-se que as propriedades dadas em (3.6) precisam apenas ser satisfeitas na vizinhança de $y = 0$. No caso do problema (3.4) teremos $B(x) = \sum_{j=1}^p -\ln(-h_j(x))$.

Na resolução dos problemas irrestritos (3.5) em que a função barreira logarítmica (3.7) é utilizada, tem-se que $\mu B(x) \rightarrow 0$ sempre que $\mu \rightarrow 0$. Como mencionado, caso a solução x^* do problema esteja na fronteira, a função barreira apresentará problemas já que não é definida neste ponto, ou seja, $B(x) \rightarrow \infty$. Este problema pode ser contornado se $\mu \rightarrow 0$, mais rapidamente que $B(x) \rightarrow \infty$. No processo iterativo de resolução, utilizam-se heurísticas para atualizar o parâmetro de barreira de modo que $\mu B(x) \rightarrow 0$. Além disso, o produto $\mu B(x)$ pode ser utilizado como critério de parada do método de modo que, caso a precisão desejada não seja obtida, o parâmetro de barreira é atualizado e o problema de barreira deve ser resolvido novamente. A atualização do parâmetro de barreira μ deve ser feita cautelosamente, pois à medida que o parâmetro é reduzido podem ocorrer problemas de mau condicionamento da matriz hessiana, além de dificultar a solução do problema.

Com a definição do problema de barreira logarítmica apresentado em (3.5), temos um problema irrestrito. As condições de otimalidade deste problema irrestrito são dadas pela resolução do sistema de equações: $\nabla(f(x) + \mu B(x^*)) = 0$.

Dentre as dificuldades apresentadas pelo método da função barreira logarítmica clássica, podem-se citar: o fato de a função barreira logarítmica não ser definida na fronteira da região factível do problema original não permite a obtenção de pontos na fronteira; a inicialização do método que deve envolver um ponto interior ao conjunto factível, o que gera a necessidade de conhecer a região factível do problema; o mau condicionamento da matriz hessiana à medida que o método converge para a solução do problema e esta se aproxima da fronteira do problema original.

Os métodos de barreira apresentados nesta seção geralmente são utilizados para o tratamento das restrições de desigualdade e consistem de estratégia de solução que opera no interior da região factível do problema. Métodos que podem operar no exterior da região factível do problema serão apresentados nas seções a seguir.

Na seção a seguir, descreve-se o método de reescalamento não linear, que apesar de ser um método de barreira, permite que o processo iterativo opere com pontos exteriores à região factível, evitando algumas das dificuldades citadas acima.

3.3 Método de Reescalamento Não-Linear

Os métodos de reescalamento não lineares foram propostos para evitar algumas das dificuldades enfrentadas pelo método da função barreira logarítmica clássica. Na Seção 3.3.1, descreve-se a teoria geral que embasa o método de reescalamento não linear. Na seção 3.3.2, um caso particular deste método, envolvendo a função barreira logarítmica modificada é descrito.

3.3.1 Descrição geral do método

Como forma de tratar as restrições de desigualdade em problemas de otimização, na década de 90, [Polyak, 1992] apresentou o método da Função Barreira Logarítmica Modificada (FBLM). Este método evita os problemas e dificuldades encontradas no método da função barreira logarítmica clássica proposto por [Frisch, 1955] já citadas.

A estratégia de solução do método da função barreira modificada consiste em uma relaxação das restrições de desigualdade de modo a expandir a região factível do problema original, possibilitando, assim, que o método opere com pontos exteriores à região factível original. O método da função barreira modificada é caracterizado como uma técnica de pontos exteriores e também como um método de reescalamento não linear. O método de reescalamento não linear pode ser visto como uma extensão do método da função barreira

modificada para funções mais gerais, as quais incorporam determinadas propriedades discutidas nesta seção.

Para a descrição do método de reescalamiento não linear, considera-se um problema de programação não linear somente com restrições de desigualdade, dado em (3.8):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a:} && h(x) \geq 0 \\ &&& x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que:

Ω é um conjunto aberto, tal que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; e as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são de classe C^2 .

Para que se obtenha uma região factível expandida e que se tenha um problema equivalente, uma transformação na função objetivo e/ou restrições é realizada através do método de reescalamiento não linear. Em geral, os métodos de reescalamiento não linear envolvem uma transformação somente nas restrições. Tal transformação requer um parâmetro positivo, uma função suave denominada de função de reescalamiento e estimadores dos multiplicadores de Lagrange das restrições modificadas.

Em [Polyak & Teboulle, 1997] define-se uma função de reescalamiento não linear ψ de classe C^2 em um intervalo $(a, +\infty)$, respeitando os limites de a dados por $-\infty \leq a < 0$ de modo que:

- (i) $\psi(a) = -\infty$;
- (ii) $\psi'(a) = +\infty$;
- (iii) $\psi(0) = 0$ e $\psi'(0) = 1$
- (iv) ψ é estritamente crescente, isto é, $\psi'(t) > 0$
- (v) ψ é côncava, isto é, $\psi''(t) < 0$
- (vi) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = 0$

Para esta transformação, considere uma componente $h_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, p$ da restri-

ção de desigualdade em (3.8). Multiplicando ambos os lados desta restrição por μ^{-1} , com $\mu > 0$, tem-se a restrição equivalente $\mu^{-1}h_j(x) \geq 0$. Aplicando-se à função ψ em ambos os lados desta desigualdade, e lembrando-se da propriedade (iii), tem-se a restrição equivalente $\psi(\mu^{-1}h_j(x)) \geq 0$. Por fim, multiplicando-se ambos os lados da desigualdade por $-\mu$, com $\mu > 0$, chega-se à restrição equivalente $-\mu\psi(\mu^{-1}h_j(x)) \leq 0$. Assim, respeitando as propriedades dadas para a função ψ , o problema (3.8) pode ser reescrito de maneira equivalente por (3.9):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a:} && -\mu\psi(\mu^{-1}h_j(x)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \\ &&& x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.9}$$

considerando o parâmetro de barreira $\mu > 0$.

O problema transformado apresenta vantagem, já que permite uma expansão da região factível do problema original. Dada a função ψ definida em $(a, +\infty)$ os valores de x podem ser tais que $\mu^{-1}h_j(x) > a$ se, e somente se, $h_j(x) > a\mu$. Sendo $a < 0$ implica em $a\mu < 0$. A expansão da região factível é composta pela união da região factível do problema original com uma região adicional que é dependente do parâmetro μ . Em decorrência do parâmetro $\mu \rightarrow 0$, a região relaxada aproxima-se da região factível original.

A função lagrangiana clássica associada ao problema transformado (3.9), pode ser expressa conforme (3.10):

$$L_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \psi(\mu^{-1}h_j(x)), \tag{3.10}$$

sendo $L_\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}$ e δ_j , para $j = 1, \dots, p$, os estimadores dos multiplicadores de Lagrange da restrição de desigualdade em (3.8) e $\delta \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de estimadores dos multiplicadores.

No método de reescalamento não linear, o problema restrito transformado dado em

(3.9) é reescrito como um problema irrestrito equivalente dado em (3.11):

$$\underset{x \in \Omega}{\text{Minimizar}} \quad L_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \psi(\mu^{-1} h_j(x)). \quad (3.11)$$

O método de reescalamiento não linear funciona de maneira análoga aos métodos anteriores apresentados, sendo que os valores para os estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ e do parâmetro de barreira μ em uma iteração k são fixados e a função lagrangiana é minimizada em x . Os estimadores dos multiplicadores de Lagrange e o parâmetro de barreira devem ser atualizados caso a precisão de convergência do método não seja atingida. Se isto ocorrer, o procedimento de minimização da função lagrangiana é repetido.

Em uma iteração k , para a atualização dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ^k aplicam-se as condições de otimalidade para o problema de minimização irrestrita (3.11) obtendo-se sistema de equações não lineares dados por $\nabla_x L_{\mu^k}(x, \delta^k) = 0$. Considera-se x^{k+1} como a solução deste sistema não linear:

$$\nabla_x L_{\mu^k}(x^{k+1}, \delta^k) = \nabla f(x^{k+1}) - \mu^k \sum_{j=1}^p \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1})) (\mu^k)^{-1} \nabla h_j(x^{k+1}) = 0, \text{ ou}$$

ainda:

$$\nabla f(x^{k+1}) - \sum_{j=1}^p \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1})) \nabla h_j(x^{k+1}) = 0. \quad (3.12)$$

De acordo com [Polyak & Teboulle, 1997], se condição de otimalidade do problema original (3.8) é comparada à condição de otimalidade (3.12) do problema transformado, é possível estabelecer uma regra de atualização para os estimadores dos multiplicadores de Lagrange, conforme (3.13):

$$\delta_j^{k+1} = \delta_j^k \psi'((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1})), j = 1, \dots, p. \quad (3.13)$$

Em [Silva, 2014] é apresentado um algoritmo para o método de reescalamiento não linear, o qual é mostrado no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Algoritmo do Método de Reescalamento Não-Linear.

A partir do problema original e de uma função de reescalamento, determine a função lagrangiana associada;

Faça $k = 0$ como iteração inicial e entre com o dados iniciais para o método: o ponto inicial x^0 ; o estimador do multiplicador de Lagrange $\delta^0 > 0$; o parâmetro de barreira $\mu^0 > 0$; o parâmetro de atualização da barreira $0 < \tau < 1$; e a precisão de convergência $\varepsilon > 0$.

while as condições de KKT do problema (3.9) não forem satisfeitas, **do**

Com μ^k e δ^k fixos, obtenha x^{k+1} conforme a solução do problema reescalado:

$$x^{k+1} = \arg \min_x \left\{ L_\mu(x, \delta) = f(x) - \mu^k \sum_{j=1}^p \delta_j^k \psi \left((\mu^k)^{-1} h_j(x) \right) \right\}$$

Com a solução x^{k+1} , atualize os estimadores dos multiplicadores de Lagrange:

$$\delta_j^{k+1} = \delta_j^k \psi' \left((\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1}) \right), j = 1, \dots, p$$

Atualize o parâmetro barreira:

$$\mu^{k+1} = \tau \mu^k$$

Faça $k = k + 1$ e volte para o início do processo iterativo.

end

x^k e δ^k são os pontos ótimo.

Na Subseção 3.3.2 descreve-se um caso particular do método de reescalamento não linear, que é o método da função barreira logarítmica modificada. Este método possui uma função barreira que apresenta as propriedades necessárias apresentadas nesta seção para ser classificada como uma função de reescalamento, assim, este método pode operar no exterior da região factível do problema.

3.3.2 Método da Função Barreira Logarítmica Modificada

O método de reescalamento não linear necessita de uma função de reescalamento que apresente as propriedades (i)–(vi) descritas na seção anterior. Várias funções apresentam tais propriedades, tais como as funções exponencial e logarítmica modificadas. Neste trabalho, adota-se a FBLM apresentada em (3.14).

$$\psi(t) = \ln(t + 1), t \in (-1, \infty). \quad (3.14)$$

A função (3.14) tem sido amplamente utilizada [Sousa et al., 2009], [Pinheiro, 2012], [Lage, 2013], [Silva, 2014] e [Souza, 2016] devido às suas propriedades numéricas e, neste trabalho, também constitui a base para o desenvolvimento do método de solução aqui proposto.

Com a utilização da função barreira logarítmica modificada como função de reescalamiento, a função lagrangiana (3.10) do problema transformado é denominada de *função auxiliar barreira logarítmica modificada* (FABLM) a qual é apresentada em (3.15):

$$M_{\mu}(x, \delta) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \delta_j \ln(\mu^{-1} h_j(x) + 1), \quad (3.15)$$

em que δ_j , para $j = 1, \dots, p$ são os estimadores dos multiplicadores de Lagrange.

Uma vantagem da função auxiliar barreira logarítmica modificada $M_{\mu}(x, \delta)$ sobre a função auxiliar barreira logarítmica clássica, é que a primeira é definida na fronteira da região factível do problema original, o que pode ser verificado a partir da expressão (3.15) quando $h_j(x) = 0$. Neste caso, tem-se a partir de (3.15) que a $M_{\mu}(x, \delta) = f(x)$.

Os estimadores dos multiplicadores de Lagrange neste método podem ser atualizados utilizando-se a expressão geral (3.13) a qual pode ser utilizada para qualquer função barreira. Se nesta expressão, utilizarmos de forma específica a função barreira logarítmica modificada definida em (3.14), obtém-se a regra de atualização dada em (3.16):

$$\delta_j^{k+1} = \frac{\delta_j^k}{(\mu^k)^{-1} h_j(x^{k+1}) + 1}. \quad (3.16)$$

O mesmo algoritmo do método de reescalamiento não linear descrito no Algoritmo 3 pode ser também utilizado para o método da função barreira logarítmica modificada, desde que a função $\psi(t)$ dada em (3.14) seja adotada. Entretanto, se outras funções $\psi(t)$ forem escolhidas, desde que apresentem as propriedades (i)–(vi) descritas na seção anterior, outros métodos de reescalamiento não linear podem ser definidos.

Na seção seguinte será apresentado um método que também pode operar com o exterior da região factível. Tais métodos utilizam funções penalidades que penalizam as variáveis que não assumem os valores discretos estabelecidos.

3.4 Método de Função Penalidade

Diferente dos métodos de barreira que trabalham apenas no interior da região factível, o método de função penalidade não é um método estritamente factível. No método de penalidade, a saída da região factível é penalizada, assim, assume-se que o método opera com pontos no exterior da região factível, os quais são iterativamente penalizados e progressivamente levados à região factível. Trabalhos como [Liu et al., 2002], [Soler et al., 2013] e [Silva, 2016] utilizaram funções penalidade para tratar as variáveis discretas do problema de FPOR, servindo de base para a elaboração do método proposto neste trabalho. As variáveis discretas consideradas neste trabalho são as variáveis associadas aos *taps* dos transformadores.

3.4.1 Descrição geral do método

De acordo [Luenberger & Ye, 2008], os métodos de função penalidade têm como estratégia de solução a transformação de um problema restrito em um problema irrestrito através da inclusão das restrições penalizadas à função objetivo do problema. Similar à estratégia de solução dos métodos de barreira, tais restrições são multiplicadas por um parâmetro de penalidade de modo a penalizar qualquer violação das restrições penalizadas.

Para [Soler et al., 2013], uma abordagem para tratar as variáveis discretas no problema de FPOR consiste em considerá-las como contínuas e introduzir na função objetivo termos de penalidade quando tais variáveis assumem valores não discretos. Soler afirma que à medida que aumenta-se o fator penalidade as soluções do problema penalizado contínuo convergem para a solução do problema original.

Para a descrição deste método, considere um problema de programação não linear discreto somente com as restrições associadas às variáveis discretas, dado em (3.17):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a :} && x_k \in D_{x_k}, \quad k = 1, \dots, n_x, \end{aligned} \tag{3.17}$$

em que:

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: é uma função classe C^2 ;

$x = (x_1, \dots, x_{n_x})^T \in \mathbb{R}^n$: são variáveis de decisão;

$D_{x_k} = \{d_{k_1}, d_{k_2}, \dots, d_{k_n}\}$: é o conjunto de valores discretos para a variável x_k ;

k_n : é o número de valores discretos que as variáveis discretas x_k podem assumir.

Seja $P_k(x_k)$ uma função penalidade conforme (3.18):

$$P(x) = \gamma [p(x)]^\beta, \tag{3.18}$$

em que γ e β são parâmetros associados à amplitude e a forma da função penalidade $p(x)$ adotada, respectivamente. Neste trabalho a função penalidade para o tratamento das variáveis discretas no problema de FPOR é uma função penalidade senoidal proposta por [Soler et al., 2013]. Escolhendo uma função penalidade $p(x)$, podemos alterar a amplitude e a forma da mesma, variando valores para γ e β , respectivamente. Para os autores, γ deve crescer gradualmente de acordo com algum método heurístico de atualização e β , por alterar apenas a forma da função penalidade $p(x)$ escolhida, mantém-se constante no decorrer das iterações. Neste trabalho, considera-se $\beta = 2$.

A função $p(x)$ tem as seguintes características:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_k \in D_{x_k}, \quad k = 1, \dots, n_{x_k} \\ \delta > 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.19}$$

A estratégia de solução consiste *a priori*, em considerar todas as variáveis como con-

tínuas através de limitantes para os conjuntos discretos pré-estabelecidos, em seguida, adicionar a função penalidade à função objetivo do problema de modo que a penalidade obrigue as variáveis discretas assumirem valores discretos conforme as características apresentadas em (3.19). Obtém-se assim o problema penalizado (3.20), considerando $\gamma > 0$ como o parâmetro de penalidade:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) + P(x) \\ &\text{sujeito a :} && \underline{x} \leq x \leq \bar{x}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Para a solução do problema original, é necessário que $P(x)$ seja menor que uma tolerância de convergência ε estabelecida e, caso isto não ocorra, o parâmetro de penalidade γ é atualizado por uma heurística com um fator de atualização $1 < c < 2$, e o problema penalizado (3.20) é resolvido iterativamente até obter a precisão de convergência desejada. À medida que γ cresce gradualmente $P(x) \rightarrow 0$ e a solução do problema penalizado converge para a solução do problema original.

