

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**AJUSTE DE MODELOS ESTRUTURAIS APLICADO EM
PROBLEMA DE CONTATO**

ANDRÉ MENDES GARCIA

Orientador: Prof. Dr. João Antônio Pereira

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Julho de Mesquita Filho", como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Ilha Solteira – SP

Outubro de 2006

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Ajuste de Modelos Estruturais Aplicado em Problema de Contato

AUTOR: ANDRÉ MENDES GARCIA

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOÃO ANTONIO PEREIRA

Aprovada com parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. JOÃO ANTONIO PEREIRA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira

Prof. Dr. AMARILDO TABONE PASCHOALINI

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira

Prof. Dr. HERALDO NÉLIO CAMBRAIA

Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Federal do Paraná

Data da realização: 31 de outubro de 2006.



Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. JOÃO ANTONIO PEREIRA

Dedico este trabalho

Aos meus pais Arlindo Mendes Garcia e Maria Corveloni Garcia que sempre me incentivaram na realização deste trabalho e que sempre acreditaram em minha capacidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me dar a vida, abençoar meus pensamentos e atitudes, e por permitir concluir um curso de mestrado nesta excelente e respeitada instituição de ensino.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Antônio Pereira, por acreditar em meu trabalho, pela excelente orientação, dedicação, paciência e pela amizade construída durante a realização deste trabalho.

Em especial à minha Mãe Maria Corveloni Garcia, que sempre rezou por mim e que sempre me apoiou.

À minha Noiva Joana Darc Borro, que sempre esteve ao meu lado incentivando com muito amor e paciência.

RESUMO

GARCIA, A. M., **Ajuste de Modelos Estruturais Aplicado em Problema de Contato**, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, 2006, 113p. Dissertação de Mestrado.

O presente trabalho propõe uma metodologia de ajuste de modelos de elementos finitos aplicado a problemas de contato. O ajuste do modelo é realizado através da atualização dos parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo bem como dos parâmetros dos elementos de contato. O método utilizado é baseado nas FRF(s) e é formulado a partir de um resíduo de entrada, dado pelo balanço de força do sistema. Um *software* é implementado para fazer a comparação e correlação dos modelos analítico e experimental, e se necessário, ajustar os parâmetros do modelo analítico. O modelo analítico é gerado pelo *software* comercial ANSYS®, e os dados experimentais são obtidos em testes experimentais de análise modal. A metodologia foi avaliada com exemplos numéricos e testes experimentais buscando identificar as potencialidades e limitações do método. Dois testes experimentais foram realizados. O primeiro teste consiste em obter os parâmetros modais de uma estrutura simples do tipo viga. No segundo teste, os parâmetros modais são obtidos de uma estrutura composta por duas peças em contato. O objetivo do primeiro teste é avaliar a potencialidade da metodologia proposta utilizando uma base de dados experimental confiável, já que a estrutura é simples e suas propriedades são bem conhecidas. O segundo teste tem por objetivo avaliar a metodologia para o problema de contato. Os resultados apresentados mostram a funcionalidade da metodologia. O ajuste foi realizado com êxito tanto para a estrutura simples como para a estrutura composta por duas peças em contato.

Palavras-chave: Análise Modal, Elementos Finitos, Ajuste de Modelos, Problemas de Contato.

ABSTRACT

GARCIA, A. M., **A FRF-based Model Updating Applied to Contact Problem**, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, 2006, 113p. Dissertação de Mestrado.

The present work proposes a finite element model updating methodology applied to problems of contact. The updating of the models is accomplished through the updating of the physical and/or geometric parameters of the model as well as the parameters of the contact elements. The approach is a FRF-based method; it is formulated from input residue, given by the equilibrium force of the system. It is implemented a *software* to makes the comparison and correlation of the analytical and experimental models, and if necessary, to adjust the parameters of the analytic model based in the experimental data, in order to get a more reliable finite element model. The analytical model is created by the commercial *software* ANSYS[®], and the experimental data are obtained by experimental modal tests. The methodology was evaluated with numeric and experimental data aiming at identifying of the potentialities and limitations of the method. Two experimental tests were developed, the first test consists of the analyses of a beam like structure and the second one, the analysis of a structure composed by two pieces in contact. The aim of the first test is to evaluate the potentiality of the methodology using a reliable experimental base of data, since the structure is simple and its properties are very well-known. The second test has for objective to evaluate the methodology for problems of contact. The presented results have shown the functionality of the methodology. The adjustment was accomplished with relative success for the simple structure as well as for the structure composed by two pieces in contact.

Key- words: Modal Analysis, Finite Element, Model Updating, Contact Problems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1: Análise Modal Teórica	27
Figura 3.2: Sistema de 1 grau de liberdade.....	27
Figura 3.3: Típico Cenário de Análise Modal Experimental.....	35
Figura 4.1: Geometria do elemento CONTAC48 (ANSYS, User's Manual)	48
Figura 4.2: Definição de (Campo Próximo) e (Campo Distante) de Contato (ANSYS, User's Manual)	49
Figura 4.3: Nó de contato com 2 potenciais alvos para contato (ANSYS, User's Manual).....	50
Figura 4.4: Pontenciais "Voids" e "Overlaps" na intersecção do contato	50
Figura 4.5: Pseudo Elemento (ANSYS, User's Manual)	50
Figura 4.6 Localização do nó de contato no sistema local de coordenadas	51
Figura 4.7: Exemplo de uma seleção adequada da frequência de ajuste	61
Figura 4.8: Exemplo de uma seleção inadequada da frequência de ajuste	62
Figura 4.9: Fluxograma da metodologia de ajuste de modelos em problemas de contato	64
Figura 5.1: Estrutura do tipo viga simples engastada em uma das extremidades.....	68
Figura 5.2: Viga discretizada	69
Figura 5.3: FRF(s) analítica e pseudo-experimental – Caso 1 Viga Simples	69
Figura 5.4: Sensibilidades do modelo analítico de viga simples	71
Figura 5.5: FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental – Caso 2 Viga Simples.....	72
Figura 5.6: Frequências de ajuste utilizadas na primeira e segunda iteração – Caso 2 Viga Simples	73

Figura 5.7: FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental após 2 iterações de ajuste – Caso 2 Viga Simples.....	74
Figura 5.8: FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental antes e após o ajuste – Caso 3 Viga Simples.....	75
Figura 5.9: Estrutura formada por duas peças em contato.....	76
Figura 5.10: Estrutura formada por duas peças em contato discretizada	77
Figura 5.11: FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental – Caso 1 Vigas em Contato	81
Figura 5.12: Sensibilidade da estrutura com elementos de contato	81
Figura 5.13: FRF(s) dos modelos experimental e analítico antes e depois do ajuste – Caso 2 Vigas em Contato	85
Figura 6.1: Instrumentos utilizados nos experimentos	88
Figura 6.2: Modelo experimental número 1 – Viga simples	89
Figura 6.3: Pontos de medida – Viga simples	90
Figura 6.4: Malha de elementos finitos do modelo de viga simples	91
Figura 6.5: Superposição das FRF(s) experimental e analítica – Viga simples	92
Figura 6.6: Superposição das FRF(s) experimental e analítica após o ajuste – Viga simples.....	93
Figura 6.7: Modelo experimental número 2 – Vigas em contato	94
Figura 6.8: União entre as vigas	94
Figura 6.9: Pontos de medida – Vigas em contato	95
Figura 6.10: Pontos de medição – Vigas em contato.....	95
Figura 6.11: Discretização do modelo analítico contínuo – Vigas em contato	96
Figura 6.12 Superposição das FRF(s) experimental e analítica – modelo contínuo – Vigas em contato.....	97

Figura 6.13: Sensibilidade média do modelo analítico contínuo das vigas em contato	98
Figura 6.14: Superposição das FRF(s) exp. e analítica antes e depois do ajuste – mod. contínuo – Vigas em contato	99
Figura 6.15: Discretização do modelo analítico com elementos de contato – Vigas em contato	101
Figura 6.16: Sensibilidade média do modelo analítico com elementos de contato – Vigas em contato.....	103
Figura 6.17: Superposição das FRF(s) exp. e analítica antes e depois do ajuste – Vigas em contato.....	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Possíveis parâmetros de atualização do modelo de elementos finitos.....	60
Tabela 5.1: Propriedades do material	68
Tabela 5.2: Correlação inicial entre os modelos Pseudo-Experimental e Analítico – Caso 1 Viga Simples	70
Tabela 5.3: Comparação entre os valores dos parâmetros analíticos com o de referência – Caso 1 Viga Simples.....	71
Tabela 5.4: : Correlação inicial entre os modelos Pseudo-Experimental e Analítico – Caso 2 Viga Simples	72
Tabela 5.5: Avanço do processo de ajuste – Caso 2 Viga Simples	74
Tabela 5.6: Avanço do processo de ajuste – Caso 3 Viga Simples	75
Tabela 5.7: Propriedade dos elementos PLAN42 e CONTAC48.....	78
Tabela 5.8 : Propriedades dos elementos PLAN42 e CONTAC48 utilizadas para convergência	79
Tabela 5.9: Propriedades dos elementos PLANE42 e CONTAC48 – Caso 1 Vigas em Contato.	80
Tabela 5.10: Correlação inicial – Caso 1 – Vigas em contato	81
Tabela 5.11: Avanço dos parâmetros de atualização do elemento de contato – Caso 1 Vigas em Contato.....	82
Tabela 5.12: Propriedades dos elementos PLAN42 e CONTAC48 o – Caso 2 Vigas em Contato	83
Tabela 5.13: Correlação Inicial entre os modelos Pseudo-Experimental e Analítico – Caso 2 Vigas em Contato	84
Tabela 5.14: Diferenças de Freqüências antes e depois do ajuste – Caso 2 Vigas em Contato	84
Tabela 6.1: Instrumentos utilizados nos experimentos	88
Tabela 6.2: Propriedades do Material.....	89

Tabela 6.3: Correlação inicial – Viga simples	91
Tabela 6.4: Correlação inicial (mod. analítico alterado) – Viga simples	92
Tabela 6.5: Correlação final (mod. analítico alterado) – Viga simples	93
Tabela 6.6: Correlação inicial – modelo contínuo – Vigas em contato	97
Tabela 6.7: Correlação inicial – comparação entre modelos analíticos – Vigas em contato.....	98
Tabela 6.8: Correlação inicial e final – modelo contínuo – Vigas em contato.....	99
Tabela 6.9: Valores iniciais e ajustados dos parâmetros – modelo contínuo – Vigas em contato	100
Tabela 6.10: Propriedade dos elementos utilizados.....	102
Tabela 6.11: Correlação inicial – Vigas em contato	102
Tabela 6.12: Correlação final – Vigas em contato	104

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Lista de Símbolos

K	Rigidez
KN	Rigidez normal de contato
KT	Rigidez tangencial de contato
m	Número de modos
M	Massa
N	Número de graus de liberdade
S	Variável de Laplace
$[C]$	Matriz de amortecimento
$\{f(t)\}$	Vetor força
$\{F\}$	Vetor de amplitude de força
$[h(t)]$	Matriz das funções de reposta ao impulso
$[H(s)]$	Matriz de transferência
$[H(i\omega)]$	Matriz das funções de resposta em frequência
$[I]$	Matriz identidade
$[K]$	Matriz de rigidez
$[M]$	Matriz de massa
$[m]$	Matriz de massa modal
$[k]$	Matriz de rigidez modal
$\{p\}$	Vetor dos parâmetros de atualização
$[S]$	Matriz de sensibilidade
$\{x(t)\}$	Vetor deslocamento
$\{X\}$	Vetor de amplitude do movimento
$\{\ddot{x}(t)\}$	Vetor aceleração
$[Z]$	Matriz de rigidez dinâmica
l	Autovalores
w	Frequência
w_n	Frequência natural

$\{e\}$	Vetor resíduo
$\{f\}$	Vetor modal normalizado em relação à massa
$[f]$	Matriz modal normalizado em relação à massa
$\{y\}$	Vetor modal
$[y]$	Matriz modal

Abreviaturas

DLL	Biblioteca de ligação dinâmica
FRF	Função de resposta em frequência
FRI	Função de resposta ao impulso
MAC	Coeficiente de correlação modal
OOP	Programação orientada a objetos

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 : INTRODUÇÃO	16
1.1 – Organização do Trabalho	17
 CAPÍTULO 2 : REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
 CAPÍTULO 3 : ASPECTOS TEÓRICOS	25
3.1 – Análise Modal.....	25
3.1.1 – Análise Modal Teórica	26
3.1.1.1 – Sistemas com Um Grau de Liberdade	27
3.1.1.2 – Sistemas com N Graus de Liberdade	29
3.1.2 – Análise Modal Experimental.....	34
3.2 – Comparação e Correlação de Modelos	38
3.2.1 – Incompatibilidade entre Modelos	39
3.2.2 – Redução Estática ou de Guyan.....	40
3.2.3 – Redução Dinâmica	41
3.2.4 – Correlação de Modelos	42
 CAPÍTULO 4 : AJUSTE DE MODELOS EM PROBLEMAS DE CONTATO.....	45
4.1 – Formulação do Elemento de Contato	46
4.2 – O Elemento CONTAC48 do ANSYS	47
4.2.1 – Cinemática de Contato.....	48
4.2.1.1 – Definição de Contato e Alvo	48
4.2.1.2 – Algoritmo de “PINBALL”.....	49
4.2.1.3 – Pseudo Elemento	49
4.2.1.4 – Intervalo (GAP) de Contato e Projeção	51
4.2.2 – Forças de Contato	52
4.2.2.1 – Força Normal.....	52
4.2.2.2 – Força Tangencial	53
4.3 – Formulação do Ajuste de Modelos Baseado nas FRF(s).....	55
4.4 – Escolha dos Parâmetros de Atualização	60
4.5 – Seleção das Frequências de Ajuste	61
4.6 – Parâmetros e Características do Elemento de Contato - CONTAC48	62
4.7 – Metodologia	64
4.8 – Considerações Finais	66

CAPÍTULO 5 : SIMULAÇÃO NUMÉRICA.....	67
5.1 – Ajuste de Modelo Não Envolvendo Contato	68
5.2 – Ajuste de Modelo Envolvendo Contato	76
5.2.1 – Estrutura Formada por Duas Peças em Contato	76
5.2.2 – Análise Estática do Problema de Contato.....	78
5.2.3 – Ajuste de Modelos	79
5.3 – Conclusões.....	85
 CAPÍTULO 6 : RESULTADOS EXPERIMENTAIS	 87
6.1 – Testes Experimentais	87
6.2 – Modelo Experimental Número 1 – Viga Simples.....	89
6.2.1 – Comparação e Ajuste do Modelo	90
6.3 – Modelo Experimental Número 2 – Vigas em Contato.....	94
6.3.1 – Comparação e Ajuste do Modelo	96
6.3.1.1 – Modelo Contínuo	96
6.3.1.2 – Modelo com Elementos de Contato.....	100
 CAPÍTULO 7 : CONCLUSÕES	 106
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 108

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Os problemas de contato são de grande importância em vários ramos da engenharia como conformação de metais, resistência ao impacto, transmissão de forças em ligações, etc. Em consequência disto, muita pesquisa tem sido feita no âmbito da formulação de métodos que descrevem o comportamento do contato entre dois corpos. Esses problemas são de natureza não linear devido a diferentes causas, tais como plasticidade do material, grande deslocamentos, grandes rotações, deformações não-infinitesimais e os efeitos derivados do contato e atrito entre os corpos em contato. Em geral, a solução analítica do problema de contato, torna-se muito difícil e soluções numéricas, utilizando o método de elementos finitos têm sido propostas e incorporadas aos pacotes de *softwares* CAE (Computer Aided Engineer – Engenharia Auxiliada por Computador).

O desenvolvimento de projetos, através do método de elementos finitos (FEM), devido à sua rapidez e baixo custo, vem sendo cada vez mais utilizado nas várias áreas da engenharia. A obtenção de modelos representativos ainda não é uma tarefa simples, ela demanda o conhecimento das ferramentas utilizadas e suas limitações, além é claro, de um analista bem formado e apto a analisar e interpretar os resultados com base no problema real. Melhorar e aprimorar a representação dos modelos simulados é ainda uma necessidade, pois os modelos de elementos finitos são modelos idealizados e em certos casos as propriedades dos elementos que simule, por exemplo, juntas, conexões, o contato entre corpos, são difíceis de serem estimadas. A utilização de elementos de contato ainda não está consolidada se comparada com outros tipos de elementos, pois sua formulação é muito complexa e os resultados, dada a própria natureza do contato, demandam uma maior atenção, visando obter uma boa representação do modelo. Uma das formas de melhorar a representatividade dos modelos é correlacionar o modelo analítico com dados experimentais e posteriormente localizar as discrepâncias e ajustar o modelo. Conseqüentemente estudar o ajuste de modelos utilizando elementos de contato é uma área bastante atraente para pesquisa.

O principal objetivo do presente trabalho é discutir a modelagem através do método de elementos finitos de estruturas envolvendo o contato entre peças, comparar os resultados com dados experimentais, e com base nos resultados, propor e implementar uma metodologia de ajuste dos parâmetros do contato. Uma metodologia de ajuste de modelos, baseada nas Funções de Resposta em Frequências dos modelos, será definida em que os modelos serão comparados, correlacionados e posteriormente o modelo de elementos finitos utilizando elementos de contato, aqui denominado modelo analítico, será ajustado.

Para tanto, os parâmetros dos elementos de contato serão atualizados de forma iterativa utilizando um algoritmo de ajuste e o modelo de elementos finitos será comparado com o experimental utilizando técnicas de correlação. O modelo de elementos finitos utilizando elementos de contato será obtido a partir do *software* comercial ANSYS®, e um *software* será codificado para fazer a interação entre os resultados do modelo analítico com os dados do modelo experimental, correlacionar os modelos e finalmente ajustar os parâmetros do modelo analítico. Inicialmente o ajuste de modelos envolvendo a situação de contato será aplicado em modelos utilizando dados simulados para a familiarização e validação da proposta, visto que, a utilização de dados simulados permite estabelecer uma base de dados de comparação exata, o que seria fundamental na fase de validação do código. Por fim, um experimento científico será apresentado com o objetivo de avaliar a metodologia proposta para o ajuste de uma estrutura real de laboratório utilizando dados experimentais.

1.1 – Organização do Trabalho

O presente trabalho está organizado em 7 capítulos de forma a facilitar seu entendimento. De uma forma geral a estrutura do trabalho preocupa-se em descrever uma revisão bibliográfica com notas históricas e trabalhos sobre o assunto, apresentar aspectos teóricos e suas formulações pertinentes, para melhor compreensão da metodologia proposta, apresentar uma metodologia de ajuste de modelos em problemas de contato, realizar o ajuste de modelos utilizando dados simulados, e por fim, proceder o ajuste de modelos utilizando dados experimentais obtidos em laboratório. Assim, segue a organização básica deste trabalho:

- **Capítulo 2**

Uma revisão bibliográfica é realizada abordando o problema de contato e a evolução da pesquisa em relação ao ajuste de modelos;

- **Capítulo 3**

No capítulo 3 são apresentados os aspectos teóricos necessários para a compreensão da metodologia de ajuste proposta;

- **Capítulo 4**

O ajuste de modelos envolvendo problemas de contato é o foco deste capítulo. Uma breve discussão sobre a formulação e características do elemento de contato CONTAC48 do *software* ANSYS são apresentadas junto com a formulação de ajuste de modelos baseada nas Funções de Resposta em Frequências – FRF(s). Alguns aspectos importantes no ajuste de modelos, como a escolha dos parâmetros de atualização e frequências de ajuste, também são descritos. Por fim é apresentada a metodologia para o ajuste de modelos em problemas de contato;

- **Capítulo 5**

No capítulo 5 o ajuste de modelos é realizado em vários casos utilizando dados simulados. Os dados simulados fornecem uma base de dados confiável para a avaliação prévia da metodologia e teste da rotina de ajuste implementada;

- **Capítulo 6**

O capítulo 6 apresenta os testes experimentais. O ajuste de modelo é realizado utilizando dados medidos diretamente em estruturas reais;

- **Capítulo 7**

Por fim, neste capítulo, as conclusões são apresentadas e sugestões para trabalhos futuros;

- **Referências Bibliográficas**

Contêm as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho;

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão da literatura que segue, expõe uma breve discussão sobre problemas de contato destacando vários artigos publicados sobre o assunto. A literatura mostra que existe uma variada gama de trabalhos a respeito do desenvolvimento de formulações e algoritmos para a solução do problema, porém, ainda existem vários aspectos a se explorar nesta área. Um aspecto ainda não discutido amplamente é o processo de ajuste de modelos envolvendo o problema de contato, que será objeto de estudo deste trabalho.

O tratamento do problema de contato, historicamente originou-se com o trabalho de Heinrich Hertz (1882), que estudou o problema considerando pequenas deformações elásticas sem atrito. A partir daí o problema de contato passou a ser objeto de pesquisa.

A análise desses problemas pode ser tratada a partir de modelos teóricos, testes experimentais e/ou simulações numéricas. As soluções utilizando modelos teóricos encontram grandes limitações, devido às complexidades físicas, geométricas e não-linearidade. A utilização de análises experimentais pode levar a resultados mais realísticos, entretanto apresenta grande desvantagem, pois demanda muito tempo para efetuar um grande número de ensaios e um alto investimento financeiro para a montagem dos experimentos. Com o avanço da computação, as simulações numéricas para tratar o problema de contato vêm sendo amplamente utilizadas, pois possuem a vantagem de permitir uma série de testes de uma estrutura a um custo relativamente baixo.

O problema de contato é de difícil solução, pois envolve a determinação de diversos parâmetros, como rigidez da superfície de contato, penetração e atrito entre os corpos. Além disso, como é um problema que está relacionado com alterações nas restrições ou vinculação da estrutura, apresenta forte não-linearidade.

O método de elementos finitos (FEM) é atualmente um dos métodos numéricos mais utilizado na solução de problemas de contato, várias formulações e algoritmos, envolvendo o método de elementos finitos para tratar o problema de contato são encontrados (NETO, 2002). Porém, essa área ainda merece atenção especial, pois novas idéias ainda se fazem necessárias.

O artigo de HUGHES et al. (1976) é um marco em termos numéricos aplicados na solução de problemas de contato, pois contribuiu para o desenvolvimento de aproximações em elementos finitos, utilizando multiplicadores de Lagrange. A partir deste trabalho várias propostas para formulações e algoritmos para resolver problemas de contato têm sido discutidas. BATHE & CHAUDHARY (1985), apresentaram uma formulação para tratar problemas bidimensionais de contato com grandes deformações envolvendo atrito, utilizando multiplicadores de Lagrange. PARISCH (1989), propõe uma formulação para a obtenção de uma matriz de rigidez tangencial para problemas de contato não linear, conceito este que contribuiu para a implementação do elemento de contato CONTAC48 do *software* ANSYS. Com relação ao atrito, a maioria das formulações para problemas de contato era baseada na clássica lei de atrito de Coulomb. No início dos anos noventa WRIGGERS et al. (1990), definiu uma nova formulação para problemas de contato com atrito, com base em uma nova lei de atrito com regras não associativas de deslizamento.

Usualmente, no contexto do método de elementos finitos, o contato não plano é descrito em termos de coordenadas nodais. Por exemplo, na simulação do contato entre dois sólidos, define-se que os nós do elemento finito de um sólido podem não penetrar no segundo sólido. CESCOTTO & CHARLIER (1993) apresentam em seu artigo, uma solução alternativa para este problema, na qual a tensão de contato e os deslocamentos no contorno de um sólido são discretizados independentemente, através do princípio variacional.

Um aspecto importante na solução do problema de contato é a natureza não-linear e iterativa do problema. O método de Newton é geralmente utilizado para resolver problemas de contato, devido ao problema ser de característica não linear. Quando muitas mudanças das condições de contato ocorrem durante os passos de carga, os algoritmos da família Newton Raphson podem não convergir. No artigo de CHAMORET et al. (2002), é definido um algoritmo de ajuste automático dos passos de carga no qual o principal objetivo é limitar o número de mudanças das condições de contato no processo de solução. Ainda neste artigo, o algoritmo foi

implementando utilizando o método de elementos finitos e os resultados se mostraram satisfatórios, exceto quando, inicialmente define-se um valor muito alto ou muito baixo, comparado ao problema, para o passo de carga, onde a solução do problema pode não convergir ou exigir um custo computacional muito grande.

A solução e simulação desses problemas, utilizando o método de elementos finitos, exige um poder de processamento dos computadores muito elevado em determinadas situações. No artigo de XU et al. (2004) é definido um algoritmo para processamento paralelo, da análise implícita transiente não linear em problemas de contato. Através de exemplos simulados, foi possível observar que o tempo de processamento para a resolução do problema, utilizando 50 processadores, diminuiu 93% em relação à resolução do mesmo problema por apenas um processador.

De uma forma geral, nota-se que existe na literatura uma considerável quantidade de trabalhos a respeito do desenvolvimento de formulações e algoritmos para a solução de problemas de contato. Entretanto observa-se que a maioria dos trabalhos aborda o problema de contato sob o ponto de vista estático. Os trabalhos de ARATO & PEREIRA (1990) e ARATO et al. (1991) discute uma metodologia que permite a obtenção da matriz de rigidez global de estruturas aparafusadas, levando em conta os efeitos da união aparafusada no cálculo das frequências naturais.

O modelo de elementos finitos de contato é um modelo aproximado, devido à sua formulação complexa e de natureza não-linear, e os resultados, dada a própria natureza do problema, demandam uma maior atenção. Visando a obtenção de um modelo representativo, o ajuste de modelo pode melhorar sua representatividade. Neste levantamento bibliográfico não foi encontrado nenhum trabalho de ajuste envolvendo o problema de contato, que é um dos objetivos deste trabalho. Portanto, procurou-se obter também alguns aspectos de interesse com relação ao processo de ajuste de modelos.

A literatura mostra que há uma grande variedade de formulações e técnicas para a comparação e ajuste de modelos. Essas técnicas são baseadas na interação dos dados resultantes do modelo analítico de elementos finitos com dados obtidos em testes experimentais. As primeiras tentativas de interação de dados obtidos experimentalmente com dados resultantes do

modelo de elementos finitos surgiram na década de 70 (BERMAN & FLANNELLY, 1971; BARUCH, 1978) e é amplamente estudada até os tempos atuais (FRISWELL & MOTTERSHEAD, 1998; GARCIA, 2001; OBERKANPF, 2001; HANSON & HERNEZ, 2001).

Verifica-se que várias formulações e propostas para a comparação e ajuste de modelo têm sido discutidas (TLUSTY & ISMAIL, 1980; LEURIDAN et al., 1986; HEYLEN, 1987; LARSSON & SAS, 1992; ARRUDA et al., 1993; LIN & EWINS, 1994; FRISWELL & MOTTERSHEAD, 1995; PEREIRA, 1996). Tentativas de incorporação das técnicas de atualização de modelo em ferramentas matemáticas de análise estrutural de sistemas mecânicos vêm sendo investigadas (REYNOLDS et al., 1998; BRUGHMANS et al., 1998) e algumas aplicações práticas na indústria podem ser encontradas em SCHAAK (1998) e GÖGE (2003).

Os primeiros métodos de ajuste propostos, alteravam os elementos das matrizes de massa e rigidez dos modelos. Estes métodos baseavam-se na minimização de uma função linear dos parâmetros do sistema sujeitas a restrições exatas. Isto permite encontrar equações exatas para o ajuste, sendo assim, estes métodos ficaram conhecidos como métodos diretos. Outros métodos diretos utilizando multiplicadores de Lagrange também foram propostos (BERMAN & FLANNLEY, 1971; BARUSH, 1978). As principais vantagens dos métodos diretos é que o modelo é reproduzido de forma exata e o processo de ajuste não apresenta problemas de convergência. Como desvantagens, pode-se citar a falta de significado físico para o modelo ajustado e não haver garantias de que as matrizes de massa e rigidez sejam positivo definidas.

