



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***Simulação Numérica de Escoamentos Incompressíveis
pelo Método de Elementos Finitos com Esquema de
Separação Baseado na Característica (CBS)***

CRISTIANE VITÓRIO OCTAVIANI

Ilha Solteira – S.P

2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

Simulação Numérica de Escoamentos Incompressíveis pelo Método de Elementos Finitos com Esquema de Separação Baseado na Característica (CBS)

CRISTIANE VITÓRIO OCTAVIANI

ORIENTADOR: PROF. DR. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA.

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Ilha Solteira, S.P, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de conhecimento: Ciências Térmicas.

ILHA SOLTEIRA – SP

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

- | | |
|------|---|
| O21s | <p>Octaviani, Cristiane Vitório.</p> <p>Simulação numérica de escoamentos incompressíveis pelo método de elementos finitos com esquema de Separação Baseado na Característica (CBS) / Cristiane Vitório Octaviani. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2013</p> <p>82 f. : il.</p> <p>Dissertação (mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Ciências Térmicas, 2013</p> <p>Orientador: João Batista Campos Silva</p> <p>1. Método de elementos finitos. 2. CBS. 3. Escoamentos incompressíveis. 4. Banco de tubos.</p> |
|------|---|

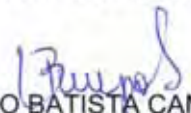
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Simulação Numérica de Escoamentos Incompressíveis pelo Método de Elementos Finitos com Esquema de Separação Baseado na Característica (CBS)

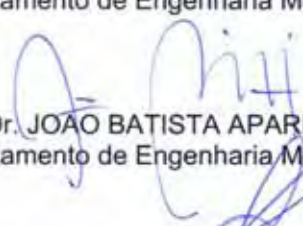
AUTORA: CRISTIANE VITORIO OCTAVIANI

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

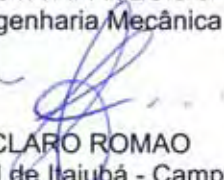
Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica ,
Área: CIÊNCIAS TÉRMICAS, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. JOÃO BATISTA APARECIDO
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. ESTANER CLARO ROMAO
Universidade Federal de Itajubá - Campus de Itabira

Data da realização: 01 de abril de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, por me propiciar viver tamanha experiência e realizar um sonho.

A minha filha Júlia Vitório Octaviani, por ter compreendido a minha ausência nesses anos de estudo.

Ao meu marido Roberto César Octaviani, pelo apoio incondicional, compreensão e incentivo.

A minha família, pai e mãe que são meus suportes, minha força e meu encorajamento.

Aos amigos Unesp – Ilha Solteira que estiveram sempre ao meu lado. Não cito nomes para não ser injusta com pessoas que me auxiliaram até onde já cheguei.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. João Batista Campos Silva, pela paciência, apoio e que de forma crucial me auxiliou em todos os aspectos deste trabalho.

Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro concedido em forma de bolsa de estudo.

Agradeço a todos, professores e funcionários da Unesp, que contribuíram, de certa forma, para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente para a concretização deste sonho.

Para vocês ofereço esta página.

Muito obrigada a todos!

***“TALVEZ NÃO TENHA CONSEGUIDO FAZER O MELHOR, MAS LUTEI PARA QUE O MELHOR FOSSE
FEITO. NÃO SOU O QUE DEVERIA SER, MAS GRAÇAS A DEUS, NÃO SOU O QUE ERA ANTES”
MARTHIN LUTHER KING***

RESUMO

A simulação computacional de escoamentos de fluidos ou dinâmica de fluidos computacional (CFD) tem se constituído cada vez mais em uma ferramenta muito útil no projeto de equipamentos nos quais este tipo de processo está presente. Diversas técnicas computacionais têm sido desenvolvidas para este fim. Entre estas técnicas, o método de elementos finitos (FEM) tem ganhado espaço na solução de problemas, principalmente em domínios complexos. O método clássico de elementos finitos também denominado de método de elementos finitos de Galerkin (GFEM) é ótimo para solução de problemas difusivos, entretanto, para o caso de problemas com convecção dominante como ocorre em muitos problemas de escoamentos de fluidos, o GFEM produz soluções oscilantes para altos números de Reynolds. Diversas técnicas têm sido associadas à discretização dos termos convectivos nas equações de Navier-Stokes para remediar a deficiência do GFEM. Uma destas técnicas é denominada na literatura de *Characteristic Based Split* (CBS) e tem sido aplicada com sucesso para estabilização das soluções de problemas convectivos usando o GFEM. Neste trabalho, o GFEM associado ao esquema CBS será aplicado para simulação de casos de escoamentos bidimensionais.

Palavras-Chave: Método de elementos finitos. CBS. Escoamentos incompressíveis. Banco de tubos.

ABSTRACT

The computer simulation of fluid flow or computational fluid dynamics (CFD) has been constituted in an increasingly useful tool in the design of equipment where this type of process is present. Several computational techniques have been developed for this purpose. Among those techniques, the finite element method (FEM) has gained importance in solving problems, especially in complex domains. The classic method of finite elements also called Galerkin finite element method (GFEM) is optimal for solving diffusion problems, however, in case of problems with dominant convection as in many problems of fluid flow, the GFEM produces oscillating solutions for high Reynolds numbers. Several techniques have been associated with the discretization of the convective terms in the Navier-Stokes equations to remedy the deficiency of GFEM. One of those techniques is known in the literature as Characteristic Based Split (*CBS*) and has been applied successfully to stabilize the GFEM when it is used to solve convective problems. In this work, the GFEM associated with *CBS* scheme is applied to simulation of two-dimensional flows.

Keywords: Finite elements method. *CBS*. Incompressible flow. Tube bank.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CBS	Characteristic Based Split;
CFD	Computacional Fluid Dynamics
CGM	Método do Gradiente Conjugado
FEM	Método de Elementos Finitos
GFEM	Galerkin Finite Element Method (Métodos de Elementos Finitos de Galerkin)
GLS	Galerkin Least Squares (Galerkin Mínimos Quadrados)
LES	Large Eddy Simulation (Simulação de Grandes Escalas)
LCG	Locally Conservative Galerkin
LSFEM	Least Squares Finite Element Method
Pe	Número de Peclet
Pr	Número de Prandtl
RANS	Reynolds averaged Navier-Stokes
SGS	Subgrid Scale
URANS	Unsteady RANS
WRM	Weight Residual Method (Métodos dos Resíduos Ponderados)

SIGLAS

DEM	Departamento de Engenharia Mecânica
FEIS	Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
UNESP	Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

LISTA DE SÍMBOLOS

Latinos

B	matriz da derivada da função de aproximação elementar
c	velocidade do som
F_T	matriz relacionada às condições de contorno
g	aceleração da gravidade [m/s ²]
G	matriz auxiliar
h	dimensão do elemento
H	matriz auxiliar
k	constante difusiva genérica
K_u	matriz auxiliar
K_T	matriz auxiliar
K	matriz dos coeficientes
M_p	matriz auxiliar
M_u	matriz auxiliar
N	matriz da função de aproximação elementar
N_u	número de Nusselt [Nu=h H / k]
p	pressão adimensional
P	pressão [Pa]
P	matriz auxiliar
Q	termo fonte genérico
t	tempo adimensional
t_d	tração correspondente à tensão normal
t_p	tração correspondente à pressão
T	temperatura [K]
T_f	temperatura mínima de referência (fria) [K]
T_q	temperatura máxima de referência (quente) [K]
u	velocidade na direção x
u_0	velocidade de referência
$\bar{u}_i$	média dos valores de u_i ao longo da característica
U	velocidade adimensional na direção

v	velocidade na direção y
V	velocidade adimensional
$\hat{x}$	direção característica unidimensional

Gregos

α	difusividade térmica
β	fator de compressibilidade artificial
δ	comprimento da linha de corrente durante o instante de tempo
δT	diferença de temperatura de referência
Δ	variação da propriedade que o acompanha
ϕ	propriedade genérica
Γ	representação da superfície de controle
ν	viscosidade cinemática [m/s]
Θ	temperatura adimensional
$\theta, \theta_1, \theta_2$	fatores, entre 0 e 1, que determinam o esquema de discretização no tempo
ρ	massa específica [kg/m ³]
Ω	representação do domínio

Sobrescritos

n	instante atual
$n+1$	instante posterior
$n+\theta$	instante intermediário θ
-	valor médio
+	variável auxiliar
*	variável auxiliar

Subscritos

<i>conv</i>	convectivo
<i>diff</i>	difusivo
<i>i , j , k</i>	notação tensorial
<i>l</i>	direção do eixo x_l
<i>ref</i>	valor referencial
<i>temp</i>	refere-se à tempo
<i>u</i>	associado ao campo de velocidades
<i>p</i>	associado ao campo de pressões

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	102
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	12
1.2	OUTROS TRABALHOS SOBRE APLICAÇÃO DO ESQUEMA CBS.....	14
1.3	OBJETIVOS	15
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	16
2.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	16
2.2	FORMA ADIMENSIONAL DAS EQUAÇÕES	17
3	O ESQUEMA DE SEPARAÇÃO BASEADO NA CARACTERÍSTICA - CBS ...	18
3.1	O ESQUEMA	18
3.2	O PROCEDIMENTO DIRETO DE GALERKIN CARACTERÍSTICO	19
3.3	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL	30
3.4	CÁLCULO DO PASSO DE TEMPO	40
3.5	CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAL	42
3.6	ESQUEMA CBS-AC LIVRE DE MATRIZ	43
3.7	ESQUEMA CBS SEMI-IMPLÍCITO	44
3.7.1	MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO PRÉ - CONDICIONADO.....	44
3.8	A RESTRIÇÃO DA FORMULAÇÃO MISTA	44
3.8.1	A FORMA CBS DE LIU.....	45
3.9	CONVERGÊNCIA PARA O REGIME PERMANENTE	48
3.10	PROCEDIMENTO GERAL DE SOLUÇÃO	48
4	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS DO ESQUEMA CBS....	50
4.1	BANCO DE TUBOS	50
4.1.2	RAZÃO DE ASPECTO (RA) 1,25	51
4.1.3	RAZÃO 1,5	59
4.1.4	RAZÃO 2,0	65
5	ESCOAMENTO NUM CANAL COM UMA OBSTRUÇÃO	72
5.1	RESULTADOS E DISCUSSÕES.	73
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	79
	REFERÊNCIAS	80

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A simulação numérica ou modelagem computacional, em mecânica de fluidos e transferência de calor, teve um grande crescimento nos últimos 30 anos, fruto principalmente dos avanços no desenvolvimento de computadores e das técnicas de solução. Com isso, a simulação numérica constitui-se em uma ferramenta poderosa para a solução de problemas em diversas áreas, inclusive nas engenharias.

A versatilidade e a relativa simplicidade de aplicação desses métodos implicaram em uma sensível diminuição dos trabalhos em laboratórios e, conseqüentemente, dos custos. Por conta disso, essa área está em franca expansão, com aplicação no desenvolvimento de produtos industriais e pesquisas científicas básicas e aplicadas. Entretanto, sua aplicação a um problema depende, na maioria das vezes, da solução de equações diferenciais que o representam. Em problemas bidimensionais, esse procedimento depende da solução de equações diferenciais parciais, onde são comumente utilizados os métodos de elementos finitos entre outros.

O método de elementos finitos clássico é conhecido como método de elementos finitos de Galerkin (GFEM). O GFEM apresenta soluções oscilantes quando aplicado para problemas com convecção dominante. O remédio para sanar esta deficiência é a utilização de técnicas de estabilização. O método Petrov-Galerkin que utiliza uma técnica tipo *upwind* é uma maneira de estabilizar o FEM em problemas com convecção dominante. Existem várias outras técnicas de estabilização na literatura. No contexto do presente trabalho será estudada a técnica de separação baseada na característica (CBS).

O algoritmo CBS, baseado a princípio na remoção de todos os termos de pressão das equações de Navier-Stokes, leva a uma solução não singular para qualquer função de interpolação usada para velocidade e pressão. No segundo passo deste algoritmo, a pressão é obtida através de uma equação de Poisson e finalmente, as componentes de velocidade intermediária obtidas no primeiro passo, são corrigidas para se obter as componentes de velocidade finais que satisfazem a equação de continuidade. (LIU, 2005).

No caso específico do método dos elementos finitos, é comum o uso tanto do método das características como a solução acoplada por meio do esquema de compressibilidade artificial. Embora essas técnicas sejam conhecidas há algum tempo, o seu uso só teve um aumento significativo, principalmente a partir do trabalho apresentado por Massaroti,

Nithiarasu e Zienkiewicz (1998). Neste trabalho se mostrou uma série de soluções que apresentavam boa concordância com diversos estudos experimentais e teóricos realizados anteriormente. Dessa forma, os autores já o consideravam um método muito promissor e com boas possibilidades de utilização em problemas mais complexos.

Dando sequência ao desenvolvimento do modelo, Zienkiewicz et al. (1999), apresentam inovações que permitiam substituir o método de Taylor-Galerkin (ou Lax-Wendroff), utilizados para solução de escoamentos compressíveis. Esse novo algoritmo, então denominado *CBS*, foi aplicado para uma grande variedade de situações, incluindo escoamentos completamente incompressíveis e escoamentos com superfície livre.

Utilizando-se da discretização de Galerkin e dos métodos de elementos finitos, os autores mostram os passos da resolução, as formulações utilizadas e avaliações do método, entre outras informações. Essa metodologia, a partir desse seu maior detalhamento, serviu como base de desenvolvimento para diversas pesquisas no mundo inteiro, que contribuíram para divulgar o novo modelo.

Nesse mesmo período, destaca-se, ainda, outro trabalho de Nithiarasu e Zienkiewicz (2000) no qual são apresentadas as técnicas de estabilização com os passos de tempo. Neste caso, o principal foco residia nos escoamentos incompressíveis e na aceleração convectiva, utilizando o algoritmo *CBS*. Os modelos foram novamente testados para o caso da cavidade recirculante e, assim, foi possível uma avaliação dos resultados obtidos com a nova técnica.

Simulações numéricas para escoamentos instáveis têm sido realizadas em malhas não estruturadas com elementos triangulares lineares. Com o esquema *CBS* é possível usar o método de elementos finitos de Galerkin para problemas convectivos dominantes e obter soluções sem oscilações nos resultados. Os resultados de alguns casos testados mostram que a formulação *CBS* é eficiente e precisa como provado por Liu (2005). Os campos de velocidade e pressão podem ser interpolados por funções de mesma ordem, sem qualquer oscilação no campo de pressão não tendo a restrição (*LBB*) para as funções de interpolação.

A motivação principal para este trabalho é o estudo do esquema *CBS*, com a finalidade de simular, numericamente através de computadores, casos de escoamentos incompressíveis de fluidos viscosos. Existe um código computacional base disponível para problemas bidimensionais, no trabalho de Taylor, Nithiarasu e Setharamu (2004) que será utilizado para as simulações computacionais.

1.2 OUTROS TRABALHOS SOBRE APLICAÇÃO DO ESQUEMA CBS

Codina (2001) analisou a estabilidade do método de elementos finitos usando passo fracionado para escoamentos incompressíveis que usam a equação de Poisson para a pressão. Para o método de projeção clássico de primeira ordem, foi mostrado que há um controle da pressão que depende do tamanho do passo de tempo e, além disso, existe um limite bem menor para este em virtude da estabilidade. A situação piora para o método de segunda ordem em que parte do gradiente de pressão é englobado na equação do momento. A estabilidade da pressão, neste caso, é extremamente fraca. Para superar estas deficiências foi considerado um método de elementos finitos que oferece uma solução numérica para problemas de escoamentos em regime não permanente. Este método tem sido implementado para resolver escoamentos turbulentos incompressíveis, pela solução das equações médias de Reynolds (RANS) para o caso de regime permanente e (URANS) para o caso de regime não permanente. O esquema CBS semi-implícito o qual requer um procedimento de solução de matriz para solução da equação implícita de Poisson, foi implementado usando a técnica de passo fracionado e analisou-se sua estabilidade. A fim de dar suporte aos resultados teóricos, vários exemplos numéricos simples foram apresentados.

Para a solução de escoamento compressível e incompressível, o esquema CBS foi inicialmente apresentado por Zienkiewicz e Codina (1995). O esquema CBS tem sido expandido para investigar outras aplicações, por exemplo, dinâmica dos sólidos, escoamento em águas rasas e escoamentos térmicos em meios porosos. Contudo, recentemente tem sido combinado com método padrão AC (*Compressibilidade Artificial*) para se obter um procedimento eficiente do método explícito livre de matriz, segundo Liu (2005).

Embora o algoritmo CBS já tivesse sido utilizado com sucesso em problemas de escoamento turbulento e com elevados valores do número de Reynolds, modelos de turbulência ainda não haviam sido testados. Notando-se essa lacuna, Liu (2005) apresentou um algoritmo utilizando compressibilidade artificial e o algoritmo CBS para fluxos contínuos e com instabilidades de turbulência que pode ser aplicado a escoamentos incompressíveis. Testes realizados pelos autor demonstraram o sucesso da aplicação do modelo $k-\varepsilon$, aumentando assim, a gama de uso de variações do algoritmo CBS.

A questão conservativa também foi abordada no trabalho de Nithiarasu e Zienkiewicz (2006). Neste estudo, foi realizada uma análise do método explícito para fluidos incompressíveis utilizando o algoritmo CBS, empregando tanto a forma conservativa como a não conservativa. A estabilização, convergência e aspectos de conservação do presente

método foram discutidas. Um procedimento para a eliminação de erros de primeira ordem no tempo foi proposto. Os resultados foram comparados com resultados de outros métodos tendo apresentado uma boa concordância.

Nesta mesma linha, Massarotti et al. (2006) apresentaram em seu trabalho uma comparação dos métodos explícitos e semi-implícitos do algoritmo *CBS - AC*. O estudo mostrou que os dois métodos apresentaram bons resultados. Todas as soluções para o estado estacionário se mostraram praticamente idênticas, especialmente para problemas de convecção natural. Entretanto, a aplicação do método explícito em problemas desta natureza apresenta alguns problemas de convergência e forças de flutuações extremamente altas. Na solução de problemas transientes notam-se algumas diferenças com relação ao incremento de tempo utilizado em cada situação.

Em relação a outros métodos de solução, Thomas e Nithiarasu (2007) comparam dois métodos: o método LCG (*locally conservative Galerkin*) e o método GG (*Global Galerkin*). Ao final do trabalho, pode-se concluir que ambos os métodos são praticamente idênticos, exceto pelo fato do LCG ter taxas de convergência maiores.

Ampliando o método LCG, Thomas, Nithiarasu e Bevan (2007) resolveram as equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível. Além da implementação do método, dois exemplos de referência foram apresentados para demonstrar a validade do método.

1.3 OBJETIVOS

O presente trabalho tem os seguintes objetivos principais:

- continuar estudos e aprendizado do esquema *CBS* na estabilização do método de elementos finitos de Galerkin, iniciados em trabalhos anteriores;
- entender aspectos de implementação computacional do esquema *CBS*;
- aplicar um código computacional baseado no *GFEM-CBS* para simulação de escoamentos de fluidos com e sem transferência de calor, em domínios bidimensionais, com o intuito de testar seu desempenho;
- o estudo tem como foco principal as geometrias de bancos de tubo e canais com restrições.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

As formulações utilizadas neste trabalho tiveram como base os procedimentos descritos por Zienkiewicz e Taylor (2000) e por Lewis, Nithiarasu, Seetharamu, (2004). O modelo semi-implícito, utilizado nas duas formulações, foi baseado no trabalho de Liu e Nithiarasu (2006). Neste capítulo será abordado o modelo matemático para escoamentos incompressíveis.

2.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

As equações governantes de escoamentos incompressíveis de fluidos Newtonianos são as equações de Navier-Stokes que podem ser escritas em notação tensorial como a seguir:

Equações do escoamento

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + S_{u_i} \quad (2)$$

Equações de transporte de um escalar

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (3)$$

Nas equações (1) a (3), u_i representa os componentes de velocidade ao longo dos eixos coordenados x_i ; p é a pressão; ρ é a massa específica; μ é a viscosidade dinâmica e Γ_ϕ é uma propriedade física que depende de qual variável ϕ está sendo transportada; S_{u_i} e S_ϕ são termos fonte que podem englobar outros termos, inclusive diferenciais, não escritos explicitamente.

2.2 FORMA ADIMENSIONAL DAS EQUAÇÕES

A forma adimensional das equações governantes depende da natureza do escoamento e pode ser obtida, no caso de escoamentos incompressíveis, pela utilização das seguintes escalas:

$$\begin{aligned} u_i^* &= \frac{u_i}{u_\infty}; \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}; \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty}; \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_\infty}; x_i^* = \frac{x_i}{L}; \\ t^* &= \frac{tu_\infty}{L}; p^* = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}; \Phi^* = \frac{\phi - \phi_\infty}{\phi_w - \phi_\infty} \end{aligned} \quad (4)$$

onde * indica quantidades adimensionais, o subscrito ∞ representa as quantidades na corrente livre, L é um comprimento de referência e w refere-se ao valor na parede.

As equações de Navier-Stokes e a equação de uma variável escalar, na forma adimensional, com $U_i = \rho^* u_i^*$ e eliminando o asterisco nas demais variáveis adimensionais, podem ser escritas como

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = S_i \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = Q \quad (7)$$

No caso em a variável transportada na Eq. (7) seja a temperatura, o coeficiente de difusão será:

$$\Gamma_\Phi = \alpha / (RePr). \quad (8)$$

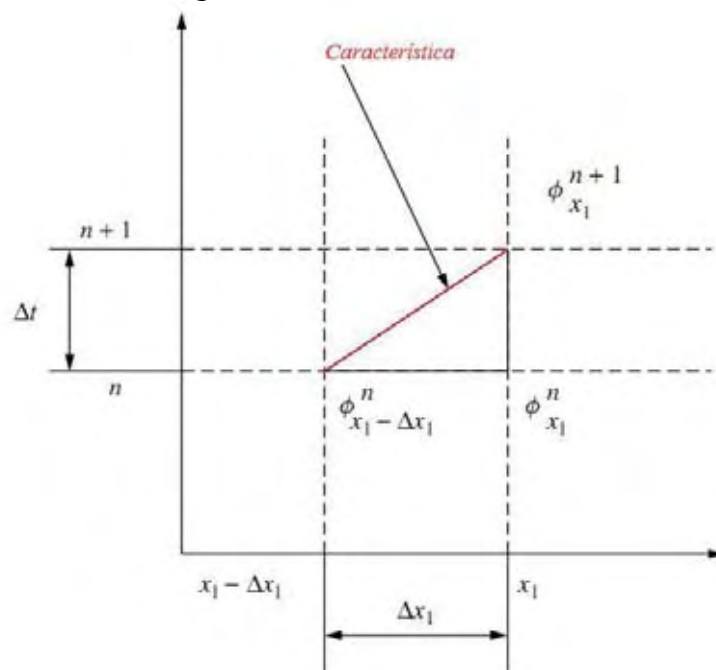
3 O ESQUEMA DE SEPARAÇÃO BASEADO NA CARACTERÍSTICA – CBS

Neste capítulo é apresentado o método de separação baseado na característica (CBS) que se constitui num método de estabilização que possibilita a aplicação do método de elementos finitos de Galerkin para resolução das equações de Navier-Stokes sem oscilações nos campos de pressão e de velocidade.

