



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

LARYSSA KIMI KATO

***INFLUÊNCIA DE DISSIPAÇÃO EM MAPAS
BIDIMENSIONAIS***

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de
Rio Claro

Laryssa Kimi Kato

Influência de dissipação em mapas bidimensionais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Rio Claro – SP

2017

Laryssa Kimi Kato

517.39 Kato, Laryssa Kimi
K19i Influência de dissipação em mapas bidimensionais /
Laryssa Kimi Kato. - Rio Claro, 2018
42 f. : il., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Biociências de Rio Claro
Orientador: Ricardo Egydio de Carvalho

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Dinâmica
não-linear. 3. Mapa padrão não-twist. 4. Curvas Shearless. 5.
Atratores Shearless. 6. Diagrama de Lyapunov. I. Título.

Influência de dissipação em mapas bidimensionais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física Aplicada.

Comissão
Examinadora

Prof. Dr. Ricardo
Egydio de Carvalho

Prof^a. Dr^a. Ana Paula
Mijolaro

Prof. Dr. Luiz
Antônio Barreiro

Conceito: Aprovada

Rio Claro, SP 30 de janeiro de 2018.

Agradecimentos:

Agradeço a Deus, criador do universo, por ter me dado saúde para que eu pudesse concluir essa fase.

Agradeço meu professor orientador Dr. Ricardo Egydio de Carvalho, companheiro de caminhada ao longo do curso. E posso dizer que a minha formação acadêmica, e inclusive pessoal, não teria sido a mesma sem a sua pessoa, por seu ensinamento, paciência e confiança ao longo das supervisões das minhas atividades nesta área. Espero sinceramente que em um futuro muito próximo possamos trabalhar novamente.

Quero também dedicar meus agradecimentos aos amigos engajados neste projeto, nos momentos divertidos, quanto em momentos difíceis, onde foi de muita importância nesta caminhada. Quero abrir um espaço para agradecer a minha amiga Larissa, que ajudou na revisão da escrita do trabalho e que sempre me deu apoio, estando ao meu lado nos momentos de mais alegria e de dificuldades.

Ainda em tempo, quero expressar meus agradecimentos a minha família, começando pelos meus pais, que foram essenciais, cujo apoio e esforço não permitiram que eu desistisse mesmo nos momentos mais difíceis, me ajudando a superar qualquer obstáculo. Não posso esquecer-me de meus irmãos, em especial minha irmã Vanessa e Regis meu cunhado, onde suas broncas e conselhos foram de grande valia. Não posso deixar de agradecer minhas queridas avós e minha tia e madrinha Cecília, que com muito carinho e apoio não mediu esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

Por fim o Arthur, meu verdadeiro amigo e namorado, companheiro fiel, das boas e das horas mais difíceis, sempre ao meu lado me ajudando a ser melhor.

Obrigada a CAPES por financiar meus estudos.

“A persistência é o caminho do êxito”.

Charles Chaplin

Resumo:

De maneira geral, o comportamento dinâmico de sistemas não lineares é caracterizado pela imprevisibilidade e extrema sensibilidade às condições iniciais e aos parâmetros do sistema. A sensibilidade dessas condições pode ser analisada a partir dos expoentes de Lyapunov, quando são consideradas órbitas infinitesimalmente próximas. O mapa escolhido para análise é o modelo denominado “Mapa padrão *não - twist* dissipativo labiríntico”, que apresenta as chamadas curvas *shearless*. O estudo desenvolvido analisa esse sistema com a introdução de dissipação e com parâmetros de perturbação variáveis na presença de três curvas *shearless*. O objetivo é compreender a evolução da dinâmica destas curvas no espaço de fase e no diagrama de Lyapunov a fim de caracterizar qual *shearless* é mais robusta frente à variação dos parâmetros de dissipação e perturbação.

Palavras-chave: Mapa padrão *não-twist*. Curvas *shearless*. Atratores *shearless*. Diagrama de Lyapunov.

Abstract:

In general, the dynamical behavior of non-linear systems is characterized by unpredictability and extreme sensibility to the initial conditions and to the parameters of the system. The sensitivity of these conditions can be analyzed from the Lyapunov exponents, when infinitesimally close orbits are considered. The map we have chosen for analysis is the model denoted as "Labyrinthic non-twist standard map", which presents the so-called "shearless" curves. The present study analyzes this system with the introduction of dissipation and with changeable parameters of perturbation in the presence of three shearless curves. The objective is to understand the evolution of the dynamics of the curves in the phase space and in the diagram of Lyapunov in order to characterize which shearless is more robust under the variation of both parameters, dissipation and perturbation.

Keywords: Non-twist standard map. Shearless curves. Shearless attractors. Lyapunov diagram.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1:	2
1. Introdução	2
CAPÍTULO 2:	5
Fundamentação teórica	5
2.1. Número de rotação	5
2.2. Espaço de fase	10
2.3. Expoentes de Lyapunov	15
2.4. Bacia de atração	17
CAPÍTULO 3:	18
3.1. Desenvolvimento e Resultados:	18
3.2. Sistema dissipativo	24
CAPÍTULO 4:	32
Conclusão	32
REFERÊNCIAS:	34
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA:	35

Lista de figuras:

Figura 1 - O círculo rosa é o plano do toróide, o círculo em vermelho é a seção transversal onde ficam os pontos do mapa de Poincaré. Fonte: (KRISHNAVEDALA, 2014).....	5
Figura 2 - Seção transversal onde ficam os pontos do mapa de Poincaré. Fonte: (BRACHTENDORF et al., 2014)	6
Figura 3 - Número de rotação com valores fixos de $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $b=0.003$, $\gamma=0$ e $\eta=3$	11
Figura 4 - Espaço de fase plotado a partir do mapa (10) com valores fixos de $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $b=0.002$, $\gamma=0$, $\eta=3$	13
Figura 5 - Processo de reconexão para o mapa não - twist com valores fixos de $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$. a) $b=0.002$, b) $b=0.0025$, c) $b=0.003$, d) $b=0.003$ com a presença da <i>shearless</i> representada pela cor vermelha.	14
Figura 6 - Perfis dos números de rotação com uma, duas e três curvas <i>shearless</i> e seus espaços de fase correspondentes com valores respectivos de $b=0.004$, $b=0.0053$, $b=0.006$ e $b=0.007$. Com os outros parâmetros fixos em $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$	21
Figura 7- Perfis dos números de rotação com uma, duas e três curvas <i>shearless</i> e seus espaços de fase correspondentes com valores respectivos de $a=0.120$, $a=0.119$, $a=0.093$ e $a=0.0050$. Com os outros parâmetros fixos em $b=0.006$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$	23
Figura 8 - espaço de fase com sistema dissipativo, com valores respectivos de $\gamma = 0.0000010$, $\gamma = 0.0000015$, $\gamma = 0.0000020$ e $\gamma = 0.0000045$. Com os outros parâmetros fixos em $a=0.1$, $b=0.006$, $\eta=3$ e $r_1=0.2=-r_2$	25
Figura 9 - A) espaço de fase com parâmetros fixos em $a=0.1$, $b=0.006$, $\eta=3$ e $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0.001$ e $b=0.06$, B) bacia de atração	27
Figura 10 - Diagrama de Lyapunov.....	30

Capítulo 1

1. Introdução

Efeitos iniciais de Dinâmica não - linear foram observados pela primeira vez pelo matemático Henri Poincaré no século XIX, na análise do problema de três corpos. Ele notou que quando uma partícula teste estava sobre efeito gravitacional de outros dois corpos maiores o seu movimento não seguia um padrão, ou seja, não obedecia as equações elaboradas para o seu movimento, supostamente periódico. A partícula teste movimentava - se de forma instável, pois qualquer conjunto de condições iniciais próximas resultava, ao longo do tempo, em órbitas com caminhos diferentes. De maneira geral, um comportamento dinâmico, atualmente denominado de caótico, é caracterizado pela imprevisibilidade e extrema sensibilidade às condições iniciais e aos parâmetros do sistema. Tal comportamento é observado com frequência na natureza e está presente em diversos problemas, como de crescimento populacional. Outro exemplo de comportamento dinâmico caótico ocorre em sistemas atmosféricos como a previsão do tempo. É possível descrever esses fenômenos utilizando métodos numéricos e modelos matemáticos, através de evoluções discretas temporais (mapas) ou através de equações diferenciais (fluxo).

Como forma de analisar um sistema não - linear, o matemático russo Aleksandr Lyapunov, no século XIX, desenvolveu os expoentes de Lyapunov, que descrevem a sensibilidade com a qual órbitas infinitesimalmente próximas no espaço aproximam-se ou afastam-se, conceito que é bem desenvolvido por (FERRARA; PRADO, 1995). Utilizaremos esse instrumento para analisar o Mapa Padrão. Os estudos pioneiros sobre o Mapa Padrão foram desenvolvidos por Chirikov, que desenvolveu um mapa que analisava a dinâmica do rotor pulsado. Este mapa, por possuir uma dinâmica muito rica em seu espaço de fase, permite que seja possível desenvolver análises para outros modelos físicos. Entre eles, temos o pêndulo forçado sem atrito, uma partícula em um campo magnético e confinamento de plasmas em Tokamaks. (HORSTMANN; ALBUQUERQUE; MANCHEIN, 2000).

O modelo de estudo deste trabalho é o “mapa padrão *não - twist* labiríntico dissipativo”, que apresenta a presença das curvas *shearless* (ou *toros shearless*¹). O aparecimento dessas curvas é possível quando o número de rotação (que tem como base a

¹ Em tradução livre curvas sem – cisalhamento

análise da trajetória de uma órbita periódica ou quase periódica) pode apresentar um extremo de máximo ou mínimo em seu perfil.

As curvas *shearless* correspondem a barreiras de transportes entre duas regiões do espaço de fases do sistema em estudo. Em (PORTELA, 2008) podemos ver o fenômeno descrito impedindo que a propagação do caos ultrapasse essa barreira no espaço de fases associado ao mapa. Elas tendem a ser bem robustas, uma vez que permanecem existindo mesmo na presença de perturbações genéricas e sobrevivendo por certo tempo mesmo após introdução de dissipação. Podem ser encontradas, por exemplo, em sistemas Hamiltonianos que tratam de confinamento magnético de plasma como pode ser visto em (OYARZABAL et al., 2016), em ondas de derivas visto em (OYARZABAL et al., 2015) e fluxos em dinâmica de fluidos.

Em uma investigação mais recente, foi observado numericamente que sob efeito de dissipação as curvas *shearless* podem dar origem a um atrator novo, denominado atrator *shearless*, evidenciado por (CARVALHO; ABUD, 2015). Um atrator é um conjunto invariante para o qual órbitas convergem depois de um tempo suficientemente longo.

Esse atrator *shearless* é genérico e pode ajudar a entender o comportamento das curvas *shearless*, colaborando para estudos referentes ao confinamento de plasma em Tokamak, pois o modelo matemático que descreve a dinâmica de plasma no Tokamak apresenta curvas *shearless*. O nosso estudo traz em discussão ideias que podem auxiliar no confinamento de plasma, na tentativa de aumentar o tempo de confinamento, uma das dificuldades atuais.

Um Tokamak, segundo (PORTELA, 2008) é um gerador de energia de forma toroidal que é submetido a campos magnéticos na tentativa de produzir energia através de fusão nuclear. Muitas vezes, o plasma é feito de hidrogênio (elemento que existe em grande quantidade no planeta), de modo que seus impactos ambientais são menos nocivos do que a produção de energia oriunda de fissão nuclear (meio utilizado pelas indústrias de energia nucleares), tornando - se então um assunto muito importante a ser investigado.

