



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.006/96

**Alguns Aspectos Algébricos de Sistemas
Generalizados da Equação de Schrödinger Não Linear
(2 Dimensões)**

Harold Sócrates Blas Achic

Orientador

Prof. Dr. Abraham Hirsz Zimmerman



Agosto 1996

Índice

Introdução	1
1 A equação de Schrödinger não linear derivativa (GDNLS₂)	6
1.1 Integrabilidade e quantidades conservadas da equação GDNLS ₂	6
1.2 O sistema GDNLS ₂ como um sistema Hamiltoniano.	8
1.3 O sistema DNLS ₂ como um sistema bi-Hamiltoniano.Poisson 'pencil' . . .	10
2 A equação de Schrödinger não linear generalizada (GNLS₂)	11
2.1 Quantidades conservadas y parênteses de Poisson do sistema GNLS ₂	12
2.2 O sistema GNLS ₂ como um sistema bi-Hamiltoniano	14
2.3 Relações de recorrência das estruturas de parênteses de Poisson do sistema GNLS ₂	14
3 Transformações de "gauge" em teorias integráveis	17
3.1 Condições de curvatura nula para os sistemas GDNLS ₂ e GNLS ₂	18
3.1.1 O sistema GNLS ₂	19
3.1.2 O sistema GDNLS ₂	19
3.2 Transformações de gauge entre os sistemas GNLS ₂ e GDNLS ₂	20
4 Hierarquias generalizadas de Drinfel'd-Sokolov	23
4.1 Construção de hierarquias	23
4.2 Hierarquias homogêneas	30
4.2.1 Construção das hierarquias homogêneas	30
4.2.2 O sistema GNLS ₁ como um exemplo	31
5 Transformações "dressing "	33
5.1 Soluções de vácuo e transformações "dressing "	34
5.2 Transformações "dressing " e as funções tau	36
5.2.1 As funções tau	36
6 As funções tau e a solução N-soliton da equação de Schrödinger não linear generalizada (GNLS_r)	39
6.1 Soluções de vácuo e as transformações "dressing"	40
6.2 As funções tau do sistema GNLS _r	42
6.3 Soluções 1-sóliton	45
6.4 Soluções N-sóliton	46

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Abraham H. Zimmerman, pela orientação deste trabalho e também pela paciência e empenho demonstrados em minha orientação.

Ao Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira, cuja colaboração e valiosas sugestões contribuíram de forma substancial para a realização do presente trabalho.

Aos Profs. Dr. J.F. Gomes e Dr. H. Aratyn, pelas discussões nas reuniões do grupo.

Ao Prof. Dr. Bruto M. Pimentel, pelo estímulo e pela apresentação ao Prof. Zimmerman.

Aos Profs. Dr. H. Valqui, Dr. M. Horn, Dr. E. Lopez Carranza e Dr. A. Bernui da FC-UNI (Lima-Perú), que muito influenciaram minha formação acadêmica.

À Sra. Maria Tereza Fratuze Pimentel e à amiga Hatsumi Mukai, pelo incansável trabalho de tradução do inglês para o português de vários capítulos presentes neste trabalho. Quaisquer eventuais erros presentes no texto são de minha inteira responsabilidade.

A meus amigos L.C. Crispino, I. Lautenschleguer, L. Boldo, pela ajuda em forma diversa na redação do presente trabalho.

A meus amigos O. Pereyra Ravinez e C. Tello E., pelas discussões envolvendo outras áreas da física durante esses anos de convívio.

Aos funcionários do IFT, que sempre foram muito atenciosos.

À CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Discutimos alguns aspectos algébricos das hierarquias integráveis do tipo NLS. Consideramos os sistemas generalizados de Schrödinger não linear (GNLS_r) e de Schrödinger não linear derivativo (GDNLS_r). Começamos com o estudo do caráter bi-Hamiltoniano de ambos os sistemas GNLS_2 e GDNLS_2 ; além do mais, estabelecemos uma relação entre ambos os sistemas através de uma transformação de "gauge". Usando o formalismo das transformações "dressing" e da função-tau construímos a solução do tipo N-sóliton da equação GNLS_r . Além disso, construímos quantidades conservadas e soluções N-sóliton de múltiplos tempos no caso mais simples, a hierarquia de equações GNLS_1 .

Palavras Chave: modelos integráveis, sistemas bi-Hamiltonianos, transformações "dressing", funções-tau, sólitons.

Área de conhecimento: 1.05.01.01-0, 1.05.03.01-3

Abstract

We discuss some algebraic aspects of the NLS type integrable hierarchies. We concentrate on the generalized non-linear Schrödinger systems (GNLS_r) and the derivative non-linear Schrödinger systems (GDNLS_r). We start with the study of the bi-Hamiltonian character of both the GNLS₂ and the GDNLS₂ systems. Using the dressing transformation and the tau-function formalisms, we construct the N-soliton solutions of the GNLS_r equation. Moreover, we construct conserved quantities and multiple time N-soliton solutions of the simplest case, the GNLS₁ hierarchy of equations.

Keywords: integrable models, bi-Hamiltonian systems, dressing transformations, tau-functions, solitons.

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo principal presentar un análisis detallado de los aspectos más relevantes de la historia y evolución de la ciencia y la tecnología en el siglo XX. Se abordarán temas como la revolución científica, la Segunda Guerra Mundial, la Guerra Fría, la revolución digital y la globalización.

El presente trabajo se divide en tres partes principales. La primera parte trata sobre el contexto histórico y social de la época. La segunda parte se centra en los avances científicos y tecnológicos. La tercera parte analiza el impacto de estos avances en la sociedad actual. Se utilizarán fuentes primarias y secundarias para respaldar los argumentos.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln(x)$$

Donde x es una variable real positiva.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^3} \ln(x) + \frac{1}{x^3}$$

Este resultado se obtiene aplicando la regla del producto y la regla de la potencia. El primer término surge de derivar $\ln(x)$ y el segundo de derivar $\frac{1}{x^2}$.

$$f''(x) = \frac{1}{x^4} \ln(x) - \frac{2}{x^4}$$

Este resultado se obtiene derivando $f'(x)$. El primer término surge de derivar $-\frac{1}{x^3} \ln(x)$ y el segundo de derivar $\frac{1}{x^3}$. El resultado final muestra que la segunda derivada también tiene una forma similar a la primera.

A mis padres y hermanos.

Introdução

A investigação dos sistemas integráveis tem sido uma área interessante e ativa nos anos recentes devido ao fato que numerosos e interessantes sistemas físicos a duas dimensões têm sido resolvidos usando vários métodos de solução. Uma grande classe de soluções explícitas, tais como soluções do tipo sóliton, foram obtidas. A equação modelo é a de Korteweg de Vries

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Historicamente foi a primeira equação descoberta, com soluções do tipo sóliton, além de numerosas outras importantes propriedades. É importante de ser notado que em 1965 Zabuski e Kruskal descobriram o comportamento sóliton do KdV, baseados em soluções numéricas. Em 1968, P.Lax [40] mostrou que havia uma formulação geral pela qual a equação de KdV poderia ser vista como uma condição de compatibilidade entre dois operadores lineares. Ele também investigou em considerável detalhe as propriedades de interação exibidas pelos sólitons de KdV.

Lax escreveu a equação de KdV de forma elegante. Seja L o operador de Schrödinger

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

Então a equação de KdV pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}L = [L, M],$$

onde M é um operador diferencial de terceira ordem, cujos coeficientes são construídos em termos de u e suas derivadas em x . A equação de Lax mostra que a evolução de KdV é uma transformação de semelhança de L

$$L \rightarrow T(t) L T^{-1}(t),$$

e assim, descreve uma deformação espectral constante de L .

Como uma outra alternativa, Ablowitz, Kaup, Newell e Segur (AKNS) (1974) [42] propuseram uma técnica, a qual, de maneira geral, pode ser formulada como segue. Considere duas equações lineares

$$\Psi_x = U\Psi$$

$$\Psi_t = V\Psi,$$

onde Ψ é um vetor n -dimensional e U, V são matrizes $(n) \times (n)$ contendo os campos do modelo. Então a condição de compatibilidade para este sistema produz

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

a qual é chamada de representação de curvatura nula do sistema não linear de equações. Para fazer que esta equação seja efetiva, os operadores associados U, V devem ter um parâmetro espectral λ , que tem o papel de valor próprio e satisfaz $\lambda_t = 0$.

Como um protótipo dentre os sistemas não lineares integráveis, KdV tem tido também um grande impacto indireto sobre muitas áreas da física teórica, matemática pura, e as áreas entre elas. Muitas áreas da matemática, incluindo as equações diferenciais ordinárias, geometria algébrica, teoria de grupos de Lie e geometria diferencial têm sido influenciadas grandemente, pelos métodos usados em resolver KdV, e encontrou relacionamentos em teoria quântica de campos, cordas e teoria de campos conforme, gravitação quântica e relatividade geral clássica, para não mencionar as numerosas aplicações no tratamento dos outros sistemas não lineares conhecidos, tais como os sistemas não lineares de Schrödinger (NLS) e de sine-Gordon (SG).

Em 1970, Zakharov e Shabat (ZS) [55] mostraram que a chamada equação não linear de Schrödinger (NLS)

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + 2g |\Psi|^2 \Psi,$$

admite o método de solução conhecido como método inverso de dispersão (IST) (descoberto durante o estudo do sistema de KdV por Gardner, Green, Kruskal e Miura [41]) com o operador L dado pelo sistema de primeira ordem

$$L = i\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{d}{dx} - \sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 & \Psi^* \\ \Psi & 0 \end{pmatrix}.$$

No presente trabalho, trataremos com alguns aspectos deste modelo. O modelo NLS é bem conhecido por descrever modulações lentas não lineares de trem de ondas em ondas de água ou ótica não linear [12]; além do mais, provê um modelo universal de equação não linear.

Em muitos aspectos técnicos a equação de NLS é mais simples e mais fundamental do que a equação de KdV. Por exemplo; o problema linear auxiliar para NLS (o problema de valores próprios para o operador de Lax L) é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem do tipo geral; o formalismo Hamiltoniano para a equação de NLS [7] é mais simples e direto, os campos $\Psi(x)$ e $\Psi^*(x)$, formam um conjunto simples de variáveis canônicas,

$$\{\Psi(x), \Psi^*(x)\} = i\delta(x - y);$$

assim, a equação de NLS pode ser escrita como uma equação de Hamilton, escolhendo-se o Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x} \Psi \right|^2 + g |\Psi|^4 \right) dx.$$

Uma outra equação não linear canônica em física, é a chamada equação de Schrödinger não linear derivativa (DNLS)

$$q_t - iq_{xx} \mp \alpha \partial_x (|q|^2 q) = 0,$$

a qual aparece no estudo da evolução não linear de ondas paralelas de Alfvén em plasmas [1], e também, em certos problemas de plasmas em astrofísica [3]. O método inverso de dispersão (IST) tem sido aplicado a esta equação e a existência de uma sequência infinita de quantidades conservadas foi provada por Kaup e Newell (1978) [4]. Sabemos que o sistema DNLS é completamente integrável no sentido que ele possui uma série infinita de grandezas conservadas, as quais podem ser construídas explicitamente.

Depois dos trabalhos de ZS e AKNS, a existência de um conjunto grande de tais sistemas integráveis foi revelado. A década passada presenciou um rápido crescimento de tais membros na família dos sistemas integráveis. Assim, houve uma urgência natural de se estabelecer algum esquema de unificação para se agrupar sistemas integráveis da mesma classe, achando seus interrelacionamentos e identificando alguns representantes autênticos, dos quais os outros originam-se. Este esquema de unificação foi realizado, através da equivalência de "gauge" [17], encontrando autênticas equações independentes, achando transformações de "gauge" entre sistemas diferentes e reconhecendo modelos do mundo real como membros do conjunto de sistemas integráveis. Usando este esquema de unificação, a transformação entre os campos, $\Psi(x)$ do sistema NLS e $q(x)$ do DNLS, pode ser achada, mostrando que estes sistemas estão relacionados por alguma transformação de "gauge". Junto com a ideia acima, a transformação de "gauge" (GT) entre diferentes sistemas, é usado também com um outro propósito; isto é, para achar transformações de Bäcklund (BT) entre soluções diferentes do mesmo sistema.

Muitos sistemas integráveis em $0 + 1$, $1 + 1$ e $2 + 1$ dimensões são conhecidos serem sistemas bi-Hamiltonianos [6, 7]. Estes são sistemas cujas equações dinâmicas podem ser descritas através de equações de Hamilton com respeito a duas distintas estruturas Hamiltonianas que, além do mais, são compatíveis [11]; isto é, qualquer superposição linear de ambos também define uma estrutura Hamiltoniana. Desde que a identidade de Jacobi envolve uma relação não linear, a compatibilidade de estruturas Hamiltonianas é um enunciado não trivial. Os sistemas NLS e DNLS são conhecidos serem sistemas bi-Hamiltonianos [8, 10].

Subseqüente ao tratamento exitoso dos sistemas KdV, NLS e sine-Gordon, uma grande classe de generalizações foram obtidas. No trabalho de Drinfel'd e Sokolov [43] muitas ideias dispersas foram unificadas de modo elegante, dando a classificação mais geral dos sistemas integráveis conhecidos até então. Sua construção é baseada no método da condição de curvatura nula ou método de Lax, pelo qual a integrabilidade é manifesta. Os objetos centrais na construção são os campos de "gauge" na álgebra de "loop" de uma álgebra de Lie finita. As hierarquias de Drinfel'd-Sokolov fazem uso da gradação principal da álgebra de "loop" de uma maneira essencial. Em particular, a construção envolve a subálgebra de Heisenberg principal. Por outro lado, é sabido que as álgebras de Kac-Moody "afim" têm muitas subálgebras de Heisenberg [13], uma observação que foi usada em [22] para construir uma classe mais geral de hierarquias integráveis. Estas hierarquias compartilham todas as características das hierarquias de Drinfel'd e Sokolov: contêm hierarquias do tipo KdV e mKdV com estruturas (bi-)Hamiltonianas [22].

No entanto, há maneiras diferentes da condição de curvatura nula para se investigar hierarquias integráveis. Um dos desenvolvimentos mais extraordinários na área começou com o trabalho de R. Hirota (veja por exemplo [20]), que descobriu um método para se construir diretamente vários tipos de soluções das hierarquias; em particular a solução do

tipo múltiplos sóliton podem ser fácilmente achadas. Isto levou ao chamado método das "funções tau" ou método de Hirota liderada pela escola Japonesa.

A idéia é achar um conjunto novo de variáveis chamadas "funções tau", que logo satisfazem a um novo tipo de equações bilineares conhecidas como as equações de Hirota. Por exemplo, a função-tau da equação de KdV é relacionada à variável original pela famosa fórmula

$$u = 2\partial_x^2 \ln \tau.$$

Correspondentemente, para a equação modificada de KdV, $v_t = v_{xxx} - 6v^2v_x$, a relação é

$$v = \partial_x \ln \left(\frac{\tau_0}{\tau_1} \right),$$

havendo duas funções tau separadas neste caso. As soluções do tipo multi-solitônicas são encontradas considerando expansões em séries truncadas de τ em algum parâmetro arbitrário ϵ , por exemplo, $\tau = 1 + \epsilon\tau^{(1)} + \dots + \epsilon\tau^{(n)}$.

Longe de ser apenas um novo método de solução, o método das funções-tau descobriu uma profunda estrutura fundamental das hierarquias integráveis. É evidente deste método, que as álgebras de Kac-Moody "afins" (extensões centrais das álgebras de "loop") novamente desempenham um papel central (veja por exemplo [29]).

Kac e Wakimoto [29] construíram hierarquias de equações integráveis diretamente na forma de Hirota associadas às representações do tipo operadores de vértice das álgebras de Kac-Moody; portanto, as funções-tau descrevem a órbita do vetor de peso mais alto da representação sob o correspondente grupo de Kac-Moody. A conexão entre as equações de Hirota generalizadas de Kac-Wakimoto e as equações de curvatura nula de [22] têm sido estabelecidas na ref. [23]. O objetivo central desta última referência foi fornecer uma relação explícita entre as funções-tau e as variáveis do formalismo de curvatura nula. É importante notar que a classe de equações integráveis de [22] é grande o suficiente para incluir praticamente todas as generalizações da construção de Drinfel'd-Sokolov consideradas na literatura e, portanto, é desejável ter a descrição das funções-tau daquelas hierarquias integráveis.

A razão pela qual os resultados de [23] não se aplicam para todas as hierarquias integráveis de [22] é que as hierarquias generalizadas de [29] são construídas em termos das representações de vértice (nível 1) das álgebras de Kac-Moody "afim" simplesmente laçadas, enquanto que as hierarquias integráveis de [22] requerem algumas definições das funções-tau em termos das representações de peso mais alto de qualquer nível.

A conexão iniciada em [23] foi generalizada em [26] para uma grande classe de hierarquias integráveis, a saber, as hierarquias de [22] e as hierarquias conhecidas como as equações de Toda generalizadas. Neste último trabalho, os autores definem as funções-tau em termos das representações integráveis de peso mais alto de qualquer nível das álgebras de Kac-Moody "afim" onde o papel central é desempenhado pelas transformações "dressing" [25] que possibilitam relacionar as variáveis de campo em termos das funções-tau. Desta forma é possível de se obter soluções explícitas de certas equações não lineares integráveis "vestindo" algumas soluções de vácuo.

A dissertação está organizada da seguinte maneira: nos capítulos 1 e 2 fazemos um breve estudo dos sistemas GDNL_S₂ e GNLS₂ respectivamente. Fornecemos um programa simbólico para construir as suas quantidades conservadas. Estudamos o caráter bi-Hamiltoniano

de tais sistemas. No capítulo 3 obtemos uma transformação de "gauge" entre ambos os sistemas, fornecendo uma relação entre os campos dos respectivos modelos. No capítulo 4 reproduzimos a construção de hierarquias generalizadas do tipo I e sem "modificação de grau", isto é, com as duas gradações usadas sendo iguais. Obtemos a hierarquia NLS como um caso particular das hierarquias homogêneas. No capítulo 5 introduzimos as transformações "dressing" das hierarquias estudadas no capítulo precedente. No capítulo 6 estudamos o sistema GNLS_r, discutimos a sua solução de vácuo e construímos soluções usando o método das transformações "dressing". Soluções interessantes, a saber, soluções do tipo N-sóliton são obtidas. No capítulo 7, por simplicidade, a hierarquia GNLS₁ é considerada. Usando o método das transformações "dressing" obtemos soluções explícitas do tipo N-sóliton com múltiplos tempos. A construção de quantidades conservadas segue como resultado secundário do processo da parametrização dos campos em termos das funções-tau. Por razões de completeza apresentamos vários apêndices.

Capítulo 1

A equação de Schrödinger não linear derivativa (GDNLS₂)

A equação de Schrödinger não linear derivativa (DNLS), foi apresentada pela primeira vez no contexto do estudo da propagação não linear de ondas de Alfven paralelas em plasmas [1], encontrando-se mais tarde o seu relacionamento com muitos sistemas físicos conhecidos [2]. A equação DNLS é um exemplo de modelo integrável que possui soluções de tipo sóliton e a existência de um número infinito de quantidades conservadas, foi provada por Kaup e Newell [4].

Um modelo hamiltoniano é dito completamente integrável se ele possuir um número de quantidades conservadas em involução (com parênteses de Poisson nulo) igual ao número de graus de liberdade [5]. De uma maneira geral, um sistema contínuo é considerado integrável se as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) haver um número infinito de quantidades conservadas,
- ii) serem independentes
- iii) e estarem em involução (o parênteses de Poisson entre elas é nulo).

Assim como outras equações não lineares [6, 7], a hierarquia de GDNLS₂ também possui duas estruturas hamiltonianas [8, 9] e portanto, um número infinito de quantidades conservadas em involução.

O sistema GDNLS₂ para quatro campos (r_i e q_i) é dado por

$$\partial_t r_i = -\partial_x^2 r_i + 2 \cdot \partial_x \left(r_i \sum_{j=1}^2 r_j q_j \right) \quad (1.1)$$

$$\partial_t q_i = \partial_x^2 q_i + 2 \cdot \partial_x \left(q_i \sum_{j=1}^2 r_j q_j \right), \quad i, j = 1, 2 \quad (1.2)$$

onde ∂_t e ∂_x significam derivadas com relação ao tempo e espaço respectivamente.

1.1 Integrabilidade e quantidades conservadas da equação GDNLS₂

Mostraremos que o sistema GDNLS₂ possui um número infinito de quantidades conservadas que estão em involução e que por isso o sistema DNLS₂ é integrável.

Uma importante ferramenta para determinar a integrabilidade de uma equação diferencial em derivadas parciais não linear é encontrar um número suficiente de leis de conservação, da forma

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0, \quad (1.3)$$

onde $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \rho$ é a quantidade conservada com densidade ρ e um fluxo J associado. Integrando (1.3) com respeito a x obtemos:

$$\partial_t \int_A^B dx \cdot \rho + [J]_A^B = 0, \quad (1.4)$$

sob condições de contorno periódicas, com $(B - A)$ um múltiplo integral do período ou com r_i e q_i rapidamente anulando-se quando $x \rightarrow \pm\infty$ e $(A, B) = (-\infty, +\infty)$ o colchetes em (1.4) anula-se. Assim, com esses ou umas outras condições de contorno apropriadas (1.3) dá a constante de movimento $\int_A^B dx \cdot \rho$.

A continuação, seguimos as ideias expostas em [8] e brevemente discutimos o 'scaling' e as simetrias das equações. Estas podem ser usadas para obter informações sobre as densidades polinomiais conservadas e os blocos que fazem parte dela. O 'scaling' de (1.1, 1.2) é tal que

$$r_i \sim q_i, \quad \partial_t \sim \partial_x^2, \quad \sum_i q_i r_i \sim \partial_x \quad (1.5)$$

e o sistema (1.1, 1.2) é invariante sob

$$r_i \rightarrow q_i, \quad q_i \rightarrow -r_i$$

Podemos construir quantidades invariantes que pertençam à mesma classe sob o 'scaling' mencionado e tenham a simetria observada acima. Rotulando as densidades conservadas com ρ_{n-1} , n correspondendo à potência de $\sum_i q_i r_i$, obtemos as primeiras quantidades conservadas:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \sum_i q_i \cdot r_i, \\ \rho_1 &= (\sum_i q_i \cdot r_i)^2 + \sum_i \partial_x q_i \cdot r_i, \\ \rho_2 &= (\sum_i q_i \cdot r_i)^3 + \frac{3}{2} (\sum_i q_i \cdot r_i) (\sum_i \partial_x q_i \cdot r_i) + \frac{1}{2} \sum_i \partial_x^2 q_i \cdot r_i, \\ \rho_3 &= (\sum_i q_i \cdot r_i)^4 + 2 (\sum_i q_i \cdot r_i)^2 (\sum_i \partial_x q_i \cdot r_i) + \frac{2}{5} (\sum_i q_i \cdot r_i) \cdot \partial_x^2 (\sum_i q_i \cdot r_i) - \\ &\quad \frac{4}{5} (\sum_i q_i \cdot r_i) \cdot (\sum_i \partial_x q_i \cdot \partial_x r_i) + \frac{1}{5} \sum_i \partial_x^3 q_i \cdot r_i + \\ &\quad \frac{1}{5} \left[(\sum_i \partial_x q_i \cdot r_i)^2 + (\sum_i q_i \cdot \partial_x r_i)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.2 O sistema GDNLS₂ como um sistema Hamiltoniano.

Afim de mostrarmos que o sistema GDNLS₂ é um sistema Hamiltoniano, temos que achar um parênteses de Poisson fundamental e um Hamiltoniano que produza as equações (1.1, 1.2) como equações de Hamilton.

Sejam os parênteses, a tempos iguais,

$$\{r_i(x), q_j(y)\}_3 = P_3 \delta(x - y) = \delta_{ij} \partial_x \delta(x - y) \quad (1.7)$$

$$\{r_i(x), r_j(y)\}_3 = 0, \{q_i(x), q_j(y)\}_3 = 0 \quad (1.8)$$

e

$$H_1 = \int dx. \left[\left(\sum_i q_i r_i \right)^2 + \sum_i \partial_x q_i r_i \right] \quad (1.9)$$

Então, é facilmente verificado que

$$\partial_t r_i = \{r_i(x), H_1\}_3 = -\partial_x^2 r_i + 2 \partial_x \left(r_i \sum_{j=1}^2 r_j q_j \right), \quad (1.10)$$

$$\partial_t q_i = \{q_i(x), H_1\}_3 = \partial_x^2 q_i + 2 \partial_x \left(q_i \sum_{j=1}^2 r_j q_j \right), \quad (1.11)$$

mostrando que o sistema DNLS₂ é Hamiltoniano. A antisimetria da estrutura Hamiltoniana P_3 , é obvia e a identidade de Jacobi é trivialmente satisfeita, desde que esta seja uma estrutura constante (independente das variáveis dinâmicas) [6]. No apêndice C mostramos que $\{H_i, H_j\}_3 = 0$, com $H_i \equiv \int dx. \rho_i$ para $i, j = 0, \dots, 3$.

Definamos a seguinte estrutura Hamiltoniana

$$P_2 \delta(x - y) \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \{r_1(x), r_1(y)\}_2 & \{r_1(x), r_2(y)\}_2 & \{r_1(x), q_1(y)\}_2 & \{r_1(x), q_2(y)\}_2 \\ \{r_2(x), r_1(y)\}_2 & \{r_2(x), r_2(y)\}_2 & \{r_2(x), q_1(y)\}_2 & \{r_2(x), q_2(y)\}_2 \\ \{q_1(x), r_1(y)\}_2 & \{q_1(x), r_2(y)\}_2 & \{q_1(x), q_1(y)\}_2 & \{q_1(x), q_2(y)\}_2 \\ \{q_2(x), r_1(y)\}_2 & \{q_2(x), r_2(y)\}_2 & \{q_2(x), q_1(y)\}_2 & \{q_2(x), q_2(y)\}_2 \end{array} \right\} \quad (1.12)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} r_1(x).r_1(y).\epsilon(x-y) & \frac{1}{2}[r_1(x).r_2(y) + r_2(x).r_1(y)].\epsilon(x-y) \\ \frac{1}{2}[r_2(x).r_1(y) + r_1(x).r_2(y)].\epsilon(x-y) & r_2(x).r_2(y).\epsilon(x-y) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -\delta(x-y) - \frac{1}{2}[2.r_1(x).q_1(y) + r_2(x).q_2(y)].\epsilon(x-y) & -\frac{1}{2}r_1(x).q_2(y).\epsilon(x-y) \\ -\frac{1}{2}r_2(x).q_1(y).\epsilon(x-y) & -\delta(x-y) - \frac{1}{2}[.r_1(x).q_1(y) + 2.r_2(x).q_2(y)].\epsilon(x-y) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \delta(x-y) - \frac{1}{2}[2.q_1(x).r_1(y) + r_2(x).q_2(y)].\epsilon(x-y) & -\frac{1}{2}q_1(x).r_2(y).\epsilon(x-y) \\ -\frac{1}{2}q_2(x).r_1(y).\epsilon(x-y) & \delta(x-y) - \frac{1}{2}[2.q_2(x).r_2(y) + r_1(x).q_1(y)].\epsilon(x-y) \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} q_1(x).q_1(y).\epsilon(x-y) & \frac{1}{2}[q_2(x).q_1(y) + q_1(x).q_2(y)].\epsilon(x-y) \\ \frac{1}{2}[q_2(x).q_1(y) + q_1(x).q_2(y)].\epsilon(x-y) & q_2(x).q_2(y).\epsilon(x-y) \end{bmatrix}$$

e o seguinte hamiltoniano

$$H_2[r, q] = 2. \int dy. \left[(\sum_i q_i.r_i)^3 + \frac{3}{2}(\sum_i q_i.r_i)(\sum_i \partial_y q_i.r_i) + \frac{1}{2} \sum_i \partial_y^2 q_i.r_i \right], \quad (1.13)$$

então, podemos escrever novamente (veja apêndice A)

$$\partial_t r_i = \{r_i(x), H_2\}_2 = -\partial_x^2 r_i + 2.\partial_x(r_i \sum_{j=1}^2 r_j q_j) \quad (1.14)$$

$$\partial_t q_i = \{q_i(x), H_2\}_2 = \partial_x^2 q_i + 2.\partial_x(q_i \sum_{j=1}^2 r_j q_j) \quad (1.15)$$

Assim, o sistema DNLS₂ é também Hamiltoniano com respeito a uma segunda estrutura Hamiltoniana distinta. As estruturas de parênteses (1.7)-(1.8) e (1.12) são apresentadas em [16] para dois campos, ou seja, $r(x)$ e $q(x)$. A anti-simetria da estrutura Hamiltoniana, P_2 , é óbvia da definição em (1.12). Contudo, como agora a estrutura depende de variáveis dinâmicas, a identidade de Jacobi não é mais automática. A identidade de Jacobi é normalmente mais fácil de ser verificada examinando o fechamento da forma simplética correspondente. Contudo, notemos que a estrutura P_2 é altamente não trivial fazendo-a extremamente difícil para inverter. Não provaremos a identidade de Jacobi mas simplesmente mencionaremos um método que faz tal verificação de modo mais maleável [44], o

qual é chamado de método da prolongação. Por exemplo em [10] este método é usado para provar a identidade de Jacobi para as terceiras estruturas Hamiltonianas dos sistemas de KdV e NLS respectivamente.

Na próxima seção, mostraremos que estas duas estruturas Hamiltonianas são compatíveis fazendo o sistema DNLS₂ um sistema bi-Hamiltoniano.

1.3 O sistema DNLS₂ como um sistema bi-Hamiltoniano. Poisson 'pencil'

Seja M uma variedade dotada com dos parênteses de Poisson, $\{ \cdot, \cdot \}_0$ e $\{ \cdot, \cdot \}_1$. Dizemos que M é uma variedade bi-Hamiltoniana se a combinação linear

$$\{f(x), g(y)\}_\lambda := \{f(x), g(y)\}_1 - \lambda \cdot \{f(x), g(y)\}_0. \quad (1.16)$$

destes parênteses satisfazem a identidade de Jacobi para qualquer valor de um parâmetro real ou complexo λ . Isto significa que a condição de compatibilidade cíclica

$$\begin{aligned} &\{f, \{g, h\}_1\}_0 + \{g, \{h, f\}_1\}_0 + \{h, \{f, g\}_1\}_0 + \\ &\{f, \{g, h\}_0\}_1 + \{g, \{h, f\}_0\}_1 + \{h, \{f, g\}_0\}_1 = 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

é válida para qualquer conjunto de funcionais, $\{f, g, h\}$ em M . Neste caso, o parênteses, $\{ \cdot, \cdot \}_\lambda$, é chamado o 'Poisson pencil' [11], definido por $\{ \cdot, \cdot \}_0$ e $\{ \cdot, \cdot \}_1$ em M .

Assim, para mostrar que as duas estruturas Hamiltonianas P_2 e P_3 dadas em (1.7)-(1.8) e (1.12) respectivamente, são compatíveis, devemos mostrar que (1.17) é válido para qualquer conjunto de funcionais $\{f, g, h\}$ do sistema DNLS₂.

Em particular, para qualquer conjunto formado de tres campos r_i e q_i , a equação (1.17) deve ser satisfeita (veja apêndice B).

Capítulo 2

A equação de Schrödinger não linear generalizada (GNLS₂)

A equação

$$i\partial_t g + \partial_x^2 g \mp 2 |g|^2 g = 0 \quad (2.1)$$

é chamada a equação não linear de Schrödinger [12]. Ela tem importantes aplicações em áreas como a física do plasma e ótica não linear [37]. Se consideramos esta equação como a equação de Schrödinger da mecânica quântica, ∂_x^2 corresponde ao operador da energia cinética e $\mp 2 |g|^2$ ao potencial, proporcional à densidade de probabilidade $|g|^2$.

Observemos que impondo o vínculo [13]

$$\bar{\Psi}(x, it) = \pm [\Psi(x, it)]^* := g(x, t) \quad (2.2)$$

obtem-se

$$\partial_t \bar{\Psi} = \partial_x^2 \bar{\Psi} - 2 \bar{\Psi}^2 \Psi \quad (2.3)$$

$$\partial_t \Psi = -\partial_x^2 \Psi + 2 \bar{\Psi} \Psi^2 \quad (2.4)$$

onde Ψ e $\bar{\Psi}$ são funções reais.

Consideramos a extensão das equações (2.3, 2.4) para os quatro campos Ψ_i e $\bar{\Psi}_i$ com $i=1,2$. Assim,

$$\partial_t \bar{\Psi}_i = \partial_x^2 \bar{\Psi}_i - 2 \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j \right) \bar{\Psi}_i \quad (2.5)$$

$$\partial_t \Psi_i = -\partial_x^2 \Psi_i + 2 \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j \right) \Psi_i. \quad (2.6)$$

Chamaremos como as equações de Schrödingernão lineares generalizadas com quatro campos (GNLS₂). A obtenção de (2.5, 2.6) para 2n campos é apresentada em [14,19,20].

