



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Transição de fase de difusão ilimitada para limitada em um sistema dissipativo

Lucas Kenji Arima Miranda

Rio Claro - SP

2023



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Lucas Kenji Arima Miranda

Transição de fase de difusão ilimitada para limitada em um sistema dissipativo

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física. **Orientador:** Prof. Dr. Edson Denis Leonel.

Rio Claro - SP

2023

M672t Miranda, Lucas Kenji Arima
Transição de fase de difusão ilimitada para limitada em um sistema
dissipativo / Lucas Kenji Arima Miranda. -- Rio Claro, 2023
58 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas não lineares. 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3.
Transições de fase (Física estatística). I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

LUCAS KENJI ARIMA MIRANDA

TRANSIÇÃO DE FASE DE DIFUSÃO ILIMITADA PARA LIMITADA EM UM SISTEMA DISSIPATIVO

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Júlio
de Mesquita Filho”, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

Comissão Examinadora
Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. MAKOTO YOSHIDA
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. RONALD DICKMAN
ICEx / UFMG/Belo Horizonte (MG)
Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 5 de abril de 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço do fundo do coração por toda oportunidade, atenção, apoio e cuidado atribuído por meu orientador, Prof. Edson Denis Leonel. Sou muitíssimo grato por toda participação e presença dentro de meu rumo acadêmico e em minha vida.

Sou eternamente grato a minha família, minha mãe; meu pai e; meu irmão, por todo apoio direto, ou indiretamente me atribuído. Jamais teria sido capaz de realizar tais feitos sem a ajuda e apoio de todos.

RESUMO

Utilizando a metodologia e o formalismo apresentado sobre o estudo de transição de fase de integrabilidade para não integrabilidade do mapeamento conservativo, caracteriza-se uma transição de fase para o mapeamento padrão dissipativo que é a transição de fase de difusão ilimitada para limitada. Neste trabalho discutimos sobre o modelo estudado e suas principais propriedades dinâmicas, em especial, as características presentes em seu espaço de fases. A invariância de escala do sistema é identificada. A difusão caótica de partículas no espaço de fases é descrita através de duas diferentes metodologias: I) descrição fenomenológica a partir de simulações numéricas, incluindo a abordagem dos expoentes críticos e a lei de escala e; II) analítica a partir da solução da equação da difusão. Respondemos também a quatro perguntas essenciais que levam a caracterização de uma transição de fase: (1) identificar a quebra de simetria na transição de fase; (2) definir o parâmetro de ordem; (3) definir quais seriam as excitações elementares e; (4) identificar os defeitos topológicos que prejudicam o transporte de partículas.

Palavras-chave: Caos; Transição de fase; Sistemas dinâmicos, Difusão caótica; Mapeamento padrão.

ABSTRACT

Using both methodology and formalism presented on the study of phase transition from integrability to non-integrability of the conservative mapping, we characterized a phase transition for the dissipative standard mapping which is the transition from unlimited to limited diffusion. In this work we discuss the model and its main dynamical properties, in particular, the features present in its phase space. The scale invariance of the system is identified. The chaotic diffusion of particles in the phase space is described by two different methodologies: I) a phenomenological description using numerical simulations, including the approach of critical exponents and scaling laws and; II) analytical through the solution of the diffusion equation. We also answer the four main questions that lead to the characterization of a phase transition: (1) identify the broken symmetry of the phase transition; (2) set the order parameter and its susceptibility; (3) define what would be the elementary excitations and; (4) identify the topological defects that impact on the transport of the particles.

Keywords: Chaos; Phase transition; Dynamical systems; Chaotic diffusion; Standard mapping.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Sistemas dinâmicos, caos e transições de fase	7
1.2	Organização do trabalho	9
2	Sobre o modelo estudado	11
2.1	Modelo físico e o mapeamento padrão	11
2.2	Mapeamento padrão conservativo	14
2.2.1	Preservação de área no espaço de fases	17
2.3	Mapeamento padrão dissipativo	18
2.3.1	Contração de área no espaço de fases	20
2.4	Expoentes de Lyapunov	20
3	Descrição da difusão caótica de partículas no espaço de fases	26
3.1	Abordagem fenomenológica e análise de escalas	26
3.1.1	Análise de escala para γ constante	28
3.1.2	Análise de escala para ϵ constante	34
3.2	Caracterização analítica e solução da equação da difusão	38
3.3	Comparação entre as metodologias e a invariância de escala	46
4	Um <i>insight</i> sobre a transição de fase	49
4.1	(1) Quebra de simetria	49
4.2	(2) Parâmetro de ordem	50
4.3	(3) Excitações elementares	51
4.4	(4) Defeitos topológicos	52
5	Discussões e conclusão	53
6	Referências Bibliográficas	55

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro Capítulo são introduzidos os conceitos básicos sobre sistemas dinâmicos e caos, descrevendo algumas de suas principais características. É abordado também uma breve caracterização das transições de fases de forma a conectar como este estudo será aplicado neste trabalho.

1.1 Sistemas dinâmicos, caos e transições de fase

Por volta dos séculos XV e XVI, após as primeiras buscas sobre os sistemas dinâmicos, Isaac Newton, utilizando o formalismo de leis matemáticas juntamente ao de equações do movimento, introduziu o conceito de um sistema evoluindo no tempo [1,2]. Esta ideia guiou a física para um novo conceito que hoje é conhecido como “sistemas dinâmicos”. Um sistema dinâmico descrito por leis e equações matemáticas nos diz que, a partir do conhecimento de um estado configuracional inicial x_0 , dado em um instante t_0 , torna-se possível a obtenção de qualquer estado subsequente a este para qualquer tempo $t > t_0$. Portanto, um sistema dinâmico refere-se essencialmente a “mudanças” [3], de fato, um sistema que evolue no tempo. De forma geral, estes sistemas podem ser classificados como lineares e não lineares. Os lineares são em sua grande parte identificados por possuírem potências de primeira ordem em suas equações matemáticas dinâmicas. Já os não lineares são aqueles que apresentam ordens diferentes de 1 em suas equações, bem como aqueles descritos por funções do tipo seno, cosseno, exponenciais, logarítmicas e entre outras funções não lineares.

No contexto histórico, Henri Poincaré [4] foi responsável pela grande revolução sobre os estudos dos sistemas dinâmicos. Trazendo um pensamento mais qualitativo sobre estes sistemas, questionou a duração da estabilidade dos corpos presentes no sistema solar [3]. Assim, verificou também a sensibilidade às condições iniciais e como esta impactaria em toda evolução do sistema estudado para tempos grandes. Este conjunto de ideias resultou

na ascensão de um moderno assunto da dinâmica, cujas aplicações estão muito além do estudo da mecânica celeste, o estudo sobre **Caos**.

Com a criação dos computadores de alta velocidade, em meados de 1950, foi permitido a experimentação com modelos de equações que jamais seriam possíveis anteriormente. Este fato levou Edward Lorenz [5] a descobrir, em 1963, o movimento caótico de um “atrator estranho” em sua tentativa de entender fenômenos meteorológicos de longa duração. Desta forma, Lorenz verificou em seus trabalhos que a solução de suas equações oscilavam de maneira irregular e não periódica. Posteriormente confirmou a sensibilidade às condições iniciais (conceito atual já conhecido), percebendo que simulações com duas condições iniciais infinitesimalmente próximas levavam a resultados imensamente distantes, concluindo assim que os fenômenos meteorológicos seriam intrinsecamente imprevisíveis, pois pequenos erros nas medidas dos estados atuais da atmosfera resultariam em previsões completamente errôneas. Este último resultado recebeu o nome popular de “efeito borboleta” (sensibilidade às condições iniciais).

Lorenz apresentou uma marcante estrutura no que diz respeito ao estudo de caos: conforme suas soluções de equações eram graficadas no plano, estas trariam um formato similar a de asas de uma borboleta, como pode ser observado pela Figura 1.1. Este ficou conhecido como o **atrator de Lorenz**.

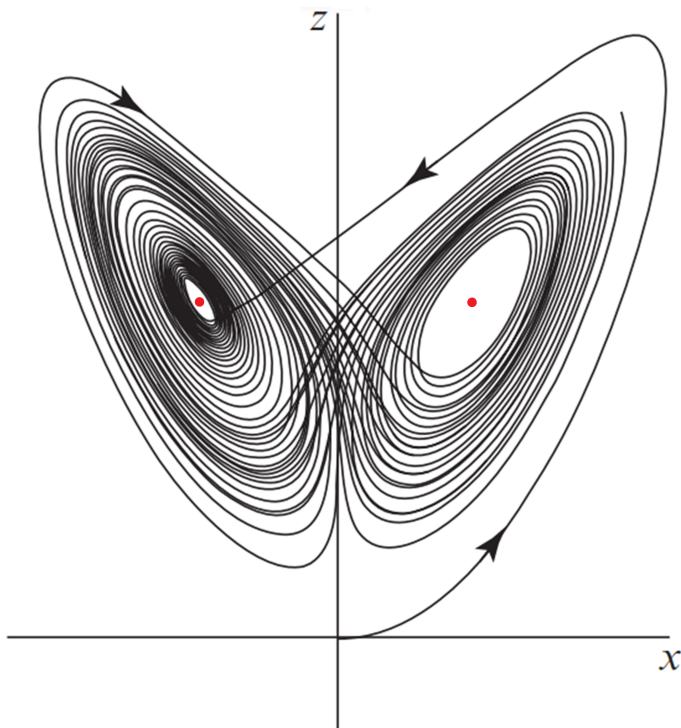


Figura 1.1: Ilustração do atrator de Lorenz em um plano bidimensional. Imagem extraída e modificada da Ref. [3].

Em determinados sistemas, como por exemplo os fluidos, a densidade e viscosidade são parâmetros que podem colaborar com termos não lineares em suas equações dinâmicas. Conforme será observado neste trabalho, a modificação destes parâmetros de controle, em uma criticalidade específica, poderá levar o sistema a uma transição de fase. Uma transição de fase é facilmente identificada por uma mudança, às vezes abrupta, de propriedades entre estados dinâmicos de um sistema, ou mesmo, nas estruturas espaciais deste [6, 7]. Os fluidos clássicos constituem os exemplos mais familiares de transições de fases, tais como: vapor-líquido; vapor-sólido; líquido-sólido e; entres outras.

As transições de fases podem ser classificadas em duas no que diz respeito ao comportamento das derivadas da energia livre de Gibbs [8, 9]. As transições que são acompanhadas por uma descontinuidade nas derivadas de primeira ordem da energia livre do sistema são chamadas de transições de fase de primeira ordem. Já aquelas que são acompanhadas por descontinuidades de ordens superiores a 1 são denominadas transições de fase contínuas.

Neste trabalho utilizaremos o formalismo proposto na Ref. [10], que caracteriza uma transição de fase a partir de uma análise feita sobre quatro perguntas essenciais para esta descrição: (1) qual é a quebra de simetria do sistema; (2) qual é o parâmetro de ordem; (3) quem são as excitações elementares e; (4) quais são os defeitos topológicos que impactam no transporte de partículas.

1.2 Organização do trabalho

Primeiramente, no Capítulo 2 discute-se sobre o modelo físico estudado e também a obtenção do mapeamento final de estudo. Este mapeamento é dividido em dois grandes tópicos: o mapeamento padrão conservativo e; o mapeamento padrão dissipativo. São abordadas as possíveis transições conforme a variação de seus parâmetros de controle. As condições caóticas dos sistemas são apresentadas através do cálculo dos expoentes de Lyapunov. No Capítulo 3 são abordadas duas diferentes metodologias para a caracterização da difusão caótica de partículas no espaço de fases, sendo elas: uma abordagem fenomenológica a partir de simulações numéricas aliadas a um conjunto de hipóteses de escala e a uma função homogênea generalizada conduzindo assim a um conjunto de expoentes críticos que definem o comportamento das curvas de I_{rms} responsáveis por caracterizar esta difusão e; a outra uma descrição analítica a partir da solução da equação da difusão fornecendo assim a densidade de probabilidade de se observar uma partícula com uma determinada ação I em um instante de tempo n . A invariância de escala é confirmada e as duas metodologias são comparadas a fim de reforçar o sucesso deste formalismo. No Capítulo 4 as quatro perguntas essenciais que levam a caracterização de uma transição de fases são respondidas. Por fim, no Capítulo 5 é abordada uma discussão geral sobre os

principais resultados obtidos neste trabalho, concluindo a descrição da transição de fase observada para o mapeamento estudado.

Capítulo 2

Sobre o modelo estudado

Neste capítulo são discutidos os principais aspectos sobre o modelo físico estudado bem como a obtenção do mapeamento final que será posteriormente investigado. O mapeamento em questão é subdividido em dois grandes tópicos: o mapeamento padrão conservativo e; o mapeamento padrão dissipativo. Dentre eles são abordadas todas as possíveis transições conforme a variação de seus parâmetros de controle. As condições caóticas dos sistemas serão apresentadas através do cálculo dos expoentes de Lyapunov.

2.1 Modelo físico e o mapeamento padrão

O mapeamento padrão pode ser obtido por diferentes interpretações de sistemas físicos sobre efeito de oscilações periódicas e não lineares [11]: pêndulo simples sobre ação de pulsos periódicos; movimento de uma partícula carregada em uma garrafa magnética; rotor pulsado e; em diferentes outros tipos de sistemas oscilatórios não lineares. Para introduzirmos este mapeamento, tomaremos como exemplo o rotor pulsado [12]. Este sistema representa um modelo de barra rígida, cujo comprimento é L e o seu momento de inércia é I . Uma das extremidades desta barra é fixa em um pivô sem atrito, como pode ser visto pela Figura 2.1.

Neste modelo não é considerada a ação gravitacional, contudo a outra extremidade do bastão (não fixa), está sujeita a uma força vertical e periódica de intensidade K/L e período T . A expressão Hamiltoniana para este sistema pode ser dada através de duas variáveis canônicas: o *momentum* angular p e a posição angular da barra θ , desta forma temos que

$$H(p, \theta, t) = \underbrace{\frac{p^2}{2I}}_{\text{Cinética}} + \underbrace{K \cos(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)}_{\text{Potencial}}, \quad (2.1)$$

em que $\delta(t - nT)$ é a função delta de Dirac. Visto que a expressão (2.1) é periódica no

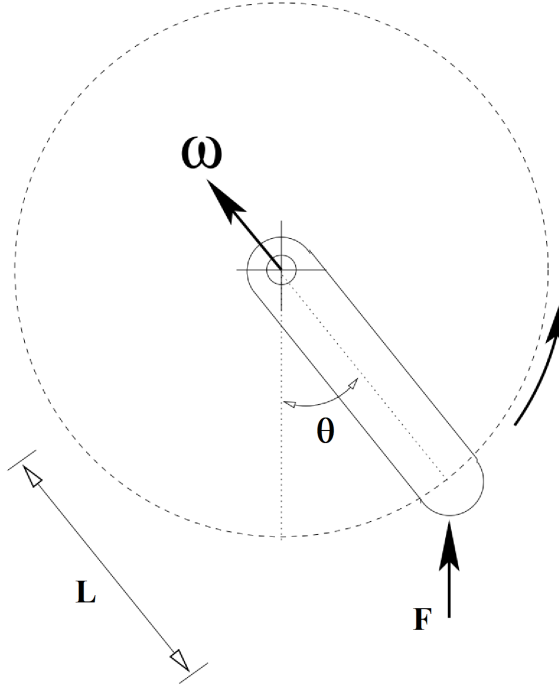


Figura 2.1: Esquema para o rotor pulsado. Figura retirada e editada de [12]

tempo e em θ , portanto $H(p, \theta + 2\pi, t) = H(p, \theta, t)$ e também que não depende explicitamente do tempo, temos então que H é conservativo. Portanto, as equações de Hamilton podem ser dados por

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2.3)$$

consequentemente, teremos

$$\dot{p} = K \sin(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.4)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p}{I}. \quad (2.5)$$

As equações (2.4) e (2.5) são as equações do movimento para a Hamiltoniana (2.1) a serem resolvidas. A ideia aqui é transformar esse fluxo tridimensional da Hamiltoniana em um fluxo bidimensional no espaço de fases através de uma discretização destas soluções, a conhecida superfície de seção de Poincaré [13]. A Equação (2.1) nos mostra que H apresenta um fluxo de soluções 3-D em p , θ e t , desta forma, a superfície de seção de Poincaré conveniente é do tipo $t_n = t_0 + nT$, com $t_0 \in [0, T]$, visto que H depende periodicamente do tempo. Definindo então: p_n e θ_n variáveis do sistema imediatamente

anterior ao n -ésimo pulso; p_n^* e θ_n^* variáveis no instante imediatamente posterior ao n -ésimo pulso e; p_{n+1} e θ_{n+1} as variáveis que representam os estados discretos seguintes do sistema, podemos escrever as seguintes considerações [12]:

$$\begin{aligned} p_n &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = nT - \varepsilon), \\ p_n^* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = nT + \varepsilon), \\ p_{n+1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(t = (n+1)T - \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned} \theta_n &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(t = nT - \varepsilon), \\ \theta_n^* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(t = nT + \varepsilon), \\ \theta_{n+1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(t = (n+1)T - \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Em que ε é uma variável de discretização (e em seu limite infinitesimalmente pequena). Primeiramente, integrando as Equações (2.4) e (2.5) no intervalo $nT + \varepsilon < t < (n+1)T - \varepsilon$, ou seja, imediatamente após o pulso até o próximo estado configuracional do sistema $(n+1)$ e aplicando os limites $\varepsilon \rightarrow 0$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [p((n+1)T - \varepsilon) - p(nT + \varepsilon)] &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\theta((n+1)T - \varepsilon) - \theta(nT + \varepsilon)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{p(nT + \varepsilon)}{I} (T - 2\varepsilon) \right], \end{aligned}$$

portanto, utilizando as definições (2.6) e (2.7) obtemos

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n^* \\ \theta_{n+1} = \theta_n^* + \frac{T}{I} p_n^* \end{cases}. \quad (2.8)$$

Realizando o mesmo processo, contudo, para o intervalo $nT - \varepsilon < t < nT + \varepsilon$, ou seja, imediatamente antes do pulso até o estado imediato após o pulso temos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [p(nT + \varepsilon) - p(nT - \varepsilon)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [K \sin(\theta(nT - \varepsilon))], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\theta(nT + \varepsilon) - \theta(nT - \varepsilon)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{p(nT + \varepsilon)}{I} (2\varepsilon) \right], \end{aligned}$$

desta forma, utilizando novamente as condições (2.6) e (2.7) temos

$$\begin{cases} p_n^* = p_n + K \sin \theta_n \\ \theta_n^* = \theta_n \end{cases} \quad (2.9)$$

substituindo as expressões da Equação (2.9) em (2.8) obtemos

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{T}{I} p_{n+1} \end{cases} \quad (2.10)$$

Para tornarmos o sistema adimensional devemos multiplicar a primeira equação de (2.10) por T/I . Definindo também $\frac{T}{I}p \rightarrow I$ e $\frac{T}{I}K \rightarrow \epsilon$, temos por fim o mapeamento padrão [11]

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \mod(2\pi) \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2 Mapeamento padrão conservativo

O mapeamento final obtido na seção anterior (Equação (2.11)) é conhecido como mapeamento padrão, ou mesmo, mapa de Chirikov-Taylor [11, 13]. Este modelo foi inicialmente utilizado por Chirikov para estimar uma mudança de propriedades dinâmicas de um regime de movimento regular para o de um caótico.