O presente estudo é baseado em um sistema *não-twist*, atendendo por esse nome por não satisfazer a condição de não degenerescência. Essa condição proporciona o aparecimento de ressonâncias isócronas (quando as ilhas de duas ou mais cadeias circundam trajetórias que possuem o mesmo número de rotação) no sistema, que podem interagir e se reconectar (*overlap*). Iremos ajustar os parâmetros do sistema convenientemente para que três curvas *shearless* surjam e sofram transformações sob o efeito de dissipação, para dar origem ao aparecimento de três atratores com características diferenciadas. O “mapa padrão *não - twist* labiríntico dissipativo” é uma variação do mapa padrão apresentado por (SIMÓ, 1998), em

que o sistema apresenta curvas invariantes que foram denominadas por curvas *meandros* (curvas sinuosas). “As curvas invariantes que aparecem têm uma espécie de comportamento “sinuoso” (como o caminho de um rio antigo em um país plano) ” (SIMÓ,1998, p. 181, tradução nossa)².

Este trabalho foi dividido da seguinte forma: Capítulo 2 descreverá o embasamento teórico necessário, contendo o mapa utilizado para as curvas *shearless*, o número de rotação, o estudo da sensibilidade do sistema através dos expoentes de Lyapunov e a bacia de atração do sistema. O Capítulo 3 será referente ao desenvolvimento das ideias apresentadas no capítulo anterior, contendo os resultados numéricos obtidos para a variação da dissipação no sistema na presença de três curvas *shearless*, as dificuldades e uma discussão a respeito dos resultados. Para finalizar, no Capítulo 4 apresentaremos as conclusões e perspectiva de continuidade do trabalho.

² Trecho original “The invariant curves which show up have a kind of "meandering" behavior (like the path of an old river on a flat country)” (SIMÓ,1998, p. 181)

Capítulo 2

Fundamentação teórica

2.1. Número de rotação

Vamos considerar um toróide no qual fazemos uma seção transversal e marcamos a posição de uma dada órbita toda vez que ela furar esse plano. Podemos estudar as características do movimento global olhando apenas esses pontos. O plano no qual fazemos o mapeamento do sistema é denominado seção de Poincaré e a equação que relaciona as sucessivas posições dos pontos neste plano é denominada de Mapa de Poincaré como podemos ver em (FERRARA; PRADO, 1995). Vamos ilustrar isso para melhor compreensão:

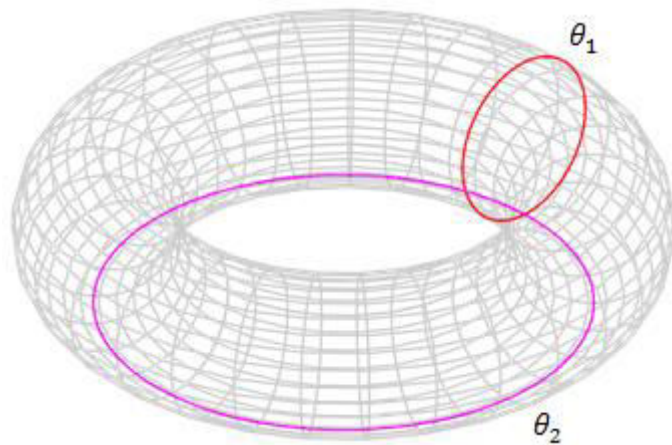


Figura 1 - O círculo rosa é o plano do toróide, o círculo em vermelho é a seção transversal onde ficam os pontos do mapa de Poincaré. Fonte: (KRISHNAVEDALA, 2014).

Os toros são uma forma de representar um espaço de fase em que temos dois ângulos que definem o movimento do sistema, esses ângulos descrevem a superfície de um toro, que estão representados na figura 1 como θ_1 e θ_2 , a seção de Poincaré representa uma fatia desse toróide que é representado acima como um círculo vermelho.

A seção de Poincaré ficaria da seguinte forma se considerarmos um mapa unidimensional genérico $X_{n+1} = P(x_n)$, onde “x” são os pontos marcados no plano:

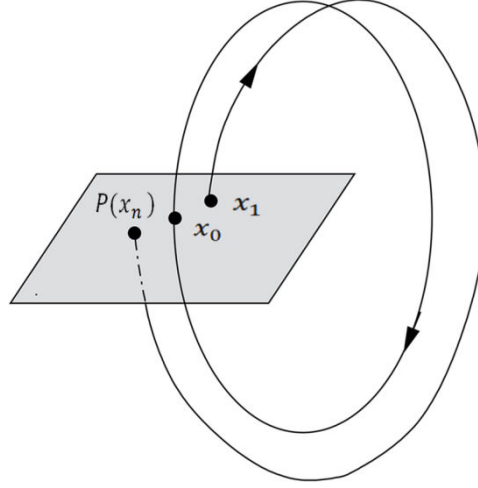


Figura 2 - Seção transversal onde ficam os pontos do mapa de Poincaré. Fonte: (BRACHTENDORF et al., 2014)

A dinâmica contínua no espaço de fase passa a ser discreta no tempo, sendo possível relacionar os pontos x_0 e x_1 através da equação $P(x_n)$. A seção transversal é topologicamente circular e as duas frequências presentes na figura 1 se relacionam através do número de rotação, que nos permite encontrar a rotação em ω_1 (circuito vermelho) necessária para dar uma rotação em ω_2 (circuito rosa).

Se $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$, a órbita dá uma volta ao longo do circuito em rosa, enquanto dá exatamente uma volta ao longo do circuito em vermelho. Agora se $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}$, significa que a órbita dá três voltas ao longo do circuito rosa para completar uma volta ao longo do circuito vermelho. Toros que tem valores de $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{racional}$, são toros racionais e podem ser preenchidos por infinitas órbitas periódicas. Se $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{irracional}$, esses toros são chamados de irracionais e são preenchidos por uma única órbita.

A curva *shearless* pode ser encontrada a partir do número de rotação:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - x_0)}{n} \quad (1)$$

O qual deve ser calculado para cada órbita com condições iniciais (x_0, y_0) . Identificamos a curva *shearless* analisando o extremo local presente no perfil do número de rotação, onde a derivada deve ser zero.

Podemos aproximar arbitrariamente os números irracionais dos racionais. Vamos levar

em consideração que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \rho$, em que ρ pode assumir valores racionais e irracionais. Como uma forma de fazer essa aproximação dos valores, podemos usar como melhor representação matemática a fração continuada:

$$\rho = \frac{\omega_1}{\omega_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (2)$$

Essa aproximação de ρ para toros irracionais, quando seu resultado se aproxima mais lentamente do valor inteiro de $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ assume o valor da média dourada³, que representa o toro mais irracional, sendo então o que sobreviverá durante mais tempo frente a parâmetros de perturbação e dissipação, sendo o último toro a ser destruído no sistema, cuja destruição permite o aparecimento de caos. (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992).

Em nosso sistema bidimensional *não - twist* o toro *shearless* após modificação desses parâmetros se torna um dos últimos a ser destruído, pois o seu número de rotação está relacionado com a média dourada. Podemos entender essa relação em (MORRISON, 2000), que em seu trabalho mostra a partir do Teorema de Greene que é possível analisar um espaço de fase nas proximidades de um toro que está à beira de ser destruído. Ele ainda diz que “[...] Greene conjecturou que o último toro invariante sobrevivente tem um número de rotação igual ao inverso da média dourada” (MORRISON, 2000).

Para entendermos um sistema *não - twist* é necessário compreendermos sistemas Hamiltonianos. Vamos fazer uma pequena introdução a estes sistemas, comentando apenas os pontos que são relevantes para compreensão do trabalho. Seguindo o que foi visto em (ABUD, 2013), um sistema Hamiltoniano é descrito por uma função escalar $H(p_i, q_i, t)$, com N graus de liberdade, que possui variáveis canônicas de momenta e posições (q_i, p_i) , que definem o espaço de fases. A dinâmica do sistema é governada pelas equações de Hamilton:

³ Média Dourada também é conhecida como razão áurea $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339 \dots$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \quad (3)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Também é possível fazer transformações canônicas para mudança de coordenadas que preservam as equações de Hamilton:

$$(p_i, q_i) \rightarrow (P_i, Q_i) \quad (4)$$

Quando fazemos uma transformação de coordenadas para as coordenadas de ângulo-ação facilitamos os cálculos, visto que quando tratamos de sistemas integráveis, é possível fazer com que a Hamiltoniana H dependa apenas da ação I ou que exista alguma variável ângulo que seja cíclica.

$$\Phi_i = \frac{\partial H}{\partial I} = w(I) \quad (5)$$

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} = 0, \quad \text{para ao menos } (N-1) \text{ ângulos}$$

Assim a Hamiltoniana H pode se tornar $H = H(I_1, \dots, I_N)$ com ao menos $(N-1)$ constantes de movimento I_N além da energia total do sistema.

Agora vamos considerar um sistema Hamiltoniano descrito nas variáveis de ângulo-ação com dois graus de liberdade:

$$H(I_1, \Phi_1, I_2, \Phi_2) = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \Phi_1) \quad (6)$$

ε é o parâmetro de perturbação.

Dizemos que o sistema é integrável se temos tantas constantes de movimento quanto grau de liberdade. Neste exemplo vamos considerar que $\varepsilon \neq 0$. Dessa forma, temos um sistema com dois graus de liberdade e duas constantes de movimento E e I_2 ,

$$\dot{I}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \Phi_2} = \text{constante e } \Phi_2 \text{ é uma variável cíclica}$$

$$\begin{aligned}
E = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 &\rightarrow E = \text{constante} \\
I_1 = -\frac{\partial H}{\partial \Phi_1} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} &\rightarrow I_1 \neq \text{constante}
\end{aligned} \tag{7}$$

Neste caso temos um problema integrável, o qual deixa de ser, se introduzirmos mais uma perturbação $\beta H_2(I_1, I_2, \Phi_2)$ de forma que o problema não tenha mais a mesma quantidade de constantes de movimento que graus de liberdade. Quando o sistema deixa de ser integrável temos introdução de caos.

Assumindo que os termos perturbativos ε e β sejam pequenos, podemos estudar a estabilidade de toros a partir do teorema KAM (ABUD, 2013) e (PEREIRA, 2016). Quando há perturbações fracas a maioria dos toros irracionais sobrevive e os toros destruídos são os toros racionais. Esse teorema admite que o sistema não perturbado seja não degenerado, também conhecido como condição *twist* em mapas:

$$\frac{\partial H}{\partial I}(I, \Phi) \neq 0 \tag{8}$$

A analogia da equação (8) para mapas bidimensionais, $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$; $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$ é:

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \neq 0 \tag{9}$$

Essa condição faz com que o número de rotação seja uma função monotônica, em que x assume um valor constante no perfil do número de rotação e y varia monotonicamente. Se as equações (8) e (9) forem iguais à zero, dizemos que o sistema é degenerado (ou *não-twist* para mapas). A violação dessa condição sugere a existência de toros *shearless* e ocasiona no sistema o aparecimento de ressonâncias isócronas que podem interagir e reconectar entre si. Após a reconexão, uma região com toros *meandros* aparece correspondendo a barreiras de transportes no espaço de fase, que não permitem (ou dificultam) que condições iniciais dadas acima dessa barreira de transporte não passe para a parte de baixo, assim como as condições iniciais que são dadas abaixo também não passem para o lado de cima (MARTINS, 2010).