Os métodos atuais propõem o ajuste do modelo de elementos finitos baseados nas propriedades físicas e/ou geométricas dos elementos do modelo, isto permite dar uma justificativa física ao ajuste do modelo inicial (LAMMENS, 1995; FRISWELL & MOTTERSHEAD, 1995; PEREIRA, 1996). Estes métodos consistem, na maioria das vezes, na utilização de processos de otimização, utilizando por exemplo mínimos quadrados, para minimizar uma função objetiva ou um resíduo dos modelos (FRISWELL & MOTTERSHEAD, 1995; LINK, 2001; JONES & TURCOTTE, 2002). Como vantagens desses métodos, pode-se citar que, permitem a escolha de uma larga faixa de parâmetros de ajuste e possibilitam a inclusão de matrizes de ponderação, onde são atribuídos pesos tanto para os dados medidos quanto para a estimativa inicial dos parâmetros do modelo analítico, o que permite enriquecer o processo, acomodando assim a visão de um analista experiente. Dentre as principais

desvantagens pode-se citar o fato de as funções objetivas não serem funções lineares dos parâmetros, tornando necessário o uso de processos iterativos que podem levar a problemas de convergência.

O método de ajuste baseado nas FRF(s) (Funções de Resposta em Frequências) é atualmente muito pesquisado e utilizado. Sua grande vantagem é que lida diretamente com os dados medidos, ao invés de estimar os parâmetros modais. Assim elimina-se uma etapa do processo que pode ser uma fonte de eventuais erros. Uma outra grande vantagem é que disponibiliza uma grande faixa de pontos em frequência e que, geralmente podem levar a uma base de dados mais rica, melhorando as condições de estabilidade do processo de ajuste.

Neste contexto, vale destacar que, alguns autores (FRISWELL & PENNY, 1997), argumentam que o uso direto das FRF(s) no processo de ajuste, ao invés do modelo modal, não traz grandes benefícios. Apesar do uso do modelo modal reduzir o número de pontos de dados, a qualidade e a quantidade de informações são as mesmas, pois as FRF(s) podem ser reconstruídas, de forma a ficarem bem próximas da realidade, a partir do modelo modal, o que geralmente é feito para verificar a qualidade do ajuste da curva. A vantagem do uso do modelo modal seria a possibilidade de verificar a representatividade do modelo analítico através dos parâmetros modais. Já a vantagem do uso das FRF(s) medidas é o fato de que os dados medidos reproduziriam melhor o estado natural da estrutura em estudo, o que pode ser eliminado no processo de ajuste da curva da análise modal, descartando dados importantes na identificação de danos presentes no sistema.

Um outro aspecto importante a ser levado em consideração na modelagem por elementos finitos é a incorporação do efeito do amortecimento. Em DOI & PEREIRA (2005) o ajuste de modelos incorporando o efeito de amortecimento é discutido. Neste trabalho, o ajuste do modelo é realizado primeiramente atualizando os parâmetros físicos e geométricos do modelo e depois o ajuste do amortecimento é realizado.

A representação de estruturas reais por modelos analíticos de elementos finitos, alcançou grande progresso atualmente. Os modelos de elementos finitos são ajustados com considerável acurácia, tendo como base, dados medidos diretamente em estruturas reais. Entretanto, o ajuste de modelos ainda não atingiu sua maturidade, pois ainda se fazem

necessárias pesquisas a respeito de modelos que envolvem formulações complexas, não lineares, como por exemplo, estruturas que envolvam o problema de contato.

Capítulo 3

ASPECTOS TEÓRICOS

O presente capítulo procura descrever os elementos teóricos necessários para melhor compreensão da metodologia proposta neste trabalho. Inicialmente os procedimentos básicos de análise modal são discutidos, ilustrando a análise modal teórica envolvendo sistemas com 1 grau de liberdade e estendendo-se a sistemas com N graus de liberdade, e em seguida uma introdução à análise modal experimental também é apresentada. Geralmente o modelo analítico possui um número de graus de liberdade superior aos pontos de medida em uma estrutura real. Nesses casos, é necessário reduzir o número de graus de liberdade do modelo analítico, de forma que este não perca suas características. Uma outra alternativa é expandir o número de graus de liberdade do modelo experimental. Assim, ainda neste capítulo serão apresentadas algumas técnicas de redução de modelos analíticos. A comparação do modelo analítico com dados experimentais requer utilizar técnicas de comparação e correlação de modelos. Desta forma, algumas destas principais técnicas são discutidas e apresentadas.

3.1 – Análise Modal

Análise Modal é uma ferramenta de engenharia, que permite estudar as características dinâmicas, ou o comportamento dinâmico de estruturas. Conforme discutido em MAIA & SILVA (1997), os primeiros estudos a respeito de análise modal se deram por volta de 1940, onde pesquisas foram feitas para descrever o comportamento dinâmico de aviões. As aplicações de análise modal abrangem uma grande faixa de objetivos, dentre as quais pode-se citar como exemplo as seguintes aplicações:

- Identificação e avaliação de fenômenos de vibrações;
- Desenvolvimento de modelos baseados em experimentos;

- Validação, correção e ajuste de modelos analíticos;
- Avaliação de integridade de estruturas;
- Detecção de falhas estruturais;
- Modificações estruturais;
- Etc....

A análise modal convencional, utilizada para estudar o comportamento dinâmico de estruturas, é sustentada em três hipóteses:

1. **Linearidade do Comportamento Dinâmico:** a resposta da estrutura para alguma combinação de forças aplicadas simultaneamente é equivalente à soma das respostas de cada força atuando individualmente;
2. **Invariável no Tempo:** os parâmetros físicos da estrutura são constantes;
3. **Observável:** a medida da relação entrada/saída contém informações suficientes para determinar o comportamento dinâmico do modelo.

Entende-se por parâmetros modais de uma estrutura suas frequências naturais, modos de vibrar (constantes modais) e razões de amortecimento os quais descrevem o comportamento dinâmico da estrutura. Em análise modal os parâmetros modais de estruturas podem ser obtidos de duas formas:

- Utilizando Análise Modal Teórica;
- Utilizando Análise Modal Experimental.

Com o objetivo de esclarecer os conceitos básicos, utilizados na metodologia proposta do presente trabalho, nos dois sub capítulos que seguem serão apresentados de forma simplificada e objetiva, os aspectos básicos que envolvem a análise modal teórica e experimental.

3.1.1 – Análise Modal Teórica

A análise modal teórica utiliza o método de elementos finitos para obter os parâmetros modais do modelo a partir dos parâmetros espaciais, ou seja, as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento, como ilustra a figura 3.1.

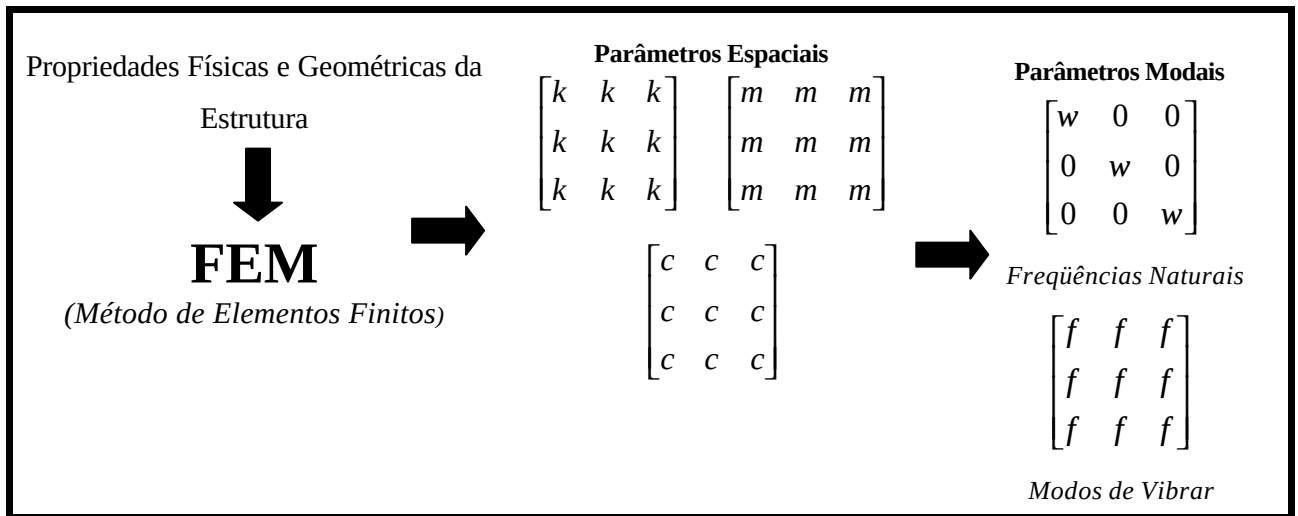


Figura 3.1: Análise Modal Teórica

A forma pela qual os parâmetros modais são extraídos dos parâmetros espaciais pode melhor ser entendida analisando primeiramente um sistema de 1 (um) grau de liberdade.

3.1.1.1 – Sistemas com Um Grau de Liberdade

Considere o sistema de 1 (um) grau de liberdade representado pela figura 3.2.

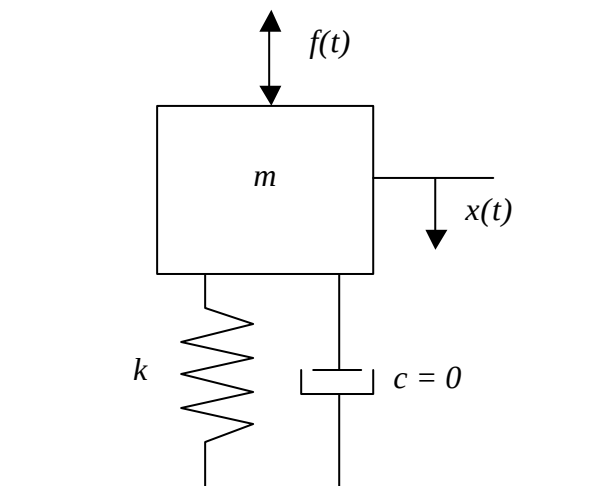


Figura 3.2: Sistema de 1 grau de liberdade

A equação do movimento que rege o sistema de um grau de liberdade da figura 3.2 é da forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (3.1)$$

Na qual:

- m - massa;
- k - rigidez;
- c - constante de amortecimento;
- x - deslocamento;
- $\dot{x}$ - velocidade;
- $\ddot{x}$ - aceleração.

Assumindo-se vibração livre, ou seja, força de excitação nula $f(t) = 0$, e desconsiderando o efeito de amortecimento ($c = 0$) a equação do movimento torna-se:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.2)$$

Assumindo que a solução da equação diferencial homogênea (3.2) é da forma:

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \quad (3.3)$$

Na qual:

- X - é constante;
- i - $\sqrt{-1}$.

Calculando a segunda derivada de $x(t)$, tem-se:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 Xe^{i\omega t} \quad (3.4)$$

Substituindo as equações (3.3) e (3.4) em (3.2), a equação do movimento do sistema torna-se:

$$-\omega^2 Xe^{i\omega t} m + Xe^{i\omega t} k = 0 \quad (3.5)$$

Isolando o termo $Xe^{i\omega t}$ e redefinindo a equação (3.5), tem-se:

$$(k - w^2 m) = 0 \quad (3.6)$$

Da equação (3.6) podemos obter a frequência natural do sistema:

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.7)$$

Considerando agora, uma força de excitação da forma:

$$f(t) = Fe^{iwt} \quad (3.8)$$

Na qual:

F - constante.

Pode-se utilizar a solução de (3.2) dada por (3.3) junto com (3.8) para definir a função de resposta em frequência (FRF) do sistema:

$$(k - w^2 m)Xe^{iwt} = Fe^{iwt} \quad (3.9)$$

A função de resposta em frequência (FRF), também conhecida como *receptância*, de um sistema de um grau de liberdade é denominada $a(w)$, equação (3.10):

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{k - w^2 m} = a(w) \quad (3.10)$$

3.1.1.2 – Sistemas com N Graus de Liberdade

Como discutido anteriormente, na análise modal teórica o método de elementos finitos é utilizado para obter as propriedades espaciais da estrutura, ou seja, as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento (figura 3.1).

A filosofia básica do método de elementos finitos consiste em representar um objeto em estudo, como exemplo um corpo elástico, por um sistema discreto formado por um conjunto de elementos estruturais unidos entre si, através de um número finito de pontos

denominados nós. Um elemento estrutural é definido como uma parte do corpo, e o seu comportamento é estudado a partir do conhecimento dos deslocamentos ou forças nodais deste elemento. O conhecimento do comportamento dos elementos individuais permite representar o comportamento do sistema como um todo. Sendo assim, as matrizes de massa e rigidez globais do corpo em estudo são montadas a partir das matrizes de massa e rigidez estimadas individualmente para cada elemento. Essas matrizes de massa e rigidez globais, que representam o corpo/estrutura como um todo, possuem dimensão $N \times N$, em que N representa o número de graus de liberdade, e conseqüentemente a equação do movimento que rege o sistema terá a seguinte forma matricial:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (3.11)$$

Na qual:

- $\{\ddot{x}(t)\}$ - vetor de aceleração de dimensão $N \times 1$;
- $\{x(t)\}$ - vetor de deslocamentos de dimensão $N \times 1$;
- $[K]$ - matriz de rigidez de dimensão $N \times N$;
- $[M]$ - matriz de massa de dimensão $N \times N$;
- $\{F(t)\}$ - vetor de forças de dimensão $N \times 1$.

Analogamente ao sistema com um grau de liberdade, considerando vibração livre, ou seja, forças de excitação nulas $\{F(t)\} = \{0\}$ e desconsiderando o efeito de amortecimento a solução da equação diferencial homogênea de (3.11) é da seguinte forma:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (3.12)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.11) para a condição livre (forças nulas), leva a um problema de autovalor/autovetor:

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = 0 \quad (3.13)$$

A solução não trivial da equação (3.13) é dada por uma matriz diagonal $[I]$ chamada de autovalores associada a uma outra matriz $[y]$ chamada de autovetores, particularmente, cada elemento I_r está relacionado a um vetor deslocamento $\{y\}_r$. Na dinâmica

estrutural os autovalores são interpretados como frequências naturais $l_r = \omega_r^2$, e os autovetores como modos próprios de vibrar. Desta forma, o problema de autovalor pode ser expresso por:

$$[K]\{y\} = l_r [M]\{y\} \quad (3.14)$$

Na qual:

$$\begin{aligned} l_r = \omega_r^2 & \quad - \text{frequências naturais ao quadrado;} \\ \{y\} & \quad - \text{modos de vibrar} \end{aligned}$$

Uma das propriedades mais importantes dos modos de vibrar é a propriedade de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e rigidez. Com esta propriedade pode-se obter as matrizes de massa e rigidez modal:

$$[y]^T [M] [y] = [m.] \quad (3.15)$$

$$[y]^T [K] [y] = [k.] \quad (3.16)$$

Na qual:

$$\begin{aligned} [m.] & \quad - \text{matriz de massa modal;} \\ [k.] & \quad - \text{matriz de rigidez modal;} \\ [y] & \quad - \text{matriz modal.} \end{aligned}$$

Normalizando os modos em relação à massa modal, a matriz modal passa a ser definida como $[f]$ e as propriedades de ortogonalidade são chamadas de ortonormal e passam a satisfazer as seguintes relações:

$$[f]^T [M] [f] = [I.] \quad (3.17)$$

$$[f]^T [K] [f] = [l.] \quad (3.18)$$

Na qual:

$$\begin{aligned} [I.] & \quad - \text{matriz identidade;} \\ [l.] & \quad - \text{matriz de autovalores.} \end{aligned}$$

$[f]$ - matriz modal normalizada em relação à massa modal, em que cada coluna desta matriz é- $\{f\}_r = \frac{\{y\}_r}{\sqrt{m_r}}$;

Através dos parâmetros modais, em tese é possível obter as matrizes de massa e rigidez (figura 3.2), como mostram as equações (3.19) e (3.20). No entanto essas matrizes são obtidas somente para algumas situações muito especiais, visto que nem sempre é possível ter acesso a todos os modos e graus de liberdade do modelo.

$$[m] = [f]^{-T} [f]^{-1} \quad (3.19)$$

$$[k] = [f]^{-T} [l] [f]^{-1} \quad (3.20)$$

Para obter a função de resposta em frequência (FRF) de um sistema com n graus de liberdade, analogamente aos sistemas com um grau de liberdade, considera-se que a estrutura seja excitada com forças da seguinte forma:

$$\{f(t)\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (3.21)$$

Assumindo a seguinte solução da equação do movimento:

$$\{x(t)\} = \{X\} e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

A equação do movimento se torna:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{X\} e^{i\omega t} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (3.23)$$

Em termos da matriz de rigidez dinâmica, a equação (3.23) torna-se:

$$[Z] \{X\} = \{F\} \quad (3.24)$$

Na qual:

$$[Z] = [K] - \omega^2 [M] \text{ - Matriz de rigidez dinâmica}$$

A equação (3.24) também pode ser escrita da forma:

$$\{X\} = [a(\omega)]\{F\} \quad (3.25)$$

Na qual:

$$[a(\omega)] = [Z]^{-1}$$

A matriz $[a(\omega)]$ é chamada de matriz de receptância do sistema ou função de transferência, e possui dimensão $N \times N$. Note que é possível determinar $[a(\omega)]$ para quaisquer valores de frequência, porém isto envolveria a inversão de matrizes, na qual, para sistemas com um número elevado de graus de liberdade o processo se torna ineficiente. Sendo assim a FRF para sistemas com N graus de liberdade é obtida fazendo-se uso das propriedades modais do sistema.

Considerando que a matriz de rigidez dinâmica é igual à inversa da matriz de transferência, tem-se:

$$([K] - \omega^2 [M]) = [a(\omega)]^{-1} \quad (3.26)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (3.26) por $[f]^T$ e pós-multiplicando também ambos os lados por $[f]$, tem-se:

$$[f]^T ([K] - \omega^2 [M]) [f] = [f]^T [a(\omega)]^{-1} [f] \quad (3.27)$$

Ou também:

$$[(\omega_r^2 - \omega^2)] = [f]^T [a(\omega)]^{-1} [f] \quad (3.28)$$

Na qual:

r - r -ésima frequência natural.

Fazendo algumas manipulações matemáticas a equação (3.28) pode ainda ser reescrita da forma:

$$[a(w)] = [f] [(w_r^2 - w^2)]^{-1} [f]^T \quad (3.29)$$

Desenvolvendo a equação (3.29) chega-se a uma equação para valores individuais para o cálculo das FRF(s), equação (3.30):

$$a_{jk}(w) = \sum_{r=1}^N \frac{f_j^r f_k^r}{w_r^2 - w^2} \quad (3.30)$$

Na qual:

- N - Número de modos de vibrar (ou graus de liberdade);
- j - Grau de liberdade de excitação da estrutura;
- k - Grau de liberdade da resposta da estrutura;
- w_r - Frequência natural do modo r ;
- w - Frequência de excitação.

Portando a equação (3.30) pode ser utilizada de forma alternativa para o cálculo das funções de resposta em frequência FRF(s) para um sistema com N graus de liberdade.

3.1.2 – Análise Modal Experimental

Na análise modal experimental, a estrutura real (física) é excitada e sua resposta é medida. Os parâmetros modais são estimados a partir das relações de entrada (excitação) e saída (respostas) medidas diretamente na estrutura. A figura 3.3 ilustra um típico cenário de análise modal experimental. Utilizando a relação entrada/saída obtém-se a Função de Resposta em Frequência (FRF). Através de métodos de identificação modal (EWINS, 1984; MAIA & SILVA, 1997), obtém-se os parâmetros modais da estrutura, ou seja, frequências de ressonâncias, razão de amortecimento e modos próprios de vibrar.

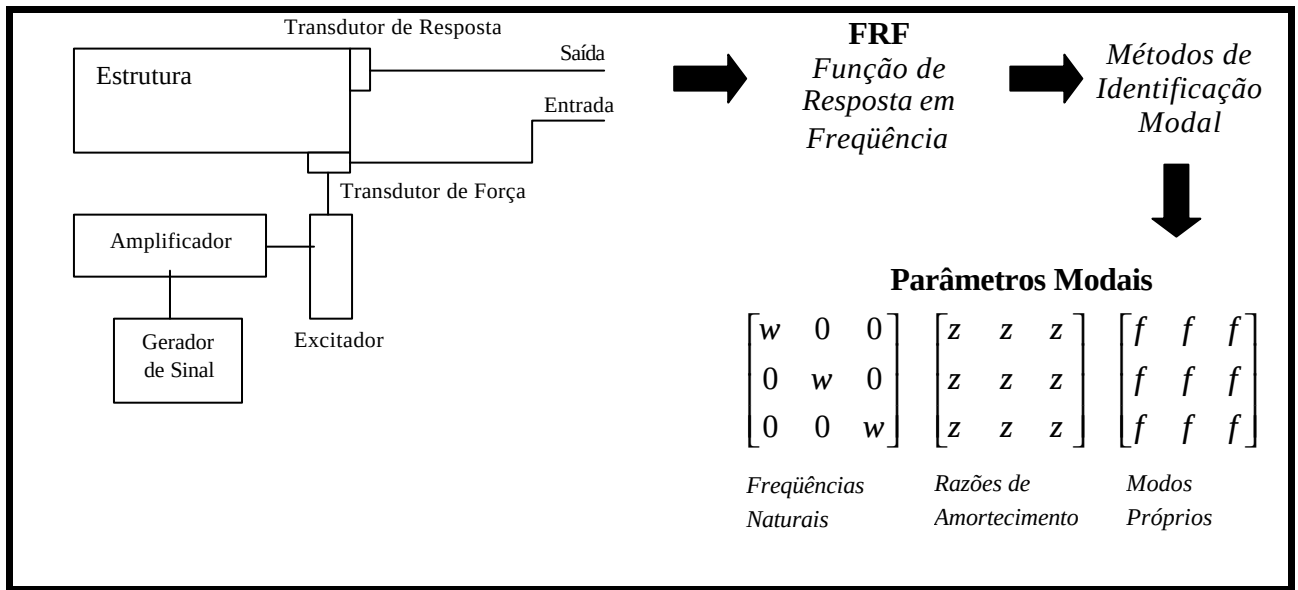


Figura 3.3: Típico Cenário de Análise Modal Experimental

Tomando como referência um sistema de 1 grau de liberdade, a relação de entrada e saída pode ser obtida representando a equação de movimento (3.1) no domínio de Laplace (variável s), o que permite definir a função de transferência do modelo (HEYLEN et al., 1994).

Assumindo as condições iniciais de velocidade e deslocamento iguais a zero, a função transferência do modelo $H(s)$, é dada pela relação da saída pela entrada, equação (3.31):

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} \quad (3.31)$$

Na qual:

C : coeficiente de amortecimento.

Expandindo um sistema de 1 grau de liberdade, a equação do movimento (3.1), para um sistema de N graus de liberdade, no domínio de Laplace, tem-se:

$$(s^2 [M] + s[C] + [K])\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.32)$$

Ou na forma compacta:

$$[Z(s)]\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (3.33)$$

Na qual:

$[Z(s)] = s^2[M] + s[C] + [K]$ é chamada de matriz de rigidez dinâmica.

Para um sistema com N graus de liberdade, a função de transferência $H_{ij}(s)$ também é definida em termos da relação da entrada medida no ponto i e a resposta medida no ponto j . Em termos matriciais, a equação (3.34) estabelece uma relação da resposta do sistema com a entrada através da matriz de transferência.

$$\{X(s)\} = [H(s)]\{F(s)\} \quad (3.34)$$

Na qual:

$[H(s)]$ é a matriz de funções de transferências.

Comparando as equações (3.33) e (3.34), pode ser estabelecida uma relação direta entre a matriz de transferência e a matriz de rigidez dinâmica dada por:

$$[H(s)] = [Z(s)]^{-1} \quad (3.35)$$

Ou em termos da inversa da matriz de rigidez dinâmica:

$$[H(s)] = \frac{Adj[Z(s)]}{Det[Z(s)]} \quad (3.36)$$

Na qual:

$Adj[Z(s)]$ - Matriz adjunta de $[Z(s)]$;

$Det[Z(s)]$ - Determinante da matriz $[Z(s)]$.

Nesta equação, o denominador representa a equação característica do modelo, por isso as raízes do denominador fornecem as frequências naturais amortecidas e as razões de amortecimento do modelo. A equação (3.36) também pode ser escrita na forma de frações parciais, para maiores detalhes consultar HEYLEN et al. (1994).

$$[H(s)] = \sum_{r=1}^m \frac{Q_r \{y\}_r \{y\}_r^T}{s - l_r} + \frac{Q_r^* \{y\}_r^* \{y\}_r^{*T}}{s - l_r^*} \quad (3.37)$$

Na qual:

- * - denota o conjugado complexo;
- l_r - r-ésima raiz da equação característica do sistema;
- Q_r - résimo fator de escala ou resíduo;
- $\{y\}$ - modos próprios;
- m - número de modos.

As funções de resposta em frequência são definidas a partir da equação (3.37) substituindo a variável de Laplace s pela frequência complexa iw . O conjunto das funções de resposta calculadas ao longo do eixo da frequência define a matriz das funções de resposta em frequência:

$$[H(iw)] = \sum_{r=1}^m \frac{Q_r \{y\}_r \{y\}_r^T}{iw - l_r} + \frac{Q_r^* \{y\}_r^* \{y\}_r^{*T}}{iw - l_r^*} \quad (3.38)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (3.35) resulta na função de resposta ao impulso – FRI:

$$[h(t)] = \sum_{r=1}^m \left(Q_r \{y\}_r \{y\}_r^T e^{l_r t} + Q_r^* \{y\}_r^* \{y\}_r^{*T} e^{l_r^* t} \right) \quad (3.39)$$

As funções de resposta em frequência e a sua equivalente no domínio do tempo contêm todas as informações necessárias para identificação dos parâmetros modais, permitindo a estimativa dos mesmos a partir dos dados medidos. A extração desses parâmetros é feita através de técnicas de estimação de parâmetros aplicadas à equação (3.38) ou à sua equivalente no domínio do tempo, equação (3.39). Essas técnicas são conhecidas como métodos de identificação modal e atualmente, existe um grande número desses métodos. Há também vários *softwares* comerciais para análise modal, que incorporam esses métodos como uma caixa preta. Entretanto, é sempre necessário saber o que acontece dentro de uma caixa preta, ou seja, qual a formulação envolvida. Em MAIA & SILVA (1997), pode ser encontrada uma descrição bastante detalhada da formulação e características de vários métodos de identificação modal, onde são tratados desde os mais relevantes historicamente até os mais importantes e eficientes.

Os métodos de identificação modal estão basicamente divididos em dois grupos, métodos no domínio do tempo e métodos no domínio da frequência. Dentro de cada um destes grupos pode-se ainda encontrar outra subdivisão, métodos diretos e métodos indiretos. Um outro aspecto que caracteriza os métodos de identificação modal é o número de entradas (excitação) e saídas (respostas) medidas simultaneamente no sistema.

Para a identificação dos parâmetros modais do experimento realizado neste presente trabalho foi utilizado o *software* EMA^{*}. O *software* EMA utiliza o método de *Ibrahim* (ITD – *Ibrahim Time Domain*) para estimar os parâmetros modais a partir de dados medidos experimentalmente, o qual é um método indireto formulado no domínio do tempo e de categoria SIMO (*Single-Input-Multi-Output*), ou seja, a estrutura é excitada em apenas um ponto e a resposta é medida em vários pontos.

3.2 – Comparação e Correlação de Modelos

A comparação e correlação entre modelos analítico e experimental é uma etapa fundamental no processo de ajuste, pois é nesta etapa que se decide se o modelo analítico representa ou não satisfatoriamente o modelo experimental. Para correlacionar os modelos, deve haver uma equivalência entre os números de graus de liberdade e uma compatibilidade geométrica, ou seja, o número e a localização dos graus de liberdade devem ser idênticos para os dois modelos. A compatibilidade geométrica é obtida através da adoção de um mesmo sistema de coordenadas em comum entre os modelos analítico e experimental para a geração das malhas dos dois modelos. A compatibilidade no número de graus de liberdade deve ser obtida através do processo de redução do modelo analítico ou expansão do modelo experimental, pois, na maioria dos casos o modelo analítico possui um número de graus de liberdade superior ao modelo experimental. Neste presente trabalho os métodos de redução estática e dinâmica são utilizados.