O método de penalidade descrito nesta seção apresenta dificuldades em sua aplicação. O parâmetro de penalidade γ e o seu fator de atualização c devem ser escolhidos de maneira criteriosa, uma vez que afetam a convergência do método e até mesmo não garantem que uma solução encontrada seja ótima. Valores demasiadamente grandes de γ podem causar mau condicionamento da matriz hessiana do problema, além de atribuir um peso excessivo na função penalidade em relação à função objetivo, de modo que a minimização tenha prioridade na função penalidade ao invés da função objetivo original. Por outro lado, para valores muito pequenos de γ a função penalidade pode tornar-se insignificante, não garantindo uma convergência das variáveis originalmente discretas para seus valores discretos. Para o fator de atualização c , alguns valores podem causar um término prematuro do método, ou seja, obtém-se uma solução factível porém, não ótima.

Nos métodos de penalidades, heurísticas são usadas para atualização do parâmetro de penalidade e o processo de solução é finalizado quando o valor assumido por cada variável discreta tenha uma diferença mínima dada por ε em relação a um valor pertencente ao

conjunto discreto atribuído à mesma, dado por:

$$|x_k^* - x_k^d| \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n_x, \quad (3.21)$$

em que: x_k^d é o valor discreto mais próximo de x_k^* .

A solução do problema original é obtida através da resolução de uma sequência de problemas contínuos penalizados que convergem para a solução do problema original.

Nos trabalhos de [Soler, 2011] e [Silva, 2016] o problema de FPOR com variáveis discretas, utilizando funções penalidades para o tratamento das mesmas, foi resolvido por meio do método de pontos interiores com filtro pelo *solver* gratuito *Interior Point OPTimizer* (IPOPT) [Wächter & Biegler, 2005].

Em [Silva, 2014] é apresentado um algoritmo para o método descrito, dado pelo Algoritmo 4):

Algoritmo 4: Algoritmo: Método de Penalidade.

Determinar a função Penalidade associada ao problema original

Faça $k = 0$ como iteração inicial e entre com os dados iniciais: o ponto inicial x^0 ; o parâmetro penalidade $\gamma^0 \geq 0$; o parâmetro de atualização da penalidade $c > 1$; e a precisão de convergência do método $\varepsilon > 0$.

while $p(x^k) > \varepsilon$ e $\|\nabla f_{\gamma^k}(x^k)\| > \varepsilon$, **do**

 Resolva o problema penalizado (3.20) com γ^k fixo e obtenha uma solução x^{k+1}

 Atualize o parâmetro de penalidade:

$$\gamma^{k+1} = c\gamma^k$$

 Faça $k = k + 1$ e volte para o início do processo iterativo.

end

x^k é o ponto ótimo.

Um caso particular do método de função penalidade é apresentado na Seção 3.4.2. Este método consiste em uma função penalidade senoidal a qual foi proposta especificamente para o tratamento das variáveis discretas do problema de FPO. Esta função tem propriedades interessantes para o problema, de modo que apenas os valores discretos es-

tabelecidos para as variáveis de natureza são obtidos.

3.4.2 Função Penalidade Senoidal

Nos trabalhos de [Soler, 2011] e [Soler et al., 2013], uma função penalidade senoidal é proposta para o tratamento das variáveis discretas do problema de FPOR, a qual será adotada neste trabalho para o mesmo fim.

Considere um problema de otimização não linear dado por (3.17)). A função penalidade desenvolvida por [Soler, 2011] satisfaz (3.15)) e é dada por (3.22):

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n_x} \left[\sin \left(\frac{x_i}{s_i^{sup} - s_i^{inf}} \pi + \alpha \right) \right]^2 \quad (3.22)$$

em que:

s_i^{inf} : é o valor discreto mais próximo inferiormente de x_i ;

s_i^{sup} : é o valor discreto mais próximo superiormente de x_i ;

α , tal que $0 \leq \alpha < \pi$, é escolhida de modo que a função $p(x) = 0$, somente nos valores discretos de x .

Nota-se que a função $p(x)$ assume valores positivos, ou seja, penaliza x a função objetivo somente se x não assumir valores discretos pertencentes ao conjunto discreto estabelecido. Caso contrário, se a variável discreta x assumir um valor discreto pertencente ao conjunto D_x não há uma penalização na função objetivo. A função penalidade proposta por [Soler, 2011] é contínua e diferenciável, de modo que o problema modificado pode ser resolvido por métodos de otimização que fazem o uso do cálculo de derivadas.

Podemos reescrever o problema original (3.17), com modificações associadas à função penalidade de modo a considerar apenas variáveis contínuas, dado por (3.23), tal que sua função objetivo pode ser denominada de função aumentada, devido ao acréscimo da

função penalidade na função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) + \gamma p(x) \\ &\text{sujeito a :} && \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned} \tag{3.23}$$

em que:

$$\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n_x}), \underline{x}_i = \min D_{x_i}, \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n_x}) \text{ e } \bar{x}_i = \max D_{x_i} \text{ para } i = 1, \dots, n_x.$$

Para uma boa compreensão do efeito que a função penalidade e seu respectivo parâmetro γ provoca na função objetivo, em [Soler et al., 2013] as Figuras 3.1 e 3.2 mostram a função objetivo $f(x) = x^2$, e esta acrescida da função penalidade senoidal e as alterações em sua forma. Nota-se que a função penalidade também insere vários máximos locais, dificultando a solução do problema. Para resolver esse problema, neste trabalho propõe-se uma estratégia de correção de inércia que garante a obtenção de apenas mínimos locais.

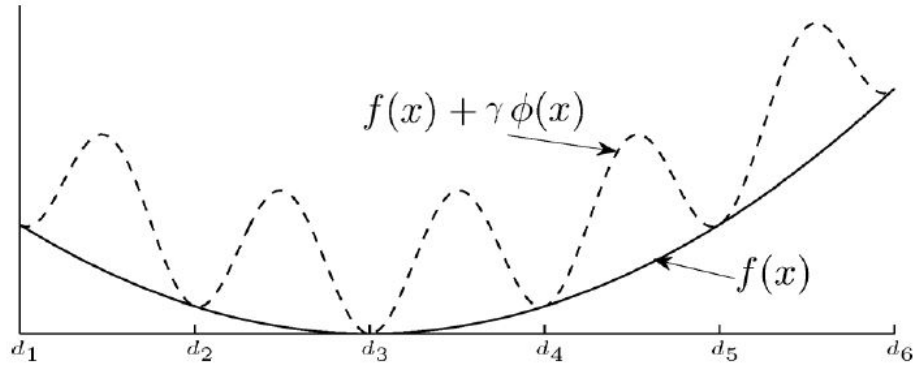


Figura 3.1: $\gamma = 5$ para o parâmetro de penalidade. [Soler et al., 2013]

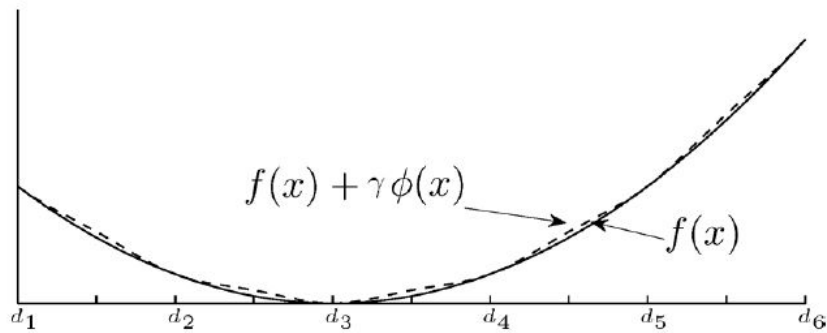


Figura 3.2: $\gamma = 0.2$ para o parâmetro de penalidade. [Soler et al., 2013]

No capítulo seguinte será apresentado o método proposto neste trabalho. O método foi baseado nos métodos de otimização descritos neste capítulo.

Capítulo 4

Método Proposto

Um dos métodos de solução que compõe a abordagem proposta para a solução do FPOR é o método da FBLC que se mostra eficaz para o tratamento das restrições de desigualdade. Entretanto, para restrições de igualdade, este método apresenta dificuldades, devido a necessidade de conhecer o conjunto de restrições ativas na solução.

Um dos principais métodos para o tratamento das restrições de desigualdade do problema é baseado nas funções barreiras. Com base nos trabalhos de [Granville, 1994] e [Fiacco & McCormick, 1987] que abordavam metodologias sobre método de pontos interiores, o método é caracterizado de pontos interiores devido a utilização de uma FBLC a qual não é definida na fronteira da região factível. Proposta por [Frisch, 1955], a FBLC apresentava problemas de mau condicionamento da matriz hessiana (matriz responsável em determinar o sistema de direções de busca do método) à medida que o método convergia para a solução do problema e a solução se aproximava à fronteira do problema original.

Na década de 90, [Polyak, 1992] propôs uma nova função barreira, denominada como Função Barreira Logarítmica Modificada (FBLM) que visa contornar os problemas gerados pela FBLC através de uma relaxação das restrições de desigualdade causando uma expansão na região factível do problema original, possibilitando o método operar em pontos fora da região factível original, o que caracteriza-o como método de pontos exteriores. Trabalhos como [Baptista et al., 2006] e [Sousa et al., 2009] também abordam os métodos

associados às funções barreiras. Em [Sousa et al., 2009] é proposto que as funções barreira façam a relaxação da região factível sobre as variáveis de folga e/ou excesso as quais tem sua condição de positividade relaxada e não nas restrições de desigualdade diretamente, como foi abordado por [Polyak, 1992].

Para a resolução do problema de FPOR, [Baptista et al., 2006] utilizaram os métodos baseados em barreira logarítmica clássica, barreira logarítmica modificada e métodos lagrangianos.

[Pinheiro, 2012] propôs um método de pontos interiores baseado na FBLM com estratégia de convergência global baseado em Levenberg-Marquardt. Em [Silva, 2014] foi proposto com o método de [Pinheiro, 2012] uma estratégia de convergência baseada na correção de inércia da matriz Hessiana do problema, a qual na solução do método é reduzida para uma matriz menor que corresponde apenas às direções das variáveis de decisões do problema e a mesma é verificada se é definida positiva ou não para garantir pontos de mínimos locais. A estratégia proposta em [Silva, 2014] é considerada por [Wächter & Biegler, 2005] como uma espécie de filtro, que garante através da inércia correta da matriz apenas direções para pontos de mínimo da função evitando pontos de máximo e de sela. Segundo [Nocedal & Wright, 2006] uma direção é de descida se a matriz reduzida tem a quantidade correta de autovalores positivos, negativos e nulos que definem se a submatriz associada às restrições é definida positiva.

Com o método proposto em [Pinheiro, 2012] e a estratégia de correção de inércia proposta em [Silva, 2014], é possível utilizar a função penalidade senoidal proposta em [Soler et al., 2013] para o tratamento das variáveis discretas do problema de FPOR. A estratégia de correção de inércia é responsável por garantir que se obtenha apenas pontos de mínimos na função penalidade, a qual insere diversos pontos de máximo e mínimos na função penalizada quando acrescentada à função objetivo do problema.

4.1 Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de Correção de Inércia utilizando uma Função Penalidade para o tratamento das Variáveis Discretas - MPIEECIFP

Neste capítulo será apresentado a abordagem proposta para a resolução do problema de FPOR-DM neste trabalho, denominado como Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de Correção de Inércia utilizando uma Função Penalidade para o tratamento das Variáveis Discretas (MPIEECIFP).

Para a descrição do método proposto, considera-se um problema geral de otimização não-linear, representado por uma função objetivo e restrições de igualdade e desigualdade, dado em (4.1):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f(z, y) \\
 &\text{sujeito a:} && g(z, y) = 0 \\
 &&& h(z, y) \leq 0 \\
 &&& y_i \in D_{y_i}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que:

$(z, y) \in \mathbb{R}^n$: é o vetor de variáveis de decisão do problema;

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$: são funções de classe C^2 e representam, respectivamente, a função objetivo e as restrições de igualdade e desigualdade;

D_{y_i} : representa o conjunto dos valores discretos que as variáveis y_i podem assumir.

Utilizando a função penalidade senoidal descrita na Seção 3.4.2 o problema (4.1) pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f(x) \\
 &\text{sujeito a:} && g(x) = 0 \\
 &&& h(x) \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

em que:

$x = (z, y) \in \mathbb{R}^n$: é o vetor de variáveis de decisão do problema;

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$: são funções de classe C^2 e representam, respectivamente, a função objetivo e as restrições de igualdade e desigualdade;

$f(x) = f(z, y) + \gamma p(x)$, ou seja, é a função objetivo já aumentada com a função penalidade;

Para resolver o problema (4.2), as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade através do acréscimo de variáveis de folga não negativas, dadas por $s \in \mathbb{R}_+^p$, transformando o problema (4.2) em outro problema equivalente, dado por (4.3):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a:} && g(x) = 0 \\ &&& h(x) + s = 0 \\ &&& s \geq 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

A inserção de uma restrição que estabelece a condição de não negatividade das variáveis de folga na formulação do problema, faz com que a restrição de desigualdade seja tratada pela FBLM baseada em [Polyak, 1992], que é somada à função objetivo do problema (4.3), resultando em (4.4):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \delta_i \ln(\mu^{-1} s_i + 1) \\ &\text{sujeito a:} && g(x) = 0 \\ &&& h(x) + s = 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira e $\delta \in \mathbb{R}_+^p$ é o vetor de estimadores dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade relacionadas às variáveis de folga.

Com o problema transformado (4.4), temos um problema de otimização apenas com restrições de igualdade que são, então, acrescentadas à função objetivo por meio dos multiplicadores de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $v \in \mathbb{R}_+^p$. Assim, obtém-se um problema de

otimização irrestrito dado pela função auxiliar, denominada de função lagrangiana, dada em (4.5):

$$L_\mu(x, s, \lambda, v) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \delta_i \ln(\mu^{-1} s_i + 1) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) + \sum_{i=1}^p v_i [h_i(x) + s_i] \quad (4.5)$$

Para a solução do problema irrestrito, aplicamos as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem de KKT dadas em [Bazaraa et al., 2006] à função lagrangiana do problema $(\nabla L(x, s, \lambda, v))$ obtemos o sistema não-linear (4.6):

$$\nabla f(x) + [Jg(x)]^t \lambda + [Jh(x)]^t v = 0 \quad (4.6a)$$

$$-\mu \bar{S}^{-1} \delta + v = 0 \quad (4.6b)$$

$$g(x) = 0 \quad (4.6c)$$

$$h(x) + s = 0 \quad (4.6d)$$

em que:

$Jg(x)$: é a matriz jacobiana associada às restrições de igualdade $g(x)$;

$Jh(x)$: é a matriz jacobiana associada às restrições de desigualdade $h(x)$;

$\bar{S}^{-1}$: tem sua definição apresentada em (4.7) e (4.8) e está associada às variáveis de folga;

$$\bar{S} = \text{diag}(s_1 + \mu, \dots, s_m + \mu) \quad (4.7)$$

$$\bar{S}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{s_1 + \mu}, \dots, \frac{1}{s_m + \mu}\right). \quad (4.8)$$

[Pinheiro, 2012] mostra que o produto $\bar{S}v$ através do teorema da dualidade forte, fornece a condição de folgas complementares entre as variáveis primais s e duais v . Considerando essa condição, reescrevemos o sistema não-linear (4.6) de modo a obter um novo

sistema não-linear considerando a condição de folgas complementares dado em (4.9):

$$\nabla f(x) + [Jg(x)]^t \lambda + [Jh(x)]^t v = 0 \quad (4.9a)$$

$$\bar{S}v - \mu\delta = 0 \quad (4.9b)$$

$$g(x) = 0 \quad (4.9c)$$

$$h(x) + s = 0 \quad (4.9d)$$

O método proposto para a solução do sistema não linear (4.9) é um método iterativo que tem sua inicialização através de um ponto inicial $k = 0$, $(x^k, s^k, \lambda^k, v^k)^T$, determinam-se as direções de busca a partir desse ponto $(dx^k, ds^k, d\lambda^k, dv^k)^T$, e o tamanho dos passos que serão aplicados nestas direções e desta forma obtém-se um novo ponto, $(x^{k+1}, s^{k+1}, \lambda^{k+1}, v^{k+1})^T$, de modo que o método convirja para a solução ótima do problema (4.2).

Na seção 4.1.1, será apresentado o sistema para a determinação das direções de busca do método obtido, por meio da linearização do sistema não-linear (4.9), através da fórmula de Taylor de primeira ordem.

