

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Engenharia de São João - campus de São João da Boa Vista

JOÃO PEDRO MACEDO NODA

**Estimativa do efeito das paredes de túnel de vento sobre o escoamento em asas enflechadas
infinitas usando método de vórtices**

São João da Boa Vista

2025

João Pedro Macedo Noda

Estimativa do efeito das paredes de túnel de vento sobre o escoamento em asas enflechadas infinitas usando método de vórtices

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia de São João, São João da Boa Vista, para obtenção do título de Bacharel em engenharia aeronáutica.

Orientador: Prof^o Dr. Daniel Sampaio Souza

São João da Boa Vista
2025

N761e

Noda, João Pedro Macedo

Estimativa do efeito das paredes de túnel de vento sobre o escoamento em asas enflechadas infinitas usando método de vórtices /

João Pedro Macedo Noda. -- São João da Boa Vista, 2025

48 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista

Orientador: Daniel Sampaio Souza

1. aerodinamica. 2. túneis aerodinâmicos. 3. simulação por computador. I. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ESTIMATIVA DO EFEITO DAS PAREDES DE TÚNEL DE VENTO SOBRE O
ESCOAMENTO EM ASAS ENFLECHADAS INFINITAS USANDO MÉTODO DE
VÓRTICES**

Aluno: João Pedro Macedo Noda
Orientador: Prof. Dr. Daniel Sampaio Souza

Banca Examinadora:

- Daniel Sampaio Souza (Orientador)
- Gabriel Pereira Gouveia da Silva (Examinador)
- Henrique Barboza Ferreira (Examinador)

Os formulários de avaliação e a ata da defesa, na qual consta a aprovação do trabalho, devidamente assinados pela banca encontram-se no prontuário eletrônico do aluno.

São João da Boa Vista, 28 de novembro de 2025

Eu dedico o meu trabalho para a minha família, a qual me deu todo o suporte necessário.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família que sempre me apoiou ao longo de toda minha graduação.

Agradeço aos meus colegas de graduação que estiveram presentes ao longo dos anos de curso.

Agradeço ao meu orientador Profº Dr. Daniel Sampaio Souza pela paciência e dedicação ao longo da elaboração deste trabalho.

“[...] Mas não estamos perdidos e seremos vitoriosos, se não tivermos desaprendido a aprender.”
(Rosa Luxemburgo)

RESUMO

O estudo de uma asa enflechada infinita em um túnel de vento pode ajudar na análise do comportamento de uma asa enflechada real, porém o efeito das paredes do túnel causa comportamentos não compatíveis com uma asa infinita, como um carregamento não uniforme ao longo da envergadura. Este trabalho visa analisar os efeitos das paredes laterais na asa enflechada infinita. A análise é feita com o uso do método da linha de sustentação de Weissinger e do método das imagens para criar uma ou mais reflexões e analisar o comportamento da asa real em múltiplas condições. Um modelo baseado em vórtices ferradura foi implementado em MATLAB e utilizado para analisar o efeito das paredes laterais sobre uma asa enflechada ocupando toda a largura do túnel de vento. Quanto maior o enflechamento e o ângulo de ataque e menor o alongamento, maior a influência da parede lateral no estudo. O estudo da asa sem ângulo de enflechamento se aproximou do comportamento teórico de uma asa infinita. Após isso, o estudo foi expandido para uma asa enflechada infinita com resultados ligeiramente diferentes de uma teórica asa enflechada infinita, sendo que o estudo ainda pode ser ampliado com métodos diferentes de análise.

Palavras-Chave: aerodinamica; túneis aerodinâmicos; simulação por computador.

ABSTRACT

The study of an infinite swept wing in a wind tunnel can aid in the analysis of the behavior of a real swept wing; however, the effects of the wind tunnel walls cause behaviors that are not consistent with that of an infinite wing, like a non-uniform load along the span of the wing. This work aims to analyze the effects of the sidewalls on an infinite swept wing. The analysis is performed using Weissinger's lifting-line method combined with the method of images to create one or more reflections to simulate the behavior of a real wing under multiple conditions. A model based on horseshoe vortices was implemented in MATLAB and used to analyze the effect of the sidewalls on a swept wing that spans the entire width of the test section. The greater the sweep angle and angle of attack, and the smaller the wingspan, the greater the influence of the sidewalls. A non-swept wing approaches the theoretical behavior of a infinite wing; this analysis was extended to a swept wing, with slight differences from the theoretical model for an infinite swept wing. Furthermore, the study can be expanded using different analysis methods.

Keywords: aerodynamics; wind tunnels; computer simulation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Exemplo de uma asa se estendendo parede a parede dentro de um túnel de vento	12
Figura 2	Exemplo de uma asa representada por um vórtice ferradura	16
Figura 3	Desenho de uma asa com espessura	18
Figura 4	Exemplo de uma matriz de vórtices (sem espessura) utilizados para representar uma asa	19
Figura 5	Exemplo de um problema de asa enflechada com o método de Weissinger	20
Figura 6	Carga real (q) à direita e carga imagem ($-q$) à esquerda.	25
Figura 7	Imagem da asa real na direita e sua imagem à esquerda	25
Figura 8	Exemplo da aplicação do método da imagem em uma asa enflechada com uma imagem de cada lado da asa real	26
Figura 9	Exemplo de uma geometria de uma asa enflechada	27
Figura 10	Direção dos segmentos semi-infinitos	28
Figura 11	Sensibilidade ao número de imagens para $C_L \times \alpha$	30
Figura 12	Sensibilidade ao número de imagens para $C_l \times y^*$	31
Figura 13	Convergência da solução com número de painéis diferentes para $C_L \times \alpha$	32
Figura 14	Convergência da solução com número de painéis diferentes para $C_l \times y^*$	33
Figura 15	Efeito de um grande número de vórtices para $C_L \times \alpha$ (0 imagem)	34
Figura 16	Efeito de um grande número de vórtices para $C_l \times y^*$ (0 imagem)	35
Figura 17	Sensibilidade ao número de imagens de uma asa enflechada para $C_L \times \alpha$	37
Figura 18	Sensibilidade ao número de imagens de uma asa enflechada para $C_l \times y^*$	38
Figura 19	Síntese dos resultados com os parâmetros definidos, com uma análise do efeito do enflechamento para $C_l \times y^*$	39
Figura 20	Análise de $(dC_l/dy^*) \times y^*$	40
Figura 21	Análise do efeito do aumento da largura do túnel para $C_L \times \alpha$	41
Figura 22	Análise do efeito do aumento da largura do túnel para $C_l \times y^*$	42
Figura 23	Análise de $(dC_l/dy^*)_{min} \times \Lambda$	43

LISTA DE SÍMBOLOS

C_L	Coeficiente de sustentação
π	Número Pi
α	Ângulo de ataque
Λ	Ângulo de enflechamento da asa
w	<i>Downwash</i>
Γ	Circulação do vórtice
b	Envergadura da asa
L	Sustentação
ρ	Massa específica do escoamento
V_∞	Velocidade do escoamento
α_{eff}	Ângulo de ataque efetivo
α_{und}	Ângulo de ataque induzido
$\alpha_{L=0}$	Ângulo de ataque de zero sustentação
D	Arrasto
\mathbf{q}	Vetor da velocidade induzida por um filamento de vórtice
\mathbf{C}	Vetor da velocidade induzida pelo vórtice ferradura
\mathbf{n}	Vetor normal
\mathbf{A}	Matriz influência
\mathbf{S}	Área da asa
\mathbf{C}^*	Vetor da velocidade induzida pelos vórtices livres de um vórtice ferradura
y^*	Posição na envergadura (adimensionalizada pela corda)
C_l	Coeficiente de sustentação pela envergadura
L_y	Comprimento da envergadura da asa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Contextualização	12
1.2	Justificativa	12
2	OBJETIVOS	14
2.1	Objetivo Geral	14
2.2	Objetivos Específicos	14
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
3.1	A Asa Infinita e a Teoria do Aerofólio Fino	15
3.2	A teoria da linha sustentadora	15
3.3	Métodos VLM (<i>Vortex-Lattice Method</i>)	18
3.4	Teoria da Linha sustentadora de Weissinger	19
3.5	Solução numérica para o método de Weissinger	19
3.6	Cálculo do arrasto	23
3.7	Método das Imagens	24
4	METODOLOGIA	26
4.1	Aplicação do método das imagens	26
4.2	Definição do problema	27
4.3	Solução dos sistemas lineares e Estudo do problema das matrizes	28
4.3.1	Sistemas Lineares	28
4.3.2	Problema de Convergência de Resultados	28
5	RESULTADOS	30
5.1	Asa sem enflechamento	30
5.1.1	Sensibilidade ao número de imagens	30
5.1.2	Convergência da solução com número de painéis diferentes	32
5.1.3	Efeito de um grande número de vórtices	33
5.2	Asa com enflechamento	35
5.2.1	Sensibilidade ao número de imagens de uma asa enflechada	35
5.2.2	Análise de $(dC_1/dy^*) \times y^*$	39
5.2.3	Análise do efeito do aumento da largura do túnel	40
5.2.4	Análise de $(dC_1/dy^*)_{\min} \times \Lambda$	43
5.3	Observações sobre os resultados	44
6	CONCLUSÃO	46

REFERÊNCIAS 47

1 INTRODUÇÃO

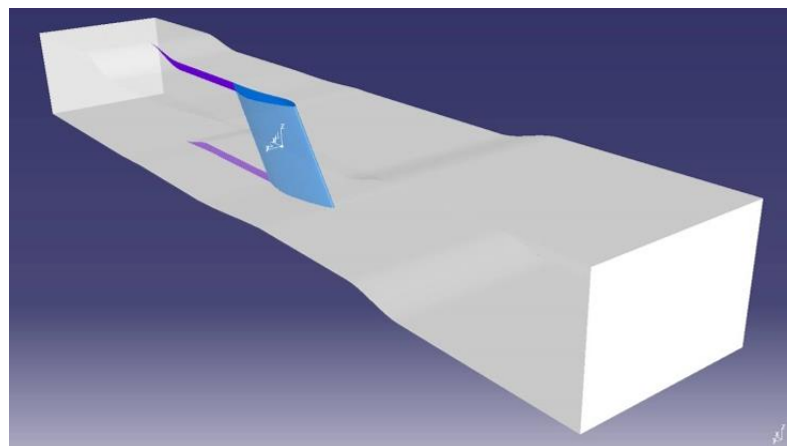
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O uso de túneis de vento é conveniente para o estudo, em uma escala menor, do comportamento de vários objetos, desde edifícios, automóveis ou, como no caso do presente trabalho, asas. Assim, este trabalho visa proporcionar, através de uma ferramenta própria, desenvolvida com a teoria existente sobre o assunto, o estudo de asas enflechadas infinitas.

Asas enflechadas infinitas já foram objeto de estudo de várias pesquisas, porém com foco no estudo da camada limite, como em Hanifi *et al.* (2014), ou da instabilidade do fluxo cruzado como em Serpieri e Kotsonis (2015). Na pesquisa realizada por Serpieri e Kotsonis (2015), os autores fizeram experimentos em túneis de vento com uma asa de envergadura igual à largura interior do túnel e também com o uso de uma geometria específica do túnel que direciona o escoamento para simular uma asa infinita. Além desse estudo, Hanifi *et al.* (2014) também buscaram a mesma preparação, com uma modificação na lateral do túnel de vento. Porém, no presente trabalho, foi usado o método das imagens para se obter o resultado de uma asa infinita dentro de um túnel de vento, sem modificações no próprio túnel.

Para a obtenção dos resultados, foi considerado que a asa se estende de uma parede lateral do túnel de vento até a parede lateral oposta. Essa composição é feita para permitir que seja utilizado o método das imagens para estudar uma asa teoricamente infinita.

Figura 1 – Exemplo de uma asa se estendendo parede a parede dentro de um túnel de vento



Fonte: Hanifi *et al.* (2014).

1.2 JUSTIFICATIVA

Considerando a proposta para obter uma asa infinita feita na seção anterior, é possível fazer uma analogia para um outro método semelhante, chamado de método das condições de fronteira periódicas, onde, segundo Satoh (2007), um espaço real é criado e múltiplos espaços

imaginários são criados em volta do real, assim as partículas dentro do espaço originário também são espelhadas para os espaços imaginários. Este método permite que o espaço real seja estudado com a influência de partículas imagem ao redor, limitando a computação necessária.

Assim, é possível extrapolar um conceito parecido de repetição de asas em um espaço imaginário para simular uma asa real.

A situação proposta neste trabalho (a asa se estendendo ao longo da largura do túnel de vento) permite que o estudo seja feito sem considerar os efeitos que ocorrem nas pontas da asa e podem influenciar na análise do corpo da asa em si, como, por exemplo, o arrasto induzido pelos vórtices de ponta de asa, já que o *downwash* causado por estes vórtices é eliminado, por consequência de que estes vórtices não podem ser gerados (Katz; Plotkin, 1991). Assim, considerando também que o escoamento é invíscido, o arrasto foi desconsiderado ao longo do trabalho, não sendo um foco para os resultados.

Além disso, o túnel de vento é notório por causar efeitos indesejáveis no modelo sendo estudado e estes efeitos acontecem por causa da influência das paredes do túnel nesse modelo, segundo Glazkov *et al.* (2001, p. 3, tradução nossa) "A influência das paredes da área de ensaios nas características aerodinâmicas dos modelos sendo testados é um desafio desde a criação dos primeiros túneis de vento, e isso permanece relevante até os tempos atuais."¹. Logo, estudar esses efeitos indesejáveis pode ser benéfico para a obtenção de resultados mais exatos em estudos com túneis de vento.

Com isso, para este trabalho, será estudado como o túnel de vento afeta uma asa enflechada infinita. Apenas serão consideradas as paredes laterais do túnel de vento, a fim de que as paredes superiores e inferiores não influenciem o modelo, já que o objetivo é estudar uma asa infinita (ao longo da envergadura) e a presença de um chão e um teto provocaria uma espécie de efeito solo (Katz; Plotkin, 1991).