2.1 Quantidades conservadas y parênteses de Poisson do sistema GNLS₂

O mesmo método usado para construir as densidades conservadas do sistema GDNLS₂, pode ser utilizado novamente neste caso. Assim, o 'scaling' de (2.5, 2.6) é tal como

$$\Psi_i \sim \bar{\Psi}_i, \partial_t \sim \partial_x^2, \sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j \sim \partial_x^2, \quad (2.7)$$

e é invariante sob

$$\Psi_i \rightarrow \bar{\Psi}_i, \quad \bar{\Psi}_i \rightarrow \Psi_i, \quad t \rightarrow -t. \quad (2.8)$$

Seguindo as prescrições apresentadas na seção 1.1 do capítulo 1, podemos obter as primeiras quantidades conservadas

$$\mathcal{H}_1 = \int dx \sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{H}_2 = \int dx \sum_{j=1}^2 \partial_x \bar{\Psi}_j \Psi_j, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{H}_3 = \int dx \left[\sum_{j=1}^2 \partial_x^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j - \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j \right)^2 \right]. \quad (2.11)$$

Defina os seguintes parênteses de Poisson [14]

$$\begin{aligned} & P_1 \delta(x-y) = \\ & = \begin{bmatrix} \{\Psi_1(x), \Psi_1(y)\}_1 & \{\Psi_1(x), \Psi_2(y)\}_1 & \{\Psi_1(x), \bar{\Psi}_1(y)\}_1 & \{\Psi_1(x), \bar{\Psi}_2(y)\}_1 \\ \{\Psi_2(x), \Psi_1(y)\}_1 & \{\Psi_2(x), \Psi_2(y)\}_1 & \{\Psi_2(x), \bar{\Psi}_1(y)\}_1 & \{\Psi_2(x), \bar{\Psi}_2(y)\}_1 \\ \{\bar{\Psi}_1(x), \Psi_1(y)\}_1 & \{\bar{\Psi}_1(x), \Psi_2(y)\}_1 & \{\bar{\Psi}_1(x), \bar{\Psi}_1(y)\}_1 & \{\bar{\Psi}_1(x), \bar{\Psi}_2(y)\}_1 \\ \{\bar{\Psi}_2(x), \Psi_1(y)\}_1 & \{\bar{\Psi}_2(x), \Psi_2(y)\}_1 & \{\bar{\Psi}_2(x), \bar{\Psi}_1(y)\}_1 & \{\bar{\Psi}_2(x), \bar{\Psi}_2(y)\}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta(x-y) \quad (2.13)$$

e

$$P_2 \delta(x-y) \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \Psi_1(y) \epsilon(x-y) & \frac{1}{2} [\Psi_1(x) \Psi_2(y) + \bar{\Psi}_2(x) \Psi_1(y)] \epsilon(x-y) \\ [\Psi_1(x) \Psi_2(y) + \bar{\Psi}_2(x) \Psi_1(y)] \epsilon(x-y) & \Psi_2(x) \Psi_2(y) \epsilon(x-y) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \partial_x \delta(x-y) - \frac{1}{2}[\Psi_2(x)\bar{\Psi}_2(y) + 2\Psi_1(x)\bar{\Psi}_1(y)]\epsilon(x-y) & -\frac{1}{2}\Psi_1(x)\bar{\Psi}_2(y)\epsilon(x-y) \\ -\frac{1}{2}\Psi_2(x)\bar{\Psi}_1(y)\epsilon(x-y) & \partial_x \delta(x-y) - \frac{1}{2}[2\Psi_2(x)\bar{\Psi}_2(y) + \Psi_1(x)\bar{\Psi}_1(y)]\epsilon(x-y) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \partial_x \delta(x-y) - \frac{1}{2}[\bar{\Psi}_2(x)\Psi_2(y) + 2\bar{\Psi}_1(x)\Psi_1(y)]\epsilon(x-y) & -\frac{1}{2}\bar{\Psi}_1(x)\Psi_2(y)\epsilon(x-y) \\ -\frac{1}{2}\bar{\Psi}_2(x)\Psi_1(y)\epsilon(x-y) & \partial_x \delta(x-y) - \frac{1}{2}[\bar{\Psi}_1(x)\Psi_1(y) + 2\bar{\Psi}_2(x)\Psi_2(y)]\epsilon(x-y) \end{bmatrix},$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1(x)\bar{\Psi}_1(y)\epsilon(x-y) & \frac{1}{2}[\bar{\Psi}_1(x)\bar{\Psi}_2(y) + \bar{\Psi}_2(x)\bar{\Psi}_1(y)]\epsilon(x-y) \\ \frac{1}{2}[\bar{\Psi}_1(x)\bar{\Psi}_2(y) + \bar{\Psi}_2(x)\bar{\Psi}_1(y)]\epsilon(x-y) & \bar{\Psi}_2(x)\bar{\Psi}_2(y)\epsilon(x-y) \end{bmatrix},$$

e P_3 como

$$P_3\delta(x-y) = \int dz.dz' P_2\delta(x-z)P_1^{-1}\delta(z-z')P_2\delta(z'-y) \quad (2.15)$$

Veja seção 2.3 para a derivação das relações de recorrência das varias estruturas de parênteses de Poisson. No apêndice D damos algumas das componentes de $P_3\delta(x-y)$.

Agora, assumimos $\mathcal{H}_2 = \int dx \sum_{j=1}^2 \partial_x \bar{\Psi}_j \Psi_j$, como um Hamiltoniano, e consideramos a estrutura $P_2\delta(x-y)$ para calcular as equações de Hamilton

$$\partial_t \Psi_i = \{\Psi_i, \mathcal{H}_2\}_2, \quad (2.16)$$

$$\partial_t \bar{\Psi}_i = \{\bar{\Psi}_i, \mathcal{H}_2\}_2, \quad (2.17)$$

o subíndice 2 no parênteses significando que a estrutura P_2 é para ser usada.

Calculando os respectivos parênteses em (2.16, 2.17) obtemos o sistema de equações (2.5, 2.6). No apêndice E apresentamos alguns cálculos explicitamente. Assim, vemos que o sistema GNLS₂ é um sistema Hamiltoniano com $\mathcal{H}_2$ como um Hamiltoniano e com P_2 como a estrutura de parênteses correspondente. Esta estrutura de parênteses P_2 é manifestamente anti-simétrica, no que diz respeito à identidade de Jacobi; omitiremos a sua prova.

Desta vez assumimos

$$\mathcal{H}_3 = \int dx \left[\sum_{j=1}^2 \partial_x \bar{\Psi}_j \Psi_j - \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j \right)^2 \right], \quad (2.18)$$

como um outro Hamiltoniano e P_1 como sua estrutura de parênteses correspondente. Assim, de

$$\partial_t \Psi_i = \{\Psi_i, \mathcal{H}_3\}_1 \quad (2.19)$$

e

$$\partial_t \bar{\Psi}_i = \{\bar{\Psi}_i, \mathcal{H}_3\}_1, \quad (2.20)$$

obtemos novamente o sistema de equações (2.5, 2.6). Ainda, (2.5, 2.6) é um sistema Hamiltoniano com uma segunda escolha da estrutura de parênteses de Poisson e um segundo Hamiltoniano. Veja apêndice F para alguns cálculos de (2.19, 2.20).

Agora, tomamos

$$\mathcal{H}_1 = \int dx \sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j, \quad (2.21)$$

como um novo Hamiltoniano e $P_3 \delta(x - y)$, com algumas componentes dadas no apêndice B, como uma estrutura de parênteses, então

$$\partial_t \Psi_i = \{\Psi_i, \mathcal{H}_1\}_3 \quad (2.22)$$

e

$$\partial_t \bar{\Psi}_i = \{\bar{\Psi}_i, \mathcal{H}_1\}_3 \quad (2.23)$$

reproduzindo, uma vez mais o sistema (2.5, 2.6). Veja apêndice G para maiores detalhes.

2.2 O sistema GNLS₂ como um sistema bi-Hamiltoniano

A equação de Schrödinger não linear (2.1) é bem conhecida por ser um sistema bi-Hamiltoniano [15], ou seja, é um sistema cuja equação dinâmica pode ser descrita através das equações de Hamilton com respeito à duas estruturas Hamiltonianas, que também são compatíveis; à saber, qualquer superposição linear de duas estruturas também define uma estrutura hamiltoniana. Desde que a identidade de Jacobi envolva uma relação não-linear, a compatibilidade das estruturas Hamiltonianas é um resultado não trivial.

No nosso caso qualquer dos conjuntos $\{f, g, h\}$ devem satisfazer (1.17), em particular qualquer conjunto de tres elementos formado pelos campos Ψ_i e $\bar{\Psi}_i$ devem satisfazer esta equação. Tomamos $\{\Psi_i, \bar{\Psi}_j\}_\lambda = \{\Psi_i, \bar{\Psi}_j\}_2 - \lambda \{\Psi_i, \bar{\Psi}_j\}_3$, e mostramos que as estruturas P_2 e P_3 são compatíveis. Veja apêndice H.

2.3 Relações de recorrência das estruturas de parênteses de Poisson do sistema GNLS₂

Nosso objetivo é encontrar alguma relação de recorrência entre várias estruturas Hamiltonianas [16] do sistema GNLS₂.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\{A, B\}_i &= \sum_{l,m=1,2} \int \int dz.dz'. \left[\frac{\delta A}{\delta \Psi_l(z)} \cdot \frac{\delta B}{\delta \Psi_m(z')} \{ \Psi_l(z), \Psi_m(z') \}_i + \right. \\
&\quad \frac{\delta A}{\delta \Psi_l(z)} \frac{\delta B}{\delta \bar{\Psi}_m(z')} \{ \Psi_l(z), \bar{\Psi}_m(z') \}_i + \\
&\quad \left. \frac{\delta A}{\delta \bar{\Psi}_l(z)} \frac{\delta B}{\delta \Psi_m(z')} \{ \bar{\Psi}_l(z), \Psi_m(z') \}_i + \frac{\delta A}{\delta \bar{\Psi}_l(z)} \frac{\delta B}{\delta \bar{\Psi}_m(z')} \{ \bar{\Psi}_l(z), \bar{\Psi}_m(z') \}_i \right], \quad (2.24)
\end{aligned}$$

que pode ser formalmente escrita como

$$\{A, B\}_i \equiv \begin{bmatrix} \frac{\delta A}{\delta \Psi}, \frac{\delta A}{\delta \bar{\Psi}} \end{bmatrix}_{1 \times 4} \begin{bmatrix} \{ \Psi, \Psi \}_i & \{ \Psi, \bar{\Psi} \}_i \\ \{ \bar{\Psi}, \Psi \}_i & \{ \bar{\Psi}, \bar{\Psi} \}_i \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} \frac{\delta B}{\delta \Psi} \\ \frac{\delta B}{\delta \bar{\Psi}} \end{bmatrix}_{4 \times 1},$$

ou

$$\equiv \begin{bmatrix} \frac{\delta A}{\delta \Psi}, \frac{\delta A}{\delta \bar{\Psi}} \end{bmatrix} P_i [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta B}{\delta \Psi} \\ \frac{\delta B}{\delta \bar{\Psi}} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

onde A e B são algumas funcionais dos campos Ψ_i e $\bar{\Psi}_i$. Ou seja, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \partial_{t_l} \Psi \\ \partial_{t_l} \bar{\Psi} \end{bmatrix}_{4 \times 1} &= \begin{bmatrix} \{ \Psi, \mathcal{H}_{l+1} \}_1 \\ \{ \bar{\Psi}, \mathcal{H}_{l+1} \}_1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \\
&= P_1 [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+1} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+1} \end{bmatrix} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

$$= P_2 [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathcal{H}_l}{\delta \Psi} \\ \frac{\delta \mathcal{H}_l}{\delta \bar{\Psi}} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$= P_i [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+2-i} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+2-i} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \partial_{t_l} \Psi \\ \partial_{t_l} \bar{\Psi} \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \partial_{t_l} \Psi_1 \\ \partial_{t_l} \Psi_2 \\ \partial_{t_l} \bar{\Psi}_1 \\ \partial_{t_l} \bar{\Psi}_2 \end{bmatrix}, \quad P_1 \text{ e } P_2 \text{ est n dadas em (2.13 , 2.14).}$$

Portanto

$$P_1 [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+1} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+1} \end{bmatrix} = P_2 [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathcal{H}_l}{\delta \Psi} \\ \frac{\delta \mathcal{H}_l}{\delta \bar{\Psi}} \end{bmatrix} = P_i [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+2-i} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+2-i} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

das primeiras igualdades temos

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+1} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+1} \end{bmatrix} = P_1^{-1} [\Psi, \bar{\Psi}] . P_2 [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta \mathcal{H}_l}{\delta \Psi} \\ \frac{\delta \mathcal{H}_l}{\delta \bar{\Psi}} \end{bmatrix},$$

ou repetindo várias vezes

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+1} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+1} \end{bmatrix} = (P_1^{-1} [\Psi, \bar{\Psi}] . P_2 [\Psi, \bar{\Psi}])^{i-1} \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+2-i} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+2-i} \end{bmatrix},$$

multiplicando por P_1 ambos os lados da ultima equação:

$$P_1 [\Psi, \bar{\Psi}] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+1} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+1} \end{bmatrix} = P_1 [\Psi, \bar{\Psi}] (P_1^{-1} [\Psi, \bar{\Psi}] . P_2 [\Psi, \bar{\Psi}])^{i-1} \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \Psi} \mathcal{H}_{l+2-i} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} \mathcal{H}_{l+2-i} \end{bmatrix}$$

comparando esta última relação com (2.29) nos obtemos

$$P_i [\Psi, \bar{\Psi}] = P_1 [\Psi, \bar{\Psi}] (P_1^{-1} [\Psi, \bar{\Psi}] . P_2 [\Psi, \bar{\Psi}])^{i-1}, \quad i \geq 1, \quad (2.30)$$

isto pode ser escrito como:

$$P_i [\Psi, \bar{\Psi}] = P_2 [\Psi, \bar{\Psi}] . P_1^{-1} [\Psi, \bar{\Psi}] . P_{i-1} [\Psi, \bar{\Psi}], \quad i \geq 1,$$

em particular, para $i = 3$ temos

$$P_3 [\Psi, \bar{\Psi}] = P_2 [\Psi, \bar{\Psi}] . P_1^{-1} [\Psi, \bar{\Psi}] . P_2 [\Psi, \bar{\Psi}], \quad (2.31)$$

que nós temos usado em (2.15).

Um exemplo: Apresentamos uma aplicação de (2.30) no bem conhecido sistema de KdV.

Tomamos as seguintes duas estruturas de Poisson:

$$\{u(x), u(y)\}_1 = P_1 \delta(x - y) = \partial_x \delta(x - y)$$

e

$$\{u(x), u(y)\}_2 = P_2 \delta(x - y) = [\partial_x^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u(x) + u(x) \partial_x)] . \delta(x - y).$$

Para encontrar P_3 , escrevemos a relação

$$P_3 \delta(x - y) = \int \int dz . dz' P_2 \delta(x - z) P_1^{-1} \delta(z - z') P_2 \delta(z' - y),$$

substituindo as correspondentes expressões, temos

$$\begin{aligned} &= \int \int dz . dz' [\partial_x^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u(x) + u(x) \partial_x)] . \delta(x - z) . \partial_z^{-1} \delta(z - z') [\partial_{z'}^3 + \\ &\quad \frac{1}{3}(\partial_{z'} u(z') + u(z') \partial_{z'})] \delta(z' - y) \\ &= \int dz' \{ \int dz . [\partial_x^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u(x) + u(x) \partial_x)] . \delta(x - z) . \partial_z^{-1} \delta(z - z') \} \\ &\quad [\partial_{z'}^3 + \frac{1}{3}(\partial_{z'} u(z') + u(z') \partial_{z'})] \delta(z' - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int dz' \{ [\partial_x^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u(x) + u(x)\partial_x)] \cdot \partial_x^{-1} \delta(x - z') \} [\partial_{z'}^3 + \\
&\quad \frac{1}{3}(\partial_{z'} u(z') + u(z')\partial_{z'})] \delta(z' - y) \\
&= [\partial_x^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u(x) + u(x)\partial_x)] [\partial_x^3 + \frac{1}{3}(\partial_x u(x) + u(x)\partial_x)] \delta(x - y) \\
&\equiv P_3 \delta(x - y),
\end{aligned}$$

onde

$$P_3 = \partial^5 + \frac{1}{3}(\partial^3 u + \partial^2 u \partial + \partial u \partial^2 + u \partial^3) + \frac{1}{9}(\partial u^2 + u \partial u + u^2 \partial + \partial u \partial^{-1} u \partial).$$

A estrutura P_3 é apresentada em [10] e aí se mostra que P_3 é anti-simétrica e satisfaz à identidade de Jacobi.

Capítulo 3

Transformações de "gauge" em teorias integráveis

Sejam dois conjuntos de sistemas lineares na forma:

$$\Phi_{1x} = U_1 \Phi_1, \quad (3.1)$$

$$\Phi_{1t} = V_1 \Phi_1 \quad (3.2)$$

e

$$\Phi_{2x} = U_2 \Phi_2, \quad (3.3)$$

$$\Phi_{2t} = V_2 \Phi_2, \quad (3.4)$$

onde os Φ_1 e Φ_2 são funções vetoriais de $n + 1$ componentes e as matrizes $(n + 1) \times (n + 1)$ U_i e V_i (com $i = 1, 2$), contendo os campos do modelo.

A condição de consistência para cada sistema linear, dá como resultado, um conjunto de equações não lineares em evolução. De (3.1- 3.4) temos

$$[\partial_t - V_i, \partial_x - U_i] = 0, \quad (3.5)$$

onde $i = 1, 2$.

Seja λ um parâmetro espectral real, $g \in G$, G sendo um grupo de Lie compacto ou não compacto e sob a transformação de gauge local

$$g(x, t; \lambda_o) = g(x, t; \lambda) \mid_{\lambda_o \in G}, \quad (3.6)$$

a função Φ muda para

$$\Phi \rightarrow \Phi'(x, t; \lambda, \lambda_o) = g^{-1}(x, t; \lambda_o) \Phi(x, t; \lambda), \quad (3.7)$$

a transformação (3.7) é conhecida como uma transformação de "gauge" (GT) [17,18]. Substituindo (3.7) nas equações (3.1-3.4) obtemos

$$U_1 = g^{-1} U_2 g - g^{-1} g_x \equiv g^{-1} (U_2 - U_2^{(o)}) g, \quad g_x g^{-1} \equiv U_2^{(o)} = U_2 \mid_{\lambda_2 = \lambda_o}, \quad (3.8)$$

$$V_1 = g^{-1} V_2 g - g^{-1} g_t \equiv g^{-1} (V_2 - V_2^{(o)}) g, \quad g_t g^{-1} \equiv V_2^{(o)} = V_2 \mid_{\lambda_2 = \lambda_o}. \quad (3.9)$$

De (3.5), para $i = 1$ temos

$$\partial_t U_1 - \partial_x V_1 + [U_1, V_1] = 0, \quad (3.10)$$

e, usando (3.8 , 3.9) obtemos

$$g^{-1} \{ (\partial_t U_2 - \partial_x V_2 + [U_2, V_2]) - (\partial_t U_2^{(o)} - \partial_x V_2^{(o)} + [U_2^{(o)}, V_2^{(o)}]) \} g = 0, \quad (3.11)$$

desde que

$$U_2^{(o)} \equiv g_x g^{-1} \quad e \quad V_2^{(o)} \equiv g_t g^{-1},$$

dados em (3.8-3.9), satisfazem identicamente a equação

$$\partial_t U_2^{(o)} - \partial_x V_2^{(o)} + [U_2^{(o)}, V_2^{(o)}] = 0.$$

De (3.11) temos

$$\partial_t U_2 - \partial_x V_2 + [U_2, V_2] = 0.$$

Fica claro que este tipo de transformação relaciona uma equação sólton a uma outra equação sólton. Também existe, um outro tipo de transformação dependente de um parâmetro espectral (GT): $\Phi'(x, t; \lambda) = g(x, t; \lambda) \Phi(x, t; \lambda)$, que gera uma transformação de Backlund (BT), a qual relaciona uma solução com uma diferente solução do mesmo sistema (veja por exemplo [38]).

Estamos interessados em relacionar os sistemas GDNLS₂ e GNLS₂, através de uma transformação de "gauge", e por isso, será conveniente escrever ambas as equações na forma de condição de curvatura nula (3.5); isto será feito na próxima seção.

3.1 Condições de curvatura nula para os sistemas GDNLS₂ e GNLS₂.

Uma das características comuns das equações do tipo sólton é que são obtidas como condições de compatibilidade para sistemas lineares, como em (3.1-3.4). Então, os sistemas de equações são definidos pelas condições de curvatura nula,

$$[L_1, L_2] = 0, \quad (3.12)$$

como em (3.5), onde

$$L_1 = \partial_t - V_1 \quad (3.13)$$

e

$$L_2 = \partial_x - U_1, \quad (3.14)$$

L_1 e L_2 são chamados "operadores de Lax".

3.1.1 O sistema GNLS₂

As equações de movimento para o modelo GNLS₂ usando o formalismo de Zakharov-Shabat (ZS) e Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) fornece a fundamentação algébrica de Lie para este modelo [14,19, 20]. Não reproduziremos aqui aquelas derivações, simplesmente tomamos os potenciais relevantes

$$U_1 = \frac{\lambda_1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\Psi}_1 \\ 0 & 0 & \bar{\Psi}_2 \\ \Psi_1 & \Psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & A_1 & E \\ F & G & A_2 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda_1^2}{3} - \frac{1}{2}(\bar{\Psi}_1\Psi_1 - \bar{\Psi}_2\Psi_2) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^2 \bar{\Psi}_i\Psi_i\right), \\ B &= -\bar{\Psi}_1\Psi_2, \quad C = \lambda_1\bar{\Psi}_1 + \partial_x\bar{\Psi}_1, \quad D = -\Psi_1\bar{\Psi}_2, \\ E &= \lambda_1\bar{\Psi}_2 + \partial_x\bar{\Psi}_2, \quad F = \lambda_1\Psi_1 - \partial_x\Psi_1, \quad G = \lambda_1\Psi_2 - \partial_x\Psi_2 \\ A_1 &= \frac{\lambda_1^2}{3} + \frac{1}{2}(\bar{\Psi}_1\Psi_1 - \bar{\Psi}_2\Psi_2) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^2 \bar{\Psi}_i\Psi_i\right), \\ A_2 &= -\frac{2}{3}\lambda_1^2 + \left(\sum_{i=1}^2 \bar{\Psi}_i\Psi_i\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Logo, a condição de curvatura nula: $\partial_t U_1 - \partial_x V_1 + [U_1, V_1] = 0$, fornece o sistema de equações GNLS₂ (2.5, 2.6).

3.1.2 O sistema GDNLS₂

Este sistema é uma extensão do sistema GNLS₂ [21] e origina-se considerando um problema espectral que é quadrático em λ_2 (o parâmetro espectral):

$$U_2 = \alpha \frac{\lambda_2^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \alpha \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & q_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & A_1 & E \\ F & G & A_2 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

com α sendo algum parâmetro real. As componentes de V_2 são:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}\alpha^2\lambda_2^4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha^2\lambda_2^2.b + \frac{1}{3}\alpha^2\lambda_2^2.a, \quad B = \alpha^2\lambda_2^2.c, \\ C &= \alpha^2\lambda_2^3.q_1 + \lambda_2\alpha.(\partial_x q_1 + \alpha.a.q_1) + \lambda_2\alpha^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}bq_1 + cq_2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \alpha^2 \lambda_2^2 d, \quad A_1 = \frac{1}{3} \alpha^2 \lambda_2^4 - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha^2 \lambda_2^2 b + \frac{1}{3} \alpha^2 \lambda_2^2 a, \\
E &= \alpha^2 \lambda_2^3 q_2 + \lambda_2 \alpha (\partial_x q_2 + \alpha a q_2) + \lambda_2 \alpha^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} b q_2 + d q_1 \right), \\
F &= \alpha^2 \lambda_2^3 r_1 + \lambda_2 \alpha (-\partial_x r_1 + \alpha a r_1) + \lambda_2 \alpha^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} b r_1 + d r_2 \right), \\
G &= \alpha^2 \lambda_2^3 r_2 + \lambda_2 \alpha (-\partial_x r_2 + \alpha a r_2) + \lambda_2 \alpha^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} b r_2 + c r_1 \right), \\
A_2 &= -\frac{2}{3} \alpha^2 \lambda_2^4 - \frac{2}{3} \alpha^2 \lambda_2^2 a,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

com

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{3}{2} \sum_i q_i r_i, \quad \partial_x b = \frac{1}{2} \partial_x \Delta + 2 q_1 r_2 d - 2 r_1 q_2 c, \\
\partial_x c &= \partial_x (q_1 r_2) - \sqrt{2} b (q_1 r_2) - \Delta c, \\
\partial_x d &= \partial_x (q_2 r_1) + \sqrt{2} b (q_2 r_1) + \Delta d, \\
\Delta &= q_2 r_2 - q_1 r_1.
\end{aligned}$$

Então, $\partial_t U_2 - \partial_x V_2 + [U_2, V_2] = 0$, proporciona as equações do sistema GDNLS₂

$$\partial_t q_i = \partial_x^2 q_i - \frac{3}{2} \alpha \partial_x \left[\left(\sum_j q_j r_j \right) q_i \right], \tag{3.21}$$

$$\partial_t r_i = -\partial_x^2 q_i - \frac{3}{2} \alpha \partial_x \left[\left(\sum_j q_j r_j \right) r_i \right], \tag{3.22}$$

fixando $\alpha = 4/3$ e fazendo as transformações $r_i \rightarrow r_i$, $q_i \rightarrow -q_i$, obtemos as equações (1.1, 1.2), com as quais já trabalhamos no capítulo 1.

3.2 Transformações de gauge entre os sistemas GNLS₂ e GDNLS₂

Usaremos as equações (3.8-3.9) para relacionar os sistemas GNLS₂ e GDNLS₂. Escrevendo (3.8) como

$$g.U_1 - U_2.g = -g_x, \tag{3.23}$$

e substituindo a correspondente U_i dado em (3.15) e (3.18), bem como, considerando g com componentes g_{lm} , temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} \begin{bmatrix} (\lambda_1 - \alpha \lambda_2^2) g_{11} & (\lambda_1 - \alpha \lambda_2^2) g_{12} & -(2\lambda_1 + \alpha \lambda_2^2) g_{13} \\ (\lambda_1 - \alpha \lambda_2^2) g_{21} & (\lambda_1 - \alpha \lambda_2^2) g_{22} & -(2\lambda_1 + \alpha \lambda_2^2) g_{23} \\ (\lambda_1 + \alpha \lambda_2^2) g_{31} & (\lambda_1 + 2\alpha \lambda_2^2) g_{32} & -2(\lambda_1 - \alpha \lambda_2^2) g_{33} \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} \Psi_1 g_{13} & \Psi_1 g_{13} & \bar{\Psi}_1 g_{11} + \bar{\Psi}_2 g_{12} \\ \Psi_1 g_{23} & \Psi_2 g_{23} & \bar{\Psi}_1 g_{21} + \bar{\Psi}_2 g_{22} \\ \Psi_1 g_{33} & \Psi_2 g_{33} & \bar{\Psi}_1 g_{31} + \bar{\Psi}_2 g_{32} \end{bmatrix} - \alpha \lambda_2 \begin{bmatrix} q_1 g_{31} & q_1 g_{32} & q_1 g_{33} \\ q_2 g_{31} & q_2 g_{32} & q_2 g_{33} \\ r_1 g_{11} + r_2 g_{21} & r_1 g_{12} + r_2 g_{22} & r_1 g_{13} + r_2 g_{23} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= -\partial_x \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Para encontrarmos uma das mais simples soluções para g , colocamos

$$\lambda_o \equiv \lambda_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad g_{31} = g_{32} = 0.$$

Obtemos então, as seguintes equações para as outras componentes de g :

$$\partial_x g_{33} = \alpha \lambda_o (r_1 g_{13} + r_2 g_{23}), \quad (3.25)$$

$$\partial_x g_{23} = \alpha \lambda_o^2 g_{23} - \bar{\Psi}_1 g_{21} - \bar{\Psi}_2 g_{22} + \alpha \lambda_o q_2 g_{33}, \quad (3.26)$$

$$\partial_x g_{13} = \alpha \lambda_o^2 g_{13} - \bar{\Psi}_1 g_{11} - \bar{\Psi}_2 g_{12} + \alpha \lambda_o q_1 g_{33}, \quad (3.27)$$

$$\Psi_1 g_{33} = \alpha \lambda_o (r_1 g_{11} + r_2 g_{21}), \quad (3.28)$$

$$\Psi_2 g_{33} = \alpha \lambda_o (r_1 g_{12} + r_2 g_{22}), \quad (3.29)$$

$$\partial_x g_{11} = -\Psi_1 g_{13}, \quad (3.30)$$

$$\partial_x g_{12} = -\Psi_2 g_{13}, \quad (3.31)$$

$$\partial_x g_{21} = -\Psi_1 g_{23}, \quad (3.32)$$

$$\partial_x g_{22} = -\Psi_2 g_{23}. \quad (3.33)$$

Uma possível solução do sistema de equações (3.25-3.33) é

$$g = \begin{bmatrix} e^{\mu_3} & a_1 e^{\mu_2} & -q_1 e^{\mu_1} / \lambda_o \\ a_2 e^{\mu_3} & e^{\mu_2} & -q_2 e^{\mu_1} / \lambda_o \\ 0 & 0 & e^{\mu_1} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

onde

$$\mu_1 = -\alpha \int^x s \cdot dx', \quad s = \sum_{i=1}^2 q_i r_i, \quad (3.35)$$

$$\mu_2 = \alpha \int^x (q_2 r_1 a_1 + q_2 r_2) \cdot dx', \quad \mu_3 = \alpha \int^x (q_1 r_2 a_2 + q_1 r_1) \cdot dx' \quad (3.36)$$

$$\partial_x a_1 = (r_1 a_1 + r_2)(-q_2 a_1 + q_1), \quad \partial_x a_2 = (r_2 a_2 + r_1)(-q_1 a_2 + q_2), \quad (3.37)$$

e as transformações entre os campos dos sistemas dadas por:

$$\begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha} \begin{bmatrix} e^{2\mu_1 + \mu_2} [(\partial_x q_1 - \alpha q_1 s) - a_1 (\partial_x q_2 - \alpha q_2 s)] \\ e^{2\mu_1 + \mu_3} [(\partial_x q_2 - \alpha q_2 s) - a_2 (\partial_x q_1 - \alpha q_1 s)] \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

e

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha} \begin{bmatrix} e^{\mu_3 - \mu_1} (r_1 + a_2 r_2) \\ e^{\mu_2 - \mu_1} (r_2 + a_1 r_1) \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

As equações (3.37) são de Riccati para a_1 e a_2 . Uma solução geral para a equação de Riccati não é fácil de se achar, porém, se tivéssemos tres soluções particulares, a solução

geral poderia ser achada. Apesar disso, as transformações (3.38) e (3.39), ainda, podem ser usadas , por exemplo, para contruir as quantidades conservadas (1.6) do sistema GDNLS₂ usando as respectivas quantidades (2.9-2.11) do sistema GNLS₂. Apresentamos a correspondência, entre as primeiras quantidades conservadas:

$$\begin{aligned}
 \text{GNLS}_2 : \qquad \qquad \qquad \text{GDNLS}_2 : \\
 \mathcal{H}_1 = \int dx \sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j \quad \leftrightarrow \quad H_0 = \int dx \sum_i q_i \cdot r_i, \\
 \mathcal{H}_2 = \int dx \sum_{j=1}^2 \partial_x \bar{\Psi}_j \Psi_j \quad \leftrightarrow \quad H_1 = \int dx [(\sum_i q_i \cdot r_i)^2 + \sum_i \partial_x q_i \cdot r_i], \\
 \mathcal{H}_3 = \int dx \left[\sum_{j=1}^2 \partial_x^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j - \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j \right)^2 \right] \leftrightarrow H_2 = \int dx [(\sum_i q_i \cdot r_i)^3 + \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{3}{2} (\sum_i q_i \cdot r_i) (\sum_i \partial_x q_i \cdot r_i) + \frac{1}{2} \sum_i \partial_x^2 q_i \cdot r_i],
 \end{aligned}$$

onde utilizamos (3.35-3.37).

Nossas equações (3.37) diferem das apresentadas em [18]. Naqueles artigos os termos quadráticos em a_1 e a_2 não aparecem e portanto as suas soluções não são corretas.

Capítulo 4

Hierarquias generalizadas de Drinfel'd-Sokolov

Na construção apresentada em [22], uma hierarquia integrável generalizada foi associada a cada álgebra de Kac-Moody afim $\hat{g}$, uma subálgebra particular de Heisenberg $\mathcal{H}[w] \subset \hat{g}$ (com uma gradação $s[w]$ que é a gradação induzida pelo elemento w do grupo de Weyl W_g da álgebra de Lie finita g associada) e uma gradação adicional s , tal que $s[w] \geq s$, com respeito a uma ordenação parcial. A gradação auxiliar s estabelece o "grau de modificação" da hierarquia. Em [22], a construção foi realizada numa "álgebra de loop" (álgebra de Kac-Moody com elemento central nulo), enquanto que, para o nosso propósito (Capítulo 5), será mais conveniente desenvolver uma construção independente de qualquer representação, usando a álgebra de Kac-Moody com elemento central C ; ainda assim, deve-se advertir que a hierarquia das equações resultante é idêntica [23].

Há um fluxo da hierarquia para cada elemento de $\mathcal{H}[w]$ de grau não negativo $s[w]$, isto é o conjunto $\{b_j, \quad j \in E \subset \mathbf{Z} \geq 0\}$. Os fluxos são definidos em termos das "conexões de gauge", ou "operadores de Lax" da forma

$$L_j = \partial_{t_j} - b_j - q_{(j)}, \quad j \in E \subset \mathbf{Z} \geq 0,$$

onde $q_{(j)}$ é uma função dos "tempos" t_j na intersecção

$$Q(j) \equiv \hat{g}_{\geq 0}(s) \cap \hat{g}_{< j}(s[w]).$$

Com o propósito de se garantir, que os fluxos estejam associados unívocamente aos elementos do conjunto $\{b_j, \quad j \in E \subset \mathbf{Z} \geq 0\}$ nós também, sem perda de generalidade, assumiremos que $q_{(j)}$ não contém termos constantes proporcionais ao elemento b_i para $i < j$.

A hierarquia de equações integráveis é definida pela condição de curvatura nula

$$[L_i, L_j] = 0.$$

Na seção seguinte, apresentaremos a construção de hierarquias para os casos em que $s = s[w]$ [22, 24] e por simplicidade tomaremos $C = 0$.

4.1 Construção de hierarquias

Consideremos uma álgebra de Kac-Moody $\hat{g}$ com gradação inteira $s = (s_0, s_1, \dots, s_r)(r = \text{"rank" de } g, \text{ onde } g \text{ é uma álgebra de Lie finita semi-simples})$. Definamos o operador de Lax

$$L = \partial_x + A + E_l, \quad (4.1)$$

com E_l = elemento constante de grau l de $\hat{g}$. Tomemos E_l como sendo semi-simples, isto é, a álgebra $\hat{g}$ é decomposta como

$$\hat{g} = \text{Ker.ad}E_l + \text{Im.ad}E_l, \quad \text{Ker.ad}E_l \cap \text{Im.ad}E_l = \phi, \quad (4.2)$$

A = potencial contendo os campos e estando nos subespaços $\hat{g}_n$, com $n = 0, 1, \dots, l-1$. Assim:

$$A = \sum_{n=0}^{l-1} A^{(n)}, \quad (4.3)$$

com

$$[Q_s, A^{(n)}] = n.A^{(n)}, \quad (4.4)$$

e Q_s sendo o operador de gradação.

Como E_l é semi-simples podemos fazer uma transformação de "gauge" e pôr L em $\text{Ker.ad}E_l$. Tomemos:

$$U = e^T, \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} T^{(-n)}, \quad (4.5)$$

com

$$[Q_s, T^{(-n)}] = -n.T^{(-n)}.$$

Definamos

$$L_o = ULU^{-1} = UAU^{-1} + UE_lU^{-1} + U\partial_xU^{-1} + \partial_x. \quad (4.6)$$

Como U contém só operadores de gradações negativas, temos que L_o possui componentes entre l e $-\infty$. De modo que obtemos

$$L_o = \partial_x + E_l + \sum_{n=-\infty}^{l-1} M^{(n)}. \quad (4.7)$$

A estrutura geral é portanto:

$$M^{(n)} = [T^{(-l+n)}, E_l] + X^{(n)}, \quad (4.8)$$

onde $X^{(n)}$ contém $T^{(m)}$, com $m > -l + n$.

