

**unesp** 

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA



**PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA**

**Equações diferenciais e modelagem de alguns  
fenômenos físicos**

**Daniel Borin**

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO  
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

**Daniel Borin**

# **Equações diferenciais e modelagem de alguns fenômenos físicos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora  
**Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira**

**Rio Claro/SP  
2024**

B734e Borin, Daniel  
Equações diferenciais e modelagem de alguns fenômenos físicos / Daniel Borin. -- Rio Claro, 2024  
96 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro  
Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira

1. Modelagem Matemática. 2. Equações Diferenciais Ordinárias. 3. Resistência do ar. 4. Circuito RC.. 5. Pêndulo. I. Título.

## **Impacto potencial desta pesquisa**

Este trabalho realiza um estudo de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, apresentando alguns modelos clássicos de fenômenos físicos, como o problema de queda de um corpo, circuito elétrico e o pêndulo. Na literatura, em geral, esses modelos são discutidos somente do ponto de vista teórico.

O impacto potencial dessa pesquisa é apresentar, juntamente com os modelos de fenômenos físicos, alguns dos experimentos de fácil realização, que os validam. Com isso, pretende-se que esse material possa servir de apoio para docentes de disciplinas que envolvem o tópico de equações diferenciais, tornando o assunto mais intuitivo e motivador, beneficiando docentes e alunos.

## **Potential impact of this research**

This work conducts a study of first- and second-order ordinary differential equations, introducing some classical models of physical phenomena, such as the problem of a falling body, an electric circuit, and the pendulum. In the literature, these models are generally discussed only from a theoretical perspective.

The potential contribution of this research lies in presenting, alongside the models of physical phenomena, some simple and practical experiments that validate them. This material aims to serve as a resource for instructors teaching courses on differential equations, making the subject more intuitive and engaging, thereby benefiting both educators and students.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

Daniel Borin

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAGEM DE ALGUNS FENÔMENOS FÍSICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

---

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira  
IGCE - UNESP

---

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques  
CNPEM - Campinas

---

Profa. Dra. Nilmara de Jesus Biscaia Pinto  
FCA - UNICAMP

Conceito: Aprovado

**Rio Claro (SP), 12 de dezembro de 2024**

*Esta dissertação é dedicada aos meus pais*

ANTONIO VALDECI BORIN  
e  
EVA APARECIDA RIBEIRO BORIN

*Vocês são tudo para mim...*

---

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, devo agradecer a todos aqueles que, de alguma forma, me ajudaram para que eu chegasse até aqui ou que de alguma forma contribuíram para este trabalho. Em especial, gostaria de agradecer mais precisamente :

- Aos meus pais, Antonio Valdeci Borin e Eva Aparecida Ribeiro Borin, pois sem eles não teria chegado até aqui, muito menos teria escrito esta dissertação. Vocês são o meu alicerce, me sustentando em todas as dificuldades da vida, não há palavras para descrever o quanto sou grato a vocês.
- À minha noiva Letícia Toniolo, a pessoa com quem divido meus sonhos, objetivos e frustrações, estando ao meu lado tanto nas vitórias quanto nas adversidades. Obrigado por reacender em mim uma chama cujo ardor não mais me recordava.
- À Doutora Renata Zotin Gomes de Oliveira pelas sábias palavras de incentivo e paciência durante o projeto.
- Ao Professor Tit. Edson Denis Leonel por compreender a importância que esse mestrado em Matemática possui para mim.
- À minha ex-orientadora Doutora Marta Cilene Gadotti que mais do que uma mentora, tornou-se uma amiga. Ao meu ex-orientador Daniel Augusto Turolla Vanzella, que apesar da dificuldade em se orientar na pandemia, nunca me abandonou e sempre depositou sua confiança em mim e no meu potencial.

*Sim, o passado pode machucar. Mas, do modo como vejo, você pode fugir dele ou aprender com ele. Rafiki*

---

# Resumo

A compreensão matemática da força de resistência do ar, dos circuitos eletrônicos e do oscilador harmônico é alcançada por meio da modelagem usando equações diferenciais e princípios físicos. Neste trabalho, realizaremos um estudo sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira e segunda ordem, que desempenham um papel fundamental na modelagem do problema de queda livre de um corpo, levando em consideração a resistência do ar, os circuitos elétricos e o pêndulo - exemplos clássicos de um oscilador harmônico. Além de apresentar os principais aspectos dessa classe de EDOs, também abordaremos o teorema de Existência e Unicidade, apresentando duas abordagens distintas: o Método de Aproximações Sucessivas e o Teorema de Picard-Lindelöf. Por fim, fundamentaremos a teoria com três aplicações. Primeiramente, realizaremos a modelagem matemática da influência do ar na queda de um objeto e validaremos a mesma com uma experimentação simples e de baixo custo, utilizando o software Tracker. Em seguida, abordaremos a modelagem do Circuito Resistor-Capacitor e sua validação com um experimento elétrico. Por último, discutiremos o pêndulo, um sistema que descreve o movimento periódico de um sistema em torno de uma posição de equilíbrio.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Equações Diferenciais Ordinárias. Resistência do ar. Circuito RC. Pêndulo.

---

# Abstract

The mathematical understanding of air resistance, electronic circuits, and the harmonic oscillator has been achieved through modeling with differential equations and physics principles. This work studies first and second order Ordinary Differential Equations (ODEs), which play a fundamental role in modeling a free falling body, considering air resistance, electric circuits, and the pendulum - a classic example of a harmonic oscillator, will be conducted. In addition to presenting the main aspects of this class of ODEs, we will also address the Existence and Uniqueness Theorem, exploring two distinct approaches: the Method of Successive Approximations and the Picard-Lindelöf Theorem. Finally, we will support the theory with three applications. First, we will mathematically model the influence of air resistance on the fall of an object and validate it through a simple and low-cost experiment using Tracker software. Next, we will model the Resistor-Capacitor (RC) circuit and validate it through an electrical experiment. Lastly, we will analyze the pendulum, a system that describes the periodic motion of an object around its equilibrium position.

**Keywords:** Mathematical Modeling. Air Resistance. Ordinary Differential Equations. RC Circuit. Pendulum.

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Definições Básicas e o Teorema de Existência e Unicidade para EDO de Primeira Ordem</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Classificação de Equações Diferenciais</b>	<b>16</b>
2.1.1	Tipo	16
2.1.2	Ordem	17
2.1.3	Equação Linear e Não Linear	18
<b>2.2</b>	<b>Teorema de Existência e Unicidade para EDOs</b>	<b>20</b>
2.2.1	Demonstração via Método das Aproximações Sucessivas de Picard	20
2.2.2	Teorema de Picard-Lindelöf	27
<b>3</b>	<b>Técnicas de resolução para Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem</b>	<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>Equações Separáveis</b>	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Método do Fator Integrante</b>	<b>39</b>
<b>3.3</b>	<b>Equações Exatas</b>	<b>43</b>
3.3.1	Fatores Integrantes para Equação Exatas	48
<b>3.4</b>	<b>Equações de Bernoulli e Ricatti</b>	<b>50</b>
<b>4</b>	<b>Aplicações de EDO de Primeira Ordem: objeto em queda e circuito RC</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Objeto em queda considerando o ar</b>	<b>53</b>
4.1.1	Abordagem teórica	53
4.1.2	Abordagem experimental e validação das hipóteses	56
<b>4.2</b>	<b>Circuito RC</b>	<b>58</b>
4.2.1	Elementos de Circuito	59
4.2.2	Regra das Malhas de Kirchhoff	60
4.2.3	Modelagem matemática do circuito RC	61
4.2.4	Validação Experimental	63

---

<b>5</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem e o Problema do Pêndulo</b> .....	<b>65</b>
<b>5.1</b>	<b>Teoria Preliminar</b> .....	<b>65</b>
<b>5.2</b>	<b>EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes</b> .....	<b>72</b>
5.2.1	Raízes reais distintas .....	73
5.2.2	Raízes complexas .....	74
5.2.3	Raízes repetidas .....	76
<b>5.3</b>	<b>Pêndulo</b> .....	<b>79</b>
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b> .....	<b>83</b>
	<b>Referências</b> .....	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Algumas Definições Envolvendo Espaço Métricos</b> .....	<b>87</b>
<b>B</b>	<b>Dados dos experimentos</b> .....	<b>91</b>

## 1

# Introdução

---

O estudo do movimento dos corpos em queda livre é uma área fundamental da Física clássica que tem despertado o interesse e a curiosidade de cientistas e pesquisadores ao longo dos séculos. Embora a gravidade seja o fator predominante nesse tipo de movimento, a influência do ar sobre a queda dos corpos não pode ser negligenciada. Através da interação entre o objeto em queda e o meio atmosférico, uma série de fenômenos e efeitos complexos ocorrem, desafiando a compreensão e exigindo uma análise mais aprofundada.

Quando um corpo é abandonado em queda livre, sua velocidade aumenta constantemente devido à aceleração gravitacional. No entanto, à medida que o objeto desce, ele também encontra resistência do ar. Essa resistência, conhecida como arrasto ou força de resistência do ar, exerce uma influência significativa sobre a trajetória e a velocidade do corpo em queda.

A magnitude do arrasto depende de diversos fatores, incluindo a velocidade do objeto, sua área de superfície, sua forma e a densidade do ar. Em geral, corpos com maior área de superfície e formas mais complexas experimentam maior resistência do ar. À medida que a velocidade do corpo em queda aumenta, o arrasto também aumenta proporcionalmente, até atingir um ponto em que a força de arrasto equilibra a força gravitacional, resultando em uma velocidade constante conhecida como velocidade terminal.

No tecido invisível que permeia a vida cotidiana, os circuitos elétricos se destacam como espinha dorsal da revolução tecnológica que moldou o mundo moderno. Embora muitas vezes passem despercebidos, esses caminhos intrincados de corrente elétrica são cruciais para o funcionamento de uma ampla gama de dispositivos, desde os simples até os complexos. Em especial há os circuitos Resistência-Capacitor (RC) que são circuitos elétricos que consistem em resistores e capacitores. Esses circuitos desempenham um papel crucial em sistemas eletrônicos, como filtros, temporizadores e circuitos de carregamento e descarregamento. A análise desses circuitos muitas vezes envolve equações diferenciais ordinárias, pois a carga ou descarga do capacitor ao longo do tempo pode ser modelada por uma equação diferencial que relaciona a corrente e a tensão no circuito.

Os osciladores harmônicos são fundamentais no estudo da Física e Engenharia, representando sistemas cujo movimento oscilatório é governado por uma força restauradora proporcional ao deslocamento do sistema em relação ao equilíbrio. Esses sistemas não apenas desempenham um papel crucial na compreensão de fenômenos como vibrações mecânicas e movimentos periódicos, mas também encontram aplicações em áreas tão diversas quanto a produção musical e o controle de sistemas complexos. A simplicidade de sua estrutura - uma massa conectada a um ponto fixo por uma mola ou equivalente - permite não apenas análises teóricas profundas,

mas também experimentos práticos que revelam os princípios fundamentais do movimento oscilatório e sua aplicação em diferentes contextos científicos e tecnológicos. Um exemplo clássico de um oscilador harmônico na Física é o pêndulo simples, consistindo de uma massa presa a um fio ou haste, que oscila sob a influência da gravidade. A força restauradora neste caso é a componente tangencial do peso da massa, que tende a restaurar o pêndulo à sua posição de equilíbrio vertical [1].

Dentro desse contexto, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) emergem como ferramentas matemáticas essenciais para entender e descrever o comportamento de tais sistemas pois são fundamentais para descrever quantitativamente o comportamento de sistemas dinâmicos. Para o problema da queda de corpos no ar, as EDOs são utilizadas para expressar as relações entre as forças atuantes e as variáveis de interesse, como a posição e a velocidade do objeto em queda ([2], [3], [4]).

O estudo do movimento de queda de corpos no ar tem aplicações em diversas áreas, desde a Física e a Engenharia até a Biologia e a Meteorologia. Compreender como o ar afeta o movimento dos objetos é essencial para projetar paraquedas eficientes, calcular trajetórias de projéteis, analisar a resistência ao vento em estruturas e até mesmo compreender o voo de aves e insetos, entre outros objetos de estudo.

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre duas classes especiais de Equações Diferenciais Ordinárias, as de primeira ordem e segunda ordem, que são responsáveis pela modelagem do problema de queda livre de um corpo considerando a resistência do ar e do movimento de um pêndulo, respectivamente.

No Capítulo 2 apresentamos os principais resultados dessas classes de EDOs e também o Teorema de Existência e Unicidade para EDO de primeira ordem, de duas formas diferentes: pelo Método de Aproximações Sucessivas e Teorema de Picard-Lindelöf. Esse teorema desempenha um papel importante na compreensão e na previsão de fenômenos naturais e artificiais regidos por equações diferenciais. Assim, para os leitores que não estão familiarizados com Análise Real e Espaços Métricos, alguns conceitos necessários para o entendimento da segunda forma da demonstração são apresentados no Apêndice A. No Capítulo 3 apresentamos algumas técnicas de resolução de primeira ordem para uma melhor compreensão da resolução das EDOs referentes aos modelos apresentados. No Capítulo 4 são apresentados os modelos para queda de dois objetos (esfera de plástico e isopor) e de um circuito elétrico juntamente com os experimentos, simples e de baixo custo, utilizando o software Tracker. Um experimento com a construção de um circuito RC também é apresentado, bem como a validação do modelo. No Capítulo 5 são apresentados os principais resultados para EDOs de 2ª ordem, trazendo o modelo do pêndulo através de uma experimentação com a construção do mesmo. Por fim, no Capítulo 6 apresentamos algumas considerações sobre o desenvolvimento do trabalho.

Para o leitor que deseja conhecer outros modelos de fenômenos físicos assim como modelos em Química, Biologia, etc, as referências ([2], [4], [5]) são sugeridas.

## 2

# Definições Básicas e o Teorema de Existência e Unicidade para EDO de Primeira Ordem

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual fenômenos acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são denominadas **equações diferenciais**.

Uma equação diferencial que descreve algum processo que varia com o tempo é chamada, muitas vezes de **modelo matemático** do processo. Para se usar as equações diferenciais nos diversos campos em que são úteis é preciso primeiro formular a equação diferencial apropriada que descreve o fenômeno ou modelar o problema em questão, e a construção de um modelo satisfatório é algumas vezes a parte mais difícil de um problema.

Este capítulo foi baseado nas referências [2, 3, 6, 11, 13–16].

## 2.1 Classificação de Equações Diferenciais

Quando se trabalha com equações diferenciais algumas caracterizações são feitas com base na forma em que a mesma tem. Desta forma podemos fazer a classificação das equações diferenciais através do seu tipo, ordem e linearidade.

### 2.1.1 Tipo

O tipo de um equação diferencial está relacionada com a derivada que aparece na mesma. Quando na equação aparecem apenas derivadas em relação à uma variável, ela é dita uma **equação diferencial ordinária** e quando as derivadas são derivadas parciais, é dita **equação diferencial parcial**.

■ **Exemplo 2.1** A expressão

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t),$$

é a equação diferencial ordinária para a carga  $Q(t)$  em um capacitor em um circuito com capacitância  $C$ , resistência  $R$ , indutância  $L$  e voltagem  $E(t)$  (Figura 2.1). ■

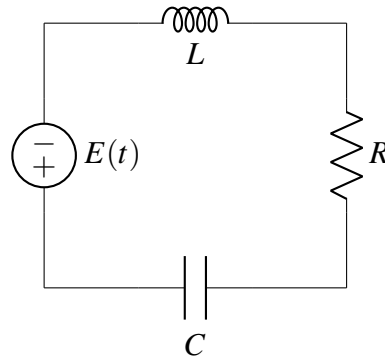


Figura 2.1 – Circuito LRC. Fonte: Próprio autor.

■ **Exemplo 2.2** A expressão

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

é a equação diferencial parcial (equação do calor) que descreve a condução de calor em uma haste, em que  $u(x,t)$  é a temperatura e  $\alpha^2$  é uma constante que depende da densidade, da condutividade térmica e do calor específico do material da haste (Figura 2.2).

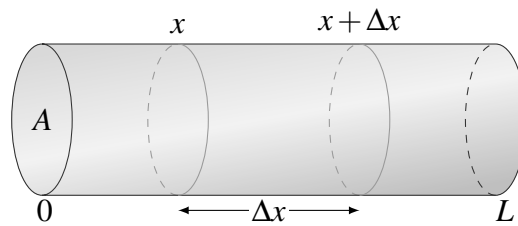


Figura 2.2 – Seção transversal de área  $A$  de uma haste circular delgada. Fonte: Próprio autor.

### 2.1.2 Ordem

A ordem de uma equação diferencial é dada pela maior ordem entre todas as derivadas que aparecem na equação.

■ **Exemplo 2.3** Considere a seguinte equação diferencial

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t),$$



que é uma EDO de segunda ordem, pois a é maior ordem que aparece entre todas as derivadas.

### 2.1.3 Equação Linear e Não Linear

Uma equação diferencial ordinária  $y' = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$  é dita **linear** se  $f$  for uma função linear em relação às variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , caso contrário, é chamada de equação não linear. Assim, considerando  $t \in I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que possua todas as suas derivadas, a equação diferencial ordinária linear geral tem a forma

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\frac{dy}{dx} + a_0(t)y = g(t),$$

em que  $a_i(t)$  e  $g(t)$  são funções reais e contínuas, para  $i \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, n$ .

Um problema físico simples modelado por equação diferencial não linear é o problema do pêndulo, cuja equação é dada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \text{sen } \theta = 0.$$

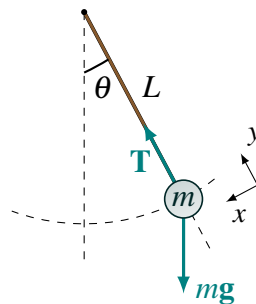


Figura 2.3 – Movimento de um pêndulo. Fonte: Próprio autor.

A presença do fator  $\text{sen } \theta$  faz com que a equação seja não linear. As equações não lineares são mais complicadas que as lineares e geralmente seus métodos de resolução são numéricos. Em vista disso é comum que muitos problemas sejam aproximados por equações lineares e esse processo é chamado de linearização.

■ **Exemplo 2.4** No caso do pêndulo, se o ângulo  $\theta$  for pequeno então  $\text{sen } \theta \cong \theta$  (realiza-se a expansão em série de Taylor do seno e como  $\theta$  é pequeno despreza-se os termos de ordem maior que 2 ([10]), ou pode-se pensar no limite  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1$ , e a equação do pêndulo pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0,$$

a qual é linear. ■

### Solução do Problema de Valor Inicial de 1ª ordem

O processo de solução envolve uma integração, que traz consigo uma constante arbitrária, cujo valores possíveis geram uma infinidade de soluções. A especificação dessa constante na maioria das vezes é feita indiretamente através de um ponto do gráfico; esse ponto que é fornecido é chamado de condição inicial.

**Definição 2.1.1** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos,  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que possua todas as suas derivadas e  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $C^1$  na variável  $y$ . Então, um Problema de Valor Inicial (PVI) é constituído por uma equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

e uma condição inicial  $y(t_0) = y_0$ .

■ **Exemplo 2.5** Considere a equação diferencial

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450$$

cujas soluções são

$$p(t) = 900 + ce^{t/2},$$

em que  $c$  é uma constante arbitrária (o método de resolução dessa equação será abordado na Seção 3.2). Observe na Figura 2.4 a família de soluções, para alguns valores da constante  $c$ .

Suponha que  $p(0) = 850$ , que denominaremos como **condição inicial** do problema, e através dela encontraremos a constante  $c$ :

$$p(0) = 850 \implies t = 0 \quad \text{e} \quad p = 850,$$

$$p(t) = 900 + ce^{t/2} \implies 850 = 900 + c \implies c = -50.$$

A equação diferencial  $\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450$  junto com a condição inicial  $p(0) = 850$  formam um **Problema de Valor Inicial (PVI)** e a solução desse problema, tendo a constante conhecida devido à condição inicial, é chamada de **solução do Problema de Valor Inicial**. Nesse caso, a solução do PVI é

$$p(t) = 900 - 50e^{t/2}.$$

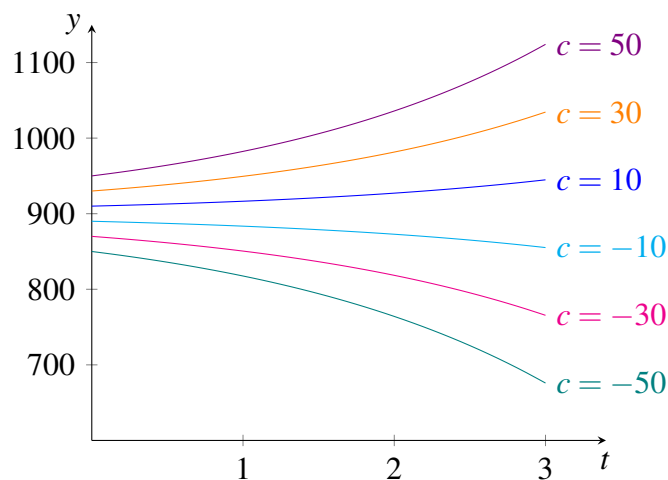


Figura 2.4 – Soluções do Exemplo 2.5 para alguns valores da constante  $c$ . Fonte: Próprio autor.

Agora que já introduzimos as equações diferenciais, apresentaremos na próxima seção o

Teorema de Existência e Unicidade para EDOs de primeira ordem.

## 2.2 Teorema de Existência e Unicidade para EDOs

O Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias é um resultado fundamental na teoria das equações diferenciais. Esse teorema estabelece condições sob as quais uma solução única existe para uma equação diferencial ordinária, garantindo a unicidade dessa solução dentro de um intervalo específico, sendo uma poderosa ferramenta para garantir que uma solução única possa ser encontrada para uma determinada equação diferencial. No entanto, nem todas as equações diferenciais possuem solução única para todas as condições iniciais. Portanto, é crucial verificar as condições sob as quais o teorema se aplica.

As condições necessárias para aplicar o teorema de existência e unicidade podem variar dependendo do tipo de equação diferencial e do contexto específico. Geralmente, essas condições envolvem a continuidade da função e de suas derivadas, bem como propriedades de Lipschitz, que impõem restrições na taxa de variação da função. Uma vez que as condições necessárias são satisfeitas, o teorema garante que existe uma solução única para a equação diferencial dentro de um intervalo determinado. Isso é de extrema importância na modelagem e na resolução de problemas práticos, pois permite prever o comportamento de sistemas dinâmicos ao longo do tempo.

Portanto, o Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias fornece uma base teórica sólida para a análise e solução de equações diferenciais. Ao estabelecer condições sob as quais uma solução única existe, esse teorema desempenha um papel crucial na compreensão e na previsão de fenômenos naturais e artificiais regidos por equações diferenciais. Essas equações são amplamente utilizadas para descrever fenômenos em diversas áreas da ciência, como Física, Biologia, Economia e Engenharia.

Desta maneira, nesta seção iremos apresentar duas formas de demonstrar o teorema de Existência e Unicidade para equação diferencial ordinária de primeira ordem. A primeira é através da construção de uma sequência que converge para a solução e tal método é chamado de Aproximações Sucessivas de Picard. A segunda é através de um resultado poderoso de Análise Funcional conhecido como Teorema do Ponto-Fixo de Banach, que será utilizado para demonstrar a existência e unicidade através do teorema de Picard-Lindelöf.

### 2.2.1 Demonstração via Método das Aproximações Sucessivas de Picard

Daremos agora uma demonstração de existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial de primeira ordem e a mesma se baseia no método das iteradas de Picard [6].

Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0, \quad (2.1)$$

em que  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que possui todas as suas derivadas e  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $C^1$  na variável  $y$ .