¹ The influence of the test section walls on the aerodynamic characteristics of models under test has become a challenge since the advent of the first wind tunnels and remains acute up to the present.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Compreender o comportamento e as características teóricas de uma asa infinita em um túnel de vento, considerando os efeitos tridimensionais sobre ela. Com isso, foi utilizado o método das imagens para se criar a situação necessária para este problema.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Implementar um método baseado na linha de sustentação para se analisar asas enflechadas montadas entre as paredes de um túnel de vento.
- Analisar as características de uma asa enflechada infinita dentro de um túnel de vento com a mudança do alongamento, número de imagens utilizadas e de seções da asa no modelo desenvolvido.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 A ASA INFINITA E A TEORIA DO AEROFÓLIO FINO

Todas as unidades das grandezas utilizadas neste trabalho estão de acordo com o Sistema Internacional de Unidades.

Em uma asa infinita, todas as seções da asa são iguais, logo as propriedades do aerofólio são iguais às propriedades de uma asa infinita. Assim uma asa 2D (seção representada pelo aerofólio) representa uma asa infinita. Além disso, a teoria do aerofólio fino também foi usada, como será explicado mais à frente e, segundo essa teoria, o C_L (Coeficiente de sustentação) pode ser calculado como (Anderson, 2017):

$$C_L = 2\pi\alpha \quad (1)$$

Onde, α , que é o ângulo de ataque da asa, deve estar em radianos. Observando a equação 1, é possível notar que a curva do C_L é linear.

Para uma asa enflechada infinita (onde Λ é o ângulo de enflechamento, em radianos, da asa em relação ao bordo de ataque), a curva do C_L pode ser aproximada para a equação 2 (Houghton; Carpenter, 2003).

$$C_L = 2\pi\alpha\cos(\Lambda) \quad (2)$$

3.2 A TEORIA DA LINHA SUSTENTADORA

A teoria da linha sustentadora, formulada pelo alemão Ludwig Prandtl em 1918 (DeYoung, 1976), considera um escoamento invíscido e incompressível sobre uma asa, modelando a asa como um único vórtice ferradura, como mostra a Figura 2. Os vórtices livres (*trailing vortex*), que continuam após o vórtice ligado (*bound vortex*), geram um *downwash* (w) sobre o vórtice ligado, que pode ser calculado pela equação 3 em um ponto y , considerando como a origem do espaço o centro do vórtice ligado (Anderson, 2017).

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \quad (3)$$

Onde, w é o *downwash*, em m/s , na posição y da asa, Γ é a circulação do vórtice, em m^2/s e b é a envergadura da asa, em metros.

A equação 3 é derivada da Lei de Biot-Savart, que mostra que a velocidade induzida por um filamento de vórtice é dada pela equação 4, podendo ser simplificada para a equação 5 se o filamento de vórtice não fizer curvas e for infinito (Anderson, 2017).

Observa-se que os cálculos estão sendo feitos para a linha sustentadora, ou seja, onde o vórtice ligado está na asa. A posição do cálculo na asa é importante de se lembrar, já que com o método de Weissinger, explicado mais a frente, o local onde o cálculo é feito mudará.

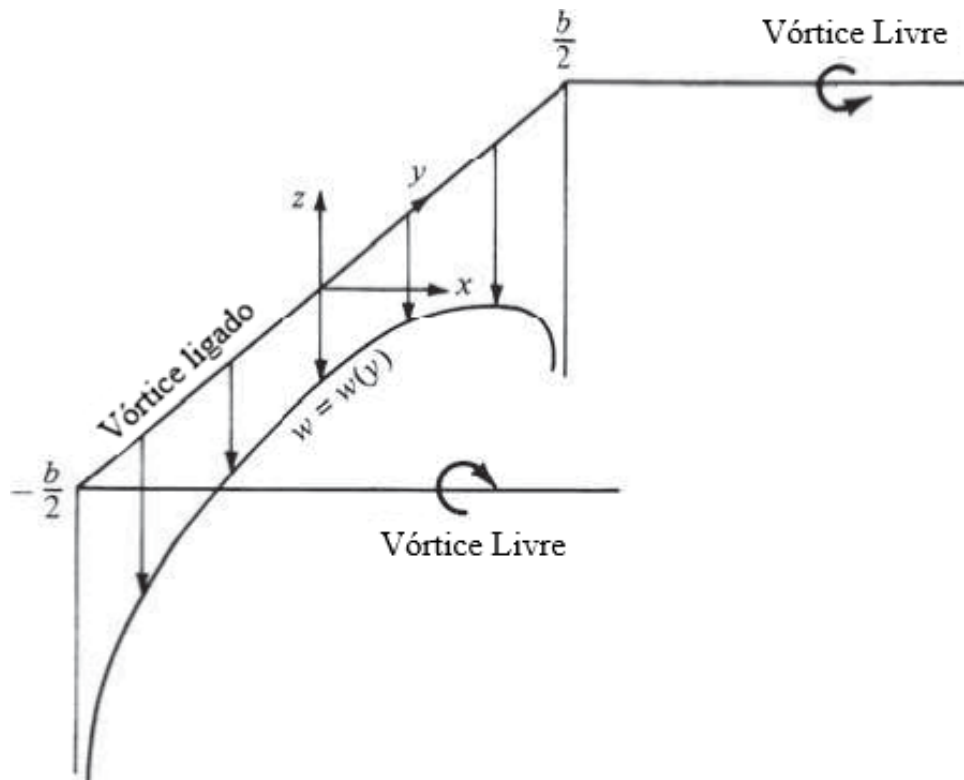
$$d\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (4)$$

Onde dV é a velocidade induzida, em m/s , pelo filamento de vórtice $d\mathbf{l}$ em um ponto arbitrário P no espaço, em que \mathbf{r} é o vetor deste segmento até o ponto P.

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (5)$$

Sendo que V é a velocidade induzida, em m/s , pelo filamento de vórtice em P e h é a distância perpendicular (em metros) do ponto P arbitrário para o filamento.

Figura 2 – Exemplo de uma asa representada por um vórtice ferradura



Fonte: Adaptado de Anderson (2017).

A sustentação é causada pela circulação do vórtice e pode ser calculada a partir do teorema de Kutta-Joukowski pela equação 6, onde Γ é a circulação do vórtice ferradura (Anderson, 2017). Além disso, os vórtices livres se estendem até o infinito, a fim de se satisfazer o teorema de Helmholtz (o vórtice não pode começar ou terminar dentro do escoamento) e para satisfazer a condição de Kutta, ou seja, de que o escoamento no bordo de fuga deve ser suave (Katz; Plotkin, 1991).

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma \quad (6)$$

Onde L é a sustentação (em N), ρ é a massa específica do escoamento, em kg/m^3 , e V_{∞} é a velocidade do escoamento, em m/s .

Porém, analisando a equação 3 e considerando a Figura 2, é possível perceber que o *downwash* nas pontas da asa seria infinito, logo uma solução foi discretizar a asa em vários vórtices ferradura, permitindo o cálculo mais preciso dessa situação, obtendo-se a equação 7. Sabe-se que o *downwash* causa uma mudança no ângulo de ataque, já que o ângulo de ataque efetivo (α_{eff}) difere do ângulo de ataque geométrico (α) por causa do ângulo de ataque induzido (α_{ind}). Nesse caso, o α_{eff} é como na equação 8. Como o *downwash* (w) varia conforme a envergadura, α_{ind} também varia, como mostra a equação 9 (Anderson, 2017).

$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy) dy}{4\pi(y_o - y)} \quad (7)$$

$$w(y_o) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy}{(y_o - y)}$$

Onde y_o é um ponto arbitrário no eixo y .

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_{ind} \quad (8)$$

$$\alpha_{ind} = \tan^{-1} \left(\frac{w(y_o)}{V_{\infty}} \right) \quad (9)$$

Considerando que o sistema internacional foi utilizado, α_{ind} e α_{eff} estão em radianos.

Com o desenvolvimento anterior em mente, é possível desenvolver a equação fundamental da teoria da linha sustentadora de Prandtl (equação 10). Essa fórmula deixa o α_{eff} em função de apenas uma variável desconhecida Γ , permitindo calcular a sustentação, o arrasto induzido e os seus coeficientes (Anderson, 2017).

$$\alpha(y_o) = \frac{\Gamma(y_o)}{\pi V_{\infty} c(y_o)} + \alpha_{L=0}(y_o) + \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy}{(y_o - y)} \quad (10)$$

Sendo que $c(y_o)$ é a corda, em metros, no ponto arbitrário y_o e $\alpha_{L=0}(y_o)$ é o ângulo de ataque de zero sustentação (em radianos), também no ponto arbitrário.

O desenvolvimento completo das equações anteriores está disponível em Anderson (2017), sendo que ele foi simplificado neste trabalho, já que o foco não está no desenvolvimento desta seção para os objetivos do trabalho mencionados anteriormente.

A sustentação e o arrasto podem ser calculados pelas equações 11 e 12, respectivamente. A equação 11 é derivada da equação 6, sendo que ela apenas está adaptada para calcular a sustentação de cada seção da asa (Anderson, 2017).

$$L(y_o) = \rho V_\infty \Gamma(y_o) \quad (11)$$

$$D(y_o) = L(y_o) \operatorname{sen}(\alpha_{ind}) \quad (12)$$

Onde $D(y_o)$ é o arrasto, em N , no ponto arbitrário y_o .

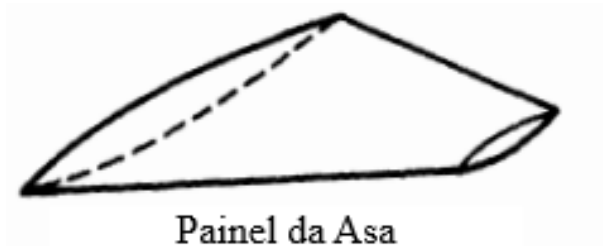
Porém, a Teoria da Linha Sustentadora, inicialmente desenvolvida por Prandtl, não é o suficiente para asas com um alongamento baixo ou de geometrias mais complexas, como asas enflechadas, logo métodos mais avançados foram desenvolvidos para esses casos (Anderson, 2017). Essa limitação é corroborada por Sivells e Neely (1947), que afirmam que a teoria da linha sustentadora com métodos lineares não produz resultados confiáveis para baixos alongamentos, ângulos de enflechamento muito grandes ou em altos ângulos de ataque (por conta do estol).

3.3 MÉTODOS VLM (VORTEX-LATTICE METHOD)

Os métodos que se utilizam do VLM são aqueles que possuem uma malha de vórtices ao longo da envergadura e da corda para fazer a análise da asa, já que esta malha pode ajudar a modelar a influência que uma seção da asa tem em outra seção dela mesma com mais precisão. Afinal, é possível de se obter uma distribuição bidimensional da circulação da asa, ou seja, ao contrário do método da linha sustentadora, no qual as seções estão dispostas ao longo da envergadura, tendo apenas uma seção ao longo da corda. Esse método se chama Teoria da Superfície Sustentadora, o qual é mais complexo, por conta do número de seções (Kimura, 2011).

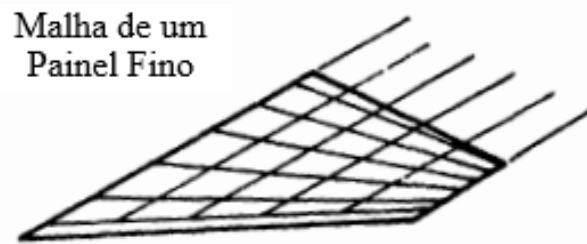
Além disso, Weissinger (1947) tratou desse método em seu trabalho *The Lift Distribution of Swept Back Wings*, no qual ele deu o nome de *The Lifting Surface Method (F-method)*. Continuando, o nome *Vortex-Lattice Method* foi usado primeiro por Victor Montague Falkner em 1947, quando ele propôs um método para se calcular as cargas em uma asa por meio do uso de vários vórtices ao longo da envergadura e da corda, porém esse método ainda era limitado por causa do trabalho árduo que era necessário, então o VLM avançou novamente apenas quando os computadores se tornaram mais disponíveis (DeYoung, 1976).

Figura 3 – Desenho de uma asa com espessura



Fonte: Adaptado de DeYoung (1976).

Figura 4 – Exemplo de uma matriz de vórtices (sem espessura) utilizados para representar uma asa



Fonte: Adaptado de DeYoung (1976).

Após o avanço da computação, novos métodos numéricos foram desenvolvidos e, nos anos 1960, os métodos numéricos baseados em VLM se tornaram muito populares, permitindo com que a indústria avançasse muito nas aplicações e no desenvolvimento de novas tecnologias baseadas no VLM (DeYoung, 1976).

3.4 TEORIA DA LINHA SUSTENTADORA DE WEISSINGER

A teoria de Weissinger, desenvolvida a partir da teoria da linha sustentadora de Prandtl, faz a modificação de que o ponto de controle, que é o local onde a influência de cada vórtice é calculado, está situado em $3/4$ de corda – onde, segundo Kimura (2011), a condição de contorno de escoamento tangente ao perfil é linearizada – e a linha sustentadora (onde os vórtices ferradura estão) está em $1/4$ de corda. A modificação das posições na asa é feita para que a condição de contorno de que a velocidade do escoamento deve ser tangente ao aerofólio seja satisfeita, sendo possível pelo fato de que a velocidade vertical induzida pelos vórtices deve ser igual em magnitude e oposta ao escoamento incidente (Weissinger, 1947).

A forma de se posicionar os vórtices e os pontos de controle é derivada do trabalho de Enrico Pistolesi, que descobriu que ao se fazer esse posicionamento, a sustentação e o momento são exatamente compatíveis com a "teoria da asa fina", ou seja, de espessura desprezível (DeYoung, 1976). Essa compatibilidade permite que esta teoria da asa fina seja usada para comparação com os resultados obtidos deste trabalho.

A Teoria proposta por Weissinger permite que o cálculo seja feito para asas de forma geral, já que os pontos de controle nessa posição não sofrem discontinuidades em asas enflechadas, como ocorre na posição de $1/4$ de corda e também permite que o momento de rolagem e o momento de arfagem sejam calculados (Kimura, 2011), porém neste trabalho só será trabalhada a sustentação.

3.5 SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O MÉTODO DE WEISSINGER

Como foi explicado anteriormente neste trabalho, por conta do método ser linear (A curva $C_L \times \alpha$ é linear), as condições de baixo alongamento (mencionadas no parágrafo anterior), alto enflechamento ou altos ângulos de ataque podem causar resultados mais imprecisos (Sivells; Neely, 1947).