3.1 O ESQUEMA

Em todas as áreas de dinâmica dos fluidos os métodos baseados na característica são bastante empregados. Dois textos que apresentam este método são: Zienkiewicz e Taylor (2000) e Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004). Este esquema é uma maneira de se estabilizar o método clássico de Galerkin, visto que esta vertente apresenta soluções oscilantes quando aplicada para solução de problemas com convecção como processo dominante. Um código computacional do esquema CBS foi desenvolvido e constitui o capítulo 9 de Zienkiewicz e Taylor (2000). Uma descrição deste esquema é apresentada a seguir.

Figura 1 – Característica linear



Fonte: Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

3.2 O PROCEDIMENTO DIRETO DE GALERKIN CARACTERÍSTICO

Para demonstrar o método de CG, consideremos a equação de convecção-difusão unidimensional

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + Q = 0 \quad (9)$$

Consideremos uma direção característica do escoamento, como mostrado na figura 3.1 no domínio espaço-tempo. Durante o intervalo Δt a partícula desloca-se de $(x_1 - \Delta x_1)$ para x_1 ao longo da direção característica. Se um movimento de coordenadas é assumido ao longo do caminho característico, com velocidade de u_1 , os termos convectivos da equação 9 desaparecem. Embora esta abordagem elimine o termo convectivo responsável pela oscilação espacial quando discretizado no espaço, a complicação de um sistema de coordenadas em movimento x_1' é introduzida na equação 9, a qual torna-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} (x_1', t) - \frac{\partial}{\partial x_1'} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1'} \right) = 0 \quad (10)$$

A forma semi-discreta da equação acima, pode ser escrita como

$$\frac{\phi^{n+1} \Big|_{x_1} - \phi^n \Big|_{x_1 - \Delta x_1}}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial x_1'} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1'} \right)^n \Big|_{x_1 - \Delta x_1} = 0 \quad (11)$$

Com referência a figura 3.1, podemos escrever usando uma expansão em série de Taylor da variável na posição $(x_1 - \Delta x_1)$ como se segue:

$$\phi^n \Big|_{x_1 - \Delta x_1} = \phi^n \Big|_{x_1} - \frac{\partial \phi^n}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{1!} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \frac{\Delta x_1^2}{2!} - \dots \quad (12)$$

O termo difusivo também é expandido como segue

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1'} \right)^n \Big|_{x_1 - \Delta x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^n \Big|_{x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^n \right] \Delta x + \dots \quad (13)$$

Substituindo as equações 12 e 13 na equação 11, obtemos

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = -\frac{\Delta x_1}{\Delta t} \frac{\partial \phi^n}{\partial x_1} + \frac{\Delta x_1^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^n \quad (14)$$

Neste caso, todos os termos são avaliados na posição x_1 . Se a velocidade do escoamento é u_1 , podemos escrever $\Delta x_1 = u_1 \Delta t$.

Substituindo na equação 14, obtemos a forma semi-discreta como

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = -u_1 \frac{\partial \phi^n}{\partial x_1} + u_1^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^n \quad (15)$$

Através da realização de uma expansão da série de Taylor (ver figura 3.1), reaparece o termo convectivo na equação, juntamente com um termo de segunda ordem adicional. Os termos de segunda ordem atuam como um operador de suavização que reduz as oscilações decorrentes da discretização espacial dos termos de convecção.

A extensão do esquema característico de Galerkin para uma equação de convecção-difusão multidimensional de escalares é simples. A equação bidimensional de convecção-difusão sem o termo fonte é escrita, como segue:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \quad (16)$$

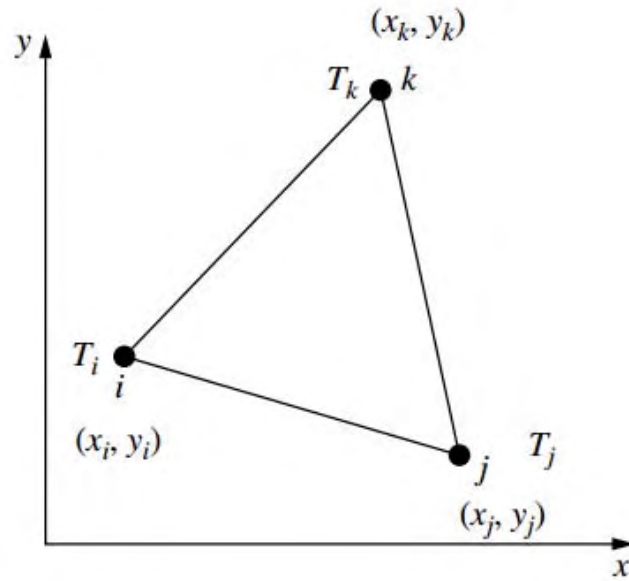
Aplicando o procedimento Galerkin característico na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = & -u_1 \frac{\partial \phi^n}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial \phi^n}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^n + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^n + \\ & + u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right]^n + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right]^n \end{aligned} \quad (17)$$

Assumindo uma variação linear ϕ dentro de um elemento, tal como mostrado na figura 2, podemos interpolar a variável ϕ como

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k = [N] \{ \phi \} \quad (18)$$

Figura 2 – Elemento triangular linear para duas dimensões



Fonte: Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

As funções de interpolação, associadas ao elemento mostrado na figura 2, são:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (19)$$

nas quais os coeficientes são definidos como a seguir

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j; & b_i &= y_j - y_k; & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k; & b_j &= y_k - y_i; & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i; & b_k &= y_i - y_j; & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (20)$$

Empregando o método de resíduos ponderados de Galerkin, nós obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} [N]^T u_1 \frac{\partial \phi^n}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Omega} [N]^T u_2 \frac{\partial \phi^n}{\partial x_2} d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^n d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^n d\Omega \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right]^n d\Omega \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right]^n d\Omega
\end{aligned} \tag{21}$$

A equação (21) é válida globalmente. Em substituição à aproximação espacial global para a variável escalar ϕ na equação (21), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T [N] \frac{\{\phi^{n+1}\} - \{\phi^n\}}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} [N]^T u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{\phi\}^n d\Omega - \int_{\Omega} [N]^T u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{\phi\}^n d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \right) \{\phi\}^n d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{\phi\}^n d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{\phi\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{\phi\}^n \right) \right] d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{\phi\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{\phi\}^n \right) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{22}$$

A equação (22) é válida somente se todas as contribuições de elementos em um domínio de elementos finitos são construídas. As matrizes elementares são derivadas, aplicando a fórmula de integração sobre elementos triangulares lineares:

$$\int_{\Omega} N_i^a N_j^b N_k^c d\Omega = \frac{a!b!c!2A}{(a+b+c+2)!} \tag{23}$$

e para a integral de linha:

$$\int_{\Gamma} N_i^a N_j^b N_k^c d\Gamma = \frac{a!b!c!2\Gamma}{(a+b+c+1)!} \tag{24}$$

onde A é a área de um elemento triangular e Γ é o comprimento do contorno. Aplicando as fórmulas anteriores, obtém-se as equações da seguinte forma:

A matriz de massa é:

$$[M_e] = \int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

A matriz convectiva é:

$$[C_e] = \int_{\Omega} [N]^T \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) d\Omega = \frac{u_1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} + \frac{u_2}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (26)$$

onde

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_k; & c_i &= x_k - x_j \\ b_j &= y_k - y_i; & c_j &= x_i - x_k \\ b_k &= y_i - y_j; & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (27)$$

O termo de difusão pode ser integrado após a aplicação do Teorema de Green. A matriz de difusão para os elementos dentro do domínio é

$$[K_{1e}] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} k \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} k \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) d\Omega = \frac{k}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{k}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A matriz de estabilização é:

$$\begin{aligned}
[K_{1e}] &= u_1 \frac{\Delta t}{2} \left[\int_{\Omega} u_1 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial[N]}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial[N]}{\partial x_2} d\Omega \right] + \\
&+ u_2 \frac{\Delta t}{2} \left[\int_{\Omega} u_1 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial[N]}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial[N]}{\partial x_2} d\Omega \right] = \\
&= \frac{u_1}{4A} \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} u_1 b_i^2 + u_2 b_i c_i & u_1 b_i b_j + u_2 b_i c_j & u_1 b_i b_k + u_2 b_i c_k \\ u_1 b_j b_i + u_2 b_j c_i & u_1 b_j^2 + u_2 b_j c_j & u_1 b_j b_k + u_2 b_j c_k \\ u_1 b_k b_i + u_2 b_k c_i & u_1 b_k b_j + u_2 b_k c_j & u_1 b_k^2 + u_2 b_k c_k \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{u_2}{4A} \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} u_1 c_i b_i + u_2 c_i^2 & u_1 c_i b_j + u_2 c_i c_j & u_1 c_i b_k + u_2 c_i c_k \\ u_1 c_j b_i + u_2 c_j c_i & u_1 c_j b_j + u_2 c_j^2 & u_1 c_j b_k + u_2 c_j c_k \\ u_1 c_k b_i + u_2 c_k c_i & u_1 c_k b_j + u_2 c_k c_j & u_1 c_k b_k + u_2 c_k^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{29}$$

Os vetores força ao longo do contorno (assumindo ij no contorno) são:

$$\begin{aligned}
[f_{1e}] &= k \int_{\Gamma} [N]^T \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_1} \right\rangle \{\phi\}^n d\Gamma n_1 + k \int_{\Gamma} [N]^T \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_2} \right\rangle \{\phi\}^n d\Gamma n_2 = \\
&= \frac{\Gamma}{4A} k \begin{bmatrix} b_i \phi_i & b_j \phi_j & b_k \phi_k \\ b_i \phi_i & b_j \phi_j & b_k \phi_k \\ 0 & & \end{bmatrix} n_1 + \frac{\Gamma}{4A} k \begin{bmatrix} c_i \phi_i & c_j \phi_j & c_k \phi_k \\ c_i \phi_i & c_j \phi_j & c_k \phi_k \\ 0 & & \end{bmatrix} n_2
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
[f_{2e}] &= u_1 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} u_1 [N]^T \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_1} \right\rangle \{\phi\}^n + u_1 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} u_2 [N]^T \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_2} \right\rangle \{\phi\}^n + d\Gamma n_1 + \\
&+ u_2 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} u_1 [N]^T \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_1} \right\rangle \{\phi\}^n + u_2 \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} u_2 [N]^T \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_2} \right\rangle \{\phi\}^n + d\Gamma n_2 = \\
&= \frac{u_1}{2A} \frac{\Delta t}{2} \frac{\Gamma}{2} \begin{bmatrix} u_i (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) + u_2 (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) \\ u_i (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) + u_2 (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) \\ 0 \end{bmatrix}^n n_1 + \\
&+ \frac{u_2}{2A} \frac{\Delta t}{2} \frac{\Gamma}{2} \begin{bmatrix} u_i (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) + u_2 (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) \\ u_i (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) + u_2 (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) \\ 0 \end{bmatrix}^n n_2
\end{aligned} \tag{31}$$

A fim de aplicar o procedimento de Galerkin Característico, para escoamentos incompressíveis, considera-se as equações que regem os escoamentos em duas dimensões, que podem ser escritas como seguem

Equação da Continuidade

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (32)$$

Equação da Quantidade de Movimento em x_1

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (33)$$

Equação da Quantidade de Movimento em x_2

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (34)$$

Equação da Energia Térmica

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) \quad (35)$$

Através das aplicações das etapas seguintes, será possível a obtenção da solução para a equação de transferência de calor por convecção.

Passo 1

Neste passo será realizada a remoção dos termos de pressão das equações (33) e (34). As equações das velocidades intermediárias, na forma semi-discreta, são escritas da seguinte forma:

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em x_1

$$\frac{\tilde{u}_1 - u_1^n}{\Delta t} + u_1 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)^n \quad (36)$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em x_2

$$\frac{\bar{u}_2 - u_2^n}{\Delta t} + u_1 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (37)$$

onde, $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ são variáveis do momentum intermediário.

Podemos aplicar agora o sistema Galerkin Característico nas equações (36) e (37), obtendo a forma semi-discreta das mesmas, como segue:

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em x_1

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_1 - u_1^n}{\Delta t} = & -u_1 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)^n + \\ & + u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} \right] + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em x_2

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_2 - u_2^n}{\Delta t} = & -u_1 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)^n + \\ & + u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} \right] + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

Passo 2

Cálculo da Pressão

O campo de pressão é calculado a partir de uma equação Poisson. A equação é derivada porque as velocidades intermediárias do primeiro passo precisam ser corrigidas. Se as correções de pressão não forem removidas na equação da quantidade de movimento, as velocidades corretas são obtidas, porém, com a perda de algumas vantagens. A forma semi-discreta das equações da quantidade de movimento, sem a remoção dos termos de pressão são:

Forma Semi-Discreta da Equação da Quantidade de Movimento Intermediário e x_1

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} = & -u_1^n \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} - u_2^n \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)^n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_1} + \\ & + u_1^n \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1^n \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} + u_2^n \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_1} \right] + u_2^n \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1^n \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} + u_2^n \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_1} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

Forma Semi-Discreta da Equação da Quantidade de Movimento Intermediário e x_2

$$\begin{aligned} \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{\Delta t} = & -u_1^n \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} - u_2^n \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)^n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_2} + \\ & + u_1^n \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1^n \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} + u_2^n \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_2} \right] + u_2^n \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1^n \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} + u_2^n \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

O campo de velocidade real pode ser obtido se utilizarmos as equações acima. Subtraindo as equações (38) da (40) e (39) de (41) resultará nas equações abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+1} - \tilde{u}_1}{\Delta t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_1} + u_1^n \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n + u_2^n \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n \\ \frac{u_2^{n+1} - \tilde{u}_2}{\Delta t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_2} + u_1^n \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n + u_2^n \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n \end{aligned} \quad (42)$$

Observe que, se as condições de pressão podem ser calculadas a partir de outra fonte, as velocidades intermediárias do [Passo 1](#) podem ser corrigidas utilizando a equação (42), contudo, uma equação de pressão independente é necessária, a fim de substituir os valores da equação acima. Isto será realizado através da equação de continuidade se diferenciar a primeira equação em relação à x_1 e a segunda equação em relação à x_2 (desprezando os termos de 3ª ordem) e somando as equações resultantes, temos:

$$\frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} = -\frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right)^n \quad (43)$$

Equação de continuidade,

$$\frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_2} = 0 \quad (44)$$

Substituindo a equação (44) na equação (43), obtemos a equação da pressão, como vemos a seguir:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right) \quad (45)$$

Note que, não existe condições transientes ou convecção na equação acima. Aqui um método de solução de sistemas lineares de equações será necessário, a fim de obter uma solução para esta equação.

Passo 3

Correção da Velocidade

A correção da velocidade já foi obtida na equação (42) no passo anterior. Isto implica que a pressão e o campo de velocidade intermediário são escritos como:

$$\frac{u_1^{n+1} - \tilde{u}_1}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n \quad (46)$$

$$\frac{u_2^{n+1} - \tilde{u}_2}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_2} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^n + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^n$$

Os termos de ordem superior podem ser excluídos, visto que, esses termos pouco influenciam sobre a correção da velocidade, Chum-Bin-Liu (2005).

Passo 4

Cálculo da Temperatura

Aplicando o procedimento de Galerkin Característico para a equação da temperatura, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = & -u_1 \frac{\partial T^n}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial T^n}{\partial x_2} + \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right)^n + \\
& + u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial T^n}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T^n}{\partial x_2} \right] + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial T^n}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T^n}{\partial x_2} \right]
\end{aligned} \tag{47}$$

Todas as quatro etapas anteriores são resumidas a seguir.

Passo 1

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em x_1

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{u}_1 - u_1^n}{\Delta t} = & -u_1 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)^n + \\
& + u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]^n + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]^n
\end{aligned} \tag{48}$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em x_2

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{u}_2 - u_2^n}{\Delta t} = & -u_1 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)^n + \\
& + u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]^n + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]^n
\end{aligned} \tag{49}$$

Passo 2

Cálculo da Equação da Pressão

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right)^n = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right) \tag{50}$$

Passo 3

Correção da Velocidade

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+1} - \tilde{u}_1}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_1} + u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n \\ \frac{u_2^{n+1} - \tilde{u}_2}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_2} + u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^n + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^n \end{aligned} \quad (51)$$

Passo 4

Cálculo da Temperatura

$$\begin{aligned} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} &= -u_1 \frac{\partial T^n}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial T^n}{\partial x_2} + \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right)^n + \\ &+ u_1 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right]^n + u_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right]^n \end{aligned} \quad (52)$$

Concluimos a discretização temporal do esquema **CBS**.

3.3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

Assumem-se funções de interpolação lineares para todas variáveis. Considerando o elemento triangular, como mostra a figura, as interpolações das variáveis podem ser escritas:

$$\begin{aligned} u_1 &= N_i u_{1i} + N_j u_{1j} + N_k u_{1k} = [N] \{u_1\} \\ u_2 &= N_i u_{2i} + N_j u_{2j} + N_k u_{2k} = [N] \{u_2\} \\ p &= N_i p_i + N_j p_j + N_k p_k = [N] \{p\} \\ T &= N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = [N] \{T\} \end{aligned} \quad (53)$$

Aplicando o método de Galerkin, às equações (48) a (50) e (52), obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T \frac{\bar{u}_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} d\Omega = & -\int_{\Omega} [N]^T u_1 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Omega} [N]^T u_2 \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^n d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^n d\Omega + \\
& + \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]^n d\Omega + \\
& + \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]^n d\Omega
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T \frac{\bar{u}_2^{n+1} - u_2^n}{\Delta t} d\Omega = & -\int_{\Omega} [N]^T u_1 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Omega} [N]^T u_2 \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^n d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^n d\Omega + \\
& + \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]^n d\Omega + \\
& + \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]^n d\Omega
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^n + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^n \right] d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \rho [N]^T \left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right] d\Omega \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} d\Omega = & -\int_{\Omega} [N]^T u_1 \frac{\partial T^n}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Omega} [N]^T u_2 \frac{\partial T^n}{\partial x_2} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^n d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^n d\Omega + \\
& + \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left[u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right]^n d\Omega + \\
& + \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left[u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right]^n d\Omega
\end{aligned} \tag{57}$$

Substituindo as funções de interpolação da equação (53), resulta nas equações a seguir.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T [N] \frac{\{\tilde{u}_1\}^{n+1} - \{u_1\}^n}{\Delta t} d\Omega &= -u_1 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_1\}^n d\Omega - u_2 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_1\}^n d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \right) \{u_1\}^n d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{u_1\}^n d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_1\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_1\}^n \right) \right] d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_1\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_1\}^n \right) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T [N] \frac{\{\tilde{u}_2\}^{n+1} - \{u_2\}^n}{\Delta t} d\Omega &= -u_1 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_2\}^n d\Omega - u_2 \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_2\}^n d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \right) \{u_2\}^n d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{u_2\}^n d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_2\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_2\}^n \right) \right] d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_2\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_2\}^n \right) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial [N]}{\partial x_1} \right)^n + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \right] \{p\}^n = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega} \rho [N]^T \left[\frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{\tilde{u}_1\}^n + \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right] \{\tilde{u}_2\}^n d\Omega \right\} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T [N] \frac{\{T^{n+1}\} - \{T^n\}}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} [N]^T u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{T\}^n d\Omega - \int_{\Omega} [N]^T u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{T\}^n d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \right) \{T\}^n d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\alpha \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{T\}^n d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{T\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{T\}^n \right) \right] d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{T\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{T\}^n \right) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{61}$$

Integrando por partes os termos de segunda ordem nas Equações (58) a (61), se obtém a forma fracas das equações, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T [N] \frac{\{\tilde{u}_1\}^{n+1} - \{u_1\}^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} [N]^T \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{u_1\}^n d\Omega - \\
&- \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{u_1\}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \nu [N]^T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_2 \right)^n d\Gamma - \\
&- \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_1\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_1\}^n \right) \right] d\Omega - \\
&- \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_1\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_1\}^n \right) \right] d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} [N]^T \left(\left[u_1 \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] n_1 + \left[u_2 \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] n_2 \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [N]^T [N] \frac{\{\tilde{u}_2\}^{n+1} - \{u_2\}^n}{\Delta t} d\Omega &= - \int_{\Omega} [N]^T \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{u_2\}^n d\Omega - \\
&- \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{u_2\}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \nu [N]^T \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_2 \right)^n d\Gamma - \\
&- \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_2\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_2\}^n \right) \right] d\Omega - \\
&- \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{u_2\}^n + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{u_2\}^n \right) \right] d\Omega + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} [N]^T \left(\left[u_1 \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] n_1 + \left[u_2 \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] n_2 \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right] \{p\}^n d\Omega &= \int_{\Gamma} [N]^T \left[\frac{\partial p}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} n_2 \right] d\Gamma - \\
&- \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega} \rho [N]^T \left[\frac{\partial [N]}{\partial x_1} \{\tilde{u}_1\}^n + \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \{\tilde{u}_2\}^n \right] d\Omega \right\}
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [N]^T [N] \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} d\Omega = - \int_{\Omega} [N]^T \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{T\}^n d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} \alpha \left(\frac{\partial [N]}{\partial x_1} \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \{T\}^n d\Omega + \int_{\Gamma} [N]^T \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} n_2 \right) d\Gamma - \\
& - \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \right] \{T\}^n d\Omega - \\
& - \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \right] \{T\}^n d\Omega + \\
& + \frac{\Delta t}{2} u_1 \int_{\Omega} \left[[N]^T \left(u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^n \right] n_1 d\Gamma + \\
& + \frac{\Delta t}{2} u_2 \int_{\Omega} \left[[N]^T \left(u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^n \right] n_2 d\Gamma
\end{aligned} \tag{65}$$

Numa forma matricial, num dado elemento, as equações (62) a (65) ficam na forma:

$$\frac{1}{\Delta t} [M_e] \{\tilde{u}_1\}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} [M_e] \{u_1\}^n - [C_e] \{u_1\}^n - [K_{1e}] \{u_1\}^n - [K_{2e}] \{u_1\}^n + \{f_{11e}\}^n + \{f_{12e}\}^n \tag{66}$$

$$\frac{1}{\Delta t} [M_e] \{\tilde{u}_2\}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} [M_e] \{u_2\}^n - [C_e] \{u_2\}^n - [K_{1e}] \{u_2\}^n - [K_{2e}] \{u_2\}^n + \{f_{21e}\}^n + \{f_{22e}\}^n \tag{67}$$

$$[K_{pe}] \{p\}^n = \{f_{pe}\}^n \tag{68}$$

$$\frac{1}{\Delta t} [M_e] \{T\}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} [M_e] \{T\}^n - [C_e] \{T\}^n - [K_{1e}] \{T\}^n - [K_{2e}] \{T\}^n + \{f_{Te}\}^n + \{f_{Te}\}^n \tag{69}$$

