



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Juan Carlos Ortiz Chata

Problemas elípticos quasilineares no espaço das
funções de variação limitada

São José do Rio Preto
2021

Juan Carlos Ortiz Chata

Problemas elípticos quasilineares no espaço das
funções de variação limitada

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta.

Financiadora: FAPESP 2017/06119-0;
BEPE 2019/13503-7.

São José do Rio Preto
2021

C492p Chata, Juan Carlos Ortiz
Problemas elípticos quasilineares no espaço das
funções de variação limitada / Juan Carlos Ortiz
Chata. -- São José do Rio Preto, 2021
162 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências
Exatas, São José do Rio Preto
Orientadora: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Operador 1-laplaciano. 2. Espaço das funções
de variação limitada. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp.
Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São
José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Juan Carlos Ortiz Chata

Problemas elípticos quasilineares no espaço das
funções de variação limitada

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP 2017/06119-0;
BEPE 2019/13503-7.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
UNESP- Câmpus de Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
UFPB - Paraíba

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP-Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
USP - São Carlos

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Presidente Prudente
16 de agosto de 2021

À minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Dimna e Justiniano, por me ensinar a ter força de vontade e sempre me apoiar nos meus estudos.

À minha amada esposa, por animarme dia após dia nos meus estudos bem como por ser minha ajuda idônea.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta, pela grande disposição para me ensinar, bem como pela sua amabilidade, além de me proporcionar oportunidades de ter contato com outros pesquisadores da minha área de pesquisa.

Ao Prof. Dr. Sergio Segura de León, que me supervisionou durante um estágio na Universidad de Valencia, Espanha, por aceitar me orientar e pelas extraordinárias discussões que tivemos, as quais foram essenciais em uma parte do presente trabalho.

Aos amigos que fiz enquanto cursava as disciplinas do doutorado no IBILCE: Ana Livia, Anderson, Eliton, Fabiola, Fernando, Heloísa, Junior, Ótávio, Paola e Rodiak, por me providenciar ajuda nos momentos que precisava, além de compartilhar bons momentos juntos.

Aos meus amigos da FCT em Presidente Prudente: Anderson, Devora, Elard, Leandro, Marcos, Mijael, Paulo, Rafael, Yino e Wendy, por brindar-me sua amizade bem como disfrutar de bons momentos juntos.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de São José de Rio Preto e Presidente Prudente, por providenciar-me excelentes professores, apoio dos funcionários e a infraestrutura necessária para o desenvolvimento do meu projeto de pesquisa como a sala de permanência, acesso a rede de computadores e biblioteca, além de providenciar-me o serviço de assistência com as questões burocráticas do projeto.

Agradeço à FAPESP, pelo apoio financeiro sob a forma da bolsa de doutorado e da bolsa BEPE para a realização do estágio no exterior, os quais estão vinculados aos processos n° 2017/06119-0 e n° 2019/13503-7, respectivamente.

*A Matemática é
a porta e a chave das ciências.*
Maria José Aragão (2009, p.12)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos resultados de existência de soluções para quatro problemas quasilineares elípticos envolvendo o operador 1-laplaciano. No primeiro deles, utilizamos uma nova versão do Teorema do Passo da Montanha com condição de Cerami para provar um resultado do tipo Berestycki-Lions para um problema envolvendo o operador 1-laplaciano. Nos dois seguintes, estudamos um problema envolvendo o operador 1-laplaciano com pesos ilimitados, onde são provados resultados de existência de soluções com sinal e nodais. No último, foi provado um resultado de existência de solução para um problema envolvendo o operador 1-laplaciano e com não-linearidade do tipo côncavo-convexa, onde ressalta-se que para o operador 1-laplaciano, isso corresponde a não-linearidades do tipo singular.

Palavras-chave: Operador 1-laplaciano. Espaço das funções de variação limitada. Métodos variacionais. Problemas singulares.

ABSTRACT

In this work, we study results of the existence of solutions for four elliptical quasilinear problems involving the 1 -Laplacian operator. In the first one, we use a new version of the Mountain Pass Theorem with Cerami condition to prove a Berestycki-Lions type result for a problem involving the 1 -Laplacian operator. In the next two, we study a problem involving the 1 -Laplacian operator with unbounded weights, where existence results of solutions with sign and nodals are proved. In the last one, a result of the existence of a solution to a problem involving the 1 -Laplacian operator and with non-linearity of the concave-convex type was proved, where it is emphasized that for the 1 -Laplacian operator, this corresponds to non-linearities of the singular type.

Keywords: 1 -Laplacian operator. Bounded variation function space. Variational methods. Singular problems.

Índice de Notações

Ω	é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$.
$C(\Omega)$	é o espaço das funções contínuas em Ω .
$C^k(\Omega)$	é o espaço das funções continuamente diferenciável k vezes em Ω .
$C^\infty(\Omega)$	$= \cap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$.
$C_c^k(\Omega)$	é o espaço das funções em $C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω .
$C_c^\infty(\Omega)$ (ou $\mathcal{D}(\Omega)$)	$= \cap_{k=0}^\infty C_c^k(\Omega)$.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	é o espaço das distribuições sobre Ω ($\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$).
$\mathcal{L}^N$ (ou $ \cdot $)	é a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^N$.
$\mathcal{H}^{N-1}$	é a $N - 1$ -dimensional medida de Hausdorff sobre $\partial\Omega$.
$u(x) = v(x)$ μ -q.t.p. $x \in \Omega$	$u(x) = v(x)$ quando $x \notin N$, para algum $N \subset \Omega$ mensurável com $\mu(N) = 0$.
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; u \text{ mensurável e } \int_\Omega u ^p dx < \infty\}$.
$\ u\ _p$	$= (\int_\Omega u ^p dx)^{\frac{1}{p}}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \left \begin{array}{l} u \text{ mensurável} \\ \text{e existe } C \text{ tal que } f(x) \leq C \text{ q.t.p. } \Omega \end{array} \right. \right\}$.
$\ u\ _\infty$	$= \inf \{C ; f(x) \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$.
$W^{m,p}(\Omega)$	$= \{u \in L^p(\Omega) ; D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \alpha \leq m\}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ é um multi-índice.
$\ u\ _{W^{m,p}(\Omega)}$	$= \left(\sum_{ \alpha \leq m} \ D^\alpha u\ _p \right)^{\frac{1}{p}}$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	$= \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\ \cdot\ _{W^{m,p}(\Omega)}}$.
$\ u\ _{W_0^{m,p}(\Omega)}$	$= (\int_\Omega \nabla u ^p dx)^{\frac{1}{p}}$.
$\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$	é o conjunto das medidas Radon.
$BV(\Omega)$	$= \{u \in L^1(\Omega) ; Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}$.
$\ u\ _{BV(\Omega)}$	$= \int_\Omega Du + \int_\Omega u dx$.
$\Delta_p u$	$= \operatorname{div} (\nabla u ^{p-2} \nabla u)$.
$\Delta_1 u$	$= \operatorname{div} \left(\frac{Du}{ Du } \right)$.
$(\mathbf{z}, Du)$	é uma distribuição definida na pág. 36.
$[\mathbf{z}, \nu]$	é um traço fraco estabelecido na pág. 36.
$B_r(x_0)$	é a bola centrado em x_0 e raio r em $\mathbb{R}^N$.
χ_A	é a função característica do conjunto A em $\mathbb{R}^N$.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico de f	42
4.1	Gráfico da função T_k	77
6.1	Gráfico de h_u para $\lambda < \lambda_p$	132

Sumário

1	Introdução	23
2	Preliminares	29
2.1	O espaço $BV(\Omega)$	29
2.1.1	Derivada direcional da norma de $BV(\mathbb{R}^N)$	34
2.2	Pontos críticos para funcionais localmente Lipschitz	35
2.3	Teoria de Anzellotti	39
3	Existência de uma solução radial para um problema autônomo envolvendo o operador 1-laplaciano	41
3.1	O problema	41
3.2	O funcional energia e a equação de Euler-Lagrange	42
3.3	Demonstração do Teorema 3.9	49
3.4	Identidade de Pohozaev	56
4	Um problema anisotrópico envolvendo o operador 1-laplaciano com pesos ilimitados	61
4.1	O problema anisotrópico	61
4.2	Resultados preliminares	62
4.2.1	Espaços de Sobolev com peso	63
4.2.2	Um espaço de funções de variação limitada com peso	68
4.3	Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em $BV_a(\Omega)$	71
4.4	Extensão da Teoria de Anzellotti	75
4.4.1	Teoria de Anzellotti com pesos	75
4.4.2	A medida $\left(\frac{1}{ \cdot ^a} \mathbf{z}, Du\right)$ e o traço fraco $\left[\frac{1}{ \cdot ^a} \mathbf{z}, \nu\right]$	77
4.5	Conceito de solução para o Problema (1.1)	80
4.6	Prova do Teorema 4.4 por meio de problemas envolvendo o operador p -laplaciano	83
4.6.1	Problemas aproximados envolvendo o operador p -laplaciano	83

4.6.2	Prova do Teorema 1.1	94
4.7	Prova do Teorema 4.4 por métodos variacionais	100
5	Método de Nehari nodal aplicado a um problema anisotrópico envolvendo o operador 1-laplaciano	107
5.1	O problema	107
5.2	Resultados preliminares	108
5.3	Problemas aproximados envolvendo o operador p -Laplaciano	109
5.3.1	O funcional energia associado ao Problema (3.4)	110
6	Um problema do tipo côncavo-convexo envolvendo o operador 1-laplaciano	123
6.1	O problema	123
6.2	Resultados preliminares	124
6.2.1	Teoria generalizada de Anzellotti	125
6.3	Um problema singular aproximado envolvendo o operador p -Laplaciano . .	126
6.3.1	Conexão entre os funcionais I^p e I	127
6.3.2	Pontos críticos do funcional I^p	130
6.4	Prova do Teorema 6.1	148
	Referências	159

1 Introdução

Nos últimos anos, problemas envolvendo o operador 1-laplaciano,

$$\Delta_1 u = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right),$$

têm sido tratados em diversos trabalhos de Equações Diferenciais Parciais. Em [26] os autores aplicaram um método baseado na minimização de um funcional, cuja equação de Euler-Lagrange envolve o operador 1-laplaciano, para lidar com problemas que modelam a restauração de imagens. Já em [48] o autor encontra a equação de Euler-Lagrange, a qual particularmente envolve o operador 1-Laplaciano com peso, para um problema anisotrópico. Os trabalhos pioneiros em tratar problemas que envolvem o operador em questão foram escritos por F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles e J.M. Mazón em uma série de artigos, [7, 8, 9], os quais, por sua vez, deram origem à monografia [10]. Na verdade, em [9], os autores caracterizam o quociente $\frac{Du}{|Du|}$ (sendo Du uma medida de Radon, ao invés de uma função de L^1), através da teoria de paridade de G. Anzellotti (ver [12] e também [10]). Essa teoria permite-lhes introduzir um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ o qual faz o papel de $\frac{Du}{|Du|}$. Entre os primeiros trabalhos que envolvem o operador 1-laplaciano poderíamos também citar os de Kawohl [43] e Demengel [29].

Em [50] os autores além de analisar o comportamento de uma classe de problemas envolvendo o operador p -laplaciano, quando $p \rightarrow 1^+$, mostram que o limite da família de soluções desse problema, satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f pertence a $L^N(\Omega)$ (ou ao espaço de Lorentz $L^{N,\infty}(\Omega)$) e $\|f\|_N$ é suficientemente pequena. Já em [49], os autores tratam o mesmo problema acima, mas com $f \in L^1(\Omega)$.

Segura e Molino em [52] estudam o seguinte problema envolvendo o operador 1-laplaciano,

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde a função f tem crescimento superlinear e subcrítico no infinito. Para lidar com esse problema, os autores usam um método baseado na aproximação por soluções de problemas envolvendo o operador p -laplaciano para posteriormente fazer $p \rightarrow 1$. Nesse trabalho, a principal dificuldade foi encontrar um meio de limitar de maneira uniforme em p , as soluções de tais problemas.

Em [27] os autores estudam um problema envolvendo o operador 1-laplaciano com um termo singular, o qual é dado por

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = \frac{f(x)}{u^\gamma} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 < \gamma \leq 1$ e $f \in L^N(\Omega)$. Nesse trabalho, para provar existência de solução, os autores definem um conceito adequado de solução e novamente utilizam um processo baseado na aproximação por soluções de problemas envolvendo o operador p -laplaciano.

Figueiredo e Pimenta em [31] usam argumentos do tipo de Nehari para provar a existência de soluções de energia mínima, para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f tem um crescimento superlinear e subcrítico.

Em [32], os autores apresentam versões do Lema Radial de Strauss, do Lema de Lions e provam a compacidade da imersão do espaço $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ em alguns espaços de Lebesgue. Esses resultados são aplicados para mostrar a existência de soluções radiais para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u + \frac{u}{|u|} = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in BV(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (0.1)$$

onde f tem um crescimento superlinear e subcrítico.

Em [4] os autores mostram a existência e concentração de uma sequência de soluções de uma versão singularmente perturbada de (0.1), onde a não linearidade tem crescimento subcrítico no infinito.

Motivados pelos trabalhos acima mencionados, vamos provar ao longo desse texto a extensão para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano, de uma série de resultados já bem conhecidos para problemas envolvendo operadores como o laplaciano e o p -laplaciano.

No Capítulo 2, introduzimos o espaço das funções de variação limitada, $BV(\Omega)$, bem como estudamos as principais propriedades dele. Além disso, apresentamos de forma resumida alguns resultados da teoria dos subdiferenciais, haja vista que a utilizaremos em alguns dos capítulos subsequentes. Por fim, estudamos alguns resultados da Teoria de Paridade de Anzellotti.

No Capítulo 3, inspirados pelo clássico resultado de H. Berestycki e P. L. Lions [20], estudamos resultados de existência de soluções para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = g(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in BV(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (0.2)$$

com $N \geq 3$, $g(s) = f(s) - \frac{s}{|s|}$ e f satisfazendo as seguintes condições

$$(f_1) \quad f \in C((0, +\infty), \mathbb{R});$$

$$(f_2) \quad \lim_{s \rightarrow 0} f(s) = 0;$$

(f₃) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0$ para algum $p \in (1, 1^*)$, onde $1^* = \frac{N}{N-1}$;

(f₄) Existe $\delta > 0$ tal que

$$F(\delta) = \int_0^\delta f(s)ds > \delta;$$

(f₅) Se $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e $Q(s) = f(s)s - F(s)$, então existe $D \geq 1$ tal que

$$0 < Q(s) \leq DQ(t), \quad 0 < s \leq t$$

e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} Q(s) = +\infty.$$

O resultado principal desse capítulo é o seguinte.

Teorema 1.1. *Suponha que f satisfaça (f₁) – (f₅). Então existe uma solução de variação limitada, radial e não negativa $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ de (0.2), com $g(s) = f(s) - \frac{s}{|s|}$.*

Nesse problema, devido ao fato de que a não linearidade é assintoticamente constante no infinito, não é possível mostrar a limitação da sequência de Palais Smale, a qual decorre do Teorema do Passo da Montanha. Por tal motivo foi necessário provar uma versão desse resultado com a condição de Cerami, aplicada a funcionais menos regulares, a qual acreditamos que possa ser útil no estudo de outros problemas envolvendo esse e outros operadores. Vale a pena ressaltar que a generalização para o $BV(\mathbb{R}^N)$ de resultados conhecidos como [3, 20, 42] não é imediata, haja vista que nesses, a continuidade da aplicação $t \mapsto u(\cdot/t)$ tem um papel crucial. No contexto do espaço $BV(\mathbb{R}^N)$, porém, tal função não é contínua, o que inviabiliza a reprodução do argumento. Por esse motivo, acreditamos que os resultados nesse capítulo sejam relevantes para a comunidade. Por fim, mencionamos que esse resultado foi publicado em Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 500, Issue 1, August 1, 2021, 12507 (ver [57]) e relembramos que depois de finalizados os estudos desse capítulo, soubemos do trabalho [2], onde C. Alves prova a existência de soluções de problemas que incluem (0.2). A abordagem utilizada nesse trabalho, porém, é completamente diferente da que aqui utilizamos, além de não ter sido necessário demonstrar uma versão do Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami para o BV , tal como fizemos aqui.

No Capítulo 4, motivados pela relação de pesos singulares da desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (ver [23]), estudamos o seguinte problema anisotrópico

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \frac{Du}{|Du|} \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitz contendo a origem, $0 < a < N - 1$ e $a < b < a + 1$. A função $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(f₁) $f \in C(\mathbb{R})$;

(f₂) $f(0) = 0$;

(f_3) Existem $c_1, c_2 > 0$ e $1 < q < \frac{N}{N-(1+a-b)}$, tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{q-1}, \quad s \in \mathbb{R};$$

(f_4) Existem $\mu > 1$ e $s_0 > 0$ tais que

$$0 < \mu F(s) \leq f(s)s, \quad \forall |s| \geq s_0,$$

onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$;

(f_5) f é crescente em $\mathbb{R}$.

O resultado principal é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.2. *Suponha que f satisfaça as condições (f_1)–(f_4). Então existe uma solução não negativa para o problema (0.3). Além disso, se f satisfaz (f_5) então essa solução é uma solução de energia mínima.*

O primeiro passo na demonstração desse resultado foi a definição e o correspondente estudo do espaço das funções de variação limitada com pesos. De fato, no estudo de tal espaço, fez-se necessário demonstrar uma versão da Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg para o BV , a qual acreditamos que também tenha interesse por si. Vale ressaltar que até onde sabemos, todos os trabalhos precedentes que estudaram essa classe de problemas (ver [46, 48, 54, 53, 56, 69]), o fizeram considerando pesos limitados. Além disso, uma vez que a Teoria de Anzellotti clássica não se aplica a essa classe de problemas, foi necessário estendê-la de modo a contemplar a situação em questão, o que exigiu a aproximação da função por funções limitadas e uma posterior e refinada análise do limite. Por fim, vale ressaltar que esse resultado foi publicado em *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, Volume 28, 18 August 2021 (ver [58]).

No Capítulo 5 inspirados pelo trabalho [34] abordamos novamente o problema (0.3), porém com a f satisfazendo as seguintes condições:

(f_1) $f \in C^1(\mathbb{R})$;

(f_2) Existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^\alpha} = 0$;

(f_3) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $1 < q < \frac{N}{N-(1+a-b)}$ tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{q-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

(f_4) Seja $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. Existe $\mu > 1$ tal que

$$0 < \mu F(s) \leq f(s)s, \quad \forall |s| \geq s_0;$$

(f_5) $f'(s) > (q-1)\frac{f(s)}{s}$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O resultado principal nesse capítulo é o seguinte.

Teorema 1.3. *Assuma que $(f_1) - (f_5)$ são satisfeitas. Então existe uma solução de variação limitada $u_0 \in BV_a(\Omega)$ que muda de sinal, isto é, u_0 é tal que, existem $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $[z, \nu] \in L^\infty(\partial\Omega)$ com $\| [z, \nu] \|_\infty \leq \|z\|_\infty \leq 1$ tais que*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} z \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u_0) & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ \left(\frac{1}{|x|^a} z, Du_0 \right) = \frac{1}{|x|^a} |Du_0| & \text{no sentido de medidas,} \\ [z, \nu] \in \operatorname{sign}(-u) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nesse caso, para provar a existência de solução, devido às novas condições na não linearidade, tal como no trabalho [34], consideramos as soluções dos problemas envolvendo o operador p -Laplaciano obtidas pelo Método de Nehari (ver [31]), para posteriormente fazer $p \rightarrow 1$. Porém, aqui usamos o espaço de funções de variação limitada com peso, definido no capítulo prévio, bem como os resultados obtidos nele.

No Capítulo 6, estudamos uma generalização para o operador 1-laplaciano do importante resultado [5], o qual estuda a existência de soluções para problemas envolvendo não-linearidade do tipo côncavo-convexa. Há que observar porém que, uma vez que o operador 1-laplaciano dá origem a um funcional energia com parte principal dada pela norma elevada à potência um, segue que para que a não-linearidade apresente comportamento do tipo côncavo-convexo, necessariamente aparecerá um termo envolvendo uma potência entre zero e um no funcional. Dessa forma, o problema em si apresentará um termo singular. Mas especificamente, estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = \frac{\lambda}{u^\gamma} + u^{q-1} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.4)$$

onde $N \geq 2$, $\lambda > 0$ e $0 < \gamma < 1 < q < N/(N-1)$.

Nesse capítulo o resultado principal é o seguinte.

Teorema 1.4. *Seja $0 < \gamma < 1 < q < 1^*$, então existe $\Lambda > 0$, tal que o problema (0.4) possui ao menos duas soluções não-negativas, para todo $\lambda < \Lambda$.*

Na demonstração desse resultado, utilizamos uma vez mais a aproximação através de problemas envolvendo o operador p -laplaciano. Observe porém que a presença do termo singular, faz com que o funcional energia do problema aproximado, embora seja diferenciável, não seja de classe C^1 . Dessa forma, teoremas clássicos como o do Passo da Montanha não podem ser aplicados diretamente. Como alternativa a isso, necessitamos utilizar resultados técnicos inspirados em [1, 64], os quais implicam que minimizantes locais do funcional energia satisfazem a forma fraca do problema. Esses mesmos resultados são utilizados ainda para provar a existência de uma segunda solução para o problema aproximado, essa, por sua vez, oriunda da minimização do funcional sobre uma componente conexa do conjunto de Nehari. Por fim, no processo de se calcular o limite quando $p \rightarrow 1$, a presença do termo singular faz com que a análise empregada precise ser adaptada. Nesse ponto, nos inspiramos fortemente nos argumentos de [27].

Por fim, para finalizar a introdução desse texto, gostaríamos de destacar que o conteúdo dos capítulos 4 e 6 foram realizados durante um estágio realizado na Universidade de

Valência, Espanha, sob orientação do Prof. Sergio Segura de León. Gostaríamos ainda de resumir as principais contribuições originais dadas em cada um dos capítulos da presente tese.

- No Capítulo 3, além da demonstração da existência de solução para uma classe de problemas ainda não abordado na literatura, foi também demonstrado um resultado abstrato, consistindo em uma versão do Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami, para funcionais que se escrevem como diferença entre um convexo e localmente lipschitziano e um de classe C^1 .
- Nos Capítulos 4 e 5, foram estudados pela primeira vez resultados de existência de soluções para problemas anisotrópicos envolvendo o operador 1-laplaciano, na presença de pesos ilimitados. Nesses, o principal desafio foi a definição e demonstração das principais propriedades do espaço BV com peso, o que apresenta grande dificuldade devido à presença do peso ilimitado. Além disso, foi também necessário estender para esses espaços, a Teoria de Paridade de Anzellotti, o que exigiu um processo de aproximação da função peso, utilizando-se de funções limitadas.
- No Capítulo 6, foi estudado de maneira pioneira um resultado de existência de solução para um problema do tipo côncavo-convexo envolvendo o operador 1-laplaciano, onde nesse contexto, isso implica na presença de um termo singular na não-linearidade. Os principais desafios foram ultrapassar as dificuldades em se lidar com integrais que envolvem o termo singular nos problemas aproximados, bem como a de analisar o limite das soluções não obtidas por minimização local, dos problemas aproximados.

2 Preliminares

Neste capítulo vamos definir o espaço $BV(\Omega)$ e apresentar alguns resultados importantes neste espaço, os quais, por sua vez, podem ser encontrados com maiores detalhes em [15]. Também apresentamos alguns resultados da teoria de subdiferenciais e da teoria de Anzellotti.

2.1 O espaço $BV(\Omega)$

Definição 2.1. Seja $u \in L^1(\Omega)$. Diz-se que u é uma função de variação limitada se sua derivada distribucional é representada por uma medida de Radon em Ω , isto é,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi D_i u \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

para alguma medida Radon vetorial $Du = (D_1 u, \dots, D_N u)$ em Ω . Além disso, o espaço de todas as funções de variação limitada em Ω é denotada por $BV(\Omega)$, isto é,

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega); Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}.$$

Observação 2.2. Usando um argumento de regularização, mostra-se que a integração por partes (1.1) é ainda válida para todo $\phi \in C_c^1(\Omega)$. Assim, podemos escrever,

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_i D_i u \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

O espaço de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ está contido em $BV(\Omega)$. Na verdade, para $u \in W^{1,1}(\Omega)$ a derivada distribucional é dada por $\nabla u \mathcal{L}^N$. Porém tal inclusão é estrita, como é mostrado no seguinte exemplo:

Exemplo 2.3. Considere a função de **Heaviside** H em $\mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Como H é uma função localmente integrável, ele define uma distribuição que denotamos por T_H . Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então

$$\frac{dT_H}{dx}(\phi) = -T_H \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = - \int_0^\infty \frac{d\phi}{dx} = \phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi d\delta_0, \quad (1.3)$$

onde se $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases} \quad (1.4)$$

e δ_0 é chamada de medida de Dirac. Logo $DH = \delta_0$ e assim, $H \notin W^{1,1}(\mathbb{R})$ embora $H \in BV(\mathbb{R})$.

Proposição 2.4. *Seja $u \in L^1(\Omega)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $u \in BV(\Omega)$;
- ii) $\|Du\| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx; \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\} < +\infty$;
- iii) $\|Du\| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_i D_i u; \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\} < +\infty$,

onde $D_i u$ no item iii) representa a i -ésima componente da medida vetorial $Du = (D_1 u, \dots, D_N u) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Observação 2.5. 1) Os itens ii) e iii) são uma imediata consequência da densidade de $C_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ em $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e também de $C_c^1(\Omega)$ em $C_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

- 2) O Teorema de representação de Riesz-Alexandroff (Teorema 2.4.6 em [15]) implica que

$$\|Du\| = \int_{\Omega} |Du|,$$

onde $\int_{\Omega} |Du|$ representa a variação total de Du em Ω .

- 3) O espaço $BV(\Omega)$ torna-se um espaço vetorial normado com a norma definida por

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx, \quad (1.5)$$

para todo $u \in BV(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}^N$, essa norma é denotada por $\|\cdot\|_{BV}$.

Agora vamos apresentar a semicontinuidade inferior da norma em $BV(\Omega)$ com respeito à convergência em $L^1(\Omega)$.

Lema 2.6. *Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência limitada e tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. Então $u \in BV(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |Du| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|.$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \varphi dx - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx \right| &\leq \int_{\Omega} |u_n - u| |\operatorname{div} \varphi| dx \\ &\leq \sup_{\Omega} |\operatorname{div} \varphi| \int_{\Omega} |u_n - u| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo,

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \varphi dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|.$$

Consequentemente, desde que φ é arbitrário, pela definição do supremo e o item ii) da Proposição 2.4 obtemos

$$\int_{\Omega} |Du| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|,$$

como desejávamos provar. $\square$

Uma consequência do resultado prévio é que o espaço $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach, como demonstra-se a seguir.

Proposição 2.7. *O espaço $BV(\Omega)$ com a norma definida em (1.5) é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\Omega} |Du_m - Du_n| + \int_{\Omega} |u_m - u_n| dx < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Note que (u_m) é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$ e como tal espaço é um espaço de Banach, existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{em } L^1(\Omega), \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Além disso, para $n \geq n_0$ fixo, fazendo $m \rightarrow \infty$, temos

$$u_m - u_n \rightarrow u - u_n, \quad \text{em } L^1(\Omega) \tag{1.6}$$

e pelo Lema 2.6, temos

$$\int_{\Omega} |D(u - u_n)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D(u_m - Du_n)| \leq \epsilon, \tag{1.7}$$

o que, por sua vez, implica que

$$u \in BV(\Omega).$$

Além disso de (1.6) e (1.7), tem-se

$$\int_{\Omega} |D(u - u_n)| + \int_{\Omega} |u - u_n| dx \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \text{sempre que } n \geq n_0,$$

ou seja, $u_n \rightarrow u$ em $BV(\Omega)$. $\square$

No próximo resultado, mostra-se cada elemento de $BV(\Omega)$ pode ser aproximado por funções de $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, com respeito à convergência definida a seguir.

Definição 2.8. Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$. Dizemos que $u_n \rightarrow u$ em $BV(\Omega)$ segundo a convergência estrita, se

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} |Du_n| \rightarrow \int_{\Omega} |Du|,$$

quando $n \rightarrow +\infty$.

Proposição 2.9. Para cada $u \in BV(\Omega)$, existe $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n| dx \rightarrow \int_{\Omega} |Du|.$$

Demonstração. A prova desta proposição pode ser encontrada em [15, pág. 375]. $\square$

Observação 2.10. Na tese da proposição acima a convergência $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ pode ser modificada por:

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega) \quad \forall p \in [1, 1^*],$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Agora mostraremos que o espaço $BV(\Omega)$, tal como os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, está imerso continuamente e compactamente nos espaços $L^p(\Omega)$ para um p adequado.

Teorema 2.11. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, e $1^* = \frac{N}{N-1}$. Então a seguinte imersão

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua, para todo $p \in [1, 1^*]$.

Demonstração. Para o caso $p = 1$, pela definição de norma (1.5), para qualquer $u \in BV(\Omega)$ temos que

$$\|u\|_1 \leq \|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Agora consideremos o caso $1 < p \leq 1^*$ e $u \in BV(\Omega)$. Pela Proposição 5.5 existe uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ que converge para u no sentido da convergência estrita, isto é,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n| dx \rightarrow \int_{\Omega} |Du|,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, como a sequência $(u_n) \subset W^{1,1}(\Omega)$ e o espaço $W^{1,1}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ para todo $p \in (1, 1^*]$, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_n\|_p \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n| dx + \int_{\Omega} |u_n| dx \right). \quad (1.8)$$

Como o segundo membro acima é convergente, temos que a sequência (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ e como $L^p(\Omega)$ para $p \in (1, 1^*]$ é reflexivo, a menos de subsequência, temos

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } L^p(\Omega) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Então pela semicontinuidade inferior de $L^p(\mathbb{R}^N)$ com respeito à topologia fraca, e usando (1.6), tem-se

$$\|u\|_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} C \left(\int_{\Omega} |Du_n| dx + \int_{\Omega} |u_n| dx \right) \leq C \|u\|_{BV(\Omega)},$$

o que completa a demonstração. $\square$

Teorema 2.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e com fronteira suave. Então a imersão*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta, para todo $p \in [1, 1^)$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ tal que $\|u_n\|_{BV(\Omega)} \leq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Observação 2.10, existe $v_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$\|v_n - u_n\|_p < \frac{1}{n} \quad (1.9)$$

e

$$\int_{\Omega} |Dv_n| dx < 2. \quad (1.10)$$

Note que como (v_n) é limitada em $W^{1,1}(\Omega)$, então pela compacidade da imersão desse espaço em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 1^*)$, segue que existe uma subsequência (v_{n_k}) e $u \in L^p(\Omega)$, tal que

$$v_{n_k} \rightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega), \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

O que a sua vez por (1.9) implica em

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega),$$

quando $k \rightarrow \infty$. □

Teorema 2.13. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ com fronteira Lipschitz $\partial\Omega$. Então existe um operador linear contínuo $\gamma_0 : BV(\Omega) \rightarrow L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)$ satisfazendo*

(i) *Para todo u em $C(\overline{\Omega}) \cap BV(\Omega)$, $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$;*

(ii) *A fórmula de Green generalizada estabelece-se: $\forall \varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$*

$$\int_{\Omega} \varphi Du = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u) \varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1},$$

onde $\nu(x)$ é o campo normal exterior em $\partial\Omega$, $\mathcal{H}^{N-1}$ -q.t.p. em $\partial\Omega$.

Exemplo 2.14. Seja Ω como no teorema acima e $\tilde{\Omega}$ um conjunto aberto tal que $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. Para $u \in BV(\Omega)$, definimos a função $\tilde{u}$ por

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{em } \Omega, \\ 0 & \text{em } \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Então $\tilde{u} \in BV(\tilde{\Omega})$ e

$$D\tilde{u} = Du|_{\Omega} + \gamma_0(u)\nu\mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega}.$$

Proposição 2.15. (Desigualdade de Poincaré em BV) *Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ com fronteira Lipschitz $\partial\Omega$. Então existe uma constante $C = C(\Omega, N) > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |u| dx \leq C \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |\gamma_0(u)| d\mathcal{H}^{N-1} \right). \quad (1.12)$$

A prova dessa desigualdade encontra-se em [51].

Observação 2.16. Se o domínio for $\Omega = \mathbb{R}^N$, perde-se a compacidade em $BV(\mathbb{R}^N)$ como no caso dos espaços de Sobolev. Mas graças ao trabalho de Figueiredo e Pimenta [32], tal compacidade é recuperada quando consideram o subespaço das funções radiais de variação limitada, denotada por $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$, onde mostram que tal espaço está imerso compactamente nos espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $p \in (1, 1^*)$. Mais precisamente, eles mostram que a imersão

$$BV_{rad}(\mathbb{R}^N) := \{u \in BV(\mathbb{R}^N); u(x) = u(|x|)\} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad \forall p \in (1, 1^*) \quad (1.13)$$

é compacta. Além disso, tais autores apresentam uma versão do Lema de Lions no espaço $BV(\mathbb{R}^N)$ nesse mesmo trabalho, o qual apresentamos a seguir:

Teorema 2.17. *Suponha que existe $R > 0$, $1 \leq p < 1^*$ e uma sequência limitada $(u_n) \subset BV(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n| dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Então $u_n \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in (1, 1^)$.*

2.1.1 Derivada direcional da norma de $BV(\mathbb{R}^N)$

Para mostrar que a função $u \mapsto \|u\|_{BV} = \int_{\mathbb{R}^N} |Du| + \int_{\mathbb{R}^N} |u| dx$ possui derivadas em algumas direções vamos estudar primeiramente as propriedades de diferenciabilidade do funcional.

$$BV(\mathbb{R}^N) \ni u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |Du|.$$

Para fazer isso seguiremos os argumentos do trabalho [12]. Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du| = \int_{\mathbb{R}^N} |(Du)^a(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{Du}{|Du|}(x) \right| |Du|^s,$$

onde $Du = Du^a + Du^s$ é a decomposição de Lebesgue da medida Du , em termos de uma parte absolutamente contínua e uma parte singular com respeito à medida de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, onde $(Du)^a(x)$ denota a densidade da medida Du^a com respeito a $\mathcal{L}^N$ e $\frac{Du}{|Du|}(x)$ é a densidade de Du com respeito a $|Du|$.

Teorema 2.18. *Seja $u \in BV(\mathbb{R}^N)$. Então, para todas as funções $\phi \in BV(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$|D\phi|^s \ll |Du|^s \text{ e } (D\phi)^a(x) = 0 \quad \mathcal{L}^N - q.t.p. \text{ no conjunto } T = \{x \in \mathbb{R}^N; (Du)^a(x) = 0\},$$

tem-se que a derivada de $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |Du|$ na direção de ϕ é dada por

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(Du)^a(x)}{|(Du)^a(x)|} (D\phi)^a(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Du}{|Du|}(x) \frac{D\phi}{|D\phi|}(x) |D\phi|^s.$$

Demonstração. (Veja [12]).

□

Sobre as condições do teorema anterior, a derivada da norma $u \mapsto \|u\|_{BV}$ na direção de ϕ é dado por

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(Du)^a(x)}{|(Du)^a(x)|} (D\phi)^a(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Du}{|Du|}(x) \frac{D\phi}{|D\phi|}(x) |D\phi|^s + \int_{\mathbb{R}^N} \text{sign}(u) \phi dx,$$

onde $\text{sign } u(x) = 1$ se $u(x) > 0$, $\text{sign } u(x) = -1$ se $u(x) < 0$ e $\text{sign } u(x) = 0$ se $u(x) = 0$. Além disso, note que a derivada da norma $u \mapsto \|u\|_{BV}$ na direção de $\phi = u$ é dado por

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du| + \int_{\mathbb{R}^N} |u| dx = \|u\|_{BV}.$$

No próximo capítulo apresentamos aplicações na busca de soluções de equações diferenciais parciais elípticas, onde serão usados os métodos variacionais, isto é, vamos associar um funcional à equação diferencial parcial de tal maneira que os pontos críticos deste funcional serão as soluções buscadas. Mas como os funcionais associados a nossas aplicações não serão diferenciáveis mas sim localmente lipschitzianos, é claro que nós vamos nos basear em outra teoria para ter diferenciabilidade em algum sentido. De fato, usaremos a teoria de subdiferenciais de [25] e [28] a qual nos permitirá definir em sentido generalizado a derivada de tais funcionais e com isto obter os seus pontos críticos e, conseqüentemente as soluções de tais equações diferenciais parciais. Assim, na seguinte seção apresentamos brevemente tal teoria, os quais podem encontrados com mais detalhes nos trabalhos citados previamente.

2.2 Pontos críticos para funcionais localmente Lipschitz

Dado E um espaço de Banach. Denotemos por E^* o espaço dual topológico de E com norma $\|\cdot\|_*$ e a dualidade por $\langle z, u \rangle$ para $z \in E^*$ e $u \in E$.

Definição 2.19. Uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz se para cada $u \in E$, existe uma vizinhança N_u de u e uma constante K dependendo de N_u tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in N_u.$$

Uma vez que f é uma função localmente Lipschitz vamos definir a derivada direcional generalizada dessa função.

Definição 2.20. Seja $v \in E$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz. A derivada direcional generalizada de f em $x \in E$, na direção de $v \in E$, denotada por $f^0(x, v)$, é definida como:

$$\limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v) - f(x + h)].$$

Proposição 2.21. Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz. Então, são válidas as seguintes afirmações:

- (1) A função $v \rightarrow f^0(x, v)$ é subaditiva e homogênea positivamente, e então convexa;

- (2) $|f^0(x, v)| \leq K\|v\|_E, \quad \forall v \in E;$
 (3) A função $v \rightarrow f^0(x, v)$ é contínua;
 (4) $f^0(x, -v) = (-f)^0(x, v).$

Demonstração. (1) Primeiro vamos provar que é homogêneo positivamente. De fato, seja $w > 0$ e $x, v \in E$ então

$$\begin{aligned} f(x, \alpha v) &= \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda \alpha v) - f(x + h)] \\ &= \inf_{\frac{\delta}{\alpha} > 0} \sup_{0 < \lambda < \frac{\delta}{\alpha}} \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda \alpha v) - f(x + h)] \\ &= \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < \alpha \lambda < \delta} \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha \lambda} [f(x + h + \alpha \lambda v) - f(x + h)] = \alpha f^0(x, v). \end{aligned}$$

Além disso, se $\alpha = 0$, tem-se

$$f^0(x, 0v) = 0 = 0f^0(x, v).$$

Portanto $f^0(x, \alpha v) = \alpha f^0(x, v)$ para todo $\alpha \geq 0$. Agora mostraremos que a função $f^0(x, \cdot)$ é subaditiva. De fato, seja $x, v_1, v_2 \in E$

$$\begin{aligned} f^0(x, v_1 + v_2) &= \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda(v_1 + v_2)) - f(x + h)] \\ &\leq \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v_1 + \lambda v_2) - f(x + h + \lambda v_2)] \\ &\quad + \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v_2) - f(x + h)] \\ &= f^0(x, v_1) + f^0(x, v_2). \end{aligned}$$

Logo a aplicação $u \rightarrow f^0(x, u)$ é subaditiva. Mas isso e o fato que ela é positivamente homogênea implicam que tal função é convexa.

(2) Desde que N_x é aberto, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $0 < \|h\|_E < \delta_1$ e $0 < |\lambda| < \delta_2$ implicam que $x + h, x + h + \lambda v \in N_x$. Logo como f é localmente Lipschitz, existe $K > 0$ tal que

$$|f(x + h + \lambda v) - f(x + h)| \leq K|\lambda|\|v\|_E, \quad \forall v \in E.$$

Mas isso, por sua vez, implica que

$$\sup_{0 < |h| < \delta_1} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v) - f(x + h)] \leq K\|v\|_E.$$

Logo tomando o ínfimo sobre $\delta > 0$ na desigualdade acima, temos

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v) - f(x + h)] = \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < |h| < \delta} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v) - f(x + h)] \leq K\|v\|_E.$$

De maneira semelhante para $0 < \lambda < \delta_2$, temos

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v) - f(x + h)] &= \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < |\lambda| < \delta} \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v) - f(x + h)] \\ &\leq \sup_{0 < |\lambda| < \delta_2} \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v) - f(x + h)] \\ &\leq K \|v\|_E. \end{aligned}$$

Logo pela definição de derivada direcional de generalizada de f em x na direção de v , temos

$$f^0(x, v) \leq K \|v\|_E. \quad (2.14)$$

Utilizando o mesmos argumentos ao caso $-(f(x + h + \lambda v) - f(x + h)) \leq K|\lambda|\|v\|_E$, temos que

$$-f^0(x, v) \leq K \|v\|_E. \quad (2.15)$$

Logo de (4.11) e (2.15) segue que

$$|f^0(x, v)| \leq K \|v\|_E,$$

o que prova o item (2).

(3) Pelo fato que a função $v \rightarrow f^0(x, v)$ é subaditiva e porque vale o item (2), temos para $u, v \in E$ que

$$\begin{aligned} f^0(x, u) - f^0(x, v) &\leq f^0(x, u - v) \leq K \|u - v\|_E, \\ f^0(x, v) - f^0(x, u) &\leq f^0(x, v - u) \leq K \|u - v\|_E, \end{aligned}$$

o que, por sua vez, implica em

$$|f^0(x, u) - f^0(x, v)| \leq K \|u - v\|_E.$$

(4) Pela definição da derivada direcional generalizada de f em x , na direção de $-v$, temos

$$f^0(x, -v) = \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [f(x + h + \lambda v) - f(x + h)] \quad (2.16)$$

$$= \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [(-f)(x + (h - \lambda v) + \lambda v) - (-f)(x + (h - \lambda v))] \quad (2.17)$$

$$= (-f)^0(x, u). \quad (2.18)$$

□

Agora estamos em condições de definir o gradiente generalizado de f em $x \in E$, o qual será interpretado como a derivada da função f . Porém vamos dar a definição de subdiferencial para uma função convexa.

Definição 2.22. Seja $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. O subdiferencial de F em x , denotado por $\partial_s F(x)$ é o conjunto de elementos $z \in E^*$ que satisfazem

$$F(v) \geq F(x) + \langle z, v - x \rangle, \quad \forall v \in E,$$

ou seja,

$$\partial_s F(x) = \{z \in E^*; F(v) \geq F(x) + \langle z, v - x \rangle, \forall v \in E\}.$$

Definição 2.23. Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ um função localmente Lipschitz. Definimos o gradiente generalizado de f em x , denotado por $\partial f(x)$, como o subdiferencial da função convexa $f^0(x, \cdot)$ em $0 \in E$. Isto é, $w \in \partial f(x) \subset E^*$ se, e somente se

$$\langle w, v \rangle \leq f^0(x, v), \quad \forall v \in E.$$

Observação 2.24. A definição acima está bem posta pois pelo item (1) da Proposição 2.21 a função $f^0(x, \cdot)$ é convexa.

Proposição 2.25. (*Propriedades do gradiente generalizado*)

1) Para cada $x \in E$, $\partial f(x)$ é um subconjunto convexo não vazio e w^* -compacto de E^* .

2) Para cada $w \in \partial f(x)$, tem-se

$$\|w\|_{E^*} \leq K.$$

3) Sejam $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções localmente Lipschitz, então

$$\partial(f + g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x).$$

4) $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) Se f é convexo, então $\partial f(x)$ coincide com o subdiferencial de f em x , isto é,

$$\partial f(x) = \partial_s f(x).$$

6) A aplicação $x \mapsto \partial f(x)$ é semicontínua superiormente no sentido que para cada $x_0 \in E$, $\epsilon > 0$, $v \in E$, existe um $\delta > 0$, tal que para cada $w \in \partial f(x)$ com $\|x - x_0\| < \delta$, existe um $w_0 \in \partial f(x_0)$

$$|\langle w - w_0, v \rangle| < \epsilon.$$

7) A função

$$\lambda(x) = \min_{w \in \partial f(x)} \|w\|_{E^*},$$

existe, e é semicontínua inferiormente, isto é, $\liminf_{x \rightarrow x_0} \lambda(x) \geq \lambda(x_0)$.