Continuando, deve-se entender o cálculo da velocidade de um vórtice em um ponto qualquer e, para isso, é utilizado a Lei de Biot-Savart, como na equação 4. Essa lei diz que a velocidade depende de (Katz; Plotkin, 1991):

$$\mathbf{q} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_1)}{(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_1)^3} \quad (13)$$

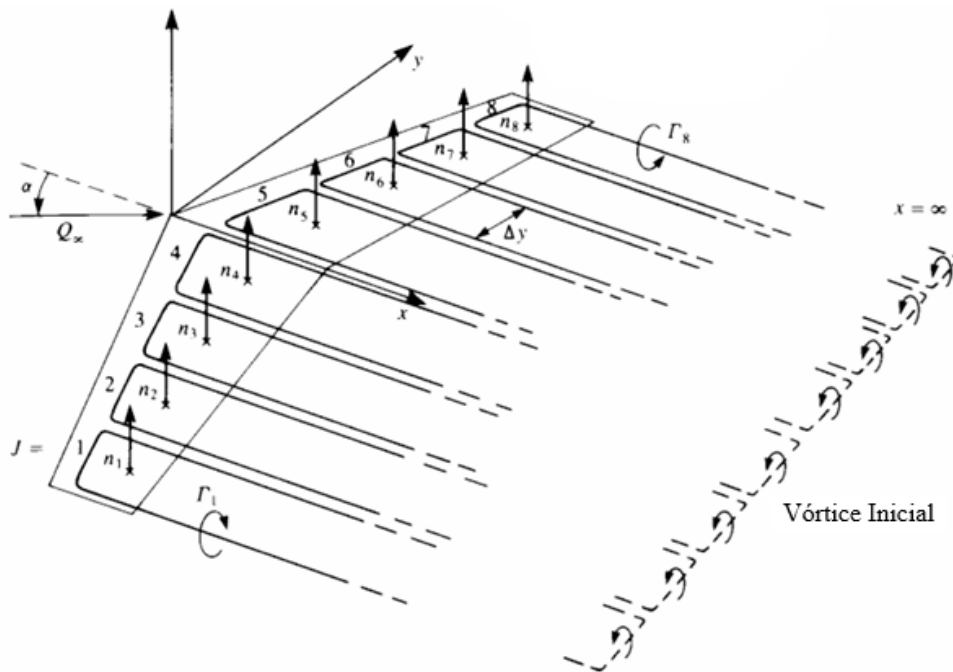
Onde \mathbf{q} é a velocidade induzida, em m/s , pelo filamento de vórtice, \mathbf{r}_o é o vetor entre a origem do plano e um ponto P arbitrário e \mathbf{r}_1 é o vetor entre a origem do plano e o filamento de vórtice.

Utilizando-se da equação 13, pode-se conseguir a velocidade induzida por um segmento de vórtice (sem curvas em sua trajetória) em um ponto arbitrário P, localizado em um plano cartesiano tridimensional, por meio da equação 14 (Katz; Plotkin, 1991):

$$\mathbf{q}_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{r}_0 \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} \right) \quad (14)$$

É importante notar que o vórtice ferradura não tem fim ou começo, como mostra a Figura 5, além disso, os pontos de controle ou pontos de colocação¹, estão localizados no mesmo local dos vetores normais, em n_1, n_2 etc (Katz; Plotkin, 1991).

Figura 5 – Exemplo de um problema de asa enflechada com o método de Weissinger



Fonte: Adaptado de Katz e Plotkin (1991).

Continuando a equação 14 e sabendo que:

¹ Em Katz e Plotkin (1991), o autor dá o nome de *Collocation points* (Pontos de colocação). Logo, neste trabalho, o nome de ponto de controle e ponto de colocação significam a mesma coisa.

- r_1 e r_2 são as distâncias entre o ponto P e a extremidade 1 do segmento de vórtice e a distância entre P e a extremidade 2 do segmento de vórtice, respectivamente.
- \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 são os vetores que ligam o ponto P até as duas extremidades do segmento de vórtice.
- \mathbf{r}_o é o vetor que liga as duas extremidades do segmento de vórtice, ou seja, o próprio segmento de vórtice.

Com essas observações acima, é possível desenvolver mais as equações. Com isso, calculam-se $|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2$ e as distâncias r_1 e r_2 pelas equações 15 e 16, respectivamente (Katz; Plotkin, 1991):

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x^2 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y^2 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z^2 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2 + (z_p - z_1)^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x_p - x_2)^2 + (y_p - y_2)^2 + (z_p - z_1)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

Onde o subscrito p significa a coordenada do ponto arbitrário P e os subscritos 1 ou 2 se relacionam com as coordenadas de uma das extremidades do segmento do vórtice.

Além disso, a velocidade induzida pelo vórtice dentro dele mesmo é zero (Katz; Plotkin, 1991). Prosseguindo, desenvolvendo a equação 14, obtém-se:

$$\mathbf{q}_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \left(\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_o}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_o}{r_2} \right) \quad (17)$$

Logo, deve-se calcular o produto entre os vetores \mathbf{r}_o e \mathbf{r}_1 , além de \mathbf{r}_o e \mathbf{r}_2 para dar continuidade aos cálculos. Feito o cálculo dos produtos, pode-se calcular os componentes da velocidade induzida pelo vórtice no ponto P pela equação 18, onde K seria o resto dos termos da equação desenvolvida a partir da Lei de Biot-Savart (equação 17), como demonstrado na equação 19. Portanto, a velocidade induzida, em m/s , em um ponto P por um segmento de vórtice será chamada de C, como na equação 20 e a velocidade total induzida por um vórtice ferradura (3 segmentos) será como na equação 21 ² (Katz; Plotkin, 1991).

$$\begin{aligned} u &= K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x \\ v &= K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y \\ w &= K(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z \end{aligned} \quad (18)$$

² Subscrito 1 está relacionado ao segmento semi-infinito esquerdo, subscrito 2 ao vórtice ligado e subscrito 3 ao segmento semi-infinito direito.

Onde $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x$ é o elemento no eixo x do vetor resultado do produto vetorial $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y$ é o elemento no eixo y, e $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z$ é o elemento no eixo z. Por consequência, u , v e w representam as velocidades induzidas, em m/s , por um segmento do vórtice ferradura nos eixos x, y e z, respectivamente.

$$K = \frac{\Gamma}{4\pi|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \left(\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_0}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_0}{r_2} \right) \quad (19)$$

Para as equações 18 e 19, K foi retirado da equação 17, deixando apenas o produto vetorial $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, que está no numerador da fração dessa equação.

$$\mathbf{C} = (u, v, w) \quad (20)$$

$$\mathbf{C} = (u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2) + (u_3, v_3, w_3) \quad (21)$$

Para as equações 20 (velocidade de apenas um segmento do vórtice) e 21 (velocidade induzida pelos 3 segmentos do vórtice ferradura, como mostram os subscritos 1, 2 e 3), \mathbf{C} é o vetor da velocidade induzida pelo vórtice no ponto P.

A partir das equações anteriores (equação 18 até a equação 21), é possível calcular a velocidade induzida de um vórtice (no caso deste trabalho, um vórtice ferradura, o qual pode ser dividido em 3 segmentos) em um determinado ponto e, assim, continuar os cálculos para determinar as características de uma asa. Com isso, devem ser calculadas todas as influências de todos os vórtices sobre todos os pontos de controle, a fim de se conseguir fazer a modelagem de toda a asa, respeitando a discretização ao longo da envergadura, como, por exemplo, na Figura 5 (Katz; Plotkin, 1991).

Assim, lembrando que o escoamento nesses pontos não pode atravessar o aerofólio (ou asa), o que Katz chama de "condição de contorno sem escoamento normal à asa" (Katz; Plotkin, 1991), deve-se multiplicar o vetor \mathbf{C} , obtido na equação 21 pelo vetor normal (\mathbf{n}) associado a cada seção da asa (lembrando que a seção sendo estudada não possui torções). Pode-se usar a equação 22 para se calcular o vetor normal (\mathbf{n}), onde o α utilizado é o ângulo de ataque local (Katz; Plotkin, 1991).

$$\mathbf{n} = (\sin(\alpha), 0, \cos(\alpha)) \quad (22)$$

Com isso, podem-se obter os coeficientes de influência de cada vórtice em cada ponto de controle, obtendo a equação 23, onde i simboliza o ponto de controle e j o vórtice, por exemplo, $A_{1,2}$ significa o coeficiente de influência do vórtice ferradura número 2 no ponto de controle número 1 (Katz; Plotkin, 1991).

$$A_{i,j} = \mathbf{C}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} \quad (23)$$

Após isso, para que a condição de contorno seja obedecida, a soma de cada coeficiente de

influência multiplicado pelo Γ de cada vórtice deve ser igual ao oposto da componente normal do escoamento livre sobre o ponto de controle, como mostra a equação 24 (Katz; Plotkin, 1991).

$$\begin{aligned} A_{1,1}\Gamma_1 + A_{1,2}\Gamma_2 + \dots &= -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_1 \\ A_{2,1}\Gamma_1 + A_{2,2}\Gamma_2 + \dots &= -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (24)$$

Com a equação 24, é possível criar um sistema linear e resolver para Γ , obtendo a circulação de cada vórtice ferradura e, assim, conseguindo calcular a sustentação (por meio do teorema de Kutta-Joukowski, equação 6) e, se desejado, o arrasto induzido pelos vórtices. Pode-se seguir a discretização e calcular a sustentação em cada seção (ΔL_j) com a equação 25, onde Δy_j é o segmento ao longo da envergadura, em metros, que corresponde à seção do vórtice ferradura Γ_j (Katz; Plotkin, 1991).

$$\Delta L_j = \rho V_\infty \Gamma_j \Delta y_j \quad (25)$$

A sustentação total (L) da asa pode ser calculada pela equação 26 e o C_L pela equação 27.

$$L = \sum_1^j \Delta L_j \quad (26)$$

$$C_L = \frac{2L}{\rho V_\infty^2 S} \quad (27)$$

Na equação 27, a variável S corresponde à área total da asa, em m^2 .

3.6 CÁLCULO DO ARRASTO

O arrasto induzido pode ser calculado facilmente se for desejado, bastando apenas remover a velocidade induzida pelo segmento do vórtice ferradura que está em 1/4 de corda, ou seja, o vórtice ligado à asa. Assim, se consegue a velocidade induzida como na equação 28 (Katz; Plotkin, 1991).

$$\mathbf{C}^* = (u_1, v_1, w_1) + (u_3, v_3, w_3) \quad (28)$$

Com isso, consegue-se montar um sistema (equação 30) para encontrar $w_{ind,j}$, que é o *downwash* induzido pelo vórtice ferradura. Este cálculo é possível pois já se tem o Γ de cada vórtice, obtido pelo sistema de equações 24, e $b_{i,j}$ (valor de influência dos vórtices para o arrasto induzido) é obtido da equação 29 (Katz; Plotkin, 1991).

$$b_{i,j} = \mathbf{C}_{i,j}^* \cdot \mathbf{n}_{i,j} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
b_{1,1}\Gamma_1 + b_{1,2}\Gamma_2 + \dots &= w_{ind,1} \\
b_{2,1}\Gamma_1 + b_{2,2}\Gamma_2 + \dots &= w_{ind,2} \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{30}$$

Após encontrado o *downwash* induzido por cada vórtice, o arrasto (em N) em cada seção da asa (ΔD) pode ser calculado pela equação 31 (Katz; Plotkin, 1991).

$$\Delta D = -\rho w_{ind,j} \Gamma_j \Delta y_j \tag{31}$$

O cálculo do arrasto induzido, foi ilustrado aqui, porém o arrasto não será calculado no trabalho, por conta de se tratar de uma asa infinita, sem vórtices de ponta de asa e sem *downwash* (a diferença da sustentação causada ao longo da envergadura é consequência dos efeitos da parede lateral, logo como uma asa infinita não possui essa diferença, o *downwash* não será considerado para os resultados deste trabalho).

3.7 MÉTODO DAS IMAGENS

O método das imagens é uma ferramenta muito utilizada em alguns campos da ciência, como na eletrostática e também na aerodinâmica. Segundo Jackson (1999) em seu livro de eletrodinâmica, muitos problemas envolvem limites, como paredes, chão etc. e o método das imagens é útil para resolver tais problemas. Esse método pode ser entendido como:

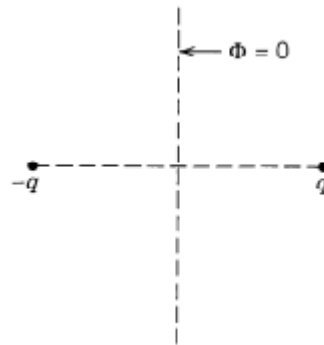
O método das imagens se preocupa com o problema de um ou mais pontos de carga na presença de limites, por exemplo, condutores aterrados ou em potenciais fixos. Em condições favoráveis, é possível inferir, a partir da geometria da situação, que um número pequeno de cargas com magnitude apropriada colocadas de forma correta na região exterior à de interesse, pode simular as condições do limite (Jackson, 1999, p. 57, tradução nossa).³

Essa situação da citação é demonstrada por Jackson (1999) na Figura 6, retirada de seu livro.

O método das imagens também pode ser aplicado a análises de aerodinâmica. Pode-se usar a influência de um vórtice (no local de uma carga, como na eletrodinâmica) localizado na região externa de interesse para modelar o limite presente na situação. Por exemplo, se o chão estiver presente na análise a ser feita, o efeito solo pode ser modelado. Além disso, o método das imagens pode ser utilizado para que apenas seja modelada metade de uma asa (semi-envergadura),

³ "The method of imagens concerns itself with the problem of one or more point charges in the presence of boundary surfaces, for example, conductors either grounded or held at fixed potentials. Under favourable conditions it is possible to infer from the geometry of the situation that a small numbers of suitably placed charges of appropriate magnitudes, external to the region of interest, can simulate the required boundary conditions."