As matrizes de convecção, difusão e outras matrizes são muito semelhantes às do caso para a equação de convecção-difusão, no entanto, a diferença aqui é que as velocidades de convecção não são constantes. Além disso, a não-linearidade é introduzida nos termos

convectivos da equação do momentum. As matrizes de elementos seguintes surgem do esquema *CBS* após a discretização espacial:

$$[M_e] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Matriz de Convecção Elementar

$$[C_e] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} (usu + u_{1i})b_i & (usu + u_{1i})b_j & (usu + u_{1i})b_k \\ (usu + u_{1j})b_i & (usu + u_{1j})b_j & (usu + u_{1j})b_k \\ (usu + u_{1k})b_i & (usu + u_{1k})b_j & (usu + u_{1k})b_k \end{bmatrix} + \frac{1}{24} \begin{bmatrix} (vsu + u_{2i})c_i & (vsu + u_{2i})c_j & (vsu + u_{2i})c_k \\ (vsu + u_{2j})c_i & (vsu + u_{2j})c_j & (vsu + u_{2j})c_k \\ (vsu + u_{2k})c_i & (vsu + u_{2k})c_j & (vsu + u_{2k})c_k \end{bmatrix} \quad (71)$$

Na Equação (71) tem-se

$$\begin{aligned} usu &= u_{1i} + u_{1j} + u_{1k} \\ vsu &= u_{2i} + u_{2j} + u_{2k} \end{aligned} \quad (72)$$

Duas matrizes de difusão são necessárias para problemas de transferência de calor por convecção, uma para a equação da quantidade de movimento e outra para a equação de temperatura, como seguem abaixo

$$\begin{aligned} [K_{1e}] &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} v \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} v \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{v}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{v}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
[K_{1e}] &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial[N]^T}{\partial x_1} \alpha \frac{\partial[N]}{\partial x_1} + \frac{\partial[N]^T}{\partial x_2} \alpha \frac{\partial[N]}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{\alpha}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{74}$$

A matriz de estabilização é dada por

$$u_1 \frac{\Delta t}{2} \left[\int_{\Omega} u_1 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial[N]}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial[N]}{\partial x_2} d\Omega \right] + \tag{75}$$

$$+ u_2 \frac{\Delta t}{2} \left[\int_{\Omega} u_1 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial[N]}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial[N]}{\partial x_2} d\Omega \right]$$

$$\begin{aligned}
[K_{2e}] &= u_1 \frac{\Delta t}{2} \left[\int_{\Omega} u_1 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial[N]}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_1} \frac{\partial[N]}{\partial x_2} d\Omega \right] + \\
&\quad + u_2 \frac{\Delta t}{2} \left[\int_{\Omega} u_1 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial[N]}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial[N]^T}{\partial x_2} \frac{\partial[N]}{\partial x_2} d\Omega \right] \\
&= \frac{u_{1av}}{12A} us u \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{u_{1av}}{12A} vs u \begin{bmatrix} b_i c_i & b_i c_j & b_i c_k \\ b_j c_i & b_j c_j & b_j c_k \\ b_k c_i & b_k c_j & b_k c_k \end{bmatrix} + \\
&\quad + \frac{u_{2av}}{12A} us u \begin{bmatrix} c_i b_i & c_i b_j & c_i b_k \\ c_j b_i & c_j b_j & c_j b_k \\ c_k b_i & c_k b_j & c_k b_k \end{bmatrix} + \frac{u_{2av}}{12A} vs u \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{76}$$

onde u_{1av} e u_{2av} são valores médios de u_1 e u_2 sobre um elemento. A discretização dos passos CBS requerem mais três matrizes e quatro vetores de termos independentes para concluir o processo. A matriz dos termos discretizados de segunda ordem para o passo 2 é:

$$[K_{pe}] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x_1} p \frac{\partial [N]}{\partial x_1} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x_2} p \frac{\partial [N]}{\partial x_2} \right) d\Omega \quad (77)$$

$$[K_{pe}] = \frac{1}{4A\rho} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4A\rho} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (78)$$

A matriz de gradiente na direção x_1 é:

$$[G_1] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (79)$$

A matriz de gradiente na direção x_2 é:

$$[G_2] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (80)$$

Os vetores de termos independentes são os resultados da aplicação do teorema de Green para as derivadas de segunda ordem da equação diferencial.

O vetor força na direção x_1 da equação da quantidade de movimento é:

$$\begin{aligned} \{f_1\} &= \nu \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ 0 \end{bmatrix} 2 \left[\frac{\partial [N_i]}{\partial x_1} \frac{\partial [N_j]}{\partial x_1} \frac{\partial [N_k]}{\partial x_1} \right] \{u_1\}^n d\Gamma n_1 + \nu \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial [N_i]}{\partial x_2} \frac{\partial [N_j]}{\partial x_2} \frac{\partial [N_k]}{\partial x_2} \right] \{u_1\}^n d\Gamma n_2 \\ &= \frac{\Gamma}{4A} \nu \begin{bmatrix} b_i u_{1i} + b_j u_{1j} + b_k u_{1k} \\ b_i u_{1i} + b_j u_{1j} + b_k u_{1k} \\ 0 \end{bmatrix}^n n_1 + \frac{\Gamma}{4A} \nu \begin{bmatrix} c_i u_{1i} + c_j u_{1j} + c_k u_{1k} \\ c_i u_{1i} + c_j u_{1j} + c_k u_{1k} \\ 0 \end{bmatrix}^n n_2 \end{aligned} \quad (81)$$

note que ij é assumido como o lado ij de um elemento.

O vetor força da direção x_2 da equação da quantidade de movimento é:

$$\begin{aligned} \{f_2\} &= \nu \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial[N_i]}{\partial x_1} \frac{\partial[N_j]}{\partial x_1} \frac{\partial[N_k]}{\partial x_1} \right] \{u_2\}^n d\Gamma n_2 + \nu \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial[N_i]}{\partial x_2} \frac{\partial[N_j]}{\partial x_2} \frac{\partial[N_k]}{\partial x_2} \right] \{u_2\}^n d\Gamma n_2 \\ &= \frac{\Gamma}{4A} \nu \begin{bmatrix} b_i u_{2i} + b_j u_{2j} + b_k u_{2k} \\ b_i u_{2i} + b_j u_{2j} + b_k u_{2k} \\ 0 \end{bmatrix}^n n_1 + \frac{\Gamma}{4A} \nu \begin{bmatrix} c_i u_{2i} + c_j u_{2j} + c_k u_{2k} \\ c_i u_{2i} + c_j u_{2j} + c_k u_{2k} \\ 0 \end{bmatrix}^n n_2 \end{aligned} \quad (82)$$

O vetor força, a partir da discretização dos termos de segunda ordem da pressão no passo 2 é:

$$\{f_{pe}\} = -\frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial[N]}{\partial x_1} \{\tilde{u}_1\}^n + \frac{\partial[N]}{\partial x_2} \{\tilde{u}_2\}^n \right] d\Omega \right\} \quad (83)$$

$$\{f_{pe}\} = \frac{\Gamma}{4A_\rho} \begin{bmatrix} b_i p_i + b_j p_j + b_k p_k \\ b_i p_i + b_j p_j + b_k p_k \\ 0 \end{bmatrix}^n n_1 + \frac{\Gamma}{4A_\rho} \begin{bmatrix} c_i p_i + c_j p_j + c_k p_k \\ c_i p_i + c_j p_j + c_k p_k \\ 0 \end{bmatrix}^n n_2 \quad (84)$$

Finalmente, o termo força, devido à discretização dos termos de segunda ordem, na equação da energia é:

$$\{f_4\} = \frac{\Gamma}{4A} \alpha \begin{bmatrix} b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k \\ b_i T_i + b_j T_j + b_k T_k \\ 0 \end{bmatrix}^n n_1 + \frac{\Gamma}{4A} \alpha \begin{bmatrix} c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k \\ c_i T_i + c_j T_j + c_k T_k \\ 0 \end{bmatrix}^n n_2 \quad (85)$$

Os quatro passos do esquema CBS serão reescritos, agora, na forma matricial.

Passo 1

Cálculo da velocidade intermediária na direção x_1

$$[M] \frac{\Delta \{\tilde{u}_1\}}{\Delta t} = -[C] \{u_1\}^n - [K_m] \{u_1\}^n - [K_s] \{u_1\}^n + \{f_1\} \quad (86)$$

Cálculo da velocidade intermediária na direção x_2

$$[M] \frac{\Delta \{\tilde{u}_2\}}{\Delta t} = -[C] \{u_2\}^n - [K_m] \{u_2\}^n - [K_s] \{u_2\}^n + \{f_2\} \quad (87)$$

Passo 2

Cálculo da pressão

$$[K]\{p\}^n = -\frac{1}{\Delta t}[[G_1]\{\tilde{u}_1\} + [G_2]\{\tilde{u}_2\}] + \{f_3\} \quad (88)$$

Passo 3

Correção da Velocidade

$$[M]\{u_1\}^{n+1} = [M]\{\tilde{u}_1\} - \Delta t [G_1]\{p\}^n \quad (89)$$

$$[M]\{u_2\}^{n+1} = [M]\{\tilde{u}_2\} - \Delta t [G_2]\{p\}^n$$

Passo 4

Cálculo da Temperatura

$$[M]\frac{\Delta\{T\}}{\Delta t} = -[C]\{T\}^n - [K_t]\{T\}^n - [K_s]\{T\}^n + \{f_4\} \quad (90)$$

Os quatro passos acima são a base do esquema *CBS* para a solução das equações de convecção de calor.

Pode se usar a matriz de massa $[M]$ concentrada para simplificar a solução.

$$[M_{Le}] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (91)$$

3.4 CÁLCULO DO PASSO DE TEMPO

O passo de tempo local em cada nó é calculado como se segue:

$$\Delta t = \min(\Delta t_c, \Delta t_d) \quad (92)$$

O passo de tempo de convecção Δt_c é escrito como:

$$\Delta t_c = \frac{h}{|u|} \quad (93)$$

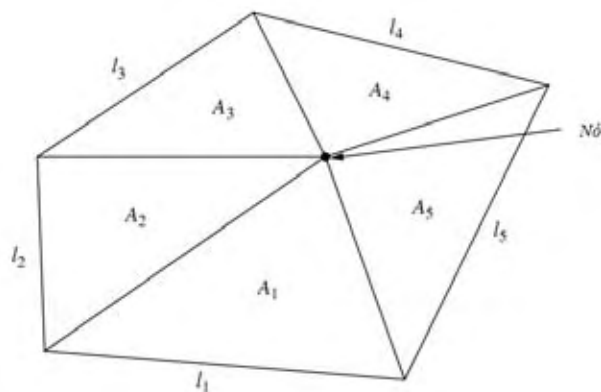
$$\Delta t_d = \frac{h^2}{2k}$$

onde Δt_c e Δt_d são os passos de tempo baseados nos processos de convecção e difusão. Os passos de tempo de difusão contêm duas partes. Uma função da viscosidade cinemática e outro para a difusividade térmica do fluido. O passo de tempo de difusão pode ser expresso como:

$$\Delta t_d = \min \left(\frac{h^2}{2\nu}, \frac{h^2}{2\alpha} \right) \quad (94)$$

onde ν é a viscosidade cinemática e α a difusividade térmica.

Figura 3 – Elemento Triangular Linear



Fonte: Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

Um procedimento simples para calcular o tamanho de elemento em duas dimensões é:

$$h = \min \left(\frac{2Area_i}{l_i} \right), i = 1, \text{ número de elementos ligados ao nó} \quad (95)$$

onde, $Area_i$ é a área dos elementos ligados ao nó e l_i é o comprimento dos lados opostos como mostrado na Figura 3.

3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAL

As principais condições de contorno que prevalecem em problemas de convecção de calor são: pressão, temperatura e velocidade (condições de Dirichlet) e condição de contorno do fluxo (condição de Neumann). Outras possibilidades podem ser derivadas de tais condições.

Valores prescritos: Se um valor de cada componente da velocidade, da temperatura ou da pressão é dado em um nó na fronteira, o valor será "forçado" nestes nós.

Condições de fluxos: Em um cálculo da transferência de calor, é possível ter as condições de calor prescritas, que são normalmente fornecidos como

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} \quad (96)$$

onde n é a direção perpendicular à superfície na qual o limite do escoamento estabelecido é imposto. A condição do escoamento de calor é aplicada, reorganizando $\{f_4\}$ da equação 85 como a seguir

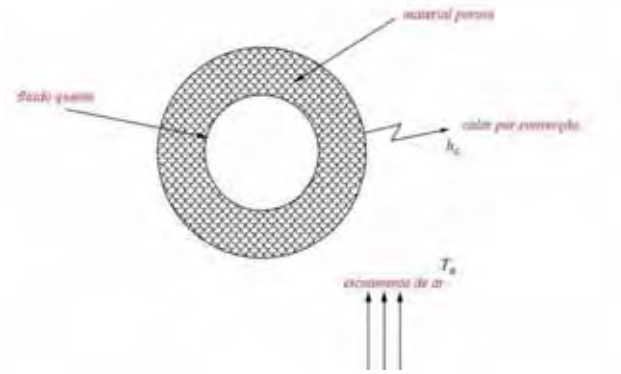
$$\{f_4\} = \frac{\Gamma}{2} \bar{q} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

Em muitas aplicações de transferência de calor industrial, condição de contorno e transferência de calor por convecção, são comuns. Se a fronteira, como mostrado na Figura 4, está convectada para a atmosfera, então, a condição de contorno sobre esta parede pode ser expressa por:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h_c (T - T_a) \quad (98)$$

Em que, a temperatura T na parede é desconhecida. A implementação é feita, substituindo $\bar{q}$ da Equação (96) no lado direito da equação (98). No entanto, T deve ser considerado desconhecido e deve ser avaliado em cada passo de tempo.

Figura 4 – Exemplo de Condição de Contorno por Convecção



Fonte: Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

As condições iniciais, que descrevem o estado inicial do fluido (temperatura, pressão, velocidade e outras propriedades), são empregadas no início dos cálculos e são dependentes de cada problema.

3.6 ESQUEMA CBS-AC LIVRE DE MATRIZ

Liu (2005) mostra que a discretização da pressão pode ser escrita numa forma genérica como:

$$\Delta \rho = \left(\frac{1}{c^2} \right)^n \Delta p = \left(\frac{1}{c^2} \right)^n (p^{n+1} - p^n) =$$

$$= -\Delta t \left[\frac{\partial U_j^n}{\partial x_j} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_j^*}{\partial x_j} - \Delta t \theta_1 \left(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_j \partial x_j} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_j \partial x_j} \right) \right] \quad (99)$$

onde c é a velocidade do som. Na equação (99) assume-se que mudanças de densidade são relacionadas com mudanças de pressão para compressibilidade pequena ou deformação elástica e que c se aproxima do infinito para escoamentos incompressíveis.

3.7 ESQUEMA CBS SEMI-IMPLÍCITO

A única diferença entre o esquema CBS-AC livre de matriz e o CBS esquema semi-implícito é a solução da equação de pressão de Poisson efetuada no segundo caso. Este esquema é obtido pela substituição $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = 1$ com a velocidade da onda acústica c aproximando-se do infinito. Assim a equação (99) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial U_j^*}{\partial x_j} \quad (100)$$

onde o passo de tempo crítico $\Delta t = h / \left(\|u_j\| \right)$ é aplicado neste método.

3.7.1 MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO PRÉ - CONDICIONADO

O requisito de grande capacidade de armazenamento é a maior desvantagem do esquema CBS semi-implícito, especialmente em escoamentos tridimensionais, com um sistema esparso de equações lineares. Entretanto, um método iterativo, tipo gradiente conjugado pré-condicionado, pode reduzir as dificuldades associadas com a esparsidade da matriz.

Este método constrói o residual dos vetores, que são conjugados e o gradiente de um minimizador funcional quadrático. A matriz pré-condicionada torna a convergência mais rápida dependendo do número de condição da matriz, definido como:

$$\Lambda = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (101)$$

onde $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$ são os autovalores máximo e mínimo da matriz.

3.8 A RESTRIÇÃO DA FORMULAÇÃO MISTA

Em muitos problemas de interesse, a densidade permanece aproximadamente constante. Este comportamento é chamado incompressibilidade. O comportamento de escoamento incompressível é geralmente definido usando ambos os parâmetros, velocidade u

e pressão p . Aqui formulações mistas são frequentemente empregadas na literatura de elementos finitos. A maioria das formas mistas do método de Galerkin resultam em equações discretas, que podem usualmente ser escritas como segue, na forma de matriz global.

$$\begin{bmatrix} K & G^T \\ G & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (102)$$

onde $\tilde{u}$ é a variável primária discreta e $\tilde{p}$ é a variável de restrição discreta (equivalente ao multiplicador lagrangeano). A matriz G é o operador gradiente discreto, K e M são matrizes quadradas simétricas $n \times n$. K é positiva definida e M é definida negativa ou zero, que depende do tipo de discretização empregada. f_1 e f_2 são termos fontes.

Nesta seção seguinte, é apresentada a forma de evitar a restrição de estabilidade **LBB** que faz com que no caso de matriz de massa nula ($M = 0$) vários elementos úteis não possam ser empregados, pois resultam em oscilações do campo de pressão e consequente não convergência do campo de velocidade.

3.8.1 A FORMA CBS DE LIU

Na discretização de Liu (2005), usando o esquema CBS, as equações resultantes, já discretizadas notempo e espaço, tem a forma:

Passo 1

Quantidade de Movimento Intermediário

$$\Delta \tilde{U}^* = -M_u^{-1} \Delta t \left[\left(C_u \tilde{U} + K_\tau \tilde{u} - f_u \right) - \Delta t \left(K_u \tilde{U} \right) \right]^n \quad (103)$$

Passo 2

Pressão

$$\left(M_p + \Delta t^2 \theta_1 \theta_2 H \right) \Delta \tilde{p} = \Delta t \left[\left(G \tilde{U} + K_\tau \tilde{u} - f_u \right) - \Delta t \left(K_u \tilde{U} \right) \right]^n \quad (104)$$

Passo 3

Correção da Quantidade de Movimento

$$\Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{U}^* - M_u^{-1} \Delta t [G^T (\tilde{p}^n + \theta_2 \Delta \tilde{p})] \quad (105)$$

Passo 4

Correção da Temperatura

$$\Delta \tilde{T} = -M_T^{-1} \Delta t [C_T \tilde{T} + K_t \tilde{T} + K_s \tilde{T} - f_T]^n \quad (106)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_u &= \int_{\Omega} N_u^T N_u d\Omega; \quad K_{\tau} = \int_{\Omega} B^T \mu_e \left(I_o - \frac{2}{3} m m^T \right) B d\Omega; \quad H = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T \nabla N_p d\Omega; \\ M_p &= \int_{\Omega} N_p^T \left(\frac{1}{\beta^2} \right)^n N_p d\Omega; \quad f_p = \Delta t \int_{\Gamma} N_p^T [N_u \tilde{U}^n + \theta_1 (\Delta \tilde{U}^* - \Delta t \nabla p^{n+\theta_2})] h^T d\Gamma; \\ K_u &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla^T (u N_u))^T (\nabla^T (u N_u)) d\Omega; \quad G = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T N_u d\Omega; \quad f_u = \int_{\Gamma} N_u^T t_d d\Gamma; \\ C_u &= \int_{\Omega} N_u^T (\nabla^T (u N_u)) d\Omega; \quad M_T = \int_{\Omega} N_T^T N_T d\Omega; \quad C_T = \int_{\Omega} N_T^T (\nabla^T (u N_T)) d\Omega; \\ K_T &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla^T (u N_u))^T (\nabla^T (u N_u)) d\Omega; \quad K_s = \int_{\Omega} (\nabla N_T)^T \alpha_e \nabla N_T d\Omega; \\ f_T &= \int_{\Gamma} \alpha_e N_u^T q d\Gamma \end{aligned} \quad (107)$$

A matriz da função de tensão B é definida como

$$B = S N_u \quad (108)$$

onde S é um operador matriz de tensão. Este operador é definido como:

$$S = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \quad (109)$$

$$m = [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (110)$$

$$I_o = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (111)$$

Para escoamento de Stokes, a equação (103) no [Passo 1](#) somente mantém o termo de viscosidade e o termo de tensão na fronteira, e fica na forma:

$$\Delta \tilde{U}^* = -M_u^{-1} \Delta t_{temp} [K_\tau \tilde{u}^n - f_u]^n \quad (112)$$

onde o passo de tempo Δt_{temp} provê estabilidade temporal.

No [Passo 2](#) a matriz M_p desaparece para incompressibilidade e $\Delta \tilde{p}$ é igual à zero para regime permanente, deste modo, a equação (104) pode ser reescrita como:

$$G\tilde{U}^n + \theta_1 G \Delta \tilde{U}^* - \Delta t_{spat} \theta_1 H \tilde{p}^n = f_p \quad (113)$$

onde a estabilidade espacial na forma discreta é provida pelo passo de tempo $\Delta t_{spat} = l \Delta t_{temp}$ na qual l é a razão do passo de tempo.

Em regime permanente, tem-se $\Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{V}$, que resulta na equação (105) no [Passo 3](#) na forma:

$$\Delta \tilde{U}^* = M_u^{-1} \Delta t_{temp} [G^T \tilde{p}^n] \quad (114)$$

Portanto, a discretização resulta na seguinte forma de matricial:

$$\begin{bmatrix} K_v & G^T \\ G & \Delta t_{temp} \theta_1 (GM_u^{-1} G^T - lH) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}^n \\ \tilde{p}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \\ f_p \end{bmatrix} \quad (115)$$

onde a matriz $K_v = K_\tau / \rho$ é a forma quadrática. O vetor velocidade discreto é $\tilde{U}^n$ e $\tilde{p}^n$ é o vetor discreto das pressões nodais.

Se a pressão aproximada é assumida ser descontínua, então:

$$\tilde{p}^n = (\Delta t_{temp} \theta_1)^{-1} (GM_u^{-1} G^T - lH)^{-1} f_p - (\Delta t_{temp} \theta_1)^{-1} (GM_u^{-1} G^T - lH)^{-1} G \tilde{U}^n \quad (116)$$

e o sistema para $\tilde{U}^n$ será obtido pela eliminação de $\tilde{p}^n$. Pode-se escrever:

$$[K_v + \Psi G^T G] \tilde{U}^n = f_u + \Psi G^T f_p \quad (117)$$

onde a função penalidade $\Psi = -1/(\Delta t_{temp} \theta_1 E)$ na qual $E = GM_u^{-1} G^T - lH$ é proporcional a Δt_{temp} .

De considerações físicas, pode-se demonstrar que a forma bilinear K_v é simétrica e positiva definida das matrizes E . A partir da forma quadrática demonstra-se que E é simétrica e negativa definida. O sistema é, entretanto, sempre positivo definido e conduz para uma solução não singular para $\tilde{U}^n$.

