

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós - Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estabilidade de sistemas dinâmicos: Estudo do *memristor*.

Marília Davoli Moreira

Orientador: Prof(a). Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Presidente Prudente, Abril de 2014.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós - Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estabilidade de sistemas dinâmicos: Estudo do *memristor*.

Marília Davoli Moreira

Orientador: Prof(a). Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

*Aos meus pais, Luíz e Cidinha,
ao meu esposo Eduardo,
e a minha orientadora, Vanessa.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela minha vida, e a minha amada Santa Terezinha que sempre intercedeu junto ao Pai nas minhas necessidades.

Gostaria de agradecer à Professora Dra. Vanessa que me recebeu de braços abertos, pelas conversas nos momentos difíceis, pela troca de experiência, amizade, paciência, incentivo, orientação, dedicação e compreensão. Um exemplo à ser seguido.

Aos meus pais e ao meu irmão, por todo incentivo, paciência e pelo amor incondicional, pois só eles sabem todos os obstáculos que enfrentei para chegar neste momento, e no entanto, eles sempre me apoiaram integralmente em minhas decisões e sempre confiaram que eu conseguiria alcançar meu objetivo. Sem vocês não sei viver!

Ao meu amado esposo e amigo, por ter sido paciente e compreensivo, por todo amor, companherismo e incentivo. O seu apoio foi imprescindível para a concretização deste trabalho. Obrigada meu amor!

Aos meus amigos e familiares que acreditaram na minha vitória e torceram por mim. À minha turma do mestrado, em especial ao José Vanterler, Hemily e Daiane por estarem sempre comigo nos momentos bons e naqueles de dificuldades, pelo apoio e pelos momentos de descontração.

As minhas amigas, Larissa, Marluce, Marilaine e Tamiris, vocês foram a minha luz no fim do tunel, sem palavras para agradecer todo apoio e dedicação, pois mesmo longe, não mediram esforços para me ajudar em tudo que eu precisei, e dividir comigo um dos momentos mais felizes da minha vida.

Agradeço a todos os professores do DMC e do PosMAC, especialmente ao Prof. Dr. Suetônio de A. Meira, que foi minha primeira inspiração nesta vida acadêmica, pela amizade construída, pelos bons conselhos e pelo exemplo de profissional dedicado. Ao Prof. Dr. Messias Meneguette pela oportunidade incrível de ser aluna bolsista. Ao Prof. Dr. Biroca pela confiança em me convidar a ser Professora da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação que foram sempre prestativos e pacientes. A todos que direta ou indiretamente me ajudaram na elaboração deste trabalho.

*A maioria das pessoas nunca vai longe o suficiente no seu primeiro vento para descobrir
que elas terão uma segunda rajada. Dê a seus sonhos tudo o que você tem e você se
surpreenderá com a energia que vem de você.*
William James.

Resumo

Neste trabalho, será apresentado um estudo detalhado da estabilidade dos pontos de equilíbrio de alguns modelos matemáticos que representam o funcionamento de um circuito elétrico que possui o *memristor* em sua composição, além dos outros componentes elétricos, formados por sistemas de equações diferenciais ordinárias de terceira e quarta ordens, envolvendo funções lineares por partes. Em tal processo é de fundamental importância o conhecimento de resultados relacionados a zeros de polinômios, pois a análise da estabilidade de tais sistemas está relacionado à determinação dos autovalores da matriz dos coeficientes do sistema. Em tal estudo será utilizado o Critério de Routh-Hurwitz.

Palavras chave: Memristor, Critério de Routh-Hurwitz, Estabilidade.

Abstract

In this work, a detailed study of the stability of the equilibrium points of some mathematical models that represent the behavior of an electrical circuit with a *memristor* in your composition, consisting, consisting of ordinary differential equations of third and fourth order systems, involving piecewise linear functions. In this theory is very important the study of results related to the zeros of polynomials, because the stability analysis of these systems is related to the eigenvalues of the coefficient matrix of the system. The Routh-Hurwitz criterion will be used.

Keywords: Memristor, Routh-Hurwitz Criterion, Stability.

Sumário

1	Introdução	1
2	Resultados Preliminares	4
2.1	Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n	5
2.2	Equações homogêneas com coeficiente constantes	10
2.3	CrITÉrio de estabilidade para polinômios	12
3	Estudo dos <i>Memristores</i>	18
3.1	Circuito com <i>memristor</i> de terceira ordem	22
3.1.1	<i>Memristor</i> com oscilador canônico de terceira ordem	22
3.1.2	Oscilador Canônico de terceira ordem com um <i>memristor</i> fluxo con- trolado	33
3.1.3	<i>Memristor</i> de terceira ordem baseado no oscilador de Chua	35
3.2	<i>Memristor</i> com oscilador canônico de quarta ordem	38
4	Considerações Finais	47

Lista de Figuras

3.1	Relação de variáveis entre os quatro elementos fundamentais: resistor, capacitor, indutor e memristor. Referência: Fonte [11].	19
3.2	(a) <i>Memristor</i> de carga controlada. (b) <i>Memristor</i> de fluxo controlado. Fonte: Referência [11].	19
3.3	Relação constitutiva de um <i>memristor</i> monotonamente crescente e linear por partes. (a) <i>Memristor</i> de carga controlada. (b) <i>Memristor</i> de fluxo controlado. Fonte: Referência [11].	20
3.4	Circuito de Chua. Fonte: Referência [11].	21
3.5	Oscilador canonico de Chua. Fonte: Referência [11].	21
3.6	Oscilador canônico de Chua com <i>memristor</i> fluxo controlado. Fonte: Referência [11].	22
3.7	Circuito dual com um <i>memristor</i> carga controlada. Fonte: Referência [11].	22
3.8	Oscilador de terceira ordem com <i>memristor</i> fluxo controlado. Fonte: Referência [11].	22
3.9	Circuito dual com um <i>memristor</i> carga controlada. Fonte: Referência [11].	22
3.10	Corrente i_j , voltagem v_j , nó A e laço c . Fonte: Referência [11].	23
3.11	Para todo z , $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$	27
3.12	Para $ z < 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$. Para $ z > 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$	27
3.13	Para todo z , $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$	28
3.14	Para $ z < 1$, $W(z) < \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$. Para $ z > 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$	28
3.15	Para $ z < 1$, $W(z) < \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$. Para $ z > 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$	29

