



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.004/06

Um estudo sobre transições de fase dinâmicas e equações estocásticas de
Ginzburg-Landau-Langevin

Nadiane Cristina Cassol Seewald

Orientador

Gastão Krein

Março de 2006

Agradecimentos

Os meus agradecimentos são principalmente aos meus pais, Milton e Nadir, que sempre foram um alicerce forte e me incentivaram nos estudos. Com certeza não tenho estado tão presente com vocês quanto vocês gostariam. Obrigada pela compreensão e por vocês me apoiarem em todas as minhas iniciativas e decisões. Dedico esta também ao meu irmão Hamilton e à sua filha Luiza. Com certeza, este trabalho tem um pouquinho de todos vocês.

Esta dissertação é dedicada também às famílias Cassol e Busanello (em especial aos meus avôs - *in memoriam*), aos meus amigos de Três de Maio e do IFT.

Gostaria de agradecer igualmente ao meu orientador, Prof. Gastão I. Krein, pela sabedoria com que conduziu este trabalho e pelos muitos ensinamentos acerca de Física Teórica e de pesquisa em Física. Estes dois anos de aprendizado durante o Mestrado foram muito importantes para o meu crescimento na Física. Certamente, os anos de Doutorado serão ainda mais produtivos.

E, dentre todas as pessoas que estiveram comigo, gostaria de agradecer de forma muito especial ao meu marido Álisson. A ele, que me acompanhou durante toda a Graduação e Mestrado e que me auxiliou nos momentos de maior ansiedade, obrigada pelo apoio, incentivo e, principalmente, pela amizade e pelo suporte emocional durante todo o período. Você é muito importante para mim, eu te amo muito!

Por fim, gostaria de agradecer o apoio financeiro recebido da CAPES e do CNPq durante a dissertação.

“In all things of Nature,
there is something of the marvelous.”
Aristotle

Resumo

Esta Dissertação trata de transições de fase dinâmicas, com especial ênfase na descrição da relaxação de parâmetros de ordem não-conservados através de equações cinéticas estocásticas. Após uma revisão de conceitos básicos sobre o assunto, apresentamos a derivação de equações do tipo Ginzburg-Landau-Langevin por Gleiser e Ramos no contexto de uma teoria quântica de campos fazendo uso do formalismo *in-in* de Schwinger para a ação efetiva. Propusemos métodos para a solução numérica destas equações, com ruído aditivo e multiplicativo, e investigamos a estabilidade e a convergência dos métodos propostos através de exaustivas simulações numéricas. Aplicações destes métodos foram feitas para diferentes equações de Ginzburg-Landau-Langevin, incluído aquela derivada por Gleiser e Ramos.

Palavras-Chave: Transições de Fase; Equações Estocásticas; Ação Efetiva; Teoria de Campos a Temperatura Finita

Áreas do conhecimento: Mecânica Estatística; Teoria Quântica de Campos; Simulações numéricas

Abstract

This Dissertation deals with dynamic phase transitions, with special emphasis on the description of the relaxation of non-conserved order parameters through stochastic kinetic equations. After a review of basic concepts about this subject, we present the derivation of Ginzburg-Landau-Langevin type of equations by Gleiser and Ramos using Schwinger's *in-in* formalism for the effective action. We have proposed methods for solving numerically these equations, with additive and multiplicative noise, and have investigated the stability and convergence of the proposed methods through exhaustive numerical simulations. Application of these methods were done for different Ginzburg-Landau-Langevin equations, including the one derived by Gleiser and Ramos.

Índice

1	Introdução	1
2	Transições de fase dinâmicas e a decomposição espinodal	4
2.1	Transições de fase estáticas e dinâmicas	4
2.2	Equações dinâmicas	10
2.2.1	Equação de Langevin e equação de Fokker-Planck	10
2.2.2	Equações de Ginzburg-Landau-Langevin	18
2.3	Decomposição espinodal	24
3	Correções quânticas e equações de Ginzburg-Landau-Langevin	28
3.1	Formalismo de tempo real <i>in-out</i> a temperatura zero	29
3.2	Formalismo de tempo real <i>in-out</i> a temperatura finita	31
3.3	Formalismo de tempo real <i>in-in</i>	34
3.4	Ação efetiva em ordem \hbar (1-loop)	36
3.5	Ação efetiva em ordem \hbar^2 (2-loop) e equação de Ginzburg-Landau-Langevin efetiva	49
4	Métodos numéricos para a equação de Ginzburg-Landau-Langevin	56
4.1	Efeitos de memória na equação de Ginzburg-Landau	57
4.2	Método das diferenças finitas	60
4.3	Método de colocação de Fourier	64
4.4	Tratamento do ruído multiplicativo	65
5	Resultados numéricos	66
5.1	Resultados sem o termo de ruído ($\zeta = 0$)	67
5.1.1	Equação de Ginzburg-Landau causal ($\tau \neq 0$)	67
5.1.2	Equação de Ginzburg-Landau usual ($\tau = 0$)	69
5.1.3	Variação dos parâmetros τ , η e γ	71
5.2	Resultados com o termo de ruído ($\zeta \neq 0$)	73
5.3	Resultados para o modelo de Gleiser-Ramos	76

6	Conclusões e perspectivas futuras	78
A	O formalismo de tempo imaginário	82
B	Mecânica estatística quântica e integrais de trajetória	87
C	O potencial efetivo	92
D	Demonstração da representação integral da função teta	96
E	Dedução da Eq.(3.72)	98
F	Cálculo dos termos da Eq.(3.75)	104
G	Dedução da igualdade apresentada na Eq.(3.82)	110
H	A função espectral	113
	Referências	117

Capítulo 1

Introdução

Esta Dissertação trata de transições de fase dinâmicas, com ênfase na descrição da relaxação de parâmetros de ordem não-conservados através de equações cinéticas estocásticas. Genericamente, transições de fase e fenômenos críticos são classificados em duas categorias bem amplas, *estáticos* e *dinâmicos*. Os fenômenos estáticos estão relacionados a propriedades de equilíbrio, tais como a magnetização, susceptibilidade e calores específicos em sistemas magnéticos. Os fenômenos dinâmicos referem-se a processos dependentes do tempo, como tempos de relaxação e fenômenos de difusão.

Existem muitos fenômenos naturais que ocorrem fora do equilíbrio termodinâmico e há muito tempo que estes vêm sendo estudados, tanto na Física, quanto na Química, na Biologia e nas Engenharias. Na Física, estes fenômenos são de interesse, por exemplo, para a física da matéria condensada, física nuclear, física das partículas elementares e cosmologia. Um dos aspectos de maior interesse neste campo é o entendimento da evolução no tempo de transições de fase, assunto que está intimamente relacionado à questão fundamental de como comportamentos irreversíveis ao nível macroscópico surgem de uma dinâmica reversível ao nível microscópico. Este é um campo muito antigo e muito estudado no contexto da física clássica [1, 2]. Porém, não tão antigos, nem muito estudados, são os fenômenos fora do equilíbrio em sistemas quânticos, apesar de ter havido progressos significativos em anos recentes no contexto de sistemas quânticos dissipativos [3, 4].

Por outro lado, várias descobertas recentes no contexto da cosmologia observacional e de colisões de íons pesados relativísticos têm exigido um grande esforço no estudo de fenômenos fora do equilíbrio em sistemas quânticos de muitos corpos relativísticos – a Ref. [5] apresenta uma boa discussão sobre progressos recentes nesta área. No entanto, muito ainda falta ser feito nesta direção. A razão principal para o progresso mais lento no estudo da dinâmica de não-equilíbrio é a inexistência no contexto da teoria quântica de campos relativística de métodos de aproximação não-perturbativos que sejam ao mesmo tempo sistemáticos e controláveis. Para sistemas

em equilíbrio, a descrição mais adequada para tratar problemas não perturbativos em teorias quânticas de campos consiste em empregar os métodos da teoria de campos na rede Euclideana [6, 7]. Estes métodos são de primeiros princípios e podem ser aprimorados sistematicamente, tendo como limitações somente os recursos computacionais disponíveis. Para problemas dinâmicos, estes métodos não são muito adequados por serem formulados no espaço Euclidiano e, por isto, não têm acesso direto a uma dinâmica no espaço de Minkowski. Como alternativa à formulação numa rede Euclideana, os métodos de primeiros princípios mais empregados têm sido os da teoria de perturbações, que obviamente têm aplicabilidade limitada a problemas fracamente acoplados.

Como já mencionado acima, o grande desafio é derivar a dinâmica macroscópica a partir de sua dinâmica microscópica. No entanto, somente em raras situações é possível derivar uma equação de movimento para um parâmetro de ordem a partir de um modelo envolvendo os graus de liberdade microscópicos do sistema. Em geral, é necessário empregar equações de movimento fenomenológicas contendo termos de dissipação e flutuação, conhecidas como equações cinéticas. A obtenção de equações cinéticas a partir de uma dinâmica microscópica em geral envolve alguma técnica de projeção, conhecida genericamente como *coarse graining*, em que modos de comprimentos de onda curtos são “integrados” em uma equação determinística. As equações resultantes a partir da integração de modos de comprimentos de onda curtos são necessariamente estocásticas, no sentido de que o estado do sistema num tempo futuro *não* fica completamente determinado, mesmo conhecendo-se o estado do sistema em um instante anterior. Estas equações estocásticas em geral contêm dois mecanismos distintos na evolução temporal de quantidades físicas, como por exemplo, de um parâmetro de ordem. Um dos mecanismos é um movimento regular (organizado) que segue leis dinâmicas reversíveis no tempo. O outro mecanismo é um movimento randômico (desorganizado), que é o resultado de processos que *não* são incluídos *explicitamente* na equação cinética. Este movimento randômico gera distribuições estatísticas para as quantidades de interesse e dá origem aos efeitos de irreversibilidade no tempo.

A presente Dissertação se insere neste contexto de estudar a evolução temporal de um parâmetro de ordem através de equações cinéticas estocásticas do tipo Ginzburg-Landau-Langevin (GLL) [1, 2]. Estas equações de GLL são generalizações, para um sistema descrito por campos dependentes da posição e do tempo, da equação de Langevin usual para uma partícula em movimento Browniano. O objetivo desta Dissertação é fazer uma revisão sobre este assunto e implementar métodos numéricos eficientes para resolver estas equações. Além do emprego de equações puramente fenomenológicas, também será feita uma revisão sobre a obtenção de equações do tipo

GLL no contexto de teorias quânticas de campos relativísticas. Esta discussão está baseada no trabalho de Gleiser e Ramos (GR) [8]. GR obtêm uma equação de GLL efetiva a partir de correções quânticas de ordem \hbar^2 e em teoria de perturbação até segunda ordem na constante de acoplamento, no contexto de uma teoria de um campo escalar real auto-interagente. As correções quânticas são calculadas empregando o formalismo *in-in* de Schwinger [9] para a ação efetiva. Termos de dissipação e flutuação, características principais de uma equação de GLL, aparecem naturalmente de partes imaginárias de diagramas de loops na ação efetiva e auto-energias, as quais são a manifestação de processos de colisões e decaimentos de excitações coletivas de modos do campo escalar. Termos estocásticos, em particular, aparecem através de uma técnica de eliminar as partes imaginárias da ação efetiva em favor de campos estocásticos auxiliares [10, 11].

Esta Dissertação está distribuída da seguinte forma. No Capítulo 2 será apresentada uma revisão sucinta dos conceitos básicos relacionados a transições de fase e fenômenos críticos dinâmicos. Vamos discutir aspectos estáticos e dinâmicos de transições de fase, com ênfase nas equações dinâmicas de natureza estocástica que descrevem a evolução temporal de parâmetros de ordem e no fenômeno da decomposição espinodal. No Capítulo 3, será feita uma breve revisão sobre o formalismo funcional *in-out* usual a temperatura zero e a temperatura finita a tempo real para a ação efetiva. Logo após, vamos revisar o formalismo *in-in*, e mostrar com bastante detalhe os cálculos e aproximações necessários para se chegar à equação de GLL efetiva de GR. No Capítulo 4, serão discutidos métodos numéricos eficientes para a solução numérica de equações do tipo GLL e, no Capítulo 5, os resultados numéricos serão apresentados empregando os métodos desenvolvidos. As Conclusões e perspectivas futuras aparecem no Capítulo 6. A Dissertação conta também com oito Apêndices, onde são discutidos alguns tópicos complementares aos discutidos nos Capítulos, e são realizadas as demonstrações de equações mais longas.

Capítulo 2

Transições de fase dinâmicas e a decomposição espinodal

Neste Capítulo vamos apresentar uma revisão muito sucinta dos conceitos básicos relacionados a transições de fase e fenômenos críticos dinâmicos. Vamos discutir aspectos estáticos e dinâmicos de transições de fase, com ênfase nas equações dinâmicas de natureza estocástica que descrevem a evolução temporal de parâmetros de ordem e no fenômeno da decomposição espinodal. No transcorrer da discussão, serão citadas as referências bibliográficas sobre as quais nos apoiamos para discutir os diferentes assuntos. No entanto, para as discussões de natureza geral, existem três referências principais, a saber, as Refs. [1, 12, 13].

2.1 Transições de fase estáticas e dinâmicas

Estamos interessados em estudar a evolução no tempo de propriedades de sistemas contendo um número muito grande de constituintes. Sistemas desta natureza podem ser caracterizados por um conjunto de parâmetros termodinâmicos, como o volume total do sistema, a energia total, a temperatura externa, a pressão externa, etc. Suponhamos que y seja um destes parâmetros e que particionamos o mesmo em dois subsistemas, com y_1 e y_2 sendo os correspondentes parâmetros termodinâmicos caracterizando cada um dos subsistemas. Assim, temos duas possibilidades em relação a y_1 e y_2 :

1. $y_1+y_2=y$. Neste caso, dizemos que o parâmetro que descreve o sistema inicial é um *parâmetro extensivo*. O volume total e a massa total do sistema são exemplos de parâmetros extensivos.
2. $y_1=y_2=y$. Neste caso, dizemos que o parâmetro que descreve o sistema inicial é um *parâmetro intensivo*. A temperatura e a densidade de massa do sistema são exemplos de parâmetros intensivos.

Ou seja, os parâmetros extensivos são aqueles que se adicionam para fornecer o valor total do parâmetro e os intensivos, aqueles que não mudam independentemente de estarmos lidando com o sistema ou com os seus subsistemas. Assim, a divisão de dois parâmetros extensivos fornece um parâmetro intensivo, uma densidade. Estas densidades são denominadas de *variáveis mecânicas* do sistema.

A temperatura, os campos elétricos e magnéticos externos, etc são chamados de *campos externos* e caracterizam o meio-ambiente em que o sistema se encontra imerso. Este meio ambiente é muitas vezes chamado de *reservatório*. Em geral, uma vez especificados os campos externos, as variáveis mecânicas ficam univocamente determinadas. No entanto, ocorrem situações em que uma determinada variável mecânica não fica univocamente determinada: para valores específicos dos campos externos, a variável pode assumir mais de um valor. Exemplo típico é a densidade da água à pressão atmosférica, a uma temperatura de 100 °C. Nestas condições, o valor da densidade da água não é único, há coexistência de água líquida e vapor d'água, que têm densidades muito diferentes. Na verdade, há uma variedade de temperaturas e pressões para os quais há a coexistência entre água líquida e água na forma de vapor. Estes pontos, representados num plano pressão versus temperatura, formam uma linha, conhecida como linha de *coexistência de fases*. Esta linha termina num ponto a partir do qual não é mais possível distinguir a fase líquida da fase de vapor. Este ponto é chamado de *ponto crítico*, e os fenômenos que ocorrem próximos de um ponto crítico são chamados de *fenômenos críticos*. As variáveis mecânicas que não ficam univocamente determinadas próximas de um ponto crítico são chamadas de *parâmetros de ordem*, que vamos denotar por ϕ . De acordo com a classificação feita por Ehrenfest, as transições de fase são classificadas de acordo com a ordem da derivada do potencial termodinâmico que é descontínua. Por exemplo, a transição de fase que apresenta no mínimo uma derivada primeira do potencial termodinâmico de interesse descontínua é chamada de transição de fase de primeira ordem (transição de líquido para gás). Porém, se todas as derivadas de primeira ordem do potencial termodinâmico são contínuas no ponto da transição, e se uma ou mais derivadas de segunda ordem forem descontínuas, a transição é dita de segunda ordem. E, deste modo, podemos definir uma transição de fase de n -ésima ordem. Em geral, independentemente do campo de aplicação, o parâmetro de ordem extremiza uma energia livre (ou um potencial efetivo), que denotamos por $F[\phi]$ (ou $V[\phi]$).

Um outro parâmetro muito importante para caracterizar as fases de um sistema material é o *comprimento de correlação* do material, que é tradicionalmente denotado por ξ . O comprimento de correlação dá uma medida da distância máxima na qual os constituintes do sistema estão correlacionados com uma probabilidade

próxima da unidade. Uma outra forma, mais intuitiva, de definir o comprimento de correlação é a seguinte [14]. Suponha que se divida um material macroscópico sucessivamente em partes iguais. Após as primeiras subdivisões, é claro que as propriedades macroscópicas de cada pedaço serão as mesmas que as do material original. No entanto, continuando a subdivisão dos pedaços, chegará um momento em que as propriedades de cada pedaço serão muito diferentes das do material original, pois começarão a se fazer sentir as propriedades dos átomos e moléculas individuais que compõem o material. A este tamanho a partir do qual as propriedades globais dos pedaços diferem marcadamente das do material original, se denomina de comprimento de correlação. Portanto, o comprimento de correlação é a escala de distância em que as flutuações dos graus de liberdade microscópicos (por exemplo, as posições dos átomos e estruturas equivalentes) estão fortemente correlacionadas.

Os fenômenos de transição de fase podem ser classificados como sendo *estáticos* ou *dinâmicos*. Os fenômenos críticos estáticos estão relacionados a propriedades de equilíbrio, tais como a magnetização, susceptibilidade e calores específicos em sistemas magnéticos. Os fenômenos críticos dinâmicos referem-se a fenômenos dependentes do tempo, como tempos de relaxação e fenômenos de difusão. O fato de que uma transição de fase ocorre em equilíbrio ou fora do equilíbrio depende essencialmente de duas escalas de tempo, de resfriamento e de equalibração: se a taxa de resfriamento for (maior) menor que a de equalibração, então a transição ocorre em (não) equilíbrio.

No estudo de fenômenos estáticos, está-se interessado nas consequências da distribuição de probabilidade de equilíbrio térmico das configurações que caracterizam o estado do sistema, como por exemplo, das configurações de spins de um magneto. O problema consiste essencialmente de um problema de estatística, i.e. de contar configurações. Por outro lado, o problema da dinâmica é muito mais complicado, pois neste caso, precisa-se saber a evolução temporal de configurações, precisa-se também saber como as quantidades físicas mudam sob perturbações externas dependentes do tempo, e como a distribuição de equilíbrio é alcançada. Por estas razões, presentemente os fenômenos estáticos são muito melhor compreendidos do que os dinâmicos.

No estudo de fenômenos críticos dinâmicos, está-se interessado principalmente nas variações temporais das flutuações do parâmetro de ordem em grandes escalas e de outras quantidades físicas que variam lentamente no tempo próximo ao ponto crítico. Grandes escalas aqui significam distâncias maiores que o comprimento de correlação do material. Uma maneira simples, qualitativa de se entender por que o parâmetro de ordem varia lentamente no tempo é fornecida por um sistema de spins. Um sistema de spins a uma temperatura próxima à temperatura crítica favorece o

aparecimento de configurações de spin alinhados formando grandes domínios com uma magnetização líquida diferente de zero, pois a tendência dos spins é se alinharem de maneira a minimizar a energia livre do sistema. As agitações térmicas dos spins tendem a desalinhar os spins de maneira aleatória. Mas como os domínios são de tamanho grande, é necessário um tempo longo para as agitações térmicas desalinham todos os seus spins. Formalmente, diz-se que as flutuações de grandes comprimentos de onda (neste exemplo, flutuações de spin) têm *tempos de relaxação* muito longos - isto é frequentemente chamado de *critical slowing down* (amortecimento crítico). Existem outras razões para a existência de longos tempos de relaxação, como por exemplo, leis de conservação - neste caso, a dinâmica se torna mais lenta porque, em geral, deve haver transporte de matéria através do sistema para que uma quantidade seja conservada.

Vamos agora discutir alguns aspectos gerais sobre transições de fase estáticas e dinâmicas. Para tal, vamos seguir a Ref. [13]. Seja $H[\Phi]$ o Hamiltoniano efetivo do sistema, onde Φ denota um campo escalar. Suponhamos que adicionamos um termo de interação de campo externo (ou fonte) J que se acopla linearmente ao campo Φ ,

$$H[J] = H[\Phi] + J\Phi. \quad (2.1)$$

A função de partição para uma temperatura T é dada por

$$Z[J, T] = \text{tr} e^{-\beta H[J]}, \quad (2.2)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, com k_B sendo a constante de Boltzmann. Introduzindo a energia livre de Helmholtz $F[J, T]$ como

$$F[J, T] = -\frac{1}{\beta} \ln Z[J, T], \quad (2.3)$$

o parâmetro de ordem ϕ é dado por

$$\frac{\delta F[J, T]}{\delta J} = \langle \Phi \rangle = \phi. \quad (2.4)$$

Invertendo esta relação, encontramos $J(\phi)$ e, com isto, podemos construir através de uma transformação de Legendre a energia livre de Gibbs, ou *potencial efetivo*, como

$$V[\phi] = F[J(\phi)] - J(\phi)\phi. \quad (2.5)$$

Além de depender obviamente do parâmetro de ordem, o potencial efetivo também é uma função de outros parâmetros intensivos como temperatura e potencial químico.

O potencial efetivo é um conceito muito importante na teoria das transições de fase, pois através dele podemos tirar informações sobre aspectos termodinâmicos

de *equilíbrio* e a estrutura de fases do sistema, bem como a respeito de possíveis transições entre as diferentes fases do sistema. Para ilustrar estes aspectos, consideremos a Figura 2.1, que mostra um potencial efetivo como função do parâmetro de ordem para uma transição de fase de segunda ordem (a), e de primeira ordem (b). Exemplos de expressões de energias livres para transições de segunda e de primeira ordem são, respectivamente

$$V[\phi, T] = \frac{a}{2} t \phi^2 + \frac{b}{4} \phi^4, \quad (2.6)$$

e

$$V[\phi, T] = \frac{a}{2} t \phi^2 + \frac{b}{4} \phi^4 - c\phi^3, \quad (2.7)$$

onde $a, b, c > 0$, e t é a temperatura reduzida, da forma $t = T - T_0$, onde T_0 é uma temperatura característica do sistema. Para transições de segunda ordem, T_0 pode ser a própria temperatura crítica T_c .

Consideremos inicialmente o caso de uma transição de segunda ordem, para a qual a derivada segunda da energia livre com relação à temperatura diverge na temperatura crítica T_c : a variação da pressão com a temperatura próximo a T_c é da forma $|T - T_c|^{2-\alpha}$, onde α é um *expoente crítico* térmico. Neste caso, à medida que a temperatura se aproxima da temperatura crítica, o parâmetro de ordem no mínimo da energia livre se anula *continuamente*, e este anulamento é do tipo $|T - T_c|^\beta$, com $\beta > 0$ sendo um outro expoente crítico (note que β neste contexto *não* é o inverso da temperatura, apenas foi usado, por tradição, o mesmo símbolo).

Consideremos agora a transição de primeira ordem. Neste caso, na temperatura crítica, tanto o mínimo do potencial quanto o parâmetro de ordem variam *descontinuamente*. Ao se cruzar o valor da temperatura crítica de $T < T_c$ para $T > T_c$, o estado que minimiza a energia livre muda abruptamente da direita para a esquerda, na Fig. 2.1. Para $T > T_c$, o mínimo à direita torna-se um mínimo local de energia livre maior, sendo, portanto, um estado meta-estável. A diferença entre os mínimos locais e globais é um *calor latente*, o qual é despreendido num eventual decaimento do estado meta-estável.

Em princípio, a dinâmica crítica de um sistema macroscópico é consequência de sua dinâmica microscópica. No entanto, em raras situações é possível derivar uma equação de movimento para um parâmetro de ordem a partir de um modelo envolvendo os graus de liberdade microscópicos do sistema. Em geral, é necessário empregar equações de movimento fenomenológicas contendo termos de dissipação e flutuação (conhecidas como equações cinéticas). A obtenção de equações cinéticas a partir de uma dinâmica microscópica em geral envolve alguma técnica de projeção em que os modos de comprimentos de onda curtos são “integrados”, técnicas estas conhecidas genericamente como *coarse graining*.

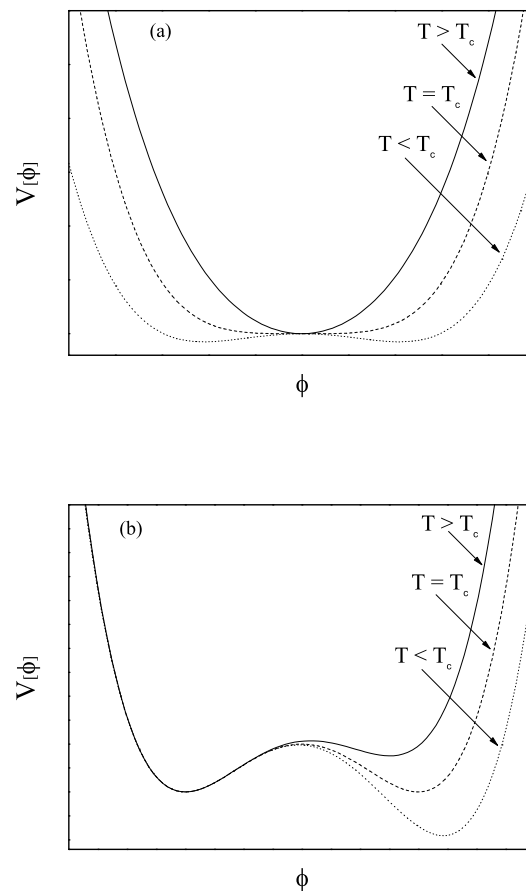


Figura 2.1: Ilustração de energias livres típicas para (a) uma transição de segunda ordem e (b) para uma transição de primeira ordem.

As equações fenomenológicas que serão introduzidas neste Capítulo são generalizações de equações para o movimento Browniano. Em geral, em equações cinéticas há dois mecanismos distintos para a evolução temporal de quantidades físicas, como um parâmetro de ordem. Um dos mecanismos é um movimento regular (organizado) que segue leis dinâmicas reversíveis no tempo. O outro mecanismo é um movimento randômico (desorganizado), que é o resultado de processos que *não* são incluídos *explicitamente* na equação cinética. Este movimento randômico gera distribuições estatísticas para as quantidades de interesse e dá origem aos efeitos de irreversibilidade no tempo. Na próxima Seção, vamos discutir estes efeitos através da equação de Langevin para o movimento de uma partícula muito leve se movendo num meio fluido viscoso. O objetivo deste exercício é discutir, através de um exemplo muito

simples, o seguinte resultado: quantidades físicas que evoluem no tempo através de uma equação de Langevin relaxam para o equilíbrio com uma distribuição de probabilidades que é a distribuição de Boltzmann. Na Seção 2.2.2, esta equação será generalizada para tratar a evolução temporal de um parâmetro de ordem.

2.2 Equações dinâmicas

2.2.1 Equação de Langevin e equação de Fokker-Planck

Para o momento, vamos deixar de lado os fenômenos críticos para estudar a equação de Langevin, que é a equação de movimento clássica modificada fenomenologicamente por dois termos que levam em consideração a interação da partícula com o meio no qual ela está inserida e que são responsáveis pela maneira através da qual esta atinge o equilíbrio [15, 16].

O exemplo mais simples de emprego da equação de Langevin é o movimento Browniano unidimensional de uma partícula. Considere o sistema como sendo formado por uma partícula macroscópica de massa m imersa em um fluido. Logo, há a interação desta partícula com as moléculas que formam o fluido: estas colidem entre si num movimento completamente aleatório, ou seja, não é possível saber com exatidão a posição da partícula; contudo, é possível predizer uma densidade de probabilidade de encontrar a partícula com uma determinada velocidade no fluido, e esta densidade de probabilidade pode ser determinada a partir da equação de Fokker-Planck para o sistema [17]. Portanto, esta partícula está sujeita a uma força viscosa que incorpora fricção e dissipação, tradicionalmente tomada como sendo proporcional à velocidade da partícula, $-\alpha v(t)$, onde α é uma constante que determina o tempo de relaxação da partícula, e também está sujeita a forças de caráter aleatório, $F(t)$, devidas ao impacto da partícula com as moléculas do líquido. Na maioria das aplicações, o ruído estocástico é tomado como sendo branco (abordaremos mais a respeito deste assunto no decorrer desta Seção) e, portanto, apresenta as seguintes propriedades:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad (2.8)$$

$$\langle F(t) F(t') \rangle = B \delta(t - t'). \quad (2.9)$$

Estas forças aleatórias surgem pois o número de moléculas do fluido é da ordem de 10^{23} . Logo, como não sabemos os valores iniciais dos parâmetros que descrevem cada uma dessas moléculas (como, por exemplo, as velocidades iniciais), perde-se a exatidão no cálculo do movimento da partícula imersa no fluido e, assim, consideramos várias possibilidades para o estado inicial do sistema. Ou seja, $F(t)$ varia

para cada estado inicial do *ensemble* que estamos considerando e, portanto, lidamos apenas com médias desta força. A equação de Langevin a ser resolvida para este sistema é dada por:

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v(t) + F(t), \quad (2.10)$$

ou, então,

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v(t) + \zeta(t), \quad (2.11)$$

onde $\gamma = \alpha/m$ e $\zeta(t) = F(t)/m$. Esta é uma equação diferencial estocástica pois contém uma força estocástica - força de Langevin - $\zeta(t)$. Assim

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle &= D \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (2.12)$$

e $D = B/m^2$. Uma variável estocástica $\zeta(t)$ que satisfaz uma relação como esta é usualmente denominada de *ruído branco*. A denominação *ruído branco* é em analogia com a decomposição espectral da luz. A cor branca é o resultado da soma de todas as cores do espectro, as quais podem ser definidas a partir de suas frequências. A presença da função delta de Dirac no tempo indica que o espectro $\zeta(t)$ contém todas as frequências com pesos iguais, pois a transformada de Fourier da função delta é igual a uma constante. Por outro lado, se no lado direito da Eq.(2.12), ao invés da delta de Dirac no tempo, aparecer uma outra função (limitada) $g(t - t')$, o ruído seria denominado de colorido, pois a transformada de Fourier de $g(t - t')$ contém um espectro de frequências com pesos diferentes para cada frequência - o que no caso da luz levaria a uma luz colorida.

Para obtermos a solução geral da Eq.(2.11), consideraremos a velocidade da partícula como sendo descrita pela função $v(t) = u(t) e^{-\gamma t}$, onde $u(t)$ é uma função que deve ser determinada. Substituindo esta na Eq.(2.11), ficamos com a seguinte expressão para ser resolvida

$$\frac{du(t)}{dt} = e^{\gamma t} \zeta(t), \quad (2.13)$$

cuja solução, válida para qualquer função temporal $\zeta(t)$, é dada por

$$u(t) = u_0 + \int_0^t e^{\gamma t'} \zeta(t') dt'. \quad (2.14)$$

Logo,

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \zeta(t') dt', \quad (2.15)$$

onde v_0 é a velocidade da partícula no instante $t = 0$. Ou seja, como as moléculas do fluido colidem com a partícula e o momento desta é transferido para aquelas,

a partir da Eq.(2.15) podemos concluir que a velocidade da partícula tende a zero para tempos muito longos, ou seja, ocorre dissipação de energia neste sistema.

Anteriormente assumimos que $\zeta(t)$ é uma quantidade estocástica. Como consequência disto, a velocidade também é uma quantidade estocástica e, portanto, é importante se conhecer a (densidade de) probabilidade de encontrar a velocidade $v(t)$ do sistema no intervalo $(v(t), v(t) + \Delta v)$. Vamos, então, encontrar uma equação diferencial que nos forneça esta distribuição de velocidades, que denotaremos por $F(v_0, v, t)$. Esta equação, como já mencionado anteriormente, é do tipo de uma equação de Fokker-Planck. A discussão a seguir está baseada no artigo original de Uhlenbeck e Ornstein [16].