2.2. Espaço de fase

Para a análise do estudo apresentado nesse trabalho, vamos observar a evolução de um mapa com influência de dissipação. As análises serão feitas a partir do espaço de fase, do número de rotação, do comportamento no diagrama de Lyapunov e as bacias de atração do sistema. Para ajudar na compreensão, vamos começar definindo o que significa cada uma das ferramentas utilizadas na pesquisa.

Segundo (SAVI, 2006, p. 25) dizemos que matematicamente existem dois tipos de modelos dinâmicos: equações diferenciais, que são contínuos no tempo e no espaço, e mapas, que descrevem a evolução no tempo de um sistema expressando seu estado como uma função do instante anterior. Desta forma, um mapa é um sistema dinâmico discreto e uma de suas mais importantes utilidades é auxiliar na análise de modelos descritos por equações diferenciais. “O mapa pode ser chamado de autônomo quando não depende explicitamente do tempo, e de não autônomo quando existe uma dependência explícita do tempo.” (SAVI, 2006, p. 55).

O “mapa padrão *não - twist* labiríntico dissipativo” apresenta as chamadas curvas *shearless*, visto em (MARTINS et al, 2011). O mapa é dado por,

$$\begin{cases} y_{n+1} = (1 - \gamma)y_n - b\sin(2\pi x_n) - b\sin(\eta 2\pi x_n) \\ x_{n+1} = x_n - a(y_{n+1} - r_1)(y_{n+1} - r_2) \end{cases} \quad (10)$$

onde r_1 e r_2 são as raízes do sistema *não - twist* com grau de polinômio dois e definem a posição onde as ressonâncias isócronas nascem no espaço de fase ($y = r_1$ e $y = r_2$); a é o parâmetro que interfere na amplitude da ilha, b é o parâmetro da perturbação que permite o aumento do mar caótico, η induz bifurcações sela - nó dentro das ilhas ressonantes e permite o aparecimento de mais de uma curva *shearless*. O parâmetro de dissipação é o γ ($\gamma \in [0,1]$).

O primeiro trabalho onde foi apresentado o novo atrator *shearless* (CARVALHO; ABUD, 2015) tem em seu sistema apenas uma curva *shearless*. Sabemos pela evidência numérica apresentada em (MARTINS et al, 2011) que a quantidade de curvas *shearless* no sistema é igual à $(\eta - 1)$, porém, neste trabalho, obtemos numericamente a quantidade de curvas *shearless* no sistema igual à η . Logo, no sistema onde $\eta = 3$, aparecem três curvas *shearless*. Para isso é necessário modificar os valores dos parâmetros (a, b) com dissipação zero na tentativa de encontrar a formação de mais duas curvas *shearless* no sistema. A definição para seu aparecimento é a evidência de um extremo no número de rotação.

O perfil do número de rotação com a presença de uma curva *shearless* é:

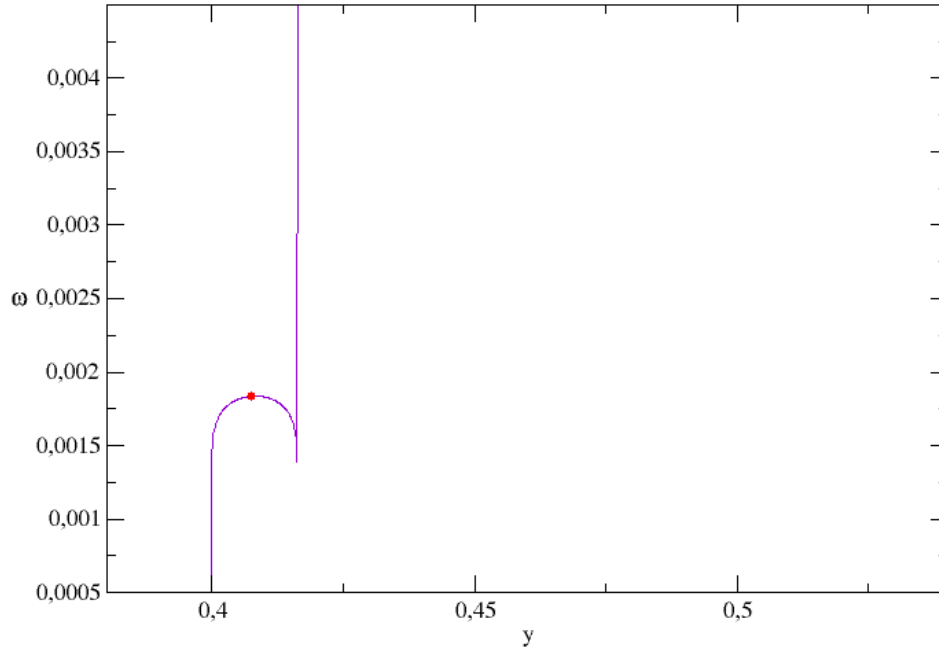


Figura 3 - Número de rotação com valores fixos de $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $b=0.003$, $\gamma=0$ e $\eta=3$.

Na figura 3 existe apenas um extremo, que neste caso é um máximo local. A quantidade de extremos encontrados no perfil do número de rotação é igual à quantidade de curvas *shearless*.

É necessário entender a topologia do espaço de fase para observar como as curvas *shearless* aparecem. De uma maneira geral, um espaço de fase pode ser obtido de forma numérica e plotado em um gráfico, onde suas condições iniciais evoluem após N iterações (repetições) e tem como eixos as variáveis canônicas do sistema. Nesse caso, as iterações estão fazendo o papel do tempo.

Para melhor compreensão do mapa *não - twist* apresentado neste trabalho é necessário conhecer os pontos fixos. Segundo (MARTINS, 2010), os pontos fixos são um conjunto (x, y) de pontos que fazem as iterações do mapa sempre retornarem ao seu valor inicial:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = y_n \end{cases} \quad (11)$$

Eles são importantes para analisar a mudança na topologia estrutural do sistema quando modificamos os valores dos parâmetros a , b e γ . Quando existe perda de estabilidade ocorre o que chamamos de bifurcações.

Partindo do que foi estudado em (FERRARA; PRADO, 1995) e em (FRANCISCO, 2015), classificamos os pontos fixos de sistemas conservativos em pontos hiperbólicos e pontos elípticos. Essa classificação é dada a partir da análise dos autovalores da jacobiana do sistema *não - twist*, obtidos a partir da equação $\det(J - \lambda I) = 0$, onde J é a matriz jacobiana do sistema; $\lambda_{1,2}$ são os dois autovalores e I é a matriz identidade. Em notação matricial genérica essa equação se torna:

$$\det \begin{pmatrix} J_{1,1} - \lambda & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} - \lambda \end{pmatrix} \quad (12)$$

Se os autovalores λ_1 e λ_2 forem reais e possuírem sinais distintos, o ponto fixo é denominado de ponto de sela ou hiperbólico, visto que suas trajetórias se aproximam ao longo de um par de variedades e se afastam ao longo de outro par de variedades (são sempre pontos instáveis).

Os pontos elípticos têm dois autovalores imaginários puros complexos conjugados e são classificados como estáveis. Podem ser chamados também de centro ou nó.

Para o início das análises desse trabalho escolhemos modificar o valor apenas da perturbação b , mantendo todos os outros parâmetros com valores fixos em $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$.

Na figura 4, exibiremos um espaço de fase com as cadeias de ilhas separadas, ainda sem *overlap*.

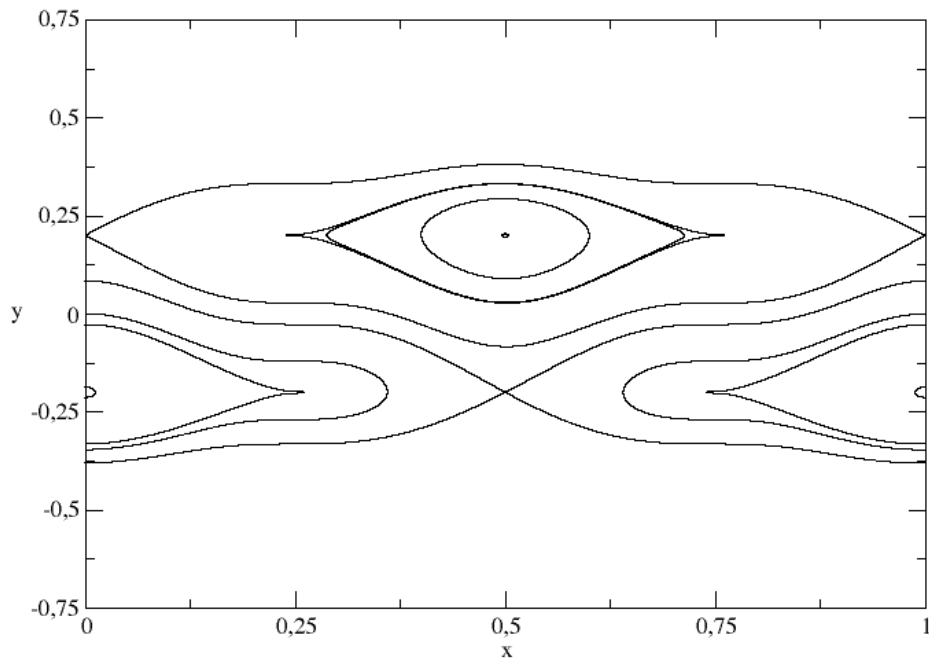


Figura 4 - Espaço de fase plotado a partir do mapa (10) com valores fixos de $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $b=0.002$, $\gamma=0$, $\eta=3$.

“O “overlap” ocorre quando as separatrizes estão suficientemente perto de tal maneira que não há qualquer toro invariante na região de interação entre elas” (MARTINS, 2010).

O número de pontos fixos estáveis e instáveis em cada cadeia de ilhas é igual ao valor do parâmetro η . Como mantivemos $\eta = 3$, temos três pontos hiperbólicos (pontos instáveis) e três pontos elípticos (pontos estáveis). É importante lembrar que para as análises do sistema *não - twist* o mapa é periódico em 2π . Contudo, a variável x é multiplicada por 2π de tal maneira que o período torna-se unitário. Dessa forma, analisaremos o intervalo $[0,1]$ para x .

Na figura 5 estamos utilizando no eixo x um intervalo de $[0,1]$ para facilitar a análise do sistema *não - twist*, onde mostramos a reconexão das separatrizes das duas cadeias de ilhas, plotada a partir do mapa (10) com variação do valor de perturbação. Na figura 5a temos $b = 0.002$, onde as ilhas ressonantes ainda estão separadas. Devemos concentrar nossa atenção nos pontos hiperbólicos que estão presentes na figura aproximadamente na posição $(x = 0.5, y = -0.25)$ e $(x = 0.0, y = 0.25)$ e nos pontos elípticos que estão aproximadamente na posição $(x = 0.5, y = 0.25)$ e $(x = 0, y = -0.25)$. Conforme vamos aumentando o valor do parâmetro de perturbação b para $b = 0.0025$, as cadeias de ilhas vão se aproximando uma da outra, representadas na figura 5b, onde observa-se que as cadeias de ilhas ainda permanecem, mas apresentam uma mudança topológica que causa o *overlap*

(reconexão). Na figura 5c aumentamos mais um pouco o valor do parâmetro de perturbação b para $b = 0.003$, onde é possível notar que os pontos hiperbólicos trocam suas variedades causando uma bifurcação no sistema, permitindo que os pontos fixos sejam criados e destruídos, ou tenham suas estabilidades mudadas. Essa troca de variedades ocorre quando o ponto hiperbólico está aproximadamente na posição $(x = 0.5, y = -0.25)$. Em vez de suas variedades instáveis passarem pela vizinhança do ponto elíptico que está na posição aproximada de $(x = 0.5, y = 0.25)$, agora passam pela vizinhança do ponto elíptico na posição aproximada em $(x = 0, y = -0.25)$. As variedades instáveis do ponto hiperbólico que está na posição aproximada de $(x = 0.0, y = 0.25)$ agora passam pela vizinhança do ponto elíptico $(x = 0.5, y = 0.25)$. Essa mudança topológica permite o aparecimento das curvas *shearless*. Na figura 5d, aparece entre os pontos fixos uma curva vermelha, a qual denominamos de curva *shearless*.