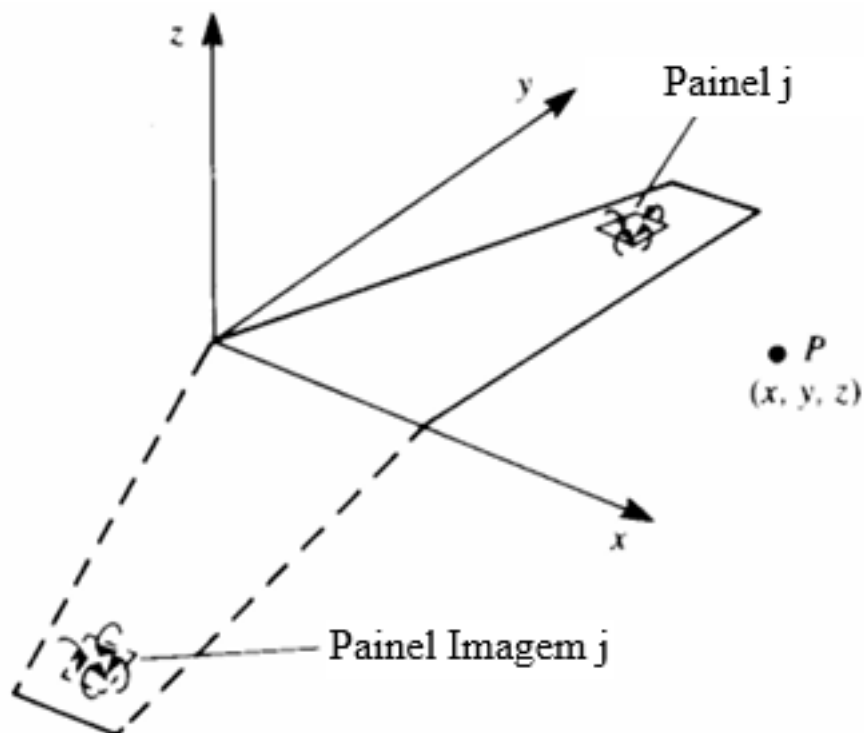
Figura 6 – Carga real (q) à direita e carga imagem ($-q$) à esquerda.



Fonte: Jackson (1999).

podendo usar um limite na raiz da asa para que a outra metade seja considerada, diminuindo os cálculos e o poder computacional necessários, já que não é necessário o cálculo da circulação dos vórtices imagem (Katz; Plotkin, 1991). Essa última situação é demonstrada por Katz na Figura 7, retirada de seu livro.

Figura 7 – Imagem da asa real na direita e sua imagem à esquerda



Fonte: Adaptado de Katz e Plotkin (1991).

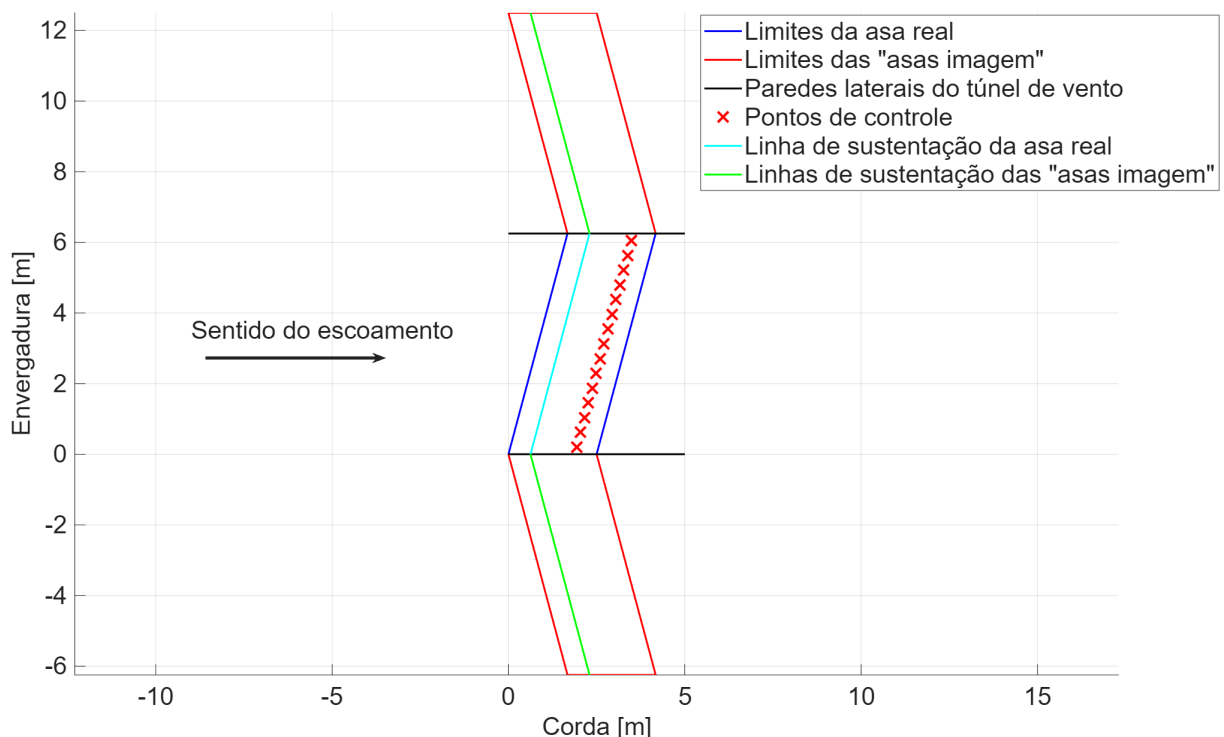
4 METODOLOGIA

4.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS IMAGENS

Para começar, foi utilizado o método numérico da linha sustentadora linear de Weissinger e a asa foi modelada em um plano cartesiano tridimensional, com eixos x , y e z e componentes i , j e k para cada eixo, respectivamente. Além disso, a asa foi modelada considerando um grande alongamento, por conta de matrizes problemáticas obtidas com um alongamento baixo.

Considerando a explicação do capítulo anterior, este trabalho se utilizou do método das imagens para recriar vórtices imagem tanto do lado esquerdo, como na Figura 7, quanto no lado direito. Essa modelagem foi feita com várias imagens de cada lado, permitindo que – com a repetição continuada dos vórtices imagem dos dois lados da asa real – uma asa infinita (ao longo da envergadura) seja, teoricamente, criada a partir dos limites que as paredes laterais de um túnel de vento impõem na asa. Com essa modelagem dos limites laterais do túnel, é possível se estudar os efeitos do túnel de vento na asa real, nesse caso. Essa aplicação é exemplificada na Figura 8 a seguir. A linha em ciano mostra como a linha sustentadora também é espelhada e, por consequência, os vórtices também são. A asa real é representada pelo azul escuro e as asas imaginárias pelo vermelho. Os pontos de controle (representados por um "x") não são espelhados, pois a influência é calculada neles.

Figura 8 – Exemplo da aplicação do método da imagem em uma asa enflechada com uma imagem de cada lado da asa real



Fonte: Produção do próprio autor.

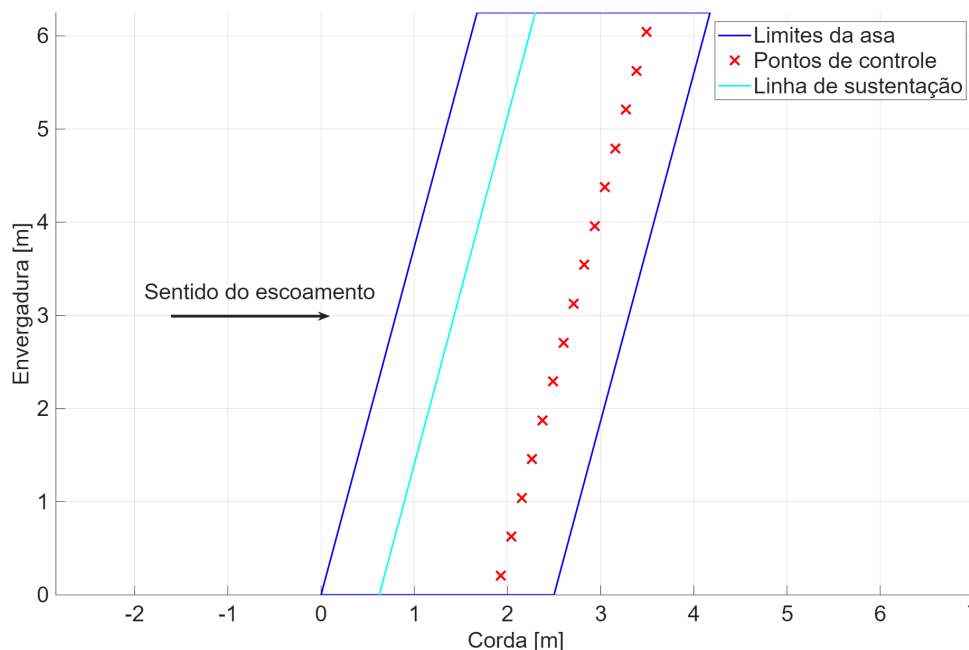
4.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O *software* utilizado para desenvolver a ferramenta para o trabalho é o MATLAB, desenvolvido pela *MathWorks*.

A geometria do problema seguirá a Teoria da Linha Sustentadora de Weissinger, sempre com os vórtices ferradura sendo colocados a um quarto ($1/4$) de corda e os pontos de controle (ou pontos de colocação) a três quartos ($3/4$) de corda (Weissinger, 1947). Esses vórtices se estendem ao longo da asa, de ponta a ponta. Além disso, para cada vórtice, existe um ponto de controle que está situado exatamente a mesma distância dos vórtices livres de cada vórtice ferradura (no meio do vórtice, se considerada a direção da envergadura)

Foram feitos testes sem o espelhamento advindo da presença da parede lateral, a fim de validar alguns resultados e, depois, com a presença das imagens da parede lateral, com o intuito de se obter os resultados e atingir os objetivos específicos mencionados anteriormente. Um exemplo de uma possível geometria (sem espelhamento) para ser estudada está na Figura 9, na qual a linha em ciano é o local os segmentos finitos dos vórtices ferradura são colocados (vórtices não estão representados para uma maior clareza) e os pontos em "x" são os pontos de controle, nos quais as condições de contorno são satisfeitas e onde o estudo das velocidades induzidas pelos vórtices é feito, como na Figura 8.

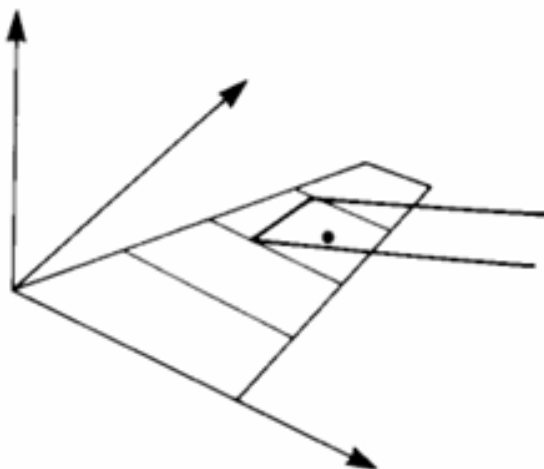
Figura 9 – Exemplo de uma geometria de uma asa enflechada



Fonte: Produção do próprio autor.

Os segmentos semi-infinitos dos vórtices ferradura seguem a definição da Figura 10, onde eles estão seguindo a direção do escoamento livre, para se seguir o requisito de que nenhuma força deve atuar nos vórtices livres. Esse tipo de aplicação é suficiente em ângulos de ataque relativamente pequenos (Katz; Plotkin, 1991).

Figura 10 – Direção dos segmentos semi-infinitos



Fonte: Katz e Plotkin (1991).

Após isso, os cálculos foram feitos se utilizando da equação 14 até a equação 27, apresentadas na seção anterior. A solução do sistema linear obtido ($A\Gamma = -V_{\infty}n$) será discutida na próxima seção.

4.3 SOLUÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES E ESTUDO DO PROBLEMA DAS MATRIZES

4.3.1 Sistemas Lineares

A solução numérica proposta por Katz e Plotkin (1991), explicada anteriormente, foi seguida para se obter os resultados deste trabalho. Os sistemas lineares encontrados foram resolvidos com uma função própria do MATLAB, chamada *linsolve*. Assim, no caso de uma matriz quadrada (que é a matriz que foi resolvida neste trabalho), o programa utiliza o método de decomposição LU com pivotamento parcial (Mathworks, 2025). Esse método consiste em decompor a matriz quadrada em dois ou mais fatores, utilizando-os para se resolver outros sistemas lineares que proporcionariam a solução do sistema original. O pivotamento parcial significa que uma matriz de permutação pode ser usada na solução, o que pode ajudar a diminuir erros de arredondamento (Ruggiero; Lopes, 1998). O método utilizado pelo *linsolve* não será muito aprofundado aqui e resultados não convergentes foram obtidos com este método, como será explicado mais a frente, porém o método de decomposição LU com pivotamento parcial foi suficiente para se obter resultados satisfatórios.

4.3.2 Problema de Convergência de Resultados

Durante o trabalho, foi encontrado um problema para análises altamente discretizadas. Assim, considerando um sistema linear $Ax = B$, é possível analisar como pequenas variações em A ou B podem afetar a solução x. Essa análise pode ser feita por meio do número de condição de uma

matriz, que pode ser calculado pela equação 1, considerando que a matriz A é quadrada (Golub; Loan, 1996).

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (1)$$

Esse número de condição diz que, se o número for muito grande, a matriz é mal condicionada e a solução obtida pode ser inexata (Golub; Loan, 1996). O resultado inexato acontece, pois se ela é mal condicionada, está próxima de uma matriz singular, ou seja, pequenas diferenças na entrada do sistema linear (matrizes A e B) podem causar uma diferença grande na saída (solução do sistema linear) (Ruggiero; Lopes, 1998).

A equação 1 foi usada para calcular o número de condição de matrizes que resultaram em resultados problemáticos. Essas matrizes ocorreram quando a discretização da asa foi alta, porém resultados satisfatórios foram obtidos com uma discretização menor, que resultou em matrizes bem condicionadas.