Quando t aumenta de Δt , v aumenta de Δv e estes acréscimos serão distintos para cada molécula do fluido. Vamos denotar de $P(\Delta v, v, t)d(\Delta v)$ a probabilidade de aumento da velocidade entre Δv e $\Delta v + d(\Delta v)$. Vamos tomar a velocidade final, v' , como sendo dada por $v' = v + \Delta v$. Assim

$$F(v_0, v', t + \Delta t) = \int F(v_0, v' - \Delta v, t)P(\Delta v, v' - \Delta v, t)d(\Delta v), \quad (2.16)$$

e vamos assumir que a probabilidade de aumento da velocidade de Δv é independente da velocidade inicial v_0 . Como o argumento Δv é pequeno, vamos expandir o integrando acima em potências de Δv em torno de $\Delta v = 0$.

$$\begin{aligned} F(v_0, v' - \Delta v, t)P(\Delta v, v' - \Delta v, t) &= F(v_0, v', t)P(\Delta v, v', t) \\ &- \Delta v \left[\frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial v'} P(\Delta v, v', t) + F(v_0, v', t) \frac{\partial P(\Delta v, v', t)}{\partial v'} \right] \\ &+ \frac{\Delta v^2}{2} \left[\frac{\partial^2 F(v_0, v', t)}{\partial v'^2} P(\Delta v, v', t) + 2 \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial v'} \frac{\partial P(\Delta v, v', t)}{\partial v'} \right. \\ &\left. + F(v_0, v', t) \frac{\partial^2 P(\Delta v, v', t)}{\partial v'^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituindo esta expansão no integrando acima, obtemos

$$\begin{aligned} F(v_0, v', t + \Delta t) &= F(v_0, v', t) \int P(\Delta v, v', t) d(\Delta v) \\ &- \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial v'} \int \Delta v P(\Delta v, v', t) d(\Delta v) \\ &- F(v_0, v', t) \int \Delta v \frac{\partial P(\Delta v, v', t)}{\partial v'} d(\Delta v) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(v_0, v', t)}{\partial v'^2} \int \Delta v^2 P(\Delta v, v', t) d(\Delta v) \\ &+ \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial v'} \int \Delta v^2 \frac{\partial P(\Delta v, v', t)}{\partial v'} d(\Delta v) \\ &+ \frac{1}{2} F(v_0, v', t) \int \Delta v^2 \frac{\partial^2 P(\Delta v, v', t)}{\partial v'^2} d(\Delta v) + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Usando o fato de que

$$\int P(\Delta v, v', t) d(\Delta v) = 1, \quad (2.19)$$

e denotando

$$(1) \quad \int \Delta v P(\Delta v, v', t) d(\Delta v) = \langle \Delta v \rangle, \quad (2.20)$$

$$(2) \quad \int \Delta v \frac{\partial P(\Delta v, v', t)}{\partial v'} d(\Delta v) = \frac{\partial}{\partial v'} \langle \Delta v \rangle, \quad (2.21)$$

$$(3) \quad \int \Delta v^2 P(\Delta v, v', t) d(\Delta v) = \langle \Delta v^2 \rangle, \quad (2.22)$$

$$(4) \quad \int \Delta v^2 \frac{\partial P(\Delta v, v', t)}{\partial v'} d(\Delta v) = \frac{\partial}{\partial v'} \langle \Delta v^2 \rangle, \quad (2.23)$$

$$(5) \quad \int \Delta v^2 \frac{\partial^2 P(\Delta v, v', t)}{\partial v'^2} d(\Delta v) = \frac{\partial^2}{\partial v'^2} \langle \Delta v^2 \rangle, \quad (2.24)$$

podemos escrever a expressão para $F(v_0, v', t + \Delta t) - F(v_0, v', t)$ como

$$\begin{aligned} F(v_0, v', t + \Delta t) - F(v_0, v', t) &= -\langle \Delta v \rangle \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial v'} \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial v'} \langle \Delta v \rangle \right) F(v_0, v', t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \Delta v^2 \rangle \frac{\partial^2 F(v_0, v', t)}{\partial v'^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial v'} \langle \Delta v^2 \rangle \right) \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial v'} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial v'^2} \langle \Delta v^2 \rangle \right) F(v_0, v', t) + \dots \quad (2.25) \end{aligned}$$

Vamos agora dividir cada termo desta expressão por Δt e tomar o limite de $\Delta t \rightarrow 0$. Isto nos leva à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v^2 \rangle}{\Delta t} \right) \frac{\partial^2 F(v_0, v', t)}{\partial v'^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial v'} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v^2 \rangle}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v \rangle}{\Delta t} \right) \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial v'} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v'^2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v^2 \rangle}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial v'} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v \rangle}{\Delta t} \right) F(v_0, v', t), \quad (2.26) \end{aligned}$$

onde os termos denotados por \dots na Eq.(2.25) são nulos, pois, como será provado logo a seguir,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v^k \rangle}{\Delta t} = 0 \quad \text{para } k > 2. \quad (2.27)$$

Para completar a derivação da equação de Fokker-Planck, falta-nos avaliar as quantidades $\langle \Delta v \rangle$ e $\langle \Delta v^2 \rangle$. A partir da equação de movimento para a partícula imersa no fluido, obtemos para $\langle \Delta v \rangle$ a seguinte equação (vamos escrever novamente v para v')

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t) = -\gamma v(t)\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \zeta(t') dt', \quad (2.28)$$

onde usamos a definição de integrais de Riemann no primeiro termo do lado direito desta expressão. O mesmo não pode ser feito para o segundo termo do lado direito desta expressão, uma vez que o ruído branco é um processo estocástico que matematicamente não é bem definido [18]. Logo, com o auxílio das propriedades do ruído dadas na Eq.(2.12) concluímos que:

$$\langle \Delta v \rangle = -\gamma v(t)\Delta t. \quad (2.29)$$

Falta, então, calcularmos a quantidade $\langle \Delta v^2 \rangle$. Para isto, usaremos a expressão para Δv calculada acima.

$$\begin{aligned} \Delta v^2 &= \left[-\gamma v(t)\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \zeta(t') dt' \right] \left[-\gamma v(t)\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \zeta(\tau) d\tau \right] \\ &= \gamma^2 v^2(t)\Delta t^2 - 2\gamma v(t)\Delta t \int_t^{t+\Delta t} \zeta(t') dt' + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' d\tau \zeta(t')\zeta(\tau). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\langle \Delta v^2 \rangle = \gamma^2 v^2(t)\Delta t^2 - 2\gamma v(t)\Delta t \int_t^{t+\Delta t} dt' \langle \zeta(t') \rangle + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' d\tau \langle \zeta(t')\zeta(\tau) \rangle. \quad (2.30)$$

Usando as propriedades definidas anteriormente para o ruído branco, obtemos:

$$\langle \Delta v^2 \rangle = \gamma^2 v^2(t)\Delta t^2 + \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau D \delta(t' - \tau). \quad (2.31)$$

Nesta expressão, pudemos alterar os limites de integração para a função delta de Dirac para o intervalo $[-\infty, +\infty]$, pois esta função está concentrada em torno de $t' = \tau$ e decresce rapidamente para outros valores de t . Assim:

$$\begin{aligned} \langle \Delta v^2 \rangle &= \gamma^2 v^2(t)\Delta t^2 + D \int_t^{t+\Delta t} dt' \\ &= \gamma^2 v^2(t)\Delta t^2 + D\Delta t. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Portanto, as quantidades de interesse são dadas por:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v \rangle}{\Delta t} = -\gamma v(t) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v^2 \rangle}{\Delta t} = D. \quad (2.33)$$

Vamos agora provar a asserção feita acima de que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta v^k \rangle}{\Delta t} = 0 \quad \text{para } k > 2. \quad (2.34)$$

Para isto, calcularemos o valor da quantidade Δv^3 .

$$\begin{aligned} \Delta v^3 &= \left[\gamma^2 v^2(t) \Delta t^2 - 2\gamma v(t) \Delta t \int_t^{t+\Delta t} \zeta(t') dt' + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' d\tau \zeta(t') \zeta(\tau) \right] \\ &\times \left[-\gamma v(t) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \zeta(t') dt' \right] \\ &= -\gamma^3 v^3(t) \Delta t^3 + \gamma^2 v^2(t) \Delta t^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \zeta(t') + 2\gamma^2 v^2(t) \Delta t^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \zeta(t') \\ &- 3\gamma v(t) \Delta t \int_t^{t+\Delta t} dt' d\tau \zeta(t') \zeta(\tau) + \int_t^{t+\Delta t} dt' d\tau d\tau' \zeta(t') \zeta(\tau) \zeta(\tau'). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Os próximos passos seriam tomar a média desta expressão, em seguida dividir esta média por Δt e, ao final, tomar o limite de $\Delta t \rightarrow 0$. Assim, quase todos os termos obtidos serão proporcionais a potências superiores a de primeira ordem em Δt , porém, o último termo do lado direito desta expressão se anulará pois os limites de integração serão idênticos. Assim, a asserção acima feita está provada.

Desta forma, a expressão para a distribuição de velocidades Eq.(2.26) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial t} &= \frac{D}{2} \frac{\partial^2 F(v_0, v', t)}{\partial v'^2} + \left(\frac{\partial D}{\partial v'} + \gamma v(t) \right) \frac{\partial F(v_0, v', t)}{\partial v'} \\ &+ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial v'^2} + \gamma \frac{\partial v(t)}{\partial v'} \right) F(v_0, v', t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Portanto,

$$\frac{\partial F(v_0, v, t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} [F(v_0, v, t) v(t)] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 F(v_0, v, t)}{\partial v^2}. \quad (2.37)$$

Esta equação diferencial é do tipo Fokker-Planck. Equações deste tipo são equações de movimento para a função distribuição das variáveis macroscópicas do sistema e que apresentam uma estrutura matemática da forma

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \right] F, \quad (2.38)$$

onde $D^{(2)}(x) > 0$ é o coeficiente de difusão e $D^{(1)}(x)$ é o coeficiente de arrasto (*drift*). Se estivermos interessados em um tratamento determinístico para o sistema, simplesmente devemos excluir o termo referente à difusão do sistema. Comparando a forma geral da equação de Fokker-Planck, Eq.(2.38), com aquela dada para o

movimento Browniano, Eq.(2.37), concluímos que para aquele movimento, $D^{(2)}(x)$ é uma constante e $D^{(1)}(x)$ é linear na variável $v(t)$.

A solução estacionária da Eq.(2.37) é obtida quando $F(v_0, v, t \rightarrow \infty) = F(v_0, v)$. Logo, a Eq.(2.37) será dada por

$$\frac{d}{dv} \left[\gamma v F(v_0, v) + \frac{D}{2} \frac{dF(v_0, v)}{dv} \right] = 0, \quad (2.39)$$

do que podemos concluir que

$$\gamma v F(v_0, v) + \frac{D}{2} \frac{dF(v_0, v)}{dv} = C, \quad (2.40)$$

onde C é uma constante. Vamos resolver esta equação diferencial. Para isto, vamos multiplicá-la por uma função contínua $g(v)$ a ser determinada

$$\frac{2\gamma}{D} g(v) v F(v_0, v) + g(v) \frac{dF(v_0, v)}{dv} = \frac{2C}{D} g(v). \quad (2.41)$$

Vamos tentar escrever o lado esquerdo desta expressão como a derivada do produto das funções $g(v)$ e $F(v_0, v)$

$$\frac{d}{dv} [g(v) F(v_0, v)] = g(v) \frac{dF(v_0, v)}{dv} + F(v_0, v) \frac{dg(v)}{dv}. \quad (2.42)$$

Logo, para que o lado direito desta expressão coincida com o lado esquerdo da equação que queremos resolver, a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\frac{dg(v)}{dv} = \frac{2\gamma}{D} g(v) v. \quad (2.43)$$

Integrando esta equação, obtemos a função $g(v)$, dada por

$$g(v) = g(v_0) \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} (v^2 - v_0^2) \right\}. \quad (2.44)$$

Portanto, a equação a ser resolvida pode ser re-escrita como

$$\frac{d}{dv} \left\{ g(v_0) \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} (v^2 - v_0^2) \right\} F(v_0, v) \right\} = \frac{2Cg(v_0)}{D} \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} (v^2 - v_0^2) \right\}. \quad (2.45)$$

Vamos integrá-la no intervalo $[v_0, v]$,

$$\int_{v_0}^v dv' \frac{d}{dv'} \left\{ G(v_0) \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} v'^2 \right\} F(v_0, v') \right\} = \frac{2CG(v_0)}{D} \int_{v_0}^v dv' \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} v'^2 \right\}, \quad (2.46)$$

onde

$$G(v_0) = g(v_0) \exp \left\{ -\frac{\gamma}{D} v_0^2 \right\}. \quad (2.47)$$

Assim, temos que

$$G(v_0) \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} v^2 \right\} F(v_0, v) - G(v_0) \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} v_0^2 \right\} F(v_0, v_0) = \frac{2CG(v_0)}{D} N(v, v_0) \quad (2.48)$$

onde

$$N(v, v_0) = \int_{v_0}^v dv' \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} v'^2 \right\}. \quad (2.49)$$

Logo,

$$F(v_0, v) = \exp \left\{ -\frac{\gamma}{D} v^2 \right\} \left[\frac{2C}{D} N(v, v_0) + \exp \left\{ \frac{\gamma}{D} v_0^2 \right\} F(v_0, v_0) \right]. \quad (2.50)$$

Substituindo a Eq.(2.50) na Eq.(2.40), obtemos que $C = 0$ e, deste modo, a solução estacionária para a função distribuição de velocidades é dada por:

$$F(v_0, v) = F(v_0, v_0) \exp \left\{ -\frac{\gamma}{D} (v^2 - v_0^2) \right\}, \quad (2.51)$$

ou seja, a solução estacionária para a função distribuição é dada pela distribuição de Maxwell das velocidades.

A partir da distribuição acima, não é difícil mostrar que

$$\langle v^2 \rangle = \frac{D}{2\gamma}. \quad (2.52)$$

Agora, da teoria cinética dos gases, temos que

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad (2.53)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do reservatório. Como $B = m^2 D$ e $\alpha = \gamma m$, e comparando as Eqs.(2.52) e (2.53), obtém-se que a relação entre o coeficiente B e a temperatura é dada por

$$B = 2\alpha k_B T. \quad (2.54)$$

Com isto, podemos escrever que a distribuição de equilíbrio (i.e. estacionária) para a distribuição de velocidades de uma partícula livre em contato com um banho térmico a temperatura T é da forma de uma distribuição de Boltzmann

$$F(v) \sim e^{-\beta E(v)}, \quad (2.55)$$

onde $\beta = 1/k_B T$ e $E(v) = 1/2 m v^2$.

Portanto, a distribuição de probabilidade de *equilíbrio* associada à equação de Langevin é a distribuição de Boltzmann. Conforme dito acima, o objetivo de todo este exercício simples nesta Seção foi precisamente chegar no resultado da Eq.(2.55). Este resultado, como será visto mais adiante, vai se estender para o caso da relaxação de um parâmetro de ordem para o equilíbrio.

2.2.2 Equações de Ginzburg-Landau-Langevin

Para motivar a equação dinâmica para um parâmetro de ordem, vamos considerar uma partícula de massa m sujeita a um potencial $V(x)$, cujo Hamiltoniano clássico pode ser escrita como

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (2.56)$$

Introduzindo a notação

$$q_1 = p, \quad q_2 = x, \quad (2.57)$$

na ausência de qualquer outra força, a velocidade (v_1, v_2) é dada por

$$v_1 = \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -V'(q_2) \quad (2.58)$$

$$v_2 = \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{q_1}{m}. \quad (2.59)$$

Estas equações podem ser escritas na forma

$$\frac{dq_\mu}{dt} = \sum_\nu W_{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \quad (2.60)$$

onde os $W_{\mu\nu}$ são os parênteses de Poisson das coordenadas q_μ , dados neste caso por

$$W_{12} = -W_{21} = -1, \quad W_{11} = W_{22} = 0. \quad (2.61)$$

Observação: os parênteses de Poisson de duas quantidades, f e g , por exemplo, são definidos pela seguinte expressão:

$$\{f, g\} = \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\mu} \frac{\partial g}{\partial q_\nu} - \frac{\partial f}{\partial q_\nu} \frac{\partial g}{\partial q_\mu} \right). \quad (2.62)$$

Agora vamos generalizar o caso acima para um sistema físico cujo estado em qualquer instante de tempo é descrito por um conjunto completo de variáveis clássicas \tilde{Q}_μ (estas incluem os momentos). A razão para usar o til nestas variáveis ficará clara logo a seguir. Aqui, estamos usando a notação e seguindo a apresentação e os argumentos do artigo de Hohenberg e Halperin [1], clássico sobre fenômenos críticos dinâmicos. A evolução temporal das quantidades \tilde{Q}_μ é dada através de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem *determinísticas*

$$\frac{d\tilde{Q}_\mu}{dt} = \Phi_\mu[\tilde{Q}, \tilde{h}], \quad (2.63)$$

onde Φ_μ é uma função do conjunto de variáveis $\tilde{Q} \equiv \{\tilde{Q}_\mu\}$ no tempo t , e pode depender parametricamente de um conjunto de campos externos aplicados $\tilde{h} \equiv \{\tilde{h}_\mu\}$. Se o Hamiltoniano do sistema é da forma

$$H[\tilde{Q}, \tilde{h}] = H_0[\tilde{Q}] - \sum_\mu \tilde{h}_\mu \tilde{Q}_\mu, \quad (2.64)$$

então temos que

$$\Phi_\mu = \sum_\nu W_{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}_\nu}, \quad (2.65)$$

onde, novamente, os $W_{\mu\nu}$ são os parênteses de Poisson das coordenadas \tilde{Q}_μ . Se as variáveis \tilde{Q}_μ forem as coordenadas e os momentos usuais, os $W_{\mu\nu}$ são constantes, como no exemplo acima. Caso os campos externos sejam independentes do tempo, as Eqs.(2.64) são conservativas, no sentido de que $dH/dt = 0$.

Ao se discutir sistemas com muitos graus de liberdade, muitas vezes é conveniente, ou mesmo necessário, restringir-se a um subconjunto $Q \equiv \{Q_\mu\}$ do conjunto completo \tilde{Q} , e tomar médias sobre as variáveis restantes. As variáveis \tilde{Q} são variáveis “microscópicas” e as Q são as variáveis “macroscópicas”. As equações resultantes de uma média sobre as equações dadas na Eq.(2.63) são necessariamente estocásticas, no sentido de que o valor de uma coordenada $Q_\mu(t)$ para um tempo $t > 0$ não fica completamente determinado pelos valores do conjunto $\{Q_\mu\}$ no tempo $t = 0$. Em geral, é necessário saber-se, para *todos os tempos* t , a probabilidade relativa de que uma particular evolução $Q(t)$ ocorra. Pode-se, então definir valores esperados $\langle Q(t) \rangle$, funções de correlação de dois tempos $\langle Q(t)Q(t') \rangle$, etc. para todo t , e tomar médias sobre todas as possíveis evoluções temporais, devidamente pesadas com as respectivas probabilidades de ocorrência destas evoluções. Por outro lado, os valores esperados a um dado tempo, $\langle Q(t) \rangle$ e $\langle Q(t)Q(t) \rangle$, são determinados conhecendo-se apenas a distribuição de probabilidade $P[Q; t]$ para os valores de Q em um único instante de tempo t .

Em geral, ao se discutir fenômenos críticos dinâmicos, as variáveis Q de interesse são aquelas de variação lenta próximo ao estado de equilíbrio. Conforme já discutido anteriormente, estas variáveis são os parâmetros de ordem (e, obviamente, quantidades conservadas). Nos casos em que as funções de correlação $\langle Q(t)Q(t') \rangle$ e a distribuição de probabilidade $P[Q; t]$ são derivadas de um Hamiltoniano, uma série de propriedades importantes podem ser provadas de maneira bastante geral – ver por exemplo o livro de Kubo e colaboradores [19]. Porém, quando se emprega um modelo estocástico para a evolução de um número restrito de variáveis Q , não é possível derivar tais propriedades. No entanto, é necessário *exigir* que as funções de correlação e distribuição de probabilidade derivadas dentro do modelo estocástico também satisfaçam estas mesmas propriedades. As condições mais importantes são as seguintes:

(1) *Equilíbrio térmico.* Para campos externos $\{h_\mu\}$ independentes do tempo, a distribuição de probabilidade é também independente do tempo e tem a forma de

uma distribuição de Boltzmann

$$P[Q] = P_{eq}[Q] = \frac{1}{Z} \exp\left[-\beta\left(F[Q] - \sum_i \mu_i \bar{Q}_i\right)\right], \quad (2.66)$$

onde $\beta = 1/k_B T$, e

$$\exp(-\beta F[Q]) = \text{tr} \exp(-\beta H[\tilde{Q}])|_Q, \quad (2.67)$$

$$Z = \text{tr} \exp\left[-\beta\left(F[Q] - \sum_i \mu_i \bar{Q}_i\right)\right]. \quad (2.68)$$

O traço na Eq.(2.67) é tomado sobre as variáveis microscópicas \tilde{Q} , mantendo fixos as variáveis macroscópicas Q – como dito acima, as Q são um subconjunto das \tilde{Q} . As quantidades \bar{Q}_i nas equações acima são as eventuais constantes de movimento do sistema (como a energia E , o número de partículas N , etc), as quais formam um subconjunto (pequeno) das $\{Q_\mu\}$. As constantes μ_i são multiplicadores de Lagrange conjugados às \bar{Q}_i 's.

(2) *Relaxação ao equilíbrio.* Quando os campos externos $\{h_\mu\}$ se tornam independentes do tempo após um tempo t_0 , a distribuição de probabilidade $P[Q, t]$ deve *relaxar*, para tempos longos, a uma distribuição de equilíbrio $P_{eq}[Q]$, determinada pelos valores das constantes de movimento $\{\bar{Q}_i\}$ no tempo t_0 .

(3) *Causalidade.* Na presença de um campo externo dependente do tempo $h(t)$, o valor esperado $\langle Q_\mu(t') \rangle$ somente depende de $h(t)$ para $t' > t$.

(4) *Teorema da flutuação e dissipação.* Este teorema é uma relação entre funções de correlação de equilíbrio e funções de resposta linear. Esta relação pode ser provada para qualquer sistema definido por um Hamiltoniano. Para modelos estocásticos, em geral, exige-se que os parâmetros relacionados à dissipação e às flutuações que aparecem nas equações de movimento sejam tais que esta relação seja satisfeita no equilíbrio. Não vamos provar este teorema aqui, sua prova no contexto de modelos estocásticos pode ser encontrada na Ref. [12]. Aqui, vamos simplesmente mostrar sua expressão para o caso de um sistema descrito por variáveis de campo. Suponhamos, então, que as variáveis $Q_\mu(t)$ sejam densidades no espaço ordinário (ou campos), que denotaremos $\phi(\mathbf{r}, t)$. As correspondentes densidades das variáveis conjugadas $h_\mu(t)$ (ou fontes) serão denotados por $J(\mathbf{r}, t)$. Definimos as transformadas de Fourier dos campos e fontes como

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{k}, t) \\ J(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} = \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}, t) \\ J(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}.$$

Então, para uma fonte J infinitesimal, a função resposta linear $\chi_\phi(\mathbf{k}, \omega)$ é definida pela relação

$$\langle \phi(\mathbf{k}, t) \rangle_J = \chi_\phi(\mathbf{k}, \omega) J(\mathbf{k}, \omega), \quad (2.69)$$

onde o sistema é suposto estar no equilíbrio no tempo $t = -\infty$. Aqui, o valor médio é determinado a partir da distribuição de probabilidade $P[\phi; t]$ na presença da fonte $J(\mathbf{r}, t)$. Pode-se também definir a função de correlação

$$C_\phi(\mathbf{r}, t) = \langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(0, 0) \rangle_{J=0} - \langle \phi(\mathbf{r}, t) \rangle_{J=0} \langle \phi(0, 0) \rangle_{J=0}, \quad (2.70)$$

com sua transformada de Fourier $C_\phi(\mathbf{k}, \omega)$ denotada por $C_\phi(\mathbf{r}, t)$. A função de correlação a tempos iguais $C_\phi(\mathbf{k})$ é a transformada de Fourier de $C_\phi(\mathbf{r}, t = 0)$,

$$C_\phi(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} C_\phi(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.71)$$

O teorema da flutuação e dissipação (para sistemas clássicos, que estamos considerando aqui) é a expressão

$$C_\phi(\mathbf{k}, \omega) = 2 \frac{k_B T}{\omega} \text{Im} \chi_\phi(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.72)$$

Esta relação, juntamente com a relação Kramers-Kronig, $\chi_\phi(\mathbf{k}) \equiv \chi_\phi(\mathbf{k}, \omega = 0) = 2\text{Im}\chi_\phi(\mathbf{k}, 0)/\omega$, leva à relação

$$C_\phi(\mathbf{k}) = k_B T \chi_\phi(\mathbf{k}). \quad (2.73)$$

Conhecida a função $\chi_\phi(\mathbf{k}, \omega)$, define-se o *coeficiente cinético* $\Gamma_\phi(\mathbf{k})$ como

$$\frac{1}{\Gamma_\phi(\mathbf{k})} = i \left. \frac{\partial \chi_\phi^{-1}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0}. \quad (2.74)$$

Para variáveis de campo, um dos modelos estocásticos mais simples é conhecido como *Modelo A*, na nomenclatura criada por Hohenberg e Halperin [1], e amplamente empregada na literatura atual. A equação estocástica para o campo $\phi(\mathbf{r}, t)$ (parâmetro de ordem) é dada por

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(\mathbf{r}, t)} + \zeta(\mathbf{r}, t), \quad (2.75)$$

conhecida como equação de Ginzburg-Landau-Langevin. Nesta, $F[\phi]$ é a energia livre de Landau e ζ é uma função estocástica, usualmente tomada na forma de ruído branco,

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0 \quad (2.76)$$

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (2.77)$$

O nome *equação de Ginzburg-Landau-Langevin* para a Eq.(2.75) é devido a presença da função ruído ζ .

Funções de correlação e funções resposta para o campo ϕ podem ser obtidas formalmente resolvendo a equação estocástica Eq.(2.75) para ϕ como um funcional de ζ (para cada ponto \mathbf{r} do espaço e para cada instante de tempo t) e, então tomando médias sobre todas as configurações de campo.

A equação de Fokker-Planck associada à Eq.(2.75) é dada por [20]

$$\frac{\partial P[\phi(\mathbf{r}, t); t]}{\partial t} = \int d\mathbf{r}' \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{r}', t)} \left[\Gamma \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(\mathbf{r}', t)} P[\phi(\mathbf{r}', t)] + \frac{D}{2} \frac{\delta P[\phi(\mathbf{r}', t)]}{\delta\phi(\mathbf{r}', t)} \right]. \quad (2.78)$$

Para $t \rightarrow \infty$, a solução desta equação se aproxima da solução estacionária (de equilíbrio)

$$P_{eq}[\phi(\mathbf{r})] = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{2\Gamma}{D} F[\phi(\mathbf{r})]\right), \quad (2.79)$$

com

$$Z = \int \mathcal{D}\{\phi(\mathbf{r})\} \exp\left(-\frac{2\Gamma}{D} F[\phi(\mathbf{r})]\right), \quad (2.80)$$

onde $\int \mathcal{D}\{\phi(\mathbf{r})\}$ indica a integral funcional sobre as configurações ϕ . Que a $P_{eq}[\phi(\mathbf{r})]$ dada na Eq.(2.79) é a solução estacionária pode ser verificado trivialmente por substituição na equação de Fokker-Planck, com $\partial P[\phi(\mathbf{r}, t); t]/\partial t = 0$. Para que esta seja a distribuição de Boltzmann, é necessário que

$$D = 2\Gamma k_B T. \quad (2.81)$$

Esta relação é a manifestação do teorema da flutuação e dissipação. A prova do teorema para o presente caso não é simples, conforme discutido na Ref. [12].

A energia livre *coarse grained* de Landau $F[\phi]$ é um funcional local do parâmetro de ordem, e seus mínimos correspondem aos estados de equilíbrio do modelo. Um dos requerimentos implícitos no uso de uma energia livre *coarse grained* para um sistema fora do equilíbrio é o de que este não se encontre muito longe do equilíbrio – de outra forma, não localidades no tempo e no espaço deveriam ser consideradas na evolução do sistema. Este requerimento implícito é, em geral, satisfeito para sistemas com uma dinâmica lenta nas escalas de tempo de equilibração locais.

Para discutir a forma geral para a energia livre *coarse grained* de Landau $F[\phi]$, vamos adotar a notação, e seguir os argumentos da Ref. [21]. Inicialmente introduzimos uma escala de comprimento l , a qual separa as regiões microscópicas locais de dinâmica rápida das regiões macroscópicas de dinâmica lenta. Assim, o sistema é dividido em regiões (células físicas elementares) de tamanho l , as quais estão centradas em torno de vetores \vec{r} que definem as suas posições. A escala de comprimento tem

que ser muito maior do que a distância média a entre os átomos (ou outras estruturas microscópicas) do sistema, $l \gg a$, a fim de que um tratamento estatístico possa ser empregado. Um outro requerimento é que não se quer perder muita informação sobre a microscopia do sistema e, portanto, $l < \xi$, onde ξ é o comprimento de correlação do sistema. Nesta escala l , tratamos o sistema como estando em equilíbrio, pois supõe-se que ele equilibra em escalas menores do que l . O parâmetro de ordem deve variar suavemente nas escalas de comprimento maiores do que l a fim de que o sistema nestas escalas não esteja distante de seu estado de equilíbrio.

Uma vez que as células físicas elementares estão equilibradas, podemos definir as suas funções termodinâmicas de equilíbrio. Estas são obtidas a partir da função de partição para o sistema de células:

$$Z[\phi] = \overline{\sum_{\{\phi\}} \exp(-H[\phi]/k_B T)}, \quad (2.82)$$

onde a soma é feita sobre as configurações do parâmetro de ordem ϕ e a barra sobre o sinal de somatório indica o vínculo

$$\frac{1}{l^3} \sum_{\{\phi\} \in \text{cell } \mathbf{r}} \phi_i = \phi(\mathbf{r}). \quad (2.83)$$

Supõe-se que o comportamento de grandes comprimentos de onda do sistema possa ser descrito por uma função conhecida como energia livre de Landau $F[\phi]$, definida como

$$F[\phi(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{r} f(\phi(\mathbf{r})), \quad (2.84)$$

onde f é uma função local do parâmetro de ordem local e de suas derivadas. Assim, pode-se expandir esta função em torno de f_0 , a densidade de energia livre da fase uniforme, como

$$f(\phi, \nabla\phi, \dots) = f_0(\phi) + k_1(\phi) \nabla^2\phi + k_2(\phi) (\nabla\phi)^2 + \dots, \quad (2.85)$$

e, desta forma,

$$F[\phi(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{r} f(\phi(\mathbf{r})) \simeq \int d\mathbf{r} [f_0(\phi) + k_1(\phi) \nabla^2\phi + k_2(\phi) (\nabla\phi)^2 + \dots]. \quad (2.86)$$

Pelo teorema da divergência, temos que

$$\int d\mathbf{r} \nabla \cdot (k_1 \nabla\phi(\mathbf{r})) = \int d\mathbf{r} k_1 \nabla^2\phi + \int d\mathbf{r} (\nabla k_1) \cdot (\nabla\phi) = \int_s d\vec{S} k_1 (\nabla\phi). \quad (2.87)$$

Impondo que $\nabla\phi$ é zero na fronteira, obtém-se

$$\int d\mathbf{r} k_1 \nabla^2\phi = - \int d\mathbf{r} (\nabla k_1) \cdot (\nabla\phi). \quad (2.88)$$

Uma vez que

$$\nabla k_1(\phi) = \frac{dk_1}{d\phi} (\nabla\phi), \quad (2.89)$$

o funcional $F[\phi]$ pode ser escrito como

$$F[\phi(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} \gamma (\nabla\phi)^2 + f_0(\phi(\mathbf{r})) \right\}, \quad (2.90)$$

onde

$$\frac{1}{2} \gamma = k_2(\phi) - \frac{dk_1(\phi)}{d\phi}. \quad (2.91)$$

Para encerrar esta Seção, mencionamos que a correspondente equação que descreve a evolução temporal de parâmetros de ordem conservados, é a equação de Cahn-Hilliard [22], o que dá origem ao *Modelo B*, na nomenclatura de Hohenberg e Halperin. Esta equação é obtida da anterior pela seguinte substituição na Eq.(2.75)

$$\Gamma \rightarrow -\Gamma \nabla^2. \quad (2.92)$$

A equação resultante,

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \Gamma \nabla^2 \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(\mathbf{r}, t)} + \zeta(\mathbf{r}, t), \quad (2.93)$$

pode ser colocada na forma da equação da continuidade

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.94)$$

onde

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \left(\Gamma \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(\mathbf{r}, t)} + \zeta'(\mathbf{r}, t) \right), \quad (2.95)$$

onde $\zeta'(\mathbf{r}, t)$ é definida formalmente através da relação $\zeta(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \zeta'(\mathbf{r}, t)$ (a qual pode ser resolvida explicitamente no espaço dos momentos).

2.3 Decomposição espinodal

Consideremos inicialmente uma energia livre da forma da Eq.(2.6), em que $t = T - T_c$. Os pontos extremos deste potencial são dados por

$$\phi = 0 \quad \text{e} \quad \phi = \pm\phi_e, \quad (2.96)$$

onde

$$\phi_e = \left[\frac{a}{b} T_c \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right]^{1/2}. \quad (2.97)$$

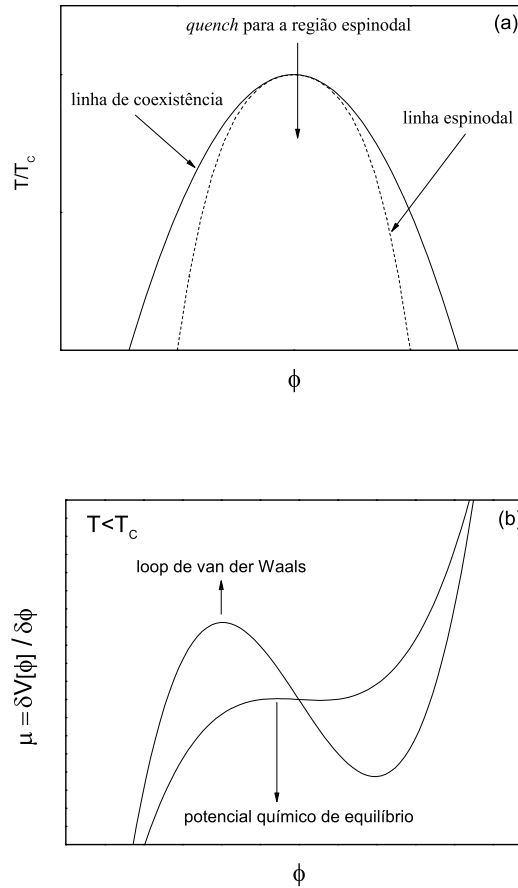


Figura 2.2: (a) Ilustração da curva espinodal e (b) o potencial químico μ como função do parâmetro de ordem para $T < T_c$.

Os pontos de inflexão, para os quais a derivada segunda da energia livre se anula, são dados por $\phi = \pm\phi_s$, onde

$$\phi_s = \left[\frac{a}{3b} T_c \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right]^{1/2}. \quad (2.98)$$

Os estados para os quais $-\phi_s \leq \phi \leq \phi_s$ são termodinamicamente instáveis. Para melhor compreender estas quantidades, na Figura 2.2 (a) apresentamos um gráfico de $T/T_c \times \phi$. Neste, mostramos a linha de coexistência (linha sólida), sob a qual estados de equilíbrio termodinâmico coexistem, e a linha *espinodal*, que delimita a região de instabilidade termodinâmica no plano $T \times \phi$. A linha de coexistência é

dada pela relação

$$T_{coex}(\phi) = T_c - \frac{b}{a} \phi^2, \quad (2.99)$$

a qual indica os valores de T para os quais o sistema é estável, i.e. os pontos sobre esta curva correspondem aos mínimos da energia livre. Por outro lado, a linha espinodal corresponde aos pontos para os quais

$$T_s(\phi) = T_c - \frac{3b}{a} \phi^2, \quad (2.100)$$

que delimita os valores de T e ϕ para os quais o sistema é instável, i.e. qualquer flutuação de ϕ dentro da região espinodal tende a se amplificar. Já na Figura 2.2 (b) apresentamos um gráfico de $\mu \times \phi$. Conforme este demonstra, a teoria clássica prediz um loop de van der Waals na região de não equilíbrio sobre a qual há coexistência de duas fases. Nesta Figura, os estados metaestáveis são aqueles para os quais o potencial químico é positivo, enquanto que estados instáveis são aqueles para os quais o potencial químico é negativo. A curva espinodal separa estes dois estados.

Suponhamos que o sistema se encontre a uma temperatura $T > T_c$. Neste caso, o valor de equilíbrio do parâmetro de ordem é $\phi = 0$. Imaginemos que, *subitamente*, esta temperatura seja baixada para uma temperatura tal que $T < T_c$. Através deste processo de resfriamento rápido, usualmente denominado de *quench*, o sistema, que originalmente se encontrava numa configuração de equilíbrio, passou para um estado de equilíbrio instável, em que a energia livre mudou instantaneamente da forma de um único poço para uma forma de poço-duplo, como ilustrado na Fig. 2.3. A partir do *quench*, o sistema se encontra no máximo da energia livre e, então, começará a evoluir em direção aos mínimos da energia livre.

A evolução temporal do parâmetro de ordem para um novo estado de equilíbrio é descrito precisamente por uma equação do tipo Ginzburg-Landau-Langevin, discutida na Seção anterior. Para tempos curtos, logo após o *quench* de temperatura é possível descrever analiticamente esta evolução temporal do sistema. Especificamente, para tempos muito próximos de $t = 0$, instante em que ocorreu o *quench*, o parâmetro de ordem continuará pequeno, i.e. $\phi(\mathbf{r}, t) \sim 0$. Nesta situação, podemos desprezar o termo quártico na Eq.(2.6) e a equação de Ginzburg-Landau-Langevin dada na Eq.(2.75) pode ser resolvida analiticamente. Podemos tomar formalmente a média sobre o ruído ζ da equação resultante, pois ela é linear em $\phi(\mathbf{r}, t)$. Isto nos leva a uma equação de difusão para o valor médio $\langle \phi(\mathbf{r}, t) \rangle$, a qual pode ser resolvida usando transformada de Fourier para $\langle \phi(\mathbf{r}, t) \rangle$.