Como pode ser observado pela Equação (2.11), temos que as expressões deste mapeamento identificam um processo iterativo dado pelas variáveis ação I e ângulo θ em função do tempo n . Nota-se também a existência de um parâmetro de controle ϵ responsável pela intensidade da não linearidade do sistema dado pela função não linear $\sin(\theta_n)$. Para $\epsilon = 0$ o sistema apresenta seu espaço de fases composto por órbitas regulares e simétricas, como pode ser observado pela Figura 2.2 (a). Por outro lado, para $\epsilon \neq 0$, o espaço de fases passa a ser misto, sendo composto essencialmente por ilhas periódicas, mar de caos e curvas invariantes do tipo *spanning* (sendo estas responsáveis por limitar a difusão de partículas do mar de caos em uma região fechada) como é observado pela Figura 2.2 (b). Esta transição de fase é bem conhecida na literatura por ser uma transição de integrabilidade ($\epsilon = 0$) para não integrabilidade ($\epsilon \neq 0$) [13, 14]. A integrabilidade do sistema é garantida quando seu número de graus de liberdade é igual ao número de constantes do movimento [2, 15].

O mapeamento (2.11) apresenta também uma segunda transição bem conhecida [13, 16], para um valor crítico do parâmetro de controle $\epsilon_c = 0,9716\dots$ temos a transição de um caos local e fechado, em que $\epsilon < \epsilon_c$, para a de uma dinâmica globalmente caótica, em que $\epsilon > \epsilon_c$. Nesta transição observamos a quebra das curvas invariantes *spanning* presentes no espaço de fases da Figura 2.2 (b), permitindo assim uma difusão caótica global no

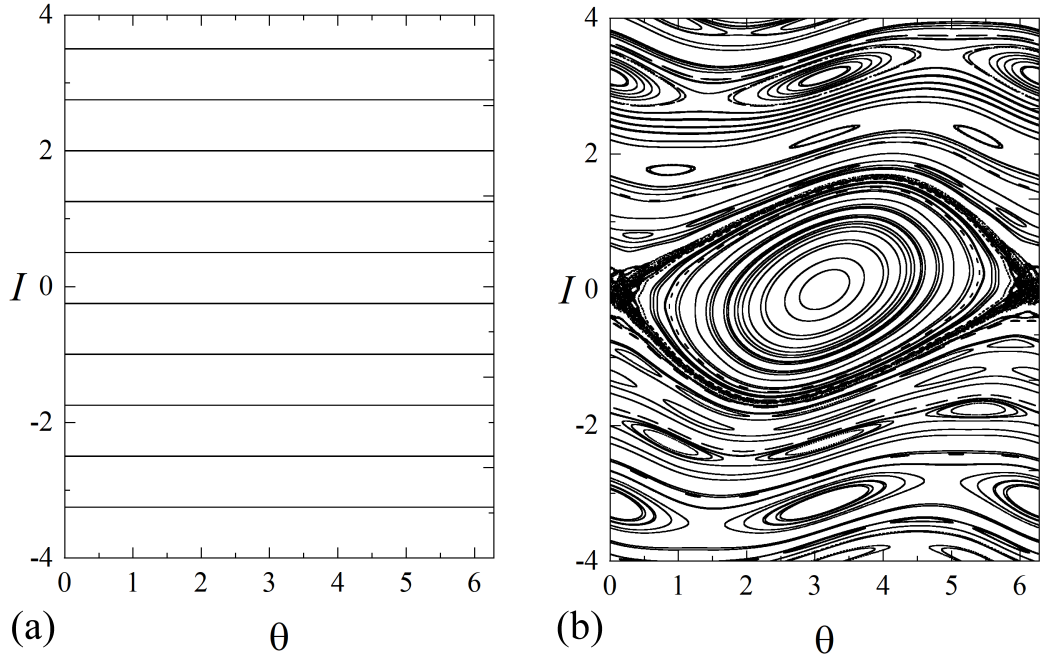


Figura 2.2: Espaço de fases para o mapeamento (2.11) com: (a) $\epsilon = 0$ e; (b) $\epsilon = 0,65$. Em (a) o espaço de fases apresenta uma dinâmica periódica e regular, portanto simétrico. Já em (b) o espaço de fases torna-se misto, com a presença do mar de caos, ilhas periódicas e curvas invariantes do tipo *spanning* limitando a região caótica em um espaço fechado.

espaço de fases. Esta transição poderá ser identificada comparando a evolução do espaço de fases entre as Figuras 2.2 (b) e 2.3 (a). Nelas teremos o espaço de fases para dois diferentes parâmetros de controle ϵ : em 2.2 (b) $\epsilon = 0,65 < \epsilon_c$ e o espaço de fases é misto, composto por ilhas periódicas, mar de caos, o qual permanece em uma região fechada, sendo limitada pelas curvas invariantes do tipo *spanning* e; já na Figura 2.3 (a) temos que $\epsilon = 1 > \epsilon_c$, portanto, as curvas invariantes *spanning* começam a ser destruídas, desta forma, o caos passa a se difundir globalmente em torno das ilhas KAM [13].

A Figura 2.3 (b) $\epsilon = 3$ e vemos um total desaparecimento das curvas invariantes *spanning*, tendo assim apenas a presença de ilhas periódicas e um caos globalizado.

A Figura 2.3 (c) nos mostra que com o aumento da intensidade da não linearidade dado pelo parâmetro de controle ϵ , temos que o caos, cada vez mais rapidamente, passa a se difundir de forma ilimitada para $\pm\infty$, e também, dependendo de seu valor, o espaço de fases passa a ser consumido inteiramente por caos, não apresentando mais ilhas periódicas. Na seção 2.3 veremos como a introdução de dissipação, em sistema com altas não linearidades ($\epsilon > 10$), suprime esta difusão, de fato, é observada a transição de fase de difusão ilimitada para limitada.

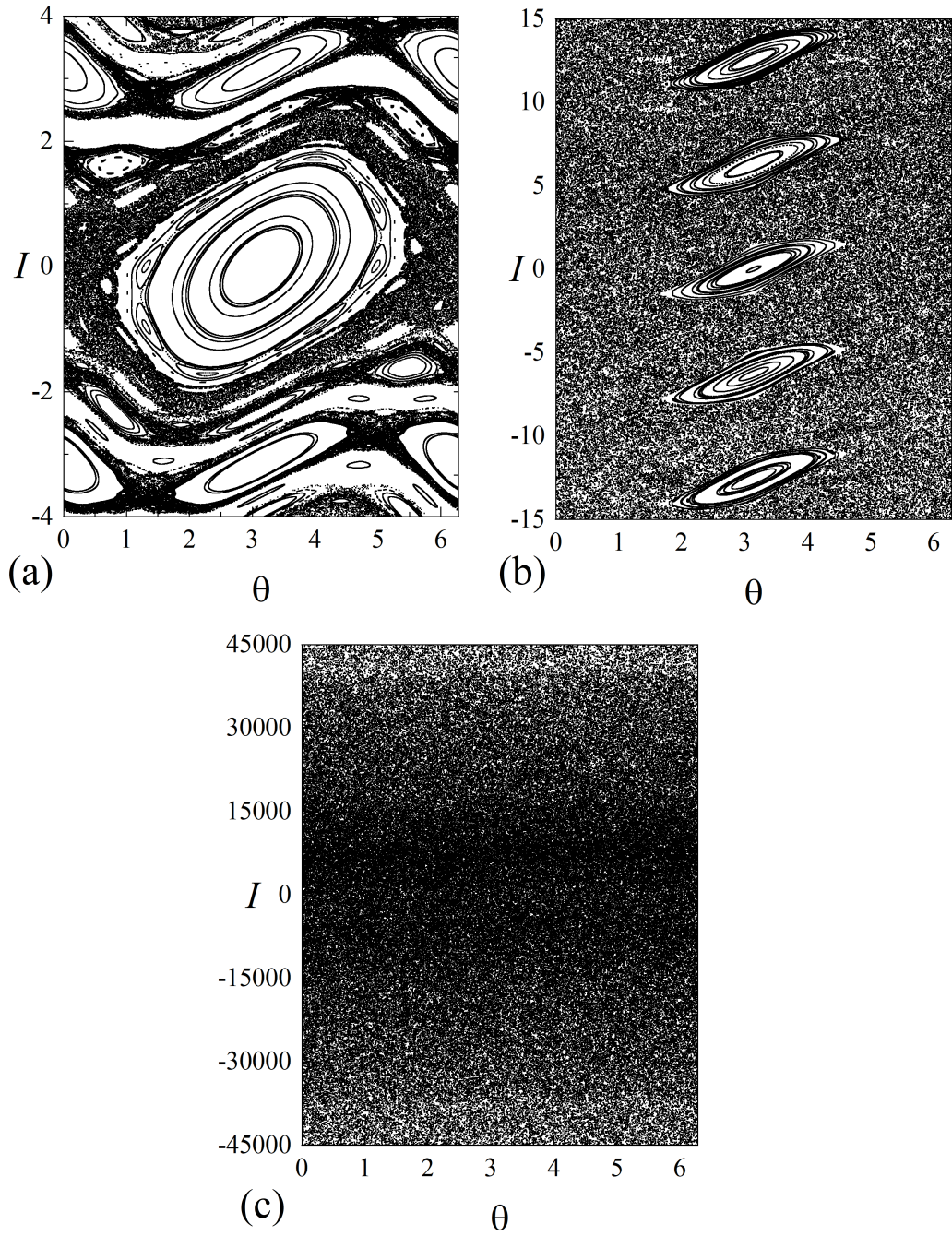


Figura 2.3: Espaço de fases para o mapeamento (2.11) com: (a) $\epsilon = 1$; (b) $\epsilon = 3$ e; (c) $\epsilon = 10^3$.

Em (a) temos que as curvas invariantes começam a ser destruídas, permitindo que o caos passe a se difundir globalmente em torno das ilhas periódicas. Já em (b) observamos um total desaparecimento destas curvas restando apenas a presença de ilhas periódicas centradas em π e um caos totalmente globalizado. (c) apresenta o espaço de fases descrito por uma difusão caótica ilimitada para $\pm\infty$ após o desaparecimento de todas as estruturas periódicas do espaço de fases.

2.2.1 Preservação de área no espaço de fases

Como mostrado anteriormente, o mapeamento padrão (2.11) foi obtido através de um Hamiltoniano independente do tempo, desta forma o sistema é conservativo e preserva área no espaço de fases [1, 2, 17, 18]. Dizer que existe preservação de área no espaço de fases significa que dada uma região no mesmo em um dado instante de tempo t , sua quantidade de área será constante para tempos subsequentes a t , independentemente da ocorrência de variações em suas formas geométricas. Para que possa ser verificada a preservação de área no sistema devemos ter que o determinante da matriz Jacobiana referente ao mapeamento estudado seja igual a unidade em módulo.

A matriz Jacobiana deste sistema será dada pela seguinte expressão

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

portanto, utilizando as equações do mapeamento padrão conservativo (2.11) temos que os coeficientes da matriz Jacobiana (2.12) são dados por

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{\partial(I_n + \epsilon \sin \theta_n)}{\partial I_n} = 1;$
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial(I_n + \epsilon \sin \theta_n)}{\partial \theta_n} = \epsilon \cos(\theta_n);$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{\partial(\theta_n + I_{n+1})}{\partial I_n} = 1 \text{ e};$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial(\theta_n + I_{n+1})}{\partial \theta_n} = 1 + \epsilon \cos(\theta_n).$

Desta forma, temos que a matriz Jacobiana para o mapeamento (2.11) é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \cos(\theta_n) \\ 1 & 1 + \epsilon \cos(\theta_n) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

de forma em que seu determinante é

$$\det J = 1. \quad (2.14)$$

Segundo o Teorema de Liouville [19–22], seja $dA_n = dI_n d\theta_n$ um elemento infinitesimal de área em uma determinada região no espaço de fases, ao realizarmos uma transformação nas variáveis ação I e ângulo θ de um instante n para $n + 1$, a transformação de área nesses instantes será dada por

$$dA_{n+1} = (\det J) dA_n, \quad (2.15)$$

desta forma, como observado pela Equação (2.14), temos que $\det J = 1$, portanto podemos concluir que existe uma conservação de área no espaço de fases, visto que $dA_{n+1} = dA_n$, embora sua forma geométrica possa variar.

2.3 Mapeamento padrão dissipativo

Nesta seção trataremos sobre as consequências da introdução de um parâmetro dissipativo γ à primeira equação do mapeamento (2.11) conforme é aplicada alta não linearidade no sistema ($\epsilon > 10$). Aqui estaremos lidando com o chamado: mapeamento padrão dissipativo. O mapeamento pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + \epsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \mod(2\pi) \end{cases}, \quad (2.16)$$

em que $\gamma \in [0, 1]$ é o parâmetro responsável pela dissipação do sistema e ϵ controla a intensidade da não linearidade.

Ao passo em que $\gamma \neq 0$ temos contração de área no espaço de fases (como será provado na subseção 2.3.1), desta forma, o sistema passa a apresentar a existência de atratores. Para o caso em que considerarmos dissipação e também pequenos valores de não linearidade, o espaço de fases para o mapeamento (2.16) apresenta pontos fixos de convergência assintótica, ou então, os chamados *sinks* [1, 2, 23]. A Figura 2.4 nos mostra a trajetória da evolução das partículas (transiente) convergindo para o ponto fixo de atração (ponto vermelho) centrado em $(0, \pi)$ do espaço de fases referente ao mapeamento dissipativo (2.16) para os parâmetros de $\epsilon = 1$ e $\gamma = 10^{-3}$.

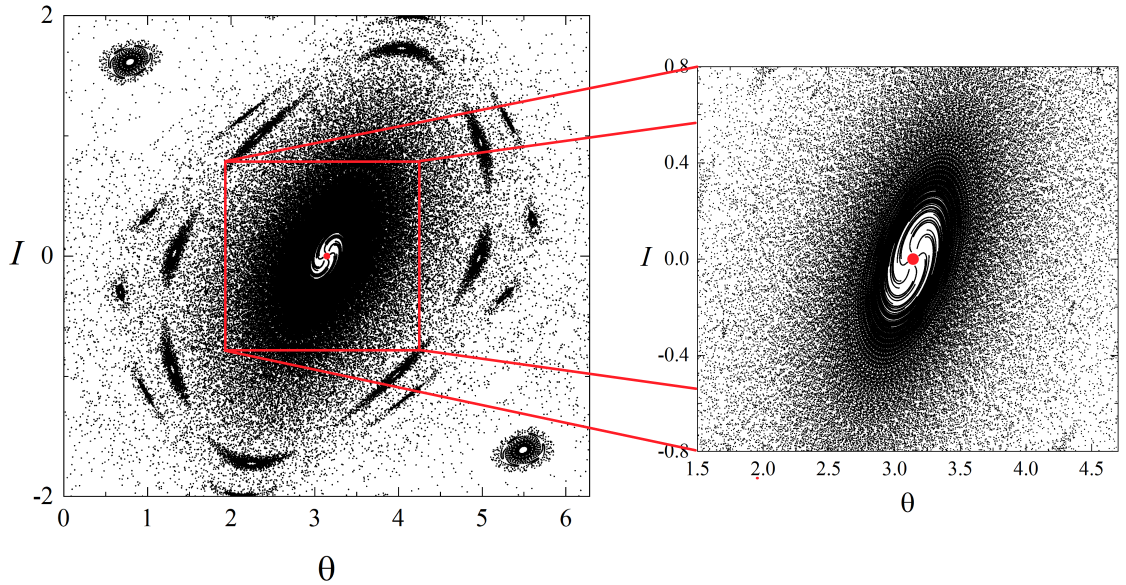


Figura 2.4: Espaço de fases do mapeamento (2.16) para $\epsilon = 1$ e $\gamma = 10^{-3}$ mostrando a convergência do transiente para o ponto fixo de atração, ou mesmo *sink*, em vermelho centrado em $(0, \pi)$.

Ao passo em que ϵ é grande, seja $\epsilon > 10$, o espaço de fases perde a existência dos pontos fixos de atração e passa a apresentar atratores caóticos em sua dinâmica. A transição de

fase investigada neste trabalho é a transição de fase de difusão ilimitada ($\gamma = 0$) para difusão limitada $\gamma \neq 0$ para alta não linearidade atribuída ao sistema. Esta transição será dada no limite de pequenos valores de dissipação γ (próximo à transição) e grandes valores do parâmetro de controle ϵ .