4.1.1 Sistema para determinar as Direções de Busca

Com base nos trabalhos de [Pinheiro, 2012], [Silva, 2014] e [Souza, 2016], será apresentada a linearização das equações do sistema não-linear (4.9).

Linearização da equação (4.9a) (resíduo de viabilidade dual)

Com a linearização do sistema não-linear (4.9) através da fórmula de Taylor de primeira ordem, considera-se o novo ponto por (4.10):

$$(x^{k+1}, s^{k+1}, \lambda^{k+1}, v^{k+1}) = (x^k + dx^k, s^k + ds^k, \lambda^k + d\lambda^k, v^k + dv^k) \quad (4.10)$$

Reescrevendo a equação (4.9a)), temos (4.11):

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^p v_j \nabla h_j(x) = 0 \quad (4.11)$$

Considerando (4.11), aplica-se na vizinhança do ponto $(x^k, y^k, s^k, \lambda^k, v^k)$ a fórmula de Taylor de primeira ordem resultando em (4.12):

$$\nabla f(x^k + dx^k) + \sum_{i=1}^m (\lambda_i^k + d\lambda_i^k) \nabla g_i(x^k + dx^k) + \sum_{j=1}^p (v_j^k + dv_j^k) \nabla h_j(x^k + dx^k) = 0 \quad (4.12)$$

Resolvendo as expressões de (4.12) e aplicando propriedades distributivas, temos (4.13):

$$\begin{aligned} & \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) dx^k \\ & + \sum_{i=1}^m (\lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) dx^k + d\lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + d\lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) dx^k) \\ & + \sum_{j=1}^p (v_j^k \nabla h_j(x^k) + v_j^k \nabla^2 h_j(x^k) dx^k + dv_j^k \nabla h_j(x^k) + dv_j^k \nabla^2 h_j(x^k) dx^k) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Na expressão (4.13) desconsidera-se os termos mistos que envolvem produtos de direções, dados por $\sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) \Delta(x^k)$ e $\sum_{j=1}^p \Delta v_j^k \nabla^2 h_j(x^k) \Delta(x^k)$, assim, temos (4.14):

$$\begin{aligned} & \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) dx^k \\ & + \sum_{i=1}^m (\lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) dx^k + d\lambda_i^k \nabla g_i(x^k)) \\ & + \sum_{j=1}^p (v_j^k \nabla h_j(x^k) + v_j^k \nabla^2 h_j(x^k) dx^k + dv_j^k \nabla h_j(x^k)) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Agrupando os termos associados às direções e passando para o segundo membro da igualdade da expressão (4.14) os termos independentes das direções, temos (4.15):

$$\begin{aligned} & \left[\nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) + \sum_{j=1}^p v_j^k \nabla^2 h_j(x^k) \right] dx^k + \sum_{i=1}^m d\lambda_i^k \nabla g_i(x^k) + \\ & \sum_{j=1}^p dv_j^k \nabla h_j(x^k) = -\nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) - \sum_{j=1}^p v_j^k \nabla h_j(x^k). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Observando que: $\nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, \lambda^k, v^k) = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x^k) + \sum_{j=1}^p v_j^k \nabla^2 h_j(x^k)$, uma escrita mais compacta da expressão (4.15) é dada por (4.16):

$$\nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, \lambda^k, v^k) dx^k + Jg(x^k)^t d\lambda^k + Jh(x^k)^t dv^k = m^k \quad (4.16)$$

sendo que o termo m^k , denominado como *resíduo de viabilidade dual*, segundo [Pinheiro, 2012], e é expresso por (4.17):

$$m^k = -\nabla f(x^k) - Jg(x^k)^t \lambda^k - Jh(x^k)^t v^k. \quad (4.17)$$

Linearização da equação (4.9b) - (resíduo de complementariedade)

A equação a ser linearizada requer a consideração de uma linha j do conjunto de equações (4.9b), apresentado por:

$$(s_j + \mu) + v_j - \mu\delta_j = 0 \quad (4.18)$$

Linearizando cada equação representativa de cada linha j , ou seja, $j = 1, \dots, r$, tem-se que

$$(s_j^{k+1} + \mu) v_j^{k+1} - \mu\delta_j^k = 0, \text{ ou seja, } (s_j^k + ds_j^k + \mu) (v_j^k + dv_j^k) - \mu\delta_j^k = 0$$

podendo ser reescrita como:

$$(s_j^k + \mu) v_j^k + (s_j^k + \mu) dv_j^k + v_j^k ds_j^k + ds_j^k dv_j^k - \mu\delta_j^k = 0 \quad (4.19)$$

Considerando a igualdade da expressão (4.19), a linearização para todo o conjunto de equações (4.9b) pode ser representada em 4.20:

$$\bar{S}_k v^k + \bar{S}_k dv^k + \Lambda^k ds^k + ds^k \circ dv^k - \mu\delta_k = 0. \quad (4.20)$$

em que: $\Lambda^k = \text{diag}(v^k)$ e $ds^k \circ dv^k$, de acordo com (Silva, 2014) é denominado como produto de Hadamard, ou seja, o produto componente-a-componente entre os vetores

ds^k e dv^k . Logo, a igualdade 4.20 pode ser reescrita por 4.21:

$$\Lambda^k ds^k + \bar{S}_k dv^k = z^k \quad (4.21)$$

em que:

$$z^k = -\bar{S}_k v^k + \mu \delta^k - ds^k \circ dv^k. \quad (4.22)$$

O termo (4.22), dado por z^k , é denominado de *resíduo de complementariedade*.

Linearização da equação (4.9c)

Para realizar a linearização do conjunto de equações (4.9c), inicialmente é considerado:

$$g(x^{k+1}) = 0, \text{ ou seja, } g(x^k + dx^k) = 0,$$

e então, aplica-se a fórmula de Taylor de primeira ordem e obtém-se:

$$g(x^k) + Jg(x^k) dx^k = 0. \quad (4.23)$$

A igualdade representada na equação (4.23) pode ser reescrita por 4.24:

$$Jg(x^k) dx^k = t^k, \quad (4.24)$$

dado que t^k é expresso por:

$$t^k = -g(x^k). \quad (4.25)$$

Linearização da equação (4.9d)

Por fim, a linearização da equação (4.9d) é realizada de forma análoga a linearização anterior da equação (4.9c), considerando:

$$h(x^{k+1}) + s^{k+1} = 0, \text{ ou seja, } h(x^k + dx^k) + s^k + ds^k = 0.$$

Disto, segue-se que:

$$h(x^k) + Jh(x^k) dx^k + s^k + ds^k = 0. \quad (4.26)$$

Podendo ser reescrita conforme (4.27):

$$Jh(x^k) dx^k + ds^k = u^k, \quad (4.27)$$

sendo que:

$$u^k = -h(x^k) - s^k. \quad (4.28)$$

Para determinar as direções de busca, deve ser resolvido um sistema linear apresentado em (4.29), que considera para sua solução as equações apresentadas nesta seção.

O Sistema para determinar as Direções

O sistema (4.29) denominado como *sistema primal-dual*, quando solucionado, determina as direções de busca do método. Considerando as equações apresentadas em (4.16), (4.21), (4.24) e 4.27) é possível determiná-lo. O *sistema primal-dual* pode ser expresso por:

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Lambda^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^k \\ ds^k \\ dv^k \\ d\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ z^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

em que I_p é a matriz identidade de ordem p e $K = \nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, v^k, \lambda^k)$.

Para [Nocedal & Wright, 2006] o sistema primal-dual descrito em (4.29) é escrito em sua forma simétrica, multiplicando a segunda linha do sistema por $\bar{S}_k^{-1}$, sendo reescrito por (4.30):

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} \Lambda^k & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^k \\ ds^k \\ dv^k \\ d\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \bar{S}_k^{-1} \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

As vantagens de reescrever o sistema (4.29), transformando-o em um sistema simétrico,

(4.30), é a possibilidade de utilizar pacotes computacionais para a resolução de sistemas de equações simétricos.

4.1.2 Estratégia de Correção de Inércia

De acordo com [Silva, 2014], as direções de busca determinadas por meio da resolução do Sistema (4.29) ou (4.30) nem sempre convergem para pontos de mínimos locais, ou seja, podem convergir para pontos de máximos também. Esta convergência ocorre devido a solução visar apenas os pontos que satisfaçam as condições de KKT e, de acordo com suas características apresentadas em [Bazaraa et al., 2006], pontos de máximo e outros pontos estacionários satisfazem tais condições.

A definição de inércia de uma matriz é apresentada e é de fundamental importância neste contexto. Esta definição tem por base que, para matrizes simétricas, os autovalores são todos números reais [Silva, 2014], [Nocedal & Wright, 2006].

Definição 1 (A inércia de uma matriz simétrica) : *A inércia de uma matriz simétrica A é dada pela tripla ordenada $I(A) = (i_+, i_-, i_0)$, em que i_+, i_-, i_0 são os números de autovalores positivos, negativos e nulos da matriz A , respectivamente.*

Para determinar a inércia de uma matriz simétrica, atenta-se ao teorema:

Teorema 1 (Teorema da Inércia de Sylvester) : *Seja uma matriz simétrica A e uma matriz não-singular qualquer de mesma dimensão, dada por S . Então, $I(A) = I(SAS^T)$.*

Corolário 1 *Qualquer permutação simétrica de linhas e colunas preserva a inércia de uma matriz.*

Uma direção de descida para o sistema primal-dual, (4.29), é obtida se a matriz (4.31) for definida positiva no núcleo da matriz das restrições (4.32) [Nocedal & Wright, 2006]. Apresenta-se a matriz reduzida que deve ser definida positiva no núcleo da matriz das restrições dada em (4.31) e, também, a própria matriz de restrições dada por (4.32).

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} \Lambda^k \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} Jg(x^k) & 0 \\ Jh(x^k) & I_p \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

A direção de descida ocorre quando a matriz A_k do sistema primal dual (4.29):

$$A_k = \begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} \Lambda^k & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

possui inércia:

$$I(A_k) = (n + p, m + p, 0). \quad (4.34)$$

Estas abordagens e resultados apontados por [Nocedal & Wright, 2006] estão de acordo com os resultados de dualidade onde, em um ponto de sela da função Lagrangiana para qual o *gap* de dualidade é nulo entre as funções primal e dual, espera-se que a matriz hessiana possua uma quantidade de autovalores positivos determinada por $n + p$, de modo que estes estão associados às variáveis primais e ao problema de minimização, entretanto, para os autovalores negativos que estão associados às variáveis duais e ao problema de maximização, têm sua quantidade de autovalores negativos determinada por $m + p$.

Os autores [Nocedal & Wright, 2006] afirmam que em situações onde a matriz A_k não possui a inércia desejada, há de ser feita uma modificação na mesma, visando obter direções de descida para resolver o problema.

Com base nos trabalhos de [Nocedal & Wright, 2006] e [Silva, 2014], uma modificação na matriz A_k é realizada de modo a corrigir a sua inércia. De início, nota-se alguns pontos: a matriz $\bar{S}_k^{-1}\Lambda^k$ é sempre definida positiva, por outro lado, a matriz K a qual é dada por $\nabla_{xx}^2 L(x^k, s^k, v^k, \lambda^k)$ não possui a mesma garantia. Então, a ideia da correção de inércia é substituir essa matriz K por uma matriz $K + \beta I_n$, sendo que $\beta > 0$, deve ter um valor suficientemente grande para garantir que a matriz A_k terá a inércia apresentada em (4.34). *A priori*, o valor do parâmetro β não é conhecido de modo que sucessivos testes numéricos com valores sucessivamente maiores conforme, (4.35), devem ser testados, até que a inércia da matriz A_k seja obtida. Assim, o parâmetro β sofre aumentos sucessivos conforme 4.35:

$$\beta_{k+1} = \kappa_1 \beta_k, \quad (4.35)$$

em que $\kappa_1 > 1$ deve ser pré-especificado.

Uma singularidade na matriz A_k pode ser obtida através de uma deficiência de posto que a matriz $Jg(x^k)$ apresenta. Esta deficiência pode ser evitada por meio da utilização de um parâmetro $\gamma \geq 0$, além do termo βI_n . Então, com tais correções, temos a matriz primal-dual modificada:

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1}\Lambda^k & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

O sinal "−" para a perturbação em $-\gamma I_m$ evita a singularidade da matriz (4.36) e, também, evita que um número excessivo de autovalores positivos sejam produzidos de modo a facilitar na obtenção da inércia desejada.

A fim de determinar a inércia da matriz $\tilde{A}^k$, uma proposta feita no trabalho de [Pineiro, 2012] mostrou-se cara computacionalmente o que inviabilizou a sua aplicação. Então, utilizando um comando interno do *Matlab*, denominado de "eig", o qual realiza o cálculo dos autovalores positivos, negativos e nulos de uma determinada matriz, portanto,

através deste comando é possível determinar a inércia da matriz $\tilde{A}^k$.

Ao obter a inércia desejada da matriz $\tilde{A}^k$, o valor de β que tinha um crescimento sucessivo, é reduzido por um parâmetro $\kappa_2 > 1$ para a iteração seguinte e, para o parâmetro γ , adota-se um valor próximo a zero sempre que este termo for necessário, isto é, quando a matriz modificada apresentar indícios de singularidade. Na prática, esta singularidade não é frequente, o que ocorre é uma "quase" singularidade e, para avaliar quão próxima a matriz está dessa singularidade, um comando do *Matlab* dado por "cond" é utilizado.

Um algoritmo baseado em [Silva, 2014] que baseou-se em [Nocedal & Wright, 2006] que, por sua vez, se baseou em um procedimento mais elaborado apresentado por [Wächter & Biegler, 2005] é apresentado no Algoritmo 5. Neste algoritmo, a inércia da matriz é testada em cada iteração do método.

A correção de inércia pode divergir de pontos de mínimos locais caso os parâmetros associados à ela não sejam escolhidos apropriadamente. Para evitar este problema, em pacotes computacionais comerciais que utilizam estratégias como esta, é implementado um método auxiliar, denominado de *método de restauração*. Neste trabalho esta implementação auxiliar não foi aplicada, entretanto, os resultados apresentados no Capítulo 5 mostram a convergência do método.

Algoritmo 5: Algoritmo da Correção de Inércia.

Inicialização: faça $\beta \leftarrow \beta_0$ e escolha $\kappa_1 > 1$ e $\kappa_2 > 1$;

Faça $\beta \leftarrow \beta/\kappa_2$ e $\gamma \leftarrow 0$;

while $I(A^k) \neq (n+p, m+p, 0)$, *faça* $\beta \leftarrow \kappa_1\beta$ **e do**

if A^k possui autovalores nulos **then**

 | $\gamma \leftarrow 10^{-6}$

end

if $\beta = 0$ **then**

 | $\beta \leftarrow 10^{-4}$

end

 Realize a operação interna do *Matlab*: **eig** e volte para o início do processo iterativo.

end

Com a estratégia de correção de inércia aplicada para obter a inércia desejada da matriz dos sistemas de direções, de modo a garantir pontos de mínimos, calculam-se as direções de busca utilizando a matriz modificada, $\tilde{A}^k$, definida em (4.36).

4.1.3 Cálculo das direções

Considerando o sistema primal-dual modificado:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} \Lambda^k & 0 & I_p \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^k \\ ds^k \\ dv^k \\ d\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \bar{S}_k^{-1} \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

e escrevendo-o de forma assimétrica:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} \Lambda^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^k \\ ds^k \\ dv^k \\ d\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Portanto, com estes sistemas apresentados em (4.37) e (4.38), o procedimento previsor-

corretor do método proposto com base no trabalho de [Mehrotra, 1992b], é apresentado:

Passo Previsor

Conforme proposto em [Mehrotra, 1992b], no passo previsor, supõe-se que o termo não linear $ds^k \circ dv^k$, denotado produto de Hadamard, seja aproximado com valor nulo no resíduo π^k , já que não há informações para o cálculo deste termo. Assim, tem-se o valor aproximado de π^k dado por:

$$\tilde{\pi}^k = -\bar{S}_k v^k + \mu \delta^k. \quad (4.39)$$

Na literatura, usualmente, o parâmetro μ apresentado em (4.39) é desconsiderado, entretanto, com base em [Pinheiro, 2012], este parâmetro não é desconsiderado e é utilizado no cálculo do passo previsor e, segundo o autor, o mesmo possui influência nas condições de complementariedade.