Portanto, definindo $\langle \phi(\mathbf{k}, t) \rangle$ como sendo a transformada de Fourier de $\langle \phi(\mathbf{r}, t) \rangle$,

$$\langle \phi(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \langle \phi(\mathbf{k}, t) \rangle, \quad (2.101)$$

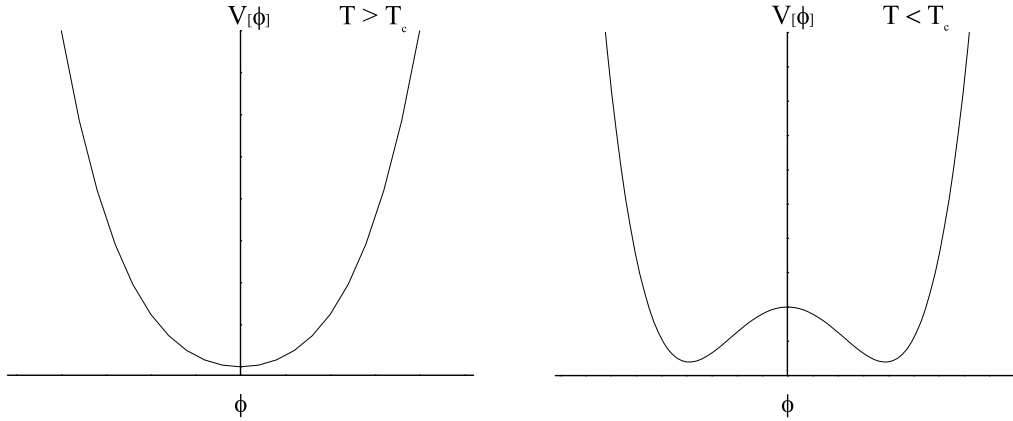


Figura 2.3: Ilustração de um *quench* para dentro da região espinodal.

e substituindo esta expressão na Eq.(2.75) linearizada (para $\gamma = 1$) obtemos que

$$\langle \phi(\mathbf{k}, t) \rangle \sim e^{\lambda_k t}, \quad (2.102)$$

onde

$$\lambda_k = a|T - T_c| - \mathbf{k}^2 \quad (2.103)$$

Portanto, os modos com $k^2 < a|T - T_c|$ dão origem ao que se denomina *decomposição espinodal*, que é um crescimento exponencial dos modos com grandes comprimentos de onda (pequenos números de onda), o que leva a um crescimento muito rápido do valor do parâmetro de ordem. Os modos com $k^2 > a|T - T_c|$ simplesmente são absorvidos pelo sistema.

Para tempos mais longos, a aproximação linear não é mais válida, uma vez que o parâmetro de ordem não é mais pequeno. Neste caso, é necessário resolver numericamente a equação estocástica completa. Métodos de solução e resultados numéricos serão discutidos, respectivamente, nos Capítulos 4 e 5.

Capítulo 3

Correções quânticas e equações de Ginzburg-Landau-Langevin

O objetivo deste Capítulo é fazer uma revisão do trabalho de Gleiser e Ramos (GR) [8], o qual mostra como é possível derivar uma equação de Ginzburg-Landau-Langevin (GLL) efetiva num modelo de teoria quântica de campos relativística. GR obtêm uma equação de GLL efetiva a partir de correções quânticas de ordem \hbar^2 e em teoria de perturbação até segunda ordem na constante de acoplamento, no contexto de uma teoria de um campo escalar real auto-interagente. As correções quânticas são calculadas empregando o formalismo *in-in* de Schwinger [9] para a ação efetiva. Termos de dissipação e flutuação, características principais de uma equação de GLL, aparecem naturalmente de partes imaginárias de diagramas de *loop* na ação efetiva e auto-energias, as quais são a manifestação de processos de colisões e decaimentos de excitações coletivas de modos do campo escalar. Termos estocásticos, em particular, aparecem através de uma técnica de eliminar as partes imaginárias da ação efetiva em favor de campos estocásticos auxiliares [10, 11].

Antes de partirmos para a descrição de detalhes desta derivação, vamos fazer uma breve revisão sobre o formalismo funcional *in-out* usual a temperatura zero e a temperatura finita a tempo real para a ação efetiva. Logo após, vamos revisar o formalismo *in-in*, e mostrar com bastante detalhe os cálculos e aproximações necessários para se chegar à equação de GLL efetiva de GR. No próximo Capítulo, discutiremos a solução numérica da equação de GLL efetiva obtida por Gleiser e Ramos.

Para o desenvolvimento deste Capítulo, utilizamos como referências básicas, além do trabalho de GR [8], o trabalho de Jackiw [23], o livro de V. A. Miransky [24], o paper de Niemi e Semenoff [25] e de Landsman e van Weert [26]. Outras referências complementares a este assunto estão reunidas na Ref. [27]. Também fazemos uso das Notas do Curso *Short Introduction to Quantum Field Theory at Finite Temperature and Applications*, apresentado no IFT em fevereiro de 2005 por R.O. Ramos [28].

3.1 Formalismo de tempo real *in-out* a temperatura zero

O formalismo funcional de tempo real fornece elementos para a descrição de problemas em equilíbrio termodinâmico e, além disso (e esta é a principal vantagem deste formalismo em relação ao formalismo Euclideano de tempo imaginário, descrito no Apêndice A por completeza. No Apêndice B apresentamos uma conexão deste formalismo com a mecânica estatística quântica), fornece elementos necessários para a descrição de problemas fora do equilíbrio termodinâmico. Iniciaremos esta Seção estudando um sistema com temperatura zero e, na sequência, estudaremos o caso de um sistema em equilíbrio imerso em um banho térmico.

O problema que queremos estudar consiste basicamente em, partindo de uma Lagrangeana para uma teoria de campo escalar, encontrar a expansão em *loops* da ação efetiva (que será definida logo a seguir) para esta teoria. Seja $\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi]$ a Lagrangeana que descreve a dinâmica do campo quântico escalar real ϕ , o qual tomaremos como estando linearmente acoplado a uma fonte externa $J(x)$,

$$\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] \rightarrow \mathcal{L} + J(x)\phi(x), \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L} no espaço de Minkowski é dada por ($\hbar=1=c$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \mathcal{V}(\phi), \quad (3.2)$$

com m sendo a massa das partículas associadas ao campo e $\mathcal{V}(\phi)$ é o termo que descreve a interação, o qual será tomado na forma

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (3.3)$$

Em situações nas quais o termo $\mathcal{V}(\phi)$ pode ser desprezado, ϕ satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} \phi - \Delta \phi + m^2 \phi = 0. \quad (3.4)$$

A solução geral desta equação é escrita em termos de superposições de ondas planas, correspondendo à propagação livre das partículas de massa m e momento \mathbf{k} .

Na presença da fonte escalar J , o gerador funcional $Z[J]$ de funções de Green da teoria é definido pela seguinte amplitude de transição

$$Z[J] = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J, \quad (3.5)$$

ou seja, este é definido pela amplitude de transição do estado de vácuo (estado fundamental da teoria) existente no passado remoto, $| 0^- \rangle$, para o estado de vácuo

que existirá num futuro distante, $|0^+\rangle$). Este ponto de partida, a definição do gerador funcional de funções de Green como uma amplitude de transição entre o estado fundamental da teoria no passado remoto e o estado fundamental no futuro distante, é a origem do nome de *formalismo in-out*. O funcional gerador na presença da fonte externa pode ser escrito como uma integral funcional da forma

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\phi, J] \right\}, \quad (3.6)$$

onde $S[\phi, J]$ é a ação clássica

$$S[\phi, J] = \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)]. \quad (3.7)$$

O gerador de todas as funções de Green $Z[J]$ está relacionado ao gerador das funções de Green conexas, $W[J]$, pela expressão

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} W[J] \right\}. \quad (3.8)$$

Se conhecermos a função $W[J]$ podemos calcular a ação efetiva, $\Gamma[\varphi]$, a partir de uma transformada de Legendre da forma

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int d^4x J(x)\varphi(x), \quad (3.9)$$

com $\varphi(x)$ sendo a variável conjugada à fonte J

$$\varphi(x) \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (3.10)$$

Esta mostra que $J = J(\varphi)$. A ação efetiva é o gerador funcional das funções de vértice quânticas, ou seja, esta gera as funções de vértice clássicas e todas as suas correções quânticas e, por conter toda a informação da teoria quântica completa, em geral só pode ser calculada a partir de algum esquema de aproximação. A partir da definição da ação efetiva dada acima, Eq.(3.9), temos que

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} - \int d^4y \left[J(y) \delta^{(4)}(y-x) + \varphi(y) \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} \right], \quad (3.11)$$

e usando a definição do campo $\varphi(x)$, Eq.(3.10), obtemos finalmente que

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x). \quad (3.12)$$

Assim, $\Gamma[\varphi]$ é a ação efetiva, no sentido de que os valores possíveis para os campos $\varphi(x)$, na ausência da fonte externa ($J = 0$), são dados pelos pontos estacionários de $\Gamma[\varphi]$

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = 0. \quad (3.13)$$

Este resultado pode ser comparado às equações de campo clássicas, as quais exigem que a ação clássica $S[\varphi]$ seja estacionária com relação a variações de φ . Portanto, a Eq.(3.13) pode ser lembrada como a equação de movimento para o campo φ , levando em conta as correções quânticas, uma vez que a ação $S[\varphi]$ foi substituída pela ação $\Gamma[\varphi]$.

A ação efetiva é uma funcional do campo clássico φ – quando falamos em campo clássico, queremos dizer que φ é um c -number, e não um operador; φ , como dito acima, contém contribuições quânticas. Portanto, a ação efetiva pode ser expandida em termos de potências de $\varphi(x)$. Assumindo que não exista quebra de simetria no problema, temos que

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n), \quad (3.14)$$

onde

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} \right|_{\varphi=0}. \quad (3.15)$$

Os coeficientes $\Gamma^{(n)}$ nesta série são as funções de Green 1PI (às vezes chamadas também de vértices próprios). Gráficos 1PI (one-particle irreducible) são aqueles que não podem ser separados cortando-se apenas uma linha interna. $\Gamma^{(n)}$ é a soma de todos os diagramas de Feynman 1PI com n linhas externas. Como já é convenção, diagramas 1PI são calculados sem propagadores nas linhas externas. Ou seja, a ação efetiva é a soma de todos os gráficos 1PI conexos na presença da fonte $J(x)$.

Por outro lado, se estivermos lidando com um sistema que apresenta quebra espontânea de simetria, a expressão correspondente será dada por

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) (\varphi(x_1) - v) \dots (\varphi(x_n) - v), \quad (3.16)$$

onde

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} \right|_{\varphi=v}, \quad (3.17)$$

e v é a solução da equação de mínimo para Γ .

No Apêndice C pode ser encontrada uma discussão acerca de uma quantidade importante relacionada à ação efetiva, o potencial efetivo. Vamos passar agora à descrição do formalismo de tempo real a temperatura finita.

3.2 Formalismo de tempo real *in-out* a temperatura finita

A extensão deste formalismo para sistemas em equilíbrio termodinâmico a uma temperatura T pode ser feita sem muito esforço. No entanto, a extensão ingênua leva

a problemas e algum cuidado deve ser tomado com relação à evolução temporal *in-out* usual. Especificamente, para explicar estes problemas, consideremos as funções de Green térmicas de dois pontos

$$G(x, y) = \langle T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] \rangle_{\beta} \quad (3.18)$$

$$\equiv G^>(x, y) \theta(x^0 - y^0) + G^<(x, y) \theta(y^0 - x^0), \quad (3.19)$$

onde

$$G^>(x, y) = \langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) \rangle_{\beta}, \quad G^<(x, y) = \langle \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) \rangle_{\beta}, \quad (3.20)$$

com o valor médio termodinâmico $\langle \hat{A} \rangle_{\beta}$ de um operador quântico \hat{A} dado por

$$\langle \hat{A} \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \hat{A} \right), \quad Z(\beta) = \text{tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right), \quad (3.21)$$

e \hat{H} sendo o Hamiltoniano do sistema.

Em particular, para um campo escalar livre, não é difícil mostrar que [29]

$$\begin{aligned} G^>(x, y) &= G^<(y, x) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left\{ [n(\mathbf{k}) + 1] e^{-ik(x-y)} + n(\mathbf{k}) e^{ik(x-y)} \right\} \Big|_{k^0=\omega_k}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde $\omega_k = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ e $n(\mathbf{k})$ é a distribuição de Bose-Einstein. Usando estas funções combinadas com as funções teta de Heaviside, leva a

$$G(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G(k) \quad (3.23)$$

com

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi i n(k^0) \delta(k^2 - m^2). \quad (3.24)$$

Os problemas mencionados acima surgem precisamente com a função $\delta(k^2 - m^2)$ acima. Estes problemas estão relacionados a diagramas de Feynman que possuem dois ou mais propagadores, o que leva a singularidades provenientes do produto de duas ou mais destas funções delta de argumentos iguais.

Estes problemas podem ser evitados estendendo as funções $G^>$ e $G^<$ para o plano complexo na variável tempo. Especificamente, escrevendo $G^>(t, t')$ (aqui explicitamos apenas a variável de tempo) como

$$\begin{aligned} G^>(t, t') &= \langle \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(t') \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(t') \right] \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left[e^{it\hat{H}} \hat{\phi}(0) e^{-i(t-t')\hat{H}} \hat{\phi}(0) e^{-i\hat{H}t'} e^{-\beta \hat{H}} \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

e inserindo um conjunto completo de autoestados do operador Hamiltoniano para calcularmos o traço, obtemos

$$\begin{aligned} G^>(t, t') &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} \langle n | e^{-\beta\hat{H}} e^{i\hat{H}t} \hat{\phi}(0) e^{-i\hat{H}(t-t')} | m \rangle \langle m | \hat{\phi}(0) e^{-i\hat{H}t'} | n \rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{iE_n(t-t')} e^{-iE_m(t-t')} | \langle m | \hat{\phi}(0) | n \rangle |^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Notamos que a convergência com relação a $\Delta t \equiv t - t'$ desta expressão é controlada pelas funções exponenciais. Portanto, estendendo Δt para o plano complexo, temos $\Delta t = \text{Re}\Delta t + i \text{Im}\Delta t$. Logo,

$$\begin{aligned} \exp[-\beta E_n + iE_n(t-t')] &= \exp[-\beta E_n + i(\text{Re}\Delta t + i\text{Im}\Delta t)E_n] \\ &= \exp[-(\beta + \text{Im}\Delta t)E_n] \exp[i\text{Re}\Delta t E_n]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para que esta função não divirja quando $\Delta t \rightarrow \infty$, é necessário que

$$\beta + \text{Im}\Delta t \geq 0 \Rightarrow \text{Im}\Delta t \geq -\beta. \quad (3.28)$$

Repetindo este procedimento para a exponencial em E_m , chegamos a

$$\text{Im}\Delta t \leq 0. \quad (3.29)$$

Juntando os dois resultados, concluímos que a função $G^>(t, t')$ está definida para o intervalo

$$-\beta \leq \text{Im}\Delta t \leq 0. \quad (3.30)$$

Da mesma forma, para a função $G^<(t, t')$, obtemos a condição

$$\beta \geq \text{Im}\Delta t \geq 0. \quad (3.31)$$

Levando em conta estas condições, é possível estender o formalismo *in-out* de maneira que os ordenamentos temporais *não* precisam ser somente sobre o eixo real. Na verdade, é possível definir ordenamentos temporais no plano complexo consistentemente com as condições acima. Desta forma, *nunca* aparecerão produtos de funções delta de Dirac de argumentos iguais.

Para tratar problemas dependentes do tempo de sistemas em equilíbrio termodinâmico, a extensão do formalismo como comentado acima tem sido amplamente empregada na literatura. No entanto, a base deste formalismo ainda são funcionais geradores definidos como amplitudes de transição entre estados de equilíbrio entre o passado remoto e o futuro distante. Mas, para um problema cujo estado final não é a priori conhecido, como é o caso dos fenômenos fora do equilíbrio, este formalismo tem dificuldades de ser aplicado. Portanto, uma outra formulação, que evita a estratégia *in-out* é mais conveniente para tratar problemas de não equilíbrio. A formulação *in-in* de Schwinger [9] é única neste aspecto. Este formalismo será discutido na próxima Seção.

3.3 Formalismo de tempo real *in-in*

A idéia deste formalismo está baseada num contorno como ilustrado na Fig. 3.1. Este contorno justamente exclui o desconhecimento acerca do estado final do sistema com o qual estaremos trabalhando. Assim, ocorre uma desfragmentação do contorno de integração, ou seja, o mesmo é dividido em dois segmentos. Logo, não importa qual será o estado do sistema no tempo $t = +\infty$, pois os funcionais geradores de funções de Green referem-se apenas ao estado no passado remoto. A aplicação deste formalismo será discutida nesta Seção no contexto da teoria de um campo escalar real.

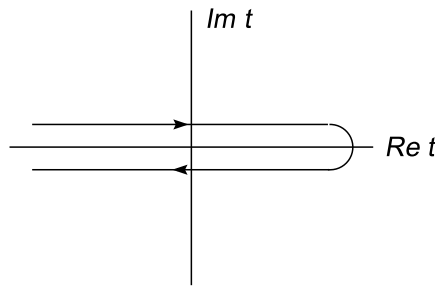


Figura 3.1: Contorno de integração de Schwinger.

Denotaremos o contorno de $-\infty$ até $+\infty$ por C_+ e o contorno de $+\infty$ até $-\infty$, por C_- . Estes segmentos, C_+ e C_- , definem um contorno fechado no plano complexo. É por esse motivo que é comum referir-se a este como formalismo de tempo real no contorno fechado. A integração ao longo deste contorno pode ser escrita como:

$$\int_C dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt^+ - \int_{-\infty}^{+\infty} dt^-, \quad (3.32)$$

e o gerador funcional é dado por:

$$\begin{aligned} Z[J^+, J^-] &= \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\phi^+, \phi^-] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x J^+(x) \phi^+(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x J^-(x) \phi^-(x) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} W[J^+, J^-] \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde $W[J]$ é o gerador funcional das funções de Green conexas. De acordo com esta expressão, ocorre uma duplicação natural dos graus de liberdade do sistema,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Esta duplicação pode ser entendida da seguinte maneira. A temperatura finita, os sistemas consistem de duas partes: o sistema quântico propriamente dito e o banho térmico. Ou seja, a duplicação dos graus de liberdade representa simplesmente este aspecto da teoria. Logo, esta duplicação é necessária para que o próprio formalismo seja auto-consistente.

As funções de Green podem ser obtidas a partir da diferenciação do gerador funcional com respeito as fontes. Porém, como temos dois segmentos que compõem o contorno de integração, as fontes existentes em cada um deles não precisam necessariamente coincidir, e é desta forma que as consideraremos, ou seja, como sendo fontes distintas para os contornos distintos. Logo, três novos propagadores (não físicos) surgirão (os quais denotaremos por G^{+-} , G^{-+} e G^{--}) e os definiremos como ($a, b = +, -$)

$$G^{ab}(x-y) = -i \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_a(x) \delta J_b(y)} \Big|_{J=0}. \quad (3.35)$$

Esta idéia de um contorno fechado de integração e duplicação de graus de liberdade não é totalmente nova, uma vez que ela está presente no formalismo usual em termos de matrizes densidade. Nesta, a evolução do sistema de interesse é dada por uma equação de movimento que, na descrição de Schrödinger, apresenta a seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)], \quad (3.36)$$

onde $\hat{\rho}(t)$ é o operador densidade. Se o Hamiltoniano do sistema (não) comuta com o operador densidade, então estamos diante de uma situação de (não) equilíbrio. A solução da equação de movimento é dada por

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^{-1}(t, t_0). \quad (3.37)$$

As médias dos operadores e as funções de correlação são obtidas a partir da matriz densidade de maneira usual

$$\begin{aligned} \langle \hat{h}(t) \rangle &= \frac{1}{\hat{\rho}(t_0)} \text{tr} [\hat{h}(t) \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^{-1}(t, t_0)] \\ \langle \hat{h}(t_1) \hat{h}(t_2) \rangle &= \frac{1}{\hat{\rho}(t_0)} \text{tr} [\hat{h} \hat{U}(t_1, t_2) \hat{h} \hat{U}(t_2, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^{-1}(t_1, t_0)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esta expressão pode ser interpretada da seguinte maneira: vamos supor que $t_1 > t_2 > t_0$. Então, inicialmente, evoluímos o sistema de t_0 até t_2 , inserimos o operador em questão, evoluímos o sistema até t_1 , inserimos o segundo operador e, por fim, retornamos o sistema para o seu estado inicial em t_0 . Isto é necessário devido ao traço que está sendo feito, que impõe que os estados iniciais e finais sejam iguais.

3.4 Ação efetiva em ordem \hbar (1-loop)

Para calcularmos a ação efetiva faremos uso de uma expansão em potências de \hbar . Este método consiste do seguinte: primeiro somamos todos os gráficos da teoria que não contêm loops (gráficos a nível de árvore); após, adicionamos aqueles que contêm apenas um loop; depois, aqueles que contêm dois loops, e assim sucessivamente.

Vamos mostrar que a expansão em loop é equivalente a uma expansão em série de potências de \hbar . A cada vértice temos associado um fator \hbar^{-1} e a cada propagador, um fator \hbar . Então, seja P a potência de \hbar associada com um determinado gráfico; I , o número de linhas internas (propagadores) neste (consideramos gráficos amputados, assim, linhas externas não contribuem para P) e V , o número de vértices

$$P = I - V, \quad (3.39)$$

Por outro lado, o número de loops (L) em um diagrama é igual ao número de momentos de integração independentes. Cada linha interna I contribui com um momento de integração. Porém, a cada vértice (V), há uma função delta presente devido a conservação de momento neste, o que reduz de um o número de momentos independentes, a menos de uma função delta que garante a conservação de energia - momento total

$$L = I - V + 1. \quad (3.40)$$

Juntando as duas últimas expressões, provamos a asserção inicialmente feita

$$P = L - 1. \quad (3.41)$$

Na integração funcional, a expansão do gerador $W[J^+, J^-]$ em potências de \hbar corresponde a uma fase estacionária, obtida a partir de uma translação do campo de ϕ_0 , o qual satisfaz as equações clássicas de movimento

$$\left. \frac{\delta S[\phi^+, \phi^-]}{\delta \phi^+(x)} \right|_{\phi^+ = \phi_0^+} = 0, \quad \left. \frac{\delta S[\phi^+, \phi^-]}{\delta \phi^-(x)} \right|_{\phi^- = \phi_0^-} = 0. \quad (3.42)$$

Porém, na presença de fonte externa, obtemos

$$\left. \frac{\delta S[\phi^+, \phi^-]}{\delta \phi^+(x)} \right|_{\phi^+ = \phi_0^+} = -J^+(x), \quad \left. \frac{\delta S[\phi^+, \phi^-]}{\delta \phi^-(x)} \right|_{\phi^- = \phi_0^-} = J^-(x). \quad (3.43)$$

Esta expressão define ϕ_0 como funcional de J . A translação do campo a que nos referimos anteriormente é dada por

$$\begin{aligned} \phi^+(x) &\rightarrow \phi'^+(x) = \phi^+(x) - \phi_0^+(x), \\ \phi^-(x) &\rightarrow \phi'^-(x) = \phi^-(x) - \phi_0^-(x). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Com esta translação, o gerador funcional pode ser re-escrito da seguinte maneira (por simplicidade de notação, escreveremos ϕ' apenas como ϕ)

$$\begin{aligned} Z[J^+, J^-] &= \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\phi^+(x) + \phi_0^+(x), \phi^-(x) + \phi_0^-(x)] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \left[J^+(x) [\phi^+(x) + \phi_0^+(x)] - J^-(x) [\phi^-(x) + \phi_0^-(x)] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Vamos expandir a ação em torno do ponto $\phi^+ = 0 = \phi^-$ e utilizar o resultado apresentado na Eq.(3.43)

$$\begin{aligned} S[\phi^+ + \phi_0^+, \phi^- + \phi_0^-] &= S[\phi_0^+, \phi_0^-] - \int d^4x J^+(x) \phi^+(x) + \int d^4x J^-(x) \phi^-(x) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi^a(x) \left(\frac{\delta^2 S^{ab}[\phi^+, \phi^-]}{\delta\phi^a(x) \delta\phi^b(y)} \Big|_{\phi=0} \right) \phi^b(y), \end{aligned} \quad (3.46)$$

nesta expansão está implícita uma soma sobre a e b , onde $a, b = +, -$. Vamos fazer a seguinte definição

$$\frac{\delta^2 S^{ab}[\phi^+, \phi^-]}{\delta\phi^a(x) \delta\phi^b(y)} \Big|_{\phi=0} \equiv S_2^{ab}[\phi_0^+, \phi_0^-] = [G^{ab}(x-y)]^{-1} - \frac{\lambda}{2} [\phi_0^+(x)]^2 + \frac{\lambda}{2} [\phi_0^-(x)]^2. \quad (3.47)$$

onde $[G^{ab}(x-y)]^{-1}$ é o inverso dos propagadores livres correspondentes a esta teoria. Logo,

$$\begin{aligned} Z[J^+, J^-] &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S[\phi_0^+, \phi_0^-] + \int d^4x J^+(x) \phi_0^+(x) - \int d^4x J^-(x) \phi_0^-(x) \right] \right\} \\ &\times \int \mathcal{D}\phi^+ \int \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \phi^a(x) S_2^{ab}[\phi_0^+, \phi_0^-] \phi^b(y) \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Exponenciando o lado direito desta expressão,

$$\begin{aligned} Z[J^+, J^-] &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S[\phi_0^+, \phi_0^-] + \int d^4x J^+(x) \phi_0^+(x) - \int d^4x J^-(x) \phi_0^-(x) \right. \right. \\ &\left. \left. - i\hbar \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \int \mathcal{D}\phi^- \exp \left(\frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \phi^a(x) S_2^{ab}[\phi_0^+, \phi_0^-] \phi^b(y) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

logo, a 1-loop, $\mathcal{O}(\hbar)$, o gerador funcional das funções de Green conexas pode ser escrito como

$$\begin{aligned} W[J^+, J^-] &= S[\phi_0^+, \phi_0^-] + \int d^4x J^+(x) \phi_0^+(x) - \int d^4x J^-(x) \phi_0^-(x) \\ &- i\hbar \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \int \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \phi^a(x) S_2^{ab}[\phi_0^+, \phi_0^-] \phi^b(y) \right\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para obtermos a expansão da ação efetiva, $\Gamma[\varphi^+, \varphi^-]$, devemos proceder a uma transformada de Legendre. Se \hbar fosse zero, a Eq.(3.50) seria dada por

$$W[J^+, J^-] = S[\phi_0^+, \phi_0^-] + \int d^4x J^+(x) \phi_0^+(x) - \int d^4x J^-(x) \phi_0^-(x), \quad (3.51)$$

logo, podemos calcular as derivadas desta expressão em termos das fontes J^+ e J^-

$$\begin{aligned} \frac{\delta W[J^+, J^-]}{\delta J^\pm(x)} &= \int d^4y \left\{ \frac{\delta S[\phi_0^+, \phi_0^-]}{\delta \phi_0^\pm(y)} \frac{\delta \phi_0^\pm(y)}{\delta J^\pm(x)} \pm \frac{\delta J^\pm(y)}{\delta J^\pm(x)} \phi_0^\pm(y) \pm J^\pm(y) \frac{\delta \phi_0^\pm(y)}{\delta J^\pm(x)} \right\} \\ \frac{\delta W[J^+, J^-]}{\delta J^+(x)} &= \phi_0^+(x) \quad \text{e} \quad \frac{\delta W[J^+, J^-]}{\delta J^-(x)} = -\phi_0^-(x). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Porém, como $\hbar \neq 0$, podemos escrever que

$$\frac{\delta W[J^+, J^-]}{\delta J^+(x)} = \varphi^+(x), \quad \varphi^+(x) = \phi_0^+(x) - \phi_1^+(x), \quad (3.53)$$

e

$$\frac{\delta W[J^+, J^-]}{\delta J^-(x)} = -\varphi^-(x), \quad \varphi^-(x) = \phi_0^-(x) - \phi_1^-(x). \quad (3.54)$$

Os campos $\phi_1^+(x)$ e $\phi_1^-(x)$ são funcionais, respectivamente, de $\varphi^+(x)$ e $\varphi^-(x)$, de ordem \hbar . A fim de obtermos $\Gamma[\varphi^+, \varphi^-]$, as fontes J^+ e J^- devem ser eliminadas em favor de $\varphi^+(x)$ e $\varphi^-(x)$. A Eq.(3.50) mostra que $W[J^+, J^-]$ depende implicitamente de J^+ e J^- através de $\phi_0^+(x)$ e $\phi_0^-(x)$ e explicitamente apenas no segundo e no terceiro termos. O quarto termo desta expressão é um funcional apenas dos campos $\phi_0^+(x)$ e $\phi_0^-(x)$. Além disso, a Eq.(3.43) pode ser tomada como definindo as fontes J^+ e J^- como sendo funcionais de $\phi_0^+(x)$ e de $\phi_0^-(x)$, ao invés do contrário, o que podemos explicitar escrevendo $J^+(\phi_0^+)$ e $J^-(\phi_0^-)$ - o que consiste basicamente em uma transformada de Legendre. Assim, a tarefa de se eliminar as fontes J^+ e J^- em favor dos campos φ^+ e φ^- na Eq.(3.50) torna-se equivalente a eliminarmos os campos ϕ_0^+ e ϕ_0^- em favor dos campos φ^+ e φ^- , o que pode ser feito com o auxílio das Eq.(3.53) e Eq.(3.54). Logo, a ação efetiva pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= W[J^+, J^-] - \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x J^+(x) \varphi^+(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x J^-(x) \varphi^-(x) \\ &= S[\varphi^+ + \phi_1^+, \varphi^- + \phi_1^-] + \int d^4x \phi_1^+(x) J^+(\varphi^+ + \phi_1^+) \\ &\quad - \int d^4x \phi_1^-(x) J^-(\varphi^- + \phi_1^-) + \Gamma_1[\varphi^+ + \phi_1^+; \varphi^- + \phi_1^-], \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1[\varphi^+ + \phi_1^+; \varphi^- + \phi_1^-] &= -i\hbar \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \int \mathcal{D}\phi^- \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \phi^a(x) S_2^{ab}[\phi_0^+, \phi_0^-] \phi^b(y) \right\} \Big|_{\phi_0 = \varphi + \phi_1}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Vamos expandir cada termo da Eq.(3.55) em torno da configuração de campo $\phi_1 = 0$ e manter os termos da expansão até ordem \hbar (1-loop)

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= S[\varphi^+(x), \varphi^-(x)] - i\hbar \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \int \mathcal{D}\phi^- \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \phi^a(x) S_2^{ab}[\varphi^+, \varphi^-] \phi^b(y) \right\} + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Separando os termos livres de interação dos termos interagentes em $S_2^{ab}[\varphi^+, \varphi^-]$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= S[\varphi^+(x), \varphi^-(x)] - i\hbar \ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \right. \\ &\times \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \phi^a(x) [G^{-1}(x-y)]^{ab} \phi^b(y) \right] \\ &\times \left. \exp \left[\frac{i\lambda}{4\hbar} \int d^4x \left(-\phi^+(x) [\varphi^+(x)]^2 \phi^+(x) + \phi^-(x) [\varphi^-(x)]^2 \phi^-(x) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

Como o parâmetro λ presente na expressão acima é pequeno, podemos fazer a expansão da exponencial, dando origem a

$$\begin{aligned} &\exp \left[\frac{i\lambda}{4\hbar} \int d^4x \left(-\phi^+(x) [\varphi^+(x)]^2 \phi^+(x) + \phi^-(x) [\varphi^-(x)]^2 \phi^-(x) \right) \right] \\ &\simeq 1 + \frac{i\lambda}{4\hbar} \int d^4x \left(-\phi^+(x) [\varphi^+(x)]^2 \phi^+(x) + \phi^-(x) [\varphi^-(x)]^2 \phi^-(x) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{i\lambda}{4\hbar} \right)^2 \int d^4x d^4y \left(-\phi^+(x) [\varphi^+(x)]^2 \phi^+(x) + \phi^-(x) [\varphi^-(x)]^2 \phi^-(x) \right) \\ &\times \left(-\phi^+(y) [\varphi^+(y)]^2 \phi^+(y) + \phi^-(y) [\varphi^-(y)]^2 \phi^-(y) \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Definiremos uma nova quantidade, $\exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right\}$, da seguinte forma:

$$\exp \left[\frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y \phi^a(x) [G^{-1}(x-y)]^{ab} \phi^b(y) \right] \equiv \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right\}. \quad (3.60)$$

Inserindo esta definição na expressão para a ação efetiva, usando a propriedade distributiva da multiplicação e evidenciando o termo $\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right\}$, chegamos a

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= S[\varphi^+(x), \varphi^-(x)] - i\hbar \ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left(\frac{i}{2\hbar} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right) \right. \\ &\times \left. \left[1 - \frac{i\lambda}{4\hbar} \int d^4x \varphi^+(x)^2 \frac{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left(\frac{i}{2\hbar} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right) \phi^+(x) \phi^+(x)}{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left(\frac{i}{2\hbar} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i\lambda}{4\hbar} \int d^4x \varphi^-(x)^2 \frac{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right) \phi^-(x)\phi^-(x)}{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right)} \\
 & - \frac{\lambda^2}{32\hbar^2} \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 \varphi^-(y)^2 \\
 & \quad \times \frac{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right) \phi^-(x)\phi^-(x)\phi^-(y)\phi^-(y)}{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right)} \\
 & - \frac{\lambda^2}{32\hbar^2} \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 \varphi^+(y)^2 \\
 & \quad \times \frac{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right) \phi^+(x)\phi^+(x)\phi^+(y)\phi^+(y)}{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right)} \\
 & + \frac{\lambda^2}{32\hbar^2} \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 \varphi^+(y)^2 \\
 & \quad \times \frac{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right) \phi^-(x)\phi^-(x)\phi^+(y)\phi^+(y)}{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right)} \\
 & + \frac{\lambda^2}{32\hbar^2} \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 \varphi^-(y)^2 \\
 & \quad \times \frac{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right) \phi^+(x)\phi^+(x)\phi^-(y)\phi^-(y)}{\int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right)} \Bigg\}. \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

Tomando $\hbar = 1$ e usando a propriedade $\ln(AB) = \ln A + \ln B$, podemos re-escrever a expressão acima da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] & = S[\varphi^+(x), \varphi^-(x)] - i\ln \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp\left\{\frac{i}{2}\Delta[\phi^+, \phi^-]\right\} \\
 & - i\ln \left[1 - \frac{i\lambda}{4} \int d^4x \left\{\varphi^+(x)^2 \langle \phi^+(x)\phi^+(x) \rangle - \varphi^-(x)^2 \langle \phi^-(x)\phi^-(x) \rangle\right\}\right. \\
 & - \frac{\lambda^2}{32} \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 \varphi^-(y)^2 \langle \phi^-(x)\phi^-(x)\phi^-(y)\phi^-(y) \rangle \\
 & - \frac{\lambda^2}{32} \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 \varphi^+(y)^2 \langle \phi^+(x)\phi^+(x)\phi^+(y)\phi^+(y) \rangle \\
 & + \frac{\lambda^2}{32} \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 \varphi^+(y)^2 \langle \phi^-(x)\phi^-(x)\phi^+(y)\phi^+(y) \rangle \\
 & \left. + \frac{\lambda^2}{32} \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 \varphi^-(y)^2 \langle \phi^+(x)\phi^+(x)\phi^-(y)\phi^-(y) \rangle\right]. \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

Com o auxílio do teorema de Wick, podemos re-escrever os valores esperados para os campos ϕ^+ e ϕ^- presentes na expressão acima em termos de funções de Green de dois pontos. Sabemos que

$$G^{++}(x-y) = i \langle T_+[\phi_+(x)\phi_+(y)] \rangle,$$

$$\begin{aligned}
 G^{--}(x-y) &= i \langle T_- [\phi(x)_- \phi_-(y)] \rangle, \\
 G^{+-}(x-y) &= i \langle \phi_-(y) \phi_+(x) \rangle, \\
 G^{-+}(x-y) &= i \langle \phi_-(x) \phi_+(y) \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Com isto, a expressão para a ação efetiva pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= S[\varphi^+(x), \varphi^-(x)] - i \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{2} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right\} \\
 &- i \ln \left[1 - \left(\frac{i\lambda}{4} \right) (-i) \int d^4x \varphi^+(x)^2 G^{++}(x-x) \right. \\
 &+ \left(\frac{i\lambda}{4} \right) (-i) \int d^4x \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-x) \\
 &- \frac{\lambda^2}{32} (-i)^2 \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-x) G^{--}(y-y) \varphi^-(y)^2 \\
 &- \frac{\lambda^2}{16} (-i)^2 \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-y) G^{--}(x-y) \varphi^-(y)^2 \\
 &- \frac{\lambda^2}{32} (-i)^2 \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 G^{++}(x-x) G^{++}(y-y) \varphi^+(y)^2 \\
 &- \frac{\lambda^2}{16} (-i)^2 \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 G^{++}(x-y) G^{++}(x-y) \varphi^+(y)^2 \\
 &+ \frac{\lambda^2}{32} (-i)^2 \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-x) G^{++}(y-y) \varphi^+(y)^2 \\
 &+ \frac{\lambda^2}{16} (-i)^2 \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 G^{-+}(x-y) G^{-+}(x-y) \varphi^+(y)^2 \\
 &+ \frac{\lambda^2}{32} (-i)^2 \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 G^{++}(x-x) G^{--}(y-y) \varphi^-(y)^2 \\
 &\left. + \frac{\lambda^2}{16} (-i)^2 \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 G^{+-}(x-y) G^{+-}(x-y) \varphi^-(y)^2 \right] \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Como o parâmetro λ é pequeno, fazendo uso da expansão do logaritmo

