

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIA E CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**O USO DE WAVELETS NA DETERMINAÇÃO
DO EXPOENTE DE HURST DE UMA SÉRIE
TEMPORAL DIÁRIA DE CHUVAS DO
MUNICÍPIO DE ARARAS – SP DE 1955-2000**

Autora: Roseli Aparecida Fernandes Chierice

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Campanha

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como requisito para obtenção do título de Mestre na Área de concentração em Física Aplicada.

Rio Claro, novembro de 2003

S. P. – Brasil

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Roberto Campanha

Prof. Dr. Anderson Luís Hebling Christofolletti

Prof.^a Dr.^a Margarete Domingues

Roseli Aparecida Fernandes Chierice

Rio Claro, 28 de novembro de 2003.

Resultado: Aprovada

Dedicatória

Para Natale, Regiane e Natalia com amor.

Agradecimentos

Agradeço às seguintes pessoas e entidades:

Ao Prof. Dr. José Roberto Campanha, pela preciosa orientação deste trabalho, amizade e incentivo e pelos ensinamentos transmitidos.

À minha mãe, pelo apoio e incentivo.

À Comissão Permanente do Magistério da Aeronáutica – COPEMA, da Academia da Força Aérea, pelo apoio e pela dispensa semanal concedida para que pudesse concluir este trabalho.

Ao Instituto de Geociências e ao Departamento de Física da UNESP de Rio Claro, pelo apoio e facilidades proporcionadas.

Aos professores do curso de pós graduação em Física, área de concentração Física Aplicada, pela amizade e ensinamentos.

Aos colegas do curso de Pós – Graduação: Antônio Luiz Ferrari, Paulo Roberto Ferrari, José Roberto Locatelli, Assis Brasil Favaretto, Sônia de Almeida e Rosângela Colabone, pela amizade e grande apoio nos momentos difíceis.

Aos colegas de trabalho da Divisão de Ensino da Academia da Força Aérea Prof. Alessandro Firmino de Jesus, Prof. Dr. Demóstene Marinotto e Prof^a Maria de Lourdes Pimentel Pizarro, pela ajuda e disponibilidade.

Ao Sr. Leotil L. F. Bellini *in memoriam* a disponibilidade dos registros diários de chuvas coletados na fazenda Santa Lúcia, situada no município de Araras, São Paulo.

A todos que colaboraram de alguma forma na realização deste trabalho.

Obrigado a todos. Obrigado a Deus.

Sumário

Capítulo 1 – Introdução	1
1.1 – Base dos Dados	2
1.2 – Resumo da Gênese da Precipitação do Estado de São Paulo	4
Capítulo 2 – Método de Análise de Séries Temporais	5
2.1 – Análise de Fourier	5
2.2 – Transformada de Fourier	7
2.3 – Transformada Discreta de Fourier	9
2.4 – Análise Wavelet	15
2.5 – Escala e Translação	16
2.6 – Propriedades de Wavelets	18
2.7 – Transformada Wavelet Contínua	19
2.8 – Aplicação da Wavelet de Morlet em um Sinal	24
2.9 – Transformada Wavelet Discreta	25
Capítulo 3 – Fractais	30
3.1 – Dimensão	32
3.2 – Auto-Similaridade	37
3.3 – Auto-Afinidade	40
3.4 – Determinação do Expoente de Hurst (H) e da Dimensão Fractal (D)	42
3.4.1 – Método R/S	42
3.4.2 – Estimativa do Expoente de Hurst (H)	45

3.4.3 – Programa para Gerar Ruído com Determinado Valor de H	47
3.4.4 – Cálculo da Dimensão Fractal (D)	51
3.4.5 – Determinação do Expoente de Hurst pela Transformada Wavelet	52

Capítulo 4 – Análise da Série Temporal Diária das Chuvas do Município de

Araras-SP, (1955-2000)	55
4.1 – Comparação entre o Escalograma da Transformada Wavelet e o Espectro de Fourier para Séries de Chuvas	56
4.2 – Determinação do Expoente de Hurst (H) e da Dimensão Fractal (D)	59
4.3 – Cálculo do Expoente de Hurst pela Transformada Wavelet	61
4.4 – Conclusão	63
4.5 – Sugestão para Trabalhos Futuros	64

Referências Bibliográficas	65
-----------------------------------	----

Resumo

Uma série temporal de precipitações pluviométricas, ou simplesmente chuvas, retratam um sistema de grande complexidade devido à influência de vários fatores naturais tais como: umidade, temperatura, pressão atmosférica, topografia, sazonalidade, entre outros. Nossa série temporal consiste dos registros diários de chuvas, medidos em milímetros (mm), desde 1º de fevereiro de 1955 a 31 de dezembro de 2000, totalizando 16.771 dados. O objetivo deste trabalho é enfatizar o uso de alguns métodos recentes que podem ser aplicados as séries temporais de sistemas complexos, como decomposição por wavelets, escalogramas, e expoente de Hurst, obtendo informações sobre persistência e propriedades de longo alcance do sistema. Então, calculamos o expoente de Hurst por dois métodos: o método R/S e o wavelet, mostrando resultados equivalentes. A importância de tal estudo é mostrar que diferentes métodos fornecem o mesmo resultado. Em sistemas complexos, este é um fato significativo.

Palavras Chaves: série temporal, chuva, wavelet, sistema complexo, expoente de Hurst.

Abstract

A temporal series of pluviometric precipitations, or simply rain, is an example of great complexity system due to the influence of various natural factors such as: humidity, temperature, atmospheric pressure, topography, seasonality among others. Our temporal series consists of daily records of rain, measured in millimeters (mm), from February 1, 1955 to December 31, 2000, summing up 16.771 data. The aim of this work is to emphasize the use of some new methods that can be applied to temporal series of complex systems, as decomposition by wavelets, scalograms, and Hurst exponent and get information about persistence and long-run properties of the system. Then, we calculate the Hurst exponent by two methods: by the R/S method and by wavelet, showing equivalent results. The importance of such study is to show that different methods give the same result. In complex systems, this is a significant fact.

Keywords: temporal series, rain, wavelet, complex system, Hurst exponent.

Listas de Figuras

Figura 1-1 – Localização do Município de Araras no Estado de São Paulo	3
Figura 2-1 – Gráfico de $f(t)$	11
Figura 2-2 – Espectro de Fourier de $f(t)$	11
Figura 2-3 – Gráfico de $f_1(t)$	12
Figura 2-4 – Espectro de Fourier de $f_1(t)$	12
Figura 2-5 – Soma de três senóides	13
Figura 2-6 – Espectro de Fourier da soma de três senóides	14
Figura 2-7 – Compressão de senóides	17
Figura 2-8 – Compressão de wavelets	17
Figura 2-9 – Translação de wavelet deslocada	18
Figura 2-10 – Análise wavelet em uma seção do sinal	21
Figura 2-11 – Análise wavelet em uma nova seção do sinal	21
Figura 2-12 – Análise wavelet com uma wavelet de nova escala	21
Figura 2-13 – Correspondência entre escalas e frequências na análise wavelet	22
Figura 2-14 – Wavelet Chapéu Mexicano	23
Figura 2-15 – Wavelet de Morlet	24
Figura 2-16 – Escalograma de senóides com frequências 10Hz e 25Hz	25
Figura 2-17 – Wavelets de Haar	27
Figura 2-18 – Escalograma esquemático de um sinal $f(t)$, indicando a posição dos coeficientes wavelets dos níveis 2 e 3	28
Figura 2-19 – Wavelet de Daubechies do tipo 2	29
Figura 2-20 – Wavelet de Daubechies do tipo 4	29

Figura 3-1 – A folha de samambaia é um exemplo de fractal	31
Figura 3-2 – Comprimento do segmento de reta	33
Figura 3-3 – Área da região plana	34
Figura 3-4 – Segmento de reta AB	35
Figura 3-5 – Dados para o cálculo da dimensão fractal	36
Figura 3-6 – Dimensão fractal do segmento de reta	36
Figura 3-7 – Representação do conjunto cantoriano	38
Figura 3-8 – Dimensão fractal do conjunto cantoriano	39
Figura 3-9 – Quatro Gerações da Curva de Koch	40
Figura 3-10 – Exemplo de uma figura auto-afim	41
Figura 3-11 – Reservatório de água FEDER (1989)	44
Figura 3-12 – Movimento Browniano e movimento Browniano fracionário	47
Figura 3-13a – Movimento Browniano $H = 0,50$	48
Figura 3-13b – Análise R/S	48
Figura 3-14a – Movimento Browniano fracionário $H = 0,70$	49
Figura 3-14b – Análise R/S	49
Figura 3-15a – Movimento Browniano fracionário $H = 0,90$	50
Figura 3-15b – Análise R/S	50
Figura 3-16 – Perfis com diferentes dimensões	51
Figura 3-17 – Ajuste dos pontos por uma reta	53
Figura 4-1 – Série temporal das chuvas do município de Araras (1955-2000)	56
Figura 4-2 – Espectro de Fourier da série temporal de chuvas	57
Figura 4-3 – Espectro de Fourier sem a periodicidade anual	57

Figura 4-4 – Escalograma da série temporal de chuvas	58
Figura 4-5 – Análise R/S	60
Figura 4-6 – Escalograma da série temporal de chuvas	61
Figura 4-7 – Ajustes dos pontos por uma reta	62
Figura 4-8 – Tabela de valores para H	62

Nomenclatura

c_n – coeficientes de Fourier

$C(a, b)$ – transformada wavelet contínua

$d_{j,k}$ – coeficientes de wavelet

D – dimensão fractal

f_n – frequência

Hz – Hertz

H – expoente de Hurst

$R(T)$ – amplitude

$S(T)$ – desvio padrão

$W(a, b)$ – transformada wavelet discreta

ε – fator escala

λ – fator para função auto-afim

ω – frequência angular

$\xi(t)$ – fluxo de entrada de água

$\psi(t)$ – função wavelet primária

$\psi_{j,k}(t)$ – funções obtidas por dilatações j e
translações k de uma wavelet primária

CAPÍTULO 1

Introdução

Para uma região tropical a precipitação atmosférica, representada pela chuva, é um elemento climático importante para o desenvolvimento de trabalhos de análise ambiental, particularmente os ligados ao balanço hídrico. A previsão dessas precipitações é extremamente difícil pois, a meteorologia envolve variáveis como pressão atmosférica, umidade, vento, temperatura, que não são exatamente previsíveis. Os mecanismos relacionados ao Clima a primeira vista são completamente aleatórios. Recentemente análises mais precisas têm revelado uma certa "ordem" nestes fenômenos, que se expressa sob a forma de uma invariância de escala. Essa invariância de escala é também o fundamento da geometria fractal LOVEJOY, MANDELBROT (1985). Vários trabalhos PETERS, HERTLEIN, CHRISTENSEN (2002), OLSSON, NIEMCZYNOWICZ, BERNDTSSON (1993), RODRIGUEZ-ITURBE, DE POWER (1989), SVENSSON, OLSSON, BERNDTSSON (1996), mostram que as chuvas possuem propriedades dos fractais (multifractais). Isto, conseqüentemente, indica que a série temporal de precipitações pode, então, ser tratada como um sistema complexo. Por meio da geometria fractal podemos encontrar regras simples para descrevermos, modelarmos e analisarmos as formas complexas encontradas na natureza PEITGEN, JURGENS, SAUPE (1992). Muitos fenômenos naturais manifestam essa invariância: os exemplos incluem registros

hidrológicos, variáveis solares, registros de temperatura, registros de chuvas. Portanto, nesse contexto insere-se o presente trabalho, sugerindo, aqui, a análise da série temporal das precipitações pluviométricas, que é um elemento de sistema complexo natural com estruturas fractais PEREIRA JÚNIOR, CHRISTOFOLETTI (2003), localizada entre uma série temporal periódica e uma série temporal aleatória. E com o objetivo de compreendermos melhor o comportamento complexo desse fenômeno natural analisaremos esse tipo de série temporal por meio de métodos matemáticos usados no estudo dos sistemas complexos. Dentre esses métodos destacamos a transformada de Fourier a de wavelet e o expoente de Hurst. O objetivo dessa análise está em mostrar que por meio de dois métodos matemáticos diferentes, aplicados a série temporal desse sistema complexo natural, obtém-se resultados equivalentes. Determinamos o expoente H por meio do método conhecido como “reescaped-range analysis” ou análise de reescalonamento ou simplesmente análise R/S (de origem de seqüências temporais) e o método da transformada de wavelet MIRANDA (1997), SIMONSEN, HANSEN, NES (1998). Por meio do expoente H temos informações concretas sobre correlação e persistência PETERS (1996). Isso torna H um excelente índice para estudos de processos complexos como a série temporal de chuvas BRESLIN, BELWARD (1999). Interpretamos e comparamos também, o diagrama tempo-frequência gerado com a transformada wavelet e o espectro gerado com a transformada de Fourier MISITI, OPPENHEIM, POGGI (1996). O diagrama obtido permitiu detectar a periodicidade no registro de precipitações pluviométricas como também a dinâmica dos sinais ao longo do tempo. As informações obtidas por meio do diagrama e do espectro de amplitude complementam o estudo da série temporal de chuvas.

1.1 Base dos Dados

A base de dados do presente estudo consiste de séries temporais de precipitações obtidas por meio dos registros diários de chuvas, medidos em milímetros (mm), desde 1º de fevereiro de 1955 até 31 de dezembro de 2000, ininterruptamente. Dessa forma conseguimos registrar 16.771 dados de leitura diária, onde o menor valor foi zero, número representativo da ausência de precipitação, e o maior 132,0 mm de precipitação.

Utilizamos os dados climáticos obtidos no posto pluviométrico instalado na Fazenda Santa Lúcia, localizada no município de Araras, Estado de São Paulo.

Conforme a figura 1-1, o município de Araras está localizado entre as longitudes de 47°15' e 47°30' a oeste de Greenwich e as latitudes 22°10' e 22°30' no sentido sul, a uma altitude de 611 m. Pelo sistema de classificação climática de Köppen (AYOADE, 2002) o clima da região de Araras-SP classifica-se em **Cwa**: chuva de verão, verão quente. Köppen relaciona o clima à temperatura, à precipitação pluvial e às características sazonais. Assim, com base na temperatura, o Clima da região em estudo é classificado como Clima temperado chuvoso e moderadamente quente (**C**) onde o mês mais frio tem temperatura média entre -3°C e 10°C e o mês mais moderadamente quente tem uma temperatura média maior do que 10°C . Quanto à precipitação pluvial e as suas características sazonais, temos chuva de verão (**w**) e quanto as características de temperatura temos verão quente (**a**), o mês mais quente tem temperatura média maior do que 22°C .

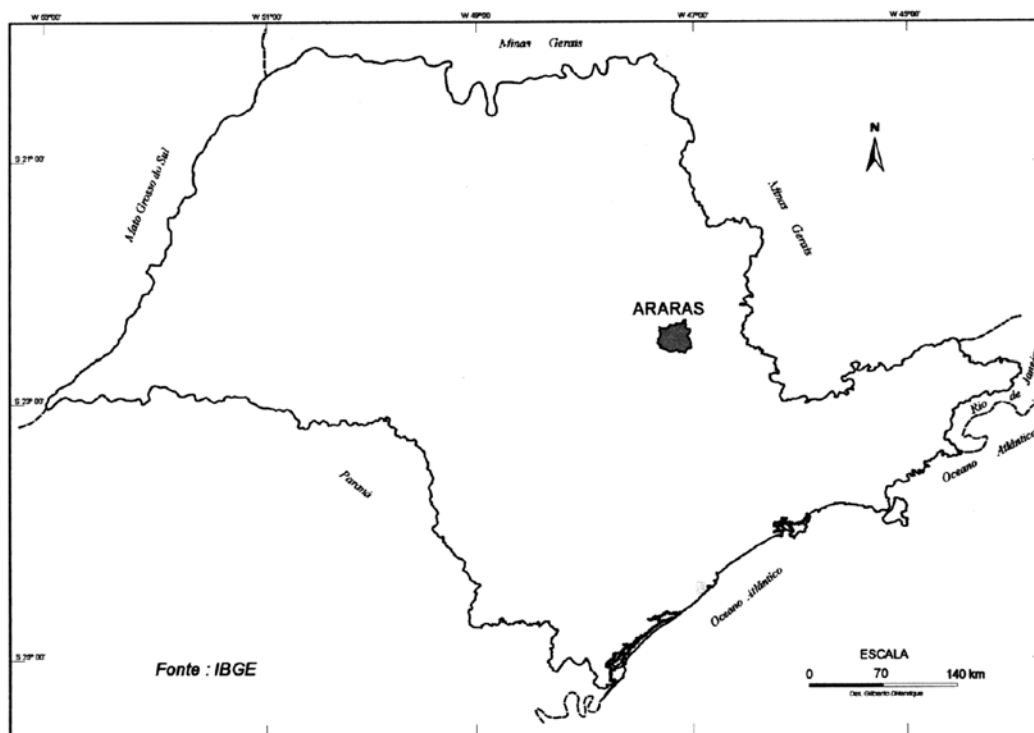


Figura 1-1 Localização do Município de Araras no Estado de São Paulo.

1.2 Resumo da Gênese da Precipitação do Estado de São Paulo

Pelo fato dos dados de precipitação terem sido coletados na Fazenda Santa Lúcia, localizada no município de Araras no Estado de São Paulo descreveremos um pouco do clima no território paulista.