5 RESULTADOS

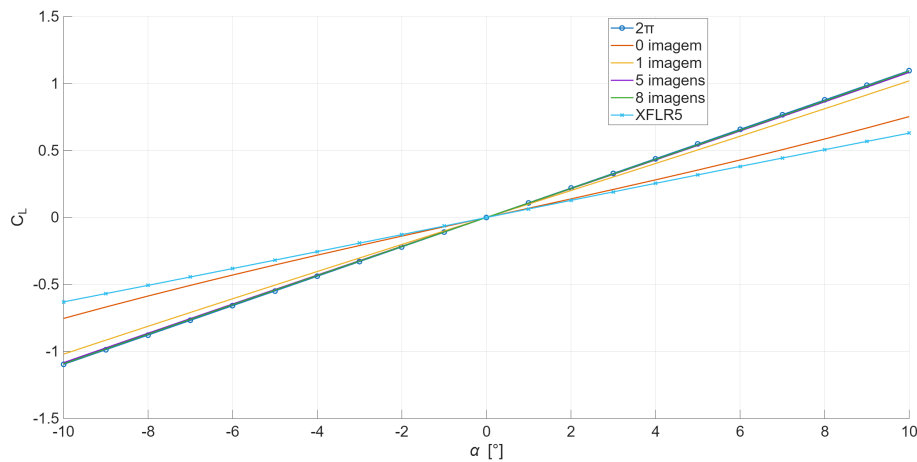
5.1 ASA SEM ENFLECHAMENTO

5.1.1 Sensibilidade ao número de imagens

Para começar, foi analisado o efeito do número de imagens da asa real retangular sem enflechamento e com uma envergadura 4 vezes maior que a corda ($L_y = 4c$), comparando os resultados com a teoria do aerofólio fino, que possui uma curva obtida por $2\pi\alpha$. Como pode-se observar na Figura 11, o aumento do número de imagens causa uma mudança na curva e torna ela mais próxima da curva $2\pi\alpha$ (5 e 8 imagens possuem praticamente o mesmo resultado), podendo-se concluir que o resultado é coerente com a teoria tomada como base (teoria do aerofólio fino e da asa infinita), já que o efeito dos vórtices imagem faz com que a asa real sem enflechamento se aproxime da curva $C_L \times \alpha$ da teoria do aerofólio fino.

Além disso, o resultado com 0 imagem foi próximo da análise feita com o *software* XFLR5, com algumas diferenças que podem ser explicadas pelo XFLR5 (Método LLT) considerar um cálculo diferente do proposto neste trabalho, como, por exemplo, a consideração de que a curva $C_L \times \alpha$ não é linear e também utilizando um outro método numérico para a solução (Deperrois, 2013).

Figura 11 – Sensibilidade ao número de imagens para $C_L \times \alpha$



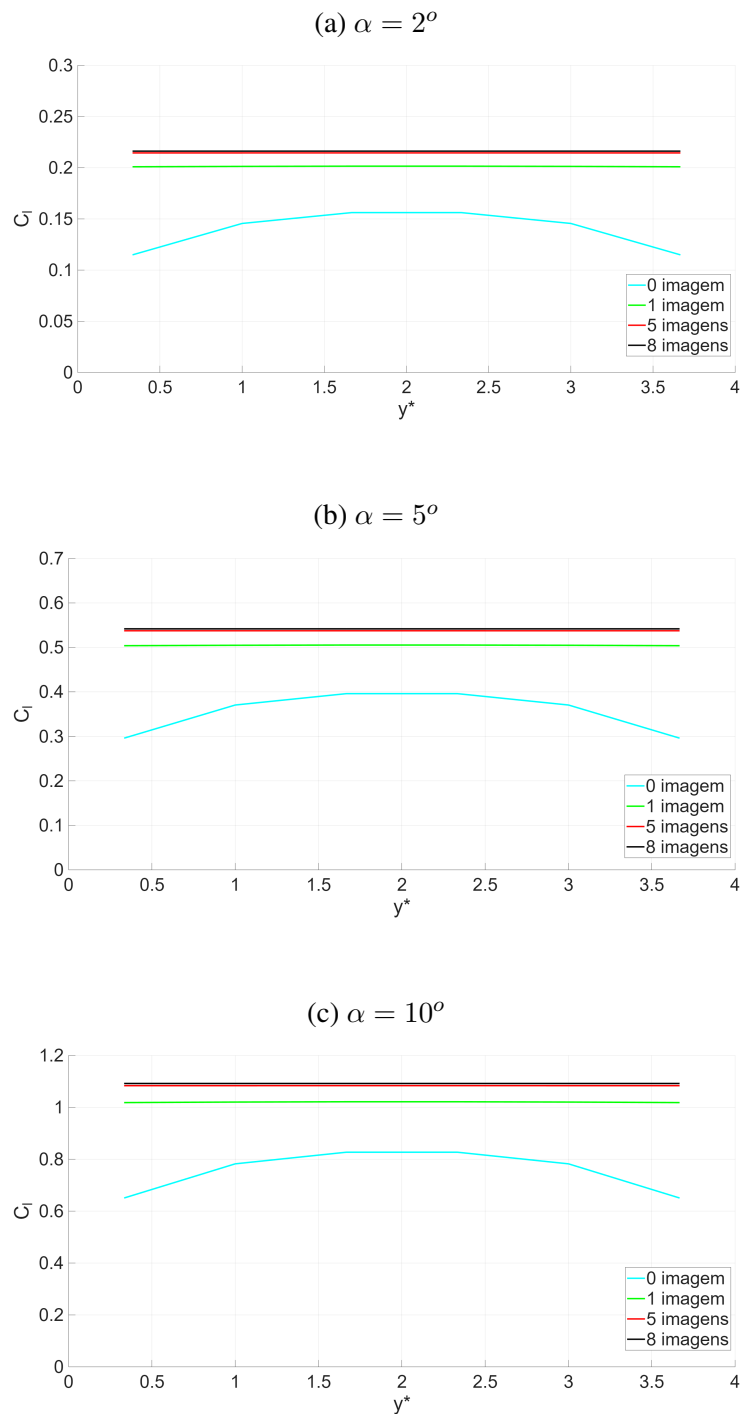
Fonte: Produção do próprio autor.

Após isso, a sensibilidade ao número de imagens foi testada com um gráfico que relaciona o C_l com a envergadura da asa, sendo que $y^* = y/c$ (a envergadura foi adimensionalizada com a corda, a fim de facilitar a visualização do alongamento). Como mostram as imagens nas Figuras 12a, 12b e 12c, o resultado com 0 imagem é o esperado, com uma distribuição elíptica da sustentação em uma asa retangular. Porém, ao adicionar vórtices imagem para a análise, a sustentação se estabiliza em um único valor ao longo de toda a envergadura, propondo que a seção da asa real se torna uma seção similar a seção de uma asa infinita, ou seja, ela obtém uma

circulação constante ao longo de toda a envergadura. Nota-se também que os resultados obtidos do uso de 5 ou 8 imagens são similares, permitindo-se concluir que o uso de 5 imagens para uma asa retangular sem enflechamento é suficiente para análises posteriores.

Estes resultados mencionados acima convergem com a teoria do aerofólio fino e com a teoria de uma asa infinita e mostram que o método utilizado no trabalho está bem implementado a fim de alcançar os objetivos propostos neste trabalho.

Figura 12 – Sensibilidade ao número de imagens para $C_l \times y^*$

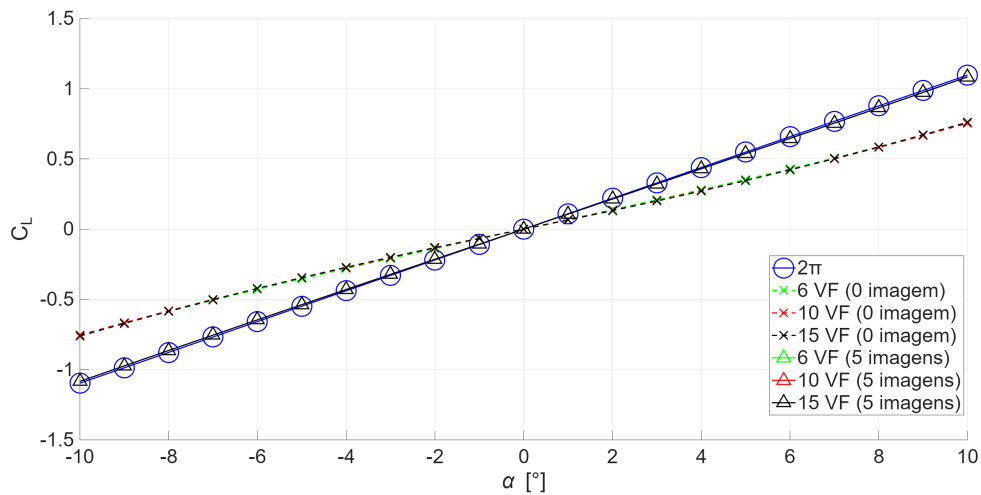


Fonte: Produção do próprio autor.

5.1.2 Convergência da solução com número de painéis diferentes

A seguir, será mostrado o resultado da análise para diferentes números de painéis (ou seções) ao longo de uma asa retangular, sem enflechamento e com $L_y = 4c$. Observando a Figura 13, o número de seções não afetou o resultado significativamente, ou seja, uma discretização de apenas 6 seções ao longo da envergadura é suficiente para as análises posteriores (inclusive para asas enflechadas), economizando um tempo de processamento maior que seria obtido com um número maior de seções. Se 5 imagens forem adicionadas de cada lado da asa real, o resultado tende a convergir para a curva $2\pi\alpha$. Porém, novamente, o número de painéis não mudou o resultado significativamente.

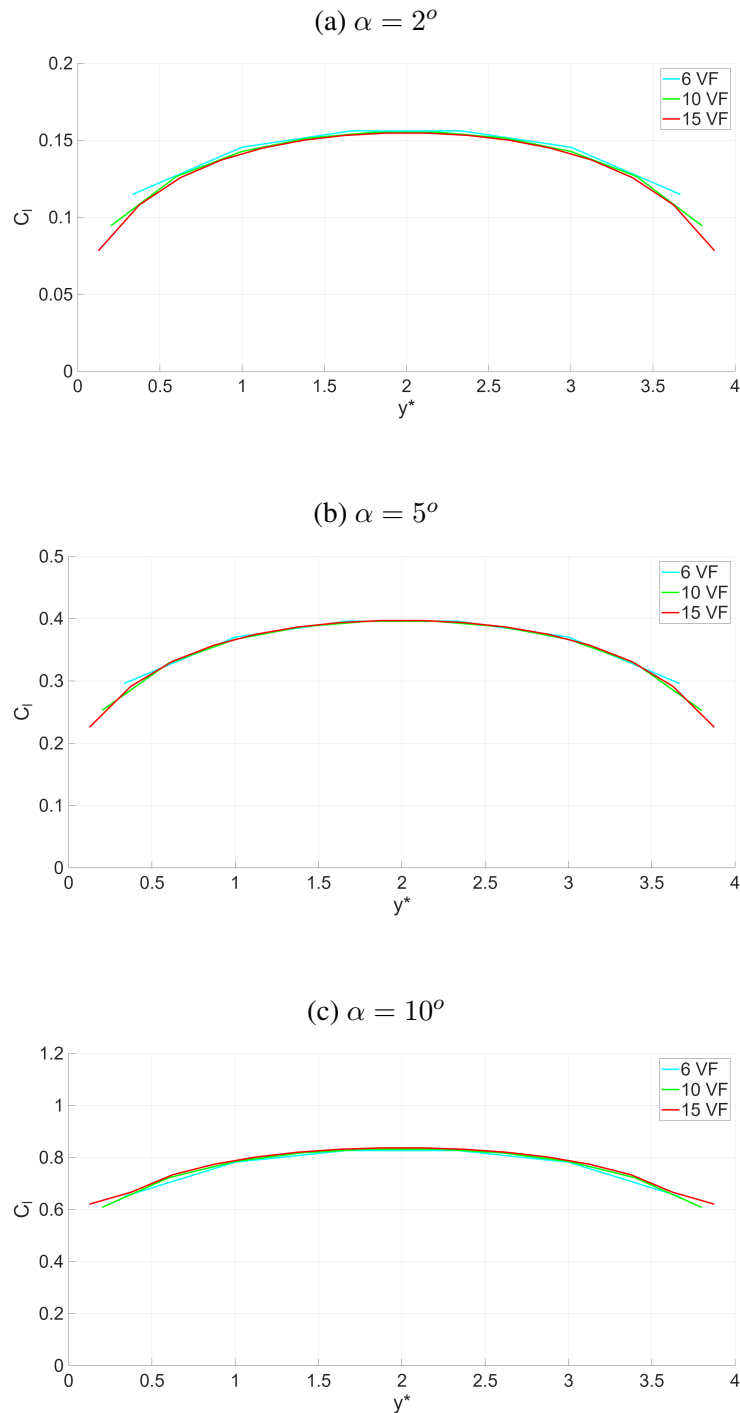
Figura 13 – Convergência da solução com número de painéis diferentes para $C_L \times \alpha$



Fonte: Produção do próprio autor.

Observando as Figuras 14a, 14b e 14c, o resultado obtido do C_l ao longo da envergadura, com as mesmas condições da Figura 13, não apresentou uma diferença notável entre o uso de diferentes quantidades de seções, mudando apenas que, com um maior número de seções, os pontos de controle estão mais próximos das extremidades da asa, ou seja, a análise pode ser feita com uma proximidade maior das pontas da asa. Na Figura 14c, houve um comportamento diferente nas pontas da asa quando 15 seções foram utilizadas.

Figura 14 – Convergência da solução com número de painéis diferentes para $C_l \times y^*$



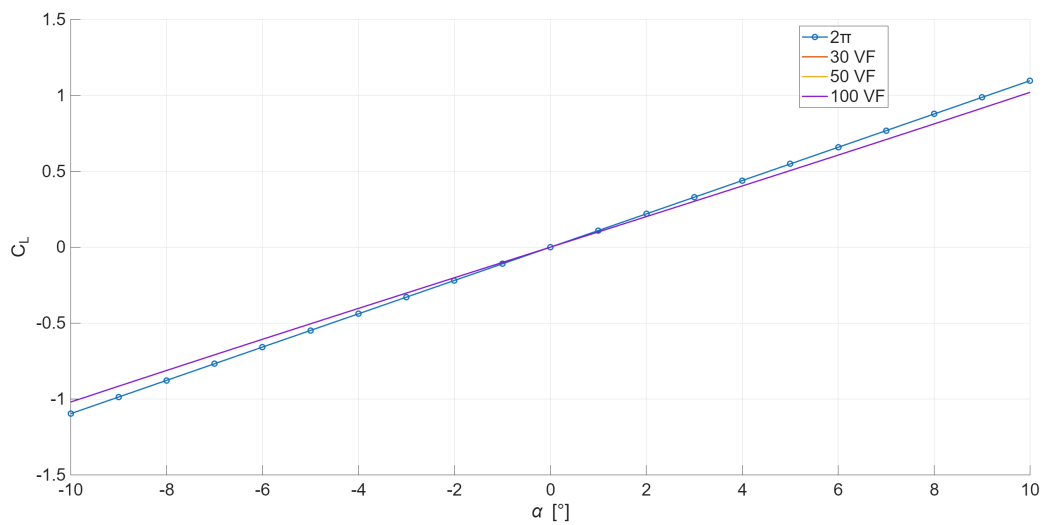
Fonte: Produção do próprio autor.