^{*} Programa de análise modal desenvolvido no Departamento de Engenharia Mecânica da Unesp – Campus de Ilha Solteira.

3.2.1 – Incompatibilidade entre Modelos

No processo de ajuste de modelos, dispõe-se de um modelo analítico, obtido através do método de elementos finitos, e um modelo físico experimental, no qual seus parâmetros modais são extraídos com base na relação entrada/saída medida do sistema. Há dois tipos de incompatibilidade entre os modelos analítico e experimental, incompatibilidade geométrica e incompatibilidade com relação ao número de graus de liberdade. A incompatibilidade geométrica pode ser resolvida utilizando um mesmo sistema de coordenadas tanto para os pontos de medição na estrutura quanto para os nós do modelo analítico de elementos finitos. Geralmente, o modelo analítico possui um número de graus de liberdade superior em relação ao número de pontos e direção de medição do modelo experimental, visto que, há dificuldades de acesso aos pontos de medição e limitações dos equipamentos de medida, onde, por exemplo, não é possível medir os graus de liberdade de rotação. Assim, a compatibilização entre os modelos em relação ao número de graus de liberdade é conseguida utilizando um processo de redução do número de graus de liberdade do modelo analítico ou expansão do número de graus de liberdade do modelo experimental.

Os métodos de redução de graus de liberdade do modelo analítico definem um modelo matricial reduzido do modelo que seja capaz de representar o comportamento de toda a estrutura. Neste processo, definem-se graus de liberdade ativos, aqueles que representam o modelo reduzido, e graus de liberdade eliminados, os que não integram o modelo reduzido (equação 3.40). Os graus de liberdade eliminados são suprimidos do vetor modal através de uma operação direta de exclusão. Já a redução do modelo matricial é menos direta e reproduz um modelo matricial reduzido equivalente e capaz de representar toda a estrutura.

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{X_A\} \\ \{X_D\} \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Na qual:

$\{X\}$ - todos os graus de liberdade do modelo;

$\{X_A\}$ - graus de liberdade ativos;

$\{X_D\}$ - graus de liberdade eliminados.

A utilização dos métodos de redução de modelos possui uma vantagem que é também a redução no tempo de processamento gasto na solução do problema. As principais

desvantagens do processo de redução estão relacionadas com as dificuldades da seleção dos graus de liberdade ativos adequados, que na maioria das vezes eles não coincidem com os pontos medidos e conseqüentemente há perda do significado físico do modelo original.

Os métodos de expansão de modelos procuram estimar os graus de liberdade que não puderam ser capturados no processo de medição do modelo físico experimental. Estes métodos não serão discutidos neste trabalho, porém mais informações podem ser obtidas em (O'CALLAHAN et al., 1986; LIEVEN E EWINS, 1990).

A seguir serão discutidos os métodos de redução estática, também conhecido como método de redução de Guyan, e o método de redução dinâmica.

3.2.2 – Redução Estática ou de Guyan

Há vários métodos para a redução de matrizes, sendo que o método de Guyan (GUYAN, 1965), também conhecido como redução estática, tem sido o precursor da maioria dos métodos propostos.

O método efetua a redução do número de graus de liberdade com base na eliminação das coordenadas do sistema de equações de equilíbrio estático onde não existem forças aplicadas. Assim a equação de equilíbrio pode ser reescrita da forma:

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AD} \\ K_{DA} & K_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_D \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Na qual:

- $\{X_A\}$ - representa os graus de liberdade ativos;
- $\{X_D\}$ - representa os graus de liberdade eliminados.

Considerando o vetor força $\{F_D\}$ nulo, e fazendo algumas manipulações matemáticas adequadas nas sub-matrizes da equação (3.41), a matriz de rigidez reduzida pode ser expressa da seguinte forma:

$$[K^R] = [K_{AA}] - [K_{AD}][K_{DD}]^{-1}[K_{DA}] \quad (3.42)$$

Vale lembrar que a matriz de rigidez reduzida, equação (3.42), também pode ser calculada a partir da energia potencial do modelo, e similarmente a esta forma alternativa de

calcular a matriz de rigidez reduzida, a matriz de massa reduzida também pode ser calculada através da energia cinética do modelo em termos de um sistema de coordenadas reduzido. Assim, a matriz de massa reduzida pode ser expressa da seguinte forma:

$$[M^R] = [M_{AA}] - [K_{AD}][K_{DD}]^{-1}[M_{DA}] - [M_{AD}][K_{DD}]^{-1}[K_{DA}] + [K_{AD}][K_{DD}]^{-1}[M_{DD}][K_{DD}]^{-1}[K_{DA}] \quad (3.43)$$

O método de Guyan é muito utilizado em *softwares* comerciais CAE para reduzir as matrizes dos modelos analíticos, com o principal objetivo de reduzir o custo computacional das soluções numéricas. Entretanto, este método possui algumas limitações para a representação de problemas dinâmicos, pois sua formulação não leva em conta as equações de movimento do sistema.

3.2.3 – Redução Dinâmica

No método de redução dinâmica (KIDDER, 1973), diferentemente do método de Guyan, o método efetua a redução das matrizes do modelo a partir do sistema de equações de movimento do sistema. Assim o modelo reduzido permite uma melhor avaliação do comportamento dinâmico do modelo.

Separando-se os graus de liberdade ativos dos eliminados, ou seja, separando os graus de liberdade considerados medidos dos não medidos, a equação de movimento do sistema, equação (3.24), torna-se:

$$\begin{bmatrix} Z_{AA} & Z_{AD} \\ Z_{DA} & Z_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ X_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_D \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Considerando a ausência de forças externas atuando nos graus de liberdade eliminados, a equação (3.44) leva, a partir de manipulações matemáticas adequadas, à equação (3.45), a qual representa a matriz de rigidez dinâmica reduzida.

$$[Z^R] = [Z_{AA}] - [Z_{AD}][Z_{DD}]^{-1}[Z_{DA}] \quad (3.45)$$

Para o presente trabalho, os ajustes de modelos são feitos utilizando a redução dinâmica do sistema, equação (3.45).

3.2.4 – Correlação de Modelos

Definida a compatibilidade entre os modelos analítico e experimental, é possível determinar o quão estão correlacionados, ou seja, é possível comparar o modelo analítico com os dados experimentais e decidir se o modelo analítico é uma boa representação do modelo real e se há a necessidade ou não de se ajustar o modelo. Há várias técnicas de correlação de modelos, cada uma com alguma característica específica, e dentre elas podem-se destacar a comparação entre as frequências naturais, através das diferenças relativas entre as frequências, gráfico de 45°, coeficiente de correlação modal, coeficiente de correlação modal dos graus de liberdade e o coeficiente de correlação das FRF(s).

Num primeiro momento, é possível identificar a discrepância entre os modelos visualmente, através dos gráficos das FRF(s). É claro que é uma comparação grosseira, porém é uma ótima maneira de se verificar erros grosseiros na estimação dos parâmetros do modelo analítico. Para decidir realmente se o modelo analítico representa ou não satisfatoriamente o modelo experimental, é necessário utilizar alguma técnica de correlação mais elaborada de forma complementar, visto que não existe uma técnica universal capaz de observar os vários aspectos de correlação.

A comparação das frequências naturais é uma técnica bastante empregada para avaliar as discrepâncias entre o modelo analítico e o experimental, pois esses parâmetros são os parâmetros modais mais confiáveis no processo de estimação dos parâmetros do sistema. A equação (3.46) representa as diferenças relativas entre as frequências do modelo analítico e experimental.

$$\frac{w_r^A - w_r^E}{w_r^E} 100\% \quad (3.46)$$

Na qual:

w_r^A - r-ésima frequência natural do modelo analítico;

w_r^E - r-ésima frequência natural do modelo físico experimental.

Uma outra forma de comparação das frequências naturais, também aplicada aos autovetores, é a utilização do gráfico de 45°, onde os valores experimentais são traçados contra os valores do modelo analítico. Se a distribuição dos pontos se encontrar em uma reta de inclinação de +/- 45° com uma pequena dispersão os modelos estão bem correlacionados, caso contrário, os modelos estão mal correlacionados ou não há correlação alguma, necessitando assim uma reavaliação dos modelos.

A comparação dos modos também representa um importante aspecto na correlação de modelos. O coeficiente de correlação modal, que correlaciona os autovetores (modos próprios de vibrar) do modelo analítico e experimental, permite analisar de forma qualitativa a correlação dos modos. O conceito dos coeficientes de correlação modal, também chamado de MAC-Valor (Modal Assurance Criterion – Coeficiente de Correlação Modal) é definido pela equação (3.47).

$$MAC(\{y\}_i, \{y\}_j) = \frac{\left| \{y^A\}_i^T \{y^E\}_j \right|^2}{\left(\{y^A\}_i^T \{y^A\}_i \right) \left(\{y^E\}_j^T \{y^E\}_j \right)} \quad (3.47)$$

Os valores de *MAC* variam entre 0 e 1, sendo que, coeficientes próximos a 1 significam que os modos $\{y\}_i$ e $\{y\}_j$ estão bem correlacionados. Valores iguais ou superiores a 0,8, são bem aceitos na literatura. Quando o valor de *MAC* for igual à unidade, os modelos estão totalmente correlacionados e quando for zero indica total ausência de correlação entre os modelos.

A utilização dos *MAC* valores permite avaliar quais modos estão bem correlacionados ou não, porém não permite identificar em qual região da estrutura, ou seja, em quais graus de liberdade há algum problema. Um outro método utilizado para a comparação de modos, com base no conceito de coeficiente de correlação, é o coeficiente de correlação modal dos graus de liberdade *COMAC* (Coordinate Modal Assurance Criterion) (LIEVEN & EWINS, 1988). Esse método permite, em alguns casos, identificar as regiões do modelo não correlacionadas satisfatoriamente.

Foram apresentados aqui neste capítulo, os aspectos teóricos mais relevantes para o melhor entendimento da metodologia proposta de ajuste de modelos em problemas de contato. No capítulo que segue, o principal assunto do presente trabalho é apresentado, discutindo de uma

forma geral, a formulação do elemento de contato e do ajuste de modelos baseado nas FRF(s), e por fim, a metodologia proposta neste trabalho é apresentada.

Capítulo 4

AJUSTE DE MODELOS EM PROBLEMAS DE CONTATO

Os problemas de contato, como discutido anteriormente, são de difícil solução, pois envolve a determinação de diversos parâmetros, como rigidez da superfície de contato, penetração e atrito entre os corpos. Além disso, como é um problema que está relacionado com alterações nas restrições ou vinculação da estrutura, apresenta forte não-linearidade. A análise desses problemas pode ser tratada a partir de modelos teóricos analíticos, experimentais ou simulações numéricas. As soluções analíticas encontram grandes limitações, pois o problema apresenta complexidades físicas, geométricas e complexidades não-lineares. A utilização de análises experimentais possui grandes desvantagens, pois demanda muito tempo para efetuar um grande número de ensaios e um alto investimento financeiro para a montagem dos modelos. Com o avanço da computação, as simulações numéricas para tratar o problema de contato vêm sendo amplamente utilizadas, pois possuem a vantagem de permitir uma série de testes sobre estruturas a um custo relativamente baixo.

O método de elementos finitos é atualmente o método numérico mais utilizado na solução de problemas de contato. Muitos trabalhos de pesquisas resultaram ou contribuíram para o desenvolvimento de diversos programas comerciais. Além disso, análises sobre uma grande quantidade de problemas em diferentes situações demonstram a qualidade das simulações e o aperfeiçoamento crescente na modelagem numérica dos problemas reais. Entretanto, os modelos analíticos obtidos por elementos finitos, podem apresentar discrepâncias em relação aos modelos físicos reais, visto que, esses modelos analíticos são modelos aproximados, algumas propriedades de alguns componentes são difíceis de serem estimadas e simplificações matemáticas são feitas.

Uma das formas de melhorar a representatividade dos modelos é correlacionar o modelo analítico com dados experimentais e posteriormente localizar as discrepâncias e ajustar o modelo.

Desta forma, o ajuste de modelos é uma área cada vez mais estudada e aplicações na indústria têm sido exploradas. Dentre as técnicas de ajuste de modelos, o ajuste de modelos baseado em FRF(s) possui grandes vantagens, dentre as quais, os dados são medidos diretamente da estrutura.

O ajuste de modelos baseado em FRF(s) é perfeitamente aplicável a modelos envolvendo problemas de contato. Entretanto deve-se atentar para as características dos parâmetros dos elementos que modelam o contato. Devido ao fato que problemas de contato são de natureza não linear os *softwares* CAD que implementam elementos de contato utilizam algoritmos baseados em soluções não lineares as quais podem demandar muitas iterações, muito tempo de processamento, problemas com a compatibilidade de contato, ou seja, os corpos podem ou não penetrar um no outro, podendo ainda, convergir ou não para uma solução. Sendo assim deve-se, ao aplicar o ajuste de modelo em problemas envolvendo contato, definir de forma adequada, os valores iniciais dos parâmetros dos elementos de contato e eventualmente a cada iteração de ajuste analisar e verificar a convergência das soluções.

Para o presente trabalho, o *software* CAD para a geração do modelo analítico a ser ajustado é o *software* comercial ANSYS, escolhido por ser uma ferramenta muito utilizada no meio industrial e acadêmico, e conseqüentemente uma ferramenta bem avaliada. O elemento utilizado para modelagem do problema de contato é o CONTAC48 (ANSYS) por ser um elemento relativamente simples, não possui muitos parâmetros, modela geometrias em 2-D, pode ser utilizado em vigas ou sólidos e permite análises estáticas e dinâmicas.

A seguir segue uma breve descrição da formulação do elemento de contato, a formulação do ajuste de modelos baseado em FRF(s) e também é apresentada a metodologia de ajuste de modelo em problemas de contato utilizada no presente trabalho.

4.1 – Formulação do Elemento de Contato

Do ponto de vista computacional, um dos aspectos mais importantes na solução numérica de problemas de contato é a otimização dos algoritmos e procedimentos de busca e detecção dos contatos. Isto para que se possa introduzir a formulação do problema de contato no contexto geral de análise por Elementos Finitos, de modo a verificar as condições de compatibilidade cinemática imposta pelas restrições de contato, assegurando-se que não haja penetrações entre os sólidos que interagem.

De uma forma geral, a análise de problemas que envolvem o contato entre sólidos é dividida em duas etapas:

- Busca e localização do contato;
- Introdução de formulação de contato que assegure que não aconteçam penetrações entre os sólidos que interagem.

Existem dois métodos principais na literatura e nos programas de Elementos Finitos para considerar o problema de contato entre sólidos:

- Método de penalização;
- Método dos multiplicadores de Lagrange.

O método de penalização impõe que as condições de contato se verifiquem de forma aproximada, por meio do fator de penalização. Já o método dos multiplicadores de Lagrange obriga que as restrições de contato se verifiquem de forma exata, através dos multiplicadores de Lagrange. Alguns tipos de elementos finitos, como o caso do CONTAC48 do *software* ANSYS, o qual é utilizado neste trabalho, utiliza a função *penalty* ou também combinada com multiplicadores de Lagrange.

A proposta deste trabalho não visa detalhar a formulação dos vários tipos de elementos de contato. Entretanto, para melhor compreensão da metodologia proposta neste capítulo são apresentados os procedimentos e algoritmos básicos a respeito do elemento de contato CONTAC48 do *software* comercial ANSYS.

4.2 – O Elemento CONTAC48 do ANSYS

O elemento CONTAC48 do *software* ANSYS é aplicado a geometrias 2-D e, em geral, podem ser realizadas análises de contato entre corpos sólidos ou vigas, análise estática ou dinâmica e em problemas com ou sem atrito (ANSYS, User's Manual).

4.2.1 – Cinemática de Contato

Para entender como o elemento CONTAC48 trabalha, é necessário definir a cinemática de contato, que consiste em determinar precisamente os nós de contato e superfícies, ou seja, determinar condições claras e não ambíguas do contato.

4.2.1.1 – Definição de Contato e Alvo

De acordo com a figura 4.1, duas potenciais superfícies de contato são descritas como “Superfície de Contato” e “Superfície Alvo”. A “Superfície Alvo” é representada pelos “nós alvos” I e J, e a “Superfície de Contato” é representada pelo “Nó de Contato” K.

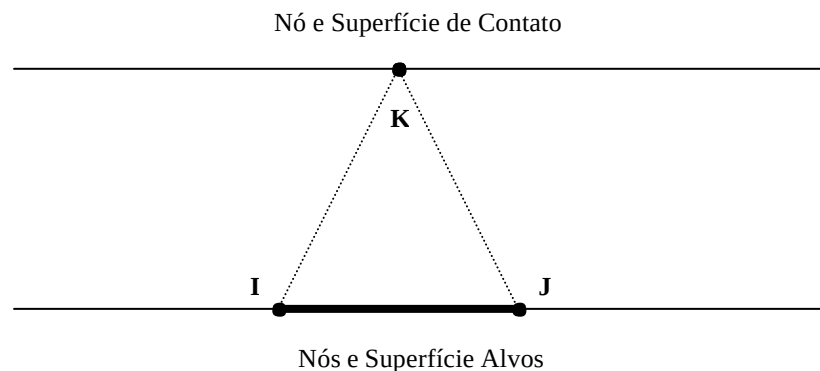


Figura 4.1: Geometria do elemento CONTAC48 (ANSYS, User's Manual)

O primeiro problema que surge em problemas de contato é a identificação da ocorrência do mesmo. Existem diversos tipos de algoritmos capazes de identificar o contato. Os mais simples são baseados em áreas de influência próximas aos elementos do corpo alvo, como o algoritmo baseado no conceito de território (área de influência local de cada elemento alvo) e que pode ser encontrado em ZHONG & NILSSON (1996) e os algoritmos do tipo *pinball* (áreas de influência circulares ou esféricas dos elementos alvo), o qual é utilizado no elemento CONTAC48.

4.2.1.2 – Algoritmo de “PINBALL”

Em simples termos, o contato ocorre sempre que o nó de contato penetra na superfície de contato. O primeiro passo na determinação da penetração de contato é fazer uma distinção entre o campo mais próximo e o mais distante de contato. A figura 4.2 mostra algumas posições de um nó de contato com o respectivo círculo centrado na superfície alvo (nós I e J). Este círculo é chamado de “pinball”. Quando um nó de contato sai do “pinball” uma condição “aberta” de contato é assumida, independentemente se o nó K de contato está acima ou abaixo do alvo. A penetração pode apenas ocorrer se o nó de contato está dentro do “pinball”. O raio do “Pinball” por padrão é de 50% maior que a distância entre os nós alvo e pode ser alterada pela real constante PINB do *software* ANSYS.

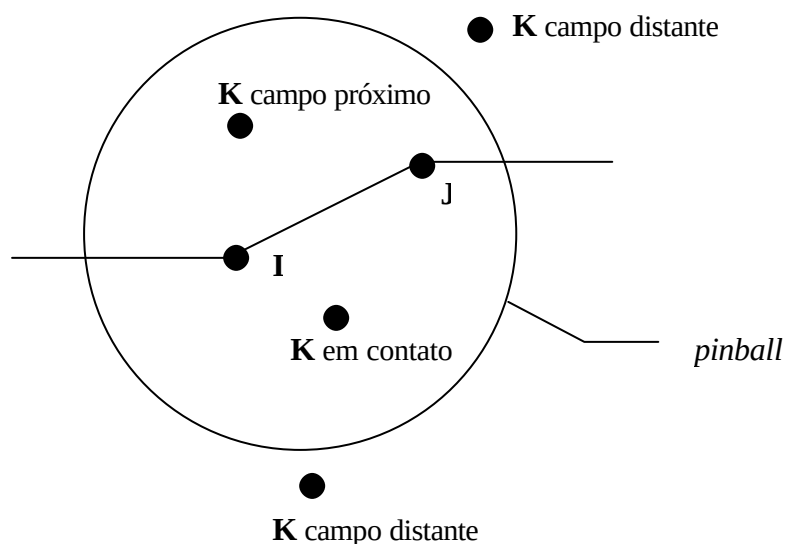


Figura 4.2: Definição de (Campo Próximo) e (Campo Distante) de Contato (ANSYS, User's Manual)

4.2.1.3 – Pseudo Elemento

O próximo passo na determinação do contato é associar um simples alvo para cada nó de contato. A figura 4.3 mostra a situação que ocorre quando um nó de contato está próximo (ou seja, no interior do círculo de “pinball”) de elementos alvos. Nota-se que pode haver penetração em dois elementos, um definido pelos nós I', J' e K ou o elemento definido pelos nós I'', J'' e K. Se uma distinção clara não for feita é possível aparecer contatos vazados “voids” ou contato sobrepostos “overlaps”, como exemplificado na figura 4.4. Estes vazamentos

e sobreposições são inevitáveis em superfícies curvas. Para eliminar esta dificuldade, “Pseudo Elementos” sólidos são formados ao redor de cada alvo. Estes elementos sólidos são temporariamente formados em cada iteração do processo de solução e fornecem um mapeamento contínuo para cada nó de contato no alvo ou perto do alvo.

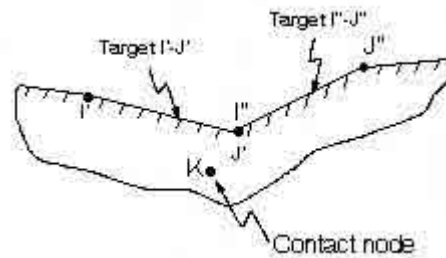


Figura 4.3: Nó de contato com 2 potenciais alvos para contato (ANSYS, User's Manual)

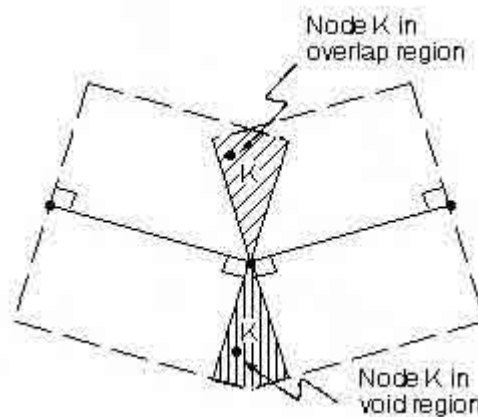


Figura 4.4: Potenciais “Voids” vazamento e “Overlaps” sobreposição na intersecção do contato (ANSYS, User's Manual)

Como se pode ver na figura 4.5, o mapeamento do “pseudo elemento” indica que o nó K é único para o alvo do elemento definido por I', J' e K e não para o elemento I'', J'' e K.

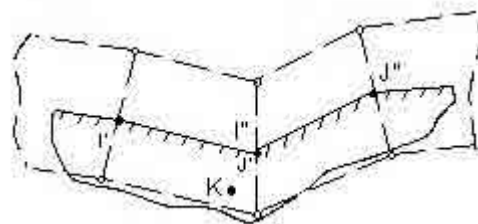


Figura 4.5: Pseudo Elemento (ANSYS, User's Manual)

4.2.1.4 – Intervalo (GAP) de Contato e Projeção

Os algoritmos “pinball” e “pseudo-elemento” fornecem um mapeamento entre os nós de contato e de alvo. O passo final da cinemática de contato é calcular o total de intervalos abertos ou dos intervalos de penetração do nó de contato no plano alvo, junto com o ponteiro de projeção do nó de contato. Na figura 4.6 um sistema de coordenadas do elemento é indicado. Isto é útil para definir o vetor unitário normal e o vetor unitário tangencial ao plano alvo.

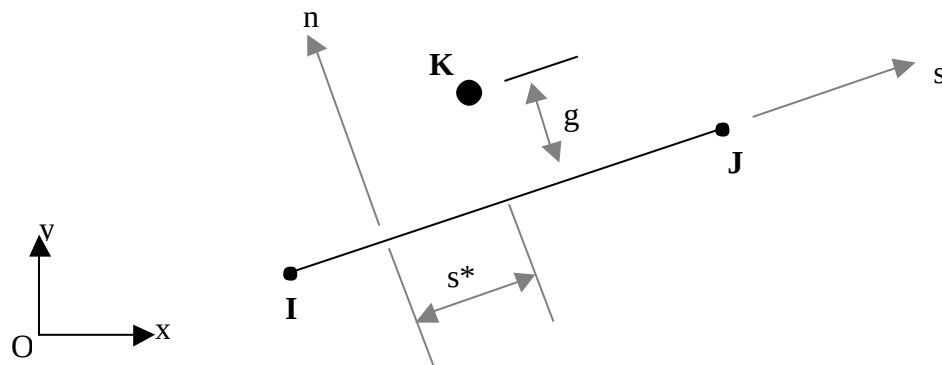


Figura 4.6 Localização do nó de contato no sistema local de coordenadas

Desta forma os vetores unitários, normal e tangencial, podem ser expressos respectivamente pelas equações (4.1) e (4.2).

$$\{n\} = \{v\} \otimes \{s\} \quad (4.1)$$

$$\{s\} = (\{X_J\} - \{X_I\}) / L \quad (4.2)$$

Na qual:

- $\{v\}$ - vetor unitário normal para plano global x-y
- $\{X_I\}$ - vetor posição do nó I
- $\{X_J\}$ - vetor posição do nó J
- L - comprimento do seguimento alvo $\| \{X_J\} - \{X_I\} \|$

A distância *gap* (g) e o ponteiro de projeção (s^*), definidos no sistema local s - n de coordenadas, são definidos por:

$$g = (\{X_k\} - \{X_I\})^T \{n\} \quad (4.3)$$

$$s^* = -1 + 2 \left[(\{X_K\} - \{X_I\})^T \{s\} \right] / L \quad (4.4)$$

Na qual:

$\{X_K\}$ - vetor posição do nó K

A penetração do contato presume-se que ocorre se o valor de g é negativo. Um valor positivo para o *gap* indica uma condição de contato aberto.

4.2.2 – Forças de Contato

O contato entre peças acontece quando o nó de contato K penetra a superfície alvo definida pelos nós I e J. Esta penetração é representada pela magnitude g (*gap*). Para satisfazer a compatibilidade de contato, forças são desenvolvidas na direção normal (direção n) ao alvo que tende a reduzir a penetração para um nível numérico aceitável. Para compatibilizar as forças, forças de atrito são desenvolvidas na direção tangencial (direção s) ao plano alvo.

4.2.2.1 – Força Normal

Para definir a força normal entre os corpos em contato há dois métodos disponíveis a serem utilizados pelo elemento CONTAC48. Um método utiliza uma função *penalty* o qual é indicado para análises estáticas e dinâmicas, e o outro utiliza uma combinação da função *penalty* com multiplicadores de Lagrange, o qual é indicado apenas para análises estática. O método *penalty* estabelece a compatibilidade do contato através de uma rigidez de contato. O método combinado estabelece a compatibilidade pela geração de forças de contato adicionais, chamadas de forças de Lagrange.

A força normal utilizando o método *penalty* é definida pela equação (4.5):

$$f_n = \begin{cases} K_n g & \longrightarrow \text{se } g \leq 0 \\ 0 & \longrightarrow \text{se } g > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Na qual:

K_n - rigidez normal de contato;

g - intervalo *gap* entre a superfície de contato e alvo.

A rigidez normal de contato (K_n), é um parâmetro do elemento de contato que controla a intensidade de penetração e afastamento entre ambas as superfícies, razão pela qual tem grande influência na convergência da solução. Como será apresentada ainda neste capítulo, uma boa regra para estimar o valor de K_n é inicia-lo com o mesmo valor do módulo de elasticidade. Caso o processo de solução exija muitas iterações ou não converge, deve-se diminuir o valor de K_n , entretanto, caso as superfícies em contato penetrem uma na outra, é necessário aumentar o valor deste parâmetro.

No método combinado, o componente multiplicador de Lagrange de força é calculado localmente e iterativamente (para cada elemento). No presente trabalho esta formulação não será discutida, visto que o interesse maior é a formulação do elemento de contato para problemas dinâmicos. Informações mais detalhadas sobre a formulação Lagrangeana para problemas de contato podem ser encontradas em SANTOS (2004) e SANT'ANA (2005).