Com tais considerações, calculam-se as direções do passo previsor a partir do sistema:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \bar{S}_k^{-1} \Lambda^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x^k \\ \tilde{d}s^k \\ \tilde{d}v^k \\ \tilde{d}\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \tilde{\pi}^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Com a resolução do sistema (4.40) e a exploração da estrutura esparsa da matriz, obtém-se as direções de busca do procedimento previsor, $\tilde{d}x^k$, $\tilde{d}s^k$, $\tilde{d}v^k$ e $\tilde{d}\lambda^k$, como segue:

Por meio da última linha do sistema (4.40), tem-se:

$$Jh(x^k) \tilde{d}x^k + \tilde{d}s^k = \mu^k, \quad (4.41)$$

ou seja,

$$\tilde{d}s^k = \mu^k - Jh(x^k). \quad (4.42)$$

Para a segunda linha do sistema (4.40), tem-se:

$$\Lambda^k \tilde{d}s^k + \overline{S}_k \tilde{d}v^k = \tilde{\pi}^k, \quad (4.43)$$

e, portanto,

$$\tilde{d}v^k = \overline{S}_k^{-1} \left(\tilde{\pi}^k - \Lambda^k \tilde{d}s^k \right). \quad (4.44)$$

Para as direções de busca $\tilde{d}x^k$ e $\tilde{d}\lambda^k$, a primeira linha do sistema (4.40) é considerada:

$$(K + \beta I_n) \tilde{d}x^k + Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k + Jh(x^k)^T \tilde{d}v^k = m^k. \quad (4.45)$$

Substituindo em (4.45) a direção de busca obtida para $\tilde{d}v^k$ em (4.44), tem-se:

$$(K + \beta I_n) \tilde{d}x^k + Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k + Jh(x^k)^T \overline{S}_k^{-1} \left(\tilde{\pi}^k - \Lambda^k \tilde{d}s^k \right) = m^k. \quad (4.46)$$

Agora, substitui-se o valor de $\tilde{d}s^k$ determinado em (4.42) na equação (4.46), tem-se:

$$(K + \beta I_n) \tilde{d}x^k + Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k + Jh(x^k)^T \overline{S}_k^{-1} \left[\tilde{\pi}^k - \Lambda^k \left(\mu^k - Jh(x^k) \tilde{d}x^k \right) \right] = m^k, \quad (4.47)$$

e segue-se:

$$\left[K + \beta I_n + Jh(x^k)^T \overline{S}_k^{-1} \Lambda^k Jh(x^k) \right] \tilde{d}x^k + Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k + Jh(x^k)^T \overline{S}_k^{-1} (\tilde{\pi}^k - \Lambda^k \mu^k) = m^k. \quad (4.48)$$

Definindo-se:

$$\theta_k = K + \beta I_n + Jh(x^k)^T \overline{S}_k^{-1} \Lambda^k Jh(x^k) \quad (4.49)$$

e

$$\tilde{p}^k = Jh(x^k)^T \overline{S}_k^{-1} (\tilde{\pi}^k - \Lambda^k \mu^k). \quad (4.50)$$

Deste modo, a equação (4.48) pode ser reescrita como:

$$\theta_k \tilde{d}x^k + Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k = m^k - \tilde{p}^k. \quad (4.51)$$

Portanto, juntando a terceira equação do sistema (4.40) com (4.51) obtém o *sistema*

reduzido:

$$\begin{pmatrix} \theta_k & Jg(x^k)^T \\ Jg(x^k)^T & -\gamma I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}x^k \\ \tilde{d}\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k - \tilde{p}^k \\ t^k \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

E, da segunda equação de (4.52) pode-se obter:

$$Jg(x^k) \tilde{d}x^k = \gamma \tilde{d}\lambda^k(x^k). \quad (4.53)$$

Com a (4.51), obtém-se:

$$Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k = m^k - \tilde{p}^k - \theta_k \tilde{d}(x^k), \quad (4.54)$$

e multiplicando-a por θ_k^{-1} , tem-se de forma equivalente:

$$\theta_k^{-1} Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k = \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - \tilde{d}x^k. \quad (4.55)$$

A multiplicação de (4.55) por $Jg(x^k)$, resulta em:

$$Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k = Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - Jg(x^k) \tilde{d}x^k. \quad (4.56)$$

Substituindo (4.53) em (4.56), tem-se:

$$Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k = Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - (\gamma \tilde{d}\lambda^k + t^k). \quad (4.57)$$

Agora, agrupando-se os termos com a direção $\tilde{d}\lambda^k$, pode-se concluir:

$$\left[Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^T + \gamma I_m \right] \tilde{d}\lambda^k = Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - t^k. \quad (4.58)$$

Isolando $\tilde{d}\lambda^k$ tem-se:

$$\tilde{d}\lambda^k = \left[Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^T + \gamma I_m \right]^{-1} \left[Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - t^k \right]. \quad (4.59)$$

Com isto, calcula-se $\tilde{d}x^k$:

$$\tilde{d}x^k = \theta_k^{-1} \left[m^k - \tilde{p}^k - Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k \right]. \quad (4.60)$$

Passo Corretor

Por meio das direções calculadas pelo passo previsor, calculam-se as direções corrigidas. De modo a considerar os termos de segunda ordem no resíduos de complementariedade:

$$\pi^k = -\bar{S}_k v^k + \mu \delta^k - \tilde{d}s^k \circ \tilde{d}v^k. \quad (4.61)$$

Para este caso, o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{pmatrix} K + \beta I_n & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Lambda^k & 0 & \bar{S}_k \\ Jg(x^k) & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Jh(x^k) & I_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^k \\ ds^k \\ dv^k \\ d\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^k \\ \pi^k \\ t^k \\ u^k \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

De modo análogo ao passo previsor, as direções corrigidas são calculadas a partir da solução do sistema (4.62).

$$d\lambda^k = \left[Jg(x^k) \theta_k^{-1} Jg(x^k)^T + \gamma I_m \right]^{-1} \left[Jg(x^k) \theta_k^{-1} (m^k - \tilde{p}^k) - t^k \right] \quad (4.63)$$

$$dx^k = \theta_k^{-1} \left[m^k - \tilde{p}^k - Jg(x^k)^T \tilde{d}\lambda^k \right] \quad (4.64)$$

$$ds^k = \mu^k - Jh(x^k) dx^k \quad (4.65)$$

$$dv^k = \bar{S}_k^{-1} (\pi^k - \Lambda^k ds^k) \quad (4.66)$$

em que: $\theta_k = K + \beta I_n + Jh(x^k)^T \bar{S}_k^{-1} \Lambda^k Jh(x^k)$, conforme definido em (4.49), e:

$$p^k = Jh(x^k)^T \bar{S}_k^{-1} (\pi^k - \Lambda^k \mu^k). \quad (4.67)$$

4.1.4 Cálculo do comprimento dos passos

O cálculo do comprimento dos passos das variáveis primais (P) e duais (D) para as direções predictor e corretor já calculadas são os mesmos utilizados no trabalho de [Pinheiro et al., 2015] e [Souza, 2016].

Cálculo do comprimento dos passos para as variáveis primais:

$$\alpha_{P,prev}^k = \rho \min \left[1, -\frac{s_j^k}{\tilde{d}s_j^k} : s_j^k > 0 \text{ e } \tilde{d}s_j^k < 0 \right], \quad (4.68)$$

$$\alpha_{P,cor}^k = \rho \min \left[1, -\frac{s_j^k}{ds_j^k} : s_j^k > 0 \text{ e } ds_j^k < 0 \right], \quad (4.69)$$

Cálculo do comprimento dos passos para as variáveis duais:

$$\alpha_{D,prev}^k = \rho \min \left[1, -\frac{s_j^k}{\tilde{d}s_j^k} : s_j^k > 0 \text{ e } \tilde{d}s_j^k < 0 \right], \quad (4.70)$$

$$\alpha_{D,cor}^k = \rho \min \left[1, -\frac{s_j^k}{\tilde{d}s_j^k} : s_j^k > 0 \text{ e } \tilde{d}s_j^k < 0 \right], \quad j = 1, \dots, r. \quad (4.71)$$

sendo que ρ pode ser determinado através do procedimento apresentado por [Wright, 1995], dado por:

$$\rho = 1 - \frac{1}{9\sqrt{q}} \quad (4.72)$$

considera-se q a variável que representa o número de restrições do problema.

4.1.5 Cálculo do novo ponto

Após o calculo das direções e do comprimento dos passos das mesmas, calculam-se novas soluções para o previsor (4.73) e outra, para o corretor (4.74).

$$\begin{aligned}
 x_{prev}^+ &= x^k + \alpha_{P,prev}^k \tilde{d}x^k \\
 s_{prev}^+ &= s^k + \alpha_{P,prev}^k \tilde{d}s^k \\
 v_{prev}^+ &= v^k + \alpha_{D,prev}^k \tilde{d}v^k \\
 \lambda_{prev}^+ &= \alpha^k + \alpha_{D,prev}^k \tilde{d}\alpha^k
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
 x_{cor}^+ &= x^k + \alpha_{P,cor}^k dx^k \\
 s_{cor}^+ &= s^k + \alpha_{P,cor}^k ds^k \\
 v_{cor}^+ &= v^k + \alpha_{D,cor}^k dv^k \\
 \lambda_{cor}^+ &= \alpha^k + \alpha_{D,cor}^k d\alpha^k
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

4.1.6 Atualização dos parâmetros de barreira e estimadores de Lagrange

Como em [Pinheiro et al., 2015], a atualização do parâmetro de barreira μ é feita por heurística:

$$\mu^{k+1} = \tau \mu^k, \quad 0 < \tau < 1 \tag{4.75}$$

e uma relaxação do parâmetro μ é realizada para todo s^{k+1} , de acordo com o teste:

Se $s^{k+1} \geq -\mu^{k+1}$, o resultado de (4.75) permanece.

Caso contrário, se $s^{k+1} < \mu^{k+1}$, μ é atualizada por:

$$\mu^{k+1} = -(1 + \tau) \times \min(s) \tag{4.76}$$

em que o parâmetro de atualização $\tau \in (0, 1)$.

Os estimadores de Lagrange δ são atualizados de acordo com [Pinheiro et al., 2015]:

$$\delta^{k+1} = \lambda^{k+1} \tag{4.77}$$

4.1.7 Critério de Parada

O critério de parada adotado para este trabalho é o mesmo adotado por [Pinheiro et al., 2015]. De modo que, quando os resíduos associados à factibilidade primal, à factibilidade dual e às folgas complementares assumirem valores suficientemente pequenos, pré-determinado por uma precisão $\epsilon > 0$.

Isto pode ser expresso por:

$$\|\nabla L(x^k, s^k, v^k, \lambda^k)\|_\infty \leq \epsilon \quad (4.78)$$

4.1.8 O Algoritmo

Em [Silva, 2014] é apresentado um algoritmo para o método descrito, dado pelo Algoritmo 6:

Algoritmo 6: Algoritmo da Correção de Inércia.

Inicialize com os dados de entrada: o parâmetro de barreira $\mu^0 > 0$; o fator de redução de $\tau_1 \in (0, 1)$; o fator de nova relaxação $\tau_2 > 0$; o fator de escolha entre passo previsor e corretor $X > 0$; e os estimadores dos multiplicadores de Lagrange $\delta^0 > 0$.

Inicialize ainda: a variável primal x^0 ; as variáveis de correção de inércia, dadas em 5; e o contador de iterações $k = 0$.

Calcule: $f(x^k), \nabla f(x^k), g(x^k), Jg(x^k), h(x^k)$ e $Jh(x^k)$;

Calcule: $v^0 \leftarrow -h(x^0)$ e monte as matrizes $\bar{S}_k$ e $\bar{S}_k^{-1}$;

Calcule: $v^0 \leftarrow \mu^0 \bar{S}_k^{-1} \delta^0$ e

$$\lambda^0 \leftarrow - \left[Jg(x^k) Jg(x^0)^T \right]^{-1} Jg(x^0) \left[\nabla f(x^0) + Jh(x^0)^T v^0 \right];$$

Determine a matriz Λ^k ;

Construa a matriz A_k e utilize a correção de inércia em 5 para determinar os parâmetros β e γ de modo que $\tilde{A}_k$ tenha a inércia desejada;

Calcule os resíduos do previsor: $m^k, \tilde{\pi}^k, t^k$ e μ^k ;

Calcule o vetor $\tilde{p}^k$ e θ_k ;

Calcule as direções do procedimento previsor: $\tilde{d}\lambda^k, \tilde{d}x^k, \tilde{d}s^k$ e $\tilde{d}v^k$;

Calcule os passos $\alpha_{P,prev}^k$ e $\alpha_{D,prev}^k$ e a nova solução do previsor:

$$x_{prev}^+, s_{prev}^+, \lambda_{prev}^+ \text{ e } v_{prev}^+;$$

Calcule o resíduo π^k e o vetor p^k ;

Calcule as direções do procedimento corretor: $d\lambda^k, dx^k, ds^k$ e dv^k ;

Calcule os passos $\alpha_{P,cor}^k$ e $\alpha_{D,cor}^k$ e a nova solução do corretor: $x_{cor}^+, s_{cor}^+, \lambda_{cor}^+$ e v_{cor}^+ ;

...

```
while  $\|m^k\|_\infty > \epsilon$  or  $\|\pi^k\|_\infty > \epsilon$  or  $\|t^k\|_\infty > \epsilon$  or  $\|u^k\|_\infty > \epsilon$  do
  Atualize a solução:  $x^{k+1}, s^{k+1}, \lambda^{k+1}$  e  $v^{k+1}$ ;

  Atualize o parâmetro de barreira;

  Atualize os estimadores dos multiplicadores de Lagrange;

  Faça  $k = k + 1$ ;

  Calcule:  $f(x^k), \nabla f(x^k), g(x^k), Jg(x^k), h(x^k)$  e  $Jh(x^k)$ ;

  Monte as matrizes  $\bar{S}_k, \bar{S}_k^{-1}$  e  $\Lambda^k$ ;

  Construa a matriz  $A_k$  e utilize a correção de inércia para determinar os
    parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  de modo que  $\tilde{A}_k$  tenha a inércia desejada;

  Calcule os resíduos do previsor:  $m^k, \tilde{\pi}^k, t^k$  e  $\mu^k$ ;

  Calcule o vetor  $\tilde{p}^k$  e  $\theta_k$ ;

  Calcule as direções do procedimento previsor:

     $\tilde{d}\lambda^k, \tilde{d}x^k, \tilde{d}s^k$  e  $\tilde{d}v^k$ ;

  Calcule os passos  $\alpha_{P,prev}^k$  e  $\alpha_{D,prev}^k$  e a nova solução do previsor:

     $x_{prev}^+, s_{prev}^+, \lambda_{prev}^+$  e  $v_{prev}^+$ ;

  Calcule o resíduo  $\pi^k$  e o vetor  $p^k$ ;

  Calcule as direções do procedimento corretor:

     $d\lambda^k, dx^k, ds^k$  e  $dv^k$ ;

  Calcule os passos  $\alpha_{P,cor}^k$  e  $\alpha_{D,cor}^k$  e a nova solução do corretor:

     $x_{cor}^+, s_{cor}^+, \lambda_{cor}^+$  e  $v_{cor}^+$ ;

  Retorne a solução ótima:  $x^* = x^k, s^* = s^k, \lambda^* = \lambda^k$  e  $v^* = v^k$ .

end
```

$x^* = x^k, s^* = s^k, \lambda^* = \lambda^k$ e $v^* = v^k$ é a solução ótima.

Capítulo 5

Testes Numéricos

Neste capítulo o Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de Correção de Inércia utilizando uma Função Penalidade (MPIEECIFP) para o tratamento das variáveis discretas é aplicado à resolução de problemas de FPOR-DM (com variáveis discretas) para os sistemas IEEE de 14, 30, 57 e 118 barras. Os dados destes sistemas estão disponíveis em [Chistie, 2017]. Os resultados apresentados têm dois objetivos básicos: (i) avaliar a importância de se estabelecer estratégias de correção de inércia para a obtenção de soluções discretas confiáveis, ou seja, soluções que pertençam ao conjunto discreto pré-estabelecido e (ii) comparar o método da FBLC e o método da FBLM para o tratamento das restrições de desigualdade do FPOR, quando as variáveis discretas são tratadas pelo método da função de penalidade senoidal descrito no Capítulo 3. Destaca-se que os métodos FBLC e FBLM podem ser vistos como casos particulares do MPIEECIFP proposto.

A implementação computacional deste método foi realizada em Matlab, utilizando-se uma base computacional desenvolvida em [Souza, 2016]. Os testes numéricos foram realizados em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU @ 3.60 GHz e um sistema operacional Windows 10 Pro, 64 bits.

Na Seção 5.5, o problema de FPOR é resolvido para os sistemas testes investigados considerando os *taps* de transformadores e reatâncias *shunt* de bancos de capacitores/reatores como variáveis contínuas. Esta solução é utilizada como referência de comparação para os

casos discretos estudados nas seções subsequentes. Na seção 5.6, são feitos testes computacionais para mostrar a importância da estratégia de correção de inércia proposta neste trabalho para a obtenção de soluções factíveis para as variáveis discretas. Neste trabalho, apenas os *taps* de transformadores foram efetivamente modelados como variáveis discretas. Na seção 5.7, os métodos de FBLC e FBLM são analisados na solução de problemas de FPOR discreto.

A seguir, são descritas as características dos sistemas elétricos e modelos matemáticos utilizados nos testes.