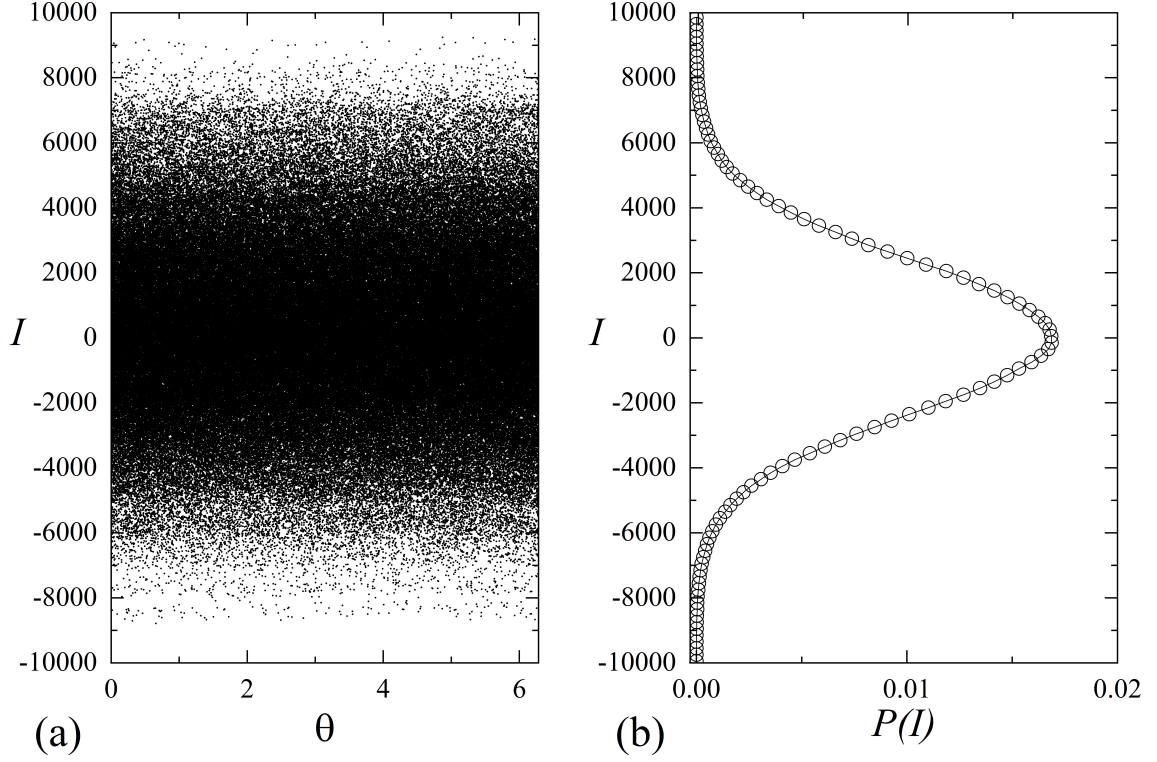


Figura 2.5: (a) Espaço de fases para o mapeamento (2.16) com $\epsilon = 150$ e $\gamma = 10^{-3}$. Foram utilizadas uma grade quadrada de condições iniciais iteradas em 10^4 distribuídas uniformemente para $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. (b) Distribuição de probabilidade para o atrator caótico apresentado em (a).

O espaço de fases apresentado pela Figura 2.5 (a) nos mostra um atrator caótico para os parâmetros $\gamma = 10^{-3}$ e $\epsilon = 150$. A medida em que não tivermos dissipação no sistema ($\gamma = 0$) e é aplicada alta não linearidade, as órbitas caóticas passam a se difundir ilimitadamente para $\pm\infty$ no espaço de fases (este pode ser observado na seção 2.2 pela Figura 2.3 (c)). Contudo, com a dissipação temos o surgimento de atratores caóticos indicando uma supressão desta difusão de partículas no espaço de fases (difusão limitada), como é observado pela Figura 2.5 (a). Já na Figura 2.5 (b) temos a distribuição de probabilidade para a densidade de pontos no espaço de fases. Podemos perceber que a maior densidade de pontos localiza-se próxima de $I = 0$ e sua distribuição decai conforme se afasta desta origem.

2.3.1 Contração de área no espaço de fases

Semelhantemente ao processo realizado em [2.2.1](#), para caracterizarmos agora o espaço de fases do mapeamento [\(2.16\)](#) quanto a preservação ou contração de área devemos obter os novos coeficientes da matriz Jacobiana [\(2.12\)](#) considerando as equações do mapeamento padrão dissipativo, portanto temos que:

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{\partial((1-\gamma)I_n + \epsilon \sin(\theta_n))}{\partial I_n} = 1 - \gamma;$
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial((1-\gamma)I_n + \epsilon \sin(\theta_n))}{\partial \theta_n} = \epsilon \cos(\theta_n);$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{\partial(\theta_n + I_{n+1})}{\partial I_n} = 1 - \gamma \text{ e};$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial(\theta_n + I_{n+1})}{\partial \theta_n} = 1 + \epsilon \cos(\theta_n).$

Portanto a matriz Jacobiana para o mapeamento [\(2.16\)](#) é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 1 - \gamma & \epsilon \cos(\theta_n) \\ 1 - \gamma & 1 + \epsilon \cos(\theta_n) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

e sua determinante

$$\det J = 1 - \gamma. \quad (2.18)$$

O resultado da Equação [\(2.18\)](#) indica que conforme for introduzida dissipação no sistema ($\gamma \neq 0$) passamos a observar contração de área no espaço de fases, visto que pela relação [\(2.15\)](#) $dA_{n+1} \neq dA_n \Leftrightarrow \gamma \neq 0$, violando o Teorema de Liouville. A contração de área está diretamente relacionada ao surgimento de determinadas estruturas no espaço de fases, como a presença de *sinks* (para pequenos valores de ϵ) e de atratores caóticos (para grandes valores de ϵ).

2.4 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são utilizados como grandezas indicadoras de caos em sistemas dinâmicos [\[1,2\]](#). Estes mostrarão se as órbitas estudadas são sensíveis às condições iniciais, ou de outra forma, indicarão como será dado o afastamento ou não de duas condições iniciais infinitesimalmente próximas após um período longo de tempo desta dinâmica. Para introduzirmos este conceito consideraremos primeiramente mapeamentos unidimensionais.

Seja um mapa unidimensional escrito pela seguinte expressão

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.19)$$

em que x são os possíveis estados configuracionais do sistema e f é uma função de operação do mapeamento. Ao evoluirmos este mapeamento para a n -ésima iteração, teremos a criação de uma órbita. Desta forma, a distância entre duas órbitas (que inicialmente são infinitesimalmente próximas) na n -ésima iteração é definida como

$$d = |f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|, \quad (2.20)$$

onde x_0 identifica uma condição inicial e ε é uma pequena perturbação sobre x_0 .

Podemos definir também a distância relativa d/ε e admitir que esta razão tenha um comportamento exponencial do tipo $d/\varepsilon \equiv e^{\lambda n}$, sendo que λ é definido como o expoente de Lyapunov. Como mencionado, ε é um fator muito pequeno, portanto considerando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon} \right| = e^{\lambda n}. \quad (2.21)$$

Da Equação (2.21), podemos notar que ao passo em que o expoente de Lyapunov λ for positivo ($\lambda > 0$), temos um afastamento exponencial das órbitas geradas a partir do fornecimento de duas condições iniciais muito próximas, portanto uma confirmação de caos (sensibilidade às condições iniciais). Por outro lado, se $\lambda \leq 0$ teremos que as órbitas permanecem próximas ($\lambda < 0$), ou então sofrerão um afastamento linear ($\lambda = 0$), estes dois casos indicam órbitas não caóticas pelo sistema. Nota-se também que o limite escrito em (2.21) é exatamente a definição de derivada, portanto, podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon} \right| = |f'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}. \quad (2.22)$$

Tomando a função logarítmica de ambos os lados da Equação (2.22) temos que

$$\lambda n = \ln |f'^{(n)}(x_0)| = \ln |f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})f'(x_{n-3})\dots f'(x_0)|. \quad (2.23)$$

Agora, utilizando a propriedade logarítmica ($\ln(A.B) = \ln(A) + \ln(B)$) e também isolando o expoente de Lyapunov λ , obtemos

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.24)$$

Como a convergência do expoente de Lyapunov é dada para um número de iterações suficientemente grande, temos que

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.25)$$

Agora, para estender este procedimento para mapeamentos bidimensionais, como por exemplo o mapeamento padrão (2.11), os expoentes de Lyapunov serão dados pela seguinte expressão

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_n^{(j)}|, \quad (2.26)$$

em que o índice $j = 1, 2$ e $\Lambda_n^{(j)}$ identifica os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J_i(I_i, \theta_i) = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1$, sendo que J é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada na órbita (I_i, θ_i) . Como os expoentes de Lyapunov são avaliados para um número grande de iterações n , o produtório das matrizes Jacobianas J_i pode levar a uma indeterminação de seus coeficientes (*overflow*), não sendo viável esta aplicação. Contudo, um algoritmo de triangularização criado por Eckmann e Ruelle [24] nos permite reescrevermos a matriz Jacobiana J em termos do produto $J = \Theta T$, em que Θ é uma matriz ortogonal, i.e. sua inversa é igual a transposta [25] ($\Theta^{-1} = \Theta^t$) e; T é uma matriz triangular superior. Estes últimos são escritos por:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

e

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

A matriz M pode ser reescrita convenientemente da seguinte forma

$$M = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2(\mathbf{I}) J_1 = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1, \quad (2.29)$$

desta forma podemos definir $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$ e $\tilde{J}_2 = J_2 \Theta_1$, assim temos que

$$M = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_3 \Theta_2 \Theta_2^{-1} \tilde{J}_2 T_1. \quad (2.30)$$

Agora realizando o mesmo procedimento para $T_2 = \Theta_2^{-1} \tilde{J}_2$. Podemos perceber que o algoritmo resume-se à análise dos elementos de T . Desta forma, para que possamos obtê-los, usaremos que $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$, portanto

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

O elemento T_{21} da matriz T_1 nos leva a seguinte relação

$$-j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) = 0 \quad \implies$$

$$\implies \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{j_{21}}{j_{11}}. \quad (2.32)$$

Elevando todos os termos da Equação (2.32) ao quadrado e utilizando a relação fundamental da trigonometria ($\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\theta)}{1 - \sin^2(\theta)} = \frac{j_{21}^2}{j_{11}^2} &\implies \sin^2(\theta)[j_{11}^2 + j_{21}^2] = j_{21}^2 \implies \\ \implies \sin(\theta) &= \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

e consequentemente,

$$\cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.34)$$

Desta forma, como $T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta)$ e $T_{22} = -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta)$ pela Equação (2.31), podemos utilizar as equações (2.33) e (2.34) para obter os elementos da diagonal principal da matriz T_1 (T_{11} e T_{22}), portanto

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.35)$$

e também,

$$T_{22} = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.36)$$

Agora basta obtermos $\tilde{J}_2 = J_2\Theta_1$, que pode ser dado pela expressão

$$\begin{pmatrix} \tilde{j}_{11} & \tilde{j}_{12} \\ \tilde{j}_{21} & \tilde{j}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

O procedimento utilizado para a obtenção dos elementos T_{11} e T_{22} da matriz $T_{n=1}$ (primeira iteração) deve ser repetido até o final da série de matriz $J_1 J_2 \dots J_{n-2} J_{n-1} J_n$, de forma em que os expoente de Lyapunov são dados por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln |T_{jj}^{(i)}|, \quad j = 1, 2. \quad (2.38)$$

Em sistemas Hamiltonianos (como é o caso do mapeamento padrão), os expoentes de Lyapunov aparecerão em pares e com sinais contrários [1], de forma que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{n_{par}} = 0$, ou mesmo, $\sum_{i=1}^{n_{par}} \lambda_i = 0$, desta forma, consideraremos o seu módulo. A Figura 2.6 mostra a convergência do expoente de Lyapunov positivo dado pela Equação (2.38) para $\epsilon = 10^3$ e dez diferentes condições iniciais de θ_0 iteradas 10^8 vezes na região de baixa ação do espaço de fases da Figura 2.3 (c). O valor assintótico obtido no regime

de saturação das curvas foi de $\bar{\lambda}_1 = 6,2146(1)$, portanto, indicando um comportamento caótico para o mapeamento (2.11). Já na Figura 2.7 temos o mesmo cálculo para os expoentes de Lyapunov que em 2.6 contudo, para o mapeamento padrão dissipativo (2.16). Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 150$ e $\gamma = 10^{-3}$, descrevendo o comportamento apresentado pelo atrator caótico do espaço de fases da Figura 2.5. O valor assintótico obtido no regime de saturação das curvas foi de $\bar{\lambda}_2 = 4,3175(1)$.

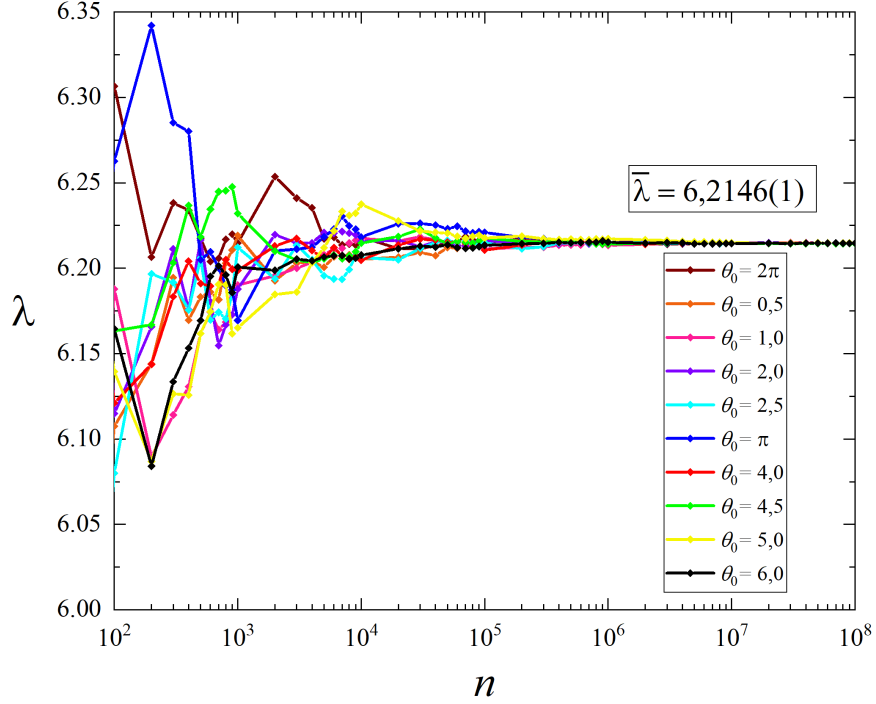


Figura 2.6: Convergência do expoente de Lyapunov positivo referente ao espaço de fases 2.3 (c) para 10 diferentes condições iniciais de θ_0 evoluídas 10^8 vezes para $I_0 = 10^{-6}\epsilon$. O parâmetro utilizado foi $\epsilon = 10^3$. O valor médio do expoente obtido foi $\bar{\lambda}_1 = 6,2146(1)$.

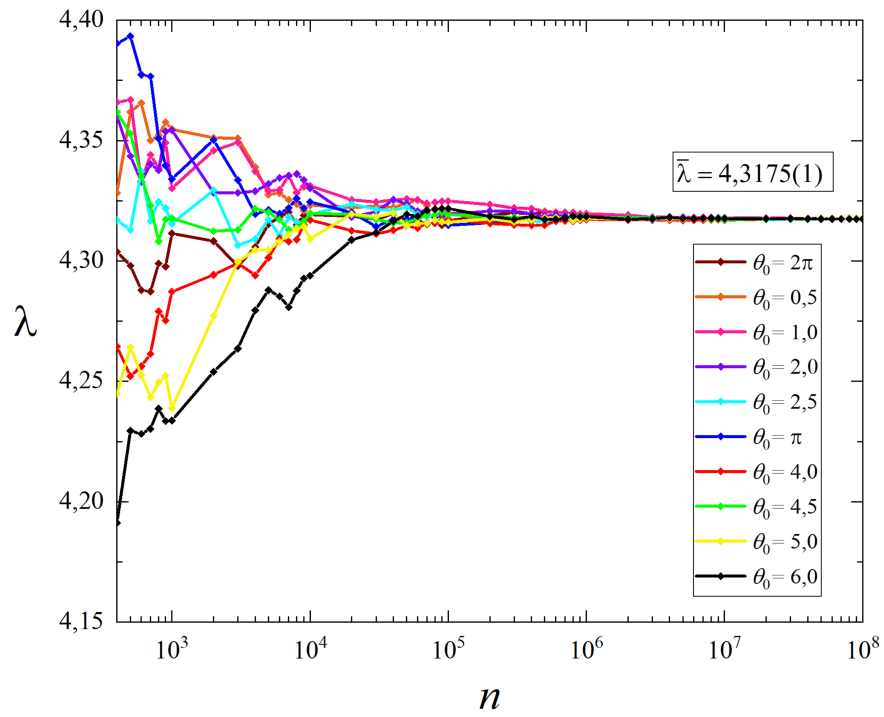


Figura 2.7: Convergência do expoente de Lyapunov positivo referente ao espaço de fases 2.5 (a) para 10 diferentes condições iniciais de θ_0 evoluídas 10^8 vezes para $I_0 = 10^{-6}\epsilon$. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 150$ e $\gamma = 10^{-3}$. O valor médio do expoente obtido foi $\bar{\lambda}_2 = 4,3175(1)$.