Nota-se que o sistema discreto, equação (115) não tem nenhum termo da diagonal nulo, deste modo a restrição de **LBB** não mais influencia o espaço de elementos finitos para velocidade e pressão. Assim o sistema teoricamente permite funções de interpolação convenientes para $\tilde{U}^n$ e $\tilde{p}^n$.

3.9 CONVERGÊNCIA PARA O REGIME PERMANENTE

O critério para verificar a convergência para regime permanente é definido como

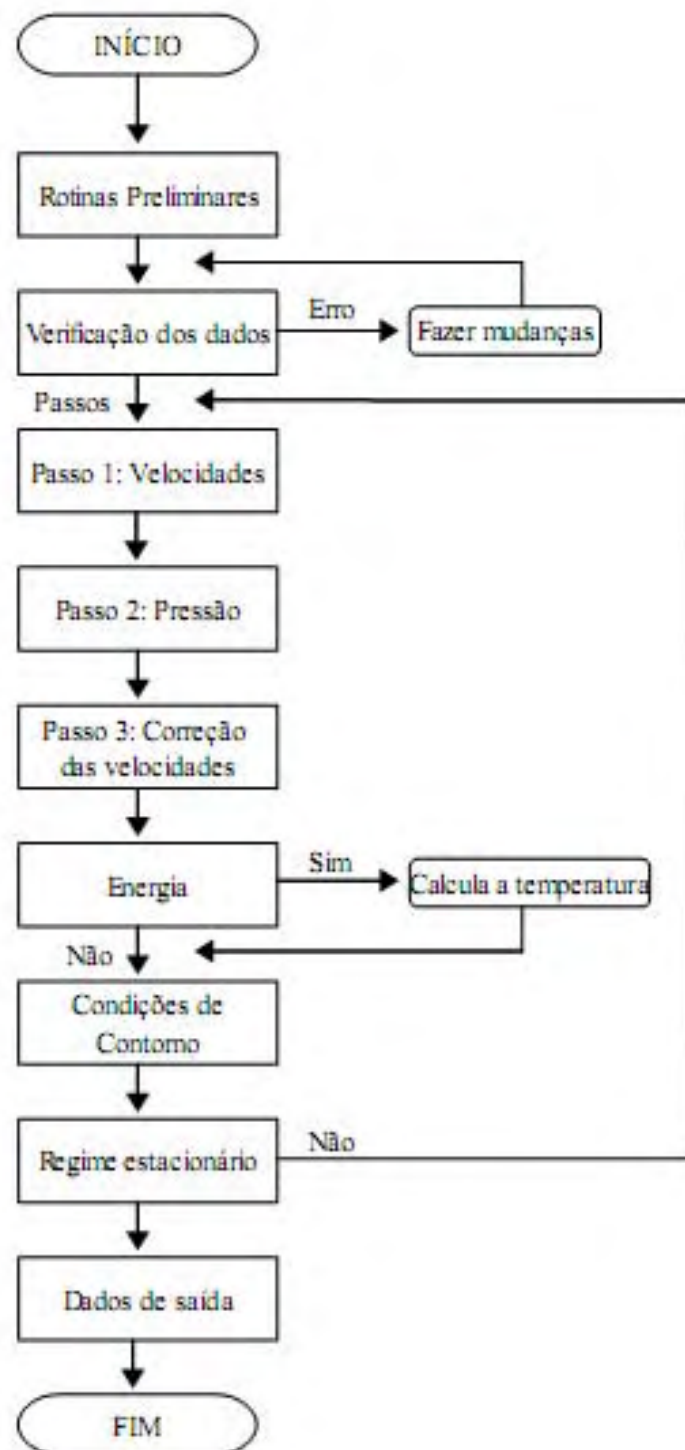
$$\|e\|_{L_2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{NN} (\|u\|_i^{n+1} - \|u\|_i^n)^2 \right]^{1/2}}{\left[\sum_{i=1}^{NN} (\|u\|_i^{n+1})^2 \right]^{1/2}} \quad (118)$$

Na qual NN é o número de nós na malha.

3.10 PROCEDIMENTO GERAL DE SOLUÇÃO

O procedimento geral de solução usando um modelo transiente é utilizado com base nos parâmetros calculados no capítulo 9 de Zienkiewicz e Taylor (2000).

Figura 5 – Diagrama do algoritmo CBS de solução



Fonte: Jordam (2010)

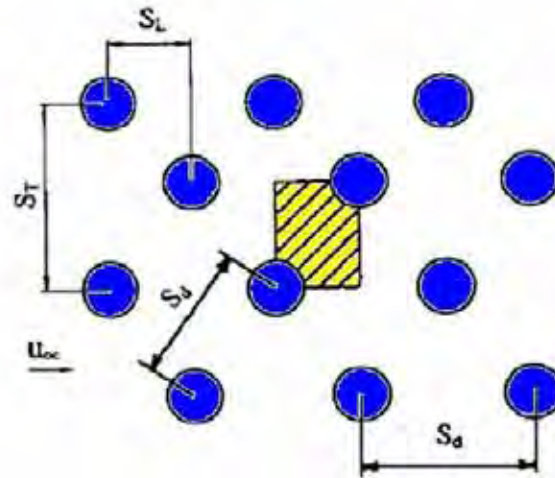
4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS DO ESQUEMA CBS.

Foram realizados alguns testes para o caso de aplicação do algoritmo CBS semi-implícito (a pressão é obtida por uma equação de Poisson) nas simulações de escoamentos pelas equações de Navier-Stokes. No presente estudo, foram desenvolvidos testes de simulações de escoamentos através de bancos de tubos com arranjos desencontrados. Foi especificado um intervalo de tempo (Δt) de 10^{-5} e números de Reynolds (Re) = 75, 150, 250, 500 e 1500. Para $Re > 1000$, o passo de tempo 10^{-5} apresentou resultados incoerentes no campo de temperatura, porém, a velocidade parece apresentar resultados esperados, notado pelo comportamento das linhas de corrente. Foi realizado um teste com refino do passo de tempo (Δt) para 10^{-6} o que voltou a mostrar resultados coerentes, contudo, um teste de refino de malha ainda precisa ser analisado. O programa fonte original foi obtido de Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004). Em todas as simulações foram usadas malhas de elementos triangulares lineares, visto que este tipo de elemento tem um custo computacional mais baixo e existem vários geradores de malha para este tipo de elemento. As malhas foram geradas usando um código computacional desenvolvido pelo Prof. Nithiarasu da Universidade de Swansea, um dos autores do livro mencionado acima. Este código está disponível no sítio do mesmo.

4.1 BANCO DE TUBOS

Banco de tubos são frequentemente encontrados em trocadores de calor, portanto, escoamentos neste tipo de geometria são de interesse. Um banco de tubos com arranjo desencontrado é ilustrado na Figura 6, onde se considera a geometria em que o escoamento se repetiria periodicamente, Roychowdhury et al. (2002). Foram considerados os seguintes casos para simulações: $S_L / d = 1,25$; $S_L / d = 1,5$ e $S_L / d = 2$; com $d = 1$.

Figura 6 – Banco de Tubos em Arranjo Desencontrado



Fonte: Pereira (2010)

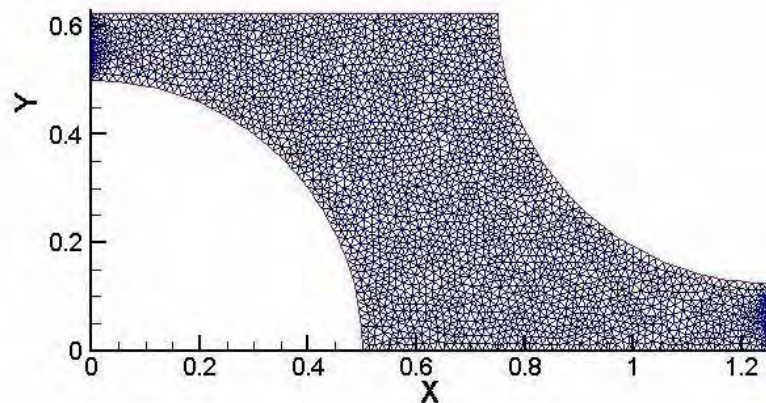
Neste tipo de escoamento supõe-se que a velocidade de saída do domínio é idêntica à velocidade de entrada, ou seja, ela repete-se periodicamente. Isto requer um procedimento de solução iterativo adicional para se encontrar as velocidades corretas de entrada e saída. Entretanto existe uma diferença de pressão Δp entre entrada e saída. Para se evitar o processo iterativo de se encontrar as condições de contorno mais coerentes na entrada e saída do domínio, as condições de contorno foram especificadas como segue: na entrada do domínio, $u=1$; $v=0$; $T=0$; na saída, $p=0$; nos contornos horizontais (condição de simetria), $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $\frac{\partial T}{\partial y}=0$; $v=0$; nos contornos dos tubos, $u=0$; $v=0$; $T=1$. Como condição inicial partiu-se de um campo nulo, exceto nos contornos onde a velocidade é não nula como na entrada.

Na sequência são apresentados resultados das simulações para a velocidade e campo de temperatura.

4.1.2 RAZÃO DE ASPECTO (RA) 1,25

Neste item são apresentados resultados para escoamento em um banco de tubos com $S_L/d=1,25$. São apresentadas as evoluções das linhas de corrente e do campo de temperatura ao longo do tempo, para diferentes valores de número de Reynolds. Uma ilustração da malha é mostrada na Figura 7.

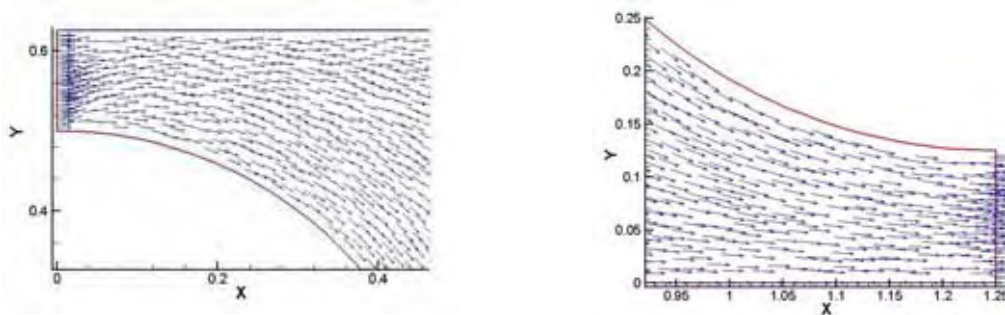
Figura 7 – Domínio discretizado em elementos finitos triangulares na razão 1,25.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Na Figura 8 se mostra os perfis de velocidade na entrada e saída do domínio considerado para simulação (área destacada na Figura 6). Observa que na saída o perfil de velocidade é praticamente plano com imposto na entrada.

Figura 8 – Perfis de velocidades na entrada e na saída.

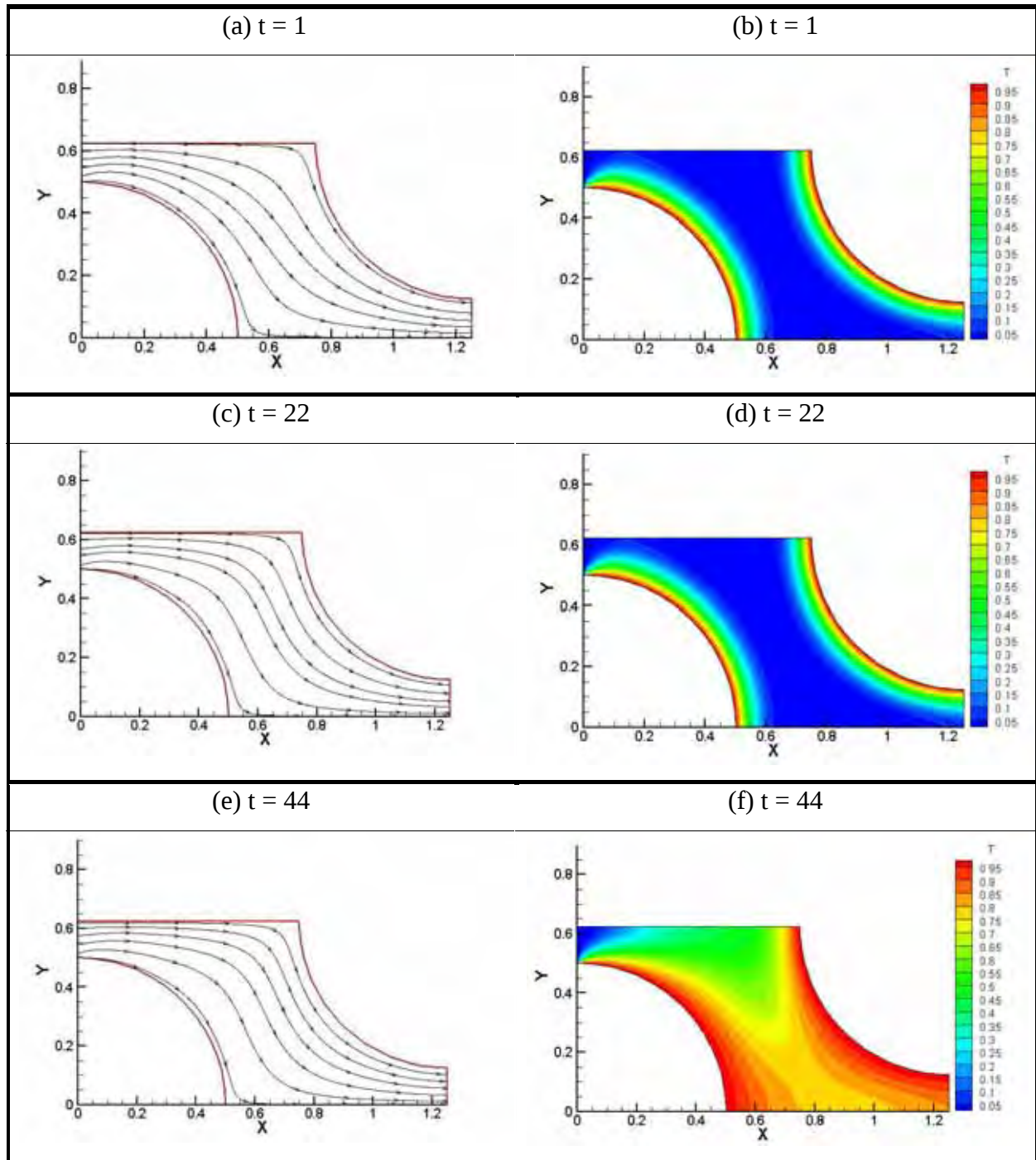


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A seguir são mostradas as linhas de corrente (lado esquerdo) e campo de temperatura (lado direito) para valores diferentes de número de Reynolds e vários instantes de tempo de simulação.

Os gráficos (a), (c) e (e), nessa razão de 1.25, mostram as linhas de corrente e os gráficos (b), (d) e (f) indicam os campos de temperaturas para número de Reynolds igual a 75, respectivamente, em instantes de tempos adimensionais de 1, 22 e 44.

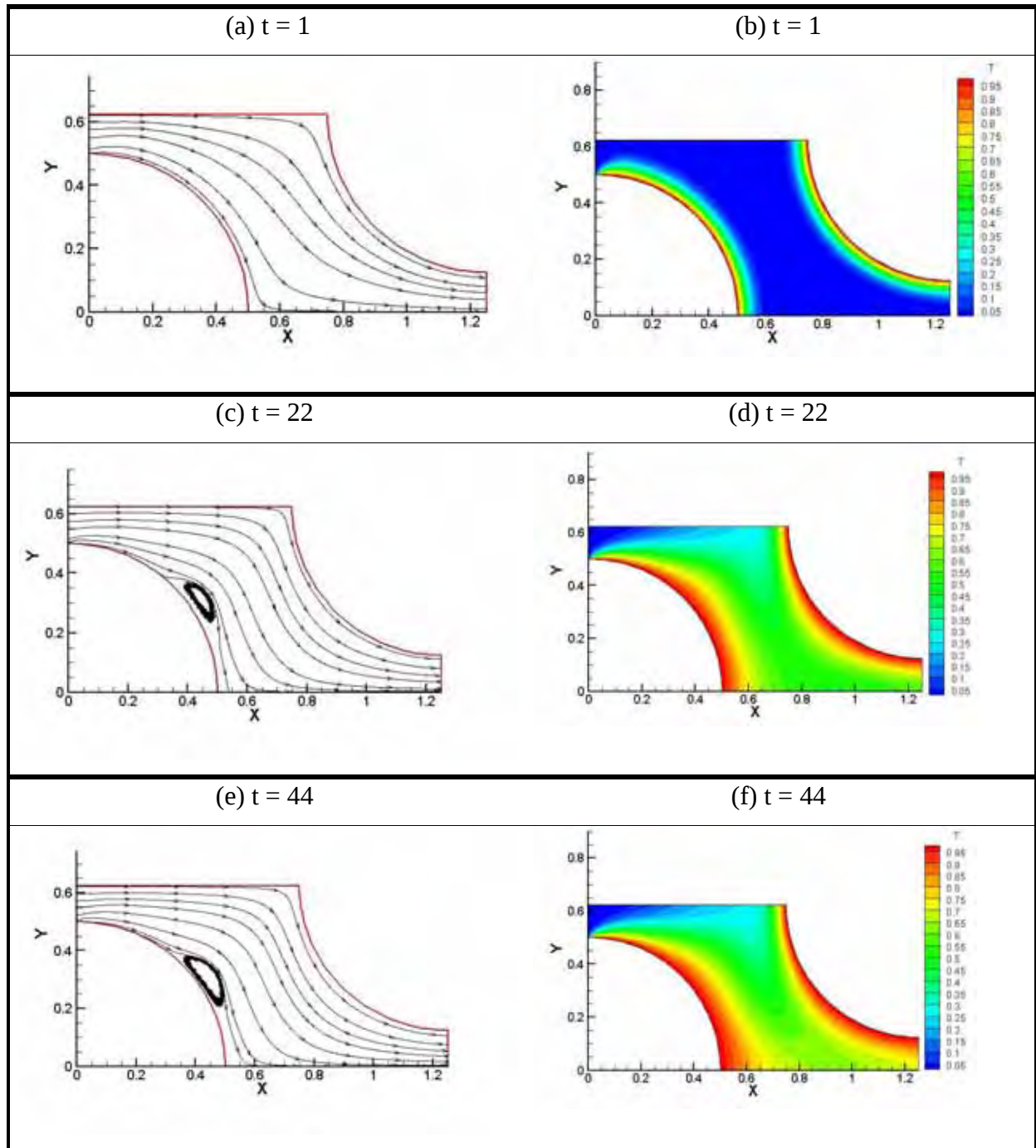
Figura 9 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 75$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

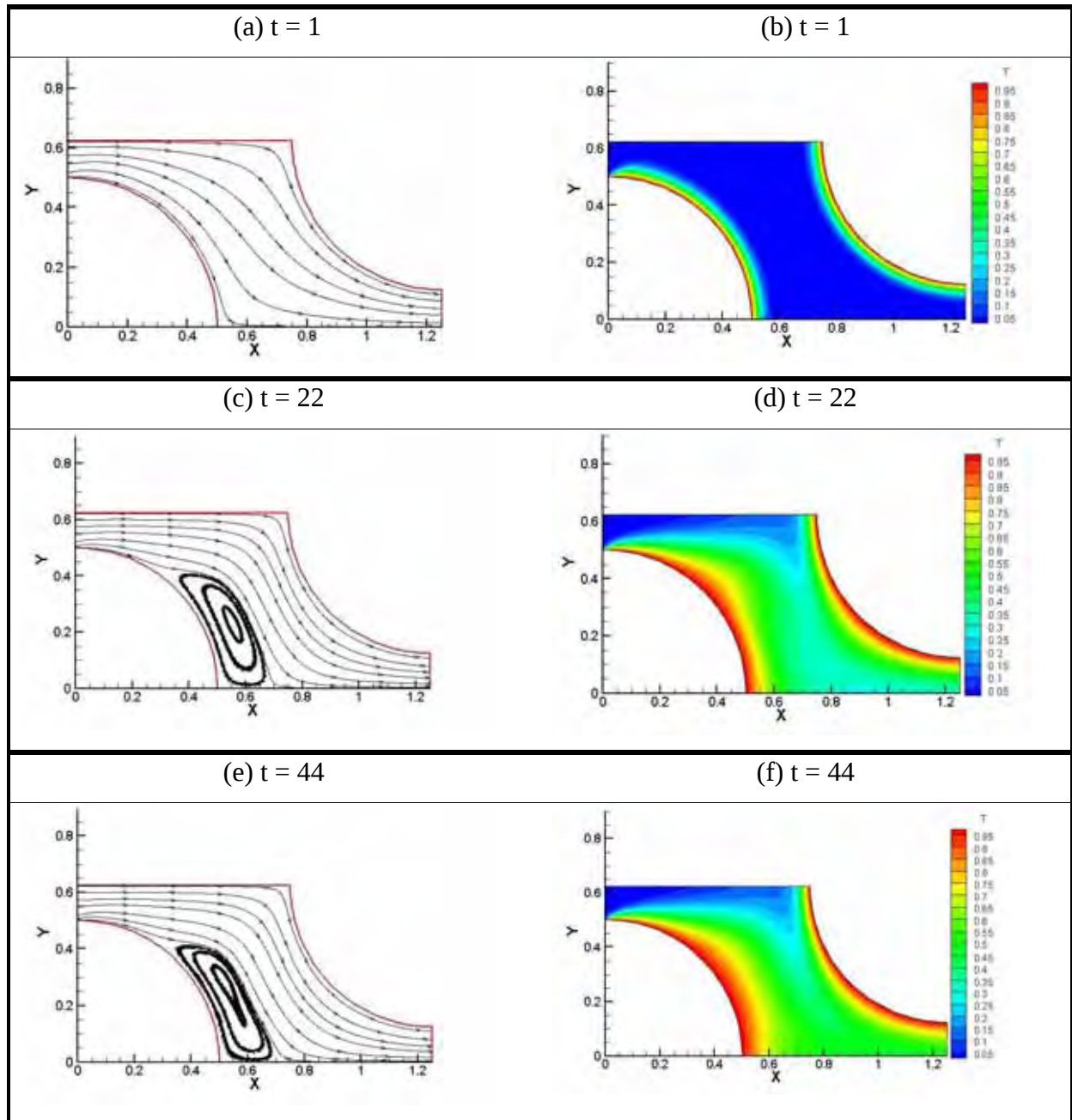
No intervalo dos instantes entre 1 a 22 o comportamento das linhas de corrente e campo de temperatura não sofrem mudanças significativas, a partir do instante 44 há uma mudança, se tornando estacionário e não mudando ao longo dos instantes seguintes. Nota-se que, o comportamento do campo de velocidade para este número de Reynolds baixo, não se altera significativamente, enquanto que os campos de temperaturas sofrem maiores mudanças.