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \dots, \tag{3.65}$$

na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= S[\varphi^+(x), \varphi^-(x)] - i \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{2} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right\} \\
 &- i \left[- \left(\frac{\lambda}{4} \right) \int d^4x \left\{ \varphi^+(x)^2 G^{++}(x-x) - \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-x) \right\} \right. \\
 &+ \frac{\lambda^2}{32} \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-x) G^{--}(y-y) \varphi^-(y)^2 \\
 &+ \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-y) G^{--}(x-y) \varphi^-(y)^2 \\
 &\left. + \frac{\lambda^2}{32} \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 G^{++}(x-x) G^{++}(y-y) \varphi^+(y)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 G^{++}(x-y) G^{++}(x-y) \varphi^+(y)^2 \\
 & - \frac{\lambda^2}{32} \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-x) G^{++}(y-y) \varphi^+(y)^2 \\
 & - \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-y) G^{--}(x-y) \varphi^+(y)^2 \\
 & - \frac{\lambda^2}{32} \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 G^{++}(x-x) G^{--}(y-y) \varphi^-(y)^2 \\
 & - \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \varphi^+(x)^2 G^{+-}(x-y) G^{+-}(x-y) \varphi^-(y)^2 \\
 & - \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda}{4} \right)^2 \int d^4x d^4y \left(\varphi^+(x)^2 G^{++}(x-x) - \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-x) \right) \\
 & \quad \times \left(\varphi^+(y)^2 G^{++}(y-y) - \varphi^-(y)^2 G^{--}(y-y) \right) \Big].
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Portanto, após cancelarmos alguns termos e rearranjarmos os termos restantes, levando em conta que o campo φ^+ vive apenas no ramo superior do contorno e que o campo φ^- vive apenas no ramo inferior, obtemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= S[\varphi^+(x)] - S[\varphi^-(x)] - i \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{2} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right\} \\
 & + \frac{i\lambda}{4} \int d^4x \left[\varphi^+(x)^2 G^{++}(0) - \varphi^-(x)^2 G^{--}(0) \right] \\
 & - \frac{i\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \left(\varphi^+(x)^2 G^{++}(x-y) G^{++}(x-y) \varphi^+(y)^2 \right. \\
 & - \varphi^+(x)^2 G^{+-}(x-y) G^{+-}(x-y) \varphi^-(y)^2 \\
 & - \varphi^-(x)^2 G^{-+}(x-y) G^{-+}(x-y) \varphi^+(y)^2 \\
 & \left. + \varphi^-(x)^2 G^{--}(x-y) G^{--}(x-y) \varphi^-(y)^2 \right).
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

A transformada de Fourier da função $G(x-y)$ é definida por

$$G(x-y) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \begin{pmatrix} G^{++}(\vec{k}, t_x - t_y) & G^{+-}(\vec{k}, t_x - t_y) \\ G^{-+}(\vec{k}, t_x - t_y) & G^{--}(\vec{k}, t_x - t_y) \end{pmatrix}. \tag{3.68}$$

Inserindo esta definição na expressão para a ação efetiva, chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= S[\varphi^+(x)] - S[\varphi^-(x)] - i \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{2} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right\} \\
 & - \frac{\lambda}{4} \int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\varphi^+(x)^2 G^{++}(\vec{k}, 0) - \varphi^-(x)^2 G^{--}(\vec{k}, 0) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}+\vec{q})\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \\
 & \times \left(\varphi^+(x)^2 G^{++}(\vec{k}, t_x - t_y) G^{++}(\vec{q}, t_x - t_y) \varphi^+(y)^2 \right. \\
 & - \varphi^+(x)^2 G^{+-}(\vec{k}, t_x - t_y) G^{+-}(\vec{q}, t_x - t_y) \varphi^-(y)^2 \\
 & - \varphi^-(x)^2 G^{-+}(\vec{k}, t_x - t_y) G^{-+}(\vec{q}, t_x - t_y) \varphi^+(y)^2 \\
 & \left. + \varphi^-(x)^2 G^{--}(\vec{k}, t_x - t_y) G^{--}(\vec{q}, t_x - t_y) \varphi^-(y)^2 \right), \tag{3.69}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 G^{++}(\mathbf{k}, t_x - t_y) &= G^>(\mathbf{k}, t_x - t_y) \theta(t_x - t_y) + G^<(\mathbf{k}, t_x - t_y) \theta(t_y - t_x), \\
 G^{--}(\mathbf{k}, t_x - t_y) &= G^>(\mathbf{k}, t_x - t_y) \theta_c(t_y - t_x) + G^<(\mathbf{k}, t_x - t_y) \theta(t_x - t_y), \\
 G^{+-}(\mathbf{k}, t_x - t_y) &= G^<(\mathbf{k}, t_x - t_y), \\
 G^{-+}(\mathbf{k}, t_x - t_y) &= G^>(\mathbf{k}, t_x - t_y). \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

A seguir, usaremos a identidade

$$\theta(t_x - t_y) + \theta(t_y - t_x) = 1, \tag{3.71}$$

e mostraremos, no Apêndice E, que

$$G^{-+}(\vec{k}; t_x - t_y) = \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left\{ [1 + 2n(\omega_{\vec{k}})] \cos[\omega_{\vec{k}}(t_x - t_y)] - i \sin[\omega_{\vec{k}}(t_x - t_y)] \right\}. \tag{3.72}$$

Logo, com o auxílio deste resultado e das demais expressões para os propagadores $G^{++}(\vec{k}; t_x - t_y)$, $G^{+-}(\vec{k}; t_x - t_y)$ e $G^{--}(\vec{k}; t_x - t_y)$ igualmente obtidas no Apêndice E, concluímos que estes propagadores em tempo real consistem da soma de duas partes: uma delas sendo a expressão para o propagador a temperatura zero e outra parte dependente explicitamente da temperatura - a qual é a mesma para todos os propagadores. Observação: no Apêndice D será demonstrada a representação integral da função teta, a qual é utilizada em vários cálculos, e que será necessária para os cálculos que serão desenvolvidos no Apêndice E. Substituindo os resultados obtidos no Apêndice E na expressão para a ação efetiva, Eq.(3.69), obtemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi^+, \varphi^-] &= S[\varphi^+(x)] - S[\varphi^-(x)] - i \ln \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- \exp \left\{ \frac{i}{2} \Delta[\phi^+, \phi^-] \right\} \\
 &- \frac{\lambda}{4} \int d^4x \left[\varphi^+(x)^2 - \varphi^-(x)^2 \right] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} [1 + 2n(\omega_{\vec{k}})] \\
 &+ i \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\varphi^+(x)^2 G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t_x - t_y) \varphi^+(y)^2 \right. \\
 & - \varphi^+(x)^2 G^{+-}(\mathbf{q}, t_x - t_y) G^{+-}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t_x - t_y) \varphi^-(y)^2 \\
 & - \varphi^-(x)^2 G^{-+}(\mathbf{q}, t_x - t_y) G^{-+}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t_x - t_y) \varphi^+(y)^2 \\
 & \left. + \varphi^-(x)^2 G^{--}(\mathbf{q}, t_x - t_y) G^{--}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t_x - t_y) \varphi^-(y)^2 \right), \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

onde fizemos uma troca de variáveis para escrever um dos propagadores em termos da diferença dos momentos. Em seguida, vamos re-escrever as variáveis de campo φ^+ e φ^- em termos de outras duas variáveis, φ_c e φ_Δ . Este procedimento é conhecido como rotação de Keldysh. Esta rotação é equivalente a considerar estas novas variáveis φ_c e φ_Δ como sendo, respectivamente, as coordenadas do “centro de massa” e “coordenadas relativas” dos campos [28]

$$\varphi^+ = \frac{1}{2} \varphi_\Delta + \varphi_c, \quad \varphi^- = \varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_\Delta. \quad (3.74)$$

A partir deste instante, desconsideraremos o termo presente na expressão para a ação efetiva, expressão (3.73), que é dependente apenas dos campos ϕ^+ e ϕ^- , pois este termo não contribuirá para a equação de movimento do campo φ_c . Logo

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= S \left[\frac{1}{2} \varphi_\Delta + \varphi_c \right] - S \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_\Delta \right] \\
 &- \frac{\lambda}{4} \int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \left\{ \left[\frac{1}{2} \varphi_\Delta + \varphi_c \right]_x^2 - \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_\Delta \right]_x^2 \right\} \\
 &+ i \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\
 &\times \left\{ \left[\frac{1}{2} \varphi_\Delta + \varphi_c \right]_x^2 G^{++}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{2} \varphi_\Delta + \varphi_c \right]_y^2 \right. \\
 &- \left[\frac{1}{2} \varphi_\Delta + \varphi_c \right]_x^2 G^{+-}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{+-}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_\Delta \right]_y^2 \\
 &- \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_\Delta \right]_x^2 G^{-+}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{-+}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{2} \varphi_\Delta + \varphi_c \right]_y^2 \\
 &\left. + \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_\Delta \right]_x^2 G^{--}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{--}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_\Delta \right]_y^2 \right\}. \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

No Apêndice F estarão desenvolvidos explicitamente os cálculos de cada termo desta expressão. Aqui, escreveremos apenas a expressão resultante (vamos fazer uma troca de variáveis: $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{k}$)

$$\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] = \int d^4x \left\{ \varphi_\Delta(x) \left[-(\partial_\mu)^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_k)}{2\omega_k} \right] \varphi_c(x) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\lambda}{4!} \left[4 \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c^3(x) + \varphi_{\Delta}^3(x) \varphi_c(x) \right] \Big\} \\
 & + i \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\
 & \left\{ \frac{1}{2} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \left[\frac{-4i \theta(\tau)}{4\omega_q \omega_p} \left((1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left. (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p \tau) \sin(\omega_q \tau) \right) \right] \varphi_{\Delta}^2(y) \right. \\
 & + \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \left[\frac{4}{4\omega_q \omega_p} \left((1 + 2n(\omega_q)) (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_q \tau) \cos(\omega_p \tau) \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left. \sin(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right) \right] \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \right. \\
 & + 2 \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \left[\frac{-4i \theta(\tau)}{4\omega_q \omega_p} \left((1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p \tau) \sin(\omega_q \tau) \right) \right] \varphi_c^2(y) \Big\}. \tag{3.76}
 \end{aligned}$$

Vamos re-escrever esta expressão em termos do propagador físico. Para isso, vamos explicitar a expressão para $G^{++}(\mathbf{q}, \tau = t_x - t_y)$

$$\begin{aligned}
 & G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{p}, \tau) = [G^{>}(\mathbf{q}, \tau) \theta(\tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) \theta(-\tau)] \\
 & \times [G^{>}(\mathbf{p}, \tau) \theta(\tau) + G^{<}(\mathbf{p}, \tau) \theta(-\tau)] \\
 & = G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) \theta(\tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) [1 - \theta(\tau)] \\
 & = \frac{1}{4\omega_q \omega_p} \left\{ \theta(\tau) \left[(1 + 2n(\omega_q)) (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_q \tau) \cos(\omega_p \tau) \right. \right. \\
 & - i(1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) - i(1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p \tau) \sin(\omega_q \tau) \\
 & \left. \left. - \sin(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right] \right. \\
 & + [1 - \theta(\tau)] \left[(1 + 2n(\omega_q)) (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_q \tau) \cos(\omega_p \tau) \right. \\
 & + i(1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) + i(1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p \tau) \sin(\omega_q \tau) \\
 & \left. \left. - \sin(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right] \right\} \\
 & = \frac{1}{4\omega_q \omega_p} \left[(1 + 2n(\omega_q)) (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_q \tau) \cos(\omega_p \tau) \right. \\
 & + i(1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) + i(1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p \tau) \sin(\omega_q \tau) \\
 & \left. - \sin(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right] \\
 & - \frac{2i\theta(\tau)}{4\omega_q \omega_p} \left[(1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) + (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p \tau) \sin(\omega_q \tau) \right].
 \end{aligned}$$

As partes real e imaginária desta expressão são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{p}, \tau) \right] &= \frac{1}{4\omega_q \omega_p} \left[(1 + 2n(\omega_q)) (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_q \tau) \cos(\omega_p \tau) \right. \\ &\quad \left. - \sin(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{p}, \tau) \right] &= [1 - 2\theta(\tau)] \left\{ \frac{1}{4\omega_q \omega_p} \left[(1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p \tau) \sin(\omega_q \tau) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{p}, \tau) \right] \theta(\tau) &= -\theta(\tau) \left\{ \frac{1}{4\omega_q \omega_p} \left[(1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q \tau) \sin(\omega_p \tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p \tau) \sin(\omega_q \tau) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Assim, finalmente chegamos a (vamos reescrever $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{k}$)

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \int d^4x \left\{ \varphi_\Delta(x) \left[-(\partial_\mu)^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_k)}{2\omega_k} \right] \varphi_c(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4!} [4\varphi_\Delta(x)\varphi_c^3(x) + \varphi_\Delta^3(x)\varphi_c(x)] \right\} \\ &\quad + i \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\ &\quad \left\{ \frac{1}{2} \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x) \left(4i \operatorname{Im} \left[G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \right] \theta(\tau) \right) \varphi_\Delta^2(y) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x) \left(4\operatorname{Re} \left[G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \right] \right) \varphi_\Delta(y)\varphi_c(y) \right. \\ &\quad \left. + 2\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x) \left(4i \operatorname{Im} \left[G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \right] \theta(\tau) \right) \varphi_c^2(y) \right\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Re-escrevendo os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \int d^4x \left\{ \varphi_\Delta(x) \left[-(\partial_\mu)^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_k)}{2\omega_k} \right] \varphi_c(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4!} [4\varphi_\Delta(x)\varphi_c^3(x) + \varphi_\Delta^3(x)\varphi_c(x)] \right\} \\ &\quad + \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left\{ -\frac{\lambda^2}{8} \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\varphi_\Delta^2(y) \right. \\ &\quad \left. + 4\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\varphi_c^2(y) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \operatorname{Im} \left[G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \right] \theta(\tau) \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\varphi_\Delta(y)\varphi_c(y) \operatorname{Re} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

O termo imaginário desta expressão será re-escrito associando este como sendo procedente de uma integração funcional sobre um campo de flutuação Gaussiano ξ (transformação de Hubbard-Stratonovich). Este campo pode ser interpretado como um campo clássico randômico Gaussiano e colorido [10]

$$\begin{aligned} & \int D\xi P[\xi] \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \\ &= \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \left[i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

e

$$P[\xi] = N^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \xi(x) \left(\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \right)^{-1} \xi(y) \right\}, \quad (3.83)$$

onde N^{-1} é um fator de normalização e simplificamos a notação escrevendo

$$[G^{++}]_{x,y}^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})] \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t_x - t_y). \quad (3.84)$$

A demonstração de que realmente podemos escrever o termo imaginário como resultado de uma integração Gaussiana será feita no Apêndice G. Logo, a ação efetiva é dada por

$$\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] = \text{Re}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] + \int d^4x d^4y \left[i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) \right], \quad (3.85)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Re}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \int d^4x \left\{ \varphi_\Delta(x) \left[-(\partial_\mu)^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_k)}{2\omega_k} \right] \varphi_c(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4!} [4\varphi_\Delta(x)\varphi_c^3(x) + \varphi_\Delta^3(x)\varphi_c(x)] \right\} \\ &\quad + \int d^4x d^4y \theta(t_x - t_y) \left\{ -\frac{\lambda^2}{8} [\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\varphi_\Delta^2(y) \right. \\ &\quad \left. + 4\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\varphi_c^2(y)] \text{Im} [G^{++}]_{x,y}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

O próximo passo consiste em usar a identidade

$$\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] = \frac{1}{i} \ln \exp \{ i \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] \} \quad (3.87)$$

para escrevermos a expressão da ação efetiva da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \frac{1}{i} \ln \exp \left\{ i \left[\text{Re} \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int d^4x d^4y \left(i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{i} \ln \left\{ \exp \{ i \text{Re} \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] \} \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left[i \int d^4x d^4y \left(i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Porém, conforme demonstrado no Apêndice G,

$$\begin{aligned}
 \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \left[i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) \right] \right\} \\
 = \int D\xi P[\xi] \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Portanto, a ação efetiva pode ser finalmente escrita como

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \frac{1}{i} \ln \int D\xi P[\xi] \exp \left\{ i \text{Re} \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] + i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \\
 &= \frac{1}{i} \ln \int D\xi P[\xi] \exp \{ i S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi] \}.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Ou seja,

$$S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi] = \text{Re} \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] + \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x). \tag{3.91}$$

A equação de movimento para o campo físico φ_c a 1-loop é obtida a partir da seguinte imposição

$$\left. \frac{\delta S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi]}{\delta \varphi_\Delta} \right|_{\varphi_\Delta=0} = 0 \tag{3.92}$$

Na próxima Seção vamos apresentar os resultados de diagramas de dois loops e ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$. A estratégia de cálculo é similar à apresentada com detalhe acima, apesar de mais trabalhosa. Neste caso não vamos apresentar detalhes, pois isto nos desviaria demais de nossos objetivos nesta Dissertação. Em particular, os processos de renormalização de divergências ultravioletas não serão mostrados, serão simplesmente apresentados os argumentos e resultados de Gleiser e Ramos [8].

3.5 Ação efetiva em ordem \hbar^2 (2-loop) e equação de Ginzburg-Landau-Langevin efetiva

As correções quânticas para a ação efetiva até dois *loops* e ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$ estão representadas Figura 3.2.

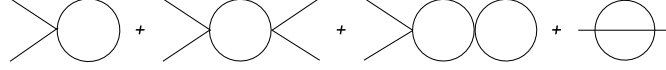


Figura 3.2: Correções quânticas para a ação efetiva até dois *loops* e ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$.

Com a inserção destes gráficos, a equação de movimento para o campo φ_c é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \left[(\partial_\mu)^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_k)}{2\omega_k} \right. \\ & \times \left. \left(1 + \lambda \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Im}[G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y)]^2 \right) \right] \varphi_c(x) + \frac{\lambda}{3!} \varphi_c^3(x) \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3y \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \varphi_c^2(y) \text{Im} [G^{++}]_{x,y}^2 \\ & + (2\pi)^3 \frac{\lambda^2}{3} \int d^3y \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \varphi_c(y) \text{Im} [G^{++}]_{x,y}^3 = \varphi_c(x) \xi_1(x) + \xi_2(x), \quad (3.93) \end{aligned}$$

onde, para simplicidade de notação, escrevemos

$$[G^{++}]_{x,y}^3 = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3q_j}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}_j, t_x - t_y) \right] \delta(\vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3), \quad (3.94)$$

e

$$[G^{++}]_{x,y}^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t_x - t_y). \quad (3.95)$$

A equação de movimento do tipo de Ginzburg-Landau-Langevin (que pode ser usada apenas para descrever a dinâmica de não equilíbrio de campos que variam lentamente em situações próximas ao equilíbrio), pode ser obtida a partir de uma série de aproximações feitas na Eq.(3.93). Para iniciarmos estas aproximações, trabalharemos com o termo dependente de $[G^{++}]_{x,y}^2$. Se considerarmos apenas contribuições com momento externo nulo ($\mathbf{k} = 0$), conforme é normalmente feito no cálculo do potencial efetivo, podemos controlar a não-localidade espacial desta expressão, ou seja, consideraremos apenas campos espacialmente homogêneos. Assim

$$\frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3y \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \varphi_c^2(y) \text{Im} [G^{++}]_{x,y}^2 = \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3y \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \varphi_c^2(y)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t_x - t_y) \\
 & = \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int_{-\infty}^{t_x} dt_y [\varphi_c^2(\mathbf{x}, t_y) - \varphi_c^2(\mathbf{x}, t_x)] \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y)]^2 \\
 & + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(x) \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y)]^2, \tag{3.96}
 \end{aligned}$$

onde somamos e subtraímos o último termo do lado direito desta expressão. Porém, ainda temos não-localidade temporal presente. Se assumirmos que o campo φ_c varia pouco com o tempo (ou seja, para sistemas próximos ao equilíbrio - aproximação quase-adiabática [11]), podemos expandir $\varphi_c^2(\mathbf{x}, t_y)$ em torno de t_x até primeira ordem em t

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 y \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \varphi_c^2(y) \text{Im} [G^{++}]_{x,y}^2 \\
 & = \lambda^2 \varphi_c^2(x) \dot{\varphi}_c(x) \int_{-\infty}^{t_x} dt_y (t_y - t_x) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y)]^2 \\
 & + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(x) \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y)]^2. \tag{3.97}
 \end{aligned}$$

O primeiro termo desta expressão estará associado ao campo de flutuação ξ_1 e o segundo termo é a correção de um *loop* a temperatura finita para o vértice. Repetindo estes procedimentos feitos para não-localidade espacial e temporal para o termo relacionado a $[G^{++}]_{x,y}^3$, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda^2}{3} \int d^3 y \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \varphi_c(y) \text{Im} [G^{++}]_{x,y}^3 = \frac{\lambda^2}{3} \int d^3 y \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \varphi_c(y) \\
 & \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \text{Im} \left[\int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}_j, t_x - t_y) \right] \delta(\vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3) \\
 & = \frac{\lambda^2}{3} \int_{-\infty}^{t_x} dt_y [\varphi_c(\vec{x}, t_y) - \varphi_c(\vec{x}, t_x)] \\
 & \times \text{Im} \left[\int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}_j, t_x - t_y) \right] \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \\
 & + \frac{\lambda^2}{3} \varphi_c(x) \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \text{Im} \left[\int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}_j, t_x - t_y) \right] \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \\
 & = \frac{\lambda^2}{3} \dot{\varphi}_c(x) \int_{-\infty}^{t_x} dt_y (t_y - t_x) \text{Im} \left[\int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}_j, t_x - t_y) \right] \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \\
 & + \frac{\lambda^2}{3} \varphi_c(x) \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \text{Im} \left[\int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}_j, t_x - t_y) \right] \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3). \tag{3.98}
 \end{aligned}$$

Vamos associar o primeiro termo desta expressão ao campo de flutuação ξ_2 , enquanto que o segundo termo desta representa a contribuição a dois *loops* a tempe-

ratura finita para a massa. Porém, conforme destacado na Ref.[8], se usarmos nas Eq.(3.97) e Eq.(3.98) a expressão para o propagador físico livre, obteremos, após a integração temporal, resultado nulo. Assim, é preciso inserir o propagador vestido, que apresenta correções de auto-energia, $\Sigma(q) = \text{Re}\Sigma(q) + i\text{Im}\Sigma(q)$. De acordo com a Ref.[8], devido ao termo imaginário presente na auto-energia, estas correções introduzem efeitos não triviais ao sistema (*damping*) e fazem com que a função espectral $\rho(\mathbf{q}, q_0)$ adquira uma largura finita, $\Gamma(q)$, o que gera contribuições finitas aos termos proporcionais a $\dot{\phi}_c$. Com a inserção do propagador vestido, a densidade de Lagrangeana deve ser alterada

$$\mathcal{L}[\phi] \rightarrow \mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} (m^2 + \Sigma) \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{1}{2} \Sigma \phi^2. \quad (3.99)$$

O termo $\frac{1}{2} (m^2 + \Sigma) \phi^2$ será tratado como parte do propagador de campo e o termo $\frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \frac{1}{2} \Sigma \phi^2$, como sendo o novo termo de interação. O propagador vestido pode ser escrito como

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{q^2 - m^2 - \Sigma(q) + i\varepsilon}, \quad (3.100)$$

e na Figura 3.3 estão representadas as contribuições para a auto-energia em termos de diagramas de Feynman

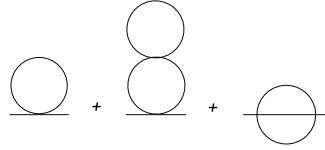


Figura 3.3: Contribuições para a auto-energia (correção para os propagadores) até dois *loops* e ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$.

De acordo com a Ref.[8], se tomarmos $\beta\Gamma \ll 1$ (consistente com escalas de tempo de relaxação curtas), poderemos re-escrever o propagador físico $G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y)$ da seguinte maneira

$$G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y) \simeq \frac{e^{-\Gamma(\mathbf{q})|t_x - t_y|}}{2\omega(\mathbf{q})} \left[(1 + 2n) \cos[\omega | t_x - t_y |] - i \sin[\omega | t_x - t_y |] + 2\beta\Gamma(\mathbf{q})n(1 + n) \sin[\omega | t_x - t_y |] + \mathcal{O}\left(\frac{\Gamma^2}{T^2}\right) \right]. \quad (3.101)$$

A largura de decaimento da função espectral (a função espectral é denotada por $\rho(\mathbf{q}, q_0)$ e apresenta um pico em $q_0 = \omega(q)$, $\Gamma \equiv \Gamma(q)$, é dada por

$$\Gamma(q) = -\frac{\text{Im}\Sigma(\mathbf{q}, \omega)}{2\omega(q)}, \quad (3.102)$$

onde $\omega^2(q) = \mathbf{q}^2 + m^2 + \text{Re}\Sigma(\mathbf{q}, \omega)$. A contribuição da parte imaginária da auto-energia é proveniente apenas do gráfico de Feynman apresentado na Figura 3.4. Na

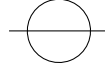


Figura 3.4: Gráfico que fornece a parte imaginária da auto-energia.

Eq.(3.101), as expressões para $\omega \equiv \omega(\mathbf{q})$ e $n(\omega)$ são escritas em termos da massa efetiva a temperatura finita, m_T , a qual, de acordo com a Ref.[8], pode ser escrita como

$$m_T^2 = m^2 + \text{Re}\Sigma(m_T) \xrightarrow{T \gg m} m^2 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} \right) - \frac{\lambda^2 T^3}{384\pi m} + \frac{\lambda^2 T^2}{192\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{T^2} \right) + \dots \quad (3.103)$$

Os gráficos que contribuem para a massa na equação de movimento efetiva estão representados na Figura 3.5.

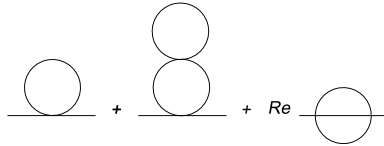


Figura 3.5: Gráficos que contribuem para a correção da massa.

O próximo passo seria expandir as Eq.(3.97) e Eq.(3.98) em potências de Γ/ω (consistente quando pudermos tratar a Lagrangeana de interação perturbativamente [11]). Isto feito, utilizando a expressão correta para o propagador físico, Eq.(3.101), é possível de se fazer a integração temporal presente nas duas equações acima. Conforme Ref.[8], do desenvolvimento destes cálculos obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3y \int_{-\infty}^{t_x} dt_y \varphi_c^2(y) \text{Im} [G^{++}]_{x,y}^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{8} \varphi_c^2(x) \dot{\varphi}_c(x) \beta \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)[1+n(\omega)]}{\omega^2(\mathbf{q})\Gamma(\mathbf{q})} \\ &- \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(x) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega^2(\mathbf{q})} \left[\frac{1+2n}{2\omega(\mathbf{q})} + \beta n(1+n) \right] + \mathcal{O} \left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega} \right). \quad (3.104) \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito desta expressão fornece o termo de dissipação, $\eta_1 \varphi_c^2 \dot{\varphi}_c$, e o coeficiente de dissipação η_1 é dado por

$$\eta_1 = \frac{\lambda^2}{8} \beta \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)[1+n(\omega)]}{\omega^2(\mathbf{q})\Gamma(\mathbf{q})} + \mathcal{O}\left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right). \quad (3.105)$$

O segundo termo do lado direito da Eq.(3.104) fornece a correção de vértice a temperatura finita a um *loop*. Conforme mostrado na Ref.[8], o coeficiente de dissipação associado ao campo de flutuação (aditivo) ξ_2 , para a Eq.(3.98), é de ordem $\mathcal{O}(\lambda^4)$. Como estamos trabalhando até ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$, este pode ser desprezado e a equação final do tipo de Langevin será dependente apenas do campo de flutuação (multiplicativo) ξ_1 . As expressões para a largura de decaimento, para o coeficiente de dissipação ξ_1 e para a constante de acoplamento a temperatura finita renormalizada podem ser simplificadas se considerarmos o limite de altas temperaturas, $T \gg m_T$, obtendo, respectivamente [8]:

$$\Gamma(q) \simeq \frac{\lambda^2 T^2}{1536\pi\omega(\mathbf{q})} \quad e \quad \eta_1 \stackrel{T \gg m_T}{\simeq} \frac{96}{\pi T} \ln\left(\frac{T}{m_T}\right). \quad (3.106)$$

Disto é possível concluir que, neste limite, o coeficiente de dissipação associado com o campo de ruído multiplicativo ξ_1 é apenas fracamente (logaritmicamente) dependente da constante de acoplamento λ e, por fim,

$$\lambda_T \simeq \lambda - \frac{3\lambda^2}{2} \left\{ \frac{T}{8\pi m} + \frac{1}{8\pi^2} \left[\ln\left(\frac{m}{4\pi T}\right) + \gamma \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m}{T}\right) \right\} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (3.107)$$

Assim, a dois *loops* e $\mathcal{O}(\lambda^2)$, com momento externo nulo e dentro da aproximação adiabática, obtemos, a partir da Eq.(3.93), a seguinte equação de movimento para o campo φ_c :

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi_c(\mathbf{x}, t) + \eta_1 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi_c(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + U'[\varphi_c, T] = \varphi_c(\mathbf{x}, t) \xi_1(\mathbf{x}, t), \quad (3.108)$$

onde

$$U[\varphi_c, T] = \frac{1}{2} m_T^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) + \frac{\lambda_T}{4!} \varphi_c^4(\mathbf{x}, t). \quad (3.109)$$

Uma primeira observação com relação a esta equação, é o aparecimento de um termo de derivada segunda no tempo; a equação fenomenológica usual, discutida no Capítulo anterior, contém somente derivada primeira no tempo. Isto, obviamente é reflexo do caráter relativístico da teoria de campos. O aparecimento desta derivada de ordem superior muda o caráter puramente difusivo da equação de GLL original. Como será discutido no próximo Capítulo, um termo de derivada segunda no tempo na equação de GLL pode também ser entendido em termos da introdução de efeitos de memória (ou causalidade) no problema. As consequências fenomenológicas deste termo novo serão discutidas no Capítulo 5.

Notamos também que a equação de GLL efetiva acima apresenta ruído multiplicativo, ao passo que a equação fenomenológica usual, contém ruído aditivo. Na realidade, conforme mostrado por GR, ambos tipos de ruído aparecem naturalmente na expansão em loops da ação efetiva. No entanto, o ruído aditivo, curiosamente, é de ordem superior em λ . Intuitivamente, se esperaria que, sendo o ruído aditivo mais simples, que este apareceria em ordem mais baixa em λ , mas este não é o caso! No próximo Capítulo vamos discutir métodos numéricos para resolver este tipo de equação.

Os cálculos de Gleiser e Ramos foram feitos explicitamente para a fase simétrica da teoria $\lambda\phi^4$, i.e. para $m^2 > 0$ na Eq. (3.2). Tudo isto pode ser estendido para a fase quebrada da teoria, i.e. para $m^2 < 0$ na Eq. (3.2). Neste caso, o cálculo perturbativo seria implementado da maneira usual, definindo um novo campo φ' , tal que $\varphi = \varphi' + \nu$, onde ν é o mínimo do potencial clássico. Com isto, a massa física “bare” m_0^2 da teoria é dada por $m_0^2 = -m^2 + (\lambda/2)\nu^2$, a qual entra nos propagadores para o cálculo perturbativo. Neste caso, ao invés de m_T dada pela Eq.(3.103), teríamos uma contribuição da forma

$$m_T^2 \simeq m_0^2 + \frac{\lambda}{24} T^2 + \dots = -m^2 + \frac{\lambda}{4!} T^2 + \frac{\lambda}{2} \nu^2 + \dots \quad , \quad (3.110)$$

onde mantivemos somente o termo dominante quando $T \gg m_T$. Portanto, as correções térmicas podem restaurar a simetria, levar o potencial bare de uma forma duplo poço a poço simples para uma temperatura maior que a temperatura crítica T_c dada por

$$T_c^2 = \frac{1}{(\lambda/4!)} m^2. \quad (3.111)$$

Uma equação de GLL efetiva pode ser derivada seguindo precisamente os mesmos passos de GR para a fase simétrica – o cálculo detalhado está em progresso [30]. Uma maneira simplificada, que pode eventualmente não ser completa e que deverá ser confrontada com o cálculo detalhado [30], é empregar o mesmo coeficiente cinético η calculado anteriormente e, para o potencial efetivo na equação de GLL de GR a expressão

$$U[\varphi, T] = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{4!} (T_c^2 - T^2) \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \quad (3.112)$$

onde foi empregada a definição de T_c dada na Eq.(3.111) para eliminar m^2 . No cálculo perturbativo na fase quebrada, há um parâmetro extra, além de m e λ que definem a temperatura crítica T_c (em ordem dominante), que é o mínimo do potencial (bare) clássico, ν .

Para finalizar, é importante salientar que o cálculo perturbativo a temperatura finita discutido aqui neste Capítulo é, até certo ponto, puramente acadêmico. Isto

é devido ao fato que a temperatura finita, a expansão perturbativa não converge para temperaturas altas e um certo tipo de re-soma é necessária [31]. No entanto, para os propósitos de ilustrar o aparecimento de dissipação numa teoria quântica de campos e para a obtenção de equações de Ginzburg-Landau-Langevin efetivas, a derivação de Gleiser-Ramos é, no mínimo, pedagógica, e também serve os propósitos para motivar futuros desenvolvimentos.

Capítulo 4

Métodos numéricos para a equação de Ginzburg-Landau-Langevin

Neste Capítulo apresentaremos os métodos numéricos desenvolvidos por nós para a resolução da equação de Ginzburg-Landau-Langevin (GLL). Abordaremos duas técnicas de discretização das equações numa rede espacial, o método das diferenças finitas e método de colocação de Fourier [32]. A diferença entre os dois métodos está na maneira de tratar a discretização do Laplaciano. Para a variável tempo, vamos empregar um método semi-implícito. O tratamento do ruído envolve certos cuidados devido ao aparecimento de divergências ultravioletas, conhecidas como a catástrofe de Rayleigh-Jeans, para tempos longos. Estas divergências implicam que as soluções de equilíbrio dependem sensivelmente do espaçamento da rede (ou cutoff ultravioleta).

Inicialmente, para fazer contato com a equação de GLL da Eq.(3.106) derivada no Capítulo anterior, que contém um termo extra de derivada segunda no tempo, vamos mostrar [32, 33] como um termo desta natureza aparece através da inclusão de efeitos de memória na equação puramente difusiva usual. O termo de derivada primeira descreve processos difusivos, os quais são o resultado de eventos de espalhamentos microscópicos de altíssima frequência. A equação de difusão, em particular, descreve a situação limite de espalhamentos microscópicos de frequências infinitamente altas e, portanto, ela não respeita causalidade. Neste sentido, o termo de derivada segunda que aparece na Eq.(3.106) nada mais é do que o resultado da incorporação automática da causalidade ao nível microscópico pelo tratamento relativístico da teoria de campos empregada na sua derivação. O que mostraremos na próxima Seção é que estes efeitos podem ser incorporados na equação usual através de funções de memória.