De acordo com (4.2) podemos escrever

$$X^{(n)} = X_K^{(n)} + X_I^{(n)} \quad (4.9)$$

com

$$X_K^{(n)} \in \text{Ker.ad}E_l, \quad X_I^{(n)} \in \text{Im.ad}E_l. \quad (4.10)$$

Por definição:

$$[T^{(-l+n)}, E_l] \in \text{Im}.adE_l. \quad (4.11)$$

O termo $T^{(-l+m)}$ é arbitrário e possui componentes suficientes para gerar a componente de $\text{Im}.adE_l$ em $\hat{g}_n$. Escolhamos $T^{(-l+m)}$ tal que

$$[T^{(-l+m)}, E_l] + X_I^{(m)} = 0. \quad (4.12)$$

Pode-se provar que

$$L_o = \partial_x + E_l + \sum_{n=-\infty}^{l-1} H^{(n)}, \quad (4.13)$$

com

$$H^{(n)} \in \text{Ker}.adE_l, \quad [Q_s, H^{(n)}] = nH^{(n)}. \quad (4.14)$$

Comentários:

i) devemos observar que a escolha de $T^{(n)}$ não é única. De (4.11) e (4.12) vemos que a componente de $T^{(-l+m)}$ que está em $\text{Ker}.adE_l$ não contribue. Assim, estes estão livres e podemos tomá-los como zero.

ii) os $T^{(m)}$ são determinados localmente de (4.12) (ou (4.6)), em termos dos campos em A .

iii) deve-se observar a importância da decomposição (4.2). Se não houvesse elementos de $\hat{g}$ que não pertencessem nem a $\text{Im}.adE_l$ e nem a $\text{Ker}.adE_l$ estaríamos com problemas. Si existisse uma superposição entre $\text{Ker}.adE_l$ e $\text{Im}.adE_l$, este seria um problema, mas não tão sério.

Consideremos agora um elemento $b^{(N)}$ de grau $N > 0$, pertencente ao centro de $\text{Ker}.adE_l$, isto é:

$$[b^{(N)}, \text{Ker}.adE_l] = 0, \quad (4.15)$$

e tal que

$$\partial_x b^{(N)} = 0. \quad (4.16)$$

Então de (4.13) segue

$$[b^{(N)}, L_o] = 0. \quad (4.17)$$

Temos então

$$[U^{-1}b^{(N)}U, U^{-1}L_oU] = [U^{-1}b^{(N)}U, L] = 0, \quad (4.18)$$

e portanto

$$[(U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0}, L] = -[(U^{-1}b^{(N)}U)_{< 0}, L], \quad (4.19)$$

com

$$(U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0} \equiv \bigoplus_{n=0}^N \hat{g}_n, \quad (4.20)$$

$$(U^{-1}b^{(N)}U)_{< 0} \equiv \bigoplus_{n=-\infty}^{-1} \hat{g}_n. \quad (4.21)$$

Expandindo-se (4.19), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_x(U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0} + [A + E_l, (U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0}] = \\ - \partial_x(U^{-1}b^{(N)}U)_{< 0} - [A + E_l, (U^{-1}b^{(N)}U)_{< 0}], \end{aligned} \quad (4.22)$$

o lado esquerdo possui somente componentes não negativas, já o lado direito possui componentes com grau de $l - 1$ até $-\infty$. Assim, ambos os lados possuem componentes entre 0 e $l - 1$. Desta forma,

$$\partial_x(U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0} + [A + E_l, (U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0}] \subset \bigoplus_{n=0}^{l-1} \hat{g}_n. \quad (4.23)$$

Definamos então os fluxos

$$\frac{\partial L}{\partial t_N} = [B_N, L] \quad (\text{ou} \quad \frac{\partial A}{\partial t_N} = [B_N, L]), \quad (4.24)$$

com

$$B_N = \sum_{n=0}^N B_N^{(n)} = (U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0} \quad (4.25)$$

e

$$[Q_s, B_N^{(n)}] = n \cdot B_N^{(n)}. \quad (4.26)$$

Consideremos agora a subálgebra que é a componente de $Ker.adE_l$ com grau zero, isto é:

$$H_o = Ker.adE_l \cap \hat{g}_o, \quad (4.27)$$

H_o certamente é uma subálgebra. Os subespaços $\hat{g}_n$ para $n \neq 0$ transformam-se sob uma representação de $\hat{g}_0$, e portanto de H_o , a saber:

$$[H_o, \hat{g}_m] \subset \hat{g}_m. \quad (4.28)$$

Definamos então as transformações de gauge

$$\begin{aligned} L &\rightarrow h L h^{-1} = \tilde{L}, \\ B_N &\rightarrow h B_N h^{-1} = \tilde{B}_N \end{aligned} \quad (4.29)$$

com

$$h = e^{H_o}, \quad \partial_{t_N} h = 0, \quad (4.30)$$

estas são simetrias de (4.24), pois

$$h (\partial_{t_N} L + [L, B_N]) h^{-1} = 0 = \partial_{t_N} \tilde{L} + [\tilde{L}, \tilde{B}_N]$$

e

$$\tilde{L} = \partial_x + E_l + \tilde{A}, \quad \text{com} \quad \tilde{A} = \sum_{n=0}^{l-1} \tilde{A}^{(n)} \quad e \quad \tilde{B}_N = \sum_{n=0}^N \tilde{B}_N.$$

Assim a forma dos operadores de Lax, L e B_N é preservada, isto é, eles estão nos mesmos subespaços, e além do mais, as componentes de maior grau são as mesmas, pois:

$$hE_lh^{-1} = E_l, \quad hb^{(N)}h^{-1} = b^{(N)} \quad e \quad B_N^{(N)} = b^{(N)}.$$

Estes são os tipos de transformações de gauge que deveríamos achar mais frequentemente.

Vamos agora analisar as equações de movimento. De (4.22), (4.24) e (4.25) temos:

$$\frac{\partial A}{\partial t_N} = \partial_x(U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0} + [A + E_l, (U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0}]. \quad (4.31)$$

A componente de grau $(l-1)$ no lado direito de (4.22) é:

$$- [E_l, (U^{-1}b^{(N)}U)_{-1}], \quad (4.32)$$

escrevendo

$$A = \sum_{n=0}^{l-1} (A_K^{(n)} + A_I^{(n)}) = \sum_{n=0}^{l-1} A^{(n)}, \quad (4.33)$$

com $A_K^{(n)} \in \text{Ker.ad}E_l$ e $A_I^{(n)} \in \text{Im.ad}E_l$, concluimos que

$$\frac{\partial A_K^{(l-1)}}{\partial t_N} = 0, \quad (4.34)$$

então do lado esquerdo de (4.22) obtém-se

$$\partial_x(U^{-1}b^{(N)}U)_{l-1}^K + \sum_{j=1}^l [A^{(l-j)}, (U^{-1}b^{(N)}U)_{j-1}]_K = 0. \quad (4.35)$$

Portanto, se $A_K^{(l-1)} = 0$ para $t_N = 0$, então permanecerá nulo para $t_N > 0$. Agora, a componente de grau $(l-2)$ no lado direito de (4.22) é

$$[A^{(l-1)}, (U^{-1}b^{(N)}U)_{-1}] + [E_l, (U^{-1}b^{(N)}U)_{-2}] \in \text{Im.ad}E_l, \quad (4.36)$$

assim, $\frac{\partial A_K^{(l-2)}}{\partial t_N} = 0$; então concluimos que

$$A_K^{(j)} = 0, \quad \text{onde } j = 0, 1, \dots, l-1. \quad (4.37)$$

De (4.6) e (4.24) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t_N}(U^{-1}L_oU) = [B_N, U^{-1}L_oU]$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t_N}L_o = \left[UB_NU^{-1} + \frac{\partial U}{\partial t_N}U^{-1}, L_o \right].$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial t_N} L_o = [\tilde{B}_N, L_o], \quad (4.38)$$

com

$$\tilde{B}_N = U B_N U^{-1} + \frac{\partial U}{\partial t_N} U^{-1} \quad (4.39)$$

$$= b^{(N)} - U(U^{-1} b^{(N)} U)_{<0} U^{-1} + \frac{\partial U}{\partial t_N} U^{-1}, \quad (4.40)$$

denotemos L_o em (4.7) por:

$$L_o = \partial_x + E_l + \sum_{n=-\infty}^{l-1} M^{(n)} = \partial_x + E_l + K_o, \quad (4.41)$$

e $\tilde{B}_N$ em (4.39) por:

$$\tilde{B}_N = \tilde{B}_N^K + \tilde{B}_N^I \quad (4.42)$$

com $\tilde{B}_N^K \in \text{Ker.ad}E_l$ e $\tilde{B}_N^I \in \text{Im.ad}E_l$.

De (4.40) podemos separar $\tilde{B}_N$ nos subespaços:

$$\tilde{B}_N^K = \sum_{n=-\infty}^N \tilde{B}_N^{K(n)}, \quad \tilde{B}_N^I = \sum_{n=-\infty}^N \tilde{B}_N^{I(n)}, \quad (4.43)$$

então (4.38) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t_N} K_o = [\tilde{B}_N^K, K_o] - \partial_x \tilde{B}_N^K + [\tilde{B}_N^I, E_l + K_o] - \partial_x \tilde{B}_N^I. \quad (4.44)$$

Assim a componente de (4.44) em $\text{Im.ad}E_l$ é

$$\partial_x \tilde{B}_N^I = -[E_l, \tilde{B}_N^I] - [K_o, \tilde{B}_N^I]. \quad (4.45)$$

A componente de maior grau de (4.45) é:

$$[E_l, \tilde{B}_N^{I(N)}] = 0,$$

como $\text{Ker.ad}E_l \cap \text{Im.ad}E_l = \phi$, segue que

$$\tilde{B}_N^{I(N)} = 0;$$

então a componente de maior grau torna-se

$$[E_l, \tilde{B}_N^{I(N-1)}] = 0,$$

e pelo mesmo motivo segue que

$$\tilde{B}_N^{I(N-1)} = 0.$$

Concluimos então que $\tilde{B}_N^I = 0$ e portanto:

$$\tilde{B}_N = U B_N U^{-1} + \frac{\partial U}{\partial t_N} U^{-1} \in \text{Ker.ad}E_l, \quad (4.46)$$

daí (4.44) torna-se

$$\frac{\partial}{\partial t_N} K_o = -\partial_x \tilde{B}_N^K + [\tilde{B}_N^K, K_o]. \quad (4.47)$$

De modo que se $Ker.adE_l$ for abeliano obtemos a lei de conservação

$$\frac{\partial}{\partial t_N} K_o = -\partial_x \tilde{B}_N^K. \quad (4.48)$$

Consideremos agora a comutação dos fluxos. De (4.24) segue que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_M \partial t_N} = \left[\frac{\partial B_N}{\partial t_M}, L \right] + [B_N, [B_M, L]] \quad (4.49)$$

e

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_N \partial t_M} = \left[\frac{\partial B_M}{\partial t_N}, L \right] + [B_M, [B_N, L]]. \quad (4.50)$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_M \partial t_N} - \frac{\partial^2 L}{\partial t_N \partial t_M} = 0 \quad (4.51)$$

implica

$$\frac{\partial B_N}{\partial t_M} - \frac{\partial B_M}{\partial t_N} + [B_N, B_M] = 0. \quad (4.52)$$

Mostremos agora que, (4.52) é satisfeito. De (4.46) e do fato que $b^{(N)}$ é constante e pertence ao centro de $Ker.adE_l$, obtemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_N} - \tilde{B}_N, b^{(M)} \right] = 0 \quad (4.53)$$

e

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_M} - \tilde{B}_M, b^{(N)} \right] = 0. \quad (4.54)$$

Conjugando (4.53,4.54) com U e usando (4.46), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t_N} (U^{-1} b^{(M)} U) = [B_N, U^{-1} b^{(M)} U] \quad (4.55)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t_M} (U^{-1} b^{(N)} U) = [B_M, U^{-1} b^{(N)} U]. \quad (4.56)$$

Tomando-se a parte positiva de (4.55,4.56) e subtraindo ambas as equações, segue:

$$\frac{\partial B_M}{\partial t_N} - \frac{\partial B_N}{\partial t_M} = [B_N, U^{-1} b^{(M)} U]_{\geq 0} - [B_M, U^{-1} b^{(N)} U]_{\geq 0}, \quad (4.57)$$

onde usamos (4.25).

Além disso,

$$[B_N, U^{-1} b^{(M)} U]_{\geq 0} = [B_N, B_M] + [B_N, (U^{-1} b^{(M)} U)_{<0}]_{\geq 0} \quad (4.58)$$

e

$$[U^{-1}b^{(M)}U, U^{-1}b^{(N)}U] = U^{-1} [b^{(M)}, b^{(N)}] U = 0, \quad (4.59)$$

e assim

$$[(U^{-1}b^{(M)}U)_{\geq 0}, U^{-1}b^{(N)}U] = -[(U^{-1}b^{(M)}U)_{< 0}, U^{-1}b^{(N)}U].$$

Tomando-se a parte positiva ficamos com

$$\begin{aligned} [B_M, U^{-1}b^{(N)}U]_{\geq 0} &= -[(U^{-1}b^{(M)}U)_{< 0}, U^{-1}b^{(N)}U]_{\geq 0} \\ &= -[(U^{-1}b^{(M)}U)_{< 0}, (U^{-1}b^{(N)}U)_{\geq 0}]_{\geq 0} \\ &= [B_N, (U^{-1}b^{(M)}U)_{< 0}]_{\geq 0}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

De (4.57), (4.58) e (4.60) segue-se que (4.52) é satisfeita.

4.2 Hierarquias homogêneas

Apresentaremos um exemplo de aplicação do formalismo desenvolvido na seção precedente. Nosso exemplo estará restrito ao caso das hierarquias de tipo I na classificação apresentada em [22].

4.2.1 Construção das hierarquias homogêneas

Nesta seção, consideramos as hierarquias para as quais $w = 1$, o elemento identidade de W_g . Assim, neste caso $s[1]$ é a gradação homogênea. A hierarquia mais simples de tipo I, associada à gradação homogênea têm como operador de Lax

$$L = \partial_x + A + E_1, \quad (4.61)$$

onde $E_1 = z\mu \cdot H$, para algum vetor μ . Para termos uma hierarquia de tipo I, requiere-se que $\mu \cdot H$ seja regular ($\text{Ker.ad}E_1 = \mathcal{H}[1]$ é uma subálgebra de Cartan), portanto, $\alpha \cdot \mu \neq 0$, $\forall \alpha \in \Phi_g$ (Φ_g = conjunto das raízes de g). Seguindo a construção geral da seção 4.1. temos,

$$A \in C^\infty(\mathbf{R}, \hat{g}),$$

ou em componentes,

$$A = f \cdot H + \sum_{\alpha \in \Phi_g} q^\alpha E_\alpha, \quad (4.62)$$

onde f é uma função qualquer e as funções q^α são os campos da hierarquia de equações. Devido às equações (4.34-4.37), f é constante ao longo dos fluxos; portanto, sem perda de generalidade, fazemos $f = 0$.

A álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}[1]$ é determinada pelos elementos $z^n \nu \cdot H$, e assim, em cada nível há um espaço vetorial, de dimensão r , de elementos de $\mathcal{H}[1]$. Portanto, em cada nível pode-se definir um espaço vetorial de fluxos. Por exemplo, os fluxos com $n = 1$ são dados por

$$\frac{\partial L}{\partial t_{\nu,1}} = [a_\nu + z \nu \cdot H, L], \quad (4.63)$$

que dá a seguinte equação para a_o :

$$[\nu.H, A] + [a_o, \mu.H] = 0, \quad (4.64)$$

e o fluxo

$$\frac{\partial A}{\partial t_{\nu,1}} = -\partial_x a_o + [a_o, A].$$

Resolvendo (4.64) obtemos:

$$a_o = \sum_{\alpha \in \Phi_g} \left(\frac{\nu.\alpha}{\mu.\alpha} \right) q^\alpha E_\alpha,$$

assim, o primeiro espaço vetorial de fluxos é

$$\frac{\partial q^\alpha}{\partial t_{\nu,1}} = \nu. \left(-\frac{\alpha}{\mu.\alpha} \partial_x q^\alpha + \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\beta}{\mu.\beta} N_{\beta,\gamma} q^\beta q^\gamma \right), \quad (4.65)$$

onde $N_{\beta,\gamma}$, para $\beta + \gamma \in \Phi_g$, são as constantes de estrutura de g .

O segundo espaço vetorial de fluxos é

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^\alpha}{\partial t_{\nu,2}} = & \nu. \left(\frac{\alpha}{(\mu.\alpha)^2} \partial_x^2 q^\alpha - \frac{1}{\mu.\alpha} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\beta}{\mu.\beta} N_{\beta,\gamma} \partial_x (q^\beta q^\gamma) - \right. \\ & \frac{1}{2} \sum_{\beta} \frac{\beta(\alpha.\beta)}{(\mu.\beta)^2} q^\beta q^{-\beta} q^\alpha - \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\beta}{(\mu.\beta)^2} N_{\beta,\gamma} (\partial_x q^\beta) q^\gamma \\ & \left. + \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta'+\gamma'=\beta}} \frac{\beta'}{(\mu.\beta)(\mu.\beta')} N_{\beta,\gamma} N_{\beta',\gamma'} q^{\beta'} q^{\gamma'} q^\gamma \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.2.2 O sistema GNLS₁ como um exemplo

Para ilustrar os cálculos, apresentamos a hierarquia GNLS₁. Neste caso, $g = sl_2$ e E_l sendo um elemento regular de g , isto é, uma hierarquia de tipo I. Assim, é natural considerar as hierarquias homogêneas como generalizações da hierarquia não linear de Schrödinger (NLS).

Pelo fato que $w = \mathbf{1} \in W_g$, $s[\mathbf{1}]$ é a gradação homogênea. Definamos o operador de Lax

$$L = \partial_x + E_1 + A, \quad (4.67)$$

com $A \in C^\infty(\mathbf{R}, \hat{g}_o)$ e $E_1 = z\mu H$ ($E_1 \in \mathcal{H}_1[w]$), onde μ é um parâmetro real. Assim,

$$A = f.H + q^+ E_+ + q^- E_-, \quad (4.68)$$

pela observação, na seção 4.2.1, fazemos $f = 0$. Os fluxos estão dados por

$$\frac{\partial L}{\partial t_b} = [B(b), L], \quad b \in \mathcal{H}_+[\mathbf{1}], \quad (4.69)$$

com

$$B(b) = \left(e^{-adT}(b) \right)_+ = b - [T, b] + \frac{1}{2} [T, [T, b]] - \dots,$$

veja as equações (4.24) e (4.25), onde

$$T \in C^\infty(R, \tilde{g}_{<0}(s[1])),$$

tomando $b^{(1)} = z\nu H$, temos

$$\left(e^{-adT}(b^{(1)}) \right)_+ = a_o + z\nu H,$$

logo,

$$\frac{\partial L}{\partial t_{\nu,1}} = [a_o + z\nu H, L], \quad (4.70)$$

com

$$L = \partial_x + q^+ E_+ + q^- E_- + z\mu H. \quad (4.71)$$

Substituindo em (4.70) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t_{\nu,1}} (q^+ E_+ + q^- E_-) = -\partial_x a_o + [a_o, q^+ E_+ + q^- E_-]$$

e

$$[a_o, \mu H] = -\nu q^+ E_+ + \nu q^- E_-,$$

destas duas últimas equações, obtém-se

$$a_o = \frac{\nu}{\mu} (q^+ E_+ + q^- E_-),$$

e

$$\frac{\partial q^+}{\partial t_{\nu,1}} = -\frac{\nu}{\mu} \partial_x q^+, \quad \frac{\partial q^-}{\partial t_{\nu,1}} = -\frac{\nu}{\mu} \partial_x q^-, \quad (4.72)$$

o qual é o primeiro espaço vetorial de fluxos.

Em seguida obtemos o segundo espaço vetorial de fluxos. Tomando $b^{(2)} = z^2\nu H$, tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial t_{\nu,2}} = [z^2\nu H + z a_1 + a_o, \partial_x + A + z\mu H], \quad (4.73)$$

depois de algumas operações, pode-se obter

$$a_1 = \frac{\nu}{\mu} A, \quad a_o = \bar{f}H - \frac{\nu}{\mu^2} (\partial_x q^+ E_+ - \partial_x q^- E_-),$$

com

$$\bar{f} = -\frac{\nu}{\mu} (q^+ q^-).$$

Finalmente, substituindo estas últimas relações na equação de Lax (4.73), obtem-se

$$\frac{\partial q^+}{\partial t_{\nu,2}} = \frac{\nu}{\mu^2} \partial_x^2 q^+ - \frac{\nu}{\mu^2} (q^+ q^-) q^+, \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial q^-}{\partial t_{\nu,2}} = -\frac{\nu}{\mu^2} \partial_x^2 q^- + \frac{\nu}{\mu^2} (q^+ q^-) q^-, \quad (4.75)$$

as quais pertencem à hierarquia não linear de Schrödinger (NLS) de dois campos.

Capítulo 5

Transformações "dressing"

Consideremos um sistema genérico não-linear admitindo uma formulação em termos da condição de curvatura nula

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0 \quad (5.1)$$

cujos potenciais de "gauge" A_μ encontram-se sobre uma álgebra de Lie $\hat{g}$ e sendo funcionais dos campos do modelo. As transformações "dressing" [25, 26, 27] são transformações de "gauge" não-locais agindo sobre os A_μ e mantendo suas formas e estruturas de gradação. Cada uma destas transformações de "gauge", é realizada de dois modos diferentes, em termos de dois elementos diferentes de grupo, Θ_+ e Θ_- de $\hat{G}$ (que é o grupo cuja álgebra de Lie é $\hat{g}$):

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^g \equiv \Theta_\pm A_\mu \Theta_\pm^{-1} - \partial_\mu \Theta_\pm \Theta_\pm^{-1} \quad (5.2)$$

Visto que A_μ satisfaz (5.1) ele deve ser da forma de "gauge" puro

$$A_\mu = -\partial_\mu \Psi \Psi^{-1} \quad (5.3)$$

e, conseqüentemente

$$A_\mu^g \equiv -\partial_\mu (\Theta_\pm \Psi) (\Theta_\pm \Psi)^{-1}. \quad (5.4)$$

Portanto, existe um elemento de grupo constante h tal que

$$\Theta_+ \Psi = \Theta_- \Psi h,$$

ou equivalentemente

$$\Theta_-^{-1} \Theta_+ = \Psi h \Psi^{-1}. \quad (5.5)$$

O requisito de que a transformação "dressing" preserve a forma do potencial A_μ implica que $\Theta_\pm$ deve pertencer a dois subgrupos diferentes de $\hat{G}$ determinados pela forma particular de A_μ em $\hat{g}$. Neste sentido, (5.5) corresponde à factorização de $\Psi h \Psi^{-1}$ dentro daqueles subgrupos. Então, dada uma solução do modelo definida por um elemento de grupo Ψ e um elemento de grupo constante h , a transformação "dressing" pode ser usada para construir uma nova solução definida por

$$\Psi^h = \Theta_+ \Psi. \quad (5.6)$$

No que segue, abordaremos o tratamento apresentado em [26].

5.1 Soluções de vácuo e transformações "dressing".

As hierarquias integráveis que podem ser escritas na forma de equações de curvatura nula, podem geralmente ser descritas em termos das álgebras de Kac-Moody graduadas. Consideramos uma álgebra de Kac-Moody "untwisted" afim $\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}D$ e uma gradação inteira da sua álgebra derivada $\hat{\mathfrak{g}}$, especificada por um vetor $s = (s_0, s_1, \dots, s_r)$ de $r + 1$ inteiros primos relativos e não-negativos (a álgebra de Lie associada $\mathfrak{g}$ é simples com "rank" = r). Então,

$$\hat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{\mathfrak{g}}(s), \quad [\hat{\mathfrak{g}}_i(s), \hat{\mathfrak{g}}_j(s)] \subseteq \hat{\mathfrak{g}}_{i+j}(s), \quad (5.7)$$

e escolhemos uma base graduada $\{e_k\}$ para $\hat{\mathfrak{g}}$, onde $e_k \in \hat{\mathfrak{g}}_k(s)$. Os fluxos destas hierarquias serão definidas em termos dos operadores de Lax da forma

$$L_{\pm i} = \frac{\partial}{\partial t_i^{\pm}} - A_{\pm}(i), \quad i \in E \subset \mathbb{Z} \geq 0, \quad (5.8)$$

onde E é um conjunto de inteiros, e

$$A_{\pm}(i) = \sum_{k=0}^i A_{\pm}^k(i) e_{\pm k}, \quad (5.9)$$

o que significa que, $A_+(i)$ e $A_-(i)$ são funções dos 'tempos' $t_j^{\pm}$ assumindo valores sobre os subespaços

$$Q_+(i) = \hat{\mathfrak{g}}_{\geq 0} \cap \hat{\mathfrak{g}}_{\leq i}(s) \quad e \quad Q_-(i) = \hat{\mathfrak{g}}_{\leq 0} \cap \hat{\mathfrak{g}}_{\geq -i}(s), \quad (5.10)$$

respectivamente. Então, a hierarquia das equações são definidas pelas condições de curvatura nula

$$[L_i, L_j] = 0, \quad i, j \in E \subset \mathbb{Z} \geq 0. \quad (5.11)$$

Os sistemas acima exibem uma invariância de gauge da forma

$$L_i \rightarrow U L_i U^{-1}, \quad (5.12)$$

preservando $A_{\pm}(i) \in Q_{\pm}(i)$, onde U é uma função no grupo $\hat{G}_o$ formada pela exponenciação da sub-álgebra de dimensão finita $\hat{\mathfrak{g}}_o(s)$. As equações da hierarquia são assumidas como equações sobre as classes de equivalência de $Q_{\pm}(i)$ sob estas transformações de gauge.

Juntamente com estas hierarquias integráveis gerais há um problema linear associado

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i^{\pm}} - A_{\pm}(i) \right) \Psi = 0, \quad i \in E \subset \mathbb{Z} \geq 0, \quad (5.13)$$

onde Ψ é uma função dos $t_j^{\pm}$, assumindo valores no grupo de Kac-Moody $\hat{G}(s)$ formado pela exponenciação de $\hat{\mathfrak{g}}$; as equações de curvatura nula (5.11) são precisamente as condições de integrabilidade para (5.13). Uma forma equivalente de se expressar a relação entre as soluções das equações de curvatura nula, $A_{\pm}(i)$, e as soluções do problema linear Ψ , é

$$A_{\pm}(i) = \frac{\partial \Psi}{\partial t_i^{\pm}} \Psi^{-1}. \quad (5.14)$$

Em termos do problema linear associado, podemos facilmente definir um importante conjunto de transformações chamado transformações "dressing", as quais levam soluções conhecidas das hierarquias para novas soluções. A partir de agora, usaremos a notação

$$\hat{g}_{<k}(s) = \bigoplus_{i<k} \hat{g}_i(s), \quad \hat{g}_{>k}(s) = \bigoplus_{i>k} \hat{g}_i(s), \quad (5.15)$$

e denotaremos por $\hat{G}_-(s)$, $\hat{G}_+(s)$ e $\hat{G}_o(s)$ os sub-grupos de $\hat{G}$ formados pela exponenciação das sub-álgebras $\hat{g}_{<0}(s)$, $\hat{g}_{>0}(s)$ e $\hat{g}_0(s)$, respectivamente. As transformações "dressing" podem ser descritas da seguinte forma.

Dada uma solução Ψ do problema linear (5.13) e um elemento constante (independente de $t^\pm$) $h \in \hat{G}$ com

$$\Psi h \Psi^{-1} = (\Psi h \Psi^{-1})_- (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+, \quad (5.16)$$

(situados no 'big cell' $\hat{G}_-(s)\hat{G}_+(s)\hat{G}_o(s)$) o qual é equivalente a dizer que $\Psi h \Psi^{-1}$ admite uma decomposição de Gauss generalizada com relação à gradação s , então Ψ^h definida por:

$$\begin{aligned} \Psi^h &= \left[(\Psi h \Psi^{-1})_- \right]^{-1} \Psi \\ &= (\Psi h \Psi^{-1})_0 (\Psi h \Psi^{-1})_+ \Psi h^{-1}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

é também uma solução do problema linear. Isto pode ser facilmente verificado mostrando que

$$A_\pm^h(i) = \frac{\partial \Psi^h}{\partial t_i^\pm} (\Psi^h)^{-1} \in Q_\pm(i), \quad (5.18)$$

desde que Ψ seja uma solução de (5.13). A transformação

$$\Psi \rightarrow \Psi^h \quad \text{ou} \quad A_\pm(i) \rightarrow A_\pm^h(i), \quad (5.19)$$

é chamada uma transformação "dressing".

Dentro desta classe geral, consideraremos apenas aquelas hierarquias integráveis cujas soluções pertencem às órbitas de algumas soluções triviais sob o grupo de transformações "dressing"; a estas soluções elementares chamaremos soluções de vácuo.

A órbita desta solução de vácuo sob o grupo de transformações "dressing" pode ser construída usando as equações (5.17) e (5.18).

Definamos

$$\Theta^{-1} = (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1})_-, \quad B^{-1} = (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1})_0 \quad (5.20)$$

$$N = (\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1})_+ \quad e \quad \Omega = B^{-1} N. \quad (5.21)$$

Então, sob as transformações "dressing" geradas por h ,

$$\Psi^{(vac)} \rightarrow \Psi^h = \Theta \Psi^{(vac)} = \Omega \Psi^{(vac)} h^{-1}, \quad (5.22)$$

ou, equivalentemente, os potenciais $A_{\pm}^{(vac)}$ tornam-se

$$A_+^h(i) = \Theta A_+^{(vac)}(i) \Theta^{-1} + \partial_i^+ \Theta \Theta^{-1} \in \{A_+^{(vac)}(i)\} \cup \hat{g}_{<i}(s) \quad (5.23)$$

$$= \Omega A_+^{(vac)}(i) \Omega^{-1} + \partial_i^+ \Omega \Omega^{-1} \in \hat{g}_{\geq 0}(s) \quad (5.24)$$

$$A_-^h(i) = \Theta A_-^{(vac)}(i) \Theta^{-1} + \partial_i^- \Theta \Theta^{-1} \in \hat{g}_{<0}(s) \quad (5.25)$$

$$= \Omega A_-^{(vac)}(i) \Omega^{-1} + \partial_i^- \Omega \Omega^{-1} \in \hat{g}_{\geq -i}(s). \quad (5.26)$$

Igualando os graus nestas equações, os potenciais $A_{\pm}^{(h)}$ podem ser escritos de dois modos diferentes, em termos de Θ ou de Ω ,

$$A_+^h(i) = P_{\geq 0}[s] \left(\Theta A_+^{(vac)}(i) \Theta^{-1} \right) \quad (5.27)$$

$$= A_+^{(vac)} + P_{<i}[s] \left(\partial_i^+ \Omega \Omega^{-1} \right), \quad (5.28)$$

$$A_-^h(i) = P_{<0}[s] \left(\Omega A_-^{(vac)}(i) \Omega^{-1} \right) \quad (5.29)$$

$$= A_-^{(vac)} + P_{\geq -i}[s] \left(\partial_i^- \Theta \Theta^{-1} \right), \quad (5.30)$$

onde

$$\partial_i^{\pm} \equiv \frac{\partial}{\partial t_i^{\pm}},$$

e $P_{\geq k}[s]$ e $P_{<k}[s]$ são os projetores sobre $\hat{g}_{\geq k}(s)$ e $\hat{g}_{<k}(s)$, respectivamente.

5.2 Transformações "dressing" e as funções tau

As órbitas das soluções de vácuo, descritas na seção 5.1. sob o grupo das transformações "dressing" fornecem um conjunto de soluções para certas hierarquias de equações integrais. De acordo com o método de Hirota, as "funções tau" que definiremos nesta seção constituem um novo conjunto de variáveis para descrever aquelas soluções; uma das características destas variáveis é que elas simplificam substancialmente a tarefa de construir soluções multi-sóliton.

5.2.1 As funções tau

Para uma dada álgebra graduada de Kac-Moody $\{\hat{g}, s\}$, consideremos uma solução de vácuo e um elemento particular $h \in \hat{G}$, que gera uma transformação "dressing". Então, haverá uma "função tau" para cada $s_i \neq 0$: consideremos o estado de peso mais alto da representação fundamental $L(i)$ (veja o Apêndice J) e definamos o vetor "função-tau" [26] (geralmente não indicaremos que as funções tau dependem do elemento de grupo h)

$$\tau_i(t^{\pm}) = \left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} \right) |\lambda_i\rangle \quad (5.31)$$

$$= \Theta^{-1} B^{-1} |\lambda_i\rangle, \quad i = 0, 1, \dots, r; \quad s_i \neq 0. \quad (5.32)$$

onde usamos as equações (5.16), (5.20) e (5.21) e que $N|\lambda_i\rangle = |\lambda_i\rangle$, pelo fato que $s_i \neq 0$. Notamos que $\tau_i(t^\pm)$ é agora um elemento de $L(i)$; o papel das funções tau de Hirota são desempenhados por algumas componentes dos $\tau_i(t^\pm)$.

Dado que a derivação d_s pode ser diagonalizada agindo sobre $L(s)$, as funções tau podem ser decompostas como

$$\tau_i(t^\pm) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau_i^{(-j)}(t^\pm), \quad d_i \tau_i^{(-j)}(t^\pm) = -j \tau_i^{(-j)}(t^\pm), \quad (5.33)$$

onde usamos o fato que $\Theta \in \hat{G}_{<0}(s)$ e $B \in \hat{G}_0(s)$. Além disso, o estado de peso mais alto é um auto-estado da sub-álgebra $\hat{g}_0(s)$ e conseqüentemente de B ; portanto

$$\tau_i^{(0)}(t^\pm) = B^{-1} |\lambda_i\rangle = |\lambda_i\rangle \hat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm), \quad (5.34)$$

onde $\hat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm)$ é uma função (não um estado de $L(i)$);

$$\hat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm) = \langle \lambda_o | \left[\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} \right]_{(o)} | \lambda_o \rangle, \quad (5.35)$$

então, (5.32) torna-se

$$\Theta^{-1} |\lambda_i\rangle = \frac{\tau_i(t^\pm)}{\hat{\tau}_i^{(0)}(t^\pm)}. \quad (5.36)$$

Dado $\tau_i(t^\pm)$ para todo $i = 0, 1, \dots, r$, com $s_i \neq 0$, (5.36) determina univocamente $\Theta \in \hat{G}_{<0}(s)$ (por exemplo, usando a forma hermitiana positivo definida de $L(i)$). Logo, via as equações (5.23)-(5.26) e (5.36), os $\tau_i(t^\pm)$ especificam uma solução de uma das hierarquias integráveis descritas na seção 5.1 (veja a equação (5.11))

De acordo como o método de Hirota, (5.36) pode ser usada de dois modos diferentes. Primeiro, proporciona uma mudança de variáveis entre as quantidades que aparecem nas equações de curvatura nula e algumas das componentes das funções tau $\tau_i(t^\pm)$. Estas componentes são funções dos tempos $t_i^\pm$ e desempenham o mesmo papel que as "funções tau de Hirota".