4.2.2.2 – Força Tangencial

As forças tangenciais são devido ao atrito que aparece quando o nó de contato encontra e move-se ao longo do alvo. O elemento CONTAC48 permite três modelos:

1. Sem atrito;
2. Atrito elástico de Coulomb;
3. Atrito rígido de Coulomb.

Para o caso sem atrito, a força tangencial é meramente nula:

$$f_s = 0 \quad (4.6)$$

Para o atrito elástico de Coulomb é necessário calcular o deslocamento tangencial do nó de contato relativo ao alvo. A deformação é dada pela equação (4.7).

$$u_s = \frac{1}{2}(s^* - s_0^*)L \quad (4.7)$$

Na qual:

s_0^* - posição de contato da solução anterior quando ocorre a convergência.

A deformação é decomposta em componentes elástica e inelástica:

$$u_s = u_s^e + u_s^s \quad (4.8)$$

Na qual:

u_s^e - deformação tangencial elástica

u_s^s - deformação tangencial de deslizamento (inelástica)

Neste caso, a força tangencial é dada portanto, por:

$$f_s = \begin{cases} k_t u_s^e & \text{se o nó não estiver deslizando} \\ -m f_n & \text{se o nó estiver deslizando} \end{cases} \quad (4.9)$$

Na qual:

k_t - rigidez tangencial de contato

f_n - força normal de contato

m - coeficiente de atrito dinâmico

Como no caso da rigidez normal de contato (K_n), a rigidez tangencial de contato (K_t) também é um parâmetro do elemento e deve ser informado. De acordo com o (ANSYS, User's Manual), o valor de K_t deve ser da ordem de 100 vezes menor o valor da rigidez normal de contato (K_n).

As deformações tangenciais elásticas de contato são ignoradas no modelo de atrito rígido de Coulomb. O nó K de contato (se penetrado) deslizará sempre no alvo, onde a força tangencial é dada por:

$$f_s = \frac{u_s}{|u_s|}(-m f_n) \quad (4.10)$$

A formulação de elementos de contato é bastante abrangente e complexa. O presente capítulo apresenta uma breve discussão sobre os problemas de contato e sua formulação básica, e não discute em detalhes a geração das matrizes de massa e rigidez e vetor carga do elemento de contato (PARISCH, 1989; WRIGGERS et al., 1990). Procurou-se ilustrar a descrição dos procedimentos básicos envolvidos na formulação do elemento CONTAC48, como ocorre o contato e quais são os principais parâmetros que interferem no problema de contato, os quais serão objetos de análise e correção no processo de ajuste.

4.3 – Formulação do Ajuste de Modelos Baseado nas FRF(s)

O principal objetivo no ajuste de modelos é minimizar a diferença entre o modelo analítico (elementos finitos) e experimental. O processo de ajuste de modelos utilizado neste trabalho é baseado nas Funções de Respostas em Frequências do modelo (LARSSON & SAS, 1992; PEREIRA, 1996). Neste caso a comparação dos modelos analítico e experimental é feita em termos do balanço de forças. Quando os modelos são iguais e são ambos excitados com uma força $\{F\}$, a resposta $\{X^A\}$ do modelo analítico deve ser idêntica à resposta $\{X^E\}$ medida no modelo experimental. Em situações práticas isso pode não ocorrer, o modelo analítico pode não representar adequadamente o modelo real. Agora, assumindo que a resposta do modelo analítico seja igual à do modelo experimental, e que a discrepância entre os modelos pode ser discutida em termos da diferença entre a força analítica para produzir essa resposta e a força atuando no modelo experimental, é possível definir um vetor resíduo, equação (4.11).

$$\{e\} = \{F^A\} - \{F^E\} \quad (4.11)$$

A equação (4.11) pode ser expressa em termos das definições da matriz de rigidez dinâmica $[Z]$, equação (3.24), e do vetor resposta $\{X^A\}$.

$$\{e\} = [Z^A] \{X^A\} - \{F^E\} \quad (4.12)$$

Considerando uma força unitária aplicada no j -ésimo grau de liberdade e fazendo algumas manipulações matriciais, pode-se obter a equação do resíduo em termos da matriz de

rigidez dinâmica analítica (elementos finitos) e da função de resposta em frequências (medida), equação (4.13).

$$\{e\} = [Z^A] \{H^E\}_j - \{1\}_j \quad (4.13)$$

Na qual:

$\{H^E\}_j$ - j-ésima coluna da matriz de FRF(s) experimental;

$[Z^A]$ - matriz de rigidez dinâmica do modelo analítico;

$\{1\}_j$ - vetor nulo com valor unitário na posição j .

O modelo experimental representa o próprio sistema real, e os dados medidos são considerados como referência para o ajuste do modelo analítico. Assumindo-se que a formulação matemática do modelo de elementos finitos é bem definida, então a diferença entre os dois modelos surge devido às imprecisões nos valores estimados das propriedades físicas e/ou geométricas utilizadas na obtenção do modelo de elementos finitos. Assim, a diferença entre os modelos será expressa em termos dos parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo analítico e, portanto, reescrevendo a equação (4.13), em termos de parâmetros do modelo tem-se:

$$\{e(\{p\})\} = [Z^A(\{p\})] \{H^E\}_j - \{1\}_j \quad (4.14)$$

Na qual:

$\{p\} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ - são parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo analítico.

Devido ao fato que a equação (4.14) representa um sistema de equações não lineares e que os componentes da matriz $[Z^A]$ comportam-se de maneira quase linear na faixa de frequência analisada, é possível a linearização da matriz de rigidez dinâmica $[Z^A]$ por uma expansão em série de Taylor truncada depois dos primeiros termos, equação (4.15):

$$[Z^A(\{p\})] = [Z^A(\{p_0\})] + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial [Z^A(\{p\})]}{\partial p_i} \Delta p_i + \dots \quad (4.15)$$

Na qual:

p_0 - valor inicial dos parâmetros de atualização;

np - número de parâmetros de atualização;

$$\frac{\partial[Z^A(\{p\})]}{\partial p_i} \quad - \text{ sensibilidade da matriz de rigidez dinâmica.}$$

A sensibilidade do modelo é calculada pela derivada parcial da matriz de rigidez dinâmica em relação aos parâmetros p_i de ajuste. Para alguns elementos, a sensibilidade do modelo pode ser calculada diretamente, entretanto, para elementos mais complexos, como no caso em questão, a derivada é calculada numericamente por diferenças finitas, em cada iteração pela equação (4.16).

$$\frac{\partial[Z]}{\partial p_i} \cong \frac{[Z(p_i + dp_i)] - [Z(p_i)]}{dp_i} \quad (4.16)$$

Reescrevendo a equação (4.14) utilizando a equação (4.15), o resíduo em termos dos parâmetros de atualização $\{p\}$, para uma frequência de ajuste w_k , torna-se:

$$\{e_{wk}(\{p\})\} = [Z_k^A(\{p_0\})]\{H_k^E\}_j + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial[Z_k^A(\{p\})]}{\partial p_i} \Delta p_i \{H_k^E\}_j - \{1\}_j \quad (4.17)$$

A multiplicação da matriz $[Z_k^A(\{p_0\})]$ pelo vetor $\{H_k^E\}_j$ pode acarretar problemas numéricos, isto porque as matrizes de rigidez dinâmica e o vetor de receptância contêm componentes com valores relativamente grandes e o vetor resultante deste produto contém valores relativamente pequenos. Um melhor condicionamento do sistema neste caso pode ser obtida pela pré-multiplicação da equação (4.17) pela inversa da matriz de rigidez dinâmica analítica $[H_k^A]$ (LAMMENS, 1995; PEREIRA, 1996), resultando:

$$[H_k^A]\{e_{wk}(\{p\})\} = [H_k^A][Z_k^A(\{p_0\})]\{H_k^E\}_j + \sum_{i=1}^{np} [H_k^A] \frac{\partial[Z_k^A(\{p\})]}{\partial p_i} \Delta p_i \{H_k^E\}_j - [H_k^A]\{1\}_j \quad (4.18)$$

Reescrevendo a equação (4.18), obtém-se:

$$\{e_{wk}(\{p\})\} = \sum_{i=1}^{np} [H_k^A] \frac{\partial[Z_k^A(\{p\})]}{\partial p_i} \{H_k^E\}_j \Delta p_i + \{H_k^E\}_j - [H_k^A]\{1\}_j \quad (4.19)$$

Na qual:

$$[H_k^A] = [Z_k^A(p_0)]^{-1} \text{ - matriz de receptância.}$$

Escrevendo as informações das receptâncias analítica e experimental num único vetor, tem-se:

$$\{e_{wk}(\{p\})\} = \sum_{i=1}^{np} [H_k^A] \frac{\partial [Z_k^A(\{p\})]}{\partial p_i} \{H_k^E\}_j \Delta p_i + \{\Delta H_k\}_j \quad (4.20)$$

Na qual:

$\{\Delta H_k\}_j$ - é a diferença entre as receptâncias analítica e experimental no grau de liberdade j , de excitação.

A formulação apresentada até o momento, considera-se que os modelos analítico e experimental são compatíveis, e apresentam o mesmo número de graus de liberdade. No entanto, em situações reais geralmente o número de pontos medidos são menores e a compatibilidade dos modelos deve ser obtida utilizando algum método de redução do modelo analítico, como discutido na seção (3.2). Utilizando-se da equação (3.45), a qual reduz o modelo através do método de redução dinâmica, a equação (4.20) é redefinida em termo do sistema reduzido equivalente.

$$\{e_{wk}(\{p\})\} = \sum_{i=1}^{np} [H_k^R] \frac{\partial [Z_k^R(\{p\})]}{\partial p_i} \{H_k^E\}_j \Delta p_i + \{\Delta H_k\}_j \quad (4.21)$$

Na qual:

$[Z_k^R] = [Z_{kAA}] - [Z_{kAD}] [Z_{kDD}]^{-1} [Z_{kDA}]$ - matriz de rigidez dinâmica reduzida para um ponto de frequência w_k de excitação;

$[H_k^R] = [Z_k^R]^{-1}$ - matriz de receptâncias reduzida;

Reescrevendo a equação (4.21) em uma forma mais compacta, tem-se:

$$\{e\} = [S_k] \{\Delta p\} - \{\Delta H_k\}_j \quad (4.22)$$

Na qual:

- $[S_k]$ - matriz de sensibilidade formada pelos coeficientes de sensibilidade de cada parâmetro p_i , para a frequência w_k ;
- $\{\Delta H_k\}_j$ - vetor de diferença entre as receptâncias analítica e experimental;
- $\{\Delta p\}$ - vetor de incógnitas contendo a variação dos parâmetros de atualização.

O objetivo do ajuste de modelos é minimizar o erro entre modelos, neste caso, a minimização do erro $\{e\}$ através do método dos mínimos quadrados, leva à equação (4.23):

$$[S_k] \{\Delta p\} = \{\Delta H_k\}_j \quad (4.23)$$

Expandindo a expressão (4.23), para nk pontos de frequências e np parâmetros de atualização, tem-se:

$$\begin{bmatrix} [H_1^R] \frac{\partial [Z_1^R]}{\partial p_1} \{H_1^E\}_j & [H_1^R] \frac{\partial [Z_1^R]}{\partial p_2} \{H_1^E\}_j & \dots & [H_1^R] \frac{\partial [Z_1^R]}{\partial p_{np}} \{H_1^E\}_j \\ [H_2^R] \frac{\partial [Z_2^R]}{\partial p_1} \{H_2^E\}_j & [H_2^R] \frac{\partial [Z_2^R]}{\partial p_2} \{H_2^E\}_j & \dots & [H_2^R] \frac{\partial [Z_2^R]}{\partial p_{np}} \{H_2^E\}_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [H_{nk}^R] \frac{\partial [Z_{nk}^R]}{\partial p_1} \{H_{nk}^E\}_j & [H_{nk}^R] \frac{\partial [Z_{nk}^R]}{\partial p_2} \{H_{nk}^E\}_j & \dots & [H_{nk}^R] \frac{\partial [Z_{nk}^R]}{\partial p_{np}} \{H_{nk}^E\}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \vdots \\ \Delta H_{nk} \end{bmatrix}_j \quad (4.24)$$

A solução da equação (4.24) fornece os valores de $\{\Delta p\}$ que são utilizados para atualizar os parâmetros do modelo de elementos finitos, obtendo um modelo analítico mais próximo do modelo experimental. Essa equação representa um sistema linear-sobre-determinado, que neste caso, é resolvido utilizando a decomposição de valores singulares – SVD (Golub & Loan, 1985). O procedimento de ajuste de modelos, equação (4.23), é repetido iterativamente até que a diferença entre os modelos seja suficientemente pequena.

4.4 – Escolha dos Parâmetros de Atualização

Definir quais os parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo de elementos finitos que devem ser ajustados, é uma etapa fundamental no processo de ajuste, pois esses parâmetros têm uma influência direta no comportamento do modelo.

A escolha dos parâmetros de ajuste pode ser feita utilizando alguns conhecimentos prévios a respeito do modelo em questão, com base na experiência do dinamicista, ou através da análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo com relação às propriedades modais.

A sensibilidade do modelo pode ser calculada analiticamente através das derivadas parciais dos autovalores em relação aos parâmetros do modelo de elementos finitos, conforme discutido em (PEREIRA, 1996). A equação 4.25 permite o cálculo da sensibilidade dos autovalores do modelo com relação aos parâmetros p_i .

$$\frac{\partial l_r}{\partial p_i} = \{f\}_r^T \frac{\partial [K]}{\partial p_i} \{f\}_r - l_r \{f\}_r^T \frac{\partial [M]}{\partial p_i} \{f\}_r \quad (4.25)$$

Na qual:

l_r - r-ésima frequência de ressonância;

$\{f\}_r$ - r-ésimo vetor de modos próprios.

A tabela (4.1) mostra os possíveis parâmetros de atualização do modelo de elementos finitos utilizando elementos de viga, elementos sólidos e elementos de contato.

Tabela 4.1: Possíveis parâmetros de atualização do modelo de elementos finitos

Parâmetro	Tipo	Tipo de Elemento (FEM)
E – módulo de elasticidade	Físico	Viga/Sólido
r – densidade do material	Físico	Viga/Sólido
ν – coeficiente de Poisson	Físico	Viga/Sólido
KN – rigidez normal de contato	Físico	Contato (CONTAC48)
KT – rigidez tangencial de contato	Físico	Contato (CONTAC48)
A – área da seção transversal	Geométrico	Viga
I – momento de inércia	Geométrico	Viga

A análise de sensibilidade fornece subsídios para a escolha dos parâmetros a serem ajustados no processo, pois como regra geral, os parâmetros sensíveis em relação aos autovalores são bons candidatos a serem atualizados. Entretanto, isto não significa necessariamente que estes parâmetros foram erroneamente estimados na modelagem da estrutura, assim a experiência do dinamicista também deve ser levada em consideração na escolha dos parâmetros.

4.5 – Seleção das Frequências de Ajuste

Uma seleção não adequada das frequências de ajuste pode comprometer o sucesso do ajuste, pois as receptâncias nesses pontos podem não conter informações suficientes do sistema, ou apresentar informações contaminadas por ruídos, conforme discutido em PEREIRA (1996). O conjunto de frequências de ajuste deve ser selecionado de forma a fornecer uma matriz de receptância de referência, contendo de forma balanceada, todas as informações relevantes contida na matriz de receptância medida na faixa de frequência em análise.

No processo de ajuste não há um critério sistemático para a seleção das frequências de ajuste, entretanto, uma regra geral, seria analisar as FRF(s) medidas e extraídas do modelo analítico e selecionar pontos de frequências onde a diferença entre as receptâncias diminui com a sobreposição das FRF(s) durante o processo de ajuste do modelo. A figura 4.7 ilustra, através de um ponto no gráfico, uma seleção adequada da frequência de ajuste, em que a diferença entre as FRF(s), naquele ponto de frequência, diminui com sobreposição da FRF analítica (em vermelho) e a FRF experimental (em azul) durante as iterações de ajuste.

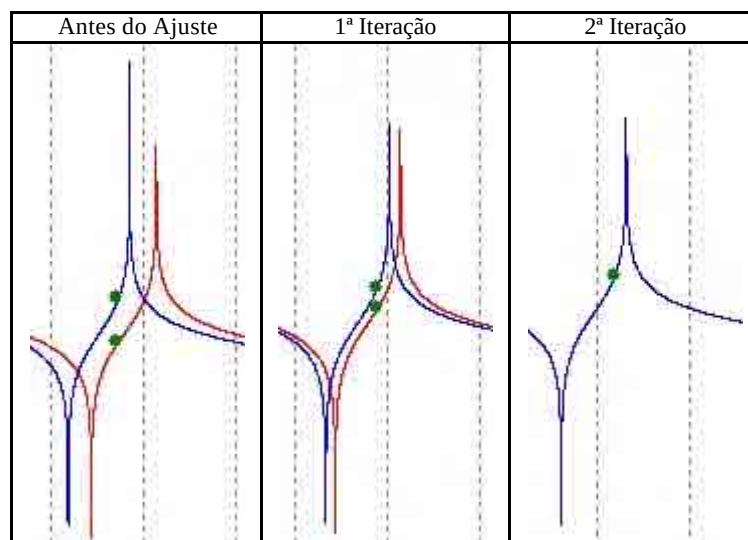


Figura 4.7: Exemplo de uma seleção adequada da frequência de ajuste

Já na figura 4.8 pode-se notar uma seleção não adequada da frequência de ajuste, onde a diferença entre as FRF(s), naquele ponto de frequência, aumenta podendo assim provocar instabilidades numéricas durante o processo de ajuste.

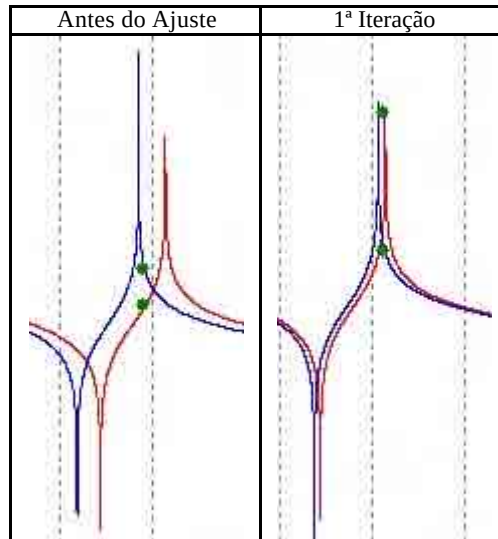


Figura 4.8: Exemplo de uma seleção inadequada da frequência de ajuste

Um outro aspecto a ser levado em conta, na seleção das frequências de ajuste, é que as regiões de frequências duvidosas e contaminadas por ruído devem ser evitadas, bem como as regiões de anti-ressonâncias.

4.6 – Parâmetros e Características do Elemento de Contato - CONTAC48

O elemento de contato CONTAC48 possui parâmetros e propriedades que influenciam na convergência das soluções e na resposta dinâmica da estrutura.

A primeira propriedade a se definir, antes de se efetuar uma análise envolvendo o contato utilizando o elemento CONTAC48, é escolher o método para desenvolver as forças normais, as quais reduzem a penetração entre uma superfície e a outra em um nível aceitável. Como discutido anteriormente, há dois métodos para obter as forças normais, o método da função *penalty*, utilizado para análises estáticas e dinâmicas, e o método da função *penalty* combinado com multiplicadores de *Lagrange*, utilizado apenas para análises estáticas. Como neste trabalho,

o principal interesse são as propriedades dinâmicas da estrutura, apenas o método da função *penalty* é utilizado para fazer as análises.

Definido o método para desenvolver as forças normais, estima-se um valor para a rigidez normal de contato (KN), a qual é utilizada pela função *penalty*. Grandes valores de KN são utilizados quando o método da função *penalty* é escolhido, entretanto valores muito altos podem causar instabilidades numéricas no processo de solução, e quando a função *penalty* combinada com os multiplicadores de *Lagrange* é utilizada, pequenos valores para KN são recomendados (ANSYS, User's Manual). Baseando-se em observações de simulações, uma boa regra para se estimar o valor adequado de KN é inicia-lo com o mesmo valor do módulo de elasticidade do material, se houver muitas iterações no processo de solução, deve-se diminuir o valor de KN. Agora, se há um número de iterações aceitável, ou seja, se há convergência no processo, porém há muita penetração entre uma superfície e outra, deve-se aumentar o valor de KN.

Uma outra propriedade do elemento CONTAC48 a ser definida é se na análise do contato haverá atrito ou não. Neste caso têm-se três opções: Desconsiderar o atrito; Utilizar o atrito elástico de Coulomb; Utilizar o atrito rígido de Coulomb.

Utilizando o atrito elástico de Coulomb, deve-se definir o valor da rigidez tangencial de contato (KT). Neste caso, para compatibilizar as forças, são desenvolvidas forças de atrito na direção tangencial ao contato e o valor do parâmetro KT é utilizado para o cálculo destas forças. De acordo com o (ANSYS, User's Manual), o valor padrão de KT deve ser da ordem de 100 vezes menor do que o valor de KN. Nas análises desconsiderando o atrito, ou utilizando o atrito rígido de Coulomb o parâmetro KT não é necessário ser informado.

Uma última propriedade do elemento CONTAC48 que merece atenção é a propriedade TOLS. Esta propriedade define uma pequena tolerância que internamente incrementa a linha alvo de contato (nós I e J). Sua unidade é expressa em percentual e define o percentual de aumento do comprimento da linha alvo. Alterações na propriedade TOLS são necessárias quando planos simétricos são colocados em contato, e neste caso o nó de contato pode repetidamente não “acertar” a linha alvo durante o processo de solução e isto pode ocasionar muitas iterações e provavelmente a não convergência da solução. Nestes casos pequenos valores são recomendados para a propriedade TOLS.

4.7 – Metodologia

A metodologia de ajuste de modelos envolvendo o problema de contato proposta neste trabalho utiliza um algoritmo iterativo de ajuste, implementado utilizando a formulação de ajuste de modelos apresentada na seção 4.3. Considerando os cuidados necessários com as propriedades e parâmetros do elemento de contato, discutidos na seção anterior, a metodologia completa envolve várias etapas, como mostra a figura 4.9.

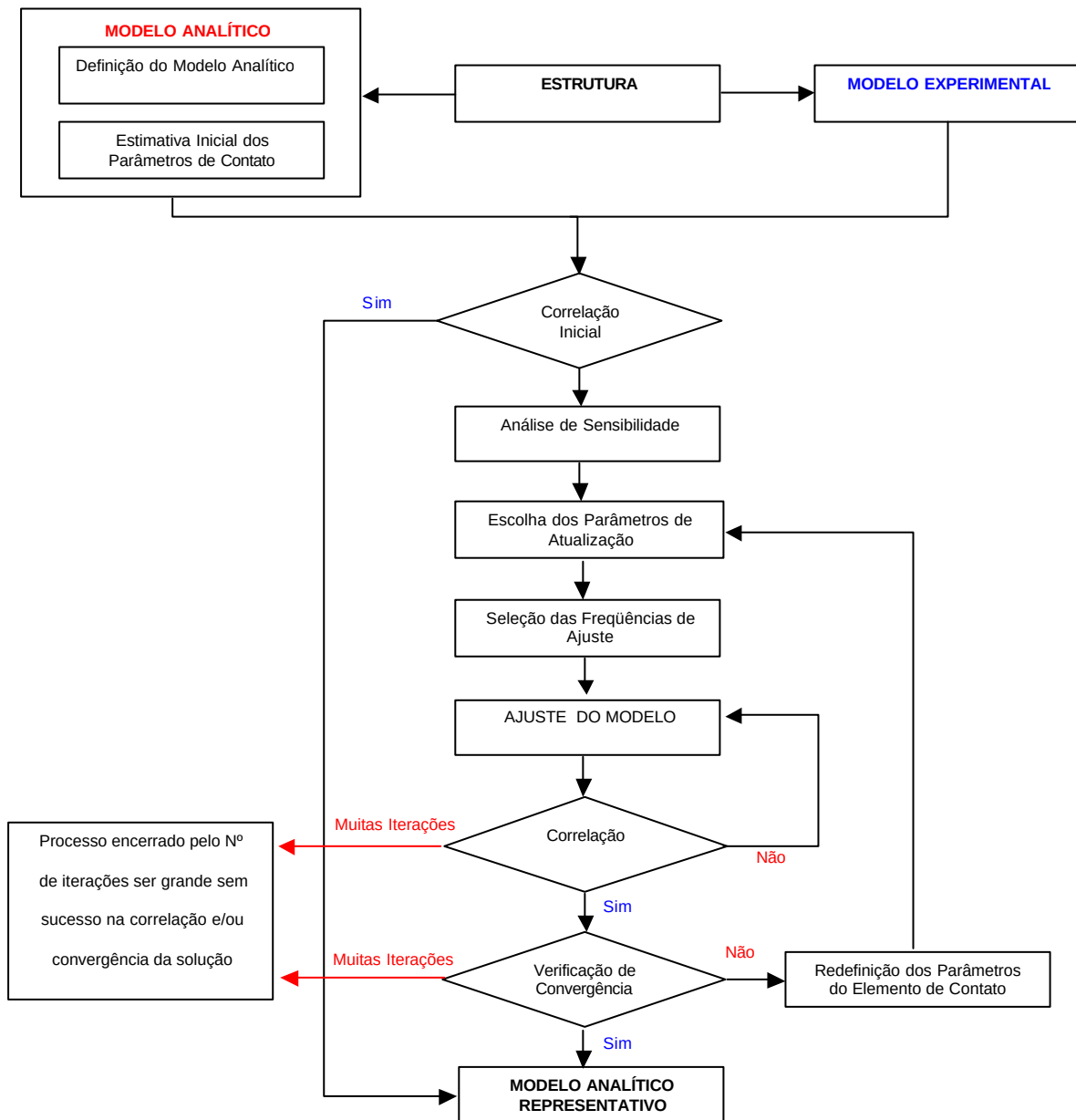


Figura 4.9: Fluxograma da metodologia de ajuste de modelos em problemas de contato

Como se pode observar na figura 4.9, dada uma determinada estrutura, obtém-se seus parâmetros modais, frequências naturais e modos próprios de duas formas. Utilizando análise modal, a partir de um modelo experimental real, e através de elementos finitos. Neste trabalho, o modelo analítico de elementos finitos é obtido utilizando o *software* comercial ANSYS.

O algoritmo de ajuste foi implementado utilizando a linguagem de programação Object Pascal em ambiente de desenvolvimento Delphi, objetivando um ambiente de programação visual, com uma linguagem orientada a objetos (OOP), e fornecer uma interface amigável para o usuário. Uma biblioteca de ligação dinâmica (DLL) foi implementada em linguagem C++ com as rotinas básicas para a leitura dos arquivos binários gerados pelo ANSYS, os quais armazenam as matrizes de massa, rigidez, modos e frequências naturais.

Ao se obter o modelo analítico considerando o contato, é necessário fazer uma estimativa inicial dos parâmetros do elemento de contato, por exemplo, determinar os melhores valores possíveis para os parâmetros KN e KT, de forma que uma determinada solução converge e que não haja muita penetração entre os corpos.

Definidos os dois modelos, os parâmetros modais do modelo experimental são correlacionados com os parâmetros modais do modelo de elementos finitos (analítico), caso estes parâmetros estejam bem correlacionados o processo de ajuste não é utilizado, significando que o modelo analítico que representa satisfatoriamente o modelo real. Havendo a necessidade de ajustar o modelo analítico, antes são necessárias inicialmente três etapas, como segue:

- **Análise de Sensibilidade** – Consiste em fazer uma análise de sensibilidade dos parâmetros de atualização em relação aos autovalores, com o objetivo de definir quais parâmetros do modelo analítico serão atualizados. Como discutido, os parâmetros mais sensíveis em relação aos autovalores são fortes candidatos a atualização;
- **Escolha dos Parâmetros de Atualização** – Baseando-se na análise de sensibilidade e na experiência do dinamicista, definir os parâmetros do modelo analítico a serem ajustados;
- **Seleção das Frequências de Ajuste** – Nesta etapa, deve-se escolher um conjunto de frequências de ajuste de forma a fornecer uma matriz de receptância de referência, contendo de forma balanceada, todas as informações relevantes contida na matriz de receptância medida na faixa de frequência em análise.