Pela classificação dos climas regionais do Estado de São Paulo, segundo Carlos A. Monteiro, 1973, concluímos que o município de Araras está inserido na região classificada por Setor Centro-Norte, cuja característica fundamental dessa área é a existência de climas tropicais, alternadamente secos e úmidos com massas equatoriais e tropicais controlando o clima desse setor.

MONTEIRO (1969), em sua tese de doutorado, estudando o clima do Estado de São Paulo, ressaltou a importância da Frente Polar Atlântica (FPA), e destacou que as chuvas neste Estado são de origem frontal em sua maioria, sobre a liderança da FPA; no inverno, quase todas as chuvas são frontais. O autor concluiu que, quanto maior a atividade polar, maior a quantidade de chuvas (desde que haja choque com massas tropicais); porém, só isso não explicaria o ritmo: ele dependeria também do grau de propagação latitudinal das massas polares e de sua penetração segundo as rotas do interior e do litoral, fatores esses que geram ondulações no eixo da FPA e ciclogêneses, contribuindo para determinar a intensidade dos contrastes térmicos e, conseqüentemente, a intensidade das chuvas frontais PEREIRA JÚNIOR, CHRISTOFOLETTI (2003).

CAPÍTULO 2

Métodos de Análise de Séries Temporais

O propósito ao escrever este capítulo foi o de comparar duas técnicas: Fourier e Wavelet, utilizadas na análise de séries temporais no domínio de frequência e tempo-frequência, respectivamente.

2.1 Análise de Fourier

A análise de Fourier, ou análise espectral, de uma série temporal consiste em expressar uma função $f(t)$, considerando os fenômenos investigados, de preferência periódicos, como uma somatória de funções trigonométricas de senos e cossenos.

Um dos princípios fundamentais em análise de Fourier é que um sinal periódico, de período $2L$, definido no intervalo $[-L, L]$ possa ser representado TOLSTOV (1962), por:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \phi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad (2.1)$$

em que coeficientes a_n e b_n são chamados coeficientes de Fourier, cujos valores são deduzidos do fato de que as funções seno e cosseno formam uma base ortogonal e são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad n > 0 \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin(\omega_n t) dt, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se $f(t)$ tem período $T = 2L$ então ω_n é a frequência angular, indexada para cada n , dada por: $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n = \frac{\pi}{L} n$ (em radianos por unidade de tempo), e o período relacionado com a frequência angular é $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} n$ (em unidades de tempo).

É usual escrever a equação (2.1) TOLSTOV (1962) na forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\omega_n}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\omega_n}{L} t\right) \right] \quad (2.3)$$

Dizemos que a equação (2.3) é uma representação espectral de $f(t)$. O objetivo da análise de Fourier é o de obter a amplitude, em função da frequência para cada onda senoidal que compõe o sinal o sinal analisado.

Utilizando-se a fórmula de Euler, podemos reescrever a série de Fourier na forma complexa TOLSTOV (1962):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n t / L} \quad (2.4)$$

em que os coeficientes c_n são obtidos por:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\pi n t / L} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5)$$

ou

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{a_0}{2}, & \text{se } n = 0 \\ \frac{a_{|n|} - ib_{|n|}}{2}, & \text{se } n \leq -1 \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é um método matemático utilizado para análise de série temporal. Vamos, a partir da série de Fourier, estender nosso conceito para a transformada de Fourier.

Consideremos, então, as equações dadas em (2.4) e (2.5), se fizermos

$$h = \frac{\pi}{L} \text{ e } \omega_n = nh = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{Então}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad (2.7)$$

$$c_n = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (2.8)$$

Definindo-se

$$F(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \quad (2.9)$$

com $(-L, L) = \left(\frac{-\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right)$, temos que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h F(\omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2.10)$$

Fazendo $L \rightarrow \infty$ e $h \rightarrow 0$, e notando que a série (2.10) é, a soma de Riemann definindo a integral de $F(\omega) e^{i\omega t}$, obtemos:

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.11)$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (2.12)$$

Se interpretamos t como o tempo então, ω é a frequência angular. As equações (2.11) e (2.12) definem a transformada de Fourier e sua inversa, respectivamente. As constantes 1 e $\frac{1}{2\pi}$ que precedem as integrais (2.11) e (2.12) poderiam ser substituídas por quaisquer outras constantes cujo produto fosse $\frac{1}{2\pi}$.

Outras convenções comuns para transformada de Fourier e a transformada inversa de Fourier são:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (2.13)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (2.14)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} dt \quad (2.15)$$

Neste trabalho, usaremos as fórmulas dadas por (2.11) e (2.12).

2.3 Transformada Discreta de Fourier

Uma série temporal não corresponde necessariamente à uma função contínua e infinita, e sim, a um registro discreto do fenômeno $f(t)$, a saber, $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}$, com um número N de observações, amostrados em intervalos constantes de tempo Δt , ou não, durante um período T . Vamos considerar $\Delta t = 1$, o conjunto discreto de frequências de

Fourier $\omega_n = \frac{2\pi n}{N\Delta t}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, o período $T_n = \frac{N\Delta t}{n}$ e definir a transformada discreta de Fourier da seqüência como:

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f_t e^{-i\omega_n t} \quad (2.16)$$

e a transformada de Fourier inversa discreta por:

$$f_t = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i\omega_n t} \quad (2.17)$$

A transformada discreta de Fourier tem sido extensamente usada para se estimar o espectro de um processo estacionário. O cálculo direto da transformada discreta de Fourier envolve $O(N^2)$ operações complexas, no entanto, usando um algoritmo chamado transformada rápida de Fourier, conhecido por FFT (fast Fourier transform), ela pode ser calculada usando $O(N \log_2(N))$ operações. Este algoritmo foi desenvolvido por Cooley e Tukey (1965).

A seguir aplicaremos a FFT (Fast Fourier Transform) em sinais de periodicidade conhecida, para verificarmos a validade do método.

Suponhamos um sinal $f(t)$ composto por dois sinais e dado por:

$$f(t) = \begin{cases} 2 \cos(40\pi t), & 0 < t < 0,5 \\ \cos(60\pi t), & 0,5 < t < 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Tomemos a função $f(t)$. Fazemos uma amostragem de 2.048 pontos no tempo de 1 segundo e obtemos uma série temporal cujo gráfico é mostrado na figura 2-1 a seguir:

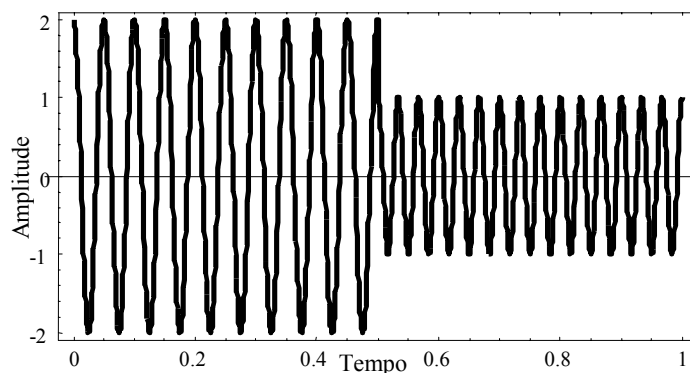


Figura 2-1 Gráfico de $f(t)$.

A $\text{FFT}(f(t))$, do sinal da figura 2-1 fornecerá o gráfico da figura 2-2 que constitui o espectro de frequência cujos valores em destaque estão centrados em 20Hz e 30Hz, como esperado.

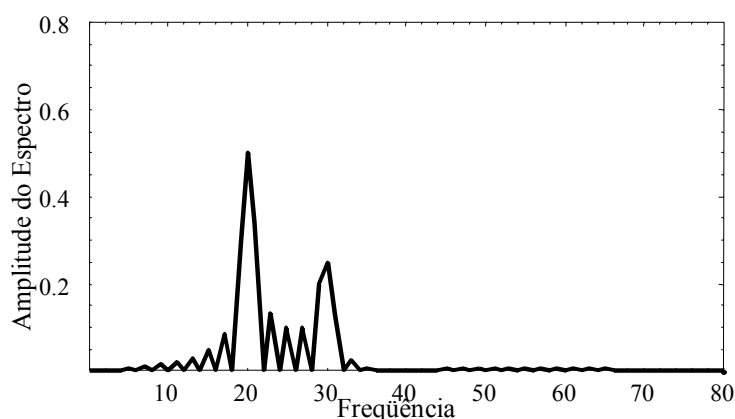


Figura 2-2 Espectro de Fourier de $f(t)$.

Analizando o resultado obtido pela $\text{FFT}(f(t))$, podemos constatar a validade desse método, cujo objetivo é mostrar que, por meio da transformada de Fourier é possível transformar sinais que dependem do tempo em sinais que dependem da frequência, ou seja, é possível transformar um sinal em seus componentes de frequência, conforme gráficos das figuras 2-1 e 2-2, respectivamente. A representação de Fourier tem sido usada em uma grande variedade de campos. Entretanto, essa representação tem limitações: não pode ser usada para aproximar sinais não-estacionários como, também, somente nos fornece o conteúdo espectral sem a indicação sobre a localização no tempo desses componentes espectrais.

Suponhamos agora o sinal $f_1(t)$ dado por :

$$f_1(t) = \begin{cases} \cos(60\pi t), & 0 < t < 0,5 \\ 2 \cos(40\pi t), & 0,5 < t < 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

Nesse caso se tomarmos os mesmos 2048 pontos no tempo de 1 segundo observaremos que primeiro ocorrerá o sinal de frequência 30 Hz e depois o de 20 Hz, conforme figura 2-3.

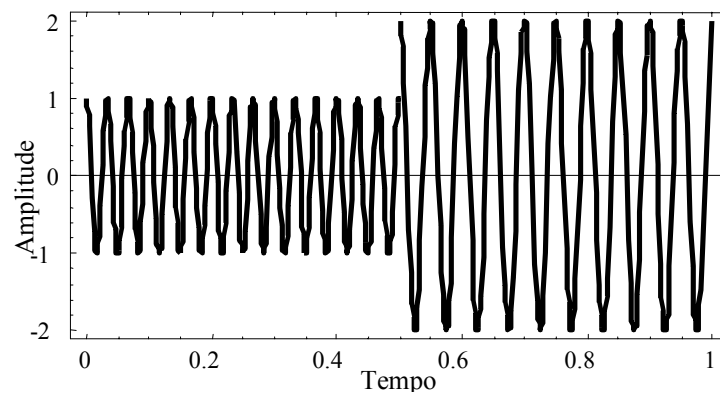


Figura 2-3 Gráfico de $f_1(t)$.

A $\text{FFT}(f_1(t))$ fornece os picos espectrais, conforme gráfico da figura 2-4.

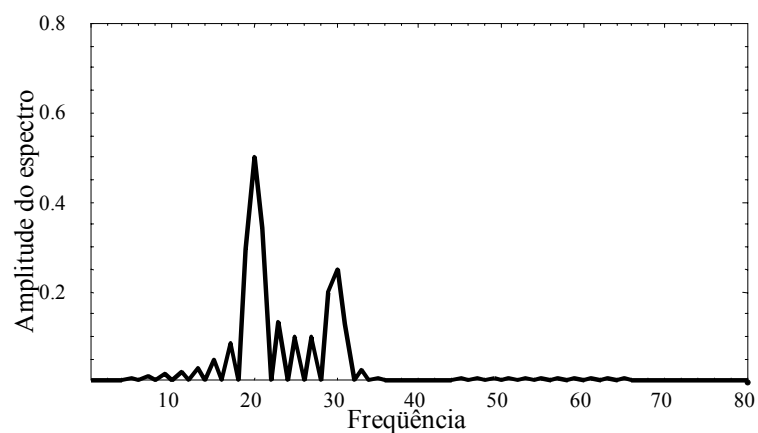


Figura 2-4 Espectro de Fourier de $f_1(t)$.

Apesar das mudanças ocorridas no sinal $f_1(t)$ em relação a $f(t)$, a transformada de Fourier aplicada a esses sinais fornece os mesmos picos espectrais, destacando as frequências centradas nos valores 20Hz e 30Hz. Isso mostra a impossibilidade de localizar frequências no tempo.

Consideremos agora um sinal periódico composto das frequências $f_1 = 10\text{Hz}$, $f_2 = 25\text{Hz}$ e $f_3 = 34\text{ Hz}$ dado por:

$$f(t) = 0,1\text{sen}(2\pi f_1 t) + 0,5\text{sen}(2\pi f_2 t) + \text{sen}(2\pi f_3 t) \quad (2.20)$$

Se tomarmos 512 amostras do sinal no tempo de 1 segundo e, ainda, a esse sinal acrescentarmos um ruído obteremos, conforme segue, a figura 2-5.

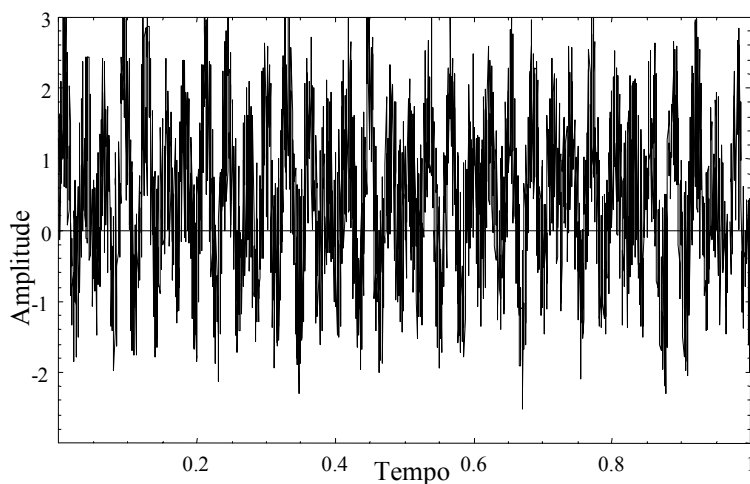


Figura 2-5 Soma de três senóides.

Calculando a transformada de Fourier desse sinal obtemos o espectro de frequências mostrado na figura 2-6, destacando-se as frequências centradas nos valores 10 Hz, 25Hz e 34Hz. A frequência de valor igual a 10Hz pode ser confundida com o ruído presente, devido à sua pequena amplitude, quase não sendo possível detectar a sua existência.

A transformada de Fourier, não permite determinar se os sinais ocorrem ao mesmo tempo, ou um após o outro e em que ordem ocorrem. A representação da transformada de Fourier somente nos fornece o conteúdo espectral sem a indicação sobre a localização no tempo desses componentes espectrais.

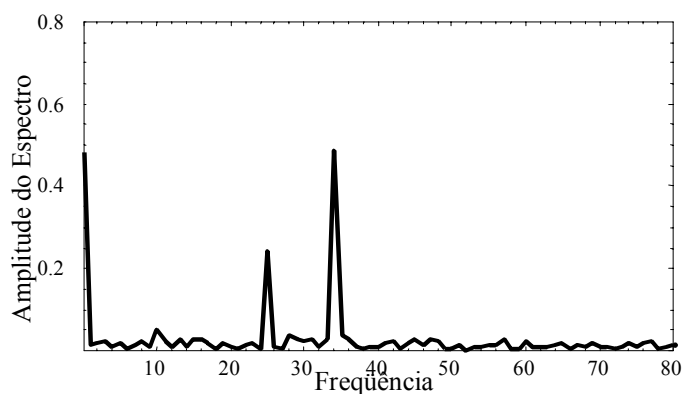


Figura 2-6 Espectro de Fourier da soma de três senóides.

Para se fazer uma análise de um sinal não-estacionário cujo conteúdo espectral muda no tempo, será necessário uma representação Tempo-Frequência em lugar de uma representação de frequências, somente. Assim, começaram algumas modificações na transformada de Fourier para permitir a análise de sinais não estacionários. Apareceram, então, as transformadas de Fourier janeladas, na qual um sinal é dividido em segmentos menores e consecutivos e então aplicada a transformada de Fourier nessas pequenas "janelas".

Contudo, a transformada janelada trabalha com uma janela fixa no domínio tempo-frequência, o que torna difícil capturar as componentes de alta e baixa frequência de um sinal simultaneamente GABOR (1946).

2.4 Análise Wavelet

A palavra wavelet derivada do vocábulo em francês ondelette, que denota o diminutivo de onda, ou seja, "ondinha" ou "ondícula", surgiu em meados dos anos 80, a partir dos trabalhos de um grupo de pesquisadores franceses. A idéia na análise wavelet consiste em aproximar uma função por uma combinação linear de funções básicas (wavelets), obtendo assim uma boa representação da função original tanto no domínio das frequências como no domínio temporal. A aplicação de wavelets não exige a estacionaridade das séries em estudo sendo apropriada para a análise de eventos irregularmente distribuídos.

O termo ondelette foi introduzido pelo engenheiro geofísico J. Morlet (1980), sendo a base matemática de suas idéias formalizada pelo físico teórico de mecânica quântica Alex Grossmann, que o ajudou a formalizar a transformada de wavelet em sua forma contínua. Os dados estudados por Morlet exibiam conteúdos de frequências que mudavam rapidamente ao longo do tempo. Nesse caso a transformada de Fourier não era adequada como ferramenta de análise. Na realidade eles redescobriram e deram uma interpretação ligeiramente diferente do trabalho de Alberto Calderón sobre análise harmônica de 1946.