O segundo e mais importante uso das "funções tau" é a construção explícita das soluções (multi-)sóliton. Para ilustrar como isto funciona, consideremos aquelas hierarquias integráveis cujas soluções pertencem às órbitas de algumas soluções triviais sob o grupo de transformações "dressing"; estas soluções elementares serão chamadas "soluções de vácuo". Seja $\hat{s}$ um sub-conjunto graduado de $\hat{g}$ da forma

$$\hat{s} = \{b_i \in \hat{g}_i(s), \quad i \in E \subset \mathbb{Z} \quad / \quad [b_i, b_j] = iC\delta_{i+j,0}\}, \quad (5.37)$$

onde C é o elemento central de $\hat{g}$. Logo, a "solução de vácuo" associada a $\hat{s}$ será

$$A_+^{(vac)}(i) = b_i, \quad A_-^{(vac)}(i) = b_{-i} + iCt_i^+,$$

ou, equivalentemente

$$\Psi^{(vac)} = \exp \left(\sum_{i \in E \geq 0} t_i^\pm b_i \right) \exp \left(\sum_{-j \in E < 0} t_j^- b_{-j} \right). \quad (5.38)$$

Seja F um auto-vetor sob a ação adjunta dos elementos de $\hat{s}$

$$[b_{\pm i}, F] = w_i^{\pm} F, \quad \pm i \in E \subset \mathbf{Z}, \quad (5.39)$$

logo,

$$\begin{aligned} \tau_i(t^{\pm}) &= (\Psi^{(vac)} e^F \Psi^{(vac)-1}) |\lambda_i\rangle \\ &= \exp \left[\exp \left(\sum_{j \in E \geq 0} w_j^+ t_j^+ + \sum_{-j \in E < 0} w_j^- t_j^- \right) F \right] |\lambda_i\rangle, \end{aligned} \quad (5.40)$$

para $s_i \neq 0$, são as funções tau de uma solução elementar. Quando F é nilpotente agindo sobre $|\lambda_i\rangle$, isto é, quando existe um inteiro N tal que $F^{N+1} |\lambda_i\rangle = 0$ e $F^{N+1} |\lambda_i\rangle \neq 0$, então

$$\tau_i(t^{\pm}) = \left(1 + \sum_{j=1}^N f_j(t^{\pm}) F^j \right) |\lambda_i\rangle, \quad (5.41)$$

onde os $f_j(t^{\pm})$ são funções dos "tempos" $t_k^{\pm}$.

Para recapitular, para cada autovetor adjunto simultâneo F de todos os elementos de $\hat{s}$ temos as primeiras soluções não-triviais, cujas "funções tau" são dadas por (5.40). Logo, as soluções de tipo multi-sóliton devem corresponder (conjetura) aos elementos de grupo h , que são os produtos das exponenciais dos auto-vetores F_i , isto é

$$h = e^{F_1} e^{F_2} e^{F_3} \dots \quad (5.42)$$

Tudo isto prova que a construção das soluções multi-sóliton, de fato, torna-se bastante simples, em termos das funções tau propostas.

Capítulo 6

As funções tau e a solução N-soliton da equação de Schrödinger não linear generalizada (GNLS_r)

O modelo GNLS_r é apresentado em [14], onde é obtida a hierarquia usando o esquema Zakharov-Shabat-AKNS (ZS-AKNS) no contexto dos espaços simétricos hermitianos da álgebra $sl(r+1)$. Nesta seção seguimos a construção apresentada no capítulo 4. Consideremos uma álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(r+1)$ com gradação homogênea $s = (1, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{r-\text{zeros}})$ ($r = \text{rank de } sl(r+1)$) e um elemento E_l semi-simples (veja capítulo 4 e Apêndice I para maiores detalhes). Um sistema de equações pertencente à hierarquia GNLS_r pode ser obtida das 'conexões planas' definidas na álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}(r+1)$

$$-A_1 \equiv A = E^{(1)} + \sum_{i=1}^r \Psi_i^+ E_{\beta_i}^{(0)} + \sum_{i=1}^r \Psi_i^- E_{-\beta_i}^{(0)} + \nu_1 C, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} -A_2 \equiv B = E^{(2)} + \sum_{i=1}^r \Psi_i^+ E_{\beta_i}^{(1)} + \sum_{i=1}^r \Psi_i^- E_{-\beta_i}^{(1)} + \sum_{i=1}^r \partial_x \Psi_i^+ E_{\beta_i}^{(0)} - \\ \sum_{i=1}^r \partial_x \Psi_i^- E_{-\beta_i}^{(0)} - \sum_{i=1}^r \Psi_i^+ \Psi_i^- \beta_i \cdot H^{(0)} - \sum_{i,j=1}^r \Psi_i^+ \Psi_j^- \epsilon(\beta_i, \beta_j) E_{\beta_i - \beta_j}^{(0)} + \nu_2 C, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde Ψ_i^+ , Ψ_i^- e $\nu_{1,2}$ são os campos do modelo.

Com

$$E = 2 \frac{\mu_r \cdot H^{(0)}}{\alpha_r^2}; \quad E^{(l)} = 2 \frac{\mu_r \cdot H^{(l)}}{\alpha_r^2}, \quad [D, E^{(l)}] = l E^{(l)}$$

onde μ_r é um peso fundamental e as α_a são as raízes simples da álgebra $sl(r+1)$. Os β_i são raízes positivas definidas

$$\beta_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_r, \quad \text{com} \quad \alpha_i^2 = 2,$$

os H_i são os geradores da subálgebra de Cartan na base de Cartan-Weyl. Também, precisaremos de algumas relações na base de Chevalley (veja apêndice J, onde apresentamos as notações e convenções relacionadas às álgebras de Kac-Moody):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{r+1} \left(\sum_{a=1}^r a H_a^{(0)} \right), \quad \text{com} \quad H_a = \alpha_a \cdot H^{(0)} \\ \mu_r &= \frac{1}{r+1} \left(\sum_{a=1}^r a \cdot \alpha_a \right), \quad \beta_a \cdot H = H_a + \dots + H_r, \quad a = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
[E^{(m)}, H_a^{(n)}] &= \frac{m}{r+1} \sum_{a=1}^r a \eta_{ab} C \delta_{m,-n}, \\
[E^{(m)}, E_{\pm\beta_i}^{(n)}] &= \pm E_{\pm\beta_i}^{(m+n)}, \\
[H_a^{(m)}, E_{\pm\beta_i}^{(n)}] &= \pm \left(\sum_{b=i}^r K_{ba} \right) E_{\pm\beta_i}^{(m+n)},
\end{aligned} \tag{6.4}$$

com

$$\eta_{ab} = \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} = \eta_{ba} \quad \text{e} \quad K_{ab} = 2 \frac{\alpha_a \cdot \alpha_b}{\alpha_b^2}.$$

Os potenciais estão nos seguintes subespaços:

$$A_1 \in \hat{g}_0 + \hat{g}_1, \quad A_2 \in \hat{g}_0 + \hat{g}_1 + \hat{g}_2.$$

A condição de curvatura nula $[\partial_t - B, \partial_x - A] = 0$, fornece o seguinte sistema de equações:

$$\partial_t \Psi_i^+ = \partial_x^2 \Psi_i^+ - 2 \left(\sum_{j=1}^r \Psi_j^+ \Psi_j^- \right) \Psi_i^+, \tag{6.5}$$

$$\partial_t \Psi_i^- = -\partial_x^2 \Psi_i^- + 2 \left(\sum_{j=1}^r \Psi_j^+ \Psi_j^- \right) \Psi_i^-, \tag{6.6}$$

$$\partial_t \nu_1 - \partial_x \nu_2 = 0. \tag{6.7}$$

6.1 Soluções de vácuo e as transformações "dressing"

Seguindo o formalismo do capítulo 5, observamos que $\Psi_i^\pm = 0$ e $\nu_{1,2} = 0$, é uma solução do sistema de equações (6.5, 6.6 e 6.7). Então, de (6.1-6.2) temos as seguintes conexões

$$-A_1^{(vac)} \equiv A^{(vac)} = E^{(1)}, \quad -A_2^{(vac)} \equiv B^{(vac)} = E^{(2)}, \tag{6.8}$$

tais conexões podem ser obtidas, através de $A_i^{(vac)} = -\partial_i \Psi \Psi$ ($i = 1, 2$; com $\partial_1 \equiv \partial_x$ e $\partial_2 \equiv \partial_t$), do elemento do grupo

$$\Psi^{(0)} = e^{xE^{(1)} + tE^{(2)} + X}, \tag{6.9}$$

onde

$$X = \sum_{n=3}^{+\infty} z_n \sum_{a=1}^r c_n^a H_a^{(n)}, \quad c_n^a \quad \text{e} \quad z_n \quad \text{sendo parâmetros reais.} \tag{6.10}$$

As conexões na órbita do vácuo são dadas por (5.1.16, 5.1.17), isto é:

$$\begin{aligned}
A &= \Theta E^{(1)} \Theta^{-1} + \partial_x \Theta \Theta^{-1} \\
&= M^{-1} N E^{(1)} N^{-1} M - M^{-1} \partial_x M + M^{-1} \partial_x N N^{-1} M, \\
B &= \Theta E^{(2)} \Theta^{-1} + \partial_t \Theta \Theta^{-1}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$= M^{-1} N E^{(2)} N^{-1} M - M^{-1} \partial_t M + M^{-1} \partial_t N N^{-1} M, \quad (6.12)$$

onde

$$\Theta = \exp \left(\sum_{n>0} \sigma_{-n} \right), \quad M = \exp(\sigma_0), \quad N = \exp \left(\sum_{n>0} \sigma_n \right), \quad (6.13)$$

neste caso o operador de gradação é $Q_s \equiv D$, onde os elementos σ_n são funções definidas no subespaço de grau n , isto é:

$$[D, \sigma_n] = n \sigma_n.$$

Então, podemos relacionar os campos $\Psi_i^\pm$ e $\nu_{1,2}$ a algumas das componentes de σ_n . Temos

$$A = E^{(1)} + [\sigma_{-1}, E^{(1)}] + \text{termos de grau negativo.} \quad (6.14)$$

$$= M^{-1} \left(E^{(1)} - \partial_x M \cdot M^{-1} + \partial_x \sigma_1 \right) M + \text{termos de grau} > 1 \quad (6.15)$$

e

$$B = E^{(2)} + [\sigma_{-1}, E^{(2)}] + [\sigma_{-2}, E^{(2)}] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-1}, E^{(2)}]] + \text{termos de grau negativo.} \quad (6.16)$$

$$= M^{-1} \left(E^{(2)} - \partial_t M \cdot M^{-1} + \partial_t \sigma_1 + \partial_t \sigma_2 + [\sigma_1, \partial_t \sigma_1] \right) M + \text{termos de grau} > 2. \quad (6.17)$$

Observamos que o próximo termo (de grau -1) em (6.14) deverá anular-se, e então obtém-se

$$\partial_x \sigma_{-1} + [\sigma_{-2}, E^{(1)}] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-1}, E^{(1)}]] = 0, \quad (6.18)$$

denotemos

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} &= - \sum_{i=1}^r \Psi_i^+ E_{\beta_i}^{(-1)} + \sum_{i=1}^r \Psi_i^- E_{-\beta_i}^{(-1)} + \sum_{a=1}^r \sigma_{-1}^a H_a^{(-1)}, \\ \sigma_{-2} &= \sum_{i=1}^r \sigma_{-2}^{+i} E_{\beta_i}^{(-2)} + \sum_{i=1}^r \sigma_{-2}^{-i} E_{-\beta_i}^{(-2)} + \sum_{a=1}^r \sigma_{-2}^a H_a^{(-2)}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

logo, de (6.18) obtém-se

$$\begin{aligned} \partial_x \sigma_{-1}^a &= \sum_{i=1}^r \Psi_i^+ \Psi_i^-, \quad a, i = 1, \dots, r. \\ \sigma_{-2}^{+i} &= -\partial_x \Psi_i^+ + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^r \sigma_{-1}^a \Psi_i^+ \left(\sum_{b=i}^r K_{ba} \right), \\ \sigma_{-2}^{-i} &= -\partial_x \Psi_i^- + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^r \sigma_{-1}^a \Psi_i^- \left(\sum_{b=i}^r K_{ba} \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

substituindo as expressões de σ_{-1} e σ_{-2} em (6.14) e (6.16) podemos obter

$$\nu_1 = -\frac{1}{r+1} \sum_{a,b=1}^r a \cdot \eta_{ab} \sigma_{-1}^b, \quad (6.21)$$

$$\nu_2 = -\frac{2}{r+1} \sum_{a,b=1}^r a \cdot \eta_{ab} \sigma_{-2}^b. \quad (6.22)$$

As σ_n de maior grau são usadas para cancelar as componentes indesejáveis.

6.2 As funções tau do sistema GNLS_r

O correspondente vetor de gradação do nosso problema é $s_{\text{hom}} = (1, 0, \dots, 0)$. Seguindo a construção do capítulo 5 definamos o vetor função-tau (veja as equações (5.31, 5.32)):

$$\tau_o(x, t) = [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}] |\lambda_o\rangle \quad (6.23)$$

$$= \Theta^{-1} M^{-1} |\lambda_o\rangle, \quad (6.24)$$

onde h é um elemento particular do grupo $\widehat{SL}(r+1)$, que gera uma transformação "dressing".

Então, temos

$$\exp\left(-\sum_{n>0} \sigma_{-n}\right) \exp(-\sigma_o) |\lambda_o\rangle = [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}] |\lambda_o\rangle. \quad (6.25)$$

O nosso objetivo é expressar os campos $\Psi_i^\pm$ em termos de algumas das funções tau, que são alguns elementos de matriz numa representação apropriada do grupo de Kac-Moody $\widehat{SL}(r+1)$.

Podemos escrever

$$\sigma_o = \sum_{a=1}^r \sigma_o^{+a} E_{\alpha_a}^{(0)} + \sum_{a=1}^r \sigma_o^{-a} E_{-\alpha_a}^{(0)} + \sum_{a=1}^r \sigma_o^a H_a^{(0)} + \eta C \quad (6.26)$$

ou

$$\sigma_o = \sum_{i=1}^r \sigma_o^{+i} \cdot e_i + \sum_{i=1}^r \sigma_o^{-i} \cdot f_i + \sum_{a=1}^r \sigma_o^a \cdot h_a + \eta C, \quad (6.27)$$

onde os elementos e_i e f_i ($i = 0, \dots, r$) são os geradores de Chevalley, e $\{h_i, D\}$ gera a subálgebra de Cartan de $\widehat{sl}(r+1)$ [13], (veja Apêndice J). Ainda, conhecemos as seguintes relações

$$h_i |\lambda_o\rangle = 0, \quad f_i |\lambda_o\rangle = 0, \quad e_i |\lambda_o\rangle = 0, \quad C |\lambda_o\rangle = |\lambda_o\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (6.28)$$

então, o termo de grau zero da expressão (6.25)

$$\exp(-\sigma_o) |\lambda_o\rangle = [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}]_{(o)} |\lambda_o\rangle, \quad (6.29)$$

pode ser escrito como

$$\exp(-\sigma_o) |\lambda_o\rangle = |\lambda_o\rangle \hat{\tau}^{(o)}(x, t) \quad (6.30)$$

onde $\hat{\tau}^{(o)}(x, t)$ é uma função real, dado pelo seguinte elemento de matriz

$$\hat{\tau}^{(o)}(x, t) = \langle \lambda_o | [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}]_{(o)} | \lambda_o \rangle. \quad (6.31)$$

O termo de grau (-1) em (6.25) torna-se

$$-\sigma_{-1} |\lambda_o\rangle = \frac{[\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}]_{(-1)} |\lambda_o\rangle}{\hat{\tau}^{(o)}(x, t)} \quad (6.32)$$

ou

$$\left(- \sum_{i=1}^r \Psi_i^+ E_{\beta_i}^{(-1)} + \sum_{i=1}^r \Psi_i^- E_{-\beta_i}^{(-1)} + \sum_{a=1}^r \sigma_{-1}^a H_a^{(-1)} \right) |\lambda_o\rangle = - \frac{[\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}]_{(-1)} |\lambda_o\rangle}{\hat{\tau}^{(o)}(x, t)}, \quad (6.33)$$

usando as relações (J.9, J.30) temos

$$\Psi_i^+ = \frac{\tau_i^+}{\hat{\tau}^{(o)}} \quad e \quad \Psi_i^- = - \frac{\tau_i^-}{\hat{\tau}^{(o)}} \quad , \quad (6.34)$$

onde as funções tau estão definidas por

$$\tau_i^+ \equiv \langle \lambda_o | E_{-\beta_i}^{(1)} [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}]_{(-1)} |\lambda_o\rangle, \quad (6.35)$$

$$\tau_i^- \equiv \langle \lambda_o | E_{\beta_i}^{(1)} [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}]_{(-1)} |\lambda_o\rangle, \quad (6.36)$$

e

$$\hat{\tau}^{(o)} \equiv \langle \lambda_o | [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}]_{(o)} |\lambda_o\rangle. \quad (6.37)$$

A fim de se obter as primeiras soluções não triviais de (6.5-6.6), vamos considerar primeiramente

$$h = e^{aF_j}, \quad F_j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_j^n E_{-\beta_i}^{(-n)}, \quad \text{onde } \nu_j \text{ e } a \text{ são alguns parâmetros reais}, \quad (6.38)$$

sendo F_j um autovetor comum sob a ação adjunta dos geradores H_a , isto é,

$$[xE^{(1)} + tE^{(2)} + X, F_j] = -[\nu_j(x + \nu_j t) + \bar{\nu}_j] F_j, \quad (6.39)$$

onde

$$\bar{\nu}_j = \sum_{n=3}^{+\infty} z_n \sum_{a=1}^r c_n^a \nu_j^n \left(\sum_{b=j}^r K_{ba} \right);$$

denotando $\varphi_j = \nu_j(x + \nu_j t) + \bar{\nu}_j$, podemos escrever

$$\begin{aligned} [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}] &= \exp(e^{-\varphi_j} a F_j) \\ &= 1 + e^{-\varphi_j} a F_j, \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde usamos o fato de que $F_j^n = 0$, para $n \geq 2$, isto é, os autovetores F_j são nilpotentes (veja a equação K.23 para maiores detalhes). As respectivas funções tau tornam-se

$$\hat{\tau}^{(o)} = \langle \lambda_o | (1 + e^{-\varphi_j} a F_j) |\lambda_o\rangle = 1,$$

uma vez que

$$\langle \lambda_o | E_{-\beta_i}^{(o)} |\lambda_o\rangle = 0.$$

$$\begin{aligned}\tau_i^+ &= \langle \lambda_o | \left[E_{-\beta_i}^{(1)} \exp \left(e^{-\varphi_j} . a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_j^n E_{-\beta_i}^{(-n)} \right) \right]_{(o)} | \lambda_o \rangle \\ &= \langle \lambda_o | \left[E_{-\beta_i}^{(1)} e^{-\varphi_j} . a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_j^n E_{-\beta_i}^{(-n)} \right]_{(o)} | \lambda_o \rangle ,\end{aligned}$$

como $[E_{-\beta_i}^{(1)}, E_{-\beta_j}^{(-n)}] = 0$ e $E_{-\beta_i}^{(1)} | \lambda_o \rangle = 0$, segue

$$\tau_i^+ = 0.$$

Agora

$$\tau_i^- = \langle \lambda_o | \left[E_{\beta_i}^{(1)} e^{-\varphi_j} . a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_j^n E_{-\beta_i}^{(-n)} \right]_{(o)} | \lambda_o \rangle ,$$

se $i \neq j$ a última expressão torna-se

$$\tau_i^- = \langle \lambda_o | E_{\beta_i - \beta_j}^{(0)} e^{-\varphi_j} . a \nu_j | \lambda_o \rangle = 0,$$

assim, como:

$$\tau_i^- = a \delta_{ij} e^{-\varphi_j} . \nu_j \langle \lambda_o | E_{\beta_i}^{(1)} E_{-\beta_i}^{(-1)} | \lambda_o \rangle ,$$

o elemento de matriz pode-se escrever

$$\langle \lambda_o | \left\{ \sum_{a=1}^r H_a^{(0)} + C + E_{-\beta_i}^{(-1)} E_{\beta_i}^{(1)} \right\} | \lambda_o \rangle .$$

Calculando os elementos de matriz dos operadores no estado de peso mais alto, temos

$$\tau_i^- = \delta_{ij} . a . \nu_j . e^{-\varphi_j} ,$$

e portanto, obtemos a seguinte solução

$$\Psi_i^+ = 0, \quad \Psi_i^- = -\delta_{ij} . a . \nu_j . e^{-\varphi_j} . \quad (6.41)$$

Desta vez, vamos escolher

$$h = e^{b.G_j}, \quad \text{com} \quad G_j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_j^n E_{\beta_i}^{(-n)}, \quad \text{onde } \rho_j \text{ e } b \text{ são parâmetros reais} , \quad (6.42)$$

sendo G_j um novo autovetor sob a ação adjunta dos H_a :

$$[xE^{(1)} + tE^{(2)} + X, G_j] = [\rho_j(x + \rho_j t) + \bar{\rho}_j] G_j,$$

com

$$\bar{\rho}_j = \sum_{n=3}^{+\infty} z_n \sum_{a=1}^r c_n^a . \rho_j^n \left(\sum_{b=j}^r K_{ba} \right) .$$

Como no caso anterior temos

$$\begin{aligned} [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}] &= \exp(e^{\eta_j} b G_j) \\ &= 1 + e^{\eta_j} b G_j, \end{aligned} \quad (6.43)$$

onde $G_j^n = 0$ para $n \geq 2$. Denotando $\eta_j = \rho_j(x + \rho_j t) + \bar{\rho}_j$ e fazendo um cálculo semelhante ao caso anterior, obtemos

$$\hat{\tau}^{(o)} = 1, \quad \tau_i^- = 0 \quad \text{e} \quad \tau_i^+ = \delta_{ij} \cdot b \cdot \rho_j \cdot e^{\eta_j},$$

portanto, temos uma nova solução, da forma

$$\Psi_i^- = 0, \quad \Psi_i^+ = \delta_{ij} \cdot b \cdot \rho_j \cdot e^{\eta_j}. \quad (6.44)$$

6.3 Soluções 1-sóliton

Consideremos o produto de duas exponenciais

$$h = e^{a_{j_1} F_{j_1}} e^{b_{j_2} G_{j_2}}, \quad j_1, j_2 = 1, 2, \dots, r, \quad (6.45)$$

sendo

$$F_{j_1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_{j_1}^n E_{-\beta_{j_1}}^{(-n)}, \quad G_{j_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_{j_2}^n E_{\beta_{j_2}}^{(-n)}; \quad a_{j_1} \text{ e } b_{j_2} \text{ são parâmetros reais.}$$

Observe-se que F_{j_1} e G_{j_2} estão associados a raízes positivas e negativas respectivamente. Portanto

$$\begin{aligned} [\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1}] &= (1 + e^{-\varphi_{j_1}} a_{j_1} F_{j_1}) (1 + e^{\eta_{j_2}} b_{j_2} G_{j_2}) \\ &= 1 + e^{-\varphi_{j_1}} a_{j_1} F_{j_1} + e^{\eta_{j_2}} b_{j_2} G_{j_2} + a_{j_1} b_{j_2} e^{-\varphi_{j_1}} e^{\eta_{j_2}} F_{j_1} G_{j_2}, \\ \text{com } \varphi_{j_1} &= \nu_{j_1}(x + \nu_{j_1} t) + \bar{\nu}_{j_1} \quad \text{e} \quad \eta_{j_2} = \rho_{j_2}(x + \rho_{j_2} t) + \bar{\rho}_{j_2}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Logo, as correspondentes funções tau são:

$$\hat{\tau}^{(o)} = 1 + \delta_{j_1, j_2} a_{j_1} b_{j_2} C_{j_1, j_2} e^{-\varphi_{j_1}} e^{\eta_{j_2}}, \quad C_{j_1, j_2} = \frac{\nu_{j_1} \cdot \rho_{j_2}}{(\nu_{j_1} - \rho_{j_2})^2}, \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \tau_i^+ &= \langle \lambda_o | E_{-\beta_i}^{(1)} b_{j_2} e^{\eta_{j_2}} G_{j_2} | \lambda_o \rangle \\ &= \delta_{i, j_2} b_{j_2} \rho_{j_2} e^{\eta_{j_2}}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

e

$$\tau_i^- = \delta_{i, j_2} a_{j_1} \nu_{j_1} e^{-\varphi_{j_1}}. \quad (6.49)$$

No Apêndice L apresentamos os cálculos dos elementos de matriz correspondentes. Portanto,

$$\Psi_i^+ = \frac{\delta_{i, j_2} b_{j_2} \rho_{j_2} e^{\eta_{j_2}}}{1 + \delta_{j_1, j_2} a_{j_1} b_{j_2} C_{j_1, j_2} e^{-\varphi_{j_1}} e^{\eta_{j_2}}}, \quad \Psi_i^- = -\frac{\delta_{i, j_2} a_{j_1} \nu_{j_1} e^{-\varphi_{j_1}}}{1 + \delta_{j_1, j_2} a_{j_1} b_{j_2} C_{j_1, j_2} e^{-\varphi_{j_1}} e^{\eta_{j_2}}}. \quad (6.50)$$

Se $j_1 \neq j_2$ em (6.47) recuperamos as soluções (6.41) e (6.44). Assim, para se ter soluções 1-sóliton devemos ter $j_1 = j_2 = i$, e então uma solução do sistema de equações (6.5-6.6) é

$$\Psi_i^+ = \frac{b_i \rho_i e^{\eta_i}}{1 + a_i b_i C_{i, i} e^{-\varphi_i} e^{\eta_i}}, \quad \Psi_i^- = -\frac{a_i \nu_i e^{-\varphi_i}}{1 + a_i b_i C_{i, i} e^{-\varphi_i} e^{\eta_i}}. \quad (6.51)$$

6.4 Soluções N-sóliton

Vamos escolher o seguinte elemento de grupo

$$h = e^{a_{i_1} F_{i_1}} \dots e^{a_{i_N} F_{i_N}} e^{b_{j_1} F_{j_1}} \dots e^{b_{j_N} F_{j_N}}, \quad (6.52)$$

com

$$F_{j_l} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_{j_l}^n E_{-\beta_{j_l}}^{(-n)}, \quad G_{j_l} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_{j_l}^n E_{\beta_{j_l}}^{(-n)}, \quad l = 1, 2, \dots, N; \quad i_l, j_l = 1, 2, \dots, r;$$

sendo a_{i_l} , b_{j_l} , ν_{i_l} e ρ_{j_l} parâmetros reais.

A expressão seguinte desempenha um importante papel na construção das funções tau:

$$\left[\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1} \right] = \left(1 + e^{-\varphi_{i_1}} a_{i_1} F_{i_1} \right) \dots \left(1 + e^{-\varphi_{i_N}} a_{i_N} F_{i_N} \right) \left(1 + e^{\eta_{j_1}} b_{j_1} G_{j_1} \right) \dots \left(1 + e^{\eta_{j_N}} b_{j_N} G_{j_N} \right), \quad (6.53)$$

onde as funções de fase são

$$\varphi_{i_l} = \nu_{i_l} (x + \nu_{i_l} t) + \bar{\nu}_{i_l}, \quad \eta_{j_l} = \rho_{j_l} (x + \rho_{j_l} t) + \bar{\rho}_{j_l}, \quad l = 1, 2, \dots, N.$$

Agora, usando (6.35, 6.36 e 6.37) vamos calcular as funções tau correspondentes. Denotando

$$A_{i_l} = a_{i_l} \nu_{i_l} \cdot e^{-\varphi_{i_l}}, \quad B_{j_l} = b_{j_l} \rho_{j_l} e^{\eta_{j_l}}, \quad (6.54)$$

temos,

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^{(o)} &= \langle \lambda_o | \left(\Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1} \right) | \lambda_o \rangle \\ \hat{\tau}^{(o)} &= 1 + \\ &\langle \lambda_o | \left\{ \sum_{n=1}^N \left[\sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_n \leq N} \left(A_{i_{l_1}} \dots A_{i_{l_n}} \right) \left(F_{i_{l_1}} \dots F_{i_{l_n}} \right) \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N} \left(B_{j_{k_1}} \dots B_{j_{k_n}} \right) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(G_{j_{k_1}} \dots G_{j_{k_n}} \right) \right] \right\} | \lambda_o \rangle \\ &= 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_n \leq N \\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N}} C_{i_{l_1} \dots i_{l_n}, j_{k_1} \dots j_{k_n}} A_{i_{l_1}} \dots A_{i_{l_n}} B_{j_{k_1}} \dots B_{j_{k_n}}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

com os coeficientes dados pelos elementos de matriz

$$C_{i_{l_1} \dots i_{l_n}, j_{k_1} \dots j_{k_n}} = \langle \lambda_o | F_{i_{l_1}} \dots F_{i_{l_n}} G_{j_{k_1}} \dots G_{j_{k_n}} | \lambda_o \rangle, \quad (6.56)$$

semelhantemente,

$$\begin{aligned} \tau_i^\pm &= \langle \lambda_o | E_{\mp \beta_i}^{(1)} \Psi^{(0)} h \Psi^{(0)-1} | \lambda_o \rangle \\ &= \langle \lambda_o | E_{\mp \beta_i}^{(1)} \left(1 + e^{-\varphi_{i_1}} a_{i_1} F_{i_1} \right) \dots \left(1 + e^{-\varphi_{i_N}} a_{i_N} F_{i_N} \right) \left(1 + e^{\eta_{j_1}} b_{j_1} G_{j_1} \right) \dots \\ &\quad \left(1 + e^{\eta_{j_N}} b_{j_N} G_{j_N} \right) | \lambda_o \rangle, \end{aligned} \quad (6.57)$$

logo, pode-se obter as funções:

$$\tau_i^+ = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_n \leq N \\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1} \leq N}} C_{ii_{l_1} \dots i_{l_n}, j_{k_1} \dots j_{k_{n+1}}}^+ A_{i_{l_1}} \dots A_{i_{l_n}} B_{j_{k_1}} \dots B_{j_{k_{n+1}}}, \quad (6.58)$$

$$\tau_i^- = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{n+1} \leq N \\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N}} C_{i_{l_1} \dots i_{l_{n+1}}, i, j_{k_1} \dots j_{k_n}}^- A_{i_{l_1}} \dots A_{i_{l_n}} B_{j_{k_1}} \dots B_{j_{k_n}}, \quad (6.59)$$

com os elementos de matriz seguintes

$$C_{ii_{l_1} \dots i_{l_n}, j_{k_1} \dots j_{k_{n+1}}}^+ = \langle \lambda_o | E_{-\beta_i}^{(1)} F_{i_{l_1}} \dots F_{i_{l_n}} G_{j_{k_1}} \dots G_{j_{k_{n+1}}} | \lambda_o \rangle, \quad (6.60)$$

$$C_{i_{l_1} \dots i_{l_{n+1}}, i, j_{k_1} \dots j_{k_n}}^- = \langle \lambda_o | E_{\beta_i}^{(1)} F_{i_{l_1}} \dots F_{i_{l_n}} G_{j_{k_1}} \dots G_{j_{k_n}} | \lambda_o \rangle. \quad (6.61)$$

Os cálculos dos elementos de matriz correspondentes são apresentados no Apêndice L.

Capítulo 7

A hierarquia GNLS₁: As transformações 'dressing', quantidades conservadas, funções tau, soluções do tipo N-soliton com múltiplos tempos, etc.