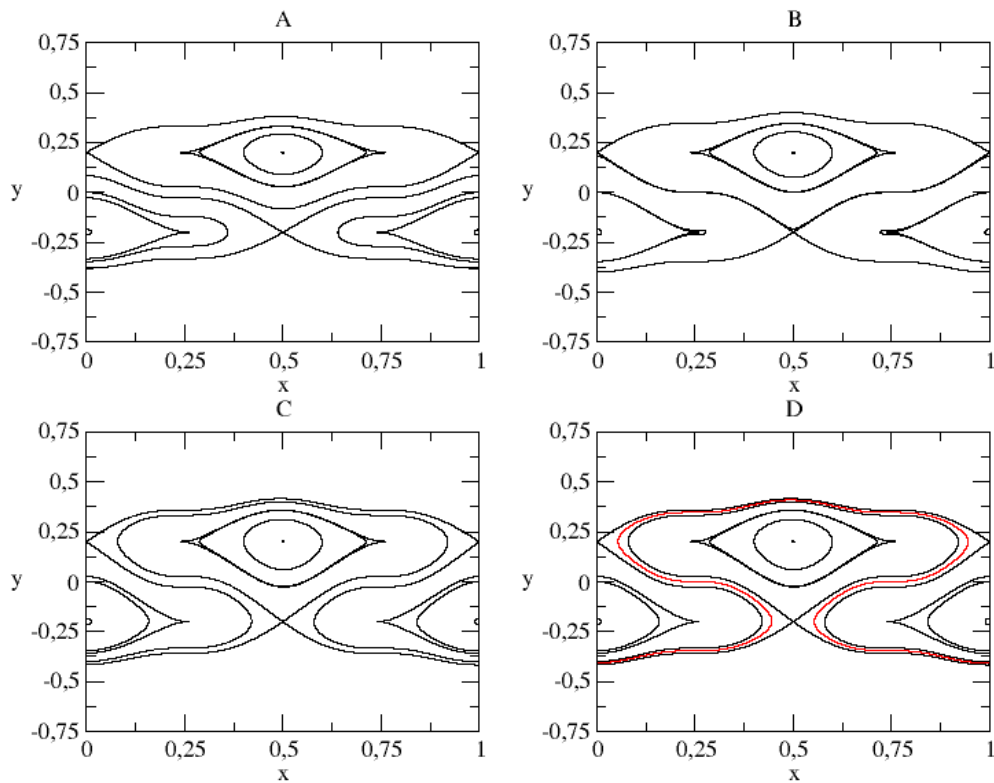


Figura 5 - Processo de reconexão para o mapa não - twist com valores fixos de $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$. a) $b=0.002$, b) $b=0.0025$, c) $b=0.003$, d) $b=0.003$ com a presença da *shearless* representada pela cor vermelha.

Temos como objetivo encontrar valores para os parâmetros do “mapa padrão não - twist labiríntico dissipativo” em que haja pelo menos mais uma mudança topológica do sistema para ocasionar um novo *overlap*, acarretando o surgimento de mais curvas *shearless*.

Essa discussão sobre a mudança topológica do sistema serve como base para a análise da presença das novas *shearless* que serão apresentadas no próximo capítulo.

2.3. Expoentes de Lyapunov

A ideia principal é analisar a sensibilidade do sistema às condições iniciais verificando a divergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas, já que os expoentes de Lyapunov são utilizados como indicadores de caos (FERRARA; PRADO, 1995), (SAVI, 2006) e (MONTEIRO, 2006).

Os cálculos apresentados nesse capítulo foram realizados a partir de (FRANCISCO, 2015) e (FERRARA; PRADO, 1995) e são para o caso de mapas unidimensionais, que podem ser generalizados para o caso de mapas bidimensionais. No próximo capítulo, daremos a devida atenção ao caso bidimensional.

Seja dado um mapa unidimensional:

$$x_{n+1} = f(x_n) = F^N(x_0) \quad (13)$$

e condições iniciais x_0 e y_0 infinitesimalmente próximos, em que a distância relativa entre elas na N -ésima iteração pode ser definida como:

$$|F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)| = d \quad (14)$$

Ou podemos analisar essa distância relativa pela razão:

$$\frac{|F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)|}{\delta} = \frac{d}{\delta} \quad (15)$$

onde δ é muito pequeno. Se considerarmos que o limite em que $\delta \rightarrow 0$, podemos determinar:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \frac{F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)}{(x_0 + \delta) - (x_0)} \right| = |F'^N(x_0)| \equiv e^{NL} \quad (16)$$

L é a taxa exponencial de expansão/contração da distância relativa.

Tomando o logaritmo dos dois lados da equação (14) e rearranjando os termos, temos:

$$\lambda \equiv L = \frac{1}{N} \ln |F'^N(x_0)| \quad (17)$$

Agora, se levarmos em consideração que $N \rightarrow \infty$ a expressão para calcular os expoentes de Lyapunov assume a seguinte forma:

$$\lambda \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |F'^N(x_0)| \quad (18)$$

Onde λ é por definição o expoente característico de Lyapunov do mapa unidimensional (equação 11), que constitui uma medida da divergência ($\lambda > 0$) ou de contração ($\lambda < 0$), e assim podemos concluir que λ depende da condição inicial x_0 .

Também podemos generalizar o procedimento para encontrar expoentes de Lyapunov para mapas n - dimensionais, onde existem n expoentes de Lyapunov, já que a quantidade de expoentes gerados é igual a dimensão do mapa analisado. Um dos métodos para resolução desses cálculos é o aplicado por (ECKMANN; RUELLE, 1985), que fazem o uso das matrizes jacobianas do sistema para os cálculos dos expoentes de Lyapunov, chegando na seguinte equação:

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \ln |T_{jj}^1| + \ln |T_{jj}^2| + \dots + \ln |T_{jj}^N| \} \quad (19)$$

Onde T_{jj}^i é o elemento da diagonal “j” da matriz jacobiana e “i” são as iterações.

Utilizamos o sinal do expoente máximo para identificar se a órbita é caótica, estável ou se existem pontos de bifurcação. Quando os expoentes apresentam sinal negativo, significa que as órbitas são estáveis, se o sinal é positivo, órbitas caóticas, e se for nulo significa um ponto de bifurcação. Apresentaremos no Capítulo 3 o diagrama de Lyapunov, que é a projeção de valores do expoente máximo de Lyapunov para um par de condições iniciais (x_0, y_0) , que representam a órbita da curva *shearless* do espaço de fase correspondente ao “mapa padrão não - twist labiríntico dissipativo”.

2.4. Bacia de atração

A bacia de atração é o conjunto de todas as possíveis condições iniciais que convergem para o mesmo atrator. Esse conjunto pode apresentar várias configurações possíveis, uma vez que cada atrator apresenta quantidades diferentes de condições iniciais que convergem para si. A formação dos atratores ocorre quando introduzimos dissipação. Ao iterar o sistema é possível observar o “caminho” que as condições iniciais fazem até chegar ao atrator.

No Capítulo 3 apresentaremos como a bacia de atração do sistema em estudo se comporta quando aumentamos os parâmetros de dissipação, na tentativa de ilustrar e compreender quais desses atratores são mais robustos.

Como apresentado em (CARVALHO; ABUD, 2015), o toro *shearless* após algumas iterações e modificação do valor do parâmetro de dissipação apresenta um atrator, que foi denominado como atrator *shearless*. O sistema após a introdução de dissipação apresenta atratores pontuais, assim como o “ex-toro” *shearless* também se torna um atrator, sobrevivendo à introdução de dissipação durante um determinado período.

Capítulo 3

3.1. Desenvolvimento e Resultados:

Neste capítulo apresentaremos o desenvolvimento dos cálculos, as dificuldades encontradas e os resultados obtidos para o “mapa padrão *não - twist* labiríntico dissipativo”.

Sabemos, através das evidências numéricas, que é possível encontrar neste sistema a presença de mais duas curvas *shearless*, o que nos faz querer entender quais características o sistema com a presença de três curvas *shearless* pode apresentar. Quando ponderamos novamente sobre o Tokamak, são elas que se tornam barreiras de transportes que auxiliam no confinamento do plasma. Se forem destruídas em tempos diferentes, significa que conseguimos ganhar mais tempo de confinamento de plasma. Por isso, o objetivo é modificar principalmente o parâmetro de dissipação, uma vez que a introdução do mesmo no sistema permite que a curva *shearless* evolua para um atrator, como foi relatado em (CARVALHO; ABUD, 2015). A análise do sistema com a presença de mais de uma curva *shearless* permite a caracterização de qual delas é mais robusta frente o aumento da dissipação e tentar identificar, como em (CARVALHO; ABUD, 2015), se o sistema com a presença de três curvas *shearless* apresenta evolução para atratores e se ambos convivem até o ponto em que um é destruído; se acabam se sobrepondo um ao outro e se existem atratores pontuais convivendo junto com os atratores *shearless*. Para isso, é necessário fazer um estudo do espaço de fase e do número de rotação.

No desenvolvimento desse trabalho foram necessárias as posições das curvas *shearless*. Como já foi especificado no capítulo anterior, a presença delas pode ser evidenciada a partir da análise de um extremo no número de rotação, que pode ser um mínimo local ou máximo local, que se localiza no espaço de fase entre a troca de variedades que ocorrem entre os pontos hiperbólicos.

O primeiro passo é achar um conjunto de parâmetros que apresentam no número de rotação três extremos. Inicialmente foram escolhidos vários números de rotação para diversos valores de b , com a posição fixa em $x = 0.5$ para identificar a partir de quais condições iniciais em y as três curvas *shearless* aparecem. Dessa forma, conseguimos calcular numericamente que a primeira surge no sistema com valor de $b=0.003$, $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$, onde ocorre o primeiro *overlap*, ou reconexão das ressonâncias do sistema

apresentado no capítulo anterior.

Faremos análises com a variação dos parâmetros a , b e γ . Essa análise é importante para compreender a influência desses valores no sistema.

Retomando o mapa, temos:

$$\begin{cases} y_{n+1} = (1 - \gamma)y_n - b\sin(2\pi x_n) - b\sin(\eta 2\pi x_n) \\ x_{n+1} = x_n - a(y_{n+1} - r_1)(y_{n+1} - r_2) \end{cases} \quad (20)$$

O surgimento de mais curvas *shearless* no sistema acontece seguindo a mesma estrutura apresentada no capítulo anterior. Dessa forma, apresentaremos a seguir perfis do número de rotação com a presença de um, dois e três extremos. Deixamos os valores dos outros parâmetros do sistema *não-twist* fixos em $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$ e modificaremos aqui apenas o valor da perturbação b .