3.16	Para $ z < 1$, $W(z) < \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$. Para $ z > 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$	29
3.17	Para todo z , $W(z) < \frac{\beta}{\alpha}$, independente da posição de $\frac{\xi}{\beta}$	30
3.18	Para $ z < 1$, $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$ e para $ z > 1$, $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$	32
3.19	Circuito de terceira ordem com <i>meristor</i> fluxo-controlado. Fonte: Referência [11].	33
3.20	Oscilador de Van der Pol. Fonte: Referência [11].	35
3.21	Oscilador de terceira ordem com <i>memristor</i> fluxo controlado e condutância negativa. Fonte: Referência [11].	35
3.22	$W(z) > \gamma, \forall z$	37
3.23	$W(z) < \gamma, \forall z$	37
3.24	Para $ z > 1$, $W(z) > \gamma$ e para $ z < 1$, $W(z) < \gamma$	38
3.25	Oscilador canônico de Chua. Fonte: Referência [11].	38
3.26	Oscilador canônico de Chua com <i>memristor</i> fluxo controlado. Fonte: Referência [11].	39
3.27	Corrente i_j , voltagem v_j , nós A e B e no laço C conforme indicado na figura. Fonte: Referência [11].	39
3.28	Análise do sinal da inequação do item (2), onde $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta = 0$. . .	42
3.29	Análise do sinal da inequação do item (2), onde $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta < 0$. . .	42
3.30	Análise do sinal da inequação do item (2), onde $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta > 0$. . .	43
3.31	Para todo w , $W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$ e $W_1 < W(w) < W_2$	43
3.32	$W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, se $ w > 1$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, se $ w > 1$ e $W_1 < W(w) < W_2$, se $ w > 1$	44
3.33	$W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, $\forall w$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, se $ w > 1$ e $W_1 < W(w) < W_2$, se $ w > 1$	44
3.34	$W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, se $ w > 1$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, $\forall w$ e $W_1 < W(w) < W_2$, se $ w > 1$	45
3.35	$W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, se $ w > 1$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, se $ w > 1$ e $W_1 < W(w) < W_2$, $\forall w$	45
3.36	$W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, $\forall w$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, $\forall w$ e $W_1 < W(w) < W_2$, se $ w < 1$	46

Lista de Tabelas

3.1	Estabilidade local dos pontos de equilíbrio $(0, 0, z)$. Fonte: Referência [20]. . . .	31
3.2	Tabela de comparação entre a Tabela (3.1) e os gráficos que ilustram o Teorema (3.1).	32

Introdução

A teoria das equações diferenciais tem sido muito utilizada em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo na Física e na Engenharia. Os sistemas de equações diferenciais ordinárias, particularmente, constituem um tópico bastante relevante no estudo das aplicações dos métodos matemáticos na modelagem e análise de fenômenos naturais.

Devido à constante evolução da tecnologia, novas aplicações relacionadas à teoria das equações diferenciais surgem com muita frequência; um exemplo é o *memristor*, abreviatura de “*memory resistor*” (resistor com memória), teorizado pelo cientista Leon Chua em 1971 [3], que utilizou a simetria conceitual existente entre os três elementos fundamentais de um circuito, resistor, indutor e capacitor, para inferir sua existência como o quarto elemento fundamental na teoria dos circuitos. Outros cientistas já tinham previsto características não-lineares similares a do *memristor*, mas a teoria de Chua foi a primeira a criar a generalização do conceito. Chua realizou uma análise das relações matemáticas existentes entre as quatro variáveis elétricas do circuito: corrente (i), voltagem (v), carga (q) e fluxo magnético (φ), e percebeu a existência de um quarto elemento, o qual chamou de *memristor*, que fechava o ciclo de relações entre as variáveis carga e fluxo magnético, denotado por $M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}$.

Em 2008, uma equipe de cientistas dos laboratórios da Hewlett-Packard Company anunciou a construção física de um *memristor* [9, 25]. A inserção comercial de produtos que utilizam o *memristor* em sua composição está prevista para ocorrer por volta do ano de 2015. O *memristor* é um componente eletrônico passivo de dois terminais que mantém uma função não-linear entre corrente e tensão. Essa função, conhecida como memristância, é similar à uma função de resistência variável. Alguns *memristores* específicos provêm da resistência controlável, mas não estão disponíveis comercialmente. Os componentes eletrônicos, tais como baterias ou varistores, também apresentam características de *memristores*, mas são sutis e não são dominantes em seu comportamento. Não existe,

assim, um *memristor* genérico: cada *memristor* pode ser desenvolvido para desempenhar uma determinada função não-linear entre a integral da tensão e a integral da corrente. Um *memristor* linear e invariante com o tempo é simplesmente um resistor convencional.

Segundo [12], atualmente o *memristor* tem despertado o interesse da comunidade científica devido sua capacidade de funcionar de maneira análoga à forma como seria uma sinapse no cérebro humano, e acredita-se que as inúmeras aplicações deste dispositivo darão lugar a uma revolução tecnológica. Diversos centros de pesquisas estão aprimorando e desenvolvendo novos conhecimentos sobre o *memristor* e muitas universidades buscam incorporar seu estudo nos planos curriculares associados à engenharia eletrônica.

Na referência [11], os autores apresentaram diversos modelos matemáticos formados por sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda, terceira e quarta ordens, que representam circuitos elétricos obtidos a partir da substituição dos diodos de Chua por *memristores*. O circuito formado por diodo de Chua é conhecido como circuito de Chua, e recebeu esse nome por ter sido elaborado por Leon O. Chua. Além disso, tal circuito é um dos circuitos osciladores mais estudados na literatura, sendo também um dos que apresentam melhores resultados devido a facilidade de implementação. E mais, o circuito de Chua é um dos poucos sistemas físicos não lineares que apresentam regimes caóticos por diferentes abordagens, tais como simulações computacionais, experimentos e análises matemáticas. Ele foi desenvolvido com o propósito de simular o comportamento, como o caótico do sistema de Lorenz e, dependendo dos valores dos parâmetros, outros tipos de comportamentos, caóticos ou até periódicos.

No estudo da estabilidade dos modelos apresentados em [11], é de fundamental importância o conhecimento de resultados relacionados a zeros de polinômios, pois a análise da estabilidade de tais sistemas está relacionada à determinação dos autovalores da matriz dos coeficientes do sistema. Alguns resultados clássicos da Análise, como o Critério de Routh-Hurwitz [6], por exemplo, são muito utilizados em tal análise.

O principal objetivo deste trabalho é fazer uma análise detalhada da estabilidade de alguns modelos matemáticos apresentados em [11] que representam os *memristores* modelados por sistemas de equações diferenciais ordinárias de terceira e quarta ordens com alguns parâmetros livres, envolvendo uma função linear por partes, e mostrar que o Critério de Routh-Hurwitz é uma ferramenta eficaz quando estamos interessados apenas na estabilidade do sistema de equações diferenciais.

Sistemas diferenciais lineares por partes são muito utilizados na engenharia e aparecem na teoria de controle, na maioria das vezes, na forma de sistemas mecânicos ou de circuitos elétricos [5], [13] e [26]. Segundo [18], os sistemas lineares por partes podem apresentar todas as dinâmicas complexas que pode-se ver nos sistemas diferenciais não-lineares. Por exemplo, ciclos limites, órbitas heteroclínicas e homoclínicas, que são os principais ingredientes para a descrição qualitativa dos retratos de fase de sistemas diferenciais planares, também estão presentes em sistemas diferenciais lineares por partes planares. Em dimensões maiores, até mesmo atratores estranhos aparecem na classe de sistemas diferenciais

lineares por partes.

Porém, neste trabalho, o foco será utilizar o Critério de Routh-Hurwitz para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de alguns sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares por partes, de terceira e quarta ordens, envolvendo alguns parâmetros livres, que modelam o comportamento de circuitos elétricos envolvendo o *memristor* [11].

A análise de tais modelos, principalmente os de terceira ordem, já foi objeto de estudo de muitos pesquisadores [7, 20]. E, nos últimos anos, os modelos de quarta ordem também começaram a ser explorados.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram necessários estudos sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias e critérios de estabilidade, que compõem o capítulo 2.