Neste capítulo, por simplicidade, pretendemos trabalhar com a álgebra $\hat{sl}(2)$, e aplicar o método exposto no capítulo 6 para esclarecer alguns conceitos. Construimos algumas quantidades conservadas usando precisamente a transformação "dressing"; as equações de conservação surgem de modo natural, ao se parametrizar os campos do modelo com algumas componentes σ_n . Definimos as correspondentes funções tau e obtemos as soluções tipo 1-soliton, 2-soliton e generalizamos para o caso N-soliton. Ainda, usando o formalismo das transformações "dressing", é fácil de se ver, que uma solução de tipo soliton satisfaz a todas as equações da hierarquia, com diferentes escalas de tempo. Como explicamos no capítulo 4, a hierarquia GNLS₁ tem o seguinte operador de Lax:

$$L = \partial_x - E^{(1)} - \Psi^+ E_+^{(0)} - \Psi^- E_-^{(0)} - \nu_1 C, \quad (7.1)$$

onde $\Psi^\pm$ e ν_1 são os campos do modelo. Diferentemente do capítulo 4, consideramos um campo na direção do termo central C , e isto está de acordo com a observação da seção 4.0. A gradação relevante é a homogênea, isto é, o vetor de gradação é $s_{\text{hom}} = (1, 0)$ para o caso $\hat{sl}(2)$. Além disso, a álgebra $\hat{sl}(2)$, na base de Weyl-Cartan escreve-se

$$\begin{aligned} [H^{(m)}, H^{(n)}] &= \frac{n}{2} C \delta_{m+n,0}, \\ [H^{(n)}, E_\pm^{(m)}] &= \pm E_\pm^{(m+n)}, \\ [E_+^{(m)}, E_-^{(n)}] &= 2H^{(m+n)} + nC \delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

As equações da hierarquia são obtidas como segue (veja as equações (4.24, 4.25))

$$\frac{\partial L}{\partial t_N} = [B_N, L], \quad N > 0$$

onde

$$B_N = (U H^{(N)} U^{-1})_{\geq 0} \in C^\infty(\mathbf{R}, \hat{g}_{\geq 0}(s)),$$

o potencial B_N pertencendo ao seguinte subespaço

$$B_N \subset \bigoplus_{i=0}^N \hat{g}_i,$$

com U sendo um elemento do grupo, obtido expoenciando geradores de grau negativo

$$U = \exp \left(\sum_{n \geq 1} T^{(-n)} \right), \quad [D, T^{(n)}] = nT^{(n)}.$$

Os primeiros B_N são

$$B_1 = H^{(1)} + \Psi^+ E_+^{(0)} + \Psi^- E_-^{(0)} + \nu_1 C, \quad (7.3)$$

$$B_2 = H^{(2)} + \Psi^+ E_+^{(1)} + \Psi^- E_-^{(1)} - 2\Psi^+ \Psi^- H^{(0)} + \partial_x \Psi^+ E_+^{(0)} - \partial_x \Psi^- E_-^{(0)} + \nu_2 C, \quad (7.4)$$

e as primeiras equações da hierarquia são

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} L &= [B_1, L] : \\ \partial_{t_1} \Psi^\pm &= \partial_x \Psi^\pm, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\partial_{t_1} \nu_1 = \partial_x \nu_1. \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} L &= [B_2, L] : \\ \partial_{t_2} \Psi^\pm &= \pm \partial_x^2 \Psi^\pm \mp 2 \cdot (\Psi^+ \Psi^-) \Psi^\pm, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\partial_{t_2} \nu_1 = \partial_x \nu_2. \quad (7.8)$$

Podemos escrever a condição de curvatura nula para os potenciais B_1 e B_N como

$$[\partial_{t_N} - B_N, \partial_x - B_1] = 0, \quad N = 1, 2, \dots \quad (7.9)$$

onde B_N possui a seguinte forma geral

$$B_N = H^{(N)} + \sum_{n=0}^{N-1} B_N^{(n)}, \quad \text{com } B_N^{(n)} \in C^\infty(\mathbf{R}, \hat{g}_n(s_{\text{hom}})). \quad (7.10)$$

Como $\Psi^\pm = 0$ e $\nu_N = 0$ é uma solução de cada sistema de equações da hierarquia, temos

$$B_1^{(vac)} = H^{(1)}, \quad B_N^{(vac)} = H^{(N)}, \quad (7.11)$$

tais conexões podem ser obtidas, através de $B_N = \partial_{t_N} \Psi \Psi^{-1}$, do elemento de grupo

$$\Psi^{(vac)} = \exp \left(x H^{(1)} + t_N H^{(N)} + \sum_{\substack{n=1,2,\dots \\ n \neq N}} t_n H^{(n)} \right) \equiv \exp \left(\sum_{n=1,2,\dots} t_n H^{(n)} \right). \quad (7.12)$$

As conexões na órbita do vácuo são dadas por

$$B_1 = \Theta H^{(1)} \Theta^{-1} + \partial_x \Theta \Theta^{-1}, \quad (7.13)$$

$$= M^{-1} \left(N H^{(1)} N^{-1} - \partial_x M M^{-1} + \partial_x N N^{-1} \right) M,$$

$$B_N = \Theta H^{(N)} \Theta^{-1} + \partial_{t_N} \Theta \Theta^{-1}, \quad (7.14)$$

$$= M^{-1} \left(N H^{(N)} N^{-1} - \partial_{t_N} M M^{-1} + \partial_{t_N} N N^{-1} \right) M.$$

Denotemos

$$\Theta = \exp \left(\sum_{n>0} \sigma_{-n} \right), \quad M = \exp(\sigma_o), \quad N = \exp \left(\sum_{n>0} \sigma_n \right), \quad (7.15)$$

$$[D, \sigma_n] = n \sigma_n,$$

então, podemos relacionar os campos $\Psi^\pm$ a algumas das σ_n . Por exemplo, para $N = 2$, denotando $t_2 \equiv t$, temos

$$B_1 = H^{(1)} + [\sigma_{-1}, H^{(1)}] + \text{termos de grau negativo.} \quad (7.16)$$

$$= M^{-1} \left(H^{(1)} - \partial_x M M^{-1} + \partial_x \sigma_1 \right) M + \text{termos de grau} > 1,$$

$$B_2 = H^{(2)} + [\sigma_{-1}, H^{(2)}] + [\sigma_{-2}, H^{(2)}] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-1}, H^{(2)}]] + \\ + \text{termos de grau negativo.} \quad (7.17)$$

$$= M^{-1} \left(H^{(2)} - \partial_t M M^{-1} + \partial_t \sigma_1 + \partial_t \sigma_2 + [\sigma_1, \partial_t \sigma_1] \right) M + \text{termos de grau} > 2.$$

Notamos que o seguinte termo (de grau -1) em (7.16) anula-se, logo temos

$$\partial_x \sigma_{-1} + [\sigma_{-2}, H^{(1)}] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-1}, H^{(1)}]] = 0. \quad (7.18)$$

Denotando

$$\sigma_{-1} = -\Psi^+ E_+^{(-1)} + \Psi^- E_-^{(-1)} + \sigma_{-1}^o H^{(-1)} \quad (7.19)$$

e

$$\sigma_{-2} = -\sigma_{-2}^+ E_+^{(-2)} + \sigma_{-2}^- E_-^{(-2)} + \sigma_{-2}^o H^{(-2)}, \quad (7.20)$$

de (7.18) pode-se obter

$$\partial_x \sigma_{-1}^o = 2 \Psi^+ \Psi^- \quad (7.21)$$

$$\sigma_{-2}^+ = -\partial_x \Psi^+ + \frac{1}{2} \sigma_{-1}^o \Psi^+ \quad (7.22)$$

$$\sigma_{-2}^- = -\partial_x \Psi^- + \frac{1}{2} \sigma_{-1}^o \Psi^-. \quad (7.23)$$

Substituindo estas expressões para σ_{-1} e σ_{-2} em (7.16) e (7.17), obtemos a equação (7.8) com

$$\nu_1 = -\frac{\sigma_{-1}^o}{2}, \quad \nu_1 = -\sigma_{-2}^o. \quad (7.24)$$

As σ_n de maior grau são usadas para cancelar as componentes não desejadas. O termo de grau (-2) em (7.16) é (usamos a relação: $\partial e^\sigma e^{-\sigma} = \partial\sigma + \frac{1}{2!}[\sigma, \partial\sigma] + \frac{1}{3!}[\sigma, [\sigma, \partial\sigma]] + \dots$)

$$\partial_x \sigma_{-2} + [\sigma_{-3}, H^{(1)}] + \frac{1}{2} [\sigma_{-2}, [\sigma_{-1}, H^{(1)}]] + \frac{1}{2} [\sigma_{-1}, [\sigma_{-2}, H^{(1)}]] = 0, \quad (7.25)$$

onde

$$\sigma_{-3} = \sigma_{-3}^+ E_+^{(-3)} + \sigma_{-3}^- E_-^{(-3)} + \sigma_{-3}^o H^{(-3)}.$$

De (7.25), obtemos

$$\partial_x \sigma_{-2}^o = \Psi^- \partial_x \Psi^+ - \Psi^+ \partial_x \Psi^-. \quad (7.26)$$

Igualmente, igualando a zero os termos de grau (-1) e (-2) em (7.17) pode-se obter

$$\partial_t \sigma_{-1}^o = 2 \left(\Psi^- \partial_x \Psi^+ - \Psi^+ \partial_x \Psi^- \right), \quad (7.27)$$

e

$$\partial_t \sigma_{-2}^o = \frac{2}{3} \Psi^+ \Psi^- (\sigma_{-1}^o)^2 - 2 \partial_x \Psi^+ \partial_x \Psi^- - \frac{2}{3} (\Psi^+ \Psi^-)^2 + \Psi^- \partial_x \Psi^+ - \Psi^+ \partial_x \Psi^-. \quad (7.28)$$

7.1 As primeiras quantidades conservadas

Uma observação cuidadosa das equações (7.21) e (7.26-7.28) permite-nos construir algumas leis de conservação, de tal modo que as cargas conservadas estão relacionadas aos Hamiltonianos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ do sistema GNLS₁ (veja as equações (2.9, 2.10) do capítulo 2 para o caso GNLS₂).

Assim, de (7.21) e (7.27) temos

$$\partial_t (\Psi^+ \Psi^-) = \partial_x F [\Psi^+, \Psi^-], \quad (7.29)$$

com F sendo uma funcional dos campos e $\mathcal{H}_1$ o primeiro hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx. \Psi^+ \Psi^-.$$

Igualmente, de (7.26) e (7.28) temos

$$\partial_t (\Psi^- \partial_x \Psi^+ - \Psi^+ \partial_x \Psi^-) = \partial_x G [\Psi^+, \Psi^-], \quad (7.30)$$

com G sendo uma funcional dos campos e $\mathcal{H}_2$ o segundo Hamiltoniano do sistema GNLS₁ dado por

$$\mathcal{H}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx. (\Psi^- \partial_x \Psi^+ - \Psi^+ \partial_x \Psi^-). \quad (7.31)$$

Então, um Hamiltoniano de ordem superior é conjecturado a corresponder a alguma σ_n ($n < -2$).

7.2 As funções tau

Definamos as funções tau como em (5.31, 5.32)

$$\tau(x, t_1, t_2, \dots) = \Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} |\lambda_o\rangle, \quad (7.32)$$

$$= \Theta^{-1} M^{-1} |\lambda_o\rangle, \quad (7.33)$$

onde h é um elemento particular do grupo $\widehat{SL}(2)$, que gera a transformação "dressing".

Então temos

$$\exp\left(-\sum_{n>0} \sigma_{-n}\right) \exp(-\sigma_o) |\lambda_o\rangle = \Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} |\lambda_o\rangle, \quad (7.34)$$

ainda, podemos escrever

$$\sigma_o = \sigma_o^o H + \sigma_o^+ E_+^{(o)} + \sigma_o^- E_-^{(o)} + \eta C, \quad (7.35)$$

ou

$$\sigma_o = \sigma_o^o h_1 + \sigma_o^+ e_1 + \sigma_o^- f_1 + \eta C,$$

é conhecido que $h_1 |\lambda_o\rangle = 0$, $f_1 |\lambda_o\rangle = 0$ e $C |\lambda_o\rangle = |\lambda_o\rangle$; deste modo o grau zero da expressão (7.34) é

$$\exp(-\sigma_o) |\lambda_o\rangle = \left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1}\right)_{(o)} |\lambda_o\rangle, \quad (7.36)$$

e ele pode ser escrito como

$$\exp(-\sigma_o) |\lambda_o\rangle = |\lambda_o\rangle \hat{\tau}^{(o)}(x, t),$$

onde $\hat{\tau}^{(o)}(x, t_1, t_2, \dots)$ é uma função de x e dos tempos t_n dada pelo elemento de matriz seguinte:

$$\hat{\tau}^{(o)}(x, t) = \langle \lambda_o | \left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1}\right)_{(o)} | \lambda_o \rangle. \quad (7.37)$$

O termo de grau (-1) em (7.34) torna-se

$$(-\sigma_{-1}) |\lambda_o\rangle = \frac{\left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1}\right)_{(-1)} |\lambda_o\rangle}{\hat{\tau}^{(o)}(x, t)},$$

ou

$$\left(-\Psi^+ E_+^{(-1)} + \Psi^- E_-^{(-1)} + \sigma_{-1}^o H^{(-1)}\right) |\lambda_o\rangle = -\frac{\left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1}\right)_{(-1)} |\lambda_o\rangle}{\hat{\tau}^{(o)}(x, t)}, \quad (7.38)$$

como $H^{(0)} |\lambda_o\rangle = h_1 |\lambda_o\rangle = 0$, $E_{\pm}^{(1)} |\lambda_o\rangle = 0$, podemos escrever

$$\Psi^+ = \frac{\tau^+}{\hat{\tau}^{(o)}} \quad \text{e} \quad \Psi^- = -\frac{\tau^-}{\hat{\tau}^{(o)}}, \quad (7.39)$$

onde

$$\tau^+ \equiv \langle \lambda_o | E_-^{(1)} \left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1}\right)_{(-1)} | \lambda_o \rangle, \quad (7.40)$$

$$\tau^- \equiv \langle \lambda_o | E_+^{(1)} \left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} \right)_{(-1)} | \lambda_o \rangle. \quad (7.41)$$

Como foi exposto no capítulo 6, para obter a primeira solução não trivial, consideremos primeiramente:

$$h = e^F, \quad \text{com} \quad F = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_1^n E_-^{(-n)}. \quad (7.42)$$

Como

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} t_n H^{(n)}, F \right] = - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n \nu_1^n \right) F, \quad \text{sendo } \nu_1 \text{ um parâmetro real,} \quad (7.43)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} \right) &= \exp \left(e^{-\varphi_1} F \right) \\ &= 1 + e^{-\varphi_1} F, \end{aligned}$$

com

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \nu_1^n.$$

Onde usamos que $F^n = 0$, para $n \geq 2$. As funções tau tornam-se

$$\tau^{(o)} = \langle \lambda_o | \left(1 + e^{-\varphi_1} E_-^{(o)} \right) | \lambda_o \rangle = 1,$$

$$\tau^+ = \langle \lambda_o | E_-^{(1)} e^{-\varphi_1} \nu_1 E_-^{(-1)} | \lambda_o \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} \tau^- &= \langle \lambda_o | E_+^{(1)} e^{-\varphi_1} \nu_1 E_-^{(-1)} | \lambda_o \rangle \\ &= \nu_1 e^{-\varphi_1} \langle \lambda_o | \left(2H^{(0)} + C \right) | \lambda_o \rangle \\ &= \nu_1 e^{-\varphi_1}. \end{aligned}$$

Desta forma pode-se obter a seguinte solução:

$$\Psi^+ = 0 \quad \text{e} \quad \Psi^- = -\nu_1 e^{-\varphi_1}. \quad (7.44)$$

Escolhemos

$$h = e^G, \quad G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_1^n E_+^{(-n)}, \quad \rho_1 \text{ sendo um parâmetro real} \quad (7.45)$$

onde

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} t_n H^{(n)}, G \right] = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n \rho_1^n \right) G,$$

então,

$$\begin{aligned} \left(\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} \right) &= \exp \left(e^{\eta_1} G \right) \\ &= 1 + e^{\eta_1} G, \\ \text{com} \quad \eta_1 &= \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \rho_1^n \end{aligned}$$

onde, usamos o fato que $G^n = 0$, para $n \geq 2$.

Deste modo, as funções tau são

$$\hat{\tau}^{(o)} = \langle \lambda_o | \left(1 + e^{\eta_1} E_+^{(o)} \right)_{(o)} | \lambda_o \rangle = 1,$$

$$\tau^- = \langle \lambda_o | \left(E_+^{(1)} e^{\eta_1} \rho_1 E_+^{(-1)} \right)_{(o)} | \lambda_o \rangle = 0,$$

$$\tau^+ = \langle \lambda_o | E_-^{(1)} e^{\eta_1} \rho_1 E_+^{(-1)} | \lambda_o \rangle = \rho_1 e^{\eta_1}.$$

Portanto, temos uma nova solução da forma

$$\Psi^- = 0 \quad \text{e} \quad \Psi^+ = \rho_1 e^{\eta_1}. \quad (7.46)$$

As soluções (7.44, 7.46) também aparecem em [38], onde o método da transformação de Bäcklund (TB) é usada para se resolver o sistema NLS. Estas soluções podem ser chamadas de "configurações de vácuo".

7.3 A solução 1-sóliton.

Seguindo as idéias do capítulo 6, para se obter uma solução 1-sóliton, escolheremos

$$h = e^{aF} e^{bG}, \quad \text{onde } F \text{ e } G \text{ são dadas em (7.42) e (7.45)} \quad (7.47)$$

com a e b parâmetros reais.

Dêste modo,

$$\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} = \exp \left(e^{-\varphi} a F \right) \exp \left(e^{\eta} b G \right) \quad (7.48)$$

$$= 1 + e^{-\varphi} a F + e^{\eta} b G + e^{-\varphi} e^{\eta} a F b G, \quad (7.49)$$

com $\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \nu^n$ e $\eta = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \rho^n$. Calculemos as funções tau correspondentes.

Os termos que contribuem para $\hat{\tau}^{(o)}$ são

$$\hat{\tau}^{(o)} = 1 + abce^{-\varphi} e^{\eta}, \quad (7.50)$$

onde c é um elemento de matriz. Como ilustração apresentaremos os cálculos usando a teoria geral das representações das álgebras de Kac-Moody,

$$\begin{aligned} c &= \langle \lambda_o | (FG)_{(o)} | \lambda_o \rangle \\ &= \langle \lambda_o | \left(\sum_{n,m>0}^{+\infty} \nu_1^{-n} \rho_1^m E_-^{(n)} E_+^{(-m)} \right)_{(o)} | \lambda_o \rangle \\ &= \langle \lambda_o | \sum_{n,m>0}^{+\infty} \nu_1^{-n} \rho_1^m \left(-2H^{(n-m)} + m\delta_{n-m,o} C \right)_{(o)} | \lambda_o \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{\rho_1}{\nu_1} \right)^n, \\ &= \frac{\nu_1 \rho_1}{(\rho_1 - \nu_1)^2}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

No apêndice M calculamos os elementos de matriz de vários operadores, usando o formalismo dos operadores de vértice. Devemos ressaltar o fato que, o cálculo dos elementos de matriz é mais fácil de se efetuar usando a representação de operadores de vértice das álgebras de Kac-Moody. As outras funções tau são dadas por

$$\begin{aligned}\tau^+ &= \langle \lambda_o | E_-^{(1)} (b e^\eta \rho_1 E_+^{(-1)}) | \lambda_o \rangle \\ &= b e^\eta \rho_1 \langle \lambda_o | E_-^{(1)} (-2H^{(0)} + C) | \lambda_o \rangle \\ &= b \rho_1 e^\eta,\end{aligned}\tag{7.52}$$

$$\begin{aligned}\tau^- &= \langle \lambda_o | E_+^{(1)} (a \cdot e^{-\varphi} \nu_1 E_-^{(-1)}) | \lambda_o \rangle \\ &= a \cdot \nu_1 e^{-\varphi}.\end{aligned}\tag{7.53}$$

Portanto, a solução 1-sóliton torna-se

$$\Psi^+ = \frac{b \rho_1 e^\eta}{1 + a \cdot b \cdot c \cdot e^{-\varphi} e^\eta},\tag{7.54}$$

$$\Psi^- = -\frac{a \cdot \nu_1 e^{-\varphi}}{1 + a \cdot b \cdot c \cdot e^{-\varphi} e^\eta}.\tag{7.55}$$

Especializemos estas soluções para o segundo sistema de equações da hierarquia, isto é,

$$\partial_t \Psi^\pm = \pm \partial_x^2 \Psi^\pm \mp 2 \cdot (\Psi^+ \Psi^-) \Psi^\pm,\tag{7.56}$$

o qual é obtido de (7.9) considerando $N = 2$ e $t_2 \equiv t$.

Em particular, podemos usar as seguintes relações:

$$\rho_1 = -\nu_1, \quad b = -a = -2 \quad \text{e} \quad t_{2n+1} = 0 \quad (n \geq 0),$$

logo, as equações (7.54) e (7.55) tornam-se

$$\Psi^+ = \nu_1 \exp \left(\nu_1^2 t + \bar{\nu}_1 \right) \operatorname{sech} (\nu_1 x),\tag{7.57}$$

$$\Psi^- = -\nu_1 \exp \left(-\nu_1^2 t - \bar{\nu}_1 \right) \operatorname{sech} (\nu_1 x),\tag{7.58}$$

onde $\bar{\nu}_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \nu_1^{2n} t_{2n}$ é um parâmetro de fase se somente o sistema de equações (7.56) for considerada. A solução (7.57)-(7.58) é conhecida na literatura como um 'envelope sóliton' ou 'bright sóliton' [12].

7.4 A solução 2-sóliton

Agora, escolhemos como elemento constante h ,

$$\begin{aligned} h &= e^{a_1 F_1} \cdot e^{b_1 G_1} \cdot e^{a_2 F_2} \cdot e^{b_2 G_2}, \quad a_i, b_i, \nu_i, \rho_i = \text{constantes}; \\ F_i &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_i^n E_-^{(-n)}, \quad G_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_i^n E_+^{(-n)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Então,

$$\begin{aligned} \Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} &= 1 + e^{-\varphi_1} a_1 F_1 + e^{-\varphi_2} a_2 F_2 + e^{\eta_1} b_1 G_1 + e^{\eta_2} b_2 G_2 + \\ &e^{\eta_1} e^{\eta_2} b_1 G_1 b_2 G_2 + e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} a_1 F_1 a_2 F_2 + e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} a_1 F_1 b_1 G_1 + e^{-\varphi_1} e^{\eta_2} a_1 F_1 b_2 G_2 + \\ &e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_2 F_2 b_2 G_2 + e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} b_1 G_1 a_2 F_2 + e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} b_1 G_1 a_2 F_2 b_2 G_2 + \\ &e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_1 F_1 a_2 F_2 b_2 G_2 + e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} a_1 F_1 b_1 G_1 a_2 F_2 + \\ &e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{\eta_2} a_1 F_1 b_1 G_1 b_2 G_2 + e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_1 F_1 b_1 G_1 a_2 F_2 b_2 G_2, \end{aligned} \quad (7.60)$$

com

$$\varphi_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_i^n t_n, \quad \eta_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_i^n t_n, \quad i = 1, 2.$$

As funções tau correspondentes são:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^{(o)} &= 1 + \\ &e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} a_1 b_1 \langle \lambda_o | F_1 G_1 | \lambda_o \rangle + e^{-\varphi_1} e^{\eta_2} a_1 b_2 \langle \lambda_o | F_1 G_2 | \lambda_o \rangle + \\ &e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_2 b_2 \langle \lambda_o | F_2 G_2 | \lambda_o \rangle + e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} b_1 a_2 \langle \lambda_o | G_1 F_2 | \lambda_o \rangle + \\ &e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_1 b_1 a_2 b_2 \langle \lambda_o | F_1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_o \rangle, \\ \tau^+ &= e^{\eta_1} b_1 \langle \lambda_o | E_-^{(1)} G_1 | \lambda_o \rangle + e^{\eta_2} b_2 \langle \lambda_o | E_-^{(1)} G_2 | \lambda_o \rangle + \\ &e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{\eta_2} a_1 b_1 b_2 \langle \lambda_o | E_-^{(1)} F_1 G_1 G_2 | \lambda_o \rangle + \\ &e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} b_1 a_2 b_2 \langle \lambda_o | E_-^{(1)} G_1 F_2 G_2 | \lambda_o \rangle \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} \tau^- &= e^{-\varphi_1} a_1 \langle \lambda_o | E_+^{(1)} F_1 | \lambda_o \rangle + e^{-\varphi_2} a_2 \langle \lambda_o | E_+^{(1)} F_2 | \lambda_o \rangle + \\ &e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} e^{\eta_2} a_1 a_2 b_2 \langle \lambda_o | E_+^{(1)} F_1 F_2 G_2 | \lambda_o \rangle + \\ &e^{-\varphi_1} e^{\eta_1} e^{-\varphi_2} a_1 b_1 a_2 \langle \lambda_o | E_+^{(1)} F_1 G_1 F_2 | \lambda_o \rangle. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Note-se que somente alguns termos, isto é os termos cujos valores esperados são diferentes de zero, da expressão $\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1}$, contribuem para cada uma das funções tau. Por exemplo, os termos $\langle \lambda_o | F_i | \lambda_o \rangle$, $\langle \lambda_o | G_i | \lambda_o \rangle$, $\langle \lambda_o | F_i G_j F_k | \lambda_o \rangle$ e $\langle \lambda_o | G_i F_j G_k | \lambda_o \rangle$, não contribuem no cálculo de $\hat{\tau}^{(o)}$, pois estes elementos de matriz anulam-se (veja Apêndice M para a demonstração destes resultados e os cálculos dos elementos de matriz não nulos).

Desta forma, uma solução da hierarquia GNLS₁ torna-se:

$$\Psi^{\pm} = \pm \frac{\tau^{\pm}}{\hat{\tau}^{(0)}}. \quad (7.63)$$

Como fizemos na seção anterior, consideramos $N = 2$, $t_2 \equiv t$, em (7.9) para obter uma solução do sistema (7.56). Em particular consideramos $\rho_i = -\nu_i$, $b_i = -a_i = -2$ e $t_{2n+1} = 0$, então as funções tau tornam-se:

$$\tau^{+} = a_1 \nu_1 e^{\hat{\varphi}_1} + a_2 \nu_2 e^{\hat{\varphi}_2} + a_1 a_2^2 \Delta_1 e^{\hat{\varphi}_1} e^{-\varphi_2} e^{\hat{\varphi}_2} + a_1^2 a_2 \Delta_2 e^{-\varphi_1} e^{\hat{\varphi}_1} e^{\hat{\varphi}_2}, \quad (7.64)$$

$$\tau^{-} = a_1 \nu_1 e^{-\varphi_1} + a_2 \nu_2 e^{-\varphi_2} + a_1 a_2^2 \Delta_1 e^{-\varphi_1} e^{-\varphi_2} e^{\hat{\varphi}_2} + a_1^2 a_2 \Delta_2 e^{-\varphi_1} e^{\hat{\varphi}_1} e^{-\varphi_2}, \quad (7.65)$$

onde

$$\hat{\varphi}_i = -\nu_i (x - \nu_i t) + \bar{\nu}_i,$$

$$\varphi_i = \nu_i (x + \nu_i t) + \bar{\nu}_i,$$

$$\Delta_i = \frac{\nu_i}{4} \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right)^2, \quad i = 1, 2;$$

agora, escolheremos a_1 e a_2 tais que

$$\nu_i = a_j^2 \Delta_i, \quad (i \neq j),$$

então

$$a_1 = a_2 \equiv a = 2 \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \right).$$

Observe que os $\bar{\nu}_i$ são parâmetros de fase, se somente a equação (7.56) da hierarquia for considerada. Com esta escolha de parâmetros $\hat{\tau}^{(0)}$, torna-se

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^{(0)} = & e^{-(\nu_1 + \nu_2)x} \left\{ \frac{4}{a^2} (e^{(\nu_1 - \nu_2)x} + e^{-(\nu_1 - \nu_2)x}) + e^{(\nu_1 + \nu_2)x} + e^{-(\nu_1 + \nu_2)x} + \right. \\ & \left. 4 \frac{\nu_1 \nu_2}{(\nu_1 - \nu_2)^2} (e^{(\nu_1^2 - \nu_2^2)t + (\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2)} + e^{-(\nu_1^2 - \nu_2^2)t - (\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Portanto, os campos Ψ^{+} e Ψ^{-} tornam-se

$$\Psi^{\pm} = \pm a e^{\pm[(\nu_1^2 + \nu_2^2)t + (\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2)]}.$$

$$\frac{e^{\mp(\nu_1^2 t + \bar{\nu}_1)} \nu_2 \cosh(\nu_1 x) + e^{\mp(\nu_2^2 t + \bar{\nu}_2)} \nu_1 \cosh(\nu_2 x)}{\frac{4}{a^2} \cosh[(\nu_1 - \nu_2)x] + \cosh[(\nu_1 + \nu_2)x] + 4 \frac{\nu_1 \nu_2}{(\nu_1 - \nu_2)^2} \cosh[(\nu_1^2 - \nu_2^2)t + (\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2)]}, \quad (7.67)$$

que são as soluções 2-sóliton da equação (7.56); estas soluções coincidem com aquelas de [28], obtidas usando outros métodos de solução.

Para verificar estas soluções é conveniente usar os programas de manipulação simbólica tal como o MATHEMATICA, que permite realizar facilmente a álgebra tediosa e os cálculos rotineiros. Verificamos que as funções acima $\Psi^{\pm}$ para 2-sóliton são de fato soluções do sistema (7.56).

OBSERVAÇÃO: A respeito das soluções das equações de ordem superior, da hierarquia (7.9), podemos argumentar que as mesmas soluções 1-sóliton (7.54-7.55) e 2-sóliton (7.63) que satisfazem as equações (7.7), também satisfazem as equações de ordem superior da hierarquia GNLS₁, cada uma, com uma diferente escala de tempo t_n . Este resultado é também observado no estudo da hierarquia de KdV, usando o método da redução perturbativa e múltiplos tempos [30].

7.5 Soluções N-sóliton

A generalização para uma solução N-sóliton pode ser feita, tomando um elemento de grupo h conveniente e calculando as funções tau correspondentes. Escolhemos

$$h = e^{a_1 F_1} e^{a_2 G_1} \dots e^{a_N F_N} e^{b_N G_N}, \quad (7.68)$$

onde

$$F_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_i^n E_-^{(-n)}, \quad G_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_i^n E_+^{(-n)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

a_i, b_i, ν_i e ρ_i são parâmetros reais.

A seguinte expressão é importante no cálculo das funções tau:

$$\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} = (1 + a_1 e^{-\varphi_1} F_1) (1 + b_1 e^{\eta_1} G_1) \dots (1 + a_N e^{-\varphi_N} F_N) (1 + b_N e^{\eta_N} G_N), \quad (7.69)$$

onde

$$\varphi_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_i^n t_n, \quad \eta_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_i^n t_n, \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

com ν_i e ρ_i sendo alguns parâmetros reais. Estes parâmetros caracterizarão cada sóliton.

É conveniente escrever os operadores F_i e G_i em termos dos operadores de vértice que introduzimos no Apêndice M,

$$F_i \longrightarrow \nu_i \Gamma_- (\nu_i), \quad G_i \longrightarrow \rho_i \Gamma_+ (\rho_i), \quad (7.70)$$

então,

$$\Psi^{(vac)} h \Psi^{(vac)-1} = (1 + a_1 \nu_1 e^{-\varphi_1} \Gamma_- (\nu_1)) (1 + b_1 \rho_1 e^{\eta_1} \Gamma_+ (\rho_1)) \dots$$

$$(1 + a_N \nu_N e^{-\varphi_N} \Gamma_- (\nu_N)) (1 + b_N \rho_N e^{\eta_N} \Gamma_+ (\rho_N)).$$

Calculemos as funções tau correspondentes. Denotando

$$A_n = a_n \nu_n e^{-\varphi_n}, \quad B_n = b_n \rho_n e^{\eta_n},$$

temos,

$$\hat{\tau}^{(o)} = 1 + \langle \lambda_o | \sum_{n=1}^N$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N} A_{i_1} \dots A_{i_n} \Gamma_- (\nu_{i_1}) \dots \Gamma_- (\nu_{i_n}) \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N} B_{j_1} \dots B_{j_n} \Gamma_+ (\rho_{j_1}) \dots \Gamma_- (\rho_{j_n}) | \lambda_o \rangle.$$

Estamos usando, algumas propriedades dos produtos de operadores de vértice agindo sobre $|\lambda_o\rangle$ e seu dual $\langle \lambda_o |$ (veja Apêndice K). Deste modo,

$$\hat{\tau}^{(o)} = 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N}} A_{i_1} \dots A_{i_n} B_{j_1} \dots B_{j_n} \cdot$$

$$\left[\prod_{1 \leq l < m \leq n} (\nu_{i_l} - \nu_{i_m})^2 (\rho_{j_l} - \rho_{j_m})^2 \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) \right] \cdot$$

$$\left[\prod_{1 \leq l \leq m < n} (\nu_{i_l} - \rho_{j_m})^2 \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{j_m}) \right]^{-1}.$$

Denotemos,

$$\epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) = \epsilon(-\alpha, -\alpha) \equiv \epsilon(-, -),$$

$$\epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) = \epsilon(\alpha, \alpha) \equiv \epsilon(+, +),$$

$$\epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{j_m}) = \epsilon(-\alpha, \alpha) \equiv \epsilon(-, +),$$

ainda, conhecemos para o caso de $\widehat{sl}(2)$, veja por exemplo [32,34]

$$\epsilon(+, +) = \epsilon(-, -) = -1,$$

$$\epsilon(+, -) = \epsilon(-, +) = 1,$$

portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^{(o)} &= 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N}} A_{i_1} \dots A_{i_n} B_{j_1} \dots B_{j_n} \cdot \\ &\quad \left[\prod_{1 \leq l < m \leq n} (\nu_{i_l} - \nu_{i_m})^2 (\rho_{j_l} - \rho_{j_m})^2 \right] \left[\prod_{1 \leq l \leq m \leq n} (\nu_{i_l} - \rho_{j_m})^2 \right]^{-1}, \end{aligned}$$

igualmente,

$$\begin{aligned} \tau^{\pm} &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz. z \langle \lambda_o | \Gamma_{\mp}(z) \left(1 + a_1 \nu_1 e^{-\varphi_1} \Gamma_{-}(\nu_1) \right) \left(1 + b_1 \rho_1 e^{\eta_1} \Gamma_{+}(\rho_1) \right) \dots \\ &\quad \left(1 + a_N \nu_N e^{-\varphi_N} \Gamma_{-}(\nu_N) \right) \left(1 + b_N \rho_N e^{\eta_N} \Gamma_{+}(\rho_N) \right) | \lambda_o \rangle. \end{aligned}$$

De acordo com a equação K.23, para se ter termos não nulos, devemos ter igual número de operadores Γ_{+} e Γ_{-} , dentro dos estados $\langle \lambda_o |$ e $| \lambda_o \rangle$, assim

$$\begin{aligned} \tau^{\pm} &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz. z \sum_{n=1}^N A_1^{m_1} \dots A_N^{m_N} B_1^{n_1} \dots B_N^{n_N} \langle \lambda_o | \Gamma_{\mp}(z) \Gamma_{-}^{m_1}(\nu_1) \dots \Gamma_{-}^{m_N}(\nu_N) \cdot \\ &\quad \Gamma_{+}^{n_1}(\rho_1) \dots \Gamma_{+}^{n_N}(\rho_N) | \lambda_o \rangle, \end{aligned}$$

onde os expoentes satisfazem as relações seguintes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \pm 1 &= \sum_{i=1}^N n_i = n \\ m_i, n_i &= 0, 1. \end{aligned}$$

Reordenando os operadores, podemos escrever para τ^{+} :

$$\begin{aligned} \tau^{+} &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\nu. \nu \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1} \leq N}} A_{i_1} \dots A_{i_n} B_{j_1} \dots B_{j_{n+1}} \cdot \\ &\quad \langle \lambda_o | \Gamma_{-}(\nu) \Gamma_{-}(\nu_{i_1}) \dots \Gamma_{-}(\nu_{i_n}) \Gamma_{+}(\rho_{j_1}) \dots \Gamma_{+}(\rho_{j_{n+1}}) | \lambda_o \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1} \leq N}} \left[\oint d\nu \cdot \nu \left(\prod_{0 < l \leq n} \epsilon(-\alpha, \alpha_{i_l}) (\nu - \nu_{i_l})^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\prod_{0 < m \leq n+1} \epsilon(-\alpha, \alpha_{j_m}) (\nu - \rho_{j_m})^2 \right)^{-1} \right] A_{i_1} \dots A_{i_n} B_{j_1} \dots B_{j_{n+1}} \cdot \\
&\quad \left(\prod_{0 \leq l < m \leq n} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) (\nu_{i_l} - \nu_{i_m})^2 \right) \cdot \left(\prod_{0 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) (\rho_{j_l} - \rho_{j_m})^2 \right) \\
&\quad \left(\prod_{\substack{1 \leq l < m \leq n+1 \\ l \neq n+1}} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{j_m}) (\nu_{i_l} - \rho_{j_m})^2 \right)^{-1} .
\end{aligned}$$

No Apêndice N, mostramos que a integração na variável ν é igual a $2\pi i$ para qualquer valor de n . Então,

$$\begin{aligned}
\tau^+ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1} \leq N}} A_{i_1} \dots A_{i_n} B_{j_1} \dots B_{j_{n+1}} \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) (\nu_{i_l} - \nu_{i_m})^2 \right) \cdot \\
&\quad \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) (\rho_{j_l} - \rho_{j_m})^2 \right) \cdot \left(\prod_{0 < l \leq n} \epsilon(-\alpha, \alpha_{i_l}) \right) \cdot \\
&\quad \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{j_m}) (\nu_{i_l} - \rho_{j_m})^2 \right)^{-1} \left(\prod_{0 < m \leq n+1} \epsilon(-\alpha, \alpha_{j_m}) \right)^{-1} .
\end{aligned}$$

Similarmente para τ^- temos,

$$\begin{aligned}
\tau^- &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\rho \cdot \rho \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1} \leq N}} B_{i_1} \dots B_{i_n} A_{j_1} \dots A_{j_{n+1}} \cdot \\
&\quad \langle \lambda_o | \Gamma_+(\rho) \Gamma_+(\rho_{i_1}) \dots \Gamma_+(\rho_{i_n}) \Gamma_-(\nu_{j_1}) \dots \Gamma_-(\nu_{j_{n+1}}) | \lambda_o \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1} \leq N}} \left[\oint d\rho \cdot \rho \left(\prod_{0 < l \leq n} \epsilon(\alpha, \alpha_{i_l}) (\rho - \rho_{i_l})^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\prod_{0 < m \leq n+1} \epsilon(\alpha, \alpha_{j_m}) (\rho - \nu_{j_m})^2 \right)^{-1} \right] B_{i_1} \dots B_{i_n} A_{j_1} \dots A_{j_{n+1}} \cdot \\
&\quad \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) (\rho_{i_l} - \rho_{i_m})^2 \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) (\nu_{j_l} - \nu_{j_m})^2 \right) \\
&\quad \left(\prod_{\substack{1 \leq l < m \leq n+1 \\ l \neq n+1}} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{j_m}) (\rho_{i_l} - \nu_{j_m})^2 \right)^{-1} ,
\end{aligned}$$

a integração de contorno em ρ é também igual a $2\pi i$ (veja Apêndice N) para qualquer valor de n . Portanto:

$$\begin{aligned} \tau^- = & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1} \leq N}} B_{i_1} \dots B_{i_n} A_{j_1} \dots A_{j_{n+1}} \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{i_m}) (\rho_{i_l} - \rho_{i_m})^2 \right) \cdot \\ & \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{j_l}, \alpha_{j_m}) (\nu_{j_l} - \nu_{j_m})^2 \right) \left(\prod_{0 < l \leq n} \epsilon(\alpha, \alpha_{i_l}) \right) \cdot \\ & \left(\prod_{1 \leq l < m \leq n+1} \epsilon(\alpha_{i_l}, \alpha_{j_m}) (\rho_{i_l} - \nu_{j_m})^2 \right)^{-1} \left(\prod_{0 < m \leq n+1} \epsilon(\alpha, \alpha_{j_m}) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Expressões semelhantes para estas funções tau são dadas em [29], através do enfoque das equações de Hirota generalizadas da hierarquia GNLS₁.