5.1 O sistema IEEE 14 barras

As características do sistema IEEE 14 barras cujo diagrama esquemático é mostrado na Figura 5.1 são as seguintes:

- 1 barra *slack*;
- 4 barras com controle de geração de reativos;
- 9 barras de carga;
- 1 banco de capacitor.
- 20 linhas de transmissão;
- 3 transformadores com *tap* variável.

A dimensão do problema é definida pelo modelo matemático do problema de FPOR-DM para o sistema com as características citadas, apresentada a seguir:

- 22 restrições de igualdade;
- 42 restrições de desigualdade;
- 28 variáveis contínuas;

- 3 variáveis discretas.

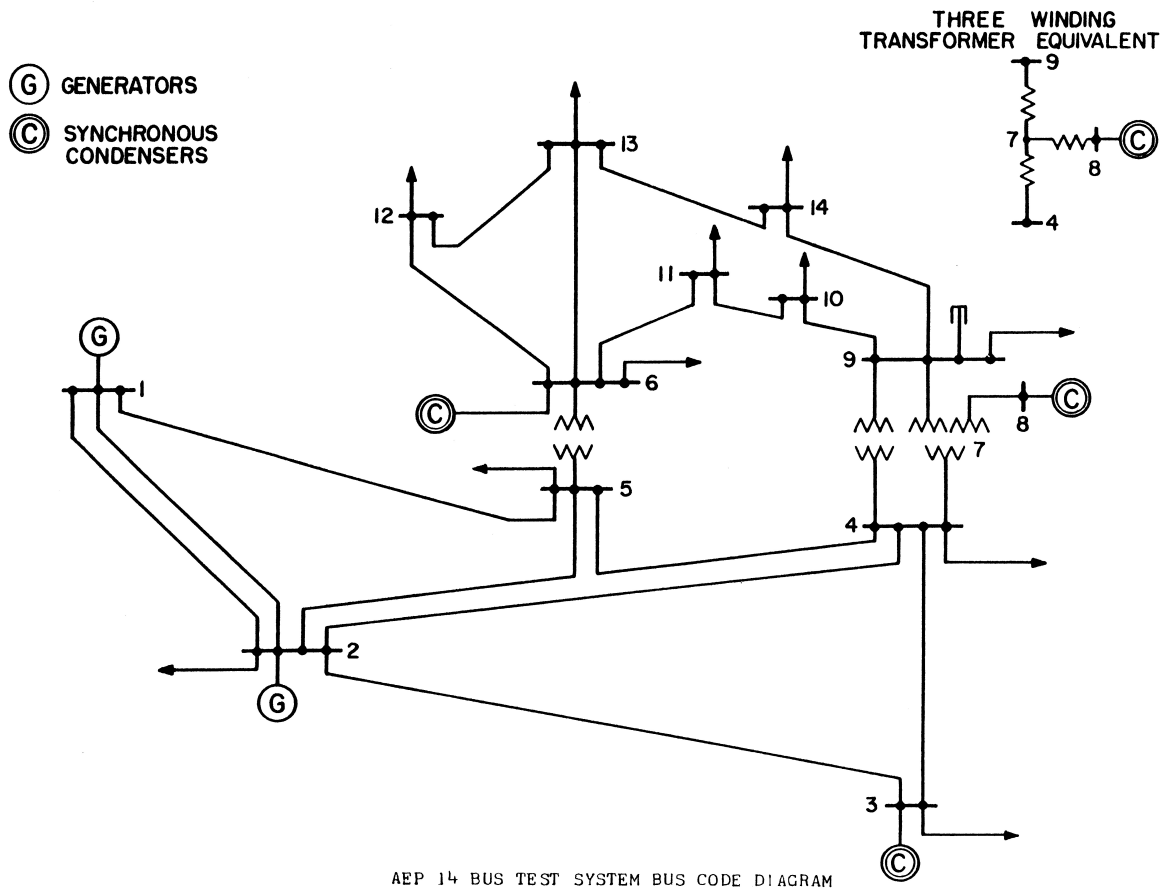


Figura 5.1: Sistema Elétrico IEEE de 14 barras. Fonte: [Chistie, 2017].

5.2 O sistema IEEE 30 barras

As características do sistema IEEE 30 barras cujo diagrama esquemático é mostrado na Figura 5.2 são as seguintes:

- 1 barra *slack*;
- 5 barras com controle de geração de reativos;
- 24 barras de carga;
- 2 bancos de capacitores
- 41 linhas de transmissão;

- 4 transformadores com *tap* variável.

A dimensão do problema é definida pelo modelo matemático do problema de FPORDM para o sistema com as características citadas, apresentada a seguir:

- 53 restrições de igualdade;
- 78 restrições de desigualdade;
- 59 variáveis contínuas;
- 6 variáveis discretas.

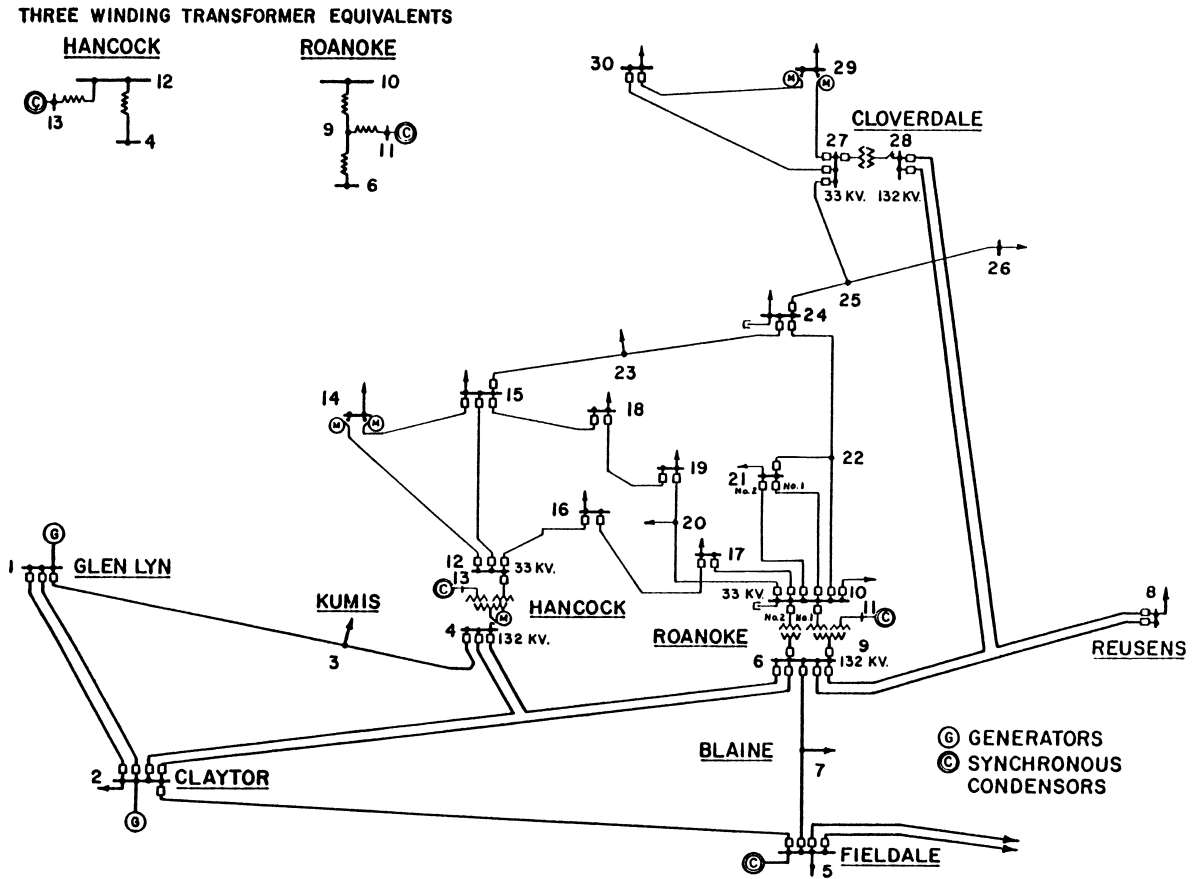


Figura 5.2: Sistema Elétrico IEEE de 30 barras. Fonte: [Chistie, 2017].

5.3 O sistema IEEE 57 barras

As dimensões do sistema IEEE 57 barras cujo diagrama esquemático é mostrado na Figura 5.3 são as seguintes:

- 1 barra *slack*;
- 6 barras com controle de geração de reativos;
- 50 barras de carga;
- 3 bancos de capacitores;
- 80 linhas de transmissão;
- 20 transformadores com *tap* variável;

A dimensão do problema é definida pelo modelo matemático do problema de FPORDM para o sistema com as características citadas, apresentada a seguir:

- 106 restrições de igualdade;
- 81 restrições de desigualdade;
- 114 variáveis contínuas;
- 17 variáveis discretas.

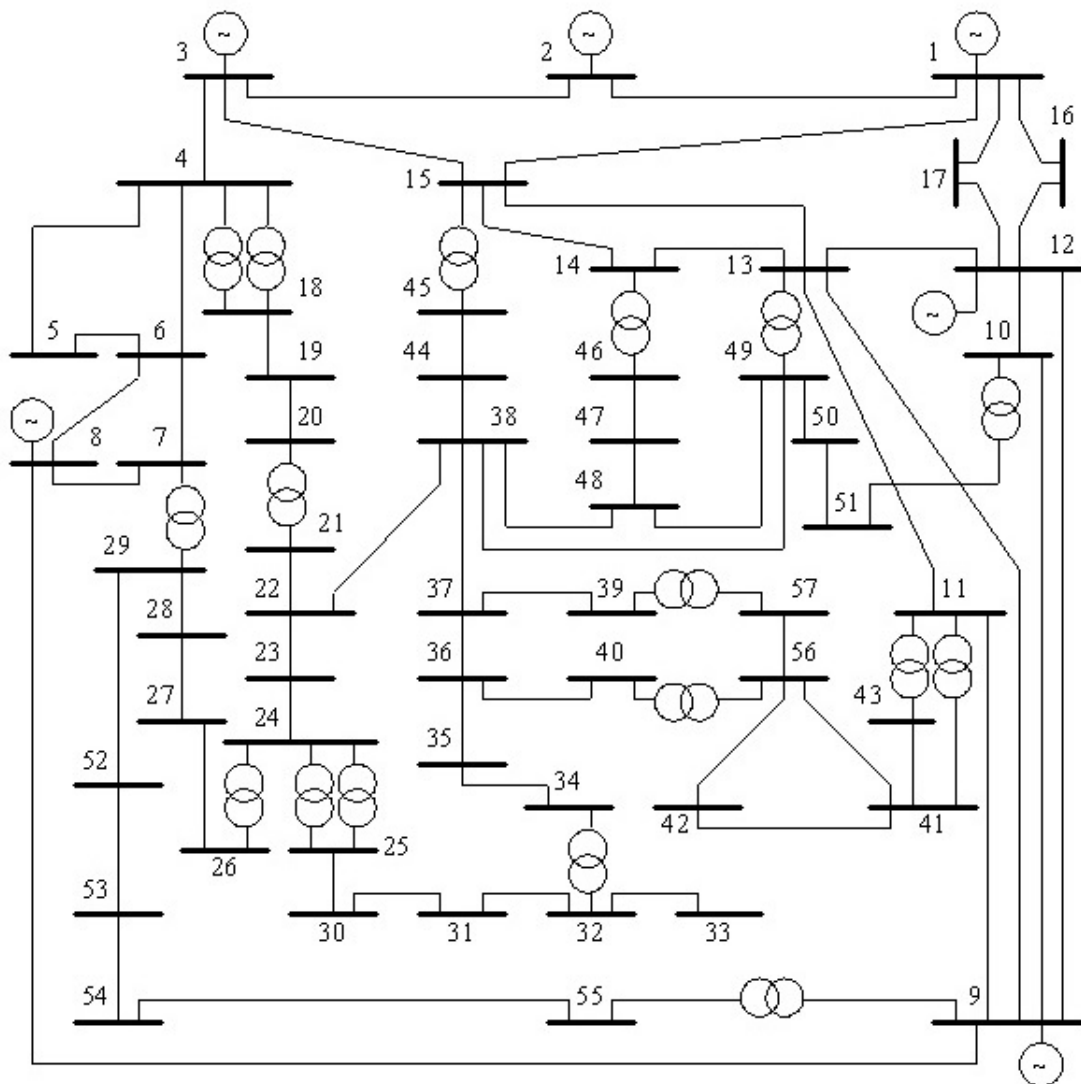


Figura 5.3: Sistema Elétrico IEEE de 57 barras. Fonte: [Chistie, 2017].

5.4 O sistema IEEE 118 barras

As dimensões do sistema IEEE 118 barras cujo diagrama esquemático é mostrado na Figura 5.4 são as seguintes:

- 1 barra *slack*;
- 53 barras com controle de geração de reativos;
- 64 barras de carga;

- 14 *shunts* variáveis;
- 186 linhas de transmissão;
- 9 transformadores com *tap* variável;

A dimensão do problema é definida pelo modelo matemático do problema de FPORDM para o sistema com as características citadas, apresentada a seguir:

- 181 restrições de igualdade;
- 360 restrições de desigualdade;
- 235 variáveis contínuas;
- 23 variáveis discretas.

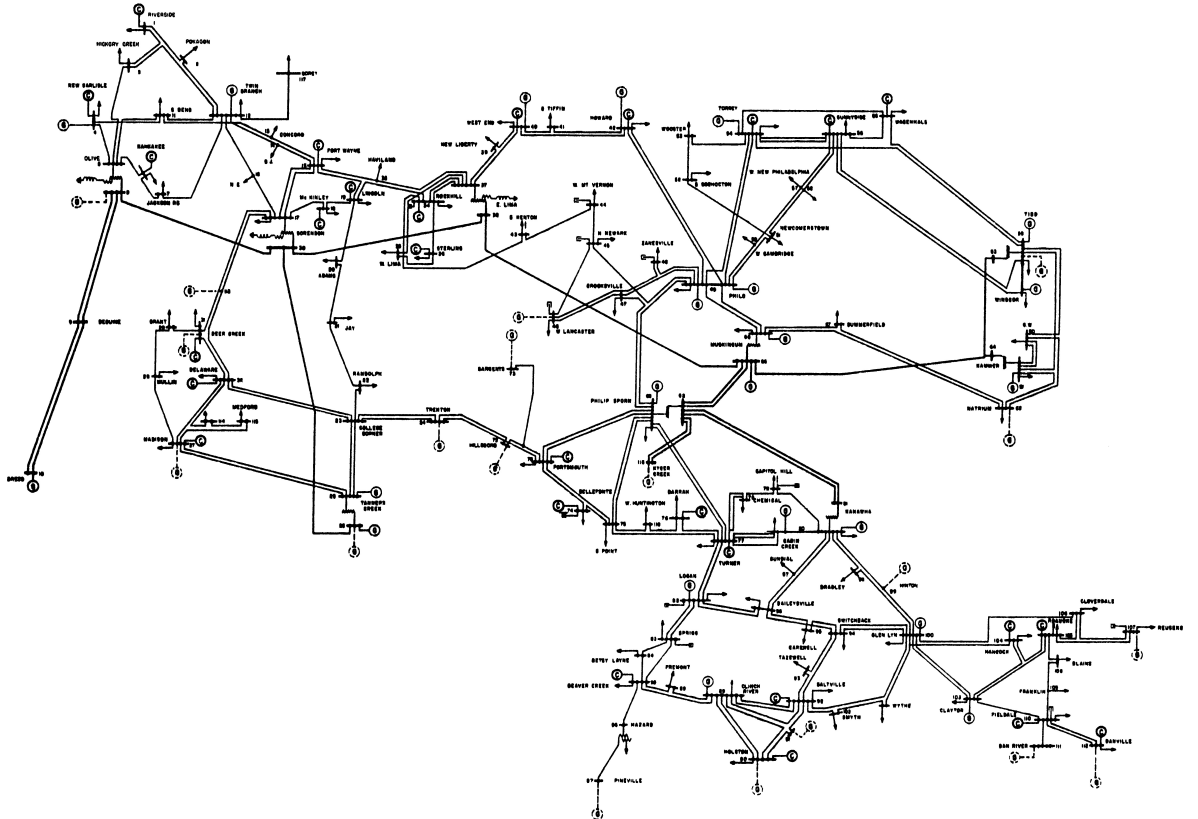


Figura 5.4: Sistema Elétrico IEEE de 118 barras. Fonte: [Chistie, 2017].

5.5 Solução do FPOR considerando todas as variáveis contínuas

Nesta seção, o problema de FPOR para os sistemas IEEE de 14, 30, 57 e 118 barras foi resolvido utilizando-se o Método de Pontos Interiores e Exteriores com correção de Inércia (neste caso não é utilizada a função penalidade) proposto. O modelo do problema de FPOR utilizado neste caso, é dado pelo FPOR contínuo. Os principais dados e parâmetros relacionados ao método e utilizados para a solução dos sistemas-teste são descritos nas Tabelas 5.2 e 5.1, respectivamente.