Quando nos deparamos com este problema, surgem duas perguntas:

1. Como sabemos que o problema de valor-inicial (2.1) tem de fato solução?
2. Como sabemos que existe somente uma solução  $y(t)$  de (2.1)?

Para resolver a primeira questão, devemos estabelecer a existência de uma função  $y(t)$  cujo valor em  $t = t_0$  é  $y_0$ , e cuja derivada em qualquer instante  $t$  é igual a  $f(t, y(t))$ . Portanto, devemos procurar um teorema que mostre a existência desta função.

Frequentemente é possível provar que uma sequência de funções  $\{y_n(t)\}$  tem um limite  $y(t)$ , sem expressar  $y(t)$ . Logo, para provarmos a existência de uma solução  $y(t)$  de (2.1), iremos proceder da seguinte maneira:

- Construiremos uma sequência  $\{y_n(t)\}$  que se aproxima cada vez mais de uma função  $y(t)$ .
- Mostraremos que a sequência de funções  $\{y_n(t)\}$  tem um limite  $y(t)$  em um intervalo conveniente  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ , com  $\alpha > 0$ .
- Provaremos que  $y(t)$  é uma solução de (2.1) neste intervalo.
- Por fim, iremos descrever algumas condições para que a solução  $y(t)$  seja única.

### Construção da Sequência de Aproximação - $\{y_n(t)\}$

Tentar determinar uma sequência de funções que se aproxima de uma determinada é bem comum na matemática. Uma forma de analisarmos uma equação diferencial é sob a forma

$$y(t) = L(t, y(t)) \quad (2.2)$$

em que  $L$  pode depender explicitamente de  $y$  e integrais de funções de  $y$ .

Ao fazer isso, estamos observando o problema sob uma nova forma, em que  $L$  é um operador, de tal forma que a solução é obtida após a aplicação de tal operação. Podemos colocar o problema de valor-inicial (2.1) sob a forma especial (2.2) e, integrando ambos os membros de (2.1) em relação à variável independente, temos

$$\int_{t_0}^t \frac{dy(s)}{ds} ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \implies y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é chamada uma equação integral e o operador que a caracteriza é dado por

$$L(t, y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Vamos então construir uma sequência de “soluções aproximadas”  $\{y_n(t)\}$  de (2.3).

Começaremos tentando achar uma solução  $y_0(t)$  de (2.3). A suposição mais simples possível é  $y_0(t) = y_0$ . Para verificar se  $y_0(t)$  é solução (2.3), calculamos

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds.$$

Se  $y_1(t) = y_0$ , então  $y(t) = y_0$  é de fato uma solução de (2.3). Caso não seja, então tentaremos  $y_1(t)$  como a próxima aproximação. Para calcularmos se  $y_1$  é uma solução calculamos  $y_2$  de modo análogo. Assim, definimos uma sequência de funções  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  tal que

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Essas funções  $y_n(t)$  são chamadas aproximações sucessivas, ou iteradas de Picard, e notavelmente, essas aproximações sucessivas de Picard sempre convergem, em um intervalo conveniente, para uma solução de  $y(t)$  de (2.3). É o que provaremos a seguir.

Primeiramente, observe que como as soluções de EDO's não lineares podem não existir para todo instante  $t$ , não podemos esperar que as iteradas de Picard  $y_n(t)$  de (2.3) convirjam para todo  $t$ .

Logo, tentamos encontrar um intervalo no qual todas as  $y_n(t)$  são uniformemente limitadas, ou seja,  $|y_n(t)| \leq k$ , em  $k$  é uma constante fixada. Procuraremos então um retângulo  $R$  que contenha todas as iteradas de Picard  $y_n(t)$  e o lema a seguir nos mostra como encontrar tal retângulo.

**Lema 2.2.1** Suponha  $f$  uma função contínua. Escolhamos dois números positivos  $a$  e  $b$ , e seja  $R$  o retângulo:  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ,  $|y - y_0| \leq b$ . Calculemos

$$M = \max_{(t,y) \in R} |f(t,y)| \text{ e coloquemos } \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Então

$$|y_n(t) - y_0| \leq M(t - t_0), \quad (2.4)$$

para  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ .

O Lema 2.2.1 estabelece que o gráfico de  $y_n(t)$  está entre as retas  $y = y_0 + M(t - t_0)$  e  $y = y_0 - M(t - t_0)$ , para  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ . Essas retas limitam o retângulo  $R$  em  $t = t_0 + a$  se  $a \leq \frac{b}{M}$ , e em  $t = t_0 + \frac{b}{M}$  se  $a \geq \frac{b}{M}$ , conforme ilustrado na Figura 2.5. Demonstremos agora o resultado.

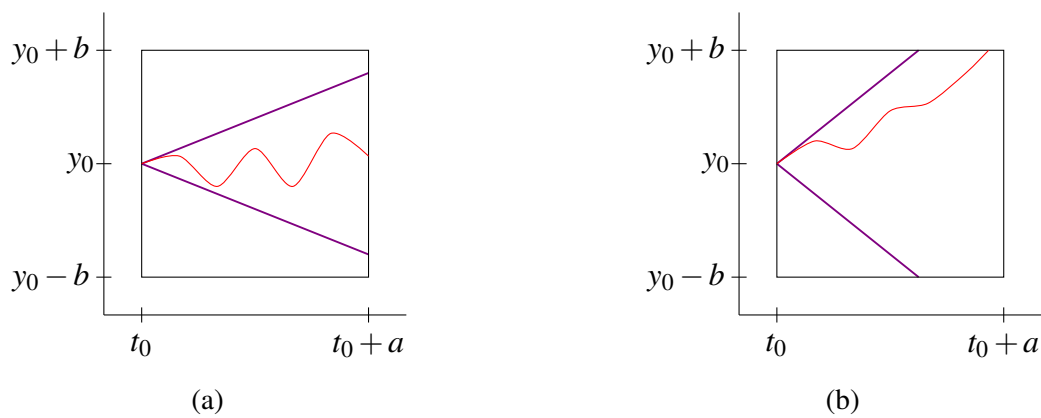


Figura 2.5 – A ilustração mostra que a sequência de funções  $y_n$  (curva vermelha) está delimitada pelas retas  $y = y_0 + M(t - t_0)$  e  $y = y_0 - M(t - t_0)$  (curvas na cor roxa) para (a)  $\alpha = a$ ; (b)  $\alpha = b/M$ . Fonte: Próprio autor.

*Demonstração.* Vamos estabelecer (2.4) por indução sobre  $n$ . Primeiro mostraremos que (2.4) é verdadeiro para  $n = 0$ , pois  $y_0(t) = y_0$ . A seguir, devemos mostrar que (2.4) é verdadeira para  $n = j + 1$  se for verdadeira para  $n = j$ . Mas isto segue imediatamente, pois se

$$|y_j(t) - y_0| \leq M(t - t_0),$$

então

$$|y_{j+1}(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y_j(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_j(s))| ds \leq M(t - t_0),$$

para  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ . Consequentemente, (2.3) é verdadeira para todo  $n$ . ■

**Proposição 2.2.2** As iteradas de Picard  $y_n(t)$  de (2.1) convergem para cada  $t$  no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$  se  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existe e é contínua.

*Demonstração.* Vamos primeiro reduzir o problema de mostrar que a sequência de funções  $y_n(t)$  converge, ao problema de provar que uma série infinita converge, pois é mais simples de fazer essa prova.

Conseguimos isto escrevendo  $y_n(t)$  sob a forma

$$y_n(t) = y_0(t) + [y_1(t) - y_0(t)] + \dots + [y_n(t) - y_{n-1}(t)].$$

Evidentemente, a sequência  $\{y_n(t)\}$  converge se, e somente se, a série infinita abaixo converge.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_j(t) - y_{j-1}(t)|. \quad (2.5)$$

Para provarmos isso, é suficiente mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| < \infty. \quad (2.6)$$

Isto é realizado da seguinte maneira: observamos que

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \\ &= \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial y} \right| |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds, \end{aligned}$$

em  $\xi(s)$  está entre  $y_{n-1}(s)$  e  $y_{n-2}(s)$ , pois pelo Teorema do Valor Médio,  $g(x_1) - g(x_2) = g'(\xi)(x_1 - x_2)$ , para algum número  $\xi$  entre  $x_1$  e  $x_2$ .

Segue imediatamente do Lema (2.2.1) que todos os pontos  $(s, \xi(s))$  pertencem ao retângulo  $R$  para  $t_0 \leq s \leq t_0 + \alpha$ . Consequentemente,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \quad (2.7)$$

com

$$L = \max_{(t,y) \in R} \left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right|, \quad (2.8)$$

este  $L$  existe porque a função  $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}$  é contínua por hipótese e  $R$  é um conjunto compacto.

A equação (2.8) define a constante  $L$ . Pondo  $n = 2$  em (2.7), obtemos

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0| ds \leq L \int_{t_0}^t M(s - t_0) ds = \frac{LM(t - t_0)^2}{2}.$$

Isto, por sua vez, implica que

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_2(s) - y_1| ds \leq ML^2 \int_{t_0}^t \frac{(s - t_0)^2}{2} ds = \frac{L^2 M(t - t_0)^3}{3!}.$$

Continuando indutivamente, vemos que

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq L \frac{ML^{n-1}(t - t_0)^n}{n!}, \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha. \quad (2.9)$$

Portanto, para  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ ,

$$|y_1(t) - y_0(t)| + |y_2(t) - y_1(t)| + \dots \leq M(t - t_0) + \frac{ML(t - t_0)^2}{2!} + \frac{ML(t - t_0)^3}{3!} + \dots$$

$$\leq M\alpha + \frac{ML\alpha^2}{2!} + \frac{ML\alpha^3}{3!} + \dots = \frac{M}{L} \left[ \alpha L + \frac{(\alpha L)^2}{2!} + \frac{(\alpha L)^3}{3!} + \dots \right] = \frac{M}{L} (e^{\alpha L} - 1)$$

Esta quantidade, obviamente, é menor que infinito. Consequentemente, as iteradas de Picard  $y_n(t)$  convergem para cada  $t$  do intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ . Indicaremos o limite da sequência  $\{y_n(t)\}$  por  $y(t)$ . ■

Podemos agora demonstrar o teorema de existência

**Teorema 2.2.3 — Existência.** Sejam  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  contínuas no retângulo  $R : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b$ .  
Calculemos

$$M = \max_{(t,y) \in R} |f(t,y)|, \quad \text{e ponhamos } \alpha = \min \left\{ a, \left( \frac{b}{M} \right) \right\}.$$

Então, o problema de valor inicial  $y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$  tem pelo menos uma solução  $y(t)$  no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ . Um resultado análogo é verdadeiro para  $t < t_0$ .

*Demonstração.* Mostraremos que  $y(t)$  satisfaz a equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (2.10)$$

e que  $y(t)$  é contínua. Para isso, lembremos que as iteradas de Picard  $y_n(t)$  são definidas pela equação

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds. \quad (2.11)$$

Aplicando o limite para  $n \rightarrow \infty$  em (2.11), obtemos

$$y(t) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds. \quad (2.12)$$

Para mostrar que o segundo membro de (2.12) é igual a

$$y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

ou seja, a passagem ao limite para dentro do sinal de integração, devemos mostrar que

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right| \rightarrow 0$$

quando  $n$  tende a infinito. Realizaremos essa demonstração da seguinte maneira. Primeiro observemos que o gráfico de  $y(t)$  está no retângulo  $R$  para  $t \leq t_0 + \alpha$ , pois é o limite de funções  $y_n(t)$  cujos gráficos estão em  $R$ .

Portanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, y_n(s))| ds = \\ &= \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial y} \right| |y(s) - y_n(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t |y(s) - y_n(s)| ds, \end{aligned}$$

em que  $L$  é definido pela equação (2.6). A seguir, observemos que

$$y(s) - y_n(s) = \sum_{j=n+1}^{\infty} [y_j(s) - y_{j-1}(s)]$$

pois

$$y(s) = y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [y_j(s) - y_{j-1}(s)]$$

e

$$y_n(s) = y_0 + \sum_{j=1}^n [y_j(s) - y_{j-1}(s)].$$

Conseqüentemente, de (2.9),

$$\begin{aligned} |y(s) - y_n(s)| &\leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{L^{j-1} (s-t_0)^j}{j!} \\ &\leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{L^{j-1} \alpha^j}{j!} = \frac{M}{L} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!} \end{aligned} \quad (2.13)$$

e

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right| \leq M \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!} \int_{t_0}^t ds \leq M \alpha \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!}.$$

Esta soma tende a zero quando  $n$  tende a infinito, pois é o resto do desenvolvimento (convergente) em Série de Taylor de  $e^{\alpha L}$ .

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

e  $y(t)$  satisfaz (2.10). Para mostrar  $y(t)$  é contínua, devemos mostrar que para cada  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$|y(t+h) - y(t)| < \varepsilon, \quad \text{se } |h| < \delta.$$

Como não conhecemos  $y(t)$  explicitamente, não podemos comparar  $y(t+h)$  com  $y(t)$  diretamente, assim escolhemos um inteiro grande  $N$  e observamos que

$$y(t+h) - y(t) = [y(t+h) - y_N(t+h)] + [y_N(t+h) - y_N(t)] + [y_N(t) - y(t)].$$

Especificamente, escolhemos  $N$  satisfazendo

$$\frac{M}{L} \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então, de (2.13),

$$|y(t+h) - y_N(t+h)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e}$$

$$|y_N(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

para  $t < t_0 + \alpha$ , e  $h$  suficientemente pequeno (de modo que  $t + h < t_0 + \alpha$ ). A seguir, observemos que  $y_N(t)$  é contínua, pois é obtida por  $N$  integrações repetidas de funções contínuas. Portanto, podemos tomar  $\delta > 0$  tão pequeno que

$$|y_N(t+h) - y_N(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para } |h| < \delta.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |y(t+h) - y(t)| &\leq |y(t+h) - y_N(t+h)| + |y_N(t+h) - y_N(t)| + |y_N(t) - y(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para  $|h| < \delta$ . Portanto,  $y(t)$  é solução contínua de (2.10), e isto completa a demonstração de que  $y(t)$  satisfaz (2.1) ■

Uma vez mostrada a existência da solução de uma EDO, mostraremos que tal solução é única. Para tal utilizaremos do seguinte lema auxiliar.

**Lema 2.2.4** Seja  $w(t)$  uma função não-negativa, com

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds.$$

em que  $L$  é uma constante arbitrária. Então,  $w(t)$  é identicamente nula.

*Demonstração.* Considere

$$U(t) = \int_{t_0}^t w(s) ds.$$

Então

$$\frac{dU}{dt} = w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds = LU(t).$$

Conseqüentemente,  $e^{-L(t-t_0)}U(t) \leq U(t_0) = 0$ , para  $t \geq t_0$ , e portanto  $U(t) = 0$ . Isto, por sua vez, implica em  $w(t) = 0$ , pois

$$0 \leq w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds = LU(t) = 0.$$

Se analisarmos bem, os problemas de valor inicial que tem mais de uma solução são evidentemente inaceitáveis nas aplicações. Por esse motivo, é importante verificarmos quais as características de um problema de valor inicial que tem mais de uma solução.

**Teorema 2.2.5 — Existência e Unicidade.** Sejam  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  contínuas no retângulo  $R : t_0 \leq t \leq t_0 + a$ ,  $|y - y_0| \leq b$ .

Calculemos

$$M = \max_{(t,y) \text{ em } R} |f(t,y)|, \quad \text{e ponhamos } \alpha = \min \left\{ a, \left( \frac{b}{M} \right) \right\}.$$

Então, o problema de valor inicial  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  tem uma única solução  $y(t)$  no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ .

*Demonstração.* O Teorema 2.2.3 garante a existência de pelo menos uma solução  $y(t)$  do problema de valor inicial. Suponhamos que  $z(t)$  seja uma segunda solução desse problema. Então

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad \text{e} \quad z(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds.$$

Subtraindo essas duas equações membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds, \end{aligned}$$

em que  $L$  é o valor máximo de  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$  para  $(t, y)$  em  $R$ . Pelo Lema 2.2.4, essa desigualdade implica que  $y(t) = z(t)$ . Portanto o problema de valor inicial tem uma única solução  $y(t)$ . ■

## 2.2.2 Teorema de Picard-Lindelöf

Uma das versões mais famosas do Teorema de Existência para problemas de valor inicial é a de Picard e Lindelöf. Originalmente, a demonstração desse resultado foi dada por Lindelöf, entretanto, o método que aplicaremos aqui para a sua demonstração (utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach) é atribuído a Picard.

O teorema do Ponto fixo de Banach é um resultado sobre espaço métricos que reúne condições que garantem a unicidade do ponto fixo sendo enunciado e provado por Stefan Banach (1892-1945) em 1922 [18]. Em virtude disso, utilizaremos alguns conceitos da teoria dos espaços métricos mas, para o leitor que não está familiarizado com o tema, o Apêndice A apresenta os conceitos fundamentais da área que serão empregados na demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf.

### Ponto Fixo e Contração

Neste ponto do trabalho, o objetivo é definir os conceitos de ponto fixo e de contração, para que possamos, assim, estar preparados para o resultado principal: o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

**Definição 2.2.1 — Ponto Fixo.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Um *ponto fixo* de uma aplicação  $T : X \rightarrow X$  é um elemento  $x \in X$  satisfazendo

$$T(x) = x.$$

Geometricamente, para o caso particular de uma função  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ , pontos fixos são os valores de  $x$ , caso existam, para os quais o gráfico de  $f(x)$  intercepta a reta  $y = x$ .

■ **Exemplo 2.6** Seja  $E = C([0, 1])$  o espaço das funções contínuas definidas sobre o intervalo

fechado  $[0, 1]$ . Seja  $T : E \rightarrow E$  definido por

$$(Tx)(t) = x(0) + \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Para qualquer  $a \in \mathbb{C}$ , a função  $x_1(t) = ae^t$  é um ponto fixo de  $T$ . De fato, aplicando  $T$  na função  $x_1(t)$ , temos

$$T(x_1)(t) = a + \int_0^t ae^\tau d\tau = a + a(e^t - 1) = ae^t = x_1(t).$$

Logo,  $(Tx_1)(t) = x_1(t)$  e  $x_1(t)$  é um ponto fixo. ■

Diversos problemas em Matemática se reduzem a encontrar pontos fixos de alguma aplicação. Uma das maneiras de determiná-los é chamado *Método das Aproximações Sucessivas*.

**Definição 2.2.2 — Método das Aproximações Sucessivas.** Seja  $T$  uma aplicação contínua de um espaço métrico  $(X, d)$  nele mesmo. O *Método das Aproximações Sucessivas* consiste de uma tentativa para se obter os pontos fixos de  $T$  a partir de qualquer ponto  $x_0 \in X$ . A ideia é aplicar  $T$  no ponto  $x_0$ , sucessivamente, obtendo a sequência  $x_n = T(x_{n-1})$  e, tomar o limite  $n \rightarrow \infty$ . Se essa sequência converge para algum  $x$  e como  $T$  é contínua, então temos que esse limite é um ponto fixo, pois

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = T(x).$$

Em um espaço métrico completo  $M$ , ou seja, um espaço onde toda sequência de Cauchy converge para um ponto de  $M$  ([12]), temos que o método da aproximações sucessivas converge para uma classe específica de transformações, as *contrações*.

**Definição 2.2.3 — Lipschitz-Contínua.** Sejam  $X = (X, d_X)$  e  $Y = (Y, d_Y)$  espaços métricos. Uma transformação  $T : X \rightarrow Y$  é chamada de *Lipschitz-Contínua* em relação às métricas  $d_X$  e  $d_Y$  se existe uma constante  $L \geq 0$  tal que

$$d_Y(T(\xi), T(\eta)) \leq Ld_X(\xi, \eta)$$

para todos  $\xi, \eta \in X$ . A constante  $L$  é denominada de *constante de Lipschitz*.

**Definição 2.2.4 — Contração.** Nas mesmas condições da definição anterior, dizemos que  $T$  é uma *contração* se  $L \in [0, 1)$ .

Em seguida iremos enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach que fornece condições suficientes para a existência e unicidade de um ponto fixo no caso da transformação ser uma contração.

## Teorema do Ponto Fixo de Banach

Teoremas que nos garantam existência e, às vezes, unicidade de soluções de equações de ponto fixo são denominados *Teoremas de Ponto Fixo*. Há diversos destes teoremas na literatura, todos com diferentes hipóteses a cerca do conjunto  $X$  e da aplicação  $A$ , como por exemplo, o

Teorema do Ponto Fixo de Schauder, Teorema do Ponto fixo de Banach, entre outros.

Agora, estudaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, provado por ele em 1922 [18], que afirma que toda contração em um espaço métrico completo possui um, e somente um, ponto fixo.

**Teorema 2.2.6 — Ponto Fixo de Banach.** Seja  $R$  um subconjunto fechado do espaço métrico completo  $(X, d)$ . Se a aplicação  $T : R \rightarrow R$  é uma contração, então  $T$  possui um único ponto fixo em  $R$ .

*Demonstração.* A ideia da prova é construir uma sequência  $\{x_n\}$  dada pelo método das aproximações sucessivas e mostrar que ela é de Cauchy. Assim a sequência converge no espaço completo  $X$ , conseqüentemente no subespaço  $R$  e então provamos que o limite  $x$  é um ponto fixo e é único.

Escolhendo  $x_0 \in R$  arbitrário e aplicando  $T$  neste ponto de maneira sucessiva obtemos a sequência

$$\{x_n\} = T^n(x_0),$$

em que  $T^n$  denota a  $n$ -ésima aplicação de  $T$ .

Primeiro iremos provar que  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy. Assim sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $m < n$ . Aplicando a desigualdade triangular  $n - m$  vezes obtemos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_{m+1}) \\ &\quad \vdots \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por outro lado como  $T$  é uma contração e  $\{x_n\}$ , obtemos para um  $k \in \mathbb{N}$  qualquer que

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &\leq d(Tx_k, Tx_{k-1}) \\ &\leq Ld(Tx_{k-1}, Tx_{k-2}) \\ &\leq L^2d(Tx_{k-2}, Tx_{k-3}) \\ &\quad \vdots \\ &\leq L^k d(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto combinando (2.14) e (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (L^m + L^{m+1} + \dots + L^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq L^m \left( \sum_{a=0}^{\infty} L^a \right) d(x_0, x_1) = \frac{L^m}{1-L} d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{L^m}{1-L} d(x_0, x_1). \quad (2.16)$$

Isso prova que  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy, pois como  $d(x_0, x_1)$  é fixo podemos tomar  $m$  grande de maneira que  $L^m$  seja suficientemente pequeno, para qualquer  $n > m$ .

Como  $\{x_n\}$  é uma sequência de Cauchy em  $R$ , que é completo, há um único  $x \in R$ , para o qual a sequência converge. Vamos agora provar que  $x$ , o limite da sequência  $\{x_n\}$ , é um ponto fixo. Pela desigualdade triangular segue

$$d(x, T(x)) \leq d(x, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, T(x)), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

e

$$d(x, x_m) \leq \underbrace{d(x, x_n)}_{\rightarrow 0} + d(x_n, x_m), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

pois como  $\{x_n\}$  se aproxima de  $x$  para  $n$  grande, podemos fazer o termo  $d(x, x_n)$  arbitrariamente pequeno, tomando  $n$  grande, sem alterar os demais. Assim, utilizando (2.16) e a contratividade de  $T$  temos

$$\begin{aligned} d(x_m, T(x)) &\leq \frac{L^m}{1-L} d(x_0, x_1) + L d(x_m, x) \\ &\leq \frac{L^{m+1}}{1-L} d(x_0, x_1) + \frac{L^{m+1}}{1-L} d(x_0, x_1) = 2 \frac{L^{m+1}}{1-L} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como  $m$  é arbitrário podemos fazer  $m \rightarrow \infty$  e obtemos  $d(x, T(x)) = 0$ , o que implica que  $x = T(x)$ .