4.1 Efeitos de memória na equação de Ginzburg-Landau

A equação de Ginzburg-Landau tradicional é dada pela Eq.(2.75), sem o termo de ruído

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x,t)}, \quad (4.1)$$

onde Γ é conhecido como coeficiente de Onsager e $F[\phi]$ é o Hamiltoniano de Ginzburg-Landau

$$F[\phi] = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\gamma(\nabla\phi)^2 + U(\phi) \right], \quad (4.2)$$

onde mudamos a notação para a energia livre de $f_0(\phi)$ para $U(\phi)$. Podemos introduzir efeitos de memória através de uma *função memória* $W(t-t')$ na equação de Ginzburg-Landau como

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\Gamma \int_0^t dt' W(t-t') \frac{\delta F[\phi(x,t')]}{\delta\phi(x,t')}. \quad (4.3)$$

A função memória é caracterizada por um tempo de decaimento finito α . Na situação limite de $\alpha \rightarrow 0$, $W(t-t') = \delta(t-t')$ e obtemos novamente a equação usual. Vamos supor, por simplicidade, que $W(t-t')$ seja dada por uma função exponencial decrescente da seguinte forma

$$W(t-t') = \frac{1}{\alpha} e^{-(t-t')/\alpha}. \quad (4.4)$$

Inserindo esta expressão na equação (4.3) e diferenciando ambos os lados daquela equação em relação ao tempo, obtemos

$$\alpha \frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta F[\phi(x,t)]}{\delta\phi(x,t)}, \quad (4.5)$$

ou, igualmente,

$$\tau \frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\delta F[\phi(x,t)]}{\delta\phi(x,t)}, \quad (4.6)$$

onde $\tau = \alpha/\Gamma$ e $\eta = 1/\Gamma$. Para obtermos esta expressão, usamos a regra de Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \int_{g(\beta)}^{h(\beta)} dx f(x,\beta) &= \int_{g(\beta)}^{h(\beta)} dx \frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta} \\ &+ f[h(\beta),\beta] \frac{dh(\beta)}{d\beta} - f[g(\beta),\beta] \frac{dg(\beta)}{d\beta}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Em geral, estamos interessados em problemas em que o potencial é da forma de poço duplo,

$$U(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x,t) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x,t). \quad (4.8)$$

Para um potencial desta forma, a Eq.(4.6) é escrita da seguinte maneira

$$\tau \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = - \left[-\gamma \nabla^2 \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) + \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x, t) \right]. \quad (4.9)$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$\gamma \left[\frac{\tau}{\gamma} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi(x, t) \right] + m^2 \phi(x, t) + \eta \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x, t) = 0. \quad (4.10)$$

Vamos agora discutir o que muda na decomposição espinodal, discutida anteriormente para a equação puramente difusiva, com a adição da derivada segunda no tempo. Vamos supor que, para $m^2 > 0$ e $\lambda > 0$, o parâmetro de ordem está concentrado em torno de $\phi = 0$ para $t = 0$. Agora, se subitamente $m^2 \rightarrow -m^2$, $m^2 > 0$, com $\lambda > 0$, o sistema passa a apresentar quebra de simetria (como no caso de um *quench* de temperatura), com a possibilidade de dois estados de mínima energia,

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{6 m^2}{\lambda}}, \quad (4.11)$$

conforme ilustrado na Fig. 4.1 abaixo.

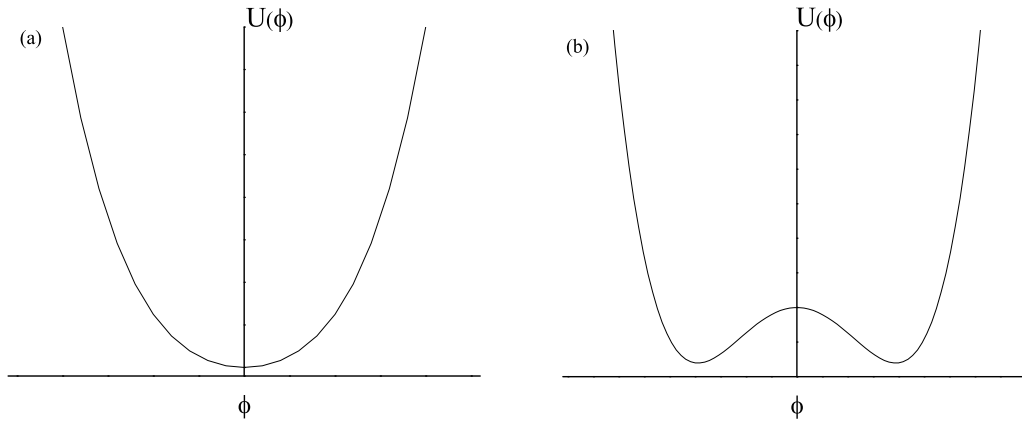


Figura 4.1: Ilustração para o potencial $U(\phi)$ para a teoria $\lambda\phi^4$ e (a) $m^2 > 0$ e (b) $m^2 < 0$.

Para tempos pequenos, o campo está concentrado em torno de $\phi \approx 0$. Assim, o termo proporcional a ϕ^3 na equação de movimento, Eq.(4.10), pode ser desprezado e esta pode ser re-escrita da seguinte forma

$$\tau \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \gamma \nabla^2 \phi(x, t) - m^2 \phi(x, t) = 0. \quad (4.12)$$

Introduzindo a transformada de Fourier $\phi(\mathbf{k}, t)$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t), \quad (4.13)$$

e substituindo na Eq.(4.12), obtemos

$$\int d^3k \left[\tau \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \gamma \mathbf{k}^2 \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) - m^2 \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0, \quad (4.14)$$

que implica em

$$\tau \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} + (\gamma \mathbf{k}^2 - m^2) \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) + \eta \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = 0. \quad (4.15)$$

A solução desta equação pode ser escrita como

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}, t) = A e^{\lambda_+(\mathbf{k}^2)t} + B e^{\lambda_-(\mathbf{k}^2)t}, \quad (4.16)$$

onde A e B são constantes determinadas pelas condições iniciais e $\lambda_{\pm}(\mathbf{k}^2)$ são soluções da seguinte equação característica:

$$\tau \lambda^2(\mathbf{k}^2) + \eta \lambda(\mathbf{k}^2) + (\gamma \mathbf{k}^2 - m^2) = 0, \quad (4.17)$$

onde

$$\lambda_{\pm}(\mathbf{k}^2) = \frac{\eta}{2\tau} \left\{ -1 \pm \left[1 - \frac{4\tau}{\eta^2} (\gamma \mathbf{k}^2 - m^2) \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.18)$$

Note que para $\tau = 0$, λ é dado por

$$\lambda_{\tau=0}(\mathbf{k}^2) = \frac{1}{\eta} (m^2 - \gamma \mathbf{k}^2), \quad (4.19)$$

e a solução correspondente para $\tau = 0$ pode ser escrita como

$$\tilde{\phi}_{\tau=0}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{k}, 0) e^{\lambda_0(\mathbf{k}^2)t} = \tilde{\phi}(\mathbf{k}, 0) e^{\frac{1}{\eta}(m^2 - \gamma \mathbf{k}^2)t}, \quad (4.20)$$

onde $\tilde{\phi}(\mathbf{k}, 0)$ é a transformada de Fourier da condição inicial.

Novamente vemos que haverá um crescimento muito rápido de modos de comprimentos de onda longos (k pequenos) – decomposição espinodal. Especificamente, isto acontecerá para valores de k para os quais $\lambda_+ > 0$, i.e.

$$-\frac{\eta}{2\tau} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4\tau^2} + \frac{m^2}{\tau} - \frac{\gamma \mathbf{k}^2}{\tau}} > 0 \longrightarrow \mathbf{k}^2 < \frac{m^2}{\gamma}. \quad (4.21)$$

Mas esta é a mesma condição que se obtém da equação usual, quando $\tau = 0$, conforme pode ser verificado trivialmente da Eq.(4.19). No entanto, isto *não* significa

que nada de diferente acontecerá com a adição do termo com $\tau \neq 0$. Na verdade, como se deveria esperar de efeitos de memória, haverá um atraso da explosão espinodal. Este atraso pode ser estimado considerando-se a proporção R das escalas de tempo características das soluções com $\tau \neq 0$ e $\tau = 0$, as quais são dadas respectivamente pelo inverso de λ_+ e λ_0 . Esta proporção, considerando-se o modo de crescimento mais rápido (ou seja, quando $|\mathbf{k}| = 0$) é dada por

$$R = \frac{\lambda_0(\mathbf{k}^2)}{\lambda_+(\mathbf{k}^2)} \Big|_{|\mathbf{k}|=0} = \frac{2\tau m^2}{\eta^2 \left\{ [1 + (4\tau m^2)/\eta^2]^{1/2} - 1 \right\}}. \quad (4.22)$$

Como será visto mais adiante, este atraso na explosão espinodal é visto nas nossas simulações. Consequências fenomenológicas para o problema da restauração da simetria quiral em colisões de íons pesados relativísticos foram avaliados por Fraga e Krein na Ref. [34]. Para parâmetros realísticos, Fraga e Krein mostraram que este efeito pode ser dramático, no sentido de que poderá não haver tempo suficiente para tal explosão ser vista numa colisão de íons pesados relativísticos. Conclusões ainda mais dramáticas foram preditas por Koide, Krein e Ramos [33] no contexto da relaxação de um parâmetro de ordem conservado.

Nas próximas seções vamos descrever nossos métodos numéricos para resolver as equações de GLL.

4.2 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas que aplicamos [32] aqui à equação de GLL (com termo de derivada segunda no tempo) é adaptado da Ref. [35], onde foi aplicado originalmente à equação de Cahn-Hilliard puramente difusiva. Inicialmente particionamos o intervalo temporal em n pedaços, tal que $t = n \Delta t$ com $n = 0, 1, 2, \dots$. Para calcularmos as derivadas utilizamos o método das diferenças finitas. A derivada temporal primeira é utilizada na forma não-simetrizada (*forward*)

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \rightarrow \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad (4.23)$$

e a derivada temporal segunda, $f''(t)$, é utilizada na forma simetrizada

$$f''(t) = \frac{f'_+(t) - f'_-(t)}{\Delta t}, \quad (4.24)$$

onde $f'_+(t)$ é a derivada à direita do ponto e $f'_-(t)$, à esquerda do ponto, ou seja,

$$f'_+(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad f'_-(t) = \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.25)$$

Da mesma forma, as variáveis x , y e z são discretizadas numa rede cúbica de espaçamento h , com

$$x = ih, \quad y = jh \quad \text{e} \quad z = kh, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.26)$$

Com isto, o campo contínuo $\phi(x, y, z, t)$ passa a ser denotado como ϕ_{ijk}^n , e a equação de GLL com ruído aditivo na rede – o caso de ruído multiplicativo será discutido mais abaixo – pode ser escrita como

$$\tau \frac{\partial^2 \phi_{ijk}^n}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial \phi_{ijk}^n}{\partial t} - \gamma \nabla^2 \phi_{ijk}^n + U_{ijk}^n = \zeta_{ijk}^n, \quad (4.27)$$

onde U_{ijk}^n indica a derivada do potencial $U(\phi)$.

Por outro lado, tratamos a variável espacial através de uma série de Fourier

$$\phi_{ijk}^n = \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n E_{rsp}(ijk), \quad (4.28)$$

onde $t = n \Delta t$ com $n = 0, 1, 2, \dots$ e $E_{rsp}(ijk)$ é dado por

$$E_{rsp}(ijk) = \exp \left\{ i \frac{2\pi}{Nh} xr + i \frac{2\pi}{Nh} ys + i \frac{2\pi}{Nh} zp \right\}, \quad (4.29)$$

onde h é o espaçamento das coordenadas espaciais. Agora, juntamos o termo de ruído com o termo de potencial, e escrevemos a expansão em série de Fourier

$$U_{ijk}^n \equiv \bar{U}_{ijk}^n - \zeta_{ijk}^n = \sum_{rsp=0}^{N-1} b_{rsp}^n E_{rsp}(ijk), \quad (4.30)$$

Consideremos então a derivada temporal primeira

$$\frac{\partial \phi_{ijk}^n}{\partial t} = \frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{ijk}^n}{\Delta t} = \sum_{rsp=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta t} (a_{rsp}^{n+1} - a_{rsp}^n) E_{rsp}(ijk). \quad (4.31)$$

Em seguida, calculamos o termo referente à derivada temporal segunda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_{ijk}^n}{\partial t^2} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi_{ijk}^{n+1} - \phi_{ijk}^n}{\Delta t} \right) - \left(\frac{\phi_{ijk}^n - \phi_{ijk}^{n-1}}{\Delta t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} [\phi_{ijk}^{n+1} - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{ijk}^{n-1}] \\ &= \sum_{rsp=0}^{N-1} \frac{1}{(\Delta t)^2} [a_{rsp}^{n+1} - 2a_{rsp}^n + a_{rsp}^{n-1}] E_{rsp}(ijk). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Após, escrevemos o termo referente ao Laplaciano usando *diferenças finitas para a coordenada espacial*

$$\nabla^2 \phi_{ijk}^n = \frac{\partial^2 \phi_{ijk}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{ijk}^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{ijk}^n}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{h^2} [\phi_{i+1jk}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{i-1jk}^n] + \frac{1}{h^2} [\phi_{ij+1k}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{ij-1k}^n] \\
 &+ \frac{1}{h^2} [\phi_{ijk+1}^n - 2\phi_{ijk}^n + \phi_{ijk-1}^n] \\
 &= \frac{1}{h^2} [\phi_{i+1jk}^n + \phi_{i-1jk}^n + \phi_{ij+1k}^n + \phi_{ij-1k}^n + \phi_{ijk+1}^n + \phi_{ijk-1}^n - 6\phi_{ijk}^n].
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Usando séries de Fourier, os termos presentes nesta expressão podem ser re-escritos da seguinte maneira

$$\phi_{i+1jk}^n = \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n \exp\left(i\frac{2\pi}{N}r\right) E_{rsp}(ijk), \tag{4.34}$$

e

$$\phi_{i-1jk}^n = \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}r\right) E_{rsp}(ijk). \tag{4.35}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \phi_{i+1jk}^n + \phi_{i-1jk}^n &= \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n \left[\exp\left(i\frac{2\pi}{N}r\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}r\right) \right] E_{rsp}(ijk) \\
 &= \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n \left[2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}r\right) \right] E_{rsp}(ijk).
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Da mesma forma, obtemos

$$\phi_{ij+1k}^n + \phi_{ij-1k}^n = \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n \left[2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}s\right) \right] E_{rsp}(ijk), \tag{4.37}$$

e

$$\phi_{ijk+1}^n + \phi_{ijk-1}^n = \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n \left[2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}p\right) \right] E_{rsp}(ijk). \tag{4.38}$$

Portanto, o termo referente ao Laplaciano pode ser escrito como

$$\nabla^2 \phi_{ijk}^n = \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n \lambda_{rsp} E_{rsp}(ijk), \tag{4.39}$$

onde

$$\lambda_{rsp} = \frac{1}{h^2} \left[-6 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}r\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}s\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}p\right) \right]. \tag{4.40}$$

Assim, a Eq.(4.27) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \sum_{rsp=0}^{N-1} \frac{\tau}{(\Delta t)^2} \left[a_{rsp}^{n+1} - 2a_{rsp}^n + a_{rsp}^{n-1} \right] E_{rsp}(ijk) + \sum_{rsp=0}^{N-1} \frac{\eta}{\Delta t} \left(a_{rsp}^{n+1} - a_{rsp}^n \right) E_{rsp}(ijk) \\ & - \gamma \sum_{rsp=0}^{N-1} a_{rsp}^n \lambda_{rsp} E_{rsp}(ijk) + \sum_{rsp=0}^{N-1} b_{rsp}^n E_{rsp}(ijk) = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Reorganizando os termos, chegamos a:

$$\begin{aligned} & \sum_{rsp=0}^{N-1} \left\{ a_{rsp}^{n+1} \left[\frac{\tau}{(\Delta t)^2} + \frac{\eta}{\Delta t} \right] + a_{rsp}^n \left[-\frac{2\tau}{(\Delta t)^2} - \frac{\eta}{\Delta t} - \gamma \lambda_{rsp} \right] \right. \\ & \left. + a_{rsp}^{n-1} \left[\frac{\tau}{(\Delta t)^2} \right] + b_{rsp}^n \right\} E_{rsp}(ijk) = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

ou seja,

$$a_{rsp}^{n+1} [\tau + \eta \Delta t] + a_{rsp}^n [-2\tau - \eta \Delta t - \gamma \lambda_{rsp} (\Delta t)^2] + \tau a_{rsp}^{n-1} + b_{rsp}^n (\Delta t)^2 = 0. \quad (4.43)$$

Agora, um possível esquema de iteração no tempo seria simplesmente expressar a_{rsp}^{n+1} em termos de a_{rsp}^n e a_{rsp}^{n-1} . Isto daria origem a um esquema *explícito*. No entanto, é bem conhecido na literatura de análise numérica que um esquema semi-implícito (ou implícito) é em geral superior a um esquema explícito. Para o presente caso, um esquema semi-implícito seria tomar o termo do Laplaciano, λ_{rsp} , no tempo $n + 1$, juntando-o ao termo a_{rsp}^{n+1} na Eq.(4.43), o que nos leva a

$$a_{rsp}^{n+1} [\tau - \gamma \lambda_{rsp} (\Delta t)^2 + \eta \Delta t] + a_{rsp}^n [-2\tau - \eta \Delta t] + \tau a_{rsp}^{n-1} + b_{rsp}^n (\Delta t)^2 = 0. \quad (4.44)$$

Portanto:

$$a_{rsp}^{n+1} = \frac{1}{XX} \left\{ [2\tau + \eta \Delta t] a_{rsp}^n - \tau a_{rsp}^{n-1} - b_{rsp}^n (\Delta t)^2 \right\}, \quad (4.45)$$

onde

$$XX = \tau - \gamma \lambda_{rsp} (\Delta t)^2 + \eta \Delta t. \quad (4.46)$$

Fazendo uma redefinição nos índices das variáveis a_{rsp}^n presentes na equação acima, $n + 1 \rightarrow n$, $n \rightarrow n - 1$ e $n - 1 \rightarrow n - 2$, obtemos:

$$a_{rsp}^n = \frac{1}{XX} \left\{ [2\tau + \eta \Delta t] a_{rsp}^{n-1} - \tau a_{rsp}^{n-2} - b_{rsp}^{n-1} (\Delta t)^2 \right\}. \quad (4.47)$$

Portanto, dadas as condições iniciais para ϕ e a derivada temporal de ϕ , o que envolveria ϕ^{n-1} e ϕ^{n-2} , a solução do problema consiste em iterar a Eq.(4.47).

4.3 Método de colocação de Fourier

Nesta seção vamos considerar a aproximação numérica para a equação de Ginzburg-Landau-Langevin utilizando o método de colocação de Fourier [32]. A diferença em relação ao método anterior está na maneira de como se trata o Laplaciano. No método de colocação de Fourier, escrevemos inicialmente a expansão de Fourier como

$$\phi^n = \sum_k a_k^n \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (4.48)$$

com

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_x x + k_y y + k_z z, \quad (4.49)$$

onde, como anteriormente, devido às condições de contorno periódicas no intervalo $[0, L]$ em cada direção da rede, temos que k_x , k_y e k_z são dadas por

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad n_x, n_y, n_z = -N/2, \dots, N-1. \quad (4.50)$$

O Laplaciano é aplicado diretamente a esta expressão de maneira que

$$\nabla^2 \phi^n = - \sum_k (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) a_k^n \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \sum_k \lambda_k a_k^n \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (4.51)$$

Anteriormente, já calculamos os termos proporcionais às derivadas temporais de primeira e de segunda ordens e o termo proporcional ao potencial. Assim, vamos apenas re-escrever estas quantidades aqui

$$\frac{\partial \phi^n}{\partial t} = \sum_k \frac{1}{\Delta t} (a_k^{n+1} - a_k^n) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2} = \sum_k \frac{1}{(\Delta t)^2} [a_k^{n+1} - 2a_k^n + a_k^{n-1}] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (4.53)$$

$$U_k^n = \sum_k b_k^n \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (4.54)$$

onde no termo U_k^n , como no caso anterior, incluímos o ruído. Portanto, para o método de colocação de Fourier, a equação para o parâmetro de ordem é dada por

$$\begin{aligned} & \tau \sum_k \frac{1}{(\Delta t)^2} [a_k^{n+1} - 2a_k^n + a_k^{n-1}] \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) + \sum_k \frac{\eta}{\Delta t} (a_k^{n+1} - a_k^n) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \\ & - \gamma \sum_k \lambda_k a_k^n \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) + \sum_k b_k^n \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \sum_k \left\{ \frac{\tau}{(\Delta t)^2} [a_k^{n+1} - 2a_k^n + a_k^{n-1}] + \frac{\eta}{\Delta t} (a_k^{n+1} - a_k^n) \right. \\ & \left. - \gamma \lambda_k a_k^n + b_k^n \right\} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

E, assim, obtemos a equação que deve ser satisfeita pelos coeficientes a_k^n e b_k^n

$$\frac{\tau}{(\Delta t)^2} [a_k^{n+1} - 2a_k^n + a_k^{n-1}] + \frac{\eta}{\Delta t} (a_k^{n+1} - a_k^n) - \gamma \lambda_k a_k^n + b_k^n = 0. \quad (4.57)$$

Vamos multiplicar esta expressão por $(\Delta t)^2$ e reagrupar os termos de mesma ordem na variável a_k^n

$$[\tau + \eta \Delta t] a_k^{n+1} + [-2\tau - \eta \Delta t - \gamma \lambda_k (\Delta t)^2] a_k^n + \tau a_k^{n-1} + b_k^n (\Delta t)^2 = 0, \quad (4.58)$$

Com uma redefinição nos índices das variáveis a_k^n presentes na equação acima, $n + 1 \rightarrow n$, $n \rightarrow n - 1$ e $n - 1 \rightarrow n - 2$, e usando o método semi-implícito, como explicado anteriormente, obtemos

$$a_k^n = \frac{1}{YY} \{ [2\tau + \eta \Delta t] a_k^{n-1} - \tau a_k^{n-2} - b_k^{n-1} (\Delta t)^2 \}, \quad (4.59)$$

onde

$$YY = [\tau + \eta \Delta t - \gamma \lambda_k (\Delta t)^2]. \quad (4.60)$$

4.4 Tratamento do ruído multiplicativo

A equação de GLL com ruído multiplicativo que pretendemos resolver numericamente na rede é da forma

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) + \eta \phi^2(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + U'[\phi] = \phi(\mathbf{x}, t) \zeta(\mathbf{x}, t). \quad (4.61)$$

Escrevemos a transformada de Fourier para o termo proporcional a η como

$$\phi^2(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \rightarrow (\phi_{ijk}^n)^2 \frac{\phi_{ijk}^n - \phi_{ijk}^{n-1}}{\Delta t} = \sum_k c_k^n \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (4.62)$$

Com isto, o esquema iterativo fica sendo dado através da equação

$$a_k^n = \frac{1}{ZZ} [2a_k^{n-1} - a_k^{n-2} - (\eta c_k^{n-1} + d_k^{n-1}) (\Delta t)^2], \quad (4.63)$$

onde

$$ZZ = [1 - \lambda_k (\Delta t)^2], \quad (4.64)$$

onde d_k^n é o coeficiente de Fourier da expansão do potencial, menos o termo de ruído, definido através de

$$U_{ijk}^n \equiv \bar{U}_{ijk}^n - \phi_{ijk}^n \zeta_{ijk}^n = \sum_k d_k^n \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (4.65)$$

Capítulo 5

Resultados numéricos

Neste Capítulo apresentaremos os resultados numéricos obtidos para as diferentes equações de Ginzburg-Landau-Langevin (GLL) discutidas nos Capítulos anteriores. Vamos analisar numericamente a convergência e estabilidade dos métodos de diferenças finitas e de colocação de Fourier descritos no Capítulo 4. Inicialmente, na próxima Seção discutiremos a equação de Ginzburg-Landau sem ruído ($\zeta = 0$), com e sem o termo de derivada segunda no tempo. Logo após vamos discutir a inclusão de ruído aditivo, e na última Seção deste Capítulo vamos examinar o ruído multiplicativo.

Como já dito anteriormente, nesta dissertação não estamos interessados em estudar as implicações fenomenológicas das diferentes equações de GLL em um campo específico. Vamos empregar as equações na forma adimensional e, portanto, nossos resultados podem ser diretamente transcritos para qualquer campo de aplicação, bastando adequar os valores dos parâmetros τ , η e γ . Todas nossas simulações se referem ao valor médio espacial do parâmetro de ordem, definido por

$$\langle \phi(x, t) \rangle = \frac{1}{n^3} \sum_{ijk} \phi(i, j, k), \quad (5.1)$$

onde n é o número total de pontos em cada direção – para o caso com ruído, o símbolo inclui média sobre diferentes realizações randômicas. Esta quantidade desempenha papel central em toda e qualquer discussão sobre a relaxação ao equilíbrio do parâmetro de ordem. Além disso, para os objetivos de investigar estabilidade e convergência das soluções basta este observável. Obviamente que uma infinidade de outros observáveis, tais como funções de correlação, desempenham papel importante em qualquer investigação sobre a dinâmica de transições de fase. No entanto, julgamos que a apresentação de resultados para outros observáveis tornaria esta Dissertação muito maçante. Todos os resultados que serão apresentados são para

um potencial da forma de poço-duplo,

$$U(\phi) = -\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{4}\phi^4. \quad (5.2)$$

5.1 Resultados sem o termo de ruído ($\zeta = 0$)

Vamos dividir a discussão entre equação de Ginzburg-Landau com $\tau = 0$, e a equação com o termo de derivada segunda no tempo com $\tau \neq 0$, denominadas respectivamente de “usual” e “causal”.

Em todas as simulações, empregamos como condição inicial,

$$\phi_0(i, j, k) = 0.01 + 0.005(2 * \text{ran} - 1), \quad (5.3)$$

onde ran é um número aleatório gerado uniformemente entre 0 e 1. Também, em todos os resultados mostrados, médias da Eq.(5.1) sobre várias realizações independentes de ruído foram feitas.

Para a equação com um termo de derivada segunda, precisamos também especificar a condição inicial para a derivada primeira. Em todas as simulações a seguir, tomamos a derivada primeira como igual a zero em $t = 0$.

5.1.1 Equação de Ginzburg-Landau causal ($\tau \neq 0$)

Vamos iniciar examinando os resultados para diferentes espaçamentos de rede, mantendo $L = 16$ e $\Delta t = 0,1$ fixos, utilizando diferenças finitas e colocação de Fourier. Empregamos $n = 16$, $n = 32$ e $n = 64$. Os resultados estão mostrados na Fig. 5.1.

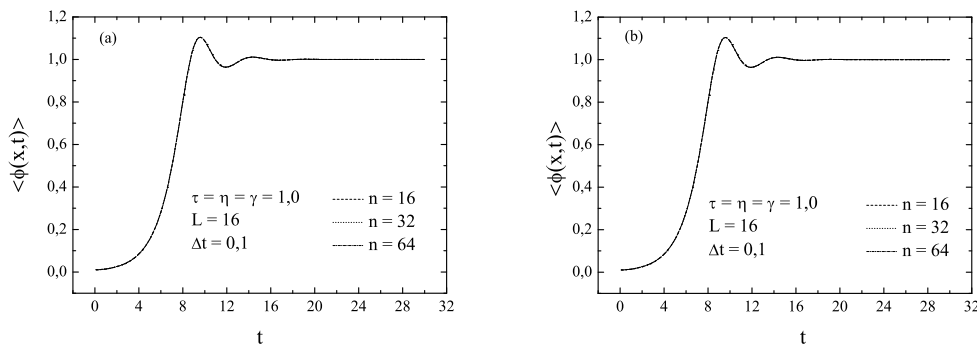


Figura 5.1: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes números de pontos da rede (a) para o método de diferenças finitas e (b) para o método de colocação de Fourier.

Inicialmente, é importante notar o rápido crescimento exponencial do parâmetro de ordem para tempos iniciais, mostrando o fenômeno da decomposição espinodal. Esta figura mostra que os resultados são muito estáveis e convergem para $\langle \phi \rangle = 1$, indicando que o sistema foi para o mínimo do potencial. Não é possível perceber diferenças entre as diferentes curvas na figura – somente pela análise dos arquivos de dados é que diferenças podem ser observadas a tempos longos, elas ocorrem na terceira casa decimal para os diferentes casos.

Na Fig. 5.2 examinamos a convergência e estabilidade dos resultados com relação ao espaçamento Δt . Novamente usaremos uma rede de tamanho fixo e igual a $L = 16$, impondo o vínculo de que o espaçamento de rede seja constante e igual a $h = 0,5$. Apresentamos resultados para $\Delta t = 0,05$, $\Delta t = 0,1$, $\Delta t = 0,5$ e $\Delta t = 1$. Conforme indica esta figura, vemos que os resultados para tempos longos, i.e. quando o parâmetro de ordem termaliza, se estabilizam para todos os espaçamentos usados. No entanto, percebe-se claramente que na região da explosão espinodal, os resultados são muito sensíveis a Δt , as diferenças podendo chegar a mais de 100%. Notamos também que para $\Delta t = 1$ a solução é estável, mas somente converge para tempos bastante longos. A figura também mostra que não há diferença entre os resultados empregando diferenças finitas e colocação de Fourier. Este último aspecto é gratificante, pois mostra que nossos resultados são robustos, basicamente independentes do esquema de discretização espacial.

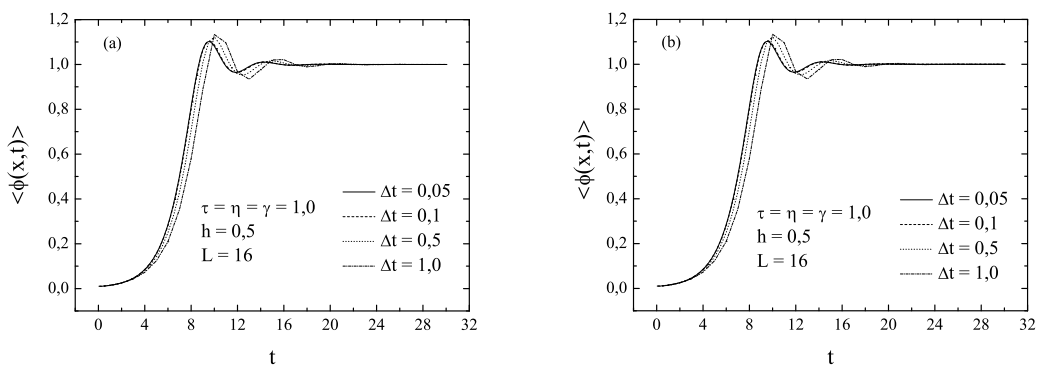


Figura 5.2: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes intervalos de tempo (a) para o método de diferenças finitas e (b) para o método de colocação de Fourier.

Para finalizar esta Subseção, vamos investigar a estabilidade e convergência dos resultados como função do tamanho da rede, mantendo fixos $\Delta t = 0,1$, consistente com o resultado anterior, e $h = 0,5$. Portanto, o parâmetro livre é o tamanho da

rede, que variamos como $L = 8$, $L = 16$ e $L = 32$. Os resultados estão mostrados na Fig. 5.3

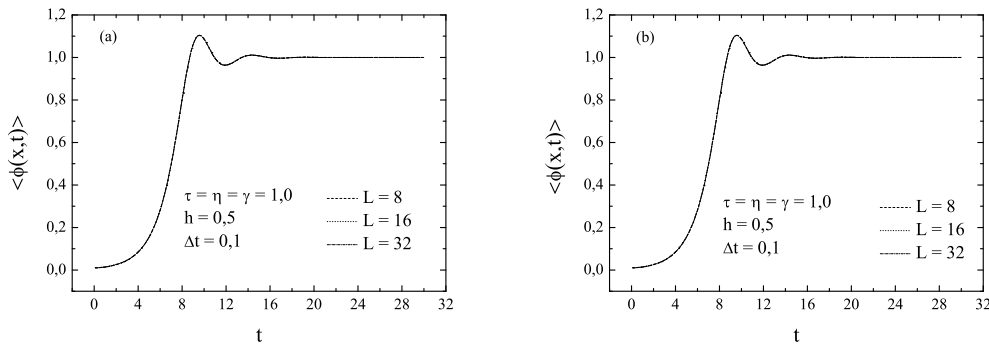


Figura 5.3: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes tamanhos de rede (a) para o método de diferenças finitas e (b) para o método de colocação de Fourier.

Claramente, os resultados são muito estáveis e convergem para $\langle \phi \rangle = 1$ de maneira uniforme. Novamente, não há diferenças visíveis entre os resultados empregando o método das diferenças finitas e a colocação de Fourier.

5.1.2 Equação de Ginzburg-Landau usual ($\tau = 0$)

Nesta Subseção repetimos para a equação usual de Ginzburg-Landau ($\tau = 0$) as mesmas análises efetuadas acima para a equação causal ($\tau \neq 0$). No entanto, para não tornar a discussão repetitiva demais, não vamos mostrar resultados para diferenças finitas, pois os resultados, como na Subseção anterior, são robustos com relação à discretização do Laplaciano.

Inicialmente investigamos a convergência e a estabilidade dos resultados com relação ao espaçamento da rede h , mantendo $\Delta t = 0,1$ fixo. Mantivemos o comprimento L em cada direção da rede fixo em $L = 16$. Os resultados estão mostrados na Fig. 5.4. Esta figura mostra que os resultados são muito estáveis e convergem para $\langle \phi \rangle = 1$, indicando que o sistema foi para o mínimo do potencial.

Novamente, fica evidenciado o rápido crescimento exponencial do parâmetro de ordem para tempos iniciais, mostrando claramente o fenômeno da decomposição espinodal. Uma diferença que se nota com relação às figuras anteriores, é que as oscilações no parâmetro de ordem, antes de termalizar, desapareceram. Isto é resultado da presença do termo de derivada segunda na equação anterior ($\tau \neq 0$), que

muda o caráter difusivo da equação usual ($\tau = 0$), introduzindo um caráter “ondulatório” à mesma. Outro detalhe é que a explosão espinodal começa muito tempo antes que no caso anterior. Novamente, isto é o resultado da “memória” introduzida através da derivada segunda no tempo na equação analisada anteriormente. Um estudo mais detalhado deste aspecto será feito mais adiante.

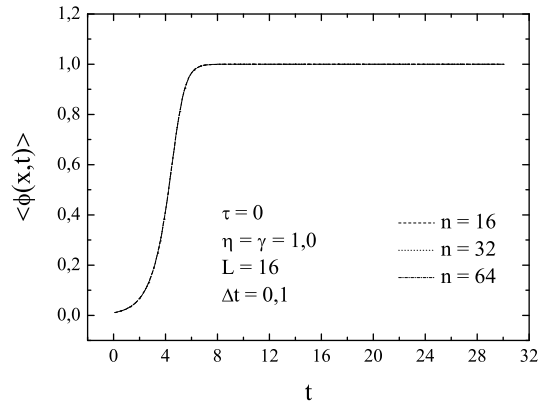


Figura 5.4: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes números de pontos da rede para a equação de Ginzburg-Landau usual utilizando o método de colocação de Fourier.

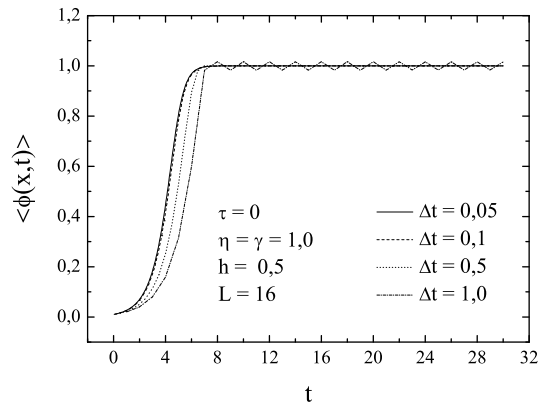


Figura 5.5: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes intervalos de tempo para a equação de Ginzburg-Landau usual utilizando o método de colocação de Fourier.