8) Para cada $v \in E$,

$$f^0(x, v) = \max\{\langle w, v \rangle; w \in \partial f(x)\}.$$

9) Seja $\phi \in C^1([0, 1]; E)$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz, então a função $h = f \circ \phi$ é diferenciável em quase todo ponto de $[0, 1]$, e

$$h'(t) \leq \max\{\langle w, \phi'(t) \rangle; w \in \partial f(\phi(t))\} \quad q.t.p. \ x \in [0, 1].$$

10) Se $x \in E$ é um mínimo local de f , então $0 \in \partial f(x)$.

Demonstração. Veja [25]. □

O último item da proposição anterior sugere a definição de ponto crítico tal como a seguir.

Definição 2.26. Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional localmente lipschitziano. Dizemos que $x_0 \in E$ é um ponto crítico se

$$0 \in \partial f(x_0).$$

2.3 Teoria de Anzellotti

Nesta seção apresentamos alguns resultados do trabalho [12], os quais serão usados em alguns dos capítulos subsequentes.

Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ e sejam p, q números reais estendidos tais que $1 \leq p \leq N$, $\frac{N}{N-1} \leq q \leq +\infty$. Consideremos os seguinte espaços

$$BV(\Omega)_q = BV(\Omega) \cap L^q(\Omega)$$

e

$$X(\Omega)_p = \{\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) ; \operatorname{div} \mathbf{z} \in L^p(\Omega)\}.$$

Teorema 2.27. Suponha que Ω seja limitado e que sua fronteira seja localmente o gráfico de uma função Lipschitz. Denote por $\nu(x)$ o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Então existe um operador linear $\gamma : X(\Omega)_p \rightarrow L^\infty(\partial\Omega)$ tal que

- (i) $\|\gamma_{\mathbf{z}}\| \leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(\Omega)}$;
- (ii) $\langle \mathbf{z}, u \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \gamma_{\mathbf{z}}(x) u(x) d\mathcal{H}^{N-1} \quad \forall u \in BV(\Omega)_q$;
- (iii) $\gamma_{\mathbf{z}}(x) = \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{se } \mathbf{z} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N).$

Demonstração. (Ver Teorema 1.2 de [12]). □

Nesse teorema acima, a função $\gamma_{\mathbf{z}}(x)$ é um traço definido fracamente sobre $\partial\Omega$ da componente normal de $\mathbf{z}$, por isso, em adiante, vamos denotar $\gamma_{\mathbf{z}}(x)$ por $[\mathbf{z} \cdot \nu](x)$.

Proposição 2.28. Sejam Ω como no Teorema 2.27, e p, q tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{se } p > 1, \tag{3.19}$$

$$q = +\infty \quad \text{se } p = 1. \tag{3.20}$$

Então, para todo $\mathbf{z} \in X(\Omega)$, e para todo $u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{z} dx + \int_{\Omega} \mathbf{z} \cdot \nabla u dx = \int_{\Omega} [\mathbf{z}, \nu](x) u(x) d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Demonstração. (ver Proposição 1.3 de [12]). □

A seguir, consideraremos o par (z, u) tal que

$$u \in BV(\Omega)_q, \quad \mathbf{z} \in X(\Omega)_p \quad \text{e} \quad 1 < p < N \text{ com } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (3.21)$$

Definição 2.29. Sejam $u, \mathbf{z}$ tais que (3.21) estabelece-se para todo conjunto aberto $A \subset \subset \Omega$. Então definimos um funcional linear $(\mathbf{z}, Du) : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\langle (\mathbf{z}, Du), \varphi \rangle = - \int_{\Omega} u \varphi \operatorname{div} \mathbf{z} \, dx - \int_{\Omega} u \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Teorema 2.30. Para todo conjunto aberto $A \subset \Omega$ e para toda função $\varphi \in C_c(\Omega)$, temos

$$\langle (\mathbf{z}, Du), \varphi \rangle \leq \sup |\varphi| \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(A)} \int_A |Du|,$$

assim o funcional $(\mathbf{z}, Du)$ é uma medida de Radon em Ω .

Demonstração. (Ver Teorema 1.5 de [12]). □

Corolário 2.31. As medidas $(\mathbf{z}, Du)$ e $|(\mathbf{z}, Du)|$ são absolutamente contínuas com respeito à medida $|Du|$ em Ω e temos

$$|\langle (\mathbf{z}, Du), \varphi \rangle| \leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(A)} \int_B |Du|,$$

para todo conjunto de Borel B e todo conjunto aberto A tal que $B \subset A \subset \Omega$.

Além disso, pelo Teorema de Radon–Nikodym, para $\mathbf{z}, u$ fixos, existe uma função $|Du|$ –mensurável

$$\theta(\mathbf{z}, Du, x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{z}, Du) &= \int_{\Omega} \theta(\mathbf{z}, Du, x) |Du| \quad \text{para todo boreliano } B \subset \Omega, \\ \|\theta(\mathbf{z}, Du, x)\|_{L^\infty(\Omega, |Du|)} &\leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Demonstração. (Ver Corolário 1.6 de [12]). □

Teorema 2.32. Seja Ω um conjunto aberto com fronteira Lipschitz. Suponha que $\mathbf{z}, u$ satisfazem (3.21). Então

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{z} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{z}, Du) = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu] u \, d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (3.22)$$

Demonstração. (ver Teorema 1.9 de [12]). □

Corolário 2.33. Se $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{z}, u$ satisfazem (3.21). Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{div} \mathbf{z} \, dx = - \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{z}, Du). \quad (3.23)$$

3 Existência de uma solução radial para um problema autônomo envolvendo o operador 1–laplaciano

3.1 O problema

Neste capítulo vamos abordar o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u + \frac{u}{|u|} = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in BV(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde o operador Δ_1 é formalmente dado por $\Delta_1 u = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right)$, $N \geq 2$ e a não linearidade f satisfaz as seguintes condições:

$$(f_1) \quad f \in C(\mathbb{R}^+);$$

$$(f_2) \quad \lim_{s \rightarrow 0} f(s) = 0;$$

$$(f_3) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0 \text{ para algum } p \in (1, 1^*), \text{ onde } 1^* = \frac{N}{N-1};$$

$$(f_4) \quad \text{Existe } \delta > 0 \text{ tal que } F(\delta) = \int_0^\delta f(s)ds > \delta;$$

$$(f_5) \quad \text{Se } F(s) = \int_0^s f(t)dt \text{ e } Q(s) = f(s)s - F(s), \text{ então existe } K \geq 1 \text{ tal que}$$

$$0 < Q(s) \leq KQ(t), \quad 0 < s \leq t$$

e

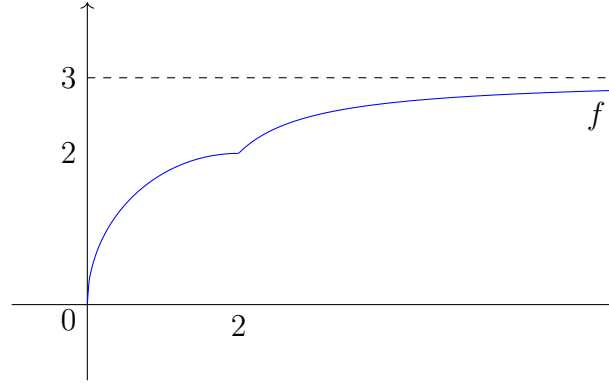
$$\lim_{s \rightarrow +\infty} Q(s) = +\infty.$$

Observação 3.1. Uma função modelo que satisfaz as condições $(f_1) - (f_5)$ é a seguinte:

$$f(s) = \begin{cases} \sqrt{4 - (s-2)^2} & \text{se } 0 \leq s \leq 2 \\ \frac{s-2}{s-1} + 2 & \text{se } s > 2 \end{cases}$$

Nosso objetivo é mostrar os dois seguintes resultados.

Figura 3.1: Gráfico de f



Fonte: Elaborado pelo autor

Teorema 3.2. *Suponha que f satisfaça as condições $(f_1) - (f_5)$. Então (1.1) possui uma solução radial não negativa $u \in BV(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 3.3. *Seja $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ uma solução de variação limitada de (1.1) tal que $x \cdot \nabla u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ e u satisfaz a equação de Euler Lagrange (2.11) com $\operatorname{div} z \in L^N(\mathbb{R}^N)$. Então u satisfaz a seguinte identidade de Pohozaev*

$$(N-1) \int_{\mathbb{R}^N} |Du| = N \int_{\mathbb{R}^N} (F(u) - |u|) dx. \quad (1.2)$$

Observação 3.4. Desde que estamos a procura de soluções não negativas, tomamos f definido em todo $\mathbb{R}$, fazendo $f(s) = 0$ se $s \leq 0$. Além disso pela condição (f_2) tem-se $f \in C(\mathbb{R})$.

3.2 O funcional energia e a equação de Euler-Lagrange

Nesta seção definimos o funcional energia associado ao Problema (1.1) bem como sua equação de Euler-Lagrange.

O espaço onde definiremos o funcional energia associado ao Problema (1.1) é o espaço das funções de variação limitada $BV(\mathbb{R}^N)$ com a norma definida por

$$\|u\|_{BV} = \int_{\mathbb{R}^N} |Du| + \int_{\mathbb{R}^N} |u| dx.$$

Definamos os funcionais $I_0, I, \Phi : BV(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} I_0(u) &= \|u\|_{BV}, \\ I(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx, \\ \Phi(u) &= I_0(u) - I(u). \end{aligned}$$

Note que, pelo Teorema 2.18,

$$I'_0(u)u = \|u\|_{BV}$$

e, desde que $I \in C^1(BV(\mathbb{R}^N))$, temos que

$$\Phi'(u)u = \|u\|_{BV} - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx. \quad (2.3)$$

Observação 3.5. • Usando o Teorema 2.18, a derivada $\Phi'(u)v$ está bem definida só em algumas direções. Na verdade, nas direções $v \in BV(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$|Dv|^s \ll |Du|^s \text{ e } (Dv)^a(x) = 0 \quad \mathcal{L}^N - \text{q.t.p. no conjunto } \{x \in \mathbb{R}^N; (Du)^a(x) = 0\}.$$

Em outras palavras, Φ não é diferenciável em $BV(\mathbb{R}^N)$. Porém, essa função é localmente Lipschitz contínua. Assim, pelos resultados preliminares, Φ possui gradiente generalizado em $u \in BV(\mathbb{R}^N)$, o qual denotamos por $\partial\Phi(u)$.

- Segundo a Definição 2.26, u é um ponto crítico de Φ se $0 \in \partial\Phi(u)$, e sendo $\partial\Phi(u) \subset \partial I_0(u) - \{I'(u)\}$, temos $0 \in \partial I_0(u) - \{I'(u)\}$, ou seja, $I'(u) \in \partial I_0(u)$. Além disso, como I_0 é convexo, tem-se

$$I_0(v) - I_0(u) \geq I'(u)(v - u), \quad \forall v \in BV(\mathbb{R}^N),$$

ou equivalentemente,

$$\|v\|_{BV} - \|u\|_{BV} \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(v - u)dx, \quad \forall v \in BV(\mathbb{R}^N). \quad (2.4)$$

Definição 3.6. Dizemos que, u é ponto crítico de Φ se

$$\|v\|_{BV} - \|u\|_{BV} \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(v - u)dx, \quad \forall v \in BV(\mathbb{R}^N). \quad (2.5)$$

A seguir vamos estudar a versão precisa da Equação de Euler-Lagrange associada aos pontos críticos de Φ , o qual basicamente consiste em mostrar a existência de um campo vetorial $z \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, o qual faz o papel de $\frac{Du}{|Du|}$ em (1.1) e que está bem definido quando $Du = 0$. Para isso, primeiro vamos estender os funcionais I_0 , I e Φ para o espaço $X = L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{1*}(\mathbb{R}^N)$, com norma $\|u\|_X = \|u\|_1 + \|u\|_{1*}$, onde denotamos tais extensões por $\bar{I}_0$, $\bar{I}$ e $\bar{\Phi}$, respectivamente. Mais especificamente definimos

$$\bar{I}_0(u) = \begin{cases} I_0(u), & \text{se } u \in BV(\mathbb{R}^N), \\ +\infty, & \text{se } u \in X \setminus BV(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

$$\bar{I}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx, \quad \forall u \in X$$

e

$$\bar{\Phi} = \bar{I}_0 - \bar{I}.$$

Observe que o funcional $\bar{I}_0$ é convexo e semicontínuo inferiormente em X e ainda $\bar{I} \in C^1(X)$. Logo o gradiente generalizado de $\bar{\Phi}$ está bem definido, segundo a teoria de subdiferencias para funcionais com essa regularidade (ver [65]).

O seguinte resultado é importante para obter a equação de Euler-Lagrange de (1.1) satisfeita pelos pontos críticos de Φ .

Lema 3.7. Se $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\bar{\Phi}(u)$.

Demonstração. Suponha que $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ seja tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então u satisfaz (2.5). Vamos verificar que

$$\bar{I}_0(v) - \bar{I}_0(u) \geq \bar{I}'(u)(v - u), \quad \forall v \in X. \quad (2.6)$$

Para isso consideremos dois casos. Primeiro suponha que $v \in BV(\mathbb{R}^N) \cap X$, então

$$\begin{aligned}\bar{I}_0(v) - \bar{I}_0(u) &= I_0(v) - I_0(u) \\ &\geq I'(u)(v - u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(v - u)dx \\ &= \bar{I}'(u)(v - u).\end{aligned}$$

Para o caso que $v \in X \setminus BV(\mathbb{R}^N)$, desde que $\bar{I}_0(v) = +\infty$ e $\bar{I}_0(u) < \infty$, segue-se que

$$\bar{I}_0(v) - \bar{I}_0(u) = +\infty \quad (2.7)$$

$$\geq I'(u)(v - u). \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

Portanto o resultado (2.6) fica verificado. $\square$

Agora, assumamos que $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ seja uma solução de variação limitada de (1.1), pela Lema 3.7 tem-se que $0 \in \partial\bar{\Phi}(u)$, mas como $\bar{I}_0$ é convexo e $\bar{I}$ pertence a $C^1(X)$, então

$$\bar{I}'(u) \in \partial\bar{I}_0(u).$$

Definimos $\bar{I}_{01}, \bar{I}_{02} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$\bar{I}_{01}(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} |Du|, & \text{se } u \in BV(\mathbb{R}^N), \\ +\infty, & \text{se } u \in X \setminus BV(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

e

$$\bar{I}_{02}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|dx.$$

Note que $\bar{I}_{02} \in C(X, \mathbb{R}^N)$, $\bar{I}_{02} \in C(BV(\mathbb{R}^N))$ e

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_{01} + \bar{I}_{02}, \quad \forall v \in X.$$

Desde que $\bar{I}_{01}$ e $\bar{I}_{02}$ são convexos, e $\bar{I}_{02}$ é finito e contínuo em $BV(\mathbb{R}^N)$, segue-se de [15][Teorema 9.5.4], que

$$\partial\bar{I}_0(u) = \partial\bar{I}_{01}(u) + \partial\bar{I}_{02}(u). \quad (2.10)$$

Usando os mesmos argumentos explorados em [19, Teorema 8.15], segue-se que $X' \subset L_{\infty,N}(\mathbb{R}^N)$, onde em

$$L_{\infty,N}(\mathbb{R}^N) = \{g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}; \text{ é mensurável e } |g|_{\infty,N} < \infty\},$$

consideramos a norma

$$\|g\|_{\infty,N} = \sup_{\|\phi\|_1 + \|\phi\|_{1^*} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} g\phi dx \right|.$$

Além disso, pode ser provado que a inclusão

$$L_{\infty,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^N(B_R(0))$$

é contínua para todo $R > 0$.

Proposição 3.8. *Se $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional Φ , existem $\gamma \in L_{\infty,N}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathbf{z} \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ tais que*

$$\begin{cases} -\int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{div} \mathbf{z} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |Du|, \\ \gamma|u| &= u \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ -\operatorname{div} \mathbf{z} + \gamma &= f(u) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (2.11)$$

Demonstração. Como u é um ponto crítico para Φ , pelo Lema 3.7 temos $0 \in \partial\bar{\Phi}(u)$. Além disso, de (2.10), existem $\beta, \gamma \in L_{\infty,N}(\mathbb{R}^N)$ tais que $\beta \in \partial\bar{I}_{01}(u)$, $\gamma \in \partial\bar{I}_{02}(u)$ e

$$\bar{I}'(u) = \beta + \gamma.$$

Por outro lado seguindo os argumentos em [44, Proposição 4.23], pode ser provado que existe um $\mathbf{z} \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ tal que

$$-\operatorname{div} \mathbf{z} = \beta \quad \text{em } L_{\infty,N}(\mathbb{R}^N), \quad (2.12)$$

no sentido das distribuições e que

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{div} \mathbf{z} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |Du|. \quad (2.13)$$

Além disso, pela Fórmula de Green, (2.12), (2.13) e pelo fato que u é solução do Problema (1.1), γ é tal que

$$\gamma|u| = u \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \quad (2.14)$$

Portanto, segue-se de (2.12), (2.13) e (2.14) que u satisfaz a equação de Euler Lagrange (2.11). $\square$

Agora antes de usar o método variacional e provar o Teorema 3.2, como a não linearidade é assintoticamente constante no infinito e o funcional energia associado ao Problema (1.1) não é diferenciável e sim localmente Lipschitz, precisamos de uma versão do Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami para esse tipo de funcionais. Mas antes de estabelecer esse teorema apresentaremos um Lema de Deformação adequado. Para isso, vamos seguir os argumentos dos Lema 3.3 e 3.4 de [25] com algumas adaptações.

Teorema 3.9. *(Lema da deformação) Seja E um espaço de Banach e $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ funcional localmente lipschitziano e $a \in \mathbb{R}$. Definimos*

$$\Phi^a := \{u \in E; \Phi(u) \leq a\} \quad (2.15)$$

e

$$\beta(u) = \min\{\|\mathbf{z}\|_{E^*}; \mathbf{z} \in \partial\Phi(u)\}. \quad (2.16)$$

Se $d \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ são tais que

$$\beta(u)(\|u\|_E + 1) \geq 8\epsilon, \quad \forall u \in \Phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon]), \quad (2.17)$$

então existe um homeomorfismo $\eta : E \rightarrow E$ tal que

(i) $\eta(u) = u$ para todo $u \notin \Phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon])$;

(ii) $\eta(\Phi^{d+\epsilon}) \subset \Phi^{d-\epsilon}$;

(iii) $\Phi(\eta(u)) \leq \Phi(u)$, $\forall u \in E$.

Demonstração. Em primeiro lugar, provaremos que existe um campo vetorial V definido em $\Phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ satisfazendo

$$\langle w, V(u) \rangle_{E^*, E} > 4\epsilon, \quad \text{para cada } w \in \partial\Phi(u).$$

Na verdade, pelo item (7) da Proposição 2.25, para $u_0 \in \Phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon])$ existe um $w_0 \in \partial\Phi(u_0)$ tal que

$$\|w_0\|_{E^*} = \beta(u_0).$$

Como na prova de [25, Lema 3.3], pode-se provar que existe $v_0 \in E$ com $\|v_0\|_E = 1$ tal que, para cada $u_0 \in \Phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\langle w, v_0 \rangle > \frac{\|w_0\|_{E^*}}{2} \quad \text{para todo } w \in \partial\Phi(u), \|u - u_0\|_E < \delta_0. \quad (2.18)$$

Assim, usando (2.18) temos

$$\langle w, v_0 \rangle (\|u_0\|_E + 1) \geq \frac{\|w_0\|_{E^*} (\|u_0\|_E + 1)}{2} > 4\epsilon. \quad (2.19)$$

Além disso, note que o conjunto de bolas $B_{\delta_0}(u_0)$ quando varia o centro u_0 , cobre o conjunto $\Phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon])$, então por [55][Lema 39.2] existe um refinamento local $\{B(u_i, \delta_i)\}$. Seja $\rho_i(u)$ que denote a distância de u para o complemento de $B(u_i, \delta_i)$, isto é,

$$\rho_i(u) = \inf_{v \in B^c(u_i, \delta_i)} \|u - v\|_E.$$

Então ρ_i é Lipschitz contínua e se anula fora de $B(u_i, \delta_i)$.

Definimos

$$m_i(u) := \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j \in I} \rho_j(u)}$$

e seja

$$V(u) = \sum_i m_i(u) v_i (\|u_i\|_E + 1).$$

Então usando (2.19) e trocando u_0 por u_i , obtemos

$$\langle w, V(u) \rangle = \langle w, \sum_i m_i(u) v_i (\|u_i\|_E + 1) \rangle \quad (2.20)$$

$$= \sum_i m_i(u) (\|u_i\|_E + 1) \langle w, v_i \rangle \quad (2.21)$$

$$> 4\epsilon. \quad (2.22)$$

Agora, definimos

$$F(u) = g(u)V(u), \quad (2.23)$$

onde

$$g(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in \Phi^{-1}([d - \epsilon, d + \epsilon]), \\ 0 & \text{se } u \notin \Phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon]). \end{cases} \quad (2.24)$$

Considere o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(u, t) &= -F(\eta(u, t)), \\ \eta(u, 0) &= u. \end{cases} \quad (2.25)$$

Provaremos que Φ é uma função não crescente e que, dado $\epsilon > 0$ temos que

$$\Phi(u) - \Phi(\eta(u, t)) > 4\epsilon t.$$

Suponha primeiramente que $\eta(u, s) \in \Phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon])$ para todo $s \in [0, t)$. Para u fixo, seja $k(t) = \Phi(\eta(u, t))$ e note que k é uma função localmente Lipschitz. Assim, usando (2.23) e a Proposição 9 de [25], obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}k(t) &\leq \max \left\{ \left\langle w, \frac{d}{ds}\eta(u, s) \right\rangle; w \in \partial\Phi(\sigma(u, s)) \right\} \\ &= -\min \{ \langle w, F(\eta(u, s)) \rangle; w \in \partial\Phi(\sigma(u, s)) \} \\ &\leq \begin{cases} -4\epsilon & \text{se } \eta(u, s) \in \Phi^{-1}([d - \epsilon, d + \epsilon]) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Isto prova que a função Φ ao longo de $\eta(u, t)$ é não crescente e

$$\Phi(u) - \Phi(\eta(u, t)) = -\int_0^t k'(s)ds > 4\epsilon t,$$

sempre que $\eta(u, s) \in \Phi^{-1}([d - \epsilon, d + \epsilon])$ para todo $s \in [0, t)$.

Note que, para $u \notin \Phi^{-1}([d - 2\epsilon, d + 2\epsilon])$ o problema de Cauchy (2.25), implica que

$$\eta(u, t) = u \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Agora, observemos as trajetórias $\eta(u, t)$ que estão emanando de $u \in \Phi^{d+\epsilon}$. Seja $u \in \Phi^{d-\epsilon}$ é claro que $\eta(u, t) \in \Phi^{d-\epsilon}$. Na verdade, como $\eta(u, 0) = u$ e Φ é não crescente ao longo de $t \mapsto \eta(u, t)$ temos que

$$\Phi(\eta(u, t)) \leq \Phi(\eta(u, 0)) = \Phi(u) \leq d - \epsilon.$$

Assim só resta verificar para as u que satisfazem

$$d - \epsilon \leq \Phi(u) \leq d + \epsilon.$$

Afirmamos que tais trajetórias também estão abaixo do nível $d - \epsilon$, isto é, $\eta(u, t) \in \Phi^{d-\epsilon}$. De fato, caso contrário, temos $\eta(u, s) \in \Phi^{d+\epsilon} \setminus \Phi^{d-\epsilon}$ para cada $s \in [0, t)$. Usando (2.26) obtemos que

$$\Phi(\eta(u, t)) = \Phi(u) + \int_0^t \frac{d}{dt}\Phi(\eta(u, s))ds \quad (2.27)$$

$$\leq \Phi(u) - 4\epsilon t \quad (2.28)$$

$$\leq d + \epsilon - 4\epsilon t. \quad (2.29)$$

Em particular, se definimos $\bar{\eta}(u) = \eta(u, \frac{1}{2})$ então

$$\Phi(\bar{\eta}(u)) \leq d - \epsilon.$$

Além disso, note que a função $\bar{\eta}$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii), tendo em conta que a condição (iii) é uma consequência de (2.26), o que completa a prova. $\square$

Teorema 3.10. (*Teorema do Passo da Montanha*). *Seja E um espaço de Banach, $\Phi = I_0 - I$, onde I_0 é um funcional convexo localmente Lipschitz definido em E e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Suponha que o funcional Φ satisfaz as seguintes condições geométricas:*

$$(g_1) \text{ Existem } \rho > 0, \alpha > \Phi(0) \text{ tais que } \Phi|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha,$$

$$(g_2) \text{ } \Phi(e) < \Phi(0) \text{ para algum } e \in E \setminus \overline{B_\rho(0)}.$$

Então para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in E$ tal que

$$c - 2\epsilon \leq \Phi(x_\epsilon) \leq c + 2\epsilon \quad (2.30)$$

e $z_\epsilon \in E^*$ tal que $\|z_\epsilon\|_{E^*}(\|x_\epsilon\|_E + 1) \leq 8\epsilon$ e

$$I_0(y) - I_0(x_\epsilon) \geq I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon) + \langle z_\epsilon, y - x_\epsilon \rangle_{E^*, E}, \quad \forall y \in E, \quad (2.31)$$

onde

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)), \quad (2.32)$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, note que pelas condições (g_1) e (g_2) , temos que

$$c \geq \alpha,$$

onde c é definido como em (2.32). Suponha que exista $\epsilon > 0$, o qual, considerando que $\alpha > \Phi(0)$, pode ser assumido que satisfaz

$$c - 2\epsilon > \Phi(0),$$

tal que para todo $u \in \Phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ e $z \in E^*$ com

$$\|z\|_{E^*}(\|u\|_E + 1) \leq 8\epsilon, \quad (2.33)$$

existe $v_\epsilon \in E$ satisfazendo

$$I_0(v_\epsilon) - I_0(u) < I'(u)(v_\epsilon - u) + \langle z_\epsilon, v_\epsilon - u \rangle.$$

Então temos que

$$\beta(u)(\|u\|_E + 1) \geq 8\epsilon \quad \forall u \in \Phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]),$$

onde β é definido em (2.16). Assim pelo Lema 3.9 existe um homeomorfismo $\eta : E \rightarrow E$ tal que

$$(i) \quad \eta(u) = u \text{ for all } u \notin \Phi([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]);$$

$$(ii) \quad \eta(\Phi^{c+\epsilon}) \subset \Phi^{c-\epsilon};$$

$$(iii) \quad \Phi(\eta(u)) \leq \Phi(u) \quad \forall u \in E.$$

Por outro lado, pela definição de c , existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \leq c + \epsilon. \quad (2.34)$$

Definimos $\theta : [0, 1] \rightarrow E$ por

$$\theta(t) := \eta(\gamma(t)).$$

Note que,

$$\theta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0$$

e

$$\theta(1) = \eta(\gamma(1)) = \eta(e) = e,$$

desde que $\Phi(e) < \Phi(0) < c - 2\epsilon$. Logo $\theta \in \Gamma$. Assim, da definição de c , (2.34) e *ii*), segue-se que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi(\theta(t)) = \max_{t \in [0,1]} \Phi(\eta(\gamma(t))) \leq c - \epsilon,$$

o qual é uma contradição. $\square$

Observação 3.11. Como o espaço $BV(\mathbb{R}^N)$ não está imerso compactamente em nenhum espaço de Lebesgue, iremos trabalhar com o subespaço formado pelas funções radiais, qual é denotado por $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$, pois tal espaço está imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 < p < 1^*$ (veja [32]). Assim consideraremos o funcional energia Φ restrito ao espaço $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$, a qual denotamos por ela mesma.

3.3 Demonstração do Teorema 3.9

Primeiramente, para contornarmos a perda de compacidade das imersões de $BV(\mathbb{R}^N)$, vamos considerar a restrição de Φ a $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, lembre-se que por [32], $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ está imerso compactamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (1, 1^*)$.

Verificaremos agora que Φ satisfaz as condições do Teorema 3.10. Note que, por (f_2) e (f_3) , para cada $\eta > 0$, existe $A_\eta > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \eta + A_\eta |s|^{p-1} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (3.35)$$

e

$$|F(s)| \leq \eta |s| + \frac{A_\eta}{p} |s|^p \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

onde p é como no (f_3) . Então, (3.36) e as imersões contínuas de $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ implicam que

$$\Phi(u) = \|u\|_{BV} - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \quad (3.37)$$

$$\geq \|u\|_{BV} - \eta \int_{\mathbb{R}^N} |u| dx - A_\eta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \quad (3.38)$$

$$\geq \|u\|_{BV} - \eta C \|u\|_{BV} - \frac{A_\eta}{p} C \|u\|_{BV}^p \quad (3.39)$$

$$= (1 - \eta C) \|u\|_{BV} - \frac{A_\eta}{p} C \|u\|_{BV}^p, \quad (3.40)$$

onde $C > 0$.

Consideremos, $\eta > 0$ e $\|u\|_{BV} = \rho > 0$ tais que

$$\rho < \left[\frac{(1 - \eta C)p}{A_\eta C} \right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Assim, de (3.37), segue-se que

$$\Phi(u) \geq \alpha > 0,$$

para todo $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ com $\|u\|_{BV} = \rho$, onde $\alpha = (1 - \eta C)\rho + \frac{A_\eta}{p}C\rho^p > 0$. Então, temos verificado a condição (g_1) .

Para verificarmos a condição (g_2) , nós usaremos a condição (f_4) para provar que existe $u \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (F(u) - |u|) dx > 0.$$

De fato, definamos $u_R : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u_R(x) = \begin{cases} \delta, & \text{se } |x| \leq R, \\ \delta(R+1-r), & \text{se } r = |x| \in [R, R+1], \\ 0, & \text{se } |x| > R+1. \end{cases} \quad (3.41)$$

Note que, $u_R(x) = u_R(|x|)$ e $u_R \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \subset BV(\mathbb{R}^N)$, e se denotamos por B_R a bola centrada em 0 e raio $R > 0$, temos que

$$\int_{B_{R+1} \setminus B_R} (F(u_R) - |u_R|) dx \geq -\max_{|s| \leq \delta} |F(s) - |s|| |B_{R+1} \setminus B_R|.$$

Então de (f_4) , temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (F(u_R) - |u_R|) dx &= \int_{B_R} (F(u_R) - |u_R|) dx + \int_{B_{R+1} \setminus B_R} (F(u_R) - |u_R|) dx \\ &\geq (F(\delta) - \delta)|B_R| - \max_{|s| \leq \delta} |F(s) - |s|| |B_{R+1} \setminus B_R|. \end{aligned}$$

Em outros termos, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\int_{B_{R+1} \setminus B_R} (F(u_R) - |u_R|) dx \geq C_1 R^N - C_2 R^{N-1}.$$

Assim, para $R > 0$ suficientemente grande, temos que

$$\int_{B_{R+1} \setminus B_R} (F(u_R) - |u_R|) dx > 0.$$

Para $t > 0$, definimos

$$e_t := u_R \left(\frac{\cdot}{t} \right).$$

Note que, $e_t \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Na verdade, desde que, para $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com $\|\phi\|_\infty \leq 1$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} \phi(x) u_R \left(\frac{x}{t} \right) dx = t^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} \phi(tx) u_R(x) dx.$$

Então, tomando o supremo em ambos lados acima obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left| Du \left(\frac{\cdot}{t} \right) \right| &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} \phi(x) u_R \left(\frac{x}{t} \right) dx; \phi \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &= t^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} |Du_R| < \infty. \end{aligned}$$

Logo, segue-se do item *ii*) da Proposição 5.4, que $e_t \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Observe que,

$$\Phi(e_t) = t^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} |Du_R| - t^N \int_{\mathbb{R}^N} (F(u_R) - |u_R|) dx \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Assim, existe $t^* > 0$ tal que $e := e_{t^*} = u_R \left(\frac{\cdot}{t^*} \right)$ satisfaz

$$\Phi(e) < 0. \quad (3.42)$$

Além disso, podemos supor sem perda de generalidade que tal $t^* > 0$ é tal que $\|e\|_{BV} > \rho$.

Portanto o funcional Φ satisfaz as condições (g_1) e (g_2) do Teorema 3.10, e então existe uma sequência $(u_n) \subset BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $(z_n) \subset (BV(\mathbb{R}^N))^*$ tais que

$$\Phi(u_n) \rightarrow c, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty, \quad (3.43)$$

$$\|z_n\|_{BV^*} (\|u_n\|_{BV} + 1) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty, \quad (3.44)$$

e

$$\|v\|_{BV} - \|u_n\|_{BV} \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(v - u_n) dx + \langle z_n, v - u_n \rangle, \quad \forall v \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N), \quad (3.45)$$

onde $\|\cdot\|_{BV^*}$ denota a norma em $(BV(\mathbb{R}^N))^*$ e

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)), \quad (3.46)$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], BV_{rad}(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Considerando a identidade (2.3) e tomando $v = u_n + tu_n$ em (3.45), dividindo por t e fazendo $t \rightarrow 0^+$, e $t \rightarrow 0^-$ obtemos

$$\Phi'(u_n)u_n = \|u_n\|_{BV} - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx = \langle z_n, u_n \rangle = o_n(1). \quad (3.47)$$

Agora, provaremos que (u_n) é uma sequência limitada em $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Porém, como (3.47), (3.35) e o fato que $f(s) = 0$ se $s \leq 0$, implicam que

$$\|u_n\| = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n^+) u_n^+ dx + o_n(1) \quad (3.48)$$

$$\leq \eta \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+| dx + A_\eta \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^+|^p dx + o_n(1) \quad (3.49)$$

$$\leq \eta C \|u_n^+\|_{BV} + A_\eta C \|u_n^+\|_{BV}^p + o_n(1), \quad (3.50)$$

onde $u_n^+(x) = \max\{u_n(x), 0\}$, é suficiente verificar que (u_n^+) seja limitado em $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Suponha por contradição que $\|u_n^+\|_{BV} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Definimos

$$\hat{u}_n := \frac{u_n^+}{\|u_n^+\|_{BV}}.$$

Note que $(\hat{u}_n)$ é uma sequência limitada em $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\hat{u}_n\|_{BV} = 1$. Por outro lado, um dos seguintes casos acontece:

$$(1) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n| dx > 0,$$

$$(2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n| dx = 0.$$

Suponha que aconteça o caso (2). Seja $L > 1$, note que

$$\Phi \left(\frac{L}{\|u^+\|_{BV}} u_n^+ \right) = L - \int_{\mathbb{R}^N} F \left(\frac{L}{\|u_n^+\|_{BV}} u_n^+ \right) dx.$$

Dado $\eta > 0$, por (3.36) existe $A_\eta > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F \left(\frac{L}{\|u_n^+\|_{BV}} u_n^+ \right) dx \leq \eta L \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n| dx + A_\eta L^p \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n|^p dx, \quad (3.51)$$

onde p é como em (f_3) . Aplicando o Teorema 2.17 do Capítulo 1, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_n|^p dx = 0. \quad (3.52)$$

Assim, por (3.51) e (3.52), segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F \left(\frac{L}{\|u_n^+\|_{BV}} u_n^+ \right) dx \leq \eta C L + o_n(1), \quad (3.53)$$

onde $C > 0$ é tal que $\|\hat{u}_n\|_1 \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, para $\eta = \frac{1}{2C}$ obtemos

$$\Phi \left(\frac{L}{\|u^+\|_{BV}} u_n^+ \right) \geq \frac{L}{2} - o_n(1).$$

Desde que, $\|u_n^+\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, podemos assumir que

$$\frac{L}{\|u_n^+\|_{BV}} \in (0, 1) \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Assim,

$$\max_{t \in [0,1]} \Phi(tu_n^+) \geq \Phi \left(\frac{L}{\|u_n^+\|_{BV}} u_n^+ \right) \geq \frac{L}{2} - o_n(1). \quad (3.54)$$

Seja $t_n \in (0, 1]$ tal que

$$\Phi(t_n u_n^+) = \max_{t \in [0,1]} \Phi(tu_n^+). \quad (3.55)$$

Note que, $t_n \neq 1$ pois, se $t_n = 1$ então de (3.55) temos que

$$\Phi(u_n^+) \geq \frac{L}{2} - o_n(1). \quad (3.56)$$

Por outro lado, por (3.43) e desde que $f(s) = 0$ se $s \leq 0$, temos

$$\Phi(u_n^+) \leq \|u_n\|_{BV} - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx = \Phi(u_n) \rightarrow c \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.57)$$

Assim de (3.56) e (3.57), para $L > 1$ suficientemente grande temos uma contradição. Consequentemente $t_n \in (0, 1)$.

Agora, provaremos que

$$\Phi'(t_n u_n^+) t_n u_n^+ = 0. \quad (3.58)$$

De fato, por (2.3)

$$\begin{aligned} \Phi'(t_n u_n^+) t_n u_n^+ &= \|t_n u_n^+\|_{BV} - \int_{\Omega} f(t_n u_n^+) t_n u_n^+ dx \\ &= t_n \left(\|u_n^+\|_{BV} - \int_{\Omega} f(t_n u_n^+) u_n^+ dx \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Note que,

$$0 = \frac{d}{dt} \Phi(t_n u_n^+) = \|u_n^+\|_{BV} - \int_{\Omega} f(t_n u_n^+) u_n^+ dx. \quad (3.60)$$

Assim, de (3.60) em (3.59) obtemos (3.58).

Usando (3.59) e (3.58) temos

$$\begin{aligned} \Phi(t_n u_n^+) &= \Phi(t_n u_n^+) - \Phi'(t_n u_n^+) t_n u_n^+ \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (f(t_n u_n^+) t_n u_n^+ - F(t_n u_n^+)) dx \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n^+) u_n^+ - F(u_n^+)) dx \\ &= K(\Phi(u_n) - \Phi'(u_n) u_n) = Kc + o_n(1), \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde K é dado em (f_5) . De (3.54) e (3.61) obtemos

$$\frac{L}{2} - o_n(1) \leq \Phi(t_n u_n^+) \leq Kc + o_n(1)$$

e para $L > 0$ suficientemente grande, tem-se a uma contradição.

Agora, suponha que o caso (1) aconteça. Se (y_n) é tal que $|y_n| \rightarrow \infty$ e $\int_{B_1(y_n)} |\hat{u}_n| dx > \frac{\delta}{2}$ então

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)| dx > \frac{\delta}{2}. \quad (3.62)$$

Note que, a sequência $(\hat{u}_n(\cdot + y_n))$ é limitada em $BV(\mathbb{R}^N)$ e assim também em $BV(B_1(0))$. Logo, pelas imersões compactas nos espaços de Lebesgue, temos

$$\hat{u}_n(\cdot + y_n) \rightarrow \hat{u} \quad \text{em} \quad L^p(B_1(0)),$$

para todo $1 \leq p < 1^*$. Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.62), obtemos

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u}| dx \geq \frac{\delta}{2}. \quad (3.63)$$

Assim, podemos inferir que $\hat{u} \neq 0$. Logo, existe $\Omega \subset B_1(0)$ tal que $|\Omega| > 0$ e

$$0 < |\hat{u}(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}(x + y_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n^+(x + y_n)|}{\|u_n^+\|_{BV}}, \quad \text{q.t.p. em } x \in \Omega.$$

Então, pela última desigualdade e o fato que $\|u_n\|_{BV} \rightarrow \infty$, temos

$$u_n^+(x + y_n) \rightarrow \infty, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, de (f_5) e o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n^+)u_n^+ - F(u_n^+))dx \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n^+(x+y_n))u_n^+(x+y_n) - F(u_n^+(x+y_n)))dx \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n \rightarrow \infty} (f(u_n^+(x+y_n))u_n^+(x+y_n) - F(u_n^+(x+y_n)))dx \\ & = \infty. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Por outro lado, por (3.43) e (3.47), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n^+)u_n^+ - F(u_n^+))dx = \Phi(u_n) - \Phi'(u_n)u_n = c + o_n(1). \quad (3.65)$$

Assim de (3.64) e (3.65) obtemos uma contradição no caso (1), sob a suposição que $|y_n| \rightarrow \infty$.

Resta provar o caso no qual (y_n) é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$. Então, seja $R > 1$ tal que $|y_n| \leq R$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\frac{\delta}{2} < \int_{B_1(y_n)} |\hat{u}_n|dx \leq \int_{B_{2R}(0)} |\hat{u}_n(x+y_n)|dx. \quad (3.66)$$

Desde que $(\hat{u}_n)$ é limitada em $BV(\mathbb{R}^N)$ (e também em $BV(B_{2R}(0))$), existe $\hat{u} \in BV(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\hat{u}_n(\cdot + y_n) \rightarrow \hat{u}, \quad \text{em } L^1(B_{2R}(0)).$$

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.66), obtemos

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_{2R}(0)} |\hat{u}|dx.$$

Consequentemente, como no caso anterior, existe Ω tal que $|\Omega| > 0$ e

$$0 < |\hat{u}(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}(x+y_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n^+(x+y_n)|}{\|u_n^+\|_{BV}}, \quad \text{q.t.p. em } x \in \Omega.$$

Então, tal como em (3.65) e (3.64) temos uma contradição. Assim (u_n^+) é limitada em $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e, por (3.48), a sequência toda também o é.

Logo, as imersões compactas de $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$, segue que existe $u \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$, tal que, a menos de subsequência

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo } 1 < q < 1^*. \quad (3.67)$$

Agora, vamos aplicar a convergência acima em

$$\|v\|_{BV} - \|u_n\|_{BV} \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(v - u_n)dx + \langle z_n, v - u_n \rangle, \quad \forall v \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N). \quad (3.68)$$

No primeiro termo acima, pela convergência (3.67) e a semi-continuidade inferior da norma em $BV(\mathbb{R}^N)$ com respeito à convergência em L^q , temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|v\|_{BV} - \|u_n\|_{BV}) \leq \|v\| - \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV} \leq \|v\|_{BV} - \|u\|_{BV}. \quad (3.69)$$

Quanto ao segundo termo, por (3.47) é suficiente provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx. \quad (3.70)$$

Denotemos por B_R^c o complemento da bola com centro em 0 e radio $R > 0$. Pelas condições (f_2) e (f_3) , dado $\eta > 0$ existe $A_\eta > 0$ tal que

$$\int_{B_R^c} f(u_n)u_n dx \leq \eta \int_{B_R^c} |u_n| dx + A_\eta \int_{B_R^c} |u_n|^p dx. \quad (3.71)$$

onde p é como em (f_3) . Note que, por (3.67), $u_n \rightarrow u$ em $L^p(B_R^c)$. Então,

$$\int_{B_R^c} |u_n|^p dx < \int_{B_R^c} |u|^p dx + \frac{\eta}{A_\eta} \quad \text{sempre que } n \geq n_0$$

e escolhemos $R > 0$ de maneira que

$$\int_{B_R^c} |u|^p dx < \frac{\eta}{A_\eta}.$$

Assim,

$$\int_{B_R^c} |u_n|^p dx < 2\frac{\eta}{A_\eta}. \quad (3.72)$$

Note que, a limitação de (u_n) em $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e as imersões contínuas desse espaço em $L^1(\mathbb{R}^N)$, implicam que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{B_R^c} |u_n| dx \leq C \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.73)$$

Logo, de (3.72) e (3.73) em (3.71) temos que

$$\int_{B_R^c} f(u_n)u_n dx \leq (C + 2)\eta \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} f(u_n)u_n dx = 0. \quad (3.74)$$

Por outro lado, como $u_n \rightarrow u$ em $L^q(B_R)$ para todo $1 \leq q < 1^*$, pelo Teorema da Convergencia Dominada obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} f(u_n)u_n dx = \int_{B_R} f(u)u dx. \quad (3.75)$$

Assim, de (3.74) e (3.75) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx = \int_{B_R} f(u)u dx \quad (3.76)$$

e fazendo $R \rightarrow \infty$ obtemos (3.70).

Consequentemente, por (3.69) e (3.70) em (3.68), quando $n \rightarrow \infty$ temos que

$$\|v\|_{BV} - \|u\|_{BV} \geq \int_{\Omega} f(u)(v - u) dx, \quad \forall v \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N), \quad (3.77)$$

ou seja, $u \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico de Φ . Logo, pela Proposição 3.8, u é uma solução do Problema (1.1). Mais ainda, pelo Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais, temos que u satisfaz (3.77) para todo $v \in BV(\mathbb{R}^N)$.

Agora, provaremos que a solução u é não trivial.