Por fim, provaremos que  $x$  é o único ponto fixo de  $T$ . Suponha que existe um outro ponto fixo  $\tilde{x}$ , tal que  $\tilde{x} = T(\tilde{x})$ . Usando o fato de  $T$  ser uma contração temos

$$d(x, \tilde{x}) = d(T(x), T(\tilde{x})) \leq L d(x, \tilde{x}),$$

ou seja,

$$(1-L)d(x, \tilde{x}) \leq 0.$$

Como  $L < 1$  temos que  $d(x, \tilde{x}) \leq 0$ , implicando  $x = \tilde{x}$ , finalizando a prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach. ■

**Observação 2.1.** A recíproca do Teorema do Ponto Fixo de Banach em geral não é verdadeira, apenas impondo condições adicionais obtemos a validade da recíproca [17].

### Generalização do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Antes de abordarmos o Teorema de Picard-Lindelöf, faremos uma pequena generalização do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Esse resultado é particularmente útil, por exemplo, quando estamos lidando com a equação integral de Volterra.

No caso sem generalização temos que a aplicação  $T$  tem que ser uma contração. Todavia em alguns casos temos o operador por si só não o é, mas alguma de suas potências apresenta tal propriedade. Nesse caso, podemos também garantir os mesmos resultados do Teorema de Ponto Fixo de Banach. Temos o seguinte:

**Proposição 2.2.7** Seja  $M$  um conjunto dotado de uma métrica  $d$  e suponha  $M$  completo em relação a  $d$ . Seja  $A$  um subconjunto fechado em  $M$  e seja  $T$  uma função de  $A$  em  $A$ ,  $T : A \rightarrow A$ . Vamos supor que exista um número  $m \in \mathbb{N}$  tal que a aplicação  $T^m$  seja uma contração, cujo ponto fixo, único, é  $x \in A$ . Então,  $T$  também tem um ponto fixo único, a saber, o mesmo  $x$ .

*Demonstração.* Primeiramente, mostremos que  $x$  é também ponto fixo de  $T$ . Notemos que, como  $x = T^m(x)$ , temos também que

$$T(x) = T^{m+1}(x) = T^m(T(x)).$$

Isso diz que  $T(x)$  é ponto fixo de  $T^m$ . Pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach este último é  $x$  e é único. Daí como  $T(x) = x$  segue que  $x$  é ponto fixo de  $T$ .

Provemos agora que  $x$  é também o único ponto fixo de  $T$ . Para tal, suponha que exista um outro denominado  $y$ , ou seja, um ponto que satisfaça  $y = T(y)$ . Logo segue que  $T(y) = T^2(y)$ . Unindo as duas vemos que  $y = T(y) = T^2(y)$ . Repetindo esse procedimento, chegamos a  $y = T(y) = T^2(y) = \dots = T^m(y)$ . Isso nos fornece que  $y$  é ponto fixo de  $T^m$ . Agora, pelas hipóteses, o único ponto fixo de  $T^m$  é  $x$ . Logo  $y = x$ . ■

### Teorema de Picard-Lindelöf

Finalmente, procedemos com uma das principais aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach: a demonstração de um famoso teorema sobre a existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial (PVI) em equações diferenciais ordinárias (EDOs), devido a Picard e Lindelöf.

Vamos apresentar uma versão geral do teorema sobre existência e unicidade de soluções de PVI em EDOs válido para equações definidas em espaços de Banach  $\mathcal{B}$ . Desta maneira consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.17)$$

em que  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ ;  $x_0 \in \mathcal{B}$ ;  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$  e  $f: \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ .

A vantagem dessa abordagem é a generalização que obtemos pois se considerarmos o espaço de Banach  $\mathcal{B} = \mathbb{R}$  (ou  $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ ), a equação (2.17) representa uma EDO de primeira ordem de uma função real (complexa) desconhecida  $x(t)$ . Todavia se considerarmos o caso em que  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathcal{B} = \mathbb{C}^n$ ), temos agora que a equação (2.17) representa um sistema de EDOs de primeira ordem de um vetor real (complexo) desconhecido de  $n$  componentes:  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . O estudo de tais sistemas foge do escopo do trabalho, mas a existência e unicidade de tal objeto irá ser garantido pelo resultado que iremos demonstrar. Além disso, como qualquer equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $n$  pode ser convertida em um sistema de  $n$  EDOs de primeira ordem, esse resultado garante a existência e unicidade de uma solução para qualquer problema de valor inicial (PVI), independentemente de sua ordem.

Para a demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf faremos uso de dois resultados prévios, apresentados a seguir.

**Lema 2.2.8** Seja  $C([a, b], \mathcal{B})$  o espaço das funções contínuas definidas no compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  assumindo valores no espaço de Banach  $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ . Então,  $C([a, b], \mathcal{B})$  é um espaço de Banach em relação à métrica do supremo, definida por

$$d_\infty(f, g) := \sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - g(t)\|,$$

para  $f, g \in C([a, b], \mathcal{B})$ .

*Demonstração.* Primeiramente observe que como o intervalo  $[a, b]$  é compacto, temos que toda função  $f$  contínua nele definida é limitada, pois  $\|f\|$  é contínua e possui um máximo e um

mínimo. Assim, a métrica dada por  $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [a, b]} \|f(x) - g(x)\|$  está definida para todas  $f, g \in C([a, b])$ .

Desta forma, seja  $f_n$  uma sequência de Cauchy em  $C([a, b])$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um inteiro positivo  $N(\varepsilon)$  tal que

$$\sup_{x \in [a, b]} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon,$$

para  $m, n > N(\varepsilon)$ . Isso significa que para cada  $x \in [a, b]$  tem-se  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  sempre que  $m$  e  $n$  sejam maiores que  $N(\varepsilon)$ . Assim, para cada  $x \in [a, b]$  fixo, a sequência numérica  $\{f_n(x)\}$  é uma sequência de Cauchy. Como  $\mathcal{B}$  é Banach, segue que cada sequência  $\{f_n(x)\}$  é convergente, desta forma vamos denominar por  $f(x)$  seu limite.

Agora procedemos para a prova de que  $C([a, b])$  é completo na métrica  $d_\infty$ . Para isso, devemos primeiramente mostrar que a função  $f$ , que é uma forte candidata a ser o limite da sequência  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  na métrica  $d_\infty$  é também um elemento de  $C([a, b])$ , ou seja, contínua. A partir disso, devemos então mostrar que a sequência  $\{f_m\}$  converge à função  $f$  na métrica  $d_\infty$ . Logo, se ambas as respostas forem positivas, estará provado que  $C([a, b])$  é completo na métrica  $d_\infty$ .

Começemos então a mostrar que a sequência  $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  aproxima essa função  $f$  na métrica  $d_\infty$ . Vamos definir uma sequência crescente de números inteiros e positivos  $N_k(\varepsilon), k = 1, 2, 3, \dots$  com  $N_{k+1}(\varepsilon) > N_k(\varepsilon)$ , para  $\varepsilon > 0$  arbitrário, de tal forma que  $N_k(\varepsilon)$  é aquele que  $d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon/2^k$  para todos  $m, n > N_k(\varepsilon)$ . Observe que  $N_k(\varepsilon)$  sempre pode ser encontrada pois, por hipótese,  $f_m$  é uma sequência de Cauchy em  $d_\infty$ . Vamos agora escolher uma sequência crescente de índices  $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k < \dots$  tais que  $n_k > N_k(\varepsilon)$  e a essa sequência está associada a subsequência  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Note que tem-se

$$d_\infty(f_{n_{l+1}}, f_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{2^l}$$

pois  $n_l$  e  $n_{l+1}$  são maiores que  $N_l(\varepsilon)$ .

Com essas definições, teremos que, para todo  $k > 1$ ,

$$f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x) = \sum_{l=1}^{k-1} [f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)].$$

Assim,

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)| &\leq \sum_{l=1}^{k-1} |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| \\ &\leq \sum_{l=1}^{k-1} \sup_{x \in [a, b]} |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| = \sum_{l=1}^{k-1} d_\infty(f_{n_{l+1}}, f_{n_l}) \\ &< \varepsilon \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2^l} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Daqui, concluímos que para cada  $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{n_1}(x)| &= |f(x) - f_{n_k}(x) + f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)| \\ &< |f(x) - f_{n_k}(x)| + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(x) - f_{n_1}(x)| < |f(x) - f_{n_k}(x)| + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Observe que o lado esquerdo desta expressão independe de  $k$ , de forma que tomando-se o limite  $k \rightarrow \infty$  e lembrando que a sequência numérica  $\{f_{n_k}(x)\}$  converge a  $f(x)$ , concluímos que  $|f(x) - f_{n_1}(x)| \leq \varepsilon$  e, para todo  $n > N_1(\varepsilon)$  segue

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon/2 = (3/2)\varepsilon.$$

Como isso vale para todo  $x$ , segue que

$$d_\infty(f, f_n) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_n(x)| \leq (3/2)\varepsilon,$$

para todo  $n > N_1(\varepsilon)$ . Isso demonstra que a sequência  $\{f_n\}$  converge a  $f$  em relação à métrica  $d_\infty$ . Vamos agora provar que a função  $f$  é contínua. Para tal, notemos que para quaisquer  $x, y \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{n_1}(x) + f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y) + f_{n_1}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| + |f_{n_1}(y) - f(y)| \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| + \sup_{y \in [a, b]} |f_{n_1}(y) - f(y)| \\ &= 2d_\infty(f, f_{n_1}) + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| \\ &\leq 3\varepsilon + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)|. \end{aligned}$$

Além disso observe que  $f_{n_1} \in C([a, b])$ , logo, é uma função contínua. Segue pela definição de continuidade de funções, para  $x$  fixo, existe um número positivo  $\delta$  tal que  $|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| < \varepsilon$  para todo  $y$  tal que  $|y - x| < \delta$ .

Assim, concluímos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y$  tal que  $|y - x| < \delta$  tem-se  $|f(x) - f(y)| < 4\varepsilon$ . Isso nos diz precisamente que  $f$  é contínua, como queríamos provar. Portanto, está provado que  $C([a, b])$  é completo na métrica  $d_\infty$ . ■

**Lema 2.2.9** Sejam  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e para  $k > 0$  fixo, seja  $\tilde{C} \subset C([a, b], \mathcal{B})$  o subespaço de  $C([a, b], \mathcal{B})$  formado pelas funções  $x: [a, b] \rightarrow \mathcal{B}$  tais que

$$x(t) - x_0 \leq k, \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.18)$$

Então,  $\tilde{C}$  é um subespaço fechado de  $C([a, b], \mathcal{B})$ .

*Demonstração.* Para mostrarmos que  $\tilde{C}$  é um subespaço fechado de  $C([a, b], \mathcal{B})$  devemos garantir que qualquer sequência convergente  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\tilde{C}$  converge para um  $x^*$  que também está em  $\tilde{C}$ . De fato, como  $x_n \in \tilde{C}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\|x_n(t) - x_0\| \leq k, \quad \forall t \in [a, b].$$

Como essa expressão não depende de  $t$ , podemos reescrevê-la

$$d_\infty(x_n, x_0) = \sup_{t \in I} \|x_n(t) - x_0\| \leq k. \quad (2.19)$$

Por outro lado, como por hipótese temos que a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $x^*$ , então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_\varepsilon > 0$  tal que para todo  $n > N_\varepsilon$  vale:

$$d_\infty(x_n, x^*) \leq \varepsilon. \quad (2.20)$$

Utilizando a desigualdade triangular, segue que

$$d_\infty(x^*, x_0) \leq d_\infty(x^*, x_n) + d_\infty(x_n, x_0) \leq \varepsilon + k \quad (2.21)$$

em que, na última desigualdade, fizemos uso das Equações (2.19) e (2.20). Assim, como (2.21) é válida para qualquer  $\varepsilon > 0$ , concluímos então

$$\|x^*(t) - x_0\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \|x^*(t) - x_0\| = d_\infty(x^*, x_0) \leq k, \quad \forall t \in [a, b],$$

mostrando que  $x^*$  também pertence a  $\tilde{C}$ , finalizando a demonstração. ■

Agora estamos preparado para demonstrar o principal teorema da seção.

**Teorema 2.2.10 — Teorema de Picard-Lindelöf.** Seja  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  não identicamente nula e contínua na região fechada

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{a, b, t_0, x_0} := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B} : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \quad (2.22)$$

para certos valores  $a > 0$  e  $b > 0$ , em que  $\|\cdot\|$  representa a norma do espaço de Banach  $\mathcal{B}$ . Seja também  $c > 0$  uma constante definida por

$$c := \sup_{(t, x) \in \mathcal{R}} \|f(t, x)\|. \quad (2.23)$$

Suponha ainda que  $f$  seja Lipschitz-contínua em  $\mathcal{R}$  com relação ao seu segundo argumento, ou seja, existe uma constante  $k \geq 0$  tal que para todos  $(t, x)$  e  $(t, y) \in \mathcal{R}$  segue

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|. \quad (2.24)$$

Então, pelo menos no intervalo fechado  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , em que

$$\beta := \min \left\{ a, \frac{b}{c} \right\}, \quad (2.25)$$

o problema de valor inicial descrito pelas relações  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  com  $x(t_0) = x_0$  apresenta uma solução, a qual é única.

*Demonstração.* Começemos esboçando a ideia da prova. O primeiro passo consiste em convertermos a equação diferencial em uma equação integral, descrita através de uma transformação  $T$ . Em seguida, sob as hipóteses do teorema, mostraremos que existe uma certa potência de  $T$ , digamos  $T^m$ , para  $m \geq 1$ , tal que  $T^m$  é uma contração. Feito isso, utilizando o Teorema de Ponto Fixo de Banach em sua versão generalizada (Proposição 2.2.7, página 30), concluiremos a existência e a unicidade do ponto fixo para a transformação  $T$ .

Desta maneira, seja  $I$  o intervalo  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta] \subset \mathbb{R}$  e considere o espaço  $C(I, \mathcal{B})$  das funções contínuas em  $I$  assumindo valores em  $\mathcal{B}$ , dotado com a métrica do supremo. Considere ainda o subespaço  $\tilde{C} \subset C(I, \mathcal{B})$  formado pelo conjunto das funções  $x(t)$  tais que

$$\|x(t) - x_0\| \leq c\beta, \quad \forall t \in I,$$

em que  $c$  é definido pela Equação (2.23). Pelo Lema 2.2.8, página 31, sabemos que  $C(I, \mathcal{B})$  é um espaço de Banach. Por outro lado, do Lema 2.2.9, página 33, vemos que o subespaço  $\tilde{C}$  é fechado em  $C(I, \mathcal{B})$ . Logo, concluímos que  $\tilde{C}$  também é um espaço métrico completo. Considere agora uma transformação  $T$  dada pela seguinte relação:

$$(Tx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Vamos mostrar que  $T$  é uma aplicação que leva  $\tilde{C}$  em  $\tilde{C}$ , ou seja,  $T : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ . De fato, para  $\tau \in I$  e  $x(\tau) \in \tilde{C}$ , como  $c\beta \leq b$ , concluímos da definição de  $\mathcal{R}$  dada por (2.22) que  $(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{R}$ . Logo, a curva  $\tau \mapsto (\tau, x(\tau)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}$  é contínua e está inteiramente contida na região  $\mathcal{R}$ , na qual  $f$  é contínua por hipótese. Assim,  $\tau \mapsto f(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{B}$  é contínua e a sua integral estará bem definida. Concluímos daí que  $T$  pode ser aplicada a funções de  $\tilde{C}$ . Agora vamos mostrar que  $Tx$  é novamente um elemento em  $\tilde{C}$ . Utilizando a definição de  $c$  (2.23) de limitação da função  $f$  no retângulo  $\mathcal{R}$ , tem-se para  $x \in \tilde{C}$ ,

$$\|(Tx)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \leq c|t - t_0| \leq c\beta,$$

provando que  $Tx$  dista de  $x_0$  menos que  $c\beta$ , uma das condições do conjunto  $\tilde{C}$ . Resta-nos provar que  $Tx$  é contínua caso  $x \in \tilde{C}$ . Para tal, já vimos que para  $x \in \tilde{C}$  fixo,  $\tau \mapsto f(\tau, x(\tau)) \in \mathcal{B}$  é igualmente contínua e, portanto, limitada, ou seja, existe  $N_x > 0$  tal que  $\|f(\tau, x(\tau))\| \leq N_x$  para todo  $\tau \in J$ . Logo, para  $t, t' \in I$ , com  $t' \geq t$

$$\|(Tx)(t') - (Tx)(t)\| = \left\| \int_t^{t'} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_t^{t'} \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \leq N_x |t' - t|.$$

Como o lado direito vai a zero para  $t \rightarrow t'$  provou-se que  $(Tx)(t)$  é contínua como função de  $t \in I$ . Assim,  $Tx \in \tilde{C}$  se  $x \in \tilde{C}$ .

Chegamos agora ao ponto crucial da demonstração. Observe que se  $x(t) \in \tilde{C}$  satisfaz o PVI (2.17), então  $x(t)$  pode ser escrita como

$$x(t) = (Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2.26)$$

Para  $t \in I$ , e  $h, g \in \tilde{C}$

$$(Th)(t) - (Tg)(t) = \int_{t_0}^t (f(\tau, h(\tau)) - f(\tau, g(\tau))) d\tau,$$

segue que (assumimos que  $t \geq t_0$ , sem perda de generalidade)

$$\begin{aligned} \|(Th)(t) - (Tg)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, h(\tau)) - f(\tau, g(\tau))\| d\tau \\ &\stackrel{(2.24)}{\leq} k \int_{t_0}^t \|h(\tau) - g(\tau)\| d\tau \\ &\leq k|t - t_0| \sup_{\tau \in J} \|h(\tau) - g(\tau)\| = k|t - t_0| d_\infty(h, g). \end{aligned}$$

Usamos que a função  $f$  é Lipschitz-contínua em relação à segunda variável, ou seja, que vale a relação (2.24).

Vamos agora provar por indução que para todo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se

$$\|(T^n h)(t) - (T^n g)(t)\| \leq k^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} d_\infty(h, g), \quad \forall t \in I \quad (2.27)$$

Como já vimos que isso é verdade para  $n = 1$ , assumamos que essa relação é válida para um certo  $n$  genérico. Então,

$$\begin{aligned} \|(T^{n+1} h)(t) - (T^{n+1} g)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, (T^n h)(\tau)) - f(\tau, (T^n g)(\tau))\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t k \|(T^n h)(\tau) - (T^n g)(\tau)\| d\tau \\ &\leq k \left( \int_{t_0}^t k^n \frac{|\tau - t_0|^n}{n!} d\tau \right) d_\infty(h, g) \\ &= k^{n+1} \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} d_\infty(h, g), \end{aligned}$$

o que prova (2.27) para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $t \in I$ , por indução. Assim, temos também que

$$d_\infty(T^n h, T^n g) \leq \frac{(k\beta)^n}{n!} d_\infty(h, g) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note-se agora que, para quaisquer  $k$  e  $\beta$  fixos, existe  $n$  grande o suficiente tal que  $\frac{(k\beta)^n}{n!} < 1$ . Assim, para um tal  $n$ ,  $T^n$  será uma contração do espaço completo  $\tilde{C}$  e si mesmo. Nessas condições, temos que a versão generalizada do Teorema de Ponto Fixo de Banach (Proposição 2.2.7, página 30) garante a existência e a unicidade de  $x(t) \in \tilde{C}$ , satisfazendo (2.26). Mas isso implica justamente a existência e unicidade de solução em  $C(I, \mathcal{B})$  do problema de valor inicial considerado, finalizando assim a demonstração. ■

**Observação 2.2.** Uma condição suficiente para que a condição de Lipschitz no Teorema 2.2.10 se cumpra é que  $\partial_y f(t, y)$  exista em todo  $\mathcal{R}$  e seja limitada. Nesse caso a constante de Lipschitz seria dada por  $k := \sup_{(t, y) \in \mathcal{R}} \|\partial_y f(t, y)\|$ .

Finalizamos aqui a apresentação de alguns conceitos básicos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e principalmente, o Teorema de Existência e Unicidade para um PVI. No próximo capítulo apresentaremos algumas técnicas de resolução de EDO que serão utilizadas na modelagem de problemas físicos.

## Técnicas de resolução para Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Neste capítulo, que está baseado nas referências [2, 3, 6, 8, 9], traremos alguns métodos para resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, dependendo do tipo de equação em estudo. Ao final de cada seção traremos exemplos e aplicações do método citado.

### 3.1 Equações Separáveis

**Definição 3.1.1** Uma equação diferencial da forma

$$h(y)\frac{dy}{dx} - g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada **separável** ou tem **variáveis separáveis**, onde  $f$  e  $g$  são funções contínuas nas suas respectivas variáveis.

Como uma equação separável pode ser escrita na forma

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x), \tag{3.1}$$

se  $y = f(x)$  denota uma solução para (3.1), temos

$$h(f(x))f'(x) = g(x).$$

Integrando ambos os lados em relação a  $x$ , obtemos

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c. \tag{3.2}$$

No entanto, como  $dy = f'(x)dx$  e  $y = f(x)$ , então (3.2) pode ser escrita como

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c,$$

em que  $c$  é uma constante arbitrária.

**Observação 3.1.** Não há necessidade do uso de duas constantes na resolução de uma equação separável pois,

$$\int h(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2 \implies \int h(y)dy = \int g(x)dx + c_2 - c_1.$$

Denominando  $c = c_2 - c_1$ , obtemos

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c,$$

em que  $c$  é completamente arbitrária.

Para facilitarmos a execução desse método, vamos listá-lo passo a passo no quadro a seguir.

### Resumo: Separação de Variáveis

**Passo 1:** Separe as variáveis, reescrevendo a equação na forma

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x).$$

**Passo 2:** Integre ambos os lados da equação do Passo 1 em relação a  $x$ .

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx.$$

**Passo 3:** Se  $H(y)$  é uma antiderivada de  $h(y)$  e se  $G(x)$  é um antiderivada qualquer de  $g(x)$ , então a equação

$$H(y) = G(x) + c$$

define implicitamente uma família de soluções. Em alguns casos é possível resolver essa equação explicitamente em  $y$ .

■ **Exemplo 3.1** Evidências experimentais demonstram que materiais radioativos se desintegram a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se  $Q = Q(t)$  representa a quantidade de um determinado material radioativo no instante  $t$ , a taxa de variação de  $Q(t)$  em relação ao tempo  $t$ , denotada por  $\frac{dQ}{dt}$ , é expressa por:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(t)$$

em que  $k$  é uma constante negativa definida fisicamente.

Quando o material não é conhecido, devemos determinar o valor de  $k$ , o que pode ser feito utilizando a característica de “meia-vida” do material. A “meia-vida” é o tempo necessário para que metade do material se desintegre. Assim, se conhecemos a meia-vida, podemos determinar  $k$ , e vice-versa.

Para exemplificar, considere um isótopo radioativo que tem uma meia-vida de 16 dias e deseja-se ter 30 g após 30 dias. Com qual quantia do isótopo deve-se iniciar?

Como a meia-vida está em dias consideraremos o tempo em dias. Seja  $Q = Q(t)$  a quantidade presente no instante  $t$  e  $Q(0) = Q_0$  a quantidade inicial.