Figura 10– Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re= 150$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 11 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 250$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Na Figura 10, os gráficos (a), (c) e (e) mostram as linhas de corrente e os gráficos (b), (d) e (f) indicam os campos de temperaturas para número de Reynolds igual a 150, respectivamente, em instantes de tempos adimensionais de 1, 22 e 44 segundos. Nota-se que, inicia-se, sutilmente, uma pequena região de recirculação atrás do cilindro inferior no tempo adimensional 1, e essa região aumenta nos instantes subsequentes, formando um pequeno vórtice a partir do instante 22, permanecendo estável ao longo dos instantes seguintes. No entanto, note que, não há recirculação no cilindro superior devido ao estreitamento da sessão

de passagem do escoamento nesta região. Os campos de temperaturas apresentam comportamento coerente com as condições de contorno impostas na geometria deste escoamento, sendo visível o aquecimento nas paredes dos cilindros.

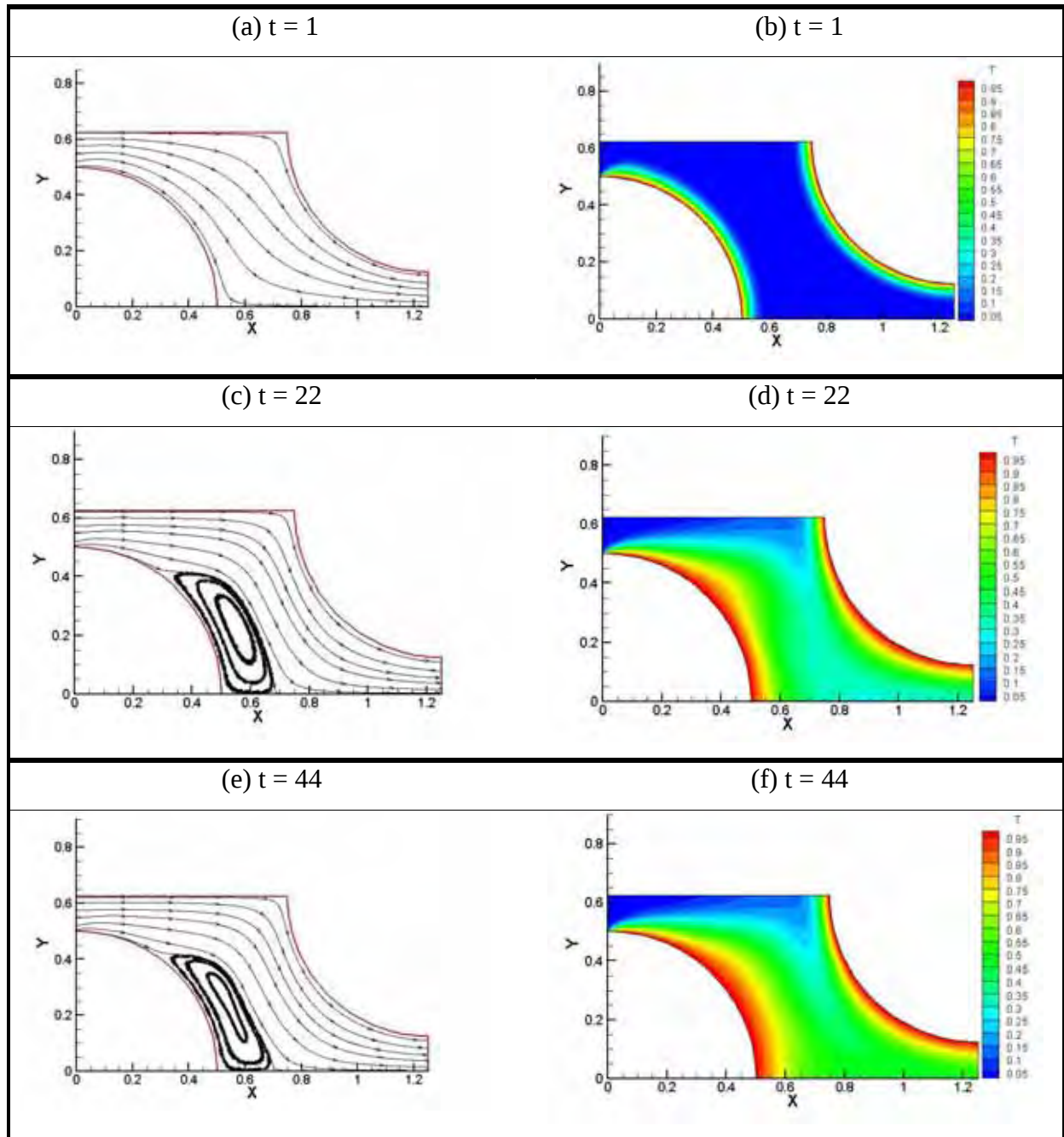
Para Reynolds igual a 250, nos mesmos instantes de tempo, como mostrado na Figura 11, o comportamento das linhas de corrente e campo de temperatura são similares aos resultados anteriores.

O mesmo acontece para Reynolds igual a 500, como mostrado na Figura 12. Nos instantes de tempo, o comportamento das linhas de corrente e campo de temperatura são similares aos resultados anteriores.

Resultados para Reynolds igual a 1500, apresentados na Figura 13, mostram os vórtices que se desprenderam da parede a partir do tempo adimensional 1, formando algumas regiões de recirculação atrás do primeiro cilindro. No passo de tempo adimensional 4 aumenta-se o seu comprimento até se estabilizarem. Os campos de temperaturas apresentam comportamento coerente com as condições de contorno impostas na geometria deste escoamento.

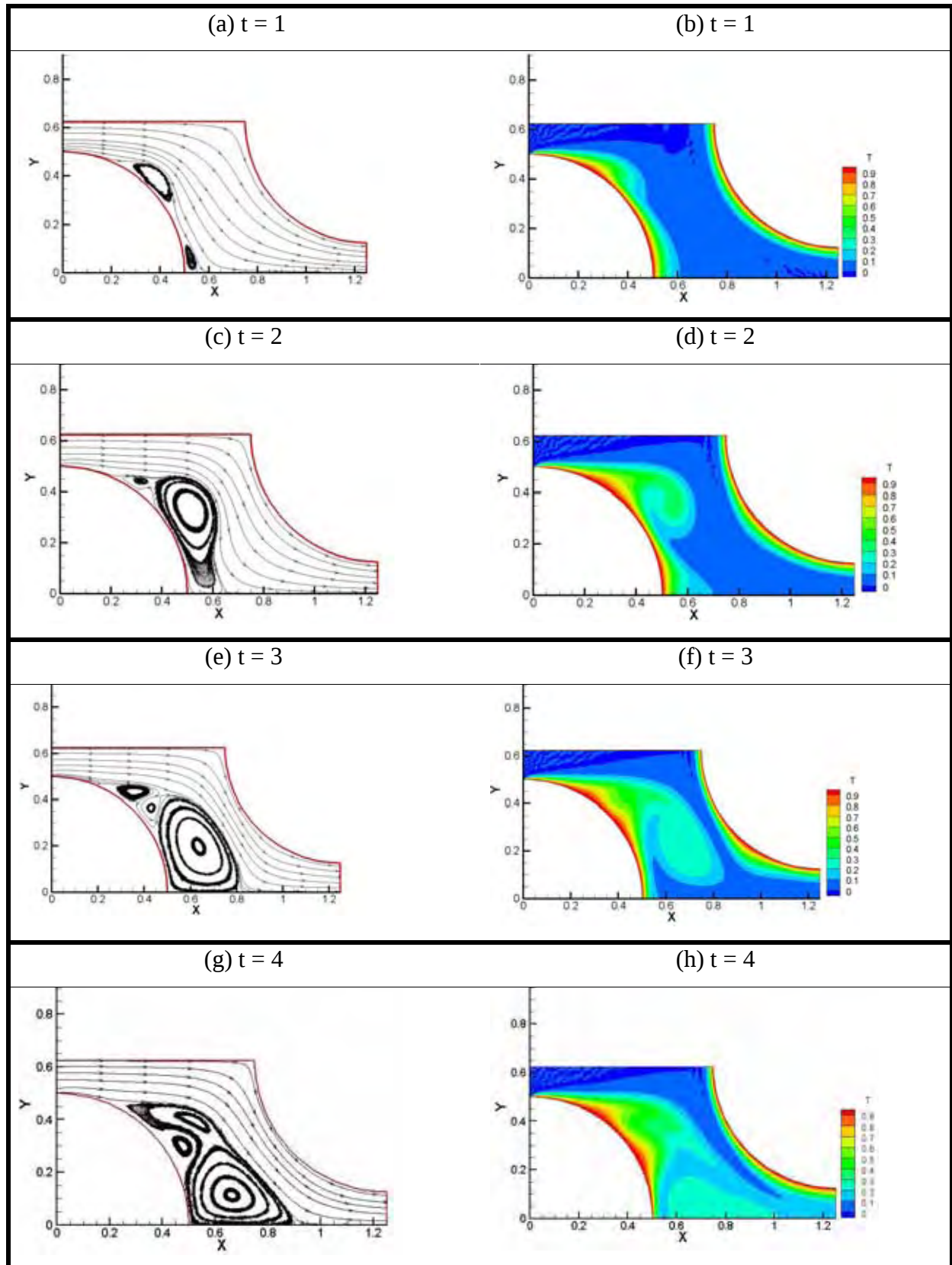
Para essa simulação, foi necessário o refinamento do passo de tempo de 10^{-5} para 10^{-6} para eliminar pequenas irregularidades no campo de temperatura, porém, ainda há necessidade de uma simulação com o refino da malha no passo de tempo 10^{-5} para verificar se há convergência de resultados.

Figura 12– Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re= 500$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 13 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 1500$.

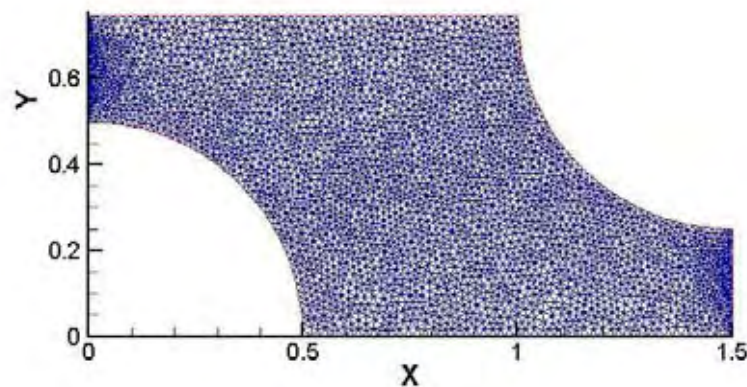


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

4.1.3 RAZÃO 1,5

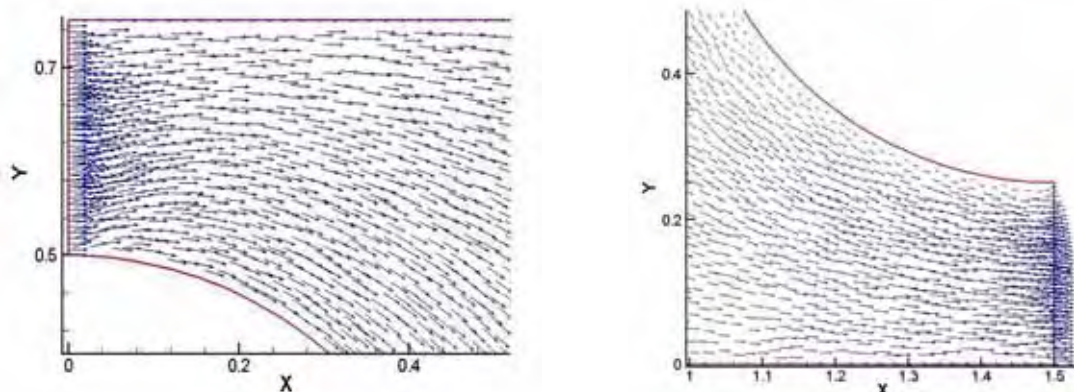
Semelhante ao que foi feito no item anterior, são apresentados resultados para escoamento em um banco de tubos com $S_L/d = 1,5$. O domínio discretizado é mostrado na Figura 14. Os perfis de velocidade na entrada e saída são mostrados na Figura 4.10.

Figura 14 – Domínio discretizado em elementos finitos triangulares na razão 1,5.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 15 – Perfis de velocidades na entrada e na saída.



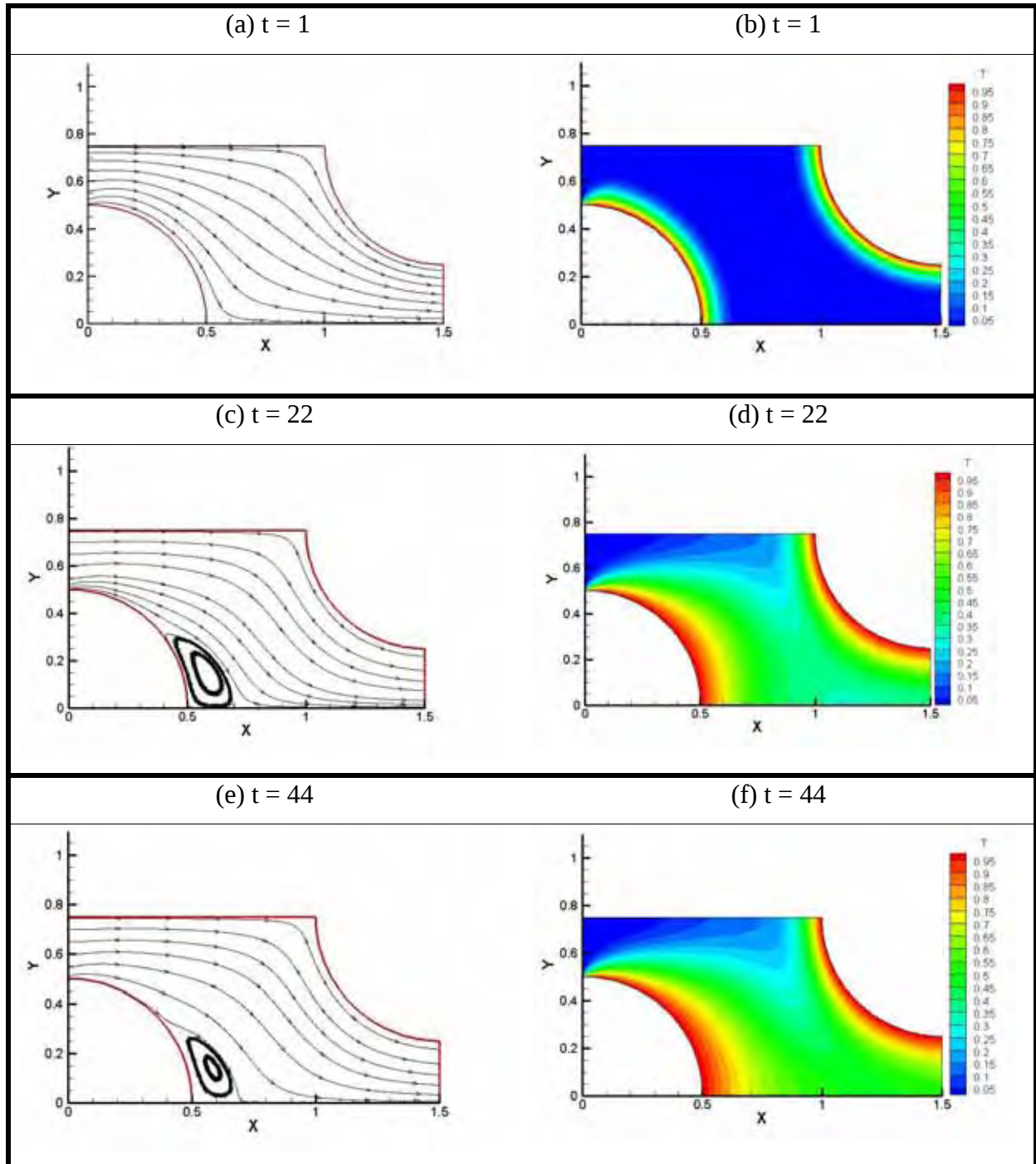
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

São apresentadas as evoluções das linhas de corrente e do campo de temperatura ao longo do tempo, para diferentes valores de número de Reynolds.

Nas Figuras 16 a 19, os gráficos (a), (c) e (e), nessa razão de 1,5, assim como na razão de 1,25, mostram as linhas de corrente e os gráficos (b), (d) e (f) indicam os campos de temperaturas para números de Reynolds iguais a 75, 150, 250 e 500, respectivamente, com instantes de tempos adimensionais de 1, 22 e 44. A formação de vórtice entra em regime permanente a partir do tempo adimensional 22. O campo de temperatura para essa razão se

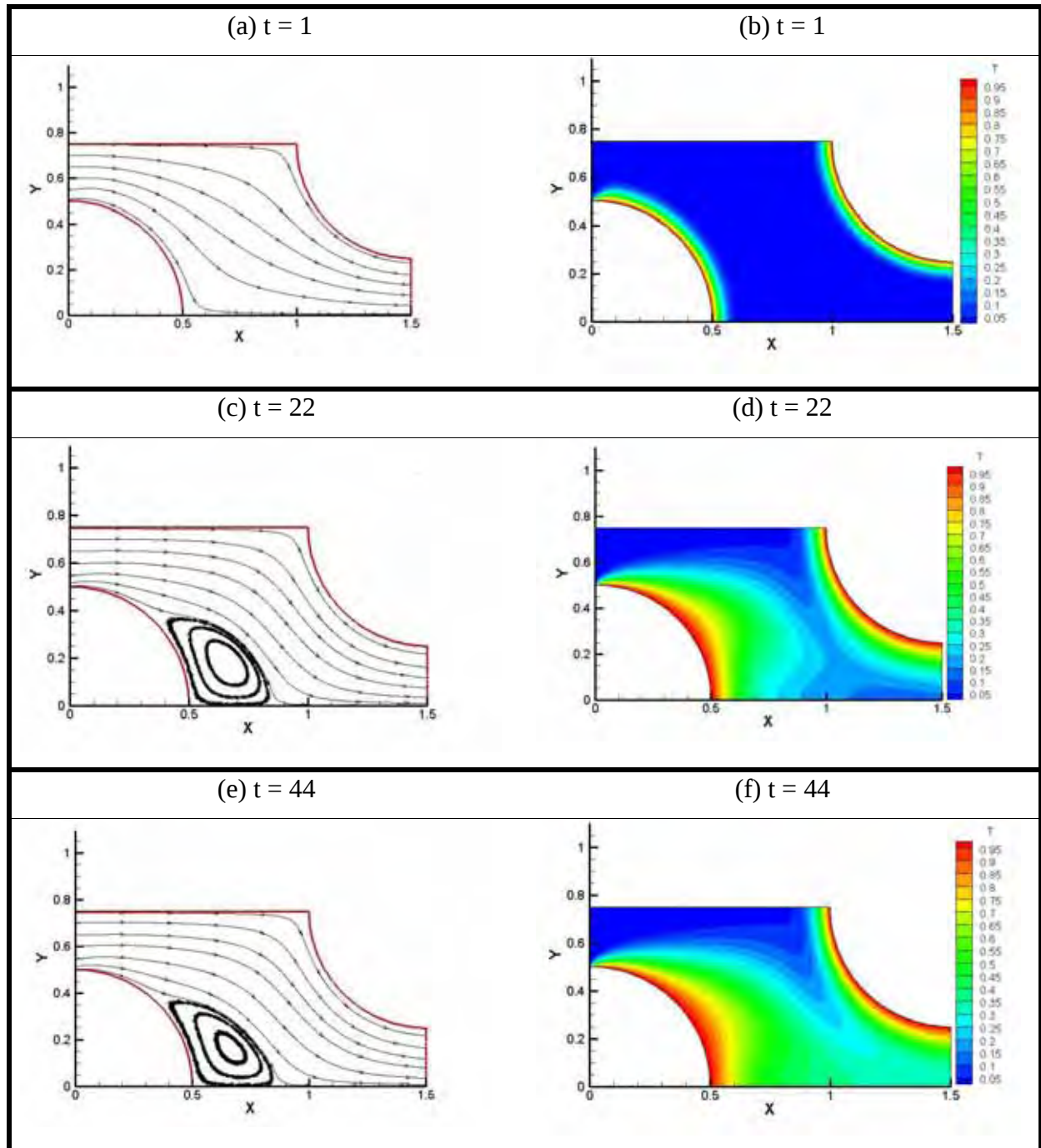
mostra de forma coerente em todo o processo de simulação, sendo notável o aquecimento do fluido nas paredes do cilindro.

Figura 16 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 75$.



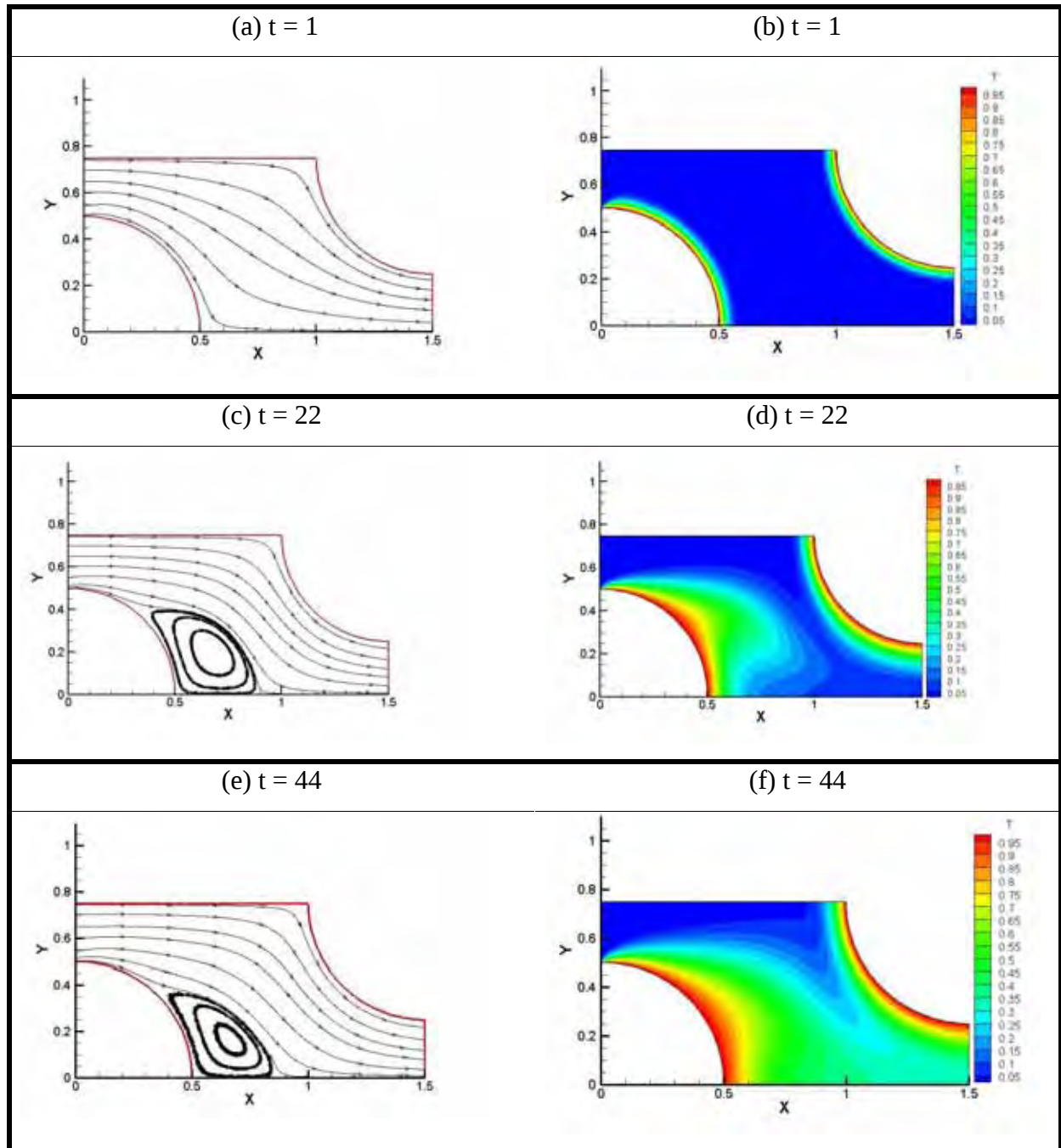
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 17 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 150$.