Tomando $v = u + tu$ em (3.77), para $t > 0$, temos

$$\|u\|_{BV} \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx$$

e para $-1 < t < 0$, tem-se

$$\|u\|_{BV} \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx.$$

Assim, das duas últimas estimativas anteriores obtemos

$$\|u\|_{BV} = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx. \quad (3.78)$$

Consequentemente, de (3.47), (3.70) e (3.78), temos

$$\|u\|_{BV} = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV}. \quad (3.79)$$

Usando os mesmos argumentos para mostrar (3.70), pode-se provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx. \quad (3.80)$$

Assim, de (3.79) e (3.80) obtemos

$$0 < c = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) \quad (3.81)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{BV} - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx \quad (3.82)$$

$$= \|u\|_{BV} - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \quad (3.83)$$

$$= \Phi(u), \quad (3.84)$$

o que implica que u é uma solução não trivial para o problema (1.1).

Agora vamos mostrar que $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ é uma solução não negativa do Problema (1.1). De fato, escreva $u = u^+ + u^-$, onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$. Tomando $v = u^+$ em (3.77), obtemos

$$\|u^+\|_{BV} - \|u\|_{BV} \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u^-)(-u^-) dx \geq 0,$$

o qual implica que

$$u = u^+.$$

3.4 Identidade de Pohozaev

Nesta seção provaremos o Teorema 3.3. Em primeiro lugar definimos o associado conjunto de Pohozaev por

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in BV_{rad} \setminus \{0\} ; (N-1) \int_{\mathbb{R}^N} |Du| = N \int_{\mathbb{R}^N} (F(u) - |u|) dx \right\}. \quad (4.85)$$

Demonstração. Seja $w \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathbf{z} \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{div} \mathbf{z} \in L^N(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Corolário 2.33 do Capítulo 1, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} w \operatorname{div} \mathbf{z} dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{z} \cdot \nabla w dx. \quad (4.86)$$

Note que

$$\nabla(x \cdot \nabla u) = \nabla u + D^2 u \cdot x, \quad (4.87)$$

onde

$$(D^2 u \cdot x)_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} x_i, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Além disso, observe que pelo Teorema de Stampacchia, $\nabla(x \cdot \nabla u) = 0$ no conjunto $\{x \in \Omega; x \cdot \nabla u = 0\}$ (ver Lema 7.7 [39]). Assim, por (4.87),

$$(D^2 u \cdot x)_j = 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \{x \in \Omega; |\nabla u| = 0\}. \quad (4.88)$$

Tomando como função teste $w = x \cdot \nabla u$ em (4.86), usando (4.87) e do fato que u satisfaz a Equação de Euler-Lagrange (2.11), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} x \cdot \nabla u \operatorname{div} \mathbf{z} dx = - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx - \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{z} \cdot (D^2 u \cdot x) dx. \quad (4.89)$$

Entanto, por integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} N \int_{B_R} |\nabla u| dx &= \int_{\partial B_R} |\nabla u| x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{B_R} x \cdot \nabla(|\nabla u|) dx \\ &= \int_{\partial B_R} |\nabla u| x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{B_R} (D^2 u \cdot x) \cdot \mathbf{z} dx, \end{aligned} \quad (4.90)$$

onde ν denota um vetor unitário normal exterior a ∂B_R e na última integral foi substituído $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ por $\mathbf{z}$, desde que podemos assumir que $|\nabla u| > 0$.

Agora, nosso objetivo é passar o limite quando $R \rightarrow +\infty$ na igualdade (4.90). Obviamente, cada integral dessa igualdade sobre a bola B_R converge para uma integral sobre $\mathbb{R}^N$ quando $R \rightarrow +\infty$. Porém, a integral sobre a esfera ∂B_R converge para 0 quando $R \rightarrow +\infty$. De fato, suponha por contradição que isso não ocorra, então

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} |\nabla u| x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} > 0.$$

Assim, existe $N_0 > 0$ tal que

$$\inf_{R > N_0} \int_{\partial B_R} |\nabla u| x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} > 0. \quad (4.91)$$

Mas isso por sua vez implica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx &= \int_0^{+\infty} \int_{\partial B_R} |\nabla u| d\mathcal{H}^{N-1} dR \\ &\geq \int_{N_0}^{+\infty} \int_{\partial B_R} |\nabla u| \frac{x \cdot \nu}{R} d\mathcal{H}^{N-1} dR \\ &\geq \inf_{R > N_0} \int_{\partial B_R} |\nabla u| x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} \int_{N_0}^{+\infty} \frac{1}{R} dR = +\infty, \end{aligned}$$

o que contradiz ao fato que $|\nabla u| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} |\nabla u| x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} = 0.$$

Logo, fazendo $R \rightarrow \infty$ em (4.90), obtemos

$$N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx = - \int_{\mathbb{R}^N} (D^2 u \cdot x) \cdot \mathbf{z} dx. \quad (4.92)$$

Usando (4.92) em (4.89), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} x \cdot \nabla u \operatorname{div} \mathbf{z} dx = (N-1) \int_{\mathbb{R}^N} |Du|. \quad (4.93)$$

Por outro lado multiplicando por $x \cdot \nabla u$ a última identidade da Equação de Euler-Lagrange (2.11), e integrando sobre B_R temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \operatorname{div} \mathbf{z}(x \cdot \nabla u) dx &= - \int_{B_R} (f(u) - \gamma)(x \cdot \nabla u) dx \\ &= - \int_{B_R \cap [u > 0]} (f(u) - 1)(x \cdot \nabla u) dx - \int_{B_R \cap [u = 0]} (f(u) - \gamma)(x \cdot \nabla u) dx \\ &\quad - \int_{B_R \cap [u < 0]} (x \cdot \nabla u) dx \\ &= - \int_{B_R \cap [u > 0]} f(u)(x \cdot \nabla u) dx + \int_{B_R \cap [u > 0]} x \cdot \nabla u dx - \int_{B_R \cap [u < 0]} (x \cdot \nabla u) dx \\ &= - \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i \frac{\partial F(u)}{\partial x_i} dx + \int_{B_R \cap [u > 0]} x \cdot \nabla u dx - \int_{B_R \cap [u < 0]} (x \cdot \nabla u) dx \\ &= - \int_{\partial(B_R \cap [u > 0])} F(u) x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} + N \int_{B_R \cap [u > 0]} F(u) dx - N \int_{B_R \cap [u > 0]} u dx \\ &\quad + \int_{\partial(B_R \cap [u > 0])} u x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1} + N \int_{B_R \cap [u < 0]} u dx - \int_{\partial(B_R \cap [u < 0])} u x \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

onde $[u > 0] := \{x \in \mathbb{R}^N ; u(x) > 0 \text{ q.t.p.}\}$ e $[u < 0] := \{x \in \mathbb{R}^N ; u(x) < 0 \text{ q.t.p.}\}$. Logo, fazendo $R \rightarrow \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} \mathbf{z}(x \cdot \nabla u) dx = N \int_{\mathbb{R}^N} (F(u) - |u|) dx. \quad (4.94)$$

Finalmente, de (4.93) e (4.94) temos que $u \in \mathcal{P}$. □

Observação 3.12. • Para $f(s) = |s|^{q-2}s$ o Problema (1.1), pela identidade de Pohozaev acima, não possui solução se

$$q \geq \frac{N}{N-1},$$

tal como foi observado no clássico trabalho de Berestycki e Lions [20] para problemas envolvendo o operador laplaciano. De fato, se u satisfaz (4.85) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du| = 1^* \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|u|^q}{q} - |u| \right) dx. \quad (4.95)$$

Por outro lado, se u satisfaz (2.11) tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^2 = - \int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{div} \mathbf{z} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u (|u|^{q-2} u - \gamma) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^q - |u|) \, dx. \quad (4.96)$$

Assim, de (4.95) e (4.96) temos que

$$\left(\frac{1^*}{q} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx = (1^* - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |u| \, dx > 0,$$

o que, por sua vez, implica que

$$q < 1^*.$$

- Quando o domínio for limitado, em [29] e [52], os autores provam que as soluções com tal tipo de domínio satisfazem uma identidade de Pohozaev mesmo que

$$q = \frac{N}{N-1},$$

Vale ressaltar que, a segunda observação acima só acontece quando é estudado problemas envolvendo o operador 1-laplaciano. Assim, o resultado previamente provado junto a la primeira observação acima nos indica que quando o domínio é $\mathbb{R}^N$, a identidade de Pohozaev ainda pode ser utilizado para mostrar resultados de não existência de solução para problemas que envolvam tal operador.

4 Um problema anisotrópico envolvendo o operador 1–laplaciano com pesos ilimitados

4.1 O problema anisotrópico

Neste capítulo abordaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \frac{Du}{|Du|} \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde Ω é um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) com fronteira Lipschitz $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$ e os dois parâmetros a, b satisfazem $0 < a < N - 1$ e $a < b < a + 1$.

Consideramos as seguintes condições sobre f :

(f_1) $f \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$;

(f_2) $f(0) = 0$;

(f_3) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $1 < q < \frac{N}{N-(1+a-b)}$ tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2 s^{q-1}, \quad \forall s \in [0, +\infty);$$

(f_4) Seja $F(t) = \int_0^t f(s) ds$. Existe $\mu > 1$ tal que

$$0 < \mu F(s) \leq f(s)s, \quad \forall s \geq s_0;$$

(f_5) f é uma função crescente em $[0, +\infty)$.

Observação 4.1. Pela condição (f_4) existem d_1, d_2 tais que

$$F(s) \geq d_1 s^\mu - d_2,$$

para todo $s > 0$. Além disso, usando novamente (f_4), obtemos

$$f(s) \geq \mu(d_1 s^{\mu-1} - d_2 s^{-1}) \quad \text{para todo } s \geq s_0$$

e assim, como $\mu > 1$, segue-se que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = +\infty.$$

Observação 4.2. Desde que, estamos procurando soluções não negativas, estenderemos o domínio de f para $\mathbb{R}$ definindo $f(s) = 0$ se $s < 0$. Assim, $F(s) = 0$ para todo $s < 0$.

Nossos resultados principais são os seguintes:

Teorema 4.3. *Sejam $0 < a < N - 1$, $0 < \theta \leq 1$ e $a < b < a + 1$. Então existe uma constante $\mathfrak{C}_{CKN} > 0$ tal que a seguinte desigualdade estabelece-se*

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\alpha r_{\theta}}} |u|^{r_{\theta}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\theta}}} \leq \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right)^{\theta} \left(\int_{\Omega} |u| dx \right)^{1-\theta}, \quad (1.2)$$

para todo $u \in BV_a(\Omega)$, onde $\alpha = \theta b$ e $r_{\theta} = \frac{N}{N-\theta(1+a-b)}$.

Teorema 4.4. *Suponha que f satisfaz as condições $(f_1) - (f_4)$. Então existe uma solução não trivial para o Problema (1.1). Esta solução é uma solução de menor energia se ainda exigirmos a condição (f_5) .*

4.2 Resultados preliminares

Nesta seção iremos apresentar uma certa classe de espaços de Sobolev com peso e definiremos um espaço de funções de variação limitada com peso. Além disso, usando algumas versões da desigualdade de Caffarelli-Khon-Nirenberg (ver [23]) mostraremos que tais espaços estão imersos contínua e compactamente em alguns espaços de Lebesgue com peso.

Nós nos referimos a [40, 37, 47] como fontes para um estudo mais extenso sobre os espaços de Sobolev com peso.

Para começar estabeleceremos a classe de pesos que englobam os pesos envolvidos com os espaços mencionados previamente.

Definição 4.5. Seja w , uma função não negativa localmente integrável em $\mathbb{R}^N$. Dizemos que w pertence à classe de Muckenhoupt A_1 se existe uma constante $C_w > 0$ tal que

$$\int_B w dx \leq C_w \operatorname{ess\,inf}_B w \quad \text{para toda bola } B \subset \mathbb{R}^N, \quad (2.3)$$

onde $\int_B w dx = \frac{1}{|B|} \int_B w dx$. Além disso, diz-se que w pertence à classe de Muckenhoupt A_p para $p > 1$ se

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^N} \left(\int_B w dx \right) \left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}} dx \right)^{p-1} = C_{p,w} < \infty.$$

Exemplo 4.6. Seja $p \geq 1$. A função $w : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$w(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha}} \quad \text{com} \quad N(p-1) < \alpha < N,$$

é uma função localmente integrável que pertence à classe de Muckenhoupt A_p .

Observação 4.7. Pode-se provar que, para todo $p > 1$ tem-se $A_1 \subset A_p$.

Agora, definiremos os espaços de Lebesgue com peso, onde tal peso pertencerá à classe de Muckenhoupt A_p .

Definição 4.8. Seja $p \geq 1$ e $w \in A_p$. Denotaremos por $L^p(\Omega, w)$ ao espaço de todas as funções mensuráveis u em Ω com

$$\|u\|_{L^p(\Omega, w)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dw \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Daqui por diante, quando a função w for da forma $\frac{1}{|x|^\alpha}$, com α como no Exemplo 4.6, denotaremos $L_\alpha^q(\Omega)$ em vez de $L^q(\Omega, |x|^{-\alpha})$ para todo $q \geq 1$.

Seja a função $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} k \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde k é tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1$. Então, para cada $\epsilon > 0$ as mollifiers são dadas por:

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^N} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \quad (2.5)$$

Assim, estabelecemos o seguinte resultado.

Lema 4.9. *Sejam ρ_ϵ , como em (2.5), e $f \in L^p(\mathbb{R}^N, w)$. Então*

$$\rho_\epsilon * f \rightarrow f \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N, w), \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração. (Ver [45]). □

Observação 4.10. Tomando $p = 1$ no Exemplo 4.6, temos para $0 < \alpha < N$, que a função $w(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ pertence à classe de Muckenhoupt A_1 e assim, existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$\int_{B(x, r)} \frac{1}{|y|^\alpha} dy \leq C_\alpha \inf_{y \in B(x, r)} \frac{1}{|y|^\alpha}, \quad (2.6)$$

para todo $B(x, r) \subset \mathbb{R}^N$. Mas isso implica que,

$$(\rho_\epsilon * w)(x) = \frac{1}{\epsilon^N} \int_{B(x, \epsilon)} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \frac{1}{|y|^\alpha} dy \leq \frac{\|\rho\|_\infty |B(x, 1)|}{|B(x, \epsilon)|} \int_{B(x, \epsilon)} \frac{1}{|y|^\alpha} dy \leq \frac{C}{|x|^\alpha},$$

para todo $x \in \Omega$ e alguma constante $C > 0$.

4.2.1 Espaços de Sobolev com peso

Nesta subseção iremos apresentar um tipo de espaço de Sobolev com peso, onde o peso pertencerá a alguma classe de Muckenhoupt A_p .

Definição 4.11. Seja $p \geq 1$ e $0 < a < \frac{N-p}{p}$. O espaço de Sobolev com peso, denotado por $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$, é o espaço das funções de $L_{ap}^p(\Omega)$ cujo gradiente distribucional ∇u pertence a $L_{ap}^p(\Omega)$, i.e.,

$$W^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) = \{u \in L_{ap}^p(\Omega); \nabla u \in L_{ap}^p(\Omega)\}.$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|'_{1,ap} := \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.7)$$

Observação 4.12. Para $p > 1$, no livro [40], denotam o espaço de Sobolev com peso $w = \frac{1}{|x|^{-ap}}$ por $H^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e o definem como o fecho de $\{\varphi \in C^\infty(\Omega); \|\varphi\|'_{1,ap} < \infty\}$ com respeito à norma (2.7). Assim definido $H^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ é provado que ele satisfaz uma série de propriedades análogas aos espaços de Sobolev clássicos, $W^{1,p}(\Omega)$, como por exemplo a reflexividade e fato de ser um reticulado. Mais ainda, no trabalho [45] é provado que esse espaço é igual ao espaço de Sobolev com peso $W^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ e assim, esse último espaço satisfaz todas as propriedades do $H^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$ dadas no texto [40].

Note que, na definição prévia para $p > 1$ temos, pelo Exemplo 4.6, que a função peso $w(x) = \frac{1}{|x|^{-ap}}$ pertence à classe de Muckenhoupt A_p . Assim, pode-se estabelecer a seguinte desigualdade de Poincaré (ver [40, pag. 9]).

Teorema 4.13. *Seja $p > 1$ e $0 < a < \frac{N-p}{p}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi|^p \frac{1}{|x|^{ap}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \frac{1}{|x|^{ap}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.8)$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Para $p > 1$ definimos

$$\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|'_{1,ap}},$$

onde $\|\cdot\|'_{1,ap}$ é a norma (2.7).

Note que, a desigualdade de Poincaré (2.8) implica que a norma $\|\cdot\|'_{1,ap}$ é equivalente a

$$\|u\|_{1,ap} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \frac{1}{|x|^{ap}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para todo } u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, da Observação 4.12 segue-se que $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$.

Em adiante consideraremos $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_{1,ap}$.

Observação 4.14. Considerando o fato dado na Observação 4.12, a saber que $H^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$, o leitor interessado pode obter mais informações sobre os espaços de Sobolev com peso no livro [40].

Agora, mostraremos que os elementos do espaço $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ satisfazem uma versão da desigualdade de Caffarelli-Khon-Nirenberg. Esse resultado, por sua vez, implicará que o espaço $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ está imerso contínua e compactamente em espaços de Lebesgue com peso, $L_{ap}^q(\Omega)$ para q adequados. Antes, porém, iremos apresentar a clássica desigualdade de Caffarelli-Khon-Nirenberg com parâmetros particulares (ver [23]).

Lema 4.15. *Seja $p \geq 1$ e considere os parâmetros satisfazendo $0 < a < \frac{N-p}{p}$, $0 < \theta \leq 1$ e $a < b < a + 1$. Então existe uma constante $\mathfrak{C}_{CKN} > 0$ tal que a seguinte desigualdade estabelece-se para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\alpha r_{\theta p}}} |\varphi|^{r_{\theta p}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\theta p}}} \leq \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{ap}} |D\varphi|^p dx \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi| dx \right)^{1-\theta}, \quad (2.9)$$

onde $\alpha = \theta b$ e $r_{\theta p} = \frac{Np}{\theta N - p[\theta(1+a-b) - N(1-\theta)]}$.

Teorema 4.16. *Sejam $p > 1$ e a, b, θ, α e $r_{\theta p}$ como do Lema 4.15. Então existe uma constante $\mathfrak{C}_{CKN} > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\alpha r_{\theta p}}} |u|^{r_{\theta p}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\theta p}}} \leq \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |Du|^p dx \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\Omega} |u| dx \right)^{1-\theta}, \quad (2.10)$$

para todo $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$. Definimos a extensão de u para $\mathbb{R}^N$ por

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Note que, pela Proposição 4.18 de [21] tem-se que $\rho_\epsilon * \tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, desde que ambas componentes dessa convolução têm suporte compacto em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$\rho_\epsilon * \tilde{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo, tomando $\varphi = \rho_\epsilon * \tilde{u}$ em (2.9) tem-se

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\alpha r_{\theta p}}} |\rho_\epsilon * \tilde{u}|^{r_{\theta p}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\theta p}}} \leq \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{ap}} |D(\rho_\epsilon * \tilde{u})|^p dx \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\epsilon * \tilde{u}| dx \right)^{1-\theta}, \quad (2.11)$$

onde $\alpha = \theta b$ e $r_{\theta p} = \frac{Np}{\theta N - p[\theta(1+a-b) - N(1-\theta)]}$.

Agora, passaremos o limite na desigualdade (2.11) quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Desde que $\tilde{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema 4.22 de [21], temos que

$$\rho_\epsilon * \tilde{u} \rightarrow \tilde{u} \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}^N), \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Mas isso implica, a menos de subsequência, que

$$\rho_\epsilon * \tilde{u}(x) \rightarrow \tilde{u}(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N, \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Consequentemente, do Lema de Fatou segue-se que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\alpha r_{\theta p}}} |\tilde{u}|^{r_{\theta p}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\theta p}}} \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\alpha r_{\theta p}}} |\rho_\epsilon * \tilde{u}|^{r_{\theta p}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\theta p}}}. \quad (2.13)$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\epsilon * \tilde{u}) = \rho_\epsilon * \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$, onde $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de v com respeito a x_i , do Lema 4.9 temos que

$$\rho_\epsilon * \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \quad \text{em } L_{ap}^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{ap}} |\rho_\epsilon * D\tilde{u}|^p dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{ap}} |D\tilde{u}|^p dx \quad \text{em } L_{ap}^p(\mathbb{R}^N), \quad (2.14)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Portanto, de (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14) em (2.11), quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\alpha r_{\theta p}}} |\tilde{u}|^{r_{\theta p}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\theta p}}} \leq \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{ap}} |D\tilde{u}|^p dx \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}| dx \right)^{1-\theta}. \quad (2.15)$$

Como $\tilde{u}$ é uma extensão de u segue nosso resultado. $\square$

No que segue, denotaremos $C_\Omega = \sup\{|x| : x \in \Omega\}$, o qual é finito desde que Ω é limitado.

Teorema 4.17. *Sejam $0 < a < \frac{N-p}{p}$, $a < b < a+1$ e $r_p := r_{1p} = \frac{Np}{N-p(1+a-b)}$. Então a imersão*

$$\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_b^q(\Omega)$$

é continua para todo $q \in [1, r_p]$, e compacta para todo $q \in [1, r_p)$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$. Primeiro mostraremos que a imersão acima é contínua. Dividimos essa prova em três casos.

Para $q = 1$, aplicando as desigualdades de Hölder e (2.10) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u| dx &\leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{br_p}} |u|^{r_p} dx \right)^{\frac{1}{r_p}} |\Omega|^{\frac{r_p-1}{r_p}} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{r_p-1}{r_p}} \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (|\Omega| + 1) \mathfrak{C}_{CKN} \|u\|_{1,ap}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para o caso $q \in (1, r_p)$, usando a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^q dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{b-bq}} \frac{1}{|x|^{bq}} |u|^q dx \leq C_\Omega^{bq-b} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{bq}} |u|^q dx \\ &\leq C_\Omega^{bq-b} |\Omega|^{\frac{r_p-q}{r_p}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{br_p}} |u|^{r_p} dx \right)^{\frac{q}{r_p}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &\leq C_\Omega^{bq-b} |\Omega|^{\frac{r_p-q}{r_p}} \mathfrak{C}_{CKN}^q \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_\Omega^{bq-b} |\Omega|^{\frac{r_p-q}{r_p}} \mathfrak{C}_{CKN}^q \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |Du|^p dx \right)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Consequentemente,

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq (C_\Omega + 1)^b (|\Omega| + 1) \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O caso $q = r_p$ segue de um argumento similar ao anterior. Portanto, em qualquer caso, existe $C > 0$ tal que

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ e $q \in [1, r_p]$, ou seja, a imersão $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_b^q(\Omega)$ é contínua.

Agora, mostraremos que a imersão $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_b^q(\Omega)$ é compacta para todo $q \in [1, r_p]$. De fato, seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, desde que $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ e estando $W^{1,p}(\Omega)$ imerso compactamente em $L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$, a menos de subsequência, temos que

$$u_n \rightarrow u_0 \quad \text{em} \quad L^q(\Omega) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

para todo $q \in [1, \frac{Np}{N-p})$. Mas isso implica, a menos de subsequência, que

$$u_n(x) \rightarrow u_0(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

Consequentemente, do Teorema 1.32 de [40] (onde considere $H_0^{1,p}(\Omega) = \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$), segue-se que $u_0 \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$. Sendo assim, resta provar que $u_n \rightarrow u_0$ em $L_b^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, r_p]$. Consideremos dois casos:

(1) Para $q \in (1, r_p)$, note que, existem $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tais que

$$\frac{1}{\theta_1} < q < \frac{Np}{\theta_2 N - p[\theta_2(1+a-b) - N(1-\theta_2)]}.$$

Então, se escolhemos $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}$ tem-se

$$\frac{1}{\theta} < q < \frac{Np}{\theta N - p[\theta(1+a-b) - N(1-\theta)]} = r_{\theta p}.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder e (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n - u|^q dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{b-\theta bq}} \frac{1}{|x|^{\theta bq}} |u_n - u|^q dx \\ &\leq C_{\Omega}^{\theta bq-b} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\theta bq}} |u_n - u|^q dx \\ &\leq C_{\Omega}^{\theta bq-b} |\Omega|^{\frac{r_{\theta p}-q}{r_{\theta p}}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\theta br_{\theta p}}} |u_n - u|^{r_{\theta p}} dx \right)^{\frac{q}{r_{\theta p}}} \\ &\leq C_{\Omega}^{\theta bq-b} |\Omega|^{\frac{r_{\theta p}-q}{r_{\theta p}}} \mathfrak{C}_{CKN}^q \|u_n - u\|_{1,ap}^{\theta q} \left(\int_{\Omega} |u_n - u| dx \right)^{(1-\theta)q} \end{aligned}$$

e desde que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, temos que $u_n \rightarrow u$ em $L^q(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$.

(2) Para $q = 1$, observe que, existe $0 < \bar{\theta} < 1$ tal que $\bar{\theta}(1+a) > b$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n - u| dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{b-\bar{\theta}b}} \frac{1}{|x|^{\bar{\theta}b}} |u_n - u| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^{b-\bar{\theta}b}} \right)^{\frac{r_{\bar{\theta}p}}{r_{\bar{\theta}p}-1}} \right)^{\frac{r_{\bar{\theta}p}-1}{r_{\bar{\theta}p}}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\bar{\theta}br_{\bar{\theta}p}}} |u_n - u|^{r_{\bar{\theta}p}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\bar{\theta}p}}}. \end{aligned}$$

Como $\bar{\theta}(a+1) > b$ implica que $b(1-\bar{\theta})\frac{r_{\bar{\theta}p}}{r_{\bar{\theta}p}-1} < N$, temos

$$A = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^{b-\bar{\theta}b}} \right)^{\frac{r_{\bar{\theta}p}}{r_{\bar{\theta}p}-1}} dx < \infty.$$

Assim, pelo Teorema 4.16, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n - u| dx &\leq A \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\bar{\theta}br_{\bar{\theta}p}}} |u_n - u|^{r_{\bar{\theta}p}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\bar{\theta}p}}} \\ &\leq A \mathfrak{C}_{CKN} \|u_n - u\|_{1,ap}^{\theta} \left(\int_{\Omega} |u_n - u| dx \right)^{1-\bar{\theta}} \end{aligned}$$

e como $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, tem-se $u_n \rightarrow u$ em $L_b^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, de (1) e (2) temos

$$u_n \rightarrow u_0 \quad \text{em } L_b^q(\Omega) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo $q \in [1, r_p)$. □

4.2.2 Um espaço de funções de variação limitada com peso

Nesta subseção, seguindo o trabalho de [17] apresentaremos um dos espaços de funções de variação limitada com peso $w(x) := \frac{1}{|x|^a}$, $0 < a < N-1$, tal peso pertence à classe de Mouckenhaupt A_1 . Além disso, serão estabelecidos alguns resultados nesse espaço.

Definimos

$$\text{var}_a u(\Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx; \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\varphi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} < +\infty.$$

Note que, pelo Teorema de Representação de Riesz, o valor $\text{var}_a u(\Omega)$ define uma medida de Radon (ver Seção 1.8 de [30]).

Como

$$w(x) = \frac{1}{|x|^a}, \quad 0 < a < N-1$$

é contínua em $\Omega \setminus \{0\}$, por [17, Theorem 4.1] temos a seguinte equivalência.

Teorema 4.18. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\text{var}_a u(\Omega) < \infty$;
- (b) $u \in BV(\Omega)$ e $\frac{1}{|x|^a} \in L^1(\Omega, |Du|)$.

Além disso,

$$\text{var}_a u(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du|. \quad (2.20)$$

Definição 4.19. O espaço das funções de variação limitada com peso $w(x) = \frac{1}{|x|^a}$, denotado por $BV_a(\Omega)$, é o espaço das funções $u \in L^1(\Omega)$ tais que $|\cdot|^{-a}|Du|$ é uma medida de Radon, i.e.,

$$BV_a(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega); \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| < +\infty \right\}.$$

O espaço $BV_a(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{BV_a(\Omega)} := \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx.$$

Observação 4.20. Desde que Ω é um conjunto limitado, podemos concluir que

$$BV_a(\Omega) \subset BV(\Omega).$$

Mas isso implica que o operador traço $\gamma_0 : BV(\Omega) \rightarrow L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)$ (como do Teorema 2.13), está bem definido em $BV_a(\Omega)$, e assim cada $u \in BV_a(\Omega)$ tem seu traço sobre $\partial\Omega$.

Proposição 4.21. A norma $\|\cdot\|_{BV_a(\Omega)}$ é equivalente a

$$\|u\|_{BV_a(\Omega),1} = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (2.21)$$

Demonstração. Usando a Proposição 2.15 temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u| dx &\leq C \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right) \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right). \end{aligned}$$

Então

$$\|u\|_{BV_a(\Omega)} \leq (C' + 1) \|u\|_{BV_a(\Omega),1}. \quad (2.22)$$

Por outro lado, do Teorema 2.13 temos que o operador traço γ_0 é linear e contínuo e assim, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \leq C \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx \right).$$

Logo, se considerarmos $M_a = \max_{x \in \partial\Omega} \left\{ \frac{1}{|x|^a} \right\}$, tem-se que

$$\|u\|_{BV_a(\Omega),1} \leq (M_a + 1) \|u\|_{BV_a(\Omega)}. \quad (2.23)$$

Consequentemente, de (2.22) e (2.23) temos que as normas $\|\cdot\|_{BV_a(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{BV_a(\Omega),1}$ são equivalentes. $\square$

De agora em diante, consideraremos o espaço $BV_a(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_{BV_a(\Omega),1}$.

Observação 4.22. Considerando a identidade dada no Teorema 4.18 e seguindo os argumentos da prova de Lema 2.6, pode-se provar que o funcional abaixo é semi-contínuo inferiormente com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$,

$$BV_a(\Omega) \ni u \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du|.$$

Além disso, se considerarmos $\tilde{u}$ e $\tilde{\Omega}$ como as extensões de u e Ω dadas no Exemplo 2.14, o seguinte funcional:

$$BV_a(\tilde{\Omega}) \ni \tilde{u} \mapsto \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{|x|^a} |D\tilde{u}|$$

também é semi-contínuo inferiormente com respeito à convergência de $L^1(\tilde{\Omega})$. Mais ainda, desde que $D\tilde{u} = Du|_{\Omega} + \gamma_0(u)\nu\mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega}$, temos que o funcional

$$BV_a(\Omega) \ni u \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \quad (2.24)$$

também o é.

Outro funcional que também é semicontínuo inferiormente com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$ é dada no seguinte resultado.

Lema 4.23. *Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. O funcional abaixo é semi-contínuo inferiormente com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$,*

$$BV_a(\Omega) \ni u \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi |Du|. \quad (2.25)$$

Demonstração. Sejam $u \in BV_a(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Então, começaremos mostrando a seguinte identidade:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varphi \Phi) dx : \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\}. \quad (2.26)$$

De fato, pelo Teorema 3.3 de [17], tem-se que existe uma medida de Radon μ sobre Ω e uma função μ -mensurável $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- 1) $|\sigma| = 1$ μ -q.t.p. em Ω ,
- 2) $\int_{\Omega} u \operatorname{div} \Phi dx = - \int_{\Omega} \Phi \cdot \sigma |x|^a d\mu$ para todo $\Phi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Além disso, como $BV_a(\Omega) \subset BV(\Omega)$ e assim $u \in BV(\Omega)$, segue-se do Teorema 1 de [30], que existe uma função $|Du|$ -mensurável $\bar{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que

- i) $|\bar{\sigma}| = 1$ $|Du|$ -q.t.p. em Ω ,
- ii) $\int_{\Omega} u \operatorname{div} \Phi dx = - \int_{\Omega} \Phi \cdot \bar{\sigma} |Du|$ para todo $\Phi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Note que, 2) e ii) implicam que

$$\int_{\Omega} \Phi \cdot \sigma |x|^a d\mu = \int_{\Omega} \Phi \cdot \bar{\sigma} |Du| \quad \text{para todo } \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N). \quad (2.27)$$

Seja $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$. Assim, usando 2) e (2.27) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| &= \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \Phi dx; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega} \Phi \cdot \sigma |x|^a d\mu; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi \Phi \cdot \sigma |x|^a d\mu + \int_{\Omega} (1 - \varphi) \Phi \cdot \sigma |x|^a d\mu; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi \Phi \cdot \bar{\sigma} |Du|; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ \int_{\Omega} (1 - \varphi) \Phi \cdot \bar{\sigma} |Du|; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} \\ &\leq \int_{\Omega} \varphi \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\Omega} (1 - \varphi) \frac{1}{|x|^a} |Du| = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du|. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Consequentemente, todas as desigualdades prévias são na verdade igualdades.

Note que, por (ii) temos

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varphi \Phi) dx = - \int_{\Omega} \varphi \Phi \cdot \bar{\sigma} |Du|.$$

Então,

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varphi \Phi) dx; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a}, \right\} \leq \int_{\Omega} \varphi \frac{1}{|x|^a} |Du|. \quad (2.29)$$

Por outro lado, de (2.28) segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi \frac{1}{|x|^a} |Du| &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| - \int_{\Omega} (1 - \varphi) \frac{1}{|x|^a} |Du| \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi \Phi \cdot \bar{\sigma} |Du|; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ \int_{\Omega} (1 - \varphi) \Phi \cdot \bar{\sigma} |Du|; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} \\ &\quad - \int_{\Omega} (1 - \varphi) \frac{1}{|x|^a} |Du| \\ &\leq \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi \Phi \cdot \bar{\sigma} |Du|; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$= \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varphi \Phi) dx; \Phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\Phi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a} \right\}. \quad (2.31)$$

Assim, das desigualdades (2.29) e (2.30), temos provado (2.26) para todo $\varphi \in C^1(\Omega)$ com $0 \leq \varphi \leq 1$. Para $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$ é suficiente considerar $\frac{\varphi}{\|\varphi\|_{\infty}}$ em lugar de φ , e assim concluir em (2.26).

Uma vez conferida a identidade (2.26), a semi-continuidade do funcional $u \mapsto \int_{\Omega} \varphi \frac{1}{|x|^a} |Du|$ com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$, decorre dos argumentos da prova do Lema 2.6.

□

4.3 Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em $BV_a(\Omega)$

Nesta seção apresentaremos uma versão da clássica desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (ver [23]) que será satisfeita pelos elementos do espaço $BV_a(\Omega)$. Mais precisamente, provaremos o Teorema 4.3. Consequentemente, provaremos que $BV_a(\Omega)$ está imerso em certos espaços de Lebesgue com peso.

Demonstração do Teorema 4.3 Seja $u \in BV_a(\Omega)$. Considere a extensão de u , denotada por $\tilde{u}$ e definida como

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Note que, $D\tilde{u} = Du|_{\Omega} + \gamma_0(u) \nu \mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega}$, onde ν é o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Ainda, $\tilde{u} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ e assim, pela Proposição 4.20 de [21] tem-se que

$$\tilde{u} * \rho_{\epsilon} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Logo, aplicando o Lema 4.15 para $\varphi = \tilde{u} * \rho_\epsilon$ e $p = 1$ ($r_\theta = r_{\theta 1} = \frac{N}{\theta N - [\theta(1+a-b) - N(1-\theta)]}$), temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\alpha r_\theta}} |\tilde{u} * \rho_\epsilon|^{r_\theta} dx \right)^{\frac{1}{r_\theta}} \leq \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^a} |\nabla(\tilde{u} * \rho_\epsilon)| dx \right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u} * \rho_\epsilon| dx \right)^{1-\theta}. \quad (3.32)$$

Agora, tomaremos o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ em cada termo acima.

Por [6][Proposição 3.2(c)] tem-se $\nabla(\tilde{u} * \rho_\epsilon) = D\tilde{u} * \rho_\epsilon$ em $\mathbb{R}^N$. Logo, usando o Teorema de Fubini obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^a} |\nabla(\tilde{u} * \rho_\epsilon)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^a} * \rho_\epsilon \right) |D\tilde{u}|.$$

Por outro lado, da Observação 4.10 segue que existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|\cdot|^a} * \rho_\epsilon \right)(x) \leq \frac{C}{|x|^a},$$

para todo $x \in \Omega$. Além disso, como o peso $w(x) = \frac{1}{|x|^a}$ é contínuo tem-se que

$$\frac{1}{|x|^a} * \rho_\epsilon \rightarrow \frac{1}{|x|^a} \quad \text{pontualmente em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^a} * \rho_\epsilon \right) |D(\tilde{u})| = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^a} |D(\tilde{u})| = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (3.33)$$

Desde que $\tilde{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\rho_\epsilon * \tilde{u} \rightarrow \tilde{u} \text{ em } L^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.34)$$

Mas isso implica, a menos de subsequência, que

$$\rho_\epsilon * \tilde{u}(x) \rightarrow \tilde{u}(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Logo, usando o Lema de Fatou temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\alpha r_\theta}} |u|^{r_\theta} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\alpha r_\theta}} |\tilde{u}|^{r_\theta} dx \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\alpha r_\theta}} |\tilde{u} * \rho_\epsilon|^{r_\theta} dx. \quad (3.35)$$

Portanto, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.32) de (3.33), (3.34) e (3.35) temos que

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\alpha r_\theta}} |u|^{r_\theta} dx \right)^{\frac{1}{r_\theta}} \leq \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right)^\theta \left(\int_{\Omega} |u| dx \right)^{1-\theta}, \quad (3.36)$$

para todo $u \in BV_a(\Omega)$.

Lembrando que $C_\Omega = \sup\{|x| : x \in \Omega\}$ é finito, estabelecemos as seguintes imersões do espaço $BV_a(\Omega)$.

Teorema 4.24. *Sejam $a < b < a + 1$ e $r = \frac{N}{N-(1+a-b)}$. Então a imersão abaixo é contínua*

$$BV_a(\Omega) \hookrightarrow L_b^q(\Omega) \quad \text{para todo } q \in [1, r].$$

Demonstração. Seja $u \in BV_a(\Omega)$. Consideramos três casos:

(1) Para $q = 1$. Pelas desigualdades de Hölder e (3.36) segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u| dx &\leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{br}} |u|^r \right)^{\frac{1}{r}} |\Omega|^{\frac{r-1}{r}} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{r-1}{r}} \mathfrak{C}_{CKN} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

(2) Para $q \in (1, r)$. Usando novamente a desigualdades de Hölder e (3.36) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^q dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{b-bq}} \frac{1}{|x|^{bq}} |u|^q dx \leq C_{\Omega}^{bq-b} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{bq}} |u|^q dx \\ &\leq C_{\Omega}^{bq-b} |\Omega|^{\frac{r-q}{r}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{br}} |u|^r dx \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\leq C_{\Omega}^{bq-b} |\Omega|^{\frac{r-q}{r}} \mathfrak{C}_{CKN}^q \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right)^q. \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3) O caso $q = r$ decorre de um raciocínio análogo ao anterior.

Portanto, de (1), (2) e (3), para $u \in BV_a(\Omega)$ temos que existe $C > 0$ tal que

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right),$$

para todo $q \in [1, r]$. □

Teorema 4.25. *Seja $a < b < a + 1$ e $r = \frac{N}{N-(1+a-b)}$. Então para todo q , $1 \leq q < r$ a imersão*

$$BV_a(\Omega) \hookrightarrow L_b^q(\Omega)$$

é compacta.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência limitada em $BV_a(\Omega)$ e como $BV_a(\Omega) \subset BV(\Omega)$, (u_n) é também limitada em $BV(\Omega)$. Então, pelas imersões compactas de $BV(\Omega)$, existe $u \in BV(\Omega)$ e a menos de subsequência, temos que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^1(\Omega) \quad \text{quandon } n \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ tal que $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{|x|^a}$. Então, pela convergência acima temos que

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \varphi dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du_n|.$$

Logo, tomando o supremo em ambos lados, pelo Teorema 4.18 temos que $u \in BV_a(\Omega)$.

Suponha que $1 < q < r$. Então, existem $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tais que

$$\frac{1}{\theta_1} < q < \frac{N}{N - \theta_2(1 + a - b) + N(1 - \theta_2)}.$$

Escolhendo $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}$ temos

$$\frac{1}{\theta} < q < \frac{N}{N - \theta(1 + a - b) + N(1 - \theta)}.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder e (3.36), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n - u|^q dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{b-\theta bq}} \frac{1}{|x|^{\theta bq}} |u_n - u|^q dx \\ &\leq C_{\Omega}^{\theta bq-b} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\theta bq}} |u_n - u|^q dx \\ &\leq C_{\Omega}^{\theta bq-b} |\Omega|^{\frac{r_{\theta}-q}{r_{\theta}}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\theta br_{\theta}}} |u_n - u|^{r_{\theta}} dx \right)^{\frac{q}{r_{\theta}}} \\ &\leq C_{\Omega}^{\theta bq-b} |\Omega|^{\frac{r_{\theta}-q}{r_{\theta}}} \mathfrak{C}_{CKN}^q \|u_n - u\|_{BV_a(\Omega),1}^{q\theta} \left(\int_{\Omega} |u_n - u| dx \right)^{(1-\theta)q} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Aqui usamos que (u_n) é limitado em $BV_a(\Omega)$ e (3.39).

Agora, seja $q = 1$ e escolha $\bar{\theta} \in (0, 1)$ tal que $\bar{\theta}(a+1) > b$. Então, usando a desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n - u| dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{b-\bar{\theta}b}} \frac{1}{|x|^{\bar{\theta}b}} |u_n - u| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^{b-\bar{\theta}b}} \right)^{\frac{r_{\bar{\theta}}}{r_{\bar{\theta}}-1}} dx \right)^{\frac{r_{\bar{\theta}}-1}{r_{\bar{\theta}}}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\bar{\theta}br_{\bar{\theta}}}} |u_n - u|^{r_{\bar{\theta}}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\bar{\theta}}}}. \end{aligned}$$

Note que, a escolha de $\bar{\theta}$ implica que $b(1 - \bar{\theta}) \frac{r_{\bar{\theta}}}{r_{\bar{\theta}}-1} < N$ e, assim

$$A = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^{b-\bar{\theta}b}} \right)^{\frac{r_{\bar{\theta}}}{r_{\bar{\theta}}-1}} dx < \infty.$$

Logo, da desigualdade (3.36) e de (3.39), obtem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n - u| dx &\leq A \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{\bar{\theta}br_{\bar{\theta}}}} |u_n - u|^{r_{\bar{\theta}}} dx \right)^{\frac{1}{r_{\bar{\theta}}}} \\ &\leq A \mathfrak{C}_{CKN} \|u_n - u\|_{BV_a(\Omega),1}^{\theta} \left(\int_{\Omega} |u_n - u| dx \right)^{1-\bar{\theta}} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, de (3.40) e (3.41) temos

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L_b^q(\Omega) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty,$$

para todo $q \in [1, r)$.

□

4.4 Extensão da Teoria de Anzellotti

Nesta seção, estenderemos a teoria de Anzellotti que foi dada no Capítulo 1 para um cenário que envolve campos vetoriais ilimitados.

4.4.1 Teoria de Anzellotti com pesos

Consideremos os pesos da forma $w(x) = |x|^{-a}$ com $0 < a < N - 1$, embora possa-se aplicar a pesos mais gerais.