Resolvendo a EDO pelo Método de Separação de Variáveis temos

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \implies \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} = k.$$

Integrando ambos os lados em relação a  $t$  e fazendo a substituição  $dQ = \frac{dQ}{dt} dt$ , obtemos

$$\int \frac{1}{Q} dQ = k \int dt \implies \ln|Q| = kt + c_1 \implies Q(t) = e^{kt} e^{c_1}.$$

Como  $Q(t) > 0$ , denotando  $c = e^{c_1}$  obtemos a solução geral

$$Q(t) = ce^{kt}.$$

Como temos um PVI, determinaremos  $c$  substituindo os valores da condição inicial  $Q(0) = Q_0$

$$Q_0 = ce^{k \cdot 0} \implies c = Q_0.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}.$$

Sabemos que  $k$  é uma constante e usaremos a meia-vida de 16 dias para encontrá-la. Quando  $t = 16$ , temos  $Q(16) = \frac{1}{2}Q_0$ , ou seja,

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{16k}.$$

Logo,

$$16k = \ln\left(\frac{1}{2}\right),$$

e portanto, aplicando o logaritmo natural, obtemos:

$$k = -\frac{\ln 2}{16} \approx -0,043.$$

Assim, a função que descreve a quantidade de material radioativo a qualquer instante é dada por

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,043t}.$$

## 3.2 Método do Fator Integrante

Apresentaremos nessa seção uma forma de resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem. Relembremos qual especificamente é essa classe de funções.

**Definição 3.2.1 — Equação diferencial linear de primeira ordem.** Uma equação diferencial na forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t), \quad (3.3)$$

em que  $a$  e  $b$  são funções contínuas definidas em um intervalo  $I$ , é chamada de equação diferencial linear de primeira ordem.

Para resolver equações deste tipo utilizamos o método criado por Leibniz, denominado *Método do Fator Integrante*, que envolve a multiplicação da equação diferencial por uma

determinada função  $\mu(t)$ .

Para resolver a equação (3.3) primeiramente o objetivo é deixá-la na forma

$$\frac{d}{dt}(\text{função}) = b(t)$$

e então integrar ambos em relação a  $t$ . Mas, como transformar o lado esquerdo de (3.3) em

$$\frac{d}{dt}(\text{função})? \quad (3.4)$$

Para isto, vamos multiplicar ambos os lados por uma função  $\mu(t)$ , ou seja,

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t).$$

Analisando o lado esquerdo da equação obtida, o objetivo é que

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y \quad \text{seja igual à} \quad \frac{d}{dt}(\text{função}).$$

Para atingirmos o objetivo devemos utilizar a regra do produto para a diferenciação, assim

$$\frac{d}{dt}(\text{função}) = \frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y.$$

Portanto, temos

$$\mu(t)b(t) = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)a(t)y = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y = \frac{d}{dt}(\mu(t)y),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)b(t).$$

A próxima etapa é integrar ambos os lados em relação a  $t$ ,

$$\int \frac{d}{dt}(\mu(t)y) dt = \int \mu(t)b(t) dt \implies \mu(t)y = \int \mu(t)b(t) dt + c,$$

sendo  $c$  é a constante de integração. Dividindo ambos os lados por  $\mu(t)$ , obtemos a solução geral de (3.3)

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[ \int \mu(t)b(t) dt + c \right]. \quad (3.5)$$

Esse método de encontrar uma solução geral de (3.3) é denominado *Método do Fator Integrante*. Iremos então determinar a função  $\mu(t)$ , que é chamada de *fator integrante* de modo que seja possível resolver a equação (3.3).

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y \iff \frac{d\mu(t)}{dt} = a(t)\mu(t).$$

Mas, esta é uma equação separável, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu(t)}{dt} = a(t)\mu(t) &\implies \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = a(t) \implies \\ \implies \int \frac{1}{\mu(t)} d\mu &= \int a(t) dt \implies \ln|\mu(t)| = \int a(t) dt + c. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt}. \quad (3.6)$$

**Observação 3.2.** Observe que na expressão (3.6) podemos ignorar a constante de integração pois ela só irá aparecer multiplicando a exponencial e quando multiplicarmos ambos os lados da equação por  $\mu$  ela poderá ser desconsiderada.

Embora seja possível memorizar as equações (3.5) e (3.6), é recomendável resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem seguindo os passos utilizados na obtenção das fórmulas, como segue no quadro apresentado a seguir.

### Resumo: Método do Fator Integrante

Dada a equação

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t). \quad (3.7)$$

**Passo 1:** Calcule o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$$

Como qualquer  $\mu(t)$  desta forma será suficiente, podemos tomar a constante de integração como sendo nula.

**Passo 2:** Multiplique ambos os lados de (3.7) por  $\mu(t)$  e expresse o resultado como

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)b(t).$$

**Passo 3:** Integre ambos os lados da equação obtida no Passo 2 em relação a  $t$ , e então resolva para  $y$ .

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t)dt.$$

Assegure-se de incluir uma constante de integração ao calcular a integral.

Os Exemplos 3.2, 3.3 e 3.4 ilustram a utilização do método do fator integrante.

■ **Exemplo 3.2** Considere a EDO

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = t.$$

Determinando  $\mu(t)$  temos

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt} = e^{-\int 2tdt} = e^{-t^2}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por  $\mu(t)$  obtemos a equação equivalente

$$e^{-t^2} \left( \frac{dy}{dt} - 2ty \right) = te^{-t^2} \implies \frac{d}{dt}(e^{-t^2}y) = te^{-t^2}.$$

No entanto

$$e^{-t^2}y = \int te^{-t^2}dt + c = -\frac{e^{-t^2}}{2} + c.$$

Portanto, a solução geral é

$$y(t) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}.$$

■ **Exemplo 3.3** Considere o problema de valor inicial

$$t \frac{dy}{dt} + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2.$$

Note que

$$t \frac{dy}{dt} + 2y = 4t^2 \implies \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = 4t, \quad (3.8)$$

ou seja, para o cálculo do fator integrante é necessário primeiramente dividir a equação por  $t$ . Calculando o fator integrante tem-se

$$\mu = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln |t|} = t^2.$$

Agora multiplicando a equação (3.8) por  $\mu = t^2$ , obtemos

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty = 4t^3 \implies \frac{d(t^2 y)}{dt} = 4t^3$$

e, após integrar ambos os lados, ficamos com

$$t^2 y = t^4 + c \implies y = t^2 + \frac{c}{t^2}.$$

Utilizando o valor inicial, descobrimos  $c$

$$2 = 1 + c \implies c = 1.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

■ **Exemplo 3.4** [2] Quando é cometido um assassinato, o corpo, originalmente a  $37^\circ\text{C}$  resfria de acordo com a lei do resfriamento de Newton. Suponha que após 2 horas a temperatura seja de  $35^\circ\text{C}$ , e que a temperatura ambiente permaneça constante e igual a  $20^\circ\text{C}$ .

A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto  $H$  varia a uma razão proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente  $H_A$ , sendo representada através da equação

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_A), \quad (3.9)$$

em que  $k$  representa um coeficiente de proporcionalidade (positivo), que depende da superfície exposta, do calor específico do corpo e também de função de características do meio ambiente.

Agora que já explicamos a lei de Newton do resfriamento, vamos resolvê-la utilizando o método dos fatores integrantes.

Como a temperatura ambiente é  $20^\circ\text{C}$ , podemos reescrever a equação (3.9) da seguinte forma

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 20) \implies \frac{dH}{dt} + kH = 20k.$$

Calculando  $\mu(t)$  temos

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt} = e^{\int kdt} = e^{kt}.$$

Multiplicando ambos os lados por  $\mu(t)$

$$e^{kt} \frac{dH}{dt} + kHe^{kt} = 20ke^{kt} \implies \frac{d(He^{kt})}{dt} = 20ke^{kt}.$$

Integrando ambos os lados em relação a  $t$ , obtemos a solução geral

$$He^{kt} = 20e^{kt} + c \implies H(t) = 20 + ce^{-kt}.$$

Utilizando as duas condições iniciais para determinar  $c$  e  $k$  temos:

$$H(0) = 37 \implies 37 = 20 + c \implies c = 17$$

$$H(2) = 35 \implies 35 = 20 + 17e^{-2k} \implies k = \frac{-\ln\left(\frac{15}{17}\right)}{2} \implies k = 62,6 \cdot 10^{-3}.$$

Portanto,

$$H(t) = 20 + 17e^{-62,6 \cdot 10^{-3}t}.$$

Considere agora que o corpo foi encontrado às 4 horas da tarde com a temperatura de  $30^\circ\text{C}$ . Procederemos agora para encontrar o horário que o assassinato foi cometido. Primeiro iremos determinar quanto tempo se passou após o assassinato

$$H(t) = 30 \implies 30 = 20 + 17e^{-62,6 \cdot 10^{-3}t} \implies t = \frac{\ln\left(\frac{10}{17}\right)}{-62,6 \cdot 10^{-3}}$$

ou seja,

$$t = 8,48 \text{ horas (antes do corpo ser encontrado).}$$

Sabe-se que o corpo foi encontrado às 16 horas, então para saber a hora do assassinato basta fazer a subtração

$$16 \text{ horas} - 8,48 \text{ horas} = 7,52 \text{ horas.}$$

Transformando os centésimos em minutos obtemos a hora do crime

horas	minutos	
1	60	$\implies x = 31.$
0,52	$x$	

Portanto, a hora do assassinato foi às 7 horas e 31 minutos. ■

### 3.3 Equações Exatas

Há diversos métodos de resolução para equações diferenciais ordinárias. Os mais importantes são os usados nas equações lineares (método do fator integrante) e as separáveis. Vamos agora considerar uma classe específica, chamada de equações exatas.

Para exemplificar esse método consideremos a EDO

$$2x + y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3.10)$$

Essa equação não é linear nem separável e portanto não podemos aplicar os métodos que já

foram vistos. Entretanto, note que a função  $\Psi(x, y) = x^2 + xy^2$  tem a seguinte propriedade:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2xy. \quad (3.11)$$

Portanto, podemos reescrever a equação (3.10) da seguinte forma

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Supondo que  $y$  é uma função de  $x$  e usando a regra da cadeia podemos reescrever a equação anterior

$$\frac{d}{dx}[\Psi(x, y)] = 0.$$

Portanto,

$$\Psi(x, y) = x^2 + xy^2 = c,$$

em que  $c$  é uma constante arbitrária, é uma equação que define as soluções do Exemplo 2.3.1, implicitamente.

Para resolvermos o exemplo anterior, o passo-chave foi descobrir uma função  $\Psi$  que satisfazia (3.11). Agora vamos considerar um caso mais geral

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3.12)$$

Suponha uma função  $\Psi$  tal que

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = N(x, y). \quad (3.13)$$

Portanto, podemos reescrever (3.12), da seguinte maneira

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\Psi(x, y)] = 0.$$

Nesse caso, a equação (3.12) é dita uma **equação diferencial exata** e a solução geral é dada implicitamente por

$$\Psi(x, y) = c, \quad \text{em que } c \text{ é uma constante arbitrária.}$$

Para determinarmos se uma equação diferencial é exata, utilizaremos do seguinte teorema.

**Teorema 3.3.1** Suponha que as funções  $M, N, M_y$  e  $N_x$ , nas quais os índices denotam derivadas parciais, são contínuas em uma região retangular  $R : \alpha < x < \beta; \gamma < y < \delta$ . Então a equação

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação exata em  $R$  se, e somente se,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (3.14)$$

em cada ponto de  $R$ , isto é, existe uma função  $\Psi$  satisfazendo (3.13) se, e somente se,  $M$  e  $N$  satisfizerem (3.14).

*Demonstração.* A demonstração será dividida em duas partes. Primeiramente iremos mostrar que, se existe uma função  $\Psi$  tal que (3.13) sejam verdadeiras, então (3.14) é satisfeita.

Como  $M_y$  e  $N_x$  de (3.13), obtemos

$$M_y(x, y) = \Psi_{xy}(x, y), \quad N_x(x, y) = \Psi_{yx}(x, y).$$

Como  $M_y$  e  $N_x$  são contínuas, segue pelo Teorema de Schwarz que  $\Psi_{xy}$  e  $\Psi_{yx}$  também são. Isso garante a igualdade dessas funções, e a equação (3.14) segue. Por conseguinte, vamos mostrar agora que se  $M$  e  $N$  satisfazem (3.14), então a equação diferencial é exata. Essa demonstração envolve a construção de uma função  $\Psi$  satisfazendo a (3.13).

Começamos integrando a primeira das equações de (3.13) em relação a  $x$  (mantendo  $y$  constante). Obtemos

$$\Psi(x, y) = Q(x, y) + g(y), \quad (3.15)$$

em que  $Q(x, y)$  é qualquer função diferenciável tal que  $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ . Por exemplo, poderíamos escolher

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds,$$

sendo  $x_0$  alguma constante especificada com  $\alpha < x_0 < \beta$ . A função  $g$  em (3.15) é uma função diferenciável arbitrária de  $y$ , fazendo o papel da constante de integração. Agora precisamos mostrar que sempre é possível escolher  $g(y)$  de modo que a segunda equação de (3.13) seja satisfeita.

Derivando (3.15) em relação a  $y$  e igualando o resultado a  $N(x, y)$ , obtemos

$$\Psi_y(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + g'(y) = N(x, y).$$

Então, resolvendo para  $g'(y)$ , temos

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y). \quad (3.16)$$

Para que possamos determinar  $g(y)$  da equação anterior, a expressão à direita do sinal de igualdade, apesar de sua aparência, tem que ser uma função apenas de  $y$ . Para verificar que isso é verdade, podemos derivar a quantidade em questão em relação a  $x$ , obtendo

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right). \quad (3.17)$$

Trocando a ordem das derivadas na segunda parcela de (3.16), temos

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) \right). \quad (3.18)$$

Como  $Q(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo,  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$  e

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 0$$

devido à equação (3.14). Logo, apesar de sua forma aparente, a expressão à direita de (3.17) não depende, de fato, de  $x$ . Assim, encontramos  $g(y)$  integrando (3.16); substituindo essa função em (3.15), obtemos a função desejada  $\Psi(x, y)$ . ■

A construção da função  $\Psi$  no teorema anterior reflete num procedimento básico na resolução para equações exatas, que iremos exhibir no quadro a seguir.

### Resumo: Método de Solução de Equações Exatas

Dada a equação

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Mostre primeiro que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Depois suponha que existe  $\Psi(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x, y).$$

Podemos encontrar  $\Psi$  integrando  $M(x, y)$  com relação a  $x$ , considerando  $y$  constante. Escrevemos,

$$\Psi(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) \quad (3.19)$$

em que  $g(y)$  é uma função arbitrária. Agora, derivando (3.19) com relação a  $y$  e supondo  $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x, y)$ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y) = N(x, y).$$

Assim,

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx. \quad (3.20)$$

Finalmente, integre (3.20) com relação a  $y$  e substitua o resultado em (3.19). A solução para a equação exata é

$$\Psi(x, y) = c.$$

**Observação 3.3.** É importante perceber que a expressão  $N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$  em (3.20) independe de  $x$ , como é mostrado no teorema. Além disso, poderíamos também utilizar o procedimento anterior com a suposição de que  $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x, y)$ . Depois integrando  $N$  com relação a  $y$  e derivando o resultado, encontramos o análogo de (3.19) e (3.20), que seria, respectivamente,

$$\Psi(x, y) = \int N(x, y) dy + h(x) \quad \text{e} \quad h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y) dy.$$

Os Exemplos 3.5 e 3.6 ilustram a utilização da técnica.

■ **Exemplo 3.5** Considere a equação diferencial

$$y \cos x + 2xe^y + (\sin x + x^2 e^y - 1) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Podemos afirmar que é uma equação exata, pois

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \cos x + 2xe^y = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Portanto, existe um  $\Psi(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

Agora, vamos tomar  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$  e integrar em relação  $x$ .

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = y \cos x + 2xe^y \implies \Psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y).$$

Fazendo  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ , temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 = N(x, y).$$

Assim,  $g'(y) = -1 \implies g(y) = -y$  (a constante de integração pode ser omitida pois a solução é  $\Psi(x, y) = c$ ). Substituindo  $g(y)$ , obtemos

$$\Psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y.$$

Portanto, as soluções são dadas implicitamente por

$$y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

■ **Exemplo 3.6** Considere a equação diferencial

$$e^{2y} - y \cos xy + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

A equação não é separável, nem homogênea, mas exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos xy + xy \operatorname{sen} xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Portanto, existe uma função  $\Psi(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

Agora para mudarmos um pouco, vamos começar supondo  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ , isto é,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2xe^{2y} - x \cos xy + 2y \implies \Psi(x, y) = 2x \int e^{2y} dy - x \int \cos xy dy + \int 2y dy.$$

Logo

$$\Psi(x, y) = xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + h(x).$$

Tomamos  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ ,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = e^{2y} - y \cos xy + h'(x) = e^{2y} - y \cos xy = M(x, y).$$

Assim,

$$h'(x) \text{ e } h(x) = c.$$

Portanto, uma família de soluções é dada por

$$xe^{2y} - \text{sen } xy + y^2 + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

### 3.3.1 Fatores Integrantes para Equação Exatas

Em alguns casos é possível converter uma equação diferencial não exata em uma exata multiplicando-a por um fator integrante conveniente. Para analisarmos essa possibilidade vamos a um caso geral. Considere a equação

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Multiplicamos a equação por uma função  $\mu(x, y)$  de tal modo que a equação resultante seja

$$\mu M(x, y) + \mu N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3.21)$$

Para que essa nova equação seja exata, pelo Teorema (3.3.1) ela tem que satisfazer a seguinte condição

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Utilizando a regra do produto da diferenciação, temos que  $\mu$  tem que satisfazer a equação diferencial parcial de primeira ordem

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu = 0. \quad (3.22)$$

Se pudermos achar uma função  $\mu(x, y)$  que satisfaça (3.22), então a equação (3.21) pode ser resolvida pelo método já descrito para equações exatas.

Infelizmente, a equação (3.22) que determina o fator integrante  $\mu(x, y)$  é, em muitos casos, pelo menos tão difícil quanto resolver a equação original, o que nos leva a pensar que na prática só podemos usar em casos específicos.

Já que não podemos determinar uma função  $\mu(x, y)$ , as situações mais importantes nas quais fatores integrantes simples podem ser encontrados ocorrem quando  $\mu$  é uma função de apenas uma das variáveis  $x$  ou  $y$ , em vez de ambas.

Vamos agora determinar um fator integrante em função apenas de  $x$ , ou seja,  $\mu = \mu(x)$ . Retornando à equação (3.22), como  $\mu$  é uma função de  $x$ , sua derivada parcial em relação a  $y$  é nula

$$-N \frac{d\mu}{dx} + \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu = 0.$$

Manipulando a expressão ficamos com

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{(M_y - N_x)}{N} \mu. \quad (3.23)$$

Se  $\frac{(M_y - N_x)}{N}$  é um função dependente apenas de  $x$ , então existe um fator integrante  $\mu$  que depende só de  $x$ , e  $\mu$  pode ser encontrado resolvendo (3.23), que é separável.

Agora vamos determinar um fator integrante dependendo apenas de  $y$ . Retornando à equação (3.22), como  $\mu$  é uma função dependente apenas de  $y$ , ou seja,  $\mu = \mu(y)$  sua derivada parcial em relação a  $x$  é nula. Assim, a equação (3.22) pode ser escrita como

$$M \frac{d\mu}{dy} + \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) \mu = 0.$$

Manipulando algebricamente

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{(N_x - M_y)}{M} \mu. \quad (3.24)$$

Se  $\frac{(N_x - M_y)}{M}$  é um função dependente apenas de  $y$ , então existe um fator integrante  $\mu$  que depende só de  $y$ , e  $\mu$  pode ser encontrado resolvendo (3.24), que é separável.

O exemplo a seguir ilustra a obtenção de um fator integrante que torna uma equação exata e em seguida a resolução da mesma.

■ **Exemplo 3.7** Considere a equação diferencial

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y.$$

Já que  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ , a equação dada não é exata. Vamos determinar se ela tem um fator integrante que depende apenas de  $x$ .

Calculando  $\frac{(M_y - N_x)}{N}$ , vemos que

$$\frac{(M_y - N_x)}{N} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{(x + y)}{x(x + y)} = \frac{1}{x}.$$

Portanto, existe um fator integrante  $\mu$  que só depende de  $x$  e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}.$$

Logo,

$$\mu(x) = x.$$

Multiplicando a equação diferencial do exemplo por  $\mu$ , obtemos

$$3x^2y + xy^2 + (x^3 - x^2y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como a equação é exata, basta resolvermos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x, y) \implies \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 3x^2y + xy^2.$$

Integrando em relação a  $x$ , mantendo  $y$  constante

$$\Psi(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y).$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = x^3 + x^2y &\implies \frac{\partial}{\partial y} \left( x^3y + \frac{x^2y^2}{2} \right) + g'(y) = x^3 + x^2y \implies \\ &\implies x^3 + x^2y + \frac{dg(y)}{dy} = x^3 + x^2y. \end{aligned}$$

Logo,  $g'(y) = 0$  e  $g(y) = c$ . Portanto, a solução do problema é

$$\Psi(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

### 3.4 Equações de Bernoulli e Ricatti

Nesta seção estudaremos alguns casos específicos de equação diferencial chamada de Bernoulli e Ricatti, sendo usadas para modelar uma ampla variedade de fenômenos, incluindo dinâmica de populações, mecânica de fluidos, circuitos eletrônicos, controle de sistemas dinâmicos e teoria de controle. Ambas as equações são desafiadoras de resolver analiticamente, mas têm soluções conhecidas em casos especiais.

Começemos com a definição da equação de Bernoulli.

**Definição 3.4.1** A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \quad (3.25)$$

com  $P(x)$  e  $f(x)$  funções contínuas é chamada de **equação de Bernoulli**.

Para  $n = 0$  e  $n = 1$ , a equação (3.25) é linear em  $y$ . Se  $y \neq 0$ , (3.25) pode ser escrita como

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x). \quad (3.26)$$

Fazendo a substituição  $w = y^{1-n}$ , para  $n \neq 0$  e  $n \neq 1$ , temos

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

Com isso podemos reescrever (3.26) como uma equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x). \quad (3.27)$$

Resolvendo (3.27) e depois fazendo  $y^{1-n} = w$ , obtemos uma solução para (3.25).

■ **Exemplo 3.8** A equação diferencial

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p$$

é conhecida como equação de von Bertalanffy (obtida experimentalmente), onde  $p(t)$  é o peso de uma determinada espécie de peixe. Essa equação estabelece que o aumento de peso de um peixe é proporcional à área de sua superfície, onde as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  representam, respectivamente, a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal e a taxa de diminuição por unidade de massa [4].

Observe que  $P(x) = \beta$ ,  $f(x) = \alpha$  e  $n = 2/3$ . Logo, com a mudança de variável  $w = p^{1/3}$  obtemos

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\beta}{3}w = \frac{\alpha}{3},$$

que é uma equação linear. Para resolvê-la basta usar o método do fator integrante:

$$\mu = e^{\int \frac{\beta}{3} dt} = e^{\beta t/3}.$$

Deste modo,

$$\frac{d}{dt}(\mu w) = \mu \frac{\alpha}{3}.$$

Integrando em relação a  $t$ :

$$e^{\beta t/3} w = \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta t/3} + c.$$

Como  $w = p^{1/3}$ , obtemos como família de soluções

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{c\beta}{\alpha} e^{-\beta t/3}\right)^3.$$

Procedemos agora para o estudo da equação de Ricatti.

**Definição 3.4.2** A equação diferencial não linear

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \quad (3.28)$$

em que  $P(x)$ ,  $Q(x)$  e  $R(x)$  são funções contínuas é chamada de **equação de Ricatti**.

Se  $y_1$  é uma solução particular para (3.28), então as substituições

$$y = y_1 + u \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$$

produzem em (3.28) a seguinte equação diferencial em  $u$ :

$$\frac{dw}{dx} - (Q + 2y_1R)u = Ru^2. \quad (3.29)$$

Como (3.29) é uma equação de Bernoulli com  $n = 2$ , ela pode ser reduzida para uma equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (Q + 2y_1R)w = -R \quad (3.30)$$

através da substituição  $w = u^{-1}$ .