Considerações finais

Nesta dissertação discutimos alguns aspectos dos sistemas de GNLS e GDNLS. Em particular, para os sistemas GNLS_2 e GDNLS_2 estabelecemos suas integrabilidades, fornecendo um programa simbólico (usando o 'scaling' e as simetrias das equações) para construir um número infinito de quantidades conservadas e verificando que as primeiras quantidades conservadas estão em involução. Mostramos que eles são sistemas bi-Hamiltonianos, verificando as compatibilidades de suas respectivas estruturas Hamiltonianas. Além disso, relacionamos ambos os sistemas através de uma transformação de "gauge", a qual relaciona os campos. Através dessa transformação relacionamos, também, as suas quantidades conservadas. Seria interessante verificar por algum método computacional simples a relação entre as respectivas estruturas de parênteses de Poisson dos sistemas usando aquela transformação; mais explicitamente, verificar a relação das terceiras estruturas Hamiltonianas.

Na classificação das hierarquias integráveis dadas em [22], os autores consideraram as hierarquias homogêneas como generalizações da hierarquia NLS; além disso, Kac e Wakimoto [29] construíram a hierarquia NLS diretamente na forma bilinear de Hirota associada à representação homogênea do tipo operador de vértice (nível 1) da álgebra de Kac-Moody "afim" $\widehat{sl}_2$; também eles obtiveram soluções do tipo sóliton da hierarquia NLS.

A conexão entre estes esquemas foi iniciada em [23] e generalizadas em [26]. Neste último trabalho, os autores definem as funções-tau em termos das representações integráveis de peso mais alto de qualquer nível.

Seguimos a definição das funções-tau apresentadas nesta última referência, onde o papel central é desempenhado pela transformação "dressing", a qual possibilitou-nos relacionar os campos em termos das funções-tau. Estas funções-tau foram identificadas com elementos de matrizes específicos calculados na representação integrável de peso mais alto da álgebra de Kac-Moody $\widehat{sl}_r$. Desta forma, obtivemos soluções explícitas do sistema GNLS_r "vestindo" alguma solução de vácuo. Soluções interessantes, a saber, soluções do tipo N-sóliton foram obtidas, as quais estão felizmente na órbita de uma solução de vácuo. No caso das soluções do tipo "configurações de vácuo" e soluções do tipo 1-sóliton, os elementos de matriz têm sido os mesmos conforme eles devem ser, seja utilizando a teoria geral de representações ou as representações do tipo operador de vértice de nível 1 da álgebra $\widehat{sl}_r$.

Os elementos de matriz dos N-sóliton de ordem maior foram calculados utilizando exclusivamente a construção homogênea de operadores de vértice. Pode-se observar que a solução explícita do tipo N-sóliton é fácil de se manejar uma vez que a fórmula geral é dada para os elementos de matriz.

No capítulo 7, por simplicidade, a hierarquia GNLS_1 foi considerada. Como resultado secundário do processo de parametrização dos campos em termos das funções tau, utilizando a transformação "dressing", notamos que um número infinito de leis de conservação da

forma

$$\partial_t \rho + \partial_x F = 0,$$

poderia ser obtido. Os $\int dx \cdot \rho$ sendo as quantidades conservadas, cujas formas são semelhantes ao caso do sistema GNLS₂ (veja o capítulo 2). Além disso, as soluções dependem de múltiplos tempos e satisfazem qualquer equação da hierarquia GNLS₁.

É uma tarefa importante considerar as hierarquias estudadas, GNLS e GDNLS, acopladas na seguinte forma

$$\partial_t q^\pm = \pm \partial_x^2 q^\pm \mp \alpha q^+ q^- q^\pm + \beta \partial_x (q^+ q^- q^\pm).$$

Seria interessante tentar estender o presente trabalho a esses tipos de generalizações. Já começamos investigação nesta direção.

Apêndice A

O sistema GDNLS₂ e o parênteses $\{ \quad , \quad \}_2$

Como exemplo calculemos

$$\begin{aligned} \partial_t r_1(x) &= \{r_1(x), H_2\}_2 \\ &= 2 \int dy [\{r_1(x), (\sum qr)(y)\}_2 [(\sum qr)(y)]^2 + \frac{3}{2} \{r_1(x), (\sum qr)(y)\}_2 (\sum q'r)(y) + \\ &\quad \frac{3}{2} \{r_1(x), (\sum q''r)(y)\}_2 (\sum qr)(y) + \frac{1}{2} \{r_1(x), (\sum q''r)(y)\}_2], \end{aligned} \quad (A.1)$$

usando as notações

$$\begin{aligned} (\sum qr)(y) &\equiv \sum_{i=1}^2 q_i(y) r_i(y), \quad (\sum q'r)(y) \equiv \sum_{i=1}^2 \partial_y q_i(y) r_i(y), \\ (\sum q''r)(y) &\equiv \sum_{i=1}^2 \partial_y^2 q_i(y) r_i(y), \end{aligned}$$

pode-se mostrar que os seguintes parênteses são satisfeitos:

$$\{r_1(x), (\sum qr)(y)\}_2 = -r_1(y) \delta(x - y),$$

$$\begin{aligned} \{r_1(x), q'(y)\}_2 &= -\partial_y(x - y) - \frac{1}{2} [2r_1(x) q'_1(y) + r_2(x) q'_2(y)] \epsilon(x - y) + \\ &\quad [2r_1(x) q_1(y) + r_2(x) q_2(y)] \delta(x - y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{r_1(x), q''(y)\}_2 &= -\partial_y^2(x - y) - \frac{1}{2} [2r_1(x) q''_1(y) + r_2(x) q''_2(y)] \epsilon(x - y) + \\ &\quad [2r_1(x) q'_1(y) + r_2(x) q'_2(y)] \delta(x - y) + [2r_1(x) q_1(y) + r_2(x) q_2(y)] \partial_y \delta(x - y). \end{aligned}$$

Usando estas últimas relações em (N.1) pode-se obter

$$\partial_t r_1(x) = -\partial_x^2 r_1(x) + 2\partial_x [r_1(x) \sum_{i=1}^2 q_i(x) r_i(x)].$$

Apêndice B

"Poisson pencil" do sistema GDNLS₂

Para o sistema GDNLS₂, tomamos as estruturas de Poisson $\{ \cdot, \cdot \}_2$ e $\{ \cdot, \cdot \}_3$ e verificamos a relação de compatibilidade entre elas:

$$\begin{aligned} & \{f, \{g, h\}_3\}_2 + \{g, \{h, f\}_3\}_2 + \{h, \{f, g\}_3\}_2 + \\ & \{f, \{g, h\}_2\}_3 + \{g, \{h, f\}_2\}_3 + \{h, \{f, g\}_2\}_3 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Como exemplos apresentamos os seguintes casos:

1. se

$$f = r_1(x), \quad g = r_1(y) \quad \text{e} \quad h = r_1(z),$$

notamos que os primeiros três termos em (N.1) anulam-se, pois, $\{r_1(x), r_1(y)\}_3 = 0$. Substituindo o parênteses $\{ \cdot, \cdot \}_2$ nos outros termos obtém-se,

$$\begin{aligned} & \{r_1(x), r_1(y)r_1(z)\epsilon(y-z)\}_3 + \{r_1(y), r_1(z)r_1(x)\epsilon(z-x)\}_3 + \\ & \{r_1(z), r_1(x)r_1(y)\epsilon(x-y)\}_3 = 0. \end{aligned}$$

2. se

$$f = r_1(x), \quad g = r_1(y) \quad \text{e} \quad h = q_2(z),$$

também, desta vez, os tres primeiros termos anulam-se, devido a $\{r_i(x), q_j(y)\}_3 = 0$ ($i \neq j$); substituindo $\{ \cdot, \cdot \}_2$ nos termos restantes, obtém-se

$$\begin{aligned} & \left\{ r_1(x), \frac{1}{2}r_1(y)q_2(z)\epsilon(y-z) \right\}_3 + \left\{ r_1(y), \frac{1}{2}r_1(x)q_2(z)\epsilon(x-z) \right\}_3 + \\ & \left\{ r_1(x), \frac{1}{2}q_2(z)r_1(y)\epsilon(z-y) \right\}_3 = 0, \end{aligned}$$

onde usamos de novo, $\{r_i(x), q_j(y)\}_3 = 0$ ($i \neq j$) e $\{r_i(x), r_j(y)\}_3 = 0$ para $i, j = 1, 2$.

3. se

$$f = r_1(x), \quad g = r_1(y) \quad \text{e} \quad h = q_1(z),$$

substituindo os respectivos parênteses obtém-se.

$$\begin{aligned} & -r_1(y)\partial_x(x-z)\epsilon(y-z) - r_1(x)\partial_y(y-z)\epsilon(z-x) + r_1(x)\partial_z(z-y)\epsilon(x-y) + \\ & r_1(y)\partial_z(z-x)\epsilon(x-y) = 2r_1(y)\delta(x-z)\delta(y-x) - r_1(y)\partial_x\delta(x-z)\epsilon(y-x) - \\ & 2r_1(x)\delta(y-z)\epsilon(z-x) - r_1(x)\partial_y\delta(y-z)\epsilon(y-x) + r_1(x)\partial_z\delta(z-y)\epsilon(x-y) + \\ & r_1(y)\partial_z\delta(z-x)\epsilon(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Apêndice C

Parênteses de Poisson de alguns Hamiltonianos do sistema GDNLS₂

No cálculo de alguns parênteses de Poisson usaremos a seguinte relação,

$$\begin{aligned} \{H_a[r, q], H_b[r, q]\}_3 &= \sum_{l,m=1,2} \int dz.dz' \left[\frac{\delta H_a[r, q]}{\delta r_l(z)} \cdot \frac{\delta H_b[r, q]}{r_m(z')} \{r_l(z), r_m(z')\}_3 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta H_a[r, q]}{\delta r_l(z)} \frac{\delta H_b[r, q]}{q_m(z')} \{r_l(z), q_m(z')\}_3 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta H_a[r, q]}{\delta q_l(z)} \frac{\delta H_b[r, q]}{r_m(z')} \{q_l(z), r_m(z')\}_3 + \frac{\delta H_a[r, q]}{\delta q_l(z)} \frac{\delta H_b[r, q]}{q_m(z')} \{q_l(z), q_m(z')\}_3 \right]. \end{aligned}$$

Sabemos que as únicas componentes não nulas são:

$$\{r_i(z), q_j(z')\}_3 = \delta_{ij} \partial_z(z - z'),$$

então, temos a seguinte expressão simplificada

$$\begin{aligned} \{H_a[r, q], H_b[r, q]\}_3 &= \sum_{l=1,2} \int \int dz.dz' \left[\frac{\delta H_a[r, q]}{\delta r_l(z)} \frac{\delta H_b[r, q]}{q_m(z')} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta H_a[r, q]}{\delta q_l(z)} \frac{\delta H_b[r, q]}{r_m(z')} \right] \partial_z(z - z'). \end{aligned}$$

Para calcular $\{H_0, H_1\}_3$, necessitamos das seguintes relações:

$$\frac{\delta H_0[r, q]}{\delta q_l(z)} = r_l(z), \quad \frac{\delta H_0[r, q]}{\delta r_l(z')} = q_l(z'),$$

$$\frac{\delta H_1[r, q]}{\delta q_l(z')} = -\partial_{z'} r_l(z') + 2r_l(z')(\sum q r)(z'), \quad \frac{\delta H_1[r, q]}{\delta r_l(z')} = \partial_{z'} q_l(z') + 2q_l(z')(\sum q r)(z').$$

Assim, pode-se obter

$$\begin{aligned} \{H_0[r, q], H_1[r, q]\}_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz.\partial_z \left[\sum_{i=1}^2 q_i(z) r_i(z) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos a condição de fronteira

$$q_i(z), \quad r_i(z) \longrightarrow 0$$

$$\text{para } |z| \rightarrow +\infty.$$

Da mesma forma, temos para $\{H_0, H_2\}_3$:

$$\frac{\delta H_2[r, q]}{\delta r_l(z)} = \left[3(\sum qr)^2 q_l + \frac{3}{2} q_l (\sum q'r) + \frac{3}{2} (\sum qr) q_l' + \frac{1}{2} q_l'' \right] (z),$$

$$\frac{\delta H_2[r, q]}{\delta q_l(z)} = \left[3(\sum qr)^2 r_l - \frac{3}{2} [r_l (\sum qr)]' + \frac{3}{2} (\sum q'r) r_l + \frac{1}{2} r_l'' \right] (z),$$

então,

$$\begin{aligned} \{H_0, H_2\}_3 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dz \cdot \partial_z \left[(\sum qr)^3 (z) - \frac{1}{2} (\sum q'r') \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta vez para $\{H_0, H_3\}_3$:

$$\frac{\delta H_3[r, q]}{\delta r_l(z)} = [4(\sum qr)^3 q_l + 4q_l (\sum q'r) (\sum qr) + 2(\sum qr)^2 q_l' + \frac{2}{5} q_l (\sum qr)'' +$$

$$\frac{2}{5} q_l' (\sum qr) + \frac{2}{5} (q_l (\sum qr))'' - \frac{4}{5} q_l \sum q'r' + \frac{1}{5} q_l''' + \frac{2}{5} q_l' \sum q'r - \frac{2}{5} (q_l (\sum q'r'))'] (z)$$

$$\frac{\delta H_3[r, q]}{\delta q_l(z)} = [4(\sum qr)^3 r_l + 4r_l (\sum q'r) (\sum qr) - 2((\sum qr)^2 r_l)' + \frac{2}{5} r_l (\sum qr)'' +$$

$$\frac{2}{5} r_l' (\sum qr) + \frac{2}{5} (r_l (\sum qr))'' - \frac{4}{5} r_l \sum q'r' - \frac{1}{5} r_l''' - \frac{2}{5} (r_l \sum q'r)' + \frac{2}{5} (r_l (\sum q'r'))'] (z)$$

$$\begin{aligned} \{H_0, H_3\}_3 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dz \cdot [(\sum qr)'' (\sum qr)'] (z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se

$$\{H_0, H_1\}_3 = \{H_0, H_2\}_3 = \{H_1, H_3\}_3 = 0;$$

igualmente pode-se obter

$$\{H_1, H_2\}_3 = \{H_1, H_3\}_3 = \{H_2, H_3\}_3 = 0.$$

Apêndice D

A terceira estrutura de parênteses do sistema GNLS₂

Usando a relação

$$P_3\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dz.dz' P_2\delta(x-z)P_1^{-1}\delta(z-z')P_2\delta(z'-y),$$

podem-se calcular os parênteses $\{ \quad , \quad \}_3$. Fornecemos alguns deles:

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(x), \Psi_1(y)\}_3 = & -\{[\Psi_1'(x)\Psi_1(y) + \Psi_1(x)\Psi_1'(y)]\epsilon(x-y) + \\ & \frac{1}{4}(\int_{-\infty}^{+\infty} dz\Psi_1(z)\bar{\Psi}_2(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y))(\Psi_1(x)\Psi_2(y) - \Psi_2(x)\Psi_1(y))\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(x), \Psi_2(y)\}_3 = & -\{\frac{1}{4}\Psi_2(x)\Psi_2(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz\Psi_1(z)\bar{\Psi}_2(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) + \\ & \frac{1}{4}\Psi_2(x)\Psi_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz[\bar{\Psi}_1(z)\Psi_1(z) - \Psi_2(z)\bar{\Psi}_2(z)]\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) - \\ & \frac{1}{4}\Psi_1(x)\Psi_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz\bar{\Psi}_1(z)\Psi_2(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) + \\ & \frac{1}{2}[\Psi_1'(x)\Psi_2(y) + \Psi_2'(x)\Psi_1(y) + \Psi_1(x)\Psi_2'(y) + \Psi_2(x)\Psi_1'(y)]\epsilon(x-y)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\Psi}_1(x), \Psi_1(y)\}_3 = & -\{-\frac{1}{4}\bar{\Psi}_1(x)\Psi_2(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz\Psi_1(z)\bar{\Psi}_2(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) + \\ & \frac{1}{4}\bar{\Psi}_2(x)\Psi_2(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz[\bar{\Psi}_1(z)\Psi_1(z) - \Psi_2(z)\bar{\Psi}_2(z)]\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) - \\ & \frac{1}{4}\bar{\Psi}_2(x)\Psi_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz\bar{\Psi}_1(z)\Psi_2(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) - \delta''(x-y) + \\ & 4[\bar{\Psi}_1(x)\Psi_1(y) + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_2(x)\Psi_2(y)]\delta(x-y) + [(\bar{\Psi}_1'(x)\Psi_1(y) + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_2'(x)\Psi_2(y)) - \\ & (\bar{\Psi}_1(x)\Psi_1'(y) + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_2(x)\Psi_2'(y))]\epsilon(x-y)\}, \end{aligned}$$

$$\{\bar{\Psi}_2(x), \Psi_1(y)\}_3 = -\{\frac{1}{4}[\bar{\Psi}_1(x)\Psi_1(y) + \bar{\Psi}_2(x)\Psi_2(y)] \int_{-\infty}^{+\infty} dz\Psi_1(z)\bar{\Psi}_2(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) +$$

$$\frac{1}{2}[\bar{\Psi}_2'(x)\Psi_1(y) - \bar{\Psi}_2(x)\Psi_1'(y)]\epsilon(x-y) + 2\bar{\Psi}_2(x)\Psi_1(y)\delta(x-y)\},$$

$$\{\bar{\Psi}_1(x), \bar{\Psi}_1(y)\}_3 = -\{-[\bar{\Psi}_1'(x)\bar{\Psi}_1(y) + \bar{\Psi}_1(x)\bar{\Psi}_1'(y)]\epsilon(x-y) -$$

$$\frac{1}{4}[\int_{-\infty}^{+\infty} dz \Psi_2(z)\bar{\Psi}_1(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y)][\bar{\Psi}_1(x)\bar{\Psi}_2(y) - \bar{\Psi}_2(x)\bar{\Psi}_1(y)]\},$$

$$\{\bar{\Psi}_1(x), \bar{\Psi}_2(y)\}_3 = -\{\frac{1}{4}\bar{\Psi}_1(x)\bar{\Psi}_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Psi_1(z)\bar{\Psi}_2(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) -$$

$$\frac{1}{4}\bar{\Psi}_2(x)\bar{\Psi}_2(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \bar{\Psi}_1(z)\Psi_2(z)\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) +$$

$$\frac{1}{4}\bar{\Psi}_2(x)\bar{\Psi}_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz [\bar{\Psi}_2(z)\Psi_2(z) - \Psi_1(z)\bar{\Psi}_1(z)]\epsilon(x-z)\epsilon(z-y) -$$

$$\frac{1}{2}[\bar{\Psi}_1'(x)\bar{\Psi}_2(y) + \bar{\Psi}_2'(x)\bar{\Psi}_1(y) + \bar{\Psi}_1(x)\bar{\Psi}_2'(y) + \bar{\Psi}_2(x)\bar{\Psi}_1'(y)]\epsilon(x-y)\}.$$

Apêndice E

O sistema GNLS₂ e a estrutura de parênteses $\{ \quad , \quad \}_2$

Como exemplos, apresentamos os casos $\{\Psi_2(x), \mathcal{H}_2\}_2$ e $\{\bar{\Psi}_1(x), \mathcal{H}_2\}_2$.

$$\mathcal{H}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\partial_y \bar{\Psi}_1(y) \Psi_1(y) + \partial_y \bar{\Psi}_2(y) \Psi_2(y) \right),$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi_2 &= \{\Psi_2(x), \mathcal{H}_2\}_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\partial_y \bar{\Psi}_1 \{\Psi_2(x), \Psi_1(y)\}_2 + \{\Psi_2(x), \partial_y \bar{\Psi}_1(y)\}_2 \Psi_1(y) + \\ &\quad \partial_y \bar{\Psi}_2 \{\Psi_2(x), \Psi_2(y)\}_2 + \{\Psi_2(x), \partial_y \bar{\Psi}_2(y)\}_2 \Psi_2(y)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \{ \partial_y \bar{\Psi}_1 \frac{1}{2} [\Psi_1(x) \Psi_2(y) + \Psi_2(x) \Psi_1(y)] \epsilon(x-y) + \\ &\quad \frac{1}{2} \partial_y [-\Psi_2(x) \bar{\Psi}_1(y) \epsilon(x-y)] \Psi_1(y) + \partial_y \bar{\Psi}_2 \Psi_2(x) \Psi_2(y) \epsilon(x-y) + \\ &\quad \partial_y [\delta(x-y) - \frac{1}{2} \Psi_1(x) \bar{\Psi}_1(y) \epsilon(x-y) - \Psi_2(x) \bar{\Psi}_2(y) \epsilon(x-y)] \Psi_2(y) \} \\ &= -\partial_x^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^2 \Psi_i(x) \bar{\Psi}_i(x) \right] \Psi_2(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\Psi}_1 &= \{\bar{\Psi}_1(x), \mathcal{H}_2\}_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\partial_y \bar{\Psi}_1(y) \{\bar{\Psi}_1(x), \Psi_1(y)\}_2 + \{\bar{\Psi}_1(x), \partial_y \bar{\Psi}_1(y)\}_2 \Psi_1(y) + \\ &\quad \partial_y \bar{\Psi}_2 \{\bar{\Psi}_1(x), \Psi_2(y)\}_2 + \{\bar{\Psi}_1(x), \partial_y \bar{\Psi}_2(y)\}_2 \Psi_2(y)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \{ \partial_y \bar{\Psi}_1(y) [\partial_x \delta(x-y) - (\bar{\Psi}_1(x) \Psi_1(y) + \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_2(x) \Psi_2(y)) \epsilon(x-y))] + \\ &\quad \partial_y [\bar{\Psi}_1(x) \Psi_1(y) \epsilon(x-y)] \Psi_1(y) + \partial_y \bar{\Psi}_2 [-\frac{1}{2} \bar{\Psi}_1(x) \Psi_2(y) \epsilon(x-y)] + \\ &\quad \frac{1}{2} \partial_y [(\bar{\Psi}_1(x) \bar{\Psi}_2(y) + \bar{\Psi}_2(x) \bar{\Psi}_1(y)) \epsilon(x-y)] \Psi_2(y) \} \end{aligned}$$

$$= \partial_x^2 \bar{\Psi}_1(x, t) - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \bar{\Psi}_i(x, t) \Psi_i(x, t) \right) \cdot \bar{\Psi}_1(x, t).$$

Appendix F

O sistema GNTS, a a primeira derivada de parâmetros da Potência

Consideramos o sistema GNTS:

$$\dot{x} = - \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right)$$

Para o sistema GNTS, a primeira derivada de parâmetros da Potência

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) = 0$$

Derivada:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

Logo, a primeira derivada de parâmetros da Potência

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Logo, a primeira derivada de parâmetros da Potência

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Apêndice F

O sistema GNLS₂ e a primeira estrutura de parênteses de Poisson.

Assumimos o seguinte Hamiltoniano,

$$\mathcal{H}_3 = - \int dy \left[\sum_{j=1}^2 \partial_y \bar{\Psi}_j \partial_y \Psi_j + \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j \Psi_j \right)^2 \right],$$

e como primeira estrutura de parênteses de Poisson:

$$\{\Psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y)\}_1 = -\delta_{ij}\delta(x-y), \quad \{\Psi_i(x), \Psi_j(y)\}_1 = \{\bar{\Psi}_i(x), \bar{\Psi}_j(y)\}_1 = 0.$$

Denotando

$$(\sum \bar{\Psi} \cdot \Psi)(y) \equiv \left(\sum_{i=1}^2 \bar{\Psi}_i(y) \Psi_i(y) \right),$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi_i(x, t) &= \{\Psi_i(x), \mathcal{H}_3\}_1 \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\{\Psi_i(x), (\sum \bar{\Psi} \cdot \Psi)^2(y)\}_1 + \{\Psi_i(x), (\sum \bar{\Psi}' \Psi')(y)\}_1] \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\{\Psi_i(x), \bar{\Psi}_i(y)\}_1 2\Psi_i(y) \sum \bar{\Psi} \cdot \Psi(y) + \partial_y \Psi_i(y) \partial_y \{\Psi_i(x), \bar{\Psi}_i(y)\}_1] \\ &= -\partial_x^2 \Psi_i(x, t) + 2 \cdot \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j(x, t) \Psi_j(x, t) \right) \cdot \Psi_i(x, t). \end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\Psi}_i(x, t) &= \{\bar{\Psi}_i(x), \mathcal{H}_3\}_1 \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\{\bar{\Psi}_i(x), (\sum \bar{\Psi} \cdot \Psi)^2(y)\}_1 + \{\bar{\Psi}_i(x), (\sum \bar{\Psi}' \Psi')(y)\}_1] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\{\bar{\Psi}_i(x), \Psi_i(y)\}_1 2\bar{\Psi}_i(y) \sum \bar{\Psi} \cdot \Psi(y) + \partial_y \bar{\Psi}_i(y) \partial_y \{\bar{\Psi}_i(x), \Psi_i(y)\}_1] \\ &= \partial_x^2 \bar{\Psi}_i(x, t) - 2 \cdot \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j(x, t) \Psi_j(x, t) \right) \cdot \bar{\Psi}_i(x, t). \end{aligned}$$

Apêndice G

O sistema GNLS₂ e a terceira estrutura de parênteses de Poisson.

Assumimos o Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_1 = \int dx \sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j(x) \Psi_j(x),$$

e a terceira estrutura de parênteses dada no Apêndice D. Então,

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi_1(y, t) &= \{\Psi_1(y), \mathcal{H}_1\}_3 \\ &= \int dx [\bar{\Psi}_1(x) \{\Psi_1(y), \Psi_1(x)\}_3 + \Psi_1(x) \{\Psi_1(y), \bar{\Psi}_1(x)\}_3 + \\ &\quad \bar{\Psi}_2(x) \{\Psi_1(y), \Psi_2(x)\}_3 + \Psi_2(x) \{\Psi_1(y), \bar{\Psi}_2(x)\}_3] \\ &= -\partial_y^2 \Psi_1(y) + 4[\bar{\Psi}_1(y) \Psi_1(y) + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_2(y) \Psi_2(y)] \Psi_1(y) + 2\Psi_2(y) \bar{\Psi}_2(y) \Psi_1(y) + \\ &\quad \int dx \bar{\Psi}_1(x) \partial_x \Psi_1(x) \Psi_1(y) \epsilon(x - y) + \int dx \Psi_1(x) \partial_x [\bar{\Psi}_1(x) \Psi_1(y) + \\ &\quad \frac{1}{2} \bar{\Psi}_2(x) \Psi_2(y)] \epsilon(x - y) + \\ &\quad \int dx \bar{\Psi}_2(x) \frac{1}{2} [\partial_x \Psi_2(x) \Psi_1(y) + \partial_x \Psi_1(x) \Psi_2(y)] \epsilon(x - y). \end{aligned}$$

Depois de algumas simplificações, pode-se obter a seguinte equação

$$\partial_t \Psi_1(y, t) = -\partial_y^2 \Psi_1(y, t) + 2 \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j(y, t) \Psi_j(y, t) \right) \Psi_1(y, t).$$

Desta vez,

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\Psi}_1(x, t) &= \{\bar{\Psi}_1(x), \mathcal{H}_1\}_3 \\ &= \int dy [\bar{\Psi}_1(y) \{\bar{\Psi}_1(x), \Psi_1(y)\}_3 + \Psi_1(y) \{\bar{\Psi}_1(x), \bar{\Psi}_1(y)\}_3 + \\ &\quad \bar{\Psi}_2(y) \{\bar{\Psi}_1(x), \Psi_2(y)\}_3 + \Psi_2(y) \{\bar{\Psi}_1(x), \bar{\Psi}_2(y)\}_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \partial_x^2 \bar{\Psi}_1(x) - 4[\bar{\Psi}_1(x)\Psi_1(x) + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_2(x)\Psi_2(x)]\bar{\Psi}_1(x) - 2\bar{\Psi}_2(x)\bar{\Psi}_1(x)\Psi_2(x) + \\
& \int dy \bar{\Psi}_1(y)[\partial_y \Psi_1(y)\bar{\Psi}_1(x) + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_2(x)\partial_y \Psi_2(y)]\epsilon(x-y) + \\
& \int dy \Psi_1(y)\bar{\Psi}_1(x)\partial_y \bar{\Psi}_1(y)\epsilon(x-y) + \frac{1}{2} \int dy \bar{\Psi}_2(y)\bar{\Psi}_1(x)\partial_y \Psi_2(y)\epsilon(x-y) + \\
& \int dy \Psi_2(y)[\partial_y \bar{\Psi}_2(y)\bar{\Psi}_1(x) + \bar{\Psi}_2(x)\partial_y \bar{\Psi}_1(y)]\epsilon(x-y),
\end{aligned}$$

assim,

$$\partial_t \bar{\Psi}_1(x, t) = \partial_x^2 \bar{\Psi}_1(x, t) - 2\left(\sum_{j=1}^2 \bar{\Psi}_j(x, t)\Psi_j(x, t)\right)\bar{\Psi}_1(x, t).$$

Apêndice H

Condições de compatibilidade para as estruturas $\{ \quad, \quad \}_2$ e $\{ \quad, \quad \}_3$ do sistema GNLS₂.

Verifiquemos a condição de compatibilidade dos parênteses, tomando o conjunto de funções $\{\Psi_1(x), \Psi_1(y)$ e $\Psi_1(z)\}$:

$$\begin{aligned} & \{\Psi_1(x), \{\Psi_1(y), \Psi_1(z)\}_2\}_3 + \{\Psi_1(y), \{\Psi_1(z), \Psi_1(x)\}_2\}_3 + \{\Psi_1(z), \{\Psi_1(x), \Psi_1(y)\}_2\}_3 + \\ & \{\Psi_1(x), \{\Psi_1(y), \Psi_1(z)\}_3\}_2 + \{\Psi_1(y), \{\Psi_1(z), \Psi_1(x)\}_3\}_2 + \{\Psi_1(z), \{\Psi_1(x), \Psi_1(y)\}_3\}_2 = \\ & \frac{1}{8}\Psi_1(z)[\Psi_1(x)\Psi_2(y) - \Psi_2(x)\Psi_1(y)]\epsilon(x-y) \\ & \int dz' \Psi_1(z')\bar{\Psi}_2(z')[\epsilon(y-z')\epsilon(z'-z) - \epsilon(z-z')\epsilon(z'-x)] \\ & + \frac{1}{8}\Psi_1(y)[\Psi_1(z)\Psi_2(x) - \Psi_2(z)\Psi_1(x)]\epsilon(x-z) \\ & \int dz' \Psi_1(z')\bar{\Psi}_2(z')[\epsilon(y-z')\epsilon(z'-z) - \epsilon(x-z')\epsilon(z'-y)] \\ & + \frac{1}{8}\Psi_1(x)[\Psi_1(y)\Psi_2(z) - \Psi_2(y)\Psi_1(z)]\epsilon(y-z) \\ & \int dz' \Psi_1(z')\bar{\Psi}_2(z')[\epsilon(z-z')\epsilon(z'-x) - \epsilon(x-z')\epsilon(z'-y)], \end{aligned}$$

usando a relação

$$\epsilon(x-y) = 2\partial_x^{-1}\delta(x-y)$$

e a notação

$$f(x) \equiv \Psi_1(x)\bar{\Psi}_2(x),$$

temos

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2}\Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_1(z)[- \partial_z^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(y-z) + \partial_z^{-1}\partial_x^{-1}f(x)\delta(x-z) + \\ & \partial_z^{-1}\partial_x^{-1}f(x)\delta(x-z) - \partial_x^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(x-y)] + \\ & \frac{1}{2}\Psi_1(y)\Psi_1(z)\Psi_2(x)[- \partial_y^{-1}\partial_z^{-1}f(z)\delta(y-z) + \partial_x^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(x-y) + \\ & \partial_z^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(y-z) - \partial_z^{-1}\partial_x^{-1}f(x)\delta(x-z)] + \\ & \frac{1}{2}\Psi_1(x)\Psi_1(y)\Psi_2(z)[- \partial_z^{-1}\partial_x^{-1}f(x)\delta(x-z) + \partial_x^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(x-y) + \\ & \partial_y^{-1}\partial_z^{-1}f(z)\delta(y-z) - \partial_x^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(x-y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_1(z)[- \partial_z^{-1}f(z)\frac{1}{2}\epsilon(y-z) + \partial_x^{-1}f(x)\frac{1}{2}\epsilon(z-x) \\
&\quad + \partial_z^{-1}f(z)\frac{1}{2}\epsilon(x-z) - \partial_x^{-1}f(x)\frac{1}{2}\epsilon(y-x)] + \\
&\quad \frac{1}{2}\Psi_1(y)\Psi_1(z)\Psi_2(x)[\partial_x^{-1}f(x)\frac{1}{2}\epsilon(y-x) - \partial_x^{-1}f(x)\frac{1}{2}\epsilon(z-x)] + \\
&\quad \frac{1}{2}\Psi_1(x)\Psi_1(y)\Psi_2(z)[- \partial_z^{-1}f(z)\epsilon(x-z) + \partial_z^{-1}f(z)\frac{1}{2}\epsilon(y-z)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, assumimos

$$z < y < x,$$

e as correspondentes funções:

$$\epsilon(y-x) = \epsilon(z-y) = \epsilon(z-x) = -\epsilon(x-y) = -\epsilon(y-z) = -\epsilon(x-z) = -1.$$

Desta vez, verifiquemos a condição de compatibilidade dos parênteses, tomando o conjunto de funções $\{\Psi_1(x), \Psi_1(y)$ e $\overline{\Psi}_2(z)\}$, isto é

$$\begin{aligned}
&\{\Psi_1(x), \{\Psi_1(y), \overline{\Psi}_2(z)\}_2\}_3 + \{\Psi_1(y), \{\overline{\Psi}_2(z), \Psi_1(x)\}_2\}_3 + \{\overline{\Psi}_2(z), \{\Psi_1(x), \Psi_1(y)\}_2\}_3 + \\
&\{\Psi_1(x), \{\Psi_1(y), \overline{\Psi}_2(z)\}_3\}_2 + \{\Psi_1(y), \{\overline{\Psi}_2(z), \Psi_1(x)\}_3\}_2 + \{\overline{\Psi}_2(z), \{\Psi_1(x), \Psi_1(y)\}_3\}_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Substituindo os parênteses respectivos, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\epsilon(x-y)[\Psi_1(y)\overline{\Psi}_2(z)\Psi_2(x) - \overline{\Psi}_2(z)\Psi_2(y)\Psi_1(x)] \\
&\quad \int dz' \Psi_1(z')\overline{\Psi}_2(z')[\epsilon(z-z')\epsilon(z'-y) - \epsilon(z-z')\epsilon(z'-x)] - \\
&\quad \frac{1}{8}\epsilon(y-z)[\Psi_1(x)\overline{\Psi}_2(z)\Psi_2(y) + \Psi_1(x)\overline{\Psi}_1(z)\Psi_1(y)] \\
&\quad \int dz' \Psi_1(z')\overline{\Psi}_2(z')[\epsilon(x-z')\epsilon(z'-y) - \epsilon(z-z')\epsilon(z'-x)] - \\
&\quad \frac{1}{8}\epsilon(x-z)[\Psi_1(y)\overline{\Psi}_2(z)\Psi_2(x) + \Psi_1(y)\overline{\Psi}_1(z)\Psi_1(x)] \\
&\quad \int dz' \Psi_1(z')\overline{\Psi}_2(z')[\epsilon(z-z')\epsilon(z'-y) - \epsilon(x-z')\epsilon(z'-y)].
\end{aligned}$$

Igualmente, usando a notação

$$f(x) \equiv \Psi_1(x)\overline{\Psi}_2(x),$$

obtem-se

$$= \frac{1}{2}\epsilon(x-y)[\Psi_1(y)\overline{\Psi}_2(z)\Psi_2(x) - \overline{\Psi}_2(z)\Psi_2(y)\Psi_1(x)]$$

$$\begin{aligned}
& [-\partial_z^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(z-y) + \partial_z^{-1}\partial_x^{-1}f(x)\delta(x-z)] + \\
& \frac{1}{2}\epsilon(z-y)[\Psi_1(x)\bar{\Psi}_2(z)\Psi_2(y) + \Psi_1(x)\bar{\Psi}_1(z)\Psi_1(y)] \\
& [-\partial_x^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(x-y) + \partial_z^{-1}\partial_x^{-1}f(x)\delta(z-x)] + \\
& \frac{1}{2}\epsilon(z-x)[\Psi_1(y)\bar{\Psi}_2(z)\Psi_2(x) + \Psi_1(y)\bar{\Psi}_1(z)\Psi_1(x)] \\
& [-\partial_z^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(z-y) + \partial_x^{-1}\partial_y^{-1}f(y)\delta(x-y)].
\end{aligned}$$

Como no caso anterior, assumindo

$$x < y < z,$$

pode-se obter

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2}\Psi_1(x)\bar{\Psi}_1(z)\Psi_1(y)[\partial_z^{-1}f(z)\epsilon(x-z) - \partial_z^{-1}f(z)\epsilon(y-z)] + \\
& \frac{1}{2}\Psi_1(y)\bar{\Psi}_2(z)\Psi_2(x)[\partial_x^{-1}f(x)\epsilon(y-x) - \partial_x^{-1}f(x)\epsilon(z-x)] + \\
& \frac{1}{2}\Psi_1(x)\bar{\Psi}_2(z)\Psi_2(y)[- \partial_x^{-1}f(x)\epsilon(y-x) + \partial_x^{-1}f(x)\epsilon(z-x) + \\
& \partial_z^{-1}f(z)\epsilon(x-z) - \partial_z^{-1}f(z)\epsilon(y-z)] \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Apêndice I

Álgebras de Lie semi-simples

Neste apêndice, apresentamos um breve resumo sobre as álgebras de Lie semi-simples; para uma revisão detalhada veja as referências [31].