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados na solução dos problemas de FPOR.

Parâmetro	Descrição	Valor
ϵ_1	precisão de solução do método proposto	10^{-3}
ϵ_2	precisão adotada para os valores discretos	10^{-4}
μ	valor inicial do parâmetros de barreira	0,005
τ	taxa de atualização de μ	0,25
γ	valor inicial para a penalidade	10^{-5}
κ	taxa de atualização de γ	1,3
α	ajuste na função penalidade	0,0
β	valor inicial do parâmetro de correção de inércia	0,01
κ_1	taxa de atualização de β	1,5

Para o valor de μ , dois conjuntos de valores iniciais foram testados. Ambos os conjuntos têm o objetivo de analisar o comportamento dos métodos de barreira, assim, um conjunto de valores é destinado para o método da barreira logarítmica clássica e, o outro, para o método da barreira logarítmica modificada. O conjunto de valores adotado para o método da função barreira logarítmica clássica variou de 0,001 a 0,99, com discretização de 0,005. Já o conjunto para o método da função barreira logarítmica modificada variou

de 0,001; 100.000, com discretização de 0,005 na faixa de 0,001 a 1,0, discretização de 0,25 de 1,0 a 3,0, e para os valores do conjunto $\{10, 20, 50, 100, 10^3, 10^4 \text{ e } 10^5\}$. Para todos os sistemas, algumas vezes o problema não convergiu, a convergência foi alterada conforme alterou-se o parâmetro de barreira μ . Serão apresentados os resultados mais relevantes dos testes realizados com a alteração do parâmetro μ .

Os dados da Tabela 5.2 foram utilizados para os sistemas IEEE de 14, 30, 57 e 118 barras.

Tabela 5.2: Dados dos sistemas utilizados na solução dos problemas de FPOR.

Variável	Descrição	Valor
V^{min}	limite mínimo das magnitudes de tensão	0,95
V^{max}	limite máximo das magnitudes de tensão	1,05
Γ_{km}	conjunto dos valores discretos dos <i>taps</i>	$\{0,94; 0,96; 0,98; 1,00; 1,02; 1,04\}$

As tabelas 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 mostram uma síntese da solução obtida pelo método em que são considerados os métodos que utilizam a função barreira logarítmica clássica e função barreira logarítmica modificada. Nessas tabelas são mostrados os valores da função objetivo, função lagrangiana do método, o tempo computacional, o número de iterações e os valores obtidos para os *taps* dos transformadores. Nota-se que as soluções obtidas por ambos os métodos são idênticas para todos os sistemas. Nota-se também que os valores das funções lagrangiana e objetivo são idênticos na solução e que os *taps* de transformadores apresentam valores ótimos não discretos em todos os sistemas testes. Assim, uma estratégia de tratamento das variáveis discretas é necessária para uma melhor representação destas variáveis.

Tabela 5.3: FPOR Contínuo - Sistema IEEE 14 barras

F. Barreira Logarítmica Clássica					F. Barreira Logarítmica Modificada				
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo
13,6415	13,6415	6	$t_{5-6} = 1,0149$ $t_{4-7} = 0,9600$ $t_{4-9} = 0,9916$	1,77	13,6415	13,6415	6	$t_{5-6} = 1,0149$ $t_{4-7} = 0,9600$ $t_{4-9} = 0,9916$	1,78

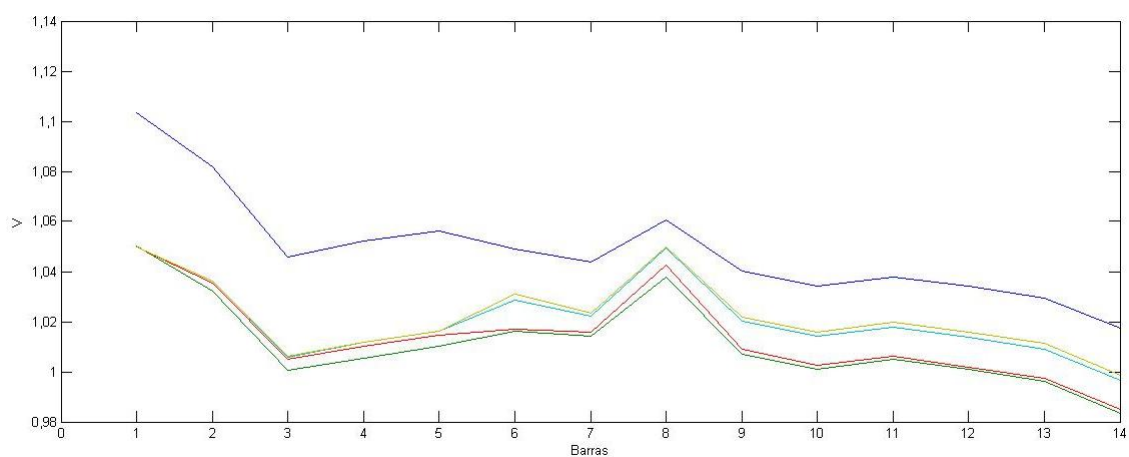


Figura 5.5: Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 14 barras (FBLC).

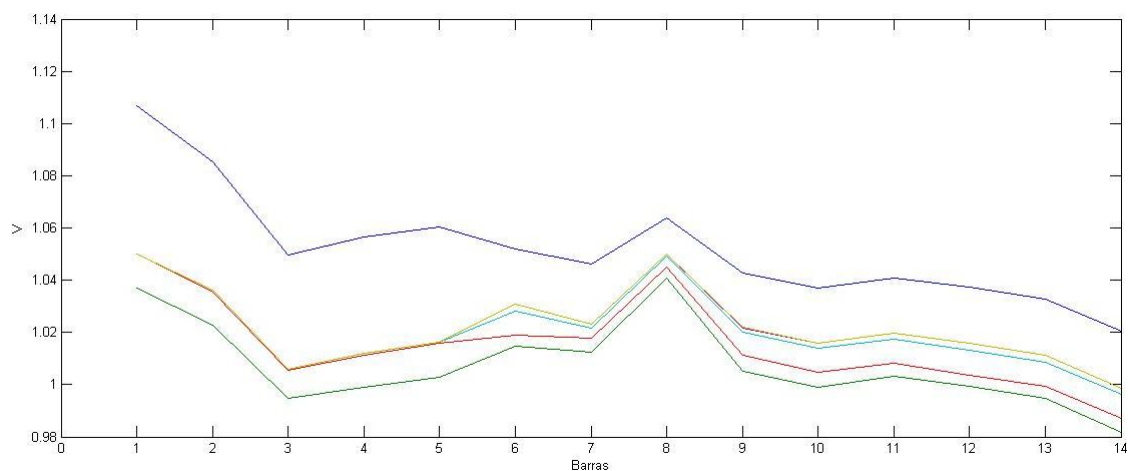


Figura 5.6: Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 14 barras (FBLM).

Tabela 5.4: FPOR Contínuo - Sistema IEEE 30 barras

F. Barreira Logarítmica Clássica					F. Barreira Logarítmica Modificada				
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo
17,8382	17,8382	7	$t_{6-9} = 1,0344$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 1,0038$ $t_{28-27} = 0,9600$	1,99	17,8382	17,8382	6	$t_{6-9} = 1,0344$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 1,0037$ $t_{28-27} = 0,9605$	1,95

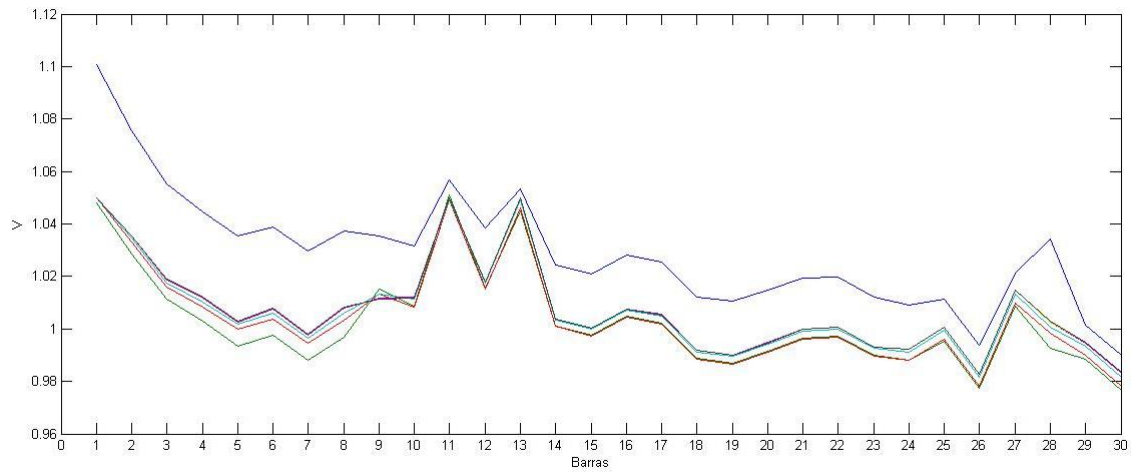


Figura 5.7: Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 30 barras (FBLC).

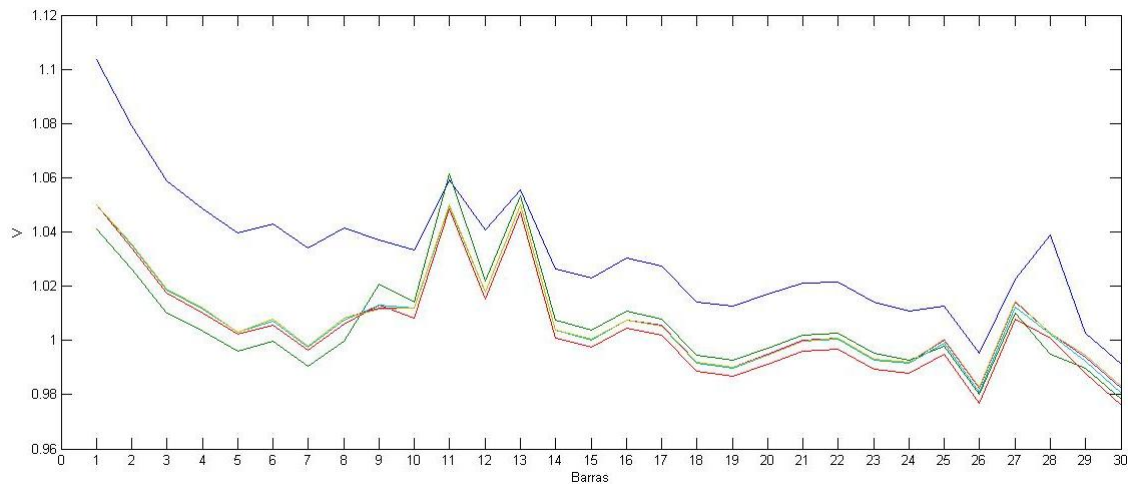


Figura 5.8: Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 30 barras (FBLM).

Tabela 5.5: FPOR Contínuo - Sistema IEEE 57 barras

F. Barreira Logarítmica Clássica					F. Barreira Logarítmica Modificada				
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo
25,1867	25,1871	6	$t_{4-18} = 0,9795$	2,38	25,1868	25,1868	6	$t_{4-18} = 0,9793$	2,46
			$t_{4-18} = 0,9781$					$t_{4-18} = 0,9782$	
			$t_{21-20} = 1,0027$					$t_{21-20} = 1,0027$	
			$t_{24-25} = 0,9601$					$t_{24-25} = 0,9600$	
			$t_{24-25} = 0,9601$					$t_{24-25} = 0,9600$	
			$t_{24-26} = 0,9991$					$t_{24-26} = 0,9991$	
			$t_{7-29} = 0,9731$					$t_{7-29} = 0,9731$	
			$t_{34-32} = 0,9600$					$t_{34-32} = 0,9600$	
			$t_{11-41} = 0,9600$					$t_{11-41} = 0,9600$	
			$t_{15-45} = 0,9633$					$t_{15-45} = 0,9633$	
			$t_{14-46} = 0,9601$					$t_{14-46} = 0,9600$	
			$t_{10-51} = 0,9735$					$t_{10-51} = 0,9734$	
			$t_{13-49} = 0,9599$					$t_{13-49} = 0,9599$	
			$t_{11-43} = 0,9600$					$t_{11-43} = 0,9600$	
			$t_{40-56} = 1,0142$					$t_{40-56} = 1,0142$	
			$t_{39-57} = 0,9810$					$t_{39-57} = 0,9810$	
			$t_{9-55} = 0,9668$					$t_{9-55} = 0,9667$	

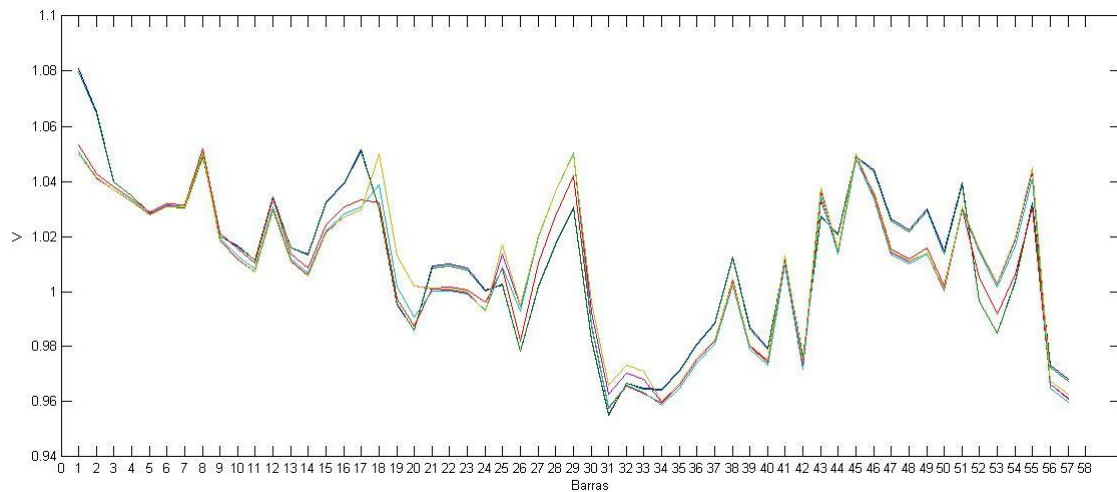


Figura 5.9: Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 57 barras (função barreira logarítmica clássica).

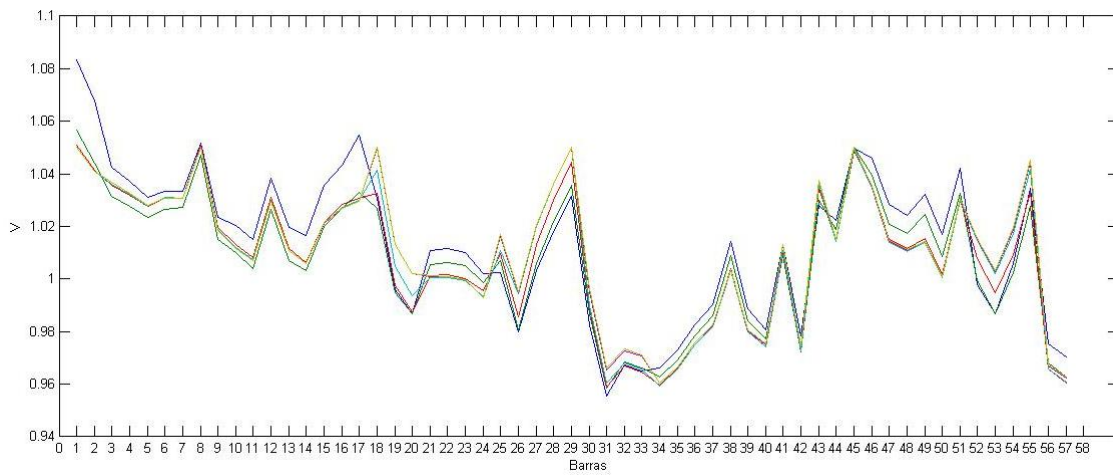


Figura 5.10: Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 57 barras (função barreira logarítmica modificada).