Em seguida, o capítulo 3 apresenta os modelos matemáticos que representam os circuitos elétricos com a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio de tais sistemas.

Para finalizar, o capítulo 4 aborda os resultados futuros relacionados a este trabalho.

Resultados Preliminares

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou dependência mútua, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto, como por exemplo um circuito elétrico. Um sistema é dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos variam com o tempo [22]. Os problemas matemáticos que modelam fenômenos como o circuito elétrico, consistem em um sistema de duas ou mais equações diferenciais, em que é possível associar uma equação polinomial característica. Porém, encontrar raízes de equações polinomiais de grau maior que quatro é uma tarefa bastante complicada.

Segundo [22], existem dois motivos importantes para se estudar sistemas lineares. O primeiro é que muitos fenômenos podem ser modelados por sistemas lineares, com precisão adequada às aplicações. O segundo motivo é que, por meio da linearização, pode-se realizar um estudo local de sistemas não-lineares, através da análise do sistema linear associado.

Neste capítulo, será apresentado um estudo qualitativo de equações diferenciais ordinárias, e condições de estabilidade que determinam quando um sistema é estável, sem a necessidade de calcular as raízes da equação característica associada. Será realizado um apanhado geral de sistemas de equações diferenciais de ordem n baseado nas referências [1, 22], e resultados importantes referente à zeros de polinômios [6, 17].

Antes de começarmos o capítulo propriamente dito, devemos conhecer o “Espaço de fases”. Também conhecido como espaço de estados, o espaço de fases é um espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são o eixo- x_1 , eixo- x_2 , $\dots$, eixo- x_n . Um estado é representado como um ponto com coordenadas $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$ nesse espaço. Conforme esse ponto se move com o decorrer do tempo, sua evolução temporal é determinada

pelas n equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

ou, na notação vetorial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

onde $f_j : B \times \mathbb{R}_+ \rightarrow A$ ($j = 1, 2, \dots, n$), sendo $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

As variáveis dependentes x_j são chamadas de variáveis de estado. As funções f_j definem o campo de velocidades desse sistema, pois a velocidade instantânea é dada por $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}$. A dimensão do espaço de fases equivale ao número de equações de primeira ordem necessárias para descrever o sistema, que é igual ao número de variáveis de estado.

Chama-se retrato de fases o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais nas quais as funções f_j são definidas.

Dizemos que uma solução $\vec{x}(t)$ para o sistema (2.1) é um caminho no espaço de fases percorrido com velocidade $\frac{d\vec{x}(t)}{dt}$, que coincide, em cada ponto, com o campo de velocidades $\vec{f}(\vec{x}, t)$. Newton chamou a solução $\vec{x}(t)$ de fluxo, que é o conjunto de todas as soluções.

2.1 Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n

Nesta seção adotaremos os livros [1] e [22] como sendo nossas literaturas básicas.

Uma equação diferencial linear de ordem n é dada da seguinte forma:

$$A_0(t)\frac{d^n x(t)}{dt^n} + A_1(t)\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_{n-1}(t)\frac{dx(t)}{dt} + A_n(t)x(t) = F(t),\tag{2.2}$$

sendo os coeficientes $A_0, \dots, A_n$ e a entrada F funções reais e contínuas definidas em algum intervalo $I : \alpha < t < \beta$, onde $A_0(t)$ nunca se anula nesse intervalo.

Veja que, não existe um método analítico para se obter uma solução explícita dessa equação para quaisquer coeficientes $A_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) e entrada $F(t)$. Logo, não existe um método geral para se obter a fórmula que expressa como x varia em função de t . Apenas a equação diferencial linear de primeira ordem pode ser tratada genericamente.

Caso a solução analítica não possa ser encontrada através de uma solução exata, encontra-se uma solução analítica aproximada. Um método muito utilizado para isso consiste em procurar por uma solução na forma de potência de uma série de potências de

t , da seguinte forma: $x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$. O objetivo é determinar o conjunto de coeficientes c_j que satisfaz a equação que se pretende solucionar. Esse método funciona de maneira a procurar uma aproximação polinomial para a solução real.

Devemos ressaltar que uma equação diferencial linear é dita homogênea se a função de entrada $F(t)$ é nula; caso contrário, é dita não-homogênea.

Voltando para a equação diferencial linear de grau n , dividindo a equação (2.2) por $A_0(t)$ obtemos

$$L[x] = \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_n(t)x(t) = f(t). \quad (2.3)$$

A solução geral de uma equação diferencial linear de ordem n é a solução que contém todas as possíveis soluções dessa equação. Essa solução geral contém n constantes arbitrárias.

Para determinar a solução, é necessário especificar o valor de $x(t)$ no instante t_0 , assim como os valores das $n - 1$ primeiras derivadas de $x(t)$ calculadas em t_0 . Dessa maneira, temos os seguintes números:

$$x(t_0), \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad \left. \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0}, \quad \cdots, \quad \left. \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=t_0} \quad (2.4)$$

que formam a condição inicial do problema, e determinam-se as n constantes arbitrárias que aparecem na solução geral de uma equação de ordem n .

Com relação as soluções das equações de ordem n , temos o seguinte resultado em [1].

Teorema 2.1. *Se as funções $a_1, a_2, \dots, a_n$ e f são contínuas em I , então existe exatamente uma solução $x = \phi(t)$ da equação diferencial (2.3) que também satisfaz as condições iniciais (2.4). Essa solução existe em todo o intervalo I .*

Considere a seguinte equação diferencial linear homogênea

$$L[x] = \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_n(t)x(t) = 0. \quad (2.5)$$

Se as funções $x_1, x_2, \dots, x_n$ são soluções da equação (2.5), então a combinação linear

$$x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + \cdots + k_n x_n(t), \quad (2.6)$$

onde $k_1, k_2, \dots, k_n$ são constantes arbitrárias, também é solução da equação (2.5). Para qualquer escolha do ponto t_0 no intervalo I e para qualquer escolha de $x(t_0), x'(t_0), \dots$,

$x^{(n-1)}(t_0)$ conseguiremos determinar $k_1, k_2, \dots, k_n$ de forma que as equações

$$\begin{aligned} k_1 x_1(t_0) + \dots + k_n x_n(t_0) &= x(t_0) \\ k_1 x_1'(t_0) + \dots + k_n x_n'(t_0) &= x'(t_0) \\ &\vdots \\ k_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + k_n x_n^{(n-1)}(t_0) &= x^{(n-1)}(t_0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

sejam satisfeitas. As equações (2.7) podem ser resolvidas de maneira única para as constantes $k_1, k_2, \dots, k_n$ desde que o determinante dos coeficientes não sejam nulos. Logo, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para as equações (2.7), para valores arbitrários de $x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$ é que o wronskiano

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

não se anule em $t = t_0$. Como t_0 pode ser qualquer ponto do intervalo I , é necessário e suficiente que $W(x_1, \dots, x_n)$ não se anule em nenhum ponto do intervalo. Portanto, segue o seguinte resultado em [1]:

Teorema 2.2. *Se as funções $a_1, a_2, \dots, a_n$ e f são contínuas no intervalo aberto I , se as funções $x_1, \dots, x_n$ são soluções da equação (2.5) e se $W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$ para, pelo menos, um ponto t em I , então toda a solução da equação (2.5) pode ser expressa como uma combinação linear das soluções $x_1, \dots, x_n$.*

O conjunto de soluções $x_1, x_2, \dots, x_n$ da equação (2.5) em que o wronskiano não se anula é chamado de conjunto fundamental de soluções.