Na Fig. 5.5 examinamos a convergência e estabilidade dos resultados com relação ao espaçamento Δt . Novamente usaremos uma rede de tamanho fixo e igual a $L = 16$, impondo o vínculo de que o espaçamento de rede seja constante e igual a

$h = 0,5$. Apresentamos resultados para $\Delta t = 0,05$, $\Delta t = 0,1$, $\Delta t = 0,5$ e $\Delta t = 1$. Conforme indica esta figura, vemos que os resultados para tempos longos, i.e. quando o parâmetro de ordem termaliza, se estabilizam para todos os espaçamentos usados. No entanto, percebe-se claramente que na região da explosão espinodal, os resultados são muito sensíveis a Δt , as diferenças podendo chegar a mais de 100%. Notamos também que para $\Delta t = 1$ a solução é estável, mas *não* converge, apresentando oscilações em torno das outras soluções que convergiram para o valor $\langle \phi \rangle = 1$.

Para finalizar esta Subseção, investigamos as soluções para diferentes comprimentos L , mantendo constantes $\Delta t = 0,1$ e o espaçamento da rede $h = 0,5$. Empregamos redes de tamanhos $L = 8$, $L = 16$ e $L = 32$.

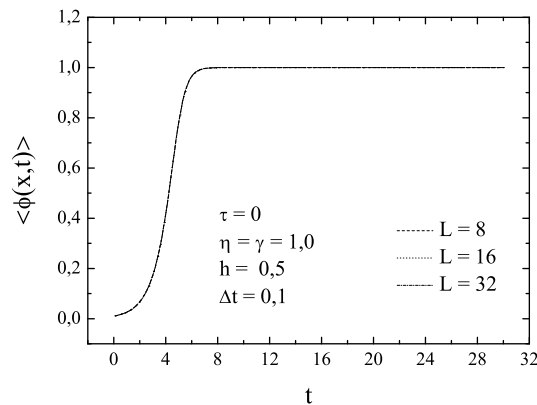


Figura 5.6: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes tamanhos de rede para a equação de Ginzburg-Landau usual utilizando o método de colocação de Fourier.

Novamente, vemos que os resultados são muito estáveis e convergem para $\langle \phi \rangle = 1$ de maneira uniforme.

5.1.3 Variação dos parâmetros τ , η e γ

Como mencionamos anteriormente, as diferentes aplicações fenomenológicas estão relacionadas aos valores tomados pelos parâmetros τ , η e γ . Nesta Subseção, vamos investigar o comportamento das soluções para diferentes combinações destes parâmetros. Para estas investigações, utilizamos uma rede com $L = 16$, número de pontos $n = 16$ e o incremento temporal $\Delta t = 0,1$. Como acima, vamos nos restringir ao emprego do método de colocação de Fourier.

Inicialmente fixamos $\gamma = 1$ e variamos τ e η . Especificamente, para cada valor de $\tau = 0, \tau = 1, \tau = 2$ e $\tau = 3$, variamos η . Os resultados estão mostrados na Fig. 5.7.

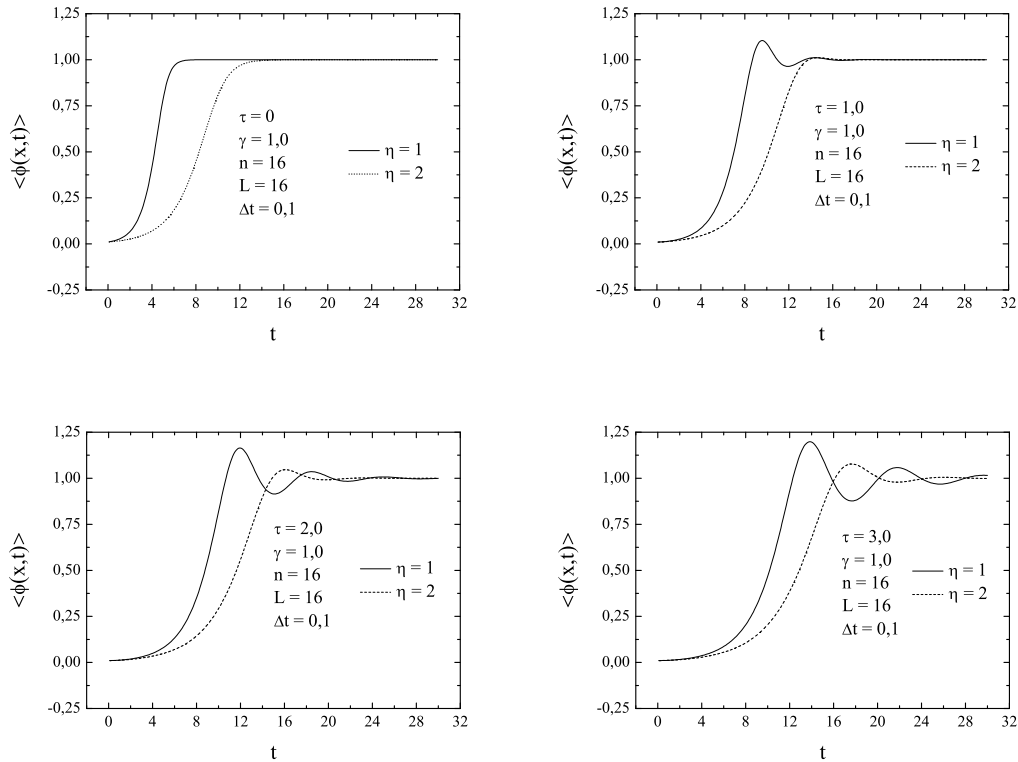


Figura 5.7: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes valores de η .

Obviamente, com $\tau = 0$, recuperamos a equação de Ginzburg-Landau usual, na qual só existe derivada temporal de primeira ordem. Logo, não deve haver oscilações no comportamento do parâmetro de ordem. Um comportamento assim está evidenciado claramente nos resultados mostrados na Fig. 5.7. Por outro lado, se tomarmos o parâmetro τ diferente de zero, por exemplo, $\tau = 1$, o sistema deve oscilar devido a presença da derivada temporal de segunda ordem na equação de Ginzburg-Landau. Os resultados para este valor de τ também estão contidos na Fig. 5.7. Notamos também que para $\eta > \tau$, mesmo que τ não seja nulo, não há oscilações apreciáveis no comportamento do parâmetro de ordem.

Em relação ao tempo necessário para que o valor esperado para o parâmetro de ordem alcance seu valor de equilíbrio, $\langle \phi(x,t) \rangle = 1$, este tempo será maior quanto

maior for η , conforme mostram os diferentes quadros da Fig. 5.7. Isto é claramente consequência do aumento da dissipação no sistema, o que acarreta num tempo de equilibração maior, como era de se esperar.

Na Fig. 5.8, analisamos a dependência dos resultados em mantendo os parâmetros τ e η constantes (vamos utilizar dois valores distintos para cada um destes) e variando γ , especificamente $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$. Uma inspeção da Fig. 5.8 revela que γ não influencia o comportamento do parâmetro de ordem em função do tempo – pelo menos para as combinações de τ e η utilizadas aqui.

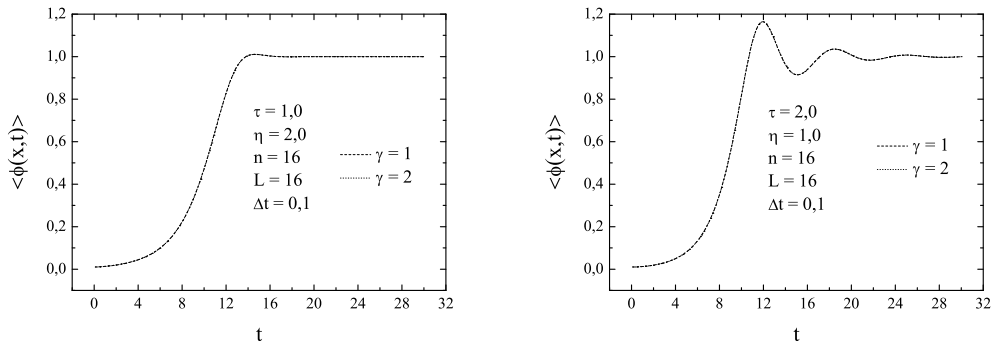


Figura 5.8: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes valores de γ .

5.2 Resultados com o termo de ruído ($\zeta \neq 0$)

Conforme mencionado anteriormente, a introdução de ruído traz dificuldades devido a divergências ultravioletas que se refletem na sensibilidade dos resultados ao espaçamento h da rede. Apesar de existir uma literatura a este respeito [36, 37], este assunto não é de conhecimento amplo.

Para simular ruído branco na rede para as equações de GLL com um coeficiente dissipativo igual a η e uma temperatura T , empregamos a fórmula

$$\zeta = \sqrt{2\eta T} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \frac{1}{h^{3/2}} \xi, \quad (5.4)$$

onde ξ é um ruído Gaussiano,

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi^2 \rangle = 1. \quad (5.5)$$

Em geral, nas simulações com ruído, para condições iniciais com valores médios próximos de zero, como a da Eq.(5.3), o valor de equilíbrio para $\langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle$ é zero para temperaturas não muito baixas. Isto é devido às flutuações térmicas induzidas pelo ruído que fazem com que ora o sistema termalize no poço da esquerda, ora no poço da direita do potencial efetivo. A média sobre todas as realizações de ruído então levam a um valor médio igual zero. Para evitar isto, tomamos uma condição inicial com valor médio igual ao valor de ϕ_s na linha espinodal de temperatura zero, i.e.

$$\phi_0(i, j, k) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 0.001(2 * \text{ran} - 1), \quad (5.6)$$

onde ran é novamente um número aleatório gerado uniformemente entre 0 e 1.

A sensibilidade dos resultados a h mencionada acima pode ser claramente vista na Fig. 5.9. Nesta figura mostramos o valor médio de ϕ para diferentes valores de h , para $L = 16$, $T = \tau = \gamma = \eta = 1$. O potencial empregado é o mesmo poço duplo empregado nas Seções anteriores. Para estes parâmetros, os resultados se estabilizam para $h \leq 0.6$, e convergem para $\phi \approx 0$, que claramente não é o valor de equilíbrio para o problema em questão, como será visto logo a seguir.

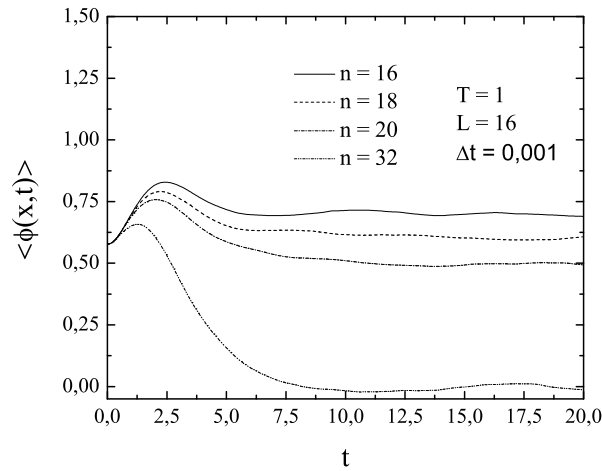


Figura 5.9: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes números de pontos da rede na presença de ruído aditivo.

Estas divergências, como com as divergências numa teoria quântica de campos, podem ser canceladas introduzindo contratermos. Especificamente, a idéia é a seguinte. As soluções de equilíbrio das equações de GLL, após a média sobre diferentes realizações de ruído, é equivalente à média calculada através da função de

partição clássica

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\beta U[\phi]}, \quad (5.7)$$

onde $U[\phi]$ é o Hamiltoniano de Ginzburg-Landau, conforme discutido anteriormente. O valor médio de equilíbrio de $\phi(\mathbf{x}, t)$ é dado através da integral funcional

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(\mathbf{x}, t) e^{-\beta H[\phi]}. \quad (5.8)$$

Esta integral funcional é divergente no ultravioleta. A adição de contra-termos a $U[\phi]$ elimina estas divergências. Portanto, a idéia é modificar $U[\phi]$ pela adição de contratermos $U_{CT}[\phi]$ e usar este potencial modificado nas simulações com as equações de GLL.

Em três dimensões espaciais, somente um número finito de diagramas de Feynman é divergente no presente modelo que estamos considerando – a teoria é super-renormalizável. Portanto, para renormalizar a teoria precisa-se calcular somente dois diagramas, um tadpole e um setting-sun. Uma boa referência para cálculos perturbativos e renormalização em teorias de Mecânica Estatística é o livro de Parisi [38]. Estes foram calculados por diferentes autores, mas para os propósitos desta Dissertação, vamos usar o resultado de Farakos et al. [39], os quais calcularam estes diagramas usando teoria de perturbação na rede. A vantagem de se usar o resultado destes autores, é que em nossas simulações estamos também usando uma rede cúbica e, portanto, os contratermos calculados aparecem com o mesmo cutoff ultravioleta, que é o espaço na rede h . Os contratermos – para um potencial da forma da Eq.(5.2) – implicam num termo extra ao potencial na forma

$$U_{CT}[\phi] = \lambda \frac{\phi^2}{2} \left\{ -3 \times 0,252731 \left(\frac{T}{h} \right) + \lambda \frac{6 T^2}{(4\pi)^2} \left[\log \left(\frac{6}{\mu h} \right) + 0,09 \right] \right\}, \quad (5.9)$$

onde λ é a constante de acoplamento (tomada igual a 1 na Eq.(5.2)), T é a temperatura do banho térmico e μ é a escala de renormalização.

Na Fig. 5.10 apresentamos os resultados das simulações para os mesmos parâmetros que os usados na figura anterior. Para a escala de renormalização μ , empregamos $\mu = 1$ – os resultados não dependem muito deste parâmetro. Como pode ser observado nesta figura, os resultados convergem e estabilizam no valor $\langle \phi \rangle \approx 1.15$. Talvez seja conveniente mencionar que à temperatura finita, o mínimo da energia livre não é o mínimo de $U[\phi]$ – devido precisamente aos efeitos de temperatura – e, portanto, o parâmetro de ordem deve termalizar num valor $\langle \phi \rangle > 1$, conforme realmente acontece. Outra observação é que a solução torna-se independente do espaçamento da rede h no equilíbrio, para tempos por volta do fim da explosão espinodal, as soluções apresentam sim alguma sensibilidade a h . Isto é devido ao fato que os contratermos

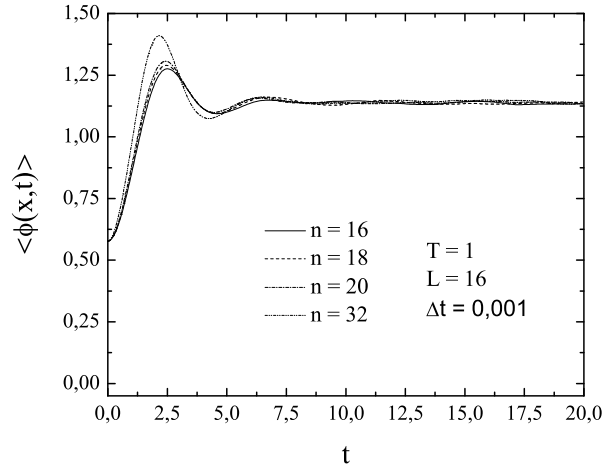


Figura 5.10: Valor médio do parâmetro de ordem em função do tempo para diferentes números de pontos da rede na presença de ruído e de contra-termos.

(os diagramas tadpole e setting-sun) foram calculados [39] com a função de partição de equilíbrio e, portanto, deve-se esperar independência de h somente no equilíbrio.

5.3 Resultados para o modelo de Gleiser-Ramos

A equação de GLL efetiva correspondente ao modelo de Glesier e Ramos é da forma

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) + \eta \phi^2(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + U'[\phi, T] = \phi(\mathbf{x}, t) \zeta(\mathbf{x}, t), \quad (5.10)$$

onde

$$U'[\phi, T] = -\frac{\lambda}{24}(T_c^2 - T^2)\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3. \quad (5.11)$$

Para $T < T_c$, os pontos de mínimo do potencial $U[\phi, T]$ são dados por

$$\phi_0^2 = \frac{1}{4} T_c^2 \left(1 - T^2/T_c^2\right). \quad (5.12)$$

Com o aumento da temperatura para $T > T_c$, o potencial tem um único mínimo, $\phi_0 = 0$. Ou seja, para $T \geq T_c$, o potencial poço duplo muda para poço simples, i.e. a simetria pode ser restaurada. Uma diferença adicional aos casos estudados anteriormente é que estamos tratando com ruído multiplicativo.

Conforme argumentado ao final do Capítulo 3, vamos empregar o mesmo coeficiente cinético η que o derivado por GR, uma vez que este coeficiente de dissipação não é mais um parâmetro livre. Na Fig. 5.11 apresentamos o resultado de simulações para o valor médio do parâmetro de ordem tanto para a fase simétrica quanto para

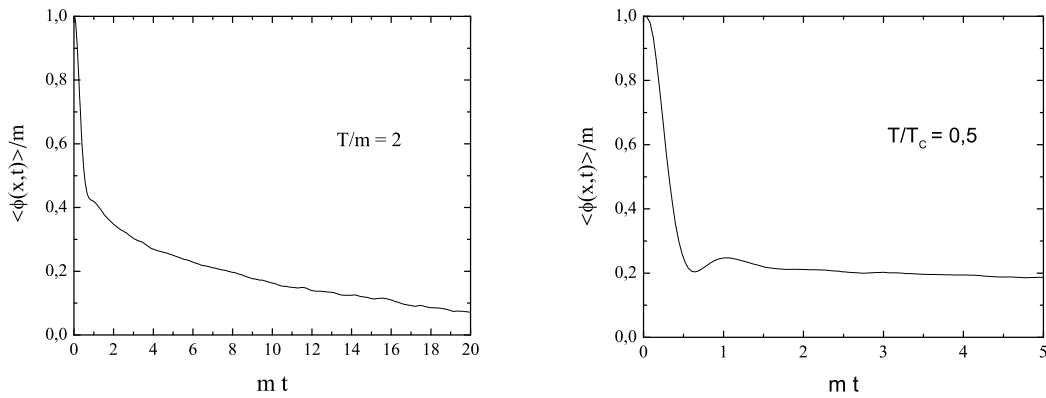


Figura 5.11: Solução, respectivamente, para as fases simétrica e quebrada da equação de Gleiser e Ramos. m é o parâmetro de massa na Lagrangiana.

a fase quebrada do modelo de GR. Para a fase simétrica, utilizamos os parâmetros $T/m = 2$, onde m é o parâmetro de massa na Lagrangiana e, para a fase quebrada, $T/T_c = 0,5$. Em ambas as simulações, a constante de acoplamento utilizada foi de $\lambda = 0,25$ e empregamos como condição inicial uma distribuição ruidosa, com valor médio ϕ_0 igual ao valor na linha espinodal para $T < T_c$. Dos vários testes feitos levando-se em consideração o espaçamento de rede e o intervalo temporal, concluímos que o incremento temporal tem que ser consideravelmente menor do que quando simulamos sistemas sem ruído.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas futuras

Nesta Dissertação realizamos um estudo sobre transições de fase dinâmicas, com ênfase na evolução no tempo de transições de fase a partir da descrição da relaxação de parâmetros de ordem não-conservados através de equações cinéticas estocásticas do tipo Ginzburg-Landau-Langevin (GLL). Os objetivos principais eram fazer uma revisão sobre estes assuntos, e propor métodos numéricos para a solução das equações estocásticas GLL.

No Capítulo 2 apresentamos uma breve revisão dos conceitos relacionados a transições de fase e fenômenos críticos dinâmicos. A partir desta introdução, discutimos os aspectos estáticos e dinâmicos de transições de fase, enfatizando as equações dinâmicas de natureza estocástica. Após a revisão de conceitos gerais, discutimos as equações de Langevin e de Fokker-Planck para o movimento de uma partícula clássica sob a ação de uma força dissipativa e de uma força estocástica. Após, discutimos a generalização destas equações para o caso de um sistema de infinitos graus de liberdade, em que o parâmetro de ordem é descrito por um campo escalar dependente do tempo e do espaço. Derivamos a forma geral para a energia livre de Ginzburg-Landau para sistemas próximos do equilíbrio termodinâmico, e discutimos o fenômeno da decomposição espinodal.

No Capítulo 3, revisamos o trabalho de Gleiser e Ramos [8]. Os objetivos desta revisão foram vários. Em primeiro lugar, ela serviu para revisar conceitos e técnicas de teorias de campos a temperatura finita, assunto de conhecimento básico na área de transições de fase. Em segundo lugar, esta revisão tinha por objetivo mostrar como fenômenos de dissipação e irreversibilidade surgem de uma teoria quântica de campos microscópica, com dinâmica reversível no tempo. E, por último, queríamos motivar desenvolvimentos futuros, os quais comentaremos mais a seguir. Especificamente, empregando o formalismo *in-in* de Schwinger para a ação efetiva quântica, mostramos como é possível derivar uma equação de Ginzburg-Landau-Langevin efetiva a partir de correções quânticas. Os resultados obtidos foram no contexto da *loop*

expansion a ordem \hbar^2 , e em teoria de perturbação até segunda ordem na constante de acoplamento. Os termos de dissipação e flutuação das equações fenomenológicas de GLL apareceram naturalmente de partes imaginárias de diagramas de loops na ação efetiva e auto-energias. Por outro lado, os termos estocásticos apareceram através de uma técnica de eliminar as partes imaginárias da ação efetiva em favor de campos estocásticos auxiliares denominada de transformação de Hubbard-Stratonovich. Conforme mencionado ao final do Capítulo 3, o cálculo perturbativo de Gleiser e Ramos é, até certo ponto, puramente acadêmico, pois a expansão perturbativa não converge para temperaturas altas e um certo tipo de re-soma é necessária. No entanto, conforme mencionamos, para os propósitos de ilustrar o aparecimento de dissipação numa teoria quântica de campos e para a obtenção de equações de GLL efetivas, a derivação de Gleiser-Ramos é, no mínimo, pedagógica, e também serve os propósitos para motivar futuros desenvolvimentos.

A fundamentação teórica foi concluída no Capítulo 4. Neste, mostramos como, a partir da inclusão de efeitos de memória na equação de Ginzburg-Landau-Langevin usual, obtemos um termo extra de derivada segunda no tempo. Conforme mencionamos no início do Capítulo 4, o termo de derivada primeira nas equações de GLL descreve processos difusivos, os quais são o resultado de eventos de espalhamentos microscópicos de altíssima frequência. A equação de difusão, em particular, descreve a situação limite de espalhamentos microscópicos de frequências infinitamente altas e, portanto, ela não respeita causalidade. Neste sentido, o termo de derivada segunda que aparece numa equação efetiva derivada de uma teoria relativística nada mais é do que o resultado da incorporação automática da causalidade ao nível microscópico pelo tratamento relativístico da teoria de campos empregada na sua derivação. Mostramos que estes efeitos podem ser incorporados na equação usual através de funções de memória. A seguir, passamos a discutir os métodos para a solução numérica de equações de GLL deste tipo. Abordamos duas técnicas distintas de discretização das equações numa rede espacial, o método das diferenças finitas e método de colocação de Fourier. Além disto, mostramos também como tratar ruído aditivo e multiplicativo.

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos os resultados numéricos obtidos utilizando os métodos desenvolvidos no Capítulo 4. Apresentamos os resultados para a situação na qual o sistema apresenta apenas dissipação – os termos de ruído, que representam as flutuações termodinâmicas, foram ignorados inicialmente. Analisamos numericamente a convergência e estabilidade dos métodos propostos com relação às discretizações no tempo e no espaço, bem como em relação ao tamanho da rede. Mostramos através de uma série razoavelmente exaustiva de simulações que os resultados são robustos, no sentido de serem estáveis e convergentes. Logo após dis-

cutimos a inclusão de ruído aditivo, e na última Seção deste Capítulo examinamos o ruído multiplicativo no contexto da equação de GLL efetiva derivada por Gleiser e Ramos. Discutimos, em particular, as dificuldades devido a divergências ultravioletas que se refletem na sensibilidade dos resultados ao espaçamento da rede. Estas divergências, como com as divergências numa teoria quântica de campos, podem ser canceladas introduzindo contratermos derivados na literatura. Por fim, usamos a equação de GLL efetiva na fase quebrada, para evidenciar a restauração de simetria a altas temperaturas.

Como já dito anteriormente, não era o objetivo desta Dissertação estudar as implicações fenomenológicas das diferentes equações de GLL em um campo específico. Empregamos as equações na forma adimensional e, portanto, nossos resultados podem ser diretamente transcritos para qualquer campo de aplicação, bastando adequar os valores dos parâmetros livres que aparecem nas equações, com o coeficiente cinético e temperatura. Todas nossas simulações se referiram ao valor médio espacial do parâmetro de ordem. A motivação para nos concentrarmos neste observável é que ele desempenha papel central em toda e qualquer discussão sobre a relaxação ao equilíbrio do parâmetro de ordem. Obviamente que uma infinidade de outros observáveis, tais como funções de correlação, desempenham papel importante em qualquer investigação sobre a dinâmica de transições de fase. No entanto, julgamos que a apresentação de resultados para outros observáveis, sem se referir a uma fenomenologia de um campo de aplicação específico, tornaria a discussão maçante e sem objetividade.

Como desenvolvimentos futuros, pretendemos nos concentrar no uso de métodos de aproximação não-perturbativos para derivar equações de GLL efetivas. Especificamente, estamos planejando [40] nos concentrar na obtenção de equações de movimento para os parâmetros de ordem a partir de ações efetivas quânticas irredutíveis a 2-partículas (2PI). Para a obtenção da ação efetiva pretendemos desenvolver um esquema de aproximação baseado no método do “Hamiltoniano termodinamicamente equivalente” (TEH), desenvolvido inicialmente por Bogoliubov, Zubarev e Tserkovnikov (BZT) [41], e aprimorado por Wentzel [42], tendo em vista basicamente aplicações em supercondutividade e ferromagnetismo. Este método foi generalizado por Girardeau [43] para interações gerais – não só para interações de pareamento adequadas para supercondutividade. O esquema de aproximação do método TEH está baseado numa escolha de momentos transferidos nas interações que formam um conjunto *discreto e finito* de momentos, escolha esta feita de maneira judiciosa tal que capturem os efeitos principais do fenômeno em estudo. Uma vez fixado este conjunto discreto e finito de momentos transferidos, o Hamiltoniano do sistema pode ser diagonalizado exatamente através de uma transformação unitária linear. Esta

transformação unitária depende explicitamente de funções de gap que podem ser determinadas através de um método variacional.

Apêndice A

O formalismo de tempo imaginário

O formalismo de tempo imaginário foi desenvolvido por muitas pessoas, dentre as quais podemos citar T. Matsubara, R. Kubo, J. Schwinger e P.C. Martin. Os vários trabalhos desenvolvidos levaram à introdução da representação do parâmetro de ordem no espaço de Fourier. Na linguagem de Fourier, o formalismo desenvolvido por Matsubara apresenta as energias, conhecidas como frequências de Matsubara, como sendo discretas. Uma das desvantagens deste formalismo em relação àquele desenvolvido no espaço de Minkowski está no fato de que as quantidades energia e tempo não são físicos, uma vez que ambos se apresentam complexos neste cenário. Outra desvantagem está no fato de que este formalismo descreve sistemas quânticos em equilíbrio termodinâmico, e, assim, não pode ser usado para o estudo de fenômenos de não equilíbrio, tais como transições de fase.

Este formalismo, desenvolvido no espaço de Euclides, está baseado na analogia existente entre β (o inverso da temperatura, $\beta = 1/T$, $\kappa_B = 1$) e o tempo imaginário. Assim, as funções de Green decorrentes deste possuem argumentos puramente imaginários. Neste Apêndice faremos uma introdução da teoria do campo escalar real neutro (ou seja, potencial químico nulo). Neste desenvolvimento levaremos em conta tanto a teoria livre quanto a teoria autointeragente. Como referência bibliográfica para desenvolvermos este Apêndice, usaremos o paper de Landsman e van Weert [26] e o livro de Michel Le Bellac [29].

Para iniciarmos este Apêndice, vamos mudar do espaço de Minkowski (tempo real) para o espaço de Euclides (tempo imaginário). É importante ressaltar que este procedimento é apenas um artefato de cálculo, uma ferramenta matemática, uma vez que não existe tempo imaginário.

O formalismo desenvolvido no espaço de Euclides é também conhecido como formalismo de Matsubara. Neste formalismo, a ação correspondente é chamada de ação Euclideana e, na função de partição, a integração na variável temporal é feita sobre um intervalo finito. Além disso, supõe-se que as variáveis de campo sejam

periódicas no tempo, com período β . Assim, o formalismo de tempo imaginário é derivado do formalismo de tempo real a partir da seguinte continuação analítica

$$t \rightarrow -i\tau \quad \text{ou} \quad x^0 \rightarrow -ix_4, \quad (\text{A.1})$$

com $\tau(x_4)$ real. Conforme dito acima, estamos passando do espaço de Minkowski para o espaço de Euclides, logo, a métrica naquele espaço transforma-se na métrica Euclideana (ocorre apenas uma mudança de sinal - a métrica é toda positiva ou toda negativa)

$$t^2 - \mathbf{x}^2 \rightarrow (-i\tau)^2 - \mathbf{x}^2 = -(\tau^2 + \mathbf{x}^2). \quad (\text{A.2})$$

Assim, a expressão para a Lagrangeana de Minkowski,

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \mathcal{V}(\phi), \quad (\text{A.3})$$

pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\mathcal{L}_M \rightarrow \mathcal{L}_E = -\frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \mathcal{V}(\phi), \quad (\text{A.4})$$

onde $x = (t, \mathbf{x})$ e

$$\int d^4x = \int dx_0 d^3x \rightarrow -i \int d\tau d^3x = -i \int d^4x_E. \quad (\text{A.5})$$

A ação Euclideana, $S_E(\beta)$, decorrente desta Lagrangeana é dada por

$$\begin{aligned} \exp[i S_M(\beta)] &= \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_M \right], \quad \rightarrow \quad \exp[-S_E(\beta)] = \exp \left[i(-i) \int_0^\beta d^4x_E \mathcal{L}_E \right], \\ S_E(\beta) &= \int_0^\beta d^4x_E \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \mathcal{V}(\phi) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde

$$(\partial_\mu \phi)^2 = (\partial_\tau \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 \quad \text{e} \quad \int_0^\beta d^4x_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x. \quad (\text{A.7})$$

O gerador funcional no formalismo de tempo imaginário é escrito da seguinte forma

$$Z(\beta; J) = \int D\phi \exp \left[-S_E(\beta) + \int_0^\beta d^4x_E J(x) \phi(x) \right]. \quad (\text{A.8})$$

Observação: para temperatura nula, $T = 0$, a integração temporal deve ser feita no intervalo $-\infty \leq \tau \leq +\infty$. A partir da diferenciação funcional da Eq.(A.8), obtemos o propagador em tempo imaginário

$$\frac{\delta Z(\beta; J)}{\delta J(x_2)} = \int D\phi \exp \left[-S_E(\beta) + \int_0^\beta d^4x_E J(x) \phi(x) \right] \int_0^\beta d^4x_E \delta(x - x_2) \phi(x). \quad (\text{A.9})$$

Portanto

$$\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^2 Z(\beta; J)}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{Z(\beta)} \int D\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{-S_E(\beta)}. \quad (\text{A.10})$$

A média térmica de um operador qualquer \hat{A} na descrição de Heisenberg é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \hat{A} \right) &= \sum_m \langle m | e^{-\beta \hat{H}} \hat{A} | m \rangle = \sum_m e^{-\beta E_m} \langle m | \hat{A} | m \rangle \\ \langle \hat{A} \rangle_\beta &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left(\hat{A} e^{-\beta \hat{H}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Logo, a partir da expressão contida no lado direito da Eq.(A.10), concluimos que

$$\langle T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)]. \quad (\text{A.12})$$

Vamos agora trabalhar com o campo escalar livre de interação, ou seja, $\mathcal{V} = 0$. Assim, obtemos uma integração Gaussiana para ser feita, seguida por uma integração por partes

$$\begin{aligned} Z_F(\beta; J) &= \int D\phi \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{\phi(x)}{2} (-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \phi(x) - J(x)\phi(x) \right] \right\} \\ &= \int D\phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \right] \phi(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi^2(x) + \int_0^\beta d\tau \int d^3x J(x)\phi(x) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde usamos o fato de que $\phi(0) = \phi(\beta)$ e de que $(\partial\phi/\partial x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. O gerador funcional livre pode ser escrito como

$$Z_F(\beta; J) = \int D\phi \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{\phi(x)}{2} (-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \phi(x) - J(x)\phi(x) \right] \right\}. \quad (\text{A.14})$$

Assim, integrando, obtemos

$$Z_F(\beta; J) = Z_F(\beta) \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y) \right), \quad (\text{A.15})$$

nesta expressão, $G_F(x-y)$ é a função de Green de dois pontos. Esta função é a solução da equação diferencial parcial descrita a seguir

$$(-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) G_F(x-y) = \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.16})$$

Esta equação diferencial parcial é periódica na variável temporal τ , com período igual a β . No espaço de Fourier,

$$G_F(x - y) = T \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})+i\omega_n(\tau_x-\tau_y)} \tilde{G}_F(i\omega_n, \vec{k}). \quad (\text{A.17})$$

Podemos aplicar nesta expressão a equação anterior. Usando as representações da função delta tanto no modo contínuo, $(\vec{x} \text{ e } \vec{y})$, quanto no modo discreto $(\tau_x \text{ e } \tau_y)$ e reorganizando os termos, concluímos que

$$(\omega_n^2 + k^2 + m^2) \tilde{G}_F(i\omega_n, \vec{k}) = 1, \quad (\text{A.18})$$

onde $\omega_k = (k^2 + m^2)^{1/2}$ e, assim, obtemos o propagador de Matsubara (ou de tempo imaginário)

$$G_F(i\omega_n, k) = \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2}. \quad (\text{A.19})$$

Frequentemente, em cálculos que envolvem o formalismo de tempo imaginário, o qual é desenvolvido completamente dentro do contexto de sistemas em equilíbrio, encontraremos somas sobre as frequências de Matsubara, ω_n , para serem feitas. Por isso, torna-se muito importante o aprendizado de ao menos uma das técnicas existentes para lidar com estas. Para explicitar melhor o que estamos dizendo, daremos um exemplo, com somas de frequências que estão normalmente presentes em diagramas de loop

$$S(i\omega_m) = T \sum_n G(i(\omega_m - \omega_n)) G'(i\omega_n), \quad (\text{A.20})$$

onde as frequências de oscilação ω e ω' referem-se, respectivamente, a G e G' . Uma representação mista para o propagador pode ser dada pela expressão abaixo

$$G_F(\tau, k) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} G_F(i\omega_n, k). \quad (\text{A.21})$$

A transformada de Fourier desta expressão é dada por

$$\int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_n \tau'} G(\tau') = T \int_0^\beta d\tau \sum_n G(i\omega_n) e^{-i\omega_n(\tau-\tau')}, \quad (\text{A.22})$$

usando o fato de que

$$\sum_n e^{-i\omega_n(\tau-\tau')} = \beta \delta(\tau - \tau'), \quad (\text{A.23})$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_n \tau'} G(\tau') &= T \int_0^\beta d\tau G(i\omega_n) \beta \delta(\tau - \tau') \\ G(i\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Usando esta representação de Fourier e a relação

$$T \sum_n e^{i\omega_n \tau} = \sum_p \delta(\tau - p\beta), \quad (\text{A.25})$$

onde $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ na Eq.(A.20), obtemos

$$S(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\tau) G'(\tau'). \quad (\text{A.26})$$

A seguir, usaremos as expressões de $G(\tau)$ e $G'(\tau)$ em termos das funções espectrais (para maiores detalhes sobre este assunto, veja o Apêndice H), dadas por

$$G(\tau) = \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0 \tau} (1 + f(k_0)) \rho(k_0). \quad (\text{A.27})$$