Capítulo 3

Descrição da difusão caótica de partículas no espaço de fases

Neste Capítulo serão abordadas duas diferentes metodologias para a caracterização da difusão caótica de partículas no espaço de fases apresentado na seção 2.3. A primeira será uma abordagem fenomenológica a partir de simulações numéricas aliadas a um conjunto de hipóteses de escala e a uma função homogênea generalizada conduzindo assim a um conjunto de expoentes críticos que definem o comportamento das curvas de I_{rms} responsáveis por caracterizar esta difusão. A invariância de escala é confirmada, sendo este um importante fator indicativo de que o sistema está passando por uma transição de fase contínua. A segunda descrição é analítica a partir da solução da equação da difusão fornecendo assim a densidade de probabilidade de se observar uma partícula com uma determinada ação I em um instante de tempo n . Por fim, estas duas metodologias são comparadas a fim de reforçar o sucesso deste formalismo.

3.1 Abordagem fenomenológica e análise de escalas

Como previamente discutido na seção 2.2 à medida em que é aplicada alta não linearidade sobre o mapeamento de estudo (2.11), o espaço de fases passa a se difundir ilimitadamente para $\pm\infty$, contudo, com a introdução de dissipação no sistema temos a aparição de atratores caóticos, que por sua vez, levam a uma supressão desta difusão de partículas no espaço de fases (difusão limitada). Nesta seção será abordada uma descrição fenomenológica [26-34] sobre a difusão de partículas no espaço de fases nestes dois limites (difusão ilimitada para $\gamma = 0$ e difusão limitada para $\gamma \neq 0$) através da ação quadrática média $\overline{I^2}$, que define então $I_{rms} = \sqrt{\overline{I^2}}$. Este observável será dado através de uma média sobre o conjunto de condições iniciais atribuídas ao sistema

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_i^2}, \quad (3.1)$$

em que M identifica o número de condições iniciais variadas ao longo do atrator caótico. O somatório em i identifica a média do conjunto de condições iniciais utilizadas. É definido então uma média sobre *ensemble* estatístico de condições iniciais do sistema.

Primeiramente, considerando o mapeamento padrão sem dissipação (2.16), temos que $\gamma = 0$, desta forma, podemos observar os resultados simulacionais da Equação (3.1) para diferentes parâmetros de controle ϵ . A Figura 3.1 nos mostra o comportamento das curvas de I_{rms} no tempo n para um conjunto de $M = 15000$ condições iniciais $\theta \in [0, 2\pi]$ distribuídas uniformemente para uma ação inicial de baixa energia $I_0 = 10^{-7}\epsilon$.

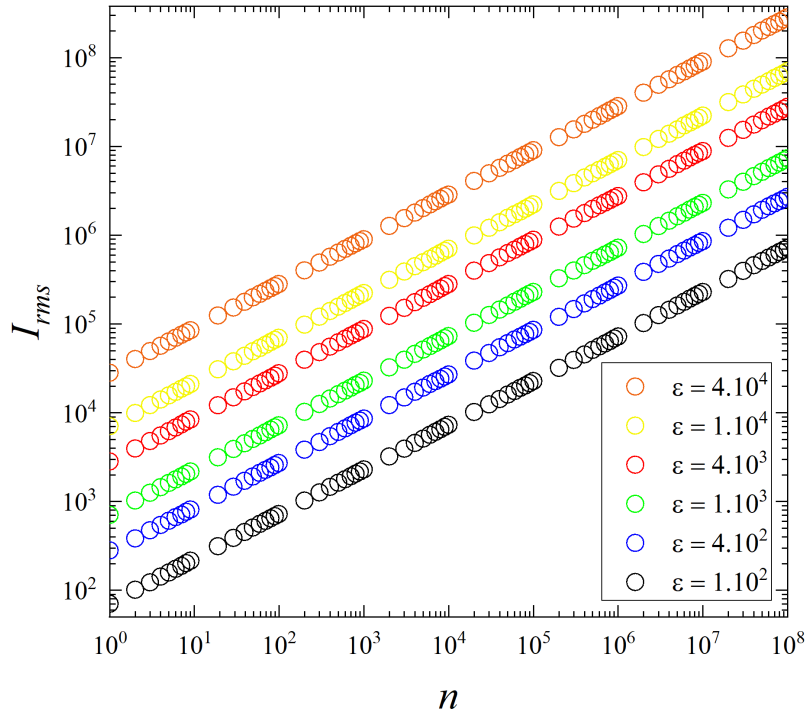


Figura 3.1: Gráfico de I_{rms} vs. n para $\gamma = 0$ e 6 diferentes parâmetros de controle ϵ .

A partir da Figura 3.1 podemos perceber como as curvas de I_{rms} divergem no infinito sob o comportamento de um crescimento acelerado em lei de potência. Veremos a seguir que com a introdução de dissipação no sistema este comportamento das curvas será perturbado identificando uma mudança de regime de crescimento acelerado para um novo de regime em que as curvas atingem um valor de saturação caracterizando a supressão de difusão das partículas pelo atrator caótico no espaço de fases.

Como observado pela equação do mapeamento padrão dissipativo (2.16), podemos identificar dois diferentes parâmetros de controle, ϵ e γ . Desta forma, a análise de escala para a difusão de partículas será feita em duas diferentes subseções fixando-se um

dos parâmetros de cada vez, e por fim será feita uma associação destas duas análises unificando-as através da identificação da invariância de escala presente no espaço de fases.

3.1.1 Análise de escala para γ constante

A Figura 3.9 mostra os resultados simulacionais da Equação (3.1), representando as curvas de I_{rms} em função do tempo n para 6 diferentes parâmetros de controle ϵ e um valor fixo de $\gamma = 10^{-4}$. Foram utilizados um conjunto de $M = 15000$ condições iniciais, sendo M valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ uniformemente distribuídos para um valor inicial $I_0 = 10^{-7}\epsilon$.

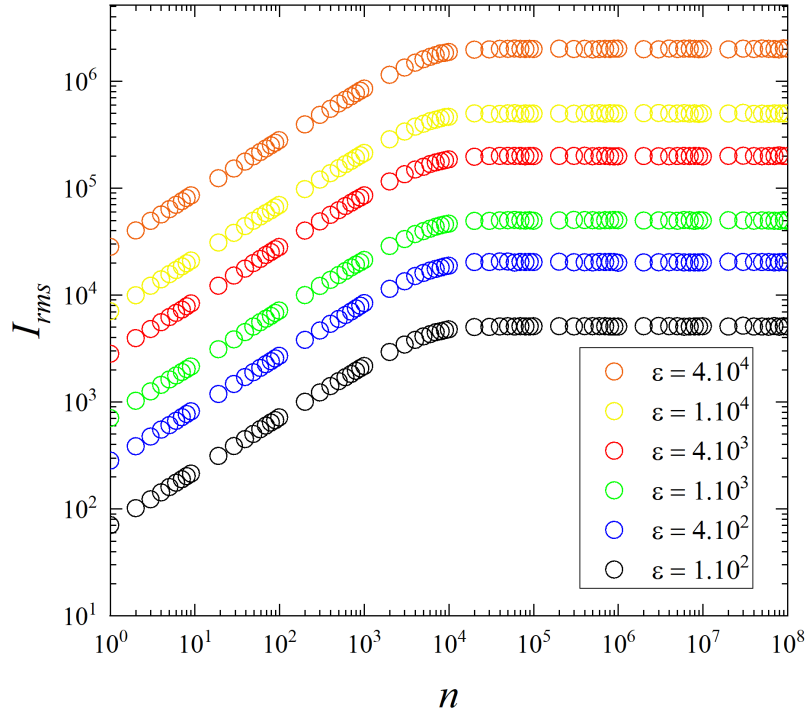


Figura 3.2: Plot de I_{rms} vs. n considerando $\gamma = 10^{-4}$ e; 6 diferentes parâmetros de controle ϵ .

Como observado pela Figura 3.2 podemos notar a presença de três diferentes comportamentos: para pequenos valores de iteração ($n \ll n_x$) as curvas de I_{rms} apresentam um regime de crescimento acelerado; para grandes valores de iteração ($n \gg n_x$) temos um regime de saturação constante e; por fim, a mudança do primeiro regime de crescimento acelerado para a de um platô constante de saturação, que é identificado em um número característico de iteração n_x , sendo este o número de *crossover*. Estes três diferentes regimes podem ser caracterizados por expoentes críticos responsáveis por descrever a dinâmica apresentada em cada caso, estes serão nomeados como: β , α_1 e z_1 .

A partir do comportamento observado pela Figura 3.2, podemos definir três hipóteses de escala relacionando-as à cada expoente crítico, desta forma temos:

- 1-) Para valores de $n \ll n_x$, o comportamento de $I_{rms}(n, \epsilon)$ é dado por

$$I_{rms}(n, \epsilon) \propto (n\epsilon^2)^\beta, \quad (3.2)$$

onde β identifica o expoente crítico de crescimento acelerado.

2-) Para valores de $n \gg n_x$, as curvas atingem um regime de saturação, desta forma

$$I_{rms,sat}(n, \epsilon) \propto \epsilon^{\alpha_1}, \quad (3.3)$$

em que α_1 é o expoente crítico de saturação.

3-) E por último, temos a mudança do regime de crescimento acelerado para o de um platô constante, identificada pelo número de *crossover* n_x , dada por

$$n_x \propto \epsilon^{z_1}, \quad (3.4)$$

em que z_1 é o expoente crítico de *crossover*.

A partir destas três hipóteses de escala podemos propor uma função homogênea generalizada que descreve o comportamento das curvas de I_{rms} . Esta é dada por

$$I_{rms}(n\epsilon^2, \epsilon) = l I_{rms}(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon), \quad (3.5)$$

aqui l é um fator de escala e a e b são expoentes característicos. Portanto, primeiramente escolhendo de forma conveniente que $l^a n\epsilon^2 = 1$, temos que

$$l = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}}. \quad (3.6)$$

Levando este último resultado na Equação (3.5) temos

$$I_{rms}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} I_{rms}(1, (n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon), \quad (3.7)$$

em que $I_{rms}(1, (n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon)$ é assumido constante para $n \ll n_x$. Assim, comparando a Equação (3.7) com a primeira hipótese de escala (3.2), temos que $(n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} = (n\epsilon^2)^\beta \rightarrow \beta = -1/a$. Podemos então realizar novamente o mesmo procedimento, contudo agora escolhendo $l^b \epsilon = 1$, assim temos que

$$l = \epsilon^{-\frac{1}{b}}. \quad (3.8)$$

levando este novo resultado na Equação (3.5) temos que

$$I_{rms}(n\epsilon^2, \epsilon) = \epsilon^{-\frac{1}{b}} I_{rms}(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n\epsilon^2, 1), \quad (3.9)$$

sendo $I_{rms}(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n\epsilon^2, 1)$ assumido constante para $n \gg n_x$. Assim comparando a Equação (3.9) com a segunda hipótese de escala (3.3) obtemos que $\epsilon^{\alpha_1} = \epsilon^{-\frac{1}{b}} \rightarrow \alpha_1 = -1/b$.

O terceiro expoente crítico z_1 é obtido quando o fator de escala l é coincidente para os dois regimes (crescimento acelerado e saturação constante), visto que este representa a mudança de um regime para o outro em um número específico de *crossover* n_x , portanto igualando as Equações (3.6) e (3.8) e considerando $\alpha_1 = -1/b$ e $\beta = -1/a$ temos que

$$(n\epsilon^2)^\beta = \epsilon^{\alpha_1}, \quad (3.10)$$

que nos dá

$$n_x = \epsilon^{\frac{\alpha_1}{\beta} - 2}. \quad (3.11)$$

Comparando a Equação (3.11) com a terceira hipótese de escala (3.4) obtemos que

$$\underbrace{z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta} - 2}_{\text{Lei de Escala}}. \quad (3.12)$$

A Equação (3.12) representa uma expressão analítica relacionando os três expoente críticos, definindo assim uma lei de escala. A partir do conhecimento de dois expoentes críticos torna-se possível a obtenção do terceiro.

O expoente crítico β pode ser obtido a partir da primeira hipótese de escala (3.2), em que temos a relação de I_{rms} vs. $(n\epsilon^2)^\beta$. A Figura 3.3 representa a Figura 3.2 após as transformações de escala $I_{rms} \rightarrow I_{rms}$ e $n \rightarrow (n\epsilon^2)^\beta$. O expoente critico obtido foi de $\beta = 0,4988(4)$, ou mesmo $\beta \approx 0,5$, através de um ajuste em lei de potência, sendo este referente a um baixo limite de iterações $n \ll n_x$.

O expoente crítico α_1 foi obtido através da relação estabelecida pela segunda hipótese de escala (3.3) para um regime de platô constante de saturação ($n \gg n_x$). Portanto, foi plotado um gráfico de $I_{rms,sat}$ para diferentes valores de ϵ , como pode ser visto pela Figura 3.4. O valor obtido para este expoente foi de $\alpha_1 = 0,996(1)$.

Por fim, temos o terceiro expoente crítico z_1 , que foi obtido pela terceira hipótese de escala (3.4). O número n_x identifica o número específico de iteração n o qual indica a passagem de um regime de crescimento acelerado (relacionado ao expoente β) das curvas de I_{rms} para o de um regime de saturação constante de saturação (relacionado pelo expoente α_1). Portanto é plotado um gráfico de n_x para diferentes valores de ϵ , como observado pela Figura 3.5. O valor para o expoente de *crossover* obtido foi de $z_1 \approx 0$.

Portanto, a partir do conhecimento de dois expoentes críticos numericamente calculados, por exemplo β e α_1 , podemos obter o terceiro (z_1) através da obtida lei de escala (3.12), e portanto, compará-lo com o resultado numérico obtido na Figura 3.5, assim

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta} - 2 \simeq 0. \quad (3.13)$$

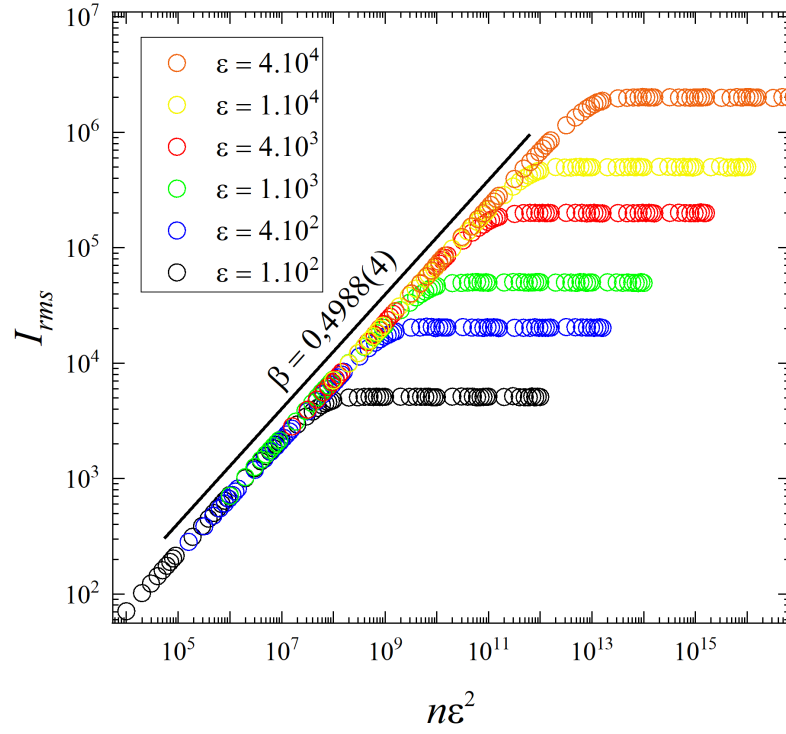


Figura 3.3: Mesmo *plot* realizado na Figura 3.2 após a transformação de escala $n \rightarrow n\epsilon^2$. O valor obtido para o ajuste em lei de potência foi de $\beta \approx 0,5$.

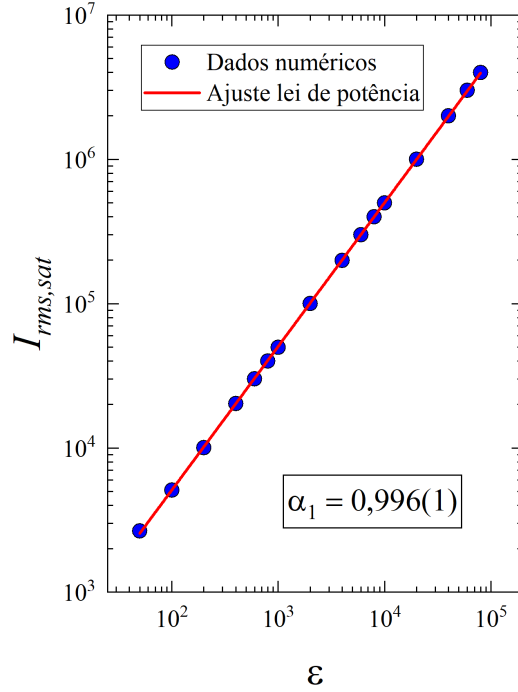


Figura 3.4: Comportamento de $I_{rms,sat}$ vs. ϵ para $n \gg n_x$ e $\gamma = 10^{-4}$. O expoente crítico obtido foi de $\alpha_1 = 0,996(1)$.

O valor obtido para z_1 utilizando a lei de escala (3.12) está de acordo com aquele encontrado numericamente através do ajuste em lei de potência visto pela Figura 3.5.