Assim, podemos concluir que encontrar um conjunto de solução para uma equação diferencial ordinária linear de grau n , é uma tarefa complicada, e para facilitar um pouco, podemos usar uma técnica que consiste em reescrever a equação (2.2) de grau n na forma de um sistema de n equações de primeira ordem. Para isso definiremos $x(t) \equiv x_1(t)$ e faremos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &\equiv x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &\equiv x_3(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &\equiv x_n(t) \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &\equiv \frac{F(t)}{a_0(t)} - \frac{A_n(t)}{a_0(t)}x_1(t) - \frac{A_{n-1}(t)}{a_0(t)}x_2(t) - \frac{A_{n-2}(t)}{a_0(t)}x_3(t) - \dots - \frac{A_1(t)}{a_0(t)}x_n(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

O sistema (2.9) é equivalente à equação (2.2), porém, existem algumas vantagens em transformar a equação de ordem n em n equações de primeira ordem, como por exemplo:

1. Podemos escrever as n equações de primeira ordem na forma matricial:

$$\frac{d \vec{x}(t)}{dt} = \vec{A}(t) \vec{x}(t) + \vec{E}(t)$$

em que $\vec{A}$ é uma matriz quadrada de coeficientes e $\vec{E}$ é um vetor das funções de entrada.

2. Quando usa-se métodos computacionais para determinar a evolução do sistema, é conveniente usar n equações de primeira ordem, em vez da equação única de ordem n .

Além disso, existem basicamente três técnicas para se investigar os comportamentos de um sistema dinâmico:

1. *Técnicas analíticas:* integram-se analiticamente as equações, determinando a solução em termos de fórmulas gerais. A vantagem é que se obtém fórmulas que valem para quaisquer condições iniciais e quaisquer valores dos parâmetros. A desvantagem é que nem sempre é possível se determinar tais fórmulas.
2. *Técnicas numéricas:* integram-se numericamente as equações, calculando valores para as variáveis dependentes $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ em pontos pré-selecionados da variável interdependente t . A vantagem é que a maior parte do trabalho é feita pelo computador. E a desvantagem é que a solução calculada é aproximada e só vale para situação calculada.
3. *Técnica qualitativa:* através de cálculos analíticos relativamente simples, dá pistas de como o sistema evolui. A vantagem é a simplicidade dos cálculos analíticos realizados, que em geral são mais fáceis que aqueles necessários para a integração. e a desvantagem é que parte da informação quantitativa é perdida.

Vejamos agora algumas definições.

Definição 2.1. *Um sistema autônomo é um conjunto de equações diferenciais, lineares ou não-lineares a parâmetros constantes, sujeitas a funções de entrada que não dependem explicitamente do tempo t .*

A equação (2.2) é autônoma, se os coeficientes A_j e a função F são constantes. Nesse caso, o tempo é escrito apenas de forma implícita, no sentido que as variáveis x_j são funções de t , mas as equações que governam a evolução dessas variáveis não dependem explicitamente de t .

Definição 2.2. *Se o tempo aparece explicitamente em algum coeficiente e/ou em alguma função de entrada, o sistema de equações é chamado de não-autônomo.*

Qualquer sistema não-autônomo, escrito na forma de n equações de primeira ordem, pode ser reescrito numa forma autônoma, definindo $x_{n+1} \equiv t$. Usando esse artifício, o sistema (2.2) torna-se:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= 1.\end{aligned}$$

O espaço de fases do sistema não-autônomo original tem dimensão n .

O retrato de fases de um sistema dinâmico autônomo do tipo $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ é influenciado pela localização e pela estabilidade dos pontos de equilíbrio $\vec{x}^*$.

Segundo [22], a estabilidade é uma palavra usada para caracterizar tanto uma solução, quanto uma equação diferencial. A estabilidade de uma solução é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertencem à sua vizinhança. A estabilidade de uma equação é determinada pelo comportamento de equações isomórficas cujos valores dos parâmetros são próximos aos da equação estudada.

Veremos agora, a noção de estabilidade de uma solução estacionária, que é uma solução representada por um ponto de equilíbrio no retrato de fases.

Definição 2.3. Dizemos que $\vec{x}^*$ é um ponto de equilíbrio quando $\left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{x=\vec{x}^*} = 0$ em $\vec{x} = \vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Isto significa que: $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$.

Considerando o sistema linear $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ e supondo A invertível (logo $\det A \neq 0$), então $\vec{x}^* = 0$ é o único ponto de equilíbrio desse sistema.

Definição 2.4. Define-se que o ponto de equilíbrio $\vec{x}^*$ é estável se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta(\epsilon)$, então $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \epsilon$, para todo $t > 0$.

Definição 2.5. Define-se $\vec{x}^*$ como um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se, e somente se, existe $\delta > 0$ tal que se $\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$, então $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| \rightarrow 0$, para $t \rightarrow \infty$.

Definição 2.6. Define-se $\vec{x}^*$ como um ponto de equilíbrio instável se não existe todas as trajetórias na esfera de raio δ com centro em $\vec{x}^*$, tal que todas as trajetórias, cujas condições iniciais pertencem a essa esfera, fiquem confinadas no interior de uma segunda esfera de raio ϵ com centro $\vec{x}^*$.

2.2 Equações homogêneas com coeficiente constantes

O método empregado para solucionar um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem pode ser estendido para resolver um sistema de ordem n . O polinômio característico é obtido a partir do determinante $\det(\vec{A} - \lambda \vec{I}) = 0$, sendo $\vec{A}$ a matriz dos coeficientes e $\vec{I}$ a matriz identidade. A cada autovalor λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$), associa-se uma função.

Considere a equação diferencial linear homogênea de ordem n

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0, \quad (2.10)$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são constantes reais. Do que sabemos sobre a solução da equação de segunda ordem, é natural pensar em $x = e^{\lambda t}$ como solução para a equação (2.10) para valores apropriados de r . De fato,

$$L[e^{\lambda t}] = e^{\lambda t} \left(a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) \right) = e^{\lambda t} Z(\lambda) \quad (2.11)$$

para todo λ , onde

$$Z(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (2.12)$$

Para valores de λ tais que $Z(\lambda) = 0$, segue que $L[e^{\lambda t}] = 0$ e $x = e^{\lambda t}$ é uma solução de (2.10). O polinômio $Z(\lambda)$ é chamado de polinômio característico, e a equação $Z(\lambda) = 0$ é a equação característica da equação diferencial (2.10). Um polinômio de grau n possui n zeros, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, alguns dos quais podem ser iguais.

O método utilizado para resolver uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes depende da obtenção das raízes de uma equação polinomial de ordem n correspondente, e essa tarefa não é nada fácil. Veremos a seguir alguns tipos de raízes que podemos obter resolvendo as equações características.