Foi Yves Meyer, um matemático francês que em 1984 ressaltou a semelhança entre o trabalho de Morlet e Calderón. Isso levou, Meyer, em 1985 a construir funções básicas wavelets ortonormais cujo domínio de tempo e frequências eram bons. Mas Meyer verificou que J. O. Strömberg já tinha descoberto as mesmas wavelets cerca de cinco anos antes. No entanto, a primeira função wavelet já havia sido elaborada em 1909, por Alfred Haar, que já havia construído funções base de wavelets ortonormais. Suas wavelets eram de pequeno uso prático e de pobre domínio de frequência. Em 1930, Paul Levy utilizando o trabalho de Haar desenvolveu funções básicas ortonormais para estudar os sinais aleatórios do movimento Browniano.

Mais recentemente, na década de 90, Ingrid Daubechies, desenvolveu sistemas para discretização de parâmetros de tempo e escala da transformada wavelets. Estes sistemas apresentavam uma maior liberdade na escolha das funções básicas. Daubechies, com Stephane Mallat desenvolveram a transição da análise de sinais contínuos para discretos. Em 1986, Mallat e Meyer desenvolveram a idéia de análise de multiresolução (MRA) para transformada wavelet discreta (DWT). Daubechies utilizando os trabalhos de Mallat formalizou a teoria moderna de wavelet desenvolvendo as bases ortonormais de wavelets suaves com suportes compactos. Nos últimos anos, tem se verificado muita pesquisa para outras funções básicas wavelets com diferentes propriedades e modificações no algoritmo de MRA. Em 1992, Daubechies com Albert Cohen, Jean Feauveau construíram as wavelets biortogonais com suporte compacto que são utilizados por muitos pesquisadores sobre as funções de base ortonormais (POLIKAR, 1999).

2.5 Escala e Translação

Enquanto a análise de Fourier consiste em decompor um sinal em senos e cossenos de várias frequências a análise de wavelet é a decomposição de um sinal por meio de escalas (dilatação e compressão) e translação de uma dada wavelet original (wavelet mãe).

Para melhor entender o significado da escala, vejamos o exemplo de uma função senóide, $\psi(t) = \sin(\omega t)$ a qual introduziremos um fator de escala denotado por $a = \frac{1}{\omega}$, com $\omega = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$. Veremos então, a compressão da senóide na figura 2-7:

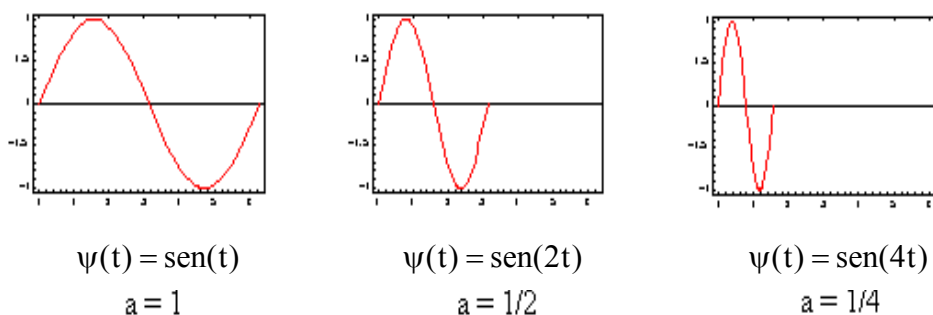


Figura 2-7 Compressão de senóides.
Wavelet Toolbox-MISITI (1996).

Note que à medida que o fator de escala a diminui, a senóide fica cada vez mais comprimida.

O fator de escala aplica-se de forma análoga para as wavelets. Fatores de escala menores fazem a "compressão" da wavelets e fatores de escala maiores fazem a "dilatação". Conforme figura 2-8:

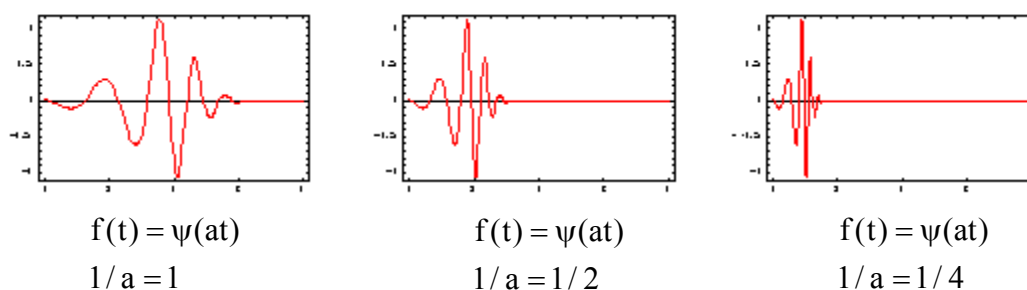


Figura 2-8 Compressão de wavelets.
Wavelet Toolbox-MISITI (1996).

Quanto a variação do parâmetro a que corresponde às informações de escala, temos:

- para $a > 1$ tem o efeito de dilatação da função wavelet-mãe;
- para $a < 1$ tem o efeito de contração da função wavelet-mãe.

Com isso é possível analisar os aspectos globais e locais das séries.

A translação de uma wavelet, representada pelo parâmetro b , significa atrasar (ou adiantar) o seu início. Deslocar uma função $\psi(t)$ em b é representá-la por $\psi(t - b)$ conforme figura 2-9.

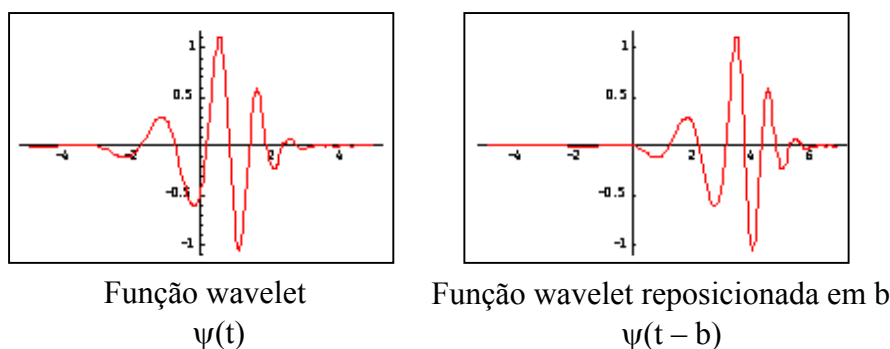


Figura 2-9 Translação de wavelet deslocada.
Wavelet Toolbox-MISITI (1996).

A medida que b varia, a função é analisada localmente em torno de b .

2.6 Propriedades de Wavelets

As funções wavelets apresentam certas propriedades dentre as quais citamos:

1. A expansão wavelet dá uma localização tempo-frequência do sinal;

2. O cálculo dos coeficientes do sinal pode ser feito eficazmente. Mostra-se que muitas transformações de wavelets (o conjunto de coeficientes de expansão) podem ser calculadas com $O(N)$ operações. Isto significa que o número de multiplicações e adições aumentam linearmente com o número de elementos do sinal analisado. As transformações de wavelets mais gerais requerem $O(N \log(N))$ operações, o mesmo que para a FFT (Fast Fourier Transform);

3. A expansão de wavelets permite uma descrição local mais precisa e uma melhor separação das características do sinal;

4. Existem inúmeras famílias de wavelets e isso facilita a sua utilização em vários tipos de sinais.

2.7 Transformada Wavelet Contínua

Matematicamente, a transformada wavelet contínua é definida em termos de uma integral de convolução entre o sinal analisado $f(t)$ e uma wavelet conhecida como "wavelet mãe", "wavelet geratriz" ou ainda "wavelet analisadora", expressa por:

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt \quad (2.21)$$

em que os parâmetros a e b variam continuamente em $\mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^+ \text{ e } b \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

sendo as funções $\psi_{a,b}$ chamadas wavelets filhas e são geradas a partir de dilatações e translações da wavelet-mãe $\psi(t)$. No caso da transformada contínua as wavelets-mãe mais conhecidas são as de Morlet e Chapéu Mexicano.

Na equação (2.22), o termo em denominador $\sqrt{a}$ corresponde a um fator de normalização da energia de cada wavelet de forma a manter a mesma energia da wavelet mãe. Nessa equação os parâmetros a e b , correspondem, respectivamente, às informações de escala e translação.

A equação (2.21) pode também ser escrita como o produto interno de $f(t)$ com uma função wavelet $\psi_{a,b}(t)$ isto é, $C(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$. Esta equação, de fato está decompondo f em uma superposição de wavelets $\psi_{a,b}(t)$.

Desta forma, os parâmetros a e b , associam aos coeficientes $C(a, b)$, valores de frequência e localização no tempo, em cada intervalo Δt do sinal analisado.

Uma função wavelet ψ apresenta as seguintes propriedades:

p_1) para ser uma wavelet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (2.23)$$

Isso garante que a função wavelet tem uma forma do tipo onda – condição de admissibilidade;

p_2) a função wavelet deve ter energia unitária, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1. \quad (2.24)$$

Isso garante o suporte compacto, ou um decaimento rápido de amplitude, garantindo a localização espacial.

Para obtermos a transformada wavelet de um sinal devemos proceder como se segue:

passo 1: escolher uma wavelet mãe e compará-la com uma seção no começo do sinal original;

passo 2: calcular o coeficiente wavelet, a partir da transformada wavelet e quanto menor a amplitude desse coeficiente melhor é a aproximação entre a wavelet e o sinal na seção tomada;

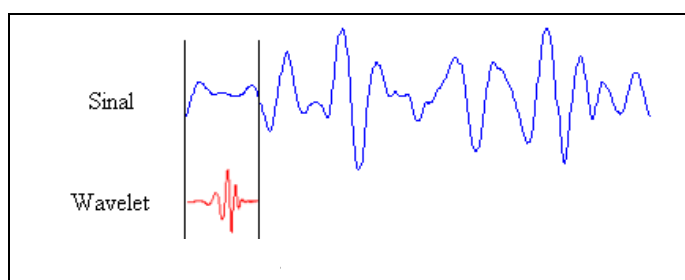


Figura 2-10 Análise wavelet em uma seção do sinal.
Wavelet Toolbox-MISITI (1996).

passo 3: tomar a próxima seção do sinal e novamente repetir os passos 1 e 2 até cobrir, de seção em seção, todo o sinal;

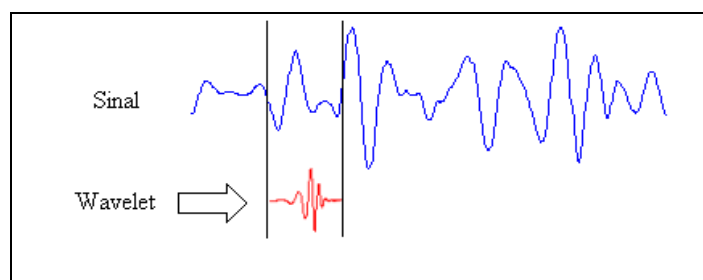


Figura 2-11 Análise wavelet em uma nova seção do sinal.
Wavelet Toolbox-MISITI (1996).

passo 4: ajustar uma nova escala para a wavelet (dilatar ou comprimir) e repetir os passos de 1 até 3;

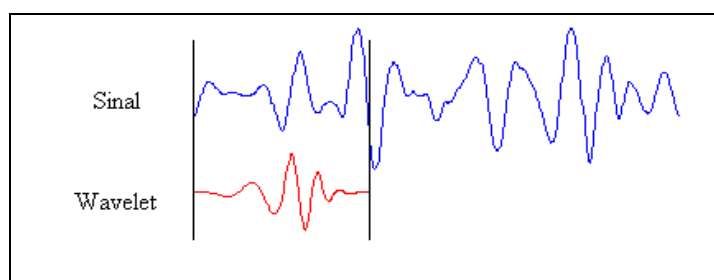


Figura 2-12 Análise wavelet com uma wavelet de nova escala.
Wavelet Toolbox-MISITI (1996).

passo 5: repetir os passos de 1 a 4 para todas as escalas da wavelet (tantas vezes quanto for possível ou desejado).

Ao terminar todos os passos descritos acima teremos produzido coeficientes wavelet em diferentes escalas e seções do sinal.

Os coeficientes wavelets das escalas maiores estão associados a wavelets mais dilatadas e, escalas menores, a wavelets mais comprimidas.

Note que quanto mais dilatada for a wavelet, maior será a seção do sinal com o qual ela estará sendo comparada e, deste modo, as características mais visíveis estão sendo medidas pelos coeficientes wavelets.

Assim, existe uma correspondência entre as escalas wavelet e a frequência revelada pela análise wavelet, figura 2-13.

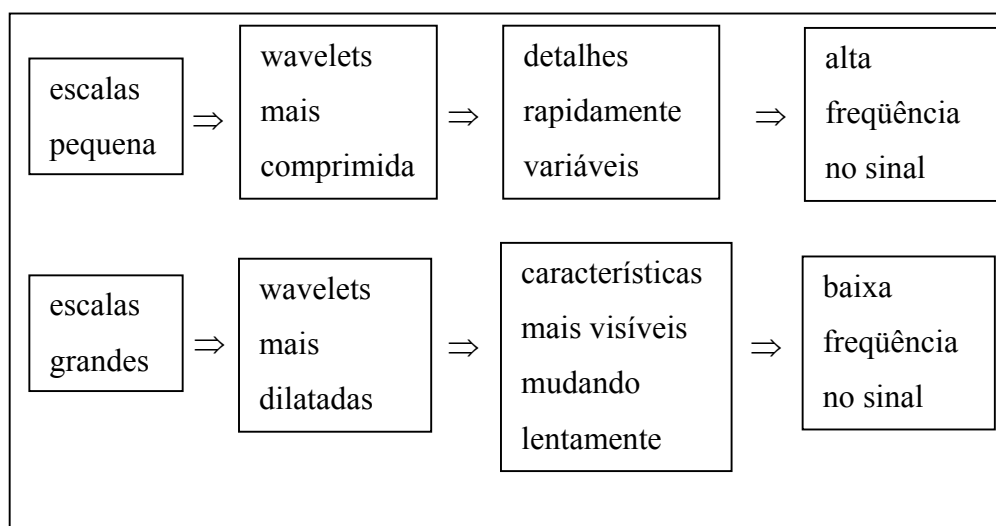


Figura 2-13 Correspondência entre escalas e frequências na análise wavelet. Wavelet Toolbox-MISITI (1996).

Apresentaremos alguns tipos de wavelets:

Chapéu Mexicano

A wavelet, conhecida como chapéu mexicano, devido a sua forma (figura 2-14), é definida pela seguinte função:

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}. \quad (2.25)$$

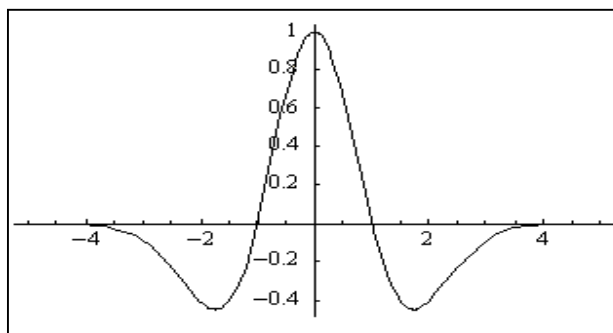


Figura 2-14 Wavelet Chapéu Mexicano.
MORETIN (1999).

Morlet

A Wavelet de Morlet (ou gaussiana modulada) é uma função complexa, para ω_0 fixo, dada por:

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2} \quad (2.26)$$

A equação (2.26) pode ser decomposta em duas partes sendo uma real e outra imaginária.

$$\psi(t) = (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) \cdot e^{-t^2/2} \quad (2.27)$$

O gráfico a seguir (figura 2-15) representa apenas a parte real da wavelet de Morlet definida pela equação:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} \cos(5t) \quad (2.28)$$

na qual foi fixado um valor para a frequência $\omega_0 = 5$. Essa escolha garante a condição de admissibilidade.

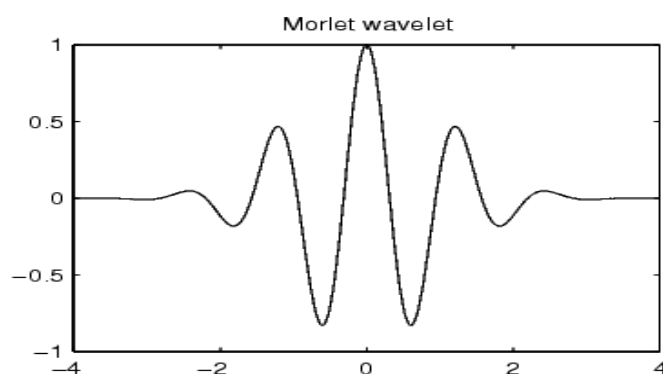


Figura 2-15 Wavelet de Morlet.
MORETIN (1999).

2.8 Aplicação da Wavelet de Morlet em um Sinal

Suponhamos um sinal composto por duas senóides de mesma amplitude e frequências $f_1 = 10\text{Hz}$ e $f_2 = 25\text{Hz}$ no qual aplicaremos a transformada wavelet usando a parte real da wavelet de Morlet, com $\omega_0 = 5$. A primeira senóide corresponde ao sinal de menor frequência e a segunda ao sinal de maior frequência.