5.1.3 Efeito de um grande número de vórtices

Um problema enfrentado ao longo do desenvolvimento do trabalho foi o comportamento errático nas pontas das asas conforme a discretização da asa aumentava. Assim, foi feita uma análise de uma asa com um número de 30, 50 e 100 seções ao longo da envergadura e mantendo $L_y = 4$, a fim de analisar esse comportamento errático. Como mostra a Figura 15, a curva $C_L \times \alpha$

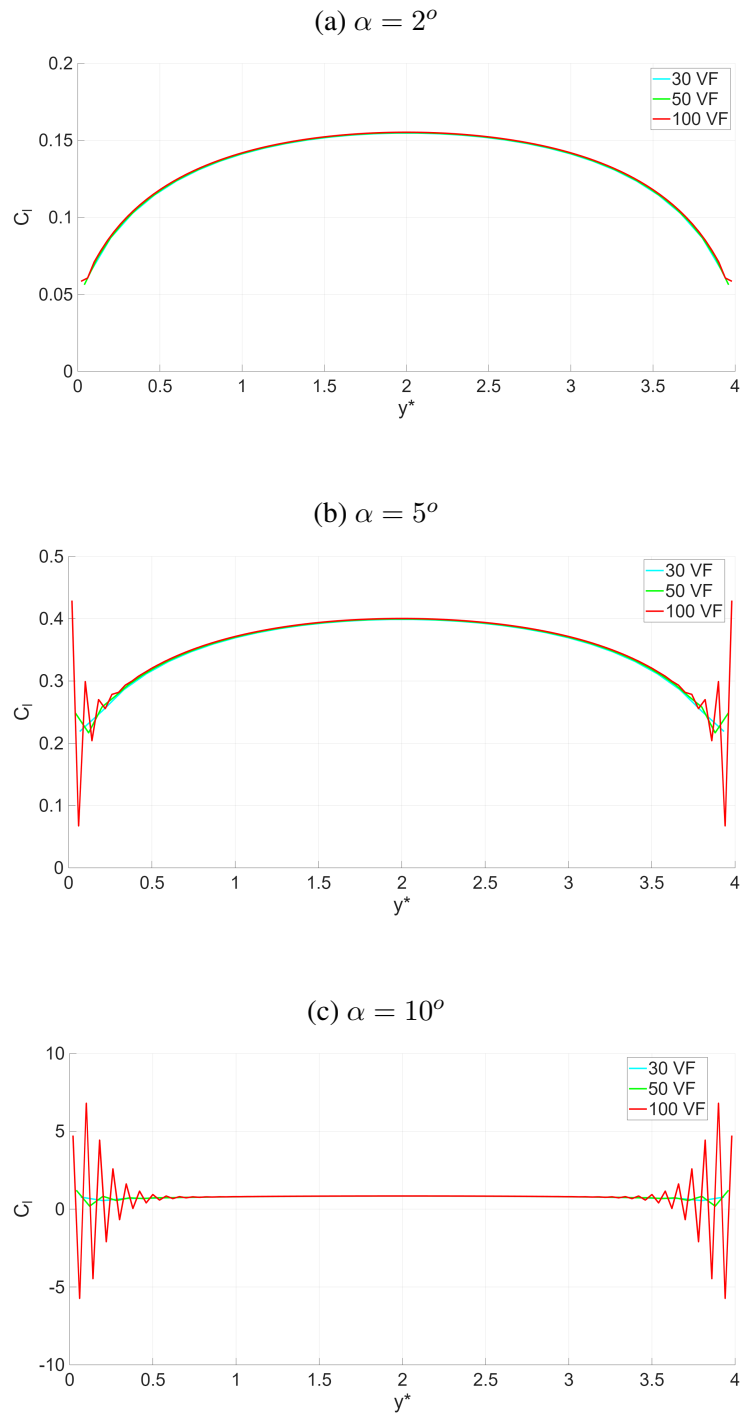
não sofreu alterações e a convergência para $2\pi\alpha$ continuou, mas ao longo da envergadura, essa convergência não aconteceu, como demonstram as Figuras 16a, 16b e 16c, onde, com o aumento de α , a instabilidade nas pontas também aumentou. Essa instabilidade pode ser explicada pelo aumento do número de condição da matriz A gerada, sendo que, por exemplo, a matriz com 30 vórtices ferradura ao longo da envergadura possui um número de condição de 3,9425 (obtido com a equação 1) e a matriz com 100 vórtices ferradura possui um número de condição de 14700. O número maior de condição da matriz gera uma instabilidade numérica e o resultado é afetado, gerando as distorções nas pontas da asa, vistas na Figura 16c, enquanto que, na mesma figura, a solução com 30 vórtices ferradura tem um comportamento menos errático.

Figura 15 – Efeito de um grande número de vórtices para $C_L \times \alpha$ (0 imagem)



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 16 – Efeito de um grande número de vórtices para $C_l \times y^*$ (0 imagem)



Fonte: Produção do próprio autor.

5.2 ASA COM ENFLECHAMENTO

5.2.1 Sensibilidade ao número de imagens de uma asa enflechada

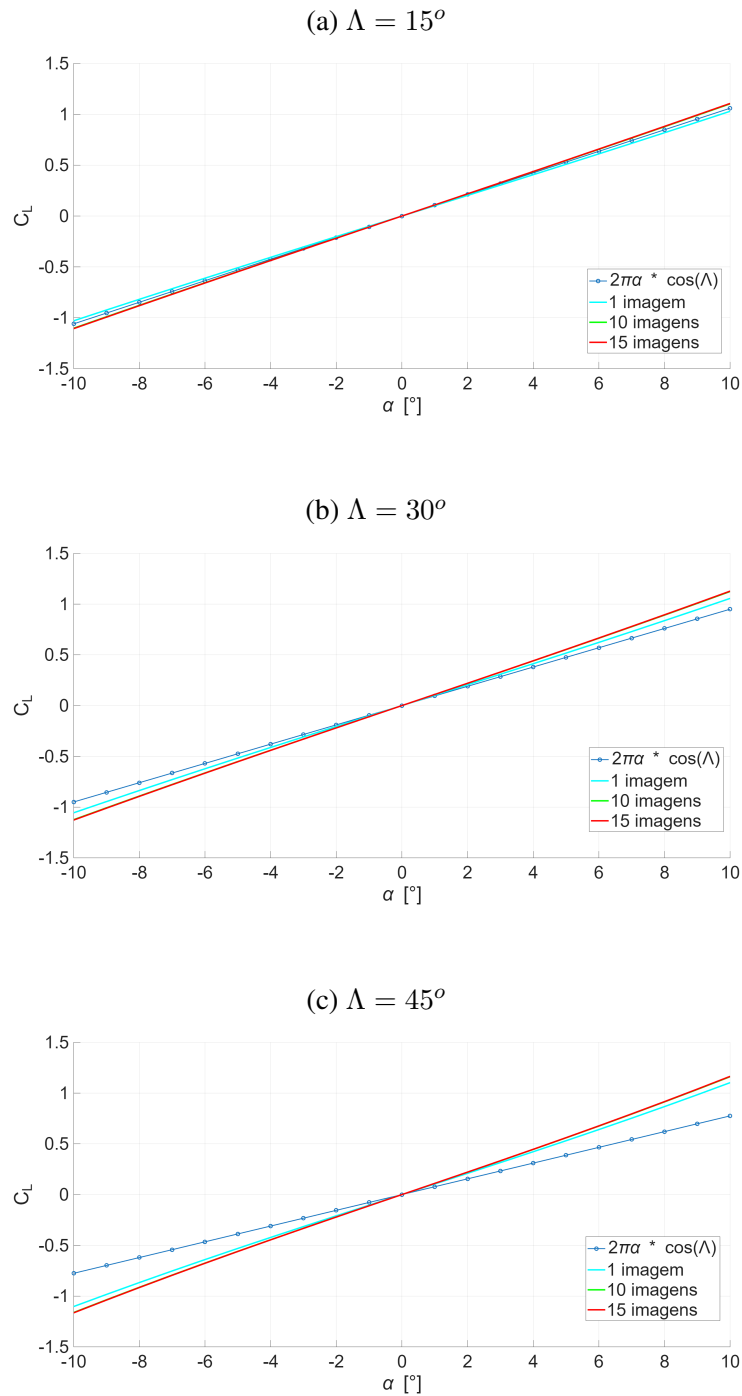
As Figuras 17a, 17b e 17c mostram o efeito do número de imagens de uma asa com enflechamento, 6 seções ao longo da envergadura e com $L_y = 4c$ na curva $C_L \times \alpha$. Assim, é

possível observar que ocorreu uma diferença do teórico com $2\pi\alpha$ (que agora tem um ângulo de ataque percebido dependendo do enflechamento), e essa diferença cresceu conforme o número de imagens aumentou. Continuando a observação, com o aumento do ângulo de enflechamento (Λ), ocorreu uma diferença maior do teórico, obtendo um resultado com um coeficiente de sustentação maior que o esperado.

Essas diferenças com o teórico podem ser explicadas pelo efeito da parede lateral do túnel e do movimento de zigue-zague que ocorre com a implementação das imagens (conforme Figura 8), em outras palavras, a análise é diferente da análise do teórico ideal, que não teria esses efeitos de zigue-zague e da parede lateral. A curva $2\pi\alpha * \cos(\Lambda)$ foi colocada apenas como referência, já que os resultados obtidos não são esperados que sejam exatamente como essa curva de referência.

Observando as figuras 17a, 17b e 17c, também se pode observar que o uso de 10 imagens é o suficiente para realizar as análises com uma asa enflechada, já que o resultado é o mesmo que o obtido com 15 imagens. O uso de 10 imagens é feito, mesmo que com uma diferença maior do teórico do que com 1 imagem, pelo fato de que um número maior de imagens proporciona uma análise mais detalhada da condição que está sendo analisada.

Figura 17 – Sensibilidade ao número de imagens de uma asa enflechada para $C_L \times \alpha$

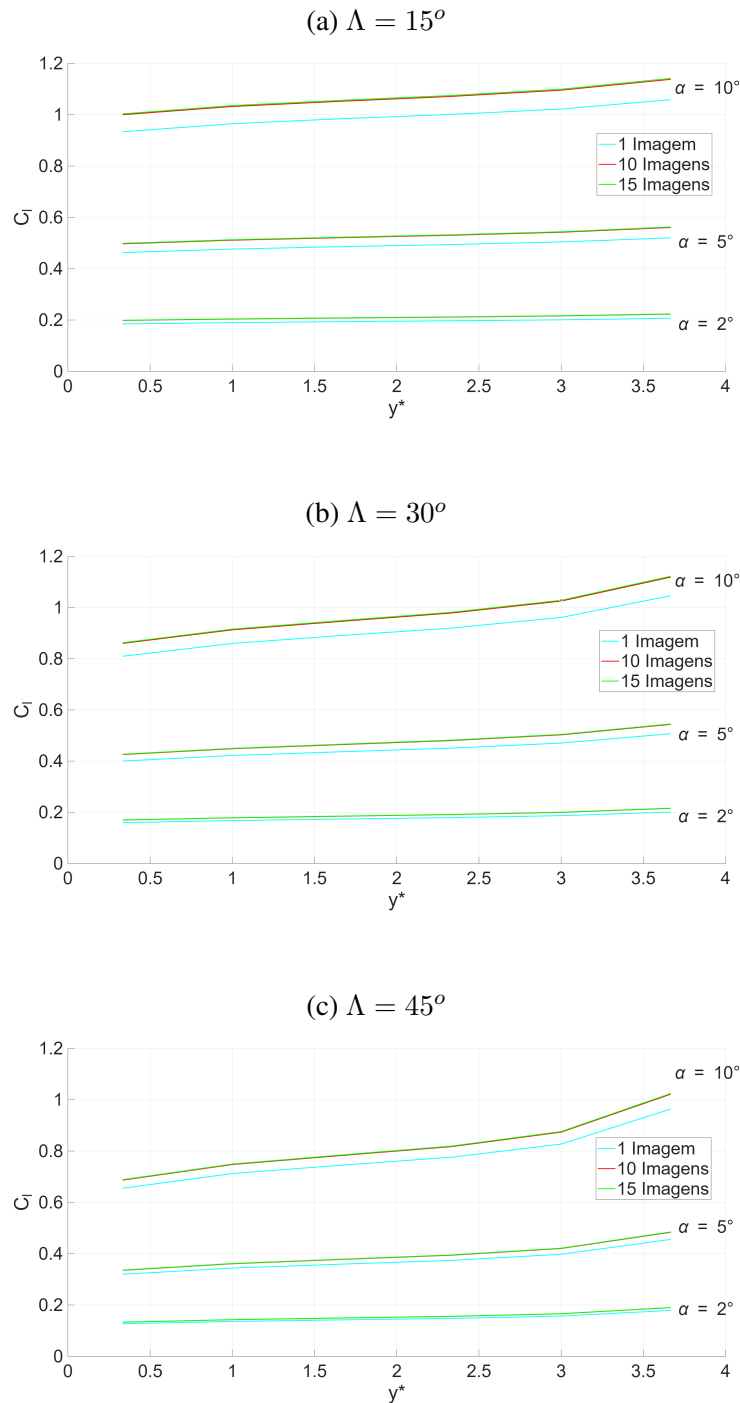


Fonte: Produção do próprio autor.