Uma álgebra de Lie, g , de um grupo de Lie G possui uma base $T_a, a=1,2,\dots,\dim(g)$ que constitui uma base do plano tangente a G em algum ponto particular, e satisfaz a relação:

$$[T_m, T_n] = i f_{mn}^l T_l, \quad (\text{I.1})$$

onde as f_{mn}^l são chamadas constantes de estrutura da álgebra. Uma escolha usual da base para as álgebras semi-simples, é feita da seguinte maneira. Primeiro: buscamos um conjunto maximal de geradores hermitianos tal que

$$[H_i, H_j] = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, r; \quad r = \text{"rank"} \text{ de } g; \quad (\text{I.2})$$

a subálgebra abeliana de g gerada por $\{H_i, i = 1, \dots, r\}$ é chamada a subálgebra de Cartan (CSA).

Segundo: dada uma escolha de (CSA), os demais geradores constituem autoestados sob a ação adjunta dos H_i :

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad (\text{I.3})$$

o vetor não nulo de dimensão r ; α é uma raiz e E_α o "operador step" correspondente a α . Pode-se mostrar que, para cada raiz α há, exceto um fator escalar, somente um operador E_α satisfazendo (N.3); mais ainda, no caso das álgebras semi-simples, os únicos múltiplos de uma raiz α são $\pm\alpha$. Os demais comutadores são da forma:

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta} & , \text{ se } \alpha + \beta = \text{raiz} \\ 2\alpha \cdot H / \alpha^2 & , \text{ se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & , \text{ nos outros casos} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

as constantes $\epsilon(\alpha, \beta)$, evidentemente anti-simétricas em α e β , podem ser postas a ± 1 , pela escolha das fases dos E_α , se todas as raízes α tem igual comprimento $\alpha^2 = \alpha_i \cdot \alpha_i$, isto é, g é simplesmente ligado. A base $\{H_i, E_\alpha / \alpha = \text{raiz}; i = 1, \dots, r\}$ é denominada base de Cartan-Weyl e os geradores estão normalizados da seguinte maneira

$$\text{tr}(H_i H_j) = \delta_{ij}, \quad \text{tr}(H_i E_\alpha) = 0, \quad \text{tr}(E_\alpha E_\beta) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta, 0}, \quad (\text{I.5})$$

onde tr é uma forma bilinear.

O número total dos pares $\pm\alpha$, em geral excede o "rank" de g , e será conveniente fazer uma escolha de um conjunto de raízes, que forme uma base do espaço de dimensão r . Pode-se mostrar, que uma base $\{\alpha_i\}$ denominada base de raízes simples, pode ser escolhida, de tal modo que qualquer raiz possa se escrever:

$$\alpha = \sum_{i=1}^r m_i^\alpha \alpha_i, \quad (I.6)$$

onde os coeficientes são inteiros de mesmo sinal. Se $m_i^\alpha \geq 0$ ($m_i^\alpha \leq 0$), α é denominada raiz positiva (negativa). A altura de uma raiz é então definida como

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^r m_i^\alpha, \quad (I.7)$$

e a raiz mais alta de uma álgebra de Lie, isto é. a raiz de maior altura pode-se escrever como

$$\psi = \sum_{i=1}^r m_i^\psi \alpha_i, \quad m_i^\psi > 0. \quad (I.8)$$

Os produtos escalares

$$K_{ij} = 2 \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2}, \quad 1 \leq i, j \leq r, \quad (I.9)$$

onde todos os elementos são inteiros, formam uma matriz $r \times r$, chamada matriz de Cartan de g .

Podemos introduzir uma outra base, denominada base de Chevalley, definindo

$$H_a \equiv 2 \frac{\alpha_a \cdot H}{\alpha_a^2}, \quad (I.10)$$

onde α_a é uma raiz simples e as relações de comutação sendo dadas por

$$[H_a, H_b] = 0 \quad (I.11)$$

$$[H_a, E_\alpha] = 2 \frac{\alpha \cdot \alpha_a}{\alpha_a^2} E_\alpha = \left(\sum_{b=1}^r m_b^\alpha K_{ba} \right) E_\alpha, \quad (I.12)$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} (q+1)\varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta} & , \text{ se } \alpha + \beta = \text{ raiz} \\ H_\alpha = 2 \frac{\alpha \cdot H}{\alpha^2} & , \text{ se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & , \text{ nos outros casos.} \end{cases} \quad (I.13)$$

com q sendo o maior inteiro positivo tal que $\beta - q\alpha$ é uma raiz.

Neste caso

$$\text{tr}(H_a H_b) = \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab}.$$

Consideremos uma representação finita de g . Pode-se tomar uma base $\{|\lambda\rangle\}$ na qual a subálgebra de Cartan (CSA), H_i é diagonal

$$H_i |\lambda\rangle = \lambda_i |\lambda\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (I.14)$$

onde o vetor r -dimensional λ , formado pelos autovalores λ_i (pesos) é denominado vetor peso. Para cada raiz α , $2\frac{\alpha \cdot \lambda}{\alpha^2} \cdot H$ agindo em $|\lambda\rangle$, deve tomar valores inteiros, assim

$$2\frac{\alpha \cdot \lambda}{\alpha^2} \in \mathbf{Z} \quad \text{sendo } \alpha \text{ uma raiz.} \quad (\text{I.15})$$

A condição (K.15) define uma rede $\Lambda_W(g)$ chamada rede de pesos de g . Existe uma base de $\Lambda_W(g)$ constituída de pesos fundamentais, definidos por

$$2\frac{\lambda_{(j)} \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, \dots, r.$$

Logo, qualquer peso $\lambda \in \Lambda_W(g)$ é da forma

$$\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_{(i)}, \quad n_i \in \mathbf{Z}.$$

Numa dada representação finita de g , pode-se achar um estado de peso mais alto $|\lambda_o\rangle$ tal que

$$E_\alpha |\lambda_o\rangle = 0, \quad \alpha > 0, \quad (\text{I.16})$$

pois, de outro modo, o estado $E_\alpha |\lambda_o\rangle$ teria peso $\lambda_o + \alpha$, que seria maior que λ_o .

Claramente, o subespaço gerado pela ação de g sobre $|\lambda_o\rangle$ é dado pelos estados da forma

$$E_{-\beta_1} E_{-\beta_2} \dots E_{-\beta_m} |\lambda_o\rangle, \quad (\text{I.17})$$

onde $\beta_i > 0$; cada um deles tem um peso menor. Este deve ser o espaço total se a representação for irredutível.

Na base de Chevalley obtém-se:

$$H_\alpha |\lambda\rangle = 2\frac{\lambda \cdot \alpha}{\alpha^2} |\lambda\rangle = (\text{inteiro}) |\lambda\rangle. \quad (\text{I.18})$$

I.1 Espaços Simétricos Hermitianos

As notações e conteúdo desta subseção seguem [20]. Seja E um elemento especial da álgebra de Lie g definido, em termos dos pesos fundamentais $\lambda_{(a)}$, onde $2\lambda_{(a)} \cdot \alpha_b / \alpha_b^2 = \delta_{ab}$, como

$$E = \frac{2\lambda_{(a)} \cdot H}{\alpha_a^2}. \quad (\text{I.19})$$

O elemento E decompõe a álgebra de Lie $g = \mathcal{K} + \mathcal{M} = \text{Ker}(adE) + \text{Im}(adE)$ onde $\mathcal{K}$ é composto de todos os geradores de g comutativo com E e é dado pelo subespaço $\{H_a, E_\alpha\}$ com α não contendo a raiz simples α_a , enquanto que $\mathcal{M}$ é dado pelo seu complemento ortogonal. Os espaços simétricos hermitianos, estão associados às álgebras de Lie g , com raízes de modo que elas não contêm α_a ou contêm esta uma só vez, isto é

$$\frac{2\lambda_{(a)} \cdot \alpha}{\alpha_a^2} = \pm 1, 0, \quad (\text{I.20})$$

para todas as raízes de g . Isto implica

$$[E, [E, E_\alpha]] = E_\alpha \quad \text{ou} \quad 0 \qquad ((ad(E))^2 = I \quad \text{ou} \quad 0). \tag{I.21}$$

Da identidade de Jacobi pode-se mostrar que [45] g/K é um espaço simétrico, isto é

Apêndice J

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \in \mathcal{K}, \quad [\mathcal{M}, \mathcal{K}] \in \mathcal{M}, \quad [\mathcal{M}, \mathcal{M}] \in \mathcal{K}, \tag{I.22}$$

As álgebras de Lie que satisfazem (K.20) são $su(n)$, $so(2n)$, $sp(n)$, E_6 e E_7 e geram os seguintes espaços simétricos $\frac{su(n+1)}{su(n)xu(1)}$, $\frac{so(2n)}{u(n)}$, $\frac{sp(n)}{u(n)}$, $\frac{E_6}{so(10)xu(1)}$ e $\frac{E_7}{E_6xu(1)}$.

Apêndice J

Álgebras de Kac-Moody "untwisted" afim

Neste apêndice alguns dos formalismos das álgebras de Kac-Moody afim $\hat{g}$ serão apresentadas, mas, somente o mínimo necessário usado na construção dos modelos integráveis estudados por nós. Uma revisão mais completa pode ser achada nas seguintes referências [13, 35]. As notações apresentadas, na parte que corresponde à base de Chevalley, são tomadas do apêndice de [27].

Uma álgebra de Kac-Moody $\hat{g}$ "untwisted" afim à álgebra finita g pode-se realizar como uma extensão da "álgebra de loop" de uma álgebra de Lie finita:

$$\hat{g} = (g \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]) \oplus \mathbb{C}C \oplus \mathbb{C}D, \quad (\text{J.1})$$

onde $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ é a álgebra dos polinômios de Laurent em z e $\mathbb{C}x$ ($x = C, D$) é um subespaço de dimensão 1. Se escrevermos um elemento de $\hat{g}$ como sendo $a_n \equiv (a \otimes z^n)$, onde $a \in g$ e $n \in \mathbb{Z}$, então a álgebra pode-se escrever como

$$[a_n, b_m] = [a, b]_{n+m} + \delta_{m+n,0} (a, b) mC,$$

$$[D, a_n] = na_n,$$

$$[D, D] = [C, D] = [C, C] = [C, a_n] = 0,$$

onde (a, b) é a forma de Killing de g e $[a, b]$ é o parênteses de Lie em g . C é o elemento central de $\hat{g}$, e D é a derivação que induz naturalmente uma "gradação inteira" de $\hat{g}$.

$$\hat{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{g}_i,$$

onde $[D, \hat{g}_i] = i\hat{g}_i$. O operador D define a chamada "gradação homogênea".

Neste ponto, pode-se salientar a existência de uma subálgebra de Heisenberg natural de $\hat{g}$. Introduzindo a decomposição triangular da álgebra finita $g = n_- \oplus h \oplus n_+$, pode-se definir a álgebra de Heisenberg homogênea como a álgebra composta dos elementos $\{h \otimes z^n, C\}$:

$$[a_n, b_m] = \delta_{m+n,0} (a, b) mC.$$

Na base de Cartan-Weyl as relações de comutação serão dadas por:

$$[H_i^m, H_j^n] = mC \delta_{ij} \delta_{m,-n}, \quad (\text{J.2})$$

$$[H_i^m, E_\alpha^n] = \alpha_i E_\alpha^{m+n}, \quad (J.3)$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = \begin{cases} \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}^{m+n} & \text{se } \alpha + \beta = \text{raiz} \\ \frac{2}{\alpha^2} \alpha \cdot H^{m+n} + C m \delta_{m+n,0} & \text{se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & \text{, nos outros casos} \end{cases} \quad (J.4)$$

$$[C, E_\alpha^m] = [C, H_\alpha^m] = 0 \quad (J.5)$$

$$[D, E_\alpha^n] = n E_\alpha^n, \quad [D, H_i^n] = n H_i^n. \quad (J.6)$$

Neste caso, a subálgebra de cartan é formada pelos geradores $\{H_i^{(0)}, C, D\}$ e os operadores step serão: E_α^n associados às raízes $a = (\alpha, 0, n)$, onde α pertence ao conjunto de raízes de g e n são inteiros e H_i^n associados às raízes $n\delta = (0, 0, n)$ com $n \neq 0$.

As raízes positivas serão $(\alpha, 0, n)$ para $n > 0$ ou $n = 0$ e $\alpha > 0$ sendo que as simples destas são $a_i = (\alpha_i, 0, 0)$, $i = 1, \dots, r$ e $\alpha_o = (-\psi, 0, 1)$.

A razão pela qual introduzimos a álgebra de Kac-Moody na base de Cartan-Weyl é que a construção de uma representação em termos de operadores de vértice é usualmente efetuada nesta base [32].

Na base de Chevalley, as relações de comutação para uma álgebra de Kac-Moody "untwisted" afim $\hat{g}$ são

$$[H_a^m, H_b^n] = m C \eta_{ab} \delta_{m+n,0} \quad (J.7)$$

$$[H_a^m, E_\alpha^n] = \sum_{b=1}^r m_b^\alpha K_{ba} E_\alpha^{m+n} \quad (J.8)$$

$$[E_\alpha^m, E_{-\alpha}^n] = \sum_{a=1}^r l_a^\alpha H_a^{m+n} + \frac{2}{\alpha^2} m C \delta_{m+n,0} \quad (J.9)$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = (q+1) \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}^{m+n}; \quad \text{se } \alpha + \beta \text{ é uma raiz} \quad (J.10)$$

$$[C, E_\alpha^m] = [C, H_\alpha^m] = 0 \quad (J.11)$$

$$[D, E_\alpha^n] = n E_\alpha^n, \quad [D, H_a^n] = n H_a^n. \quad (J.12)$$

onde $K_{ab} = 2\alpha_a \cdot \alpha_b / \alpha_b^2$ é a matriz de Cartan da álgebra de Lie finita simples g associada a $\hat{g}$ e gerada por $\{H_a^0, E_\alpha^0\}$. $\eta_{ab} = \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} = \eta_{ba}$, q é o maior inteiro positivo tal que $\beta - q\alpha$ é uma raiz, $\varepsilon(\alpha, \beta)$ são sinais determinadas pela identidade de Jacobi, l_a^α e m_a^α são os inteiros na expansão $\alpha/\alpha^2 = \sum_{a=1}^r l_a^\alpha \alpha_a / \alpha_a^2$ e $\alpha = \sum_{a=1}^r m_a^\alpha \alpha_a$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são as raízes simples de g ($r \equiv \text{"rank"} g$). $\hat{g}$ têm uma forma bilinear simétrica, que pode ser normalizada como

$$Tr(H_a^m H_b^n) = \eta_{ab} \delta_{m+n,0}$$

$$Tr(E_\alpha^m E_\beta^n) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta,0} \delta_{m+n,0}$$

$$Tr(CD) = 1.$$

As gradações inteiras de $\hat{g}$

$$\hat{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}_n$$

são apresentadas em [13]. O operador de gradação d_s satisfazendo

$$[d_s, \hat{g}_n] = n \hat{g}_n; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{J.13})$$

é definida por

$$d_s = H_s + N_s D + \sigma C, \quad H_s = \sum_{a=1}^r s_a \lambda_a^\vee \cdot H^0, \quad H^0 = (H_1^0, \dots, H_r^0) \quad (\text{J.14})$$

onde $(s_0, s_1, \dots, s_r)$ é um vetor de inteiros (primos relativos) não negativos, e $\lambda_a^\vee \equiv 2\lambda_a/\alpha_a^2$ com λ_a e α_a sendo os pesos fundamentais e as raízes simples de g respectivamente. Ademais,

$$N_s = \sum_{i=0}^r s_i m_i^\psi, \quad \psi = \sum_{a=1}^r m_a^\psi \alpha_a, \quad m_0^\psi \equiv 1, \quad (\text{J.15})$$

com ψ sendo a raiz mais alta de g . O valor de σ é arbitrário. Portanto

$$[d_s, H_a^n] = n N_s H_a^n$$

$$[d_s, E_\alpha^n] = \left(\sum_{a=1}^r m_a^\alpha s_a + n N_s \right) E_\alpha^n.$$

Os "operadores step" positivos e negativos de $\hat{g}$ associados às raízes simples são:

$$e_a \equiv E_{\alpha_a}^0, \quad e_o \equiv E_{-\psi}^1, \quad f_a \equiv E_{-\alpha_a}^o \quad \text{e} \quad f_o \equiv E_\psi^{-1}, \quad (\text{J.16})$$

e a sua subálgebra de Cartan gerada por

$$h_a \equiv H_a^0, \quad h_0 \equiv - \sum_{a=1}^r l_a^\psi H_a^0 + \frac{2}{\psi^2} C \quad \text{e} \quad D, \quad (\text{J.17})$$

com l_a^ψ dado em (K.24); então eles satisfazem

$$[d_s, h_i] = [d_s, D] = 0; \quad [d_s, e_i] = s_i e_i; \quad [d_s, f_i] = -s_i f_i; \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (\text{J.18})$$

Uma classe importante das representações das álgebras de Kac-Moody são as chamadas "representações integráveis de peso mais alto" [13], $L(\mathbf{s})$, onde os geradores de Chevalley são localmente nilpotentes. Elas são definidas em termos de um estado de peso mais alto $|\lambda_s\rangle$ rotulado pela gradação s de $\hat{g}$. Pode ser mostrado que $L(\mathbf{s})$ é irredutível e que $|\lambda_s\rangle$ é o único vetor de peso mais alto de $L(\mathbf{s})$. Esse estado é aniquilado pelos geradores de grau positivo

$$\hat{g}_+ |\lambda_s\rangle = 0, \quad (\text{J.19})$$

e é um autoestado dos geradores da subálgebra $\hat{g}_o$

$$h_i |\lambda_s\rangle = s_i |\lambda_s\rangle \quad (\text{J.20})$$

$$f_i |\lambda_s\rangle = 0; \quad \text{para qualquer } i \text{ com } s_i = 0 \quad (\text{J.21})$$

$$d_s |\lambda_s\rangle = \eta_s |\lambda_s\rangle \quad (\text{J.22})$$

$$C |\lambda_s\rangle = \frac{\psi^2}{2} \left(\sum_{i=0}^r l_i^\psi s_i \right) |\lambda_s\rangle, \quad (J.23)$$

onde l_i^ψ é dado por

$$\frac{\psi}{\psi^2} = \sum_{a=1}^r l_a^\psi \frac{\alpha_a}{\alpha_a^2}; \quad l_0^\psi = 1. \quad (J.24)$$

notamos que o autovalor de d_s é arbitrário, e d_s pode ser diagonalizado agindo sobre $L(s)$. O autovalor do elemento central C na representação $|\lambda_s\rangle$, é conhecido como o nível da representação

$$c = \frac{\psi^2}{2} \left(\sum_{i=0}^r l_i^\psi s_i \right), \quad (J.25)$$

em particular, as "representações integráveis de peso mais alto" com $c = 1$ são conhecidas como as "representações básicas".

Os estados de peso mais alto $|\lambda_s\rangle$ podem-se realizar como

$$|\lambda_s\rangle \equiv \bigotimes_{i=0}^r |\hat{\lambda}_i\rangle^{\otimes s_i}, \quad (J.26)$$

onde $|\hat{\lambda}_i\rangle$ são os estados de peso mais alto das representações fundamentais de $\hat{g}$, denotados por $L(i)$, onde $s_j = \delta_{ji}$ (denotemos por d_i a sua correspondente derivação) e $\hat{\lambda}_i$ são os pesos fundamentais correspondentes de $\hat{g}$. Isto é [32]

$$\hat{\lambda}_0 = \left(0, \frac{\psi^2}{2}, 0 \right) \quad (J.27)$$

$$\hat{\lambda}_a = \left(\lambda_a, \frac{l_a^\psi \psi^2}{2}, 0 \right), \quad (J.28)$$

onde λ_a , $a = 1, 2, \dots, r$ são os pesos fundamentais da álgebra de Lie finita g associada a $\hat{g}$, l_a^ψ é definido em (K.24), e as componentes são os autovalores de H_a^0 , C e D respectivamente, assim

$$H_a^0 |\hat{\lambda}_0\rangle = 0; \quad C |\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{\psi^2}{2} |\hat{\lambda}_0\rangle \quad (J.29)$$

$$H_b^0 |\hat{\lambda}_a\rangle = \delta_{a,b} |\hat{\lambda}_a\rangle; \quad C |\hat{\lambda}_a\rangle = \frac{\psi^2}{2} l_a^\psi |\hat{\lambda}_0\rangle \quad (J.30)$$

e

$$D |\hat{\lambda}_i\rangle = 0. \quad (J.31)$$

Note-se que, em cada uma das $r + 1$ representações fundamentais de $\hat{g}$, os (únicos) estados de peso mais alto satisfazem

$$h_j |\hat{\lambda}_i\rangle = \delta_{ij} |\hat{\lambda}_i\rangle \quad (J.32)$$

$$e_j |\hat{\lambda}_i\rangle = 0, \quad \forall j \quad (J.33)$$

$$f_j |\hat{\lambda}_i\rangle = 0, \quad \text{para } j \neq i \quad (J.34)$$

$$f_j^2 |\hat{\lambda}_i\rangle = 0. \quad (J.35)$$

Assim, os geradores e_i e f_i são nilpotentes ao atuarem sobre $|\lambda_s\rangle$, e estas representações são na verdade integráveis.

Apêndice K

A construção dos "operadores de vértice" homogêneos

As representações das álgebras de Kac-Moody do tipo "operadores de vértice" são apresentadas, por exemplo em [13,32,33]. A construção dos operadores de vértice homogêneos é baseada considerando a sub-álgebra de Heisenberg homogênea (veja o Apêndice J). No que segue abordamos os tratamentos apresentados em [13, 36].

Consideremos

$$g = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C} E_{\alpha} \right), \quad (\text{K.1})$$

sendo g uma álgebra de Lie finita simples do tipo A_l, D_l ou E_l , cujas relações de comutação são dadas por

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0, & \text{se } h, h' \in \mathfrak{h} \\ [h, E_{\alpha}] &= (h | \alpha) E_{\alpha}, & \text{se } h \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta \\ [E_{\alpha}, E_{-\alpha}] &= -\alpha, & \text{se } \alpha \in \Delta \\ [E_{\alpha}, E_{\beta}] &= 0, & \text{se } \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\} \\ [E_{\alpha}, E_{\beta}] &= \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta, \end{aligned}$$

onde $\Delta = \{\alpha \in Q / (\alpha | \alpha) = 2\}$ e Q é a rede das raízes; $(\cdot | \cdot)$ é a forma simétrica invariante de g , normalizada como segue:

$$(h | E_{\alpha}) = 0, \text{ se } h \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta; \quad (E_{\alpha}, E_{\beta}) = -\delta_{\alpha, -\beta}, \text{ se } \alpha, \beta \in \Delta.$$

Seja

$$\hat{g} = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} g + \mathbb{C}C + \mathbb{C}D, \quad (\text{K.2})$$

a álgebra afim do tipo $A_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ ou $E_n^{(1)}$, respectivamente.

Consideremos a álgebra associativa comutativa (complexa)

$$V = S \left(\bigoplus_{j < 0} (t^j \otimes \mathfrak{h}) \right) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Q], \quad (\text{K.3})$$

onde S representa a álgebra simétrica e $\mathbb{C}[Q]$ a álgebra de grupo da rede formada pelas raízes $Q \subset \mathfrak{h}$ de g . Considere $\alpha \rightarrow e^\alpha$ denotando a inclusão de $Q \subset \mathbb{C}[Q]$ (a base do espaço vetorial $\mathbb{C}[Q]$ é formado pelos elementos e^α , $\alpha \in Q$, e, define-se o seguinte produto da álgebra de grupo "twisted" $e^\alpha e^\beta = \varepsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha+\beta}$ [Kac 46]); $u^{(n)}$ representa $t^n \otimes u$ ($n \in \mathbb{Z}$, $u \in g$). Para $n > 0$ e $u \in \mathfrak{h}$, denotemos por $u(-n)$ o operador de multiplicação por $u^{(-n)}$ sobre V . Para $n \geq 0$ e $u \in \mathfrak{h}$, denotemos por $u(n)$ a derivação da álgebra V definida pela fórmula

$$u(n) \left(v^{(-m)} \otimes e^\alpha \right) = n \delta_{n,-m} (u | v) \otimes e^\alpha + \delta_{n,0} (\alpha | u) v^{(-m)} \otimes e^\alpha \quad (\text{K.4})$$

Escolhendo como base dual u_i e u^i de $\mathfrak{h}$, definimos o operador D_o sobre V pela fórmula

$$D_o = \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} u_i(0) u^i(0) + \sum_{n \geq 1} u_i(-n) u^i(n) \right). \quad (\text{K.5})$$

Além disso, para $\alpha \in Q$, definimos o operador sinal c_α :

$$c_\alpha (f \otimes e^\beta) = \varepsilon(\alpha, \beta) f \otimes e^\beta. \quad (\text{K.6})$$

Finalmente, para $\alpha \in \Delta \subset Q$ introduzimos o **operador de vértice**

$$\Gamma_\alpha(z) = \exp \left(\sum_{j \geq 1} \frac{z^j}{j} \alpha(-j) \right) \exp \left(- \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \alpha(j) \right) e^\alpha z^{\alpha(0)} c_\alpha, \quad (\text{K.7})$$

onde z é visto como um parâmetro. Expandindo em potências de z :

$$\Gamma_\alpha(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Gamma_\alpha^{(j)} z^{-j-1}, \quad (\text{K.8})$$

obtemos uma seqüência de operadores $\Gamma_\alpha^{(j)}$ sobre V . Agora podemos enunciar o resultado.

Teorema: O mapeamento $\sigma : \hat{g} \rightarrow \text{End}(V)$ definido por

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow 1, \\ u^{(n)} &\longrightarrow u(n), \quad \text{para } u \in \mathfrak{h}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ E_\alpha^{(n)} &\longrightarrow \Gamma_\alpha^{(n)}, \quad \text{para } \alpha \in \Delta, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ D &\longrightarrow -D_o, \end{aligned} \quad (\text{K.9})$$

define a representação básica da álgebra afim $\hat{g}$ sobre V ; onde $\text{End}(V)$ denota o espaço de mapeamentos lineares de um espaço vetorial V sobre si próprio.

A prova deste teorema é apresentada em [13].

Neste ponto, é importante apresentar algumas propriedades relacionadas à sub-álgebra de Heisenberg [36].

Seja $\mathcal{H}[1]$ a sub-álgebra de Heisenberg de $\hat{sl}_2$ (associada à gradação homogênea) com a base $\{u^{(n)}, n \in \mathbb{Z}; C\}$, e as relações de comutação

$$[C, u^{(n)}] = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (\text{K.10})$$

$$[u^{(m)}, u^{(n)}] = m\delta_{m,-n}C \quad (m, n \in \mathbf{Z}). \quad (\text{K.11})$$

Introduzimos o espaço de Fock $B = \mathbf{C}[x_1, x_2, \dots]$; este é o espaço dos polinômios com infinitamente muitas variáveis $x_1, x_2, \dots$

Dados $\mu, c \in \mathbf{R}$, definimos a seguinte representação de $\mathcal{H}[1]$ em B ($n \in \mathbf{N}$):

$$u^{(n)} = \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (\text{K.12})$$

$$u^{(-n)} = c\epsilon_n^{-1}nx_n, \quad (\text{K.13})$$

$$u^{(0)} = \mu I, \quad (\text{K.14})$$

$$C = cI. \quad (\text{K.15})$$

É fácil de se ver que estes operadores satisfazem (K.10)-(K.11). Os ϵ_n são fatores de escala reais arbitrários.

Lema. Se $C \neq 0$, então a representação (K.12)-(K.15) é irredutível.

O polinômio $\nu = 1$, o qual é chamado de vetor de vácuo de B , tem as propriedades

$$u^{(n)}(\nu) = 0 \quad \text{para } n > 0, \quad (\text{K.16})$$

$$u^{(0)}(\nu) = \mu\nu, \quad (\text{K.17})$$

$$C(\nu) = c\nu. \quad (\text{K.18})$$

Proposição 1. Seja V_o a representação de $\mathcal{H}[1]$ que admite um vetor não nulo ν satisfazendo (16)-(18) com $c \neq 0$. Então os monômios da forma

$$[u^{(-1)}]^{k_1} \dots [u^{(-n)}]^{k_n}(\nu) \quad (k_i \in \mathbf{Z}_+),$$

são linearmente independentes. Se estes monômios expandem V_o , então V_o é equivalente à representação de $\mathcal{H}[1]$ em B dada pelas equações (K.12)-(K.15). Em particular, este é o caso se V_o for irredutível.

Definimos um operador antilinear w agindo sobre $\mathcal{H}$ como

$$w(u^{(n)}) = u^{(-n)} \equiv [u^{(n)}]^\dagger, \quad w(C) = C.$$

Proposição 2. Seja V_o como na proposição 1. Então V_o tem uma única forma Hermiteana $\langle \cdot | \cdot \rangle$ que é contravariante com respeito a w , e tal que $\langle \nu | \nu \rangle = 1$ para o vetor de vácuo ν . Os distintos monômios $[u^{(-1)}]^{k_1} \dots [u^{(-n)}]^{k_n}(\nu)$ ($k_i \in \mathbf{Z}_+$) formam uma base ortogonal com respeito a $\langle \cdot | \cdot \rangle$. As normas destes monômios estão dadas por

$$\left\langle [u^{(-1)}]^{k_1} \dots [u^{(-n)}]^{k_n} \nu \mid [u^{(-1)}]^{k_1} \dots [u^{(-n)}]^{k_n} \nu \right\rangle = \prod_{j=1}^n k_j! (cj)^{k_j}.$$

Corolário. A forma Hermiteana em V_o tal que $\langle \nu | \nu \rangle = 1$ é positivo-definida se e somente se $c > 0$.

Note-se que σ é a representação básica de $\hat{g}$ com o estado de peso mais alto dado por $1 \otimes 1$.

K.1 Cálculos usando "operadores de vértice" homogêneos

Definindo

$$\Gamma_{\alpha}^{\pm}(z) = \exp \sum_{j \geq 1} \frac{\alpha(\pm j)}{\mp j} z^{\mp j}, \quad \Gamma_{\alpha}^0(z) = e^{\alpha} z^{\alpha(0)} c_{\alpha}. \quad (\text{K.19})$$

Pode-se obter as seguintes relações:

$$\Gamma_{\alpha}^{-}(z_1) \Gamma_{\beta}^{+}(z_2) = \Gamma_{\beta}^{+}(z_2) \Gamma_{\alpha}^{-}(z_1) \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{(\alpha|\beta)}, \quad (\text{K.20})$$

$$\Gamma_{\alpha}^0(z_1) \Gamma_{\beta}^0(z_2) = e^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha(0)} z_2^{\beta(0)} z_1^{(\alpha|\beta)} c_{\alpha} c_{\beta} \varepsilon(\alpha, \beta), \quad (\text{K.21})$$

onde $\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^m$, $m \in \mathbf{Z}$, com $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| \leq 1$.