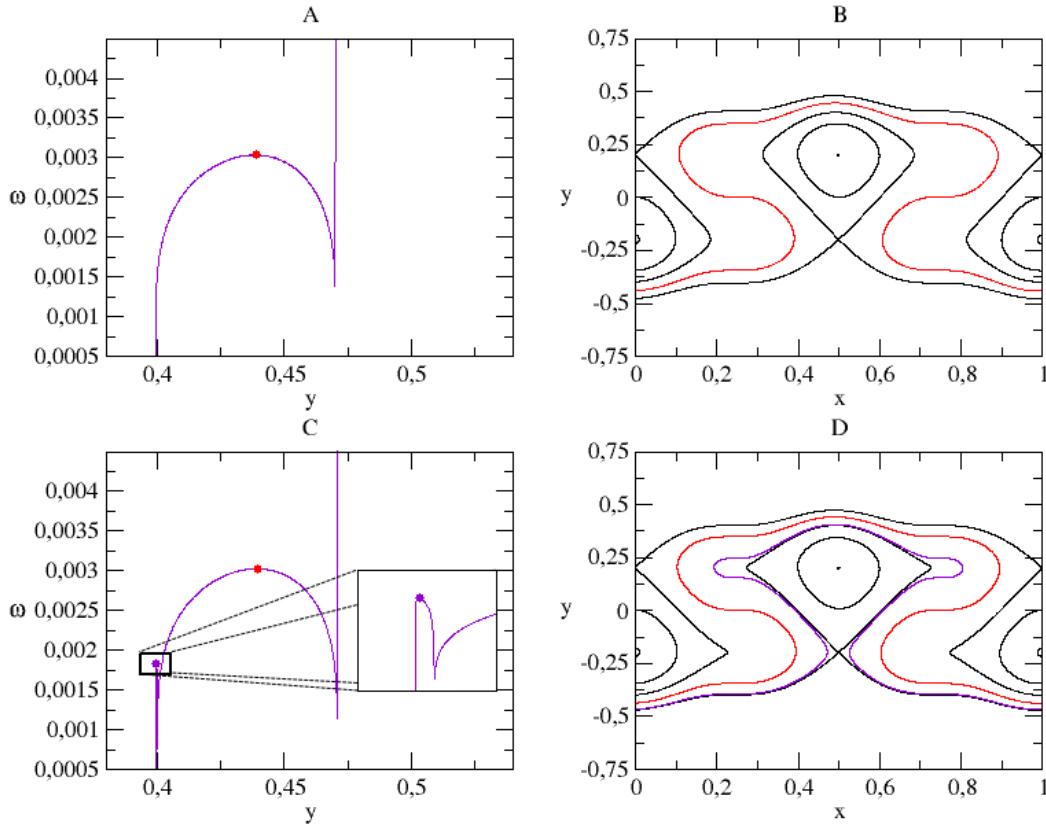
Na figura 6, apresentaremos quatro perfis de números de rotação onde teremos a presença de um, dois e três extremos e os espaços de fase correspondentes com a presença de uma, duas e três curvas *shearless*. O primeiro perfil do número de rotação, que está representado na figura 6a, foi calculado com valor de $b=0.004$, onde o ponto vermelho indica a coordenada y da curva *shearless*. Com isso, conseguimos saber qual é o valor de sua posição no espaço de fase, já que deixamos o valor de x fixo em $x = 0.5$. Quando iteramos o sistema onde existe um limite em y , que varre órbitas no sentido vertical, esse limite cobre as órbitas que circundam próximas à posição onde surgem as curvas *shearless*. Entre essas órbitas, no perfil do número de rotação, surge um extremo de máximo local, que identifica a presença da curva *Shearless*. Na figura 6b temos o espaço de fase correspondente à curva *shearless*, onde é possível observar que já aconteceu a mudança topológica no espaço de fases que causa *overlap* das ressonâncias isócronas.

Ao modificarmos mais um pouco o valor do parâmetro da perturbação b , observamos que ocorre mais uma mudança topológica, caracterizando um novo *overlap* e alterando mais uma vez sua topologia. Dessa forma, conseguimos encontrar no número de rotação dois máximos locais que representam os extremos do sistema *não-twist* correspondentes aos toros *shearless*, representados pelos pontos em roxo e vermelho na figura 6c, que foi plotada com valor de $b = 0.0053$, de onde obtemos os valores do número de rotação ω pelo da posição em y . O ponto roxo é representado com uma aproximação do ponto, feita no gráfico. Na figura 6d temos o espaço de fase com a presença de duas curvas *shearless*. Vamos prestar atenção nos pontos hiperbólicos que estão aproximadamente nas posições $(x = 0.25, y = 0.25)$ e

($x = 0.75, y = 0.25$). A variedade desses pontos passa pela vizinhança de um ponto elíptico, cada um. Esses pontos hiperbólicos trocam suas variedades com o ponto hiperbólico localizado em ($x = 0.5, y = -0.25$). Dessa forma, aparece entre os pontos mais uma curva *shearless* representada pela cor roxa.

Aumentando o parâmetro de b para $b=0.006$ na figura 6e, conseguimos observar a formação de mais um extremo que confirma a existência de uma terceira *shearless*, representada por um ponto azul. Na figura 6f, o espaço de fase correspondente às três curvas *shearless*, cujo aparecimento ocorre quando existe troca entre as variedades dos pontos hiperbólicos localizados nas posições aproximadamente entre ($x=0.2, y=-0.25$) e ($x=0, y=0.25$).

Com valor de $b = 0.007$, podemos ver na figura 6g que o perfil do número de rotação está bem definido com os três extremos. Na figura 6h o espaço de fase correspondente é apresentado. Com esse valor de b ocorreram os três *overlaps* que permitiram o nascimento das curvas *shearless*.



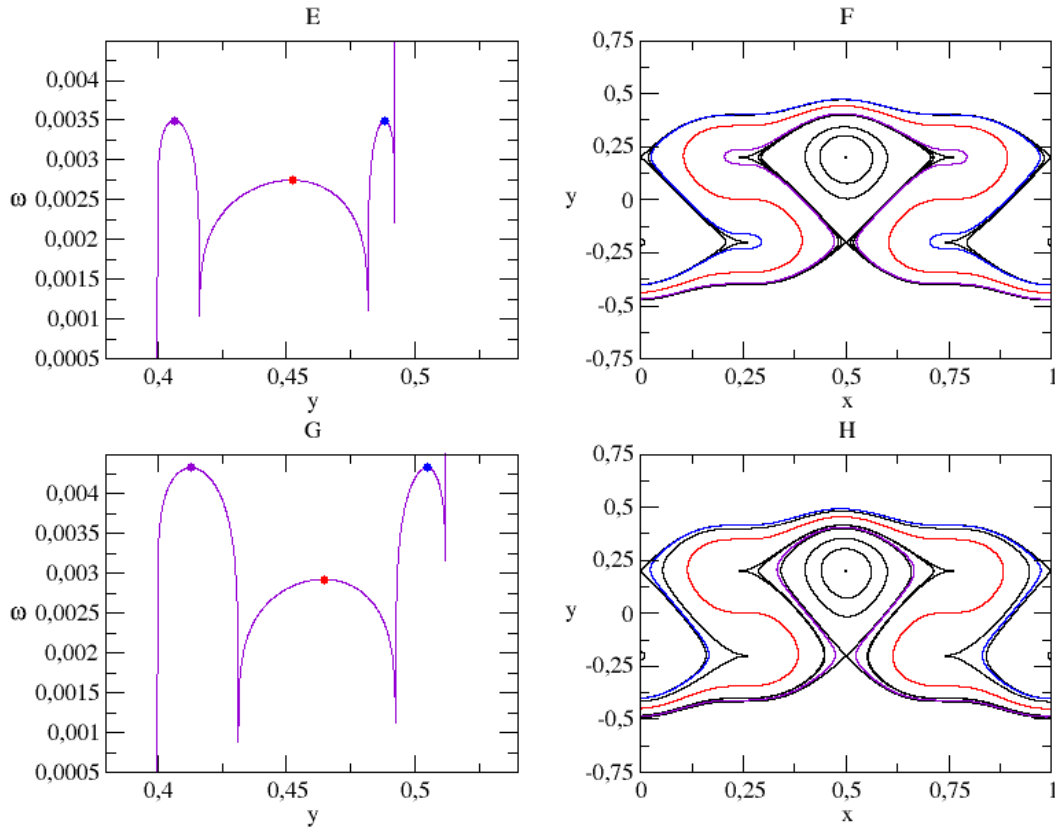


Figura 6 - Perfis dos números de rotação com uma, duas e três curvas *shearless* e seus espaços de fase correspondentes com valores respectivos de $b=0.004$, $b=0.0053$, $b=0.006$ e $b=0.007$. Com os outros parâmetros fixos em $a=0.1$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$.

Como já foi discutido no Capítulo 2, o número de rotação só pode ser calculado para órbitas sem dissipação no sistema, afinal, só é possível obter o perfil do número de rotação para órbitas periódicas e quase periódicas.

Se analisarmos os gráficos referentes aos números de rotação para uma, duas e três curvas *shearless*, é fácil perceber que a posição do extremo representado pela cor vermelha na figura 6a no número de rotação sofre um pequeno deslocamento quando os pontos roxo e azul aparecem. Por causa desse pequeno deslocamento, a cada modificação dos valores de b , é necessário que seja realizado novamente o cálculo do número de rotação para cada b . Assim, surge uma necessidade de automatizar o problema na tentativa de encontrar o máximo local que representa cada uma das curvas *shearless*. Matematicamente, sabemos que um ponto crítico pode ser um máximo ou mínimo local, logo, sua derivada primeira deve ser igual a zero. Partindo disso, calculamos o número de rotação. Quando falamos em cálculos numéricos, as derivadas não possuem valores exatamente iguais à zero, e sim próximos a ele. Se houver apenas alguma condição em que os locais onde as derivadas possam ser próximas de zero, significa que existem vários candidatos a extremos. Então, para que apenas os valores

dos picos representados pelos pontos roxo, vermelho e azul sejam calculados, fazemos uma matriz onde gravamos os possíveis pontos críticos do sistema. Porém, não é o suficiente para determinar a posição da curva *shearless*. Então, fazemos novamente mais uma comparação entre apenas os máximos locais para calcular o maior valor. Dessa forma, é possível localizar apenas os pontos em roxo, vermelho e azul que representam os extremos no perfil do número de rotação, facilitando as análises do sistema *não - twist*.

A variação do parâmetro de perturbação (mesmo para valores pequenos) introduz caos no sistema. Estudar o comportamento do sistema com introdução de perturbação auxilia na compreensão de como o sistema na presença de três curvas *shearless* se comporta. É possível perceber que ao longo do aumento do parâmetro b , as curvas *shearless* sofrem deslocamentos e os pontos fixos começam a ser destruídos. Por causa do deslocamento não foi possível encontrar o momento da quebra das curvas *shearless*, mas ao longo do estudo desenvolvido foi possível constatar que elas iram se quebrar, dando lugar apenas ao mar de caos.

Vamos definir agora como o sistema *não - twist* se comporta com a variação do parâmetro a . Manteremos todos os outros parâmetros fixos em $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$, $b=0.006$ e $\eta=3$. Como já foi dito no capítulo anterior, o parâmetro a permite a mudança da amplitude das ilhas.

Quando diminuimos o valor de a , aumentamos a amplitude das cadeias de ilhas ressonantes; quando aumentamos o valor de a , diminuimos a amplitude das cadeias de ilhas.