Definimos

$$\mathcal{DM}_a(\Omega) := \left\{ \mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N); \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Note que, se $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$ então $\operatorname{div} \mathbf{z} \in L^1(\Omega)$. Na verdade, para isso, é suficiente mostrar que z satisfaz a seguinte identidade

$$- \int_{\Omega} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi |x|^a \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) - \int_{\Omega} \varphi |x|^a \mathbf{z} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|x|^a} \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.42)$$

De fato, seja $p > 1$ tal que $0 < a < \frac{N-p}{p}$. Então

$$\frac{1}{|x|^{ap}} \in A_p,$$

onde A_p é a classe de Muckenhoupt (ver Definição 4.5). Logo, o espaço de Sobolev com peso $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap})$ está bem definido. Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \varphi |x|^a & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.43)$$

Note que,

$$\rho_\epsilon * f \rightarrow \varphi |x|^a \quad \text{uniformemente em } \Omega, \quad (4.44)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$ e, desde que $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap})$ tem-se

$$\nabla(\rho_\epsilon * f) = \rho_\epsilon * \nabla f, \quad (4.45)$$

onde ρ_ϵ é a função mollifier definida em (2.5). Como $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ temos

$$\operatorname{supp}(\rho_\epsilon * f) \subset \overline{B_\epsilon(0)} + \operatorname{supp}(f) \subset \Omega,$$

para $\epsilon < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f), \partial\Omega)$. Além disso, pelo Lema 4.9 temos que

$$\rho_\epsilon * \nabla f \rightarrow \nabla f \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N, |x|^{-ap}). \quad (4.46)$$

Assim, por (4.44), (4.45) e (4.46) temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \varphi |x|^a \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_{\epsilon} * f \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx \\
 &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla (\rho_{\epsilon} * f) dx \\
 &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \rho_{\epsilon} * \nabla f dx \\
 &= - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla f dx \\
 &= - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla (\varphi |x|^a) dx.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Usando (4.47), temos que

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \varphi |x|^a \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx - \int_{\Omega} \varphi |x|^a \mathbf{z} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|x|^a} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla (\varphi |x|^a) dx - \int_{\Omega} \varphi |x|^a \mathbf{z} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|x|^a} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{z} \cdot \left(\frac{1}{|x|^a} \nabla (\varphi |x|^a) + \varphi |x|^a \nabla \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = |x|^a \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx - |x|^a \mathbf{z} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Consequentemente $\operatorname{div} \mathbf{z} \in L^1(\Omega)$ e assim, a teoria de Anzellotti nos fornece o traço fraco $[\mathbf{z}, \nu]$ sobre $\partial\Omega$ e a medida de Radon $(\mathbf{z}, Du)$, para todo $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Ao longo desta seção consideraremos a função $T_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{se } |s| \leq k, \\ k \frac{s}{|s|} & \text{se } |s| > k. \end{cases} \tag{4.48}$$

Lema 4.26. *Seja $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$. Então $\operatorname{div} \left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z} \right) \in L^1(\Omega)$ e*

$$\operatorname{div} \left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z} \right) = T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \operatorname{div} \mathbf{z} + \mathbf{z} \cdot \nabla T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.49}$$

Demonstração. Segue dos mesmos argumentos usados para provar que $\operatorname{div} \mathbf{z} \in L^1(\Omega)$. $\square$

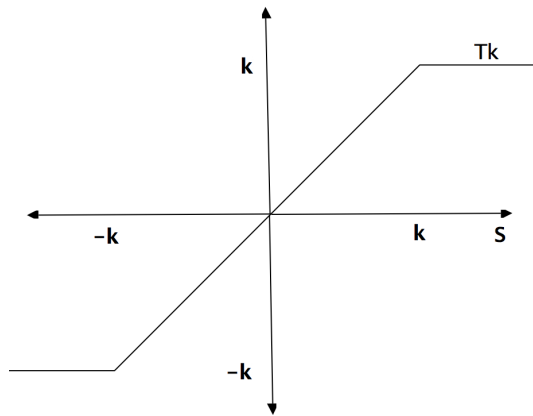
Lema 4.27. *Para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$ temos que*

$$\left[\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, \nu \right] = \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{ q.t.p. em } \partial\Omega.$$

Demonstração. Seja $k \geq 1$. Pela Proposição 2 de [24], temos

$$\left[T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z}, \nu \right] = T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) [\mathbf{z}, \nu] \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{ q.t.p. em } \partial\Omega.$$

Logo, é suficiente considerar $k \geq \max_{x \in \partial\Omega} \left\{ \frac{1}{|x|^a} \right\}$ para obter nosso resultado. $\square$

Figura 4.1: Gráfico da função T_k 

Fonte: Elaborado pelo autor

4.4.2 A medida $\left(\frac{1}{|\cdot|^a} \mathbf{z}, Du\right)$ e o traço fraco $\left[\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, \nu\right]$

Ao longo desta subseção, consideraremos $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$ e $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Definimos o funcional $\left(T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \mathbf{z}, Du\right) : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\left\langle \left(T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \mathbf{z}, Du\right), \varphi \right\rangle = - \int_{\Omega} u \varphi \operatorname{div} \left(T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \mathbf{z}\right) dx - \int_{\Omega} u T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx, \quad (4.50)$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Note que, como $\operatorname{div} \left(T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \mathbf{z}\right) \in L^1(\Omega)$ (ver Lema 4.49), o funcional (4.50) está bem definido.

Desde que $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$, temos que $\operatorname{div} \mathbf{z} \in L^1(\Omega)$ e assim, o par $(\mathbf{z}, Du)$ é uma medida de Radon, como foi concluído na subseção anterior. Sendo assim, definamos o funcional $T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right)(\mathbf{z}, Du) : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\left\langle T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right)(\mathbf{z}, Du), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \varphi(\mathbf{z}, Du). \quad (4.51)$$

Os funcionais (4.50) e (4.51) são iguais. De fato, se denotarmos $w(x) = T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right)$ e considerarmos a convolução $\rho_\epsilon * (\varphi w)$, então

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon * (\varphi w) &\rightarrow \varphi w \quad \text{uniformemente em } \Omega \quad \text{e} \\ \nabla(\rho_\epsilon * (\varphi w)) &\rightarrow \nabla(\varphi w) \quad \text{em } L^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$. Consequentemente, usando (4.49) temos que

$$\begin{aligned}
 \left\langle T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) (\mathbf{z}, Du), \varphi \right\rangle &= \int_{\Omega} T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \varphi (\mathbf{z}, Du) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_{\epsilon} * (\varphi w) (\mathbf{z}, Du) \\
 &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u (\rho_{\epsilon} * (\varphi w)) \operatorname{div} \mathbf{z} \, dx - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u \mathbf{z} \cdot \nabla (\rho_{\epsilon} * (\varphi w)) \, dx \\
 &= - \int_{\Omega} u \varphi T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \operatorname{div} \mathbf{z} \, dx - \int_{\Omega} u \mathbf{z} \cdot \nabla \left(\varphi T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \right) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} u \varphi \operatorname{div} \left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z} \right) \, dx - \int_{\Omega} u T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx \\
 &= \left\langle \left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z}, Du \right), \varphi \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Além disso, pode-se provar que o funcional $\left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z}, Du \right)$ é uma medida de Radon e assim, $T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) (\mathbf{z}, Du)$ também o é. Mais ainda, pode-se demonstrar que essas duas medidas são iguais, isto é,

$$\left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z}, Du \right) = T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) (\mathbf{z}, Du) \quad \text{como medidas de Radon}, \tag{4.53}$$

para todo $k \geq 0$. □

Lema 4.28. *Sejam $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$ e $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então,*

$$\left| \int_B \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) \right| \leq \int_B \frac{1}{|x|^a} |(\mathbf{z}, Du)| \leq \|\mathbf{z}\|_{\infty} \int_B \frac{1}{|x|^a} |Du| < \infty, \tag{4.54}$$

para todo conjunto de Borel $B \subset \Omega$. Além disso, $\frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du)$ é uma medida de Radon.

Demonstração. Desde que

$$\left| \int_B (\mathbf{z}, Du) \right| \leq \int_B |(\mathbf{z}, Du)| \leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_B |Du|.$$

para todo conjunto de Borel $B \subset \Omega$, segue-se que

$$\left| \int_B \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) \right| \leq \int_B \frac{1}{|x|^a} |(\mathbf{z}, Du)| \leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_B \frac{1}{|x|^a} |Du|,$$

para todo conjunto de Borel $B \subset \Omega$, e como $\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| < \infty$, tem-se que

$$\frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du)$$

é uma medida de Radon em Ω . □

Definição 4.29. *Seja $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$ e $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Definimos o funcional $\left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du \right) : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\left\langle \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du \right), \varphi \right\rangle = - \int_{\Omega} u \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} u \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx,$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Lema 4.30. Para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$ e $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, temos que

$$\left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du \right) = \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) \quad \text{como medidas de Radon.}$$

Demonstração. Primeiro, definimos o funcional $\frac{1}{|x|^a}(\mathbf{z}, Du) : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\left\langle \frac{1}{|x|^a}(\mathbf{z}, Du), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} \varphi \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du), \quad (4.55)$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Note que, esse funcional está bem definido pois, pelo Lema 4.28, $\frac{1}{|x|^a}(\mathbf{z}, Du)$ é uma media de Radon.

Por uma das identidades dadas em (4.52) temos que

$$\int_{\Omega} T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \varphi(\mathbf{z}, Du) = - \int_{\Omega} u \varphi \operatorname{div} \left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z} \right) dx - \int_{\Omega} u T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx. \quad (4.56)$$

Logo, usando o Teorema da Convergência Dominada, pode-se provar que (4.56) converge para a identidade abaixo quando $k \rightarrow \infty$,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi(\mathbf{z}, Du) = - \int_{\Omega} u \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx - \int_{\Omega} u \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx.$$

Consequentemente, da Definição 4.29 temos que

$$\left\langle \frac{1}{|x|^a}(\mathbf{z}, Du), \varphi \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du \right), \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4.57)$$

Mas isso implica, pelo Teorema da Representação de Riesz, que

$$\left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du \right) = \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) \quad \text{como medidas de Radon.}$$

□

Teorema 4.31. Sejam $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_a(\Omega)$ e $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então estabelece-se

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] u d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (4.58)$$

Demonstração. Desde que $\operatorname{div} \left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z} \right) \in L^1(\Omega)$ e $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, podemos aplicar a identidade de Green (3.22) do Capítulo 1, para estabelecer que

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \left(T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z} \right) dx + \int_{\Omega} T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) (\mathbf{z}, Du) = \int_{\partial\Omega} T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) [\mathbf{z}, \nu] u d\mathcal{H}^{N-1}, \quad (4.59)$$

para todo $k > 0$, onde usamos $\left[T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) \mathbf{z}, \nu \right] = T_k \left(\frac{1}{|x|^a} \right) [\mathbf{z}, \nu]$ (ver Proposição 2 de [24]) e (4.53).

Como $x \mapsto \frac{1}{|x|^a}$ é uma função limitada em $\partial\Omega$. Então para k suficientemente grande $T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) = \frac{1}{|x|^a}$. Assim,

$$\int_{\partial\Omega} T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) [\mathbf{z}, \nu] u \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] u \, \mathcal{H}^{N-1}, \quad (4.60)$$

para k suficientemente grande.

Por outro lado, segue-se, da teoria de Anzellotti, que existe uma função $|Du|$ -mensurável, $\theta(\mathbf{z}, Du, x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_B (\mathbf{z}, Du) = \int_B \theta(\mathbf{z}, Du, x) |Du| \quad \text{para todo boreliano } B \subset \Omega, \quad (4.61)$$

$$\|\theta(\mathbf{z}, Du, x)\|_{L^\infty(\Omega, |Du|)} \leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (4.62)$$

Isso, por sua vez, implica que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) (\mathbf{z}, Du) &= \int_{\Omega} T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \theta(\mathbf{z}, Du, x) |Du| \quad \text{e} \\ \left\| T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \theta(\mathbf{z}, Du, x) \right\|_{L^\infty(\Omega, |Du|)} &\leq \frac{\|\mathbf{z}\|_{L^\infty(\Omega)}}{|x|^a}. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \theta(\mathbf{z}, Du, x) |Du| = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \theta(\mathbf{z}, Du, x) |Du|. \quad (4.63)$$

Considerando a identidade (4.49), pode-se provar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u \operatorname{div} \left(T_k\left(\frac{1}{|x|^a}\right) \mathbf{z} \right) dx = \int_{\Omega} u \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx. \quad (4.64)$$

Portanto, fazendo $k \rightarrow \infty$ em (4.59), por (4.60), (4.63) e (4.64), obtemos (4.58). $\square$

Observação 4.32. Note que, pelos Lemas 4.27 e 4.30, a identidade de Green (4.58) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du \right) = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, \nu \right] u \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

4.5 Conceito de solução para o Problema (1.1)

Tal como no capítulo anterior, o argumento $\frac{Du}{|Du|}$ não está bem definido quando $Du = 0$. Por isso, apresentamos uma definição precisa de solução para o Problema (1.1), da seguinte maneira:

Definição 4.33. Diz-se que $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma solução do Problema (1.1) se existir um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ com $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e tal que

- (1) $-\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u), \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega),$
- (2) $\left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du \right) = \frac{1}{|x|^a} |Du| \quad \text{como medidas de Radon em } \Omega,$
- (3) $[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u) \quad \text{sobre } \partial\Omega.$

No que segue, apresentamos uma caracterização variacional das soluções do Problema (1.1). Sendo assim, começamos com o seguinte resultado, cuja prova no caso sem peso pode-se encontrar em [9, Proposition 2].

Proposição 4.34. *Para $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a) u é uma solução para o problema (1.1);
- (b) Existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$,

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u), \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u)(v - u) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Dv) - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} v[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} - \|u\|_{BV(\Omega),1}, \quad (5.65)$$

para todo $v \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Seja $u, v \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e u solução de (1.1). Claramente a primeira identidade em (b) decorre da Definição 4.33. Para mostrar a segunda identidade, basta aplicarmos a fórmula de Green (4.58) deste capítulo para $v - u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e usar as identidades da Definição 4.33.

(b) $\Rightarrow$ (a) Tomando $v = u$ em (5.65) obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} u[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (5.66)$$

Desde que, $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e $\|[\mathbf{z}, \nu]\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|\mathbf{z}\|_\infty$ tem-se

$$-\frac{1}{|x|^a} u[\mathbf{z}, \nu] \leq \frac{1}{|x|^a} |u|. \quad (5.67)$$

Assim, aplicando duas vezes (5.67) em (5.66) obtemos

$$\left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du \right) = \frac{1}{|x|^a} |Du| \quad \text{como medidas de Radon.} \quad (5.68)$$

Note que, por (5.68) em (5.66) obtém-se que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} = - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} u[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1},$$

ou seja,

$$[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u) \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (5.69)$$

Portanto, da primeira identidade no item (b), (5.68) e (5.69) temos que (b) $\Rightarrow$ (a). $\square$

Corolário 4.35. *Se u é uma solução para o problema (1.1), então estabelece-se*

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u)(v - u) \leq \|v\|_{BV(\Omega),1} - \|u\|_{BV(\Omega),1}, \quad (5.70)$$

para todo $v \in BV_a(\Omega)$.

Demonstração. Note que, se $v \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, pela Proposição 4.34 e o Lema 4.28 consegue-se provar (5.70).

Seja $v \in BV_a(\Omega)$. Então, tomando $T_k(v) \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e usando novamente a Proposição 4.34 e o Lema 4.28 obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u)(T_k(v) - u) \leq \|T_k(v)\|_{BV(\Omega),1} - \|u\|_{BV(\Omega),1} \leq \|v\|_{BV(\Omega),1} - \|u\|_{BV(\Omega),1}. \quad (5.71)$$

Por outro lado, segue-se, do crescimento subcrítico da função f e pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u)(T_k(v) - u) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u)(v - u). \quad (5.72)$$

Assim, passando o limite em (5.71) quando $k \rightarrow \infty$ e considerando (5.72), obtemos nosso resultado. $\square$

Para caracterizar a norma do sub-diferencial, poderíamos tentar adaptar a prova de [9, Section 5] ao espaço $BV_a(\Omega)$. No entanto, para nossos propósitos, o seguinte resultado será suficiente.

Proposição 4.36. *Seja $h \in L^1(\Omega)$ e assuma que o problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \frac{Du}{|Du|} \right) = h & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.73)$$

tenha uma solução variação limitada, onde por uma solução para o problema (5.73) queremos dizer que u satisfaz a Definição 4.33 com a substituição óbvia de $\frac{1}{|x|^b} f(u)$ por h . Se $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $h \in \partial\|u\|_{BV(\Omega),1}$, então u é uma solução para o problema (5.73).

Demonstração. Seja $w \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ uma solução para o problema (5.73). Então existe um campo vetorial $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|z\|_\infty \leq 1$,

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} z \right) = h \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (5.74)$$

$$\left(\frac{1}{|x|^a} z, Dw \right) = \frac{1}{|x|^a} |Dw| \quad \text{e} \quad [z, \nu] \in \operatorname{sign}(-w) \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Assim, tomando $w - u$ como função teste na Fórmula de Green (4.58) deste capítulo e usando as relações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} h(w - u) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (z, Dw) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (z, Du) - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} w[z, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} u[z, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \|w\|_{BV(\Omega),1} - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (z, Du) + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} u[z, \nu] d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Por outro lado, a hipótese $h \in \partial\|u\|_{BV(\Omega),1}$ implica que

$$\int_{\Omega} h(w - u) dx \leq \|w\|_{BV(\Omega),1} - \|u\|_{BV(\Omega),1}. \quad (5.76)$$

Logo, usando (5.76) em (5.75), temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} u[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0.$$

Como $-u[\mathbf{z}, \nu] \leq \|\mathbf{z}\|_{\infty} |u| \leq |u|$ $\mathcal{H}^{N-1}$ -q.t.p. $x \in \partial\Omega$ e $\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du|$, temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du|$$

e

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} u[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} = - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

ou equivalentemente

$$[\mathbf{z}, \nu] \in \text{sign}(-u) \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. } x \in \partial\Omega \quad (5.77)$$

e

$$\frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Du) = \frac{1}{|x|^a} |Du| \quad \text{como medidas de Radon.} \quad (5.78)$$

Portanto, de (5.74), (5.77) e (5.78), temos que u é uma solução de (5.73). $\square$

4.6 Prova do Teorema 4.4 por meio de problemas envolvendo o operador p -laplaciano

Esta seção está destinada a provar o Teorema 4.4 por meio de uma abordagem baseada em um argumento de aproximação. Primeiro consideramos problemas envolvendo o operador p -laplaciano e, seguindo os argumentos de [52], provaremos estimativas a priori que nos permitem encontrar a solução w do problema (1.1), quando $p \rightarrow 1^+$.

4.6.1 Problemas aproximados envolvendo o operador p -laplaciano

Em primeiro lugar, consideremos $1 < \bar{p} < 2$ e note que $\bar{p} < N < \frac{N}{1+a-b}$. Desde que $0 < a < N-1$, $\mu > 1$ e $1 < q < \frac{N}{N-(1+a-b)}$, podemos assumir que $\bar{p}$ também satisfaz

$$a < \frac{N-\bar{p}}{\bar{p}} < N-1, \quad \mu > \bar{p} \quad \text{e} \quad \bar{p} < q < q + \bar{p} - 1 < \frac{N}{N-(1+a-b)}.$$

Mas isso implica que, se denotamos $\bar{q} = q + \bar{p} - 1$,

$$p < \frac{N}{1+a-b}, \quad a < \frac{N-p}{p}, \quad \mu > p \quad \text{e} \quad p < \bar{q} < \frac{Np}{N-p(1+a-b)},$$

para todo $1 < p \leq \bar{p}$. Agora, para cada $1 < p \leq \bar{p}$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\text{div} \left(\frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = \frac{1}{|x|^b} f_p(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.79)$$

onde $f_p(s) = f(s)|s|^{p-1}$. Note que, como uma consequência de $(f_1) - (f_4)$, esta função satisfaz

(f_{1p}) $f_p \in C^0([0, +\infty), \mathbb{R})$;

(f_{2p}) $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f_p(s)}{s^{p-1}} = 0$;

(f_{3p}) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $p < \bar{q} < \frac{Np}{N-p(1+a-b)}$, tais que

$$|f_p(s)| \leq c_1 + c_2 s^{\bar{q}-1} \quad \text{para todo } s \in [0, +\infty);$$

(f_{4p}) Existe $\mu > p$ tal que

$$0 < \mu F_p(s) \leq f_p(s)s, \quad \forall s \geq s_0,$$

onde $F_p(t) = \int_0^t f_p(s)ds$.

Observação 4.37. As condições (f_{1p}) – (f_{3p}) são imediatas de verificar. Para verificar (f_{4p}), observe primeiro que ao integrar por partes temos que

$$\frac{f_p(s)s}{F_p(s)} = \frac{f(s)|s|^{p-1}s}{F(s)|s|^{p-1} - (p-1) \int_0^s \frac{F(\sigma)}{|\sigma|^{2-p}} d\sigma} = \frac{f(s)s}{F(s) - (p-1) \frac{1}{|s|^{p-1}} \int_0^s \frac{F(\sigma)}{|\sigma|^{2-p}} d\sigma},$$

quando $s > 0$. Logo, por $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = +\infty$ e regra de L'Hôspital tem-se que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} (p-1) \frac{1}{|s|^{p-1}} \int_0^s \frac{F(\sigma)}{|\sigma|^{2-p}} d\sigma = +\infty.$$

Assim, $(p-1) \frac{1}{|s|^{p-1}} \int_0^s \frac{F(\sigma)}{|\sigma|^{2-p}} d\sigma$ é positivo para s suficientemente grande. Portanto, decorre desse fato que

$$\frac{f_p(s)s}{F_p(s)} \geq \frac{f(s)s}{F(s)} \geq \mu,$$

para s suficientemente grande.

O problema (6.79) foi estudado em [22] usando o método de sub-super solução. Mesmo assim, precisamos obter uma solução aplicando o Teorema do Passo da Montanha para obter estimativas independentes de p e assim sermos capazes de passar o limite quando $p \rightarrow 1$. Assim, para obter uma solução para o problema (6.79) trabalharemos no espaço do Sobolev com peso $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$.

O funcional energia associado ao problema (6.79) é dado por

$$J_p(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(u) dx \quad \text{para todo } u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega),$$

com derivada,

$$J'_p(u)v = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(u)v dx \quad \text{para todo } v \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega).$$

Agora, iremos verificar que o funcional J_p satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha (ver [68]).

Note que pelas condições (f_{2p}) e (f_{3p}), dado $\epsilon > 0$ existe $A_{\epsilon} > 0$ tal que

$$|f_p(s)| \leq \epsilon |s|^{p-1} + A_{\epsilon} |s|^{\bar{q}-1} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (6.80)$$

$$|F_p(s)| \leq \frac{\epsilon}{p}|s|^p + \frac{A_\epsilon}{\bar{q}}|s|^{\bar{q}} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (6.81)$$

Por (6.98) e as imersões contínuas de $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} J_p(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,ap}^p - \frac{\epsilon}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^p dx - \frac{A_\epsilon}{\bar{q}} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^{\bar{q}} dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,ap}^p - \frac{\epsilon}{p} C \|u\|_{1,ap}^p - \frac{A_\epsilon}{\bar{q}} C \|u\|_{1,ap}^{\bar{q}} \\ &= \frac{1}{p}(1 - \epsilon C) \|u\|_{1,ap}^p - \frac{A_\epsilon}{\bar{q}} C \|u\|_{1,ap}^{\bar{q}}, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante de imersão de $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$.

Logo, se $1 - \epsilon C > 0$ e $\rho > 0$ são tais que $\frac{1}{p}(1 - \epsilon C)\rho^p - \frac{A_\epsilon}{\bar{q}}C\rho^{\bar{q}} =: \alpha > 0$ e $\|u\|_{1,ap} = \rho$, tem-se que

$$J_p(u) \geq \alpha > 0.$$

Logo, J_p satisfaz a primeira condição geométrica do Teorema do Passo da Montanha.

Agora, mostraremos que a segunda condição do Teorema do Passo da Montanha também é satisfeita. Observe que a condição (f_{4p}) implica que existem $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F_p(s) \geq d_1 s^\mu - d_2 \quad \forall s \in [0, +\infty). \quad (6.82)$$

Fixemos $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $t > 0$ suficientemente grande tal que $\|t\phi\|_{1,ap} > \rho$. Então, por (6.82) e $\mu > p$ temos que

$$J_p(t\phi) \leq \frac{t^p}{p}\|u\|_{1,ap}^p - d_1 t^\mu \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^\mu dx + d_2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \rightarrow -\infty,$$

quando $t \rightarrow \infty$. Mas isso implica que existe $t^* > 0$ tal que

$$e = t^* \phi \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \quad \text{com } \|e\| > \rho \quad \text{e} \quad J_p(e) < 0,$$

ou seja, a segunda condição do Teorema do Passo da Montanha é satisfeita por J_p e assim, existe uma sequência $(w_n) \subset \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$J_p(w_n) \rightarrow c_p > 0 \quad \text{e} \quad J'_p(w_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (6.83)$$

onde

$$c_p = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_p(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)) ; \gamma(0) = 0, J_p(\gamma(1)) < 0\}.$$

Afirmção: a sequência (w_n) é limitada em $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$. De fato, pela condição (f_{4p}) temos

$$\begin{aligned} c_p + o_n(1) &= J_p(w_n) - \frac{1}{\mu} J'_p(w_n) w_n \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) \|w_n\|_{1,ap}^p + \int_{|w_n| \leq s_0} \frac{1}{|x|^b} \left(\frac{1}{\mu} f_p(w_n) w_n - F_p(w_n) \right) dx. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Desde que f_p e F_p são contínuas em $[0, +\infty)$, podemos assumir que existe $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{\mu} f_p(s)s - F_p(s) \right| \leq M \quad \text{para todo } s \in [0, s_0].$$

Assim,

$$c_p + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) \|w_n\|_{1,ap} - M \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} dx.$$

Mas isso implica que (w_n) é limitado em $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$.

Desde que $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ é um espaço Banach reflexivo e está imerso compactamente em $L_b^s(\Omega)$ para todo $s \in \left[p, \frac{Np}{N-p(1+a-b)} \right)$, a menos de subsequência, tem-se

$$w_n \rightharpoonup w_p \quad \text{em } \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad w_n \rightarrow w_p \quad \text{em } L_b^s(\Omega), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (6.85)$$

Mais ainda, por [21][Teorema 4.7], a menos de subsequência, obtém-se

$$w_n(x) \rightarrow w_p(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e existe $g \in L_b^q(\Omega)$ tal que

$$|w_n| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Logo, pela condição (f_{1p}) e a estimativa (6.80) obtemos

$$f_p(w_n(x))(w_n(x) - w_p(x)) \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad \text{e} \quad (6.86)$$

$$|f_p(w_n(x))(w_n(x) - w_p(x))| \leq 2(\epsilon g^p(x) + A_\epsilon g^{\bar{q}}(x)). \quad (6.87)$$

Assim, do Teorema da Convergência Dominada segue-se que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_n)(w_n - w_p) dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (6.88)$$

Lembrando que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$ existe uma constante $C_p > 0$ tal que

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y) \cdot (x - y) \geq C_p \frac{|x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}} \quad \text{se } 1 < p < 2,$$

onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana, resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_n - \nabla w_p|^p dx &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} \frac{|\nabla w_n - \nabla w_p|^p}{(|\nabla w_n| + |\nabla w_p|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla w_n| + |\nabla w_p|)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} \frac{|\nabla w_n - \nabla w_p|^2}{(|\nabla w_n| + |\nabla w_p|)^{2-p}} dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} (|\nabla w_n| + |\nabla w_p|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{C_p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} (|\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n - |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p) \cdot (\nabla w_n - \nabla w_p) dx \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\quad \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} (|\nabla w_n| + |\nabla w_p|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Note que, de (6.83), (6.85) e (6.88) tem-se que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} (|\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n - |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p) \cdot (\nabla w_n - \nabla w_p) dx \\
 &= J'_p(w_n)w_n - J'_p(w_n)w_p + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w_n)(w_n - w_p) dx \\
 &+ \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla w_n dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p dx \rightarrow 0,
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

quando $n \rightarrow +\infty$.

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (6.89), desde que (w_n) é limitada em $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$, obtemos

$$w_n \rightarrow w_p \quad \text{em } \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Consequentemente, como $J_p \in C^1(\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega))$, temos que

$$J_p(w_p) = c > 0 \quad \text{e} \quad J'_p(w_p) = 0,$$

ou seja, w_p é uma solução não trivial de (6.79).

Uma vez obtida a família de soluções aproximadas $(w_p)_{1 < p \leq \bar{p}}$, nossa tarefa agora será obter uma cota dela que não dependa de p . Para esse fim, considere o funcional $I_p : \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I_p(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^p dx + \frac{p-1}{p} |\Omega|.$$

Como $\mathcal{D}_{0,a}^{1,\bar{p}}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \in (0, \bar{p}]$ e $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,\bar{p}}(\Omega)$ fixo, tem-se que a aplicação

$$(0, \bar{p}] \ni p \mapsto I_p(u)$$

é não decrescente. De fato, se $1 < p_1 < p_2 \leq \bar{p}$ então pela desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}
 I_{p_1}(u) &= \frac{1}{p_1} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap_1}} |\nabla u|^{p_1} dx + \frac{p_1-1}{p_1} |\Omega| \\
 &\leq \frac{1}{p_1} \left(\frac{p_1}{p_2} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap_2}} |\nabla u|^{p_2} dx + \frac{p_2-p_1}{p_2} |\Omega| \right) + \frac{p_1-1}{p_1} |\Omega| \\
 &= I_{p_2}(u).
 \end{aligned}$$

Observe que os pontos críticos de J_p são os mesmos que de

$$u \mapsto I_p(u) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(u) dx.$$

Agora, mostraremos que existe $e \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$I_p(e) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(e) dx < 0, \quad \text{para todo } 1 < p \leq \bar{p}.$$

Seja uma função não negativa $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|\phi\|_\infty \leq 1$. Então,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^{\bar{p}} dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^p dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi| dx, \tag{6.91}$$

para todo $1 < p \leq \bar{p}$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^p dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi| dx.$$

Mas isso implica que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi| dx < \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^{\bar{p}} dx. \quad (6.92)$$

Analogamente, sem perda de generalidade podemos assumir que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla \phi|^p dx < 2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla \phi| dx, \quad (6.93)$$

para todo $1 < p \leq \bar{p}$. De fato, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla \phi|^p dx &\leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{a\bar{p}}} |\nabla \phi|^{\bar{p}} \right)^{\frac{p}{\bar{p}}} |\Omega|^{\frac{\bar{p}-p}{\bar{p}}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{a\bar{p}}} |\nabla \phi|^{\bar{p}} dx + 1 \right) (|\Omega| + 1). \end{aligned} \quad (6.94)$$

Logo, do Teorema da Convergência de Lebesgue temos que

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla \phi|^p dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla \phi| dx.$$

Note que a desigualdade de Poincaré, implica que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla \phi| dx > 0. \quad (6.95)$$

Assim, (6.93) segue-se da definição do limite.

Agora, seja $t > 1$. Então, devido a $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = +\infty$, dado $K = 32 \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi| dx}{\int_{\Omega} |\phi| dx}$, podemos encontrar $M > 0$ tal que $f(s) > K$, e consequentemente $f_p(s) > K s^{p-1}$, para todo $s > M$. Assim, se $s > M$, então

$$F_p(s) > \int_M^s f(t) |t|^{p-1} dt > K \frac{s^p}{p} - K \frac{M^p}{p} > K \frac{s^p}{p} - K(1+M)^{\bar{p}}.$$

Denotando $K_1 = K(1+M)^{\bar{p}} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} dx$ e tomando t suficientemente grande, temos que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^{\bar{p}} dx < \int_{\{\phi > M/t\}} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^{\bar{p}} dx. \quad (6.96)$$

Assim, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(t\phi) dx &\geq \int_{\{\phi > M/t\}} \frac{1}{|x|^b} F_p(t\phi) dx > K \frac{t^p}{p} \int_{\{\phi > M/t\}} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^p dx - K_1 \\ &\geq K \frac{t^p}{p} \int_{\{\phi > M/t\}} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^{\bar{p}} dx - K_1 \geq K \frac{t^p}{2p} \int_{\{\phi > M/t\}} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^{\bar{p}} dx - K_1 \\ &> K \frac{t^p}{4p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi|^{\bar{p}} dx - K_1 > K \frac{t^p}{8p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |\phi| dx - K_1 \\ &= 4 \frac{t^p}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla \phi| dx - K_1. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} I_p(t\phi) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(t\phi) dx &\leq \frac{t^p}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla \phi|^p dx - 4 \frac{t^p}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla \phi| dx + K_1 \\ &\leq K_1 - 2 \frac{t^p}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla \phi| dx \leq K_1 - t \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla \phi| dx. \end{aligned}$$

Assim, desde que $p < 2$ e $t > 1$, para t suficientemente grande, encontramos $e = t\phi$ satisfazendo

$$J_p(e) \leq I_p(e) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(e) dx < 0, \quad \text{para todo } 1 < p \leq \bar{p}.$$

Como e não depende de p , pelo Teorema do Passo da Montanha (ver [68]), sabemos que w_p satisfaz

$$I_p(w_p) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx = \inf_{\gamma \in \Gamma_p} \max_{t \in [0,1]} \left(I_p(\gamma(t)) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(\gamma(t)) dx \right),$$

onde

$$\Gamma_p = \{ \gamma \in C([0,1], \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e \}.$$

Lema 4.38. Para cada $p \in (1, \bar{p}]$, seja $w_p \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ uma solução do problema (6.79). Então a família $(w_p)_{1 < p \leq \bar{p}}$ é limitada em $BV_a(\Omega)$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que a família abaixo é limitada

$$\left(I_p(w_p) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx \right)_{1 < p \leq \bar{p}}.$$

De fato, seja $1 < p \leq \bar{p}$, ao aplicarmos a monotonicidade de I_p e o fato que $\Gamma_{\bar{p}} \subset \Gamma_p$ (pois $\mathcal{D}_{0,a}^{1,\bar{p}}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$) obtemos

$$\begin{aligned} I_p(w_p) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx &= \inf_{\gamma \in \Gamma_p} \max_{t \in [0,1]} \left(I_p(\gamma(t)) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(\gamma(t)) dx \right) \\ &\leq \inf_{\gamma \in \Gamma_{\bar{p}}} \max_{t \in [0,1]} \left(I_p(\gamma(t)) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(\gamma(t)) dx \right) \\ &\leq \inf_{\gamma \in \Gamma_{\bar{p}}} \max_{t \in [0,1]} \left(I_{\bar{p}}(\gamma(t)) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(\gamma(t)) dx \right). \end{aligned}$$

Mas isso implica que

$$\begin{aligned} I_p(w_p) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx & \\ &\leq \inf_{\gamma \in \Gamma_{\bar{p}}} \max_{t \in [0,1]} \left(I_{\bar{p}}(\gamma(t)) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_{\bar{p}}(\gamma(t)) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_{\bar{p}}(\gamma(t)) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(\gamma(t)) dx \right) \\ &\leq I_{\bar{p}}(w_{\bar{p}}) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_{\bar{p}}(w_{\bar{p}}) dx + \inf_{\gamma \in \Gamma_{\bar{p}}} \max_{t \in [0,1]} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |F_{\bar{p}}(\gamma(t))| dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |F_p(\gamma(t))| dx \right) \\ &\leq I_{\bar{p}}(w_{\bar{p}}) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_{\bar{p}}(w_{\bar{p}}) dx + \max_{t \in [0,1]} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_{\bar{p}}(\gamma_0(t)) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(\gamma_0(t)) dx \right), \end{aligned} \tag{6.97}$$

onde $\gamma_0(t) = te$.

Note que, pela definição de F_p temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |F_p(te)| dx &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |F(te)| |te|^{p-1} dx \\ &\leq \|e\|_{\infty}^{p-1} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |F(te)| dx \\ &\leq (1 + \|e\|_{\infty})^{\bar{p}-1} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |F(te)| dx. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Assim, aplicando a desigualdade (6.98) em (6.97), obtemos

$$I_p(w_p) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx \leq I_{\bar{p}}(w_{\bar{p}}) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_{\bar{p}}(w_{\bar{p}}) dx \quad (6.99)$$

$$+ 2(1 + \|e\|_{\infty})^{\bar{p}-1} \max_{t \in [0,1]} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |F(te)| dx. \quad (6.100)$$

Em outras palavras, existe $C > 0$ tal que

$$J_p(w_p) \leq I_p(w_p) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx \leq C \quad \text{para todo } 1 < p \leq \bar{p}. \quad (6.101)$$

Seja $\Omega_p = \{x \in \Omega : |w_p(x)| \leq s_0\}$, para qualquer $p \in (1, \bar{p}]$. Então, por (f_{3p}) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx &\leq c_1 \int_{\Omega_p} \frac{1}{|x|^b} |w_p| dx + \frac{c_2}{\bar{q}} \int_{\Omega_p} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\bar{q}} dx \\ &\leq c_1 \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} s_0 dx + \frac{c_2}{\bar{q}} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} s_0^{\bar{q}} dx = C_1. \end{aligned} \quad (6.102)$$

Por outro lado, de (f_{4p}) e sabendo que w_p é solução de (6.79), tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_p} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx &\leq \frac{1}{\mu} \int_{\Omega \setminus \Omega_p} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) w_p dx \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p dx - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega_p} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) w_p dx. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Note que, pela condição (f_{3p}) segue-se que

$$- \int_{\Omega_p} f_p(w_p) w_p dx \leq c_1 s_0 \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} dx + c_2 s_0^{\bar{q}} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} dx = C_2. \quad (6.104)$$

Assim, por (6.104) em (6.103), tem-se

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_p} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx \leq \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p dx + C_2. \quad (6.105)$$

Portanto, de (6.102) e (6.105) em (6.101), obtemos

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p dx \leq C + C_1 + C_2, \quad \forall p \in (1, \bar{p}].$$

Mais ainda, como $1 < p \leq \bar{p} < \mu$, a desigualdade acima implica que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p dx \leq \tilde{C}, \quad \forall p \in (1, \bar{p}]. \quad (6.106)$$

Consequentemente, pela desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla w_p| dx &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p dx + \frac{p-1}{p} |\Omega| \\ &\leq \tilde{C} + |\Omega| = \hat{C}, \end{aligned} \quad (6.107)$$

para todo $p \in (1, \bar{p}]$. Além disso, como $w_p|_{\partial\Omega} = 0$, temos que $\{w_p\}_{1 < p \leq \bar{p}}$ é uma família limitada em $BV_a(\Omega)$. $\square$

Observação 4.39. Como a imersão $BV_a(\Omega) \hookrightarrow L_b^s(\Omega)$ é compacta (Teorema 4.25) para todo $s \in \left[1, \frac{N}{N-(1+a-b)}\right)$, a menos de subsequência, existe $w \in BV_a(\Omega)$ tal que

$$w_p \rightarrow w \quad \text{em} \quad L_b^s(\Omega) \quad \text{quando} \quad p \rightarrow 1^+, \quad (6.108)$$

para todo $s \in \left[1, \frac{N}{N-(1+a-b)}\right)$. Mais ainda, a menos de subsequência, temos que

$$w_p(x) \rightarrow w(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \quad \text{quando} \quad p \rightarrow 1^+. \quad (6.109)$$

Além disso, existe $g \in L_b^s(\Omega)$, $1 \leq s < \frac{N}{N-(1+a-b)}$, tal que

$$|w_p(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \quad (6.110)$$

para todo $p \in (1, \bar{p}]$.

Sejam $k \geq 0$ e $w_p \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ uma solução do problema (6.79). Definimos

$$A_{k,p} = \{x \in \Omega; |w_p(x)| \geq k \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega\}.$$

Lema 4.40. *Seja $p > 1$ suficientemente pequeno. Para todo $p \in (1, \bar{p}]$ e dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\epsilon) > 0$ tal que se $k \geq k_0$,*

$$\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w_p|^{\bar{q}-1})^{\frac{N}{1+a-b}} dx < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq k_0, \quad (6.111)$$

onde $\bar{q}$ é como na condição (f_{3p}) .

Demonstração. Em primeiro lugar, note que

$$\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} dx \leq \frac{1}{k^{\frac{N}{N-(1+a-b)}}} \int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} dx. \quad (6.112)$$

Sejam $\alpha = \frac{(\bar{q}-1)[N-(1+a-b)]}{1+a-b}$ e $l = \frac{N}{1+a-b}$, os quais satisfazem $0 < \alpha < 1$ e $l > 1$. Então, pela

desigualdade de Hölder e (6.112), temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w_p|^{\bar{q}-1})^l dx &\leq 2^{l-1} \left(\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} dx + \int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{(\bar{q}-1)l} dx \right) \\
 &\leq 2^{l-1} \left(\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} dx + \left(\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} dx \right)^\alpha \left(\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} dx \right)^{1-\alpha} \right) \\
 &\leq 2^{l-1} \left(\frac{1}{k^{\frac{N}{N-(1+a-b)}}} \int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} dx \right) \\
 &\quad + 2^{l-1} \left(\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} dx \right)^\alpha \left(\frac{1}{k^{\frac{N}{N-(1+a-b)}}} \int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} dx \right)^{1-\alpha} \\
 &\leq 2^{l-1} \left(\frac{1}{k^{\frac{N}{N-(1+a-b)}}} + \frac{1}{k^{\frac{N(1-\alpha)}{N-(1+a-b)}}} \right) \int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} dx.
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w_p|^{\bar{q}-1})^l dx \leq o_k(1) \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} dx, \quad (6.113)$$

onde $o_k(1)$ significa uma quantidade independente em p , que tende a 0 quando $k \rightarrow \infty$.

Note que, pela desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ e (6.106) temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |w_p|^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} dx \leq \mathfrak{C}_{CKN}^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla w_p| dx \right)^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} \leq \mathfrak{C}_{CKN}^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} \tilde{C}^{\frac{N}{N-(1+a-b)}}, \quad (6.114)$$

para todo $p \in (1, \bar{p}]$.

Assim, de (6.114) em (6.113) obtemos

$$\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w_p|^{\bar{q}-1})^l dx \leq o_k(1) \mathfrak{C}_{CKN}^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} \tilde{C}^{\frac{N}{N-(1+a-b)}} \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}]$$

e, desde que $o_k(1) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, provamos (6.111). $\square$

Corolário 4.41. *Seja $w \in BV_a(\Omega)$ o limite de (6.108). Então $w \in L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $k > 0$, definimos a função auxiliar $G_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$G_k(s) = \begin{cases} s - k & \text{se } s > k, \\ 0 & \text{se } |s| \leq k, \\ s + k & \text{se } s < -k. \end{cases} \quad (6.115)$$

Escolhendo $G_k(w_p)$ como uma função teste no problema (6.79), obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla G_k(w_p)|^p dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) G_k(w_p) dx.$$

Denotemos $1_a^* = \frac{N}{N-(1+a-b)}$. Então pela desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e Young e a condição (f_{3p}) , tem-se que

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |G_k(w_p)|^{1_a^*} dx \right)^{\frac{1}{1_a^*}} &\leq C_{\Omega}^{\frac{b(1_a^*-1)}{1_a^*}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{b1_a^*}} |G_k(w_p)|^{1_a^*} dx \right)^{\frac{1}{1_a^*}} \\
 &\leq C_{\Omega}^{\frac{b(1_a^*-1)}{1_a^*}} \mathfrak{C}_{CKN} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla G_k(w_p)| dx \\
 &\leq \frac{C}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla G_k(w_p)|^p dx + \frac{C(p-1)}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} dx \\
 &= \frac{C}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) G_k(w_p) dx + \frac{C(p-1)}{p} |\Omega| \\
 &\leq C \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w_p|^{\bar{q}-1}) |G_k(w_p)| dx + \frac{C(p-1)}{p} |\Omega| \\
 &\leq C \int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w_p|^{\bar{q}-1}) |G_k(w_p)| dx + \frac{C(p-1)}{p} |\Omega| \\
 &\leq C \left(\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w_p|^{\bar{q}-1})^{\frac{N}{1+a-b}} dx \right)^{\frac{1+a-b}{N}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |G_k(w_p)|^{1_a^*} dx \right)^{\frac{1}{1_a^*}} \\
 &\quad + \frac{C(p-1)}{p} |\Omega|,
 \end{aligned} \tag{6.116}$$

onde $C = C_{\Omega}^{\frac{b(1_a^*-1)}{1_a^*}} \mathfrak{C}_{CKN}$.