A aplicação da transformada wavelet no sinal permite distinguir as frequências dominantes (escalas ou períodos) para cada uma das senóides e a forma como elas evoluem numa amostragem de 1024 pontos, no tempo de 1 (um) segundo. Essa aplicação está representada na figura 2-16 a seguir:

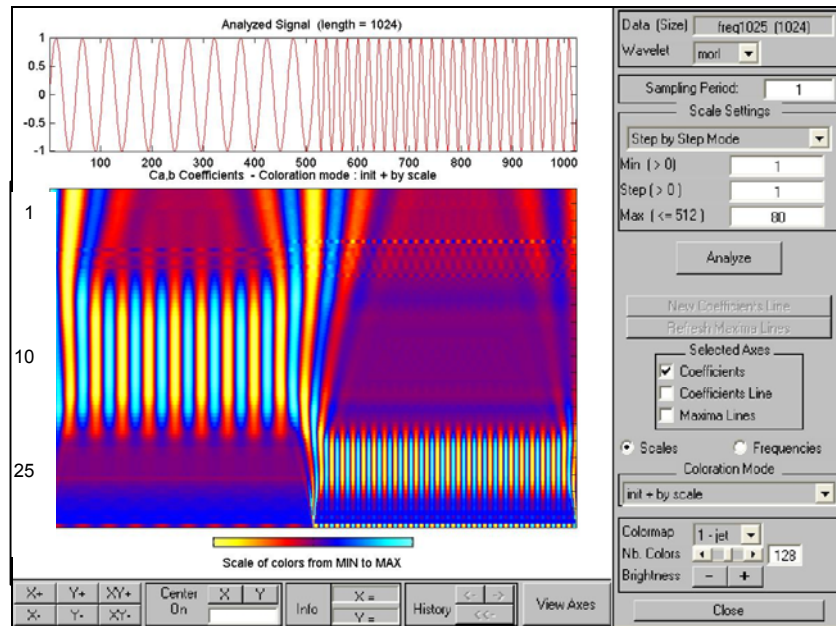


Figura 2-16 Escalograma de senóides com frequências 10Hz e 25Hz
MATLAB - Wavelet Toolbox.

2.9 Transformada Wavelet Discreta

De modo geral, todas as propriedades descritas anteriormente também são verdadeiras na análise de wavelet discreta.

Na transformada wavelet discreta os sinais são representados por séries do tipo:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.29)$$

em que as funções bases dadas por:

$$\psi_{j,k}(t) = \psi(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.30)$$

são chamadas wavelets “filhas” e são geradas a partir de dilatações e translações de uma única função $\psi(t)$ também denominada wavelet “mãe”.

As funções wavelets $\psi_{j,k}(t)$ são obtidas de $\psi(t)$ por uma dilatação diática e uma translação. As funções $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$ formam uma base que não precisa ser necessariamente ortogonal. Uma das vantagens de se trabalhar com bases ortogonais é que elas permitem a reconstrução perfeita do sinal original a partir dos coeficientes da transformada de forma mais econômica.

Considere, pois, uma base ortogonal gerada por $\psi(t)$ os coeficientes de wavelets são dados por

$$d_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt \quad (2.31)$$

A transformada wavelet é a aplicação que associa um sinal aos seus coeficientes wavelets.

$$f(t) \rightarrow (d_{j,k}). \quad (2.32)$$

Os índices j e k representam escala e translação, respectivamente.

Assim, cada um desses coeficientes $d_{j,k}$ multiplicados por apropriadas wavelets, dependentes de escala-posição, obtidas de uma wavelet-mãe ψ reconstroem o sinal original.

Descreveremos a seguir a wavelet de Haar e a wavelet de Daubechies.

Wavelet de Haar ((HAAR (1910))

A wavelet-mãe de Haar é definida por:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.33)$$

A partir dessa wavelet-mãe, podemos construir uma família de wavelets ortogonais de Haar alterando escala e posição da wavelet principal. Nos exemplos a seguir citaremos algumas wavelets geradas da wavelet de Haar e seus respectivos gráficos.

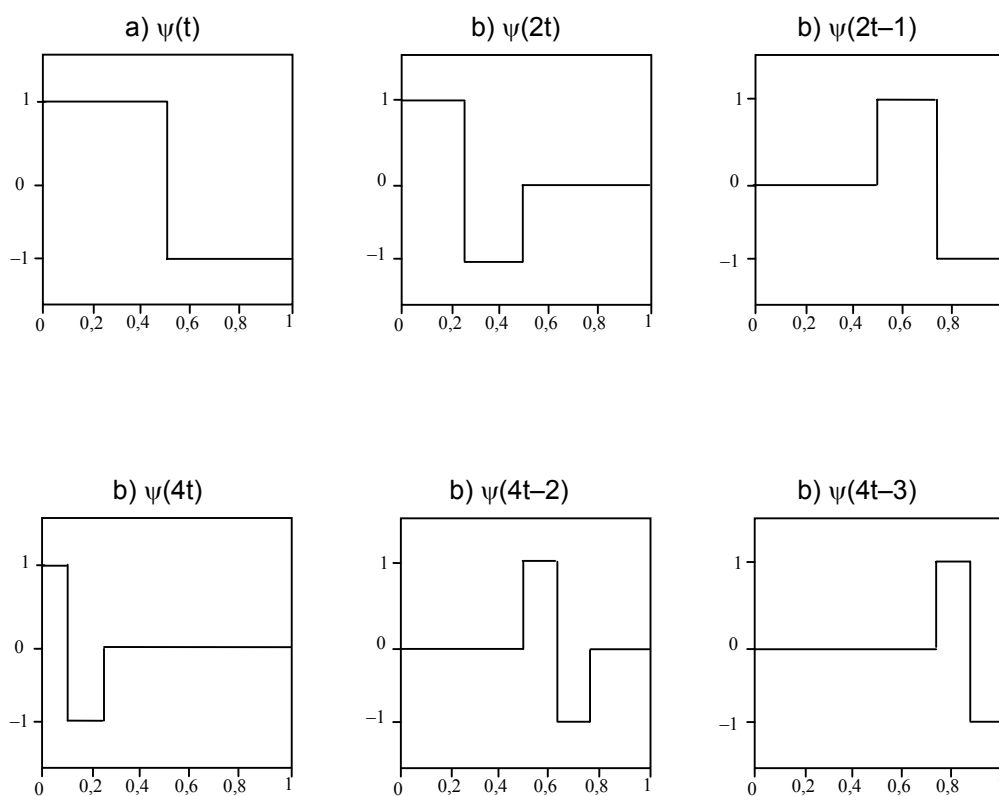


Figura 2-17 Wavelets de Haar.

GOMES, DOMINGUES E KAIBARA (2001).

A medida que formos atribuindo os valores para j , notamos que as funções filhas tornam-se mais estreitas e mais alongadas, isto é, com maior amplitude. Atribuindo valores para k as funções filhas se movimentam para a direita, dentro do intervalo de tempo Δt . O sinal a ser analisado que estiver dentro do intervalo de tempo Δt , será então varrido pelas funções filhas

$$f(t) = d_{0,0}\psi_{0,0} + d_{1,0}\psi_{1,0} + d_{1,1}\psi_{1,1} + d_{2,0}\psi_{2,0} + d_{2,1}\psi_{2,1} + \dots \quad (2.34)$$

O resultado da análise através das wavelets são os coeficientes wavelets. Quanto maior o coeficiente maior a semelhança entre a wavelet e o sinal, e quanto menor o coeficiente menor a semelhança.

Podemos representar um sinal por meio de um diagrama tempo-frequência conhecido como Escalograma no qual os valores dos coeficientes wavelets são representados por meio de intensidades de cores, em que, usualmente, cores frias estão associadas à amplitudes menores e as cores quentes às maiores. Na figura 2-18 é apresentado um esquema indicando a localização dos coeficientes wavelet nas escalas 2 e 3.

0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Figura 2-18 Escalograma esquemático de um sinal $f(t)$, indicando a posição dos coeficientes wavelets dos níveis 2 e 3. ROWE e ABBOT (1995).

Wavelet de Daubechies (DAUBECHIES (1992))

A família de wavelets ortogonais de Daubechies são denotadas por dbN onde N é a ordem da wavelet. Abaixo, nas figuras 2.19 e 2.20, segue os exemplos de duas wavelets dessa família.

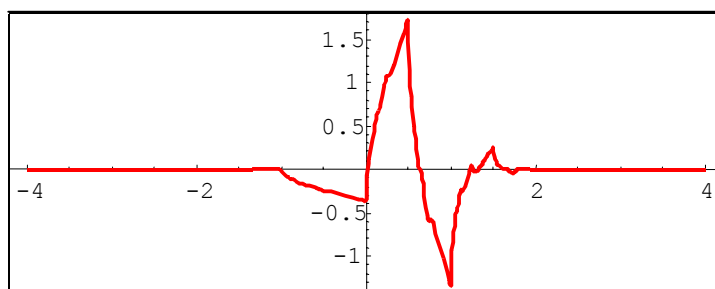


Figura 2-19 Wavelet de Daubechies do tipo 2.
DAUBECHIES (1992).

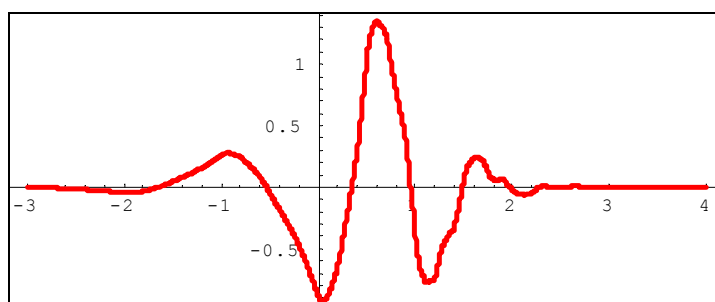


Figura 2-20 Wavelet de Daubechies do tipo 4.
DAUBECHIES (1992).

Neste trabalho, utilizou-se os software Mathematica e MATLAB versão 6.5 usando o Wavelet Toolbox desenvolvido por Torrence e Compo (1998).

CAPÍTULO 3

Fractais

O termo “fractal” significa fragmentado, quebrado, irregular (do adjetivo latim **fractus**). Este vocabulário foi utilizado primeiramente pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot em 1967, popularizando-se depois da publicação do livro **The Fractals Geometry of Nature** MANDELBROT (1982), que é uma versão estendida e atualizada do seu livro "Les Objects Fractales: for me, hasard et dimension" publicado em 1975.

Ao criar a geometria fractal, Mandelbrot estabeleceu as bases para o estudo focalizando as formas fragmentadas, fraturadas, rugosas e irregulares. Tais categorias de formas são normalmente geradas por uma dinâmica caótica, de forma que a geometria fractal descreve os traços e as marcas deixadas pela passagem dessa atividade dinâmica. Desta maneira, um fractal é a fratura deixada pela vibração de um terremoto ou a linha costeira sinuosa esculpida pela turbulência dos oceanos e erosão; é a estrutura ramificada de uma samambaia, que marca o processo de seu crescimento; os fragmentos irregulares do gelo à medida que as águas se congelam. Portanto, os fractais descrevem a rugosidade do mundo, sua energia, suas mudanças e transformações dinâmicas CHRISTOFOLETTI (1997), BARTON (1995).

Segundo o trabalho pioneiro de Mandelbrot, os fractais são definidos como estruturas auto-similares ou seja, aquelas que se apresentam da mesma forma qualquer que seja a escala sob a qual são vistas. Mas a maior contribuição deste conceito é uma definição de **dimensão** onde objetos heterogêneos podem ser convenientemente medidos. A geometria dos fractais e seus conceitos tem se tornado nos últimos vinte anos uma ferramenta primordial nas ciências naturais. Para os biólogos, ajuda compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies intrincadas. Para os médicos dá uma nova visão da anatomia interna do corpo. Hoje a geometria fractal está no centro dos processos de modelamento de fenômenos naturais GLEICK, (1990).

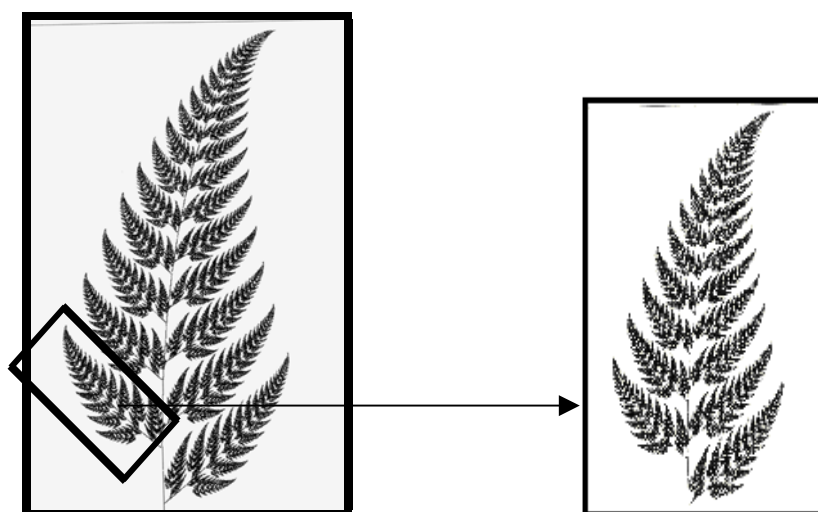


Figura 3-1 A folha de samambaia é um exemplo de fractal.

Na figura 3-1 a folha de samambaia é um fractal auto-similar pois, ao se olhar cada vez mais detalhadamente a imagem fractal verificar-se-á que as formas observadas em uma escala menor são similares às formas vistas em uma escala maior

De acordo com Mandelbrot,

"Um fractal é uma figura feita de partes similares ao todo de alguma forma".

Entre os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria fractal destacamos Georg Cantor (1845-1918) que ao desenvolver o denominado conjunto-de-pontos de Cantor, em 1883, já visualizava aspectos da teoria dos fractais. Porém, o grande salto de Mandelbrot foi perceber a possibilidade de usar os fractais para resolver complexos problemas matemáticos, dando lhes uma forma geométrica o que na época causou grande resistência no meio científico. Em livros antigos observamos que seus autores trabalhavam com figuras perfeitas, como elipse, circunferência e outras. Para Mandelbrot os matemáticos deveriam esquecer um pouco as colmeias de abelhas, e analisarem outros fenômenos na natureza como os contornos das montanhas, a trajetória das gotículas de água quando penetram na terra que, graças a suas irregularidades não podem ser descritas pelos conceitos da geometria euclidiana GLEICK, (1990).

3.1 Dimensão

A geometria dos fractais possibilita concepções mais amplas para se estudar a dimensionalidade de um objeto. Elas baseiam-se na idéia de medidas.

Mandelbrot foi além das dimensões inteiras 0, 1, 2, 3 ... até uma impossibilidade aparente: as dimensões fractais (dimensão fracionada). No mundo fractal há irregularidades e sinuosidades e ganha-se cada vez mais informações à medida que aprofunda a análise em escalas ampliadas. A dimensão fracionada torna-se uma maneira de medir propriedades que, sem isso, não têm definição clara: o grau de aspereza, ou de fragmentação, ou de irregularidade de um objeto. Um litoral sinuoso, por exemplo, apesar de sua imensurabilidade em termos de extensão, tem certo grau característico de rugosidade. Mandelbrot especificou maneiras de calcular a dimensão fracionada dos objetos reais, e fez com a sua geometria uma afirmação sobre os padrões irregulares que estudara na natureza: a de que o grau de irregularidade permanece constante em diferentes escalas. Existem várias definições para dimensão, mas nos restringiremos apenas às que nos serão úteis ao conceito de fractal.

Dimensão Euclidiana: A geometria dimensional Euclidiana pressupõe que os objetos se distribuem no espaço assumindo dimensões inteiras 1, 2 ou 3. Por exemplo uma reta tem uma única dimensão (monodimensional), porque só pode ser medida de uma maneira: pelo seu comprimento; um plano tem duas dimensões (bidimensional), a sua área é a multiplicação de dois números: o do comprimento e o da largura; já um cubo tem três dimensões (tridimensional): cujo volume é a multiplicação da largura, do comprimento e da profundidade. Para o ponto admite-se a dimensão zero.

Dimensão Fractal (D): ou dimensão de medida ou de similaridade. É aquela que existe fora dos limites da dimensão inteira. A definição de dimensão fractal está relacionada com o conceito de medida MANDELBROT (1982), BURGOS (1999), BURROUGHS (1981).

Por exemplo:

1) se queremos medir uma reta escolhemos uma escala ε e seu comprimento L será definido por

$$L = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad (3.1)$$

tal que $N(\varepsilon)$ é o número de vezes que a escala ε é aplicada, como no caso da figura 3-2 onde o comprimento é aproximadamente 4ε .

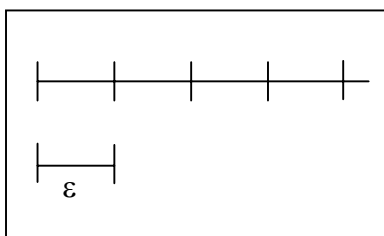


Figura 3-2 Comprimento do segmento de reta.

2) se queremos medir a área A de uma região plana, conforme figura 3-3, teremos:

$$A(\varepsilon) = N(\varepsilon) \varepsilon^2 \quad (3.2)$$

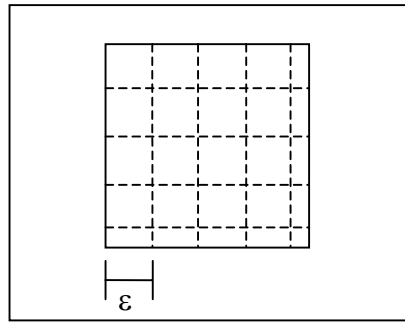


Figura 3-3 Área da região plana.