1. *Raízes reais e distintas:* Se as raízes da equação característica são reais e duas delas são sempre diferentes, então temos n soluções distintas $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ da equação (2.10). Se essas funções forem linearmente independentes, então a solução geral da equação (2.10) é

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + a_n e^{\lambda_n t}. \quad (2.13)$$

Para estabelecer a independência linear de $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ basta calcular o wronskiano.

2. *Raízes complexas:* Quando a equação possui raízes complexas, elas têm que aparecer em pares conjugados, $\lambda \pm i\mu$, já que os coeficiente $a_1, a_2, \dots, a_n$ são reais. Desde que nenhuma raiz se repita, a solução geral da equação (2.10) ainda é da forma (2.13). Podemos ainda, substituir as soluções complexas $e^{(\alpha+i\mu)t}$ e $e^{(\alpha-i\mu)t}$ pelas soluções reais

$$e^{\lambda t} \cos \mu t \quad \text{e} \quad e^{\lambda t} \sin \mu t$$

obtidas como as partes real e imaginária de $e^{(\alpha+i\mu)t}$. Logo, ainda que algumas das raízes da equação característica sejam complexas, é possível expressar a solução geral da equação (2.10) como combinação linear de soluções reais.

3. *Raízes repetidas:* Se alguma das raízes da equação característica forem repetidas, então a solução (2.13) não é solução geral da equação (2.10). Para uma equação de ordem n , se uma raiz de $Z(\lambda) = 0$, digamos $\lambda = \lambda_1$ tem multiplicidade s (onde $s \leq n$), então

$$e^{\lambda_1 t}, \quad te^{\lambda_1 t}, \quad t^2 e^{\lambda_1 t} \quad \dots, \quad t^{s-1} e^{\lambda_1 t}$$

são soluções correpondentes da equação (2.10).

Caso uma raiz complexa $\alpha + i\mu$ se repita s vezes, a raiz complexa conjugada $\alpha - i\mu$ também se repete s vezes. À essas $2s$ soluções complexas, podemos encontrar $2s$ soluções reais assumindo que as partes reais e imaginárias de $e^{(\alpha+i\mu)t}, te^{(\alpha+i\mu)t}, \dots, t^{s-1}e^{(\alpha+i\mu)t}$ também são soluções linearmente independentes:

$$e^{\alpha t} \cos \mu t, \quad e^{\alpha t} \sin \mu t, \quad te^{\alpha t} \cos \mu t, \quad te^{\alpha t} \sin \mu t, \dots, t^{s-1} e^{\alpha t} \cos \mu t, \quad t^{s-1} e^{\alpha t} \sin \mu t.$$

Portanto a solução geral da equação (2.10) sempre pode ser expressa como uma combinação linear de n soluções reais.

Observe que na determinação das raízes de uma equação característica, pode ser necessário calcular raízes cúbicas, quartas ou até mesmo raízes de ordem maior de um número (que pode ser complexo). Um maneira conveniente de fazer isso é usar a fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$ e algumas regras algébricas. Contudo, percebemos que o problema de encontrar as raízes de uma equação polinomial pode não ser fácil, mesmo com a ajuda do computador.

Outra observação importante se refere ao caso dos autovalores da matriz A possuírem parte real nula. Neste caso, o ponto de equilíbrio recebe o nome de ponto não hiperbólico. Caso contrário, o ponto é hiperbólico.

Segundo [22], a estabilidade de um ponto de equilíbrio é estabelecida pelo sinal da parte real de seus autovalores λ_j . Portanto, na determinação da estabilidade dessa solução, não é necessário calcular explicitamente os valores de λ_j , basta conhecer o sinal das suas partes reais. Não podemos esquecer que: um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável quando $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ para todo j . De fato, suponhamos por absurdo que λ é um autovalor de A com parte real não negativa. Se λ é real e v o autovetor associado, $\|e^{tA}v\| = e^{\lambda t} \|v\|$ não tende a zero, o que é um absurdo. Se $\lambda = \alpha + i\beta$ é complexo, $\|e^{tA}v\| = \|e^{\lambda t}\| \|v\| = \|e^{\alpha t} e^{i\beta t}\| \|v\| = \|e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))\| \|v\|$ que também não tende a zero se $\alpha \geq 0$. Logo todos os autovalores têm parte real negativa.

Num sistema linear, os autovalores da matriz $\overleftrightarrow{A}$ são zeros do polinômio característico, que é obtido a partir de $\det(\overleftrightarrow{A} - \lambda \overleftrightarrow{I}) = 0$.

2.3 Critério de estabilidade para polinômios

O objetivo principal desta seção é caracterizar os polinômios cujos zeros possuem todas partes reais negativas, denominados polinômios de Hurwitz. O interesse por tais polinômios surgiu com o estudo da teoria da estabilidade, pois, como já foi visto na seção anterior, a estabilidade de um ponto de equilíbrio é estabelecida pelo sinal dos autovalores da matriz dos coeficientes.

O problema de descobrir se todos os zeros de um polinômio de grau n têm parte real negativa, ou seja, estabelecer uma condição necessária e suficiente sem a necessidade de calcular explicitamente esses zeros, tornou-se famoso quando, por volta de 1895, A. Stodola, professor de engenharia mecânica em Zurique, o propôs para o seu colega A. Hurwitz. Este problema também tinha sido considerado anteriormente por E. J. Routh e A. Lyapunov. Mas, em 1895, A. Hurwitz encontrou, independentemente, uma solução equivalente à solução determinada por Routh [6].

A seguir veremos algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho, seguindo as referências [6] e [17].

Definição 2.7. *Seja $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, um polinômio. Dizemos que $F(z)$ é chamado polinômio de Hurwitz ($F \in \mathcal{H}$) quando seus zeros estão localizados no semi-plano esquerdo.*

Se $F \in \mathcal{H}$, então $F(0) \neq 0$ e então $a_n \neq 0$.

O resultado a seguir encontra-se em [17].

Teorema 2.3. *Se $F(z)$ é um polinômio de Hurwitz, então os coeficientes a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, têm o mesmo sinal.*

Demonstração. Seja $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ um polinômio com $a_n \neq 0$.

Dados $-w_j$ os zeros reais e $-t_q \pm iv_q$ ($j + 2q = n$) os zeros complexos de $F(z)$, aplicando o Teorema da decomposição de polinômios tem-se

$$F(z) = a_0 \prod (z + w_j) \prod (z + (t_q + iv_q))(z + (t_q - iv_q)) = a_0 \prod (z + w_j) \prod ((z + t_q)^2 + v_q^2).$$

Supondo que $a_0 > 0$, segue que

$$\frac{F(z)}{a_0} = \prod (z + w_j) \prod ((z + t_q)^2 + v_q^2).$$

Como $F \in \mathcal{H}$ tem-se que $-w_j < 0$ e $-t_q < 0$. Logo $\frac{F(z)}{a_0}$ é um polinômio com coeficientes positivos.

De maneira análoga prova-se para $-a_0 < 0$, tomando $-F(z)$. □

Devemos observar que a recíproca do resultado acima é falsa. Por exemplo, o polinômio $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1 = (z + i)(z - i)(z + 1)$, possui todos os coeficientes positivos, porém $P \notin \mathcal{H}$.

Logo, podemos concluir que se nem todos os coeficientes possuem o mesmo sinal, então $F \notin \mathcal{H}$.