Após as três etapas anteriores a rotina de ajuste de modelo pode agora ser utilizada. Esta rotina fornece as variações dos parâmetros do modelo analítico a serem aplicadas.

Assim, um novo modelo analítico é obtido e novamente correlacionado com o modelo experimental. Se os modelos, ainda apresentarem uma baixa correlação, a rotina de ajuste é novamente utilizada, e este processo é repetido iterativamente até que os modelos estejam satisfatoriamente correlacionados ou um número de iterações muito grande é utilizado, significando que não é possível fazer o ajuste do modelo.

No caso de haver uma boa correlação entre os modelos analítico ajustado e experimental, é necessário fazer uma verificação de convergência, pois o modelo ajustado envolve elementos de contato, e estes elementos, como discutido anteriormente, possuem parâmetros que influenciam na convergência da solução. Se o modelo ajustado passar no teste de convergência, significa que o modelo analítico ajustado representa satisfatoriamente o modelo real. Entretanto, se o modelo não passar no teste de convergência deve-se redefinir os parâmetros do elemento de contato e/ou selecionar um outro conjunto de parâmetros de atualização. Este processo também é repetido iterativamente até que um modelo analítico represente satisfatoriamente o experimental e que este passe no teste de convergência. É necessário observar que, se este processo utiliza um número muito grande de iterações sem solução, conclui-se que não é possível ajustar o modelo, e então, o processo de ajuste se encerra.

4.8 – Considerações Finais

Neste capítulo, foi apresentada a metodologia para o ajuste de modelos envolvendo estruturas em contato bem como uma breve discussão a respeito da formulação do elemento de contato e a descrição da formulação do processo de ajuste de modelos baseado nas FRF(s). No próximo capítulo são discutidas várias situações de ajuste utilizando dados simulados com o objetivo de testar e validar a metodologia proposta implementada.

Capítulo 5

SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Nos capítulos anteriores foram discutidos os conceitos básicos para o desenvolvimento do trabalho e os principais aspectos envolvidos na formulação do problema de contato, assim como a metodologia de ajuste proposta. Este capítulo tem como objetivo proceder a validação do código implementado, bem como discutir o funcionamento e desempenho da metodologia utilizando dados simulados. São várias situações e características da metodologia, tais como:

- Influência da escolha dos parâmetros de atualização e frequências de ajuste;
- A influência dos parâmetros do elemento de contato na solução do problema.

Neste contexto, diferentes testes são desenvolvidos. Inicialmente é discutido o ajuste de uma viga simples, buscando analisar e validar a metodologia de ajuste baseado nas FRF(s). Em seguida, é feita uma análise estática de uma estrutura formada por duas vigas em contato, para que sejam identificados os melhores valores para os parâmetros do elemento de contato do modelo de elementos finitos. Por fim, é discutido o ajuste de modelos envolvendo a condição de contato, em que diferentes situações são analisadas com o objetivo principal de validar a metodologia de ajuste de modelos em problemas de contato.

O *software* comercial ANSYS é utilizado para gerar o modelo de elementos finitos e o modelo experimental, aqui chamado de modelo pseudo-experimental. Desta forma, o modelo de referência experimental (pseudo-experimental) é definido a partir dos próprios dados do modelo de elementos finitos. Para que exista uma discrepância entre os modelos, são introduzidas pequenas alterações nos parâmetros do modelo original de elementos finitos.

5.1 – Ajuste de Modelo Não Envolvendo Contato

Antes de aplicar o ajuste de modelos em estruturas em contato, é conveniente ajustar um modelo que não envolva o contato, para verificar o comportamento da metodologia e posteriormente estender para o problema de contato, em que serão ajustados os parâmetros dos elementos de contato. O problema neste tópico a ser simulado consiste em uma viga de 500 mm de comprimento e seção transversal de 40 mm x 10 mm, engastada em uma de suas extremidades, como mostra a figura 5.1.

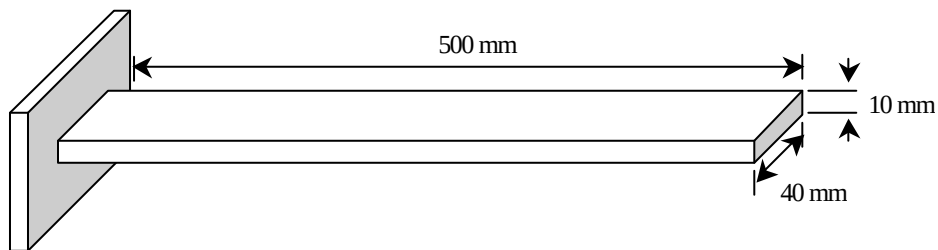


Figura 5.1: Estrutura do tipo viga simples engastada em uma das extremidades

O material utilizado na estrutura é aço ABNT 1010, com as principais propriedades descritas na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Propriedades do material

Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade	210e9 N/m ²
Coefficiente de Poisson	0,3
Densidade	7860 Kg/m ³

A estrutura é modelada utilizando o elemento PLANE42, o qual modela sólidos em duas dimensões, possui 4 nós e dois graus de liberdade em cada nó (translação na direção X e Y). A figura 5.2 ilustra a estrutura discretizada, que possui 10 elementos, 22 nós e 40 graus de liberdade.

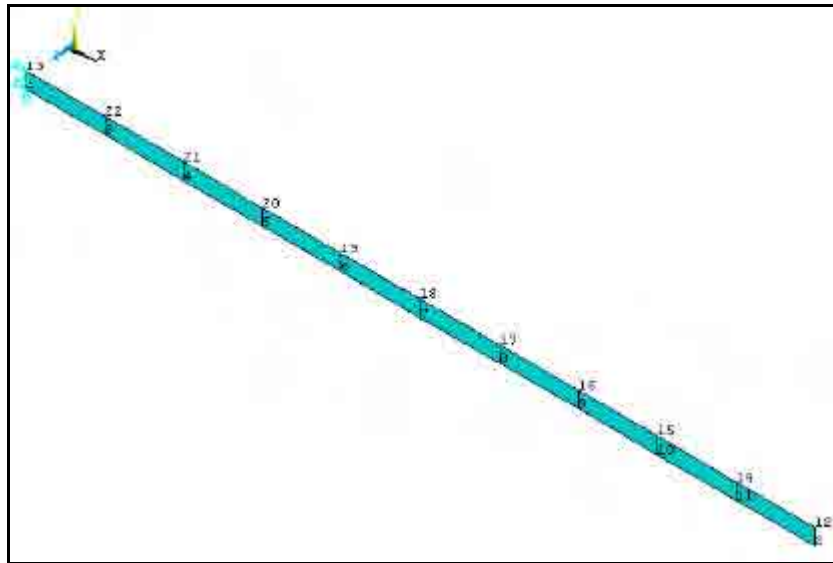


Figura 5.2: Viga discretizada

O primeiro teste de ajuste (caso 1), a estrutura foi excitada no nó 12, na direção Y e as respostas medidas em todos os nós em todas as direções. Para gerar a discrepância entre os modelos, o modelo analítico é alterado reduzindo 52% o valor do módulo de elasticidade e 17% o valor da densidade do modelo original de elementos finitos. A figura 5.3 mostra a função de resposta em frequência do modelo analítico em vermelho, e a do modelo pseudo-experimental em azul representando o modelo experimental. A superposição das FRF(s) mostra claramente a discrepância das FRF(s) dos modelos.

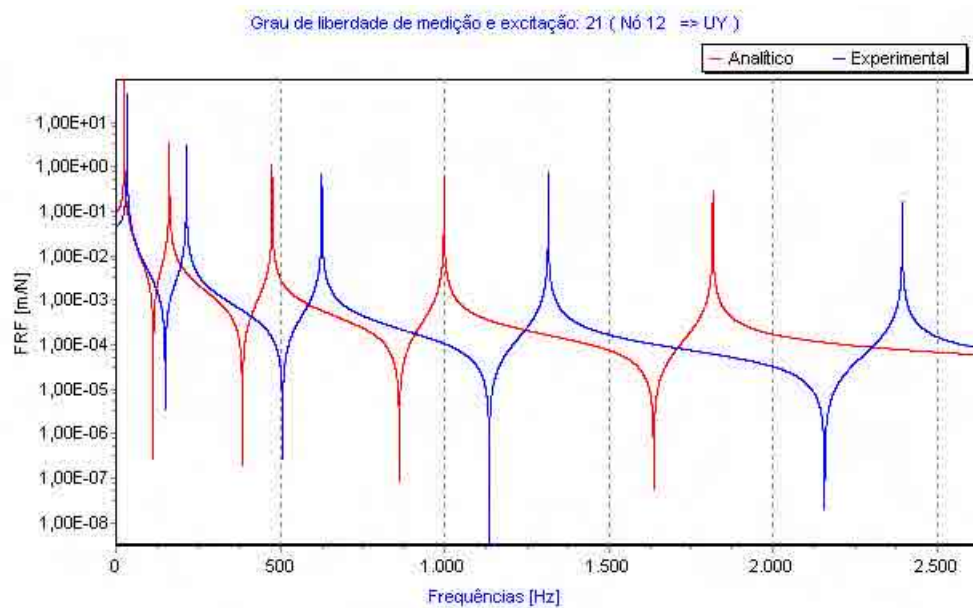


Figura 5.3: FRF(s) analítica e pseudo-experimental – Caso 1 Viga Simples

A tabela 5.2 mostra as 5 primeiras frequências de ressonâncias de cada modelo e as diferenças relativas entre elas. Existe uma grande variação das frequências, entretanto, os modos permanecem perfeitamente correlacionados, como pode ser observado pelos MAC-valores.

Tabela 5.2: Correlação inicial entre os modelos Pseudo-Experimental e Analítico – Caso 1 Viga Simples

Modo	Modelo Pseudo-Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{\omega^A - \omega^E}{\omega^E}$ (%)	MAC (%)
1	33,43	25,37	-24,12	100,00
2	214,09	162,46	-24,12	100,00
3	626,11	475,11	-24,12	100,00
4	1314,98	997,84	-24,12	100,00
5	2392,67	1815,63	-24,12	100,00

A escolha dos parâmetros de ajuste, conforme discutido anteriormente, depende de uma análise de sensibilidade e do conhecimento do analista a respeito do problema.

Em uma situação prática poderia não se saber ao certo qual, ou quais parâmetros do modelo devem ser atualizados. A análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo em relação aos autovalores nos dá uma noção de quais parâmetros são candidatos à atualização, pois os parâmetros mais sensíveis aos autovalores são bons candidatos para o ajuste. A figura 5.4 ilustra o cálculo das sensibilidades médias com relação aos 5 primeiros modos do modelo analítico.

Como se pode notar na figura 5.4, os parâmetros, módulo de elasticidade e densidade são bons candidatos para serem ajustados, pois são bastante sensíveis em relação aos autovalores.

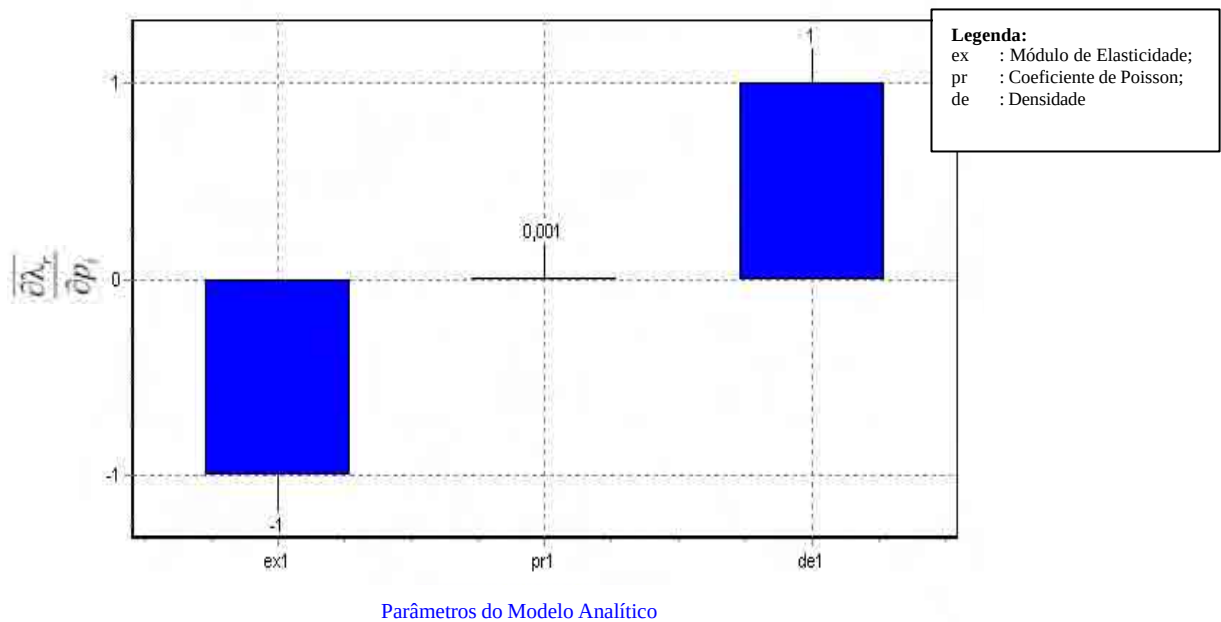


Figura 5.4: Sensibilidades do modelo analítico de viga simples

Para este primeiro caso, são escolhidos para a atualização os dois parâmetros alterados, o módulo de elasticidade e a densidade. Neste caso, o *software* implementado de ajuste de modelos procedeu o ajuste do modelo corretamente, com apenas uma iteração. As frequências de ajuste utilizadas foram 1.352,83 Hz e 2.438,51 Hz.

A tabela 5.3 mostra os valores dos parâmetros do modelo analítico antes e depois do ajuste, com os valores do modelo pseudo-experimental.

Tabela 5.3: Comparação entre os valores dos parâmetros analíticos com o de referência – Caso 1 Viga Simples

Parâmetro	Modelo Analítico		Modelo Pseudo-Experimental
	Valores Iniciais	Valores Ajustados	
Módulo de Elasticidade	100e9	209,99e9	210e9
Densidade	6500	7859,99	7860

Um segundo teste (caso 2), ainda com relação à viga simples, foi realizado objetivando verificar o efeito da escolha de um parâmetro de ajuste diferente do parâmetro modificado no modelo original e uma redefinição das frequências de ajuste. Neste teste, o valor da densidade é alterado para 7.000 Kg/m³ e o valor do módulo de elasticidade permanece igual

ao valor do modelo de referência. A discrepância entre os modelos, para este caso, pode ser verificada na figura 5.5 e tabela 5.4, através da sobreposição das FRF(s) analítica e experimental e pelas diferenças relativas das respectivas frequências de ressonância.

Tabela 5.4: : Correlação inicial entre os modelos Pseudo-Experimental e Analítico – Caso 2 Viga Simples

Modo	Modelo Pseudo-Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{w^A - w^E}{w^E} (\%)$	MAC (%)
1	33,43	35,42	5,96	100,00
2	214,09	226,86	5,96	100,00
3	626,11	663,46	5,96	100,00
4	1314,98	1393,41	5,96	100,00
5	2392,67	2535,39	5,96	100,00

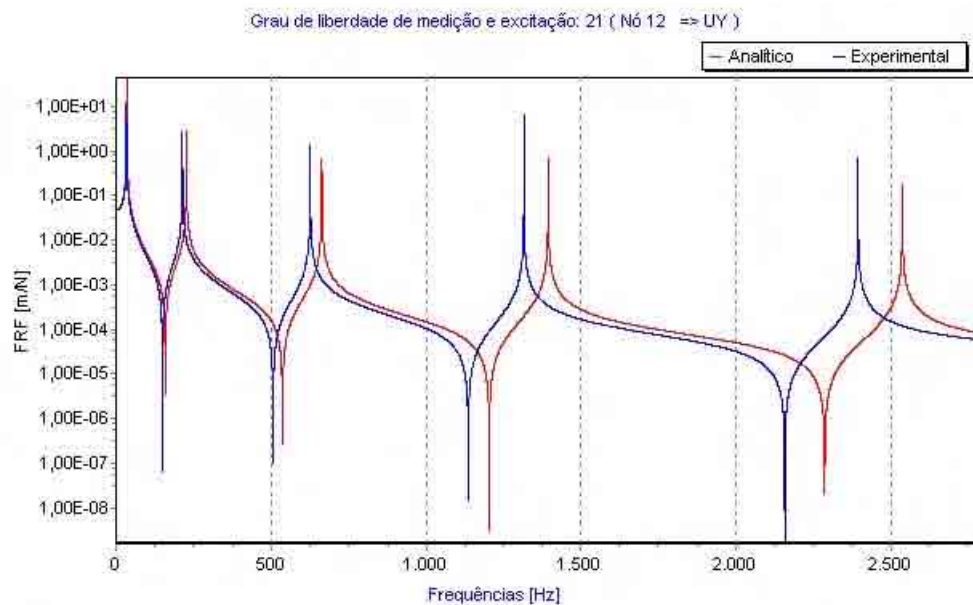


Figura 5.5: FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental – Caso 2 Viga Simples

O objetivo neste caso é verificar o ajuste do módulo de elasticidade pela compensação do valor da densidade. Efetuando alguns testes de ajuste neste modelo, notou-se que a escolha da frequência de ajuste é bastante sensível para a convergência, diferentemente do caso anterior, em que o processo mostrou estável para as diferentes frequências escolhidas. Num primeiro momento foram escolhidas as frequências 2.360,86 Hz e 2.339,98 Hz, e o processo de

ajuste não melhorou a correlação dos modelos. Utilizando a frequência de ajuste 1.290,19 Hz, após uma iteração as diferenças relativas de frequências caíram de 5,96% para 0,47%, e o valor do módulo de elasticidade foi modificado de $210\text{e}9 \text{ N/m}^2$ para $188,8\text{e}9 \text{ N/m}^2$. Observando a superposição das FRF(s) na figura 5.6, nota-se que a diferença de amplitude entre as FRF(s) analítica em vermelho e pseudo-experimental em azul após a primeira iteração, é muito pequena para a frequência de ajuste igual a 1.290,19 Hz. Fazendo uma redefinição da frequência de ajuste de 1.290,19 Hz para 1.339,89 Hz a diferença de amplitude nesta nova frequência entre as FRF(s) analítica e pseudo-experimental é maior.

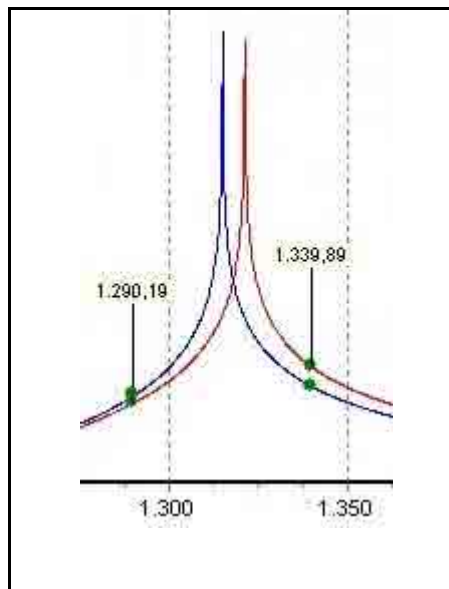


Figura 5.6: Frequências de ajuste utilizadas na primeira e segunda iteração – Caso 2 Viga Simples

Com esta nova redefinição de frequência de ajuste, a rotina de ajuste reduziu as diferenças relativas de frequências entre os modelos de 0,4% para 0,05% e o valor do módulo de elasticidade foi modificado de $188,8\text{e}9 \text{ N/m}^2$ para $187,2\text{e}9 \text{ N/m}^2$, tornando a discrepância entre os modelos, ainda menor. A tabela 5.5 ilustra o avanço do processo de ajuste deste modelo, de acordo com as iterações e as frequências de ajuste selecionadas.

A figura 5.7 mostra a superposição das FRF(s) analítica e pseudo-experimental após a segunda iteração de ajuste. Nota-se nesta figura a melhoria da representatividade do modelo.

Tabela 5.5: Avanço do processo de ajuste – Caso 2 Viga Simples

	Modelo Analítico	1º Iteração Freq. 1.290,19 Hz	2º Iteração Freq. 1.339,89 Hz
Mód. de Elasticidade	210e9	188,8e9	187,2e9
$\frac{w^A - w^E}{w^E} (\%)$	5,96 %	0,47 %	0,05 %

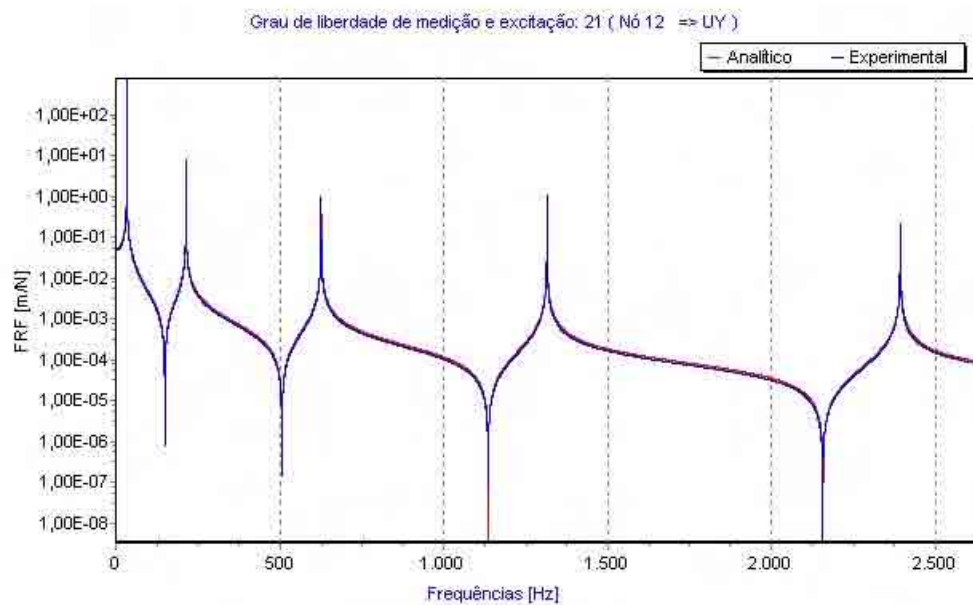


Figura 5.7: FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental após 2 iterações de ajuste – Caso 2 Viga Simples

Neste teste, foi observado que é possível ajustar um modelo escolhendo um parâmetro diferente do parâmetro modelado incorretamente. No caso, o módulo de elasticidade foi ajustado compensando o valor da densidade.

Adicionalmente, um terceiro teste (caso 3) foi realizado, agora objetivando ajustar a densidade pela compensação do módulo de elasticidade. Assim, fixou-se o valor da densidade e o valor do módulo de elasticidade foi alterado de 210e9 N/m² para 100e9 N/m². Neste terceiro teste, o processo de ajuste se estabilizou após 2 iterações e a frequência de ajuste utilizada foi 1.352,53 Hz. A tabela 5.6 mostra o avanço do ajuste do modelo deste terceiro caso.

Tabela 5.6: Avanço do processo de ajuste – Caso 3 Viga Simples

	Modelo Analítico	1º Iteração	2º Iteração
Densidade	7860	3789,56	3787,58
$\frac{w^A - w^E}{w^E} (\%)$	-30,99 %	-0,62 %	-0,59 %

Embora a diferença das frequências de ressonância reduziu de -30,99% para -0,59%, nota-se nitidamente através das FRF(s) (figura 5.8) a discrepância em relação ao comportamento dos modelos.

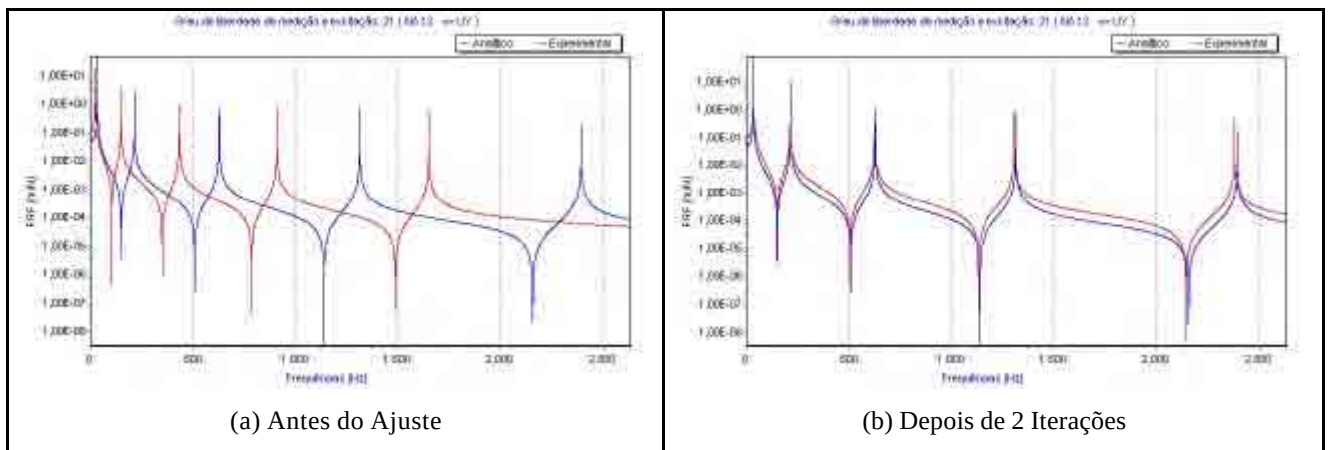


Figura 5.8: FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental antes e após o ajuste – Caso 3 Viga Simples

Percebe-se que dependendo do caso, é possível ajustar o modelo escolhendo para o ajuste um outro parâmetro. Entretanto, em outros casos a escolha de um parâmetro errado, o processo de ajuste pode levar a um modelo com frequências bem próximas às do modelo experimental, e até com os MAC-valores iguais a 100%. Mas, o comportamento das FRF(s) deste modelo pode ser diferente do comportamento das FRF(s) do modelo experimental.

Com os resultados apresentados, conclui-se que a rotina de ajuste está bem implementada. Pois os resultados obtidos são compatíveis com os resultados esperados. O próximo passo, na avaliação da metodologia implementada, é realizar testes com um modelo de elementos finitos utilizando elementos de contato.

5.2 – Ajuste de Modelo Envolvendo Contato

Nesta seção a condição de contato é analisada com o objetivo de identificar os melhores parâmetros iniciais do elemento de contato, suas opções e também com o objetivo de validar a rotina implementada e a metodologia de ajuste de modelos para problemas de contato. Para tanto, inicialmente uma estrutura formada por duas peças em contato é definida. Em seguida é feita uma análise estática da estrutura em contato para identificar os melhores valores para os parâmetros KN e KT do elemento de contato. Por fim é simulado o modelo pseudo-experimental, envolvendo elementos de contato, e o ajuste do modelo analítico é realizado.

5.2.1 – Estrutura Formada por Duas Peças em Contato

A estrutura a ser utilizada nas análises de contato consiste em duas vigas idênticas à viga ilustrada na figura 5.1 e propriedades descritas na tabela 5.1. Essas vigas estão em contato em uma região de 25 cm de comprimento por 4 cm de largura, e ambas estão engastadas em suas extremidades, como ilustra a figura 5.9.