3) e, analogamente, para um volume V :

$$V(\epsilon) = N(\epsilon) \epsilon^3 \quad (3.3)$$

De acordo com os três exemplos citados, podemos perceber nas figuras 3-2 e 3-3 que ao reduzirmos nossa escala ϵ a medida (comprimento, área e volume) se torna mais precisa. Portanto, podemos definir de forma genérica a medida M :

$$M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \cdot \epsilon^{D_m} \quad (3.4)$$

onde D_m é a dimensão do instrumento de medida, ou seja se estamos medindo com retas $D_m = 1$ e no caso de planos, $D_m = 2$.

Avaliando o $N(\epsilon)$ temos que, no caso de uma reta, à medida que ϵ diminui, o número de intervalos $N(\epsilon)$, que é necessário para cobrir toda figura, aumenta com a razão inversa, ou seja

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-1} \quad (3.5)$$

Para um plano, temos que

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2} \quad (3.6)$$

Desta forma

$$N(\varepsilon) = C \varepsilon^{-D} \quad (3.7)$$

onde C é uma constante de proporcionalidade e D é uma dimensão a ser obtida.

Para isso, tomando o logaritmo de ambos o lado da equação (3.7) temos que:

$$\log[N(\varepsilon)] = \log C + D \log(1/\varepsilon) \quad (3.8)$$

A dimensão D pode ser obtida diretamente pela inclinação da reta $\log N(\varepsilon) \times \log (1/\varepsilon)$ ou, pela relação de Mandelbrot:

$$D = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log(1/\varepsilon)} \quad (3.9)$$

Exemplo: Cálculo da dimensão fractal de um segmento de reta AB.

Consideremos o segmento de reta que une dois pontos A e B, conforme figura 3-4, em que ε é o fator escala (unidade de medida) usado para medir o comprimento do segmento AB e $N(\varepsilon)$ é o comprimento desse segmento. A dimensão euclidiana desse segmento é 1 (unidimensional). A dimensão fractal desse segmento, independente da unidade de medida usada, é também igual a 1.

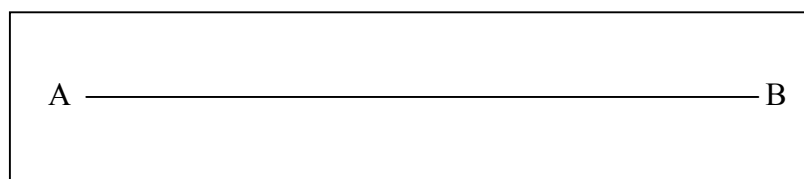


Figura 3-4 Segmento de reta AB.

Atribuiremos, a seguir, conforme figura 3-5, alguns valores para ε com a finalidade de obtermos a dimensão fractal do segmento AB. Será usado, por conveniência, logaritmo na base 2.

nível	ε	$N(\varepsilon)$	$1/\varepsilon$	$\log(1/\varepsilon)$	$\log N(\varepsilon)$
0	1	1	1	0	0
1	1/2	2	2	1	1
2	1/4	4	4	2	2
3	1/8	8	8	3	3
nível	$(1/2)^{\text{nível}}$	$2^{\text{nível}}$			

Figura 3-5 Dados para o cálculo da dimensão fractal.

Ao construirmos o gráfico $\log(N(\varepsilon)) \times \log(1/\varepsilon)$, conforme figura 3-6 devemos obter uma reta cuja dimensão fractal D pode ser obtida, diretamente, pela inclinação dessa reta.

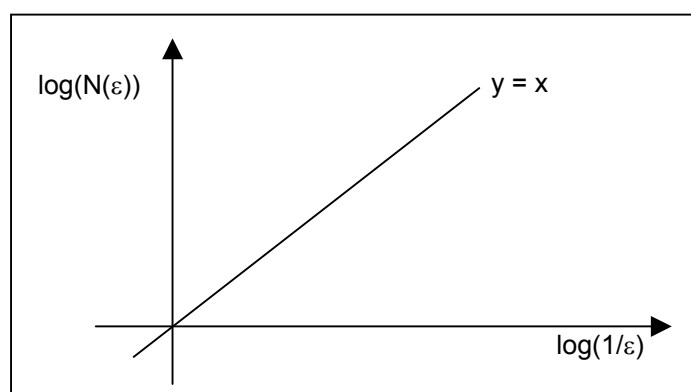


Figura 3-6 Dimensão fractal do segmento de reta

Pela relação de Mandelbrot (3.9) temos:

$$D = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log(1/\varepsilon)} = 1 \quad (3.10)$$

No exemplo anterior observamos que a dimensão euclidiana do segmento de reta AB, independente da unidade de medida usada, é igual a dimensão fractal D desse segmento. No entanto, esse fato nem sempre acontece. Se tomarmos, por exemplo, a linha de contorno da costa brasileira e calcularmos sua dimensão fractal D, encontraremos um valor compreendido entre 1 e 2.

A teoria dos fractais consegue descrever as formas da natureza que anteriormente não eram tratadas matematicamente, como o formato de uma nuvem, uma folha de samambaia figura 3-1. Isso implica em se relacionar dimensão fractal com as irregularidades dos objetos e processos complexos tendo como base uma "dimensão referência" inteira (Euclidiana). Em D está a idéia de preenchimento do espaço pois, a medida que D aumenta o grau de preenchimento do espaço ou irregularidade também aumenta como algo contínuo e podendo assumir valores não inteiros, diferente da idéia comum sobre dimensão. A seguir, calcularemos a dimensão fractal de figuras auto-similares.

3.2 Auto-Similaridade

Até então a definição de fractal estava relacionada com a capacidade de se obter a mesma figura (ao menos estatisticamente) ao se efetuar uma mudança de escala. Há fractais onde uma transformação de escala, com o mesmo fator para todas as direções, leva a sistema similares, aos quais chamamos de fractais auto-similares. A invariância escalar, a auto-similaridade e a aleatoriedade são consideradas como sendo os três atributos dos fractais. A invariância escalar significa que os fractais mostram detalhes similares em diversas escalas. Deve-se salientar que a noção de auto-similaridade baseia-se na de similaridade geométrica. Dois objetos são similares se possuem a mesma forma,

independente de seus tamanhos. Os ângulos correspondentes, todavia, devem ser iguais e os segmentos lineares correspondentes devem ter o mesmo fator de proporcionalidade. Por exemplo, quando uma fotografia é ampliada, ela é ampliada pelo mesmo fator tanto na direção vertical como na direção horizontal. O terceiro atributo, a aleatoriedade, encontra-se relacionado com a dinâmica caótica dos sistemas, assinalando a imprevisibilidade da forma específica a ser gerada.

Baseando-se nessas características, foram desenvolvidos alguns fractais, que se tornaram clássicos e referências para novos estudos. Estes fractais exatos receberam o nome de seus criadores, dos quais evidenciaremos os exemplos a seguir:

Poeira de Cantor

A Poeira de Cantor foi apresentada por Georg Cantor em 1883. Começa por um segmento de reta que divide-se em três partes auto-similares, do qual retira-se a parte do meio. Isso resulta em dois segmentos, e retiramos o terço médio de cada um deles. Isso resulta em quatro segmentos. Nas partes restantes, repete-se a mesma operação, sendo que as estruturas que se formam foram assemelhando-se à poeira GLEICK (1990).

Se fosse uma reta, independente do seu comprimento medido em metros, centímetros, etc. o valor da dimensão fractal seria igual a 1, mas, como se trata de uma reta segmentada e da qual se retirou partes, o valor da dimensão fractal é menor que 1. Observa-se que nesse fractal é facilmente visto algumas características dos fractais, ou sejam, auto-similaridade e complexidade. Além disso, esses fractais são gerados por processos simples



Figura 3-7 Representação do conjunto cantoriano.

Ao gerarmos o conjunto cantoriano, conforme exposto anteriormente, obtemos para cada nível de iteração, os valores de ε e $N(\varepsilon)$, apresentados a seguir:

no nível 0 temos: $\varepsilon = 1$ e $N(\varepsilon) = 1$;

no nível 1 temos: $\varepsilon = 1/3$ e $N(\varepsilon) = 2$;

no nível 2 temos: $\varepsilon = 1/9$ e $N(\varepsilon) = 4$;

no nível 3 temos: $\varepsilon = 1/27$ e $N(\varepsilon) = 8$.

A dimensão D é obtida pela inclinação da reta $\log N(\varepsilon) \times \log (1/\varepsilon)$.

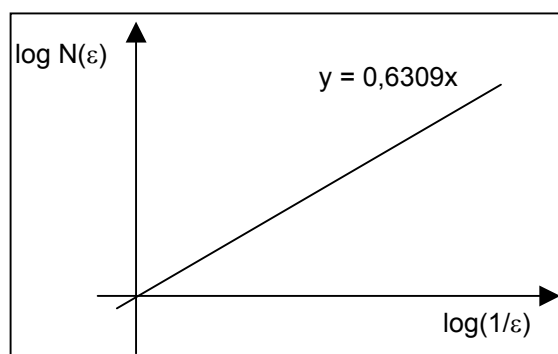


Figura 3-8 Dimensão fractal do conjunto cantoriano.

Pela relação de Mandelbrot (3.9) a sua dimensão é

$$D = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log(1/\varepsilon)} = 0,6309 \quad (3.11)$$

Curva de Kock

A Curva de Kock, LAM, N. S-N., DE COLA, L. (1993) ou floco de neve, foi descoberta por Helge Von Kock, matemático sueco em 1904. Genericamente, o caminho para formação desse fractal é o oposto ao do empregado na Poeira de Cantor. No caso da Curva de Kock um segmento de reta é dividido em quatro partes auto-similares e dobrada no ponto mediano, sendo isso repetido várias vezes até que a assume uma forma

que lembra um floco de neve. Se fossemos determinar a dimensão da linha esta seria igual a 1, enquanto que a Curva de Koch tem dimensão fractal igual a 1,26.

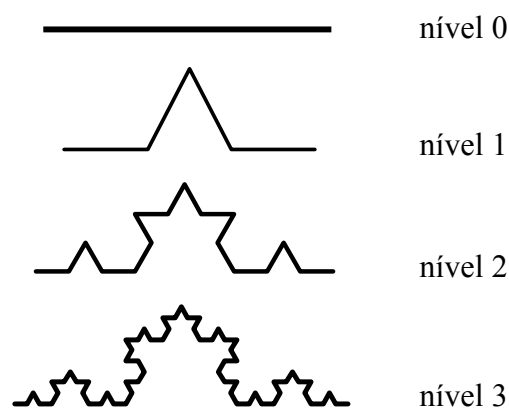


Figura 3-9: - Quatro Gerações da Curva de Koch.

Na figura 3-9 temos: uma linha, de dimensão 1, que é dobrada de modo que cada uma de suas partes sejam auto-similares, portanto, a dimensão fractal esperada será entre 1 e 2. Para achar D , entende-se que no primeiro nível de iteração N é igual a 4, ou seja, a linha foi dobrada em 4 partes auto-similares, e que $\varepsilon = 1/3$. No segundo nível de iteração o $N = 16$ e $\varepsilon = 1/9$, Por meio do valor da inclinação da reta do gráfico $\log(N(\varepsilon)) \times \log(1/\varepsilon)$ obtemos o valor da dimensão fractal $D = 1,2618$. Logo temos:

$$D = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log(1/\varepsilon)} = 1,2618 \quad (3.12)$$

3.3 Auto–Afinidade

Os fractais auto-similares MANDELBROT (1985), CARR (1997), GALLANT, MOORE, HUTCHINSON, GESSLER (1994) como podemos notar, em estruturas do tipo da curva de Koch, possuem isotropia, isto é, são equivalentes em

todas as direções. Existem fractais anisotrópicos, ou seja, para se obter um objeto semelhante a partir de uma transformação de escala é necessário que as escalas sejam diferentes para diferentes direções; a estes chamamos de fractais auto-afins MATSUSHITA, OUCHI (1989).

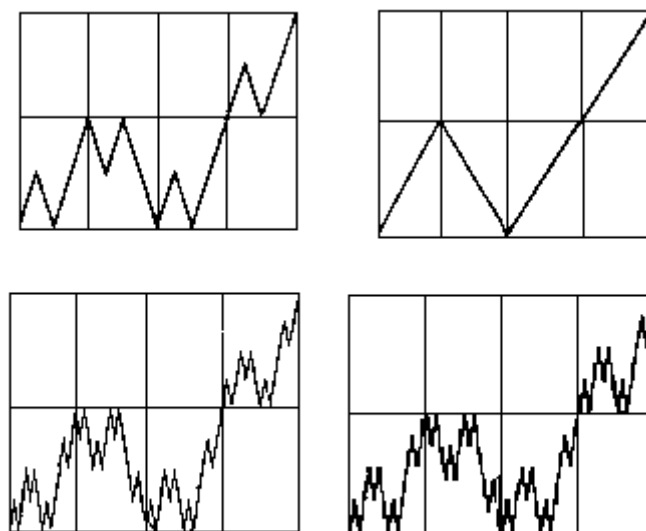


Figura 3-10 Exemplo de uma figura auto-afim.

Na figura 3-10 podemos observar uma estrutura auto-afim obtida recursivamente. Nela temos, na direção horizontal x , o fator de escala $b_x = 4$ que é diferente da direção vertical y onde $b_y = 2$.

Auto-afinidade é definida através da transformação

$$t \rightarrow \lambda t \quad (3.13)$$

$$f \rightarrow \lambda^H f \quad (3.14)$$

sendo $f(t)$ função de uma variável, considerando apenas perfis bidimensionais que no caso de estruturas auto-afins têm que ser unívocas, onde t é a variável horizontal, $f(t)$ é a variável vertical e H é denominado expoente de Hurst.

Combinando as transformações (3.13) e (3.14) temos

$$\lambda^H f(t) \cong f(\lambda t) \quad (3.15)$$

$$f(t) \cong \lambda^{-H} f(\lambda t) \quad (3.16)$$

As equações (3.13), (3.14) e (3.15) expressam funções auto-afins.

O símbolo $\cong$ significa igualdade estatística. Alguns fenômenos naturais apresentam auto-similaridade estatística. Entendemos por auto-similaridade estatística o fato de uma parte do perfil ser estatisticamente semelhante ao todo.

O expoente de Hurst (H) é limitado para o intervalo $0 \leq H < 1$, e está intimamente relacionado com as características geométricas do perfil, sintetizando toda a informação relacionada ao seu reescalonamento.

3.4 Determinação do Expoente de Hurst (H) e da Dimensão Fractal (D).

Analisaremos o expoente de Hurst para perfis auto-afins por dois métodos: um denominado Reescaled-Range ou análise de reescalonamento ou simplesmente análise R/S e o outro, cálculo do expoente H por transformada wavelet, MIRANDA (1997), SIMONSEN, HANSEN, NES (1998).

3.4.1 Método R/S

O método R/S, foi desenvolvido por Hurst em 1951, e é um método clássico para análise de seqüências temporais. Hurst estudou processos climatológicos

relacionados a enchentes do Rio Nilo, e encontrou que muitas variáveis naturais ao serem reescaladas temporalmente, apresentavam uma lei de potência do tipo T^H , onde T é a escala (período) e H é conhecido como expoente de Hurst. Essa análise é conhecida como Análise de Reescalamento ou Análise R/S.

O método R/S surgiu com a tentativa de se resolver o problema de um reservatório finito submetido a um fluxo de entrada aleatória. A questão baseia-se na determinação do volume de um reservatório, conhecendo-se seu fluxo de entrada de água $\xi(t)$ e considerando que seu fluxo de saída seja igual a média do $\xi(t)$, de maneira que este reservatório nunca seque ou transborde.

Considerando o intervalo de tempo T , a média do fluxo de entrada será:

$$\langle \xi \rangle = \frac{\sum_{t=1}^T \xi(t)}{T} \quad (3.17)$$

Como há variação na quantidade do fluxo de entrada, em cada ano sempre haverá uma diferença em relação a média do período para mais ou para menos. Essas diferenças em relação a média devem ser somadas de modo cumulativo. Assim, a equação que melhor representa tal situação é:

$$X(t, T) = \sum_{u=1}^t [\xi(u) - \langle \xi \rangle_T] \quad (1 \leq t \leq T) \quad (3.18)$$

O valor máximo e o mínimo de $X(t, T)$ representam o volume máximo e mínimo de água que passará pelo reservatório no período T , conforme figura 3-11. A diferença entre os valores máximo e mínimo da curva acumulada representa a amplitude (R).

$$R(T) = \text{Max } X(t, T) - \text{Min } X(t, T) \text{ para } (1 \leq t \leq T) \quad (3.19)$$

Obviamente $R(T)$ depende do fluxo $\xi(t)$, que por sua vez depende do período considerado T . Hurst investigou muitos fenômenos naturais e percebeu que R dependia do período T como uma lei de potência

$$\frac{R}{S} = C(T)^H \quad (3.20)$$

onde R representa a diferença entre as quantidades máxima e mínima de água contida no reservatório, S desvio padrão do fluxo de entrada, C coonstante e H conhecido como expoente de Hurst.

$$S(T) = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T [\xi(t) - \langle \xi \rangle_T]^2}{T}} \quad (3.21)$$

$S(T)$ foi introduzido apenas para que a variável R/S seja um número adimensional, tornando mais fácil a comparação com outros fenômenos. Portanto, teremos para cada valor de escala T um número R/S . Essa técnica estatística para o cálculo de R/S é denominada Reescaled-Range ou análise de reescalonamento.