Por outro lado, pelo Lema 4.40 existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_{k,p}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w_p|^{\bar{q}-1})^{\frac{N}{1+a-b}} dx < \frac{1}{(2C)^{\frac{N}{1+a-b}}} \quad \text{para todo } k \geq k_0. \tag{6.117}$$

Usando (6.117) em (6.116), obtemos

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |G_k(w_p)|^{1_a^*} dx \right)^{\frac{1}{1_a^*}} \leq \frac{2C(p-1)}{p} |\Omega|. \tag{6.118}$$

Mais ainda, desde que $w_p(x) \rightarrow w(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ quando $p \rightarrow 1^+$, o Lema de Fatou implica que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |G_k(w)|^{1_a^*} dx = 0 \quad \text{para todo } k \geq k_0.$$

Portanto, $\|w\|_{\infty} \leq k_0$. □

Lema 4.42. Para cada $p \in (1, \bar{p}]$, seja $w_p \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ uma solução do problema (6.79). Então, existe $\mathbf{z} \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ com $\|\mathbf{z}\|_{\infty} \leq 1$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, desde que $C_{\Omega} = \sup\{|x|; x \in \Omega\} < \infty$, por (6.106), temos

$$\frac{1}{C_{\Omega}^p} \int_{\Omega} |\nabla w_p|^p dx \leq \tilde{C} \quad \forall p \in (1, \bar{p}].$$

Assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla w_p|^p dx \leq \tilde{C} (1 + C_{\Omega})^{\bar{p}} \quad \forall p \in (1, \bar{p}].$$

Logo, pode-se aplicar os mesmos argumentos que [50, Theorem 3.5.] e obter uma subsequência (que o denotamos da mesma forma) e $\mathbf{z} \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|\mathbf{z}\|_{\infty} \leq 1$ e

$$|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \rightharpoonup \mathbf{z} \quad \text{em } L^s(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad \text{para todo } 1 \leq s < \infty. \quad (6.119)$$

Fixe $1 < s < \infty$ tal que $1 < s' < \frac{N}{a}$, e considere $\bar{p}$ suficientemente pequeno tal que $1 < s' < \frac{N}{a\bar{p}}$. Note que, $\frac{1}{|x|^{a\bar{p}}} \in L^{s'}(\Omega)$. Desde que

$$\frac{1}{|x|^{aps'}} \leq \max \left\{ \frac{1}{|x|^{a\bar{p}s'}}, 1 \right\},$$

para todo $p \in (1, \bar{p}]$, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue-se que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{1}{|x|^{ap}} - \frac{1}{|x|^a} \right|^{s'} dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+.$$

Assim, pelas convergências $\frac{1}{|x|^{ap}} \rightarrow \frac{1}{|x|^a}$ em $L^{s'}(\Omega)$ e $|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \rightharpoonup \mathbf{z}$ em $L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$, temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+, \quad (6.120)$$

para toda $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. □

4.6.2 Prova do Teorema 1.1

Nessa seção provaremos que a função w dada em (6.108) satisfaz as condições (1), (2) e (3) da Definição 4.33 e que, assim, é uma solução do Problema (1.1).

(1) Considere $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ como função teste no problema (6.79). Então

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) \varphi dx. \quad (6.121)$$

Nosso próximo passo é fazer $p \rightarrow 1^+$ em (6.121). Note que, pelo Lema 4.42 temos que existe $\mathbf{z} \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ com $\|\mathbf{z}\|_{\infty} \leq 1$ tal que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+. \quad (6.122)$$

Para lidar com o lado direito, observe que

$$f_p(w_p(x)) \rightarrow f(w(x)) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

onde usamos a convergência pontual, dada em (6.109), e (f_{1p}) . Mais ainda, pela condição (f_{3p}) e pela desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned} |f_p(w_p(x))| &\leq c_1 + c_2 |w_p(x)|^{\bar{q}-1} \\ &\leq c_1 + c_2 g(x)^{\bar{q}-1} \\ &\leq c_1 + \frac{1}{\bar{q}} c_2^{\bar{q}} + \frac{\bar{q}-1}{\bar{q}} g(x)^{\bar{q}}, \end{aligned}$$

com $g \in L_b^{\bar{q}}(\Omega)$.

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue-se que

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) \varphi dx. \quad (6.123)$$

Portanto, por (6.122) e (6.123), fazendo $p \rightarrow 1^+$ em (6.121), obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) \varphi dx \quad (6.124)$$

e assim,

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) = \frac{1}{|x|^b} f(w) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

(2) Note que, do Lema 4.28 segue-se que

$$\int_B \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Dw \right) \leq \int_B \left| \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Dw \right) \right| \leq \int_B \frac{1}{|x|^a} |Dw|,$$

para todo conjunto de Borel $B \subset \Omega$. Resta provar a desigualdade contrária, o que é equivalente a provar que

$$\left\langle \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Dw \right), \varphi \right\rangle \geq \left\langle \frac{1}{|x|^a} |Dw|, \varphi \right\rangle, \quad (6.125)$$

para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$.

Fixe $0 \leq \varphi \in C_c^1(\Omega)$ e escolha $k > \|w\|_{\infty}$. Tomando $T_k(w_p)\varphi \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ como função teste em (6.79), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} \varphi |\nabla T_k(w_p)|^p dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w_p) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi dx \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) T_k(w_p) \varphi dx. \end{aligned} \quad (6.126)$$

Note que, pela desigualdade de Young e (6.126), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi |\nabla T_k(w_p)| dx &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla T_k(w_p)|^p \varphi dx + \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} \varphi dx \\ &\leq -\frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w_p) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi dx \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) T_k(w_p) \varphi dx + \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} \varphi dx. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Agora, faremos $p \rightarrow 1^+$ em (6.127). Note que, a convergência (6.108) implica que $T_k(w_p) \rightarrow T_k(w)$ em $L^1(\Omega)$ quando $p \rightarrow 1^+$. Logo, pelo Lema 4.23 temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi |DT_k(w)| \leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi |\nabla T_k(w_p)| dx. \quad (6.128)$$

Estabelece-se também a seguinte convergência:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} T_k(w) \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx = \lim_{p \rightarrow 1} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w_p) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi dx. \quad (6.129)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w_p) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} T_k(w) \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \\
 & \leq \left| \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w_p) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \quad (6.130) \\
 & + \left| \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} T_k(w) \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx \right|.
 \end{aligned}$$

Agora, verificaremos que as convergências dos termos de (6.130) tendem para zero, quando $p \rightarrow 1^+$.

Note que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato que $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w_p) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \quad (6.131) \\
 & \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |T_k(w_p) - T_k(w)| |\nabla w_p|^{p-1} |\nabla \varphi| \, dx \\
 & \leq \|\nabla \varphi\|_{\infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |T_k(w_p) - T_k(w)| |\nabla w_p|^{p-1} \, dx.
 \end{aligned}$$

Escolhendo $\bar{p} > 1$ tal que $1 < s < \frac{\bar{p}}{\bar{p}-1} \leq \frac{p}{p-1}$ com $p \in (1, \bar{p}]$ e $1 < s' < \frac{N}{N-(1+a-b)} < \frac{N}{a}$, pela desigualdade de Hölder tem-se que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |T_k(w_p) - T_k(w)| |\nabla w_p|^{p-1} \, dx \\
 & \leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |T_k(w_p) - T_k(w)|^{s'} \, dx \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^{(p-1)s} \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
 & \leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \frac{1}{|x|^{ap-b}} |T_k(w_p) - T_k(w)|^{s'} \, dx \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^{(p-1)s} \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \quad (6.132) \\
 & \leq C_{\Omega}^{\frac{b-ap}{s'}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |T_k(w_p) - T_k(w)|^{s'} \, dx \right)^{\frac{1}{s'}} \\
 & \quad \left(\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p \, dx \right)^{\frac{(p-1)s}{p}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} \, dx \right)^{\frac{p-(p-1)s}{p}} \right)^{\frac{1}{s}}.
 \end{aligned}$$

Note que, a convergência (6.108) implica que $T_k(w_p) \rightarrow T_k(w)$ em $L_b^{s'}(\Omega)$ quando $p \rightarrow 1^+$. Assim, desde que $(w_p)_{1 < p < \bar{p}}$ é uma família limitada em $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$, (6.132) torna-se

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |T_k(w_p) - T_k(w)| |\nabla w_p|^{p-1} \, dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+. \quad (6.133)$$

Usando (6.133) em (6.131), obtemos

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w_p) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \rightarrow 0, \quad (6.134)$$

quando $p \rightarrow 1^+$.

Por outro lado, seguindo o argumento para obter (6.120) pode-se provar também que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} T_k(w) |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} T_k(w) \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+. \quad (6.135)$$

Logo, de (6.134) e (6.135) em (6.130), estabelecemos (6.129).

Por outro lado, pelo crescimento subcrítico de f_p e pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) T_k(w) \varphi \, dx = \lim_{p \rightarrow 1} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) T_k(w_p) \varphi \, dx. \quad (6.136)$$

Portanto, tomando o limite inferior em (6.127), de (6.128), (6.129) e (6.136), obtemos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi |DT_k(w)| + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} T_k(w) \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) T_k(w) \varphi \, dx.$$

Além disso, a escolha de k implica que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi |Dw| + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} w \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) w \varphi \, dx,$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \varphi |Dw| \leq - \int_{\Omega} w \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} w \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx = \left\langle \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Dw \right), \varphi \right\rangle.$$

Dessa forma, estabelece-se a desigualdade contrária de (6.125) e assim,

$$\left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Dw \right) = \frac{1}{|x|^a} |Dw| \quad \text{como medidas de Radon}.$$

(3) Nesta parte verificaremos que

$$[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-w) \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (6.137)$$

o que equivalente a mostrar que

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{|x|^a} |w| + w \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] \right) d\mathcal{H}^{N-1} = 0. \quad (6.138)$$

De fato, pelo Lema 4.27 e sendo $[\mathbf{z}, \nu] \leq \|\mathbf{z}\|_{\infty} \leq 1$, temos que

$$-w \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] \leq \frac{1}{|x|^a} \|\mathbf{z}\|_{\infty} |w| \leq \frac{1}{|x|^a} |w| \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. sobre } \partial\Omega. \quad (6.139)$$

Assim,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{|x|^a} |w| + w \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] \right) d\mathcal{H}^{N-1} \geq 0. \quad (6.140)$$

Para obter a desigualdade recíproca, primeiro tome w_p como função teste em (6.79). Então,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) w_p \, dx.$$

Usando a desigualdade de Young e a condição de fronteira $w_p|_{\partial\Omega} = 0$, temos que

$$\begin{aligned} p \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla w_p| dx + p \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |w_p| d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p dx + (p-1)|\Omega| \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) w_p dx + (p-1)|\Omega|. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Fazendo $p \rightarrow 1^+$ em (6.141). Por um lado, a semi-continuidade inferior da norma em $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ implica que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Dw| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |w| d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla w_p| dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |w_p| d\mathcal{H}^{N-1} \right). \quad (6.142)$$

Por outro lado, a condição (f_{1p}) e (6.109) implicam que

$$f_p(w_p(x)) w_p(x) \rightarrow f(w(x)) w(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Além disso, a condição (f_{3p}) implica que

$$\begin{aligned} |f_p(w_p(x)) w_p(x)| &\leq c_1 |w_p(x)| + c_2 |w_p(x)|^{\bar{q}-1} |w_p(x)| \\ &\leq c_1 g(x) + c_2 g(x)^{\bar{q}}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) w dx = \lim_{p \rightarrow 1} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f_p(w_p) w_p dx. \quad (6.143)$$

Logo, tomando o limite inferior em (6.141), por (6.142) e (6.143), obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Dw| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |w| d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) w dx. \quad (6.144)$$

Por outro lado, de (6.124) e pelo Teorema 4.31, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) w dx &= - \int_{\Omega} w \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} w \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} (\mathbf{z}, Dw) \\ &= - \int_{\partial\Omega} w \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Dw|. \end{aligned} \quad (6.145)$$

Aplicando (6.145) em (6.144), tem-se

$$\int_{\partial\Omega} w \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |w| d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0. \quad (6.146)$$

Assim, de (6.140) e (6.146), temos a identidade (6.138).

Portanto, desde que w satisfaz as condições (1), (2) e (3) da Definição 4.33, concluímos que w é uma solução para o Problema (1.1).

Resta apenas mostrar que a solução obtida, w , é não trivial. Para fazer isso, introduzimos o funcional energia $\Phi : BV_a(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u) dx.$$

Note que,

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \left(I_p(w_p) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx \right) = \Phi(w). \quad (6.147)$$

De fato, desde que w satisfaz (1), (2) e (3) em Definição 4.33 e w_p satisfies (6.79), segue-se da Fórmula de Green (4.58), deste Capítulo, e do Teorema da Convergência Dominada, que

$$\begin{aligned} \|w\|_{BV_a(\Omega),1} &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Dw| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |w| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Dw \right) - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} w [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= - \int_{\Omega} w \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) w dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} f_p(w_p) w_p dx + o_p(1) \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla w_p|^p dx + o_p(1). \end{aligned} \quad (6.148)$$

Por outro lado, por (6.108), a condição (f_{3p}) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(w) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) dx + o_p(1). \quad (6.149)$$

Assim, de (6.148) e (6.149) provamos (6.147).

Dado $\epsilon > 0$, por (f_1) e (f_2) , existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s)| < \epsilon \quad \text{sempre que } |s| < \delta$$

e por (f_3) , existe $c_{\epsilon} > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon |s| + c_{\epsilon} |s|^{q-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$|F(s)| \leq \epsilon |s| + C_{\epsilon} |s|^q \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (6.150)$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t) dt$ e $C_{\epsilon} = \frac{c_{\epsilon}}{q}$.

Segue-se, das estimativas anteriores e pelo Teorema 4.24, que

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \|u\|_{BV_a(\Omega),1} - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u) dx \\ &\geq \|u\|_{BV_a(\Omega),1} - \epsilon \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u| dx - C_{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^q dx \\ &\geq (1 - \epsilon C_1) \|u\|_{BV_a(\Omega),1} - C_{\epsilon} C_q \|u\|_{BV_a(\Omega),1}^q. \end{aligned}$$

Consideremos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $1 - \epsilon C_1 > 1/2$. Assim, se $\|u\|_{BV_a(\Omega),1} \leq \rho$, onde $0 < \rho < \left(\frac{(1 - \epsilon C_1) - 1/2}{C_\epsilon C_q} \right)^{\frac{1}{q-1}}$, então

$$\Phi(u) \geq \frac{\|u\|_{BV_a(\Omega),1}}{2}. \quad (6.151)$$

Note que, pela mesma argumentação para obter (6.149), pode-se obter também que

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(u) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u) dx.$$

para todo $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,\bar{p}}(\Omega)$. Mas isso e a desigualdade de Young implicam que

$$\Phi(u) + o_p(1) \leq I_p(u) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(u) dx. \quad (6.152)$$

Observe que, para $\gamma \in \Gamma_p$, a continuidade de $t \mapsto I_p(\gamma(t)) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(\gamma(t)) dx$ e sendo $I_p(e) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(e) dx < 0$, temos que existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\|\gamma(t_0)\|_{BV_a(\Omega),1} = \rho. \quad (6.153)$$

Assim, de (6.151), (6.152) e (6.153), obtemos que

$$I_p(w_p) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(w_p) = \inf_{\gamma \in \Gamma_p} \max_{t \in [0,1]} \left(I_p(\gamma(t)) - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F_p(\gamma(t)) dx \right) \geq \frac{\rho}{2} + o_p(1)$$

e fazendo $p \rightarrow 1^+$, temos

$$\Phi(w) > 0,$$

ou seja, w é não trivial o que finaliza a prova do Teorema 4.4. $\square$

Corolário 4.43. *Se $u \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $\frac{1}{|x|^b} f(w) \in \partial \|u\|_{BV(\Omega),1}$, então u é uma solução para o problema (1.1).*

4.7 Prova do Teorema 4.4 por métodos variacionais

Para começar, consideremos o funcional energia $\Phi : BV_a(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u) dx \\ &= \mathcal{J}_a(u) - \mathcal{F}_b(u), \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{J}_a(u) = \|u\|_{BV_a(\Omega),1}$$

e

$$\mathcal{F}_b(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u) dx.$$

Note que, $\mathcal{F}_b \in C^1(BV_a(\Omega))$. Também, seguindo os argumentos de [12], é possível mostrar que o funcional $\mathcal{J}_a$ admite algumas derivadas direcionais. Mais precisamente, dado $u \in BV_a(\Omega)$, para todo $v \in BV_a(\Omega)$ tal que $(Dv)^s$ é absolutamente contínua com respeito à $(Du)^s$, $(Dv)^a = 0$ q.t.p. em $\{x \in \Omega : (Du)^a(x) = 0\}$ e $v \equiv 0$, $\mathcal{H}^{N-1}$ -q.t.p. em $\{x \in \partial\Omega : u(x) = 0\}$, segue-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'_a(u)v &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \frac{(Du)^a(Dv)^a}{|(Du)^a|} dx + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \frac{Du}{|Du|}(x) \frac{Dv}{|Dv|}(x) |(Dv)|^s + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} \text{sgn}(u)v d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \quad (7.154)$$

Em particular, para $v = u$ tem-se

$$\mathcal{J}'_a(u)u = \mathcal{J}_a(u). \quad (7.155)$$

Então, a derivada direcional $\Phi'(u)u$ existe e

$$\Phi'(u)u = \|u\|_{BV_a(\Omega),1} - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u)u dx. \quad (7.156)$$

Note que Φ pode ser escrito como diferença entre um funcional Lipschitz e um suave em $BV_a(\Omega)$. Tomando em conta a teoria de subdiferenciais de Clarke (ver [25, 28]), diz-se que $w \in BV_a(\Omega)$ é um ponto crítico de Φ se $0 \in \partial\Phi(w)$, onde $\partial\Phi(w)$ denota o gradiente generalizado de Φ em w . Isso é equivalente a que $\mathcal{F}'(w) \in \partial\mathcal{J}_a(w)$ e, como $\mathcal{J}_a$ é convexo, essa relação pode ser escrita como

$$\mathcal{J}_a(v) - \mathcal{J}_a(w) \geq \mathcal{F}'(w)(v - w), \quad \forall v \in BV_a(\Omega). \quad (7.157)$$

De agora em diante, todo $w \in BV_a(\Omega)$ tal que estabelece-se (7.157) será chamada de ponto crítico de Φ .

Tendo em vista que, o funcional Φ é a diferença entre um funcional Lipschitz e um suave, naturalmente o Teorema do Passo da Montanha que aplicaremos não será o usual e sim, a versão que é dada no trabalho [33, Theorem 4,1]. Com tais considerações, verifiquemos que Φ satisfaz as duas condições dessa versão do Teorema do Passo da Montanha.

Por (6.150) e a imersões contínuas de $BV_a(\Omega)$, segue-se que

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \|u\|_{BV_a(\Omega),1} - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u) dx \\ &\geq \|u\|_{BV_a(\Omega),1} - \epsilon \|u\|_{L_b^1(\Omega)} - A_{\epsilon} \|u\|_{L_b^q(\Omega)}^q \\ &= \|u\|_{BV_a(\Omega),1} \left(1 - \epsilon C - c_3 \|u\|_{BV_a(\Omega),1}^{q-1} \right), \end{aligned}$$

para todo $u \in BV_a(\Omega)$.

Seja $\epsilon > 0$ tal que $1 - \epsilon C > 0$ e $\rho > 0$ satisfazendo

$$0 < \rho < \left(\frac{1 - \epsilon C}{c_3} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Se $\|u\|_{BV_a(\Omega),1} = \rho$ então

$$\Phi(u) \geq \alpha > 0,$$

onde $\alpha = \rho(1 - \epsilon C - c_3 \rho^{q-1})$ e assim, a primeira condição do Teorema do Passo da Montanha está verificada.

Agora, verificaremos a segunda condição do Teorema do Passo da Montanha. Pela condição (f_4) existem $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(s) \geq d_1 |s|^\mu - d_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (7.158)$$

Sejam $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ satisfazendo $\phi \neq 0$ e $t > 0$. Então

$$\Phi(t\phi) \leq t \|\phi\|_{BV_a(\Omega),1} - d_1 t^\mu \|\phi\|_{L^\mu \Omega}^\mu + d_2 |\text{supp}(\phi)| \rightarrow -\infty,$$

quando $t \rightarrow +\infty$ pois $\mu > 1$. Assim, podemos escolher $t\phi =: e \in BV_a(\Omega)$ tal que $\Phi(e) < 0$. Também, podemos supor que $t > 0$ é tal que

$$\|e\|_{BV_a(\Omega),1} = \|t\phi\|_{BV_a(\Omega),1} > \rho.$$

Logo a segunda condição do Teorema do Passo da Montanha fica verificada também. Consequentemente, pelo Teorema do Passo da Montanha (ver [33, Theorem 4.1]) existem sequências $\tau_n \rightarrow 0$ e $(w_n) \subset BV_a(\Omega)$ satisfazendo as seguintes condições

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(w_n) = c, \quad (7.159)$$

onde c é dado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], BV_a(\Omega)); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

$$(2) \quad \|v\|_{BV_a(\Omega),1} - \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} \geq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^b} f(w_n)(v - w_n) dx - \tau_n \|v - w_n\|_{BV_a(\Omega),1}, \quad (7.160)$$

para todo $v \in BV_a(\Omega)$.

Mostraremos que a sequência (w_n) é limitada em $BV_a(\Omega)$. De fato, se tomamos $v = w_n + tw_n$, dividindo por t e fazendo $t \rightarrow 0^\pm$ em (7.160), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w_n) w_n dx - \tau_n \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} &\leq \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w_n) w_n dx + \tau_n \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1}. \end{aligned} \quad (7.161)$$

Então, por (f_4) e (7.161), tem-se que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \Phi(w_n) \\ &= \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} - \int_{\Omega \cap [w_n \leq s_0]} \frac{1}{|x|^b} F(w_n) dx - \int_{\Omega \cap [w_n > s_0]} \frac{1}{|x|^b} F(w_n) dx \\ &\geq \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} - C - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega \cap [w_n > s_0]} \frac{1}{|x|^b} f(w_n) w_n dx \\ &\geq \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} - C - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w_n) w_n dx \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\mu} - \frac{\tau_n}{\mu}\right) \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} - C \\ &\geq C \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} - C + o_n(1), \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ uniforme em $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, (w_n) é limitada em $BV_a(\Omega)$.

Segue da limitação de $(w_n) \subset BV_a(\Omega)$ e pelo Teorema 4.25, que existe $w \in BV_a(\Omega)$ tal que

$$w_n \rightarrow w \quad \text{em } L_b^s(\Omega) \text{ para todo } s \in \left[1, \frac{N}{N-(1+a-b)}\right). \quad (7.162)$$

Mas isso implica que, pelo Teorema 4.7 de [21], a menos de subsequência

$$w_n(x) \rightarrow w(x) \quad \text{q.t.p. em } x \in \Omega \quad (7.163)$$

e existe $g \in L_b^s(\Omega)$ tal que

$$|w_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \quad (7.164)$$

Agora, mostraremos que w é um ponto crítico de Φ , isto é, verificaremos que w satisfaz (7.157). De fato, por (7.162) e pela semicontinuidade de $\mathcal{J}_a$ com respeito à convergência em $L^1(\Omega)$, temos

$$\|w\|_{BV_a(\Omega),1} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1}. \quad (7.165)$$

Note que, por (f_1) , (f_3) e (7.163) temos que

$$f(w_n(x))w_n(x) \rightarrow f(w(x))w(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

quando $p \rightarrow 1^+$, e de (7.164) segue-se que

$$|f(w_n(x))w_n(x)| \leq c_1 g(x) + c_2 g(x)^q,$$

onde $g \in L_b^q(\Omega)$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w_n) w_n dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) w dx. \quad (7.166)$$

Seguindo o mesmo raciocínio prévio pode-se provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w_n) v dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) v dx. \quad (7.167)$$

Então, tomando o $\limsup$ em ambos os lados de (7.160), por (7.165), (7.166) e (7.167) temos que w satisfaz

$$\|v\|_{BV_a(\Omega),1} - \|w\|_{BV_a(\Omega),1} \geq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w)(v - w) dx \quad \text{para todo } v \in BV_a(\Omega), \quad (7.168)$$

ou seja, w é um ponto crítico de Φ . Resta provar que esse ponto crítico é não trivial.

Tomando $v = w + tw$ em (7.168) e fazendo $t \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\|w\|_{BV_a(\Omega),1} \geq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) w dx. \quad (7.169)$$

Da mesma forma, se fizermos $t \rightarrow 0^-$, obtemos a desigualdade contrária. Assim,

$$\|w\|_{BV_a(\Omega),1} = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) w dx. \quad (7.170)$$

Assim, fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (7.161), por (7.166) e (7.170), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{BV_a(\Omega),1} = \|w\|_{BV_a(\Omega),1}. \quad (7.171)$$

Note que, pela mesma argumentação para calcular (7.166) pode-se provar também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(w_n) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(w) dx. \quad (7.172)$$

Assim, das convergências (7.159), (7.171), (7.172) temos

$$\Phi(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(w_n) = c > 0$$

e então w é um ponto crítico não trivial de Φ .

Nosso próximo passo será verificar que $w \in L^\infty(\Omega)$. Para este fim, considere $k > 0$ e a função $G_k(s)$ definida em (6.115). Tomando $v = w \pm G_k(w)$ em (7.168), estabelece-se

$$\pm \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) G_k(w) dx \leq \|w \pm G_k(w)\|_{BV_a(\Omega),1} - \|w\|_{BV_a(\Omega),1} \leq \|G_k(w)\|_{BV_a(\Omega),1}.$$

Assim, inferimos que

$$\|G_k(w)\|_{BV_a(\Omega),1} = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(w) G_k(w) dx.$$

Por outro lado, raciocinando como na prova do Lema 4.41, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |G_k(w)|^{1_a^*} dx \right)^{\frac{1}{1_a^*}} \\ & \leq C \left(\int_{\{|w| \geq k\}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w|^{q-1})^{\frac{N}{1+a-b}} dx \right)^{\frac{1+a-b}{N}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |G_k(w)|^{1_a^*} dx \right)^{\frac{1}{1_a^*}}, \end{aligned}$$

onde $1_a^* = \frac{N}{N-(1+a-b)}$. Desde que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{|w| \geq k\}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w|^{q-1}) dx = 0,$$

podemos encontrar $k_0 > 0$ tal que

$$C \left(\int_{\{|w| \geq k_0\}} \frac{1}{|x|^b} (1 + |w|^{q-1})^{\frac{N}{1+a-b}} dx \right)^{\frac{1+a-b}{N}} < 1$$

e então

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |G_k(w)|^{1_a^*} dx \right)^{\frac{1}{1_a^*}} = 0.$$

Portanto, $G_{k_0}(w) = 0$ e assim $|w| \leq k_0$.

Como uma consequência do Corolário 4.43, desde que $w \in BV_a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfaz (7.157), ela satisfaz também todas as condições da Definição 4.33.

Resta apenas justificar que w é uma solução de menor energia, i.e., que w possui o menor nível de energia entre todas as soluções de variação limitada. Para isso, primeiro definimos o conjunto de Nehari, $\mathcal{N}$, por

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{u \in BV_a(\Omega) \setminus \{0\} : \mathcal{J}'_a(u)u = \mathcal{F}'_b(u)u\} \\ &= \left\{ u \in BV_a(\Omega) \setminus \{0\} : \|u\|_{BV_a(\Omega),1} = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u) u dx \right\}.\end{aligned}$$

Logo, usando o mesmo tipo de argumento de Rabinowitz (ver [62]), o qual trata de estudar o caminho $t \mapsto \Phi(tv)$ e verificar que isto tem um único ponto de máximo $t_v > 0$, o qual é tal que $t_v v \in \mathcal{N}$ ((f_5) é obrigatório para provar a unicidade), desde que f satisfaz (f_1) – (f_5), podemos ver que $\mathcal{N}$ é radialmente homeomorfo à esfera unitária em $BV_a(\Omega)$ e também que o nível minimax c satisfaz

$$c = \inf_{v \in BV_a(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t > 0} \Phi(tv) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \Phi(v).$$

Finalmente, como w é tal que $\Phi(w) = c$, temos provado o desejado, e assim w é uma solução que tem a menor energia entre todas as soluções.

5 Método de Nehari nodal aplicado a um problema anisotrópico envolvendo o operador 1-laplaciano

5.1 O problema

Neste capítulo, novamente lidaremos com o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \frac{Du}{|Du|} \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) é um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitz $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$, $0 < a < N - 1$ e $a < b < a + 1$. Porém a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(f₁) $f \in C^1(\mathbb{R})$;

(f₂) Existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^\alpha} = 0$;

(f₃) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $1 < q < \frac{N}{N-(1+a-b)}$ tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2 |s|^{q-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

(f₄) Seja $F(t) = \int_0^t f(s) ds$. Existe $\mu > 1$ tal que

$$0 < \mu F(s) \leq f(s)s, \quad \forall |s| \geq s_0;$$

(f₅) $f'(s) > (q - 1) \frac{f(s)}{s}$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observação 5.1. A condição (f₅) implica que a aplicação $s \mapsto \frac{1}{q} f(s)s - F(s)$ é estritamente crescente (resp. decrescente) para $s > 0$ (resp. $s < 0$).

O principal resultado desse capítulo é o seguinte.

Teorema 5.2. *Assuma que $(f_1) - (f_5)$ são satisfeitas. Então existe uma solução de variação limitada $u_0 \in BV_a(\Omega)$ que muda de sinal, isto é, u_0 é tal que, existem $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $[\mathbf{z}, \nu] \in L^\infty(\partial\Omega)$ com $\|[\mathbf{z}, \nu]\|_\infty \leq \|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ tais que*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{1}{|x|^a}\mathbf{z}\right) = \frac{1}{|x|^b}f(u_0) & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ \left(\frac{1}{|x|^a}\mathbf{z}, Du_0\right) = \frac{1}{|x|^a}|Du_0| & \text{no sentido de medidas,} \\ [\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u_0) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Observação 5.3. No teorema acima, $[\mathbf{z}, \nu]$ denota o traço fraco considerada no capítulo anterior.

5.2 Resultados preliminares

Para a prova do teorema acima nós também faremos uso da teoria de grau (Brouwer) como é apresentada no texto [62]. Essa teoria está interessada com a existência e multiplicidade de soluções da equação

$$\varphi(x) = b, \quad (2.3)$$

com $\varphi \in C^1(\bar{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^N)$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado e, $b \in \mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\mathcal{O})$.

Suponha que $\varphi'(x)$ seja não singular se $\varphi(x) = b$. Então, o Teorema da Função Inversa mostra que as soluções de (2.3) são isoladas. Por hipóteses $b \notin \varphi(\partial\mathcal{O})$ e $\bar{\mathcal{O}}$ é compacto. Assim, (2.3) pode ter um número finito de soluções em $\mathcal{O}$. Logo definimos o grau (Brouwer) de φ com respeito a $\mathcal{O}$ e b , denotado por $d(\varphi, \mathcal{O}, b)$, como

$$d(\varphi, \mathcal{O}, b) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b) \cap \mathcal{O}} \operatorname{sign} \det \varphi'(x),$$

onde $\det A$ denota o determinante da matriz quadrada A e a função $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ é tal que $\operatorname{sign}(t) = 1$ se $t > 0$, $\operatorname{sign}(t) = -1$ se $t < 0$ e $\operatorname{sign}(0) = 0$.

O grau (Brouwer) satisfaz a seguinte propriedade de continuidade.

Proposição 5.4. *Se ψ estiver suficientemente próxima de φ com a topologia induzida pela norma:*

$$\|\xi\|_{C^1} = \|\xi\|_\infty + \|\xi'\|_\infty \quad \text{para todo } \xi \in C^1(\bar{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^N),$$

então,

$$d(\varphi, \mathcal{O}, b) = d(\psi, \mathcal{O}, b).$$

Proposição 5.5. *Se $H \in C([0, 1] \times \bar{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin H([0, 1] \times \partial\mathcal{O})$, então*

$$d(H(t, \cdot), \mathcal{O}, b) = M \quad \text{para todo } t \in [0, 1],$$

onde M é uma constante.

Corolário 5.6. *Se $\varphi, \psi \in C(\bar{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^N)$, $\varphi = \psi$ sobre $\partial\mathcal{O}$, e $b \in \mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\mathcal{O})$, então*

$$d(\varphi, \bar{\mathcal{O}}, b) = d(\psi, \bar{\mathcal{O}}, b).$$

5.3 Problemas aproximados envolvendo o operador p -Laplaciano

Seja $1 < \bar{p} < \alpha + 1$ e assim $\bar{p} < N < \frac{N}{1+a-b}$. Desde que, $0 < a < N - 1$ e $\mu > 1$, podemos assumir que $\bar{p}$ também satisfaz

$$a < \frac{N - \bar{p}}{\bar{p}} < N - 1, \quad \mu > \bar{p} \quad \text{e} \quad \bar{p} < q < \frac{N\bar{p}}{N - \bar{p}(1 + a - b)}.$$

Sendo assim, para $1 < p \leq \bar{p}$ tem-se que

$$p < \frac{N}{1 + a - b}, \quad a < \frac{N - p}{p}, \quad \mu > p \quad \text{e} \quad p < q < \frac{Np}{N - p(1 + a - b)}.$$

Agora, para cada $p \in (1, \bar{p}]$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde a função f é a mesma que no Problema (1.1). Porém, considerando as condições $(f_2) - (f_5)$, estabelecemos as seguintes condições em f :

$$(f_{2p}) \quad \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0;$$

$$(f_{3p}) \quad \text{Existem } c_1, c_2 > 0 \text{ e } q \in (p, \frac{Np}{N - p(1 + a - b)}) \text{ tais que}$$

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2 |s|^{q-1}, \quad s \in \mathbb{R};$$

$$(f_{4p}) \quad \text{Seja } F(s) = \int_0^s f(t) dt. \text{ Existe } \mu > p \text{ tal que}$$

$$0 < \mu F(s) \leq f(s)s \quad \text{para todo } |s| \geq s_0;$$

$$(f_{5p}) \quad \text{Aplicação } s \mapsto \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} \text{ é crescente em } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Observação 5.7. (a) Dado $\epsilon > 0$, as condições (f_{2p}) e (f_{3p}) implicam que existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon |s|^{p-1} + C_\epsilon |s|^{q-1} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Mais ainda, integrando tem-se

$$|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{p} |s|^p + \frac{C_\epsilon}{q} |s|^q \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

(b) A condição (f_{4p}) implica que existem $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(s) \geq d_1 |s|^\mu - d_2 \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

5.3.1 O funcional energia associado ao Problema (3.4)

Definimos o funcional energia $I_p : \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao Problema (1.1) por

$$I_p(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u) dx,$$

com derivada,

$$I'_p(u)v = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u)v dx \quad \forall v \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega).$$

Consideremos também o funcional $\Phi_p : \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_p(u) = I_p(u) + \frac{p-1}{p} |\Omega|.$$

Note que, os pontos críticos do funcional Φ_p são os mesmos que I_p . Além disso, como $\mathcal{D}_{0,a}^{1,\bar{p}}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \in (1, \bar{p}]$, para $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,\bar{p}}(\Omega)$ fixo, segue-se da desigualdade de Young que a família $(\Phi_p(u))_{1 < p \leq \bar{p}}$ é não decrescente.

Para $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ definamos

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \min\{u(x), 0\} \quad \text{q.t.p. em } x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Observe que,

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x) \quad \text{e} \quad |u(x)| = u^+(x) - u^-(x) \quad \text{q.t.p. em } x \in \Omega.$$

Proposição 5.8. *O espaço $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reticulado, isto é, se $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ então*

$$u^+, u^- \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Segue imediatamente do Lema 1.23 de [40] e ao considerar a Observação 4.14 do Capítulo anterior. $\square$

Observação 5.9. Dado $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ com $u^{\pm} \neq 0$, pelos argumentos da prova do Lema 2.2 de [18], existem $t, s > 0$ tais que

$$I'_p(tu^+)u^+ = 0 \quad \text{e} \quad I'_p(su^-)u^- = 0.$$

Definimos o conjunto de Nehari Nodal associada ao Problema (3.4) por

$$\mathcal{N}_p^{\pm} = \{u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega); u^{\pm} \neq 0 \text{ e } \Phi'_p(u^{\pm})u^{\pm} = 0\}.$$

Note que, o conjunto acima definido não é vazio pela Observação 5.9.

Proposição 5.10. *Seja $r \in \left[1, \frac{N}{N-(a+1-b)}\right)$ fixo. As aplicações $M : L_b^r(\Omega) \rightarrow L_b^r(\Omega)$, $m : L_b^r(\Omega) \rightarrow L_b^r(\Omega)$ definidas por*

$$Mu = u^+ \quad \text{e} \quad mu = u^-,$$

com u^+ e u^- definidas em (3.5), são contínuas em $L_b^r(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $(u_n) \subset L_b^r(\Omega)$ uma sequência e $u \in L_b^r(\Omega)$ tais que $u_n \rightarrow u$ em $L_b^r(\Omega)$. Note que, para n suficientemente grande temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |Mu_n - Mu|^r dx = \int_{\Omega \cap \{u>0\}} \frac{1}{|x|^b} |u_n - u|^r dx + \int_{\Omega \cap [u=0]} \frac{1}{|x|^b} |Mu_n|^r dx. \quad (3.6)$$

Como $u_n \rightarrow u$ em $L_b^r(\Omega)$, a menos de subsequência, temos que

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega$$

e existe $g \in L_b^r(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

Assim, desde que $|Mu_n(x)| = u_n^+(x) \leq |u_n(x)|$, temos

$$|Mu_n(x)|^r \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega \cap [u = 0]$$

e

$$|Mu_n|^r \leq g^r(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega \cap [u = 0].$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_{\Omega \cap [u=0]} \frac{1}{|x|^b} |Mu_n|^r dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Consequentemente, de (3.7) em (3.6), tem-se

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |Mu_n - Mu|^r dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto, M é contínua em $L_b^r(\Omega)$. Por uma argumentação semelhante pode-se provar que também m é contínua nesse espaço. $\square$

Definição 5.11. Seja $u \in L^1(\Omega)$. Dizemos que u **muda de sinal** se $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$ em $L^1(\Omega)$.

O resultado principal dessa seção é o seguinte.

Teorema 5.12. *Suponha que f satisfaz (f_1) , $(f_{2p}) - (f_{5p})$. Então o Problema (3.4) possui uma solução que muda de sinal, $u_p \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$, que tem a menor energia entre todas as soluções que mudam de sinal, isto é, u_p satisfaz*

$$\Phi_p(u_p) = \min_{v \in \mathcal{N}_p^{\pm}} \Phi_p(v). \quad (3.8)$$

Demonstração. Em primeiro lugar, mostraremos que o funcional Φ_p é limitado inferiormente em $\mathcal{N}_p^{\pm}$. De fato, seja $u \in \mathcal{N}_p^{\pm}$ com $u = u^+ + u^-$, então $\Phi_p'(u)u = 0$ e pela condição (f_{4p}) temos

$$\begin{aligned} \Phi_p(u) &= \Phi_p(u) - \frac{1}{\mu} \Phi_p'(u)u \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) \|u\|_{1,ap}^p - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left(\frac{1}{\mu} f(u)u - F(u) \right) dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) \|u\|_{1,ap}^p - C, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $C > 0$ é tal que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left(\frac{1}{\mu} f(u)u - F(u) \right) dx \leq C \quad \forall u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega). \quad (3.10)$$

Por outro lado, da Observação 5.7 (a) e das imersões contínuas de $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ em $L_{ap}^q(\Omega)$ para $q \in \left[1, \frac{Np}{N-p(a+1-b)}\right]$ (Teorema 4.17 do Capítulo prévio), segue-se que

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,ap}^p &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u)u dx \\ &\leq \epsilon \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^p dx + C_{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u|^q dx \\ &\leq C\epsilon \|u\|_{1,ap}^p + CC_{\epsilon} \|u\|_{1,ap}^q, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante de imersão de $BV_a(\Omega)$. Assim, escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $1 - C\epsilon > 0$ e desde que $p < q$, temos que

$$\|u\|_{1,ap} \geq \left(\frac{1 - C\epsilon}{CC_{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{q-p}} > 0, \quad \forall u \in \mathcal{N}_p^{\pm}. \quad (3.11)$$

Logo, de (3.9) e (3.11) temos que Φ_p é limitada inferiormente em $\mathcal{N}_p^{\pm}$ e estabelece-se que

$$c := \inf_{u \in \mathcal{N}_p^{\pm}} \Phi_p(u) \geq \left(\frac{1 - C\epsilon}{CC_{\epsilon}} \right)^{\frac{p}{q-p}} > 0.$$

Seja (u_n) uma sequência em $\mathcal{N}_p^{\pm}$ tal que

$$\Phi_p(u_n) \rightarrow c \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Note que, por (3.9) a sequência (u_n) é limitada em $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$. Assim, desde que $\|u_n\|_{1,ap} = \|u_n^+\|_{1,ap} + \|u_n^-\|_{1,ap}$, segue-se da reflexividade de $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ e das imersões compactas de $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ (ver Teorema 4.17 do Capítulo 4), que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad u_n^+ \rightharpoonup u_1, \quad u_n^- \rightharpoonup u_2 \quad \text{em } \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad (3.12)$$

$$u_n \rightarrow u, \quad u_n^+ \rightarrow u_1, \quad u_n^- \rightarrow u_2 \quad \text{em } L_b^r(\Omega) \text{ com } r \in \left[p, \frac{Np}{N-p(a+1-b)} \right), \quad (3.13)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Mais ainda, pela Proposição 5.10 tem-se que $u_1 = u^+ \geq 0$ e $u_2 = u^- \leq 0$.

Afirmção: $u^{\pm} \neq 0$. Suponha que $u^{\pm} = 0$ e assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n^{\pm}|^q dx = 0. \quad (3.14)$$

Como $u_n^{\pm} \in \mathcal{N}_p^{\pm}$, pela Observação 5.7 (a) e a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \|u_n^{\pm}\|^p &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u_n^{\pm})u_n^{\pm} dx \\ &\leq \epsilon \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n^{\pm}|^p dx + C_{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n^{\pm}|^q dx \\ &\leq \epsilon \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n^{\pm}|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} dx \right)^{\frac{q-p}{q}} + C_{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} |u_n^{\pm}|^q dx \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim, por (3.14) temos que $\|u_n^\pm\|^p \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, o que gera uma contradição em (3.11) quando $u = u_n^\pm$ e fazer $n \rightarrow +\infty$. Logo, a afirmação é verdadeira.

Consequentemente, segue-se da Observação 5.9, que existem $\hat{t}, \hat{s} > 0$ tais que

$$\Phi'_p(\hat{t}u^+)\hat{t}u^+ = 0 \quad \text{e} \quad \Phi'_p(\hat{s}u^-)\hat{s}u^- = 0, \quad (3.16)$$

e assim $\Phi'_p(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-)(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) = 0$.

Agora provaremos que $\Phi_p(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) = c$ é satisfeita com $\hat{t}, \hat{s} = 1$. Observemos primeiro que $\hat{t}, \hat{s} \leq 1$. De fato, da semi-continuidade da norma de $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ com respeito à convergência fraca e (3.12), temos que

$$\|u^\pm\|_{1,ap}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n^\pm\|_{1,ap}^p. \quad (3.17)$$

Por outro lado, da Observação 5.7(a), (3.13) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u^\pm) u^\pm dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u_n^\pm) u_n^\pm dx \quad \text{e} \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u^\pm) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u_n^\pm) dx. \quad (3.19)$$

Sendo assim, usando (3.17) e (3.18) em (3.15), tem-se que

$$\|u^\pm\|^p \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u^\pm) u^\pm dx. \quad (3.20)$$

Mas, reunindo (3.20) com $\Phi'(\hat{t}u^+)\hat{t}u^+ = 0$ obtemos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left(\frac{f(\hat{t}u^+)}{|\hat{t}u^+|^{p-1}} - \frac{f(u^+)}{|u^+|^{p-1}} \right) |u^+|^p dx \leq 0.$$

Assim, pela condição (f_{5p}) temos que necessariamente $\hat{t} \leq 1$. Um raciocínio análogo nos permite afirmar que $\hat{s} \leq 1$.

Agora, da definição de c e (3.16) temos que

$$\begin{aligned} c &\leq \Phi_p(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) \\ &= \Phi_p(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) - \frac{1}{q} \Phi'_p(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-)(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-\|^p \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left[\frac{1}{q} f(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-)(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) - F(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) \right] dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Note que, como $\hat{s}, \hat{t} \leq 1$ e $\text{supp}(u^+) \cap \text{supp}(u^-) = \emptyset$, temos que

$$\|\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-\|_{1,ap}^p = \hat{t}^p \|u^+\|_{1,ap}^p + \hat{s}^p \|u^-\|_{1,ap}^p \leq \|u^+\|_{1,ap}^p + \|u^-\|_{1,ap}^p = \|u\|_{1,ap}^p \quad (3.22)$$

e pela Observação 5.1,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left[\frac{1}{q} f(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-)(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) - F(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) \right] dx \\
 & \leq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left[\frac{1}{q} f(\hat{t}u^+)(\hat{t}u^+) - F(\hat{t}u^+) \right] dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left[\frac{1}{q} f(\hat{s}u^-)(\hat{s}u^-) - F(\hat{s}u^-) \right] dx \\
 & = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left[\frac{1}{q} f(u)(u) - F(u) \right] dx.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Assim, usando (3.22) e (3.23) em (3.21) e por (3.17), (3.18) e (3.19), temos que

$$\begin{aligned}
 c & \leq \Phi_p(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) \\
 & \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u\|^p + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left[\frac{1}{q} f(u)(u) - F(u) \right] dx \\
 & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left[\frac{1}{q} f(u_n)(u_n) - F(u_n) \right] dx \\
 & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\Phi_p(u_n) - \frac{1}{q} \Phi'_p(u_n) u_n \right) = c.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Consequentemente, $\Phi_p(\hat{t}u^+ + \hat{s}u^-) = c$.