Substituindo esta na expressão anterior e lembrando que $e^{i\omega_n \beta} = 1$ (pois $\omega_n = 2\pi n/\beta$), obtemos

$$\begin{aligned} S(i\omega_m) &= - \int \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{dk'_0}{2\pi} (1 + f'(k'_0) + f(k_0) + f(k_0) f'(k'_0)) \\ &\times \rho(k_0) \rho'(k'_0) \left(\frac{1 - e^{-(k_0+k'_0)\beta}}{i\omega_m - k_0 - k'_0} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Inserindo nesta a expressão de $f(k_0) = e^{-\beta k_0}/(1 - e^{-\beta k_0})$, trabalhando com os termos, cancelando aqueles que se anulam e reorganizando os restantes, chegamos a

$$S(i\omega_m) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{dk'_0}{2\pi} (1 + f'(k'_0) + f(k_0)) \left(\frac{\rho(k_0) \rho'(k'_0)}{i\omega_m - k_0 - k'_0} \right). \quad (\text{A.29})$$

Apêndice B

Mecânica estatística quântica e integrais de trajetória

Neste Apêndice, apresentaremos a mecânica estatística quântica desenvolvida no contexto do formalismo de tempo imaginário. Esta derivação será feita com base naquela desenvolvida na Ref [29], de Michel Le Bellac. Seja $F(q', -i\tau'; q, -i\tau)$ a amplitude de probabilidade de encontrar uma partícula, inicialmente na posição q e no tempo τ , na posição q' , no tempo τ'

$$\begin{aligned} F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \langle q' | \exp[-\hat{H}(\tau' - \tau)] | q \rangle \\ &= \langle q' | \exp\left[-(\tau' - \tau) \left(\frac{\hat{p}^2}{2m}\right) - (\tau' - \tau)V(\hat{q})\right] | q \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

A seguir, dividimos o intervalo $[\tau, \tau']$ em $(n+1)$ subintervalos, cada um de tamanho $\varepsilon = (\tau' - \tau)/(n+1)$, com $n \rightarrow \infty$. Relacionando os extremos do intervalo temporal com a divisão feita neste, podemos escrever

$$q \leftrightarrow q_0 \quad \text{e} \quad q' \leftrightarrow q_{n+1}. \quad (\text{B.2})$$

Vamos fazer duas redefinições

$$A \equiv -(\tau' - \tau) \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad \text{e} \quad B \equiv -(\tau' - \tau) V(\hat{q}), \quad (\text{B.3})$$

logo

$$F \sim \langle q' | e^{A+B} | q \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Pela fórmula de Trotter (ou do produto de Lie),

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{A/n} e^{B/n} \right)^n. \quad (\text{B.5})$$

Para $n \rightarrow \infty$, podemos igualmente escrever $n+1$

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle q' | \left\{ \exp\left[-\frac{(\tau' - \tau)}{(n+1)} \frac{\hat{p}^2}{2m}\right] \exp\left[-\frac{(\tau' - \tau)}{(n+1)} V(\hat{q})\right] \right\}^{n+1} | q \rangle. \quad (\text{B.6})$$

Para tempos pequenos ($\varepsilon \rightarrow 0$), podemos provar que o operador de evolução temporal, do modo como foi definido até agora, Eq.(B.1),

$$U_\varepsilon = \exp(-\hat{H}\varepsilon), \quad (\text{B.7})$$

é igual a outro operador de evolução, o qual chamaremos de W_ε , a menos de termos de $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$

$$W_\varepsilon \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}V(\hat{q})\varepsilon\right) \exp(-\hat{H}_0\varepsilon) \exp\left(-\frac{1}{2}V(\hat{q})\varepsilon\right). \quad (\text{B.8})$$

A demonstração da afirmação acima é feita através da expansão das funções exponenciais presentes em cada operador. Comparando os termos ordem a ordem, o resultado é obtido facilmente. A Eq.(B.6) pode ser reescrita como

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle q' | [W_\varepsilon]^{n+1} | q \rangle. \quad (\text{B.9})$$

O próximo passo consiste em inserimos conjuntos completos do operador posição a tempos τ_1, \dots, τ_n

$$\begin{aligned} F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dq_n dq_{n-1} dq_{n-2} \cdots dq_2 dq_1 \\ &\times \langle q' | W_\varepsilon | q_n \rangle \langle q_n | W_\varepsilon | q_{n-1} \rangle \langle q_{n-1} | W_\varepsilon | q_{n-2} \rangle \cdots \\ &\times \langle q_2 | W_\varepsilon | q_1 \rangle \langle q_1 | W_\varepsilon | q \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Podemos obter explicitamente os elementos de matriz presentes nesta expressão. Para isto, vamos considerar $|q\rangle$ vetores tais que representem os autoestados do operador posição \hat{q} e, em seguida, vamos inserir conjuntos completos de autoestados $|p\rangle$ do operador momentum \hat{p}

$$\begin{aligned} F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dq_n dq_{n-1} dq_{n-2} \cdots dq_2 dq_1 dp_n dp_{n-1} dp_{n-2} \cdots dp_2 dp_1 dp_0 \\ &\times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q') + V(q_n)]\right) \langle q' | p_n \rangle \exp\left(-\varepsilon \frac{p_n^2}{2m}\right) \langle p_n | q_n \rangle \\ &\times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q_n) + V(q_{n-1})]\right) \langle q_n | p_{n-1} \rangle \exp\left(-\varepsilon \frac{p_{n-1}^2}{2m}\right) \langle p_{n-1} | q_{n-1} \rangle \\ &\times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q_{n-1}) + V(q_{n-2})]\right) \langle q_{n-1} | p_{n-2} \rangle \exp\left(-\varepsilon \frac{p_{n-2}^2}{2m}\right) \langle p_{n-2} | q_{n-2} \rangle \\ &\times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q_2) + V(q_1)]\right) \langle q_2 | p_1 \rangle \cdots \exp\left(-\varepsilon \frac{p_1^2}{2m}\right) \langle p_1 | q_1 \rangle \\ &\times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q_1) + V(q)]\right) \langle q_1 | p_0 \rangle \exp\left(-\varepsilon \frac{p_0^2}{2m}\right) \langle p_0 | q \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Mas

$$\langle p_l | q_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-ip_l q_l]. \quad (\text{B.12})$$

Logo, a amplitude de probabilidade $F(q', -i\tau'; q, -i\tau)$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dq_n dq_{n-1} dq_{n-2} \cdots dq_2 dq_1 dp_n dp_{n-1} dp_{n-2} \cdots dp_2 dp_1 dp_0 \\
 &\times \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q') + V(q_n)]\right) \exp\left(-\varepsilon \frac{p_n^2}{2m} + i p_n (q' - q_n)\right) \\
 &\times \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q_n) + V(q_{n-1})]\right) \exp\left(-\varepsilon \frac{p_{n-1}^2}{2m} + i p_{n-1} (q_n - q_{n-1})\right) \\
 &\times \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q_{n-1}) + V(q_{n-2})]\right) \exp\left(-\varepsilon \frac{p_{n-2}^2}{2m} + i p_{n-2} (q_{n-1} - q_{n-2})\right) \cdots \\
 &\times \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q_2) + V(q_1)]\right) \exp\left(-\varepsilon \frac{p_1^2}{2m} + i p_1 (q_2 - q_1)\right) \\
 &\times \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[V(q_1) + V(q)]\right) \exp\left(-\varepsilon \frac{p_0^2}{2m} + i p_0 (q_1 - q_0)\right). \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

O próximo passo é completar quadrados em cada parte desta expressão. Isto feito, é possível perceber que um dos termos é independente da variável de integração p , porém, dependente da outra variável de integração, q . Logo, estes termos podem ser realocados para a integração apenas em q

$$i p_l (q_{l+1} - q_l) - \varepsilon \frac{p_l^2}{2m} = -\frac{\varepsilon}{2m} \left[p_l - \frac{i m}{\varepsilon} (q_{l+1} - q_l) \right]^2 - \frac{m}{2\varepsilon} (q_{l+1} - q_l)^2. \tag{B.14}$$

Outro detalhe importante deste método de completar quadrados é a facilidade com que conseguimos transformar uma integração que aparentemente era muito complicada na variável p para uma integração do tipo gaussiana, a qual é muito bem estabelecida. Antes de partir para a integração gaussiana, é conveniente separar as funções exponenciais, realocando os termos que contêm apenas dependência na variável de integração q

$$\begin{aligned}
 F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dq_n dq_{n-1} dq_{n-2} \cdots dq_2 dq_1 \\
 &\times \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2} \left[V(q') + 2V(q_n) + 2V(q_{n-1}) + \cdots + 2V(q_2) + 2V(q_1) + V(q) \right]\right\} \\
 &\times \exp\left\{-\frac{m}{2\varepsilon} \left[(q_{n+1} - q_n)^2 + (q_n - q_{n-1})^2 + (q_{n-1} - q_{n-2})^2 \right. \right. \\
 &+ \cdots + (q_2 - q_1)^2 + (q_1 - q_0)^2 \left. \left. \right] \right\} \int \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} dp_n dp_{n-1} dp_{n-2} \cdots dp_2 dp_1 dp_0 \\
 &\times \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2m} \left[\left(p_n - \frac{i m}{\varepsilon} (q_{n+1} - q_n) \right)^2 + \left(p_{n-1} - \frac{i m}{\varepsilon} (q_n - q_{n-1}) \right)^2 \right. \right. \\
 &+ \cdots + \left. \left. \left(p_1 - \frac{i m}{\varepsilon} (q_2 - q_1) \right)^2 + \left(p_0 - \frac{i m}{\varepsilon} (q_1 - q_0) \right)^2 \right] \right\}. \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

Nesta etapa, faremos dois procedimentos: para os integrandos que contém argumentos apenas na variável q , construiremos uma fórmula de recorrência para que possamos simplificar a expressão obtida. Já para os integrandos que contém argumentos apenas na variável p , procederemos à integração gaussiana. O primeiro passo é obtido de maneira direta. Para o segundo passo, porém, devemos fazer a seguinte troca de variáveis

$$\left[p_n - \frac{i m}{\varepsilon}(q_{n+1} - q_n) \right] \rightarrow p'_n, \quad dp_n \rightarrow dp'_n. \quad (\text{B.16})$$

Assim

$$\begin{aligned} F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \prod_{l=1}^n dq_l \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} \left[\sum_{l=0}^n (V(q_{l+1}) + V(q_l)) \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{m}{2\varepsilon} \left[\sum_{l=0}^n (q_{l+1} - q_l)^2 \right] \right\} \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon/2m}} \right)^{n+1}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

ou, igualmente,

$$\begin{aligned} F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{1/2} \int \prod_{l=1}^n \left[\left(\frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{1/2} dq_l \right] \\ &\times \exp \left\{ -\varepsilon \left[\sum_{l=0}^n \frac{m(q_{l+1} - q_l)^2}{2\varepsilon^2} + \sum_{l=0}^n V \left(\frac{q_l + q_{l+1}}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Para escrevermos esta última expressão, negligenciamos alguns termos de superfície, o que pode ser feito devido ao limite no qual estamos interessados. Nesta equação, podemos reconhecer uma soma de Riemann para uma dada integração (a qual costumemente chamamos de ação Euclideana), presente no argumento da função exponencial. Assim, por fim, chegamos a uma representação de integral de trajetória

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \int Dq(\tau'') \exp \left[- \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau'') + V(q(\tau'')) \right) \right]. \quad (\text{B.19})$$

Nesta expressão, $Dq(\tau'')$ é dado pelo limite de $\varepsilon \rightarrow 0$ da medida de integração. As condições de fronteira sobre as trajetórias $q(\tau'')$ são dadas por $q(\tau) = q$ e $q(\tau') = q'$.

Podemos fazer uma conexão com a mecânica estatística quântica, onde $\beta = 1/T$, $\kappa_B = 1$. Este procedimento apenas pode ser feito para um sistema em equilíbrio termodinâmico, uma vez que a quantidade temperatura só pode ser definida para tal sistema. A função de partição em mecânica estatística é dada por

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}. \quad (\text{B.20})$$

A operação denominada de traço consiste em fazer uma soma sobre todos os graus de liberdade do sistema mencionados no Hamiltoniano que o descreve. Temos, então, duas possibilidades em particular

1. usar um conjunto completo de autoestados do operador \hat{H} ou
2. usar um conjunto completo de autoestados do operador posição.

Inicialmente vamos usar a segunda opção

$$Z(\beta) = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle. \quad (\text{B.21})$$

A função exponencial presente nesta expressão pode ser interpretada formalmente como o operador de evolução em tempo imaginário. Assim

$$Z(\beta) = \int dq F(q, -i\beta; q, 0), \quad (\text{B.22})$$

ou seja, a função de partição pode ser expressa como uma integral de trajetória

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int Dq(\tau) \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau) + V(q(\tau)) \right) \right] \\ &= \int Dq(\tau) \exp[-S_E(\beta)]. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Agora, entretanto, as condições de fronteira são tais que as trajetórias apresentam período β em tempo imaginário, uma vez que

$$q(\beta) = q(0). \quad (\text{B.24})$$

Apêndice C

O potencial efetivo

O potencial clássico de uma teoria quântica de campos tem um papel fundamental no estudo da questão da quebra de simetria nestes sistemas. Contudo, muitas vezes as correções radiativas em uma teoria quântica podem alterar o comportamento do potencial clássico, uma vez que o mínimo deste potencial pode ser instável a estas correções radiativas. Por essa razão, a quantidade correta a ser considerada é o potencial efetivo, pois este leva em consideração as correções quânticas da teoria. Este novo potencial, porém, não apresenta uma forma fechada como ocorre com o potencial clássico. Conseqüentemente, sua estrutura tem que ser estudada ordem por ordem em teoria de perturbação. Esta expansão perturbativa é escrita em termos do número de *loops* dos diagramas de Feynman, o que coincide também com uma expansão em potências de \hbar .

Para desenvolvermos este Apêndice utilizamos a Ref. [24]. A ação efetiva pode ser expandida em potências de momento (em torno do ponto no qual todos os momentos externos se anulam). No espaço de configuração, esta expansão é dada por

$$\Gamma[\varphi] = \int d^4x \left[-\mathcal{V}(\varphi) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 Z[\varphi] + \dots \right]. \quad (\text{C.1})$$

Nesta expressão, $\mathcal{V}(\varphi)$ - uma função, não um funcional - é chamado de potencial efetivo. Neste Apêndice pretendemos obter uma interpretação física para esta quantidade. O funcional $Z[J]$ é dado pela seguinte amplitude de transição

$$Z[J] = \tilde{N} \langle \phi_f(\vec{x}) | e^{-iH(J)(t_f-t_i)} | \phi_i(\vec{x}) \rangle, \quad (\text{C.2})$$

onde $H(J)$ é o Hamiltoniano correspondente à densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}[\phi, J] = \mathcal{L}[\phi] + J(x)\phi(x). \quad (\text{C.3})$$

O fator de normalização \tilde{N} deve ser tal que $Z[0] = 1$. Vamos expandir a amplitude de transição em um conjunto completo de autoestados de energia,

$$\sum_n |n; J\rangle \langle n; J| = 1, \quad (\text{C.4})$$

tal que

$$H(J) | n; J \rangle = E_n(J) | n; J \rangle. \quad (\text{C.5})$$

Então

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_n \tilde{N} \langle \phi_f(\vec{x}) | e^{-iH(J)(t_f-t_i)} | n; J \rangle \langle n; J | \phi_i(\vec{x}) \rangle \\ &= \sum_n e^{-iE_n(J)T} \tilde{N} \langle \phi_f(\vec{x}) | n; J \rangle \langle n; J | \phi_i(\vec{x}) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

onde definimos $T = t_f - t_i$. Vamos explicitar a soma presente nesta expressão

$$\begin{aligned} Z[J] &= \tilde{N} e^{-iE_0(J)T} \langle \phi_f(\vec{x}) | 0; J \rangle \langle 0; J | \phi_i(\vec{x}) \rangle \\ &+ \tilde{N} e^{-iE_1(J)T} \langle \phi_f(\vec{x}) | 1; J \rangle \langle 1; J | \phi_i(\vec{x}) \rangle \\ &+ \tilde{N} e^{-iE_2(J)T} \langle \phi_f(\vec{x}) | 2; J \rangle \langle 2; J | \phi_i(\vec{x}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Porém, $E_0(J) < E_1(J) < E_2(J) < \dots$, então, para $T \rightarrow \infty$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Z[J] = \tilde{N} e^{-iE_0(J)T} \langle \phi_f(\vec{x}) | 0; J \rangle \langle 0; J | \phi_i(\vec{x}) \rangle, \quad (\text{C.8})$$

e

$$\tilde{N} = \lim_{T \rightarrow \infty} Z[J] \frac{1}{e^{-iE_0(J)T} \langle \phi_f(\vec{x}) | 0; J \rangle \langle 0; J | \phi_i(\vec{x}) \rangle} \Big|_{J=0} = \frac{e^{iE_0 T}}{\langle \phi_f(\vec{x}) | 0 \rangle \langle 0 | \phi_i(\vec{x}) \rangle} \quad (\text{C.9})$$

onde usamos a notação $E_0 \equiv E_0(J)|_{J=0}$ e $|0\rangle \equiv |0; J\rangle|_{J=0}$. Assim,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Z[J] \simeq \exp[-i(E_0(J) - E_0)T] \frac{\langle \phi_f(\vec{x}) | 0; J \rangle \langle 0; J | \phi_i(\vec{x}) \rangle}{\langle \phi_f(\vec{x}) | 0 \rangle \langle 0 | \phi_i(\vec{x}) \rangle}. \quad (\text{C.10})$$

Usando a definição de gerador funcional das funções de Green conexas, a Eq.(C.10) implica que, para $T \rightarrow \infty$,

$$W[J] = (E_0 - E_0(J)) T. \quad (\text{C.11})$$

Neste momento, vamos escolher a referência de energia como sendo $E_0 = 0$. Então,

$$W[J] = -E_0(J) T,$$

$$E_0(J) = -\frac{W[J]}{T}, \quad (\text{C.12})$$

onde $E_0(J)$ é a energia do estado fundamental do Hamiltoniano $H(J)$ na presença de fonte externa

$$H(J) = H - \int d^3x J(\vec{x}) \phi(\vec{x}). \quad (\text{C.13})$$

Procuramos o estado Ω que minimize o valor esperado da energia

$$\langle H(J) \rangle_{\Omega} = \frac{(\Omega, H(J) \Omega)}{(\Omega, \Omega)}, \quad (\text{C.14})$$

sujeito à condição de que os campos quânticos $\phi(\vec{x}, t)$ têm valor esperado independente do tempo, $\varphi(\vec{x})$,

$$\frac{(\Omega, \phi(\vec{x}, t) \Omega)}{(\Omega, \Omega)} = \varphi(\vec{x}). \quad (\text{C.15})$$

É conveniente impormos também a condição de que o estado Ω seja normalizado,

$$(\Omega, \Omega) = 1. \quad (\text{C.16})$$

Para minimizarmos o valor esperado dado em Eq.(C.14), sujeito aos vínculos dados pelas Eqs.(C.15) e (C.16), usamos o método de multiplicadores de Lagrange e, ao invés disso, minimizamos a quantidade f a seguir com respeito ao estado Ω

$$f = (\Omega, H(J) \Omega) - \alpha (\Omega, \Omega) - \int d^3x \beta(\vec{x}) (\Omega, \hat{\phi}(\vec{x}, t) \Omega). \quad (\text{C.17})$$

Isto fornece

$$H(J) \Omega = \alpha \Omega + \int d^3x \beta(\vec{x}) \hat{\phi}(\vec{x}, t) \Omega. \quad (\text{C.18})$$

Tanto α quanto $\beta(\vec{x})$ são escolhidos de tal modo que os vínculos dados pelas Eqs.(C.15) e (C.16) sejam satisfeitos e, assim, ambas dependem funcionalmente do valor esperado $\varphi(\vec{x})$. Na presença de fonte externa J , o Hamiltoniano $H(J)$ tem autovalor dado pela Eq.(C.5)

$$H(J) \Psi = \left[H - \int d^3x J(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \right] \Psi = E(J) \Psi, \quad (\text{C.19})$$

onde Ψ é um autovetor normalizado. Desde o começo das demonstrações deve estar implícito que quando a corrente externa é ligada, ou seja, inserida no sistema, ela é suavemente levada do valor zero até um valor constante $J(\vec{x})$, no qual ela permanece por um tempo longo T . Após isto, ela é suavemente desligada, até o valor zero. O efeito desta perturbação é o de converter o vácuo para um estado que tenha uma energia definida (um funcional de $J - E(J)$), no qual o estado permanece pelo mesmo tempo T , após o qual ele retorna para o seu estado de vácuo original. Portanto, podemos concluir que $E(J)$ é o valor de mínima energia na presença de corrente

$$H(J) \Psi = \left[H - \int d^3x J(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \right] \Psi = E_0(J) \Psi. \quad (\text{C.20})$$

Então, comparando esta com a Eq.(C.18), chegamos as seguintes quantidades

$$\begin{aligned} \Omega &= \Psi, \\ \beta(\vec{x}) &= J(\vec{x}), \\ \alpha &= E_0(J). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Inserindo estes resultados na Eq.(C.19) e tomando o produto escalar desta com Ψ , os estados de mínima energia nos quais os campos ϕ têm vínculos e apresentam valor esperado φ , temos

$$\begin{aligned} (\Omega, H(J) \Omega) &= E_0(J) (\Omega, \Omega) + \int d^3x J(\vec{x}) (\Omega, \hat{\phi}(\vec{x}) \Omega), \\ \langle H(J) \rangle &= E_0(J) + \int d^3x J(\vec{x}) \varphi(\vec{x}). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Inserindo nesta a Eq.(C.12),

$$\begin{aligned} \langle H(J) \rangle &= -\frac{W(J)}{T} + \int d^3x J(\vec{x}) \varphi(\vec{x}), \\ \langle H(J) \rangle &= \frac{1}{T} \left[-W[J] + \int d^4x J(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Comparando esta expressão com a da definição de ação efetiva, concluímos que

$$\langle H(J) \rangle = -\frac{1}{T} \Gamma[\varphi]. \quad (\text{C.24})$$

Para obtermos uma expressão similar a esta para o potencial efetivo, levamos em consideração a Eq.(C.1). Nesta, $\mathcal{V}(\varphi)$ é o potencial efetivo. Logo, este será obtido a partir da quantidade ação efetiva se tomarmos o campo clássico como sendo constante,

$$\Gamma[\varphi = \text{cte}] = \int d^4x [-\mathcal{V}(\varphi = \text{cte})] = -(V_3 T) \mathcal{V}(\varphi = \text{cte}), \quad (\text{C.25})$$

usando a expressão Eq.(C.24), chegamos finalmente ao resultado desejado

$$\frac{\langle H(J) \rangle}{V_3} = \mathcal{V}(\varphi = \text{cte}). \quad (\text{C.26})$$

Nestas expressões, V_3 é o volume tridimensional. Ou seja, em teoria quântica de campos, o potencial efetivo $\mathcal{V}(\varphi)$ representa uma densidade de energia: é o valor esperado da energia por unidade de volume em um certo estado para o qual o valor esperado do campo é $\varphi = \text{cte}$. Uma consequência direta disto é: se este potencial apresentar diversos mínimos locais, apenas ao mínimo absoluto é que corresponderá o verdadeiro estado de mínima energia (estado fundamental) da teoria.

Apêndice D

Demonstração da representação integral da função teta

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & k_0 > 0 \\ 0, & k_0 < 0 \end{cases} \quad \text{ou sua forma integral} \quad \theta(t) = - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta}.$$

Vamos provar a representação integral para a função teta. Iniciaremos com $t > 0$

$$\theta(t > 0) = - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta}. \quad (\text{D.1})$$

Esta função apresenta um polo simples no ponto $\omega = -i\eta$. Porém

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} = \oint_C - \int_{\text{semi-circulo } C}. \quad (\text{D.2})$$

C é um contorno tal que engloba o semi-plano superior ou inferior do plano complexo ω . Inicialmente trabalharemos com o semi-plano superior quando $R \rightarrow \infty$.

Começamos definindo outra função I

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left[-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\omega + i\eta} \right] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega a} f(\omega) \quad \text{onde } a = -t, t > 0.$$

Podemos re-escrever esta integral em termos dos ângulos de Euler

$$\begin{aligned} \omega = z &= R e^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta), & d\omega = dz &= R e^{i\theta} i d\theta \\ I_R &= \int_0^\pi (i R e^{i\theta} d\theta) e^{-itR(\cos \theta + i \sin \theta)} \left[-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{R e^{i\theta} + i\eta} \right] \\ &= -\frac{R}{2\pi} \int_0^\pi d\theta e^{i\theta} e^{-itR \cos \theta} e^{tR \sin \theta} \frac{1}{R e^{i\theta} + i\eta}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

seu módulo ao quadrado será dado por

$$\begin{aligned} |I_R|^2 &= \left(\frac{R}{2\pi} \right)^2 \int_0^\pi d\theta e^{2tR \sin \theta} \frac{1}{R^2 + \eta^2}, \\ |I_R| &= \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi d\theta e^{tR \sin \theta} \frac{1}{(R^2 + \eta^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Suponha que R seja suficientemente grande tal que a fração presente no integrando desta expressão seja menor do que ε . Assim,

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq \frac{\varepsilon R}{2\pi} \int_0^\pi d\theta e^{tR \sin \theta} = \frac{2\varepsilon R}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta e^{tR \sin \theta} \\ &\leq \frac{\varepsilon R}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta e^{(2tR/\pi)\theta}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Esta expressão foi escrita com base no fato de que no intervalo $[0, \pi/2]$ podemos relacionar as funções θ e $\sin \theta$ através de $(2\theta/\pi) \leq (\sin \theta)$. Integrando esta função obtemos

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq \frac{\varepsilon}{2t} (e^{tR} - 1), \\ \lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| &\leq \infty. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Logo, concluímos que, para $t > 0$, não podemos usar o semi-plano superior do plano complexo. Trabalharemos, pois, no semi-plano inferior

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| = 0, \quad (\text{D.7})$$

e assim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \oint_c. \quad (\text{D.8})$$

Logo, podemos usar o teorema dos resíduos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i a \omega} f(\omega) + \lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| &= 2\pi i \sum (\text{resíduos do semi-plano inferior}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i a \omega} f(\omega) &= 2\pi i \left[\left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \lim_{\omega \rightarrow -i\eta} (\omega + i\eta) \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega + i\eta)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Porém, devido a orientação do contorno de integração,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left[-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\omega + i\eta} \right] = 1. \quad (\text{D.10})$$

Vamos, agora, obter expressão semelhante para $t < 0$. Entretanto, sabemos *a priori* que, nesta situação, poderemos apenas trabalhar com o semi-plano superior. Porém, não existem polos nesta parte do plano complexo. Assim:

$$\sum (\text{resíduos semi-plano superior}) = 0. \quad (\text{D.11})$$

Logo, concluímos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left[-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\omega + i\eta} \right] = 0. \quad (\text{D.12})$$

Assim, a prova da representação integral da função teta está completa.

Apêndice E

Dedução da Eq.(3.72)

Partimos da expressão

$$G(x-y) = G^>(x-y)\theta(t_x - t_y) + G^<(x-y)\theta(t_y - t_x). \quad (\text{E.1})$$

Levando em consideração o fato de que

$$\theta(t_x - t_y) + \theta(t_y - t_x) = 1, \quad (\text{E.2})$$

obtemos

$$G(x-y) = \theta_c(t_x - t_y) [G^>(x-y) - G^<(x-y)] + G^<(x-y). \quad (\text{E.3})$$

As transformadas de Fourier inversas são dadas por

$$G^>(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G^>(k), \quad (\text{E.4})$$

e

$$G^<(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G^<(k). \quad (\text{E.5})$$

Substituindo estas duas expressões na expressão anterior,

$$G(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \{ \theta_c(t_x - t_y) [G^>(k) - G^<(k)] + G^<(k) \}. \quad (\text{E.6})$$

As funções de Green de dois pontos dependem de uma única função, a função espectral $\rho(k)$. Esta é dada por

$$\rho(k) = G^>(k) - G^<(k) \quad \text{e} \quad G^<(k) = f(k_0)\rho(k). \quad (\text{E.7})$$

Assim,

$$G(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} [\theta_c(t_x - t_y) + f(k_0)] \rho(k), \quad (\text{E.8})$$

onde

$$\begin{aligned} f(k_0) &= \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}, \\ 1 + f(k_0) + f(-k_0) &= 0, \\ \rho_F(k) &= 2\pi \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} [\theta_c(t_x - t_y) + f(k_0)] \rho(k) \\ G_F(x-y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} [2\pi \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2)] \\ &\quad \times \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t_x - t_y)}}{\omega + i\eta} + \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Nesta expressão, $\varepsilon(k_0)$ é a função sinal, $\varepsilon(k_0) = +1$, $k_0 > 0$ e $\varepsilon(k_0) = -1$, $k_0 < 0$ e esta pode ser escrita em termos da função passo: $\varepsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0)$. Podemos usar uma das propriedades da função delta

$$\begin{aligned} \delta(k^2 - m^2) &= \delta(k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2) \\ &= \delta(k_0^2 - E^2) = \frac{1}{2E} [\delta(k_0 + E) + \delta(k_0 - E)]. \end{aligned}$$

Vamos fazer uma troca de variáveis: $t_x - t_y \equiv \tau$. Inserindo estas expressões na Eq.(E.10),

$$\begin{aligned} G_F(x-y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} (2\pi [\theta(k_0) - \theta(-k_0)]) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2E} [\delta(k_0 + E) + \delta(k_0 - E)] \right) \\ &\quad \times \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t_x - t_y)}}{\omega + i\eta} + \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \right] \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) [\theta(\tau) + f(k_0)] \\ &\equiv G_F^I(x-y) + G_F^{II}(x-y). \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Obteremos as expressões para $G_F^I(x-y)$ e $G_F^{II}(x-y)$ separadamente. Começamos com $G_F^I(x-y)$.

$$\begin{aligned} G_F^I(x-y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) \left[-\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\eta} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{\omega + i\eta} \frac{2\pi}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 e^{-i(\omega + k_0)\tau} \\ &\quad \times \{ \theta(k_0) [\delta(k_0 + E) + \delta(k_0 - E)] - \theta(-k_0) [\delta(k_0 + E) + \delta(k_0 - E)] \}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Embora $-\infty \leq k_0 \leq +\infty$, a energia, E , é sempre positiva ($E > 0$). Desta forma, apenas dois termos da expressão anterior são válidos,

$$\begin{aligned}
 G_F^I(x-y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\omega+i\eta} \frac{2\pi}{2E} \\
 &\times \left\{ \int_{-\infty}^0 dk_0 e^{-i(\omega+k_0)\tau} [-\theta(-k_0)\delta(k_0+E)] \right. \\
 &+ \left. \int_0^{+\infty} dk_0 e^{-i(\omega+k_0)\tau} [\theta(k_0)\delta(k_0-E)] \right\} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{2\pi}{\omega+i\eta} \left[\frac{1}{2E} \left(e^{-i(\omega+E)\tau} - e^{-i(\omega-E)\tau} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

Fazendo a troca de variáveis

$$\omega \pm E = k_0, \tag{E.14}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 G_F^I(x-y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} e^{-ik_0\tau} \frac{1}{2E} \left[\frac{1}{k_0-E+i\eta} - \frac{1}{k_0+E+i\eta} \right] \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{\underbrace{k_0^2 - E^2}_{k^2 - m^2} + \varepsilon(k_0) i \eta} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{\theta(k_0)}{k^2 - m^2 + i\eta} + \frac{\theta(-k_0)}{k^2 - m^2 - i\eta} \right] \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} \\
 &- \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{1}{k^2 - m^2 - i\eta} - \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} \right] \theta(-k_0) \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} \\
 &- \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} \frac{2i\eta}{(k^2 - m^2)^2 + \eta^2} \theta(-k_0).
 \end{aligned} \tag{E.15}$$

Porém, nesta expressão,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} = \pi \delta(x). \tag{E.16}$$

Logo,

$$G_F^I(x-y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\eta} - 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(-k_0) \right]. \tag{E.17}$$

Agora calcularemos $G_F^{II}(x - y)$.

$$\begin{aligned}
 G_F^{II}(x - y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left(\frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \right) \left[2\pi \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) \right] \\
 &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int dk_0 \frac{2\pi}{2E} \left(\frac{e^{-ik_0 \tau}}{e^{\beta k_0} - 1} \right) \\
 &\quad \times \{ \theta(k_0) [\delta(k_0 + E) + \delta(k_0 - E)] - \theta(-k_0) [\delta(k_0 + E) + \delta(k_0 - E)] \}.
 \end{aligned} \tag{E.18}$$

Mesmo que $-\infty \leq k_0 \leq +\infty$, a energia E é sempre positiva ($E > 0$). Desta forma, restam apenas dois termos,

$$G_F^{II}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{2\pi}{2E} \left[\frac{1}{e^{\beta E} - 1} \delta(k_0 - E) - \frac{1}{e^{-\beta E} - 1} \delta(k_0 + E) \right]. \tag{E.19}$$

Porém,

$$-\frac{1}{e^{-\beta E} - 1} = 1 + \frac{1}{e^{\beta E} - 1}. \tag{E.20}$$

Desta forma, a expressão para $G_F^{II}(x - y)$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 G_F^{II}(x - y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{2\pi}{2E} \left[\frac{\delta(k_0 - E)}{e^{\beta E} - 1} + \delta(k_0 + E) + \frac{\delta(k_0 + E)}{e^{\beta E} - 1} \right] \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{2\pi}{2E} \\
 &\quad \times \left\{ \delta(k_0 + E) + \frac{1}{e^{\beta E} - 1} [\delta(k_0 + E) + \delta(k_0 - E)] \right\} \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \left[\theta(-k_0) + \frac{1}{e^{\beta|k_0|} - 1} \right] \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \delta(k^2 - m^2) [\theta(-k_0) + n(k_0)],
 \end{aligned} \tag{E.21}$$

onde

$$n(k_0) = \frac{1}{e^{\beta|k_0|} - 1}. \tag{E.22}$$

Assim, podemos obter a função $G_F(x - y)$ com o auxílio das Eqs.(E.17) e (E.21).

$$\begin{aligned}
 G_F(x - y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\eta} - 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(-k_0) \right] \\
 &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} [2\pi \delta(k^2 - m^2) [\theta(-k_0) + n(k_0)]] \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\eta} + n(k_0) 2\pi \delta(k^2 - m^2) \right].
 \end{aligned} \tag{E.23}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G^{++}(k) &= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\eta} + n(k_0) 2\pi \delta(k^2 - m^2), \\ G^{--}(k) &= (G^{++}(k))^* = \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\eta} + n(k_0) 2\pi \delta(k^2 - m^2). \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

As funções $G^{++}(k)$ e $G^{--}(k)$ apresentam uma parte dependente da temperatura e outra parte independente da temperatura. A partir destas funções, obteremos as expressões para $G^{+-}(x-y)$ e $G^{-+}(x-y)$.

$$G^{+-}(x-y) = G^{<}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} f(k_0) \rho(k). \quad (\text{E.25})$$

Entretanto, esta é exatamente a expressão para $G_F^{II}(x-y)$. Logo,

$$G^{+-}(k) = 2\pi \delta(k^2 - m^2) [n(k_0) + \theta(-k_0)], \quad (\text{E.26})$$

e

$$\begin{aligned} G^{-+}(x-y) &= G^{>}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} [\rho(k) + G^{<}(k)] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \delta(k^2 - m^2) [\varepsilon(k_0) + n(k_0) + \theta(-k_0)] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi [\theta(k_0) - \theta(-k_0)] \delta(k^2 - m^2) \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \delta(k^2 - m^2) [n(k_0) + \theta(-k_0)] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \delta(k^2 - m^2) [n(k_0) + \theta(k_0)], \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

então,

$$G^{-+}(k) = 2\pi \delta(k^2 - m^2) [n(k_0) + \theta(k_0)]. \quad (\text{E.28})$$

A transformada de Fourier é definida como

$$G(x-y) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \begin{pmatrix} G^{++}(\vec{k}, t_x - t_y) & G^{+-}(\vec{k}, t_x - t_y) \\ G^{-+}(\vec{k}, t_x - t_y) & G^{--}(\vec{k}, t_x - t_y) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.29})$$

Vamos trabalhar com a Eq.(E.27).

$$\begin{aligned} G^{-+}(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \delta(k^2 - m^2) [n(k_0) + \theta(k_0)] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0\tau} 2\pi \delta(k^2 - m^2) [n(k_0) + \theta(k_0)]. \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Anteriormente fizemos a troca de variáveis: $t_x - t_y \equiv \tau$. Usaremos o fato de que

$$\begin{aligned} \delta(k^2 - m^2) &= \delta(k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2)) \\ &= \delta(k_0^2 - \omega_{\vec{k}}^2) = \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} [\delta(k_0 + \omega_{\vec{k}}) + \delta(k_0 - \omega_{\vec{k}})]. \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

Assim,

$$\begin{aligned} G^{-+}(x - y) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_{\vec{k}}} \int dk_0 e^{-ik_0\tau} \\ &\times [\delta(k_0 + \omega_{\vec{k}}) + \delta(k_0 - \omega_{\vec{k}})] [n(k_0) + \theta(k_0)] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_{\vec{k}}} \times \left\{ \int dk_0 e^{-ik_0\tau} \delta(k_0 + \omega_{\vec{k}}) [n(k_0) + \theta(k_0)] \right. \\ &\left. + \int dk_0 e^{-ik_0\tau} \delta(k_0 - \omega_{\vec{k}}) [n(k_0) + \theta(k_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

Das definições das funções $n(k_0)$ e $\theta(k_0)$,

$$\begin{aligned} n(k_0) &= \frac{1}{e^{\beta|k_0|} - 1}, \\ \theta(k_0) &= \begin{cases} 1, & k_0 > 0 \\ 0, & k_0 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

Inserindo-as na expressão anterior,

$$\begin{aligned} G^{-+}(x - y) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_{\vec{k}}} \left\{ e^{i\omega_{\vec{k}}\tau} n(\omega_{\vec{k}}) + e^{-i\omega_{\vec{k}}\tau} [n(\omega_{\vec{k}}) + 1] \right\} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left\{ [1 + 2n(\omega_{\vec{k}})] e^{-i\omega_{\vec{k}}\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

Desta, obtemos finalmente que

$$G^{-+}(\vec{k}; t_x - t_y) = \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left\{ [1 + 2n(\omega_{\vec{k}})] \cos[\omega_{\vec{k}}(t_x - t_y)] - i \sin[\omega_{\vec{k}}(t_x - t_y)] \right\}, \quad (\text{E.35})$$

onde $n(\omega_{\vec{k}}) = (e^{\beta\omega_{\vec{k}}} - 1)^{-1}$ é a distribuição de Bose e $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ é a energia da partícula livre.