Conforme mencionamos anteriormente, vários matemáticos renomados, como Routh [23], Hurwitz [10], Liénard e Chipart [15], se dedicaram ao estudo do problema de encontrar condições para que todas as raízes de uma equação polinomial tenham parte real negativa. Porém, nos dedicaremos ao estudo das condições desenvolvidas por Hurwitz, que são equivalentes ao critério determinado por Routh, e que muitas vezes, devido às contribuições essenciais destes dois grandes nomes da matemática, chamamos de condições ou critério de Routh-Hurwitz.

Faremos agora algumas considerações. Seja $F(z) = G(z) + H(z)$, em que

$$G(z) = \frac{1}{2} + [F(z) + (-1)F(-z)] = a_0 z^n + a_2 z^{n-2} + \dots,$$

e

$$H(z) = \frac{1}{2} + [F(z) - (-1)F(-z)] = a_1 z^{n-1} + a_3 z^{n-3} + \dots.$$

O resultado a seguir encontra-se em [24].

Lema 2.1. *Sejam*

$$F(z) = G(z) + H(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

e

$$\begin{aligned} F_1(z) &= a_1 H(z) + (a_1 G(z) - a_0 z H(z)) = a_1^2 z^{n-1} + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z^{n-2} \\ &\quad + (a_1 a_4 - a_0 a_5) z^{n-3} + \dots \\ &\quad + a_1 a_{2m-1} z^{n-2m+1} + (a_1 a_{2m} - a_0 a_{2m+1}) z^{n-2m} + \dots + b \end{aligned}$$

onde $b = a_1 a_n$ se n é par ou $b = a_1 a_{n-1}$ se n é ímpar. Então $F(z) \in \mathcal{H}$ se e somente se $F_1(z) \in \mathcal{H}$.

Seja o polinômio $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ com coeficientes reais e $a_0 > 0$. Consideremos os seguintes determinantes [6]:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |a_1|, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_j \end{vmatrix}.$$

Observe que $a_j = 0$ para $j > n$. A matriz quadrada Δ_k de ordem n é conhecida como matriz de Hurwitz.

Para o polinômio

$$\begin{aligned} F_1(z) &= a_1^2 z^{n-1} + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z^{n-2} + (a_1 a_4 - a_0 a_5) z^{n-4} \\ &\quad + \cdots + a_1 a_{2m-1} z^{n-2m+1} + (a_1 a_{2m} - a_0 a_{2m+1}) z^{n-2m} + \cdots + b. \end{aligned}$$

em que $b = a_1 a_n$ se n é par ou $b = a_1 a_{n-1}$ se n é ímpar e $j = 1, \dots, n-1$ podemos usar a mesma idéia de formação anterior e construir os determinantes

$$\begin{aligned} \delta_1 &= |a_1 a_2 - a_0 a_3|, \\ \delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_3 \\ a_1^2 & a_1 a_4 - a_0 a_5 \end{vmatrix}, \\ &\vdots \\ \delta_k &= \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_3 & \cdots \\ a_1^2 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & \cdots \\ 0 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & \cdots \\ 0 & a_1^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

O lema a seguir descreve a relação de dependência existente entre os determinantes δ_k e Δ_k . Mais detalhes sobre este resultado podem ser encontrados em [14].

Lema 2.2. *Sejam δ_k e Δ_k os determinantes definidos anteriormente. A relação entre eles é dada por*

$$\delta_k = a_1^{k-1} \Delta_{k+1}, \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

O resultado a seguir encontra-se em [6], será muito importante na análise dos modelos estudados no próximo capítulo.

Teorema 2.4. (Critério de Routh-Hurwitz) *Sejam $a_i \in \text{Re}$, $i = 1, \dots, n$, $a_0 > 0$ e o polinômio*

$$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Uma condição necessária e suficiente para que todos os zeros de $F(z)$ tenham parte real negativa é que $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. A demonstração deste resultado será feita por indução finita.

Se $n = 1$, o teorema é verdadeiro. De fato, se $F(z) = a_0z + a_1$ é um polinômio de Hurwitz, então a_0 e a_1 possuem o mesmo sinal. Logo $a_1 > 0$. Assim $\Delta_1 = \det(a_1) > 0$.

Se $\Delta_1 > 0$, então $a_1 > 0$. Como $a_0z = -a_1$, isto é, $z = \frac{-a_1}{a_0}$, temos que $\Re(z) < 0$ e então $F \in \mathcal{H}$.

Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para $k = l - 1$. Se $F(z) \in \mathcal{H}$, então, pelo Lema (2.1), $F_1(z) \in \mathcal{H}$. Assim,

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_{l-1} > 0.$$

Como $\delta_l = a_1^{l-1} \Delta_{l+1}$ (Lema (2.2)) temos que

$$\Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_l > 0.$$

Temos que mostrar ainda que $\Delta_1 > 0$. Mas pelo Teorema (2.3), segue que $\Delta_1 = a_1 > 0$. Logo $\Delta_j > 0 \quad j = 1, \dots, l$.

Reciprocamente, se

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_l > 0,$$

então

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_{l-1} > 0.$$

Portanto $F_1 \in \mathcal{H}$ pela hipótese de indução. Logo $F(z) \in \mathcal{H}$, pelo Lema (2.1). Contudo, o teorema é verdadeiro para l e a indução está completa. $\square$

Como consequência deste teorema, caso algum $\Delta_k \leq 0$, $k = 1, \dots, n$, $F \notin \mathcal{H}$ e, obviamente, pelo menos um zero de $F(z)$ tem parte real positiva ou nula. A seguir analisaremos o caso em que algum $\Delta_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Para facilitar, dividiremos os coeficientes da função $F(z)$ por a_0

$$\frac{F(z)}{a_0} = \frac{a_0}{a_0}z^n + \frac{a_1}{a_0}z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}z^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}z + a_n$$

obtendo o polinômio

$$P(z) = z^n + A_1z^{n-1} + A_2z^{n-2} + \dots + A_n.$$

Portanto, a matriz de Hurwitz para $P(z)$ é dada por:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & A_7 & \cdots & A_{2k-1} \\ 1 & A_2 & A_4 & A_6 & \cdots & A_{2k-2} \\ 0 & A_1 & A_3 & A_5 & \cdots & A_{2k-3} \\ 0 & 1 & A_2 & A_4 & \cdots & A_{2k-4} \\ 0 & 0 & A_1 & A_3 & \cdots & A_{2k-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_k \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Para os casos singulares em que alguns dos determinantes de Hurwitz são zero, temos a seguinte fórmula de Orlando, considerando $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, que expressa o determinante Δ_{n-1} em termos do coeficiente principal a_0 e os zeros $z_1, z_2, \dots, z_n$ do polinômio $F(z)$:

$$\Delta_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{n-1} \prod_{i < n}^{1 \dots n} (z_i + z_k). \quad (2.15)$$

Na referência [6] encontramos uma demonstração feita através do processo de indução finita afirmando que a fórmula de Orlando é válida para polinômios de grau arbitrário, e ainda tal prova possibilita concluir que

$$D = (-1)^n \Delta_{n-1} F(h)$$

onde $h = -z_{n-1}$ e D é um determinante auxiliar de ordem $n+1$ dado por:

$$D = \det \begin{vmatrix} b_0, & b_1, & \cdots, & b_{n-1}, & h^n \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_{n-1}, & -h^{n-1} \\ 0, & b_0, & \cdots, & b_{n-2}, & h^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots & \cdots, & (-1)^n \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{ll} a_k = 0 & \text{se } k > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ b_k = 0 & \text{se } k > \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \end{array} \right).$$

Segue-se a partir da fórmula de Orlando que $\Delta_{n-1} = 0$ se e somente se a soma de pelo menos um par de zeros do polinômio é zero. Em particular, $\Delta_{n-1} = 0$ se $F(z)$ tem pelo menos um par de zeros conjugados imaginários puros ou tem zero como um zero múltiplo:

1. Zeros múltiplos $\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$.
2. Zeros opostos $\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \lambda \\ z_2 = -\lambda \end{cases}$.
3. Zeros complexos conjugados $\Rightarrow \begin{cases} z_1 = i\mu \\ z_2 = -i\mu \end{cases}$.