Note que, que se $\hat{t}, \hat{s} < 1$ a desigualdade em (3.23) seria estrita e com isso teríamos uma contradição em (3.24). Então, necessariamente $\hat{t} = \hat{s} = 1$ e com isso

$$u = u^+ + u^- \in \mathcal{N}_p^{\pm} \quad \text{e} \quad \Phi_p(u^+ + u^-) = c. \tag{3.25}$$

Resta provar que $\Phi'_p(u) = 0$. Para fazer isso, vamos argumentar por contradição.

Suponha que $\Phi'_p(u) \neq 0$. Então existe uma constante positiva $\alpha > 0$ e $v_0 \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$, $\|v_0\| = 1$ tais que

$$\Phi'_p(u)v_0 = 2\alpha > 0.$$

Desde que $\Phi_p \in C^1(\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega))$, pode-se escolher $r > 0$ tal que

$$\Phi'_p(v)v_0 = \alpha > 0, \quad \text{para todo } v \in B_r(u) \subset \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega).$$

Considere a função escalar

$$h(t, s) := \Phi_p(tu^+ + su^-) \quad \text{para todo } t, s > 0.$$

Note que, h possui um ponto de máximo global em $(t, s) = (1, 1)$. De fato, pela Observação 5.7 (a) e pelas imersões contínuas de $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ (ver Teorema 4.17 do capítulo anterior) obtemos que

$$h(t, s) = \Phi_p(tu^+ + su^-) > 0, \tag{3.26}$$

para $|(t, s)|$ suficientemente pequeno. Também, pela Observação 5.7(b), para $|(t, s)|$ suficientemente grande, tem-se

$$h(t, s) = \Phi_p(tu^+ + su^-) < 0. \tag{3.27}$$

Assim, de (3.26), (3.27) e pela continuidade de h , deduzimos que essa função possui um máximo global em algum $t, s > 0$. Agora, como h é diferenciável tem-se

$$\nabla h(t, s) = (\Phi'_p(tu^+ + su^-)u^+, \Phi'_p(tu^+ + su^-)u^-) = (\Phi'_p(tu^+)u^+, \Phi'_p(su^-)u^-) = (0, 0),$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u^+|^p dx &= \frac{1}{t^{p-1}} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(tu^+)u^+ dx \quad \text{e} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u^-|^p dx &= \frac{1}{s^{p-1}} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(su^-)u^- dx. \end{aligned}$$

Mas, como $u^{\pm} \in \mathcal{N}_p^{\pm}$, a condição (f_{5p}) implica que $t = s = 1$, ou seja, $(s, t) = (1, 1)$ é um ponto de máximo para a função h . Assim,

$$\Phi_p(u^+ + u^-) = \max_{t,s>0} \Phi_p(tu^+ + su^-). \quad (3.28)$$

Agora, considere $D := (d, l) \times (d, l) \subset \mathbb{R}^2$ com $0 < d < 1 < l$ tal que $\{tu^+ + su^-; (t, s) \in \overline{D}\} \subset B_r(u)$ e escolhamos $r' > 0$ tal que

$$\mathcal{B} = \overline{B_{r'}(u)} \subset B_r(u) \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \cap \{tu^+ + su^-; (t, s) \in \partial D\} = \emptyset. \quad (3.29)$$

Considere $\rho(v) := \text{dist}(v, \mathcal{B}^c)$ para todo $v \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$. Defina $T : \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ por

$$T(v) = -\rho(v)v_0 \quad \text{para todo } v \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega).$$

Note que, T é uma função Lipschitz e limitada em $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$. Assim, para cada $v \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \eta(\tau, v) &= T(\eta(\tau, v)) \quad \text{para todo } \tau > 0, \\ \eta(0, v) &= v \end{cases} \quad (3.30)$$

possui uma solução $\eta(\tau, v)$ e existe $\tau_0 > 0$ tal que, para todo $\tau \in [0, \tau_0]$ tem-se que

- (a) $\eta(\tau, v) = v$, para todo $v \in \mathcal{B}$;
- (b) $\tau \mapsto \Phi_p(\eta(\tau, v))$ é decrescente para todo $u \in \mathcal{B}$;
- (c) $\Phi_p(\eta(\tau, u)) \leq \Phi_p(u) - \frac{r'\alpha}{2}\tau$.

De fato, é claro que o Problema de Cauchy acima possui uma solução $\eta(\tau, v)$. Resta provar que existe $\tau_0 > 0$ tal que, para todo $\tau \in [0, \tau_0]$ estabelece-se os itens anteriores.

(a) Segue imediatamente da definição de $\mathcal{B}$. Na verdade, se $v \notin \mathcal{B}$ então $\rho(v) = 0$ e existe uma única solução do Problema (3.30), que é constante e igual a v .

(b) Note que, se $\eta(\tau, v) \in \mathcal{B}$ então

$$\Phi'_p(\eta(\tau, v))v_0 = \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \rho(\eta(\tau, v)) > 0.$$

Logo, derivando $\Phi_p(\eta(\tau, v))$ com respeito a τ , obtemos

$$\frac{d}{d\tau}\Phi_p(\eta(\tau, v)) = \Phi'_p(\eta(\tau, v))\eta'(\tau, v) \quad (3.31)$$

$$= \Phi'_p(\eta(\tau, v))T(\eta(\tau, v)) \quad (3.32)$$

$$= -\rho(\eta(\tau, v))\Phi'_p(\eta(\tau, v))v_0 \quad (3.33)$$

$$< 0. \quad (3.34)$$

Assim, $\tau \mapsto \Phi_p(\eta(\tau, v))$ é decrescente em τ .

(c) Seja τ_0 tal que $\eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$ para todo $\tau \in [0, \tau_0]$. Pode-se escolher, sem perda de generalidade,

$$\|\eta(\tau, u) - u\| \leq \frac{r'}{2} \Leftrightarrow \eta(\tau, u) \in \overline{B_{\frac{r'}{2}}(u)}, \quad \text{para todo } \tau \in [0, \tau_0].$$

Logo, $\rho(\eta(\tau, u)) = \text{dist}(\eta(\tau, u), \mathcal{B}^c) \geq \frac{r'}{2}$. Mas isso implica que

$$\frac{d}{d\tau}\Phi_p(\eta(\tau, u)) = -\rho(\eta(\tau, u))\alpha \leq -\frac{r'}{2}\alpha,$$

e integrando obtemos (c).

Definimos o caminho de deformação $\bar{\eta}_{\tau_0} : \bar{D} \rightarrow \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ por

$$\bar{\eta}_{\tau_0}(t, s) = \eta(\tau_0, tu^+ + su^-).$$

Afirmção: $\sup_{(t,s) \in \bar{D}} \Phi_p(\bar{\eta}_{\tau_0}(t, s)) < c$.

De fato, por (b) e pela condição inicial $\eta(0, v) = v$, temos

$$\Phi_p(\bar{\eta}_{\tau_0}(t, s)) = \Phi_p(\eta(\tau_0, tu^+ + su^-)) \leq \Phi_p(\eta(0, tu^+ + su^-)) \quad (3.35)$$

$$= \Phi_p(tu^+ + su^-) < \Phi_p(u^+ + u^-), \quad (3.36)$$

para todo $(t, s) \in \bar{D} \setminus \{(1, 1)\}$. Por (c), segue-se que

$$\Phi_p(\bar{\eta}_{\tau_0}(1, 1)) = \Phi_p(\eta(\tau_0, u^+ + u^-)) \quad (3.37)$$

$$\leq \Phi_p(u) - \frac{r'\alpha}{2}\tau_0 < \Phi_p(u) = c. \quad (3.38)$$

Consequentemente,

$$\bar{\eta}_{\tau_0}(\bar{D}) \cap \mathcal{N}_p^\pm = \emptyset. \quad (3.39)$$

Considere o campo $K : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$K(t, s) = \left(\frac{\Phi'_p(\bar{\eta}_{\tau_0}(t, s))(\bar{\eta}_{\tau_0}(t, s))^+}{t}, \frac{\Phi'_p(\bar{\eta}_{\tau_0}(t, s))(\bar{\eta}_{\tau_0}(t, s))^-}{s} \right).$$

Note que, se $(t, s) \in \partial D$, por (3.29) e (a) para $\tau = \tau_0$, temos

$$K(t, s) = (\Phi'_p(tu^+ + su^-)u^+, \Phi'_p(tu^+ + su^-)u^-) = \nabla h(t, s).$$

Então, pelo Corolário 5.6 obtemos

$$\deg(K, D, (0, 0)) = \deg(\nabla h, D, (0, 0)) = \text{sign}(\det \text{Hess } h(1, 1)) = -1,$$

onde $\text{Hess } h(s, t)$ é a matriz Hessiana definida por

$$\text{Hess } h(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s \partial t} \\ \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial t \partial s} & \frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial t^2} \end{bmatrix}.$$

Assim, pela teoria do Grau de Brower existe $(\bar{t}, \bar{s}) \in D$ tal que

$$K(\bar{t}, \bar{s}) = 0,$$

ou equivalentemente, $\bar{\eta}_{\tau_0}(\bar{t}, \bar{s}) \in \mathcal{N}_p^\pm$, o que gera uma contradição com (3.39). Assim $u = u^+ + u^-$ é um ponto crítico de Φ_p .

Portanto, u é uma solução que muda de sinal de (3.4) e por (3.25) ela tem a menor energia entre todas as soluções que mudam de sinal.

□

Lema 5.13. *Para cada $p \in (1, \bar{p}]$, seja $u_p \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$ uma solução do Problema (1.1). Então a família $(\Phi_p(u_p))_{1 < p \leq \bar{p}}$ é não decrescente.*

Demonstração. Sejam $p_1, p_2 \in (1, \bar{p}]$ tais que $p_1 \leq p_2$. Suponha que $u_{p_1} \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p_1}(\Omega)$ e $u_{p_2} = u_{p_2}^+ + u_{p_2}^- \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p_2}(\Omega)$ sejam soluções de (3.4) quando $p = p_1$ e $p = p_2$, respectivamente. Como $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p_2}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{0,a}^{1,p_1}(\Omega)$ e sendo $u_{p_2}^\pm \neq 0$, segue-se da Observação 5.9 que, existem $t, s > 0$ tais que

$$tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^- \in \mathcal{N}_{p_1}^\pm. \quad (3.40)$$

Desde que a aplicação $p \mapsto \Phi_p(u)$ é crescente e por (3.8), (3.28) e (3.40), temos que

$$\begin{aligned} \Phi_{p_2}(u_{p_2}) &\geq \Phi_{p_2}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \\ &\geq \Phi_{p_1}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \\ &\geq \Phi_{p_1}(u_{p_1}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

□

Lema 5.14. *Para $p \in (1, \bar{p}]$, seja u_p uma solução do problema (1.1). Então a família $(u_p)_{1 < p \leq \bar{p}}$ é limitada em $BV_a(\Omega)$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, note que pelo Lema 5.13, temos que

$$\Phi_p(u_p) \leq \Phi_{\bar{p}}(u_{\bar{p}}) \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}].$$

Logo, por (f_4) e $\Phi'(u_p) = 0$ temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{p}}(u_{\bar{p}}) &\geq \Phi_p(u_p) \\ &= \Phi_p(u_p) - \frac{1}{\mu} \Phi'(u_p) u_p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p|^p dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left(\frac{1}{\mu} f(u_p) u_p - F(u_p) \right) dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p|^p dx - C \\ &\geq \left(\frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p|^p dx - C, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde C é como em (3.10). Consequentemente, pela desigualdade de Young, temos que

$$\|u_p\|_{BV_a(\Omega),1} = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p| dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u_p| d\mathcal{H}^{N-1} \quad (3.43)$$

$$\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p} |\Omega| \quad (3.44)$$

$$\leq \left(\frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{\mu} \right)^{-1} (\Phi_{\bar{p}}(u_{\bar{p}}) + C) + |\Omega|. \quad (3.45)$$

Portanto, a sequência $(u_p)_{1 < p \leq \bar{p}}$ é limitada em $BV_a(\Omega)$. $\square$

Prova do Teorema 5.2 A prova consiste em mostrar as seguintes identidades:

- 1) $-\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u_0)$ q.t.p. em Ω ;
- 2) $\left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du_0 \right) = \frac{1}{|x|^a} |Du_0|$ como medidas de Radon em Ω ;
- 3) $[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u_0)$ sobre $\partial\Omega$.

1) Lembremos que, para cada $p \in (1, \bar{p}]$ o problema (3.4) possui uma solução u_p que satisfaz

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u_p) \varphi dx. \quad (3.46)$$

Além disso, pelo Lema 5.14, a família $(u_p)_{1 < p \leq \bar{p}}$ é limitada em $BV_a(\Omega)$. Assim, das imersões compactas nesse espaço (ver Teorema 4.25 do capítulo anterior), segue-se que existe $u_0 \in BV_a(\Omega)$ tal que

$$u_p \rightarrow u_0 \quad \text{em } L_b^s(\Omega) \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+, \quad (3.47)$$

para todo $1 \leq s < \frac{N}{N-(1+a-b)}$. Logo, pelo Teorema 4.7 de [21], a menos de subsequência, temos que

$$u_p(x) \rightarrow u_0(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+ \quad (3.48)$$

e existe $g \in L_b^s(\Omega)$ tal que

$$|u_p(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \quad (3.49)$$

Consequentemente, por (f_1) e (3.48) tem-se

$$f(u_p(x))\varphi(x) \rightarrow f(u_0(x))\varphi(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e também por (f_3) obtemos

$$|f(u_p)\varphi| \leq \|\varphi\|_{\infty} (c_1 + c_2 |u_p|^{q-1}) \leq \|\varphi\|_{\infty} (c_1 + c_2 g^{q-1}(x)) = h(x),$$

onde $h \in L_b^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u_p) \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u_0) \varphi dx, \quad (3.50)$$

para todo $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

Desde que, a família $(u_p)_{1 < p \leq \bar{p}}$ é limitada, temos pelo Lema 4.42 capítulo prévio, que existe $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ estabelece-se

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad (3.51)$$

quando $p \rightarrow 1^+$.

Portanto, de (3.50) e (3.51) em (3.46), quando $p \rightarrow 1^+$ obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} f(u_0) \varphi \, dx, \quad (3.52)$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Mas isso implica que

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) = \frac{1}{|x|^b} f(u_0) \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (3.53)$$

2) Agora, vamos verificar que

$$\left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du_0 \right) = \frac{1}{|x|^a} |Du_0| \quad \text{como medidas de Radon.} \quad (3.54)$$

De fato, pelo Lema 4.28 do capítulo prévio obtém-se

$$\int_B \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du_0 \right) \leq \int_B \left| \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du_0 \right) \right| \leq \int_B \frac{1}{|x|^a} |Du_0|, \quad (3.55)$$

para todo conjunto de Borel $B \subset \Omega$. Resta provar a desigualdade contrária, mas isso é equivalente a provar que

$$\left\langle \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du_0 \right), \varphi \right\rangle \geq \left\langle \frac{1}{|x|^a} |Du_0|, \varphi \right\rangle, \quad (3.56)$$

para toda função não negativa $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Porém, tal desigualdade decorre dos mesmos argumentos usados na Subseção 4.6.2 do Capítulo anterior. Assim, de (3.55) e (3.56) temos verificado (3.54).

3) Por outro lado, segue dos mesmos argumentos da Subseção 4.6.2 do capítulo prévio que

$$[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u_0) \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. em } \partial\Omega. \quad (3.57)$$

Para finalizar a prova mostremos que $u_0 \neq 0$. Considere o funcional $\Phi : BV_a(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \|u\|_{BV_a(\Omega),1} - \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u) \, dx.$$

Note que, se $u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega)$, pela desigualdade de Young temos que

$$\|u\|_{BV_a(\Omega)} = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u| \mathcal{H}^{N-1} \quad (3.58)$$

$$\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u|^p \, dx + \frac{p-1}{p} |\Omega|. \quad (3.59)$$

Mas isso implica que

$$\Phi(u) \leq \Phi_p(u) \quad \text{para todo } u \in \mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega).$$

Afirmção: $\lim_{p \rightarrow 1^+} \Phi_p(u_p) = \Phi(u_0)$.

De fato, como os itens 1), 2) e 3) são satisfeitas então

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{BV_a(\Omega),1} &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^a} |Du_0| + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x|^a} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z}, Du_0 \right) - \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{1}{|x|^a} [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= - \int_{\Omega} u_0 \operatorname{div} \left(\frac{1}{|x|^a} \mathbf{z} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u_0) u_0 dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(u_p) u_p dx + o_p(1) \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p|^p dx + o_p(1). \end{aligned} \tag{3.60}$$

Por outro lado, usando (3.48), (3.49) temos que

$$F(u_p(x)) \rightarrow F(u_0(x)) \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+, \tag{3.61}$$

$$|F(u_p(x))| \leq c_1 |u_p(x)| + c_2 |u_p(x)|^q \leq c_1 g(x) + c_2 g(x)^q = H(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \tag{3.62}$$

onde $H \in L_b^1(\Omega)$. Assim, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue-se que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u_0) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} F(u_p) dx + o_p(1). \tag{3.63}$$

Portanto, de (3.60) e (3.63) quando $p \rightarrow 1$, segue-se nossa afirmação.

Dado um $\epsilon > 0$, por (f_2) existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon \quad \text{sempre que } |s| < \delta. \tag{3.64}$$

Por outro lado, considerando $|s| \geq \delta$ e dividindo por $|s|^{q-1}$ em (f_3) , obtemos

$$\frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} \leq \frac{c_1}{\delta^{q-1}} + c_2 = C_{\epsilon}. \tag{3.65}$$

Assim, de (3.64) e (3.65) segue-se que

$$|f(s)| \leq \epsilon + C_{\epsilon} |s|^{q-1} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Integrando, obtemos que

$$|F(s)| \leq \epsilon |s| + \frac{C_{\epsilon}}{q} |s|^q \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, \tag{3.66}$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

Agora, usando (3.66) e as imersões contínuas de $BV_a(\Omega)$ (ver Teorema 4.24 do Capítulo anterior) temos

$$\Phi(u) \geq (1 - C\epsilon)\|u\|_{BV_a(\Omega),1} - \frac{C^q C_\epsilon}{q} \|u\|_{BV_a(\Omega),1}^q, \quad (3.67)$$

onde $C > 0$ é uma constante de imersão em $BV_a(\Omega)$.

Seja $\epsilon > 0$ com $1 - C\epsilon > \frac{1}{2}$ e $\rho > 0$ tal que

$$\left[\frac{[(\frac{1}{2} - C\epsilon) - \frac{1}{2}]q}{C^q C_\epsilon} \right]^{\frac{1}{q-1}} > \rho.$$

Assim, para $\|u\|_{BV_a(\Omega),1} \leq \rho$ em (3.67) obtemos que

$$\Phi(u) \geq \frac{\|u\|_{BV_a(\Omega),1}}{2}. \quad (3.68)$$

Por outro lado, como $u_p^\pm \in \mathcal{N}^\pm$ pode-se provar que a aplicação

$$(0, +\infty) \ni s \mapsto \Phi_p(su_p^\pm)$$

atinge o seu máximo em $s = 1$. De fato, como essa aplicação é diferenciável o candidato a ser ponto de máximo são os pontos críticos dele, isto é, $s > 0$ tais que

$$\frac{d}{ds} \Phi_p(su_p^\pm) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{ap}} |\nabla u_p^\pm|^p dx = \frac{1}{s^{p-1}} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} f(su_p^\pm) u_p^\pm dx. \quad (3.69)$$

Logo, por $u_p \in \mathcal{N}_p^\pm$ obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left(\frac{f(u_p^\pm)}{|u_p^\pm|^{p-1}} - \frac{f(su_p^\pm)}{|su_p^\pm|^{p-1}} \right) |u_p^\pm|^p = 0. \quad (3.70)$$

Mas isso implica que, por (f_{5p}) , $s = 1$.

Assim, de (3.68) para cada $p \in (1, \bar{p}]$ segue-se que

$$\begin{aligned} \Phi_p(u_p^\pm) &\geq \Phi_p\left(\frac{\rho u_p^\pm}{\|u_p^\pm\|}\right) \\ &\geq \Phi\left(\frac{\rho u_p^\pm}{\|u_p^\pm\|}\right) \\ &\geq \frac{\rho}{2}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde também foi usado a imersão contínua de $\mathcal{D}_{0,a}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow BV_a(\Omega)$. Por outro lado, observe que

$$\Phi_p(u_p^\pm) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left(\frac{1}{p} f(u_p^\pm) u_p^\pm - F(u_p^\pm) \right) dx,$$

para cada $p \in (1, \bar{p}]$. Então, se $u_p^\pm \rightarrow 0$ em $BV_a(\Omega)$, pelo crescimento subcrítico de f temos que

$$\Phi_p(u_p^\pm) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^b} \left(\frac{1}{p} f(u_p^\pm) u_p^\pm - F(u_p^\pm) \right) dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+, \quad (3.72)$$

o que gera uma contradição com (3.71) quando $p \rightarrow 1^+$. Assim $u_0^\pm \neq 0$, o que finaliza a prova do Teorema 5.2. $\square$

6 Um problema do tipo côncavo-convexo envolvendo o operador 1–laplaciano

6.1 O problema

Neste capítulo estudaremos a multiplicidade de soluções positivas para uma equação elíptica singular envolvendo o operador 1–Laplaciano. Mais precisamente, buscaremos as soluções positivas para o seguinte problema côncavo-convexo

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = \frac{\lambda}{u^\gamma} + u^{q-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) é um domínio limitado com fronteira Lipschitz, $\lambda > 0$ e $0 < \gamma < 1 < q < 1^* := N/(N-1)$.

O funcional energia associado a (1.1), denotado por $I : BV(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como

$$I(u) = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\Omega} F(u) dx, \quad (1.2)$$

onde F é a primitiva de

$$f(s) := \begin{cases} \frac{\lambda}{s^\gamma} + s^{q-1}, & \text{se } s > 0 \\ 0, & \text{se } s \leq 0. \end{cases}$$

Nosso principal resultado é o seguinte teorema.

Teorema 6.1. *Seja $0 < \gamma < 1 < q < 1^*$, então existe $\Lambda > 0$, tal que o problema (1.1) possui ao menos duas soluções não-negativas, para todo $\lambda < \Lambda$.*

Para mostrar o Teorema 6.1 faremos a abordagem do Problema (1.1) mediante o método das soluções aproximadas, isto é, primeiro consideraremos as soluções de problemas que envolvam o operador p –Laplaciano (ver (3.10) abaixo) para cada p próximo de 1, depois buscaremos estimativas para a família originada por tais soluções e finalmente faremos p tender a 1 e com isso, obter uma solução para (1.1).

6.2 Resultados preliminares

Nesta seção introduziremos alguns resultados e definições, que podem ser encontrados com mais detalhes em [6] e [27].

Daqui em diante consideraremos Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$.

Definição 6.2. Seja $u \in L^1(\Omega)$. Dizemos que u tem um **limite aproximado** em $x \in \Omega$ se existe $z \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - z| dy = 0. \quad (2.3)$$

Denotamos por S_u o conjunto de pontos $x \in \Omega$ onde a propriedade acima não é satisfeita. Para qualquer $x \in \Omega \setminus S_u$ o número z , unicamente determinado por (2.3), é denotado por $\tilde{u}(x)$.

Observação 6.3. No caso em que $\tilde{u}(x) = u(x)$ para $x \notin S_u$, isto é, x é um ponto de Lebesgue de u , dizemos que, u é **aproximadamente contínuo** em $x \notin S_u$.

Proposição 6.4. *Seja $u \in L^1(\Omega)$. Então,*

- (a) *S_u é um conjunto de Borel $\mathcal{L}^N$ -nulo e $\tilde{u} : \Omega \setminus S_u \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Borel, coincidindo $\mathcal{L}^N$ -q.t.p em $\Omega \setminus S_u$ com u .*
- (b) *Se $x \in \Omega \setminus S_u$ as funções $u \star \rho_\epsilon$ convergem pontualmente para $\tilde{u}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração: (Ver Proposição 3.64 de [6]).

Seja $x \in \Omega$ e $\nu \in \mathbb{R}^N$. Denotamos

$$B_\rho^+(x, \nu) = \{y \in B_\rho(x) : \langle y - x, \nu \rangle > 0\}$$

e

$$B_\rho^-(x, \nu) = \{y \in B_\rho(x) : \langle y - x, \nu \rangle < 0\}.$$

Definição 6.5. Sejam $u \in L^1(\Omega)$ e $x \in \Omega$. Dizemos que x é um ponto de **salto aproximado** de u se existem $a, b \in \mathbb{R}$ e $\nu \in S^{N-1}$ tais que $a \neq b$ e

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B_\rho^+(x, \nu)|} \int_{B_\rho^+(x, \nu)} |u(y) - a| dy = 0, \quad (2.4)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B_\rho^-(x, \nu)|} \int_{B_\rho^-(x, \nu)} |u(y) - b| dy = 0. \quad (2.5)$$

A tripla (a, b, ν) , unicamente determinada por (2.4) e (2.5) a menos de uma permutação de (a, b) e uma mudança de sinal de ν , é denotada por $(u^+(x), u^-(x), \nu(x))$. O conjunto de pontos de salto aproximado é denotado por J_u .

Proposição 6.6. *Seja $u \in L^1(\Omega)$. Então,*

- (a) *O conjunto J_u é um subconjunto de Borel de S_u e existem funções de Borel*

$$(u^+(x), u^-(x), \nu(x)) : J_u \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^{N-1},$$

tal que (2.4) e (2.5) estabelecem-se para qualquer $x \in J_u$.

(b) Se $x \in J_u$ as funções $u \star \rho_\epsilon$ convergem pontualmente para $\frac{u^+ + u^-}{2}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Definição 6.7. Seja $u \in BV(\Omega)$. Dizemos que $u^* : \Omega \setminus (S_u \setminus J_u) \rightarrow \mathbb{R}$ é o **representante preciso** de u quando é igual a $\tilde{u}$ em $\Omega \setminus S_u$ e $\frac{u^+ + u^-}{2}$ em J_u .

Proposição 6.8. *Seja $u \in BV(\Omega)$. Então as convoluções $u \star \rho_\epsilon$ convergem pontualmente para u^* no seu domínio quando $\epsilon \rightarrow 0$.*

6.2.1 Teoria generalizada de Anzellotti

Nesta subseção apresentaremos alguns dos resultados de uma extensão da teoria de Anzellotti desenvolvida em [27].

Denotamos por $\mathcal{DM}^\infty(\Omega)$ o espaço dos campos vetoriais $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ cuja divergência no sentido das distribuições é uma medida de Radon com variação total finita, isto é,

$$\mathcal{DM}^\infty(\Omega) = \{\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) ; \operatorname{div} \mathbf{z} \text{ é uma medida de Radon}\}.$$

Além disso, denotamos $\mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$ ao conjunto dos $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ que também pertencem a $\mathcal{DM}^\infty(\omega)$ para todo $\omega \subset \subset \Omega$.

Proposição 6.9. *Para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega)$, a medida $\mu = \operatorname{div} \mathbf{z}$ é absolutamente contínua com respeito a $\mathcal{H}^{N-1}$, isto é, $|\operatorname{div} \mathbf{z}| \ll \mathcal{H}^{N-1}$.*

Observação 6.10. (a) Desde que $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$ (ver Teorema 3.78 de [6]), temos que, pela Proposição 6.8,

$$u \star \rho_\epsilon \rightarrow u^* \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

(b) Segue-se da Proposição 6.9, que

$$u \star \rho_\epsilon \rightarrow u^* \quad \operatorname{div} \mathbf{z} - \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e assim, o representante preciso u^* de toda função $u \in BV(\Omega)$ é $\operatorname{div} \mathbf{z}$ -mensurável.

(c) Usando o Lema de Fatou obtemos

$$\int_{\Omega} |u^*| |\operatorname{div} \mathbf{z}| \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u \star \rho_\epsilon| |\operatorname{div} \mathbf{z}|,$$

onde $|\operatorname{div} \mathbf{z}|$ denota a variação total de $\operatorname{div} \mathbf{z}$. Logo, se $u \in L^1(\Omega, |\operatorname{div} \mathbf{z}|)$ temos que $u^* \in L^1(\Omega, \operatorname{div} \mathbf{z})$.

Para $u \in BV_{loc}(\Omega) \cap L^1(\Omega, \operatorname{div} \mathbf{z})$ e $z \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$, definimos a distribuição

$$\langle (z, Du), \varphi \rangle := \int_{\Omega} u^* \varphi \operatorname{div} \mathbf{z} - \int_{\Omega} u \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.6)$$

Note que, essa distribuição está bem definida em parte pela Observação 6.10 (c). Porém, essa distribuição depende do representante preciso de u , ou seja, se escolhermos outro representante, a distribuição poderia ser diferente.

Pode-se provar que a distribuição acima também é um medida de Radon.

Proposição 6.11. *Seja $u \in BV_{loc}(\Omega) \cap L^1(\Omega, \operatorname{div} \mathbf{z})$ e $z \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$. Então $(\mathbf{z}, Du)$ satisfaz*

$$|(\mathbf{z}, Du), \varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(A)} \int_A |Du|, \quad (2.7)$$

para todo conjunto aberto $A \subset\subset \Omega$ e para todo $\varphi \in C_c^\infty(A)$.

Corolário 6.12. *$(\mathbf{z}, Du)$ e $|(\mathbf{z}, Du)|$ são medidas de Radon. Além disso, essas medidas são absolutamente contínuas com respeito à medida $|Du|$ e*

$$\left| \int_B (\mathbf{z}, Du) \right| \leq \int_B |(\mathbf{z}, Du)| \leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(A)} \int_B |Du|,$$

estabelece-se para todo conjunto de Borel B e todo conjunto aberto A tal que $B \subset A \subset \Omega$. Em particular, se $u \in BV(\Omega)$, então a medida (z, Du) tem variação total finita.

Proposição 6.13. *Sejam $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$ e $u \in BV_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então $u\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$. Além disso, a seguinte fórmula estabelece-se no sentido de medidas*

$$\operatorname{div}(u\mathbf{z}) = (\operatorname{div} \mathbf{z})u^* + (\mathbf{z}, Du).$$

No trabalho [12], estabelece-se que, para toda $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega)$ o traço fraco sobre $\partial\Omega$ da componente normal de $\mathbf{z}$, a qual é denotada por $[\mathbf{z}, \nu]$, satisfaz

$$\|[\mathbf{z}, \nu]\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Por outro lado, a Proposição 2 de [11] (ver também [24, Lemma 2]) estabelece que, se $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$ então

$$u[\mathbf{z}, \nu] = [u\mathbf{z}, \nu].$$

Proposição 6.14. *Sejam $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $u^* \in L^1(\Omega, \operatorname{div} \mathbf{z})$. Então $u\mathbf{z} \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega)$ e a seguinte fórmula de Green estabelece-se*

$$\int_\Omega u^* \operatorname{div} \mathbf{z} + \int_\Omega (\mathbf{z}, Du) = \int_{\partial\Omega} [u\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (2.8)$$

Proposição 6.15. *Sejam $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$ e $v \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Se $v\mathbf{z} \in \mathcal{DM}^\infty(\Omega)$, então*

$$|[v\mathbf{z}, \nu]| \leq |v|_{\partial\Omega} \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \mathcal{H}^{N-1} \text{ q.t.p. sobre } \partial\Omega. \quad (2.9)$$

6.3 Um problema singular aproximado envolvendo o operador p -Laplaciano

Nesta seção consideraremos o seguinte problema elíptico quasilinear

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \frac{\lambda}{u^\gamma} + u^{q-1} & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.10)$$

onde $1 < p < q$ e $0 < \gamma < 1$.

Para encontrar soluções positivas de (3.10), consideraremos o funcional energia associado a (3.10), dado em $W_0^{1,p}(\Omega)$ por

$$I^p(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} F(u) dx, \quad (3.11)$$

onde F é a mesma que aparece no funcional I .

O objetivo desta seção é encontrar duas soluções positivas u_p e v_p para o problema (3.10) tais que

1. A solução u_p é um mínimo local de I^p ;
2. A solução v_p é uma solução fraca que minimiza o funcional I^p em um subconjunto do conjunto de Nehari, denotado por $\mathcal{N}_p$, e definido como

$$\mathcal{N}_p = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} ; \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} |u|^q dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx = 0 \right\}.$$

Enfatizamos que o estudo de problemas e funcionais relacionados a (3.10) e I^p é uma área ativa de pesquisa. O caso $p = 2$ foi considerado em [64, 13, 14, 41]. Para um caso mais geral $p > 1$, referenciamos a [38, 59, 16] (para problemas relacionados, ver [61, 60]).

Notação: Seja $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lebesgue mensurável, denotamos

$$[g > 0] = \{x \in \Omega ; g(x) > 0 \text{ q.t.p.}\}. \quad (3.12)$$

6.3.1 Conexão entre os funcionais I^p e I

Esta subseção está dedicada a analisar a conexão entre a geometria de I^p com a de I . Também vamos provar que é possível passar continuamente dos parâmetros associados a I^p para aqueles associados a I .

Lema 6.16. *Existe $\lambda^* > 0$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$,*

$$I(u) \geq \beta, \quad \text{para todo } u \in BV(\Omega) \text{ tal que } \|u\|_{BV(\Omega)} = \rho,$$

onde

$$0 < \rho < \left(q S_1^q |\Omega|^{\frac{q-1^*}{q-1}} \right)^{\frac{1}{q-1}},$$

$$\beta := \rho \left(1 - \frac{\lambda}{1-\gamma} S_1^{\gamma-1} |\Omega|^{\frac{1^*+\gamma-1}{1^*}} \rho^{-\gamma} - \frac{S_1^{-q}}{q} |\Omega|^{\frac{1^*-q}{1^*}} \rho^{q-1} \right) > 0$$

e

$$S_1 = \inf_{u \in BV(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{BV(\Omega)}}{\|u\|_{1^*}}. \quad (3.13)$$

Demonstração. Note que, a definição de F implica que

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{[u>0]} u^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_{[u>0]} u^q dx \\ &\geq \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{1^*} dx \right)^{\frac{1-\gamma}{1^*}} |\Omega|^{\frac{1^*-1+\gamma}{1^*}} \leq S_1^{\gamma-1} \|u\|_{BV(\Omega)}^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{1^*-1+\gamma}{1^*}}$$

e

$$\int_{\Omega} |u|^q dx \leq S_1^{-q} \|u\|_{BV(\Omega)}^q |\Omega|^{\frac{1^*-q}{1^*}},$$

onde S_1 é definida em (3.13), obtemos

$$I(u) \geq \|u\|_{BV(\Omega)} - \frac{\lambda}{1-\gamma} S_1^{\gamma-1} |\Omega|^{\frac{1^*-1+\gamma}{1^*}} \|u\|_{BV(\Omega)}^{1-\gamma} - \frac{S_1^{-q}}{q} |\Omega|^{\frac{1^*-q}{1^*}} \|u\|_{BV(\Omega)}^q \quad (3.14)$$

$$= \|u\|_{BV(\Omega)} \left(1 - \frac{\lambda}{1-\gamma} S_1^{\gamma-1} |\Omega|^{\frac{1^*-1+\gamma}{1^*}} \|u\|_{BV(\Omega)}^{-\gamma} - \frac{S_1^{-q}}{q} |\Omega|^{\frac{1^*-q}{1^*}} \|u\|_{BV(\Omega)}^{q-1} \right). \quad (3.15)$$

Note que, se $0 < \rho < \left(q S_1^q |\Omega|^{\frac{q-1^*}{1^*}} \right)^{\frac{1}{q-1}}$, temos que

$$1 - \frac{S_1^{-q}}{q} |\Omega|^{\frac{1^*-q}{1^*}} \rho^{q-1} > 0. \quad (3.16)$$

Assim, podemos escolher $\lambda^* > 0$ tal que

$$1 - \frac{\lambda^*}{1-\gamma} S_1^{\gamma-1} |\Omega|^{\frac{1^*-1+\gamma-1}{1^*}} \rho^{-\gamma} - \frac{S_1^{-q}}{q} |\Omega|^{\frac{1^*-q}{1^*}} \rho^{q-1} = 0.$$

Portanto, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e ρ satisfazendo (3.16) temos que

$$I(u) \geq \rho \left(1 - \frac{\lambda}{1-\gamma} S_1^{\gamma-1} |\Omega|^{\frac{1^*-1+\gamma-1}{1^*}} \rho^{-\gamma} - \frac{S_1^{-q}}{q} |\Omega|^{\frac{1^*-q}{1^*}} \rho^{q-1} \right) = \beta > 0,$$

onde $\|u\|_{BV(\Omega)} = \rho$. □

Lema 6.17. *Existe $\lambda_p^* > 0$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_p^*)$,*

$$I^p(u) \geq \beta_p, \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ tal que } \|u\|_{W_0^{1,p}} = \rho_p,$$

onde

$$0 < \rho_p < \left(\frac{q}{p} S_p^{\frac{q}{p}} |\Omega|^{\frac{q-p^*}{p^*}} \right)^{\frac{1}{q-p}},$$

$$\beta_p := \rho_p \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{1-\gamma} S_p^{\frac{\gamma-1}{p}} |\Omega|^{\frac{p^*-1+\gamma-1}{p^*}} \rho_p^{1-p-\gamma} - \frac{S_p^{\frac{-q}{p}}}{q} |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}} \rho_p^{q-p} \right) > 0$$

e

$$S_p = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|u\|_p^p}. \quad (3.17)$$

Além disso, podemos assumir que a família ρ_p , β_p e λ_p^* satisfaz:

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \rho_p = \rho, \quad \lim_{p \rightarrow 1^+} \beta_p = \beta \quad e \quad \lim_{p \rightarrow 1^+} \lambda_p^* = \lambda^*.$$

Demonstração. Usando a definição de F temos que

$$I^p(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{[u>0]} u^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_{[u>0]} u^q dx \quad (3.18)$$

$$\geq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx. \quad (3.19)$$

Como

$$\int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx \leq S_p^{\frac{\gamma-1}{p}} |\Omega|^{\frac{p^*-1+\gamma}{p^*}} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{1-\gamma}$$

e

$$\int_{\Omega} |u|^q dx \leq S_p^{\frac{-q}{p}} |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}} \|u\|_{W_0^{1,p}}^q,$$

onde S_p é definido em (3.17), tem-se

$$I^p(u) \geq \|u\|_{W_0^{1,p}}^p \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{1-\gamma} S_p^{\frac{\gamma-1}{p}} \|u\|^{1-\gamma-p} - \frac{1}{q} S_p^{\frac{-q}{p}} |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{q-p} \right). \quad (3.20)$$

Note que, se $0 < \rho_p < \left(\frac{q}{p} S_p^{\frac{q}{p}} |\Omega|^{\frac{q-p^*}{p^*}} \right)^{\frac{1}{q-p}}$ então

$$\frac{1}{p} - \frac{S_p^{\frac{-q}{p}}}{q} |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}} \rho_p^{q-p} > 0.$$

Como $\lim_{p \rightarrow 1^+} S_p = S_1$ (ver [66] pág. 355), temos que

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \left(\frac{q}{p} S_p^{\frac{q}{p}} |\Omega|^{\frac{q-p^*}{p^*}} \right)^{\frac{1}{q-p}} = \left(q S_1^q |\Omega|^{\frac{q-1^*}{1^*}} \right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Assim, ρ_p pode ser tomado de maneira que $\lim_{p \rightarrow 1^+} \rho_p = \rho$. Em particular, pode ser escolhido como

$$\rho_p = \rho |\Omega|^{\frac{1}{p}-1},$$

onde ρ é como do Lema 6.16.

Agora, se escolhermos $\lambda_p^* > 0$ tal que

$$\frac{1}{p} - \frac{\lambda_p^*}{1-\gamma} S_p^{\frac{\gamma-1}{p}} |\Omega|^{\frac{p^*+\gamma-1}{p^*}} \rho_p^{1-p-\gamma} - \frac{S_p^{\frac{-q}{p}}}{q} |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}} \rho_p^{q-p} = 0, \quad (3.21)$$

então, para cada $\lambda \in (0, \lambda_p^*)$ tem-se que

$$I^p(u) \geq \rho_p \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{1-\gamma} S_p^{\frac{\gamma-1}{p}} \rho_p^{1-\gamma-p} - \frac{1}{q} S_p^{\frac{-q}{p}} |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*}} \rho_p^{q-p} \right) = \beta_p > 0,$$

sendo $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \rho_p$.

Note que, por (3.21), $\lim_{p \rightarrow 1^+} \rho_p = \rho$ e $\lim_{p \rightarrow 1^+} S_p = S_1$ temos que

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \lambda_p^* = \lambda^*$$

e assim,

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \beta_p = \beta.$$

□

Lema 6.18. *Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\phi \geq 0$ e $\phi \neq 0$. Se $t > 0$ é suficientemente pequeno, então $I^p(t\phi) < 0$ e também $I(t\phi) < 0$.*

Demonstração. Considerando $\phi \geq 0$ e $0 < \gamma < 1 < p < q$, para $t > 0$ suficientemente pequeno temos

$$I^p(t\phi) = t^{1-\gamma} \left(\frac{t^{p-1+\gamma}}{p} \|\phi\|_{W_0^{1,p}}^p - \frac{\lambda}{(1-\gamma)} \int_{\Omega} \phi^{1-\gamma} dx - \frac{t^{q-1+\gamma}}{q} \int_{\Omega} \phi^q dx \right) < 0$$

e

$$I(t\phi) = t^{1-\gamma} \left(t^\gamma \|\phi\| - \frac{\lambda}{(1-\gamma)} \int_{\Omega} \phi^{1-\gamma} dx - \frac{t^{q-1+\gamma}}{q} \int_{\Omega} \phi^q dx \right) < 0.$$

□

6.3.2 Pontos críticos do funcional I^p

Nesta subseção, achamos dois pontos críticos não negativos de I^p (nomeados por u_p e v_p), no sentido que tais são soluções fracas do problema (3.10), satisfazendo

$$I^p(u_p) < 0 < \beta_p \leq I^p(v_p).$$

Em primeiro lugar, definiremos o bem conhecido *conjunto de Nehari* associada a (3.10)

$$\mathcal{N}_p = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} ; \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} f(u)u dx = 0 \right\},$$

assim como alguns subconjuntos deste,

$$\mathcal{N}_p^+ = \left\{ u \in \mathcal{N}_p ; (p-1+\gamma) \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - (q-1+\gamma) \int_{[u>0]} |u|^q > 0 \right\},$$

$$\mathcal{N}_p^- = \left\{ u \in \mathcal{N}_p ; (p-1+\gamma) \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - (q-1+\gamma) \int_{[u>0]} |u|^q < 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{N}_p^0 = \left\{ u \in \mathcal{N}_p ; (p-1+\gamma) \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - (q-1+\gamma) \int_{[u>0]} |u|^q = 0 \right\}.$$

Fixando $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$, definimos

$$\varphi_u(t) := I^p(tu) \quad \forall t > 0. \quad (3.22)$$

Note que,

$$\varphi_u(t) = \frac{t^p}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - \frac{\lambda t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \int_{[u>0]} |u|^{1-\gamma} dx - \frac{t^q}{q} \int_{[u>0]} u^q dx.$$

Assim, os conjuntos $\mathcal{N}_p, \mathcal{N}_p^+, \mathcal{N}_p^0$ e $\mathcal{N}_p^-$ podem ser escritos como

$$\mathcal{N}_p = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} ; \varphi'_u(1) = 0 \right\},$$

$$\mathcal{N}_p^+ = \left\{ u \in \mathcal{N}_p ; \varphi''_u(1) > 0 \right\},$$

$$\mathcal{N}_p^- = \{u \in \mathcal{N}_p; \varphi_u''(1) < 0\}$$

e

$$\mathcal{N}_p^0 = \{u \in \mathcal{N}_p; \varphi_u''(1) = 0\}.$$

Agora, iremos provar algumas propriedades geométricas e de compacidade nesses conjuntos.