De (K.20) e (K.21) segue-se:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha}(z_1) \Gamma_{\beta}(z_2) &= \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{(\alpha|\beta)} z_1^{(\alpha|\beta)} \varepsilon(\alpha, \beta) \exp \left[\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \left(z_1^j \alpha(-j) + z_2^j \beta(-j) \right) \right] \\ &\quad \exp \left[- \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \left(z_1^{-j} \alpha(j) + z_2^{-j} \beta(j) \right) \right] e^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha(0)} z_2^{\beta(0)} c_{\alpha} c_{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{K.22})$$

Se $z \equiv z_1 = z_2$ e $\alpha = \beta$, de (K.22) obtemos o seguinte resultado importante

$$\Gamma_{\alpha}(z) \Gamma_{\alpha}(z) = 0,$$

ou

$$[\Gamma_{\alpha}(z)]^n = 0, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (\text{K.23})$$

Fórmula muito útil:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \dots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) (1 \otimes 1) &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)} \cdot \\ &\quad \left(\prod_{i=1}^N \exp \sum_{j \in \mathbf{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \otimes \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) \end{aligned} \quad (\text{K.24})$$

Prova. Provaremos por indução:

para $N = 1$

$$\Gamma_{\alpha}(z_1) (1 \otimes 1) = \exp \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^j}{j} \alpha(-j) \exp - \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^{-j}}{j} \alpha(j) e^{\alpha} z_1^{\alpha(0)} c_{\alpha} ; \quad (\text{K.25})$$

temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} c_{\alpha} (1 \otimes 1) &= \varepsilon(\alpha, 0) 1 \otimes 1, \quad \text{convenção: } \varepsilon(\alpha, 0) \equiv 1 \\ &= 1 \otimes 1, 17 \end{aligned} \quad (\text{K.26})$$

$$\begin{aligned} z_1^{\alpha(0)} (1 \otimes 1) &= 1 \otimes \left(e^{\ln z_1 \alpha(0)} \right) 1 \\ &= 1 \otimes 1. \end{aligned} \quad (\text{K.27})$$

onde usamos

$$e^\alpha (1 \otimes 1) \equiv e^\alpha (1 \otimes e^\alpha) = 1 \otimes e^\alpha \quad (\text{K.28})$$

De (N.4) temos

$$u(n) \left(v^{(0)} \otimes e^\alpha \right) \equiv u(n) (1 \otimes e^\alpha) = n \delta_{n,0} (u | v) \otimes e^\alpha + \delta_{n,0} (\alpha | u) v^{(0)} \otimes e^\alpha$$

então para $(n > 0)$

$$u(n) (1 \otimes 1) = 0. \quad (\text{K.29})$$

Portanto

$$\begin{aligned} \exp - \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^{-j}}{j} \alpha(j) (1 \otimes e^\alpha) &= \left[\left(1 - \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^{-j}}{j} \alpha(j) + \dots \right) 1 \right] \otimes e^\alpha \\ &= 1 \otimes e^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{K.30})$$

Além disso

$$\exp \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^j}{j} \alpha(-j) (1 \otimes e^\alpha) = \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^j}{j} \alpha(-j) \otimes e^\alpha.$$

Deste modo

$$\Gamma_{\alpha_1}(z_1) (1 \otimes 1) = \left(\exp \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^j}{j} \alpha_1(-j) \right) \otimes e^{\alpha_1}, \quad (\text{K.31})$$

que é exatamente igual a equação (K.24) com $N = 1$.

Assumiremos agora que (K.24) é verdadeiro para um dado N , e escreveremos (K.24) como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \dots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) (1 \otimes 1) &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i | \alpha_j)}. \\ \left(\prod_{i=1}^N \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) (1 \otimes 1). \end{aligned} \quad (\text{K.32})$$

Multiplicando (K.32) por $\Gamma_{\alpha_{N+1}}(z_{N+1})$ e usando repetidamente as relações (K.20), (K.21) e (K.25)-(K.30) podemos obter

$$\Gamma_{\alpha_{N+1}}(z_{N+1}) \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \dots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) (1 \otimes 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i | \alpha_j)}.$$

$$\prod_{1 \leq k < N+1} \varepsilon(\alpha_k, \alpha_{N+1}) (z_k - z_{N+1})^{(\alpha_k | \alpha_{N+1})} \cdot \left(\exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_{N+1}^j}{j} \alpha_{N+1}(-j) \right) e^{\alpha_{N+1}}.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{i=1}^N \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) (1 \otimes 1) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq N+1} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i | \alpha_j)} \left(\prod_{i=1}^{N+1} \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \cdot \\
& \exp \left(\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \right) (1 \otimes 1) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq N+1} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i | \alpha_j)} \left(\prod_{i=1}^{N+1} \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \otimes \exp \left(\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \right),
\end{aligned}$$

que é exatamente a expressão (K.24) escrita para $N + 1$. Deste modo a equação (K.24) foi provada.

Além disso fazendo a correspondência

$$|\lambda_o\rangle \longleftrightarrow 1 \otimes 1,$$

onde $|\lambda_o\rangle$ denota o estado de peso mais alto da representação, podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \langle \lambda_o | \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \dots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) | \lambda_o \rangle = \\
& \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i \neq 0 \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i | \alpha_j)} & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \end{cases} \quad (\text{K.33})
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_o | \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) &= \langle \lambda_o | \left(1 + \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) + \dots \right) \\
&= \langle \lambda_o |,
\end{aligned}$$

e

$$\langle \lambda_o | \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i \neq 0 \\ \langle \lambda_o |, & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Apêndice L

Elementos de matriz usando a representação de "operadores de vértice" da álgebra $\widehat{sl}_{r+1}$

Fazendo a correspondência:

$$F_i \longrightarrow \nu_i \Gamma_{-\beta_i}(\nu_i),$$

$$G_i \longrightarrow \rho_i \Gamma_{\beta_i}(\rho_i).$$

Pode-se escrever

$$\begin{aligned} C_{i_1 \dots i_{l_1}, j_{k_1} \dots j_{k_n}} &= \langle \lambda_o | F_{i_{l_1}} \dots F_{i_{l_n}} G_{j_{k_1}} \dots G_{j_{k_n}} | \lambda_o \rangle \\ &= \nu_{i_{l_1}} \dots \nu_{i_{l_n}} \rho_{j_{k_1}} \dots \rho_{j_{k_n}} \langle \lambda_o | \Gamma_{-\beta_{i_{l_1}}}(\nu_{i_{l_1}}) \dots \Gamma_{-\beta_{i_{l_n}}}(\nu_{i_{l_n}}) \Gamma_{\beta_{j_{k_1}}}(\rho_{j_{k_1}}) \dots \Gamma_{\beta_{j_{k_n}}}(\rho_{j_{k_n}}) | \lambda_o \rangle \\ &= \{ \delta_{\vec{\sigma}, \beta_{j_{k_1}} + \dots + \beta_{j_{k_n}} - \beta_{i_{l_1}} - \dots - \beta_{i_{l_n}}} \nu_{i_{l_1}} \dots \nu_{i_{l_n}} \rho_{j_{k_1}} \dots \rho_{j_{k_n}} \cdot \\ &\quad \prod_{1 \leq a < b \leq n} \epsilon(\beta_{j_{k_a}}, \beta_{j_{k_b}}) \epsilon(-\beta_{i_{l_a}}, -\beta_{i_{l_b}}) (\rho_{j_{k_a}} - \rho_{j_{k_b}})^{(\beta_{j_{k_a}} | \beta_{j_{k_b}})} \cdot \\ &\quad (\nu_{i_{l_a}} - \nu_{i_{l_b}})^{(\beta_{i_{l_a}} | \beta_{i_{l_b}})} \} / \{ \prod_{1 \leq a < b \leq n} \epsilon(-\beta_{i_{l_a}}, \beta_{j_{k_b}}) (\nu_{i_{l_a}} - \rho_{j_{k_b}})^{(\beta_{i_{l_a}} | \beta_{j_{k_b}})} \}, \end{aligned}$$

onde usamos a equação 33 do apêndice K.

$$\begin{aligned} C_{i_{l_1} \dots i_{l_n}, j_{k_1} \dots j_{k_{n+1}}}^+ &= \langle \lambda_o | E_{-\beta_i}^{(1)} F_{i_{l_1}} \dots F_{i_{l_n}} G_{j_{k_1}} \dots G_{j_{k_{n+1}}} | \lambda_o \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\nu \nu \nu_{i_{l_1}} \dots \nu_{i_{l_n}} \rho_{j_{k_1}} \dots \rho_{j_{k_{n+1}}} \cdot \\ &\quad \langle \lambda_o | \Gamma_{-\beta_i}(\nu) \Gamma_{-\beta_{i_{l_1}}}(\nu_{i_{l_1}}) \dots \Gamma_{-\beta_{i_{l_n}}}(\nu_{i_{l_n}}) \Gamma_{\beta_{j_{k_1}}}(\rho_{j_{k_1}}) \dots \Gamma_{\beta_{j_{k_{n+1}}}}(\rho_{j_{k_{n+1}}}) | \lambda_o \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\nu \nu \nu_{i_{l_1}} \dots \nu_{i_{l_n}} \rho_{j_{k_1}} \dots \rho_{j_{k_{n+1}}} \delta_{\vec{\sigma}, \beta_{j_{k_1}} + \dots + \beta_{j_{k_{n+1}}} - \beta_i - \beta_{i_{l_1}} - \dots - \beta_{i_{l_n}}} \cdot \\ &\quad \{ \prod_{0 \leq a \leq n} \epsilon(-\beta_i, -\beta_{i_{l_a}}) (\nu - \nu_{i_{l_a}})^{(\beta_i | \beta_{i_{l_a}})} \prod_{0 < b \leq n+1} \epsilon(-\beta_i, \beta_{j_{k_b}}) (\nu - \rho_{j_{k_b}})^{-(\beta_i | \beta_{j_{k_b}})} \cdot \\ &\quad \prod_{0 \leq a < b \leq n} \epsilon(-\beta_{i_{l_a}}, -\beta_{i_{l_b}}) (\nu_{i_{l_a}} - \nu_{i_{l_b}})^{(\beta_{i_{l_a}} | \beta_{i_{l_b}})} \prod_{0 \leq a < b \leq n+1} \epsilon(\beta_{j_{k_a}}, \beta_{j_{k_b}}) \cdot \end{aligned}$$

$$(\rho_{j_{k_a}} - \rho_{j_{k_b}})^{-\left(\beta_{j_{k_a}}|\beta_{j_{k_b}}\right)} \} / \{ \prod_{\substack{0 \leq a \leq b \leq n \\ a \neq n+1}} \epsilon(-\beta_{i_{l_a}}, \beta_{j_{k_b}}) (\nu_{i_{l_a}} - \rho_{j_{k_b}})^{\left(\beta_{i_{l_a}}|\beta_{j_{k_b}}\right)} \}.$$

Na relação anterior aparece a integração de contorno seguinte:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint d\nu. \nu \frac{\prod_{0 < a \leq n} \epsilon(-\beta_i, -\beta_{i_{l_a}}) (\nu - \nu_{i_{l_a}})^{\left(\beta_i|\beta_{i_{l_a}}\right)}}{\prod_{0 < b \leq n+1} \epsilon(-\beta_i, \beta_{j_{k_b}}) (\nu - \rho_{j_{k_b}})^{\left(\beta_i|\beta_{j_{k_b}}\right)}}.$$

Igualmente temos

$$\begin{aligned} C_{i_1 \dots i_{n+1}, j_{k_1} \dots j_{k_n}}^- &= \langle \lambda_o | E_{\beta_i}^{(1)} F_{i_{l_1}} \dots F_{i_{l_{n+1}}} G_{j_{k_1}} \dots G_{j_{k_n}} | \lambda_o \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\rho. \rho \nu_{i_{l_1}} \dots \nu_{i_{l_{n+1}}} \rho_{j_{k_1}} \dots \rho_{j_{k_n}} \cdot \\ &\langle \lambda_o | \Gamma_{\beta_i}(\rho) \Gamma_{-\beta_{i_{l_1}}}(\nu_{i_{l_1}}) \dots \Gamma_{-\beta_{i_{l_{n+1}}}}(\nu_{i_{l_{n+1}}}) \Gamma_{\beta_{j_{k_1}}}(\rho_{j_{k_1}}) \dots \Gamma_{\beta_{j_{k_n}}}(\rho_{j_{k_n}}) | \lambda_o \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\rho. \rho \nu_{i_{l_1}} \dots \nu_{i_{l_{n+1}}} \rho_{j_{k_1}} \dots \rho_{j_{k_n}} \delta_{\vec{\sigma}, \beta_i + \beta_{j_{k_1}} + \dots + \beta_{j_{k_n}} - \beta_{i_{l_1}} - \dots - \beta_{i_{l_{n+1}}}} \cdot \\ &\{ \prod_{0 < a \leq n} \epsilon(\beta_i, \beta_{j_{k_a}}) (\rho - \rho_{j_{k_a}})^{\left(\beta_i|\beta_{j_{k_a}}\right)} \prod_{0 < b \leq n+1} \epsilon(\beta_i, \beta_{i_{l_b}}) (\rho - \nu_{i_{l_b}})^{-\left(\beta_i|\beta_{i_{l_b}}\right)} \cdot \\ &\prod_{0 \leq a < b \leq n} \epsilon(\beta_{j_{k_a}}, \beta_{j_{k_b}}) (\rho_{j_{k_a}} - \rho_{j_{k_b}})^{\left(\beta_{j_{k_a}}|\beta_{j_{k_b}}\right)} \prod_{0 \leq a < b \leq n+1} \epsilon(-\beta_{i_{l_a}}, -\beta_{i_{l_b}}) \cdot \\ &(\nu_{i_{l_a}} - \nu_{i_{l_b}})^{-\left(\beta_{i_{l_a}}|\beta_{i_{l_b}}\right)} \} / \{ \prod_{\substack{0 \leq a \leq b \leq n \\ b \neq n+1}} \epsilon(-\beta_{i_{l_a}}, \beta_{j_{k_b}}) (\nu_{i_{l_a}} - \rho_{j_{k_b}})^{\left(\beta_{i_{l_a}}|\beta_{j_{k_b}}\right)} \}. \end{aligned}$$

Neste caso a integração de contorno correspondente é

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint d\rho. \rho \frac{\prod_{0 < a \leq n} \epsilon(\beta_i, -\beta_{j_{k_a}}) (\rho - \rho_{j_{k_a}})^{\left(\beta_i|\beta_{j_{k_a}}\right)}}{\prod_{0 < b \leq n+1} \epsilon(\beta_i, \beta_{i_{l_b}}) (\rho - \nu_{i_{l_b}})^{\left(\beta_i|\beta_{i_{l_b}}\right)}}.$$

Apêndice M

Elementos de matriz usando "operadores de vértice" homogêneos no caso $\widehat{sl}_2$

No caso da álgebra afim $\widehat{sl}_2$, sejam

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e escolhamos a seguinte base dual de $\widehat{sl}_2$

$$\{t^n \alpha, t^n e, t^n f, C, D\}, \quad e \quad \left\{ \frac{1}{2} t^{-n} \alpha, t^{-n} f, t^{-n} e, D, C \right\}.$$

Temos

$$Q = \mathbf{Z}\alpha, \quad (\alpha | \alpha) = 2, \quad \varepsilon(\alpha, \alpha) = \varepsilon(-\alpha, -\alpha) = -1, \quad \varepsilon(-\alpha, \alpha) = \varepsilon(\alpha, -\alpha) = 1$$

(usamos o "gauge fixing" de [32, 34] para $\varepsilon(\alpha, \beta)$).

Seja $q = e^\alpha$, identificamos $\mathbf{C}[Q]$ com $\mathbf{C}[q, q^{-1}]$. Assim, a construção dos operadores de vértice homogêneos pode ser descrita como segue:

$$L(\lambda_o) = \mathbf{C}[x_1, x_2, \dots; q, q^{-1}];$$

$$\alpha^{(n)} \mapsto 2 \frac{\partial}{\partial x_n} \quad e \quad \alpha^{(-n)} \mapsto n x_n \quad \text{para } n > 0, \quad \alpha^{(0)} \mapsto 2q \frac{\partial}{\partial q};$$

$$C \mapsto 1, \quad D \mapsto - \left(q \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 - \sum_{n \geq 1} n x_n \frac{\partial}{\partial x_n};$$

$$E(z) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} E_{\pm}^{(n)} z^{-n-1} \mapsto \Gamma_{\pm}(z)$$

onde

$$\Gamma_{\pm}(z) = \exp \left(\pm \sum_{j \geq 1} z^j x_j \right) \exp \left(\mp 2 \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) q^{\pm 1} z^{\pm 2q \frac{\partial}{\partial q}} c_{\pm \alpha},$$

(notemos que $z^{\pm 2q \frac{\partial}{\partial q}} (q^n) = z^{\pm 2n} q^n$).

Sendo

$$G_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_i^{-n} E_+^{(n)}, \quad F_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \nu_i^{-n} E_-^{(n)};$$

pode-se fazer a seguinte correspondência

$$G_i \longrightarrow \rho_i \Gamma_+(\rho_i), \quad F_i \longrightarrow \nu_i \Gamma_-(\nu_i).$$

Então, podemos usar a equação (K.33) para calcular os elementos de matriz usados no capítulo 7.

$$\langle \lambda_o | \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \dots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) | \lambda_o \rangle =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i \neq 0 \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i | \alpha_j)} & \text{se } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Deste modo temos dois tipos de operadores, isto é, $\Gamma_{\pm}(z)$, associadas a α e $-\alpha$ respectivamente. Devemos ter um número par de Γ 's na equação (K.33) no sentido de ter uma quantidade não nula para $\langle \lambda_o | \Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \dots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) | \lambda_o \rangle$; assim escolhemos $2N$ operadores, tais que N operadores correspondem a α e os restantes N operadores correspondem a $-\alpha$:

Calcularemos algumas componentes matriciais que usamos na construção 1-sóliton e 2-sóliton do sistema NLS:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_o | G_i F_j | \lambda_o \rangle &= \langle \lambda_o | F_j G_i | \lambda_o \rangle = \rho_i \nu_j \langle \lambda_o | \Gamma_+(\rho_i) \Gamma_-(\nu_j) | \lambda_o \rangle \\ &= \rho_i \nu_j \frac{\varepsilon(+, -)}{(\rho_i - \nu_j)^2} \\ &= \frac{\rho_i \nu_j}{(\rho_i - \nu_j)^2}. \end{aligned}$$

Como caso especial calculemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_o | E_-^1 G_i | \lambda_o \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz. z \rho_i \langle \lambda_o | \Gamma_-(z) \Gamma_+(\rho_i) | \lambda_o \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \rho_i \oint dz. \frac{z}{(z - \rho_i)^2} \\ &= \rho_i, \end{aligned}$$

onde usamos

$$E_-^1 = \oint dz. z \Gamma_-(z),$$

cujo contorno é um círculo em torno da origem.

O mesmo procedimento pode ser usado para calcular o seguinte:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_o | E_-^1 G_1 F_2 G_2 | \lambda_o \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz. z. \rho_1. \nu_2. \rho_2 \langle \lambda_o | \Gamma_-(z) \Gamma_+(\rho_1) \Gamma_-(\nu_2) \Gamma_+(\rho_2) | \lambda_o \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz. z. \rho_1. \nu_2. \rho_2 \varepsilon(+, -) \varepsilon(+, +) \varepsilon(+, -) \varepsilon(-, +) \varepsilon(-, -) \varepsilon(+, -) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2 (\nu_2 - z)^2}{(\rho_2 - \nu_2)^2 (\nu_2 - \rho_1)^2 (\rho_2 - z)^2 (\rho_1 - z)^2} \\
&= \rho_1 \nu_2 \rho_2 \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{(\rho_2 - \nu_2)^2 (\nu_2 - \rho_1)^2}.
\end{aligned}$$

Os elementos matriciais restantes podem ser calculados similarmente. Fornecemos alguns deles:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_o | E_-^1 G_i | \lambda_o \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz. z \rho_i \langle \lambda_o | \Gamma_-(z) \Gamma_+(\rho_i) | \lambda_o \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi i} \rho_i \oint dz. \frac{z}{(z - \rho_i)^2} \\
&= \rho_i.
\end{aligned}$$

$$\langle \lambda_o | F_i G_i F_j G_j | \lambda_o \rangle = \frac{\rho_i \nu_j \rho_i \rho_j (\rho_j - \rho_i)^2 (\nu_j - \nu_i)^2}{(\rho_j - \nu_j)^2 (\rho_j - \nu_i)^2 (\rho_i - \nu_i)^2 (\rho_i - \nu_j)^2},$$

$$\langle \lambda_o | E_-^1 G_i F_j G_j | \lambda_o \rangle = \frac{\rho_i \nu_j \rho_j (\rho_j - \rho_i)^2}{(\rho_j - \nu_j)^2 (\nu_j - \rho_i)^2},$$

$$\langle \lambda_o | E_+^1 F_i | \lambda_o \rangle = \nu_i,$$

$$\langle \lambda_o | E_+^1 F_i G_i F_j | \lambda_o \rangle = \frac{\nu_i \nu_j \rho_i (\nu_j - \nu_i)^2}{(\rho_i - \nu_j)^2 (\nu_i - \rho_i)^2}.$$

Apêndice N

A integração de contorno dos elementos de matriz no caso $\widehat{sl}_2$

Mostremos que a integral

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \cdot z \frac{(z - \nu_1)^2 \dots (z - \nu_{n-1})^2}{(z - \rho_1)^2 \dots (z - \rho_n)^2}, \quad n \geq 1 \quad (\text{N.1})$$

é igual a 1. Provemos por indução.

Para $n = 1$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{z}{(z - \rho_1)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assumindo que $I_n = 1$ para algum $n > 1$ determinemos a forma de I_{n+1} .

A expressão para I_{n+1} pode ser escrita como

$$I_{n+1} = I_n + C_n, \quad (\text{N.2})$$

onde

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \dots \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz \cdot z \frac{(z - \nu_1)^2 \dots (z - \nu_{n-1})^2}{(z - \rho_1) \dots (z - \rho_{n+1})} (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \dots \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz \frac{z (\rho_2 - \nu_1)^2 (\rho_3 - \nu_2)^2 \dots (\rho_{n+1} - \nu_n)^2}{(z - \rho_1) \dots (z - \rho_{n+1})} + \right. \\ &\quad \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_3} \dots \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz \frac{z (\rho_3 - \nu_2)^2 \dots (\rho_{n+1} - \nu_n)^2}{(z - \rho_1) (z - \rho_3) \dots (z - \rho_{n+1})} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_4} \dots \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz \frac{z (\rho_2 - \nu_1)^2 (\rho_4 - \nu_3)^2 \dots (\rho_{n+1} - \nu_n)^2}{(z - \rho_1) (z - \rho_2) (z - \rho_4) \dots (z - \rho_{n+1})} + \dots + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \rho_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz (\rho_2 - \nu_1)^2 (\rho_3 - \nu_2)^2 \cdots (\rho_{n-1} - \nu_{n-2})^2 (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \cdot \\
& \frac{z}{(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_{n-1}) (z - \rho_{n+1})}] + [\frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_4} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \cdot \\
& \oint dz (\rho_4 - \nu_3)^2 \cdots (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \cdot \\
& \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_4) \cdots (z - \rho_{n+1})} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_3} \frac{\partial}{\partial \rho_5} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \cdot \\
& \oint dz (\rho_3 - \nu_2)^2 (\rho_5 - \nu_4)^2 \cdots (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_3) (z - \rho_5) \cdots (z - \rho_{n+1})} + \\
& \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_3} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz (\rho_3 - \nu_2)^2 \cdots (\rho_{n-1} - \nu_{n-2})^2 (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \cdot \\
& \cdots + \\
& \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_3) \cdots (z - \rho_{n-1}) (z - \rho_{n+1})} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_5} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \cdot \\
& \oint dz (\rho_2 - \nu_1)^2 (\rho_5 - \nu_4)^2 \cdots (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_2) (z - \rho_5) \cdots (z - \rho_{n+1})} + \\
& \cdots + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_4} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz (\rho_2 - \nu_1)^2 (\rho_4 - \nu_3)^2 \cdots (\rho_{n-1} - \nu_{n-2})^2 \cdot \\
& (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_2) (z - \rho_4) \cdots (z - \rho_{n-1}) (z - \rho_{n+1})} + \cdots + \\
& \frac{\partial}{\partial \rho_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz (\rho_2 - \nu_1)^2 \cdots (\rho_{n-2} - \nu_{n-3})^2 (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \cdot \\
& \frac{z}{(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_{n-2}) (z - \rho_{n+1})}] + [\frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_5} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz (\rho_5 - \nu_4)^2 \cdots \\
& (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_5) \cdots (z - \rho_{n+1})} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_4} \frac{\partial}{\partial \rho_5} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \cdot \\
& \oint dz (\rho_4 - \nu_3)^2 (\rho_5 - \nu_4)^2 \cdots (\rho_{n-1} - \nu_{n-2})^2 (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \cdot \\
& \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_4) (z - \rho_5) \cdots (z - \rho_{n-1}) (z - \rho_{n+1})} + \cdots + \\
& \frac{\partial}{\partial \rho_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \rho_{n-3}} \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz (\rho_2 - \nu_1)^2 \cdots (\rho_{n-3} - \nu_{n-4})^2 (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \cdot \\
& \frac{z}{(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_{n-3}) (z - \rho_{n+1})}] + \cdots + \\
& \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_{n+1}} \oint dz (\rho_{n+1} - \nu_n)^2 \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_{n+1})} \}. \tag{N.3}
\end{aligned}$$

É fácil de se provar o seguinte:

i)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{z}{(z - \rho_1) (z - \rho_2)} = 1, \tag{N.4}$$

e

ii)

$$\oint dz \frac{z}{(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_n)} = 0 \quad \text{para} \quad n > 2. \quad (\text{N.5})$$

Escrevendo

$$\frac{1}{(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_n)} = \frac{1}{\det \Delta} \left[\frac{A_{n,1}}{z - \rho_1} + \frac{A_{n,2}}{z - \rho_2} + \cdots + \frac{A_{n,n}}{z - \rho_n} \right], \quad (\text{N.6})$$

com

$$\Delta =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\left(\sum_{i \neq 1}^n \rho_i\right) & -\left(\sum_{i \neq 2}^n \rho_i\right) & \cdots & -\left(\sum_{i \neq n}^n \rho_i\right) \\ \left(\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq 1}} \rho_i \rho_j\right) & \left(\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq 2}} \rho_i \rho_j\right) & \cdots & \left(\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq n}} \rho_i \rho_j\right) \\ -\left(\sum_{\substack{1 \leq i < j < k \leq n \\ i, j, k \neq 1}} \rho_i \rho_j \rho_k\right) & -\left(\sum_{\substack{1 \leq i < j < k \leq n \\ i, j, k \neq 2}} \rho_i \rho_j \rho_k\right) & \cdots & -\left(\sum_{\substack{1 \leq i < j < k \leq n \\ i, j, k \neq n}} \rho_i \rho_j \rho_k\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n-1} \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_n & (-1)^{n-1} \rho_1 \rho_3 \rho_4 \cdots \rho_n & \cdots & (-1)^{n-1} \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{N.7})$$

$A_{i,j}$ denota o cofator do elemento $\Delta_{i,j}$, notamos que multiplicando por $\sum_{i=1}^n \rho_i$ a primeira fila e somando à segunda fila da matriz Δ , não muda o determinante $\det \Delta$ nem os cofatores $A_{n,i}$; então (N.6), pode ser escrita como

$$\frac{1}{(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_n)} = \frac{1}{\det d} \left[\frac{B_{n,1}}{z - \rho_1} + \frac{B_{n,2}}{z - \rho_2} + \cdots + \frac{B_{n,n}}{z - \rho_n} \right] \quad (\text{N.8})$$

onde $\det \Delta = \det d$ e $A_{i,j} = B_{i,j}$, $B_{i,j}$ são os cofatores do elemento de matriz $d_{i,j}$. É fácil de se ver que a matriz d tem $d_{2,i} = \rho_i$ como elementos da segunda fila. Então a integração de contorno dos respectivos termos de (N.8) resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{z}{(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_n)} = \frac{1}{\det d} [\rho_1 B_{n,1} + \rho_2 B_{n,2} + \cdots + \rho_n B_{n,n}].$$

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^n d_{l,i} B_{k,i} = 0, \quad l \neq k$$

e portanto, podemos concluir que

$$\oint dz \frac{z}{(z - \rho_1) \cdots (z - \rho_n)} = 0, \quad \text{para } n > 2 \quad (\text{N.9})$$

Assim, o último termo de C_n anula-se devido a (N.4) e os termos restantes anulam-se devido a (N.5). Logo $C_n = 0$ para $n > 1$, e a equação (N.2) torna-se

$$I_{n+1} = I_n, \quad n > 1,$$

provando que

$$I_n = 1 \quad n \geq 1.$$

Referências Bibliográficas

- [1] A.Rogister, Phys.Fluids. 14, (1971) 2733.
- [2] K.Mio, T Ogino, K.Minani e S. Takeda, J. Phys. Soc. Japan 41, (1976) 265;
E. Mjølhus, J. Plasma Phys., 16, 321 (1976);
Hada T., Kennel C.F. e Buti B., J. Geophys.Res. 94, (1989) 65.
- [3] Spanglers R. e Plapp B.B., Phys. Fluids, B4, (1992) 3356
- [4] D.J. Kaup e A.C. Newell, J. Math. Phys., 19, (1978) 789
- [5] V. I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics" (Graduate Texts in Mathematics Vol60) Springer-Verlag (1984)
- [6] A.Das, "Interable Models", World Scientific, Singapore,(1989)
- [7] L.D. Faddeev e L. A. Takhtajan, "Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons", Springer, Berlin (1987).
- [8] R. Willox, W. Hereman and F. Verheest, Physica Scripta V.52, No1 (1995) 21
- [9] H. Aratyn, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, VII JA Swieca Summer School, Particles and Fields, January 1993, Eds. OJP Eboli and V.O. Rivelles, World Scientific (1994)(também em hep-th/9304152)
- [10] J.C. Brunelli and A. Das, hep-th/9410165
- [11] P. Casati, F. Magri and M. Pedroni, "Bihamiltonian Manifolds and Sato's Equations", em Proc. of the AMS-IMS-SIAM Conference 1991, M.J. Gotay, J.E. Marsden and V.Moncret (eds.), Contemporary Mathematics 132, American Math. Society
- [12] M. Toda, "Nonlinear Waves and Solitons", (Mathematics and its applications, Japanese series) KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1989
- [13] V.G. Kac, "Infinite dimensional Lie algebras", Third Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [14] H. Aratyn, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, IFT-P.029/94.
- [15] F. Magri, J. Math. Phys. 19 (1978) 1156.

- [16] H. Aratyn, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, Phys. Lett. B316 (1993) 85.
- [17] M. Wadati and K. Sogo, J. Phys. Soc. Japan 52 (1983) 394; A. Kundu, "Gauge unification of integrable nonlinear systems" em Proc of the Winter School, Bharathidasan University, Tiruchirapalli. M. Lakshmanan (Ed.). Springer Verlag, Berlin 1988.
- [18] M. Hisakado and M. Wadati, J. Phys. Soc. Japan 63 (1994) 3962; M. Hisakado and M. Wadati, J. Phys. Soc. Japan 64 (1995) 408.
- [19] A.P. Fordy and P.P. Kulish, Commun. Math. Phys. 89 (1983) 427.
- [20] A.P. Fordy, em "Soliton theory: a survey of results", A.P. Fordy (Ed.) University Press, Manchester (1990), p.315
- [21] A.P. Fordy, J. Phys. A17 (1984) 1235.
- [22] M.F. de Groot, T. J. Hollowood and J.L. Miramontes, Commun. Math. Phys. 145 (1992) 57; N.J. Burroughs, M.F. de Groot, T.J. Hollowood and J.L. Miramontes, Commun. Math. Phys. 153 (1993) 187.
- [23] T.J. Hollowood and J.L. Miramontes, Commun. Math Phys. 157 (1993) 99 (também em hep-th/9208058).
- [24] H. Aratyn, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, IFT-P.041/95.
- [25] O. Babelon and D. Bernard, Phys. Lett. 260B (1991) 81; O. Babelon and D. Bernard, Commun. Math. Phys. 149 (1992) 279; O. Babelon and D. Bernard, Int. Jour. of Mod. Phys. A, V.8, No. 3(1993) 507.
- [26] L.A. Ferreira, J. L. Miramontes and J.S. Guillen, IFT-P.016/96, US-FT/25-96.
- [27] L.A. Ferreira, J. L. Miramontes and J.S. Guillen, Nuclear Physics B449 (1995) 631, (também em hep-th/9412127).
- [28] H. Konno and P.S. Lomdahl, J. Phys. Soc. Japan 63 (1994) 3967; J.N. Maki and T. Kodama, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 2097.
- [29] V.G.Kac and M. Wakimoto, "Exceptional hierarchies of soliton equations" em Proc. of Symp. in Pure Math. 49 (1989) 191.
- [30] R. A. Kraenkel, M.A. Manna and J.G. Pereira, IFT-P.041/94;
R. A. Kraenkel, J.G. Pereira and M.A. Manna, "The reductive perturbative method and the KdV hierarchy", em Proc. of the Conference KdV' 95, The Netherlands 1995 (também em IFT-P.006/95);
E.C. de Rey Neto, "Múltiplos tempos em reduções perturbativas de sistemas não lineares" Dissertação de Mestrado, IFT 96 (também em IFT-D.001/96).

- [31] J.E. Humphreys, "Introduction to Lie algebras and representation theory ", Springer, Heidelberg, (1972);
R.N. Cahn, "Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations", Benjamin Cumming Pub. Comp. Inc (1984).
- [32] P. Goddard and D. Olive, Int.Jour.Mod.Phys. A1 (1986) 303.
- [33] J. Lepowsky and R.L. Wilson, Commun. Math. Phys. 62 (1978) 43; V. G. Kac, D.A. Kazhdan, J. Lepowsky and R.L. Wilson, Adv. in Math. 42(1981) 83; F. ten Kroode and J. van de Leur, Commun.Math. Phys. 137 (1991) 67; I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, em "Mathematical Aspects of String Theory", Adv. Series in Math. Phys. Vol.1. S.T. Yau (Ed.), World Scientific (1987); A.J. Feingold, em "Vertex Operators in Math. and Phys. ", J. Lepowsky, S. Mandelstam and I.M. Singer (Eds.) Math. Sciences Research Inst. Publications. Springer-Verlag, (1983).
- [34] I.B. Frenkel and V.G. Kac, Invent. Math. 62 (1980) 28.
- [35] Wan Zhe-xian, "Int. to Kac-Moody algebra" World Scientific (1991).
- [36] V.G. Kac and A.K. Raina, Bombay Lectures on "Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras", World Scientific (1987).
- [37] J.D.Gibbon, em "Soliton theory: a survey of results", A.P.Fordy (Ed.) University Press, Manchester (1990), p.133.
- [38] B.G. Konopelchenko and C.Rogers, em "Nonlinear Equations in the Applied Sciences", W.F. Ames e C. Rogers (Eds.) Ac. Press Inc. San Diego (1992).
- [39] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, JETP 61 (1971), 118; English translation in Sov. Phys. JETP 34 (1972), 62.
- [40] P. Lax, Comm. Pure Appl. Math. 21 (1968), 467.
- [41] C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal and R.M. Miura, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1095.
- [42] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur, Stud. Appl. Math. 53 (1974) 249.
- [43] V.G. Drinfel'd and V.V. Sokolov, J.Sov. Math. 30 (1985) 1975; Sov. Math. Dokl. 23 (1981) 457.
- [44] P.J. Olver, "Applications of Lie Groups to Differential Equations", 1986 (Springer NY).
- [45] R. Gilmore, "Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications", (1974) J.Wiley and Sons Inc. (NY).
- [46] V.G. Kac and J.W. van de Leur, em "Important Developments in Soliton Theory", A.S. Fokas and V.E. Zakharov (Eds.) Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993) p.302.