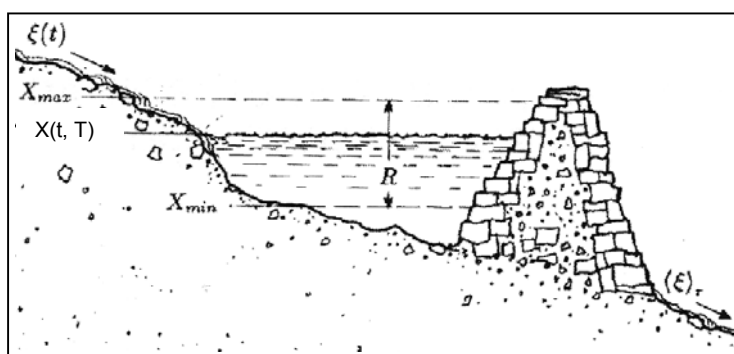


Figura 3-11 Reservatório de água.
FEDER (1989).

3.4.2 Estimativa do Expoente de Hurst (H).

Segundo HURST (1965), WERON, PRZYBYLOWICZ (2000) os valores R/S obtidos em registros de séries temporais, considerando diferentes tamanhos de período de tempo (T) são descritos pela seguinte relação empírica:

$$\frac{R}{S} = C(T)^H \quad (3.22)$$

em que, R/S = reescalonamento da série, T = período de observação, C = constante e H = expoente de Hurst

Ao aplicarmos logaritmo na equação (3.22) obtemos:

$$\log(R/S) = H \log(T) + \log C \quad (3.23)$$

Construindo o gráfico $\log(R/S) \times \log(T)$ e calculando a regressão linear dos pontos obtidos, determinamos H que além de representar a inclinação da reta também traz informações sobre as características geométricas da série analisada, sintetizando toda a informação relacionada ao seu reescalonamento.

Outra característica importante do expoente H é a de informar sobre persistência, ou não, do processo como, também, informações sobre correlação, a qual é calculada BRESLIN, BELWARD (1999) por:

$$C = 2^{(2H-1)} - 1 \quad (3.24)$$

em que, C = medida de correlação e H = expoente de Hurst.

De acordo com FEDER (1989) tem-se:

1) para $0,5 < H < 1$ temos persistência, assim um incremento positivo (negativo) no passado aumenta a possibilidade de um incremento positivo (negativo) no futuro. O fato de H estar entre 0,5 e 1 indica que temos um sistema positivamente correlacionado;

2) para $0 \leq H < 0,5$ temos antipersistência, que indica que para um incremento positivo (negativo) no passado, incrementos negativos (positivos) no futuro terão maior probabilidade. O fato de H estar entre 0 e 0,5 indica que o sistema está negativamente correlacionado.

3) para $H = 0,5$ temos um sistema descorrelacionado, o comportamento da sistema é similar ao movimento aleatório (movimento Browniano ou movimento Browniano ordinário).

O valores de H , para os casos 1 e 2 acima, indicam que o sistema refere-se a um processo de memória longa com componentes randômicos, onde um evento passado tem efeito sobre o evento futuro. Tais sistemas são denominados movimento Browniano fracionário (fBm).

O expoente H traz informações sobre a geometria do perfil analisado, e também sobre a persistência ou não do processo. Um exemplo dessa relação de persistência é o movimento Browniano fracionário, que podemos relacionar, a título de ilustração, ao movimento de um bêbado ao longo de uma linha. Se os passos do bêbado são persistentes, um passo para frente será seguido, provavelmente, por outro no mesmo sentido, e este movimento o levará sempre a distâncias cada vez maiores da origem. Para passos antipersistentes um passo para frente, provavelmente, será seguido de um para trás e isso manterá sempre próximo a origem. Traçando o gráfico da distância à origem vs. tempo, conforme figura 3-12, podemos perceber na diferença entre as escalas do gráfico o que foi dito em relação a maiores ou menores distâncias. E isso se reflete na forma que uma medida na direção y (neste caso, distância a origem), como rugosidade aumenta a uma taxa maior ou menor dependendo do quão persistente ou antipersistente é o sistema.

Exemplos de três séries temporais, representando movimento Browniano fracionário ($H = 0,1$; $H = 0,9$) e movimento Browniano ($H = 0,5$).

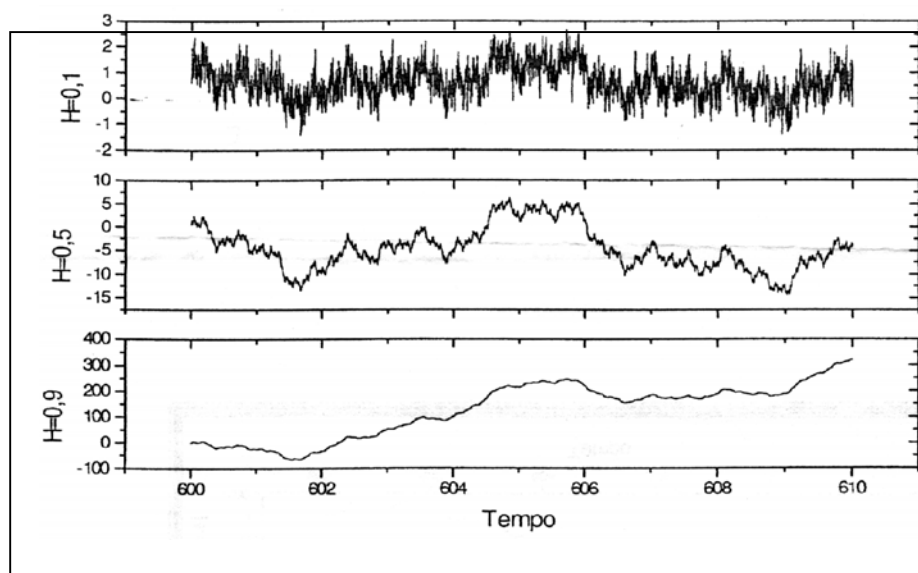


Figura 3-12 Movimento Browniano e movimento Browniano fracionário. PETERS (1996).

3.4.3 Programa para Gerar Ruído com Determinado Valor de H

O movimento Browniano fracionário é uma generalização do movimento Browniano ordinário. É conhecido como um modelo adequado para descrever um vasto número de fenômenos e formas naturais, tais como superfícies terrestres, silhuetas de montanhas, linha costeira, ondulações em água.

Segundo Roman E. Maeder (1995) foram desenvolvidos métodos para visualizar o movimento Browniano fracionário de uma série temporal com determinado valor de H , com auxílio do programa Mathematica versão 1.2.

Podemos a partir de um perfil de uma série temporal com expoente H bem determinado, aplicar métodos e verificar se o expoente gerado a partir desses métodos é o mesmo que foi dado, como parâmetro, para se gerar o perfil. Os gráficos a seguir

mostram simulações de séries temporais analisadas para 4096 pontos e valores do expoente de Hurst iguais a 0,50; 0,70 e 0,90.

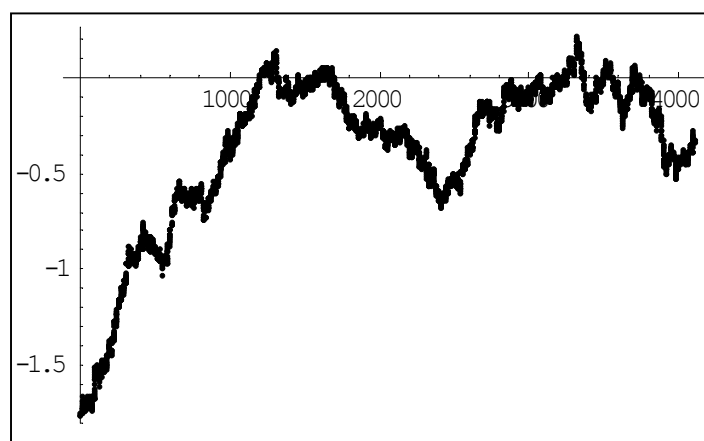


Figura 3-13a Movimento Browniano.
 $H = 0,50$.

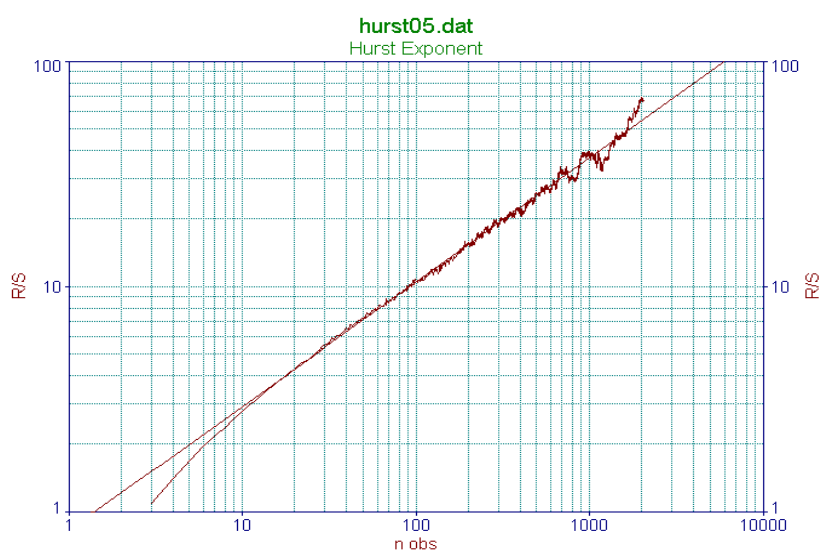


Figura 3-13b Análise R/S.
AutoSignal para Windows 1.6.

Aplicando o método R/S obtemos o valor estimado de:

$$H = 0,551$$

$$\text{Std} = 0,0025$$

$$r^2 = 0,995$$

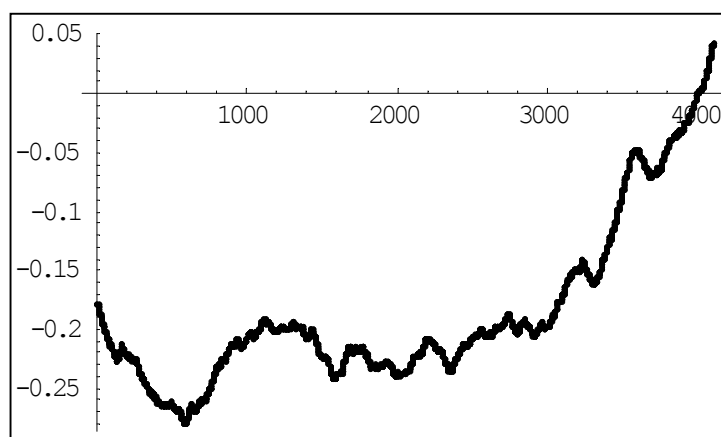


Figura 3-14a Movimento Browniano fracionário.
 $H = 0,70$.

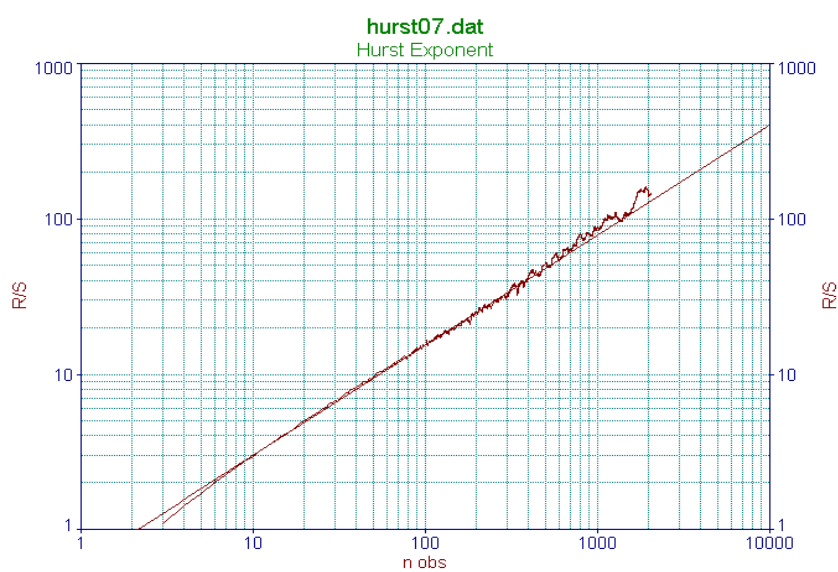


Figura 3-14b Análise R/S.
 AutoSignal para Windows 1.6

Aplicando o método R/S obtemos o valor estimado de:

$$H = 0,708$$

$$\text{Std} = 0,0046$$

$$r^2 = 0,990$$

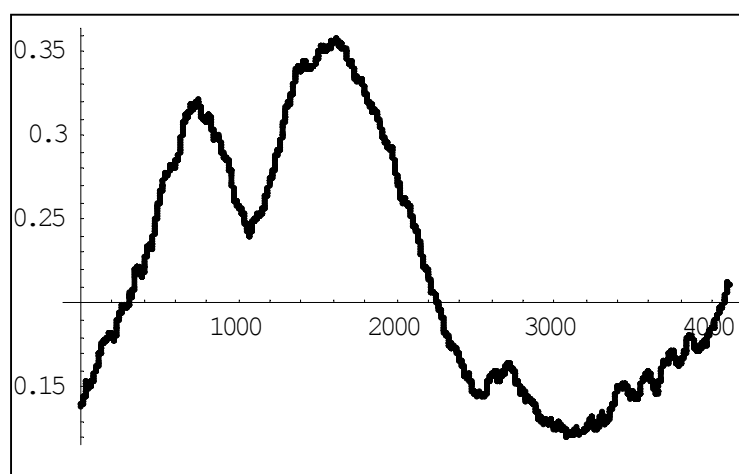


Figura 3-15a Movimento Browniano fracionário.
 $H = 0,90$.

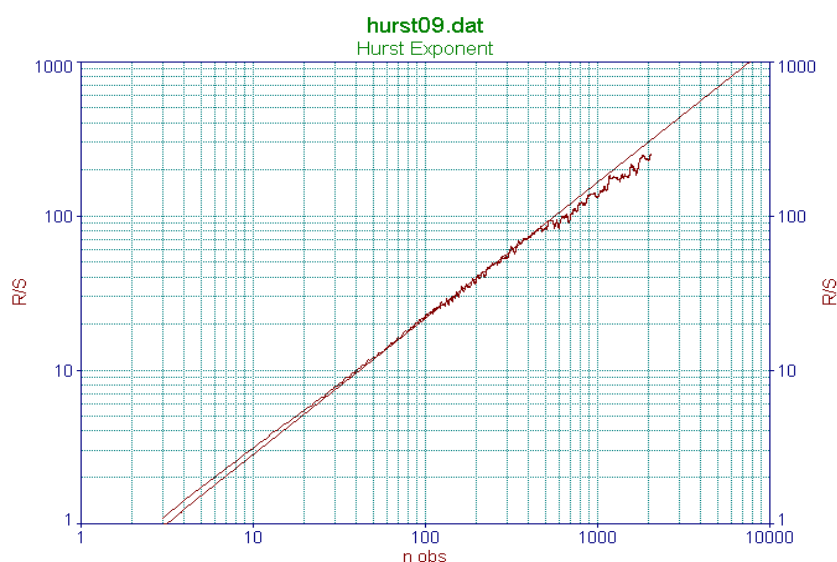


Figura 3-15b Análise R/S.
 AutoSignal para Windows 1.6.

Aplicando o método R/S obtemos o valor estimado de:

$$H = 0,884$$

$$\text{Std} = 0,0044$$

$$r^2 = 0,995$$

Os algoritmos para gerarem movimento Browniano fracionário não são exatos, geram valores aproximados de H por estarem analisando processos que possuem componentes aleatórios envolvidos.

O atributo do método R/S é de confiabilidade, pois, apresenta resultados próximos dos simulados, conforme figuras 3-13b, 3-14b e 3-15-b.

Determinamos o valor estimado de H pelo método R/S usando o programa AutoSignal o qual automatiza os processos de análise de sinais complexos, filtra, processa e analisa esses sinais com gráficos interativos e detalhados métodos numéricos.

3.4.4 Cálculo da Dimensão Fractal (D)

Na análise R/S a dimensão fractal (D) está relacionada com o expoente de Hurst para perfis auto-afins através da fórmula BRESLIN, BELWARD (1999).

$$D = 2 - H \quad (3.25)$$

A dimensão fractal assume característica de preenchimento do espaço, podendo assumir valores não inteiros, ou seja a medida que H diminui ($0 \leq H < 0,5$) D se aproxima de 2, logo o perfil se torna tão rugoso que é como se ele comesse a preencher o espaço como um plano. Se o expoente H aumenta ($0,5 < H < 1$) a dimensão diminui suavizando o perfil; se $H = 0,5$ a dimensão fractal é 1,5 representando movimento Browniano EDGAR E. PETERS (1996). Conforme figura 3-17

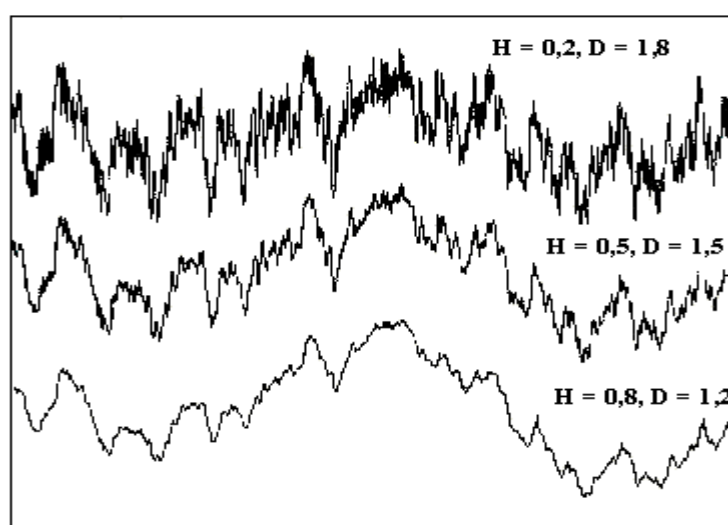


Fig 3-16 Perfis com diferentes dimensões.
PETERS (1996)

3.4.5 Determinação do Expoente de Hurst pela Transformada Wavelet

Calculemos o expoente de Hurst por meio da transformada wavelet aplicada a um sinal $f(t)$ auto-afim.