Como

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

segue que $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$. Mas a_n é o termo constante do polinômio $F(z)$ e, pelas fórmulas de Viète, segue que $a_n = (-1)^n a_0 z_1 z_2 \cdots z_n$. Assim, a partir da fórmula (2.15), temos

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_0 z_1 z_2 \cdots z_n \prod_{i < n}^{1 \dots n} (z_i + z_k). \quad (2.16)$$

A fórmula (2.16) mostra que Δ_n se anula se e somente se $F(z)$ tem uma raiz z tal que $-z$ também é uma raiz.

Estudo dos Memristores

Neste capítulo, analisaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio de alguns sistemas de equações diferenciais ordinárias de terceira e quarta ordens, apresentados em [11], que representam circuitos elétricos envolvendo um *memristor*.

Um circuito RLC é um circuito elétrico consistindo de um capacitor (C), um resistor (R) e um indutor (L), conectados em série ou em paralelo, que por mais de 150 anos foram considerados os elementos fundamentais de um circuito elétrico, descobertos em 1745, 1827 e 1831, respectivamente. Contudo, Leon Chua, em 1971, estudando as relações entre as quatro variáveis fundamentais de um circuito (corrente i , voltagem v , carga q e fluxo magnético φ), observou que existem seis relações entre estas variáveis. Cinco dessas relações são conhecidas, sendo duas dadas pela definição de corrente e pela lei de Faraday

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad v = \frac{d\varphi}{dt}.$$

As outras três são equações básicas do circuito

$$R = \frac{dv}{di}, \quad C = \frac{dq}{dv} \quad \text{e} \quad L = \frac{d\varphi}{di},$$

onde R , C e L representam a resistência, a capacitância e a indutância, respectivamente, porém, para Chua faltava uma relação entre φ e q .

Devido a esse fato, ele percebeu que existiria um quarto elemento básico para um circuito, o qual denominou *memristor*. Chua provou matematicamente que tal dispositivo estabelecia uma relação entre fluxo e carga, semelhante a relação entre voltagem e corrente que um resistor não-linear forneceria. Em 1971, Leon Chua demonstrou em [3] que as propriedades do *memristor* não poderiam ser dadas por qualquer combinação dos outros

três elementos, por isso ele é o quarto elemento fundamental da física, definido por

$$\frac{d\varphi(q)}{dq} = M(q),$$

em que M denota a memristência, propriedade do *memristor*, assim como a resistência é uma propriedade do resistor. As relações estão ilustradas na figura a seguir.

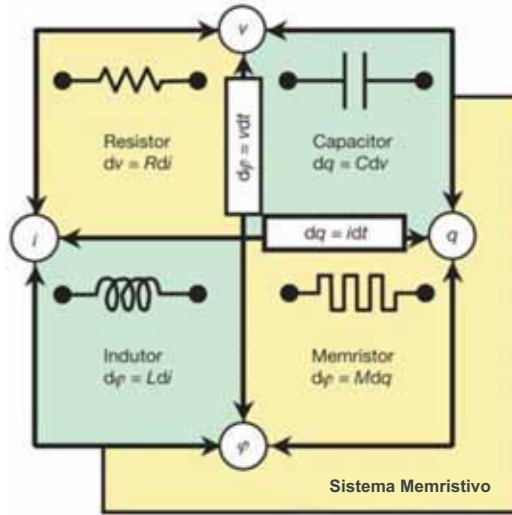


Figura 3.1: Relação de variáveis entre os quatro elementos fundamentais: resistor, capacitor, indutor e memristor. Referência: Fonte [11].

Em [11], temos que o *memristor* é um dispositivo eletrônico passivo, de dois terminais, descrito por uma função não-linear entre a voltagem v e a corrente i , em que chamamos de carga controlada (fluxo controlado) se a relação for expressa como único valor da função q (do fluxo associado φ), representado na figura a seguir.

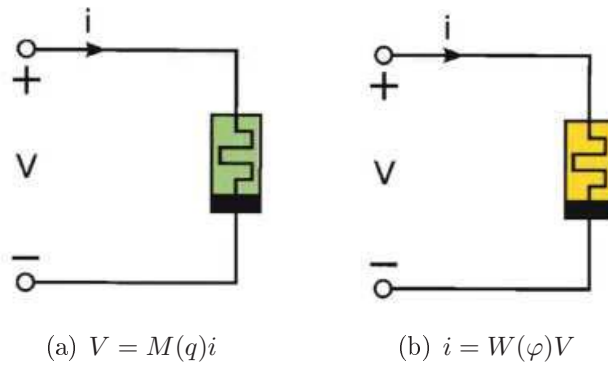


Figura 3.2: (a) *Memristor* de carga controlada. (b) *Memristor* de fluxo controlado. Fonte: Referência [11].

A voltagem é dada por

$$v(t) = M(q)i(t),$$

em que $M(q)$ é a memristência que tem a unidade de medida da resistência, dada por

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq}$$

e a corrente é dada por

$$i(t) = W(\varphi)v(t),$$

sendo $W(\varphi)$ a memdutância, dada por

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi},$$

com

$$q \triangleq \int_{-\infty}^t i(t)dt \quad \text{e} \quad \varphi \triangleq \int_{-\infty}^t v(t)dt$$

Segundo [3], o *memristor* caracterizado por uma curva diferenciável $q(\varphi)$ (resp., $\varphi(q)$) é passivo se, e somente se, $M(q)$ (resp. $W(\varphi)$) é não-negativa, isto é

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq} \geq 0 \quad (\text{resp. } W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \geq 0).$$

Itoh e Chua, em [11], consideram as funções φ e q como funções monótonas crescentes e lineares por partes, como podemos observar na Figura (3.3), dada por

$$\varphi(q) = bq + 0,5(a - b)(|q + 1| - |q - 1|) \quad \text{e} \quad q(\varphi) = d\varphi + 0,5(c - d)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|),$$

com $a, b, c, d > 0$.