Em muitos casos uma solução para a equação de Ricatti não pode ser expressa em termos de funções elementares. O Exemplo 3.9 ilustra a resolução de uma equação desse tipo e um modelo envolvendo transporte de partículas, dado por uma equação de Ricatti, pode ser encontrado em [4].

■ **Exemplo 3.9** Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2.$$

Verifica-se facilmente que  $y_1 = 2x$  é uma solução particular para a equação. Fazendo as seguintes identificações  $P(x) = 2, Q(x) = -2x$  e  $R(x) = 1$ . Resolvemos então a equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (-2x + 4x)w = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{dw}{dx} + 2xw = -1.$$

Determinando o fator integrante  $\mu$

$$\mu = e^{\int 2x dx} = e^{x^2},$$

assim

$$\frac{d(\mu w)}{dx} = -\mu \implies \frac{d[e^{x^2} w]}{e^{x^2}} = 1.$$

Agora, a integral  $\int_{x_0}^x e^{t^2} dt$  não pode ser expressa em termos de funções elementares. Portanto escrevemos

$$e^{x^2} w = - \int_{x_0}^x e^{t^2} dt + c \quad \text{ou} \quad e^{x^2} \frac{1}{u} = - \int_{x_0}^x e^{t^2} dt + c,$$

obtendo

$$u = \frac{e^{x^2}}{c - \int_{x_0}^x e^{t^2} dt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Uma solução para a equação é então

$$y = 2x + u.$$

Assim, finalizamos a teoria de métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, tendo em vista que, se tivermos um PVI, através do Teorema de Existência e Unicidade é possível identificar se existe solução e se é única.

No próximo capítulo apresentaremos dois exemplos de fenômenos físicos modelados por equações de primeira ordem, assim como a realização de experimentos que permitem a validação dos modelos.

## 4

# Aplicações de EDO de Primeira Ordem: objeto em queda e circuito RC

Modelos matemáticos descritos por EDOs de primeira ordem, no estudo de fenômenos físicos e biológicos, são muito comuns na literatura ([2], [3], [4]). Neste capítulo iremos abordar os problemas de queda de um corpo, considerando a resistência do ar, e em seguida, um circuito RC. No entanto, além da descrição do fenômeno físico e do modelo matemático correspondente, o objetivo principal é a realização de experimentos de baixo custo que permitem ao estudante observar o fenômeno e validar o modelo estudado. Os dados experimentais obtidos estão disponibilizados no Apêndice B.

## 4.1 Objeto em queda considerando o ar

Apresentaremos um pouco da teoria envolvendo dinâmica de fluidos juntamente com a modelagem matemática do problema considerando duas forças diferentes, a de arrasto inercial e de viscosidade. Em seguida passamos para a validação da teoria com uma experimentação envolvendo dois objetos: esfera de plástico e isopor.

### 4.1.1 Abordagem teórica

Na maioria dos estudos em livros didáticos envolvendo o estudo de queda de objetos raramente se estuda qual o efeito do ar na dinâmica, mais especificamente, não se estuda a dinâmica do movimento de corpos em meios viscosos.

Primeiramente, temos que o objeto “cai” devido à interação da força gravitacional entre o objeto e a Terra. Consideraremos também um sistema que apresenta trajetórias relativamente curtas, próximas à superfície da Terra e assim é possível considerá-la um referencial inercial, podendo desprezar a força de Coriolis<sup>1</sup> [19]. Além disso considera-se que o objeto não rotaciona ao cair de forma a se desprezar o efeito Magnus<sup>2</sup> [20] e que o objeto não sofre ação do vento, implicando que a velocidade relativa entre o fluido e o corpo abandonado é simplesmente sua velocidade, essencialmente vertical em relação à superfície da Terra.

De maneira simplificada, as forças devido à presença de um meio viscoso ocorrem devido principalmente a dois fatores: força arrasto inercial,  $\vec{F}_{in}$ , gerada pelas forças normais, e ao arrasto viscoso,  $\vec{F}_{visc}$ .

<sup>1</sup> O efeito Coriolis é uma força inercial que age sobre corpos que estão em movimento em um referencial não inercial que, em relação a um referencial inercial, possui movimento de rotação.

<sup>2</sup> O Efeito Magnus é o fenômeno pelo qual a rotação de um objeto altera sua trajetória em um fluido.

A força de viscosidade é considerada ser proporcional à velocidade, ou seja,

$$F_{\text{visc}} = c \cdot v,$$

e a força de arrasto inercial é proporcional ao quadrado do módulo da velocidade, ou seja,

$$F_{\text{in}} = k \cdot v^2.$$

A força de arrasto viscoso é significativa para situações nas quais as partículas deslocam-se com baixas velocidades através de fluidos viscosos, como micro-organismos movendo-se na água e gotículas de óleo em suspensão no ar, como no experimento de Millikan [21, 22]. Além disso, não havendo sustentação, o efeito do arrasto viscoso é desprezível e são poucas as situações em que o arrasto inercial e o arrasto viscoso atuarão com a mesma ordem de grandeza [23].

Na situação de arrasto inercial temos que  $k$  é dado por

$$k = \frac{C \cdot \rho_f \cdot \pi \cdot D^2}{8m}, \quad (4.1)$$

em que  $C$  é o coeficiente de arrasto,  $\rho_f$  é a densidade do fluido e  $D$  o diâmetro do objeto. Como valor para a constante  $c$  temos expressão do arrasto viscoso de Stokes para corpos esféricos [24]

$$c = 3\pi\eta D, \quad (4.2)$$

em que  $\eta$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $D$  é o diâmetro do objeto.

Para a experimentação foram adotados os seguintes valores para os parâmetros:  $\rho_f = 1,17 \text{ kg/m}^3$  (para o ar, a  $20,0^\circ\text{C}$  e 566 m de altitude),  $\eta = 2,00 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  (para o ar a  $20,0^\circ\text{C}$  e 1,00 atm),  $C = 0,45$  [25] e  $g = 9,786 \text{ m/s}^2$  (aceleração da gravidade para a região de Rio Claro).

Desta forma, vamos considerar duas modelagens para o sistema: na primeira consideraremos apenas que a força peso e a força de arrasto viscoso atuam sobre o objeto e na segunda a força peso mais a força de arrasto inercial.

### Modelagem envolvendo a força de viscosidade

Devido à segunda lei de Newton temos que a dinâmica do sistema é dada por

$$\frac{d}{dt}(mv) = \sum_i F_i,$$

em que  $m$  é a massa do objeto e  $F_i$  são todas as forças que atuam sobre o objeto. Como nosso objeto não perde massa ao longo do tempo e considerando apenas a força peso e a de arrasto viscoso, temos

$$m \frac{dv}{dt} = mg - cv,$$

ou seja,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v,$$

que se trata de uma EDO de variáveis separáveis, que estudamos na seção (3.1). Logo, podemos resolvê-la da seguinte maneira:

$$\int \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v} = \int dt \quad \implies \quad -\frac{m}{c} \ln \left| g - \frac{c}{m}v \right| = t + c_1 \quad \implies \quad \ln \left| g - \frac{c}{m}v \right| = -\frac{c}{m}t + c_2.$$

Aplicando exponencial de ambos os lados temos

$$g - \frac{c}{m}v = c_3 e^{-\frac{c}{m}t},$$

ou seja, temos que a velocidade é dada por

$$v(t) = \frac{mg}{c} - c_4 e^{-\frac{c}{m}t},$$

em que  $c_3$  e  $c_4$  são constantes. Por fim, considerando que o objeto parte do repouso  $v(0) = v_0$ , obtemos que  $C_4 = \frac{mg}{c} - v_0$ . Logo,

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{c}{m}t} + \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right). \quad (4.3)$$

### Modelagem envolvendo a força de arrasto inercial

Nesta situação temos que o somatório de forças que age no sistema é dado pela força peso mais a força de arrasto inercial de forma que a segunda lei de Newton<sup>3</sup> é escrita como

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

ou seja,

$$\frac{dv}{dt} = g \left[1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2\right], \quad (4.4)$$

sendo  $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ . Observe que (4.4) se trata de uma EDO que pode ser resolvida através do método de variáveis separáveis que estudamos na seção (3.1). Assim,

$$\int \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2} = \int g dt \quad \Rightarrow \quad v_t \int \frac{du}{1 - u^2} = gt + C_1, \quad (4.5)$$

dado que fizemos a mudança de variável  $u = \frac{v}{v_t}$ . Vamos dedicar uma atenção especial a resolução da integral

$$\int \frac{du}{1 - u^2}. \quad (4.6)$$

Resolveremos a mesma de duas formas, sendo a primeira através de frações parciais. Observe que

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - u},$$

logo

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1 - u^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 - u} \\ &= \frac{1}{2} \ln|1 + u| - \frac{1}{2} \ln|1 - u| + c_1 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + c_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

<sup>3</sup> Considerando novamente que nossa partícula não altera sua massa ao longo da evolução temporal

A segunda maneira de calcular (4.6) é realizando a substituição  $u = \operatorname{tgh}(w)$  e desta forma obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}(w)} du &= \int \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2(w)} \operatorname{sech}^2(w) dw \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{sech}^2(w)} \operatorname{sech}^2(w) dw \\ &= \int dw = w + c_2 \\ &= \operatorname{tgh}^{-1}(u) + c_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Logo, segue que (4.7) e (4.8) são iguais a menos de uma constante. Todavia, estudando essa igualdade para  $u = 0$  chegamos que essa constante é nula de forma que

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| = \operatorname{tgh}^{-1}(u).$$

Adotando então (4.8), temos que (4.5) pode ser escrita por

$$\frac{v_t}{2} \ln \left| \frac{v_t + v}{v_t - v} \right| = gt + C_1 \quad \text{ou} \quad v_t \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{v}{v_t} \right) = gt + C_1,$$

ou seja,

$$v(t) = v_t \frac{1 - C_2 \exp\left(-\frac{gt}{v_t}\right)}{1 + C_2 \exp\left(-\frac{gt}{v_t}\right)} \quad \text{ou} \quad v(t) = \operatorname{tgh} \left( \frac{gt}{v_t} + C_1 \right).$$

Aplicando a condição inicial de que  $v(0) = 0$ , obtemos que  $C_1 = 0$  o que implica que  $C_2 = \exp(C_1) = 1$ , logo

$$v(t) = v_t \frac{1 - \exp\left(-\frac{gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{gt}{v_t}\right)} \quad \text{ou} \quad v(t) = v_t \operatorname{tgh} \left( \frac{gt}{v_t} \right). \quad (4.9)$$

#### 4.1.2 Abordagem experimental e validação das hipóteses

Para validação dos resultados obtidos nos modelos apresentados realizamos dois experimentos nos quais estudamos a queda de objetos de duas naturezas distintas utilizando da análise de vídeo.

No experimento foram usados dois corpos esféricos:

- Esfera feita de plástico, com diâmetro de aproximadamente 3,53 cm e massa de cerca de 20,59 g.
- Esfera feita de isopor, com diâmetro de aproximadamente 2,35 cm e massa de cerca de 0,28 g.

Portanto, das Equações (4.2) e (4.1) temos que, para o plástico,

$$c_{plast} = 6,65389 \cdot 10^{-6} \quad \text{e} \quad k_{plast} = 0,0125127,$$

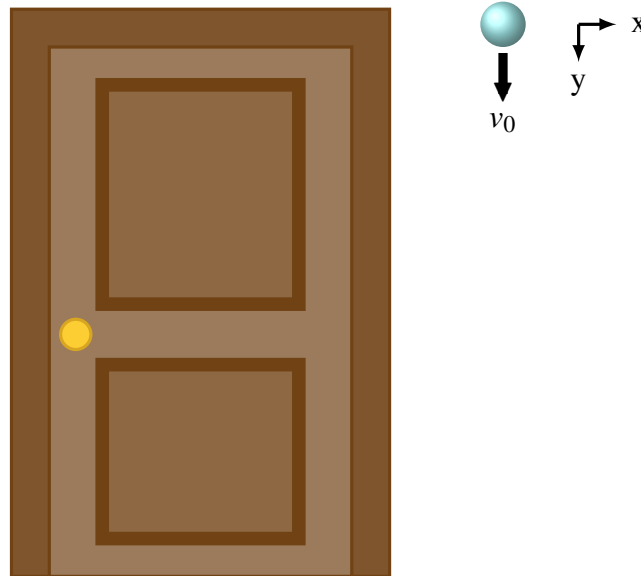


Figura 4.1 – Esquemática experimental utilizada. Fonte: Próprio autor.

enquanto que, para o isopor,

$$c_{iso} = 4,42965 \cdot 10^{-6} \quad e \quad k_{iso} = 0,407789.$$

Vale salientar que além de obter dados factíveis para a realização do experimento o objetivo é desenvolvê-lo de forma a ser de fácil construção. Desta maneira utilizam-se materiais de baixo custo facilmente encontrados e recursos tecnológicos relativamente simples.

A prática consistiu em soltar o objeto ao lado de uma porta (para evitar erros na demarcação dos eixos de coordenadas) com posição inicial na parte superior da mesma. Uma régua foi fixada na porta (na vertical) para calibração do programa e o ponto de análise escolhido foi o centro de massas dos objetos, cuja determinação se deu de forma manual. Assim, toda a queda foi captada em forma de vídeo e através da vídeo-análise de objetos que podem ser considerados pontos materiais, o software Tracker<sup>®</sup> permite a obtenção de dados cinemáticos de fenômenos físicos filmados, mais especificamente registramos como a velocidade vertical varia com o tempo. A Figura 4.1 ilustra a esquematização experimental utilizada.

Os dados obtidos para a velocidade, tanto do objeto de plástico quanto do isopor, estão ilustrados nas Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente, nas quais também exibimos um ajuste do resultado teórico obtido considerando a força de viscosidade e arrasto inercial.

As velocidades iniciais obtidas foram de  $v_{0_{plas}} = 0,55$  m/s para a esfera de plástico e de  $v_{0_{iso}} = -0,40$  m/s para o isopor. A princípio a velocidade inicial negativa do isopor pode gerar estranheza, todavia isso é justificado pelo fato do isopor se eletrizar com facilidade e ser atraído à mão ao soltar a esfera.

Na Figura 4.2, observa-se que no intervalo de tempo considerado no experimento da esfera de plástico não é possível inferir sobre o efeito do ar sobre seu movimento, pois de acordo com o modelo teórico, seria necessário em torno de dois segundos de queda para que o efeito do arrasto pudesse ser percebido. No entanto, isso significa que a altura inicial adotada deveria ser por volta de 20 m, o que foge do escopo da experimentação.

Entretanto, para o corpo esférico de isopor, os gráficos da Figura 4.3 ilustram que o modelo teórico se mostrou adequado para descrever a influência do ar no movimento de queda, validando assim as hipóteses adotadas. Do ponto de vista didático-pedagógico, temos que essa experimentação tem uma contribuição positiva no processo de ensino e aprendizagem, envolvendo a

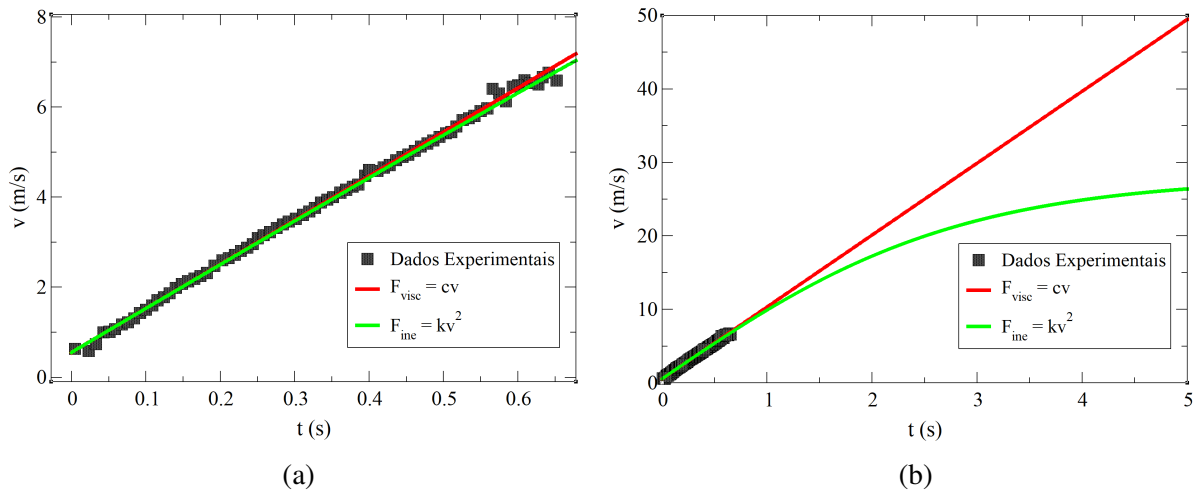


Figura 4.2 – (a) Dados experimentais e curvas teóricas considerando  $F_{\text{ine}}$  e  $F_{\text{visc}}$  da velocidade em função do tempo para o corpo esférico de plástico. (b) extrapolação das curvas teóricas. Fonte: Próprio autor.

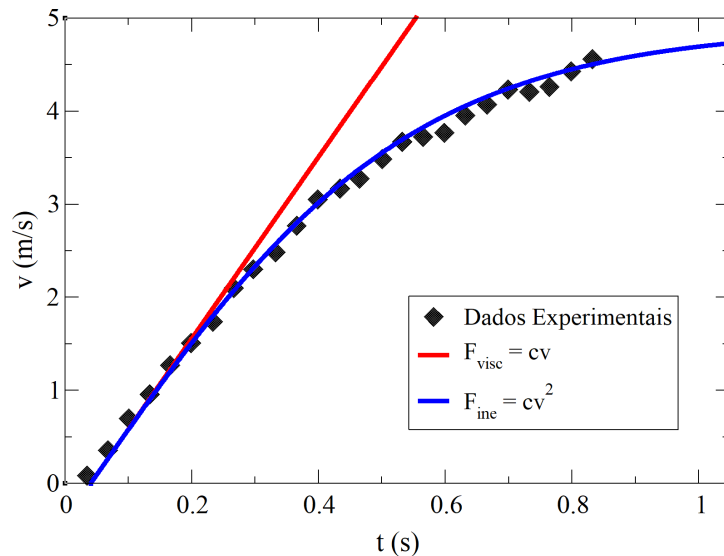


Figura 4.3 – Dados experimentais e curvas teóricas considerando  $F_{\text{ine}}$  e  $F_{\text{visc}}$  da velocidade em função do tempo para a o corpo esférico de isopor. Fonte: Próprio autor.

interação de Física, Matemática e tecnologia, além do empregar materiais de baixo custo.

Na próxima seção apresentamos outra aplicação de EDO de primeira ordem na Física pois faremos a modelagem e experimentação do circuito RC.

## 4.2 Circuito RC

Nesta seção, que está baseada referência [26], apresentamos a modelagem de um circuito RC. Este arranjo contém dois elementos chaves em sua configuração: o resistor e o capacitor. Inicialmente descreveremos todos os elementos que utilizaremos em nosso circuito para posteriormente deduzir a equação diferencial que modela o sistema. Por fim, através de uma experimentação validaremos a modelagem.

### 4.2.1 Elementos de Circuito

O primeiro elemento que estará em nosso circuito é o resistor ôhmico, indicado pela letra  $R$  e ilustrado na Figura 4.4. Ele é um elemento do circuito no qual ocorre a conversão de energia elétrica em energia térmica, dada pelo efeito Joule. Este componente obedece a lei de Ohm, quando atravessado por uma corrente  $i$ , apresenta uma queda de potencial através dos seus extremos dada pela equação

$$V_R = Ri. \quad (4.10)$$

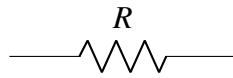


Figura 4.4 – Símbolo que denota o Resistor. Fonte: Próprio autor.

Outro elemento importante nessa análise é o capacitor pois é um elemento composto por dois condutores isolados por um dielétrico, um com carga  $q$ , e outro com carga  $-q$ . A queda de potencial entre os condutores é dada por

$$V_C = \frac{q}{C}, \quad (4.11)$$

em que  $C$  é chamada de capacitância do capacitor e seu valor depende da geometria das placas. Dentro de diagrama elétrico ele adota o símbolo ilustrado na Figura 4.5.

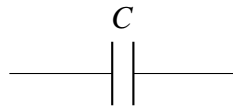


Figura 4.5 – Símbolo que denota o capacitor dentro do circuito. Fonte: Próprio autor.

Por fim, o último componente será o gerador, mostrado na Figura 4.6. Este elemento é uma fonte de força eletromotriz que realiza um trabalho sobre as cargas elétricas para manter uma diferença de potencial entre os terminais. Temos dois tipos de geradores, o de corrente alternada (CA) e o de corrente contínua (CC). No primeiro a força eletromotriz varia senoidalmente com o tempo, enquanto a segunda como o nome já diz, é contínua. Ao contrário do resistor, capacitor e do indutor, um gerador é um elemento ativo de um circuito, que fornece energia, simbolizando isto com um sinal negativo. Portanto a “queda” de potencial é

$$V_\varepsilon = -\varepsilon. \quad (4.12)$$

Neste trabalho utilizaremos apenas um gerador de corrente contínua, cujo símbolo está ilustrado na Figura 4.6.

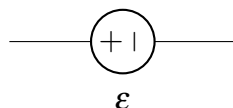


Figura 4.6 – Símbolo que denota o gerador de corrente contínua dentro de um circuito. Fonte: Próprio autor.

Após a apresentação dos elementos que irão constituir o circuito RC, iremos agora para a dedução das equações da modelagem matemática do mesmo.

### 4.2.2 Regra das Malhas de Kirchhoff

A modelagem matemática de circuitos consiste basicamente na aplicação de uma lei bastante importante se tratando de circuitos elétricos, denominada *Regra das Malhas de Kirchhoff*.

**Teorema 4.2.1 — Regra das Malhas de Kirchhoff.** A soma algébrica de todas as quedas de tensão encontradas ao percorrer uma malha fechada é nula, ou seja,

$$\sum_i V_i = 0, \quad (4.13)$$

em que  $V_i$  denota da diferença de potencial de um elemento do circuito.

O trabalho  $W$  do ponto  $i$  para o ponto  $f$  realizado sobre uma partícula de carga  $q$  sob ação de um campo elétrico  $E$  é dado por

$$W = q_0 \int_i^f \vec{E} d\vec{s}. \quad (4.14)$$

Substituindo  $W$  por  $W = -Vq_0$ , sendo  $V$  a diferença de potencial, obtemos

$$V = - \int_i^f \vec{E} d\vec{s}. \quad (4.15)$$

A Equação (4.15) é chamada de equação do potencial a partir do campo elétrico.

Agora consideremos, sem perda de generalidade, o circuito genérico da Figura 4.7, onde os retângulos brancos representam qualquer elemento passivo (resistor, capacitor ou indutor).

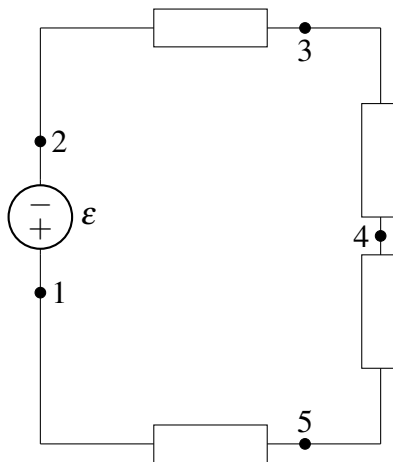


Figura 4.7 – Circuito auxiliar utilizado para a dedução de Lei das Malhas de Kirchoof. Os retângulos brancos representam qualquer elemento passivo (resistor, capacitor ou indutor). Fonte: Próprio autor.