Com as Figuras 18a, 18b e 18c, é possível fazer uma análise do comportamento com diferentes números de imagens ao longo da envergadura. Assim, observa-se que os números maiores de imagens também convergem, sendo que a sustentação aumentou em direção à ponta direita da asa, e esse aumento ocorreu com maior efeito, conforme o Λ aumentou. Também, com o aumento de Λ , ocorreu um decaimento muito maior da sustentação na direção à montante da asa em comparação com a direção à jusante da asa (considerando o escoamento), sendo que esse

decaimento é mais fácil de se observar em α maiores.

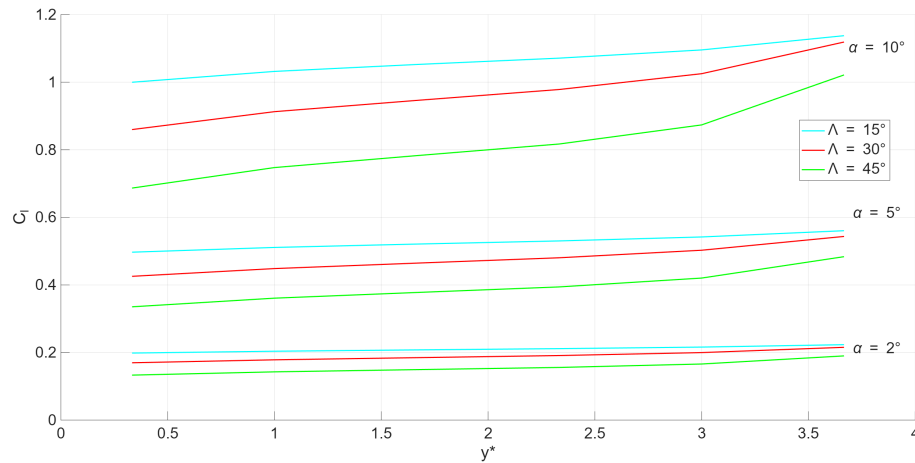
Figura 18 – Sensibilidade ao número de imagens de uma asa enflechada para $C_l \times y^*$



Fonte: Produção do próprio autor.

A seguir, foi feita uma análise específica, com a Figura 19, do efeito do enflechamento em 3 ângulos de ataque (2 graus, 5 graus e 10 graus) para uma asa com $L_y = 4c$, 10 imagens e 6 vórtices ferradura. Com isso, tem-se que um enflechamento maior causa uma menor sustentação (o ângulo de ataque percebido é menor), sendo este gráfico uma síntese dos resultados demonstrados na 18a, 18b e 18c, porém com o número de imagens (10 imagens) já definido.

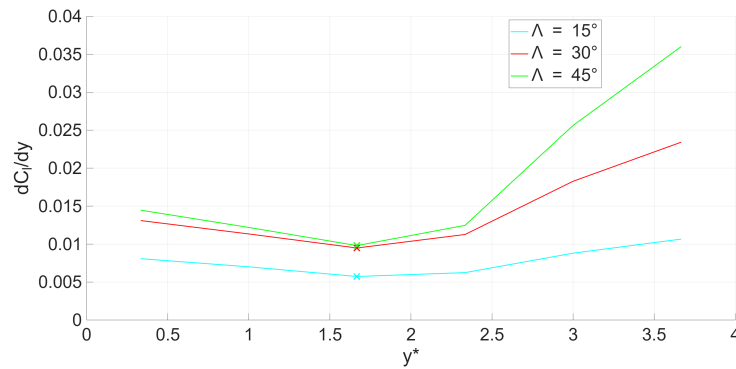
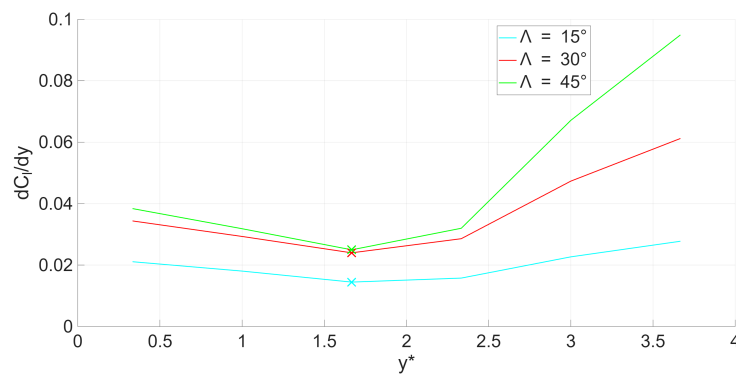
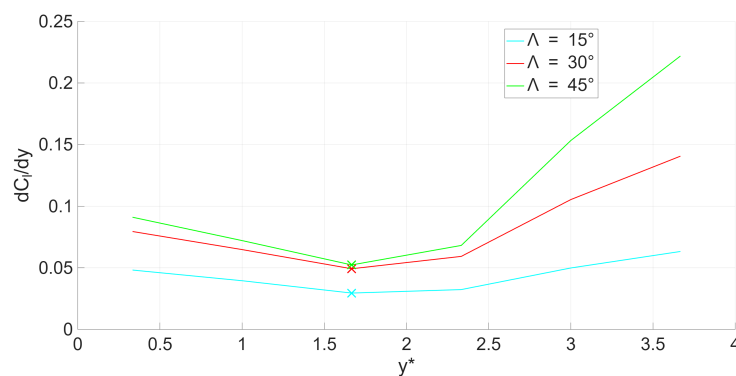
Figura 19 – Síntese dos resultados com os parâmetros definidos, com uma análise do efeito do enflechamento para $C_l \times y^*$



Fonte: Produção do próprio autor.

5.2.2 Análise de $(dC_l/dy^*) \times y^*$

Uma análise do efeito das paredes laterais do túnel de vento sobre o modelo também pode ser feita através do (dC_l/dy^*) ao longo da envergadura da asa, ou seja, onde ocorre menor variação da sustentação na asa, indicando uma menor influência do túnel de vento na asa enflechada infinita e um possível local na envergadura onde resultados mais próximos de uma asa real podem ser obtidos, ou seja, um local onde se pode estudar a asa com uma maior convergência com uma asa real. Como mostram as Figuras 20a, 20b e 20c, que possuem resultados obtidos com $L_y = 4$ e 10 imagens, o aumento do α provoca uma maior influência da parede lateral na asa, assim como o aumento do ângulo de enflechamento também provoca uma influência maior do túnel de vento na asa. Em todos os casos, (dC_l/dy^*) é menor próximo ao centro da asa (em uma seção mais à montante da asa), indicando que esse é o melhor local para se realizar um estudo mais próximo da realidade, como, por exemplo, medições da pressão na superfície da asa. A posição com um $(dC_l/dy^*)_{min}$ foi marcada nas figuras com um "x".

Figura 20 – Análise de $(dC_l/dy^*) \times y^*$ (a) $\alpha = 2^\circ$ (b) $\alpha = 5^\circ$ (c) $\alpha = 10^\circ$ 

Fonte: Produção do próprio autor.

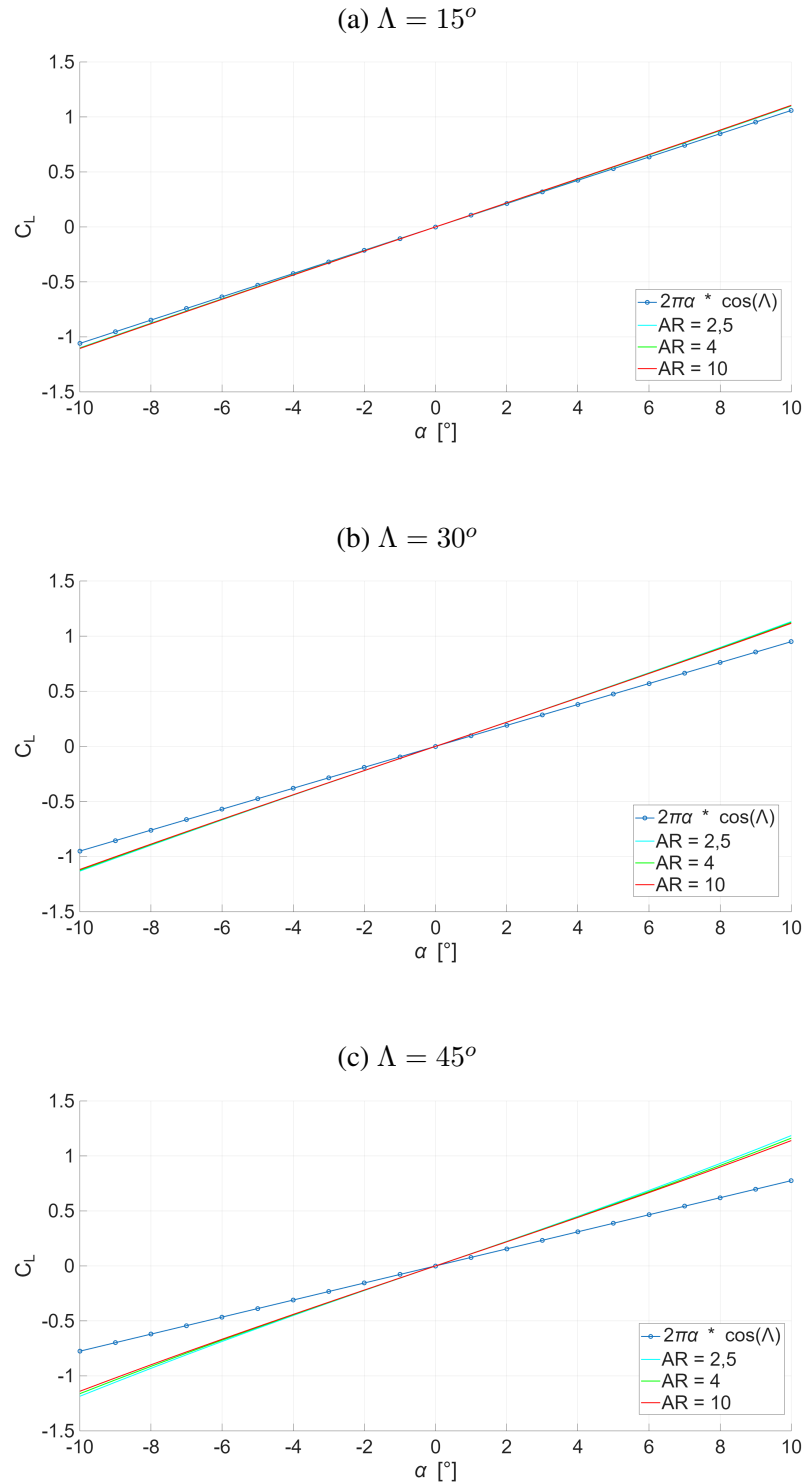
5.2.3 Análise do efeito do aumento da largura do túnel

Também foi feita uma análise do efeito do aumento da largura do túnel de vento, ou seja, da distância entre as paredes laterais do túnel e, conseqüentemente, da envergadura da asa (alongamento ou AR^1 diferentes). Ainda foram usadas 6 seções ao longo da envergadura da asa e

¹ AR significa "Aspect Ratio"

10 imagens de cada lado da asa real. A análise foi feita para diferentes ângulos de enflechamento da asa, como demonstram as Figuras 21a, 21b e 21c. O aumento do alongamento não impactou significativamente a curva $C_L \times \alpha$. Porém, é possível observar uma diferença aumentando entre as curvas analisadas, conforme o Λ aumentou.

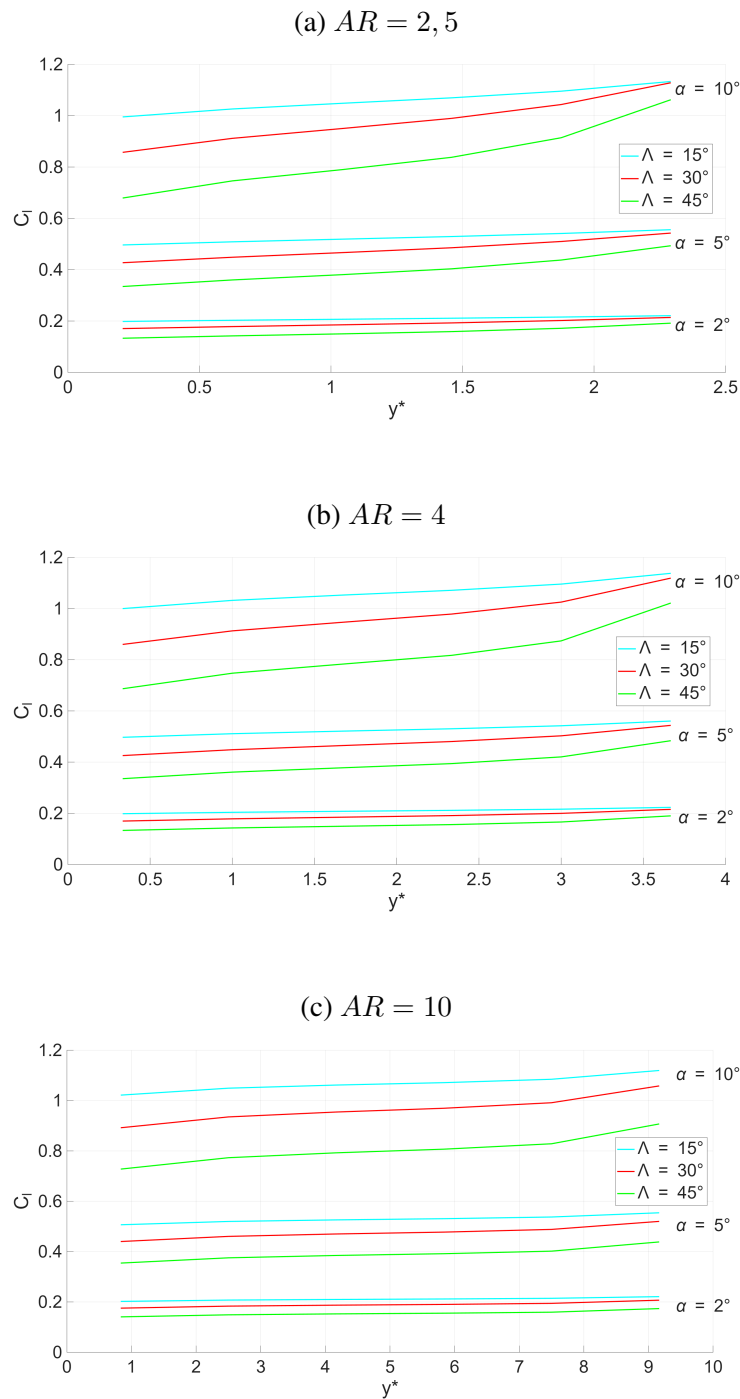
Figura 21 – Análise do efeito do aumento da largura do túnel para $C_L \times \alpha$



Fonte: Produção do próprio autor.