A transformada wavelet contínua é definida, conforme capítulo 2 nas equações (2.21) e (2.22), por:

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.26)$$

A auto-afinidade de um sinal $f(t)$ implica, como já vimos na equação (3.15), que:

$$f(\lambda t) = \lambda^H f(t) \quad (3.27)$$

Como o sinal $f(t)$ a ser analisado é auto-afim, então, os coeficientes de wavelets devem satisfazer a seguinte condição:

$$C(\lambda a, \lambda b) = \lambda^H C(a, b) \quad (3.28)$$

Substituindo então t por λt na equação (3.26) obtemos:

$$\lambda^H C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.29)$$

Logo, fazendo $\lambda t = z \Rightarrow dt = dz/\lambda$, que substituindo na equação (3.29), temos:

$$\lambda^H C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \psi\left(\frac{(z/\lambda)-b}{a}\right) \frac{dz}{\lambda} \quad (3.30)$$

Assim,

$$C(a, b) = \lambda^{-H} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \psi \left(\frac{z - \lambda b}{\lambda a} \right) \frac{dz}{\lambda^{1/2}} \right) \quad (3.31)$$

ou

$$C(a, b) = \lambda^{-H-(1/2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \psi \left(\frac{z - \lambda b}{\lambda a} \right) dz \right) \quad (3.32)$$

Portanto,

$$C(a, b) = \lambda^{-1/2-H} \cdot C(\lambda a, \lambda b)$$

Concluimos então que

$$C(\lambda a, \lambda b) = \lambda^{H+1/2} C(a, b) \quad (3.33)$$

Calculando o valor absoluto da média dos coeficientes através do método AWC "Averaged Wavelet Coefficient Method" desenvolvido por SIMONSEN, HANSEN, NES (1998), temos:

$$C(\lambda a) = \lambda^{H+1/2} < C(a) >_b \quad (3.35)$$

Para determinarmos o expoente de Hurst utilizamos o gráfico $\log(C(\lambda a)) \times \log a$ cuja inclinação da reta é $H + 1/2$. Com isso encontramos o valor de H com o qual se determina a dimensão fractal do sinal.

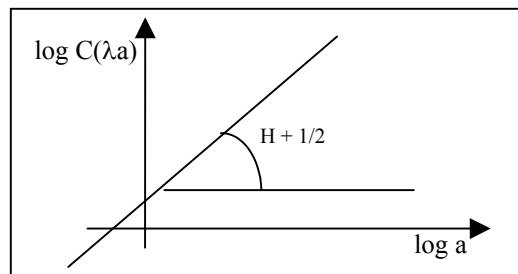


Figura 3-17 Ajuste dos pontos por uma reta.

A teoria para o cálculo do expoente de Hurst foi desenvolvida para wavelet contínua mas, de acordo com os trabalhos apresentados por ABRY, VEITCH (1998), ABRY, FLANDRIN, TAQQU, VEITCH (2000) esse estudo pode, também, ser estendido para o cálculo do expoente de Hurst aplicando transformada wavelet discreta.

Existem outros métodos para o cálculo do expoente de Hurst por wavelets não abordados neste trabalho JONES, LONERGAN, MAINWARING (1996), SEVCIK (1998).

CAPÍTULO 4

Análise da Série Temporal Diária das Chuvas do Município de Araras-SP, (1955-2000)

As precipitações pluviométricas constituem um sistema complexo devido ao fato de não serem periódicas, nem aleatórias, mas uma mistura, algo intermediário entre tais fenômenos.

Métodos desenvolvidos recentemente serão usados na análise de uma série temporal obtida com valores diários de chuvas, totalizando 16.771 dados, conforme figura 4-1. Tais métodos incluem a transformada de Fourier, transformada wavelet, cálculo do expoente de Hurst (H) e a dimensão fractal (D). Para o cálculo do expoente de Hurst usaremos dois métodos: análise R/S e transformada wavelet.

A figura 4-1, nos mostra que a série temporal dos dados diários de chuvas deve possuir uma dimensão não inteira devido a sua rugosidade. Mostraremos que o valor estimado para a dimensão fractal de tal perfil é $D = 1,254$ e o valor estimado do expoente de Hurst é $H = 0,743$.

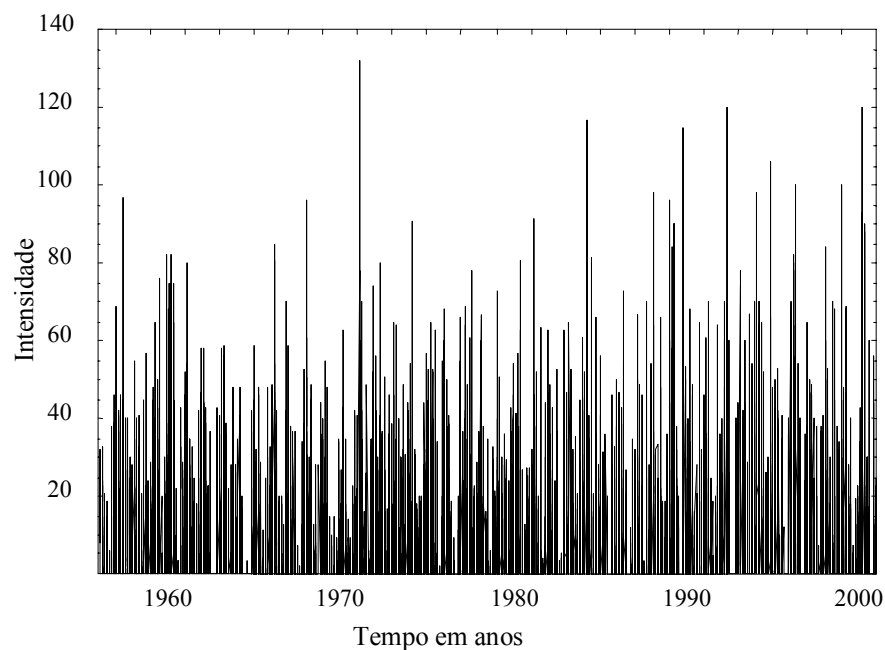


Figura 4-1 Série temporal das chuvas do município de Araras (1955-2000).

Aplicaremos cada um dos métodos proposto na série temporal em estudo e interpretaremos os resultados obtidos.

4.1 Comparação entre o Escalograma da Transformada Wavelet e o Espectro de Fourier para Série de Chuvas

A seguir, analisaremos o espectro de Fourier e o escalograma da transformada wavelet para série dos dados diários de precipitações pluviométricas coletados na Fazenda Santa Lúcia, localizada no município de Araras (SP), totalizando 16.771 dados de chuvas.

Aplicando a FFT na série temporal obtemos o espectro de Fourier, conforme figura 4-2.

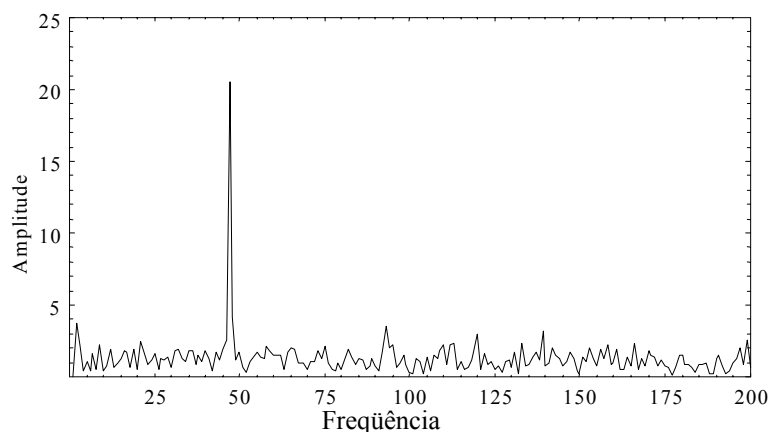


Figura 4-2 Espectro de Fourier da série temporal de chuvas.

O resultado da transformada de Fourier aplicado à série temporal da figura 4-1 fornece uma relação entre frequência e amplitude desses sinais. Analisando o espectro de frequências, pudemos destacar a frequência, igual a 0,002742. Tal fato, corresponde ao período de 364,69 dias, aproximadamente, um ano. Portanto, pela FFT aplicada à série temporal de chuvas constatamos a periodicidade em torno de um ano.

O gráfico obtido na figura 4-3 é o resultado da transformada de Fourier aplicado à série completa dos dados de chuvas, figura 4-1, retirado o sinal anual predominante.

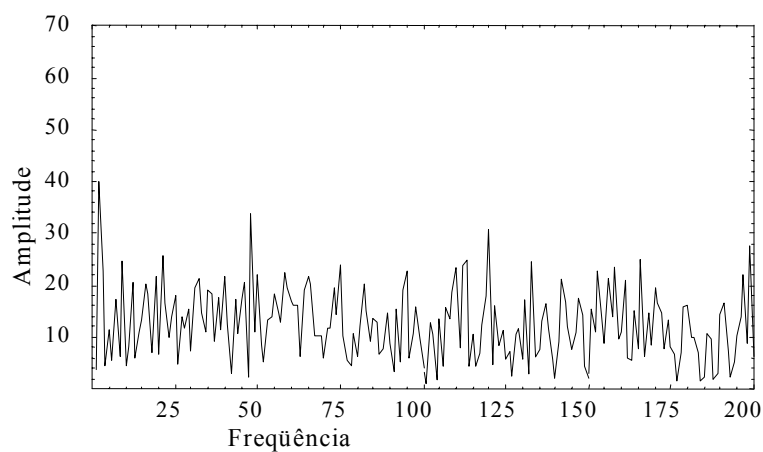


Figura 4-3 Espectro de Fourier, sem a periodicidade anual.

Interpretando o espectro de Fourier, figura 4-3, obtido pela FFT da série temporal de chuvas, não conseguimos constatar um período significativo para a série.

Pelo fato da frequência ser o inverso do período, analisaremos os sinais dos espectros que apresentam frequências menores que 0,00274 pois, tal fato corresponde a análise de períodos maiores que um (1) ano. Assim, analisando e comparando o espectro de Fourier, nas figuras 4-2 e 4-3, observamos frequências, aproximadamente, iguais a 0,00119 e 0,00059 cujos períodos correspondem, aproximadamente, 2 e 4 anos, respectivamente.

A seguir analisaremos o escalograma da série temporal de chuvas obtido pela transformada wavelet, conforme figura 4-4.

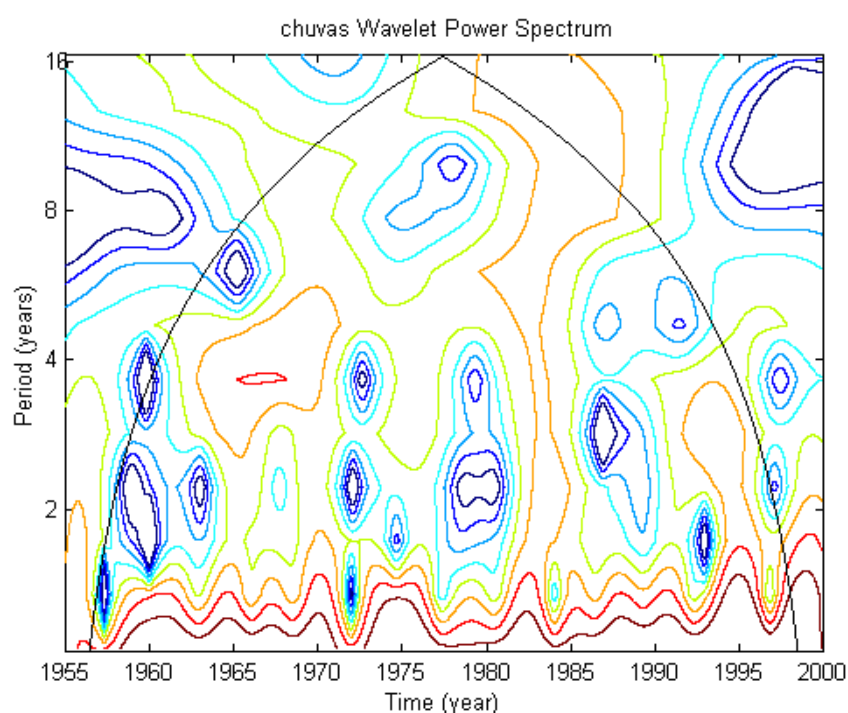


Figura 4-4 Escalograma da série temporal de chuvas usando programa do MATLAB, TORRENCE e COMPO (1998).

Neste escalograma procuramos salientar a periodicidade das chuvas com o auxílio da interpretação de cores, a cor azul significa menor intensidade do coeficiente wavelet e a vermelha, maior intensidade. Tal análise realizou-se dentro da curva fechada (cone de influência), pelo fato dessa região apresentar alto nível de confiabilidade, garantida pelo teste de significância (TORRENCE e COMPO (1998)). Assim, foi possível observar períodos significativos da série em torno de um (1), dois (2) e quatro (4) anos.

Analizando a FFT de um sinal, toda informação relativa a evolução temporal da série é perdida, sendo possível distinguir apenas as frequências dominantes. No entanto, aplicando a transformada wavelet conseguiremos distinguir as frequências dominantes (escalas ou períodos) e, ainda, localiza-las no tempo. Com esta análise constatamos a utilidade da transformada de Fourier e wavelet no estudo de sinais periódicos.

Comparando o escalograma apresentado na figura 4-4 com o espectro de Fourier figura 4-2, constatamos os mesmos períodos significativos da série.

A análise dos dados de chuvas foi realizada por meio da transformada wavelet usando wavelet de Morlet por ser esta análise a mais adequada para capturar variações nas periodicidades do sinal, de maneira contínua ao longo das escalas e por fornecer uma representação do sinal visualmente mais fácil de ser interpretada.

4.2 Determinação do Expoente de Hurst (H) e da Dimensão Fractal (D)

Os valores R/S (Rescaled Range) para análise de série temporal da figura 4-1, considerando diferentes tamanhos de período de tempo T, são adequadamente descritos pela seguinte relação empírica: $R/S = C(T)^H$, equação (3.22).

Aplicando logaritmo na equação anterior obtemos $\log(R/S) = H \log(T) + \log C$, equação (3.23), onde H é o expoente de Hurst, FEDER (1988). Construindo o gráfico de $\log(R/S) \times \log(T)$, e ajustando os pontos por uma reta, o expoente H representa a inclinação dessa reta conforme figura 4-5 a seguir.

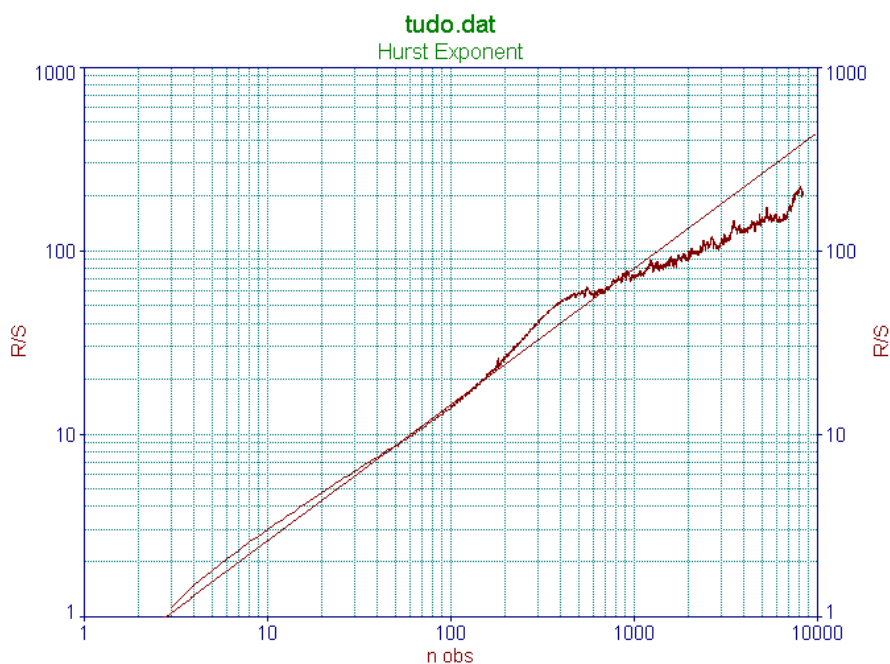


Figura 4-5 Análise R/S.
AutoSignal para Windows 1.6

$$H = 0,743$$

$$\text{Std} = 0,00524$$

$$r^2 = 0,9951$$

Para a série em estudo estimamos $H = 0,743$ e consequentemente a dimensão fractal $D = 1,254$. Isto indica que, sobre o ponto de vista de correlação, a chuva de maneira geral se mostra persistente isto é, apresenta um componente de longa memória e seus passos estão positivamente correlacionados. O valor encontrado de H , no estudo da pluviosidade da região de Araras é o mesmo valor encontrado para a pluviosidade em outras regiões MIRANDA (1998), BRESLIN, BELWARD (1999), GAN, McMAHON, FINLAYSON (1991).