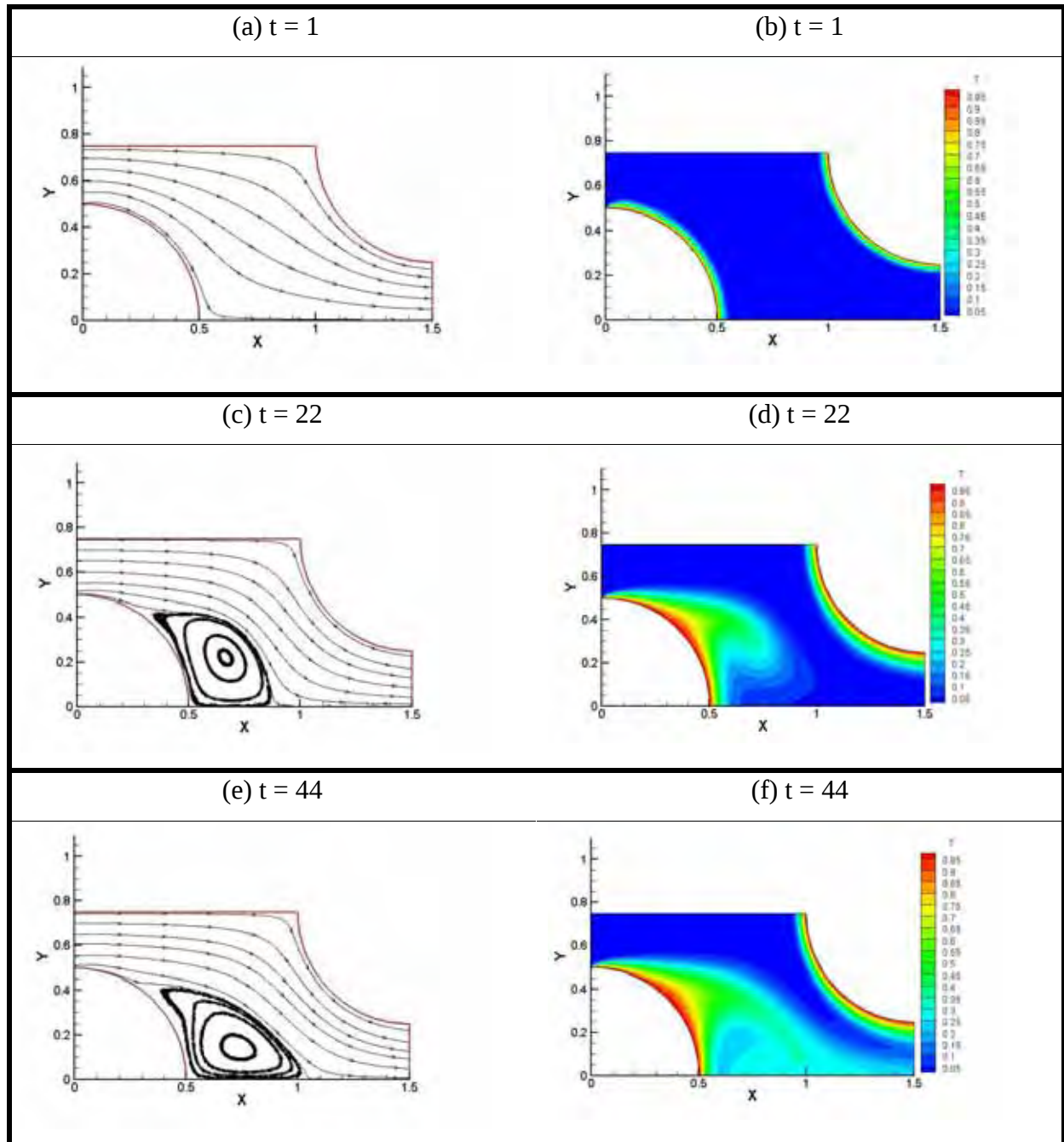
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 18 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 250$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

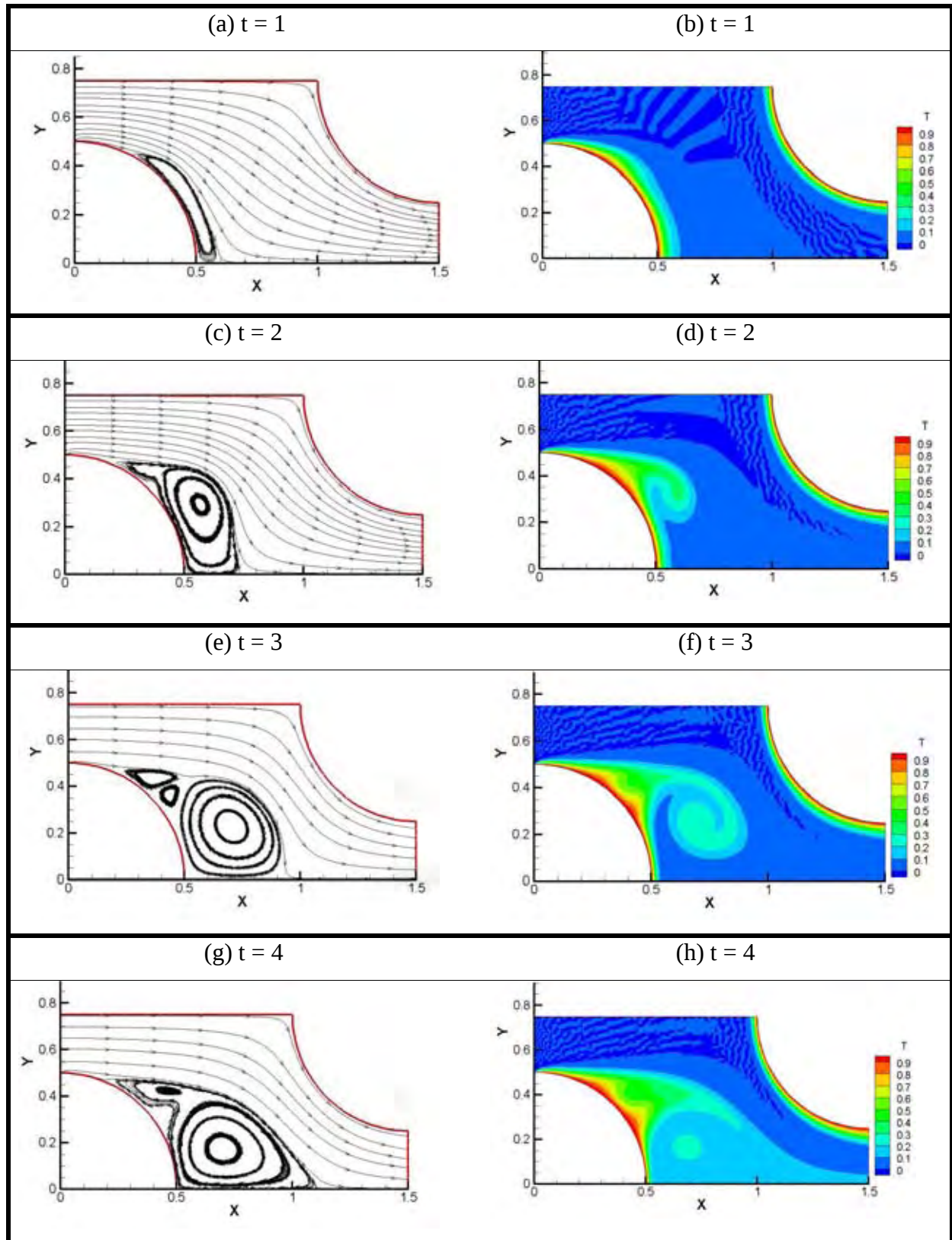
Figura 19 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 500$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Resultados para escoamento com número de Reynolds igual 1500, apresentados na Figura 20, mostram os vórtices que se desprenderam da parede a partir do tempo adimensional 1, formando algumas regiões de recirculação atrás do primeiro cilindro. No passo de tempo adimensional 4 aumenta-se o seu comprimento. Os campos de temperaturas apresentam comportamento coerente com as condições de contorno impostas na geometria deste escoamento.

Figura 20– Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re= 1500$.



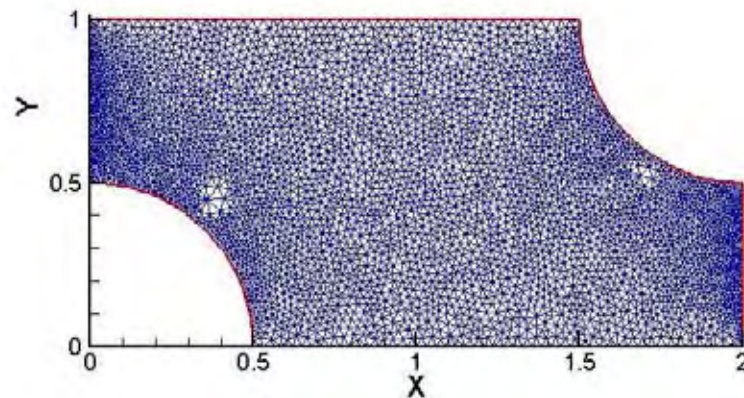
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Para essa simulação, ilustrada na Figura 20, foi necessário o refinamento do passo de tempo de 10^{-5} para 10^{-6} , para se obter valores coerentes do campo de temperatura entre 0 e 1; porém, ainda há necessidade de uma simulação com o refino da malha no passo de tempo 10^{-5} para verificar se há convergência de resultados, similar ao comentado anteriormente.

4.1.4 RAZÃO 2,0

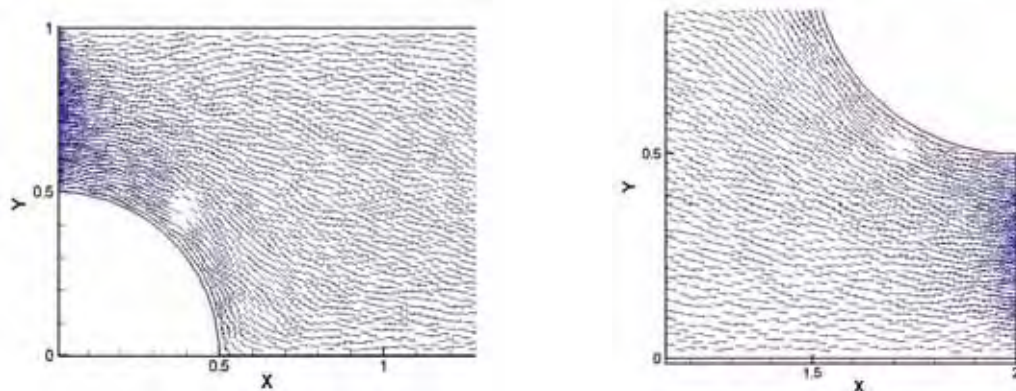
Semelhante ao que foi feito nos itens anteriores, 4.1.2 e 4.1.3, são apresentados resultados para escoamento em um banco de tubos com $S_L/d = 2$. São apresentadas as evoluções das linhas de corrente e do campo de temperatura ao longo do tempo, para diferentes valores de número de Reynolds; para a malha mostrada na Figura 21. Na Figura 22 são mostrados os perfis de velocidade na entrada e saída do domínio.

Figura 21– Domínio discretizado em elementos finitos triangulares na razão 2,0.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

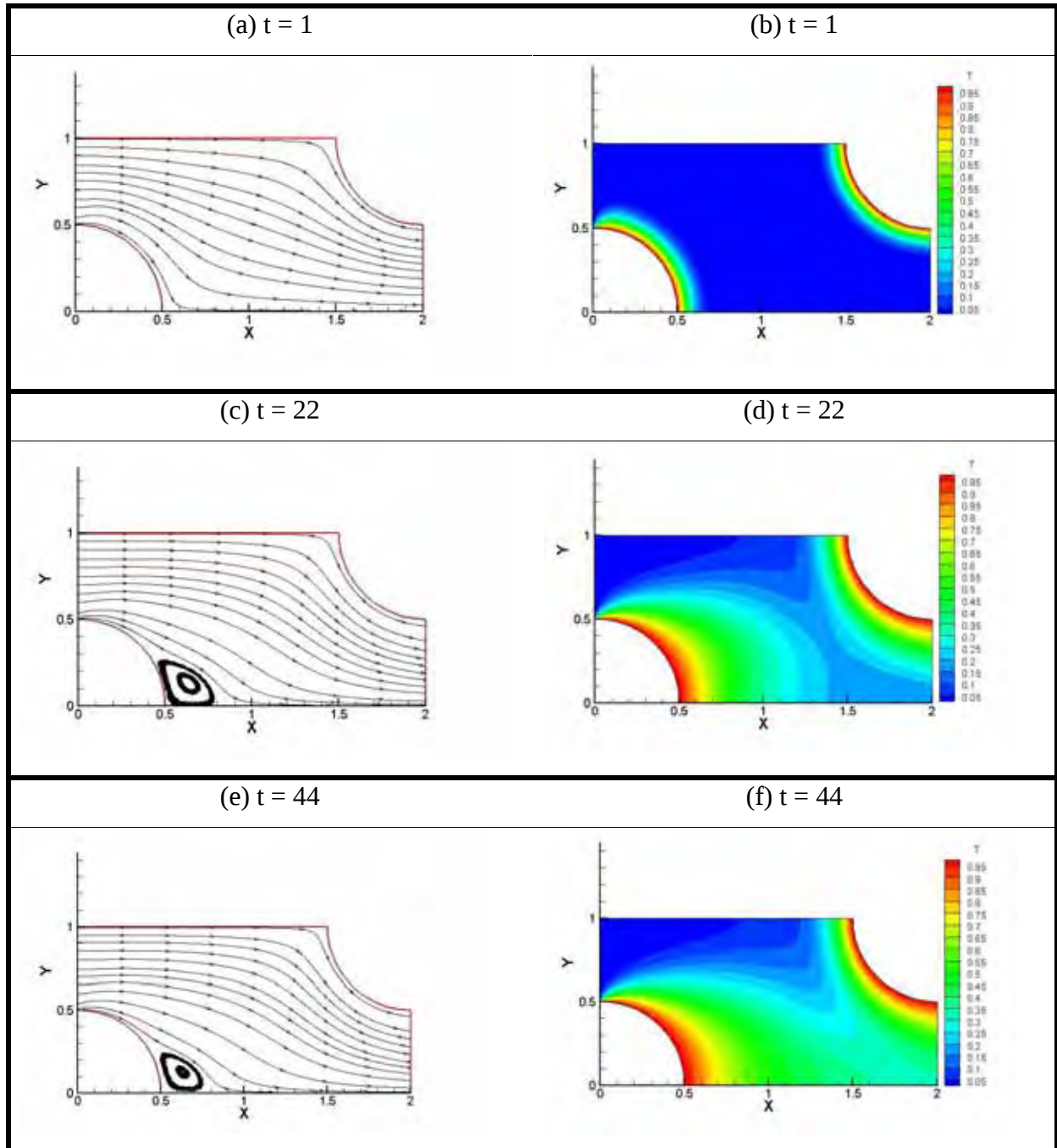
Figura 22 – Perfis de velocidades na entrada e na saída.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

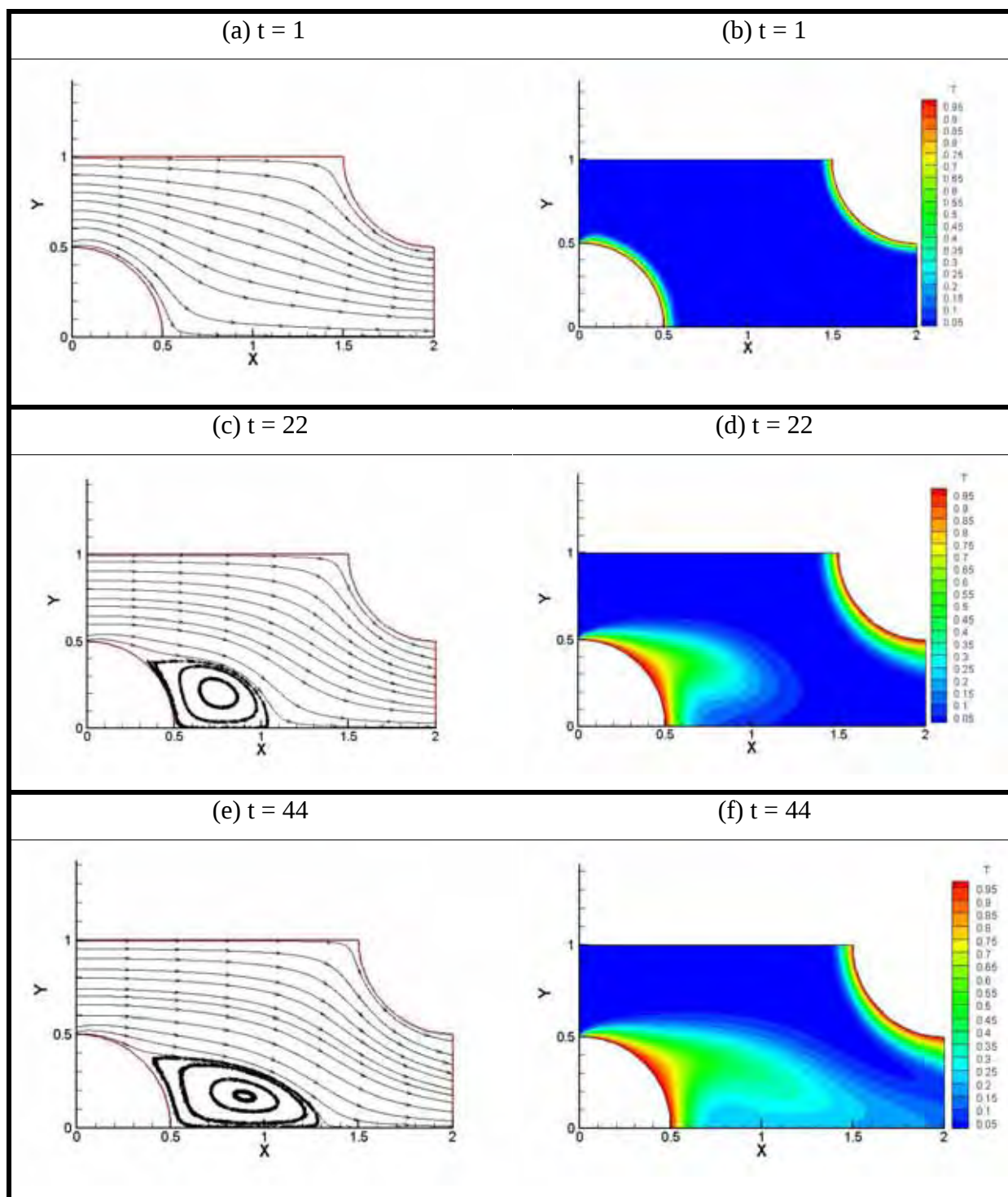
Nota-se que, nas figuras 23 a 25, para números de Reynolds iguais a 75, 150, 250 e 500, respectivamente, a região de recirculação aumenta de comprimento com o aumento do número de Reynolds, como pode ser visto nas figuras que mostram as linhas de corrente e recirculação atrás do primeiro cilindro.

Figura 23 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 75$.



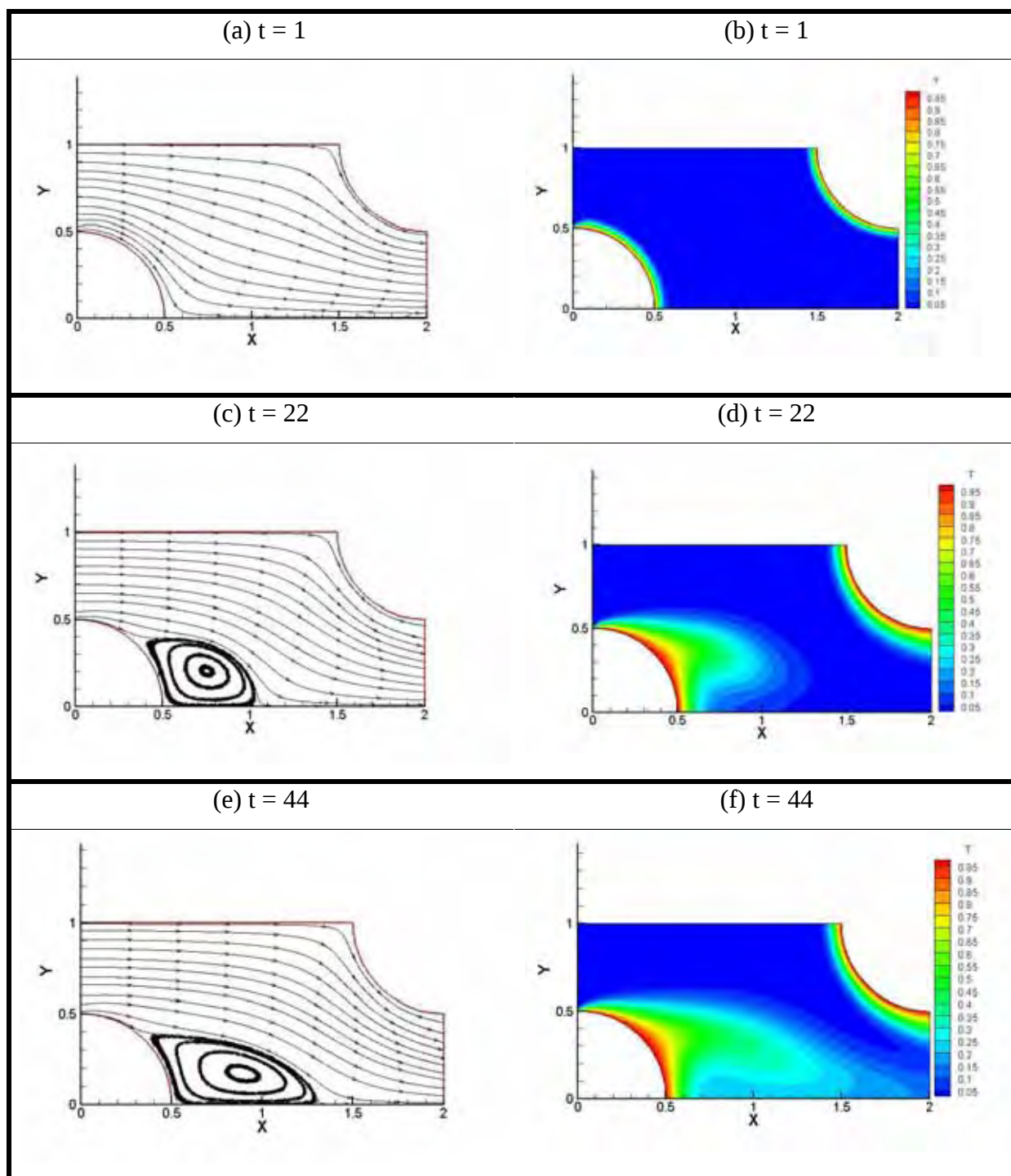
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 24 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 150$.