Tabela 5.6: FPOR Contínuo - Sistema IEEE 118 barras

F. Barreira Logarítmica Clássica					F. Barreira Logarítmica Modificada				
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Seg.	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Seg.
118,9294	118,9294	9	$t_{8-5} = 0,9599$	6,42	118,9294	118,9294	11	$t_{8-5} = 0,9599$	7,14
			$t_{26-25} = 1,0399$					$t_{26-25} = 1,0399$	
			$t_{30-17} = 0,9634$					$t_{30-17} = 0,9634$	
			$t_{38-37} = 0,9599$					$t_{38-37} = 0,9599$	
			$t_{63-59} = 0,9600$					$t_{63-59} = 0,9599$	
			$t_{64-61} = 0,9719$					$t_{64-61} = 0,9719$	
			$t_{65-66} = 0,9600$					$t_{65-66} = 0,9599$	
			$t_{68-69} = 0,9599$					$t_{68-69} = 0,9599$	
			$t_{81-80} = 0,9599$					$t_{81-80} = 0,9599$	

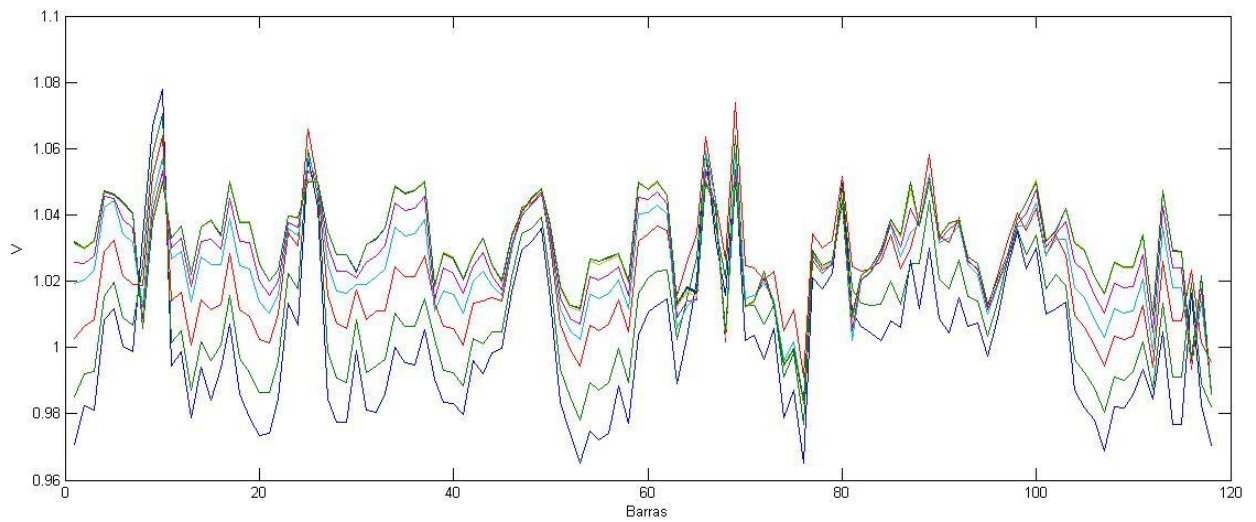


Figura 5.11: Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 118 barras (função barreira logarítmica clássica).

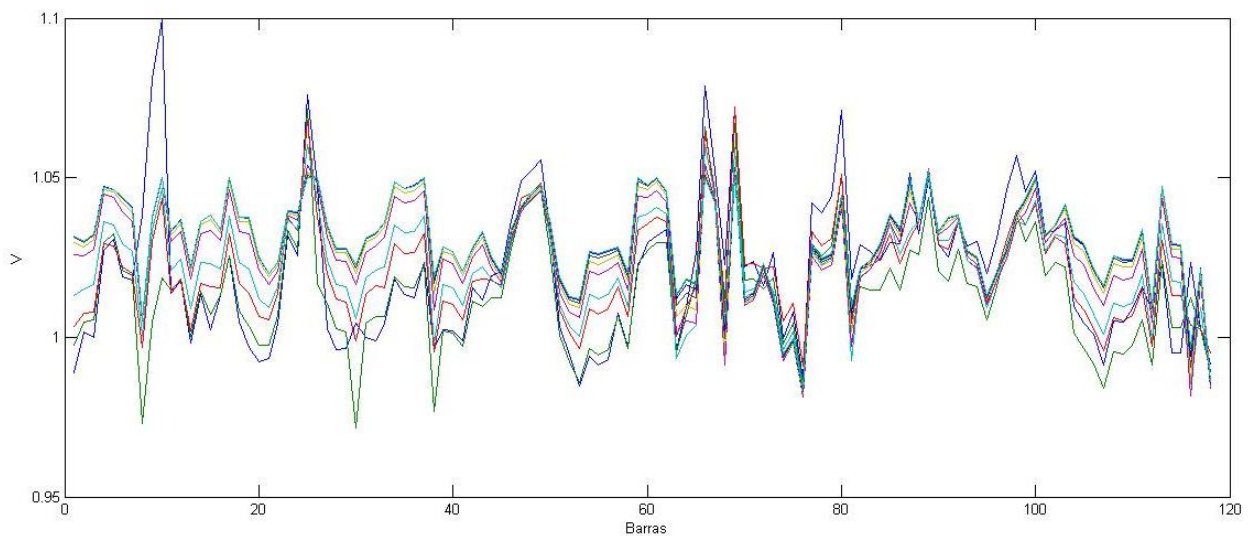


Figura 5.12: Tensão nas barras do Sistema Elétrico IEEE de 118 barras (função barreira logarítmica modificada).

Finalmente, pode-se observar que quando comparado ao método da função barreira logarítmica clássica, o método da função barreira logarítmica modificada apresenta o mesmo número de iterações para os sistemas de 14 e 57 barras, um número de iterações menor para o sistema de 30 barras e um número maior de iterações para o sistema de 118 barras. O valor adotado para o parâmetro barreira μ foi 0,005 para os testes dos sistemas

IEEE 14, 30, 57 barras utilizando o método da barreira logarítmica clássica e modificada, já para o caso de 118 barras, o valor de μ para o método da barreira logarítmica clássica continuou 0,005, entretanto, para o método da função barreira logarítmica modificada o valor de μ é 0,001. O tempo computacional dos testes é considerado desprezível. Nas Figuras , nota-se que todas as tensões das barras de cada sistema testado estão dentro dos limites mínimo e máximo estabelecidos.

5.6 Importância da Estratégia de Correção de Inércia

Nesta seção, mostra-se a importância da estratégia de correção de inércia proposta para a utilização da função penalidade senoidal para o tratamento das variáveis discretas. Para isso, são comparados os casos com e sem a estratégia de correção de inércia utilizando o Método de Pontos Interiores e Exteriores com estratégia de correção de Inércia e utilizando uma função penalidade para as variáveis discretas. Este método foi testado com e sem correção de inércia de modo a analisar o comportamento das variáveis discretas do problema de FPOR-DM.

Os resultados para o sistema IEEE de 14, 30, 57 e 118 barras, sem e com a estratégia de correção de inércia são mostrados nas Tabelas 5.7 e 5.8, 5.9 e 5.10 respectivamente. Estes testes foram realizados com o Método da FBLC.

Tabela 5.7: FPOR-DM **com** e **sem** correção de inércia – Sistema IEEE 14 barras.

Com correção de inércia ($\mu = 0,05$)					Sem correção de inércia ($\mu = 0,1$)				
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo
13,6499	13,6499	8	$t_{5-6} = 0,9800$ $t_{4-7} = 0,9600$ $t_{4-9} = 0,9800$	2,25	13,6526	13,6566	7	$t_{5-6} = 0,9800$ $t_{4-7} = 0,9699$ $t_{4-9} = 0,9900$	1,62

Tabela 5.8: FPOR-DM **com** e **sem** correção de inércia – Sistema IEEE 30 barras.

Com correção de inércia ($\mu = 0,015$)					Sem correção de inércia ($\mu = 0,01$)				
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo
17,8811	17,8811	13	$t_{6-9} = 0,9800$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 1,0000$ $t_{28-27} = 0,9600$	5,80	17,8334	17,8898	8	$t_{6-9} = 0,9800$ $t_{6-10} = 0,9699$ $t_{4-12} = 1,0100$ $t_{28-27} = 0,9700$	1,80

Tabela 5.9: FPOR-DM **com** e **sem** correção de inércia – Sistema IEEE 57 barras.

Com correção de inércia ($\mu = 0,008$)					Sem correção de inércia ($\mu = 0,85$)				
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo
25,2878	25,2878	51	$t_{4-18} = 1,0399$ $t_{4-18} = 0,9999$ $t_{21-20} = 1,0399$ $t_{24-25} = 0,9600$ $t_{24-25} = 0,9600$ $t_{24-26} = 0,9999$ $t_{7-29} = 0,9799$ $t_{34-32} = 0,9599$ $t_{11-41} = 0,9599$ $t_{15-45} = 0,9600$ $t_{14-46} = 0,9600$ $t_{10-51} = 0,9600$ $t_{13-49} = 0,9600$ $t_{11-43} = 0,9600$ $t_{40-56} = 1,0000$ $t_{39-57} = 0,9799$ $t_{9-55} = 0,9600$	119,19	25,4881	25,7597	40	$t_{4-18} = 0,9699$ $t_{4-18} = 0,9800$ $t_{21-20} = 1,0399$ $t_{24-25} = 0,9799$ $t_{24-25} = 0,9999$ $t_{24-26} = 1,0500$ $t_{7-29} = 0,9699$ $t_{34-32} = 0,9599$ $t_{11-41} = 0,9599$ $t_{15-45} = 0,9600$ $t_{14-46} = 0,9700$ $t_{10-51} = 0,9599$ $t_{13-49} = 0,9500$ $t_{11-43} = 0,9700$ $t_{40-56} = 0,9600$ $t_{39-57} = 0,9800$ $t_{9-55} = 0,9600$	6,95

Tabela 5.10: FPOR-DM **com** e **sem** correção de inércia – Sistema IEEE 118 barras.

Com correção de inércia ($\mu = 0,045$)					Sem correção de inércia ($\mu = 0,7$)				
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Tempo
119,8469	119,8469	26	$t_{8-5} = 0,9799$ $t_{26-25} = 0,9600$ $t_{30-17} = 0,9600$ $t_{38-37} = 1,0399$ $t_{63-59} = 0,9600$ $t_{64-61} = 0,9800$ $t_{65-66} = 0,9799$ $t_{68-69} = 0,9799$ $t_{81-80} = 1,0199$	83,68	118,5758	118,5896	16	$t_{8-5} = 0,9500$ $t_{26-25} = 0,9600$ $t_{30-17} = 0,9499$ $t_{38-37} = 0,9400$ $t_{63-59} = 0,9599$ $t_{64-61} = 0,9999$ $t_{65-66} = 1,0599$ $t_{68-69} = 0,9900$ $t_{81-80} = 0,9599$	10,04

Nota-se nas Tabelas 5.7 e 5.8, 5.9 e 5.10 que as soluções obtidas para os casos sem a estratégia de correção de inércia possuem valores infactíveis para as variáveis discretas associadas aos *taps*. A ausência da estratégia de correção de inércia faz com que o método convirja para os pontos de máximo (e não de mínimo) da função barreira logarítmica aumentada com o termo de penalidade. A obtenção de pontos de máximo ao invés de mínimos é esperada, já que ambos satisfazem as condições de otimalidade KKT. Nota-se que a estratégia com correção não apresenta valores infactíveis para as variáveis discretas, pois esta garante a obtenção de pontos de mínimo locais. Verifica-se ainda que o número de iterações para a convergência foi substancialmente maior para o caso com a estratégia de correção de inércia, porém esse é o “preço” a pagar para a obtenção de soluções discretas factíveis. O aumento no número de iterações é esperado, já que a função de penalidade senoidal utilizada insere não linearidades adicionais ao problema de FPOR-DM.

5.7 Comparação entre as funções de Barreira Logarítmica Clássica (FBLC) e Barreira Logarítmica Modificada (FBLM) aplicadas no MPIEECIFP para a solução do problema de FPOR-DM discreto

Nesta seção, faz-se uma comparação entre as funções barreiras (clássica e modificada) aplicadas no MPIEECIFP para a solução do problema de FPOR-DM com variáveis discretas. Em todas os resultados mostrados nesta seção, adota-se a estratégia de correção de inércia, pois, conforme verificado no estudo detalhado, esta estratégia é fundamental para a obtenção de soluções factíveis para o FPOR discreto. Verificou-se pelas simulações que ambas as funções barreira são sensíveis ao parâmetro κ_1 que faz atualização do parâmetro β , este último sendo responsável pela correção da inércia das matrizes Hessianas reduzidas dos métodos. Assim, sendo, os resultados desta seção são mostrados para vários valores de κ_1 .

A comparação entre os métodos para o sistema IEEE 14 barras é mostrada na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Comparação entre MFBLC e MFBLM para a solução do FPOR-DM – Sistema IEEE 14 barras

F. Barreira Logarítmica Clássica				F. Barreira Logarítmica Modificada			
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps
$\kappa_1 = 1, 25$							
-	-	-	-	13,6685	13,6685	9	$t_{5-6} = 0,9800$ $t_{4-7} = 0,9600$ $t_{4-9} = 0,9600$
$\kappa_1 = 1, 35$							
13,6685	13,6685	21	$t_{5-6} = 0,9800$ $t_{4-7} = 0,9600$ $t_{4-9} = 0,9600$	-	-	-	-
$\kappa_1 = 1, 55$							
13,7034	13,7034	25	$t_{5-6} = 1,0199$ $t_{4-7} = 1,0399$ $t_{4-9} = 0,9800$	13,6499	13,6499	14	$t_{5-6} = 0,9800$ $t_{4-7} = 0,9600$ $t_{4-9} = 0,9600$
$\kappa_1 = 1, 60$							
13,7544	13,7544	9	$t_{5-6} = 0,9800$ $t_{4-7} = 0,9600$ $t_{4-9} = 1,0399$	13,7544	13,7544	10	$t_{5-6} = 0,9800$ $t_{4-7} = 0,9600$ $t_{4-9} = 1,0399$

Para o sistema de 14 barras, nota-se inicialmente, que todos os taps de transformadores obtidos estão dentro do conjunto discreto, conforme esperado. Verifica-se que o MPIEECIFP com a FBLM tem um desempenho geral melhor em termos do número de iterações. Entretanto, para o valor de $\kappa_1 = 1, 35$ este método não consegue convergência. Como o problema de FPOR-DM introduz múltiplos mínimos, espera-se que várias soluções ótimas locais sejam obtidas. Para este sistema, o MPIEECIFP com a FBLM foi capaz de encontrar mínimos melhores que o MPIEECIFP com a FBLC e com um menor número de iterações.

A comparação entre os métodos para o sistema IEEE 30 barras é mostrada na Tabela 5.12.

Resultados similares para o sistema de 30 barras foram obtidos. Para o sistema de 30 barras, também se verifica que o MPIEECIFP com a FBLM tem um desempenho geral

Tabela 5.12: Comparação entre MFBLC e MFBLM para a solução do FPOR-DM – Sistema IEEE 30 barras

F. Barreira Logarítmica Clássica				F. Barreira Logarítmica Modificada			
$\kappa_1 = 1,10$							
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps
17,8960	17,8960	28	$t_{6-9} = 1,0399$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 0,9600$ $t_{28-27} = 0,9600$	17,9289	17,9289	25	$t_{6-9} = 0,9800$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 0,9600$ $t_{28-27} = 0,9600$
$\kappa_1 = 1,65$							
17,9289	17,9289	14	$t_{6-9} = 0,9800$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 0,9600$ $t_{28-27} = 0,9600$	-	-	-	-
$\kappa_1 = 1,85$							
17,9290	17,9290	25	$t_{6-9} = 0,9800$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 0,9600$ $t_{28-27} = 0,9600$	17,8811	17,8811	17	$t_{6-9} = 0,9800$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 1,0000$ $t_{28-27} = 0,9600$
$\kappa_1 = 1,90$							
-	-	-	-	17,8966	17,8966	17	$t_{6-9} = 0,9800$ $t_{6-10} = 0,9600$ $t_{4-12} = 0,9800$ $t_{28-27} = 0,9600$

melhor em termos do número de iterações. Entretanto, para o valor de $\kappa_1 = 1,65$ este método não consegue convergência. Para este sistema, o MPIEECIFP com a FBLM foi capaz de encontrar mínimos melhores que o método da FBLC e com um menor número de iterações.

Os resultados obtidos para o sistema IEEE 57 barras são mostrados na Tabela 5.13.

O sistema de 57 barras é de mais difícil solução que o sistemas anteriores. Para o sistema de 57 barras, também se verifica que o MPIEECIFP com a FBLM tem um desempenho geral melhor em termos do número de iterações. Entretanto, para o valor de $\kappa_1 = 1,65$ este método não consegue convergência. Para este sistema, o MPIEECIFP com a FBLM foi capaz de encontrar mínimos melhores que o MPIEECIFP com a FBLC e com um menor número de iterações.

Os resultados obtidos para o sistema IEEE 118 barras são mostrados na Tabela 5.14 para um único valor de κ_1 , pois ambos os métodos tiveram problemas de convergência para os demais valores de κ_1 .