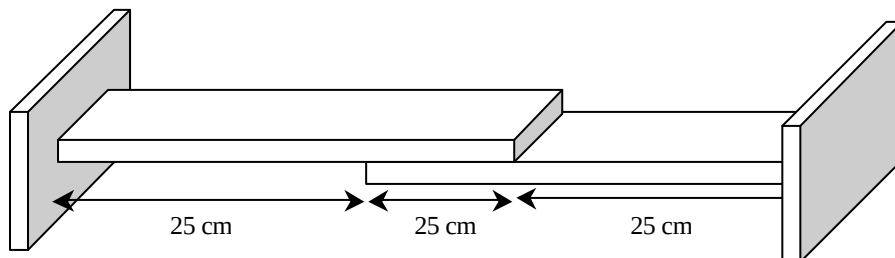


Figura 5.9: Estrutura formada por duas peças em contato

A modelagem por elementos finitos da estrutura ilustrada na figura 5.9 é feita utilizando o elemento PLANE42, como na análise da estrutura mostrada na figura 5.1. Para levar em consideração o contato entre as peças, na região de contato é utilizado o elemento CONTAC48. A figura 5.10 mostra a estrutura discretizada, na qual é possível observar os elementos de contato (CONTAC48), representados pelo número 3, e os elementos PLANE42 representados pelo número 1. O modelo analítico neste caso possui 20 elementos, 44 nós e 80 graus de liberdade.

Diferentemente da maioria dos elementos finitos convencionais, para os elementos de contato, deve-se apenas definir os nós de contato e nó alvo. Nos testes que seguem, os nós de contato (K) são definidos na parte inferior da viga de cima e os nós alvos (I e J) na parte superior da viga de baixo.

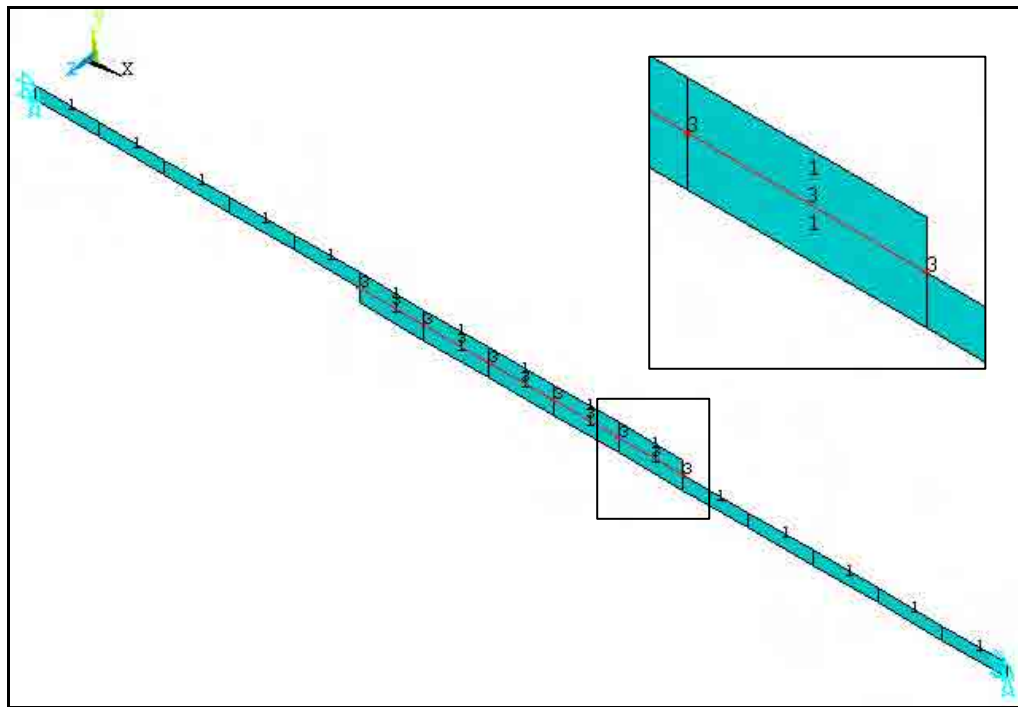


Figura 5.10: Estrutura formada por duas peças em contato discretizada

Neste caso, a análise envolve a condição de contato, em que se deve atentar para as propriedades iniciais do elemento de contato e suas opções. O primeiro passo, portanto, é definir o tipo de atrito utilizado no contato, ou seja, desconsiderar o atrito, utilizar o atrito elástico de Coulomb ou o atrito rígido de Coulomb.

A escolha do tipo de atrito a ser utilizado deve ser feita levando em consideração o tipo de estrutura, superfície em contato e tipo de material utilizado. Entretanto, também se deve levar em consideração o processo de ajuste do modelo, ou seja, em uma situação real de ajuste, deve-se utilizar o tipo de atrito que melhor adapte à região de contato da estrutura física. Para os modelos simulados neste capítulo o tipo de atrito utilizado será o atrito elástico de Coulomb, pois a utilização deste tipo de atrito permite investigar também a influência da propriedade rigidez tangencial de contato (KT) do elemento de contato.

O próximo passo na definição do modelo envolvendo elementos de contato, é definir os melhores valores para os parâmetros; Rigidez normal de contato (KN) e Rigidez

tangencial de contato (KT), o qual é realizado por meio de uma análise estática do problema, como discutido a seguir.

5.2.2 – Análise Estática do Problema de Contato

A análise estática do problema de contato, realizada neste presente trabalho, tem como objetivo principal identificar os melhores valores para os parâmetros KN e KT do elemento de contato, e também, tem a utilidade de servir como uma ferramenta de teste de convergência, visto que, o valor da propriedade rigidez normal de contato tem grande influência na convergência das soluções.

Inicialmente, o valor da rigidez normal de contato (KN) é definido como o mesmo valor do módulo de elasticidade, e o valor da rigidez tangencial de contato (KT) é definido 100 vezes menor que o valor do parâmetro KN. A tabela 5.7 mostra as propriedades dos elementos (PLANE42) e as propriedades iniciais dos elementos de contato (CONTAC48).

Tabela 5.7: Propriedade dos elementos PLANE42 e CONTAC48

Elemento PLANE42	
Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade	210e9 N/m ²
Coeficiente de Poisson	0,3
Densidade	7860 Kg/m ³
Elemento CONTAC48	
Propriedade	Valor
Rigidez Normal de Contato (KN)	210e9 N/m ²
Rigidez Normal de Contato (KT)	210e7 N/m ²
Tolerância de incremento da linha alvo (TOLS)	10%

Baseando-se em observações de análises do modelo analítico de contato, notou-se que a solução do problema, sem aplicar carga, sempre converge utilizando valores para a propriedade KN da ordem de 10^{-9} a 10^9 o valor do módulo de elasticidade do material, e também sempre fixando o valor de KT em 10^{-2} vezes o valor de KN. Entretanto, fazendo-se uma análise estática da estrutura e aplicando uma determinada força, notou-se que utilizando as propriedades

da tabela 5.7 a solução não converge. Diminuindo o valor de KN de 10 em 10 vezes, e conseqüentemente o valor de KT, chegou-se a conclusão que, para que haja convergência da solução, do modelo em questão, é necessário que o valor da rigidez normal de contato seja 10^{-4} vezes do módulo de elasticidade, e o valor da rigidez tangencial fosse 10^{-2} o valor da rigidez normal de contato.

A análise utilizada para chegar a esta conclusão considerou as propriedades descritas na tabela 5.8, e uma força de -10.000 N aplicada na direção Y do nó 18.

Tabela 5.8 : Propriedades dos elementos PLANE42 e CONTAC48 utilizadas para convergência

Elemento PLANE42	
Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade	$210e9 \text{ N/m}^2$
Coefficiente de Poisson	0,3
Densidade	7860 Kg/m^3
Elemento CONTAC48	
Propriedade	Valor
Rigidez Normal de Contato (KN)	$210e5 \text{ N/m}^2$
Rigidez Normal de Contato (KT)	$210e3 \text{ N/m}^2$
Tolerância de incremento da linha alvo (TOLS)	10%

Esta análise estática nos permite concluir que, no processo de ajuste de modelos envolvendo o contato, deve-se atentar para os valores de KN e KT, para uma determinada força aplicada, pois mesmo obtendo um modelo analítico representativo, através do ajuste do modelo, dependendo dos valores de KN e KT, a solução pode não convergir para uma determinada situação de carga.

5.2.3 – Ajuste de Modelos

Utilizando a estrutura ilustrada na figura 5.9, a qual representa duas vigas em contato, o ajuste de modelo agora é realizado com o objetivo de validar a rotina implementada e a metodologia de ajuste de modelos para problemas envolvendo o contato. Como no caso da

estrutura do tipo viga simples, um modelo pseudo-experimental obtido por elementos finitos é utilizado como modelo de referência.

Foram realizados vários testes de ajustes de modelos envolvendo o contato, porém com o objetivo de não estender muito o capítulo, serão discutidos a seguir os testes mais relevantes.

O primeiro teste (caso 1) consiste em demonstrar que o ajuste do modelo, escolhendo os parâmetros do elemento de contato (KN) e (KT) para o ajuste, é perfeitamente possível. As propriedades dos modelos são as mesmas descritas na tabela 5.9, onde as propriedades do elemento de contato foram definidas fazendo o teste de convergência.

Para gerar a discrepância entre os modelos, é introduzido um aumento, nas propriedades KN e KT do modelo analítico, de 10^4 vezes os valores originais. As propriedades do modelo analítico e do modelo pseudo-experimental são mostradas na tabela 5.9.

Tabela 5.9: Propriedades dos elementos PLANE42 e CONTAC48 – Caso 1 Vigas em Contato

Parâmetro	Modelo Analítico	Modelo Pseudo-Experimental
Elemento PLANE42		
Módulo de Elasticidade	210e9 N/m ²	210e9 N/m ²
Coeficiente de Poisson	0,3	0,3
Densidade	7860	7860
Elemento CONTAC48		
Rigidez Normal de Contato (KN)	210e9 N/m ²	210e5 N/m ²
Rigidez Tangencial de Contato (KT)	210e7 N/m ²	210e3 N/m ²

Neste teste a estrutura foi excitada no nó 12, direção Y, e medida em todos os nós também na direção Y. A tabela 5.10 mostra as 5 primeiras frequências de ressonâncias de cada modelo e as diferenças relativas entre elas. Existe uma grande variação das frequências, entretanto, os modos permanecem bem correlacionados, onde se pode notar através dos MAC-valores acima de 80%.

A figura 5.11 mostra a superposição das FRF(s) dos modelos analítico em vermelho e pseudo-experimental em azul. Nesta figura também é possível observar a discrepância entre os modelos.

Tabela 5.10: Correlação inicial – Caso 1 – Vigas em contato

Modo	Modelo Pseudo-Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{w^A - w^E}{w^E}$ (%)	MAC (%)
1	81,90	100,95	23,26	99,51
2	248,82	291,12	17,00	99,18
3	555,99	733,73	31,97	95,22
4	897,86	1100,86	22,61	94,35
5	1400,73	1720,48	22,83	90,65

A grande discrepância entre os modelos deve-se às diferenças da ordem de 10^4 dos parâmetros do elemento de contato (KN e KT). Outros testes foram realizados e notou-se que utilizando valores com pequenas alterações nos valores destas propriedades a discrepância entre os modelos não é tão acentuada. Isto também pode ser observado através do cálculo da sensibilidade dos parâmetros do modelo, na qual estes parâmetros são poucos sensíveis em relação aos autovalores. A figura 5.12 mostra o cálculo das sensibilidades médias com relação aos 5 primeiros modos do modelo analítico com elementos de contato.

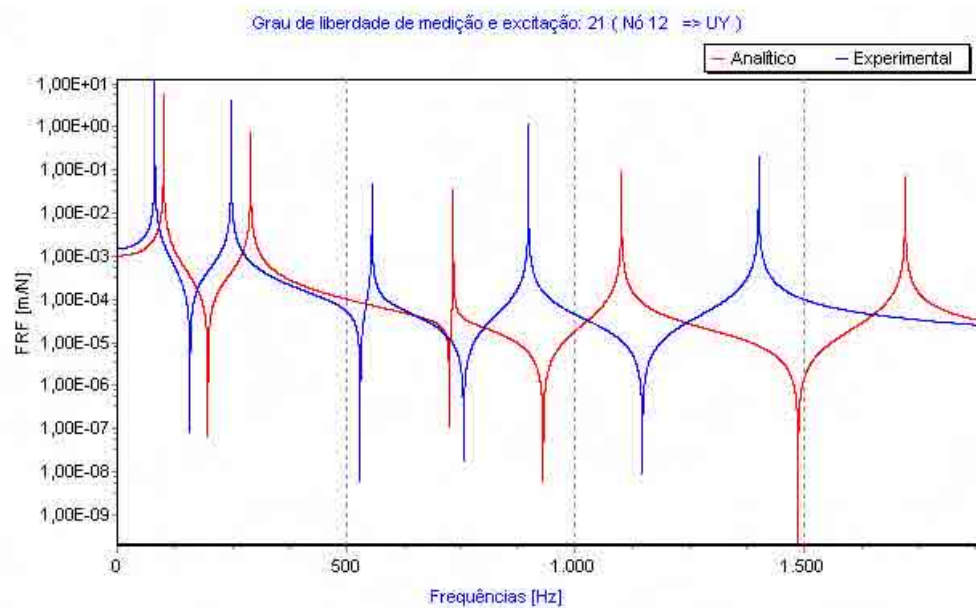


Figura 5.11: FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental – Caso 1 Vigas em Contato

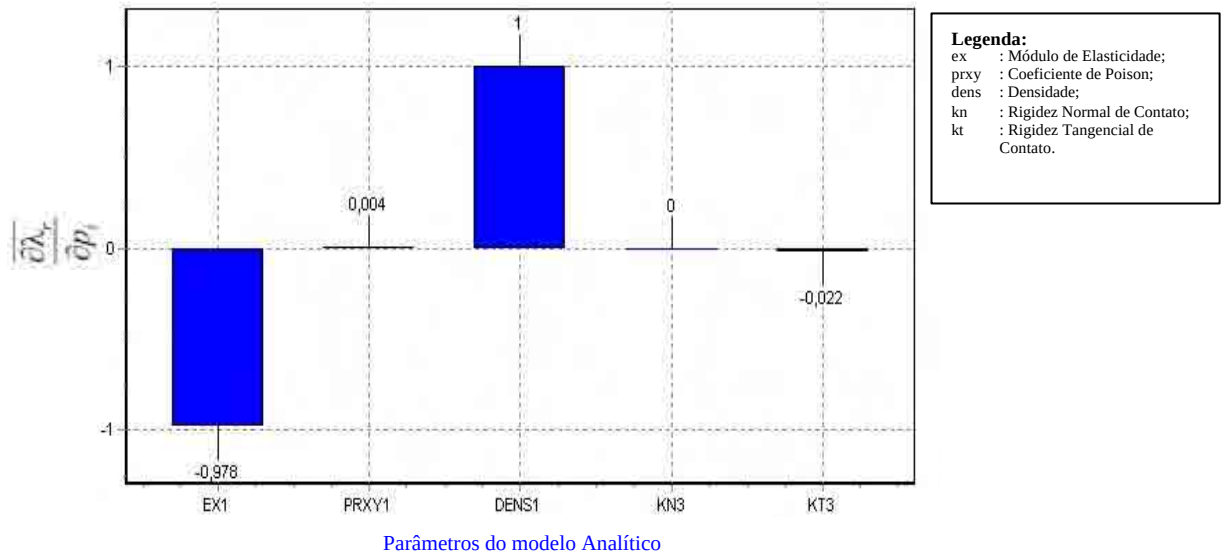


Figura 5.12: Sensibilidade da estrutura com elementos de contato

Para realizar o ajuste deste modelo, os parâmetros alterados (KN e KT) foram escolhidos para o ajuste. O ajuste do modelo foi realizado com apenas uma iteração. As frequências de ajuste utilizadas foram 69,67 Hz e 232,89 Hz. A tabela 5.11 mostra os valores dos parâmetros de contato do modelo original e ajustado. Como se pode observar nesta tabela os valores ajustados são praticamente os mesmos do modelo pseudo-experimental.

Tabela 5.11: Avanço dos parâmetros de atualização do elemento de contato – Caso 1 Vigas em Contato

Parâmetro	Modelo Analítico Original	Modelo Analítico Ajustado	Modelo Pseudo-Experimental
KN	210e9 N/m ²	210,001e5 N/m ²	210e5 N/m ²
KT	210e7 N/m ²	209,997e3 N/m ²	210e3 N/m ²

Em uma situação real de estruturas em contato, não se deve apenas considerar que o ajuste será feito selecionando os parâmetros do elemento de contato. Sendo assim, em um segundo teste (caso 2), uma relação entre o módulo de elasticidade do material e os parâmetros, rigidez normal de contato e rigidez tangencial de contato do elemento de contato, é utilizada.

Esta relação é obtida com base na análise estática discutida na seção 5.2.2. Nota-se que para haver convergência nesta análise, é necessário que o valor de KN seja 10.000 vezes menor que o valor do módulo de elasticidade do material, e que o valor de KT seja 100 vezes

menor o valor do parâmetro KN. Assim, neste segundo caso, uma nova regra é utilizada para o ajuste do modelo desta estrutura.

O parâmetro a ser ajustado agora, é o módulo de elasticidade do material. A cada alteração neste parâmetro, seja durante o processo de ajuste quanto na sua atualização após o processo, os parâmetros KN e KT serão também atualizados de acordo com as seguintes expressões:

$$KN = \frac{E}{10^4} \quad (5.1)$$

$$KT = \frac{KN}{10^2} \quad (5.2)$$

Na qual:

KN - Rigidez Normal de Contato;

KT - Rigidez Tangencial de Contato;

E - Módulo de Elasticidade do Material.

Para gerar a discrepância entre os modelos neste segundo caso, considera-se um modelo pseudo-experimental diferente. O valor do parâmetro KN, do modelo pseudo-experimental, foi aumentando de $210e5 \text{ N/m}^2$ para $210e7 \text{ N/m}^2$ e o valor do parâmetro KT também aumentado de $210e3 \text{ N/m}^2$ para $210e5 \text{ N/m}^2$. A tabela 5.12 mostra as propriedades consideradas para os modelos analítico e pseudo-experimental neste caso.

Tabela 5.12: Propriedades dos elementos PLANE42 e CONTAC48 o – Caso 2 Vigas em Contato

Parâmetro	Modelo Analítico	Modelo Experimental
Elemento PLANE42		
Módulo de Elasticidade	$210e9 \text{ N/m}^2$	$210e9 \text{ N/m}^2$
Coeficiente de Poisson	0,3	0,3
Densidade	7860	7860
Elemento CONTAC48		
Rigidez Normal de Contato (KN)	$210e5 \text{ N/m}^2$	$210e7 \text{ N/m}^2$
Rigidez Tangencial de Contato (KT)	$210e3 \text{ N/m}^2$	$210e5 \text{ N/m}^2$

A correlação inicial entre os modelos analítico e pseudo-experimental (tabela 5.13) mostra diferenças razoáveis entre as frequências de ressonância, já os valores de MAC são próximos a 100%.

Tabela 5.13: Correlação Inicial entre os modelos Pseudo-Experimental e Analítico – Caso 2 Vigas em Contato

Modo	Modelo Pseudo-Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{\omega^A - \omega^E}{\omega^E} (\%)$	MAC (%)
1	87,62	81,90	-6,53	99,97
2	272,69	248,82	-8,76	99,80
3	590,77	555,99	-5,89	99,86
4	956,62	897,86	-6,14	99,00
5	1488,62	1400,73	-5,90	98,38

Utilizando a frequência de ajuste 602,42 Hz no processo de ajuste deste modelo, com duas iterações o processo de ajuste estacionou-se. Neste caso os MAC valores não sofreram alterações e, como se pode observar na tabela 5.14, as diferenças de frequências foram reduzidas, porém há ainda discrepâncias entre os modelos.

Tabela 5.14: Diferenças de Frequências antes e depois do ajuste – Caso 2 Vigas em Contato

Modo	Pseudo- Experimental	Modelo Analítico Antes do Ajuste		Modelo Analítico Depois do Ajuste	
	ω^E (Hz)	ω^A (Hz)	$\frac{\omega^A - \omega^E}{\omega^E} (\%)$	ω^A (Hz)	$\frac{\omega^A - \omega^E}{\omega^E} (\%)$
1	87,62	81,90	-6,53	87,57	-0,05
2	272,69	248,82	-8,76	266,05	-2,44
3	590,77	555,99	-5,89	594,49	0,63
4	956,62	897,86	-6,14	960,03	0,36
5	1488,62	1400,73	-5,90	1497,72	0,61

Observando a figura 5.13, a qual ilustra a superposição das FRF(s) analítica e pseudo-experimental antes e após o ajuste, pode-se notar que embora as frequências de

ressonâncias aproximaram-se, o comportamento das FRF(s) dos modelos analítico e pseudo-experimental não é o mesmo. Este fenômeno é devido ao fato de que o ajuste foi feito selecionando um parâmetro diferente daquele responsável pela discrepância entre os modelos. O valor do módulo de elasticidade foi ajustado em torno de 14% do valor original e pelas expressões (5.1) e (5.2) os parâmetros KN e KT também foram alterados nesta proporção.

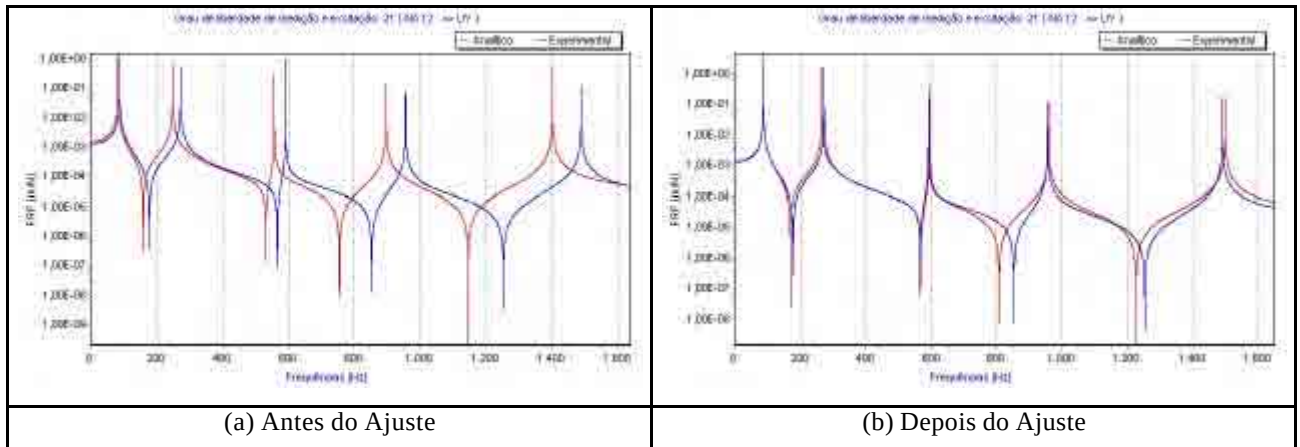


Figura 5.13: FRF(s) dos modelos experimental e analítico antes e depois do ajuste – Caso 2 Vigas em Contato

5.3 – Conclusões

Com a realização dos testes de ajuste apresentados neste capítulo, foi possível validar a rotina de ajuste de modelos implementada. Foram realizados ajustes de modelos em uma estrutura simples e em uma outra formada por duas peças em contato. Em ambas estruturas a rotina de ajuste se comportou de maneira eficiente. Notou-se também que é possível ajustar o modelo, encolhendo para o ajuste parâmetros diferentes daqueles responsáveis pela discrepância entre os modelos. Porém, em eventuais casos o ajuste destes modelos gera um outro modelo que pode até ter boa correlação com o modelo de referência em relação às frequências naturais e MAC-valores, mas com FRF(s) distintas.

Foram apresentadas duas maneiras de ajustar o modelo envolvendo a situação de contato. Na primeira, selecionou-se os parâmetros do elemento de contato para o ajuste, como qualquer outro parâmetro físico e/ou geométrico da estrutura. Já na segunda, levou-se em consideração, os resultados da análise estática realizada, onde se estabeleceu uma relação entre o módulo de elasticidade do material e os parâmetros do elemento de contato. Esta relação foi obtida com o objetivo de se obter convergência nas soluções estáticas do problema, pois os

parâmetros do elemento de contato influenciam na convergência das soluções. Assim, utilizando esta relação, o parâmetro ajustado foi o módulo de elasticidade e os valores dos parâmetros do elemento de contato foram obtidos em função deste módulo ajustado.

Pode-se concluir, portanto, que o ajuste de modelo em problemas de contato é possível utilizando-se a metodologia de ajuste de modelos proposta neste trabalho. Contudo, é indispensável avaliar e validar a metodologia em problemas reais. No próximo capítulo, são apresentados os resultados experimentais, onde o ajuste do modelo analítico é realizado utilizando dados medidos experimentalmente em laboratório.

Capítulo 6

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

No capítulo anterior, vários testes de ajuste de modelos, envolvendo e não envolvendo a situação de contato, foram realizados utilizando dados simulados. Com isto, foi possível avaliar a metodologia e validar o *software* de ajuste de modelos implementado, tanto para situações simples como também para situações envolvendo o problema de contato entre peças. Torna-se agora necessário avaliar a metodologia para situações reais, ou seja, comparar o modelo analítico com dados obtidos experimentalmente e, dependendo da correlação, ajustar o modelo de elementos finitos com base nos dados medidos. Neste capítulo, serão discutidos a correlação e o ajuste do modelo de elementos finitos de duas estruturas, uma estrutura simples e uma outra estrutura composta de duas peças em contato. Os dados utilizados como referência para o ajuste do modelo foram obtidos em testes experimentais de análise modal.

6.1 – Testes Experimentais

Dois experimentos científicos foram realizados, inicialmente foi analisada uma estrutura simples e posteriormente foi analisada uma estrutura mais complexa, em que os parâmetros modais obtidos levam em conta o efeito do contato entre as peças. Ambos os experimentos foram realizados no Laboratório de Vibrações e Instrumentação do Departamento de Engenharia Mecânica da Unesp – Campus de Ilha Solteira.

Os parâmetros modais foram estimados a partir das FRF(s) medidas utilizando o *software* de análise modal EMA*. Na tabela 6.1 são descritos os principais instrumentos utilizados nos experimentos.

* Programa de análise modal que utiliza o método de *Ibrahim* para extrair os parâmetros modais. Desenvolvido no Departamento de Engenharia Mecânica da Unesp – Campus de Ilha Solteira.

Tabela 6.1: Instrumentos utilizados nos experimentos

Itens	Especificações
Sistema de aquisição	Fabricante: Data Physics Corporation Signal Calc Ace – 32 bits Frequência máxima de operação: 20 KHz
Condicionador de sinais	Fabricante: PCB Piezotronics, Inc Banda de frequência: 0,15 Hz a 100 KHz Fonte de alimentação: Baterias
Microcomputador	Processador: AMD Duron 800 MHz Memória RAM: 256 MB
Martelo instrumentado	Fabricante: PCB Piezotronics, Inc. Faixa de força: 0 a 1000 lbf
Acelerômetro axial	Fabricante: PCB Piezotronics, Inc. Sensibilidade: 11 mV/g

Na figura 6.1 são mostrados o microcomputador utilizado e os principais instrumentos utilizados no experimento.



Figura 6.3(a) - Microcomputador



Figura 6.3(b) – Instrumentos utilizados no experimento

Figura 6.1: Instrumentos utilizados nos experimentos

6.2 – Modelo Experimental Número 1 – Viga Simples

A primeira estrutura analisada consiste em uma viga simples de 500 mm de comprimento e seção transversal de 31 mm x 4,5 mm, engastada em uma de suas extremidades, como ilustra a figura 6.2.

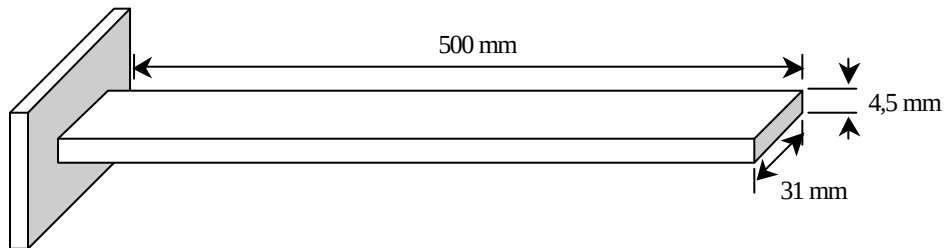


Figura 6.2: Modelo experimental número 1 – Viga simples

O material da viga é o aço ABNT 1010 com as propriedades descritas na tabela 6.2.