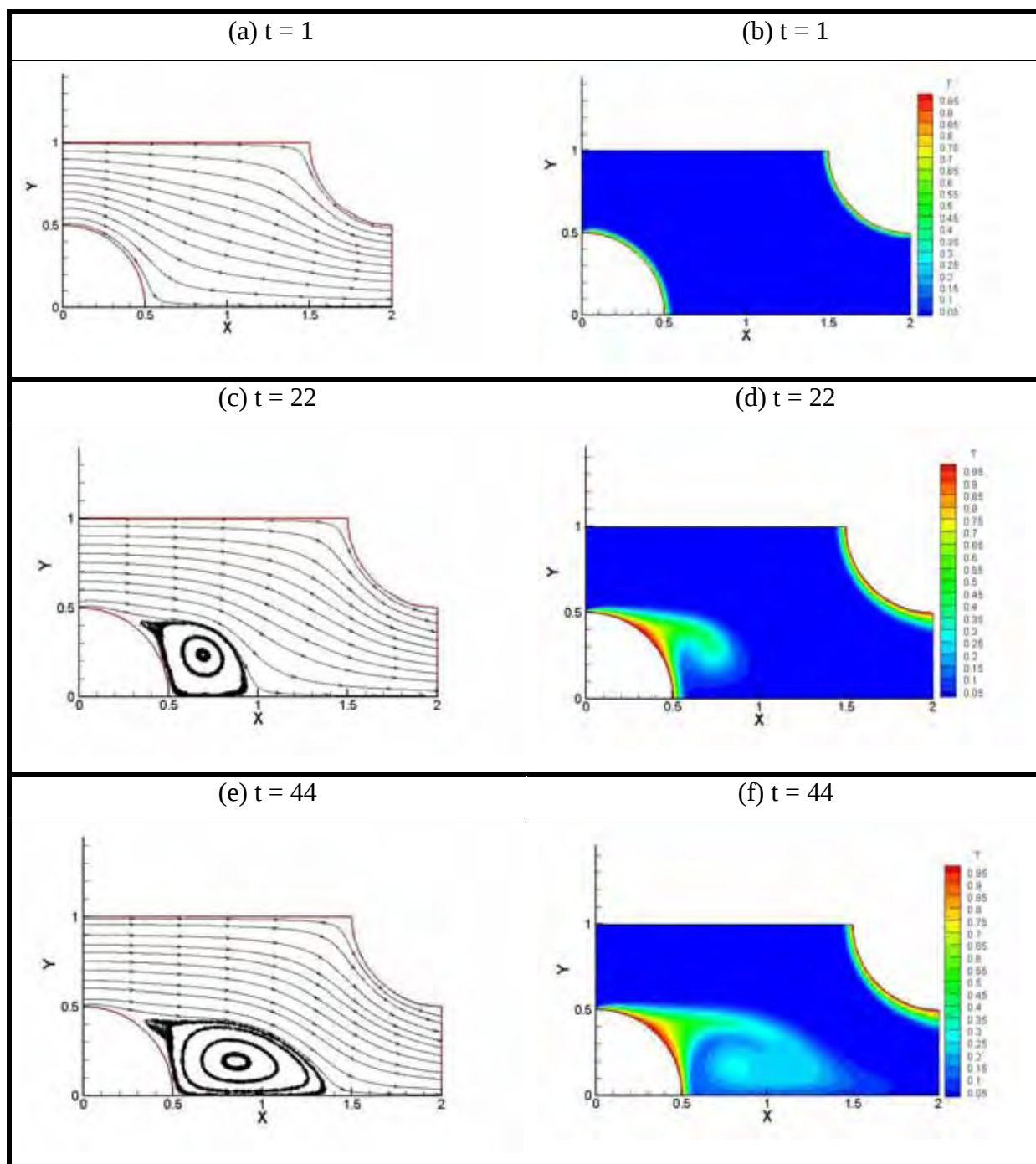
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 25 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 250$.



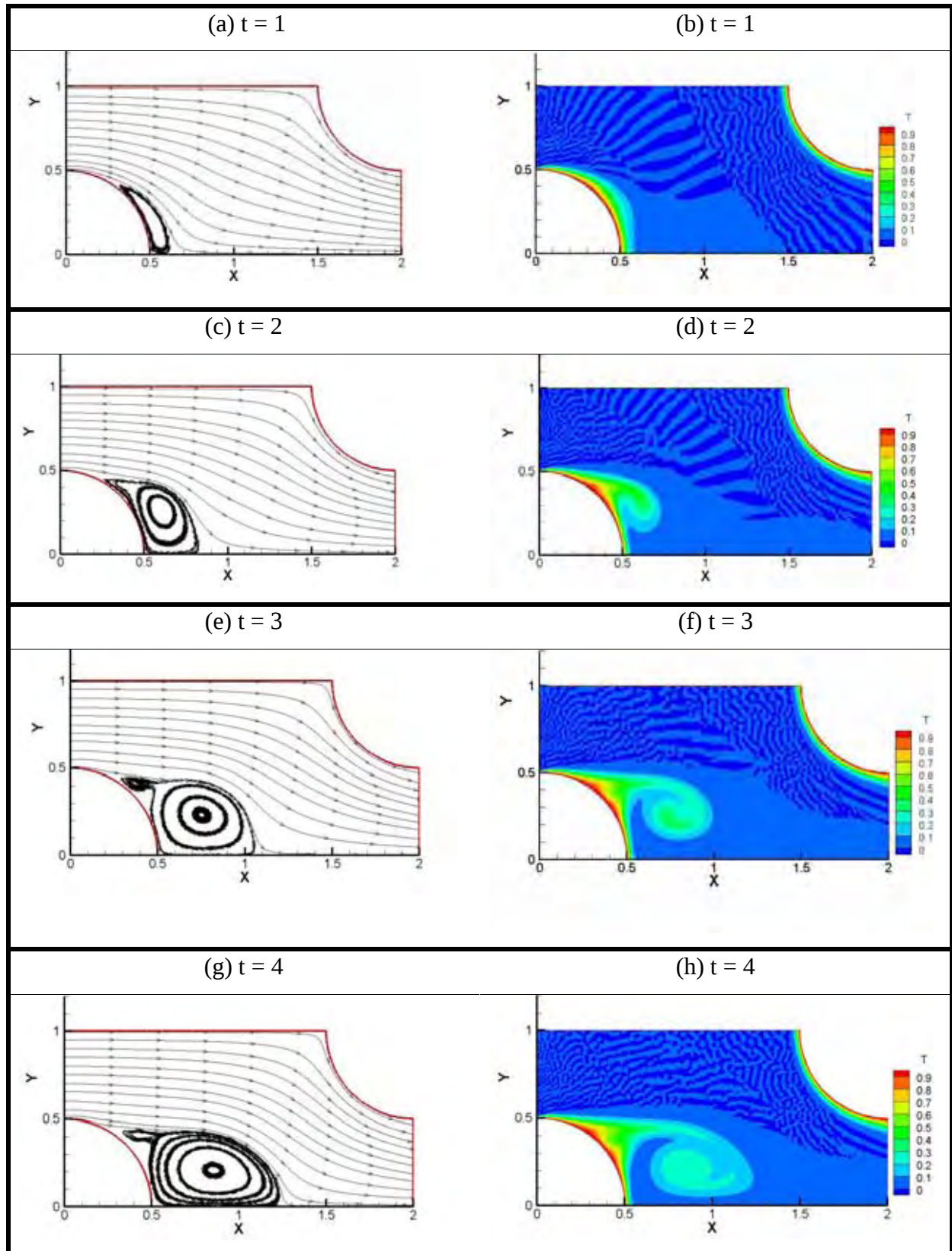
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 26 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 500$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 27 – Linhas de corrente e campo de temperatura para $Re = 1500$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Resultados para números de Reynolds igual a 1500, apresentados na figura 27, mostram os vórtices que se desprenderam da parede a partir do tempo adimensional 1, formando algumas regiões de recirculação atrás do primeiro cilindro. No passo de tempo adimensional 4 aumenta-se o seu comprimento. Os campos de temperaturas apresentam comportamento coerente com as condições de contorno impostas na geometria deste escoamento.

Para essa simulação, também foi necessário o refinamento do passo de tempo de 10^{-5} para 10^{-6} , para que o campo de temperatura permanecesse entre 0 e 1, porém, não foi um refino da malha no passo de tempo 10^{-5} para verificar se há convergência de resultados.

Os resultados obtidos, apesar das simplificações, se mostraram qualitativamente coerentes com o comportamento esperado.

5 ESCOAMENTO NUM CANAL COM UMA OBSTRUÇÃO

Outra simulação realizada foi a de um escoamento num canal com uma obstrução como mostrado na Figura 28. Este modelo representa de forma simplificada o escoamento através de uma válvula cardíaca, totalmente aberta, que corresponde a situação mais crítica de escoamento numa válvula deste tipo. Um modelo mais realístico é considerar o escoamento axissimétrico, Mueller (1978).

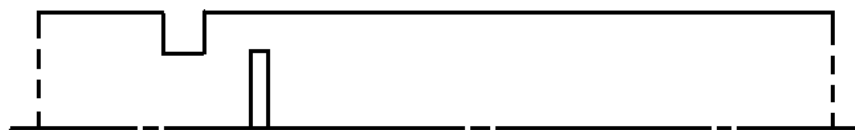
Figura 28 – Modelo plano de um canal com obstrução



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Para reduzir o tamanho da malha, é considerada apenas a metade do canal como mostrado na Figura 29. Neste caso foram feitas simulações apenas do campo de velocidades, para diferentes números de Reynolds. Vários resultados são apresentados e discutidos a seguir.

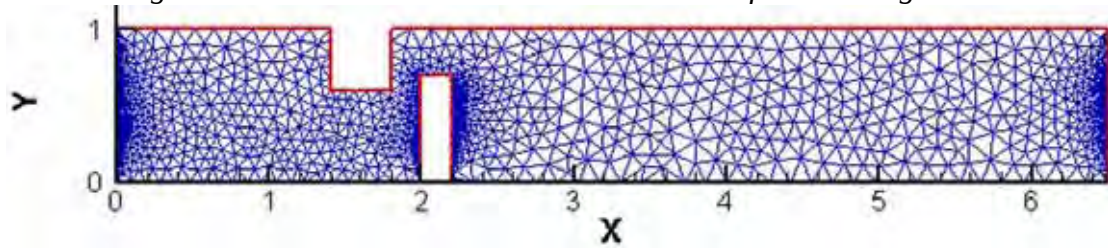
Figura 29 – Geometria estudada



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

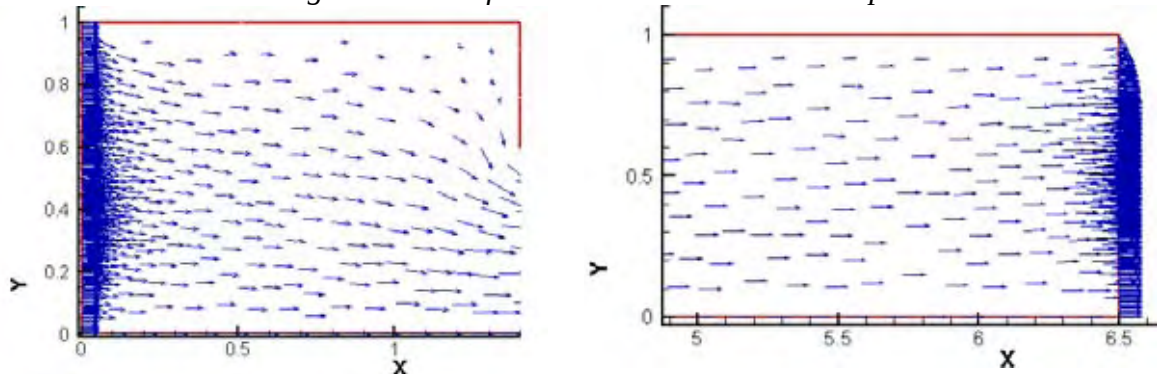
Na Figura 30 é apresentada a malha utilizada e na Figura 31 se mostra os perfis de velocidade de entrada e saída do canal um número de Reynolds baixo igual a 20.

Figura 30 – Domínio discretizado em elementos finitos triangulares



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 31 – Perfis de velocidades na entrada para Re 20.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

5.1 RESULTADOS E DISCUSSÕES

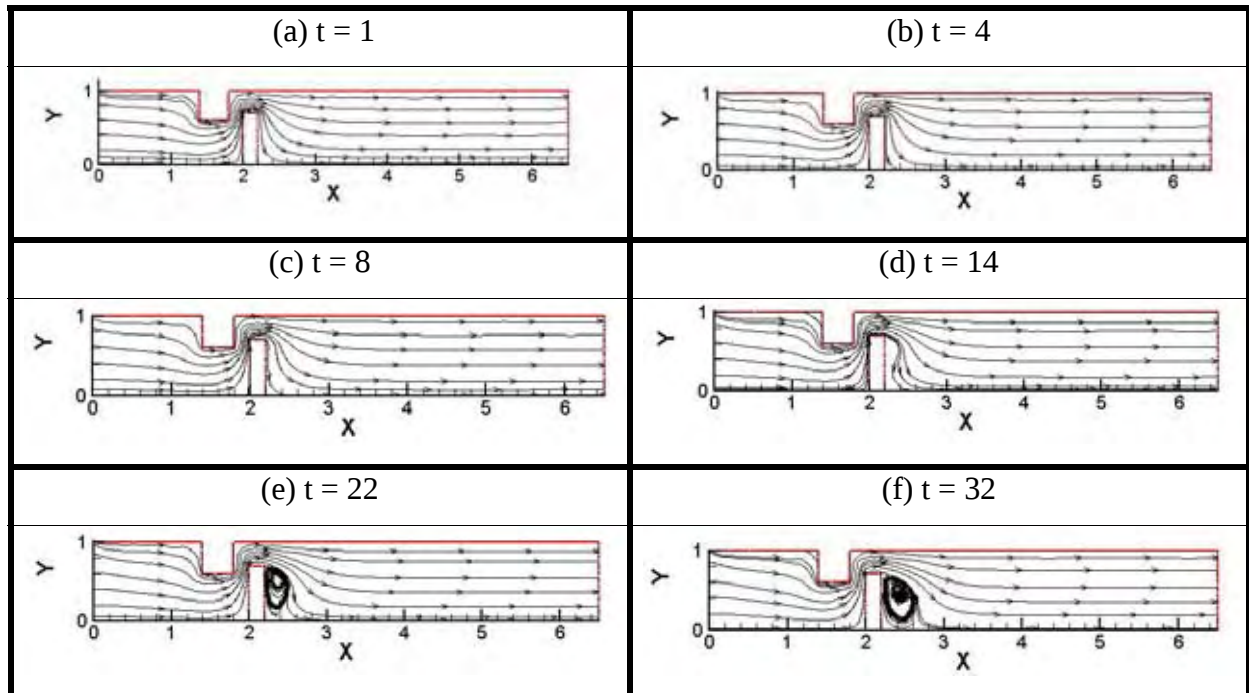
Nesta simulação, pela característica do escoamento, foi considerada somente a solução do campo de escoamento. Nas figuras a seguir são apresentadas as linhas de corrente ao longo do tempo, para diferentes valores de números de Reynolds.

As Figuras 32 a 40 mostram simulações realizadas com Re 20, 40, 60, 80, 200, 800, 1000, 1500 e 2500 nos tempos adimensionais 1, 4, 8, 14, 22 e 32. Nota-se que, para Re 20, a formação de recirculação é vista na região de obstrução da válvula, a partir do tempo adimensional 14.

Com o aumento do número de Re, pode-se notar que essa região de recirculação é formada a partir do tempo adimensional 8.

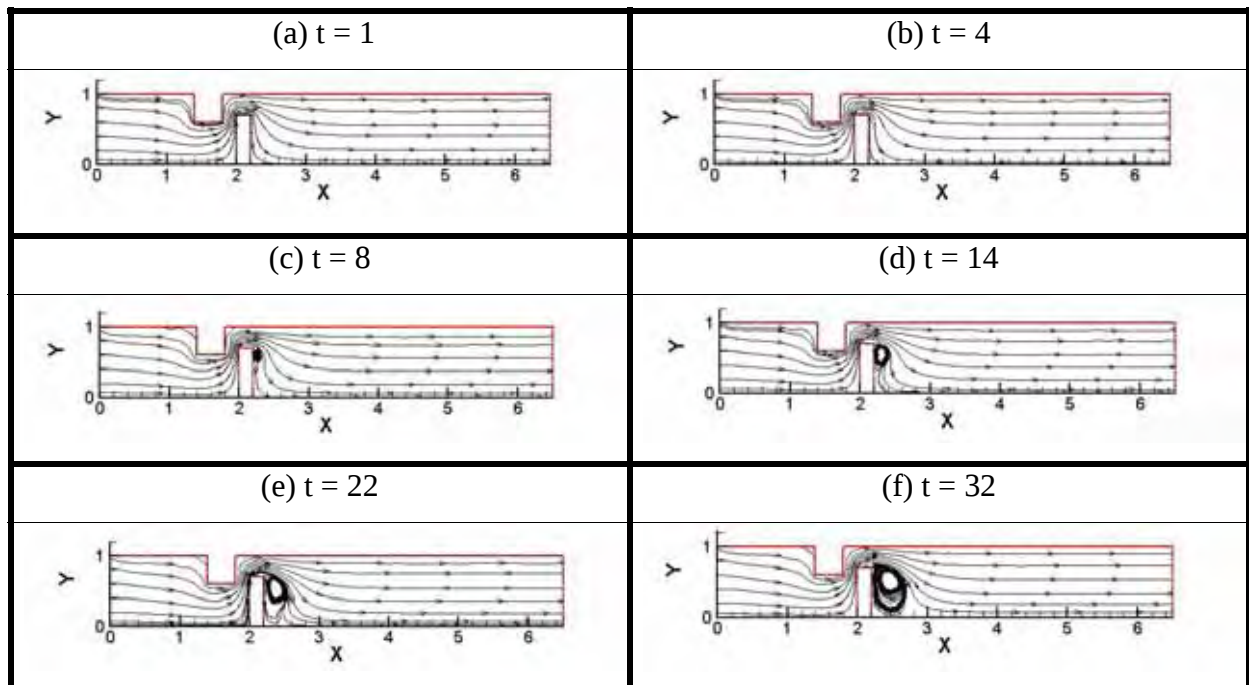
Os vórtices surgem devido a diferença de pressão de duas regiões vizinhas. Quando isso ocorre, o fluido tende a equilibrar o sistema e flui para esta região mudando, eventualmente, a direção original do escoamento e, com isso, gera vorticidade.

Figura 32 – Linhas de corrente para $Re\ 20$.



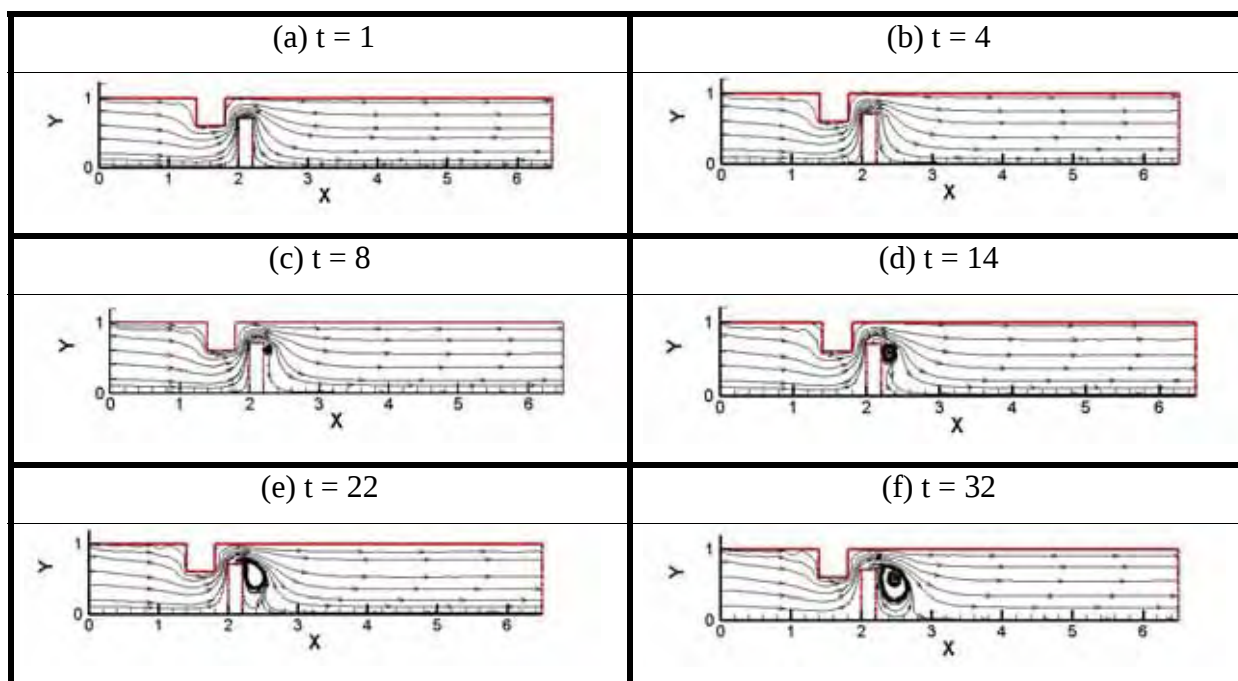
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 33 – Linhas de corrente para $Re\ 40$.