Lema 6.19. *Seja $0 < \lambda < \overline{\lambda}_p$, com*

$$\overline{\lambda}_p := \left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right)^{\frac{p-1+\gamma}{q-p}} S_p^{\frac{q+\gamma-1}{q-p}} |\Omega|^{-\sigma_p},$$

onde

$$S_p = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|u\|_{p^*}^p} \quad e \quad \sigma_p = \frac{p(p^*-q)}{p^*q} \frac{(q+\gamma-1)}{(q-p)} + \frac{q+\gamma-1}{q}.$$

Então, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$, existem únicos $0 < t^+ < t^-$, tais que $t^+u \in \mathcal{N}_p^+$ e $t^-u \in \mathcal{N}_p^-$. Além disso,

$$I^p(t^-u) = \max_{t>0} I^p(tu)$$

e, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, $t^- = 1$ se, e somente se, $u \in \mathcal{N}_p^-$.

Demonstração. Sejam $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ e φ_u como em (3.22). Definimos

$$h(t) := t^\gamma \varphi_u'(t) = t^{p-1+\gamma} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - \lambda \int_{[u>0]} |u|^{1-\gamma} dx - t^{q-1+\gamma} \int_{[u>0]} u^q dx, \quad \forall t > 0.$$

Note que,

$$h'(t) = (p-1+\gamma)t^{p-2+\gamma} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma)t^{q-2+\gamma} \int_{[u>0]} u^q dx = 0$$

se, e somente se

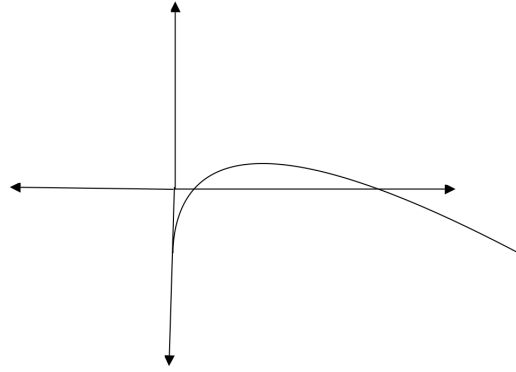
$$t_{\max} = \left[\left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right) \frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|\chi_{[u>0]} u\|_q^q} \right]^{\frac{1}{q-p}}.$$

Observe também que,

$$h'(t) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < t < t_{\max}, \\ < 0 & \text{se } t > t_{\max}, \end{cases} \quad (3.23)$$

Consequentemente $t_{\max}$ é o único ponto de máximo global de h . Mais ainda, para $\lambda < \overline{\lambda}_p$ temos que

$$h(t_{\max}) > 0.$$

Figura 6.1: Gráfico de h_u para $\lambda < \lambda_p$


Fonte: Elaborado pelo autor

De fato,

$$\begin{aligned}
 h(t_{\max}) &= \left[\left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right) \frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|\chi_{[u>0]}u\|_q^q} \right]^{\frac{p-1+\gamma}{q-p}} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p \\
 &\quad - \left[\left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right) \frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|\chi_{[u>0]}u\|_q^q} \right]^{\frac{q-1+\gamma}{q-p}} \|u\|_q^q - \lambda \int_{[u>0]} |u|^{1-\gamma} dx \\
 &= \left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right)^{\frac{p-1+\gamma}{q-p}} \left[\frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^{p(q-1+\gamma)}}{\|\chi_{[u>0]}u\|_q^{q(q-1+\gamma)}} \right]^{\frac{1}{q-p}} - \lambda \int_{[u>0]} |u|^{1-\gamma} dx.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Como

$$\|u\|_{W_0^{1,p}}^p \geq \frac{S_p}{|\Omega|^{\frac{p(q-p^*)}{qp^*}}} \|u\|_q^p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\int_{[u>0]} |u|^{1-\gamma} dx \leq \|\chi_{[u>0]}u\|_q^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{q-1+\gamma}{q}},$$

 temos que, usando $\lambda < \bar{\lambda}_p$,

$$\begin{aligned}
 h(t_{\max}) &\geq \left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right)^{\frac{p-1+\gamma}{q-p}} \left(\frac{S_p}{|\Omega|^{\frac{p(q-p^*)}{qp^*}}} \right)^{q-1+\gamma} \|\chi_{[u>0]}u\|_q^{1-\gamma} \\
 &\quad - \lambda \|\chi_{[u>0]}u\|_q^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{q-1+\gamma}{q}} \\
 &= \left[\left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right)^{\frac{p-1+\gamma}{q-p}} \left(\frac{S_p}{|\Omega|^{\frac{p(q-p^*)}{qp^*}}} \right)^{q-1+\gamma} - \lambda |\Omega|^{\frac{q-1+\gamma}{q}} \right] \|\chi_{[u>0]}u\|_q^{1-\gamma} \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Intermediário e pelas desigualdades em (3.23), existem únicos $t^+, t^- > 0$ tais que $0 < t^+ < t_{\max} < t^-$ e

$$h(t^+) = h(t^-) = 0.$$

Isso, por sua vez, implica que, pela definição de h ,

$$\varphi'(t^+) = \varphi'(t^-) = 0.$$

Como

$$\varphi_u''(t) = t^{p-2}(q-1+\gamma)\|\chi_{[u>0]}u\|_q^q \left[\left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right) \frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|\chi_{[u>0]}u\|_q^q} - t^{q-p} \right]$$

e sendo $0 < t^+ < t_{\max} < t^-$, temos

$$\varphi_u''(t^+) > 0 \quad \text{e} \quad \varphi_u''(t^-) < 0.$$

Logo, observando que $\varphi_{tu}''(1) = t^2\varphi_u''(t)$ concluímos que

$$t^+u \in \mathcal{N}_p^+ \quad \text{e} \quad t^-u \in \mathcal{N}_p^-$$

e

$$I_p(t^-u) = \max_{t>0} I_p(tu).$$

Por fim, se $u \in \mathcal{N}_p^-$ então pela argumentação anterior necessariamente $t^- = 1$. $\square$

Observação 6.20. (a) Seja $\bar{\lambda}_p$ como no Lema 6.19. Desde que $\lim_{p \rightarrow 1^+} S_p = S_1$ tem-se

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \bar{\lambda}_p = \bar{\lambda}_1.$$

(b) Seja λ^* como no Lema 6.17. Definimos

$$\Lambda = \frac{1}{2} \min\{\lambda^*, \bar{\lambda}_1\}. \quad (3.25)$$

Então, se $0 < \lambda < \Lambda$, existe $\bar{p} > 1$ pequeno o suficiente de modo que

$$0 < \lambda < \min\{\lambda_p^*, \bar{\lambda}_p\} \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}). \quad (3.26)$$

Em diante consideraremos $\bar{\lambda}_p$ e λ_p^* satisfazendo (3.26).

Lema 6.21. *Seja $\bar{\lambda}_p$ como do Lema 6.19. Então, para todo $\lambda \in (0, \bar{\lambda}_p)$ temos as seguintes conclusões:*

$$(i) \quad \mathcal{N}_p^0 = \emptyset;$$

$$(ii) \quad \mathcal{N}_p^- \text{ é um conjunto fechado em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. (i) Suponha por contradição que exista $u \in \mathcal{N}_p^0$ com $u \neq 0$, tal que

$$(p-1+\gamma)\|u\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma)\|\chi_{[u>0]}u\|_q^q = 0. \quad (3.27)$$

Sejam h e $t_{\max}$ como na prova do Lema 6.19. Então

$$h(t_{\max}) = \left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right)^{\frac{p-1+\gamma}{q-p}} \left[\frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^{p(q-1+\gamma)}}{\|\chi_{[u>0]}u\|_q^{q(p-1+\gamma)}} \right]^{\frac{1}{q-p}} - \lambda \int_{[u>0]} |u|^{1-\gamma} dx > 0, \quad (3.28)$$

para todo $\lambda \in (0, \overline{\lambda_p})$.

Por outro lado, desde que $u \in \mathcal{N}_p^0$,

$$\lambda \int_{[u>0]} |u|^{1-\gamma} dx = \left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \|u\|_{W_0^{1,p}}^p$$

e assim, por (3.27), temos

$$\begin{aligned} h_u(t_{\max}) &= \left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right)^{\frac{p-1+\gamma}{q-p}} \left[\frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^{p(q-1+\gamma)}}{\|\chi_{[u>0]} u\|_q^{q(p-1+\gamma)}} \right]^{\frac{1}{q-p}} - \left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \|u\|_{W_0^{1,p}}^p \\ &= \left(\frac{q-p}{q-1+\gamma} \right) \|u\|_{W_0^{1,p}}^p \left[\left(\frac{p-1+\gamma}{q-1+\gamma} \right)^{\frac{p-1+\gamma}{q-p}} \left[\frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|\chi_{[u>0]} u\|_q^q} \right]^{\frac{q-1+\gamma}{q-p}} - 1 \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

o que gera uma contradição com (3.28). Logo não existe algum $u \in \mathcal{N}_p^0$, isto é, $\mathcal{N}_p^0 = \emptyset$.

(ii) Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_p^-$ uma sequência tal que $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que implica que

$$u_n \rightarrow u_0, \quad \text{em } L^q(\Omega) \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Então $u_0 \in \mathcal{N}_p^- \cup \{0\}$. Suponha que

$$u_0 = 0.$$

Como

$$\|u\|_{W_0^{1,p}}^p > \frac{S_p}{|\Omega|^{\frac{p(q-p^*)}{qp^*}}} \|u\|_q^p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \quad (3.30)$$

e

$$\|u\|_{W_0^{1,p}}^p < \left(\frac{q-1+\gamma}{p-1+\gamma} \right) \|\chi_{[u>0]} u\|_q^q \quad \forall u \in \mathcal{N}_p^-,$$

inferimos que

$$\|u\|_q > \left[\frac{S_p(p-1+\gamma)}{|\Omega|^\alpha(q-1+\gamma)} \right]^{\frac{1}{q-p}} \quad \forall u \in \mathcal{N}_p^-. \quad (3.31)$$

Assim, aplicando a desigualdade prévia para $u = u_n$ e passando para o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|u_0\|_q \geq \left[\frac{S_p(p-1+\gamma)}{|\Omega|^\alpha(q-1+\gamma)} \right]^{\frac{1}{q-p}}.$$

Isso, por sua vez, contradiz o fato que $u_0 = 0$. Portanto $u_0 \in \mathcal{N}_p^-$ e assim, o item (ii) também está verificado. $\square$

Lema 6.22. *Dado $u \in \mathcal{N}_p^-$, existe $\epsilon > 0$ e uma função contínua $f > 0$ definida em $B_\epsilon(0)$, com $B_\epsilon(0) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, tais que*

$$f(0) = 1, \quad f(w)(u+w) \in \mathcal{N}_p^-, \quad \forall w \in B_\epsilon(0).$$

Demonstração. Defina $F : \mathbb{R} \times W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(t, v) = t^{p-1+\gamma} \int_{\Omega} |\nabla(u+v)|^p dx - t^{q-1+\gamma} \int_{[u>0]} |u+v|^q dx - \lambda \int_{[u>0]} |u+v|^{1-\gamma} dx.$$

Como $u \in \mathcal{N}_p^-$, segue-se que $F(1, 0) = 0$ e

$$F_t(1, 0) = (p-1+\gamma) \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - (q-1+\gamma) \int_{[u>0]} |u|^q dx < 0.$$

Assim, aplicando o Teorema da Função Implícita no ponto $(1, 0)$, obtemos $\bar{\epsilon} > 0$ e uma função contínua $f = f(v) > 0$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|v\|_{W_0^{1,p}} < \bar{\epsilon}$ satisfazendo

$$f(0) = 1, \quad f(v)(u+v) \in \mathcal{N}_p \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|_{W_0^{1,p}} < \bar{\epsilon}.$$

Então, para $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, temos

$$f(v)(u+v) \in \mathcal{N}_p^-, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|_{W_0^{1,p}} < \epsilon.$$

□

Lema 6.23. *Sejam λ_p^* e $\bar{\lambda}_p$ são como nos Lemas 6.17 e 6.19, respectivamente. Então*

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_p^-} I^p(u) \geq \beta_p > 0,$$

onde β_p é dada no Lema 6.17.

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{N}_p^-$. Então pelo Lema 6.19 temos que

$$I^p(u) = \max_{t>0} I^p(tu).$$

Em particular, usando β_p e ρ_p como no Lema 6.17 obtemos

$$I^p(u) \geq I^p\left(\rho_p \frac{u}{\|u\|_{W_0^{1,p}}}\right) \geq \beta_p.$$

Portanto, como $u \in \mathcal{N}_p^-$ é arbitrário, tomando o ínfimo na desigualdade anterior segue-se nosso resultado. □

□

Lema 6.24. *Suponha que exista $u_0 \in \mathcal{N}_p$ com $u_0 > 0$ em Ω , tal que*

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} u_0^{-\gamma} \varphi dx - \int_{\Omega} u_0^{q-1} dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0. \quad (3.32)$$

Então u_0 é uma solução de (3.10).

Demonstração. Sejam $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, definamos $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ por

$$w \equiv (u_0 + \epsilon \phi)^+.$$

Usando w como função teste em (3.32) e considerando que $u_0 \in \mathcal{N}_p$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} (|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla w - u_0^{q-1} w - \lambda u_0^{-\gamma} w) dx \\
&= \int_{[u_0 + \epsilon \phi \geq 0]} (|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla (u_0 + \epsilon \phi) - u_0^{q-1} (u_0 + \epsilon \phi) - \lambda u_0^{-\gamma} (u_0 + \epsilon \phi)) dx \\
&= \left(\int_{\Omega} - \int_{[u_0 + \epsilon \phi < 0]} \right) (|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla (u_0 + \epsilon \phi) - u_0^{q-1} (u_0 + \epsilon \phi) - \lambda u_0^{-\gamma} (u_0 + \epsilon \phi)) dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u_0|^p dx - \int_{\Omega} u_0^q dx - \lambda \int_{\Omega} u_0^{1-\gamma} dx \\
&\quad + \epsilon \left(\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla \phi - \int_{\Omega} u_0^{q-1} \phi dx - \lambda \int_{\Omega} u_0^{-\gamma} \phi dx \right) \\
&\quad - \int_{[u_0 + \epsilon \phi < 0]} (|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla (u_0 + \epsilon \phi) - u_0^{q-1} (u_0 + \epsilon \phi) - \lambda u_0^{-\gamma} (u_0 + \epsilon \phi)) dx \\
&\leq \epsilon \left(\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla \phi - \int_{\Omega} u_0^{q-1} \phi dx - \lambda \int_{\Omega} u_0^{-\gamma} \phi dx \right) \\
&\quad - \epsilon \int_{[u_0 + \epsilon \phi < 0]} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla \phi dx. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Desde que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} |[u_0 + \epsilon \phi < 0]| = 0$, onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[u_0 + \epsilon \phi < 0]} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla \phi dx = 0.$$

Assim, dividindo (3.33) por ϵ e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, temos que

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla \phi - \int_{\Omega} u_0^{q-1} \phi dx - \lambda \int_{\Omega} u_0^{-\gamma} \phi dx. \tag{3.34}$$

Como essa desigualdade estabelece-se para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tomando $-\phi$ como função teste, obtemos a desigualdade contrária e, assim, a igualdade. Então, u_0 é uma solução fraca positiva de (3.10). $\square$

Lema 6.25. *O funcional I^p é limitado inferiormente em $\overline{B_{\rho_p}(0)}$, onde $B_{\rho_p}(0) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); \|u\|_{W_0^{1,p}} < \rho_p\}$. Além disso, existe $u_p \in B_{\rho_p}(0)$ tal que*

$$I^p(u_p) = \inf_{\overline{B_{\rho_p}(0)}} I^p. \tag{3.35}$$

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq \rho_p$. Note que, as desigualdades de Hölder e de Sobolev implicam que

$$\begin{aligned}
|I^p(u)| &\leq \frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{\lambda}{1-\gamma} \|u\|_q^{\frac{1-\gamma}{q}} |\Omega|^{\frac{q-1+\gamma}{q}} + \frac{1}{q} \|u\|_q^q \\
&\leq \frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p + C \frac{\lambda}{1-\gamma} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{\frac{1-\gamma}{q}} |\Omega|^{\frac{q-1+\gamma}{q}} + \frac{C}{q} \|u\|_{W_0^{1,p}}^q \\
&\leq \frac{1}{p} \rho_p^p + C \frac{\lambda}{1-\gamma} \rho_p^{\frac{1-\gamma}{q}} |\Omega|^{\frac{q-1+\gamma}{q}} + \frac{C \rho_p^q}{q}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, I^p é limitado inferiormente em $\overline{B_{\rho_p}(0)}$. Assim, está bem definido

$$\alpha_p := \inf_{\overline{B_{\rho_p}(0)}} I^p.$$

Mais ainda, esse ínfimo é atingido. De fato, seja $(u_n) \subset \overline{B_{\rho_p}(0)}$ uma sequência tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I^p(u_n) = \alpha_p.$$

Desde que, a sequência (u_n) é limitada então, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_p \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

e

$$u_n \rightarrow u_p \quad \text{em} \quad L^r(\Omega) \quad \text{para todo } r \in [1, p^*),$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Logo, usando a semi-continuidade inferior da norma $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$ temos que

$$\|u_p\|_{W_0^{1,p}} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{W_0^{1,p}} \leq \rho_p. \quad (3.36)$$

Afirmção:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(u_n) dx = \int_{\Omega} F(u_p) dx.$$

Note que, para mostrar a convergência acima é suficiente provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[u_n > 0]} u_n^q dx = \int_{[u_p > 0]} u_p^q dx$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[u_n > 0]} u_n^{1-\gamma} dx = \int_{[u_p > 0]} u_p^{1-\gamma} dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left| \int_{[u_n > 0]} u_n^q dx - \int_{[u_p > 0]} u_p^q dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |\chi_{[u_n > 0]} u_n - \chi_{[u_p > 0]} u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\chi_{[u_n > 0]} u_n - \chi_{[u_n > 0]} u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} |\chi_{[u_n > 0]} u_p - \chi_{[u_p > 0]} u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde χ_A denota a função característica do conjunto A .

Como $u_n \rightarrow u_p$ em $L^q(\Omega)$ temos que

$$\left(\int_{\Omega} |\chi_{[u_n > 0]} u_n - \chi_{[u_n > 0]} u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0, \quad (3.38)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Agora, mostremos que

$$\left(\int_{\Omega} |\chi_{[u_n > 0]} u_p - \chi_{[u_p > 0]} u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0, \quad (3.39)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Note que, para $x \in [u_p > 0]$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_n(x) > 0 \quad \text{sempre que } n \geq n_0,$$

o que implica que

$$\chi_{[u_n > 0]}(x) u_p(x) - \chi_{[u_p > 0]}(x) u_p(x) \rightarrow 0 \quad \text{para } x \in [u_p > 0],$$

quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, para $x \in [u_p > 0]$ tem-se

$$|\chi_{[u_n > 0]}(x)u_p(x) - \chi_{[u_p > 0]}(x)u_p(x)|^q \leq 2^{q-1}(|\chi_{[u_n > 0]}(x)|^q + |\chi_{[u_p > 0]}(x)|^q)|u_p|^q \leq 2^q|u_p|^q.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\left(\int_{[u_p > 0]} |\chi_{[u_n > 0]}u_p - \chi_{[u_p > 0]}u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0. \quad (3.40)$$

Similarmente, podemos provar que

$$\left(\int_{[u_p < 0]} |\chi_{[u_n > 0]}u_p - \chi_{[u_p > 0]}u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0. \quad (3.41)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |\chi_{[u_n > 0]}u_p - \chi_{[u_p > 0]}u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_{[u_p > 0]} |\chi_{[u_n > 0]}u_p - \chi_{[u_p > 0]}u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_{[u_p < 0]} |\chi_{[u_n > 0]}u_p - \chi_{[u_p > 0]}u_p|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente, por (3.38) em (3.37) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[u_n > 0]} u_n^q dx = \int_{[u_p > 0]} u_p^q dx.$$

Analogamente, podemos provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[u_n > 0]} u_n^{1-\gamma} dx = \int_{[u_p > 0]} u_p^{1-\gamma} dx$$

e assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(u_n) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{[u_n > 0]} u_n^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_{[u_n > 0]} u_n^q dx \right) \\ &= \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{[u_p > 0]} u_p^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_{[u_p > 0]} u_p^q dx \\ &= \int_{\Omega} F(u_p) dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto, de (3.36) e (3.42) segue-se que

$$\alpha_p = \liminf_{n \rightarrow \infty} I^p(u_n) \quad (3.43)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \int_{\Omega} F(u_n) dx \right) \quad (3.44)$$

$$\geq \|u_p\|_{W_0^{1,p}}^p - \int_{\Omega} F(u_p) dx \quad (3.45)$$

$$= I^p(u_p) \geq \alpha_p, \quad (3.46)$$

ou seja,

$$I^p(u_p) = \alpha_p = \inf_{B_{\rho_p}(0)} I^p.$$

□

Observação 6.26. Como $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \| |u| \|_{W_0^{1,p}}$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, resulta

$$\| |u_p| \|_{W_0^{1,p}} = \|u_p\| < \rho_p.$$

Então,

$$I^p(u_p) \leq I^p(|u_p|) \leq I^p(u_p),$$

ou seja,

$$I^p(|u_p|) = I^p(u_p).$$

Assim, podemos considerar $u_p \geq 0$ q.t.p. em Ω .

Lema 6.27. *Existem $\bar{p} > 1$ e $K < 0$ tais que*

$$I^p(u_p) = \alpha_p < K < 0 \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}). \quad (3.47)$$

Demonstração. Sejam $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\phi \geq 0$, $\phi \neq 0$ e $t > 0$ tais que

$$\|t\phi\|_{BV} < \rho \quad \text{e} \quad I(t\phi) < 0.$$

Como

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \|\phi\|_{W_0^{1,p}} = \|\phi\|_{W_0^{1,1}} \quad \text{e} \quad \lim_{p \rightarrow 1^+} I^p(t\phi) = I(t\phi)$$

e considerando que $\lim_{p \rightarrow 1^+} \rho_p = \rho$, então existe $\bar{p} > 1$ tal que

$$\rho_p - \|t\phi\|_{W_0^{1,p}} > 0 \quad \text{e} \quad I^p(t\phi) < 0 \quad \forall p \in (0, \bar{p}).$$

Mais ainda, desde que $\alpha_p = \inf_{B_{\rho_p}(0)} I^p$ e $\lim_{p \rightarrow 1^+} I^p(t\phi) = I(t\phi)$ temos

$$\alpha_p \leq I^p(t\phi) < K < 0 \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}),$$

onde $K = \frac{I(t\phi)}{2}$. □

Lema 6.28. u_p como definida no Lema 6.25 é uma solução positiva de (3.10).

Demonstração. Em primeiro lugar, pela Observação 6.26 e pelo Lema ?? temos que

$$u_p \geq 0 \quad \text{e} \quad u_p \neq 0.$$

Como $I^p(u_p) = \inf_{B_{\rho_p}(0)} I^p$, para $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$ e $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$0 \leq I^p(u_p + t\varphi) - I^p(u_p) \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla(u_p + t\varphi)|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_p|^p dx. \quad (3.48)$$

Dividindo por $t > 0$ e passando para o limite quando $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \geq 0, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Logo, $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaz no sentido fraco que

$$-\Delta_p u_p \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Então, pelo Princípio do Máximo Forte (ver [67]), temos

$$u_p > 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Por outro lado, o fato que $I^p(u_p + t\varphi) - I^p(u_p) \geq 0$, implica também que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} [(u_p + t\varphi)^{1-\gamma} - u_p^{1-\gamma}] dx &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla(u_p + t\varphi)|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_p|^p dx \\ &\quad - \frac{1}{q} \left[\int_{\Omega} (u_p + t\varphi)^q - u_p^q dx \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Dividindo por t e tomando $\liminf$ em (3.49) quando $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\lambda}{1-\gamma} \liminf_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{(u_p + t\varphi)^{1-\gamma} - u_p^{1-\gamma}}{t} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} u_p^{q-1} \varphi dx. \quad (3.50)$$

Note que, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$(u_p + t\varphi)^{1-\gamma} - u_p^{1-\gamma} = (1-\gamma)(u_p + \theta t\varphi)^{-\gamma} t\varphi. \quad (3.51)$$

Assim,

$$\frac{(u_p + \theta t\varphi)^{-\gamma} \varphi - u_p^{-\gamma} \varphi}{t} \rightarrow (1-\gamma)u_p^{-\gamma} \varphi \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.$$

Logo, pelo Lema de Fatou temos que $u^{-\gamma} \varphi$ é integrável e

$$(1-\gamma) \int_{\Omega} u_p^{-\gamma} \varphi dx \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{(u_p + t\varphi)^{1-\gamma} - u_p^{1-\gamma}}{t} dx. \quad (3.52)$$

Consequentemente, usando (3.52) em (3.50) obtemos

$$\lambda \int_{\Omega} u_p^{-\gamma} \varphi dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} u_p^{q-1} \varphi dx,$$

ou equivalentemente,

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} u_p^{q-1} \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} u_p^{-\gamma} \varphi dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Pelo Lema 6.24, temos que u_p é uma solução do problema (3.10). $\square$

Lema 6.29. *Existe uma solução $v_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.10), tal que*

$$I^p(v_p) = \inf_{\mathcal{N}_p^-} I^p \geq \beta_p > 0.$$

Demonstração. Note que, para $u \in \mathcal{N}_p$ temos

$$I^p(u) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - \lambda \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} |u|^{1-\gamma} dx \quad (3.53)$$

$$\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - \lambda \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{q} \right) C \|u\|_{W_0^{1,p}}^{1-\gamma}, \quad (3.54)$$

o que implica que I^p é coercivo em $\mathcal{N}_p$ e além disso, como I_p é fracamente semi-contínua inferiormente, pelo Teorema 1.2 de [63] temos que I^p é limitada inferiormente.

Desde que $\mathcal{N}_p^-$ é um conjunto fechado e I^p é semi-contínua inferiormente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o Princípio Variacional de Ekeland implica que existe uma sequência $(v_n) \subset \mathcal{N}_p^-$ tal que

$$(i) \quad I^p(v_n) < \inf_{\mathcal{N}_p^-} I^p + \frac{1}{n};$$

$$(ii) \quad I^p(v_n) \leq I^p(v) + \frac{1}{n}(\|v\|_{W_0^{1,p}} + \|v_n\|_{W_0^{1,p}}), \quad \forall v \in \mathcal{N}_p^-.$$

Note que, como $I^p(|v_n|) \leq I^p(v_n)$ e $|v_n| \in \mathcal{N}_p^-$, podemos assumir que $v_n \geq 0$ q.t.p $x \in \Omega$ para (i) e (ii).

Pela coercividade de I^p temos que a sequência (v_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, a reflexividade de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e as imersões compactas desse espaço, implicam que, a menos de subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v_p \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad (3.55)$$

$$v_n \rightarrow v_p \quad \text{em } L^q(\Omega), \quad (3.56)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Desde que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p > \frac{S_p}{|\Omega|^{\frac{p(p^*-q)}{p^*q}}} \|u\|_q^p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0,$$

obtemos

$$\|u\|_q > \left[\frac{S_p(p-1+\gamma)}{|\Omega|^\alpha(q-1+\gamma)} \right]^{\frac{1}{q-p}}, \quad \forall u \in \mathcal{N}_p^-. \quad (3.57)$$

Aplicando (3.57) com $u = v_n$ e passando para o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos $v_p \neq 0$.

Por outro lado, para a sequência minimizante (v_n) existe uma adequada constante $C > 0$ tal que

$$(p-1+\gamma)\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma)\|v_n\|_q^q \leq -C \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.58)$$

De fato, suponha por contradição que, para uma subsequência, a qual ainda denotamos por (v_n) , temos

$$(p-1+\gamma)\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma)\|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Então, por (3.57) temos

$$\begin{aligned} I^p(v_n) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1-\gamma} \right) \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{1-\gamma} \right) \|v_n\|_q^q \\ &= - \left[\frac{p-1+\gamma}{p(1-\gamma)} \right] \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p + \left[\frac{q-1+\gamma}{p(1-\gamma)} \right] \|v_n\|_q^q - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{q-1+\gamma}{1-\gamma} \right) \|v_n\|_q^q \\ &< - \frac{1}{p(1-\gamma)} \left[(p-1+\gamma)\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma)\|v_n\|_q^q \right] \\ &\quad - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{q-1+\gamma}{1-\gamma} \right) \left[\frac{S_p(p-1+\gamma)}{|\Omega|^\alpha(q-1+\gamma)} \right]^{\frac{q}{q-p}}. \end{aligned}$$

Passando para o limite quando $n \rightarrow \infty$ e usando a condição (i) temos:

$$\inf_{\mathcal{N}_p^-} I^p = \lim_{n \rightarrow \infty} I^p(v_n) \leq - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{q-1+\gamma}{1-\gamma} \right) \left[\frac{S_p(p-1+\gamma)}{|\Omega|^\alpha(q-1+\gamma)} \right]^{\frac{q}{q-p}} < 0,$$

o qual é claramente impossível pois, do Lema 6.23, segue-se que $\inf_{\mathcal{N}_p^-} I^p > 0$.

Aplicando o Lema 6.24 com $u = v_n$ e $w = t\varphi$, $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $t > 0$ pequeno o suficiente, encontramos $f_n(t) := f_n(t\varphi)$ tal que

$$f_n(0) = 1 \quad \text{e} \quad f_n(t)(v_n + t\varphi) \in \mathcal{N}_p^-.$$

Observe que, desde que

$$0 = f_n^p(t)\|v_n + t\varphi\|_{W_0^{1,p}}^p - f_n^q(t)\|v_n + t\varphi\|_q^q - f_n^{1-\gamma}(t) \int_{\Omega} (v_n + t\varphi)^{1-\gamma} dx, \quad (3.59)$$

$$0 = \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \|v_n\|_q^q - \lambda \int_{\Omega} v_n^{1-\gamma} dx, \quad (3.60)$$

temos

$$0 = [f_n^p(t) - 1]\|v_n + t\varphi\|_{W_0^{1,p}}^p + (\|v_n + t\varphi\|_{W_0^{1,p}}^p - \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p) \quad (3.61)$$

$$- [f_n^q(t) - 1]\|v_n + t\varphi\|_q^q + (\|v_n + t\varphi\|_q^q - \|v_n\|_q^q) \quad (3.62)$$

$$- \lambda(f_n^{1-\gamma}(t) - 1) \int_{\Omega} (v_n + t\varphi)^{1-\gamma} dx - \lambda \int_{\Omega} (v_n + t\varphi)^{1-\gamma} - v_n^{1-\gamma} dx \quad (3.63)$$

$$\leq [f_n^p(t) - 1]\|v_n + t\varphi\|_{W_0^{1,p}}^p + (\|v_n + t\varphi\|_{W_0^{1,p}}^p - \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p) \quad (3.64)$$

$$- [f_n^q(t) - 1]\|v_n + t\varphi\|_q^q + (\|v_n + t\varphi\|_q^q - \|v_n\|_q^q) \quad (3.65)$$

$$- \lambda(f_n^{1-\gamma}(t) - 1) \int_{\Omega} (v_n + t\varphi)^{1-\gamma} dx. \quad (3.66)$$

Dividindo por $t > 0$ e fazendo $t \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq pf_n'(0^+)\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p + p \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx - qf_n'(0^+)\|v_n\|_q^q \\ &\quad - q \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx - \lambda(1-\gamma)f_n'(0^+) \int_{\Omega} v_n^{1-\gamma} dx \\ &= f_n'(0^+) \left[p\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - q\|v_n\|_q^q - \lambda(1-\gamma) \int_{\Omega} v_n^{1-\gamma} dx \right] \\ &\quad + p \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx - q \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx \\ &= f_n'(0^+) \left[(p-1+\gamma)\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma)\|v_n\|_q^q \right] \\ &\quad + p \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx - q \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde $f_n'(0^+) \in [-\infty, +\infty]$ denota a derivada lateral à direita em 0 de $f_n(t)$. Na verdade, se tal derivada lateral não estiver em $[-\infty, +\infty]$, podemos escolher $t_k \rightarrow 0$ ao invés de $t \rightarrow 0$, tal que $t_k > 0$ e que f_n satisfaz

$$q_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_n(t_k) - 1}{t_k},$$

onde $q_n \in [-\infty, +\infty]$ e assim, substituir $f_n^+(0^+)$ por q_n .

Note que, como $v_n \in \mathcal{N}_p^-$, segue-se que

$$(p-1+\gamma)\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma)\|v_n\|_q^q < 0$$

e assim, por (3.67) deduzimos que

$$f_n'(0^+) \neq +\infty.$$

Agora mostraremos que $|f'_n(0^+)| < \infty$. Argumentando por contradição, assumimos que $f'_n(0^+) = -\infty$, e assim para $t > 0$ pequeno o suficiente, estabelece-se que $f_n(t) < 1$. Então,

$$\|f_n(t)(v_n + t\varphi) - v_n\|_{W_0^{1,p}} = \left(\int_{\Omega} |(f_n(t) - 1)\nabla v_n + tf_n(t)\nabla\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.68)$$

$$\leq [1 - f_n(t)]\|v_n\|_{W_0^{1,p}} + tf_n(t)\|\varphi\|_{W_0^{1,p}} \quad (3.69)$$

sempre que $t > 0$ é pequeno o suficiente. Assim da condição (ii) e do fato que $v_n \in \mathcal{N}_p$, temos

$$\begin{aligned} & [1 - f_n(t)] \frac{\|v_n\|_{W_0^{1,p}}}{n} + tf_n(t) \frac{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}}}{n} \\ & \geq I^p(v_n) - I^p(f_n(t)(v_n + t\varphi)) \\ & = \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{p} \right) [f_n^p(t) - 1] \|v_n + t\varphi\|_{W_0^{1,p}}^p - \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{q} \right) [f_n^q(t) - 1] \|v_n + t\varphi\|_q^q \\ & \quad + \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{p} \right) (\|v_n + t\varphi\|_{W_0^{1,p}}^p - \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p) - \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{q} \right) (\|v_n + t\varphi\|_q^q - \|v_n\|_q^q). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dividindo por $t > 0$ e passando para o limite quando $t \rightarrow 0$, obtemos

$$-f'_n(0) \frac{\|v_n\|_{W_0^{1,p}}}{n} + \frac{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}}}{n} \quad (3.71)$$

$$\geq \frac{p-1+\gamma}{p(1-\gamma)} f'_n(0^+) \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \frac{q-1+\gamma}{1-\gamma} f'_n(0^+) \|v_n\|_q^q \quad (3.72)$$

$$- \frac{p-1+\gamma}{1-\gamma} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx - \frac{q-1+\gamma}{1-\gamma} \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx, \quad (3.73)$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\|\varphi\|_{W_0^{1,p}}}{n} & \geq \frac{1}{1-\gamma} \left[(p-1+\gamma) \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma) \|v_n\|_q^q + \frac{(1-\gamma) \|v_n\|_{W_0^{1,p}}}{n} \right] f'_n(0^+) \\ & \quad + \frac{p-1+\gamma}{1-\gamma} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx - \frac{q-1+\gamma}{1-\gamma} \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Isso, por sua vez, leva a uma contradição se $f'_n(0^+) = -\infty$, pois usando a estimativa (3.58) temos

$$(p-1+\gamma) \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - (q-1+\gamma) \|v_n\|_q^q + \frac{(1-\gamma) \|v_n\|_{W_0^{1,p}}}{n} < -C + \frac{(1-\gamma)C_1}{n} < 0,$$

para n suficientemente grande, onde $C_1 > 0$ é tal que $\|v_n\|_{W_0^{1,p}} \leq C_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$|f'_n(0^+)| < +\infty.$$

Além disso, da estimativa (3.58) junto à limitação de (v_n) e as duas desigualdades (3.67) e (3.74) implicam também que

$$|f'_n(0^+)| \leq C_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.75)$$

onde $C_2 > 0$.

Agora mostraremos que $v_p \in \mathcal{N}_p^-$ é uma solução fraca positiva de (3.10). Da condição (ii) obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \left[(f_n(t) - 1) \|v_n\|_{W_0^{1,p}} + t f_n(t) \|\varphi\|_{W_0^{1,p}} \right] \\
& \geq K(v_n) - K(f_n(t)(v_n + t\varphi)) \\
& = -\frac{1}{p} (f_n^p(0) - 1) \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p + \frac{1}{p} f_n^p(0) \left(\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \|v_n + t\varphi\|_{W_0^{1,p}}^p \right) \\
& \quad + (f_n^q(t) - 1) \|v_n + t\varphi\|_q^q + \frac{1}{q} \left(\|v_n + t\varphi\|_q^q - \|v_n\|_q^q \right) \\
& \quad + \frac{\lambda}{1-\gamma} (f_n^{1-\gamma}(t) - 1) \int_{\Omega} |v_n + t\varphi|^{1-\gamma} dx + \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} |v_n + t\varphi|^{1-\gamma} - |v_n|^{1-\gamma} dx.
\end{aligned}$$

Dividindo por $t > 0$ e passando para o limite quando $t \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} (|f_n^{'+}(0)| \|v_n\|_{W_0^{1,p}} + \|\varphi\|_{W_0^{1,p}}) \\
& \geq -f_n^{'+}(0) \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx + f_n^{'+}(0) \|v_n\|_q^q + \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx \\
& \quad + \lambda f_n^{'+}(0) \int_{\Omega} v_n^{1-\gamma} dx + \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} \frac{(v_n + t\varphi)^{1-\gamma} - v_n^{1-\gamma}}{t} dx \\
& = -f_n^{'+}(0) \left(\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \|v_n\|_q^q - \lambda \int_{\Omega} v_n^{1-\gamma} dx \right) - \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx \\
& \quad + \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx + \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} \frac{(v_n + t\varphi)^{1-\gamma} - v_n^{1-\gamma}}{t} dx \\
& = - \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx \\
& \quad + \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} \frac{(v_n + t\varphi)^{1-\gamma} - v_n^{1-\gamma}}{t} dx.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Note que, pelo Lema de Fatou temos

$$\lambda \int_{\Omega} v_n^{-\gamma} \varphi dx \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} \frac{(v_n + t\varphi)^{1-\gamma} - v_n^{1-\gamma}}{t} dx. \tag{3.77}$$

Usando (3.77) em (3.76) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\Omega} v_n^{-\gamma} \varphi dx & \leq \frac{1}{n} (|f_n^{'+}(0)| \|v_n\|_{W_0^{1,p}} + \|\varphi\|_{W_0^{1,p}}) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx \\
& \quad - \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx \\
& \leq \frac{1}{n} (CC_1 + \|\varphi\|_{W_0^{1,p}}) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} v_n^{q-1} \varphi dx.
\end{aligned}$$

Passando para o limite acima quando $n \rightarrow \infty$ e usando uma vez mais o Lema de Fatou, temos

$$\lambda \int_{\Omega} v_p^{-\gamma} \varphi dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} v_p^{q-1} \varphi dx,$$

ou seja, para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $\varphi \geq 0$, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} v_p^{q-1} \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} v_p^{-\gamma} \varphi dx \geq 0, \tag{3.78}$$

o qual implica que v_p satisfaz no sentido fraco que

$$-\Delta_p v_p \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Como $v_p \geq 0$ e $v_p \neq 0$ em Ω , então o Princípio do Máximo Forte (ver [67]) estabelece que

$$v_p > 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Note que, para $\varphi = v_p$ em (3.78), temos

$$\|v_p\|_{W_0^{1,p}}^p \geq \|v_p\|_q^q + \lambda \int_{\Omega} v_p^{1-\gamma} dx. \quad (3.79)$$

Por outro lado, a semi-continuidade inferior fraca da norma, implica que

$$\begin{aligned} \|v_p\|_{W_0^{1,p}}^p &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\|v_n\|_q^q + \lambda \int_{\Omega} v_n^{1-\gamma} dx \right] \\ &= \|v_p\|_q^q + \lambda \int_{\Omega} v_p^{1-\gamma} dx. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Assim, de (3.79) e (3.80) temos

$$\|v_p\|_{W_0^{1,p}}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p = \|v\|_q^q + \lambda \int_{\Omega} v^{1-\gamma} dx. \quad (3.81)$$

Consequentemente $v_p \in \mathcal{N}_p$, e desde que estabelece-se (3.78), pelo Lema 6.24 temos que v_p é uma solução fraca do problema (3.10).

Agora provaremos que $v_p \in \mathcal{N}_p^-$ e assim, pelo Lema 6.23 concluiremos que

$$I^p(v_p) \geq \beta_p > 0.$$

De fato, lembremos da desigualdade

$$C_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} \leq (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y) \cdot (x-y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad 1 < p < 2,$$

para algum $C_p > 0$.

Assim, pela desigualdade de Hölder e a desigualdade anterior, temos que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |\nabla v_n - \nabla v|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{|\nabla v_n - \nabla v|^p}{(|\nabla v_n| + |\nabla v|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla v_n| + |\nabla v|)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla v_n - \nabla v|^2}{(|\nabla v_n| + |\nabla v|)^{2-p}} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\Omega} (|\nabla v_n| + |\nabla v|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{C_p} \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla v_n - \nabla v) dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\Omega} (|\nabla v_n| + |\nabla v|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}} \\ &= \frac{1}{C_p^{\frac{p}{2}}} \left(\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla v_n dx + \|v\|_{W_0^{1,p}}^p - \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla v dx \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega} (|\nabla v_n| + |\nabla v|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Desde que $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p = \|v\|_{W_0^{1,p}}^p$, temos

$$\|v_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla v_n \, dx + \|v\|_{W_0^{1,p}}^p - \int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla v \, dx \rightarrow 0, \quad (3.83)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim, aplicando (3.83) em (3.82) e considerando que (v_n) é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, obtemos

$$v_n \rightarrow v_p \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Consequentemente, por (ii) do Lema 6.21, $v_p \in \mathcal{N}_p^-$ e usando o Lema 6.23 temos

$$I^p(v_p) = \inf_{\mathcal{N}_p^-} I^p \geq \beta_p > 0.$$

□

Observação 6.30. • Desde que $\lim_{p \rightarrow 1^+} \beta_p = \beta$, onde β_p é como no Lema 6.17, existe $\bar{p} > 1$ tal que

$$I^p(v_p) \geq \beta_p > \frac{\beta}{2} > 0, \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}). \quad (3.84)$$

- Dos Lemas ??, 6.28 e 6.29 existem duas soluções $u_p, v_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.10) com $u_p \in B_{\rho_p}(0)$ e $v_p \in \mathcal{N}_p^-$ tais que

$$I^p(u_p) < K < 0 < \frac{\beta_1}{2} < I^p(v_p), \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}). \quad (3.85)$$

Lema 6.31. A família $(u_p)_{1 < p < \bar{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.

Demonstração. Como $\|u_p\|_{W_0^{1,p}} < \rho_p$ e sendo $\rho_p \rightarrow \rho$ quando $p \rightarrow 1^+$, existem $\bar{p} > 1$ e $C > 0$ tais que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_p|^p \, dx \leq C, \quad \text{para todo } 1 < p < \bar{p}. \quad (3.86)$$

Então, usando a desigualdade de Young e (3.86),

$$\begin{aligned} \|u_p\|_{BV} &= \int_{\Omega} |\nabla u_p| \, dx \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_p|^p \, dx + \frac{p-1}{p} |\Omega| \\ &\leq C_1, \end{aligned} \quad (3.87)$$

para todo $p \in (1, \bar{p})$. Assim $(u_p)_{1 < p < \bar{p}}$ é limitado em $BV(\Omega)$. □

Para provar que $(v_p)_{1 < p < \bar{p}}$ é também limitada em $BV(\Omega)$, seguiremos os argumentos de [34], o quais foram inspirados por aqueles em [52]. Em primeiro lugar, definimos

$$J^p(u) = I^p(u) + \frac{p-1}{p} |\Omega|. \quad (3.88)$$

Note que I^p e J^p têm os mesmos pontos críticos. Mais precisamente, se consideramos o funcional J^p ao invés de I^p também pode-se provar a existência de solução para o problema (3.10). Assim, pode-se provar que

$$J^p(v_p) = \inf_{\mathcal{N}_p^-} J^p. \quad (3.89)$$

Usando a desigualdade de Young, a seguinte propriedade de monotonia estabelece-se,

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow J^{p_1}(u) \leq J^{p_2}(u), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.90)$$

Além disso, o resultado de Lema 6.19 também estabelece-se para J^p .