Na figura 7a o valor do parâmetro que utilizamos é de $a=0.120$, onde o perfil do número de rotação apresenta apenas um extremo. A figura 7b é o espaço de fase correspondente ao sistema em *overlap*, mantendo as duas cadeias de ilhas reconectadas. Entre as órbitas periódicas surge uma curva *shearless* representada pela cor vermelha. Na figura 7c observamos a evidência da segunda curva *shearless* no perfil do número de rotação com valor de $a=0.119$. Representamos o ponto roxo com uma aproximação para facilitar a visualização da existência do extremo de máximo local. Na figura 7d temos o espaço de fase correspondente onde já ocorreu o segundo *overlap* no sistema, proporcionando o surgimento da curva *shearless* roxa, assim como para o sistema com valores diferentes de perturbação. A figura 7e mostra o sistema após ocorrer mais um *overlap*, que permite a formação da terceira curva *shearless*, para o valor de $a=0.093$, exibindo no perfil do número de rotação três extremos, reafirmando a presença de três curvas *shearless*. A figura 7f mostra o espaço de fase correspondente à presença das curvas *shearless*. A terceira é representada pela cor azul. Na figura 7g, com o valor de $a=0.050$, podemos notar que o perfil do número de rotação tem três extremos bem evidentes. Esse número de rotação é a prova que nos garante que é possível

ver no sistema *não – twist* o surgimento de três curvas *shearless*. Na figura 7h encontra-se o espaço de fase correspondente onde já ocorreu a mudança topológica que permite o nascimento das curvas.

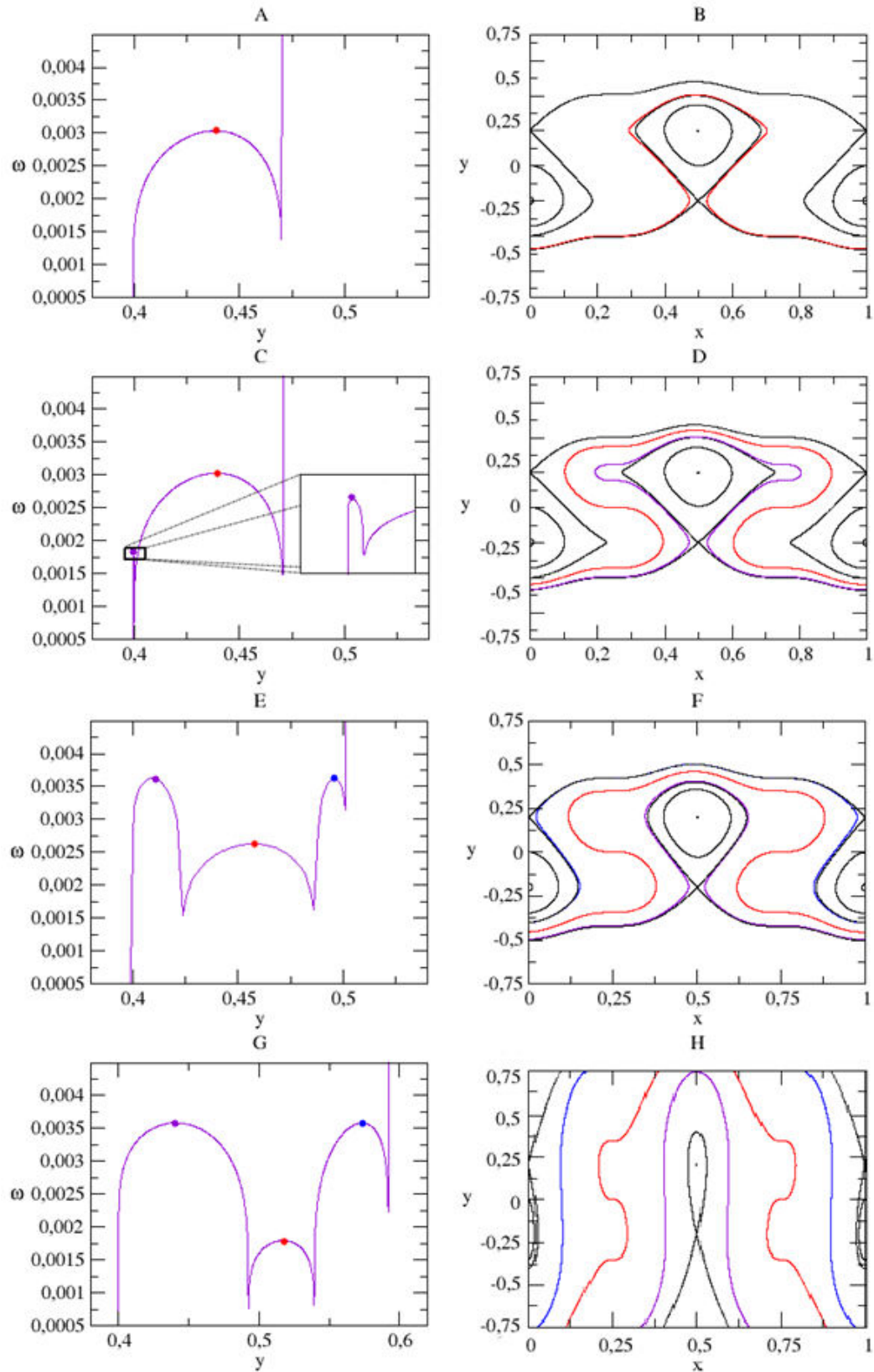


Figura 7- Perfis dos números de rotação com uma, duas e três curvas *shearless* e seus espaços de fase correspondentes

com valores respectivos de $a=0.120$, $a=0.119$, $a=0.093$ e $a=0.0050$. Com os outros parâmetros fixos em $b=0.006$, $r_1=0.2=-r_2$, $\gamma=0$ e $\eta=3$.

Com essas análises é possível notar que a mudança do valor da amplitude a também pode ocasionar no sistema *não - twist* uma mudança topológica nas ilhas ressonantes, que permite *overlaps*, proporcionando o nascimento das curvas *shearless*, mesmo com variação de perturbação.

3.2. Sistema dissipativo

Faremos agora a apresentação da análise que avalia o sistema *não - twist* com $\gamma \neq 0$, transformando o sistema não dissipativo em dissipativo, para que possamos fazer as análises das bacias de atração. As análises feitas em relação à modificação dos valores dos parâmetros de perturbação b e a auxiliam na escolha de valores adequados, para que possamos observar no espaço de fase a presença de ambas as curvas *shearless* em um sistema dissipativo.

Dessa forma, escolhemos deixar os parâmetros do mapa *não - twist* fixos em $r_1=0.2=-r_2$, $a=0.1$, $b=0.006$ e $\eta=3$. Os parâmetros da dissipação serão modificados a fim de compreender o comportamento das três *shearless* frente a essa variação.

Para tal análise é necessário entender o conceito de atratores, onde podemos assumir um conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo, como podemos ver em (FERRARA; PRADO, 1995) e (SAVI, 2006).

A seguir, temos o espaço de fase com as três curvas *shearless* e com valores de dissipação variados. Na Figura 8a utilizamos valor de γ bem pequeno, $\gamma=0.0000010$. Podemos observar que os pontos fixos hiperbólicos e elípticos do sistema começam a ser destruídos e as três curvas *shearless* que existiam no regime do sistema não dissipativo, agora, no regime dissipativo, tornam – se três atratores que atravessam o espaço de fase todo, coexistindo com quatro atratores pontuais. Na figura 8b temos o espaço de fase com $\gamma=0.0000015$, onde é possível observar que esses atratores *shearless* começam a se aproximar. Ambos sofrem pequenos deslocamentos, como se houvesse uma atração entre eles. Na figura 8c temos $\gamma=0.0000020$, onde é possível observar que ocorre novamente um deslocamento no espaço de fase, acarretando uma aproximação maior dos mesmos. Na Figura 8d, apresentamos a representação do espaço de fase dissipativo com a presença dos três atratores *shearless* tornando – se apenas um único atrator, que convive com alguns atratores

pontuais com $\gamma=0.0000045$. Esse novo atrator formado pela robustez dos três permeia por muito tempo no espaço de fase, até momentos em que sofre pequenas deformações, mas ainda permanece convivendo com os atratores pontuais.

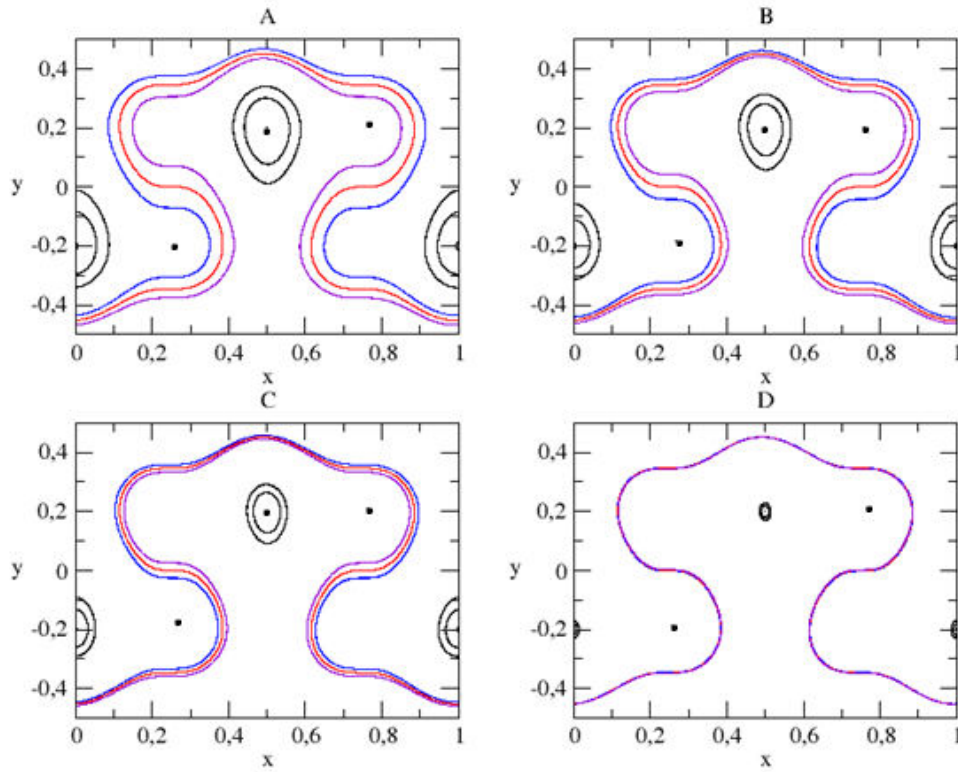


Figura 8 - espaço de fase com sistema dissipativo, com valores respectivos de $\gamma=0.0000010$, $\gamma=0.0000015$, $\gamma=0.0000020$ e $\gamma=0.0000045$. Com os outros parâmetros fixos em $a=0.1$, $b=0.006$, $\eta=3$ e $r_1=0.2=-r_2$

Ao analisarmos o mapa *não – twist* dissipativo, observamos que as curvas *shearless* tornaram – se atratores que sofrem modificações para valores pequenos de γ .

A robustez dos atratores é pequena se analisada individualmente. Após um pequeno aumento da dissipação eles sofrem deslocamentos ao longo do espaço de fase até o momento em que se tornam um único atrator, onde sua robustez torna – se uma formação dada pela junção dos três atratores *shearless*.

No regime dissipativo esse dado numérico é importante, pois foi possível identificar que, especificamente para esses parâmetros escolhidos, as curvas *shearless* tornaram-se atratores. Após o $\gamma=0.0000045$, eles se sobrepõem uns aos outros tornando – se apenas um único atrator. O que acontece é que o atrator *shearless*, representado pela cor vermelha, acaba atraindo os outros dois, como podemos ver ao compararmos os espaços de fase no regime dissipativo apresentado na figura 8.

A bacia de atração deste trabalho é referente ao espaço de fase com uma dissipação de

$\gamma=0.001$ e perturbação $b=0.06$. Para este caso já observamos que os três atratores *shearless* se tornam apenas um, convivendo com 4 atratores pontuais existentes no sistema.