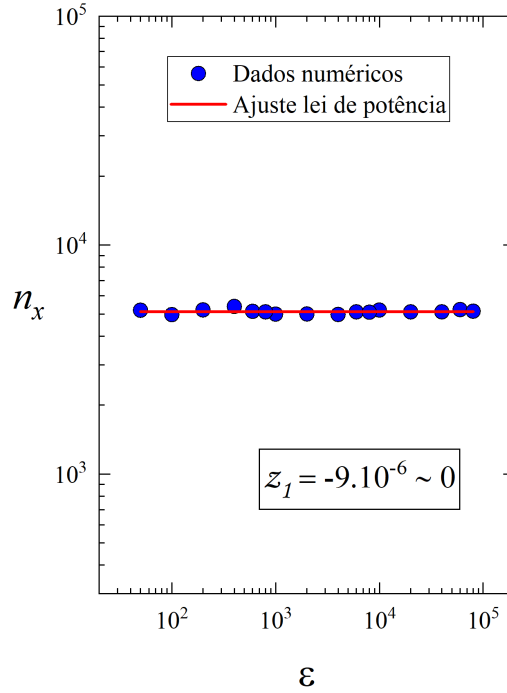


Figura 3.5: Comportamento de n_x vs. ϵ para $n = n_x$. O expoente crítico obtido foi $z_1 \approx 0$.

Agora consideraremos o desvio padrão médio de I sobre o conjunto de condições iniciais M , o qual é dado por

$$\sigma(n, \epsilon) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{I_i^2(n, \epsilon) - \bar{I}_i^2(n, \epsilon)}. \quad (3.14)$$

Foi também utilizado um *ensemble* de $M = 15000$ condições iniciais iteradas em 10^8 vezes para valores iniciais de baixas energias $I_0 = 10^{-7}\epsilon$ e θ uniformemente distribuído em $\theta \in [0, 2\pi]$.

A Figura 3.6 nos mostra o comportamento das curvas de $\sigma(n, \epsilon)$ em função do tempo n para 6 diferentes parâmetros de controle ϵ e $\gamma = 10^{-3}$ constante. Estas curvas apresentam o mesmo comportamento daquelas observadas pelas curvas de I_{rms} vs. n (Figura 3.2), assim, podemos também investigar os expoentes críticos de aceleração, saturação e *crossover* presentes para o desvio padrão médio σ . O expoente de crescimento acelerado foi de $\beta \simeq 0,5$, como pode ser visto pela Figura 3.6 (b). O Expoente crítico de saturação e o expoente de *crossover*, nomeados respectivamente μ_1 e δ_1 , podem ser obtidos através de simples ajustes em lei de potência a partir das hipóteses de escala anteriormente estabelecidas (3.3) e (3.4), contudo, agora temos $\sigma_{sat} \propto \epsilon^{\mu_1}$ e $n_x \propto \epsilon^{\delta_1}$.

Os valores obtidos para μ_1 e δ_1 foram respectivamente $\mu_1 = 0,996(1)$ e $\delta_1 \simeq 0$ como pode ser observado pelas Figuras 3.7 e 3.8. De forma similar, observamos que estes novos expoentes críticos também estão conectados e de acordo com a lei de escala obtida em (3.12), visto que pela relação $\delta_1 = \mu_1/\beta - 2 \simeq 0$ temos uma boa concordância com o

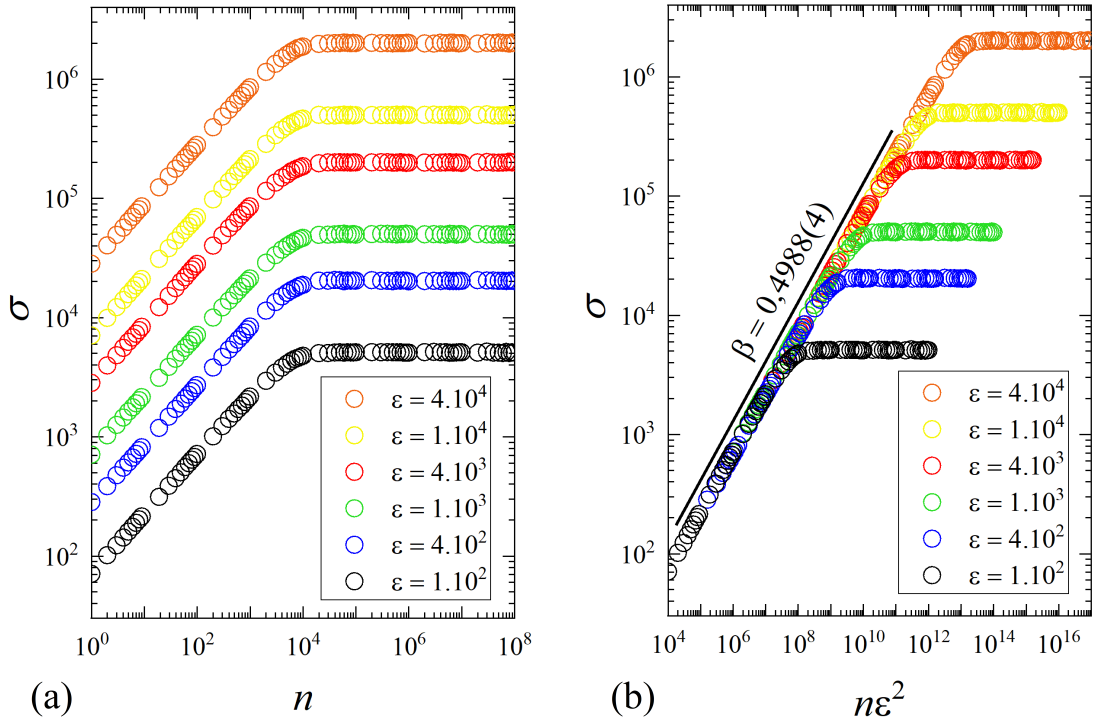


Figura 3.6: (a) *Plot* das curvas de σ vs. n considerando $\gamma = 10^{-3}$ e 6 diferentes parâmetros de controle ϵ . (b) Mesmo *plot* de (a) após a transformação de escala $n \rightarrow n\epsilon^2$. O expoente crítico obtido pelo ajuste em lei de potência foi $\beta \approx 0,5$.

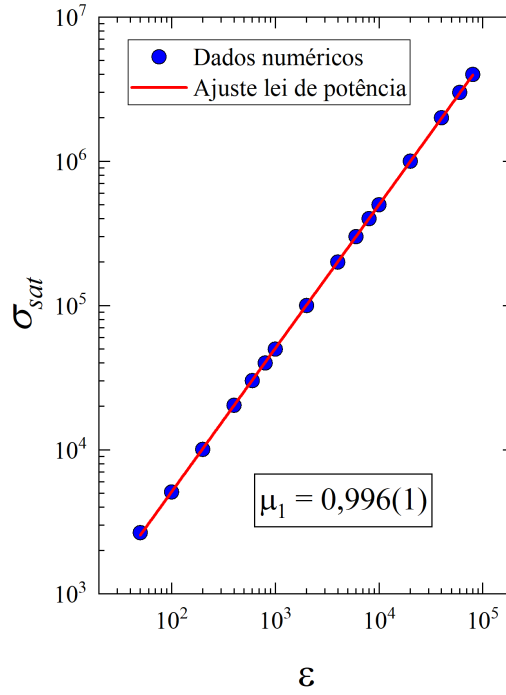


Figura 3.7: Comportamento de σ_{sat} vs. ϵ para $n \gg n_x$ e $\gamma = 10^{-4}$. O expoente crítico obtido foi de $\mu_1 = 0,996(1)$.

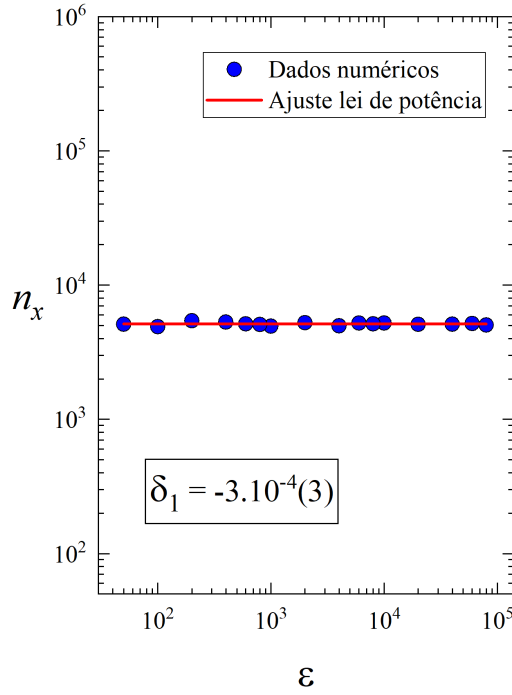


Figura 3.8: Comportamento de n_x vs. ϵ referente as curvas de σ . O expoente crítico obtido foi $\delta_1 \approx 0$.

resultado numérico obtido para δ_1 .

3.1.2 Análise de escala para ϵ constante

Nesta subseção repetiremos o processo realizado em 3.1.1 de forma a obtermos os novos expoentes críticos que descrevem a dinâmica de difusão de partículas ao considerarmos o parâmetro de controle ϵ constante para diferentes valores de γ , bem como será encontrada uma nova lei de escala que relaciona estes novos expoentes em uma única expressão. A Figura 3.9 mostra as curvas de I_{rms} em função do tempo n para 6 diferentes parâmetros de controle γ e um valor fixo de $\epsilon = 150$. Foram utilizados um conjunto de $M = 15000$ condições iniciais, sendo M valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ uniformemente distribuídos para um valor inicial $I_0 = 10^{-7}\epsilon$.

De forma análoga a análise sobre a Figura 3.2, realizada na subseção 3.1.1, podemos perceber os três mesmos comportamentos apresentados pelas curvas de I_{rms} vs. n na Figura 3.9. Estes três comportamentos poderão ser caracterizados por novos expoentes críticos nomeados: β , α_2 e z_2 .

Com base no comportamento das curvas de I_{rms} apresentadas pela Figura 3.9 torna-se possível definirmos três novas hipóteses de escala, são elas:

- 1-) Para valores de $n \ll n_x$, o comportamento de $I_{rms}(n, \gamma)$ é dado por

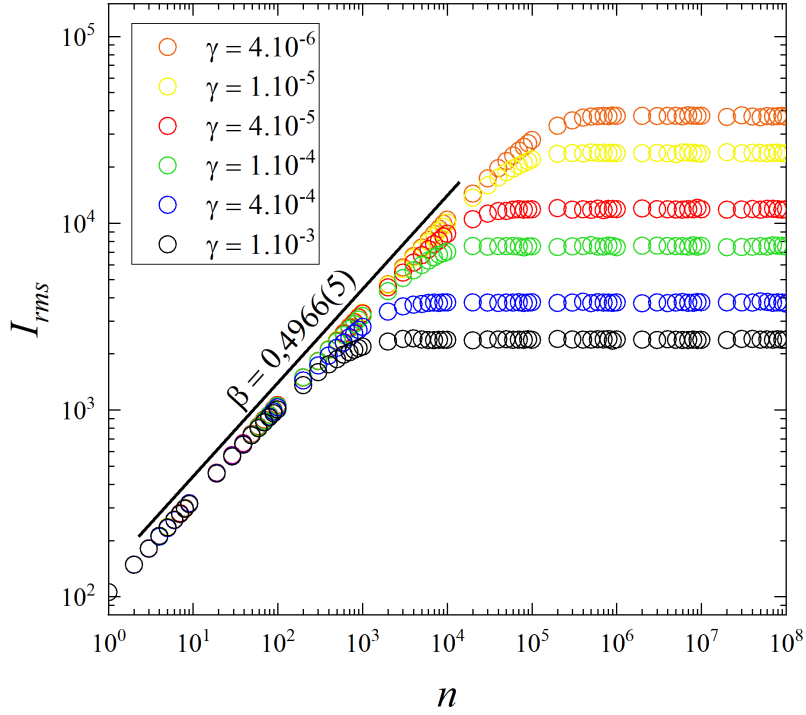


Figura 3.9: *Plot* de I_{rms} vs. n considerando $\epsilon = 150$ e; 6 diferentes parâmetros de controle γ .

$$I_{rms}(n, \gamma) \propto n^\beta, \quad (3.15)$$

onde β é o expoente crítico de crescimento acelerado.

2-) Para valores de $n \gg n_x$, as curvas atingem um platô constante de saturação, assim

$$I_{rms,sat}(n, \gamma) \propto \gamma^{\alpha_2}, \quad (3.16)$$

em que α_2 é o expoente crítico de saturação.

3-) E por último, temos a mudança do regime de crescimento acelerado para o de um platô constante, identificada pelo número de *crossover* n_x , dada por

$$n_x \propto \gamma^{z_2}, \quad (3.17)$$

em que z_2 é o expoente crítico de *crossover*.

Definindo então uma função homogênea generalizada e utilizando estas três novas hipóteses de escala, podemos realizar o mesmo procedimento de forma a obtermos esta nova lei de escala. A função será dada por

$$I_{rms}(n, \gamma) = k I_{rms}(k^c n, k^d \gamma), \quad (3.18)$$

em que k é um novo fator de escala e c e d são expoentes característicos. Primeiramente será escolhido de forma conveniente $k^c n = 1$, assim

$$k = n^{-\frac{1}{c}}. \quad (3.19)$$

Levando este último resultado na Equação (3.18) temos que

$$I_{rms}(n, \gamma) = n^{-\frac{1}{c}} I_{rms}(1, n^{-\frac{d}{c}} \gamma), \quad (3.20)$$

em que $I_{rms}(1, n^{-\frac{d}{c}} \gamma)$ pode ser assumido constante para $n \ll n_x$. Assim, comparando a Equação (3.20) com a primeira hipótese de escala (3.15), temos que $n^{-\frac{1}{c}} = n^\beta \rightarrow \beta = -1/c$.

Realizando novamente este mesmo procedimento, contudo, para $k^d \gamma = 1$, temos que

$$k = \gamma^{-\frac{1}{d}}. \quad (3.21)$$

levando este novo resultado na Equação (3.18) temos que

$$I_{rms}(n, \gamma) = \gamma^{-\frac{1}{d}} I_{rms}(\gamma^{-\frac{c}{d}} n, 1), \quad (3.22)$$

em que $I_{rms}(\gamma^{-\frac{c}{d}} n, 1)$ pode ser assumido constante para $n \gg n_x$. Assim comparando a Equação (3.22) com a segunda hipótese de escala (3.16) obtemos que $\gamma^{-\frac{1}{d}} = \gamma^{\alpha_2} \rightarrow \alpha_2 = -1/d$.

O terceiro expoente crítico z_2 é obtido quando o fator de escala k é coincidente entre os dois regimes (crescimento acelerado e saturação constante) em um número específico de *crossover* n_x , portanto igualando as Equações (3.19) e (3.21) e considerando $\alpha_2 = -1/d$ e $\beta = -1/c$ temos que

$$n^\beta = \gamma^{\alpha_2}, \quad (3.23)$$

portanto,

$$n_x = \gamma^{\frac{\alpha_2}{\beta}}. \quad (3.24)$$

Comparando a Equação (3.24) com a terceira hipótese de escala (3.17) obtemos que

$$\underbrace{z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta}}_{\text{Lei de Escala}}. \quad (3.25)$$

Sendo a Equação (3.25) uma lei de escala relacionando estes três novos expoentes críticos em uma única expressão. Para que possa ser possível validarmos este último resultado os expoentes críticos foram também obtidos numericamente.

Como pode ser visto pela Figura 3.9 o expoente crítico β já foi calculado a partir de um ajuste em lei de potência. Vale notar que o gráfico de I_{rms} vs. n (Figura 3.9) já

representa o que foi proposto pela primeira hipótese de escala (3.15) no limite de $n \ll n_x$. O valor obtido numericamente para este expoente foi de $\beta = 0,4966(5) \approx 0,5$.

O expoente crítico α_2 pode ser obtido pela relação da segunda hipótese de escala (3.16) no limite de um número grande de iterações ($n \gg n_x$). Desta forma, foi plotado um gráfico de $I_{rms,sat}$ para diferentes valores do parâmetro de controle γ , como pode ser visto pela Figura 3.10. O valor obtido para o expoente de saturação foi de $\alpha_2 = -0,4993(3)$.

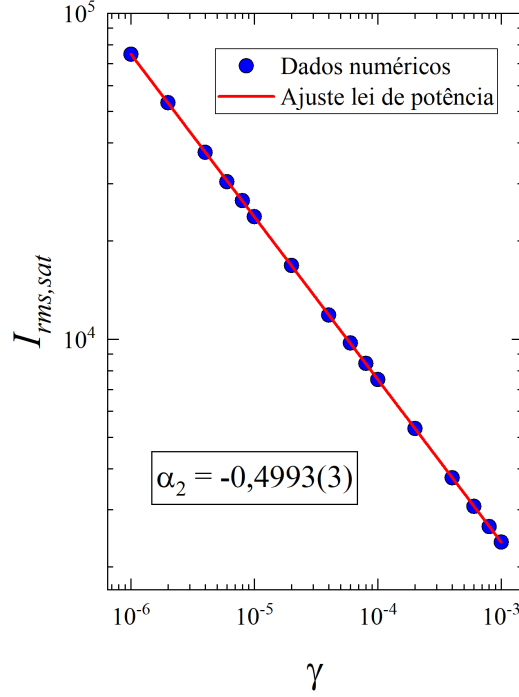


Figura 3.10: Comportamento de $I_{rms,sat}$ vs. γ para $n \gg n_x$ e $\epsilon = 150$. O expoente crítico obtido foi de $\alpha_2 = -0,4993(3)$.

Por último, temos o terceiro expoente crítico z_2 , que pode ser obtido através da relação estabelecida pela terceira hipótese de escala (3.17). Através desta relação é feito um *plot* de n_x para diferentes valores de γ , sendo n_x o número de *crossover*, que identifica a transição do regime de crescimento acelerado para o de saturação constante das curvas de I_{rms} . Este pode ser visto pela Figura 3.11. O valor obtido numericamente para este expoente foi de $z_2 = -1,004(2)$.