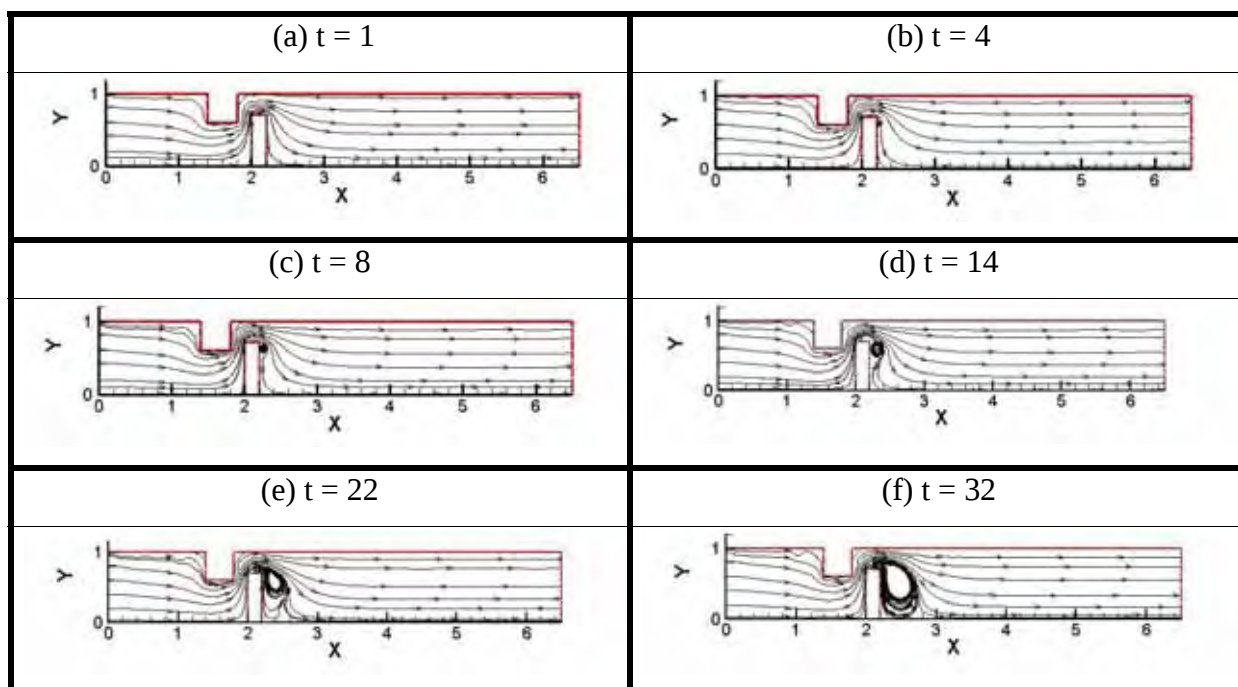
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 34 – Linhas de corrente para $Re\ 60$.



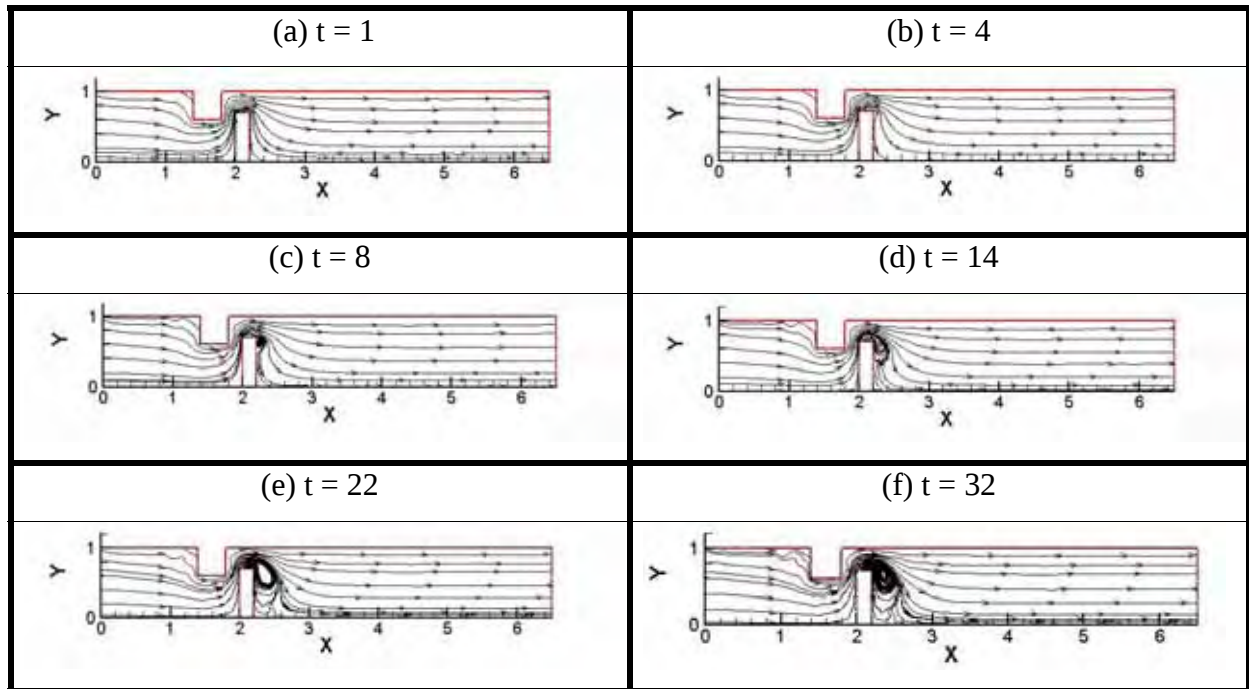
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 35 – Linhas de corrente para $Re\ 80$.



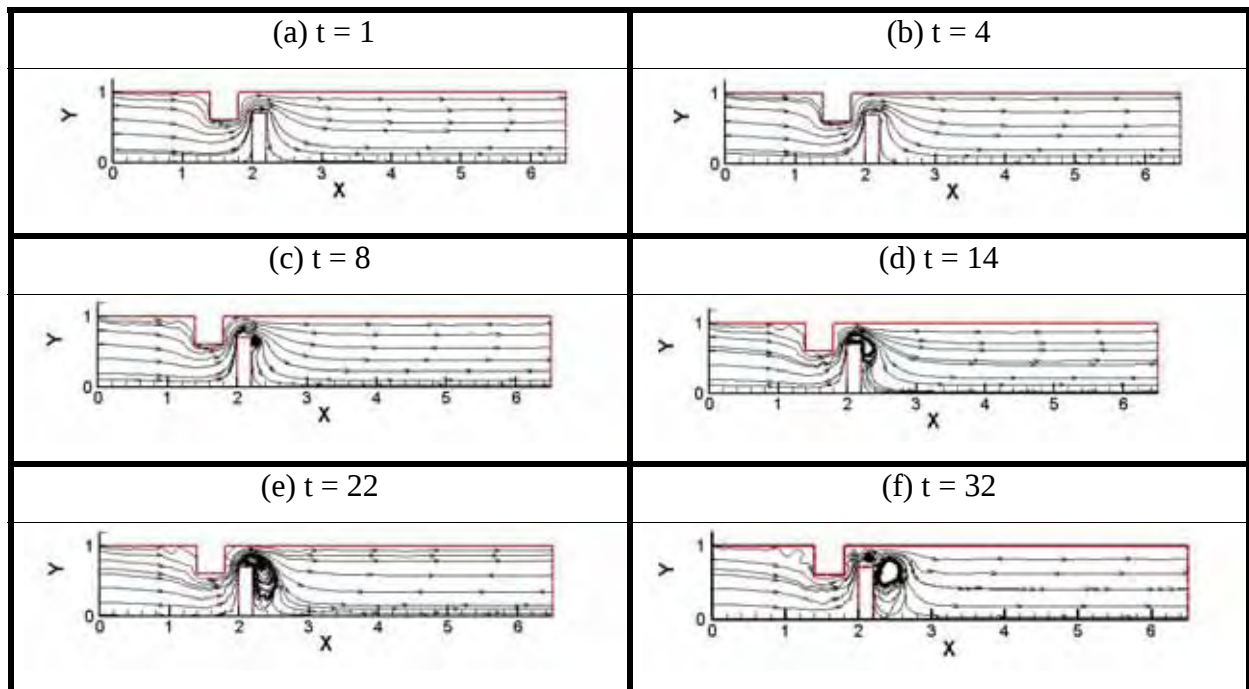
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 36 – Linhas de corrente para $Re\ 200$.



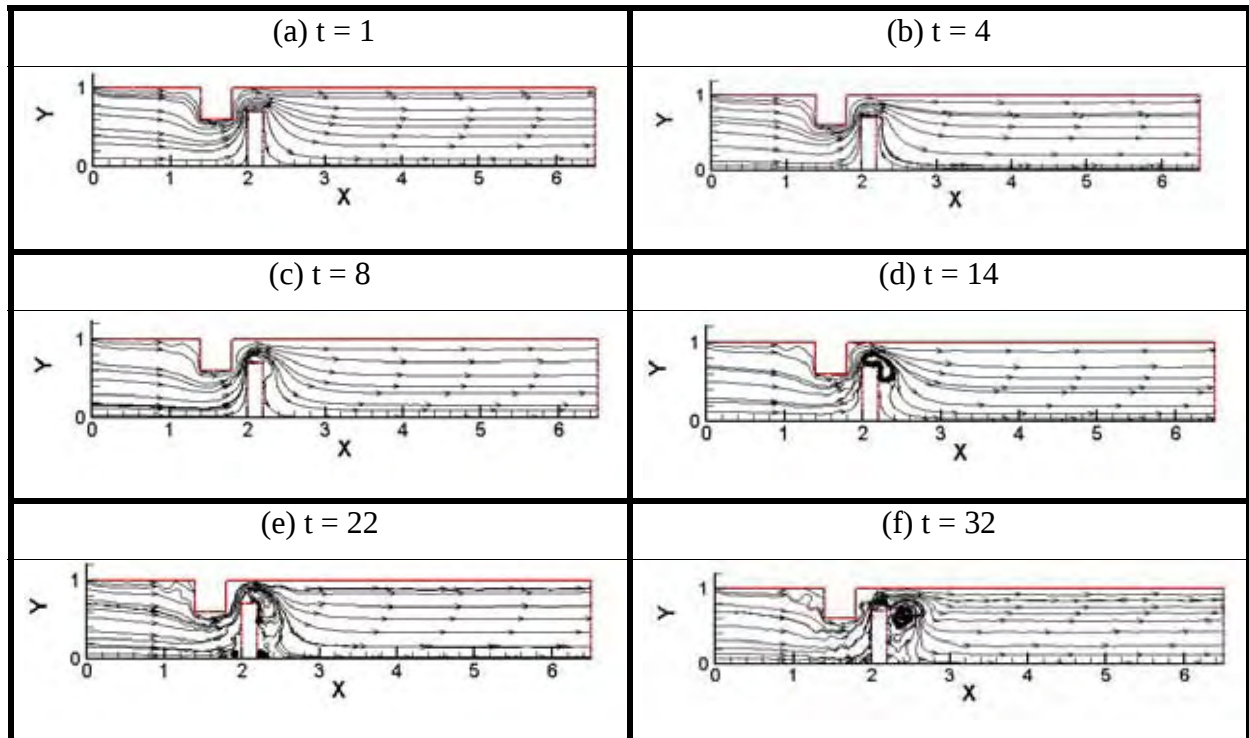
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 37 – Linhas de corrente para $Re\ 800$.



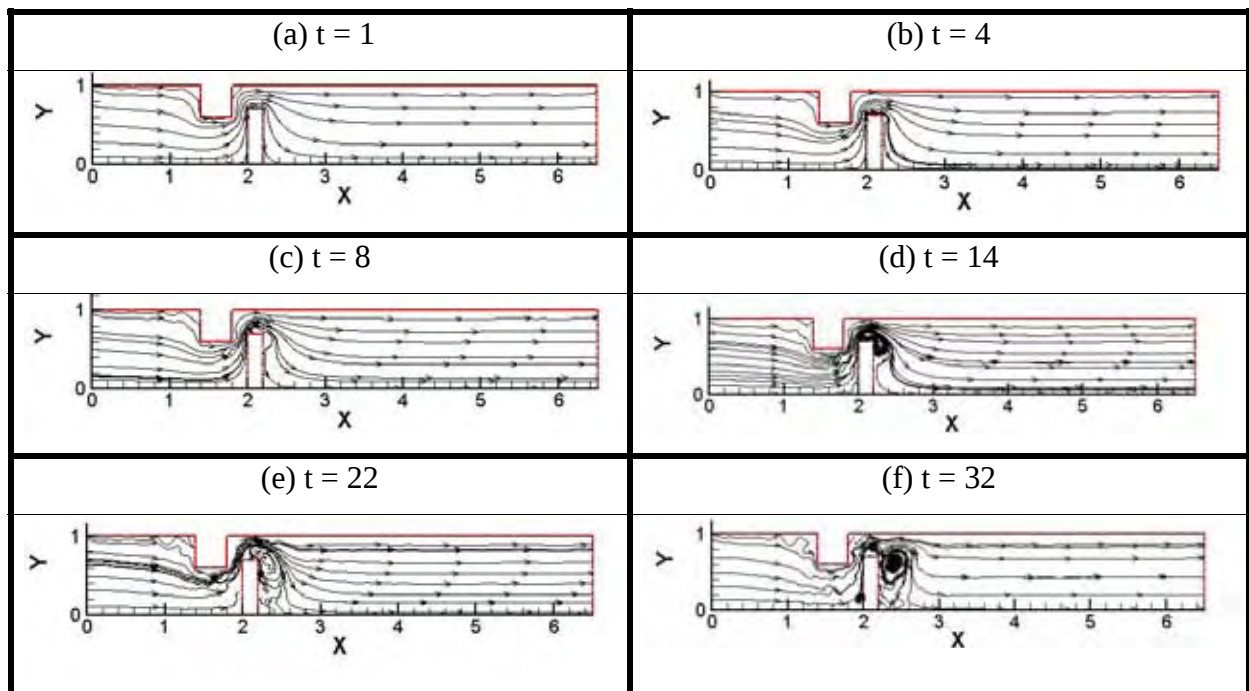
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 38 – Linhas de corrente para $Re\ 1000$.



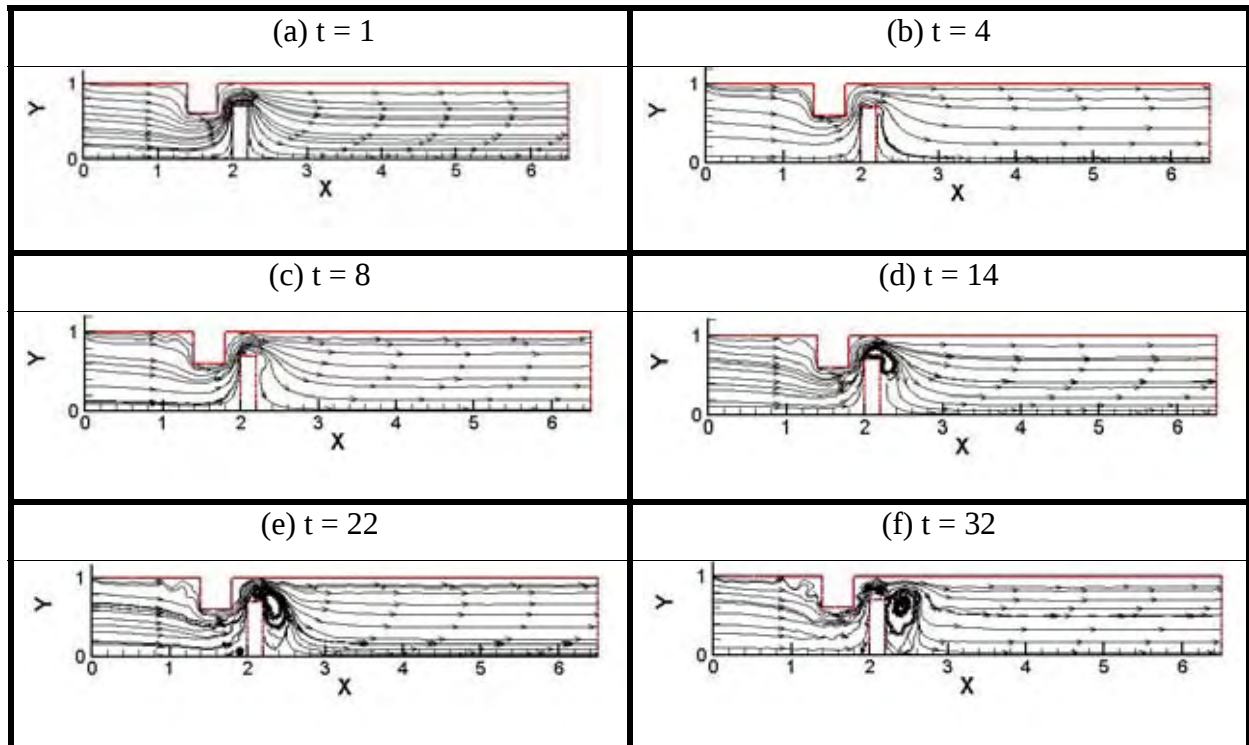
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 39 – Linhas de corrente para $Re\ 1500$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Figura 40 – Linhas de corrente para $Re\ 2500$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Pode-se notar, pela observação das figuras anteriores, que o comportamento do escoamento foi simulado corretamente. Para baixos números de Reynolds formam-se vórtices menores, enquanto, que a medida que vai aumentando o número de Reynolds, os vórtices vão se tornando maiores. Entretanto, mais testes ainda são necessários para se entender pequenos defeitos que se formam no comportamento do escoamento. Deu qualquer forma, este teste mostrou que com o método de Galerkin com o método de separação baseado na característica foi possível simular casos de escoamentos nessas geometrias relativamente complexas.

Resta saber, se em casos de números Reynolds bem altos, ainda será possível obter resultados satisfatórios.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi estudado o método de estabilização chamado esquema de separação baseado na característica (*CBS*) que foi aplicado para solução das equações de Navier-Stokes bidimensionais e da equação de transporte para o campo de temperatura. O esquema semi-implícito *CBS* foi aplicado para problemas de transferência de calor em banco de tubos com arranjos desencontrados. O comportamento do campo de velocidades e campos de temperaturas foram simulados conforme esperado. Também se realizou uma simulação num para escoamento num modelo simplificado de válvula cardíaca. O *CBS* foi eficaz e apresentou bons resultados para os casos analisados, para números de Reynolds baixos e moderados. Para altos números de Reynolds alguns problemas de resultados não coerentes foram obtidos para o campo de temperatura. Estes problemas têm que serem investigados em trabalhos futuros.

Como sugestão para trabalhos futuros, no âmbito do grupo de pesquisa, ficariam implementações do FEM-*CBS* com refino da malha e do passo de tempo no caso de número de Reynolds alto e, posteriormente, para problemas tridimensionais com uso da metodologia de simulação das grandes escalas de turbulência. Outra sugestão seria testar a metodologia utilizada em outras geometrias.

REFERÊNCIAS

- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 32, n. 1-3, p. 199-259, 1982.
- CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problem. **Journal of Computational Physics**, Maryland Heights, v. 2, n. 1, p. 12-26, 1967.
- CODINA, R. On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 188, n. 1, p. 61-82, 2000.
- DONEA, J. A Taylor Galerkin method for convective transport problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 20, n. 1, p. 101-119, 1984.
- DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite element methods for flow problems**. Chichester: John Wiley & Sons, 2003. 350 p.
- DONIZETE, M. C. **Simulação numérica de escoamento de fluido pelo método de elementos finitos baseado em volume de controle e usando a técnica de passo fracionado**. 2005. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005. p. 5-13.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SIN, C. T. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, Maryland Heights, v. 48, p. 387-411, 1982.
- HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 127, n. 1-4, p. 387-401, 1995.
- HUGHES, T. J. R.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 73, n. 2, p. 173-189, 1989.
- HUGHES, T. J. R.; MALLET, M. A new finite element method for computational fluid dynamics: III. the generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 58, n. 3, p. 585-328, 1986.
- JORDAM, A. **Implementação do método das características na modelagem de problemas de convecção natural em cavidade cilíndrica**. 2010. 70 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2010.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. **Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow**. Hoboken: Wiley, 2004. 335 p.

LIU, C. B. **The Characteristic Based Split (CBS) scheme for laminar and turbulent incompressible flow simulations**. 2005. 209 f. Thesis (Doctor of Philosophy) – University of Wales Swansea, United Kingdom, 2005.

LÖHNER, R.; MORGAN, K.; ZIENKIEWICZ, O. C. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Chichester, v. 4, n. 11, p. 1043-1063, 1984.

MASSAROTTI, N.; NITHIARASU, P.; ZIENKIEWICZ, O. C. Characteristic-Based-Split (CBS) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer. **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, Bingley, v. 8, n. 8, p. 969-990, 1998.

MUELLER, T. J. Application of numerical methods to physiological flows. In: WIRZ, H. J.; SMOLDEREN, J. J. (Org.). **Numerical methods in fluid dynamics**. Washington-DC: Hemisphere, 1978. Cap. 2, p. 89-153.

NITHIARASU, P.; CODINA, R.; ZIENKIEWICZ, O. C. The Characteristic Based Split (CBS) Scheme: a unified approach to fluid dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 66, n. 10, Special Issue, p. 1514-1546, 2006.

NITHIARASU, P.; ZIENKIEWICZ, O. C. On stabilization of the CBS algorithm: internal and external time steps. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 48, n. 6, p. 875-880, 2000.

ROYCHOWDHURY, D. G.; DAS SARIT, K.; SUNDARARAJAN, T. Numerical simulation of laminar flow and heat transfer over banks of staggered cylinders. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Chichester, v. 39, n. 1, p. 23-40, 2002.

ROJEK, J.; OÑATE, E.; TAYLOR, R. L. CBS - based stabilization in explicit solid dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 66, n. 10, p. 1547-1568, 2006.

SILVA, J. B. C. **Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de volumes finitos baseado em volumes de controle**. 1998. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, 1998.

THOMAS, C. G.; NITHIARASU, P.; BEVAN, R. L. T. The locally conservative Galerkin (LCG) method for solving the incompressible Navier–Stokes equations. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Chichester, v. 57, n. 2, p. 1771-1792, 2007.

ZACHI, J. M. **Simulação numérica de escoamento de fluido pelo método de elementos finitos baseado em volume de controle em malhas não estruturadas**. 2006. 157 f. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006. p. 28-34.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. A general algorithm for compressible and incompressible flow - part I. The Split, Characteristic-Based Scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Chichester, v. 20, n. 8-9, p. 869-885, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C.; NITHIARASU, P.; CODINA, R.; VAZQUEZ, M.; ORTIZ, P. The characteristic-based-split procedure: an efficient and accurate algorithm for fluid problems. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Chichester, v. 31, n. 1, p. 359-396, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. 5. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 3 v.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, E. P. **The finite element method for fluid dynamics**. 6. ed. Amsterdam: Elsevier, 2005. 400 p.