Observando-se as Figuras 22a, 22b e 22c, que mostram o efeito do alongamento no C_l ao longo da envergadura, é possível concluir que as curvas dos enflechamentos estão mais próximas para alongamentos menores na ponta direita da asa, ou seja, um AR menor causa uma sustentação mais desigual ao longo da envergadura. A Figura 22b é igual a Figura 19, sendo ela repetida aqui para melhor visualização no trabalho.

Figura 22 – Análise do efeito do aumento da largura do túnel para $C_l \times y^*$



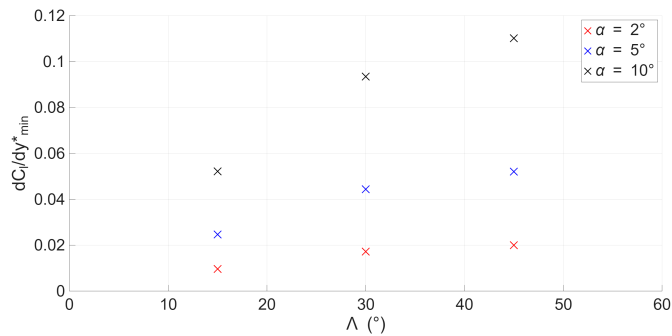
Fonte: Produção do próprio autor.

5.2.4 Análise de $(dC_l/dy^*)_{min} \times \Lambda$

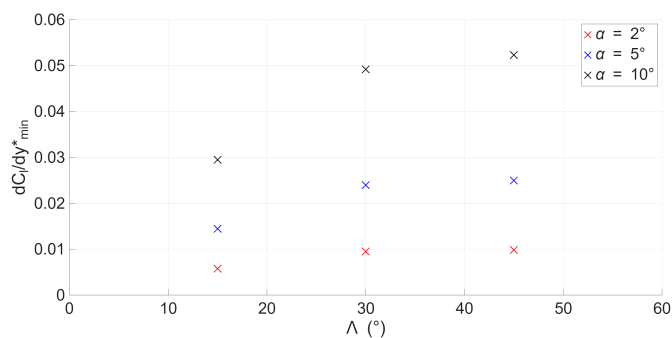
Utilizando-se de 10 imagens e 6 seções ao longo da envergadura, foi feita uma análise com o uso do $(dC_l/dy^*)_{min}$ pelo enflechamento para vários α e Λ diferentes. Como mostram as Figuras 23a, 23b e 23c, foi observado que um maior α provoca um aumento maior do C_l ao longo da envergadura, como já foi observado em figuras anteriores (por exemplo, na figura 22c), assim como um alongamento maior provoca uma variação menor do C_l ao longo da envergadura. Já um outro efeito do alongamento no $(dC_l/dy^*)_{min}$ foi que, quanto maior o Λ , mais o $(dC_l/dy^*)_{min}$ aumenta. Porém, esta tendência não é verdade para um AR de 10, onde o $\Lambda = 30^\circ$ teve o maior $(dC_l/dy^*)_{min}$, contudo estes valores de $(dC_l/dy^*)_{min}$, neste último caso, são próximos de 0 e apresentam uma diferença insignificante entre eles.

Figura 23 – Análise de $(dC_l/dy^*)_{min} \times \Lambda$

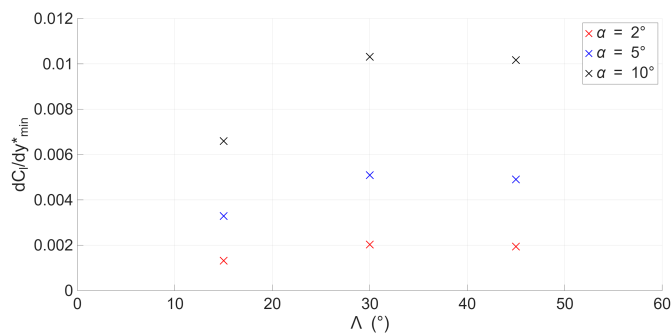
(a) $AR = 2,5$



(b) $AR = 4$



(c) $AR = 10$



Fonte: Produção do próprio autor.

Logo, é possível observar que um ângulo de ataque menor, um ângulo de enflechamento menor e um alongamento maior contribuem para uma influência menor das paredes laterais do túnel de vento sobre uma asa, indicando que essas condições beneficiam uma análise mais próxima de uma asa real. Lembrando que, segundo o que dizem Sivells e Neely (1947), essas condições citadas também proporcionam um resultado melhor, considerando o método da linha sustentadora linear. Porém, considerando que o código está bem implementado, como sugerem os resultados sem enflechamento da asa, é possível concluir que a variação da sustentação ao longo da envergadura advém da influência das paredes laterais.

5.3 OBSERVAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS

Resumindo, é possível observar os seguintes resultados:

- Os resultados obtidos sem enflechamento e com enflechamento foram coerentes, sendo que os resultados sem enflechamento são compatíveis com o que se espera de uma asa infinita e da teoria do aerofólio fino. Os resultados com enflechamento divergiram da teoria por conta da influência da parede lateral e do padrão de zigue-zague.
- Durante o processo, foi concluído que o uso de 6 seções ao longo da envergadura e 10 imagens de cada lado da asa real é suficiente para a obtenção dos resultados para uma asa enflechada infinita.
- Discretizar a asa em muitas seções provocou problemas na matriz de influência (A), o que resultou em problemas nas extremidades das asas. Porém, esses problemas não foram críticos para o trabalho, já que uma discretização menor foi suficiente.
- O aumento da largura do túnel de vento não provocou muitas diferenças na curva $C_L \times \alpha$, na qual há diferenças sutis entre as curvas de diferentes alongamentos. Ainda assim, esses resultados foram diferentes do esperado teórico $2\pi\alpha\cos(\Lambda)$, apresentando um C_L maior, quanto maior o Λ , onde essa diferença é explicada pela influência da parede lateral e do padrão de zigue-zague das imagens. Para a curva de $C_l \times y^*$, o aumento do alongamento também provocou pequenas diferenças, porém mais perceptíveis, como a distribuição mais homogênea da sustentação ao longo da envergadura.
- Com a análise de $(dC_l/dy^*) \times y^*$, é possível observar que a zona de menor influência das paredes laterais está aproximadamente no centro da asa, porém mais a montante da asa, considerando o escoamento no túnel de vento.
- Com uma análise de $(dC_l/dy^*)_{min} \times \Lambda$, é possível concluir que um enflechamento maior causa uma distribuição mais desigual da sustentação ao longo da envergadura e o aumento do alongamento torna essa distribuição mais homogênea ao longo da asa. Uma exceção foi o alongamento igual a 10, onde o Λ de 45 graus teve uma distribuição mais homogênea que o Λ de 30 graus, mas com uma diferença insignificante.

- Uma possibilidade seria utilizar dos dados obtidos com o método numérico apresentado neste trabalho para fazer uma comparação com dados experimentais obtidos (de forças aerodinâmicas, por exemplo), obtendo-se uma forma de corrigir os dados dos experimentos com asas enflechadas infinitas em túneis de vento para se obter um resultado mais preciso em relação à realidade.
- Com os resultados obtidos em consideração, seria possível continuar o trabalho, caso seja de interesse, ao utilizar uma malha de vórtices (VLM) para se obter a circulação (sustentação) ao longo da corda da asa, permitindo que um estudo mais aprofundado seja realizado.

6 CONCLUSÃO

No trabalho, foi utilizado o método da linha de sustentação de Prandtl, modificado por Weissinger, para o estudo de uma asa enflechada infinita dentro de um túnel de vento, onde as paredes laterais permitiram que a asa dentro do túnel fosse estudada como uma asa infinita, por meio do método das imagens. Este trabalho foi realizado porque as pesquisas anteriores existentes de modelos dentro de um túnel de vento para se simular uma asa infinita (sem vórtices de ponta) buscaram a utilização de uma geometria diferenciada do túnel e este trabalho propõe um método diferente, se utilizando de imagens da asa real.

Além disso, foram feitos vários testes com asas sem enflechamento (para validar o código e verificar que os resultados são compatíveis com a teoria do aerofólio fino e da asa infinita) e com enflechamento para vários α diferentes (de -10 graus até 10 graus), com uma análise também do impacto da largura do túnel (e da envergadura da asa) nos resultados de sustentação da asa. Essas análises demonstraram que o enflechamento da asa provoca uma distribuição diferente da sustentação ao longo da asa, comparando com o caso sem enflechamento (distribuição igualitária da sustentação ao longo da envergadura). Assim, essa diferença da sustentação nos casos com enflechamento também diferiu do esperado teórico (da curva de referência) nas figuras de $C_L \times \alpha$, conforme o Λ aumentava, sendo que essa disparidade se deu por causa da influência das paredes laterais do túnel de vento e do padrão de zigue-zague das imagens. Além disso, o aumento do alongamento provocou uma distribuição mais uniforme da sustentação ao longo da asa. Com isso, o aumento do ângulo de ataque, do ângulo de enflechamento da asa e a diminuição do alongamento provocam uma maior influência das paredes laterais do túnel na asa, sendo que, no caso das asas enflechadas, o ponto mínimo de influência do túnel na asa está localizado perto do centro da asa. Complementando, também foi analisado o efeito do número de imagens e de seções ao longo da asa, podendo-se concluir que os resultados convergem com o uso de mais imagens e uma discretização maior do que a julgada satisfatória no trabalho não é necessária para a obtenção de resultados mais exatos.

Considerando os resultados obtidos, o trabalho pode ser estendido para se obter outros resultados de outras características da asa ou resultados mais próximos do esperado teórico. Como, por exemplo, ampliar o escopo do trabalho para o estudo dos momentos da asa e efeito do túnel nesses momentos, se utilizando de métodos mais complexos, como o VLM, obtendo a circulação ao longo da envergadura e da corda da asa. Além dessa possibilidade, também poderiam ser feitos estudos sobre a possibilidade da comparação de dados obtidos com o método numérico deste trabalho e de dados experimentais, fazendo uma comparação entre eles. Com a comparação entre esses dados, seria possível analisar se uma correção pode ser feita para os dados experimentais, obtendo-se resultados experimentais mais precisos.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. **Fundamentals of Aerodynamics**. 6th ed. New York: McGraw-hill, 2017.
- DEPERROIS, A. **Analysis of foils and wings operating at low Reynolds numbers**. 2013. Disponível em: <https://sourceforge.net/projects/xflr5/files/Guidelines.pdf/download>. Acesso em: 02 nov. 2025.
- DEYOUNG, J. Historical evolution of vortex-lattice methods. *In: VORTEX-LATTICE UTILIZATION WORKSHOP, 1., 1976, Hampton, Virginia. Proceedings [...]. [S. l.: s. n.], 1976. p. 7–15. Report Number: NASA-SP-405. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19760021075/downloads/19760021075.pdf>. Acesso em: 22 out. 2025.*
- GLAZKOV, S.; GORBUSHIN, A.; IVANOV, A.; SEMENOV, A. Recent experience in improving the accuracy of wall interference corrections in tsagi t-128 wind tunnel. **Progress in Aerospace Sciences**, United Kingdom, v. 37, n. 3, p. 263–298, 2001. ISSN 0376-0421. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042101000070>. Acesso em: 26 out. 2025.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix computations**. 4th ed. Baltimore: JHU press, 1996.
- HANIFI, A.; HEIN, S.; ROMANO, D.; MINERVINO, M.; WÜRZ, W.; BORODULIN, V.; IVANOV, A.; KACHANOV, Y.; FOMIN, V. Numerical and experimental realization of an infinite-swept-wing boundary-layer flow in a wind tunnel. *In: XVII INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE METHODS OF AEROPHYSICAL RESEARCH, 17., 2014, Novosibirsk, Russia. Proceedings [...]. [S. l.: s. n.], 2014. p. 1–8. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/283266420_NUMERICAL_AND_EXPERIMENTAL_REALIZATION_OF_AN_INFINITY-SWEPT-WING_BOUNDARY-LAYER_FLOW_IN_A_WIND_TUNNEL_Full_Article. Acesso em: 21 out. 2025.*
- HOUGHTON, E. L.; CARPENTER, P. W. **Aerodynamics for engineering students**. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2003.
- JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3rd ed. [S. l.]: John Wiley & Sons, 1999.
- KATZ, J.; PLOTKIN, A. **Low-speed Aerodynamics**. International ed. Singapore: Mc-Graw Hill Book Co., 1991.
- KIMURA, H. F. **Análise aerodinâmica de asas por meio de modelos de linha sustentadora**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo - Brasil, 2011. Disponível em: http://www.sophia.bibl.ita.br/biblioteca/index.asp?codigo_sophia=61533. Acesso em: 22 out. 2025.
- MATHWORKS. **linsolve**. 2025. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/linsolve.html>. Acesso em: 25 out. 2025.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. [S. l.]: Pearson/Makron, 1998.

SATOH, A. Introduction to molecular-microsimulation of colloidal dispersions. **Studies in Interface Science**, The Netherlands, v. 17, p. 160–183, 2007. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S138373030380039X>. Acesso em: 25 out. 2025.

SERPIERI, J.; KOTSONIS, M. Design of a swept wing wind tunnel model for study of cross-flow instability. *In*: 33RD AIAA APPLIED AERODYNAMICS CONFERENCE, 33., 2015, Dallas, Texas. **Proceedings** [...]. Dallas, Texas: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015. p. 1–15. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2015-2576>. Acesso em: 24 out. 2025.

SIVELLS, J. C.; NEELY, R. H. **Method for Calculating Wing Characteristics by Lifting-line Theory Using Nonlinear Section Lift Data**. Washington: NACA (National Advisory Committee For Aeronautics), 1947. Technical Note 1269. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19930082188/downloads/19930082188.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2025.

WEISSINGER, J. **The lift distribution of swept-back wings**. Washington: NACA (National Advisory Committee For Aeronautics), 1947. Technical Memorandum 1120. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20030064148/downloads/20030064148.pdf>. Acesso em: 21 out. 2025.