Aplicando a equação do potencial a partir do campo elétrico nos pontos 1 e 2 da Figura 4.7, obtemos, por exemplo,

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = - \int_1^2 dV = V_1 - V_2 = -\varepsilon.$$

Como o potencial não depende do caminho, mas sim do seu deslocamento, vamos aplicar (4.15), mas desta vez vamos percorrer a malha toda até chegarmos novamente no ponto em que

partimos. Portanto,

$$V_{malha} = \sum V = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} + \int_2^3 \vec{E} d\vec{s} + \int_3^4 \vec{E} d\vec{s} + \int_4^5 \vec{E} d\vec{s} + \int_5^1 \vec{E} d\vec{s} = \int_1^1 \vec{E} d\vec{s} = 0.$$

Logo,

$$\sum_i V_i = 0.$$

onde  $V_i$  são todas as quedas de tensão ao longo da malha.

Finalmente, introduziremos o circuito RC.

### 4.2.3 Modelagem matemática do circuito RC

Considere o diagrama eletrônico da Figura 4.8, denominado de circuito RC, sendo que, a princípio, o capacitor está totalmente descarregado.

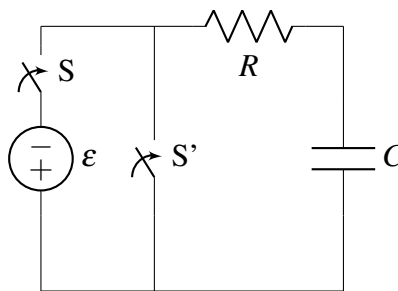


Figura 4.8 – Circuito RC. Fonte: Próprio autor.

Inicialmente, fechando a chave  $S$ , aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff (Teorema 4.2.1) e utilizando as Equações (4.10), (4.11) e (4.12), temos

$$iR + \frac{q}{C} = \varepsilon. \quad (4.16)$$

Como a corrente elétrica é a taxa de variação da carga ao longo do tempo, ou seja,  $i = \frac{dq}{dt}$  e dividindo (4.16) por  $R$ , obtemos então a equação diferencial

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (4.17)$$

Como a Equação (4.17) é uma EDO linear de primeira ordem, ela será resolvida através do método do fator integrante que estudamos na seção (3.2). O fator integrante é dado por

$$\mu(t) = e^{\int \frac{dt}{RC}} = e^{\frac{t}{RC}}.$$

Assim, multiplicando a equação (4.17) por  $\mu(t)$ , obtemos

$$\mu \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} \mu = \frac{\varepsilon}{R} \mu \implies e^{\frac{t}{RC}} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} e^{\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{t}{RC}}.$$

Utilizando a regra do produto da diferenciação observamos que

$$\frac{d}{dt} \left( q e^{\frac{t}{RC}} \right) = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{t}{RC}}.$$

Portanto, integrando ambos os lados em relação a  $t$ ,

$$\int \frac{d}{dt} \left( qe^{\frac{t}{RC}} \right) dt = \int \frac{\mathcal{E}}{R} e^{\frac{t}{RC}} dt \implies qe^{\frac{t}{RC}} = C\mathcal{E}e^{\frac{t}{RC}} + k \implies q = C\mathcal{E} \left( 1 + ke^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

em que  $k$  é uma constante de integração arbitrária que pode ser determinada utilizando a condição inicial de que no instante  $t = 0$  o capacitor está descarregado, ou seja,  $q(0) = 0$ . Assim, para  $t = 0$ , temos

$$0 = C\mathcal{E}(1 + ke^{-\frac{0}{RC}}) \implies 0 = C\mathcal{E} + kC\mathcal{E} \implies k = -1.$$

Portanto a solução de (4.17) é dada por

$$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Dessa maneira o potencial no capacitor é dado por

$$V_C = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (4.18)$$

Analisando a solução, vemos que quando  $t = 0$ , temos que  $q = 0$ , satisfazendo assim a condição inicial e, quando  $t$  tende ao infinito, segue que o termo  $e^{-\frac{t}{RC}}$  tende a zero. Logo, obtemos que  $q = C\mathcal{E}$  que é a carga total em um capacitor, descrita pela Equação (4.11), com um potencial  $V_C = \mathcal{E}$ . Dizemos que a Equação (4.18) descreve o processo de carregamento do capacitor e tal nomenclatura será abordada posteriormente.

Consideremos agora que o capacitor possua uma diferença de potencial dada por  $V_C = \mathcal{E}$ . Assim, abriremos a chave S e fecharemos a chave S'. Aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff (Teorema 4.2.1) e utilizando as Equações (4.10) e (4.11), obtemos a EDO

$$Ri + \frac{q}{C} = 0. \quad (4.19)$$

Como  $i = \frac{dq}{dt}$  dividindo (4.16) por  $R$ , obtemos então a equação diferencial

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0. \quad (4.20)$$

A Equação (4.20) é uma EDO separável que estudamos na Seção (3.1). Resolvendo-a obtemos

$$q(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad (4.21)$$

em que  $k$  é uma constante de integração arbitrária que pode ser determinada utilizando a condição inicial de que no instante  $t = 0$ , o capacitor está totalmente carregado ( $q = C\mathcal{E}$ ). Assim, para  $t = 0$ , temos

$$C\mathcal{E} = ke^{\frac{0}{RC}} \implies k = C\mathcal{E}. \quad (4.22)$$

Portanto a solução de (4.20) é dada por

$$q(t) = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.23)$$

Dessa maneira o potencial no capacitor é dado por

$$V_C(t) = \mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.24)$$

Analisando a solução observamos que quando  $t = 0$ , temos que  $V_C = \mathcal{E}$ , satisfazendo assim a condição inicial e, quando  $t$  tende ao infinito, segue que o termo  $e^{-\frac{t}{RC}}$  tende a zero. Logo, obtemos que  $V_C = 0$ . Dizemos que a Equação (4.18) descreve o processo de descarregamento do capacitor.

A seguir, apresentaremos a validação experimental da modelagem.

#### 4.2.4 Validação Experimental

Para a validação da teoria proposta na Seção 4.2.3 construímos um aparato experimental semelhante ao da Figura 4.8, considerando um resistor de  $33\text{ M}\Omega$ , um capacitor de  $1\ \mu\text{F}$ , ilustrados na Figura 4.9. Além disso, consideremos pilhas para gerar uma diferença de potencial de aproximadamente 3,1 volts.



Figura 4.9 – (a) Imagem do resistor utilizado de  $33\text{ M}\Omega$  e em (b) do capacitor de  $1\ \mu\text{F}$ .  
Fonte: Próprio autor.

Inicialmente consideraremos o processo de carga de um capacitor, ou seja, a chave  $S$  fechada e a  $S'$  aberta e faremos a leitura da diferença de potencial do capacitor, registrando o valor a cada 5 segundos. Na Figura 4.10 podemos ver o gráfico juntamente com o ajuste teórico obtido na Equação (4.18), o que aproxima muito bem os dados obtidos experimentalmente.

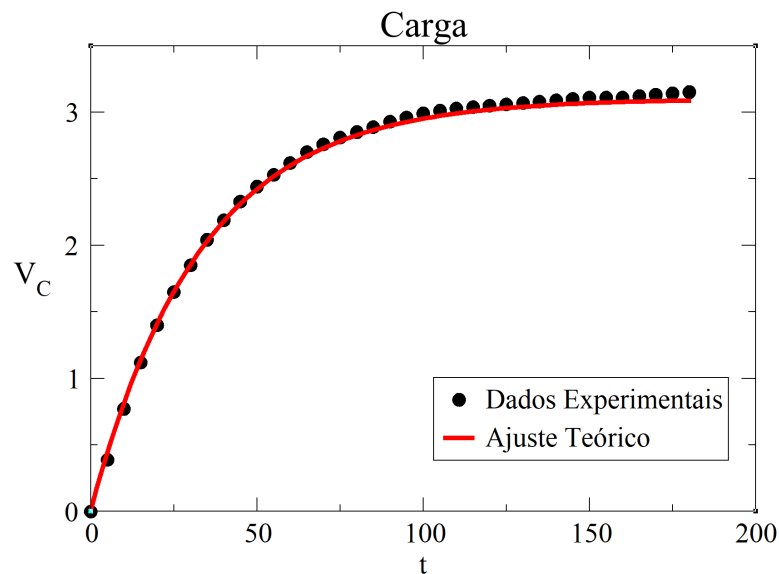


Figura 4.10 – Dados experimentais e ajuste teórico dado pela Equação (4.18) para o processo de carregamento do capacitor em um circuito RC. Fonte: Próprio autor.

Esse circuito descreve o processo de carga de um capacitor. Quando a chave  $S$  do circuito é fechada cargas começam a se mover no circuito e uma corrente é gerada. Essa corrente acumula  $q$  cada vez maior na placas do capacitor e estabelece uma diferença de potencial  $V_c = (q/C)$  entre as placas do capacitor. Quando esta diferença de potencial é igual a da fonte, a corrente deixa de circular e o capacitor atinge sua carga final, ou de equilíbrio, equivalente a  $C\varepsilon$ .

Agora, consideremos o processo de descarga. Assim, após termos carregado o capacitor até ele ter atingido uma diferença de potencial equivalente a  $V_C = 3\text{ V}$ , fechamos a chave  $S'$ , abrimos

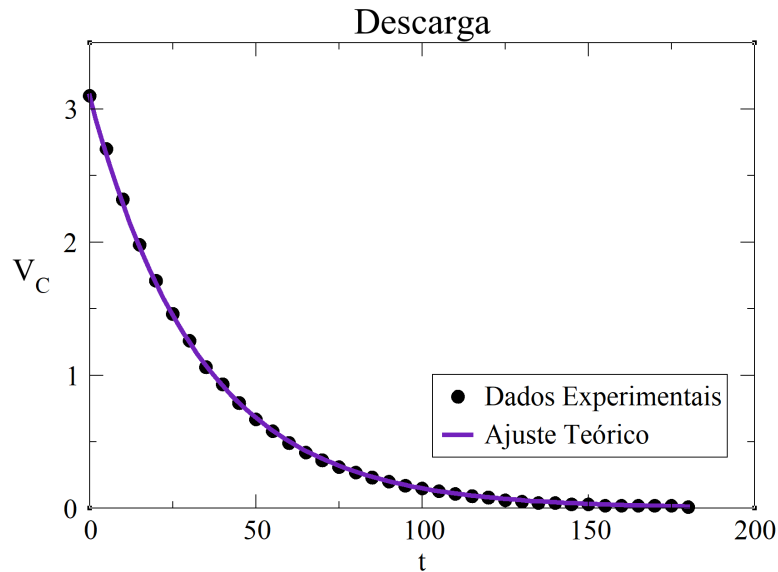


Figura 4.11 – Dados experimentais e ajuste teórico dado pela Equação (4.24) para o processo de descarregamento do capacitor em um circuito RC. Fonte: Próprio autor.

S e fazemos a leitura da diferença de potencial do capacitor, novamente registrando o valor a cada 5 segundos. Os dados obtidos estão ilustrados nas Figura 4.11, na qual também exibimos um ajuste do resultado teórico obtido pela Equação (4.24), validando assim a modelagem.

Essa operação descreve o processo de descarga de um capacitor. Quando a chave  $S'$  do circuito é fechada as cargas começam a se mover no circuito devido à diferença de potencial do capacitor e uma corrente é gerada. Essa corrente é dissipada pelo resistor e com isso o capacitor vai perdendo o seu potencial gradativamente pois toda sua carga é dissipada no resistor. Quando esta diferença de potencial é igual a zero, a corrente deixa de circular e o capacitor perde toda sua carga, logo sua capacidade de gerar diferença de potencial.

No próximo capítulo iremos abordar outra classe de equações diferenciais, as de segunda ordem.

## 5

## Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem e o Problema do Pêndulo

As equações diferenciais lineares de segunda ordem têm uma importância crucial no estudo de equações diferenciais por duas razões principais. A primeira é que equações lineares têm uma estrutura teórica rica, subjacente a diversos métodos sistemáticos de resolução e a outra razão é o fato de elas serem essenciais na análise de uma série de problemas físicos. Em muitos estudos como a mecânica de fluidos, condução de calor, movimento oscilatório e fenômenos eletromagnéticos há a necessidade de resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem.

Neste capítulo apresentaremos a teoria de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes tratando como aplicação o problema do pêndulo. Tanto  $dy/dt$  como  $y''$  serão utilizadas para representar a derivada de  $y$  em relação a  $t$  (e notação equivalente para derivada de segunda ordem), para facilidade de escrita de alguns resultados e exemplos em determinadas situações. Este estudo foi baseado nas referências [1–3, 6].

### 5.1 Teoria Preliminar

Nesta seção, apresentamos alguns resultados e definições fundamentais para o estudo das equações diferenciais ordinárias (EDOs) de segunda ordem. Iniciamos com o Teorema de Existência e Unicidade para esse caso específico. Contudo, a demonstração do teorema ultrapassa o escopo deste texto e, por esse motivo, será omitida [6].

**Teorema 5.1.1 — Teorema de Existência e Unicidade (TEU).** Considere o problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t) \quad y(t_0) = b_0, y'(t_0) = b,$$

em que  $p$ ,  $q$  e  $g$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$  que contém o ponto  $t_0$ . Então existe exatamente uma solução  $y = \phi(t)$  deste problema e a solução existe em todo o intervalo  $I$ .

Ilustremos o resultado com alguns exemplos.

■ **Exemplo 5.1** Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, y'(0) = 1.$$

A equação diferencial é linear, os coeficientes são contínuos em todo o intervalo contendo  $x = 0$ . Concluimos a partir do T.E.U. que a solução do PVI existe e é única. ■

■ **Exemplo 5.2** Considere o PVI

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{6y}{x^2} = 12x, \quad y(0) = 4, y'(0) = 1.$$

A equação diferencial é linear, entretanto os coeficientes não são contínuos em todo o intervalo pois em  $x = 0$ , que é a condição inicial, a função não está definida. Concluimos então que o T.E.U. não se aplica nesta equação. ■

As EDOs podem ser classificadas como homogêneas e não homogêneas.

**Definição 5.1.1** Seja,

$$a(t) \frac{d^2y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = f(t). \quad (5.1)$$

em que  $a(t), b(t), c(t)$  e  $f(t)$  são funções contínuas dadas em um intervalo aberto  $I$ . Se  $f(t) = 0$ , chamamos a equação de **homogênea**; caso contrário ela é denominada **não homogênea**.

Em particular, quando lidamos com EDOs lineares, podemos usar o princípio da superposição para encontrar soluções particulares de uma EDO somando soluções conhecidas.

**Teorema 5.1.2 — Princípio da Superposição.** Sejam  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soluções para a equação linear de  $n$ -ésima ordem homogênea em  $I$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad a_n(x) \neq 0. \quad (5.2)$$

Então, a combinação linear

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x), \quad (5.3)$$

em que os  $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ , são constantes arbitrárias é também uma solução no intervalo  $I$ .

*Demonstração.* Provemos para uma equação de ordem  $n$  com  $n$  soluções linearmente independentes  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Seja:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x).$$

Derivando  $y(x)$  até a ordem  $n$ , obtemos:

$$y^{(k)}(x) = c_1y_1^{(k)}(x) + c_2y_2^{(k)}(x) + \dots + c_ny_n^{(k)}(x), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

Denotando por  $L[y] = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$  e substituindo  $y(x)$  e suas derivadas em  $L[y]$  temos

$$L[y] = c_1(y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y_1) + \dots + c_n(y_n^{(n)} + a_{n-1}(x)y_n^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y_n).$$

Como  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  são soluções da EDO, temos:

$$a_n(x)y_k^{(n)} + a_{n-1}(x)y_k^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y_k = 0, \quad \text{para todo } k = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto:

$$L[y] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 = 0.$$

Logo,  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$  também é solução de 5.2. ■

No caso vetorial, temos que qualquer vetor em duas dimensões pode ser escrito por um par de vetores linearmente independentes. Se os vetores forem linearmente dependentes, isso significa que um vetor pode ser escrito como uma combinação linear do outro, resultando em direções redundantes ou colineares no plano. Analogamente para EDOs de segunda ordem, para escrevermos uma solução geral para a mesma precisamos de funções que são soluções particulares linearmente independentes.

**Definição 5.1.2 — Dependência Linear.** Dizemos que um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  é linearmente dependente em um intervalo  $I$  se existem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo  $x$  no intervalo  $I$ .

**Definição 5.1.3 — Independência Linear.** Dizemos que um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  é linearmente independente em um intervalo  $I$  se as únicas constantes, para quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo  $x$  no intervalo  $I$ , são  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

O exemplo a seguir ilustra as definições anteriores.

■ **Exemplo 5.3** As funções  $f_1(x) = \sin 2x$  e  $f_2(x) = \sin x \cos x$  são linearmente dependentes no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , pois

$$c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$$

é satisfeita com  $c_1 = \frac{1}{2}$  e  $c_2 = -1$ . Note que essa afirmação é verdadeira devido à identidade trigonométrica  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ . ■

Uma maneira de verificar a dependência linear de funções é através do Wronskiano.

**Teorema 5.1.3 — Critério para Independência Linear de Funções (Wronskiano).**

Suponha que  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  sejam diferenciáveis pelo menos  $n - 1$  vezes. Se o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

em pelo menos um ponto de  $I$ , então as funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  serão linearmente independentes no intervalo. Esse determinante é denotado por

$$W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

e é chamado de **Wronskiano** das funções.

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \neq 0$  para um  $x_0$  fixado no intervalo  $I$  e que  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  sejam linearmente dependentes nesse intervalo. O fato de que as funções são linearmente dependentes significa que existem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , não simultaneamente nulas, para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo  $x \in I$ . Derivando essa combinação linear  $(n-1)$  vezes, obtemos um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) &= 0, \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos representar estas equações em forma matricial  $[\mathbf{F}(x)][\mathbf{c}] = [\mathbf{0}]$ :

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como por hipótese existem  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , não simultaneamente nulas, para as quais  $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$  para todo  $x \in I$ , temos que  $\det(\mathbf{F}(x)) = 0$ . Mas,  $W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \det(\mathbf{F}(x))$  e portanto,  $W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = 0$  para todo  $x \in I$ , contrariando a hipótese que  $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \neq 0$  para um  $x_0$  fixado no intervalo  $I$ . ■

O conjunto  $S$  formado por todas as soluções de uma EDO linear de  $n$ -ésima ordem homogênea é um espaço vetorial cuja dimensão é  $n$ . Consequentemente existe um conjunto de vetores  $\{y_1, \dots, y_n\}$  de  $S$ , tal que toda solução da EDO se escreve como combinação linear dos elementos desse conjunto. Esse conjunto é conhecido como **conjunto fundamental de soluções**.

**Definição 5.1.4 — Conjunto Fundamental de soluções.** Qualquer conjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  de  $n$  soluções linearmente independentes para uma equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem em um intervalo  $I$  é chamado de **conjunto fundamental** de soluções no intervalo.

Assim

**Definição 5.1.5 — Solução Geral - Equações Homogêneas.** Seja  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  um conjunto fundamental para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem em

um intervalo  $I$ . A **solução geral** para a equação no intervalo é definida por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

em que  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são constantes arbitrárias.

■ **Exemplo 5.4** Sejam  $y_1(t) = t^{\frac{1}{2}}$  e  $y_2(t) = t^{-1}$  soluções de

$$2t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} - y = 0, \quad t > 0.$$

Calculando o Wronskiano temos

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} t^{\frac{1}{2}} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}t^{-\frac{3}{2}}.$$

Como  $W \neq 0$ ,  $\forall t > 0$ , então  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções. ■

Uma outra maneira de determinar o Wronskiano é pela **Fórmula de Abel**.

**Teorema 5.1.4 — Fórmula de Abel.** Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0,$$

em que  $p(t)$  e  $q(t)$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ , então o Wronskiano  $W(y_1, y_2)(t)$  é dado por

$$W(t) = W(t_0) e^{\int -p(t) dt}$$

sendo  $W(t_0)$  uma constante. Assim,  $W(t)$  ou é nulo para todo  $t$  em  $I$  ou nunca se anula em  $I$ .

*Demonstração.* Calculando o Wronskiano temos

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

Observe que

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (y_1 y_2' - y_1' y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Manipulando a EDO, temos

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -p(t) \frac{dy}{dt} - q(t)y.$$

Como  $y_1$  e  $y_2$  são soluções, temos

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -p(t) \frac{dy_1}{dt} - q(t)y_1 \quad e \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -p(t) \frac{dy_2}{dt} - q(t)y_2.$$

Substituindo as equações acima na derivada do Wronskiano, obtemos

$$\frac{dW(t)}{dt} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = y_1 \left( -p(t) \frac{dy_2}{dt} - q(t)y_2 \right) - \left( -p(t) \frac{dy_1}{dt} - q(t)y_1 \right) y_2 \implies$$

$$\implies \frac{dW}{dt} = -p(t)[y_1 y_2' - y_1' y_2]$$

ou seja, como  $W(t) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ , temos

$$\frac{dW(t)}{dt} = -p(t)W(t).$$

Resolvendo a EDO, obtemos a fórmula de Abel.

$$W(t) = W(t_0)e^{\int -p(t)dt}.$$

■ **Exemplo 5.5** Se  $y_1(t) = t^{\frac{1}{2}}$  e  $y_2(t) = t^{-1}$  são soluções de

$$2t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} - y = 0, \quad t > 0.$$

Calculemos o Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  através da Fórmula de Abel. Primeiro precisamos escrever a equação diferencial na forma-padrão, com o coeficiente de  $y''$  igual a 1.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{3}{2t} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{2t^2} y = 0,$$

e deste modo, sabemos que  $p(t) = \frac{3}{2t}$ . Logo

$$\begin{aligned} W(t) &= W(t_0)e^{\int -p(t)dt} \implies W(t) = W(t_0)e^{\int -\frac{3}{2t}dt} \implies \\ &\implies W(t) = W(t_0)e^{\int -\frac{3}{2t} \ln t} \implies W(t) = W(t_0)t^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

No caso da equação não ser homogênea podemos primeiramente associar uma homogênea a ela.

**Definição 5.1.6** Seja,

$$L[y] = a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = f(t). \quad (5.4)$$

em que  $a(t), b(t), c(t)$  e  $f(t)$  são funções contínuas dadas em um intervalo aberto  $I$ . A equação

$$L[y] = a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = 0$$

é chamada de **equação homogênea associada à (5.4)**.

Assim, a solução de EDO não homogênea é dada pelo resultado a seguir.

**Teorema 5.1.5** Sejam  $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  solução da homogênea associada à (5.4), em que  $c_1, c_2$  são constantes arbitrárias e  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  duas soluções linearmente independentes e seja  $y_p$  qualquer solução particular da equação não-homogênea (5.4). Então, toda solução

$y(t)$  de (5.4) tem a forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

ou seja,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t).$$

*Demonstração.* Seja  $y(x)$  solução geral e  $y_p(x)$  solução particular de (5.4). Subtraindo as duas equações temos

$$\begin{aligned} L[y] - L[y_p] &= a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y - \left( a(t) \frac{d^2 y_p}{dt^2} + b(t) \frac{dy_p}{dt} + c(t)y_p \right) \\ &= a(t) \frac{d^2}{dt^2} (y - y_p) + b(t) \frac{d}{dt} (y - y_p) + c(t)(y - y_p) = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

e observamos que  $y - y_p$  é a solução da homogênea associada, ou seja,

$$y_h = y - y_p.$$

Portanto, explicitando  $y$ , obtemos a forma da solução geral

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Para provar a unicidade, suponha que existam duas soluções,  $y(t)$  e  $\tilde{y}(t)$ , da equação não-homogênea. Então, essas soluções podem ser escritas como:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t),$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{c}_1 y_1(t) + \tilde{c}_2 y_2(t) + y_p(t).$$

Subtraindo essas duas expressões:

$$z(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = (c_1 - \tilde{c}_1) y_1(t) + (c_2 - \tilde{c}_2) y_2(t).$$

Como  $z(t)$  é a diferença entre duas soluções da mesma equação, ela satisfaz a equação homogênea associada:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + p(t) \frac{dz}{dt} + q(t) z(t) = 0.$$

A solução geral da equação homogênea é

$$z(t) = d_1 y_1(t) + d_2 y_2(t),$$

sendo  $d_1 = c_1 - \tilde{c}_1$  e  $d_2 = c_2 - \tilde{c}_2$ .