Escolhemos esse valor de γ porque, para valores menores com a presença dos três atratores *shearless*, o tempo computacional exigido é muito grande. Em órbitas estáveis que circundam os pontos fixos no sistema para valores pequenos de dissipação, as condições iniciais demoram pelo menos 4 milhões de iteradas para atravessar essas órbitas e chegar até o atrator. Elaborar numericamente um método para a bacia de atração para os atratores *shearless* não é tarefa fácil. O problema que enfrentamos é a dificuldade de conseguir separar quais condições iniciais pode cair em cada uma delas, pois ambas varrem o sistema todo e qualquer condição que possa ser dada em suas vizinhanças pode ir para qualquer uma das *shearless*, devido à proximidade entre elas. Não conseguimos determinar um par de condições para as *shearless* e limitar um raio pequeno onde salvamos apenas as condições iniciais que caírem sobre esse raio. Fazendo isso estamos deixando de levar em conta as condições iniciais que são dadas ao longo do espaço todo, fazendo com que a bacia de atração não seja fiel o suficiente, já que as *shearless* atravessam o espaço e não são pontuais como os atratores oriundos dos pontos fixos.

No trabalho de (CARVALHO; ABUD, 2015), foi relatado apenas um atrator *shearless*. O que mostramos aqui representa valores pequenos de dissipação, onde existem três atratores *shearless* que se tornam apenas um com o aumento dessa dissipação, já que a curva *shearless* vermelha acaba atraindo as duas curvas roxa e azul no espaço de fase do regime dissipativo.

A figura 9a é o espaço de fase para os parâmetros escolhidos citados acima. Com esses parâmetros o tempo computacional é menor e mais viável, pois é necessário que haja até 5 mil iterações para que as condições iniciais comecem a cair nos atratores pontuais. Como temos apenas um atrator *shearless* conseguimos fazer uma condição que satisfaça o atrator varrendo o espaço todo, sem perder qualquer condição inicial. Na figura 9b apresentamos a bacia de atração total do sistema, na qual conseguimos observar as condições iniciais convergindo para os atratores pontuais que são representados por cinco cores diferentes. Temos os atratores representados pelas cores preto e verde, que estão atraindo condições iniciais do topo do espaço de fase. Os atratores de cores amarelo e azul estão atraindo condições iniciais que vem de baixo do espaço de fase. As condições que são atraídas pelo atrator *shearless* são representadas pela cor vermelha, que atrai condições iniciais que podem vir de qualquer parte do espaço de fase. Os atratores amarelo e preto tem a bacia de atração menores do que os atratores de cores azul e verde. Um ponto interessante é que esses atratores menores

apresentam um “caminho” mais longo para as condições iniciais. Isso ocorre porque é necessário que as condições iniciais itere mais no sistema até chegar nos atratores, ou seja, fazem um “caminho” maior até convergir.

O que notamos é que esse atrator *shearless* tem características parecidas com o atrator apresentado em (CARVALHO; ABUD, 2015), pois ambos podem atrair condições que vem do espaço todo dividindo a bacia em dois grupos distintos. O atrator *shearless* apresenta uma bacia de atração maior do que qualquer um dos atratores pontuais.

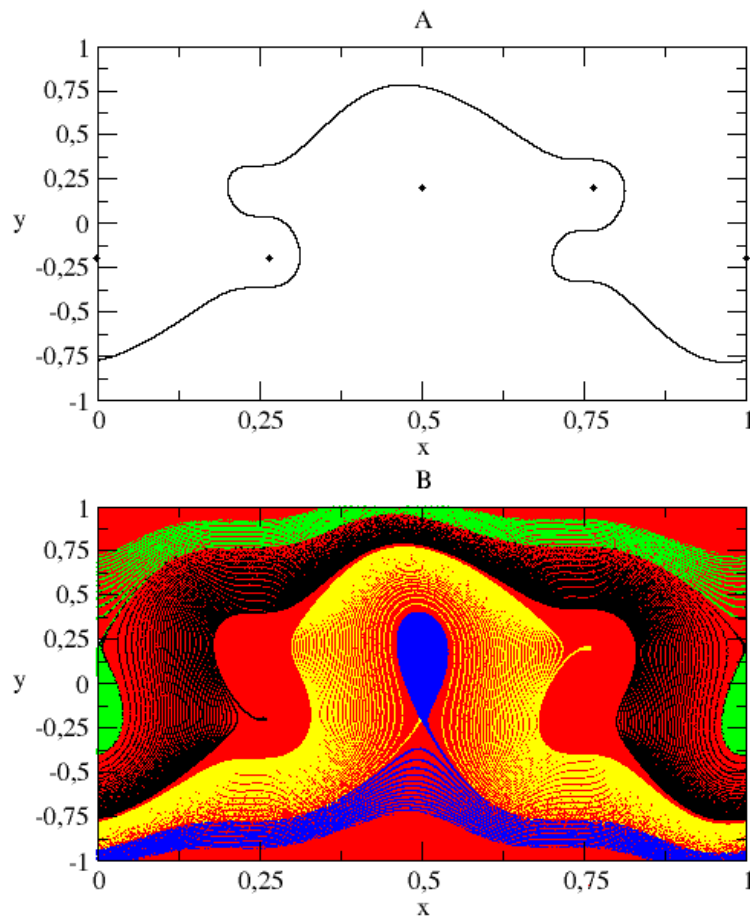


Figura 9 - A) espaço de fase com parâmetros fixos em $a=0.1$, $b=0.006$, $\eta=3$ e $r_1=0.2=-r_2$ $\gamma=0.001$ e $b=0.06$, B) bacia de atração

Para maiores caracterizações do atrator *shearless* fizemos a variação do parâmetro de perturbação e o cálculo dos expoentes de Lyapunov. Com essas informações conseguimos encontrar um conjunto adequado de parâmetros para calcular o diagrama de Lyapunov que será feito também para valores onde existem apenas uma curva *shearless*, dando fim às análises referentes a esse trabalho.

Como já foi comentado no capítulo anterior, os cálculos para o expoente de Lyapunov podem ser feitos a partir de métodos em que utilizamos a matriz jacobiana do sistema para

determina-los. (ECKMANN; RUELLE, 1985) apresentam um método mais adequado a partir de:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Lambda_j^n|, j = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

Onde $|\Lambda_j^n|$ são os módulos dos autovalores da matriz “M” ao longo de “n” iterações, ou seja:

$$M = \prod_{i=1}^n J(\vec{x}, i) J(\vec{x}_i) \quad (22)$$

Para calcular a matriz “M” de forma correta devemos usar, em vez da matriz J (jacobiana), outra matriz que nomearemos de matriz $\tilde{J}$, que será o produto da matriz J pela matriz O.

Adotaremos para matriz O uma genérica que será:

$$O = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (23)$$

E sua inversa:

$$O^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (24)$$

Definimos então que $\tilde{J} = J \cdot O$

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (25)$$

Consideramos também uma matriz triangular $\tilde{T}$, tal que $\tilde{T} = O^{-1}\tilde{J}$.

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_{1,1} & \tilde{J}_{1,2} \\ \tilde{J}_{2,1} & \tilde{J}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{1,1} & \tilde{T}_{1,2} \\ 0 & \tilde{T}_{2,2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Assim, resolvendo essa multiplicação de matrizes:

$$\begin{cases} \tilde{T}_{1,1} = \tilde{J}_{1,1} \cos \beta + \sin \beta \tilde{J}_{2,1} \\ \tilde{T}_{1,2} = \tilde{J}_{1,2} \cos \beta + \sin \beta \tilde{J}_{2,2} \\ 0 = -\tilde{J}_{1,1} \sin \beta + \cos \beta \tilde{J}_{2,1} \Rightarrow \frac{\tilde{J}_{2,1}}{\tilde{J}_{1,1}} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \tan \beta \\ \tilde{T}_{2,2} = -\tilde{J}_{1,2} \sin \beta + \cos \beta \tilde{J}_{2,2} \end{cases} \quad (27)$$

A matriz jacobiana do nosso mapa é:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = 1 - a[[-b \cos(2\pi x_n)2\pi - b \cos(\eta 2\pi x_n)\eta 2\pi[(1-\gamma)y_n - b \sin(2\pi x_n) \\ -b \cos(\eta 2\pi x_n) - r_2] + [(1-\gamma)y_n - b \sin(2\pi x_n) - b \sin(\eta 2\pi x_n) - r_1][-b \cos(\eta 2\pi x_n)\eta 2\pi \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = -a(1-\gamma)[2(1-\gamma)y_n - 2b \sin(2\pi x_n) - 2b \sin(\eta 2\pi x_n - r_1 - r_2) \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} = -b \cos(2\pi x_n)2\pi - b \cos(\eta 2\pi x_n)\eta 2\pi \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = (1-\gamma) \end{cases} \quad (29)$$

Dessa forma, conseguimos substituir os valores das matrizes genéricas pelos valores de nossa matriz jacobiana para realizar os cálculos dos expoentes de Lyapunov, que são utilizados para analisar sistemas caóticos, onde é possível descrever se uma dada órbita no sistema é periódica, quase periódica, ponto de bifurcação ou caótica. A análise dos expoentes de Lyapunov máximos (λ_{max}) foi feita fixando os valores da posição da *shearless* com variação dos parâmetros (b, γ) quando temos a *shearless* oriunda da junção das três curvas.

As análises anteriores realizadas com variação dos parâmetros a, b e γ foram importantes para entendermos como o sistema evolui. Ao longo das variações apresentamos o comportamento das curvas *shearless* no sistema *não - twist*.

Deixamos como valores fixos $a = 0.1, r_1 = 0.2 = -r_2, \eta = 3, x_0$ e y_0 com os valores que correspondem a última curva *shearless*, que se tornou um potente atrator oriundo da

junção das três curvas *shearless*. Fizemos um diagrama com os parâmetros (b, γ) , divididos em uma grade 1000x1000.

Neste momento o que queremos é avaliar a curva *shearless* na tentativa de compreender como ela se comporta com a mudança dos parâmetros de perturbação e dissipação e se seu comportamento é similar ao apresentado em (CARVALHO; ABUD, 2015).

A figura 10 é o diagrama de Lyapunov para a órbita referente à curva *shearless*. A paleta de cores representa os valores dos expoentes máximos de Lyapunov (λ_{max}) que variam entre $[-0.005:0.035]$. As cores da paleta começam das neutras para as coloridas: se a órbita é periódica ou quase periódica, temos cores cinza e preta; se a órbita for caótica, coloridas. Quanto mais próxima da cor violeta mais caótica é a órbita.