Tabela 6.2: Propriedades do Material

Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade	210e9 N/m ²
Coefficiente de Poisson	0,3
Densidade	7860 Kg/m ³

A viga foi engastada em uma mesa inercial, objetivando isolar a estrutura das vibrações do meio externo. A malha dos pontos de medida da estrutura consiste de 5 pontos a uma distancia de 100 mm cada. A excitação da estrutura é do tipo impulsiva aplicada no ponto número 2 na direção -Y utilizando um martelo instrumentado. A faixa de frequência ativa, ou seja, a faixa de frequência de aquisição do sinal é de 0 a 1000 Hz. As respostas foram medidas em todos os pontos, na direção +Y (exceto no ponto do engaste) utilizando acelerômetro axial, fig. 6.3.

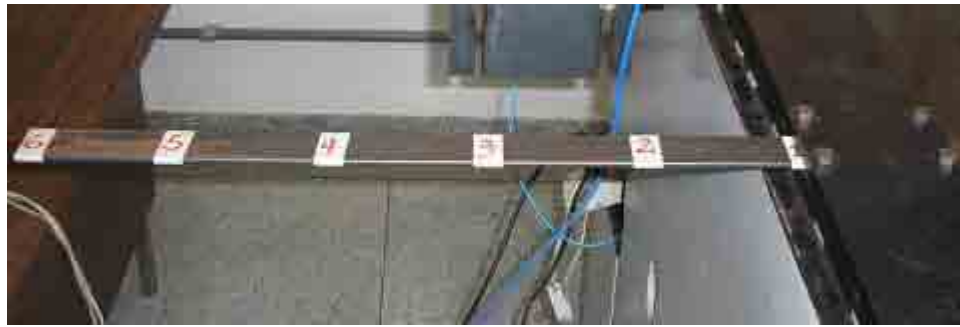


Figura 6.3: Pontos de medida – Viga simples

A fixação do acelerômetro na estrutura, e o ponto exato da entrada impulsiva mereceram especial atenção, pois a fixação irregular do acelerômetro ou uma entrada impulsiva fora do ponto escolhido pode acarretar distorção no sinal medido.

O principal objetivo deste primeiro teste foi obter uma base de dados experimental confiável para avaliar a metodologia proposta com dados reais. Conseqüentemente, foi escolhida uma estrutura simples cujas propriedades são bem definidas, e a modelagem é relativamente fácil, o que poderia fornecer uma base de dados consistente para avaliação da proposta a ser utilizada posteriormente em uma situação mais complexa envolvendo elementos de contato.

6.2.1 – Comparação e Ajuste do Modelo

Os dados obtidos experimentalmente são comparados com os dados extraídos a partir da modelagem por elementos finitos, denominado modelo analítico. O ajuste do modelo analítico, é realizado utilizando a rotina de ajuste de modelos, baseado nas FRF(s), implementada.

A modelagem da estrutura é feita utilizando elementos sólidos PLANE42, o qual possui graus de liberdade de translação nos eixos X e Y. A malha de elementos finitos do modelo analítico possui 50 elementos, 102 nós e 200 graus de liberdade. A figura 6.4 ilustra a distribuição da malha deste modelo.

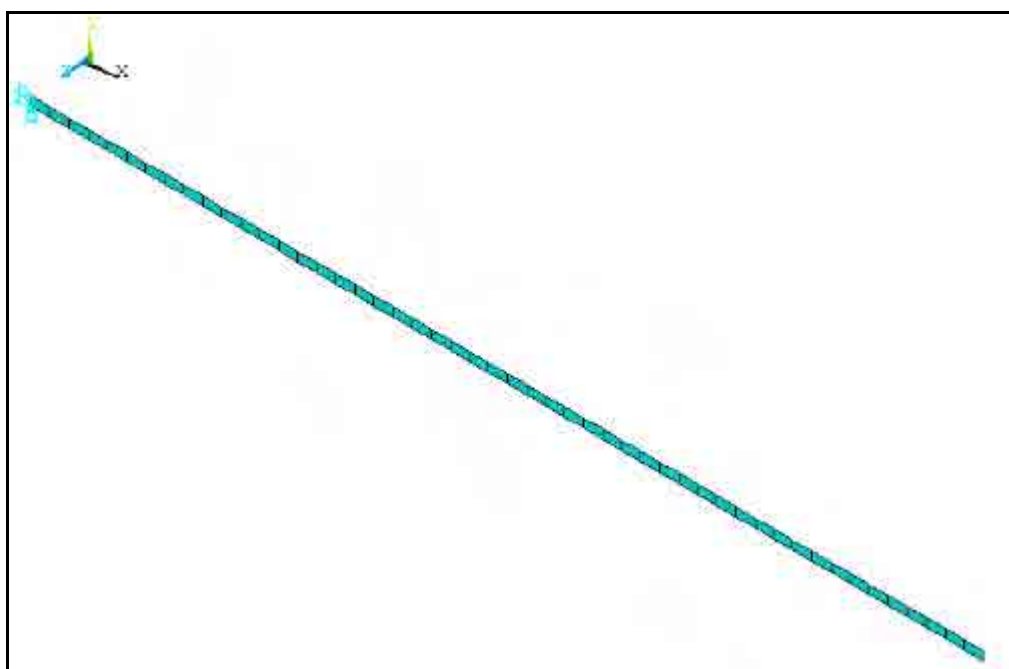


Figura 6.4: Malha de elementos finitos do modelo de viga simples

A diferença entre os resultados do modelo analítico e do modelo experimental é pequena, visto que, a estrutura é bastante simples e suas propriedades são bem definidas. A tabela 6.3 mostra a correlação inicial entre o modelo analítico e experimental, na faixa de frequência analisada.

Tabela 6.3: Correlação inicial – Viga simples

Modo	Modelo Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{w^A - w^E}{w^E} (\%)$	MAC (%)
1	14,90	15,03	0,87	90,53
2	94,00	94,25	0,26	99,61
3	262,80	264,23	0,54	90,51

A figura 6.5, mostra a superposição das FRF(s) experimental em azul e analítica em vermelho.

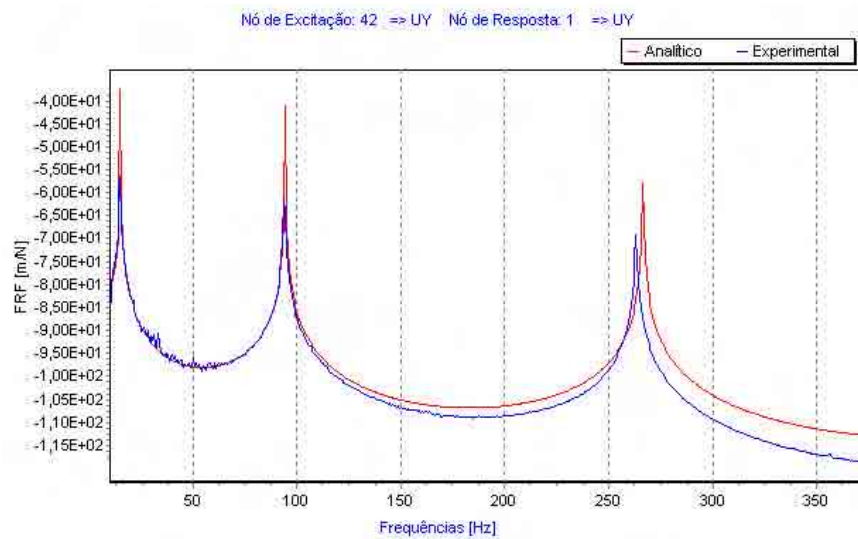


Figura 6.5: Superposição das FRF(s) experimental e analítica – Viga simples

Algumas tentativas de ajuste do modelo foram realizadas, selecionando como parâmetros de ajuste, o módulo de elasticidade e densidade do material, mas os resultados foram pouco significativos, visto que, o modelo já apresenta uma boa correlação e as diferenças de frequências são da mesma ordem da resolução da frequência experimental.

Uma segunda análise foi realizada agora introduzindo uma pequena alteração no modelo analítico para impor uma discrepância maior entre os modelos. O objetivo desta alteração imposta é, mais uma vez avaliar a metodologia e testar a rotina de ajuste implementada, só que agora utilizando dados experimentais. Para isto, o módulo de elasticidade do material do modelo original de elementos finitos foi reduzido em 14% e o modelo recalculado. A tabela 6.4 mostra a nova discrepância entre os modelos. Pode-se observar que, embora os MAC-valores são superiores a 90% indicando que os modos estão bem correlacionados, a diferença relativa de frequências naturais é acima de 6%, o que justifica o ajuste deste modelo.

Tabela 6.4: Correlação inicial (mod. analítico alterado) – Viga simples

Modo	Modelo Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{w^A - w^E}{w^E}$ (%)	MAC (%)
1	14,90	13,91	-6,61	90,53
2	94,00	87,25	-7,18	99,61
3	262,80	244,63	-6,91	90,51

Para fazer o ajuste deste modelo foram analisadas várias frequências de ajuste, e as frequências que tornaram o processo mais estável são próximas a 268 Hz. O parâmetro escolhido para ser atualizado foi o módulo de elasticidade alterado. Após duas iterações, a rotina de ajuste alterou o valor do módulo de elasticidade de 180e9 N/m² para aproximadamente 205e9 N/m². A tabela 6.5 mostra a final correlação entre os modelos.

Tabela 6.5: Correlação final (mod. analítico alterado) – Viga simples

Modo	Modelo Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{w^A - w^E}{w^E}$ (%)	MAC (%)
1	14,90	14,88	-0,12	90,53
2	94,00	93,32	-0,72	99,61
3	262,80	261,65	-0,44	90,51

A figura 6.6 mostra a superposição das FRF(s) dos modelos analítico e experimental antes e depois do ajuste. Nesta figura é possível observar uma melhoria do modelo analítico em termos de frequências de ressonâncias.

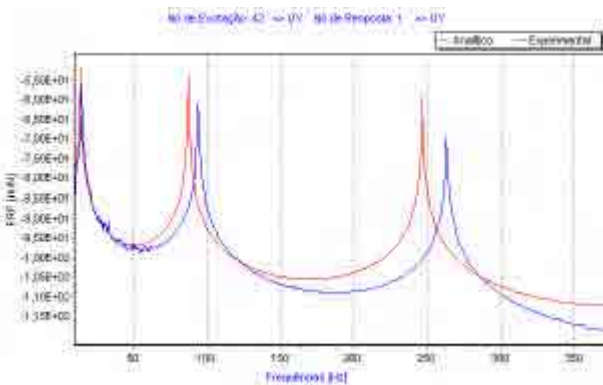


Figura 6.9(a) – Antes do Ajuste

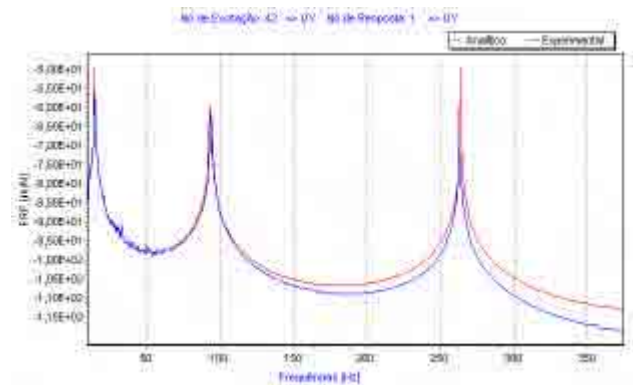


Figura 6.9(b) – Após o Ajuste

Figura 6.6: Superposição das FRF(s) experimental e analítica após o ajuste – Viga simples

Nas primeiras tentativas de ajuste do modelo, a potencialidade da metodologia rotina de ajuste implementada, não pode ser comprovada, pois as diferenças de frequências entre os modelos eram da ordem da resolução da frequência experimental. O ajuste do modelo, com a nova discrepância imposta, possibilitou observar a potencialidade da metodologia para uma estrutura simples utilizando dados experimentais.

6.3 – Modelo Experimental Número 2 – Vigas em Contato

O segundo teste experimental utiliza uma estrutura composta por duas vigas em contato. Uma das vigas possui 260 mm de comprimento e seção transversal de 31 mm x 4,5 mm. A outra possui 244 mm de comprimento e também seção transversal de 31 mm x 4,5 mm. A viga de 260 mm está engastada em uma de suas extremidades em uma mesa inercial, como no caso anterior, e a outra extremidade está em contato com a viga de 244 mm por uma região de 64 mm, como ilustra a figura 6.7.

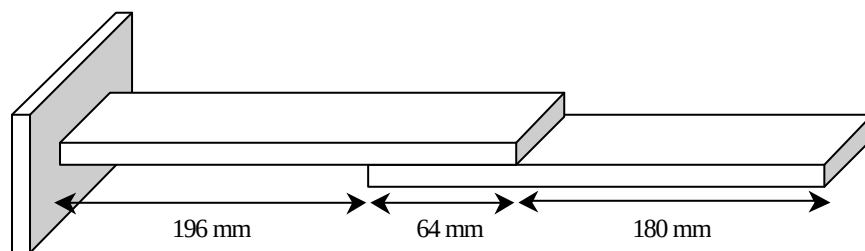


Figura 6.7: Modelo experimental número 2 – Vigas em contato

O material das duas vigas é o mesmo utilizado no modelo experimental número 1, com as propriedades descritas na tabela 6.2. A união das vigas é feita utilizando 4 parafusos de 5 mm de diâmetro por 19 mm de comprimento cada. A figura 6.8 ilustra a união entre as vigas. O sistema de aquisição e instrumentos utilizados neste experimento são os mesmos do caso anterior, tabela 6.1 e figura 6.1.



Figura 6.8(a) – Visão de cima da estrutura



Figura 6.8(b) – Visão de baixo da estrutura

Figura 6.8: União entre as vigas

A malha dos pontos de medida desta estrutura está dividida em 6 pontos a uma distância de 70 mm cada, onde a numeração dos pontos inicia-se na extremidade livre da viga, como pode ser observado na figura 6.9.

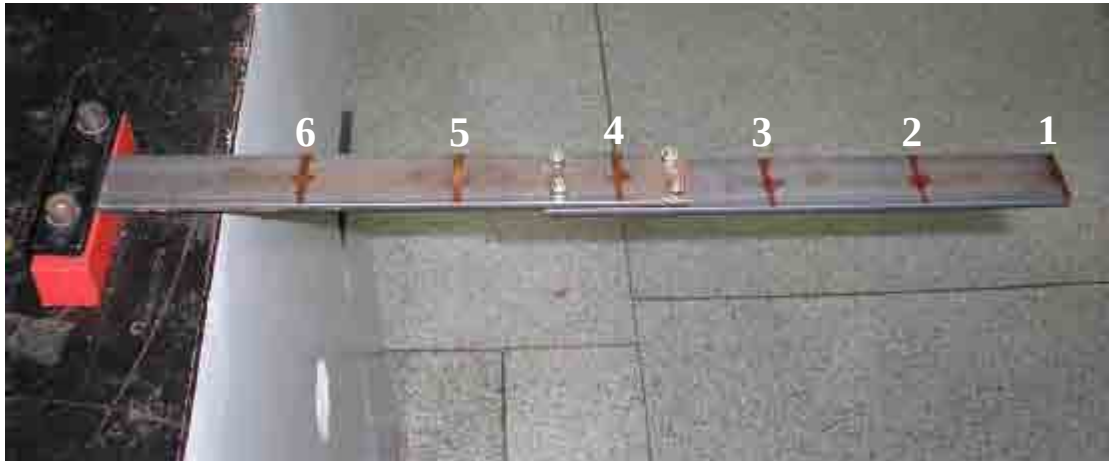


Figura 6.9: Pontos de medida – Vigas em contato

Neste caso, o acelerômetro axial foi fixado no ponto número 1 na direção +Y, e a entrada impulsiva do martelo instrumentado foi feita em todos os pontos na direção -Y (figura 6.10). A faixa de frequência ativa utilizada neste experimento é de 0 a 750 Hz.



Figura 6.10(a) – Entrada impulsiva



Figura 6.10(b) – Ponto de fixação do acelerômetro

Figura 6.10: Pontos de medição – Vigas em contato

O objetivo deste teste é avaliar a metodologia proposta para estruturas envolvendo a situação de contato. A comparação e ajuste dos modelos, com base nos testes experimentais realizados, são descritos a seguir.

6.3.1 – Comparação e Ajuste do Modelo

Neste caso, foram discutidas duas aproximações para definir o modelo analítico da estrutura. No primeiro modelo analisado a região de contato foi modelada sem levar em conta o efeito do contato, mas sim considerando aquela região como uma estrutura dupla. Já no segundo caso foram utilizados elementos finitos de contato para representar a região do contato.

6.3.1.1 – Modelo Contínuo

A estrutura é modelada como sendo uma estrutura contínua (sem a região de contato) e são utilizados elementos sólidos PLANE42, e elementos de massa concentrada MASS21. Os elementos de massa concentrada buscam levar o efeito do peso dos parafusos/porcas no modelo de elementos finitos. Os elementos PLANE42 foram separados em três regiões distintas. A primeira região é definida do engaste até o início da região de contato, a segunda compreende a região de contato e a terceira representa a parte da estrutura entre a região de contato até a sua extremidade. A malha de elementos finitos deste modelo possui 102 elementos, 194 nós e 384 graus de liberdade. A figura 6.11 ilustra a discretização do modelo.

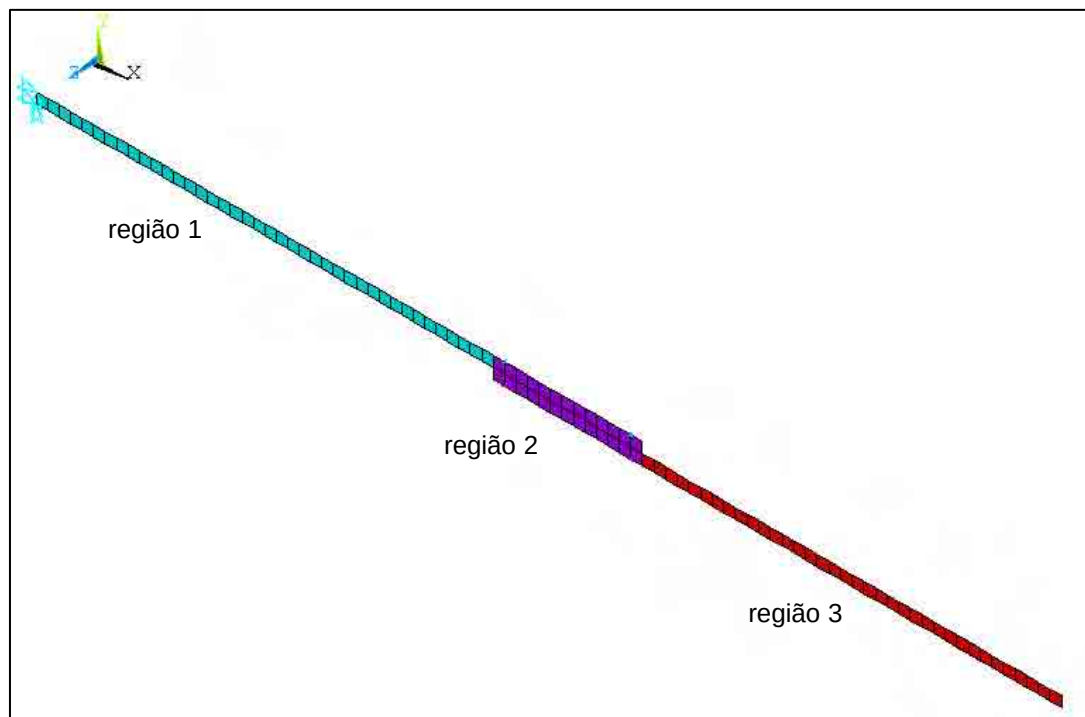


Figura 6.11: Discretização do modelo analítico contínuo – Vigas em contato

A tabela 6.6 mostra a correlação inicial entre o modelo de elementos finitos e o modelo experimental. Embora os MAC-valores indicam uma boa correlação entre os modos, nota-se que há uma ligeira diferença entre as frequências naturais.

Tabela 6.6: Correlação inicial – modelo contínuo – Vigas em contato

Modo	Modelo Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{w^A - w^E}{w^E} (%)$	MAC (%)
1	18,20	18,93	3,98	99,85
2	112,90	125,20	10,89	83,80
3	321,30	337,87	5,16	99,25
4	658,00	722,14	9,75	71,26

A figura 6.12 mostra a superposição das FRF(s) dos modelos analítico e experimental, em que o efeito do amortecimento aparece fortemente na discrepância das amplitudes da resposta.

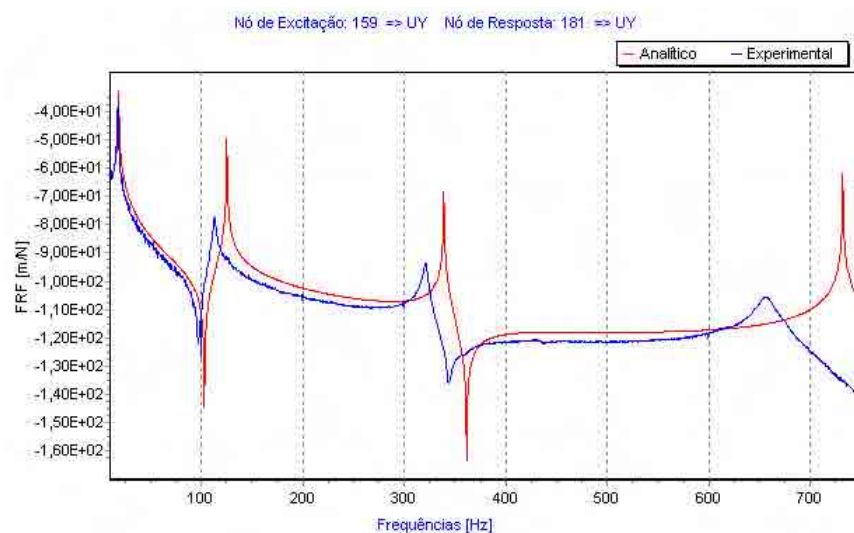


Figura 6.12 Superposição das FRF(s) experimental e analítica – modelo contínuo – Vigas em contato

Considerando que, o aço utilizado nesta estrutura é igual ao aço utilizado na estrutura do experimento 1 (viga simples), o modelo foi redefinido utilizando o valor do módulo de elasticidade ajustado no modelo de viga simples. A tabela 6.7 mostra a comparação entre o modelo inicial, com propriedades descritas na tabela 6.2 e o modelo utilizando o módulo de

elasticidade igual a $205 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. Os resultados mostram uma redução na diferença das frequências dos modelos.

Tabela 6.7: Correlação inicial – comparação entre modelos analíticos – Vigas em contato

Modo	Modelo (Mód./Elasticidade = 210×10^9)		Modelo (Mód./Elasticidade = 205×10^9)	
	ΔF (%)	MAC(%)	ΔF (%)	MAC(%)
1	3,98	99,85	2,74	99,85
2	10,89	83,80	9,56	83,80
3	5,16	99,25	3,90	99,25
4	9,75	71,26	8,43	71,26

Uma vez definido o modelo de elementos finitos da estrutura e a correlação com os dados experimentais, o próximo passo seria o ajuste do modelo. Nesta etapa, um aspecto importante a ser observado é a sensibilidade dos parâmetros do modelo, isso poderia auxiliar na escolha dos parâmetros a serem ajustados.

A figura 6.13 mostra a sensibilidade dos parâmetros do modelo em relação aos autovalores. Observa-se que os parâmetros da região 1 e 3, módulo de elasticidade (ex1, ex3) e a densidade (de1, de3) são os parâmetros mais sensíveis em relação aos autovalores.

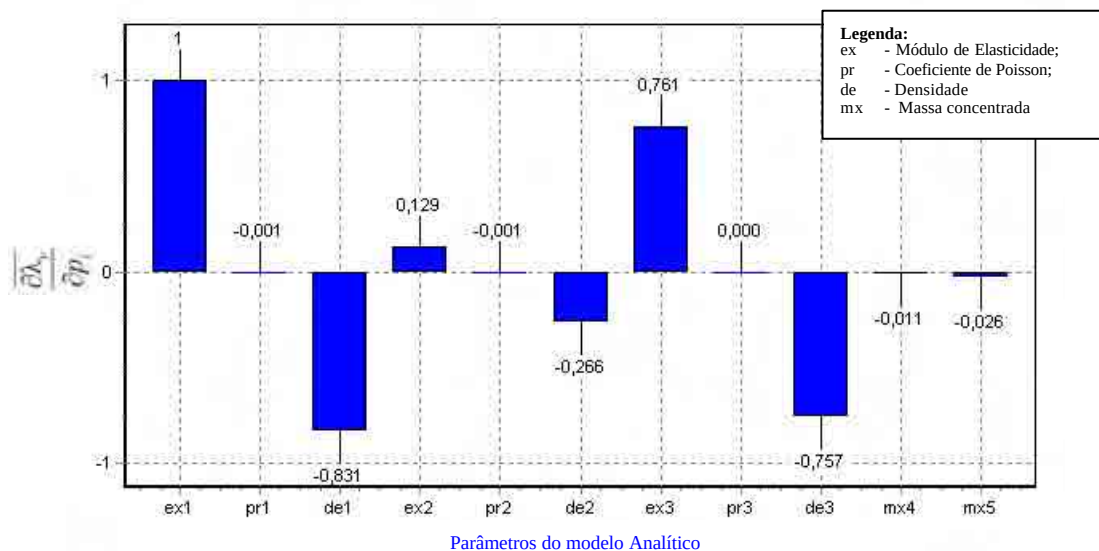


Figura 6.13: Sensibilidade média do modelo analítico contínuo das vigas em contato

Entretanto, uma avaliação do modelo físico, sugere que a discrepância entre os modelos deveria estar relacionada com parâmetros da região do contato (região 2), embora sejam poucos sensíveis em relação aos autovalores. Desta forma, os parâmetros do modelo, escolhidos para a atualização, são o módulo de elasticidade e a densidade da região de contato. As frequências de ajuste 311,72 Hz e 313,59 Hz foram selecionadas para este caso. A rotina de ajuste utilizou 6 iterações para diminuir a discrepância entre os modelos. A tabela 68 mostra a correlação inicial e final entre os modelos.

Tabela 6.8: Correlação inicial e final – modelo contínuo – Vigas em contato

Modo	Modelo Experimental	Correlação Inicial			Correlação Final		
	ω^E (Hz)	ω^A (Hz)	$\Delta\omega$ (%)	MAC (%)	ω^A (Hz)	$\Delta\omega$ (%)	MAC (%)
1	18,20	18,70	2,74	99,85	18,69	2,72	99,88
2	112,90	123,70	9,56	83,80	114,03	1,00	87,29
3	321,30	333,83	3,90	99,25	329,79	2,64	99,30
4	658,00	713,49	8,43	71,26	645,28	-1,93	77,30

Nota-se que, embora a discrepância entre os modelos após o ajuste, ainda apresenta diferenças relativas de frequências da ordem de 1% a 2,64%, o ajuste deste modelo pode ser considerado satisfatório, pois a correlação inicial apresenta diferenças relativas de frequência da ordem de 8% a 9%. Observa-se também que houve um ligeiro aumento nos MAC-valores, principalmente no segundo e terceiro modo.

A figura 6.14 mostra a superposição das FRF(s) dos modelos analítico e experimental antes e depois do ajuste. É possível observar uma melhor representatividade da resposta do modelo analítico em relação ao experimental após o ajuste.