Tabela 5.14: Comparação entre MFBLC e MFBLM para a solução do FPOR discreto – Sistema IEEE 118 barras

F. Barreira Logarítmica Clássica ($\mu = 0,045$)					F. Barreira Logarítmica Modificada ($\mu = 50$)				
$\kappa_1 = 1,65$									
F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Seg.	F. Obj.	F. Lag.	Its.	Taps	Seg.
119,8469	119,8469	26	$t_{8-5} = 0,9799$	83,68	118,9562	118,9562	18	$t_{8-5} = 0,9799$	99,78
			$t_{26-25} = 0,9600$					$t_{26-25} = 0,9600$	
			$t_{30-17} = 0,9600$					$t_{30-17} = 0,9600$	
			$t_{38-37} = 1,0399$					$t_{38-37} = 0,9999$	
			$t_{63-59} = 0,9600$					$t_{63-59} = 0,9600$	
			$t_{64-61} = 0,9800$					$t_{64-61} = 0,9799$	
			$t_{65-66} = 0,9799$					$t_{65-66} = 1,0399$	
			$t_{68-69} = 0,9799$					$t_{68-69} = 0,9999$	
			$t_{81-80} = 1,0199$					$t_{81-80} = 0,9799$	

Para o sistema de 118 barras, também se verifica que o MPIEECIFP com a FBLM tem um desempenho geral melhor em termos do número de iterações. A convergência para este sistema é difícil, entretanto, o MPIEECIFP com a FBLM foi capaz de encontrar mínimos melhores que o MPIEECIFP com a FBLC e com um menor número de iterações.

Tabela 5.13: Comparação entre MFBLC e MFBLM para a solução do FPOR-DM – Sistema IEEE 57 barras

F. Barreira Logarítmica Clássica				F. Barreira Logarítmica Modificada			
F, Obj,	F, Lag,	Its,	Taps	F, Obj,	F, Lag,	Its,	Taps
$\kappa_1 = 1, 45$							
25,4299	25,4299	42	$t_{4-18} = 0,9800$ $t_{4-18} = 0,9800$ $t_{21-20} = 1,0399$ $t_{24-25} = 0,9600$ $t_{24-25} = 0,9600$ $t_{24-26} = 1,0399$ $t_{7-29} = 0,9600$ $t_{34-32} = 0,9600$ $t_{11-41} = 0,9600$ $t_{15-45} = 0,9600$ $t_{14-46} = 0,9600$ $t_{10-51} = 0,9600$ $t_{13-49} = 0,9600$ $t_{11-43} = 0,9600$ $t_{40-56} = 0,9800$ $t_{39-57} = 0,9800$ $t_{9-55} = 0,9600$				
$\kappa_1 = 1, 50$							
25,8315	25,8315	49	$t_{4-18} = 0,9600$ $t_{4-18} = 0,9799$ $t_{21-20} = 1,0399$ $t_{24-25} = 1,0199$ $t_{24-25} = 0,9799$ $t_{24-26} = 1,0399$ $t_{7-29} = 0,9600$ $t_{34-32} = 0,9599$ $t_{11-41} = 0,9600$ $t_{15-45} = 0,9600$ $t_{14-46} = 0,9600$ $t_{10-51} = 0,9799$ $t_{13-49} = 0,9600$ $t_{11-43} = 0,9600$ $t_{40-56} = 0,9600$ $t_{39-57} = 0,9800$ $t_{9-55} = 0,9800$	25,4747	25,4747	52	$t_{4-18} = 0,9800$ $t_{4-18} = 0,9800$ $t_{21-20} = 1,0399$ $t_{24-25} = 0,9799$ $t_{24-25} = 0,9799$ $t_{24-26} = 1,0399$ $t_{7-29} = 0,9600$ $t_{34-32} = 0,9799$ $t_{11-41} = 0,9600$ $t_{15-45} = 0,9600$ $t_{14-46} = 0,9600$ $t_{10-51} = 0,9600$ $t_{13-49} = 0,9600$ $t_{11-43} = 0,9600$ $t_{40-56} = 0,9600$ $t_{39-57} = 0,9800$ $t_{9-55} = 0,9600$
$\kappa_1 = 1, 90$							
-	-	-	-	25,4699	25,4699	36	$t_{4-18} = 0,9600$ $t_{21-20} = 0,9800$ $t_{24-25} = 1,0399$ $t_{24-25} = 0,9799$ $t_{24-26} = 0,9799$ $t_{7-29} = 1,0399$ $t_{34-32} = 0,9600$ $t_{11-41} = 0,9600$ $t_{15-45} = 0,9600$ $t_{14-46} = 0,9600$ $t_{10-51} = 0,9600$ $t_{13-49} = 0,9799$ $t_{11-43} = 0,9600$ $t_{40-56} = 0,9600$ $t_{39-57} = 0,9600$ $t_{9-55} = 0,9800$

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

Este trabalho tem como objetivo inicial propor o Método de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégia de Correção de Inércia utilizando uma Função Penalidade (MPIEE-CIFP) com base nas funções barreira logarítmica e logarítmica modificada para a solução do FPOR-DM em que as variáveis discretas são tratadas de forma eficiente. Para o tratamento das variáveis discretas, o método utiliza a função penalidade senoidal descrita em [Soler et al., 2013]. Neste método a natureza discreta destas variáveis é relaxada, de modo que estas são tratadas como contínuas; e termos de penalidade são inseridos na função objetivo como o intuito de penalizar os respectivos valores contínuos que não estejam dentro do conjunto discreto pré-estabelecido.

Neste trabalho, mostra-se que a função penalidade senoidal proposta em [Soler et al., 2013] introduz de forma artificial múltiplos pontos de mínimo e máximo. Mostra-se ainda que a solução do problema penalizado por métodos de pontos interiores/exteriores pode obter soluções que não representam pontos de mínimo local da função, uma vez que tais métodos se baseiam na solução de sistemas não lineares associados às condições de KKT, as quais são válidas tanto para pontos de mínimo quanto para pontos de máximo do problema. A partir desta constatação, foi necessária a adoção de uma estratégia de convergência global, de forma a garantir a obtenção apenas de pontos de mínimo. Para isso, neste trabalho, investigou-se a estratégia de correção de inércia com base no Teorema de Sylvester. Esta estratégia garante a obtenção de pontos de mínimo do problema se

a matriz hessiana associada ao sistema não linear de KKT tiver um número específico de autovalores positivos, negativos e nulos. A ideia geral desta estratégia consiste em perturbar a diagonal desta matriz até que se obtenha o número de autovalores desejados.

Testes numéricos envolvendo os sistemas IEEE de 14, 30, 57 e 118 barras foram realizados para a validação do MPIEECIFP proposto para resolver o problema de FPOR-DM. Os resultados numéricos apresentados neste trabalho tiveram dois objetivos básicos: (i) avaliar a importância de se estabelecer estratégias de correção de inércia para a obtenção de soluções discretas confiáveis, ou seja, soluções que pertençam ao conjunto discreto pré-estabelecido e (ii) comparar o método da função barreira logarítmica clássica (FBLC) e o método da função barreira logarítmica modificada (FBLM) para o tratamento das restrições de desigualdade do FPOR, quando as variáveis discretas são tratadas pelo método da função de penalidade senoidal.

Os resultados numéricos mostraram a importância da estratégia de correção de inércia proposta para a obtenção de pontos de mínimos locais associados às variáveis discretas, evitando-se os pontos de máximo (que também satisfazem as condições de KKT). Da comparação entre o MPIEECIFP com a FBLM e com FBLC, nota-se que o método baseado na FBLM em geral, possui melhor desempenho em termos do número de iterações para obtenção da solução e também em termos da obtenção de pontos de mínimo melhores (menor valor de função objetivo). Este resultado é, de certa forma, esperado, dado que os métodos de FBLM são definidos na fronteira da região factível, ao contrário dos métodos de FBLC que tendem para a fronteira, porém não são efetivamente definidos nesta fronteira. Além de ser definido na fronteira, o método da FBLM tem ainda a capacidade de operar no exterior da região factível, o que aumenta o espaço de busca pelo ótimo favorecendo encontrar diferentes pontos de mínimo, quando comparado ao método da FBLC.

Para a continuidade deste trabalho pretende-se resolver o FPOR-DM considerando todas as suas variáveis discretas, tratando-as por meio de funções penalidades. Neste trabalho abordou-se somente as variáveis discretas associadas aos *taps* dos transformado-

res, não representando os bancos de capacitores/reatores *shunt*. Assim, tratar a natureza discreta das variáveis *shunt* é uma proposta futura para este trabalho, assim como possíveis funções penalidades e/ou outras estratégias para trabalhar com o sistema de direções de busca, o qual é influenciado diretamente ao inserirmos funções penalidade ao problema.

Capítulo 7

Trabalhos decorrentes

Tófoli, M. F.; Nepomuceno, L. Métodos de pontos interiores e exteriores para a solução do problema de fluxo de potência ótimo reativo. Em: *V Seminário do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica*, Bauru - SP, 2015.

Tófoli, M. F.; Pinheiro, R. B. N.; Soler, E. M.; Nepomuceno, L. Tratamento das variáveis discretas em problemas de fluxo de potência ótimo reativo. Em: *XVIII CLAIO, the Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research*, Santiago - Chile, 2016.

Tófoli, M. F.; Souza, R. R.; Balbo, A. R.; Nepomuceno, L. Solução do fluxo de potência ótimo reativo com variáveis discretas usando métodos de pontos interiores/exteriores com estratégia de correção de inércia. Em: *XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2016*, Vitória - ES, 2016.

Tófoli, M. F.; Silva, D.P.; Souza, R. R.; Soler, E. M.; Nepomuceno, L. Interior and exterior point methods for solving the reactive optimal power flow problem with the treatment of discrete variables by penalty functions. Em: *Workshop de Otimização*, Botucatu - SP, 2016.

Tófoli, M. F.; Nepomuceno, L. Solução do fluxo de potência ótimo reativo com variáveis discretas usando métodos de pontos interiores/exteriores com estratégia de correção

de inércia. Em: *VI Seminário do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica*, Bauru - SP, 2016.

Tófoli, M. F.; Nepomuceno, L. Método de pontos interiores/exteriores com correção de inércia para a solução do fluxo de potência ótimo reativo com variáveis discretas. Em: *XXIII Simpósio de Engenharia de Produção - SIMPEP*, Bauru - SP, 2016. Este artigo foi premiado como: o 3º Melhor artigo na Área Temática de *Pesquisa Operacional* deste Simpósio.

Tófoli, M. F.; Nepomuceno, L.; Silva, D.P. Método de pontos interiores/exteriores para a solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Discreto Misto com funções penalidade. Em: *Revista Integração Engenharia - Faculdade de Engenharia de Bauru*, 2016.

Referências

aaaa.

Bakirtzis, A. G., Biskas, P. N., Zoumas, C. E., & Petridis, V. (2002). Optimal power flow by enhanced genetic algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(2), 229–236.

Baptista, E. C., Belati, E. A., Sousa, V. A., & Costa, G. R. M. D. (2006). Primal-Dual Logarithmic Barrier and Augmented Lagrangian Function to the Loss Minimization in Power Systems. *Electric Power Components and Systems*, 34(7), 775–784.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Hoboken, N.J: Wiley-Interscience, 3 edition edition.

Capitanescu, F. & Wehenkel, L. (2010). Sensitivity-based approaches for handling discrete variables in optimal power flow computations. *IEEE Transactions on Power Systems*, 25(4), 1780–1789.

Carpentier, J. (1962). Contribution a l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Société Française des Électricien*, 3(8), 431–447.

Carroll, C. W. & Fiacco, A. V. (1961). The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems. *Operations Research*, 9(2), 169–184.

Chistie, R. D. (2017). Power Systems Test Case Archive - UWEE.

de Sousa, V., Baptista, E., & da Costa, G. (2012). Optimal reactive power flow via the modified barrier lagrangian function approach. *Electric Power Systems Research*, 84(1), 159 – 164.

de Sousa, V. A., Baptista, E. C., & da Costa, G. R. M. (2004). Modified barrier method for optimal power flow problem. (pp. 831–836 Vol.1).

Ding, X., Wang, X., & Song, Y. H. (2004). Interior point cutting plane method for optimal power flow. *IMA Journal of Management Mathematics*, 15(4), 355.

Dommel, H. & Tinney, W. (1968). Optimal Power Flow Solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-87(10), 1866–1876.

Fiacco, A. V. & McCormick, G. P. (1987). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Fiacco, A. V. & McCormick, G. P. (1968). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York: Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Frisch, K. R. (1955). The Logarithmic Potential Method of Convex Programming, University Institute of Economics, Oslo, Norway (manuscript).
- Granville, S. (1994). Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1), 136–146.
- Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '84 (pp. 302–311). New York, NY, USA: ACM.
- Lage, G. G. (2013). *O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão*. text, Universidade de São Paulo.
- Liu, M., Tso, S. K., & Cheng, Y. (2002). An extended nonlinear primal-dual interior-point algorithm for reactive-power optimization of large-scale power systems with discrete control variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(4), 982–991.
- Luenberger, D. G. & Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. New York, NY: Springer, 3rd edition edition.
- Mehrotra, S. (1992a). On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4), 575–601.
- Mehrotra, S. (1992b). On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4), 575–601.
- Monticelli (1983). *Fluxo de Carga em Redes de Energia*. Edgard Blucher.
- Monticelli, A. J. & Garcia, A. V. (2003). *Introdução a Sistemas de Energia Elétrica*. Unicamp.
- Nepomuceno, L. & Santos, A. (1997). Equivalent optimization model for loss minimization: a suitable analysis approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(4), 1403–1412.
- Nocedal, J. & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York, NY: Springer New York.
- Papalexopoulos, A. D., Imparato, C. F., & Wu, F. F. (1989). Large-scale optimal power flow: effects of initialization, decoupling and discretization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 4(2), 748–759.
- Pereira, A. C. (2015). *Projeto de Iniciação Científica FAPESP - Modelo de Leilão Multi-período para Mercados Pool de Energia*. Relatório Final de Iniciação Científica 2, DEE-UNESP.
- Pinheiro, R. B. N. (2012). *Um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada, com estratégias de convergência global e de ajuste cúbico, para problemas de programação não-linear e não-convexa*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Bauru - SP, Brasil.

- Pinheiro, R. B. N., Balbo, A. R., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2015). Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 66, 235–246.
- Polyak, R. (1992). Modified barrier functions (theory and methods). *Mathematical programming*, 54(1-3), 177–222.
- Polyak, R. & Teboulle, M. (1997). Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization. *Mathematical Programming*, 76(2), 265–284.
- Polyak, R. A. (2002). Nonlinear rescaling vs. smoothing technique in convex optimization. *Mathematical Programming*, 92(2), 197–235.
- Santos, A., Deckmann, S., & Soares, S. (1988). A dual augmented lagrangian approach for optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(3), 1020–1025.
- Sasson, A. M., Vilorio, F., & Aboytes, F. (1973). Optimal Load Flow Solution Using the Hessian Matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-92(1), 31–41.
- Silva, D. N. d. (2014). *Método primal-dual predictor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de despacho econômico com ponto de carregamento de válvula e representação da transmissão*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru - SP.
- Silva, D. P. (2016). *Funções Penalidade para o Tratamento das Variáveis Discretas do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo*. mestrado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru - SP.
- Soler, E., Asada, E., & da Costa, G. (2013). Penalty-Based Nonlinear Solver for Optimal Reactive Power Dispatch With Discrete Controls. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(3), 2174–2182.
- Soler, E. M. (2011). *Resolução do problema de FPO com Variáveis de Controle Discretas*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo - USP, Escola de Engenharia Elétrica - São Carlos - SP.
- Sousa, V. A., Baptista, E. C., & da Costa, G. R. M. (2009). Loss minimization by the predictor–corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research*, 79(5), 803–808.
- Souza, R. R. (2016). *Um método primal-dual de pontos interiores/exteriores, com estratégias de teste quadrático e determinação de direções de busca combinadas, em problemas de fluxo de potência ótimo reativo*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Faculdade de Engenharia - Bauru - SP, Brasil.
- Sun, D., Ashley, B., Brewer, B., Hughes, A., & Tinney, W. F. (1984). Optimal Power Flow By Newton Approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103(10), 2864–2880.

Tófoli, M. F., Souza, R. R., Balbo, A. R., & Nepomuceno, L. (2016). Solução do Fluxo de Potência Ótimo Reativo com Variáveis Discretas Usando Métodos de Pontos Interiores/Exteriores com Estratégia de Correção de Inércia. In *Anais do Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2016* Vitória - ES.

Wächter, A. & Biegler, L. T. (2005). On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106(1), 25–57.

Wright, M. (1995). Why a Pure Primal Newton Barrier Step May be Infeasible. *SIAM Journal on Optimization*, 5(1), 1–12.

Wright, S. J. (1997). *Primal-Dual Interior-Point Methods*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Wu, Y.-C., Debs, A., & Marsten, R. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2), 876–883.