Desta forma, a partir do conhecimento de dois expoentes críticos numericamente calculados, sejam β e α_2 , podemos obter z_2 através da relação teórica (3.25), e portanto, compará-lo com o resultado numérico mostrado na Figura 3.11, assim

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} \simeq -1. \quad (3.26)$$

O valor obtido para z_2 pela lei de escala (3.25) está de acordo com aquele encontrado numericamente através do ajuste em lei de potência visto pela Figura 3.11.

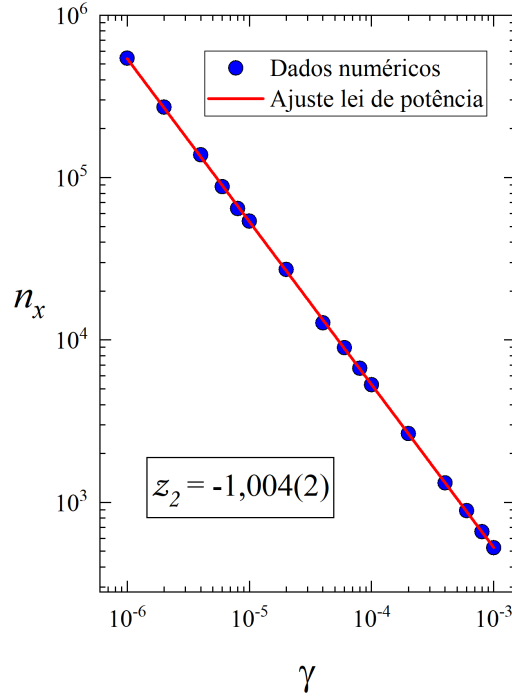


Figura 3.11: Comportamento de n_x vs. γ . O expoente crítico obtido foi $z_2 = -1,004(2)$.

Agora, consideraremos o desvio padrão médio que é dado por

$$\sigma(n, \gamma) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sqrt{I_j^2(n, \gamma) - \bar{I}_j^2(n, \gamma)}. \quad (3.27)$$

A Figura 3.12 nos mostra as curvas de σ vs. n para 6 diferentes parâmetros de controle γ e $\epsilon = 150$.

Analogamente ao caso anterior estas curvas apresentam o mesmo comportamento das curvas de I_{rms} vs. n , porém, agora para ϵ constante (Figura 3.9), desta forma podemos calcular numericamente os três expoentes críticos que descrevem esta dinâmica: β , μ_2 e δ_2 .

Os valores obtidos para μ_2 e δ_2 foram respectivamente $\mu_2 = -0,4994(6)$ e $\delta_2 = -1,003(2)$ como pode ser observado pelas Figuras 3.13 e 3.14. A conexão deste novos expoentes críticos com a lei de escala (3.25) é dada pela relação $\delta_2 = \mu_2/\beta \simeq -1$, em boa concordância com o resultado numérico obtido para δ_2 .

3.2 Caracterização analítica e solução da equação da difusão

A caracterização analítica [35–38] da difusão de partículas para o atrator caótico do espaço de fases da Figura 2.5 (a) será também dada pelo observável I_{rms} , contudo, agora este é obtido a partir da solução da equação da difusão [10, 38]. A equação da difusão é

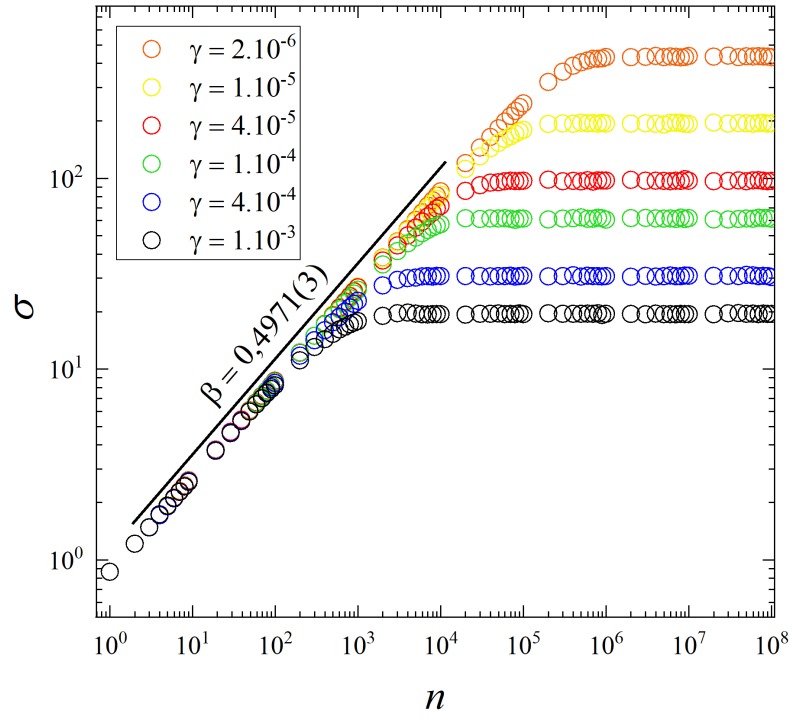


Figura 3.12: *Plot* das curvas de σ vs. n considerando $\epsilon = 150$ e; 6 diferentes parâmetros de controle γ . O expoente crítico obtido através do ajuste em lei de potência foi de $\beta \approx 0,5$.

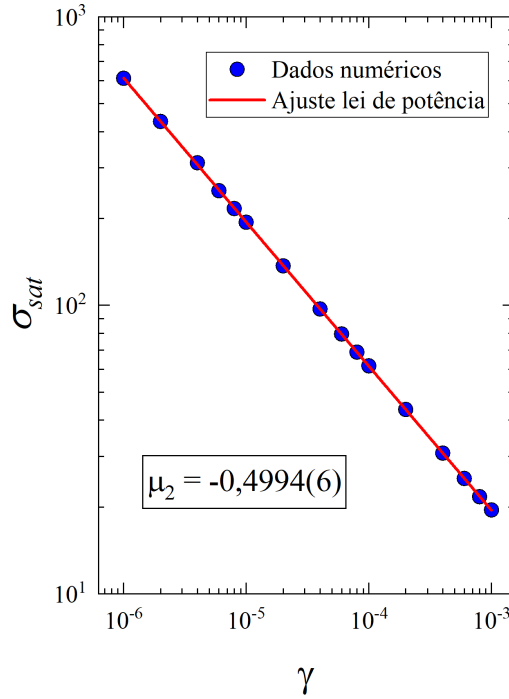


Figura 3.13: Comportamento de σ_{sat} vs. γ para $n \gg n_x$ e $\epsilon = 150$. O expoente crítico obtido foi de $\mu_2 = -0,4994(6)$.

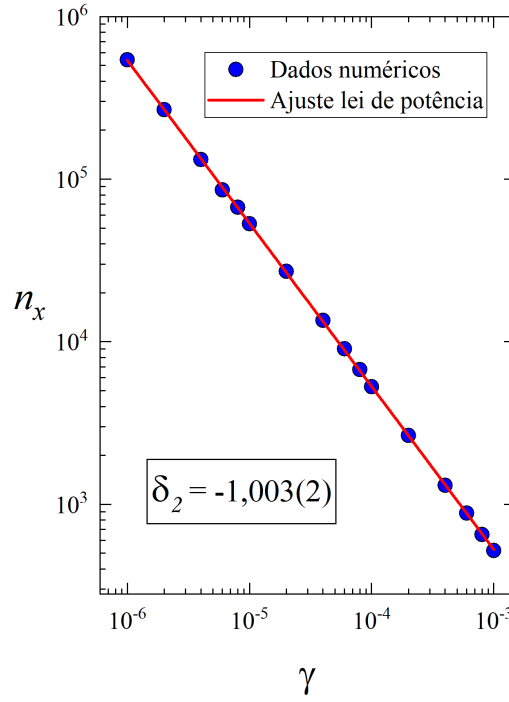


Figura 3.14: Comportamento de n_x vs. γ referente as curvas de σ . O expoente crítico obtido foi $\delta_2 = -1,003(2)$.

escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial P(I, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(I, n)}{\partial I^2}, \quad (3.28)$$

aqui P identifica a probabilidade de observarmos uma determinada ação I em um instante de tempo n conhecido e; D é o coeficiente de difusão ainda a ser determinado.

O coeficiente de difusão D pode ser obtido pela primeira equação do mapeamento (2.16). Desta forma, tomando o quadrado desta expressão temos

$$I_{n+1}^2 = (1 - \gamma)^2 I_n^2 + 2(1 - \gamma) I_n \epsilon \sin(\theta_n) + \epsilon^2 \sin^2(\theta_n). \quad (3.29)$$

Considerando também independência estatística entre as variáveis I_n e θ_n , uma média sobre todo o conjunto de $\theta \in [0, 2\pi]$ resulta em

$$\overline{I_{n+1}^2} = (1 - 2\gamma + \gamma^2) \overline{I_n^2} + \frac{\epsilon^2}{2}, \quad (3.30)$$

visto que $\overline{\sin(\theta_n)} = 0$ e $\overline{\sin^2(\theta_n)} = 1/2$. As partículas ao longo do atrator caótico se difundem de forma em que o coeficiente de difusão pode ser dado por $D = \frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{2}$, portanto, da Equação (3.30) temos

$$D(\gamma, \epsilon, n) = \frac{\gamma(\gamma - 2)}{2} \overline{I_n^2} + \frac{\epsilon^2}{4}. \quad (3.31)$$

A expressão de $\overline{I^2}_n$ na Equação (3.31) é também obtida da primeira equação do mapeamento dissipativo (2.16), de forma em que podemos transformar uma equação de diferenças em uma equação diferencial ordinária

$$\overline{I^2}_{n+1} - \overline{I^2}_n = \frac{\overline{I^2}_{n+1} - \overline{I^2}_n}{(n+1) - n} \cong \frac{d\overline{I^2}}{dn}, \quad (3.32)$$

desta forma temos que

$$\frac{d\overline{I^2}}{dn} = \gamma(\gamma - 2)\overline{I^2} + \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (3.33)$$

A equação diferencial (3.33) é separável e pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\int_{I_0^2}^{\overline{I^2}(n)} \frac{d\overline{I^2}}{[\gamma(\gamma - 2)\overline{I^2} + \epsilon^2/2]} = \int_0^n dn. \quad (3.34)$$

Definindo então $u = \gamma(\gamma - 2)\overline{I^2} + \epsilon^2/2$, temos que $du/d\overline{I^2} = \gamma(\gamma - 2)$, ou mesmo, $d\overline{I^2} = du/\gamma(\gamma - 2)$. Portanto temos

$$\frac{1}{\gamma(\gamma - 2)} \int \frac{du}{u} = \int_0^n dn, \quad (3.35)$$

em que, integrando temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\gamma(\gamma - 2)} \right) \ln(u) \Bigg|_{\gamma(\gamma-2)I_0^2 + \epsilon^2/2}^{\gamma(\gamma-2)\overline{I^2}(n) + \epsilon^2/2} &= n, \\ \frac{1}{\gamma(\gamma - 2)} \left[\ln \left(\gamma(\gamma - 2)\overline{I^2}(n) + \frac{\epsilon^2}{2} \right) - \ln \left(\gamma(\gamma - 2)I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \right) \right] &= n, \\ \ln \left(\gamma(\gamma - 2)\overline{I^2}(n) + \frac{\epsilon^2}{2} \right) &= \gamma n(\gamma - 2) + \ln \left(\gamma(\gamma - 2)I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aplicando a função exponencial na Equação (3.36) temos

$$\gamma(\gamma - 2)\overline{I^2}(n) + \frac{\epsilon^2}{2} = e^{\gamma n(\gamma - 2)} \left(\gamma(\gamma - 2)I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \right),$$

e por fim temos que $\overline{I^2}(n)$ pode ser escrito como

$$\overline{I^2}(n) = e^{\gamma n(\gamma - 2)} \left(I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)} \right) - \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)}. \quad (3.37)$$

Portanto a Equação (3.31) pode ser escrita como

$$D(\gamma, \epsilon, n) = \frac{\gamma(\gamma - 2)}{2n} \left(\frac{1 - e^{n\gamma(\gamma - 2)}}{1 - e^{\gamma(\gamma - 2)}} \right) \left(I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)} \right) e^{\gamma(\gamma - 2)}. \quad (3.38)$$

A partir da Equação (3.38) podemos observar que o intervalo da validade para a expressão do coeficiente de difusão $D \geq 0$ é dado quando temos a condição

$$I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)} \leq 0, \quad (3.39)$$

de forma em que as condições iniciais do sistema devem ser do tipo $I_0^2 \leq \epsilon^2/(2\gamma(2 - \gamma))$. A Figura 3.15 (a) e (b) nos mostra o *plot* de D/ϵ^2 vs. n para diferentes combinações de parâmetros de controle ϵ e γ considerando condições iniciais de baixa energia $I_0 \simeq 0$.

A Figura 3.15 (a) foi construída para $\gamma = 10^{-3}$ e 4 diferentes parâmetros de controle ϵ , sendo eles: $\epsilon = 10$, $\epsilon = 50$, $\epsilon = 100$ e $\epsilon = 150$. Como o eixo horizontal do gráfico é dado em escala logarítmica podemos perceber que a variação de D , em um instante n para $n + 1$, é muito pequena, podendo então ser considerado constante no tempo. Este fato trará um grande efeito para a solução da equação da difusão como será visto mais adiante. Já a Figura 3.15 (b) nos mostra D/ϵ^2 vs. n considerando $\epsilon = 150$ e 4 valores de γ : $\gamma = 10^{-2}$, $\gamma = 10^{-3}$, $\gamma = 10^{-4}$ e $\gamma = 10^{-5}$. Já na Figura 3.15 (c) temos o mesmo gráfico de (b) após a transformação de escala $n \rightarrow n\gamma$, apresentando invariância de escala de D/ϵ^2 para a conveniente variável $n\gamma$.

Para que possamos obter uma solução para a equação da difusão (3.28), devemos definir as condições de contorno existentes para $P(I, n)$. Considerando que condições iniciais ideais sugerem que $P(I, 0) = 0$ para todos os pontos no espaço (I, θ) com exceção daquelas estabelecidas em $I = I_0$, ou seja, nas condições iniciais do sistema. Esta afirmação pode ser descrita por meio da função delta de Dirac

$$P(I, 0) = \delta(I - I_0). \quad (3.40)$$

As condições de contorno de $P(I, n)$ são então definidas conforme a distribuição observada pela Figura 2.5 (b) na subseção 2.3.1 de forma em que

$$\lim_{I \rightarrow \pm\infty} P(I, n) = 0. \quad (3.41)$$

Como já discutido em [10] o método da transformada de Fourier decompõem a densidade de probabilidade P em uma família de ondas planas com soluções do tipo $F(k, n)e^{-ikI}$, desta forma, considerando que a equação da difusão é homogênea no espaço, ela torna-se invariante translacionalmente, de forma em que para uma solução qualquer $P(I, n)$, teremos outra igualmente válida dada por $P(I - \Delta I, n)$ que descreve a evolução de uma condição inicial transladada por um fator ΔI . Portanto, sobre circunstâncias bem gerais a probabilidade pode ter solução (translacionalmente invariante) do tipo $P(I, n) = F(k, n)e^{-ikI}$. Levando este resultado na equação da difusão (3.28) temos

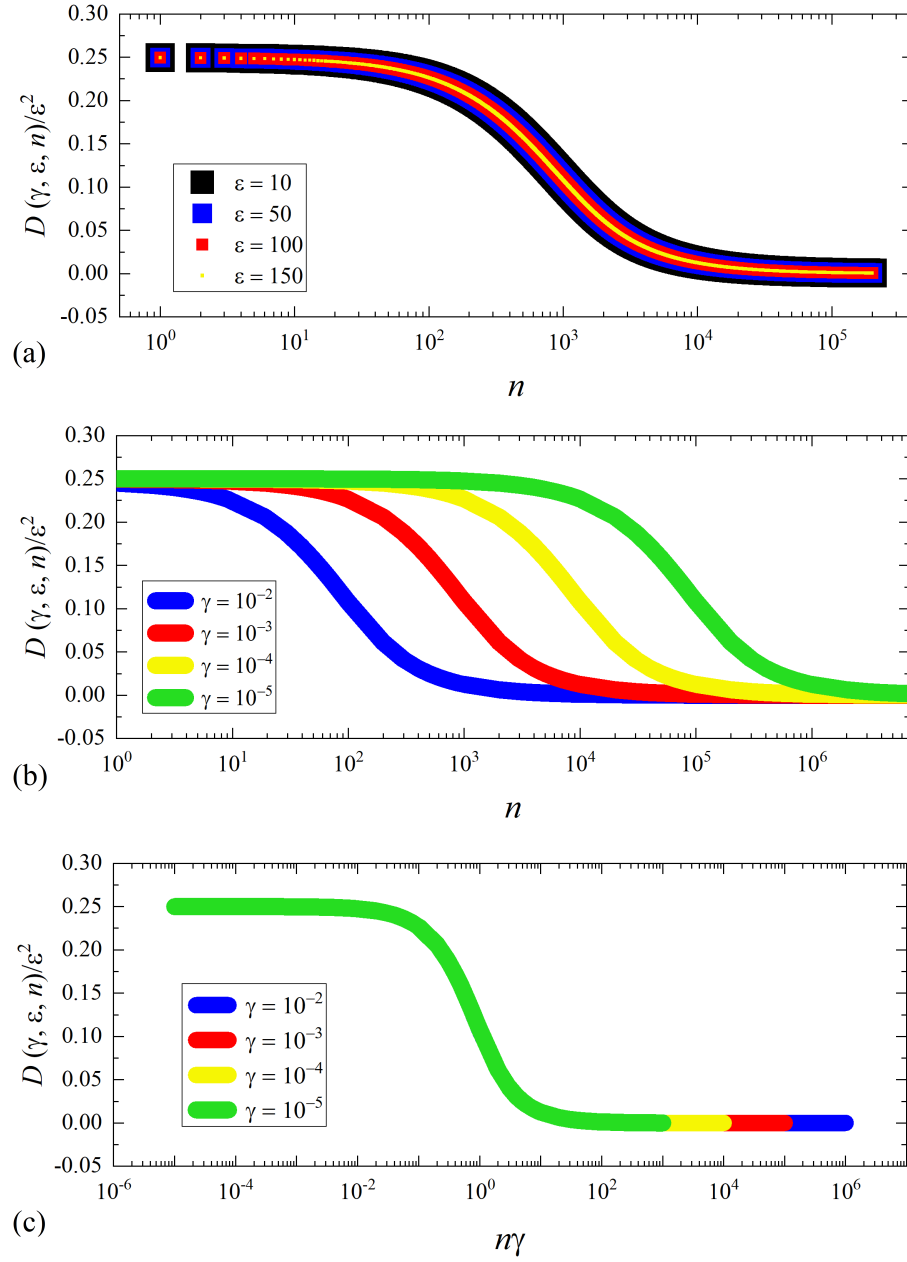


Figura 3.15: *Plot* de D/ϵ^2 vs. n para $I_0 = 10^{-8}\epsilon$ e diferentes combinações de parâmetros de controle: (a) $\gamma = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10, \epsilon = 50, \epsilon = 100$ e $\epsilon = 150$; (b) $\epsilon = 150$ e $\gamma = 10^{-2}, \gamma = 10^{-3}, \gamma = 10^{-4}$ e $\gamma = 10^{-5}$ e; (c) mesmo *plot* que em (b) após a conveniente transformação $n \rightarrow n\gamma$

$$\frac{\partial F(k, n)}{\partial n} e^{-ikI} = -Dk^2 F(k, n) e^{-ikI},$$

$$\frac{\partial F(k, n)}{\partial n} = -Dk^2 F(k, n). \quad (3.42)$$

Cuja solução pode ser facilmente obtida a partir da integração por separáveis

$$\int_{F(k,0)}^{F(k,n)} \frac{dF'(k,n)}{F'(k,n)} = -Dk^2 \int_0^n dn, \quad (3.43)$$

assim,

$$F(k,n) = F(k,0)e^{-Dk^2n}. \quad (3.44)$$

A transformada de Fourier $F(k,n)$ [38] pode ser escrita como

$$F(k,n) = \mathcal{F}\{P(I,n)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(I,n) e^{ikI} dI. \quad (3.45)$$