Lema 6.32. *A família $(v_p)_{1 < p < \bar{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $1 < p_1 \leq p_2 < N$ e considere $v_{p_1} \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $v_{p_2} \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ tais que (3.89) estabelece-se para J^{p_1} e J^{p_2} , respectivamente. Desde que $p_2 \geq p_1$, temos que $W_0^{1,p_2}(\Omega) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$. Pelo Lema 6.19, existe $t > 0$ tal que

$$tv_{p_2} \in \mathcal{N}_{p_1}^-. \quad (3.91)$$

Então, do Lema 6.19 e (3.90), segue-se que

$$\begin{aligned} J^{p_2}(v_{p_2}) &= \max_{t>0} J^{p_2}(tv_{p_2}) \\ &\geq J^{p_2}(tv_{p_2}) \\ &\geq J^{p_1}(tv_{p_2}) \\ &\geq J^{p_1}(v_{p_1}). \end{aligned}$$

Então, para $1 < p < \bar{p}$, segue-se que

$$J^p(v_p) \leq J^{\bar{p}}(v_{\bar{p}}) =: C. \quad (3.92)$$

Logo, como $v_p \in \mathcal{N}_p^-$ temos

$$\begin{aligned} C &\geq J^p(v_p) \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v_p|^p dx - \frac{\lambda}{1-\gamma} \int_{\Omega} |v_p|^{1-\gamma} dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |v_p|^q dx + \frac{p-1}{p} |\Omega| \\ &\quad - \frac{1}{q} \left(\int_{\Omega} |\nabla v_p|^p dx - \lambda \int_{\Omega} |v_p|^{1-\gamma} dx - \int_{\Omega} |v_p|^q dx \right) \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_p\|_{W_0^{1,p}}^p - \lambda \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} |v_p|^{1-\gamma} dx + \frac{p-1}{p} |\Omega|. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Como $1-\gamma < p^*$, usando a desigualdade de Hölder e a definição de S_p , temos que

$$\int_{\Omega} |v_p|^{1-\gamma} dx \leq \left(\int_{\Omega} |v_p|^{p^*} dx \right)^{\frac{1-\gamma}{p^*}} |\Omega|^{\frac{p^*-1+\gamma}{p^*}} \leq S_p^{\frac{\gamma-1}{p}} \|v_p\|_{W_0^{1,p}}^{1-\gamma} |\Omega|^{\frac{p^*-1+\gamma}{p^*}}.$$

Assim,

$$C \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_p\|_{W_0^{1,p}}^p - \lambda \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{q} \right) S_p^{\frac{\gamma-1}{p}} |\Omega|^{\frac{p^*-1+\gamma}{p^*}} \|v_p\|_{W_0^{1,p}}^{1-\gamma}. \quad (3.94)$$

Mais ainda, desde que $1-\gamma < 1 < p$, afirmamos que existe $C > 0$ tal que

$$\|v_p\|_{W_0^{1,p}}^p = \int_{\Omega} |\nabla v_p|^p dx \leq C, \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}), \quad (3.95)$$

caso contrário, a menos de subsequência, $\|v_p\|_{W_0^{1,p}}^p \rightarrow \infty$ quando $p \rightarrow \infty$, o qual geraria um contradição quando aplicado à desigualdade (3.94).

Logo, usando a desigualdade de Young temos

$$\int_{\Omega} |\nabla v_p| dx \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v_p|^p dx + \frac{p-1}{p} |\Omega| \quad (3.96)$$

$$\leq C + |\Omega|, \quad (3.97)$$

para todo $p \in (1, \bar{p})$, ou seja, $(v_p)_{1 < p < \bar{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$. $\square$

6.4 Prova do Teorema 6.1

Em primeiro lugar, desde que $(u_p)_{1 < p < \bar{p}}$ e $(v_p)_{1 < p < \bar{p}}$ são limitadas em $BV(\Omega)$, a menos de subsequência,

$$u_p \rightarrow u_0 \quad \text{e} \quad v_p \rightarrow v_0 \quad \text{em } L^s(\Omega), \quad \forall s \in [1, 1^*) \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+. \quad (4.98)$$

Além disso,

$$u_p \rightharpoonup u_0 \quad \text{em } L^{\frac{N}{N-1}} \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+. \quad (4.99)$$

Definição 6.33. Dizemos que $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma solução fraca para o Problema (1.1) se

$$a) \quad u(x) > 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega;$$

$$b) \quad \frac{1}{u^\gamma} \in L^1_{loc}(\Omega);$$

e existe $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}^\infty_{loc}(\Omega)$ com $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ tal que

$$c) \quad -\operatorname{div} \mathbf{z} = \frac{\lambda}{u^\gamma} + u^{q-1} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega);$$

$$d) \quad (\mathbf{z}, Du) = |Du| \text{ como medidas em } \Omega;$$

$$e) \quad u + [u\mathbf{z}, \nu] = 0 \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. sobre } \partial\Omega.$$

Dado $k > 0$. Definimos a função $G_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$G_k(s) = s - T_k(s),$$

onde T_k é dada por

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{se } |s| \leq k, \\ k \frac{s}{|s|} & \text{se } |s| > k. \end{cases} \quad (4.100)$$

Lema 6.34. *Sejam $u_0, v_0 \in BV(\Omega)$ como em (4.98). Então*

$$u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega).$$

Demonstração. Primeiro provaremos que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. De fato, tomando $G_k(u_p) = (u_p - k)^+$ como função teste em (3.10), obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla G_k(u_p)|^p dx = \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} G_k(u_p) dx + \int_{\Omega} u_p^{q-1} G_k(u_p) dx.$$

Note que, pela desigualdade de Hölder temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} G_k(u_p) dx \leq \frac{1}{k^\gamma} \int_{\Omega} G_k(u_p) dx \leq \frac{1}{k^\gamma} \|G_k(u_p)\|_{\frac{N}{N-1}} |\Omega|^{\frac{1}{N}}$$

e

$$\int_{\Omega} u_p^{q-1} G_k(u_p) dx = \int_{A_{k,p}} u_p^{q-1} G_k(u_p) dx \leq \left(\int_{A_{k,p}} u_p^{(q-1)N} dx \right)^{\frac{1}{N}} \|G_k(u_p)\|_{\frac{N}{N-1}},$$

onde $A_{k,p} = \{x \in \Omega ; u_p(x) > k\}$. Assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla G_k(u_p)|^p dx \leq \left[\frac{\lambda}{k^\gamma} |\Omega|^{\frac{1}{N}} + \left(\int_{A_{k,p}} u_p^{(q-1)N} dx \right)^{\frac{1}{N}} \right] \|G_k(u_p)\|_{\frac{N}{N-1}}. \quad (4.101)$$

Mas isso, por sua vez, e a definição de S_1 implicam que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |G_k(u_p)|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq S_1 \int_{\Omega} |\nabla G_k(u_p)| dx \\ &\leq S_1 \left(\frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla G_k(u_p)|^p dx + \frac{p-1}{p} |\Omega| \right) \\ &\leq S_1 \left[\frac{\lambda}{k^\gamma} |\Omega|^{\frac{1}{N}} + \left(\int_{A_{k,p}} u_p^{(q-1)N} dx \right)^{\frac{1}{N}} \right] \|G_k(u_p)\|_{\frac{N}{N-1}} \\ &\quad + \frac{S_1(p-1)}{p} |\Omega|, \end{aligned} \quad (4.102)$$

ou equivalentemente,

$$\left\{ 1 - S_1 \left[\frac{\lambda}{k^\gamma} |\Omega|^{\frac{1}{N}} + \left(\int_{A_{k,p}} u_p^{(q-1)N} dx \right)^{\frac{1}{N}} \right] \right\} \|G_k(u_p)\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \frac{S_1(p-1)}{p} |\Omega|. \quad (4.103)$$

Afirmção. Existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\bar{p} > 1$ tais que

$$\int_{A_{k,p}} u_p^{(q-1)N} dx < \epsilon \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall p \in (1, \bar{p}). \quad (4.104)$$

De fato, como

$$|A_{k,p}| \leq \frac{1}{k^{\frac{N}{N-1}}} \int_{A_{k,p}} u_p^{\frac{N}{N-1}} dx,$$

temos, por (3.87) e pela desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned} \int_{A_{k,p}} u_p^{(q-1)N} dx &\leq \left(\int_{A_{k,p}} u_p^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{(q-1)(N-1)} |A_{k,p}|^{1-(q-1)(N-1)} \\ &\leq \left(\int_{A_{k,p}} u_p^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{(q-1)(N-1)} \frac{1}{k^{\frac{N[1-(q-1)(N-1)]}{N-1}}} \left(\int_{A_{k,p}} u_p^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{1-(q-1)(N-1)} \\ &\leq \frac{1}{k^{\frac{N[1-(q-1)(N-1)]}{N-1}}} \int_{A_{k,p}} u_p^{\frac{N}{N-1}} dx \\ &\leq \frac{1}{k^{\frac{N[1-(q-1)(N-1)]}{N-1}}} S_1^{-\frac{N}{N-1}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_p| dx \right)^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq \frac{1}{k^{\frac{N[1-(q-1)(N-1)]}{N-1}}} S_1^{-\frac{N}{N-1}} (\tilde{C} + 1)^{\frac{N}{N-1}}, \end{aligned}$$

para todo $p \in (1, \bar{p})$. Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_{k,p}} u_p^{(q-1)N} dx = 0,$$

e assim, (4.104) estabelece-se.

Note que, a afirmação anterior implica que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_{k,p}} u_p^{(q-1)N} dx \leq \frac{1}{(2S_1)^N} \quad \text{sempre que } k \geq k_1. \quad (4.105)$$

Aplicando (4.105) em (4.103) obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{S_1 \lambda}{k^\gamma} |\Omega|^{\frac{1}{N}} \right) \|G_k(u_p)\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \frac{S_1(p-1)}{p} |\Omega| \quad \forall k \geq k_1. \quad (4.106)$$

Agora, escolhamos $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2} - \frac{S_1 \lambda}{k^\gamma} |\Omega|^{\frac{1}{N}} > 0 \quad \forall k \geq k_2. \quad (4.107)$$

Assim, de (4.106) e (4.107) e tomando $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, obtemos

$$0 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{S_1 \lambda}{k^\gamma} |\Omega|^{\frac{1}{N}} \right) \|G_k(u_p)\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \frac{S_1(p-1)}{p} |\Omega| \quad \forall k \geq k_0. \quad (4.108)$$

Portanto, fazendo $p \rightarrow 1^+$ em (4.108), por (4.99), tem-se

$$u_0 \leq k \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Similarmente, pode-se provar que $v_0 \in L^\infty(\Omega)$. $\square$

Lema 6.35. *Sejam u_0, v_0 como em (4.98). Para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} |\varphi| dx + \int_{\Omega} \frac{1}{v_0^\gamma} |\varphi| dx \leq C.$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Pela desigualdade de Young e (3.86), temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} \varphi dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_p|^p dx + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dx \leq C + \int_{\Omega} (|\nabla \varphi| + 1)^{\bar{p}} dx, \quad (4.109)$$

para todo $p \in (1, \bar{p})$. Assim, pelo Lema de Fatou segue-se que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} \varphi dx \leq \liminf_{p \rightarrow 1} \int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} \varphi dx \leq C + \int_{\Omega} (|\nabla \varphi| + 1)^{\bar{p}} dx = \tilde{C} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \varphi \geq 0. \quad (4.110)$$

Similarmente, pode-se estabelecer que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{v_0^\gamma} \varphi dx \leq \tilde{C} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \varphi \geq 0.$$

Assim, desde que $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$, por (4.109) e (4.110) segue-se o resultado. $\square$

Lema 6.36. *Sejam u_0, v_0 como em (4.98). Então existem $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2 \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$ com $\|\mathbf{z}^1\|_\infty, \|\mathbf{z}^2\|_\infty \leq 1$ tais que*

$$-div \mathbf{z}^1 \geq \frac{\lambda}{u_0^\gamma} + u_0^{q-1} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (4.111)$$

e

$$-div \mathbf{z}^2 \geq \frac{\lambda}{v_0^\gamma} + v_0^{q-1} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4.112)$$

Demonstração. Fixe $1 \leq s < \infty$ e considere $1 < p < s'$. Então, pela desigualdade de Hölder e (3.86) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ||\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p|^s dx &= \int_{\Omega} |\nabla u_p|^{s(p-1)} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_p|^p dx \right)^{\frac{s}{p'}} |\Omega|^{1-\frac{s}{p'}} \\ &\leq C^{\frac{s}{p'}} |\Omega|^{1-\frac{s}{p'}}, \end{aligned}$$

para todo $p \in (1, \bar{p})$. Logo,

$$||\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p||_s \leq C^{\frac{1}{p'}} |\Omega|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p'}} \leq (C+1)^{\frac{1}{s}} (|\Omega|+1)^{\frac{1}{s}}.$$

Mas isso implica que, a sequência $(|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p)_{1 < p < \bar{p}}$ é limitada em $L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Ainda, existe $z_s \in L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

$$|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \rightharpoonup z_s, \quad \text{em } L^s(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+.$$

Um argumento diagonal mostra que, existe $\mathbf{z}^1$ satisfazendo

$$|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \rightharpoonup \mathbf{z}^1, \quad \text{em } L^s(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad \forall s \in [1, +\infty), \quad (4.113)$$

quando $p \rightarrow 1$. Assim, pela semi-continuidade inferior da norma de $L^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$, temos que

$$\|\mathbf{z}^1\|_s \leq \lim_{p \rightarrow 1} ||\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p||_s \leq |\Omega|^{\frac{1}{s}} \quad \forall s < \infty. \quad (4.114)$$

Ainda, fazendo $s \rightarrow \infty$ em (4.114), tem-se $\mathbf{z}^1 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $\|\mathbf{z}^1\|_\infty \leq 1$.

Usando $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$, como uma função teste em (3.10), temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} \varphi dx + \int_{\Omega} u_p^{q-1} \varphi dx. \quad (4.115)$$

Logo, tomando o $\liminf$ acima, quando $p \rightarrow 1^+$, por (4.98), (4.113) e o Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\Omega} \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \geq \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} \varphi dx + \int_{\Omega} u_0^{q-1} \varphi dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0. \quad (4.116)$$

Mas isso, por sua vez, implica que o funcional

$$C_c^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx$$

é não negativo e, pelo Teorema de representação de Riesz (ver Teorema 7.2 de [36]), existe uma única medida de Radon que a denotamos por $-\operatorname{div} \mathbf{z}^1$ tal que

$$-\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1 = \int_{\Omega} \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

ou seja, o divergente distribucional de $\mathbf{z}^1 \in L^\infty(\Omega)$ é gerada por uma medida de Radon $\operatorname{div} \mathbf{z}^1$. Ainda, como (4.113), (3.86) e a desigualdade de Young implicam que

$$0 \leq -\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1 = \int_{\Omega} \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx = \lim_{p \rightarrow 1} \int_{\Omega} |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \leq C + \int_{\Omega} (|\nabla \varphi| + 1)^{\bar{p}},$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que a variação total de $-\operatorname{div} \mathbf{z}^1$ é localmente finita e assim, $\mathbf{z}^1 \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$ e estabelece-se (4.111).

Agora, para provar (4.112) basta considerar (3.95) e seguir o mesmo argumento prévio. $\square$

Lema 6.37. *Sejam $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2$ como no Lema 6.36 e $h : [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função Lipschitz-contínua não decrescente com $h(0) = 0$. Então as seguintes identidades se estabelecem*

$$-u_0^* \operatorname{div} \mathbf{z}^1 = \lambda u_0^{1-\gamma} + u_0^q \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (4.117)$$

$$-h(u_0)^* \operatorname{div} \mathbf{z}^1 = \frac{\lambda}{u_0^\gamma} h(u_0) + u_0^{q-1} h(u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (4.118)$$

e

$$|Dh(u_0)| - \operatorname{div}(h(u_0)\mathbf{z}^1) = \frac{\lambda}{u_0^\gamma} h(u_0) + u_0^{q-1} h(u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4.119)$$

As mesmas identidades acima valem também quando u_0 e $\mathbf{z}^1$ são substituídas por v_0 e $\mathbf{z}^2$, respectivamente.

Demonstração. Em primeiro lugar mostraremos (4.117).

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$ e ρ_ϵ as funções mollifiers standard. Usando como função teste $(u_0 * \rho_\epsilon)\varphi$ em (4.111), obtemos

$$-\int_\Omega (u_0 * \rho_\epsilon)\varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1 \geq \lambda \int_\Omega \frac{1}{u_0^\gamma} (u_0 * \rho_\epsilon)\varphi \, dx + \int_\Omega u_0^{q-1} (u_0 * \rho_\epsilon)\varphi \, dx. \quad (4.120)$$

Note que, do fato que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ (ver Lema 6.34) tem-se que

$$|u_0 * \rho_\epsilon(x)| \leq \|u_0\|_\infty \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

e pela Observação 6.10 (b),

$$u_0 * \rho_\epsilon \rightarrow u_0^* \quad \operatorname{div} \mathbf{z}^1 - \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, o Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 1.21 [6]) implica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega (u_0 * \rho_\epsilon)\varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1 = \int_\Omega u_0^* \varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1. \quad (4.121)$$

Por outro lado, como $\frac{1}{u_0^\gamma} \varphi \in L^1(\Omega)$ (ver Lema 6.35) e $u_0 * \rho_\epsilon \rightarrow u_0$ q.t.p. em Ω (ver Proposição 3.64 de [6]), temos, aplicando o Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_\Omega \frac{1}{u_0^\gamma} (u_0 * \rho_\epsilon)\varphi \, dx + \int_\Omega u_0^{q-1} (u_0 * \rho_\epsilon)\varphi \, dx \right) = \int_\Omega u_0^{1-\gamma} \varphi \, dx + \int_\Omega u_0^q \varphi \, dx. \quad (4.122)$$

Então, tomando o $\liminf$ em (4.120), por (4.121) e (4.122) obtemos

$$-\int_\Omega u_0^* \varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1 \geq \lambda \int_\Omega u_0^{1-\gamma} \varphi \, dx + \int_\Omega u_0^q \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0. \quad (4.123)$$

Agora provaremos a desigualdade contrária. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Tomando $u_p \varphi$ como função teste em (3.10) obtemos

$$\int_\Omega \varphi |\nabla u_p|^p \, dx + \int_\Omega u_p |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega u_p^{1-\gamma} \varphi \, dx + \int_\Omega u_p^q \varphi \, dx.$$

Logo, pela desigualdade de Young tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi |\nabla u_p| dx + \int_{\Omega} u_p |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \\ & \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \varphi |\nabla u_p|^p dx + \int_{\Omega} u_p |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx + \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} \varphi dx \\ & \leq \lambda \int_{\Omega} u_p^{1-\gamma} \varphi dx + \int_{\Omega} u_p^q \varphi dx + \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} \varphi dx. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Agora, segue-se da semicontinuidade inferior de $BV(\Omega) \ni u \mapsto \int_{\Omega} \varphi |Du|$, (4.98) e (4.113) que

$$\liminf_{p \rightarrow 1} \left(\int_{\Omega} \varphi |\nabla u_p| dx + \int_{\Omega} u_p |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \right) \geq \int_{\Omega} \varphi |Du_0| + \int_{\Omega} u_0 \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx. \quad (4.125)$$

Por outro lado, por (4.98) e pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim_{p \rightarrow 1} \left(\lambda \int_{\Omega} u_p^{1-\gamma} \varphi dx + \int_{\Omega} u_p^q \varphi dx \right) = \lambda \int_{\Omega} u_0^{1-\gamma} \varphi dx + \int_{\Omega} u_0^q \varphi dx. \quad (4.126)$$

Assim, fazendo $p \rightarrow 1^+$ em (4.124), obtemos, por (4.125) e (4.126),

$$\int_{\Omega} \varphi |Du_0| + \int_{\Omega} u_0 \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \leq \lambda \int_{\Omega} u_0^{1-\gamma} \varphi dx + \int_{\Omega} u_0^q \varphi dx. \quad (4.127)$$

Mas isso, por sua vez, junto à Proposição 6.14 e o Corolário 6.12 implicam que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u_0^* \varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1 &= \int_{\Omega} \varphi (\mathbf{z}^1, Du_0) + \int_{\Omega} u_0 \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \\ &\leq \lambda \int_{\Omega} \varphi |Du_0| + \int_{\Omega} u_0 \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \\ &\leq \lambda \int_{\Omega} u_0^{1-\gamma} \varphi dx + \int_{\Omega} u_0^q \varphi dx, \end{aligned} \quad (4.128)$$

ou seja,

$$-u_0^* \operatorname{div} \mathbf{z}^1 \leq \lambda u_0^{1-\gamma} + u_0^q \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4.129)$$

Consequentemente, por (4.123) e (4.129) temos provado (4.117).

Agora provaremos (4.118). Note que, pelo Teorema 3.99 de [6] temos que

$$h(u_0) \in BV(\Omega).$$

Note que, seguindo a argumentação para obter (4.123) pode-se provar que

$$- \int_{\Omega} h(u_0)^* \varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1 \geq \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} h(u_0) \varphi dx + \int_{\Omega} u_0^{q-1} h(u_0) \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \varphi \geq 0. \quad (4.130)$$

Assim resta mostrar a desigualdade contrária. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Tomando como função teste $h(u_p)\varphi$ em (3.10) obtemos

$$\int_{\Omega} \varphi |\nabla u_p|^p h'(u_p) dx + \int_{\Omega} h(u_p) |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} h(u_p) \varphi dx + \int_{\Omega} u_p^{q-1} h(u_p) \varphi dx. \quad (4.131)$$

Pela desigualdade de Young e (4.131) temos que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \varphi |\nabla h(u_p)| dx + \int_{\Omega} h(u_p) |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \\
 &= \int_{\Omega} \varphi |\nabla u_p| h'(u_p) dx + \int_{\Omega} h(u_p) |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \\
 &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \varphi |\nabla u_p|^p h'(u_p) dx + \int_{\Omega} h(u_p) |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx + \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} h'(u_p) \varphi dx \\
 &\leq \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} h(u_p) \varphi dx + \int_{\Omega} u_p^{q-1} h(u_p) \varphi dx + \frac{p-1}{p} L \int_{\Omega} \varphi dx, \tag{4.132}
 \end{aligned}$$

onde L denota a constante de Lipschitz da função h .

Note que, desde que $h(0) = 0$ e h é uma função Lipschitz, temos que $h(u_p) \leq Lu_p$ q.t.p. Ω e assim, por (4.98) e pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$h(u_p) \rightarrow h(u_0) \quad \text{em } L^s(\Omega) \quad \forall s \in [1, 1^*) \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+ \tag{4.133}$$

e, como

$$\frac{1}{u_p^\gamma} h(u_p) + u_p^{q-1} h(u_p) \varphi \leq L(u_p^{1-\gamma} + u_p^q) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \tag{4.134}$$

temos também que

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} h(u_p) \varphi dx + \int_{\Omega} u_p^{q-1} h(u_p) \varphi dx \right) = \int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} h(u_0) \varphi dx + \int_{\Omega} u_0^{q-1} h(u_0) \varphi dx. \tag{4.135}$$

Agora, fazendo $p \rightarrow 1$ em (4.132), pela semicontinuidade inferior do funcional $u \mapsto \int_{\Omega} \varphi |Du|$, (4.134) e (4.135), temos que

$$\int_{\Omega} \varphi |\nabla h(u_0)| dx + \int_{\Omega} h(u_0) \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \leq \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} h(u_0) \varphi dx + \int_{\Omega} u_0^{q-1} h(u_0) \varphi dx. \tag{4.136}$$

Consequentemente, pela Proposição 6.13 temos que

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} h(u_0)^* \operatorname{div} \mathbf{z}^1 \varphi &= \int_{\Omega} \varphi(z, Dh(u_0)) + \int_{\Omega} h(u_0) \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \varphi |Dh(u_0)| + \int_{\Omega} h(u_0) \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \\
 &\leq \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} h(u_0) \varphi dx + \int_{\Omega} u_0^{q-1} h(u_0) \varphi dx.
 \end{aligned} \tag{4.137}$$

Assim, de (4.130) e (4.137) tem-se que

$$-h(u_0)^* \operatorname{div} \mathbf{z}^1 = \frac{\lambda}{u_0^\gamma} h(u_0) + u_0^{q-1} h(u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.138}$$

Agora provaremos a identidade (4.119). Porém mostraremos que

$$(\mathbf{z}^1, Dh(u_0)) = |Dh(u_0)| \quad \text{como medidas de Radon em } \Omega. \tag{4.139}$$

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Note que, por (4.138) e (4.136) temos que

$$\int_{\Omega} \varphi |Dh(u_0)| dx + \int_{\Omega} h(u_0) \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx \leq - \int_{\Omega} h(u_0)^* \varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1.$$

Mas isso implica, pela definição da distribuição $(\mathbf{z}^1, Du)$ (ver (2.6)), que

$$\int_{\Omega} \varphi |Dh(u_0)| dx \leq - \int_{\Omega} h(u_0) \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} h(u_0)^* \varphi \operatorname{div} \mathbf{z}^1 = \int_{\Omega} \varphi (\mathbf{z}^1, Dh(u_0)).$$

Logo, pela arbitrariedade de φ tem-se

$$|Dh(u_0)| \leq (\mathbf{z}^1, Dh(u_0)) \quad \text{como medidas em } \Omega.$$

A desigualdade recíproca decorre da Proposição 6.12 e assim, estabelece-se (4.139).

Consequentemente, como $\operatorname{div}(h(u_0)\mathbf{z}) = h(u_0)^* \operatorname{div} \mathbf{z} + |Dh(u_0)|$, a identidade (4.138) torna-se

$$|Dh(u_0)| - \operatorname{div}(h(u_0)\mathbf{z}^1) = \frac{\lambda}{u_0^\gamma} h(u_0) + u_0^{q-1} h(u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Note que, pela mesma argumentação prévia pode-se provar que v_0 e $\mathbf{z}^2$ também verificam as identidades (4.117), (4.118) e (4.119). $\square$

Prova do Teorema 6.1 Para provar esse teorema verificaremos que u_0, v_0 (como em (4.98)) satisfazem as condições (a) – (e) da Definição 6.33. Primeiro mostraremos que u_0 satisfaz tais condições.

(a) Desde que $u_p(x) \rightarrow u_0$ q.t.p. $x \in \Omega$, pelo Lema de Fatou e o Lema 6.35, temos que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} |\varphi| dx \leq \liminf_{p \rightarrow 1} \int_{\Omega} \frac{1}{u_p^\gamma} |\varphi| dx \leq C. \quad (4.140)$$

Mas isso implica que

$$|\{x \in \Omega : u_0(x) = 0\}| = 0$$

e assim,

$$u_0(x) > 0 \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

(b) Note que, dado um conjunto compacto $K \subset \Omega$ existe uma função não negativa $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi = 1$ em K . Assim,

$$\int_K \frac{1}{u_0^\gamma} dx = \int_K \frac{\varphi}{u_0^\gamma} dx \leq \int_{\Omega} \frac{\varphi}{u_0^\gamma} dx < \infty,$$

ou seja, $u_0 \in L_{loc}^1(\Omega)$.

(c) Note que, pelo Lema 6.36 existe $\mathbf{z}^1 \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$ com $\|\mathbf{z}^1\|_\infty \leq 1$ tal que

$$-\operatorname{div} \mathbf{z}^1 \geq \frac{\lambda}{u_0^\gamma} + u_0^{q-1} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4.141)$$

Então resta provar desigualdade contrária.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$h_n(s) := nT_{\frac{1}{n}}(s) \quad \forall s \geq 0,$$

onde $T_{\frac{1}{n}}$ é a função definida em (4.100) para $k = \frac{1}{n}$.

Note que,

$$h_n(u_0) \rightarrow 1|_{\Omega} \quad \text{em } L^1(\Omega) \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (4.142)$$

onde $1|_{\Omega}$ denota a função constante 1 restrita a Ω . Mas isso, por sua vez, implica que

$$0 = |D1|_{\Omega} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |Dh_n(u_0)|. \quad (4.143)$$

Desde que h_n é uma função Lipschitz-contínua e não decrescente, o Lema 6.37 estabelece que

$$|Dh_n(u_0)| - \operatorname{div}(h_n(u_0)\mathbf{z}^1) = \frac{\lambda}{u_0^\gamma} h_n(u_0) + u_0^{q-1} h_n(u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4.144)$$

Assim, tomando o $\liminf$ em ambos lados de (4.144), obtemos, por (4.143) e (4.142),

$$\int_{\Omega} \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi \, dx \leq \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{u_0^\gamma} \varphi \, dx + \int_{\Omega} u_0^{q-1} \varphi \, dx. \quad (4.145)$$

Portanto, de (4.116) e (4.145) temos que

$$-\operatorname{div} \mathbf{z}^1 = \frac{\lambda}{u_0^\gamma} + u_0^{q-1} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

(d) Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Note que, por (4.127), (4.117) e a definição da distribuição $(\mathbf{z}^1, Du_0)$ (ver (2.6)), temos que

$$\int_{\Omega} \varphi |Du_0| \leq - \int_{\Omega} \varphi u_0^* \operatorname{div} \mathbf{z}^1 - \int_{\Omega} u_0 \mathbf{z}^1 \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi (\mathbf{z}^1, Du_0).$$

Assim, desde que φ é arbitrário temos que

$$|Du_0| \leq (\mathbf{z}^1, Du) \quad \text{como medidas em } \Omega.$$

Por outro lado, como $\|\mathbf{z}^1\|_{\infty} \leq 1$, por (6.11) temos

$$(\mathbf{z}^1, Du_0) \leq |Du_0| \quad \text{como medidas em } \Omega.$$

Consequentemente,

$$(\mathbf{z}^1, Du_0) = |Du_0| \quad \text{como medidas em } \Omega. \quad (4.146)$$

(e) Note que, para $u_p \in \mathcal{N}_p^-$ tem-se que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_p|^p \, dx = \lambda \int_{\Omega} u_p^{1-\gamma} \, dx + \int_{\Omega} u_p^q \, dx.$$

Assim, desde que $u_p = 0$ sobre $\partial\Omega$, pela desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_p| \, dx + \int_{\partial\Omega} u_p \, d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_p|^p \, dx + \frac{p-1}{p} |\Omega| \\ &= \lambda \int_{\Omega} u_p^{1-\gamma} \, dx + \int_{\Omega} u_p^q \, dx + \frac{p-1}{p} |\Omega|. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Fazendo $p \rightarrow 1$ em (4.147), pela semicontinuidade inferior de $BV(\mathbb{R}^N) \ni u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |Du|$ e (4.98), obtemos

$$\int_{\Omega} |Du_0| + \int_{\partial\Omega} u_0 \, d\mathcal{H}^{N-1} \leq \lambda \int_{\Omega} u_0^{1-\gamma} \, dx + \int_{\Omega} u_0^q \, dx = - \int_{\Omega} u^* \operatorname{div} \mathbf{z}^1.$$

Mas isso implica, pela Proposição 6.14, que

$$\int_{\Omega} |Du_0| + \int_{\partial\Omega} u_0 d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\Omega} (\mathbf{z}^1, Du_0) - \int_{\partial\Omega} [u\mathbf{z}^1, \nu] d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (4.148)$$

Logo, por (d) e (4.148) segue-se que

$$\int_{\partial\Omega} u_0 + [u\mathbf{z}^1, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0. \quad (4.149)$$

Por outro lado, segue-se da Proposição 6.15 e (a), que

$$|[u_0\mathbf{z}^1, \nu]| \leq u_0 \|\mathbf{z}^1\|_{\infty} \leq u_0 \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. em } \partial\Omega. \quad (4.150)$$

Assim, de (4.149) e (4.150) temos

$$\int_{\partial\Omega} u_0 + [u\mathbf{z}^1, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} = 0,$$

ou seja,

$$u_0 + [u\mathbf{z}^1, \nu] = 0 \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, u_0 satisfaz as condições (a)–(e) da Definição 6.33 e assim, ela é uma solução de (1.1).

Similarmente, pode-se provar que v_0 também satisfaz as condições (a)–(e) da Definição 6.33, isto é, v_0 satisfaz

$$a) \quad v_0(x) > 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega;$$

$$b) \quad \frac{1}{v_0} \in L_{loc}^1(\Omega),$$

e existe $\mathbf{z}^2 \in \mathcal{DM}_{loc}^{\infty}(\Omega)$ com $\|\mathbf{z}^2\|_{\infty} \leq 1$ tal que

$$c) \quad -\operatorname{div} \mathbf{z}^2 = \frac{\lambda}{v_0} + v_0^{q-1}, \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

$$d) \quad (\mathbf{z}^2, Dv_0) = |Dv_0| \text{ como medidas em } \Omega,$$

$$e) \quad v_0 + [v_0\mathbf{z}^2, \nu] = 0, \quad \mathcal{H}^{N-1} - \text{q.t.p. sobre } \partial\Omega.$$

Agora, resta provar que $u_0 \neq v_0$. De fato, pela Observação 6.30 e sendo $u_p, v_p \in \mathcal{N}_p$, temos por um lado

$$\lambda \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1-\gamma} \right) \int_{\Omega} u_p^{1-\gamma} dx + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} u_p^q dx < K < 0, \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p})$$

e pelo outro,

$$0 < \frac{\beta_1}{2} < \lambda \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1-\gamma} \right) \int_{\Omega} v_p^{1-\gamma} dx + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} v_p^q dx, \quad \text{para todo } p \in (1, \bar{p}),$$

os quais, por sua vez, implicam que, ao passar para o limite quando $p \rightarrow 1$ e usar (4.98),

$$\lambda \left(1 - \frac{1}{1-\gamma} \right) \int_{\Omega} u_0^{1-\gamma} dx + \left(1 - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} u_0^q dx \leq K < 0$$

e

$$0 < \frac{\beta_1}{2} \leq \lambda \left(1 - \frac{1}{1-\gamma} \right) \int_{\Omega} v_0^{1-\gamma} dx + \left(1 - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} v_0^q dx.$$

Assim, necessariamente $u_0 \neq v_0$, ou seja, o Problema (1.1) possui pelo menos duas soluções em $BV(\Omega)$. $\square$

Referências

- [1] R.P. Agarwal, H. Lu and D. O'Regan. Positive solutions for Dirichlet problems of singular quasilinear elliptic equations via variational methods. *Mathematika*, v. 51, p. 187–202, (2004).
- [2] C.O. Alves. A Berestycki-Lions type result for a class of problems involving the 1-Laplacian operator. *Communications in Contemporary Mathematics*, p. 2150022, (2021).
- [3] C.O. Alves and R.C. Duarte. A Berestycki-Lions type result and applications. *Rev. Mat. Iberoam.*, v. 35, p. 1859–1884, (2019).
- [4] C.O. Alves and M.T.O. Pimenta. On existence and concentration of solutions to a class of quasilinear problems involving the 1-Laplace operator. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, Springer, v. 56, p. 1–24, (2017).
- [5] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *J. Funct. Anal.*, v. 122, p. 519–543, (1994).
- [6] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara. Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Oxford University Press., Oxford, (2000).
- [7] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J.M. Mazón. Minimizing total variation flow. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, v. 331, p. 867–872, (2000).
- [8] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J.M. Mazón. Minimizing total variation flow. *Differential Integral Equations*, v. 14, p. 321–360, (2001).
- [9] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J.M. Mazón. The Dirichlet problem for the total variation flow. *J. Funct. Anal.*, v. 180, p. 347–403, (2001).
- [10] F. Andreu, V. Caselles and J.M. Mazón. Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals. Birkhäuser Verlag, Basel, v. 223, (2004).
- [11] F. Andreu, A. Dall'Aglio and S. Segura de León . Bounded solutions to the 1-Laplacian equation with a critical gradient term. *Asymptot. Anal.*, v. 80, p. 21–43, (2012).
- [12] G. Anzellotti. The Euler equation for functionals with linear growth. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 290, p. 483–501, (1985).
- [13] D. Arcoya and L. Boccardo. Multiplicity of solutions for a Dirichlet problem with a singular and a supercritical nonlinearities. *Differential and integral equations*, v. 26, p. 119–128, (2013).

-
- [14] D. Arcoya and L. Moreno-Mérida. Multiplicity of solutions for a Dirichlet problem with a strongly singular nonlinearity. *Nonlinear Anal.*, v. 95, p. 281–291, (2014).
- [15] H. Attouch, G. Buttazzo and G. Michaille. Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization. MPS-SIAM, Philadelphia, (2006).
- [16] K. Bal and P. Garain. Multiplicity of solution for a quasilinear equation with singular nonlinearity. *Mediterr. J. Math.*, v. 17, p. 20, (2020).
- [17] A. Baldi. Weighted bv functions. *Houston J. Math.*, v. 27, p. 683–705, (2001).
- [18] S. Barile and G.M. Figueiredo. Existence of a least energy nodal solution for a class of p&q-quasilinear elliptic equations. *Adv. Nonlinear Stud.*, v. 14, p. 511–530, (2014).
- [19] R.G. Bartle. The elements of integrations and Lebesgue measure. John Wiley & Sons, Inc., New York, (1995).
- [20] H. Berestycki and P.L. Lions. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 82, p. 313–345, (1983).
- [21] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, New York, (2010).
- [22] F. Brock, L. Iturriaga, J. Sánchez and P. Ubilla. Existence of positive solutions for p-Laplacian problems with weights. *Commun. Pure Appl. Anal.*, v. 14, p. 941–952, (2006).
- [23] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg. First order interpolation inequalities with weights. *Compositio Math.*, v. 53, p. 259–275, (1984).
- [24] V. Caselles. On the entropy conditions for some flux limited diffusion equations. *J. Differential Equations*, v. 250, p. 3311–3348, (2011).
- [25] K. Chang. Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 80, p. 102–129, (1981).
- [26] Y. Chen, S. Levine and M. Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, v. 66, p. 1383–1406, (1981).
- [27] V. De Cicco, D. Giachetti and S. Segura de León. Elliptic problems involving the 1-Laplacian and a singular lower order term. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, v. 99, p. 349–376, (2019).
- [28] F. Clarke. A new approach to Lagrange multipliers. *Math. Oper. Res.*, v. 1, p. 165–174, (1976).
- [29] F. Demengel. On some nonlinear partial differential equations involving the 1-Laplacian and critical Sobolev exponent. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, v. 4, p. 667–686, (1999).
- [30] L.C. Evans and R.F. Gariepy. Measure theory and fine properties of functions. CRC Press, Boca Raton, Florida, (1992).

-
- [31] G.M. Figueiredo and M.T.O. Pimenta. Nehari method for locally Lipschitz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, v. 25, p. 18, (2018).
- [32] G.M. Figueiredo and M.T.O. Pimenta. Strauss' and Lions' type results in $BV(\mathbb{R}^N)$ with an application to an 1-Laplacian problem. *Milan J. Math.*, Springer, v. 86, p. 15–30, (2018).
- [33] G.M. Figueiredo and M.T.O. Pimenta. Existence of bounded variation solution for a 1-Laplacian problem with vanishing potentials. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 459, p. 861–878, (2018).
- [34] G.M. Figueiredo and M.T.O. Pimenta. Nodal solutions to quasilinear elliptic problems involving the 1-Laplacian operator via variational and approximation methods. *Indiana Univ. Math. J.*, (2020).
- [35] M. Struwe. Variational methods. Springer-verlag, New York, (991), 2000.
- [36] G.F. Folland. Real analysis: modern techniques and their applications. John Wiley & Sons, New York, v. 40, (1999).
- [37] J. García-Cuerva and J.L. Rubio de Francia. Strauss' and Lions' type results in $BV(\mathbb{R}^N)$ with an application to an 1-Laplacian problem. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, v. 116, (1985).
- [38] J. Giacomoni, I. Schindler and P. Takáč. Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, v. 6, p. 117–158, (2007).
- [39] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Springer-Verlag, Berlin-New York, v. 224, (1977).
- [40] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Courier Dover Publications, (2018).
- [41] N. Hirano, C. Saccon and N. Shioji. Brezis-Nirenberg type theorems and multiplicity of positive solutions for a singular elliptic problem. *J. Differential Equations*, v. 245, p. 1997–2037, (2008).
- [42] L. Jeanjean and K. Tanaka. A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 131, p. 2399–2408, (2003).
- [43] B. Kawohl. On a family of torsional creep problems. *J. Reine Angew. Math.*, v. 410, p. 1–22, (1990).
- [44] B. Kawohl and F. Schuricht. Dirichlet problems for the 1-Laplace operator, including the eigenvalue problem. *Commun. Contemp. Math.*, v. 9, p. 515–543, (2007).
- [45] T. Kilpeläinen. Weighted Sobolev spaces and capacity. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, v. 19, p. 95–113, (1994).
- [46] S. Kim, O. Kwon, J.K. Seo and J.R. Yoon. On a nonlinear partial differential equation arising in magnetic resonance electrical impedance tomography. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 34, p. 511–526, (2002).

-
- [47] A. Kufner. Weighted Sobolev spaces. Teubner-Text zur, (1980).
- [48] J.M. Mazón. The Euler-Lagrange equation for the anisotropic least gradient problem. *Adv. Calc. Var.*, v. 31, p. 865–894, (2016).
- [49] A. Mercaldo, J.D. Rossi, S. Segura de León and C. Trombetti. On the solutions to 1-Laplacian equation with L1 data. *J. Funct. Anal.*, v. 256, p. 2387–2416, (2009).
- [50] A. Mercaldo, S. Segura de León and C. Trombetti. Behaviour of p-Laplacian problems with Neumann boundary conditions when p goes to 1. *Commun. Pure Appl. Anal.*, v. 12, p. 253–267, (2013).
- [51] M. Miranda. Dirichlet problem with L1 data for the non-homogeneous minimal surface equation. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 24, p. 227–241, (1974/75).
- [52] A. Molino and S. Segura de León. Elliptic equations involving the 1-Laplacian and a subcritical source term. *Nonlinear Anal.*, v. 168, p. 50–66, (2018).
- [53] J.S. Moll. The anisotropic total variation flow. *Math. Ann.*, v. 332, p. 177–218, (2005).
- [54] A. Moradifam, A. Nachaman and A. Tamasan. Uniqueness of minimizers of weighted least gradient problems arising in conductivity imaging. *arXiv preprint arXiv:1404.5992*, (2014).
- [55] J. Munkres. *Topology*. 5. ed. [S.l.]: Pearson Education, (2014).
- [56] A. Nachman, A. Tamasan and A. Timonov. Recovering the conductivity from a single measurement of interior data. *Inverse Problems*, v. 25, p. 035014, (2009).
- [57] J.C. Ortiz Chata and M.T.O. Pimenta. A Berestycki-Lions’ type result to a quasilinear elliptic problem involving the 1-Laplacian operator. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 500, p. 21, (2021).
- [58] J. C. Ortiz Chata, M. T.O. Pimenta and S. Segura de León. Anisotropic 1-Laplacian problems with unbounded weights. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, v. 28, p. 40, (2021).
- [59] N. S. Papageorgiou and P. Winkert. Singular p-Laplacian equations with superlinear perturbation. *J. Differential Equations*, v. 266, p. 1462–1487, (2019).
- [60] K. Perera and E. A. B. Silva. Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 323, p. 1238–1252, (2006).
- [61] K. Perera and Z. Zhang. Multiple positive solutions of singular p-Laplacian problems by variational methods. *Bound. Value Probl.*, Khayyam Publishing, Inc., p. 377–382, (2005).
- [62] P.H. Rabinowitz. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 43, p. 270–291, (1992).
- [63] M. Struwe. Variational methods. Springer-verlag, New York, (991), 2000.
- [64] Y. Sun, S. Wu and Y. Long. Combined effects of singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems. *J. Differential Equations*, v. 176, p. 511–531, (2001).

-
- [65] A. Szulkin. Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, v. 3, p. 77–109, (1976).
 - [66] G. Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, v. 110, p. 353–372, (1976).
 - [67] J. L. Vázquez. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, v. 12, p. 191–202, (1984).
 - [68] M. Willem. Minimax theorems. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, v. 24, (1996).
 - [69] A. Zuniga. Continuity of minimizers to weighted least gradient problems. *Nonlinear Anal.*, v. 178, p. 86–109, (2019).