Agora, suponha que as soluções  $y(t)$  e  $\tilde{y}(t)$  satisfazem as mesmas condições iniciais:

$$y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = \tilde{y}'(t_0) = y_0'.$$

Substituímos  $z(t)$  e  $\frac{dz}{dt} = z'(t)$  nas condições iniciais:

$$z(t_0) = y(t_0) - \tilde{y}(t_0) = 0,$$

$$z'(t_0) = y'(t_0) - \tilde{y}'(t_0) = 0.$$

Substituindo  $z(t) = d_1y_1(t) + d_2y_2(t)$  nessas condições iniciais, obtemos o sistema:

$$d_1y_1(t_0) + d_2y_2(t_0) = 0,$$

$$d_1y_1'(t_0) + d_2y_2'(t_0) = 0.$$

Como  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são linearmente independentes, o único par de soluções para esse sistema é:

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 0.$$

Portanto:

$$c_1 - \tilde{c}_1 = 0, \quad c_2 - \tilde{c}_2 = 0.$$

Logo:

$$c_1 = \tilde{c}_1, \quad c_2 = \tilde{c}_2.$$

Concluimos que, dadas as mesmas condições iniciais, os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  são únicos, o que implica que a solução  $y(t)$  é única. ■

## 5.2 EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes

Vamos estudar agora como resolver EDO's lineares homogêneas quando todos os coeficientes são constantes, ou seja, a equação diferencial será do tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (5.6)$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 0, \dots, n$ .

Para que a Equação (5.6) seja satisfeita precisamos que a função e suas derivadas não sejam muito diferentes, a menos de constantes. Assim, uma candidata para ser essa função é a exponencial.

$$y(x) = e^{rx}.$$

Portanto, derivando a função candidata, temos

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx} \\ y'(x) &= r e^{rx} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= r^n e^{rx} \end{aligned}$$

e, substituindo em (5.6), obtemos

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0,$$

ou seja,

$$e^{rx} [r^n + a_{n-1} r^{(n-1)} + \dots + a_1 r + a_0] = 0.$$

Como o resultado da equação anterior é zero, um dos fatores do produto tem que ser zero. Como  $e^{rx}$  nunca se anula, então

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{(n-1)} + \dots + a_1 r + a_0 = 0. \quad (5.7)$$

A equação (5.7) é chamada de equação característica de (5.6). Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, sabemos que todo polinômio de grau  $n$  possui  $n$  raízes. Consideraremos três casos: o primeiro é se as raízes forem reais e distintas, o segundo é caso as sejam reais repetidas ou com alguma multiplicidade e por último se as raízes forem complexas.

### 5.2.1 Raízes reais distintas

Vamos analisar agora o caso em que a equação característica possui  $n$  raízes reais e distintas. Portanto, a solução geral será

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}, \quad (5.8)$$

pois como

$$W(e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

as funções  $e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}$  são linearmente independentes e, portanto, formam um conjunto fundamental de soluções. Os Exemplos 5.6 e 5.7, que envolvem equações de segunda ordem, ilustram esse caso.

■ **Exemplo 5.6** Considere a EDO

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y = 0.$$

Identificamos que  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = 5$  e  $a_0 = 4$ . Logo, de (5.7), a equação característica é

$$r^2 + 5r + 4 = 0,$$

cujas raízes são  $r_1 = -1$  e  $r_2 = -4$ , que são reais e distintas. Logo, a solução geral dessa EDO é

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t},$$

com  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias. ■

■ **Exemplo 5.7** Considere o problema de valor inicial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} - 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Identificamos que  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = 4$  e  $a_0 = -2$ . Logo, de (5.7), a equação característica é

$$r^2 + 4r - 2 = 0,$$

cujas raízes são  $r_1 = -2 + \sqrt{6}$  e  $r_2 = -2 - \sqrt{6}$ , que são reais e distintas. Logo, a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})t},$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias determinadas através das condições iniciais. Substituindo as condições iniciais na solução geral

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ (-2 + \sqrt{6})c_1 + (-2 - \sqrt{6})c_2 = 2, \end{cases}$$

cujas soluções são

$$c_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \left( \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2} \right) e^{(-2+\sqrt{6})t} + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} \right) e^{(-2-\sqrt{6})t}.$$

### 5.2.2 Raízes complexas

Vamos analisar agora quando as raízes da equação característica são números complexos. Para isso vamos restringir nosso estudo a equação diferencial de segunda ordem. Quando se tem uma raiz complexa sua conjugada também é raiz. Logo,

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad r_2 = \alpha - i\beta.$$

Poderíamos escrever uma solução na forma

$$y(x) = k_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad (5.9)$$

que é complexa. Buscando por soluções reais, analisando a função candidata temos

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}. \quad (5.10)$$

A série de potências para a função  $f(z) = e^z$  é dada por

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (5.11)$$

e converge para todo número real ou complexo. Assim, substituindo  $z$  por  $i\beta x$  temos

$$e^{i\beta x} = 1 + i\beta x + \frac{(i\beta x)^2}{2!} + \frac{(i\beta x)^3}{3!} + \frac{(i\beta x)^4}{4!} + \frac{(i\beta x)^5}{5!} + \frac{(i\beta x)^6}{6!} + \dots + \frac{(i\beta x)^n}{n!} + \dots$$

Como  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  e esse padrão se repete, calculando as potências pares, temos

$$1 - \frac{(\beta x)^2}{2!} + \frac{(\beta x)^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{(\beta x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (5.12)$$

e, calculando as potências ímpares,

$$i \left[ \beta x - \frac{(\beta x)^3}{3!} + \frac{(\beta x)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(\beta x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right] \quad (5.13)$$

Analisando (5.12) e (5.13), vemos que elas são as séries de Taylor das funções  $\cos \beta x$  e  $\sin \beta x$ , respectivamente. Substituindo por essas funções obtemos a conhecida **fórmula de Euler**.

**Definição 5.2.1 — Fórmula de Euler.** A equação

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x$$

é chamada de Fórmula de Euler.

Aplicando a fórmula de Euler em (5.10), obtemos

$$e^{(\alpha+ib)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)$$

e

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x).$$

Substituindo em (5.9), temos

$$y(x) = k_1 [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] + k_2 [e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x)] \quad e,$$

agrupando os termos semelhantes

$$y(x) = (k_1 + k_2) e^{\alpha x} \cos \beta x + i(k_1 - k_2) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Renomeando as constantes como  $c_1 = (k_1 + k_2)$  e  $c_2 = (k_1 - k_2)$ , obtemos

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + ic_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Todavia essa é uma solução que pertence ao conjunto dos números imaginários, enquanto que a solução deve pertencer a  $\mathbb{R}$ . Dessa forma iremos utilizar o seguinte resultado.

**Proposição 5.2.1** Seja  $y(x) = u(x) + iv(x)$  uma solução complexa da EDO

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad (5.14)$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais. Então,  $y_1(x) = u(x)$  e  $y_2(x) = v(x)$  são duas soluções reais da Equação (5.14). Em outras palavras, tanto a parte real quanto a parte imaginária de uma solução complexa da Equação (5.14) são soluções reais da Equação (5.14).

*Demonstração.* Substituindo  $y(x) = u(x) + iv(x)$  em (5.14) temos

$$a[u''(x) + iv''(x)] + b[u'(x) + iv'(x)] + c[u(x) + iv(x)] = 0.$$

que pode ser reescrita como

$$[au''(x) + bu'(x) + cu(x)] + i[av''(x) + bv'(x) + cv(x)] = 0.$$

Agora, se um número complexo é zero, então tanto sua parte real quanto sua parte imaginária devem ser zero. Consequentemente,

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0 \quad e \quad av''(x) + bv'(x) + cv(x) = 0,$$

e isso prova o resultado. ■

Logo, a solução geral para o caso de raízes complexas é dada por

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x. \quad (5.15)$$

■ **Exemplo 5.8** Encontremos a solução geral de

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 5y = 0.$$

Identificamos que  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = -4$  e  $a_0 = 5$ . Logo, de (5.7), a equação característica é

$$r^2 - 4r + 5 = 0,$$

cujas raízes são  $r = 2 \pm i$ , que são complexas conjugadas. Logo, a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t.$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias. ■

■ **Exemplo 5.9** Encontremos a solução  $y(t)$  do problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

Identificamos que  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = -4$  e  $a_0 = 13$ . Logo, de (5.7), a equação característica é

$$r^2 - 4r + 13 = 0,$$

cujas raízes são  $r = 2 \pm 3i$ , que são complexas conjugadas. Logo a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos 3t + c_2 e^{2t} \sin 3t.$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias determinadas através das condições iniciais. Fazendo  $y(0) = -1$  temos que  $c_1 = -1$  e, derivando a solução geral e calculando  $y'(0) = 2$ , obtemos  $c_2 = \frac{4}{3}$ .

Portanto, a solução pro problema de valor inicial é

$$y(t) = -e^{2t} \cos 3t + \frac{4}{3} e^{2t} \sin 3t = e^{2t} \left( -\cos 3t + \frac{4}{3} \sin 3t \right).$$

### 5.2.3 Raízes repetidas

Vamos estudar agora quando as raízes da equação característica são repetidas para o caso  $n = 2$ . Desta maneira vamos considerar a equação diferencial como sendo

$$ay'' + by + c = 0, \tag{5.16}$$

cuja equação característica é

$$ar^2 + br + c = 0$$

e as raízes, no caso de serem repetidas ( $\Delta = 0$ ), são

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Assim, uma solução é

$$y_1(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}.$$

Entretanto, para formarmos uma solução geral, precisamos encontrar uma segunda solução para podermos formar o conjunto fundamental. Vamos supor que essa segunda solução seja

$$y_2 = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-\frac{bt}{2a}}. \quad (5.17)$$

Calculando a primeira e a segunda derivada

$$y_2' = v'(t)e^{-\frac{bt}{2a}} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-\frac{bt}{2a}}$$

$$y_2'' = v''(t)e^{-\frac{bt}{2a}} - \frac{b}{a}v'(t)e^{-\frac{bt}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{bt}{2a}}.$$

Substituindo em (5.16) e agrupando os termos, obtemos

$$e^{-\frac{bt}{2a}} \left\{ a \left[ v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t) \right] + b \left[ v'(t) - \frac{b}{2a}v(t) \right] + cv(t) \right\} = 0.$$

Como a exponencial não é nula, abrindo a expressão dentro das chaves temos

$$av''(t) + \underbrace{(-b+b)}_0 v'(t) + \left( \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) v(t) = 0$$

Note que o coeficiente envolvendo  $v(t)$  é nulo pois

$$\left( \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) = \left( \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \right) = \frac{\overbrace{b^2 - 4ac}^0}{-4a} = 0$$

e como a raiz do polinômio característico é repetida, seu discriminante é zero, logo  $b^2 - 4ac = 0$ . Logo, ficamos com a equação

$$av''(t) = 0 \implies v''(t) = 0,$$

que integrando duas vezes obtemos que  $v(t)$  é equivalente a

$$v(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t.$$

Por comodidade tomaremos  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 1$  e assim, voltando em (5.17), obtemos uma segunda solução

$$y_2 = te^{-\frac{bt}{2a}}.$$

Para construirmos solução geral, devemos verificar se  $y_1$  e  $y_2$  são um conjunto fundamental de soluções, ou seja, são linearmente independentes. Calculando o Wronskiano

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{bt}{2a}} & te^{-\frac{bt}{2a}} \\ -\frac{b}{2a}e^{-\frac{bt}{2a}} & \left(1 - \frac{bt}{2a}\right)e^{-\frac{bt}{2a}} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{bt}{2a}\right)e^{-\frac{bt}{a}} + \left(\frac{bt}{2a}\right)e^{-\frac{bt}{a}} = e^{-\frac{bt}{a}}$$

Como uma função exponencial nunca se anula, a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{bt}{2a}} + c_2 t e^{-\frac{bt}{2a}}. \quad (5.18)$$

■ **Exemplo 5.10** Considere o problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 0,25y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3}.$$

Identificamos que  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = -1$  e  $a_0 = 0,25$ . Logo, de (5.7) a equação característica é

$$r^2 - r + 0,25 = 0.$$

Como  $b^2 - 4ac = 1 - 1 = 0$ , então as raízes são repetidas

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}},$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias determinadas através das condições iniciais. Fazendo  $y(0) = 2$  temos que

$$c_1 = 2$$

e utilizando  $y'(0) = \frac{1}{3}$ , obtemos

$$\frac{c_1}{2} + c_2 = \frac{1}{3}.$$

Como  $c_1 = 2$ , então

$$1 + c_2 = \frac{1}{3} \implies c_2 = -\frac{2}{3}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}.$$

Podemos resumir os casos discutidos nesta seção para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes no quadro a seguir.

### Resumo: EDO Homogênea 2ª Ordem Com Coeficientes Constantes

Para equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

sejam  $r_1$  e  $r_2$  raízes da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0.$$

- Se  $r_1$  e  $r_2$  são reais e distintas, então a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

- Se  $r_1$  e  $r_2$  são complexos conjugados  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , então a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

- Se  $r_1 = r_2 = r$ , então

$$y(x) = c_1 e^{-rx} + c_2 x e^{-rx}.$$

Na próxima seção apresentamos uma aplicação envolvendo o movimento de um pêndulo.

### 5.3 Pêndulo

Nesta seção apresentamos um sistema que é muito importante para a Física denominado por pêndulo, comportando-se aproximadamente como um sistema de massa e mola. Suponha que uma massa  $m$  esteja pendurada em um pêndulo de comprimento  $L$  sofrendo ação da força da gravidade  $g$ . A Figura 5.1 ilustra o diagrama de forças atuando sobre o sistema.

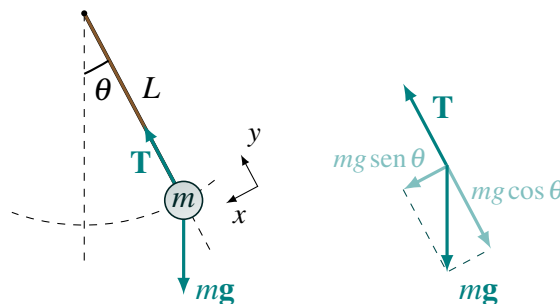


Figura 5.1 – Diagrama de forças que atuam sobre a esfera de massa  $m$  (à esquerda) e a decomposição de forças (à direita). Fonte: Próprio autor.

Buscamos uma equação para o ângulo  $\theta(t)$  (em radianos) e assim, utilizando a segunda lei de Newton para rotações, temos que

$$\sum_i \tau_i = I\theta'', \quad (5.19)$$

em que  $\tau_i$  são os torques que agem sobre o sistema,  $I$  é o momento de inércia e  $\theta''$  é a derivada de segunda ordem da função  $\theta(t)$ . Como a força  $mg \sin \theta$  é a única que age sobre o sistema (não

varia com  $L$ ) e a massa é uma esfera, segue que

$$\tau = (mg \operatorname{sen} \theta) \cdot L, \quad I = mL^2.$$

Assim, podemos reescrever (5.19) como

$$\theta'' + \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Para pequenos valores de  $\theta$ , temos aproximadamente  $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$ . Isso pode ser observado no gráfico descrito na Figura 5.2 para  $-0.5 < \theta < 0.5$  (em radianos), os gráficos de  $\operatorname{sen} \theta$  e  $\theta$  são quase os mesmos.

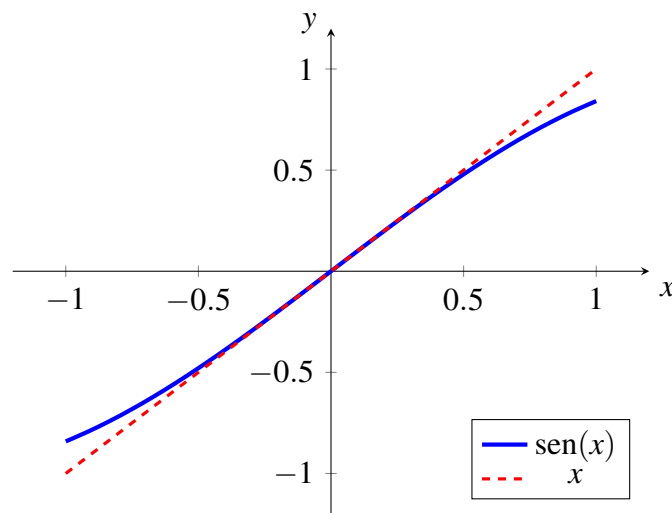


Figura 5.2 – Os gráficos de  $\operatorname{sen} \theta$  e  $\theta$  (em radianos). Fonte: Próprio autor.

Portanto, quando os balanços são pequenos,  $\theta$  é pequeno e podemos modelar o comportamento pela equação linear mais simples

$$\theta'' + \frac{g}{L} \theta = 0. \quad (5.20)$$

Os erros dessa aproximação se acumulam. Assim, após um longo tempo, o estado do sistema do mundo real pode ser substancialmente diferente da nossa solução. Também veremos que em um sistema de massa-mola, a amplitude é independente do período mas não é verdade para um pêndulo. No entanto, para períodos de tempo razoavelmente curtos e pequenos balanços (ou seja, apenas pequenos ângulos  $\theta$ ), a aproximação é razoavelmente boa.

Vamos então resolver a EDO (5.20). Observe que ela é uma EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes cuja solução foi apresentada na Seção 5.2. Assim, encontrando a equação característica, temos que

$$\lambda^2 + \frac{g}{L} = 0 \quad \implies \quad \lambda = \pm i \frac{g}{L}$$

e a solução geral é dada por

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \operatorname{sen}(\omega_0 t). \quad (5.21)$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b),$$

a equação (5.21) pode ser escrita como

$$\theta(t) = C \cos(\omega_0 t - \phi),$$

em que  $C$  e  $\phi$  são duas constantes arbitrárias denominadas *amplitude* e *fase*, respectivamente, e  $\omega_0 = \frac{L}{g}$  é chamado de frequência angular.

Vamos pausar para explicar a palavra *angular* depois da palavra *frequência*. As unidades de  $\omega_0$  são radianos por unidade de tempo, são ciclos por unidade de tempo, como é a medida usual de frequência. Como um ciclo equivale a  $2\pi$  radianos, a frequência usual é dada por  $\frac{\omega_0}{2\pi}$ . É simplesmente uma questão de onde colocamos a constante  $2\pi$ , e isso é uma questão de preferência.

O *período* do movimento é o inverso da frequência (em ciclos por unidade de tempo) e, portanto, é  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ . Esse é o tempo necessário para completar um ciclo completo.

Para validar essa teoria experimentalmente registramos a posição de um pêndulo de comprimento de  $L = 0,80$  m para uma esfera com ângulo inicial pequeno. Assim foram utilizados os seguintes materiais:

- Esfera de metal pequena de diâmetro  $d$  (pode ser de qualquer material e de qualquer tamanho)
- Uma linha de pesca de 0,80 m (aqui também poderia ser um barbante)
- Uma haste de 1 metro.

Com os materiais em mãos, prende-se uma das pontas da linha de pesca na esfera e a outra na haste, configurando assim o aparato experimental, como mostra a Figura 5.3.

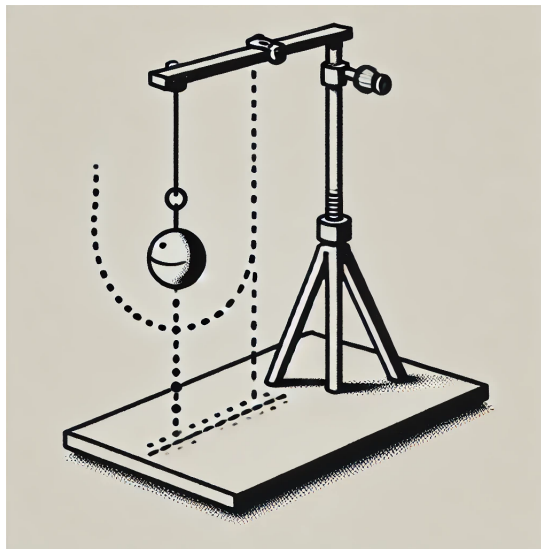


Figura 5.3 – Aparato experimental do pêndulo. Fonte: Próprio autor.

Desta maneira para iniciar o experimento desloque a esfera da sua posição de equilíbrio por um pequeno ângulo (aproximadamente  $10^\circ$ ) e solte-a.

Essencialmente, o experimento consistiu na filmagem do movimento de oscilação do pêndulo. Para o tratamento das imagens, empregou-se o Tracker©, um software livre de modelagem computacional. Através da vídeo-análise de objetos que podem ser considerados pontos materiais, este programa permite a obtenção de dados cinemáticos de fenômenos físicos filmados. Nessa situação utilizamos o diâmetro da esfera para calibrar o programa e registramos a medida do ângulo em relação ao tempo. Na Figura 5.4 mostramos os dados obtidos pela experimentação

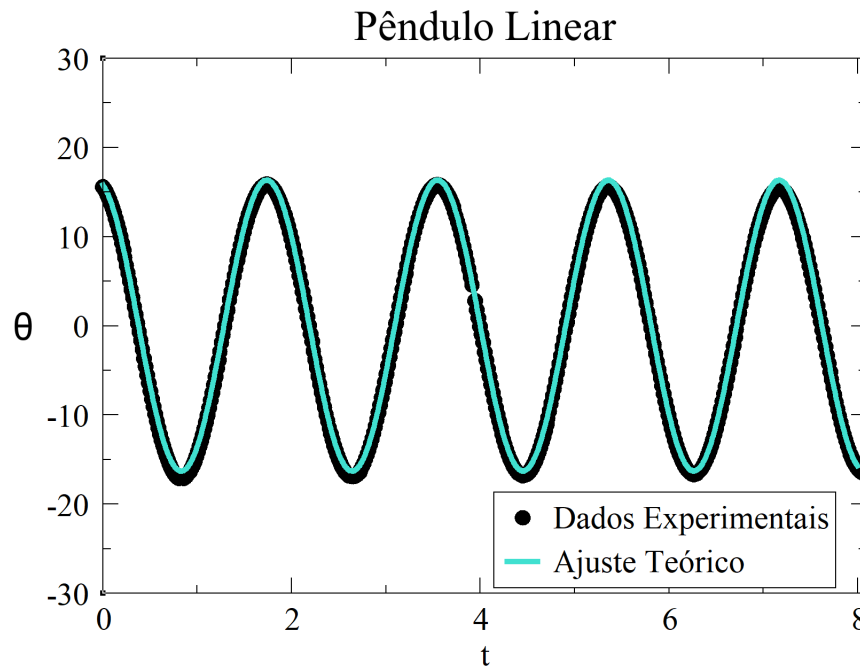


Figura 5.4 – Validação experimental do pêndulo. Fonte: Próprio autor.

sobreposto com a Eq. 5.21 e os dados obtidos com o experimento podem ser encontrados no Apêndice B.

Uma prática interessante é a determinação da força da gravidade pelo pêndulo. No caso linearizado temos que o período é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \implies T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

e isolando  $g$  obtemos

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}. \quad (5.22)$$

Assim, basta calcular o período do pêndulo anotando quanto tempo o mesmo demora para retornar a sua posição inicial, e substituir na fórmula.