Desta forma, podemos obter $F(k,0)$ utilizando a condição de contorno (3.40) em que $P(I,0) = \delta(I - I_0)$, então

$$F(k,0) = \mathcal{F}\{P(I,0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(I - I_0) e^{ikI} dI = \frac{e^{ikI_0}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.46)$$

visto que pela *propriedade da filtragem* [39,40] temos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a)$.

Substituindo este resultado em (3.44) temos que $F(k,n)$ é dado por

$$F(k,n) = \frac{e^{ikI_0} e^{-Dk^2n}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.47)$$

Com base neste último resultado podemos obtermos a transformada inversa de Fourier $P(I,n)$ a partir da seguinte expressão

$$P(I,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k,n) e^{-ikI} dk, \quad (3.48)$$

que nos leva a solução

$$P(I,n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}}. \quad (3.49)$$

A descrição da difusão de partículas no atrator caótico do espaço de fases será dado a partir do observável $I_{rms}(n) = \sqrt{\overline{I^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 P(I,n) dI$, que nos leva a

$$I_{rms}(n) = \sqrt{2nD(n) + I_0^2}. \quad (3.50)$$

Desta forma, utilizando a expressão para o coeficiente de difusão D obtido em (3.38) obtemos que

$$I_{rms}(n) = \sqrt{\gamma(\gamma-2) \left(\frac{1 - e^{n\gamma(\gamma-2)}}{1 - e^{\gamma(\gamma-2)}} \right) \left(I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma-2)} \right) e^{\gamma(\gamma-2)} + I_0^2}. \quad (3.51)$$

A partir do resultado obtido pela Equação (3.51) torna-se possível analisarmos alguns importantes limites de n para as curvas de I_{rms} . O primeiro deles é identificado ao tomarmos $n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow 0} I_{rms}(n) = I_{rms}(0) = I_0, \quad (3.52)$$

em que é visto uma boa concordância com a condição inicial do sistema. Tomando agora $n \rightarrow \infty$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{rms}(n) = \sqrt{\gamma(\gamma - 2) \left(\frac{1}{1 - e^{\gamma(\gamma - 2)}} \right) \left(I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)} \right) e^{\gamma(\gamma - 2)} + I_0^2}, \quad (3.53)$$

caracterizando o regime de saturação das curvas de I_{rms} vs. n . Expandindo $f(x) = 1 - e^x$ em série de Taylor-Maclaurin com $x = \gamma(\gamma - 2)$ temos que $1 - e^{\gamma(\gamma - 2)} \simeq -\gamma(\gamma - 2)$. Considerando também que as condições iniciais $I_0 \simeq 0$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{rms} = I_{rms,sat} = \sqrt{\frac{\epsilon^2 e^{\gamma(\gamma - 2)}}{2\gamma(2 - \gamma)}} = \frac{e^{\gamma(\gamma - 2)}}{\sqrt{2(2 - \gamma)}} \epsilon^1 \gamma^{-1/2}, \quad (3.54)$$

e de forma geral

$$I_{rms,sat} \propto \epsilon^1 \gamma^{-1/2}. \quad (3.55)$$

Este resultado confirma as hipóteses de escala (3.3) e (3.16) ($I_{rms,sat} \propto \epsilon^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2}$) estabelecidas para as curvas de I_{rms} no limite de saturação constante ($n \rightarrow \infty$). Também, pode-se notar uma marcante concordância entre estes valores obtidos para os expoentes críticos α analiticamente, pela solução da equação da difusão, e aqueles obtidos pela descrição fenomenológica ($\alpha_1 = 0,996(1)$ e $\alpha_2 = -0,4993(3)$), através das simulações numéricas.

Um terceiro importante resultado é obtido ao impormos $n \rightarrow 0$, ou mesmo, $n \ll n_x$, identificando o regime de crescimento acelerado da difusão. Considerando também condições iniciais muito próximas de zero e expandindo os termos $1 - e^{n\gamma(\gamma - 2)}$ e $1 - e^{\gamma(\gamma - 2)}$ em série de Taylor a equação (3.51) pode ser reescrita como

$$I_{rms}(n) = \sqrt{\gamma(\gamma - 2) \left(\frac{-n\gamma(\gamma - 2)}{-\gamma(\gamma - 2)} \right) \left(\frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)} \right) e^{\gamma(\gamma - 2)}}, \quad (3.56)$$

consequentemente

$$I_{rms}(n) = \sqrt{\frac{e^{\gamma(\gamma - 2)}}{2}} (n\epsilon^2)^{1/2}, \quad (3.57)$$

e de forma geral temos que

$$I_{rms}(n) \propto (n\epsilon^2)^{1/2}, \quad (3.58)$$

confirmando as hipóteses de escala (3.2) e (3.15) sobre o expoente crítico de crescimento acelerado β , agora identificado como $\beta = 1/2$. É observada uma ótima concordância com aqueles calculados numericamente pela descrição fenomenológica nas subseções 3.1.1 e 3.1.2.

Por fim, um último limite é obtido igualando a curva de $I_{rms,sat}$ (3.54) com a Equação (3.58), caracterizando o número de iteração n em que ocorre a mudança de um regime de crescimento acelerado para o de saturação constante, isto é, $n = n_x$

$$\begin{aligned} \frac{e^{\gamma(\gamma-2)}\epsilon}{\sqrt{2\gamma(2-\gamma)}} &= \sqrt{\frac{e^{\gamma(\gamma-2)}n\epsilon^2}{2}}, \\ \frac{e^{2\gamma(\gamma-2)}\epsilon^2}{2\gamma(2-\gamma)} &= \frac{e^{\gamma(\gamma-2)}n\epsilon^2}{2}, \\ n_x &= \frac{e^{\gamma(\gamma-2)}}{(2-\gamma)}\gamma^{-1}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

e de forma geral

$$n_x \propto \epsilon^0 \gamma^{-1}. \quad (3.60)$$

A Equação (3.60) confirma as hipóteses de escala (3.4) e (3.17) ($n_x \propto \epsilon^{z_1} \gamma^{z_2}$) referentes ao número de *crossover* n_x . Nota-se também uma ótima concordância com os resultados numericamente obtidos ($z_1 \approx 0$ e $z_2 = -1,004(2)$).

3.3 Comparação entre as metodologias e a invariância de escala

Após a obtenção da equação analítica para as curvas de I_{rms} , através da solução da equação da difusão, podemos compará-las com aquelas obtidas por simulação na descrição fenomenológica apresentada na seção 3.1. A Figura 3.16 nos mostra um gráfico de I_{rms} vs. n para diferentes combinações de parâmetros de controle ϵ e γ comparando as duas metodologias utilizadas (simulacional e analítica). Os círculos representam as simulações numéricas obtidas a partir das equações do mapeamento (2.16) (descrição fenomenológica) e as linhas contínuas descrevem os resultados analíticos (3.51), realizados a partir da solução da equação da difusão.

O conjunto dos expoentes críticos obtidos na seção 3.1 confirmam a invariância de escala encontrada na difusão caótica do espaço de fases. Para tal verificação podemos

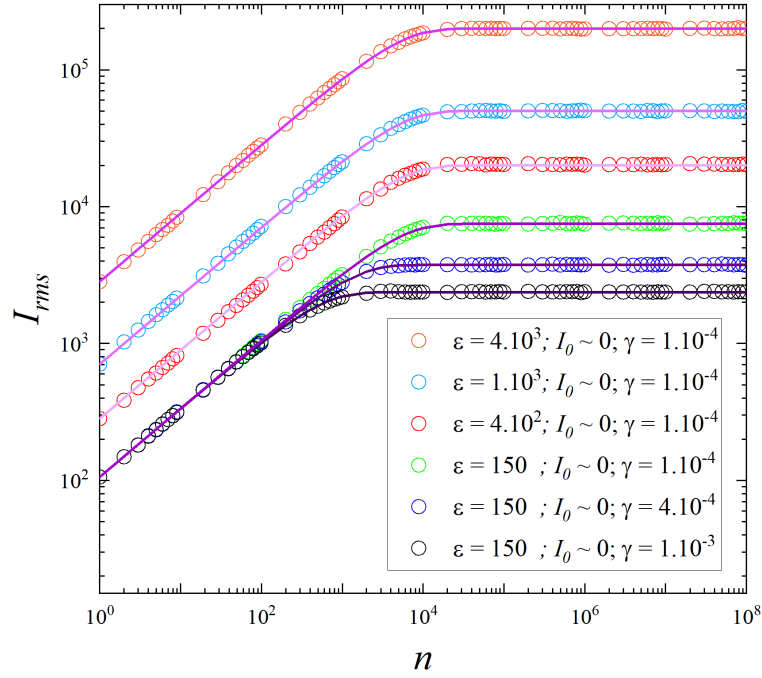


Figura 3.16: Gráfico de I_{rms} vs. n para diferentes combinações de parâmetros de controle ϵ e γ . Os círculos representam uma descrição fenomenológica da ação quadrática média, já as linhas contínuas representam este mesmo observável, contudo através de uma descrição analítica após a solução da equação da difusão.

realizar uma sobreposição das curvas de I_{rms} para quaisquer diferentes valores de ϵ e γ em uma única curva universal. A transformação a ser feita deve ser $I_{rms} \rightarrow I_{rms} / (\epsilon^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2})$ e $n \rightarrow n / (\epsilon^{z_1} \gamma^{z_2})$.

A Figura 3.17 apresenta todas as curvas exibidas em 3.16 sobrepostas em uma curva universal após a transformação de escala mencionada. Está é uma confirmação evidente da invariância de escala sobre a difusão caótica apresentada no espaço de fases do mapeamento (2.16), sendo este um importante indicador de que o sistema está passando por uma transição de fase contínua [2, 10], de fato, uma transição de fase de difusão ilimitada para limitada. O mesmo fenômeno é visto para as carvas de σ vs. n , como pode ser observado pela Figura 3.18, reforçando este formalismo.

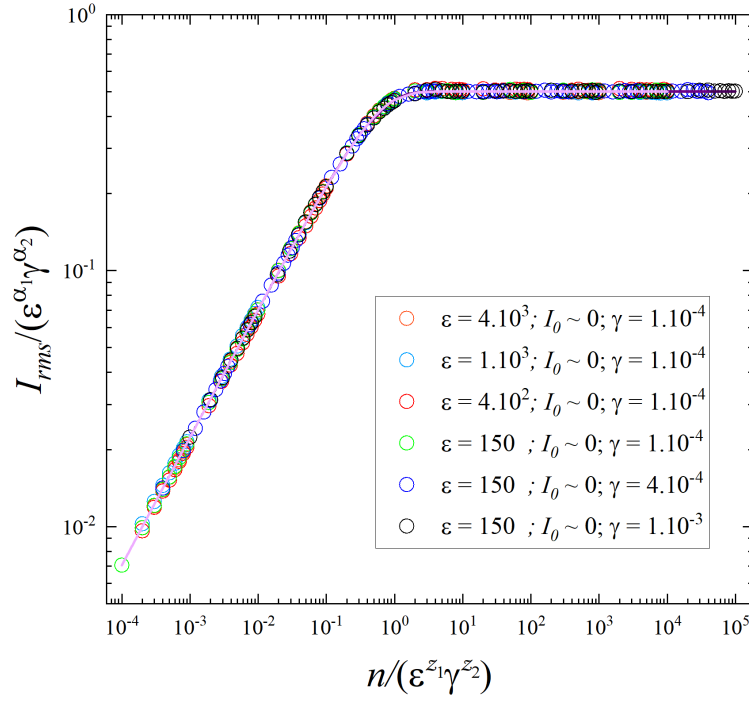


Figura 3.17: Sobreposição das curvas apresentadas na Figura 3.16 em um única curva universal depois das transformações de escala $I_{rms} \rightarrow I_{rms} / (\epsilon^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2})$ e $n \rightarrow n / (\epsilon^{z_1} \gamma^{z_2})$.

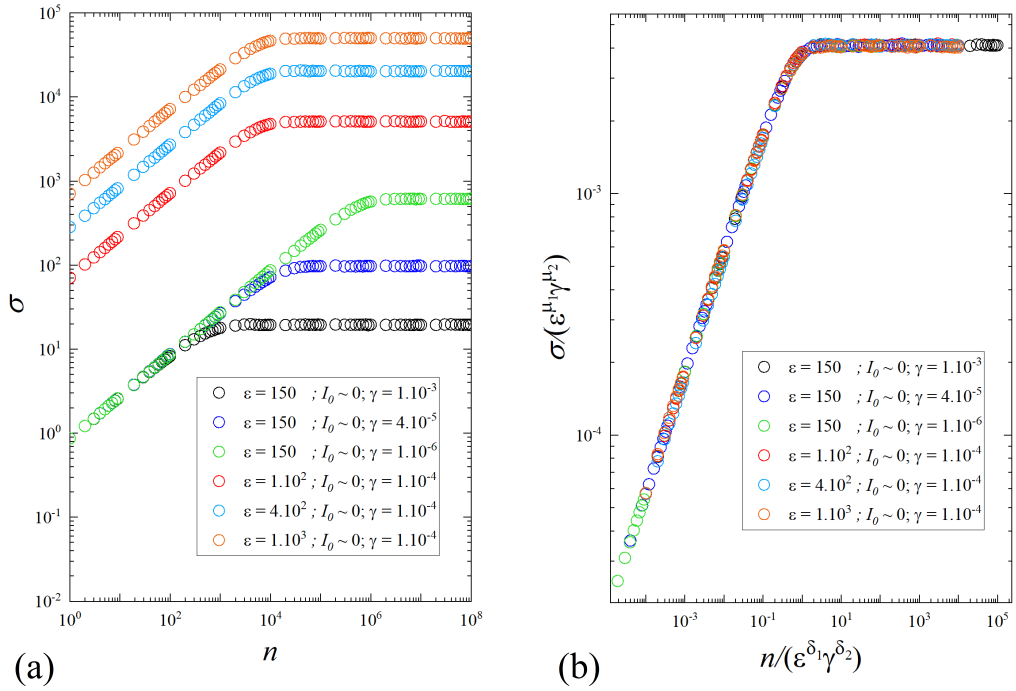


Figura 3.18: (a) Gráfico de σ vs. n para diferentes combinações de parâmetros de controle ϵ e γ . (b) Sobreposição das curvas de (a) em um única curva universal depois das transformações de escala $\sigma \rightarrow \sigma / (\epsilon^{\delta_1} \gamma^{\delta_2})$ e $n \rightarrow n / (\epsilon^{\delta_1} \gamma^{\delta_2})$.

Capítulo 4

Um *insight* sobre a transição de fase

Como proposto inicialmente, devemos responder a quatro perguntas essenciais propostas em [10] que levam a caracterização de uma transição de fase, são elas: (1) qual é a quebra de simetria do sistema; (2) quem seria um bom candidato à parâmetro de ordem do sistema; (3) quais são as excitações elementares e; (4) quais são os defeitos topológicos que dificultam o transporte de partículas.