4.3 Cálculo do Expoente de Hurst pela Transformada Wavelet

Aplicando a transformada wavelet discreta, para estimar o expoente de Hurst, conforme SIMONSEN E HANSEN (1998), no sinal da série da figura 4-1 e usando a wavelet ortogonal de Daubechies do tipo 8, obtivemos o escalograma figura 4-6:

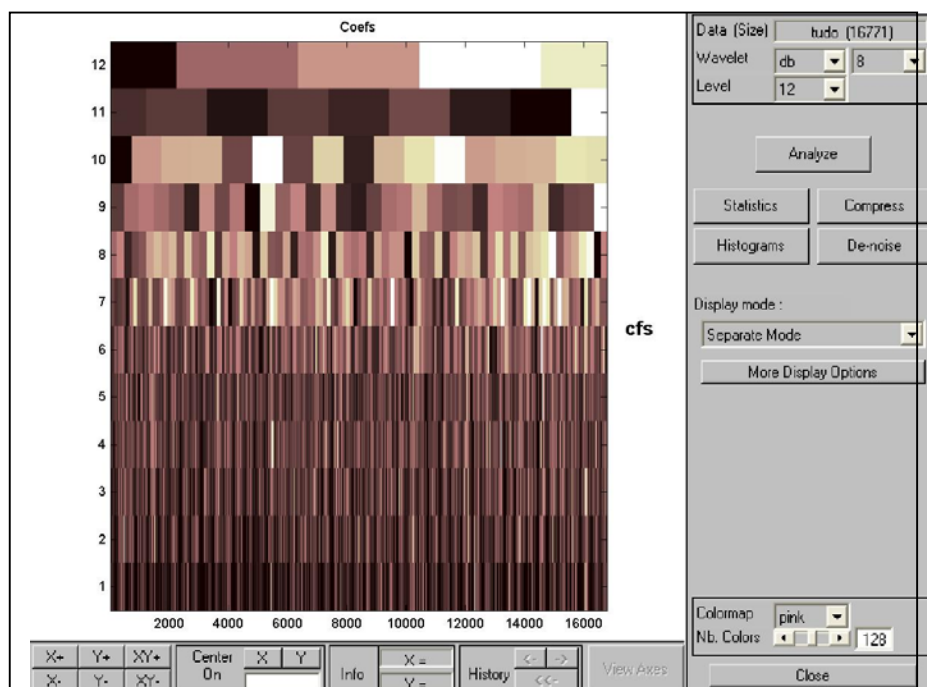


Figura 4-6 Escalograma da série temporal de chuvas.
MATLAB, TORRENCE E COMPO (1998).

O escalograma é a representação da matriz dos coeficientes. Tomamos 12 escalas. Então temos uma matriz de dimensão 12 linhas por 16384 colunas. Calculando o valor absoluto da média de cada linha, usando a equação (3.34) obtemos, uma matriz de dimensão 12 linhas por uma coluna. Fazendo o gráfico do logaritmo na base 2 dos valores da média dos coeficientes vs logaritmo na base 2 das escala obtemos os pontos da figura abaixo e cujo ajuste, nos dá a reta $y(x) = 1,2x - 13.2482$:

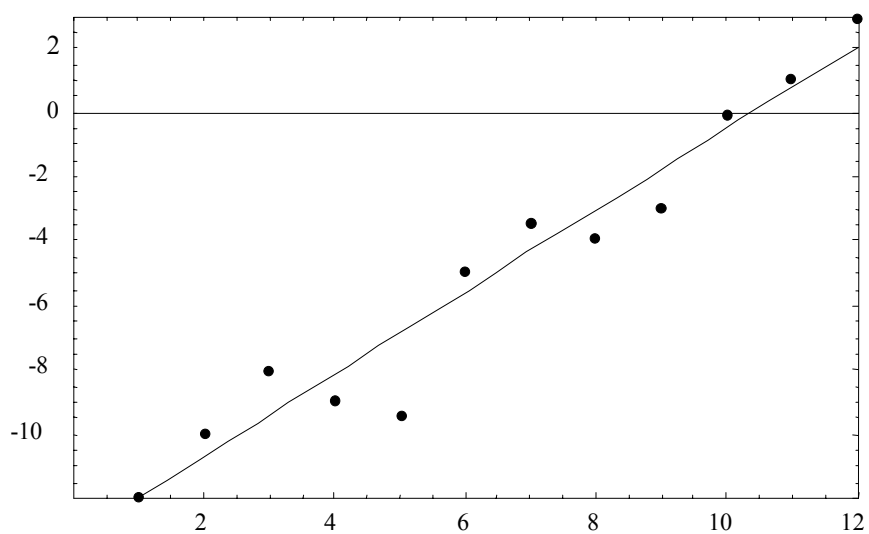


Figura 4-7 Ajuste dos pontos por uma reta.

Valor estimado de H:

$$H + 1/2 = 1,27$$

$$H = 0,77$$

Analisando a transformada wavelet do sinal da série de chuvas, usando wavelets ortogonais de Daubechies dos tipos 4, 5, 6, e 10, encontramos os seguintes resultados:

DbN	H	Erro Estimado
Db4	0,802	0,2081
Db5	0,580	0,3189
Db6	0,706	0,4497
Db8	0,775	0,3055
Db10	0,508	0,4001

Figura 4-8 Tabela de valores para H
MATLAB.

Segundo os valores apresentados na tabela da figura 4-8 observamos que o menor erro estimado foi quando calculamos o expoente de Hurst, usando a wavelet Db4. Mas, para análise da série temporal de chuvas o valor estimado de H é em média 0,7 o que nos levou a escolher a wavelet ortogonal Daubechies do tipo 8 porque o valor de H encontrado foi o que mais se aproximou do método R/S. Essa escolha pode não ser representativa, uma vez que a análise foi feita para uma única série. Acreditamos que um estudo envolvendo outros tipos de wavelets e um número maior de séries temporais represente melhor os resultados.

4.4 Conclusão

A análise da transformada wavelet efetuada permitiu detectar periodicidade em torno de um (1), dois (2) e quatro (4) anos no registro da série temporal de chuvas, nos períodos de 1958/1962, 1968/1969, 1972/1976, 1978/1982 e 1986/1992. Tal informação obtida com a transformada wavelet (por meio do escalograma) e com a transformada de Fourier (espectro de Fourier) complementam o estudo das séries temporais quanto à variação da periodicidade da série ao longo do tempo. Neste contexto mostramos que a utilização das wavelets ajuda na caracterização do sistema complexo.

Analizamos o expoente de Hurst para a série temporal usando dois métodos: método R/S e o método da transformada wavelet. Apesar de métodos diferentes os resultados obtidos foram equivalentes. Em sistemas complexos, este é um fato significativo.

Na maioria das análises de séries temporal de chuvas, o valor estimado de H está entre 0,5 e 0,8 com valor médio igual a 0,7. O valor do expoente de Hurst encontrado na análise da série obtida com os dados diários de precipitação, coletados na fazenda Santa Lúcia, no município de Araras, foi estimado em $H = 0,7$ e dimensão fractal $D = 1,3$. Esse valor, de acordo com FEDER (1989), indica sobre o

ponto de vista de correlação, que a chuva, se mostra persistente ($H > 0,5$), ou seja a série temporal em estudo tem propriedade de longo alcance.

Com este trabalho podemos perceber que a análise fractal pode ser uma ferramenta muito útil para estudo de sistemas complexos.

Atualmente, LOVEJOY, MANDELBROT (1985), MAZZARELLA (1999) acreditam que as chuvas sejam um processo multifractal, isto é, não possui uma única dimensão fractal mas, um contínuo de dimensões variando de um valor mínimo a um valor máximo sendo o ponto de máximo da curva o valor da dimensão fractal encontrado.

4.5 Sugestão para Trabalhos Futuros

Sugerimos uma pesquisa que envolva um número maior de séries de chuvas, de diferentes regiões, para que nelas possam ser aplicadas o métodos R/S e transformada wavelets, com a finalidade de verificar a credibilidade desses métodos na estimativa do expoente de Hurst (H). Além disso, sugerimos também que os valores de H , sejam comparados com os valores estimados pelo método **Fourier power spectrum method** (FPS), conforme apresentado em SIMONSEN, HANSEN e NES (1998).

Referências Bibliográficas

ABRY, P.; VEITCH, D. Wavelet Analysis of Long Range Dependent Traffic, **IEEE Trans. on Info. Theory**, v. 44, n. 1, p. 2-15, 1998.

ABRY, P.; VEITCH, D.; FLANDRIN, P.; TAQQU, M. S. Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data. **Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation**. New York: Kihong Park and Walter Willinger. Wiley, p. 39-88, 2000.

AYOADE, J. O. **Introdução à climatologia para os trópicos**. 8-ed. - Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002. 332p.

BARTON, C. C.; LA PONTE, P. R. **Fractals in the earth sciences**. New York: Plenum Press, 1995.

BRESLIN, M. C.; BELWARD, J. A. Fractal dimensions for rainfall time series. **Mathematics and Computers in Simulation**, Amsterdam, v.48, p. 437 - 446, 1999.

BURGOS, T. R.; VALDÉS, E. P. **Estimation of the fractal dimension of a rainfall times series over a zone relevant to the agriculture in Havana**. Departamento Agrometeorologia INSMET, v. 5, n. 1, january 1999.

BURROUGHS, P. A. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. **Nature**, London, v. 294, n.5837, p. 240 - 242, Nov. 1981.

CARR, J. R. Statistical self-affinity, fractal dimension and geologic interpretation. **Engineering Geology**, Amsterdam, v. 48, p. 269 - 282, 1997.

_____; BENZER, W. B. On the practice of estimating fractal dimension. **Mathematical Geology**, New York, v. 23, n. 7, p. 945 - 959, 1991.

CHRISTOFOLETTI, A. L. H. **Análise fractal e multifractal da estrutura de estações chuvosas em localidades do Estado de São Paulo**. 1997. - f. 263. Tese (Doutorado em Geociências e Meio Ambiente) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

COOLEY, J. W.; TUKEY, O. W. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. **Mathematics and Computers**, v 19, p. 297 - 301, 1965.

DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. Philadelphia: Rutgers University and AT&T Bell Laboratories, 1992.

DUARTE, P. F. Q. **Análise das periodicidades das séries temporais de nível do mar e pressão atmosférica de Cananéia, utilizando a transformada de ondaletas (wavelets)**. 1998. - f. 66. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto Oceanográfico, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

FEDER, J. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1989.

GABOR, D. Theory of communication. **Journal of Institute of Electrical Engineers**, v. 93, p. 429 - 457, 1946.

GALLANT, J. C.; MOORE, I. D.; HUTCHINSON, M. F.; GESSLER, P. Estimating fractal dimension of profiles: a comparison of methods. **Mathematical Geology**, New York, v. 26, n. 4, p. 455 - 481, 1994.

GAN, K. C.; McMAHON, T. A.; FINLAYSON, B. L. Analysis of periodicity in streamflow and rainfall data by colwell's indices. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 123, n. 1/2, p. 105 - 118, 1991.

GLEICK, J. **Caos: a criação de uma nova ciência**. Rio de Janeiro: Campus, 1990. 310 p.

GOMES, S. M.; DOMINGUES, M. O.; KAIBARA, M. K. Navegando de Fourier a Wavelets: **Aplicações em Dinâmica e Controle**/J. M. Balthazar...[et all]-São Carlos, SP: ABCM: SBMAC, 2001, 501p.

GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square-integrable wavelets of constant shape. **SIAM, Journal. Mathematics Analysis**, v. 15, p. 723 - 736, 1984.

HAAR, A. Zur theorie der orthogonaler funktionensysteme. **Mathematische Annalen**, Berlin, v. 69, p. 331 - 371, 1910.

HUDGINS, L.; FRIEHE, C. A.; MAYER, M.E. Wavelet transforms and atmospheric turbulence. **Physical Review Letters**, New York, v. 71, n. 20, p. 3279 - 3282, 1993.

HURST, H. E.; BLACK, R. P.; SIMAIKA, Y. M. **Long-term storage: an experimental study**. Londor: Constable Londor, 1965. 145p.

IFEACHOR, E. C.; JERVIS, B. W. **Digital signal processing - a practical approach**. Addison - Wesley, 1994.

JONES, C. L.; LONERGAN, G. T. ; MAINWARING., D. E. Wavelet packet computation of the Hurst exponent. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 29, p. 2509 - 2527, 1996.

KORVIN, G. **Fractal models in the earth sciences**. Amsterdam: Elsevier, 1992. 396 p.

LAM, N. S. N.; DE COLA, L. **Fractals in Geography**. New Jersey: PTR Prentice Hall, 1993.

LIMA, P. C. Wavelet: uma introdução. **Matemática Universitária**, n. 33, p. 13-34, dezembro. 2002.

LOVEJOY, B. S.; MANDELBROT, B. B. Fractal properties of rain, and a fractal model. **Tellus**. Series A. Dynamic Meteorology and Oceanography, Copenhagen, v. 37, p. 209 - 232, 1985.

MAEDER, R. E. Fractional Brownian Motion, **The Mathematica Journal**, 6(1), 1995.

MALAMUD, B. D.; TURCOTTE, D. Self-affine time series: measures of weak and strong persistence. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Amsterdam, v. 80, p. 173 - 196, 1999.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. New York: W. H. Freeman, 1983.

MATSUSHITA, M.; OUCHI, S. On the self-affinity of various curves. **Physica D**, Non Linear Phenomena, Amsterdam, v. 38, p. 246 - 251, 1989.

MAZZARELLA, A. Multifractal dynamic rainfall processes in Italy. **Theoretical and Applied Climatology**, Wien, v. 63, p. 73 - 78, 1999.

MIRANDA, J. G. V. **Análise fractal de reescalonamento temporal para chuvas.** 1997. - f. 75. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 1997.

MISITI, M.; MISITI, Y.; OPPENHEIM, G.; POGGI, JM. **Wavelet Toolbox:** For use with Matlab. The Mathworks. 1996.

MONTEIRO, C. A. F. **A dinâmica climática e as chuvas no estado de São Paulo:** estudo geográfico sob a forma de atlas. São Paulo: IG/USP, 1973.

MORETTIN, P. A. **Análise harmônica de processos estocásticos.** Rio de Janeiro: IMPA, 1979. 176 p.

_____. **Ondas e Ondaletas:** Da análise de Fourier à análise de ondaletas. São Paulo: Udup, 1999. 272 p.

OLSSON, J.; NIEMCZYNOWICZ, J.; BERNDTSSON, R. Fractal Analysis of High-Resolution Rainfall Time Series. **Journal off Geophysical Research**, v. 98, n. D12, p. 23, 265-23, 274. December 20, 1993.

OLSSON, J.; BERNDTSSON, R.; SVENSSON, C. Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. **Water Resources Research**, v. 32 n. 8, p. 2463-2472, August 1996.

PEREIRA, D. C. **Análise dinâmica por wavelets em um sistema com fricção seca e amortecimento.** 2002. - f. 72. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

PEREIRA JUNIOR, A.; CHRISTOFOLETTI, A. L. H. Análise fractal da distribuição espacial das chuvas no Estado de São Paulo. **Geografia**, Rio Claro, v. 28, n. 1, p. 97 - 133, jan./abr. 2003.

PETERS, E. E. **Chaos and order in the capital markets: a new view of cycles, prices and market volatility**. Canada: A Wiley Finance Edition, 1996.

PETERS, O.; HERTLEIN, C.; CHRISTENSEN, K. A complexity view on rain. **Physical Review Letters**, v. 88, p. 1-4, 2002.

PITGEN, H. O.; JURGENS, H.; SAUPE, D. **Chaos and fractals: new frontiers of science**. New York: Springer Verlag, 1992.

POLIKAR, R. **The story of wavelets**. In: INTERNACIONAL JOINT CONFERENCE ON CIRCUITS, SYSTEMS, COMMUNICATIONS AND COMPUTERS, 3., 1999, Athens: IEEE / IMACS, 1999.

RODRIGUEZ, I. I.; DE POWER, B. F. ...{et al}. Chaos in Rainfall, **Water Resources Research**, v. 25, n.7, p. 1667-1675, 1989.

ROWE, A. C.; ABBOTT, P. C. Daubechies wavelets and mathematica. **Computers in physics**, Australia, v. 9, n. 6, p. 635 - 648, 1995.

SEVCIK, C. **A Procedure to Estimate de Fractal Dimension of Waveforms**. Disponível em: <<http://www.csu.edu.au/ci/vol05/sevcik/sevcik.htm>>. Acesso em: 07 mar. 2002.

SIMONSEN, I.; HANSEN, A.; NES, O. M. Determination of the Hurst exponent by use of wavelet transforms. **Physical Review E**, New York, v. 58, n. 3, p. 2779 - 2787, 1998.

TOLSTOV, G. P. **Fourier Series**. New York: Dover Publication, INC, 1962. 336 p.

TORRENCE, C. **Wavetest Example Matlab Script For Wavelet, using NINO3 SST DATAS**. Disponível em: <<http://www.paos.colorado.edu/research/wavelet/>>. Acesso em: 19 mar. 2002.

TORRENCE, C.; COMPO, G. P. A practical guide to wavelet analysis. **Bulletin of the American Meteorological Society**, Colorado, V. 79, n. 1, p. 61-78, janeiro 1998.

WERON, R.; PRZYBYLOWICZ, B. Hurst analysis of electricity price dynamics. **Physica A**, New York, v. 283, p. 462 - 468, 2000.