Para exemplificar, considere a mesmo aparato experimental utilizado onde  $L = 0,8$  metros e desloque o pêndulo da sua posição de equilíbrio por um pequeno ângulo (aproximadamente  $10^\circ$ ) e solte-o. Meça o tempo que o pêndulo leva para realizar 10 oscilações completas. Você obterá um valor próximo de  $T_{10} = 19$  s. Com esse valor, encontre o período médio,

$$\bar{T} = \frac{T_{10}}{10} = \frac{19}{10} = 1,9.$$

Assim, levando os valores de  $L$  e  $\bar{T}$  na Equação (5.22), obtemos

$$g = \frac{4\pi^2(0,8)}{(1,9)^2} \approx 9,84226,$$

que apresenta um erro percentual de 0,58%, considerando que a aceleração da gravidade em Rio Claro é de 9,78585.

No próximo capítulo trataremos algumas considerações após esse estudo realizado.



---

## Considerações Finais

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) desempenham um papel crucial em diversos campos, desde a descrição da queda de corpos até a análise de circuitos elétricos, como os circuitos RC. A aplicação dessas equações permite uma compreensão do comportamento dinâmico de sistemas complexos, proporcionando uma ponte entre a teoria matemática e a prática científica e tecnológica.

No contexto da queda de corpos, as EDOs são fundamentais para modelar a relação entre a posição, a velocidade e o tempo durante o movimento sob a influência da gravidade e da resistência do ar. Essas equações não apenas descrevem o fenômeno de maneira precisa, mas também fornecem ferramentas valiosas para prever e entender os diferentes aspectos do movimento de queda.

Ao adentrarmos o universo dos circuitos elétricos, especialmente nos circuitos RC, as EDOs surgem novamente como ferramentas indispensáveis. Elas permitem modelar e compreender como as correntes e as tensões variam ao longo do tempo, contribuindo para o projeto e a otimização de sistemas eletrônicos complexos. A capacidade de antecipar e controlar as mudanças em um circuito é fundamental para garantir seu desempenho eficiente e confiável.

No estudo do pêndulo, a Equação Diferencial Ordinária (EDO) desempenha papel importante na descrição do movimento oscilatório do sistema. Como um sistema físico concreto, o pêndulo não apenas ilustra os princípios de conservação de energia e movimento harmônico simples, mas também serve como instrumento para explorar conceitos desde a Física básica até aplicações avançadas, evidenciando sua relevância na pesquisa.

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, explorando sua aplicação na modelagem de fenômenos físicos clássicos, como esses citados anteriormente. Além de abordar conceitos teóricos fundamentais, como o Teorema de Existência e Unicidade e os métodos de Aproximações Sucessivas e de Picard-Lindelöf, o trabalho destaca a validação experimental desses modelos utilizando ferramentas acessíveis, como o software Tracker. Esta abordagem tem impacto significativo no ensino e na compreensão de fenômenos dinâmicos, fornecendo uma abordagem prática e didática para integrar teoria e aplicação em áreas como Física, Engenharia e Matemática Aplicada, além de inspirar novas investigações em modelagem matemática.

Portanto, ao considerar as aplicações em queda de corpos e circuitos RC, podemos afirmar que as EDOs são instrumentos versáteis, capazes de desvendar os mistérios do movimento eletrodinâmico em diversos cenários. Sua aplicação transcende barreiras disciplinares, proporcionando uma abordagem unificada para entender e resolver problemas complexos em Física. Ao

integrar a matemática das EDOs com as realidades práticas desses fenômenos, ampliamos nosso entendimento do mundo ao nosso redor e impulsionamos inovações nas mais diversas áreas do conhecimento.

---

---

# Referências

- [1] MARION, J.B. e THORNTON, S.T., *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*. São Paulo, Cengage Learning (2004).
- [2] BOYCE, W.E. and DIPRIMA R.C. *Elementary differential equations and boundary value problems*. 9th Edition, John Wiley & Sons (2009).
- [3] ZILL, D.G. e CULLEN, R.C., *Equações Diferenciais- Volume 1*. Pearson Makron Books, São Paulo (2001).
- [4] BASSANEZI, R.C. e FERREIRA JR., W.C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. Editora Harbra, São Paulo (1988).
- [5] Keshet, L. E. *Mathematical Models in Biology*, Random House, New York (1988).
- [6] BRAUN, M., *Differential equations and their applications*. Springer-Verlag, New York (1941).
- [7] ZILL, D.G. e CULLEN, R.C., *Equações Diferenciais - Volume 2*. Pearson Makron Books, São Paulo (2001).
- [8] FIGUEIREDO, D.G. e NEVES, A.F., *Equações Diferenciais Aplicadas*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (2008).
- [9] ANTON, H., BIVENS, I. e STEPHEN, D., *Cálculo*. Bookman, Porto Alegre (2007).
- [10] GUIDORIZZI, H.L. *Um Curso de Cálculo*. 5a. edição, LTC Editora, (2001).
- [11] J. C. A. BARATA, *Notas para um Curso de Física-Matemática*, Notas de Aula, 2018.
- [12] DOMINGUES, H.H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Atual Editora, IMPA, São Paulo, 1982.
- [13] C. R. OLIVEIRA, *Introdução à Análise Funcional*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [14] G. F. SIMMONS, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1963.
- [15] J. B. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [16] Y. EIDELMAN, V. MILMAN e A. TSOLOMITIS, *Functional Analysis: An Introduction*, American Mathematical Society, 1955.

- [17] M. ELEKE, “On a converse to Banach’s Fixed Point Theorem”, arXiv:1108.5920v1, August 31, (2011).
- [18] S. BANACH, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales*. Fund. Math. **3**, 133–181 (1922).
- [19] CHESMAN C., CAVALCANTI-NETO M., FURTADO C. B. S. *Força de Coriolis e as grandes navegações do século XV*. Rev Bras Ensino Fís. **45**, e20220260 (2022).
- [20] AGUIAR C.E., RUBINI G. *A aerodinâmica da bola de futebol*. Rev Bras Ensino Fís **26**, 297–306. (2004).
- [21] MILLIKAN R. A. *The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of Its Charge, and the Correction of Stokes’s Law*. Science. **32**:822, 436–448 (1910)
- [22] MILLIKAN R. A. *On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant*. Phys. Rev. **2**, 109 (1913)
- [23] FOX R.W., McDONALD A. T., P.J. PRITCHARDE J.W. MICHTELL, *Introdução à mecânica dos fluidos* (Editora LTC, Rio de Janeiro, 1998), 4ª ed.
- [24] KROETZ T., *O efeito da "crise do arrasto" no mergulho de altura*. Rev. Bras. Ensino Fís. **35**, 3308 (2013).
- [25] ROSSINI M., ALVES M.J.A, AMORIN L.H. e FILHO P.S.C., *Estudo da influência do ar no movimento de queda dos corpos: uma comparação entre a previsão teórica e os dados experimentais usando o Tracker*. Rev. Bras. Ensino Fís. **42**, 0209 (2020).
- [26] NUSSENZVEIG H.M., *Curso de Física Básica 3: Eletromagnetismo*, Blucher, São Paulo, 2013.



## Algumas Definições Envolvendo Espaço Métricos

Neste apêndice, apresentamos as principais definições relacionadas a espaços métricos, proporcionando ao leitor sem familiaridade com a teoria uma base para compreender os conceitos utilizados na demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de Picard-Lindelöf. Caso o leitor queira se aprofundar no assunto, sugerimos as referências [11, 12].

Desde tempo remotos, a ideia de distância sempre foi crucial, seja para avaliar a dimensão de objetos e territórios, ou para entender a distinção entre pontos no espaço. Um ponto importante a se levar em conta é quais são as características essenciais que a noção intuitiva de distância precisa possuir. A evolução da Matemática resultou na identificação desses componentes em quatro propriedades, que englobam tudo o que é necessário para comprovar resultados que utilizam a noção de distância. Com base nisso, emergiu a definição matemática de métrica, que amplia e desvincula a percepção intuitiva de distância.

**Definição A.1 — Métrica.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de métrica em  $X$  se satisfizer as seguintes propriedades:

1. **Positividade:**  $d(a, b) \geq 0$  para todos  $a, b \in X$ .
2. **Condicionabilidade de distância nula:**  $d(a, b) = 0$  se e somente se  $a = b$ .
3. **Simetria:** Para todos  $a, b \in X$ , temos  $d(a, b) = d(b, a)$ .
4. **Desigualdade triangular:** Para todos  $a, b, c \in X$ , vale  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$ .

A quarta propriedade, especificamente, é crucial e é conhecida como desigualdade triangular por seu significado geométrico nos espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  utilizando a métrica convencional  $d_2(x, y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2}$ , onde  $x = (x_1, \dots, x_m)$  e  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . As quatro características mencionadas são as que foram reconhecidas como fundamentais para a percepção intuitiva de distância. Qualquer função  $d$  que atenda a essas características, isto é, qualquer métrica, pode ser empregada como uma extensão da noção intuitiva de distância.

No entanto, as condições de simetria e positividade mencionadas anteriormente são, na realidade, decorrentes da desigualdade triangular e da suposição de que  $d(a, b) = 0$  apenas se  $a = b$  for verdadeiro.

Suponhamos que a desigualdade  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$  seja válida para todos  $a, b, c \in X$ . Então, ao tomarmos  $c = a$ , obtemos que  $d(a, b) \leq d(b, a)$ . Se trocarmos as variáveis  $a$  e  $b$ , temos  $d(b, a) \leq d(a, b)$ , e, portanto, concluímos que  $d(b, a) = d(a, b)$  para todo par de elementos  $a, b \in X$ , estabelecendo a simetria.

Além disso, ao usarmos a simetria junto com a desigualdade triangular, conseguimos derivar

a condição de positividade. Na verdade, é possível demonstrar um resultado mais forte: para todos  $x, y, z \in X$ , temos a seguinte desigualdade:

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

que, em particular, garante que  $d(x, y) \geq 0$ . A demonstração é a seguinte: pela desigualdade triangular e pela simetria, sabemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

portanto,

$$d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z). \quad (\text{A.1})$$

Substituindo  $x$  por  $y$  e, utilizando a simetria, obtemos também

$$d(x, y) = d(y, x) \geq d(y, z) - d(x, z). \quad (\text{A.2})$$

As relações (A.1) e (A.2) mostram que  $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|$ , como desejado.

Com isso, podemos reduzir a definição de métrica às seguintes condições:

**Definição A.2 — Métrica (Versão Compacta).** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de métrica em  $X$  se satisfizer as seguintes propriedades:

1. **Condição de distância nula:**  $d(a, b) = 0$  se e somente se  $a = b$ .
2. **Desigualdade triangular:** Para todo  $a, b, c \in X$ , temos  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$ .

A inclusão das condições de positividade e simetria é redundante, sendo mencionada apenas para ressaltar a importância dessas propriedades.

Com base em uma métrica, podemos definir um conjunto no qual a noção de distância é dada por essa métrica.

**Definição A.3 — Espaço Métrico.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $d$  uma métrica em  $X$ . Dizemos que o par  $(X, d)$  é um espaço métrico, ou seja, um espaço métrico é um conjunto acompanhado de uma métrica.

Agora, vamos estudar como as sequências convergem em espaços métricos. Porém, antes disso, vamos lembrar esses conceitos.

**Definição A.4 — Sequência.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma função  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$  é chamada de sequência em  $X$  e representada como  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Observação A.1.** Note que utilizamos  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para denotar a sequência, se quisermos nos referir a um elemento específico da posição  $n$ , utilizamos apenas  $a_n$ .

**Definição A.5 — Subsequência.** Dada uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ , considere uma sequência crescente de índices  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . A nova sequência  $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$  é chamada de subsequência de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

De uma maneira mais simples, podemos dizer que uma subsequência é uma sequência obtida da sequência original, na qual foram selecionados infinitos termos, mas não necessariamente todos.

**Definição A.6 — Convergência de uma sequência.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Dizemos que uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X$  converge para um ponto  $x \in X$  em relação à métrica  $d$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um número natural  $N(\varepsilon)$  (que pode depender de  $\varepsilon$ ) tal que  $d(x, a_n) < \varepsilon$  para todo  $n > N(\varepsilon)$ . Nesse caso, afirmamos que  $x$  é o limite de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e denotamos isso por  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Além disso, em um espaço métrico, uma sequência pode convergir para no máximo um único ponto, garantindo a unicidade do limite.

**Proposição A.0.1** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $X$ . Suponha que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $x \in X$  e para  $y \in X$ . Então,  $x = y$ .

*Demonstração.* Como  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $x$ , sabemos que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $N_x(\varepsilon)$  tal que

$$d(x, a_n) < \varepsilon \text{ para todo } n > N_x(\varepsilon).$$

Analogamente, como  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $y$ , sabemos que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $N_y(\varepsilon)$  tal que

$$d(y, a_n) < \varepsilon \text{ para todo } n > N_y(\varepsilon).$$

Assim, utilizando a desigualdade triangular temos que para  $n > \max\{N_x(\varepsilon), N_y(\varepsilon)\}$ , segue

$$d(x, y) \leq d(x, a_n) + d(a_n, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

ou seja,

$$d(x, y) < 2\varepsilon$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, essa desigualdade só pode ser verdadeira se  $d(x, y) = 0$ . Como  $d$  é uma métrica, isso implica que  $x = y$ . ■

Vamos agora introduzir uma classe específica de sequências denominadas *sequência de Cauchy*.

**Definição A.7 — Sequência de Cauchy.** Seja  $X$  um espaço métrico com uma métrica  $d$ . Uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $X$  é dita ser uma sequência de Cauchy em relação à métrica  $d$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um número natural  $N(\varepsilon)$  (que pode depender de  $\varepsilon$ ) tal que  $d(a_m, a_n) < \varepsilon$  para todo  $m$  e  $n$  tais que  $m > N(\varepsilon)$  e  $n > N(\varepsilon)$ .

A importância das sequência de Cauchy se dá pelo resultado a seguir.

**Proposição A.0.2** Seja  $X$  um espaço métrico com uma métrica  $d$  e seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência convergente em relação à métrica  $d$  para um ponto  $x \in X$ . Então,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em relação à métrica  $d$ .

*Demonstração.* Sejam  $m$  e  $n$  arbitrários. Como  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $x$ , sabemos que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um número natural  $N(\varepsilon/2)$  tal que, para  $n, m > N(\varepsilon/2)$ , temos

$$d(a_n, x) < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad d(a_m, x) < \varepsilon/2.$$

Assim, pela desigualdade triangular, temos

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, x) + d(x, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

finalizando assim a demonstração. ■

A Figura A.1 ilustra geometricamente a definição da sequência de Cauchy.

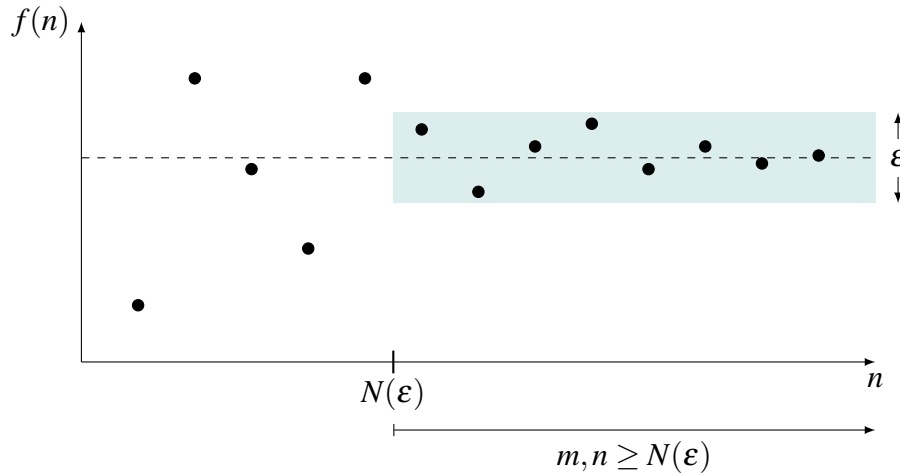


Figura A.1 – Ilustração da definição sobre a sequência de Cauchy

Agora, surge a questão se a recíproca da proposição A.0.2 é válida. Em outras palavras, todas as sequências de Cauchy em um espaço métrico são convergentes? A importância deste problema está no fato de que, dada uma sequência específica  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço métrico  $X$ , não temos certeza antecipada se  $x_n$  converge ou não. A menos que descubramos um elemento  $x \in X$  que atenda à propriedade desejada, ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$ , exista um número  $N(\varepsilon)$ . Nem sempre é simples ou viável identificar claramente tal  $x$ , e gostaríamos de possuir um critério baseado apenas nas propriedades verificáveis da sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , que nos permitisse avaliar se ela converge ou não. A propriedade de ser uma sequência de Cauchy é exclusiva da sequência, portanto, devido à Proposição A.0.2, ela se destaca como um forte candidato ao critério de convergência.

No entanto, a resposta para a questão acima é geralmente negativa: há espaços métricos onde existem sequências de Cauchy que não convergem. Assim os espaços métricos onde a recíproca da Proposição A.0.2 é válida são de grande relevância e tais espaços são conhecidos como completos.

**Definição A.8 — Espaço Métrico Completo.** Seja  $X$  um espaço métrico com uma métrica  $d$ . Dizemos que o espaço métrico  $X$  é completo em relação à métrica  $d$  se toda sequência de Cauchy em  $X$  convergir para um elemento de  $X$ .

Portanto, em um espaço métrico completo, para garantir que uma sequência converge, basta verificarmos se ela é de Cauchy e como essa propriedade pode ser verificada analisando apenas as propriedades da sequência, torna adotar esse procedimento como sendo uma grande vantagem. Dessa maneira, dada uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço métrico completo  $X$ , para sabermos se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, não é necessário determinar diretamente o limite da sequência, basta verificar se a sequência é de Cauchy, o que pode ser feito simplesmente analisando a distância entre os elementos de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## APÊNDICE

# B

## Dados dos experimentos

Neste apêndice trazemos todos os dados experimentais que foram captados para o trabalho.

Tabela B.1 – Dados experimentais da queda livre de um corpo esférico de isopor.

<b>Tempo (s)</b>	<b>Velocidade (m/s)</b>
0,035	0,083
0,068	0,358
0,100	0,700
0,134	0,960
0,166	1,269
0,199	1,508
0,233	1,740
0,266	2,100
0,297	2,302
0,332	2,487
0,365	2,769
0,399	3,052
0,434	3,170
0,464	3,277
0,500	3,486
0,532	3,671
0,565	3,725
0,598	3,766
0,632	3,952
0,666	4,069
0,699	4,232
0,733	4,206
0,764	4,263
0,799	4,425
0,832	4,559

Tabela B.2 – Dados experimentais da queda livre de um corpo esférico de plástico.

<b>Tempo (s)</b>	<b>Velocidade (m/s)</b>		
		0,351	4,002
0,004	0,633	0,361	4,102
0,023	0,584	0,369	4,166
0,043	0,998	0,378	4,233
0,051	1,012	0,385	4,283
0,059	1,074	0,411	4,587
0,068	1,175	0,420	4,659
0,076	1,222	0,427	4,716
0,084	1,312	0,436	4,824
0,092	1,430	0,445	4,893
0,100	1,500	0,452	4,948
0,108	1,599	0,461	5,029
0,116	1,712	0,469	5,126
0,124	1,781	0,478	5,194
0,132	1,868	0,486	5,259
0,140	1,990	0,494	5,341
0,148	2,073	0,503	5,421
0,156	2,136	0,510	5,448
0,165	2,192	0,517	5,573
0,173	2,248	0,526	5,713
0,182	2,317	0,534	5,753
0,203	2,599	0,541	5,805
0,211	2,648	0,550	5,914
0,219	2,719	0,559	5,974
0,228	2,806	0,627	6,504
0,236	2,879	0,633	6,667
0,243	2,957	0,641	6,765
0,250	3,090	0,652	6,592
0,258	3,160	0,033	0,740
0,266	3,227	0,192	2,476
0,276	3,317	0,394	4,478
0,284	3,399	0,584	6,128
0,292	3,459	0,574	6,306
0,301	3,522	0,566	6,407
0,311	3,609	0,609	6,597
0,319	3,684	0,600	6,483
0,327	3,762	0,593	6,458
0,335	3,884	0,616	6,534
0,344	3,949	0,400	4,609

Tabela B.4 – Dados do processo de carga do circuito RC.

<b>Tempo (s)</b>	<b>Voltagem (V)</b>
0	0.00
5	0.39
10	0.77
15	1.12
20	1.40
25	1.65
30	1.85
35	2.04
40	2.19
45	2.33
50	2.44
55	2.53
60	2.62
65	2.70
70	2.76
75	2.81
80	2.85
85	2.89
90	2.93
95	2.96
100	2.99
105	3.01
110	3.03
115	3.04
120	3.05
125	3.06
130	3.07
135	3.08
140	3.09
145	3.10
150	3.11
155	3.11
160	3.11
165	3.12
170	3.13
175	3.14
180	3.15

Tabela B.5 – Dados do processo de descarga do circuito RC.

<b>Tempo (s)</b>	<b>Voltagem (V)</b>
0	3.10
5	2.70
10	2.32
15	1.98
20	1.71
25	1.46
30	1.26
35	1.06
40	0.93
45	0.79
50	0.67
55	0.58
60	0.49
65	0.42
70	0.36
75	0.31
80	0.27
85	0.23
90	0.20
95	0.17
100	0.15
105	0.13
110	0.11
115	0.09
120	0.08
125	0.06
130	0.05
135	0.04
140	0.04
145	0.03
150	0.03
155	0.02
160	0.02
165	0.02
170	0.02
175	0.02
180	0.01

Tabela B.6 – Dados do movimento do pêndulo: tempo e posição horizontal.

Tempo (s)	Ângulo (°)		
0.0	15.55549	3.912256	4.621459
0.1007333	13.21117	4.013011	-0.9920397
0.2014667	9.27951	4.113744	-6.609045
0.3022	4.076401	4.214478	-11.42185
0.4030444	-1.604777	4.315211	-14.90237
0.5037778	-7.33583	4.415944	-16.62909
0.6045111	-12.14084	4.516678	-16.34798
0.7052444	-15.52912	4.600622	-14.65514
0.8059778	-17.06152	4.701356	-11.03792
0.9067111	-16.56014	4.802089	-6.109953
1.007444	-14.11051	4.902822	-0.5130945
1.108178	-10.01151	5.003556	5.07757
1.208911	-4.757551	5.1044	9.925261
1.309644	0.9438419	5.205133	13.4937
1.410378	6.487536	5.4066	15.33706
1.511111	11.22184	5.507333	13.50451
1.611844	14.37089	5.608067	10.009
1.712689	15.79897	5.7088	5.226678
1.813422	15.32524	5.809533	-0.2729015
1.914156	12.96816	5.910378	-5.840679
2.014889	8.994276	6.011111	-10.77152
2.115622	3.834142	6.111844	-14.44508
2.216356	-1.722454	6.212578	-16.39343
2.3003	-6.52732	6.313311	-16.37904
2.401033	-11.43318	6.414044	-14.45632
2.501767	-14.99063	6.514778	-10.80847
2.6025	-16.77605	6.615511	-5.880896
2.703344	-16.56435	6.716244	-0.372071
2.804078	-14.39954	6.800189	4.264564
2.904811	-10.51271	6.900922	9.202873
2.9216	-9.727207	7.001767	12.9214
3.005544	-5.37951	7.1025	15.00782
3.106278	0.298991	7.203233	15.32587
3.207011	5.880409	7.303967	13.76057
3.307744	10.64923	7.4047	10.50722
3.408478	14.02004	7.505433	5.853585
3.509211	15.67821	7.606167	0.4534517
3.610056	15.41856	7.7069	-5.134875
3.710789	13.3513	7.807633	-10.11769
3.811522	9.6085	7.908478	-13.92579
		8.009211	-16.12905