Apêndice F

Cálculo dos termos da Eq.(3.75)

$$\begin{aligned}
S \left[\frac{1}{2} \varphi_{\Delta}(x) + \varphi_c(x) \right] - S \left[\varphi_c(x) - \frac{1}{2} \varphi_{\Delta}(x) \right] \\
= \int d^4x \varphi_{\Delta}(x) \left[-(\partial_{\mu})^2 - m^2 \right] \varphi_c(x) \\
- \frac{\lambda}{4!} \left(4\varphi_{\Delta}(x)\varphi_c^3(x) + \varphi_{\Delta}^3(x)\varphi_c(x) \right). \tag{F.1}
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{2} \varphi_{\Delta}(x) + \varphi_c(x) \right]^2 - \left[\varphi_c(x) - \frac{1}{2} \varphi_{\Delta}(x) \right]^2 = 2\varphi_{\Delta}(x)\varphi_c(x). \tag{F.2}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} \varphi_{\Delta} + \varphi_c \right]_x^2 G^{++}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{2} \varphi_{\Delta} + \varphi_c \right]_y^2 \\
&= G^{++}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{16} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \right. \\
&+ \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_c^2(y) + \\
&+ \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}^2(y) + \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \\
&+ \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(y) + \frac{1}{4} \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \\
&+ \left. \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \varphi_c^2(x) \varphi_c^2(y) \right]. \tag{F.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} \varphi_{\Delta} + \varphi_c \right]_x^2 G^{+-}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{+-}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_{\Delta} \right]_y^2 \\
&= G^{+-}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{+-}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{16} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_c^2(y) \\
 & + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}^2(y) - \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \\
 & + \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(y) + \frac{1}{4} \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \\
 & - \left. \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \varphi_c^2(x) \varphi_c^2(y) \right]. \tag{F.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_{\Delta} \right]_x^2 G^{-+}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{-+}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{2} \varphi_{\Delta} + \varphi_c \right]_y^2 \\
 & = G^{-+}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{-+}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{16} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \right. \\
 & + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_c^2(y) \\
 & - \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}^2(y) - \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \\
 & - \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(y) + \frac{1}{4} \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \\
 & \left. + \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \varphi_c^2(x) \varphi_c^2(y) \right]. \tag{F.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_{\Delta} \right]_x^2 G^{--}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{--}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\varphi_c - \frac{1}{2} \varphi_{\Delta} \right]_y^2 \\
 & = G^{--}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{--}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{16} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \right. \\
 & - \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_c^2(y) \\
 & - \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}^2(y) + \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \\
 & - \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(y) + \frac{1}{4} \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \\
 & \left. - \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \varphi_c^2(x) \varphi_c^2(y) \right]. \tag{F.6}
 \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados na expressão da ação efetiva obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi_{\Delta}, \varphi_c] & = \int d^4x \left\{ \varphi_{\Delta}(x) \left[-(\partial_{\mu})^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \right] \varphi_c(x) \right. \\
 & - \left. \frac{\lambda}{4!} \left[4\varphi_{\Delta}(x) \varphi_c^3(x) + \varphi_{\Delta}^3(x) \varphi_c(x) \right] \right\} \\
 & + i \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ G^{++}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{16} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_c^2(y) \\
 & + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}^2(y) + \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \\
 & + \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(y) + \frac{1}{4} \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \\
 & \left. + \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \varphi_c^2(x) \varphi_c^2(y) \right] \\
 & - G^{+-}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{+-}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{16} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \right. \\
 & - \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_c^2(y) \\
 & + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}^2(y) - \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \\
 & + \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(y) + \frac{1}{4} \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \\
 & \left. - \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \varphi_c^2(x) \varphi_c^2(y) \right] \\
 & - G^{-+}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{-+}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{16} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \right. \\
 & + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_c^2(y) \\
 & - \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}^2(y) - \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \\
 & - \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(y) + \frac{1}{4} \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \\
 & \left. + \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \varphi_c^2(x) \varphi_c^2(y) \right] \\
 & + G^{--}(\mathbf{q}, t - t_y) G^{--}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t_y) \left[\frac{1}{16} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \right. \\
 & - \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}^2(x) \varphi_c^2(y) \\
 & - \frac{1}{4} \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}^2(y) + \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \\
 & - \varphi_{\Delta}(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(y) + \frac{1}{4} \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}^2(y) \\
 & \left. - \varphi_c^2(x) \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) + \varphi_c^2(x) \varphi_c^2(y) \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

(F.7)

Na expressão acima podemos definir a seguinte quantidade

$$\begin{aligned} \Gamma_1[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \int d^4x \left\{ \varphi_\Delta(x) \left[-(\partial_\mu)^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_{\vec{k}})}{2\omega_{\vec{k}}} \right] \varphi_c(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4!} \left[4\varphi_\Delta(x)\varphi_c^3(x) + \varphi_\Delta^3(x)\varphi_c(x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Os demais termos presentes na Eq.(F.7) podem ser reorganizados. Logo, a expressão para a ação efetiva pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \Gamma_1[\varphi_\Delta, \varphi_c] + i \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{16} \varphi_\Delta^2(x) \left[G^{++}(t-t_y)G^{++}(t-t_y) - G^{+-}(t-t_y)G^{+-}(t-t_y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - G^{-+}(t-t_y)G^{-+}(t-t_y) + G^{--}(t-t_y)G^{--}(t-t_y) \right] \varphi_\Delta^2(y) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x) \left[G^{++}(t-t_y)G^{++}(t-t_y) + G^{-+}(t-t_y)G^{-+}(t-t_y) \right. \\ &\quad \left. - G^{+-}(t-t_y)G^{+-}(t-t_y) - G^{--}(t-t_y)G^{--}(t-t_y) \right] \varphi_\Delta^2(y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_\Delta^2(x) \left[G^{++}(t-t_y)G^{++}(t-t_y) - G^{+-}(t-t_y)G^{+-}(t-t_y) \right. \\ &\quad \left. - G^{-+}(t-t_y)G^{-+}(t-t_y) + G^{--}(t-t_y)G^{--}(t-t_y) \right] \varphi_c^2(y) \\ &\quad + \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x) \left[G^{++}(t-t_y)G^{++}(t-t_y) + G^{+-}(t-t_y)G^{+-}(t-t_y) \right. \\ &\quad \left. + G^{-+}(t-t_y)G^{-+}(t-t_y) + G^{--}(t-t_y)G^{--}(t-t_y) \right] \varphi_\Delta(y)\varphi_c(y) \\ &\quad + 2\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x) \left[G^{++}(t-t_y)G^{++}(t-t_y) + G^{-+}(t-t_y)G^{-+}(t-t_y) \right. \\ &\quad \left. - G^{+-}(t-t_y)G^{+-}(t-t_y) - G^{--}(t-t_y)G^{--}(t-t_y) \right] \varphi_c^2(y) \\ &\quad + \varphi_c^2(x) \left[G^{++}(t-t_y)G^{++}(t-t_y) - G^{+-}(t-t_y)G^{+-}(t-t_y) \right. \\ &\quad \left. - G^{-+}(t-t_y)G^{-+}(t-t_y) + G^{--}(t-t_y)G^{--}(t-t_y) \right] \varphi_c^2(y) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Vamos calcular cada termo entre colchetes em separado, e depois os substituiremos na expressão acima.

$$G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{p}, \tau) - G^{+-}(\mathbf{q}, \tau) G^{+-}(\mathbf{p}, \tau)$$

$$\begin{aligned}
 & - G^{-+}(\mathbf{q}, \tau) G^{-+}(\mathbf{p}, \tau) + G^{--}(\mathbf{q}, \tau) G^{--}(\mathbf{q}, \tau) \\
 & = [G^{>}(\mathbf{q}, \tau) \theta(\tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) \theta(-\tau)] [G^{>}(\mathbf{q}, \tau) \theta(\tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) \theta(-\tau)] \\
 & - G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) - G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) \\
 & + [G^{>}(\mathbf{q}, \tau) \theta(-\tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) \theta(\tau)] [G^{>}(\mathbf{p}, \tau) \theta(-\tau) + G^{<}(\mathbf{p}, \tau) \theta(-\tau)],
 \end{aligned} \tag{F.10}$$

onde $t_x - t_y = \tau$ e $\mathbf{q} - \mathbf{k} = \mathbf{p}$. Usando o fato de que

$$\theta(\tau) + \theta(-\tau) = 1, \tag{F.11}$$

e a definição de função teta, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \theta(\tau)\theta(\tau) & = \theta(\tau), \\
 \theta(-\tau)\theta(-\tau) & = 1 - 2\theta(\tau) + \theta(\tau)\theta(\tau) = 1 - \theta(\tau), \\
 \theta(\tau)\theta(-\tau) & = \theta(\tau)(1 - \theta(\tau)) = \theta(\tau) - \theta(\tau) = 0.
 \end{aligned} \tag{F.12}$$

Assim, a Eq.(F.10) será re-escrita como

$$\begin{aligned}
 & G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{p}, \tau) - G^{+-}(\mathbf{q}, \tau) G^{+-}(\mathbf{p}, \tau) \\
 & - G^{-+}(\mathbf{q}, \tau) G^{-+}(\mathbf{p}, \tau) + G^{--}(\mathbf{q}, \tau) G^{--}(\mathbf{q}, \tau) \\
 & = G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) \theta(\tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) [1 - \theta(\tau)] \\
 & - G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) - G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) \\
 & + G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) [1 - \theta(\tau)] + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) \theta(\tau) = 0.
 \end{aligned} \tag{F.13}$$

$$\begin{aligned}
 & G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{p}, \tau) - G^{+-}(\mathbf{q}, \tau) G^{+-}(\mathbf{p}, \tau) \\
 & + G^{-+}(\mathbf{q}, \tau) G^{-+}(\mathbf{p}, \tau) - G^{--}(\mathbf{q}, \tau) G^{--}(\mathbf{q}, \tau) \\
 & = G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) \theta(\tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) [1 - \theta(\tau)] \\
 & - G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) [1 - \theta(\tau)] - G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) \theta(\tau) \\
 & + G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) - G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) \\
 & = 2\theta(\tau)[G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) - G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau)] \\
 & = -4i\theta(\tau) \left\{ \frac{1}{4\omega_q\omega_p} \left[(1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q\tau) \sin(\omega_p\tau) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p\tau) \sin(\omega_q\tau) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{F.14}$$

$$G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{p}, \tau) + G^{+-}(\mathbf{q}, \tau) G^{+-}(\mathbf{p}, \tau)$$

$$\begin{aligned}
 & + G^{-+}(\mathbf{q}, \tau) G^{-+}(\mathbf{p}, \tau) + G^{--}(\mathbf{q}, \tau) G^{--}(\mathbf{q}, \tau) \\
 & = G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) \theta(\tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) [1 - \theta(\tau)] \\
 & + G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) [1 - \theta(\tau)] - G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) \theta(\tau) \\
 & + G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) + G^{<}(\mathbf{q}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau) \\
 & = 2 [G^{>}(\mathbf{q}, \tau) G^{>}(\mathbf{p}, \tau) + G^{<}(\mathbf{p}, \tau) G^{<}(\mathbf{p}, \tau)] \\
 & = 4 \left\{ \frac{1}{4\omega_q\omega_p} \left[(1 + 2n(\omega_q)) (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_q\tau) \cos(\omega_p\tau) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin(\omega_q\tau) \sin(\omega_p\tau) \right] \right\}. \tag{F.15}
 \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados na expressão para a ação efetiva, obtemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] & = \Gamma_1[\varphi_\Delta, \varphi_c] + i \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \\
 & \left\{ \frac{1}{2} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \left[\frac{-4i\theta(\tau)}{4\omega_q\omega_p} \left((1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q\tau) \sin(\omega_p\tau) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p\tau) \sin(\omega_q\tau) \right) \right] \varphi_\Delta^2(y) \\
 & + \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \left[\frac{4}{4\omega_q\omega_p} \left((1 + 2n(\omega_q)) (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_q\tau) \cos(\omega_p\tau) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin(\omega_q\tau) \sin(\omega_p\tau) \right) \right] \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) \\
 & + 2 \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \left[\frac{-4i\theta(\tau)}{4\omega_q\omega_p} \left((1 + 2n(\omega_q)) \cos(\omega_q\tau) \sin(\omega_p\tau) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1 + 2n(\omega_p)) \cos(\omega_p\tau) \sin(\omega_q\tau) \right) \right] \varphi_c^2(y) \left. \right\}. \tag{F.16}
 \end{aligned}$$

Apêndice G

Dedução da igualdade apresentada na Eq.(3.82)

Queremos mostrar que

$$\begin{aligned} \int D\xi P[\xi] \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \\ = \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \left[i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

onde

$$P[\xi] = N^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \xi(x) \left(\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \right)^{-1} \xi(y) \right\}, \quad (\text{G.2})$$

e

$$[G^{++}]_{x,y}^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})] \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} G^{++}(\mathbf{q}, t_x - t_y) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t_x - t_y). \quad (\text{G.3})$$

Vamos trabalhar com o lado esquerdo da Eq.(G.1). Para isto, inserimos nesta a expressão para $P[\xi]$

$$\begin{aligned} \int D\xi P[\xi] \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \\ = N^{-1} \int D\xi \exp \left\{ \int d^4x d^4y \xi(x) \mathcal{G}_{x,y}^{++} \xi(y) \right\} \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

onde

$$\mathcal{G}_{x,y}^{++} \equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [G^{++}]_{x,y}^2 \right)^{-1}. \quad (\text{G.5})$$

Agrupando as funções esponenciais presentes na expressão anterior,

$$\begin{aligned} \int D\xi P[\xi] \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \\ = N^{-1} \int D\xi \exp \left\{ \int d^4x d^4y \xi(x) \mathcal{G}_{x,y}^{++} \xi(y) + i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

O próximo passo da demonstração consiste em completar os quadrados desta expressão. Estamos acostumados a fazer este procedimento quando trabalhamos com funções simples das variáveis ordinárias x e y . Para isso, usamos normalmente o seguinte procedimento

$$\exp\{ax^2 + bx\} = \exp\left\{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}\right\} = \exp\left\{-\frac{b^2}{4a}\right\} \exp\left\{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right\}, \quad (\text{G.7})$$

e, isto feito, fazemos uma translação na variável que está sendo integrada e, ao final, obtemos uma integração Gaussiana para ser feita. Este mesmo procedimento será desenvolvido para a Eq.(G.6). Porém, neste caso, devemos ter um pouco mais de cuidado para o desenvolvimento do mesmo, pois esta expressão apresenta integrais entre seus termos e, assim, o procedimento é um pouco mais trabalhoso. Vamos, inicialmente, trabalhar apenas com o argumento da função exponencial presente na Eq.(G.6).

$$\int d^4x d^4x' \left[\xi(x) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \xi(x') + i\delta^{(4)}(x - x')\varphi_{\Delta}(x)\varphi_c(x)\xi(x) \right] \quad (\text{G.8})$$

Vamos reescrever este argumento a partir da técnica de completar quadrados descrita acima.

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4x' \left(\xi(x) + \frac{i}{2} \int d^4y \varphi_{\Delta}(y)\varphi_c(y)(\mathcal{G}^{++})_{x,y}^{-1} \right) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \\ & \quad \times \left(\xi(x') + \frac{i}{2} \int d^4z \varphi_{\Delta}(z)\varphi_c(z)(\mathcal{G}^{++})_{z,x'}^{-1} \right) \\ &= \int d^4x d^4x' \xi(x) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \xi(x') + \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' d^4z \xi(x) \varphi_{\Delta}(z) \varphi_c(z) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} (\mathcal{G}^{++})_{z,x'}^{-1} \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' d^4y \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) (\mathcal{G}^{++})_{y,x}^{-1} \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \xi(x') \\ &+ \frac{1}{4} \int d^4x d^4x' d^4y d^4z [i\varphi_{\Delta}(y)\varphi_c(y)][i\varphi_{\Delta}(z)\varphi_c(z)] (\mathcal{G}^{++})_{y,x}^{-1} \mathcal{G}_{x,x'}^{++} (\mathcal{G}^{++})_{z,x'}^{-1} \\ &= \int d^4x d^4x' \xi(x) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \xi(x') + \frac{i}{2} \int d^4x d^4z \xi(x) \varphi_{\Delta}(z) \varphi_c(z) \int d^4x' \mathcal{G}_{x,x'}^{++} (\mathcal{G}^{++})_{z,x'}^{-1} \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x' d^4y \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \xi(x') \int d^4x (\mathcal{G}^{++})_{y,x}^{-1} \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \\ &+ \frac{1}{4} \int d^4x' d^4y d^4z [i\varphi_{\Delta}(y)\varphi_c(y)][i\varphi_{\Delta}(z)\varphi_c(z)] (\mathcal{G}^{++})_{z,x'}^{-1} \int d^4x (\mathcal{G}^{++})_{y,x}^{-1} \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \\ &= \int d^4x d^4x' \xi(x) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \xi(x') + \frac{i}{2} \int d^4x d^4z \xi(x) \varphi_{\Delta}(z) \varphi_c(z) \delta^{(4)}(x - z) \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x' d^4y \varphi_{\Delta}(y) \varphi_c(y) \xi(x') \delta^{(4)}(x' - y) \\ &+ \frac{1}{4} \int d^4x' d^4y d^4z [i\varphi_{\Delta}(y)\varphi_c(y)][i\varphi_{\Delta}(z)\varphi_c(z)] (\mathcal{G}^{++})_{z,x'}^{-1} \delta^{(4)}(x' - y) \quad (\text{G.9}) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x d^4x' \left(\xi(x) + \frac{i}{2} \int d^4y \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) (\mathcal{G}^{++})_{y,x}^{-1} \right) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \\
 & \quad \times \left(\xi(x') + \frac{i}{2} \int d^4z \varphi_\Delta(z) \varphi_c(z) (\mathcal{G}^{++})_{z,x'}^{-1} \right) \\
 & = \int d^4x d^4x' \xi(x) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \xi(x') + i \int d^4x \xi(x) \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \\
 & + \frac{1}{4} \int d^4x d^4x' [i\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x)] [i\varphi_\Delta(x') \varphi_c(x')] (\mathcal{G}^{++})_{x,x'}^{-1} \quad (G.10)
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \int D\xi P[\xi] \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \\
 & = N^{-1} \int D\xi \exp \left\{ \int d^4x d^4x' \xi(x) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \xi(x') + i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \\
 & = N^{-1} \int D\xi \exp \left\{ \int d^4x d^4x' \left(\xi(x) + \frac{i}{2} \int d^4y \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) (\mathcal{G}_{y,x}^{++})^{-1} \right) \mathcal{G}_{x,x'}^{++} \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\xi(x') + \frac{i}{2} \int d^4z \varphi_\Delta(z) \varphi_c(z) (\mathcal{G}_{z,x'}^{++})^{-1} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} \int d^4x d^4x' [i\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x)] [i\varphi_\Delta(x') \varphi_c(x')] (\mathcal{G}_{x,x'}^{++})^{-1} \right\} \\
 & = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int d^4x d^4x' \{i\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x)\} (\mathcal{G}_{x,x'}^{++})^{-1} \{i\varphi_\Delta(x') \varphi_c(x')\} \right\} \quad (G.11)
 \end{aligned}$$

Inserindo nesta a expressão para $\mathcal{G}_{x,y}^{++}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 & \int D\xi P[\xi] \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi(x) \right\} \\
 & = \exp \left\{ i \int d^4x d^4x' \left[i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} \left[G^{++} \right]_{x,x'}^2 \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') \right] \right\}, \quad (G.12)
 \end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar.

Apêndice H

A função espectral

A função espectral $\rho(k_0)$ é a parte central da função de Green de dois pontos. Ela é a transformada de Fourier da média térmica do comutador $[\hat{\phi}(t), \hat{\phi}(0)]$

$$\rho(k_0) \equiv G^>(k_0) - G^<(k_0). \quad (\text{H.1})$$

As funções de Green $G^>(t, t')$ e $G^<(t, t')$, apresentam invariância translacional, logo, elas dependem unicamente da diferença entre os tempos. Vamos tomar $t' = 0$ ($G^>(t) = G^>(t, 0)$ e $G^<(t) = G^<(t, 0)$) e definir as transformadas de Fourier destas funções

$$G^>(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0 t} G^>(t), \quad (\text{H.2})$$

e

$$G^<(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0 t} G^<(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0 t} G^>(t - i\beta), \quad (\text{H.3})$$

onde a segunda igualdade desta equação foi obtida através da relação de Kubo-Martin-Schwinger. Para demonstrarmos esta relação, usaremos o fato de que a função $\exp(-\beta\hat{H})$ pode ser considerada como um operador de evolução em tempo imaginário

$$\begin{aligned} e^{-\beta\hat{H}} \hat{\phi}(t) e^{\beta\hat{H}} &= e^{-\beta\hat{H}} e^{i\hat{H}t} \hat{\phi}(0) e^{-i\hat{H}t} e^{\beta\hat{H}} \\ &= e^{-\beta\hat{H}} \hat{\phi}(t) e^{\beta\hat{H}} = \hat{\phi}(t + i\beta). \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

Assim

$$\begin{aligned} G^>(t, t') &= \langle \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(t') \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left[e^{-\beta\hat{H}} \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(t') \right] \\ G^>(t, t') &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left[\hat{\phi}(t + i\beta) e^{-\beta\hat{H}} \hat{\phi}(t') \right] = G^<(t + i\beta, t'), \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

onde inserimos a identidade $\hat{1} = e^{\beta\hat{H}} e^{-\beta\hat{H}}$ entre os operadores de campo e usamos a propriedade cíclica do traço.

Comparando as Eq.(H.2) e Eq.(H.3), pode-se deduzir duas outras relações (denotaremos $t' = t - i\beta$)

$$\begin{aligned} G^<(k_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{ik_0(t'+i\beta)} G^>(t') \\ &= e^{-\beta k_0} G^>(k_0), \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

e

$$\begin{aligned} G^>(-k_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ik_0 t} G^>(t) \\ G^<(k_0) &= G^>(-k_0), \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

onde nesta última expressão trocamos t por $-t$.

A partir da equação que define a função espectral, podemos obter duas outras relações importantes

$$\begin{aligned} G^<(k_0) &= e^{-\beta k_0} G^>(k_0) \rightarrow G^>(k_0) = e^{\beta k_0} G^<(k_0) \\ G^<(k_0) &= G^>(k_0) - \rho(k_0), \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

multiplicando ambos os lados por $e^{\beta k_0}$, obtemos

$$\begin{aligned} (e^{\beta k_0} - 1)G^>(k_0) &= e^{\beta k_0} \rho(k_0) \\ G^>(k_0) &= \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta k_0}} \right) \rho(k_0) \\ G^>(k_0) &= (1 + f(k_0))\rho(k_0), \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

e

$$\begin{aligned} G^<(k_0) &= e^{-\beta k_0} G^>(k_0) = e^{-\beta k_0} [\rho(k_0) + G^<(k_0)] \\ (e^{\beta k_0} - 1)G^<(k_0) &= \rho(k_0) \\ G^<(k_0) &= f(k_0)\rho(k_0). \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$

Podemos explicitar a forma da função $\rho(k_0)$, computando a diferença $G^>(k_0) - G^<(k_0)$

$$\rho(k_0) = G^>(k_0) - G^<(k_0) = (1 - e^{-\beta k_0})G^>(k_0). \quad (\text{H.11})$$

A expressão para $G^>(k_0)$ é dada por

$$G^>(k_0) = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} |\langle n | \hat{q}(0) | m \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0 t} e^{iE_n t} e^{-iE_m t}. \quad (\text{H.12})$$

Vamos trabalhar apenas com a integração e depois retornamos a esta expressão

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(k_0 + E_n - E_m)t} &= \int_0^{\infty} dt e^{i(k_0 + E_n - E_m)t} + \int_{-\infty}^0 dt e^{i(k_0 + E_n - E_m)t} \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{i(k_0 + E_n - E_m)t} + \int_0^{\infty} dt e^{-i(k_0 + E_n - E_m)t}, \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

onde trocamos t por $-t$ no segundo termo do lado direito (LD) desta expressão. Entretanto, nesta expressão temos integrandos oscilantes e, portanto, integrações divergentes. Neste caso, devemos adicionar fatores de convergência $\pm i\varepsilon$ e, ao final da integração, devemos tomar o limite no qual $\varepsilon \rightarrow 0$. Isto feito, chegamos a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(k_0 + E_n - E_m)t} = \int_0^{\infty} dt e^{i(k_0 + E_n - E_m + i\varepsilon)t} + \int_0^{\infty} dt e^{-i(k_0 + E_n - E_m - i\varepsilon)t}. \quad (\text{H.14})$$

Agora podemos proceder normalmente à integração

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(k_0 + E_n - E_m)t} &= \frac{(-1)}{i[(E_n - E_m) + k_0 + i\varepsilon]} + \frac{(-1)}{(-i)[(E_n - E_m) + k_0 - i\varepsilon]} \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon}{(E_n - E_m + k_0)^2 + \varepsilon^2} \right\} \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(E_n - E_m + k_0). \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Temos duas possibilidades para o argumento da função delta

- $E_n - E_m + k_0 = 0$ e $\varepsilon \neq 0 \rightarrow f \sim 1/\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow \infty,$
- $E_n - E_m + k_0 \neq 0$ e $\varepsilon \neq 0 \rightarrow f \sim \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow f \rightarrow 0.$

Então

$$2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) = 2 \delta(x) z, \quad (\text{H.16})$$

onde $x = E_n - E_m + k_0$ e z é a constante de proporcionalidade a ser determinada através da integração de ambos os lados desta igualdade

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} &= \arctan \frac{x}{\varepsilon} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ \pi &= z \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = z. \end{aligned} \quad (\text{H.17})$$

Portanto

$$\begin{aligned} 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) &= 2 \pi \delta(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(k_0 + E_n - E_m)t} &= 2 \pi \delta(E_n - E_m + k_0). \end{aligned} \quad (\text{H.18})$$

Retornando à equação inicial, chegamos finalmente a

$$\rho(k_0) = \frac{2\pi}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} (1 - e^{-\beta k_0}) \delta(k_0 + E_n - E_m) |\langle n | \hat{q}(0) | m \rangle|^2. \quad (\text{H.19})$$

Podemos separar a parte desta expressão que contém o fator $1 - e^{-\beta k_0}$

$$\begin{aligned} \rho(k_0) &= \frac{2\pi}{Z(\beta)} \left\{ \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \delta(k_0 + E_n - E_m) |\langle n | \hat{q}(0) | m \rangle|^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n,m} e^{-\beta(E_n + k_0)} \delta(k_0 + E_n - E_m) |\langle n | \hat{q}(0) | m \rangle|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{H.20})$$

Vamos aplicar as propriedades da função delta com o auxílio do somatório e trocar as funções exponenciais na variável E_m por funções exponenciais na variável E_n (isto pode ser feito uma vez que temos uma soma sobre os índices n)

$$\sum_{n,m} e^{-\beta(E_n+k_0)} \delta(k_0 + E_n - E_m) = \sum_m e^{-\beta E_m} = \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \delta(k_0 + E_m - E_n). \quad (\text{H.21})$$

Assim, ficamos com a seguinte expressão para $\rho(k_0)$

$$\rho(k_0) = \frac{2\pi}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} [\delta(k_0+E_n-E_m) - \delta(k_0+E_m-E_n)] |\langle n | \hat{q}(0) | m \rangle|^2. \quad (\text{H.22})$$

Esta equação mostra explicitamente que

1. $\rho(k_0)$ é uma função real e ímpar de k_0 , uma vez que $\rho(k_0) = -\rho(-k_0)$ e
2. $\rho(k_0)$ obedece a condição de positividade $\varepsilon(k_0)\rho(k_0) > 0$, onde $\varepsilon(k_0)$ é a função sinal.

Referências

- [1] P. C. Hohenberg e B. I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977).
- [2] J. D. Gunton, M. San Miguel e P. S. Sahni, in *Phase transitions and critical phenomena* ed. by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, vol.8, New York, 1983).
- [3] A.O. Caldeira e A.J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981); *Ann. Phys. (N.Y.)* **149**, 374 (1983); *Physica A* **121**, 587 (1983).
- [4] U. Weiss, *Quantum dissipative systems* (World Scientific, Cingapura, 1993).
- [5] J. Berges, *Introduction to nonequilibrium quantum field theory*, [hep-ph/0409233](#), baseado em uma série de palestras proferidas na *HADRON-RANP 2004*, 28 de Março a 3 de Abril de 2004, Angra dos Reis, Brasil e em *QUANTUM FIELDS IN AND OUT OF EQUILIBRIUM*, 23 a 37 de Setembro de 2004, Bielefeld, Alemanha.
- [6] K. Wilson, *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974).
- [7] J. Smit, *An introduction to quantum fields on a lattice* (Cambridge, Cambridge, 2002).
- [8] M. Gleiser e R.O. Ramos, *Phys. Rev. D* **50**, 2441 (1994).
- [9] J. Schwinger, *Proc. natl. Acad. Sci U.S.A.* **46**, 1401 (1960); *J. Math. Phys.* **2**, 407 (1961).
- [10] M. Morikawa, *Phys. Rev. D* **33**, 3607 (1986).
- [11] M. Morikawa e M. Sasaki, *Phys. Lett. B* **165**, 59 (1985).
- [12] S.-K. Ma, *Modern theory of critical phenomena* (W. A. Benjamin, Inc., USA, 1976).
- [13] D. Boyanovsky, H.J. de Vega e D.J. Schwarz, *Phase Transitions in the Early and the Present Universe*, [arXiv:hep-ph/0602002](#).

- [14] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [15] T. Tome e M. J. de Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade* (Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2001).
- [16] G.E. Uhlenbeck e L.S. Ornstein, *Phys. Rev.* **36**, 823 (1930).
- [17] Para uma descrição detalhada sobre a equação de Fokker-Planck veja H. Risken, *The Fokker-Planck Equation - Methods of Solution and Applications* (Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989).
- [18] Para uma introdução concisa à dinâmica estocástica, veja C. Scherer, *Métodos Computacionais da Física* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005).
- [19] R. Kubo, M. Toda e N. Hashitsume, *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics (Springer Series in Solid-State Sciences, vol 31)* (Springer Verlag, Berlin, 2003).
- [20] N. Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization group* (Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1992).
- [21] A. Velytsky, *A model study of the deconfining phase transition*, The Florida State University, Ph.D. Thesis, 2004.
- [22] J.W. Cahn e J.E. Hilliard, *J. Chem. Phys.* **28**, 258 (1958).
- [23] R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 1686 (1974).
- [24] V. A. Miransky, *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories* (World Scientific, Cingapura, 1993).
- [25] A. Niemi e G. Semenoff, *Ann. Phys.* **152**, 105 (1984).
- [26] N.P. Landsman e Ch.G. van Weert, *Phys. Rep.* **145**, 141 (1987).
- [27] Há vários trabalhos acerca de ação efetiva e potencial efetivo que podem ser utilizados para uma consulta mais geral. Dentre muitos, indicamos os papers J. M. Cornwall, R. Jackiw e E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **10**, 2428 (1974); S. Coleman e E. Weinberg, *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973); L. Dolan e R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 3320 (1974), e S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge, Cambridge, 1985).

- [28] R.O. Ramos, *Short Introduction to Quantum Field Theory at Finite Temperature and Applications* (Lecture notes, unpublished, 2005).
- [29] M. Le Bellac, *Thermal field theory* (Cambridge University Press, England, 2000).
- [30] N.C. Cassol-Seewald, R.L.S. Farias, G. Krein, E.S. Fraga e R.O. Ramos, em progresso.
- [31] D.A. Kirzhnits, *Ann. Phys.* **101**, 195 (1976).
- [32] N.C. Cassol-Seewald, M.I.M. Copetti e G. Krein, *Numerical analysis of spectral methods for the Ginzburg-Landau equation for fast phase transitions*, em preparação.
- [33] T. Koide, G. Krein e R.O. Ramos, *Incorporating memory effects in phase separation processes*, hep-ph/0601256.
- [34] E.S. Fraga e G. Krein, *Phys. Let. B* **614**, 181 (2005).
- [35] M.I.M. Copetti e C.M. Elliot, *Mat. Sci. Tecn.* **6**, 273 (1990).
- [36] C.J. Gagne e M. Gleiser, *Phys. Rev. E* **61**, 3483 (2000).
- [37] L.M.A. Bettencourt, K. Rajagopal e J.V. Steele, *Nucl. Phys. A* **693**, 825 (2001).
- [38] G. Parisi, *Statistical Field Theory* (Addison-Wesley, Nova Iorque, 1988).
- [39] K. Farakos, K. Kajantie, K. Rummukainen e M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **425**, 67 (1994).
- [40] Plano de Doutorado.
- [41] N.N. Bogoliubov, D.B. Zubarev e Iu. Tserkovnikov, *Sov. Phys. Dok.* **2**, 535 (1957).
- [42] G. Wentzel, *Phys. Rev.* **120**, 1572 (1960).
- [43] M.D. Girardeau, *Phys. Rev. A* **42**, 3303 (1990).