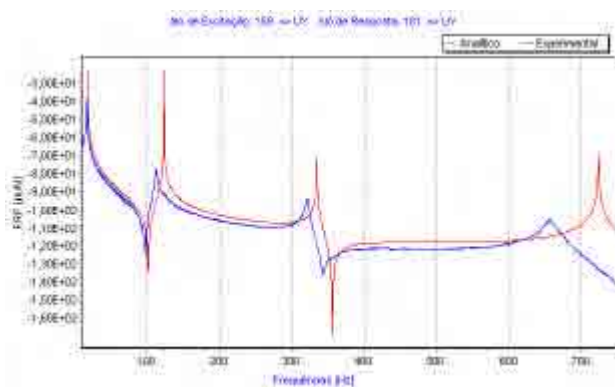


Figura 6.14(a) – Antes do Ajuste

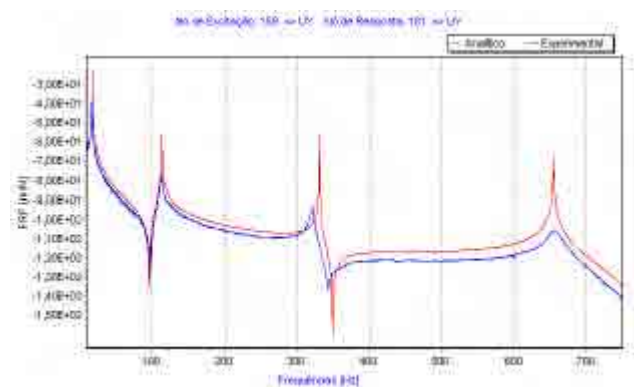


Figura 6.14(b) – Depois do Ajuste

Figura 6.14: Superposição das FRF(s) exp. e analítica antes e depois do ajuste – mod. contínuo – Vigas em contato

Os valores ajustados indicam que a região de contato possui uma rigidez menor que a rigidez assumida naquela região. O módulo de elasticidade foi reduzido em torno de 78,5% do valor inicial e o valor da densidade reduzido em torno de 21% do valor inicial. A tabela 6.9 mostra os valores iniciais e ajustados dos parâmetros de atualização.

Tabela 6.9: Valores iniciais e ajustados dos parâmetros – modelo contínuo – Vigas em contato

Parâmetro de Atualização	Valores Iniciais	Valores Ajustados
Módulo de elasticidade da região de contato	205e9 N/m ²	44,8e9 N/m ²
Densidade da região de contato	7860 Kg/m ³	6221 Kg/m ³

Os resultados apresentados mostram que o ajuste do modelo sem elementos de contato foi realizado com relativo sucesso. Foi possível melhorar a representatividade do modelo ajustando apenas os parâmetros da região do contato (região 2), a qual apresenta uma grande incerteza na estimativa dos parâmetros.

6.3.1.2 – Modelo com Elementos de Contato

Neste caso, a estrutura foi modelada utilizando elementos de contato para representar a região dois (região do contato). As peças são consideradas separadas e o contato é representado pelo elemento CONTAC48. Os elementos sólidos PLANE42 também são utilizados e a malha de elementos finitos deste modelo possui 145 elementos, 208 nós e 412 graus de liberdade. A figura 6.15 mostra a discretização do modelo. Nesta figura, o destaque mostra os elementos de contato (elementos de número 6) e os elementos de massa concentrada (elementos de números 4 e 5).

A utilização do elemento de contato requer atenção para alguns detalhes. Deve-se definir primeiramente qual o modelo de atrito a utilizar e quais são os valores iniciais para as propriedades rigidez normal e tangencial de contato.

O elemento de contato CONTAC48 permite a utilização de dois modelos de atrito, elástico ou rígido de Coulomb, ou também a opção de não considerar o atrito. Neste caso, foram testadas as três opções de atrito, e a opção que apresentou resultados mais próximos do experimental foi a utilização do modelo elástico de Coulomb.

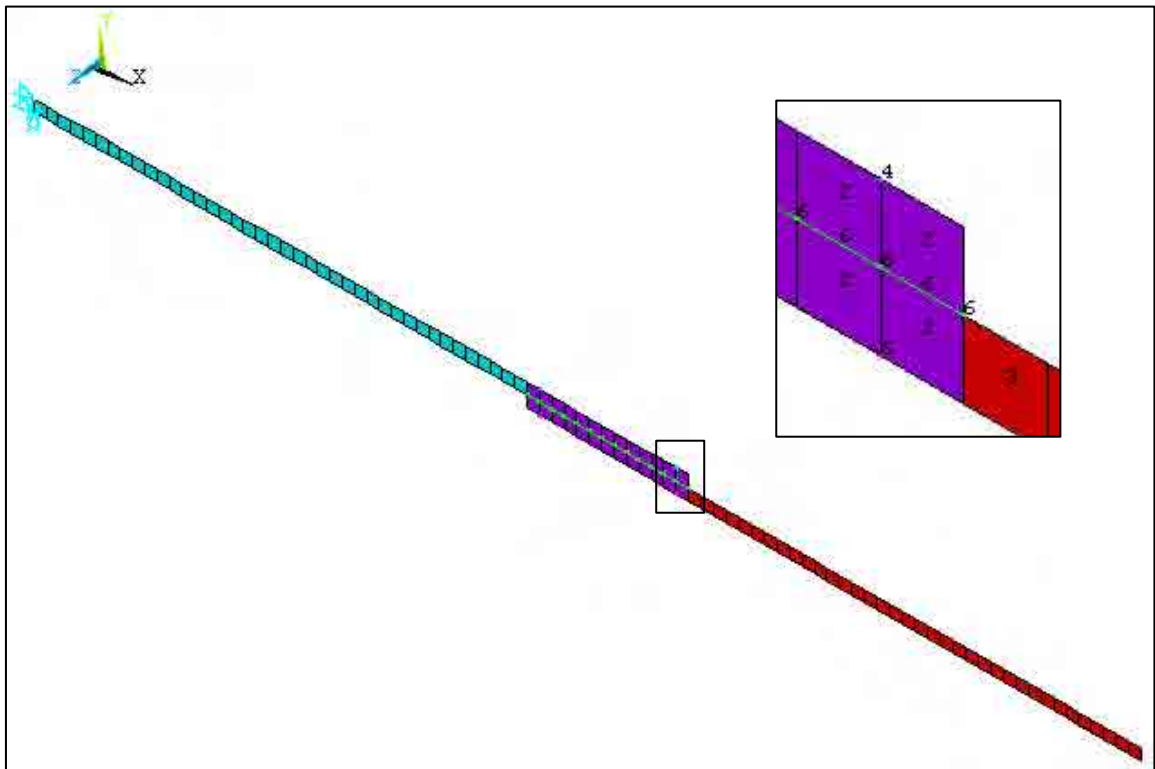


Figura 6.15: Discretização do modelo analítico com elementos de contato – Vigas em contato

O valor da rigidez normal de contato (KN) influencia na convergência da solução do problema, conforme discutido no capítulo 5. Uma boa regra para se estimar o valor adequado de KN é iniciá-lo com o mesmo valor do módulo de elasticidade do material, se houver muitas iterações no processo de solução, deve-se diminuir o valor de KN . Agora, se há um número de iterações aceitável, ou seja, se há convergência no processo, porém há muita penetração entre uma superfície e outra, deve-se aumentar o valor de KN . O valor da rigidez tangencial de contato (KT), de acordo com o manual do usuário do *software* ANSYS, é por padrão 100 vezes menor o valor de KN .

Para este modelo, o valor do módulo de elasticidade ajustado no primeiro experimento ($205e9 \text{ N/m}^2$) também é utilizado. Assim os valores de KN e KT são obtidos com base neste valor.

Para definir o valor de KN neste caso, foram realizadas algumas análises estáticas do problema no *software* ANSYS com o objetivo de avaliar a convergência das soluções. Nestas análises, uma força de 500 N foi aplicada no centro da estrutura e na direção $-Y$. Atribuindo o mesmo valor do módulo de elasticidade do material, para a propriedade KN , e fixando o valor de KT em 100 vezes menor o valor de KN , a solução do problema não convergiu. Diminuindo o

valor de KN em 10 em 10 vezes, e conseqüentemente o valor de KT, observou-se que a solução deste problema sempre converge para valores de KN entre 205 e 205e8.

Na realização de cada análise estática, as frequências naturais do modelo analítico foram comparadas com as frequências naturais do modelo experimental. O modelo que mais se aproximou do experimental, utilizou os valores de KN igual a 205e5 e KT igual a 205e3. A tabela 6.10 mostra os valores das propriedades dos elementos.

Tabela 6.10: Propriedade dos elementos utilizados

Elemento PLANE42	
Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade	205e9 N/m ²
Coefficiente de Poisson	0,3
Densidade	7860 Kg/m ³
Elemento CONTAC48	
Propriedade	Valor
Rigidez Normal de Contato (KN)	205e5 N/m ²
Rigidez Normal de Contato (KT)	205e3 N/m ²
Elemento MASS21	
Propriedade	Valor
Elementos de massa na parte superior das vigas	0,0026532 Kg
Elementos de massa na parte inferior das vigas	0,0063868 Kg

A tabela 6.11 mostra a correlação inicial entre o modelo analítico, com propriedades descritas na tabela 6.10, e o modelo experimental.

Tabela 6.11: Correlação inicial – Vigas em contato

Modo	Modelo Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{\omega^A - \omega^E}{\omega^E}$ (%)	MAC (%)
1	18,20	18,45	1,40	99,87
2	112,90	111,50	-1,24	84,34
3	321,30	328,71	2,31	99,33
4	658,00	636,70	-3,24	73,72

As tabelas 6.7 e 6.11, mostram que a correlação inicial do modelo de elementos finitos sem elementos de contato apresenta uma maior discrepância quando comparado com o modelo utilizando elementos de contato.

A etapa de escolha dos parâmetros de atualização deste modelo, também é baseada em uma avaliação do modelo físico. Embora uma análise de sensibilidade auxilie na escolha dos parâmetros de atualização, esta análise não permite identificar quais os parâmetros que devem ser atualizados, mas sim os parâmetros mais sensíveis do modelo em relação aos autovalores. Como se pode notar na figura 6.16, os parâmetros KN e KT, do elemento de contato, são poucos sensíveis em relação aos autovalores. Entretanto, acredita-se que a discrepância do modelo esteja relacionada aos valores estimados para estes parâmetros, visto que, é uma estrutura simples e as propriedades do material e das massas concentradas são bem conhecidas. Desta forma os parâmetros escolhidos para atualização neste caso são os parâmetros do elemento de conta, ou seja, a rigidez normal (KN) e tangencial (KT) de contato.

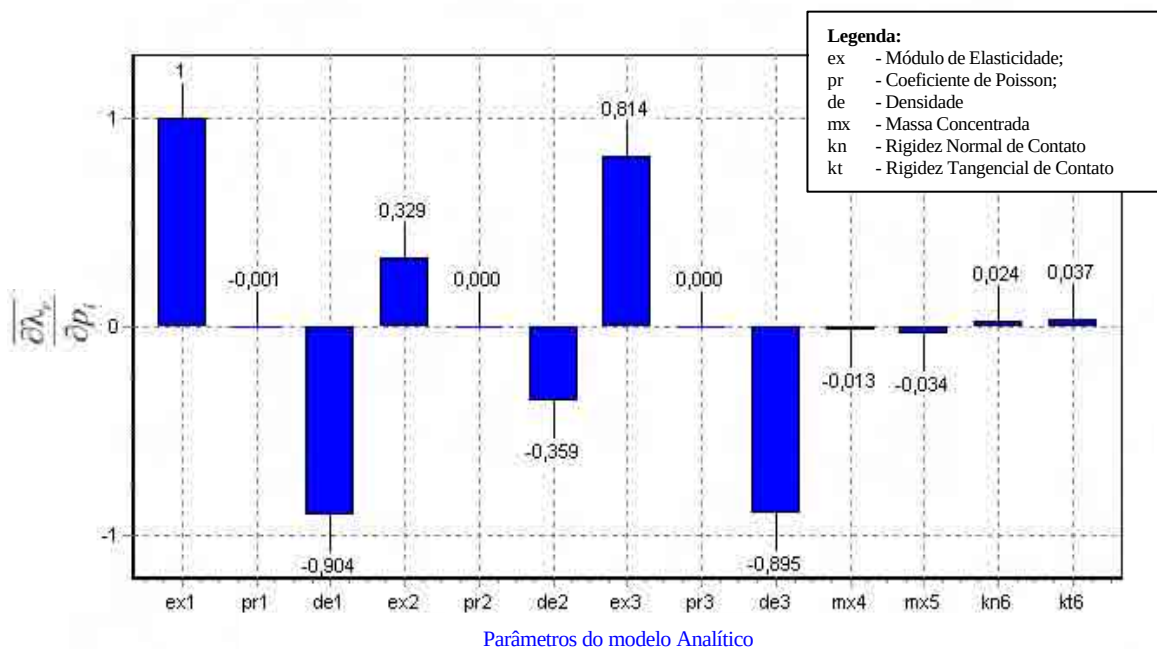


Figura 6.16: Sensibilidade média do modelo analítico com elementos de contato – Vigas em contato

Foram realizadas três tentativas de ajuste deste modelo. Nas tentativas de ajustar simultaneamente os parâmetros KN e KT ou apenas o KN, a rotina de ajuste não obteve sucesso. Escolhendo-se para o ajuste apenas o parâmetro KT, uma pequena redução na discrepância, entre os modelos analítico e experimental, foi obtida com relação à correlação inicial.

A tabela 6.12 mostra a correlação após o ajuste do modelo. A rotina de ajuste utilizou 9 iterações para atualizar o valor do parâmetro KT de $205e3 \text{ N/m}^2$ para $65e5 \text{ N/m}^2$. Nota-se que a diferença relativa de frequência aumentou um pouco no primeiro e terceiro modo. Entretanto houve uma redução das diferenças de frequências no segundo e quarto modo.

Tabela 6.12: Correlação final – Vigas em contato

Modo	Modelo Experimental ω^E (Hz)	Modelo Analítico ω^A (Hz)	Correlação	
			$\frac{w^A - w^E}{w^E} (\%)$	MAC (%)
1	18,20	18,49	1,58	99,87
2	112,90	113,06	0,15	84,25
3	321,30	329,27	2,48	99,32
4	658,00	646,67	-1,72	74,56

A figura 6.17 mostra a superposição das FRF(s) do modelo analítico e experimental antes e após o ajuste. Nesta figura é possível observar que não houve uma grande melhoria do comportamento dinâmico do modelo analítico após o ajuste.

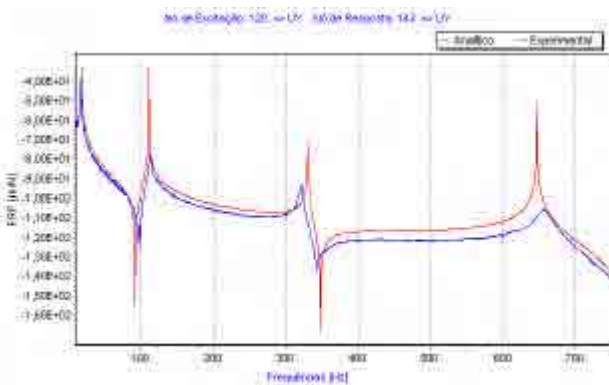


Figura 6.17(a) – Antes do Ajuste

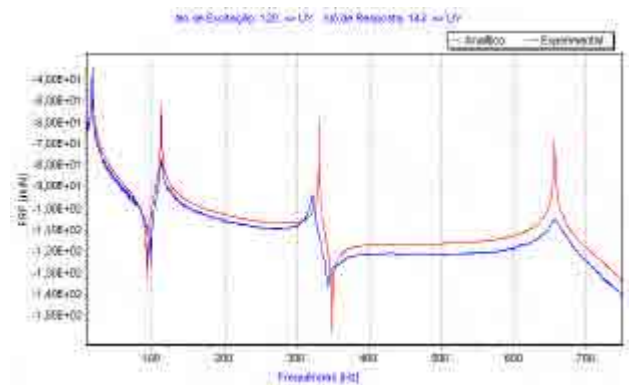


Figura 6.17(b) – Depois do Ajuste

Figura 6.17: Superposição das FRF(s) exp. e analítica antes e depois do ajuste – Vigas em contato

Os resultados deste modelo, mostram que o modelo analítico encontra-se razoavelmente bem correlacionado antes do ajuste. Sua correlação inicial é semelhante com a correlação final do modelo contínuo. Embora o ajuste deste modelo, não reduziu consideravelmente a discrepância entre os modelos, nota-se que o modelo de elementos finitos

utilizando elementos de contato, representa melhor o modelo físico pois suas propriedades do material não foram alteradas, mas sim, apenas os parâmetros do elemento de contato.

Capítulo 7

CONCLUSÕES

Neste trabalho o ajuste de modelos de elementos finitos envolvendo o problema de contato foi estudado. A metodologia utilizada é baseada nas FRF(s) do modelo analítico e experimental. A potencialidade da metodologia proposta foi avaliada primeiramente utilizando dados simulados e posteriormente, dados obtidos em testes experimentais. Dois testes experimentais foram realizados, o primeiro utilizando uma estrutura simples do tipo viga e o outro utilizando uma estrutura mais complexa formada por duas peças em contato. Um *software* foi implementado para fazer a comparação entre os modelos analítico e experimental, e também o ajuste do modelo analítico com base nos dados medidos.

A utilização de dados simulados para o ajuste, além de avaliar a metodologia e validar o *software* implementado, permitiu a identificação de várias características do processo de ajuste, tais como, a influência da escolha dos parâmetros de atualização, a seleção das frequências de ajuste e a influência dos parâmetros do elemento de contato na solução do problema. Um aspecto importante também estudado nesta etapa foi o comportamento da solução do problema de contato, visto que os valores iniciais dos parâmetros do elemento de contato, têm grande influência na convergência da solução do problema.

Os dados experimentais permitiram uma avaliação da metodologia com dados reais. O primeiro teste realizado teve como objetivo uma avaliação prévia da metodologia, utilizando dados experimentais de uma estrutura simples e com propriedades bem conhecidas, que permite estabelecer uma base de dados de referência consistente e com uma boa confiabilidade. Já no segundo teste, a potencialidade da metodologia foi avaliada utilizando uma estrutura composta por duas peças em contato. Em ambos os casos, o ajuste dos modelos analítico foi realizado com êxito.

A modelagem das estruturas em contato é bem mais complexa e envolveu um maior cuidado na elaboração dos modelos de elementos finitos. Dois modelos foram definidos objetivando fazer uma comparação entre o ajuste dos modelos sem e com elementos de contato.

No primeiro caso a região de contato foi considerada como uma estrutura única e não foram utilizados elementos de contato. A correlação inicial deste modelo com os dados experimentais mostrou uma grande discrepância em termos de frequências naturais. O ajuste realizado foi bem sucedido, atualizando apenas as propriedades da região de contato, módulo de elasticidade e densidade do material. Após o ajuste, a discrepância entre os modelos diminuiu consideravelmente apresentando uma boa correlação. O valor do módulo de elasticidade ajustado foi reduzido em 78,5% do valor inicial, o que caracteriza um valor irreal para o material utilizado na estrutura analisada. Entretanto, considerando que a rigidez da estrutura no contato é bem menor do que da estrutura ideal, em que as peças teriam o comportamento de uma estrutura única, este valor é aceitável.

O segundo modelo analisado neste caso, considera que as peças estão em contato e são utilizados elementos de contato para modelar a região do contato entre as peças. Os valores dos parâmetros do contato foram estimados a partir de testes de convergência da solução, conforme discutido no capítulo 5. Neste caso, a correlação inicial mostrou uma discrepância entre os modelos analítico e experimental menor que a correlação inicial do modelo sem elementos de contato. Os parâmetros escolhidos para a atualização foram os parâmetros do elemento de contato. Após o ajuste, houve uma pequena redução na discrepância entre os modelos, porém, neste caso tem-se um modelo mais próximo do real, onde as propriedades do material foram preservadas, o que justifica a utilização de elementos de contato.

Os resultados apresentados mostram a funcionalidade da metodologia proposta. O ajuste dos modelos foi realizado com êxito tanto para estruturas sem envolver a situação de contato como para estruturas envolvendo o contato entre peças. Entretanto, as estruturas analisadas neste trabalho são estruturas simples e com propriedades bem conhecidas. Para trabalhos futuros, estruturas mais complexas devem ser analisadas. Um outro aspecto não discutido neste trabalho é a utilização de outros elementos de contato. Há uma variedade de elementos de contato para uma grande diversidade de situações, e um estudo detalhado sobre cada um é uma boa proposta para novos trabalhos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ansys, User's Manual. Theory Manual. ANSYS revision 8.0, 2003.

ARATO JÚNIOR., A.; PEREIRA, J. A. Programas Modulares para Análise de Sistemas Mecânicos, In: ENCUENTRO NACIONAL DE INVESTIGADORES Y USUARIO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS - ENIEF, 7., 1990. Mar del Plata, Argentina. 1990.

ARATO JUNIOR, A.; PEREIRA, J. A.; TURRA, A. E. Uma Modelagem para Análise Dinâmica por Elementos Finitos de Estruturas por Uniões Aparafusadas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 11., 1991. São Paulo. São Paulo. p. 257-260.

ARRUDA, J. F.; SANTOS, J. M.; CARNEIRO, S. H. S. Experimental estimation of mechanical joint using frequency response functions and modal parameters. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 11., 1993. Kissimmee, USA. 1993.

BARUCH, M. Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests, *AIAA Journal*, v. 16, n. 11, p. 1208-1210, 1978.

BATHE, K. J.; CHAUDHARY, A. B. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 21, p.65-88, 1985.

BERMAN, A.; FLANNELLY, W. Theory of incomplete models of dynamic structures, *AIAA Journal*, v. 9, p. 1482-1487, 1971

BRUGHMANS, M.; LEURIDAN, J.; TURGAY, F. 1998. Porting model updationg techniques to a high performance computational environment for vibro-acoustic optiomisation. In: INTERNATIONS MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 16., 1998. Houston, USA, (CD-ROM).

CESCOTTO, S.; CHARLIER, R. Frictional contact finite element based on mixed variational principles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36, p. 1681-1701, 1993.

CHAMORET, D.; SAILLARD, P.; BERGHEAU, J. M. Automatic adjustment of the load step for contact problems. In: WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 5., 2002. Vienna, Áustria.

DOI, R. M. *Ajuste de Modelos Baseado nas FRF(s): incorporação e atualização de amortecimento na modelagem por elementos finitos*. 2003. 148f. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.

EWINS, D. J. *Modal testing: theory and practice*. New York: Jonh Wiley & Sons, 1984. 269p.

FRISWELL, M. J.; MOTTERSHEAD, J. E. Editorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 12, n.1, p.1-6. 1998.

FRISWELL, M. J.; MOTTERSHEAD, J. E. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1995. 286p.

FRISWELL, M. J.; MOTTERSHEAD, J. E. *Finite element model updatin in structural dynamic*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1995. 286 p.

FRISWELL, M. J.; MOTTERSHEAD, J. E.; AHMADIAN, H. A systematic Aproach for Physical Realization of Updated Models. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS, 25., 1998. Leuven, Belgium. (CD-ROM).

FRISWELL, M. I.; PENNY, J. E. The practical limits of damage detection and location using vibration data. In: VPI&SU SYMPOSIUM ON STRUCTURAL DYNAMICS AND CONTROL, 11., 1997. Blacksburg. (CD-ROM).

GARCIA, J. The Need for Computational Model Validation. *Experimental techniques*, v. 25, n. 2, p.31-33, 2001.

GOGÉ, D. Automatic updating of large aircraft models using experimental data from ground vibration testing. *Aerospace Science and Technology*, v. 7, n. 1, p.33-45, 2003.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. *Measuring vectors, matrices, subspaces, and linear system sensitivity*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1985. p. 11-29.

GUYAN, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, v. 3, n. 2, 1965.

HANSON, K. M.; HERNEZ, F. M. A framework for assessing confidence in computational predictions, *Experimental Techniques*, v. 25, n. 4, p.50-55, 2001.

HEYLEN, W. *Optimization of Model Matrices of Mechanical Structures Using Experimental Modal Data*. 1987. 205f. Thesis. (Doctor Thesis) - Faculteit Der toegepaste Wetenschappen, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 1987.

HEYLEN, W.; LAMMENS, S.; SAS, P. Modal analysis theory and testing. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS, DIVISION OF PRODUCTION ENGINEERING, 19., 1994. Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.

HUGHES, T. J. R.; et al. (1976). A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 8, p. 249-276, 1976.

JONES, K.; TURCOTTE, J. Finite element model updating using antiresonant frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, v. 252, n. 4, p. 717-727, 2002.

KIDDER, R. L. Reduction of structural frequency equation. *AIAA Journal*, v. 11, n. 6, 1973.

LAMMENS, S. *Frequency response based validation of dynamic structural finite element model*. 1995. 241f. Thesis. (Doctor Thesis) - Faculteit Der Toegepaste Wetenschappen, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 1995.

LARSSON, P. O.; SAS, P. Model updating based on forced vibration testing using numerically stable formulations. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 10., 1992. San Diego, USA.

LEURIDAN, J. et al. Using the 'LINK' Program for Dynamic Model Optimization in Structure Design Analysis and Monitoring. In: NIKU-LARI, A. (Ed.). *Structural Analysis systems*. Oxford: Pergamon Press, 1987. v. 6, p. 71-87.

LIEVEN, N. A. J.; EWINS, D. J. Expansion of modal data for correlation. In: IMAC, 8., 1990.

LIEVEN, N. A. J.; EWINS, D. J. Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion – COMAC. In: IMAC, 6., 1988.

LIN, R. M.; EWINS, D. J. Model Updating using FRF Data. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS, 13., 1990. Leuven, Belgium.

LINK, M. Updating of analytical models review of numerical procedures and application aspects. In: EWINS, D. J.; INMAN, D. J. (Ed.) *Structural Dynamics 2000: current status and future directions*. Baldock: Research Studies Press, 2001. p. 193-223.

MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. (Ed.). *Theoretical and experimental modal analysis*. Tauton: Research Studies Press, 1997. 468p.

OBERKANPF, W. L. Computation validation series: part 2, *Experimental techniques*, v. 25, n. 3, p. 35-40, 2001.

O'CALLAHAN, J. C.; et al. An efficient method of determining rotation degrees of freedom from analytical and experimental modal data. In: IMAC, 4., 1986.

PARISCH, H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, p. 1803-1812, 1989.

PEREIRA, J. A. *Structural damage detection methodology using a model updating procedure based on frequency response functions – FRF(s)*. 1996. Tese. (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

PEREIRA, J. A.; DOI, R. M. Incorporating and updating of damping in finite element modeling. In: INMAN, D. J. et al. (Ed.). *Damage prognosis: for aerospace, civil and mechanical systems*. S.l.: John Wiley & Sons, 2005. p. 111-129.

QUARANTA NETO, F. *Modelagem de problemas de contato-impacto empregando formulações penalizadas do método dos elementos finitos*. 2002. 156f. Tese. (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

REYNOLDS, P. A.; WALDRON, P. Modal testing, FE analysis and FE modal correlation of a 600 tonne post-tensioned concrete floor. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS, 23., 1998. Leuven, Belgium, (CD-ROM).

SÁNCHEZ, C. A. A. *Estudo de Impacto Usando Elementos Finitos e Análise Não Linear*. 2001. 129f. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

SANT'ANA, D. C. *Uma nova proposta utilizando métodos de lagrangeano aumentado com penalidades modernas na resolução de problemas de contato*. 2005. 89f. Dissertação. (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia – Programação Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.

SANTOS, M. C. B. *O método da extensão virtual da trinca na fadiga por contato do tipo "spalling"*. 2004. 121f. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

SCHAAK, H. Industrial model updating of civil four-engine aircraft in Nastran Environment – an overview. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON MODAL ANALYSIS, 25., 1998. Leuven, Belgium, (CD-ROM).

TLUSTY, J.; ISMAIL, F. *Dynamic structural identification tasks and methods*, Proceedings of the CIRP, v. 29, p. 251-255, 1980.

WRIGGERS, P.; VUVAN, T.; STEIN, E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers & Structures*, v. 3, n. 3, p. 319-331. 1990.

ZHONG, Z-H; NILSSON, L. A unified algorithm based on the territory concept. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.130, p.1-16, 1996.

XU, Z.; ACCORSI, M.; LEONARD, J. Parallel contact algorithms for nonlinear implicit transient analysis. *Computational Mechanics*, v. 34, p. 247-255, 2004.