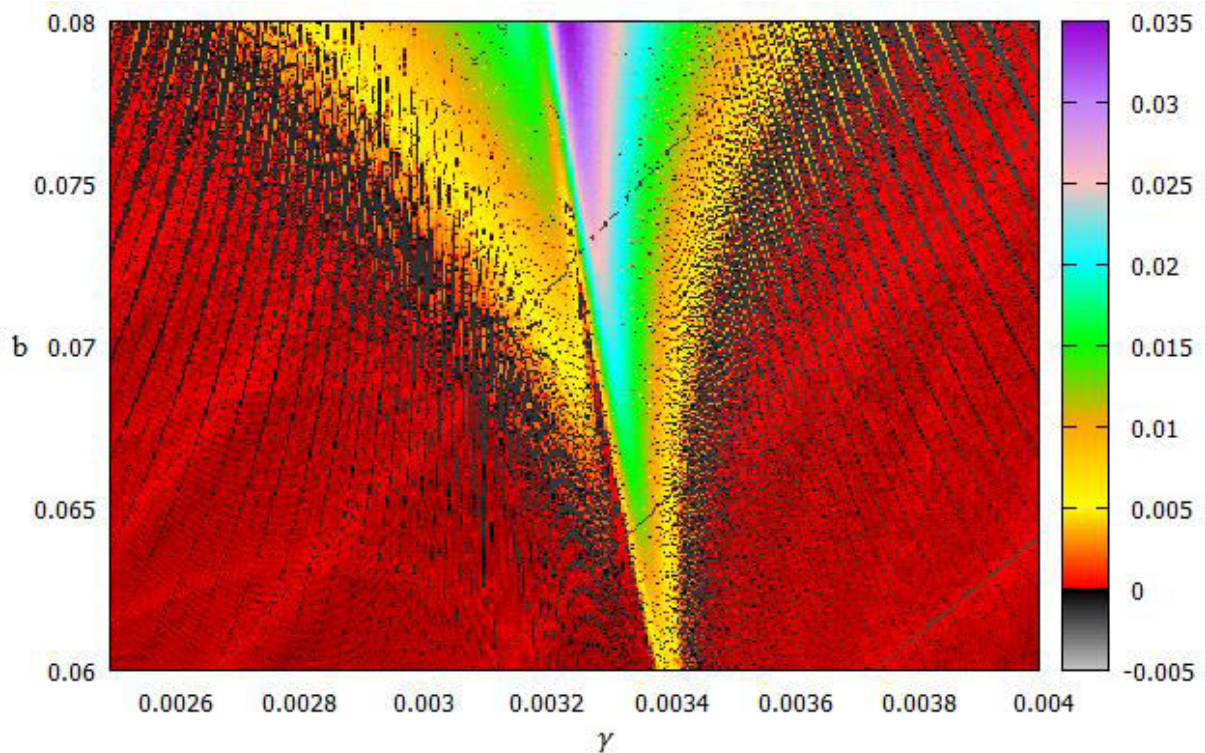


Figura 10 - Diagrama de Lyapunov

Quando $(\lambda_{max} < 0)$, significa que não existe o atrator *shearless*. Quando temos $(\lambda_{max} = 0)$, estamos olhando para a região preta em que o atrator *shearless* pode ser considerado como quase periódico. Nas regiões de $(\lambda_{max} > 0)$, denominamos o atrator *shearless* como caótico.

Quando existe um atrator para o mesmo valor de b , mas para diferentes valores de γ , esse atrator pode se comportar de forma caótica e assumir alguns comportamentos periódicos,

já que no diagrama aparecem as cores preto e cinza entre as outras cores, sendo que o predominante para esses valores escolhidos são momentos em que a órbita assume valores caóticos. O comportamento da curva *shearless* para esses parâmetros é similar ao apresentado em (CARVALHO; ABUD, 2015). Os valores dos expoentes máximos apresentados aqui apresentam valores estáveis menores, mas ainda temos a presença de estabilidade meio ao caos.

Capítulo 4

Conclusão

Para o “mapa padrão *não - twist* labiríntico dissipativo”, podemos ter a formação de três curvas *shearless* quando utilizamos $\eta=3$, parâmetro que permite a criação de curvas *shearless* e induz bifurcações sela – nó dentro das ilhas ressonantes no sistema, cujo a quantidade de pares de pontos hiperbólicos e elípticos são iguais à η .

As curvas *shearless* sofrem grandes mudanças frente à variação dos parâmetros de perturbação b , dissipação γ e amplitude a . Ao fazermos a variação de b e de a , percebemos que ambas entram em *overlap* no sistema e proporcionam o aparecimento dos toros *shearless*. Numericamente, quando variamos a perturbação b , (nota – se que os valores das perturbações que introduzimos no sistema são pequenos) o sistema apresenta caos. As curvas *shearless* são barreiras de transportes que separam as regiões caóticas existentes no sistema, não permitindo que as trajetórias que ficam entre as *shearless* consigam atravessar para os outros lados.

O parâmetro a modifica a amplitude das ilhas. Quanto maior é o valor de a menor é a amplitude das ilhas ressonantes, essa mudança permite que haja também *overlap* das mesmas.

Assim, entendemos que é necessária uma escolha adequada desses parâmetros para que seja possível ver no sistema a formação das curvas *shearless*, pois essa variação permite ver a criação e a destruição dos pontos fixos e a troca de variedades. Dessa forma, encerramos as análises realizadas para o sistema com $\gamma = 0$ presentes neste trabalho.

Com a introdução de dissipação no sistema *não – twist* temos com valores pequenos de dissipação a presença de três atratores *shearless* que evoluíram das curvas *shearless* no regime não dissipativo. A curiosidade é que ao aumentarmos os valores da dissipação, os atratores começam a se sobrepor até um ponto em que se tornam um único atrator que parece com um do tipo ciclo limite, mas não é. Um atrator do tipo ciclo limite é definido geralmente como um conjunto invariante que corresponde a uma órbita isolada, que circunda um ponto fixo. O atrator *shearless* é uma órbita periódica aberta e não circunda os pontos fixos apresentados no sistema; sua vizinhança pode viajar em sua direção como para os outros atratores pontuais. A bacia de atração nos mostra os caminhos que as condições iniciais podem fazer no espaço. O que notamos foi que as condições que são atraídas pelo atrator *shearless* podem vir de qualquer parte do espaço, mas as condições que vão para os atratores

pontuais são divididas pela *shearless*. As condições que vêm da parte de baixo vão para os atratores que estão localizados mais abaixo na parte negativa da bacia. As condições que são dadas na parte de cima vão para os atratores que estão em uma posição mais acima, na parte positiva.

O ponto mais relevante deste trabalho foi o mecanismo desenvolvido para evidenciar os quatro valores de dissipação pequenos o suficiente, onde conseguimos ver no espaço de fase os três atratores *shearless* se tornando apenas um. Sua robustez é composta pela junção dos três, fazendo com que esse atrator sobrevivente resista durante um tempo considerável no sistema *não - twist*. O que conseguimos numericamente é o atrator apresentado em (CARVALHO; ABUD, 2015), que é na verdade é a junção das três curvas *shearless* que foram apresentadas aqui.

Com o diagrama de Lyapunov conseguimos avaliar um pouco as características desse novo atrator. Conseguimos entender que é possível que para o mesmo valor de b , mas para valores diferentes de γ , a curva *shearless* pode se modificar entre o regime periódico e caótico, mesmo tendo como predominantemente valores caóticos de expoentes de Lyapunov.

Existem muitas outras análises que podem ser feitas no sistema *não - twist* apresentado aqui. Nessas essas análises escolhemos deixar como valor fixo da amplitude, $a=0.1$, mas ao longo do estudo conseguimos mostrar que a mudança deste parâmetro também pode ocasionar *overlaps* no sistema. O mapa estudado é o mesmo presente em (CARVALHO; ABUD, 2015), com modificações nos valores dos parâmetros a , b e γ para encontrarmos um conjunto em que fosse possível a existência de três curvas *shearless*. A curva *shearless* que é apresentada em (CARVALHO; ABUD, 2015) evolui para um atrator no regime dissipativo e sua durabilidade e robustez são diferentes das curvas *shearless* que obtemos numericamente para o mesmo “mapa padrão *não - twist* labiríntico dissipativo”, com valores de parâmetros de a , b e γ diferentes. O que nos leva a deduzir que a mudança desses valores também influencia na robustez das curvas *shearless* e sua durabilidade no sistema ao longo do regime dissipativo.

Ainda existem análises que podem ser feitas a respeito dos dados apresentados neste trabalho. Uma delas seria tentar modificar e encontrar outro conjunto de parâmetros a , b e γ na tentativa de compreender realmente se existe uma diferença em relação à robustez das curvas *shearless* que pode estar relacionada com a variação dos parâmetros do sistema.

A contribuição deste trabalho é em relação a ajudar a compreender as características das curvas *shearless* que pode vir a auxiliar nos estudos referentes a sistemas hamiltonianos que lidam com confinamento de plasma, fluxos em dinâmica de fluídos e ondas de derivas.

Referências

ABUD, C. V.; **Transporte em sistemas hamiltonianos não-twist**. 90 f. Dissertação de Doutorado – departamento de física aplicada, Universidade de São Paulo. Instituto de Física, São Paulo, 2013.

ABUD, C. V; CARVALHO, R. E. **Robust attractor of non-twist systems**. Journal Physica A, [s.l.], V. 440, 42-48, ago. 2015.

BRACHTENDORF, H. G, L. et al. **Homotopy Method for Finding the Steady States of Oscillators** [s.l.:s.n], V.33, No.3, Jun. 2014, 867-878. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/262417439_Homotopy_Method_for_Finding_the_Steady_States_of_Oscillators>. Acesso em: Jun. 14.

MARTINS, C.G.L; CARVALHO, R. E; CALDAS, I.L; ROBERTO, M. **Labyrinthic standard non-twist map**. Journal Physica A, [s.l.], V. 44, 1-9, dez. 2011.

SIMÓ, C. **Invariant curves of analytic perturbed nontwist area preserving maps**. R&C, [s.l.], V.3, 180, 1998.

FERRARA, N.F; PRADO, C. C.C., **Caos: uma introdução**. São Paulo: Ed. Edgar Blücher, 1995.

FONSECA, J. C. D.; **Barreiras de Transporte em Plasmas e Mapas Simpléticos Não-Twist**. 70f. Tese de Mestrado – departamento de física aplicada Universidade de São Paulo. Instituto de Física, São Paulo, 2011.

HORSTMANN, A. C.C; ALBUQUERQUE, H. A.; MANCHEIN, C. **Estudo numérico do Mapa Padrão Dissipativo Relativístico**. Departamento de física. Universidade de Santa Catarina. Joinville. [s.l.:s.n], 2000.

ECKMANN, J. P; RUELLE, D. **Ergodic theory of chaos and strange attractors**. Reviews of Modern Physics, [s.l.], V. 57, 617, Jul. 1985.

KRISHANAVEDALA; [s.l.], Abr. 2014. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus_cycles.svg>. Acessado em: Fev. 2017.

MONTEIRO, L. H. A.; **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
OYARZABAL, R.S.; L. et al. **Transient chaotic transport in dissipative drift motion**. Physics Letters A, V. 380, 1621-1626, Mar. 2016.

OYARZABAL, R. S; L. et al. **Efeito de um termo dissipativo no sistema hamiltoniano de**

ondas de deriva. Revista Brasileira de Ensino de Física, [s.l.], v. 37, n. 2, 2308, Jun. 2015.
 PORTELA, J. S. E.; **Descrição dos Campos Magnéticos em Tokamaks por mapas hamiltonianos.** 147 f. Dissertação de Doutorado – departamento de física aplicada, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

SAVI, M. A.; **Dinâmica não-linear e caos.** Rio de Janeiro: E-papers, 2006.

STROGATZ, S. H., **Nonlinear dynamics and chaos.** Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Bibliografia Consultada:

MATHIAS, C. L. et al. **Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves.** Journal Physica A, [s.l.], V. 469, 681-694, Nov. 2016.

CUNHA, R. D., **Programação Científica em FORTRAN 95.** Porto Alegre. Ed. do Autor, 2011.

LICHTENBERG, A. J; LIEBERMAN, M.A. **Regular and Stochastic Motion. V. 38,** Nova York: Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1983.

MARTINS, C. G. L. **Controle de Dinâmica Caótica com Toros Robustos.** 94f. Tese de Mestrado – física aplicada, Instituto de Geociência e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 2010.

PEREIRA, R. C.; **Uma Introdução às Aplicações do tipo Twist.** 71 f. Tese de mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

TROTTA, L. D. S.; **Manual simplificado para iniciantes.** Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2014.