4.1 (1) Quebra de simetria

Em um posterior estudo sobre transição de fase em um sistema caótico [14], a quebra de simetria foi identificada no espaço de fases, em que para os dois regimes da transição ($\epsilon = 0$ e $\epsilon \neq 0$) as propriedades destes espaços de fases eram drasticamente modificadas, analogamente a quebra de simetria vista pela Figura 2.2. Contudo, para este atual estudo de transição de fase em um sistema dissipativo dado pelo mapeamento padrão devemos nos atentar a uma nova quebra de simetria, não no espaço de fases, porém em suas equações dinâmicas. A transição de fase é observada na janela em que γ está próximo de zero e temos alta não linearidade atribuída ao sistema através do parâmetro de controle ϵ . Ao passo em que $\gamma = 0$ a equação dinâmica para a ação I é dada por

$$I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta_n). \quad (4.1)$$

Neste sentido, para um número de iteração n grande deste sistema $|I| \gg \epsilon$, de forma em que esta equação será aproximadamente $I_{n+1} = I_n$, identificando assim uma simetria nas equações dinâmicas deste sistema. Já ao passo em que temos $\gamma \neq 0$, esta simetria equacional é quebrada, levando à

$$I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + \epsilon \sin(\theta_n). \quad (4.2)$$

Na Equação (4.2) a variável I_n é contida por um fator dissipativo, não permitindo um difusão ilimitada da variável I_{n+1} . Este fato é observado através da saturação da difusão de partículas observada para as curvas de I_{rms} vs. n , como visto pela Figura 3.2. Por outro lado, esta saturação não é observada quando $\gamma \neq 0$ (como visto pela Figura 3.1). Assim, a quebra de simetria é identificada nas equações dinâmicas da ação I sob os regimes de transição de fase, $\gamma = 0$ e $\gamma \neq 0$, o primeiro levando a um crescimento ilimitado das curvas de I_{rms} e o segundo suprimindo esta difusão caótica ilimitada através de uma saturação das curvas de I_{rms} para longos tempos de iteração n .

4.2 (2) Parâmetro de ordem

Como visto em [10] o parâmetro de ordem acaba por identificar as importantes variáveis que descrevem um determinado sistema. De forma geral, para justificarmos a escolha do parâmetro de ordem em uma transição de fase contínua, duas condições devem ser satisfeitas:

1. Primeiramente devemos ter que, ao passo em que o parâmetro que controla a transição do sistema tende a zero, o candidato à parâmetro de ordem escolhido deve se aproximar continuamente de zero (definindo assim um parâmetro de ordem);
2. O resultado de uma perturbação externa sobre o parâmetro de ordem deve divergir no mesmo limite em que o parâmetro de controle vai a zero, ou seja, a susceptibilidade $\chi \rightarrow \infty$. Este último por sua vez caracteriza uma transição de fase de segunda ordem.

No estudo de uma transição de fase contínua para um mapeamento conservativo [14], o observável identificado a parâmetro de ordem foram as curvas de I_{rms} em seu regime de saturação ($I_{rms,sat}$) para o parâmetro de transição ϵ , contudo, neste atual estudo, temos que pela Figura 3.10 a medida em que o parâmetro de transição γ vai a zero as curvas de $I_{rms,sat}$ vão para $+\infty$ continuamente, justamente o inverso do que espera-se para o parâmetro de ordem. Desta forma, um ótimo candidato à parâmetro de ordem deve ser $\rho = 1/I_{rms,sat}$.

Para verificarmos tal fato, basta retomarmos o resultado obtido para as curvas analíticas de $I_{rms,sat}(n)$ (3.54), assim vemos que

$$\rho = \frac{1}{I_{rms,sat}} = \frac{\sqrt{2(2-\gamma)}}{e^{\gamma(\gamma-2)}\epsilon} \gamma^{1/2}, \quad (4.3)$$

de forma em que ao tendermos o parâmetro de transição γ à zero, vemos também que o candidato a parâmetro de ordem ρ vai à zero continuamente (Figura 3.10), atendendo

então um dos requisitos que o parâmetro de ordem deve ter em uma transição de fase contínua. Por fim, a segunda proposição pode ser verificada da seguinte forma: como

$$\chi = \frac{\partial \rho}{\partial \gamma} \propto \gamma^{-1/2},$$

fica fácil verificarmos que no limite de $\gamma \rightarrow 0$ temos que $\chi \rightarrow \infty$, sendo este um fator característico de uma transição de fase de segunda ordem (transição de fase contínua).

4.3 (3) Excitações elementares

Para a investigação das excitações elementares devemos relembrar algumas características já discutidas anteriormente sobre o mapeamento (2.16) apresentado no Capítulo 2. Foi observado a presença de dois diferentes parâmetros de controle. Um deles é ϵ , que controla a intensidade da não linearidade do sistema devido ao acoplamento à função não linear $\sin(\theta_n)$. O segundo parâmetro é dado por $\gamma \in [0, 1]$, este último controla a dissipação atribuída ao sistema. Em um problema de caminhada aleatória (*random walk problem*) [18] o comprimento de cada movimento é dado de forma aleatória pelo tamanho de cada passo estabelecido pelo sistema, bem como sua direção. O mesmo comportamento é observado pela função não linear $\epsilon \sin(\theta_n)$. Na difusão caótica observada pelo mapeamento (2.16) o tamanho de cada passo é dado pelo próprio parâmetro de controle ϵ . A amplitude média I_a para este comportamento caótico pode ser calculada através do quadrado médio da primeira equação do mapeamento (2.16), portanto analogamente à equação (3.30) temos que

$$\overline{I^2}_{n+1} = (1 - \gamma)^2 \overline{I^2}_n + \frac{\epsilon^2}{2}, \quad (4.4)$$

em que é assumido independência estatística entre as variáveis de ação I e ângulo θ , e que o resultado de $\overline{\sin(\theta_n)} = 0$ e $\overline{\sin^2(\theta_n)} = 1/2$. Considerando também as condições iniciais do sistema próximas à zero obtemos a amplitude média deste comportamento caótico sendo

$$\overline{I^2}_{n+1} = I_a^2 = \frac{\epsilon^2}{2}, \quad (4.5)$$

ou mesmo, $I_a = \epsilon/\sqrt{2}$. Estes fatos nos levam a concluir que a excitação elementar deste sistema é definida pela função não linear $\epsilon \sin(\theta)$, encontrada na primeira equação do mapeamento (2.16), cuja amplitude média é $\epsilon/\sqrt{2}$. Este termo traz uma dinâmica totalmente aleatória para a ação I , trazendo assim as primeiras órbitas caóticas para espaço de fases.

4.4 (4) Defeitos topológicos

Os defeitos topológicos que poderiam impactar no transporte de partículas estão diretamente relacionados com as diferentes estruturas que poderiam estar presentes no espaço de fases. Como um resultado já mencionado, a Ref. [14] nos apresenta que em espaços de fases mistos de sistemas conservativos (como o visto pela Figura 2.2 (b)), ou seja, que preservam área no espaço de fases, temos que os defeitos topológicos estão diretamente ligados às estruturas regulares denominadas ilhas periódicas devido ao efeito conhecido como *stickness* [36, 41, 42]. Este último por sua vez, não é observado em sistemas dissipativos como o deste trabalho. Em sistemas que não preservam a área em seus espaços de fases (dissipativos) os defeitos topológicos estariam ligados com a existência de pontos fixos de atração (*sinks*), como visto pela Figura 2.4. Contudo, pela janela de parâmetros utilizados para observarmos a transição de fase de difusão caótica ilimitada para limitada, estes pontos fixos de atração deixam de existir conforme o parâmetro de não linearidade torna-se grande. Vale notar que a dissipação no sistema, de fato, implica em uma modificação topológica do espaço de fases, como a determinante da matriz Jacobiana é menor que a unidade a contração de área no espaço de fases é observada, levando a existência de atratores caóticos.

Capítulo 5

Discussões e conclusão

Utilizando a dinâmica de um mapeamento discreto (mapa padrão) sob as variáveis ação I e ângulo θ , caracterizamos uma transição de fase dinâmica, que é a transição de fase de difusão ilimitada para limitada em um sistema dissipativo, a qual ocorre na variação do parâmetro de controle γ e valores grandes de ϵ ($\epsilon > 10$). Para $\gamma = 0$ o sistema não apresenta dissipação portanto, com grandes valores de ϵ o sistema apresenta alta não linearidade levando a uma difusão caótica de partículas ilimitada para $\pm\infty$. Já para $\gamma \neq 0$ o sistema passa a ser dissipativo, desta forma observa-se contração de área no espaço de fases e a formação de um atrator caótico, estrutura responsável pela limitação da difusão caótica. No início desta caracterização foi discutido a obtenção do mapeamento padrão, também conhecido como mapa de Chirikov-Taylor, bem como suas principais propriedades, tais como preservação e contração de área no espaços de fases; a descrição de suas estruturas (mar de caos, ilhas periódicas, curvas invariantes *spanning* e pontos fixos assintoticamente estáveis) e; a existência de caos através da obtenção dos expoentes de Lyapunov. Mais adiante fizemos uma abordagem completa sobre a caracterização da difusão das partículas para o atrator caótico do espaço de fases através de duas diferentes metodologias. Primeiramente recorremos a uma descrição fenomenológica utilizando um processo simulacional. Assim, analisando as curvas de $I_{rms} \times n$, assumindo hipóteses de escala e utilizando funções homogêneas generalizadas foi possível a obtenção de leis de escala que correlacionam os expoentes críticos responsáveis pela descrição da dinâmica desta difusão: $\alpha_{1,2}$ (expoente de saturação), β (expoente de aceleração) e $z_{1,2}$ (expoente de *crossover*). Estes expoentes de escala são também obtidos numericamente confirmando a lei de escala. O segundo método é analítico, através da solução da equação da difusão. A comparação destas duas metodologias é feita na Seção 3.3, em que é possível observarmos uma boa concordância entre esses dois formalismos. Utilizando as transformações de escala $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/(\epsilon^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2})$ e $n \rightarrow n/(\epsilon^{z_1}\gamma^{z_2})$ a invariância de escala é identificada para esta difusão, sendo este um fator essencial em transições de fase de segunda ordem. Por fim, no

Capítulo 4 a transição de fase é caracterizada, respondendo à quatro perguntas essenciais propostas em [10] que definem uma transição de fase. Primeiramente, a quebra de simetria é identificada nas equações dinâmicas do mapeamento estudado, em especial da ação I sob os regimes de transição $\gamma = 0$ e $\gamma \neq 0$, o primeiro levando a um crescimento ilimitada das curvas de I_{rms} (Figura 3.1) e o segundo suprimindo-as através de uma saturação das curvas de I_{rms} para longos tempos de iteração n (Figura 3.2). Segundo, o parâmetro de ordem é identificado por $\rho = \frac{1}{I_{rms,sat}}$, visto que $I_{rms,sat}$ vai continuamente a $+\infty$ ao passo em que $\gamma \rightarrow 0$ (Figura 3.10), desta forma, temos que $\rho \rightarrow 0$ continuamente ao passo em que o parâmetro de transição vai a zero. Também temos que a susceptibilidade $\chi \rightarrow \infty$ no limite de $\gamma \rightarrow 0$. Esta última é uma assinatura clara de uma transição de fases de segunda ordem (contínua). Em terceiro, as excitações elementares são definidas pela função não linear $\epsilon \sin(\theta_n)$, que trás um comportamento randômico para a dinâmica das partículas no espaço de fases, semelhante ao problema da caminhada aleatória, portanto criando a aparição das primeiras órbitas caóticas para o espaço de fases. Por fim, a janela de parâmetros de controle considerados nesta caracterização levam à ausência dos *sinks* (pontos fixos de convergência assintótica) e, portanto, à inexistência de defeitos topológicos impactando na difusão de partículas. Todos estes fatores nos permitem concluir que a transição de fase de difusão caótica ilimitada para limitada é uma transição de segunda ordem.

Capítulo 6

Referências Bibliográficas

- [1] LEONEL, E. D. **Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2019.
- [2] LEONEL, E. D. **Scaling laws in dynamical systems**. 1. ed. Cingapura: Springer, 2021.
- [3] STROGATZ, S.H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering**. 2. ed. Nova York: CRC Press, 2018.
- [4] POINCARÉ, H. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste: Méthodes de MM. Newcomb, Glydén, Lindstedt et Bohlin**. Vol. 2. França: Gauthier-Villars it fils, 1893.
- [5] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of atmospheric sciences**, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963.
- [6] NETO, A. M. F.; SALINAS, S. R. A. **The physics of lyotropic liquid crystals: phase transitions and structural properties**. EUA: Oxford University Press on Demand, 2005.
- [7] KADANOFF, L. P. **Statistical physics: statics, dynamics and renormalization**. Cingapura: World Scientific Publishing Company, 2000.
- [8] REICHL, L. E. **A modern course in statistical physics**. 2. ed. Nova York: Wiley-Interscience, 1999.
- [9] JAEGER, G. The Ehrenfest Classification of Phase Transitions: Introduction and Evolution. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 53, n. 1, p. 51–81, 1998.
- [10] SETHNA, J.P. **Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters, and Complexity**. 2. ed. Nova York: Oxford University Press 2020.

- [11] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. **Physics Report**, v. 52, n. 05, p. 263–379, 1979.
- [12] WOELLNER, C. F. **Aspectos dinâmicos de uma rede de mapas Hamiltonianos acoplados**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Curitiba, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1884/8814>
- [13] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and chaotic dynamics**. 2. ed. Nova York: Springer Science, 2013.
- [14] MIRANDA, L.K.A.; KUWANA, C.M., HUGGLER, Y.H. et al. A short review of phase transition in a chaotic system. **The European Physical Journal Special Topics**. v. 231, p. 167–177, 2022.
- [15] LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. 1. ed. Editora Livraria da Física, 2007.
- [16] GREENE, J. M. A method for determining a stochastic transition. **Journal of Mathematical Physics**, v. 20, n. 06, p. 1183–1201, 1979.
- [17] LEONEL, E. D. et al. A dynamical phase transition for a family of Hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents. **Physics Letters A**, v. 379, n. 32-33, p. 1808–1815, 2015.
- [18] REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. 1. ed. Nova York: Wiley, 2009.
- [19] HOLLAND, P. Hamiltonian theory of wave and particle in quantum mechanics I. Liouville's theorem and the interpretation of the de Broglie-Bohm theory. **NUOVO CIMENTO-SOCIETA ITALIANA DI FISICA SEZIONE B**. v. 116, p. 1043-1070, 2001.
- [20] NAMBU, Y. Generalized hamiltonian dynamics. **Physical Review D**. v. 7, p. 2405, 1973.
- [21] BANYAGA, A. The geometry surrounding the Arnold-Liouville theorem. In: Advances in geometry. **Birkhäuser**, p. 53-69, 1999.
- [22] IWANIEC, T.; MARTIN, G. **The Liouville theorem. In: Analysis And Topology: A Volume Dedicated to the Memory of S Stoilow**, World Scientific. 1. ed. 1998.
- [23] FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. P. C. **Caos: uma introdução**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 1994.

- [24] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, v. 57, n. 03, p. 617–656, 1985.
- [25] LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2. ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2015.
- [26] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. E.; DA SILVA, J. K. L. Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis. **Physical Review Letters**, v. 93, n. 01, p. 014101, 2004.
- [27] MÉNDEZ-BERMÚDEZ, J. A.; AGUILAR-SÁNCHEZ, R. Scaling properties of discontinuous maps. **Physical Review E**, v. 85, n. 05, p. 056212, 2012.
- [28] LADEIRA, D. G.; DA SILVA, J. K. L. Time-dependent properties of a simplified Fermi-Ulam accelerator model. **Physical Review E**, v. 73, n. 02, p. 026201, 2006.
- [29] LADEIRA, D. G.; DA SILVA, J. K. L. Scaling properties of a simplified bouncer model and of Chirikov’s standard map. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 40, n. 38, p. 11467–11483, 2007.
- [30] LADEIRA, D. G.; DA SILVA, J. K. L. Scaling features of a breathing circular billiard. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 41, n. 36, p. 365101, 2008.
- [31] DE ALCANTARA BONFIM, O. F. Dynamical properties of an harmonic oscillator impacting a vibrating wall. **Physical Review E**, v. 79, n. 05, p. 056212, 2009.
- [32] DE ALCANTARA BONFIM, O. F. Fermi acceleration in a periodically driven Fermi–Ulam model. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 22, n. 06, p. 1250140, 2012.
- [33] OLIVEIRA, D. F. M.; ROBNIK, M. In-flight dissipation as a mechanism to suppress Fermi acceleration. **Physical Review E**, v. 83, n. 02, p. 026202, 2011.
- [34] DE OLIVEIRA, J. A.; BIZÃO, R. A.; LEONEL, E. D. Finding critical exponents for two-dimensional Hamiltonian maps. **Physical Review E**, v. 81, n. 04, p. 046212, 2010.
- [35] KUWANA, C. M. **Investigação da difusão caótica em mapeamentos Hamiltonianos**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/154008>

- [36] LEONEL, E. D.; KUWANA, C. M. An Investigation of Chaotic Diffusion in a Family of Hamiltonian Mappings Whose Angles Diverge in the Limit of Vanishingly Action. **Journal of Statistical Physics**, p. 170, n. 01, p. 69–78, 2017.
- [37] LEONEL, E. D. et al. Application of the diffusion equation to prove scaling invariance on the transition from limited to unlimited diffusion. **EPL (Europhysics Letters)**, p. 131, n. 01, p. 10004, 2020.
- [38] BUTKOV, E. **Mathematical physics**. 1. ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1968.
- [39] CORTIZO, S. F. **Sobre o cálculo delta de Dirac**, 1995.
- [40] VIANA, R. L. **Função delta de Dirac**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Paraná, Departamento de Física, 2005.
- [41] KRÜGER, T. S. **Grau de Hiperbolicidade do espaço de fases e sua relação com o efeito stickiness em sistemas conservativos**. Dissertação (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Paraná, 2016. Disponível em: <https://hdl.handle.net/1884/43665>
- [42] LIVORATI, A. L. P. et al. Investigation of stickiness influence in the anomalous transport and diffusion for a non-dissipative Fermi–Ulam model. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**. v. 55, p. 225–236, 2018.