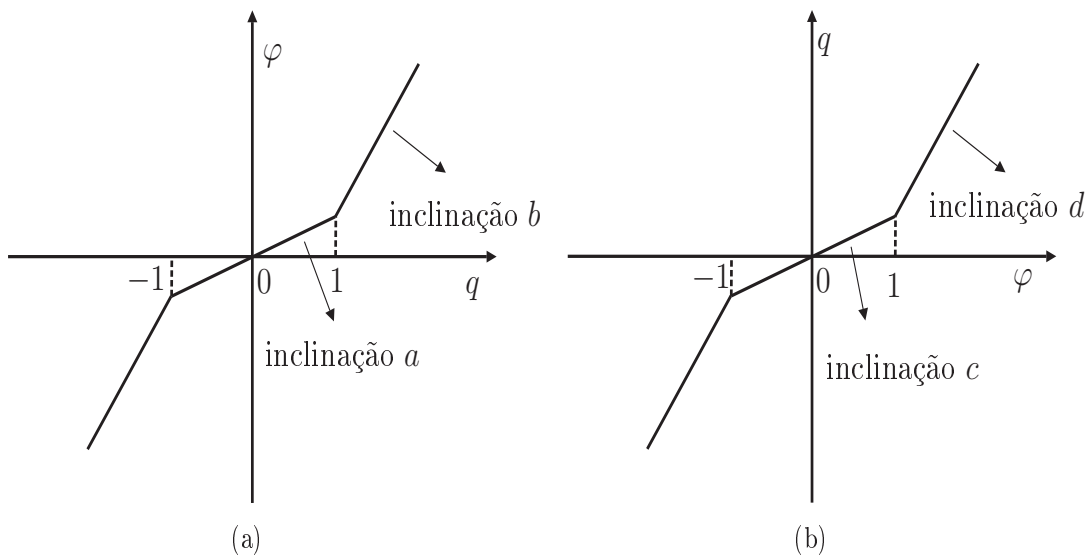


Figura 3.3: Relação constitutiva de um *memristor* monotonamente crescente e linear por partes. (a) *Memristor* de carga controlada. (b) *Memristor* de fluxo controlado. Fonte: Referência [11].

A memristência $M(q)$ e a memdutância $W(\varphi)$ de um *memristor* são definidas por

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq} = \begin{cases} a & \text{se } |z| < 1 \\ b & \text{se } |z| > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = \begin{cases} c & \text{se } |z| < 1 \\ d & \text{se } |z| > 1 \end{cases}.$$

A potência dissipada pelo *memristor* é dada por

$$p(t) = v(t)i(t) = M(q(t))i(t)^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad p(t) = v(t)i(t) = W(\varphi(t))v(t)^2 \geq 0,$$

com fluxo de energia no *memristor* de t_0 a t satisfazendo

$$\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \geq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Assim, o *memristor* com as propriedades apresentadas na Figura (3.3) é do tipo passivo.

Em [11], os autores apresentaram diversos sistemas de equações diferenciais ordinárias que representam determinadas situações de um circuito que utiliza o *memristor* em sua composição. Eles obtiveram modelos matemáticos para os circuitos com *memristor*, substituindo no circuito de Chua o diodo de Chua pelo *memristor*.

Nas sessões seguintes, apresentaremos o estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio de três sistemas de equações diferenciais ordinárias de terceira ordem e um de quarta ordem, lineares por partes com alguns parâmetros livres.

A Figura (3.4) representa o circuito de Chua, sendo este o mais simples circuito eletrônico exibindo um comportamento caótico [16]. A Figura (3.5) é um circuito de Chua com oscilador canônico, que também tem um atrator caótico [4]. Os sistemas lineares por partes que estudaremos nas sessões a seguir modelam o circuito de Chua, no qual foi projetado um oscilador não-linear, substituindo o “diodo de Chua” no oscilador canônico de Chua por um *memristor* caracterizado por uma função “monótona crescente” e “linear por partes”.

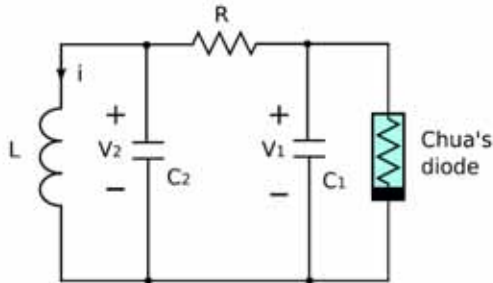


Figura 3.4: Circuito de Chua. Fonte: Referência [11].

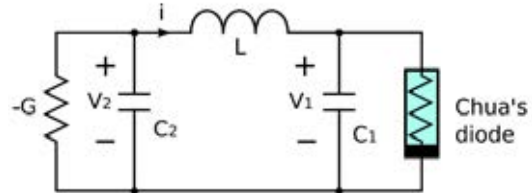


Figura 3.5: Oscilador canônico de Chua. Fonte: Referência [11].

3.1 Circuito com memristor de terceira ordem

3.1.1 Memristor com oscilador canônico de terceira ordem

A Figura (3.6) foi obtida por Itoh e Chua substituindo na Figura (3.5) o diodo de Chua por um *memristor* de fluxo controlado. E o circuito dual da Figura (3.7), pode ser obtido usando um *memristor* carga controlada.

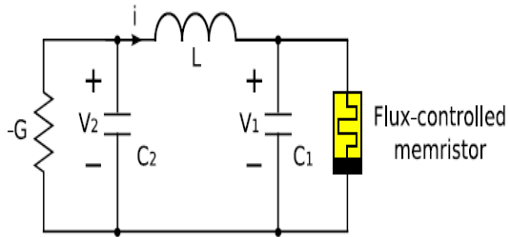


Figura 3.6: Oscilador canônico de Chua com *memristor* fluxo controlado. Fonte: Referência [11].

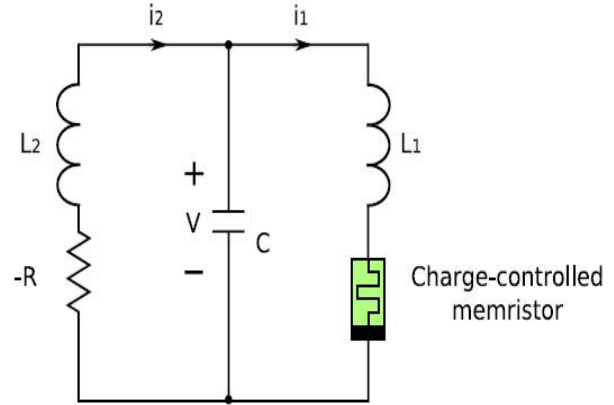


Figura 3.7: Circuito dual com um *memristor* carga controlada. Fonte: Referência [11].

Os circuitos objetos de estudo desta seção, representados nas Figuras (3.8) (respectivamente (3.9)) foram obtidos removendo um capacitor (indutor, respectivamente) do circuito da Figura (3.6) (resp. (3.7)).

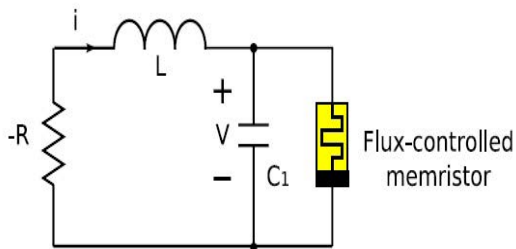


Figura 3.8: Oscilador de terceira ordem com *memristor* fluxo controlado. Fonte: Referência [11].

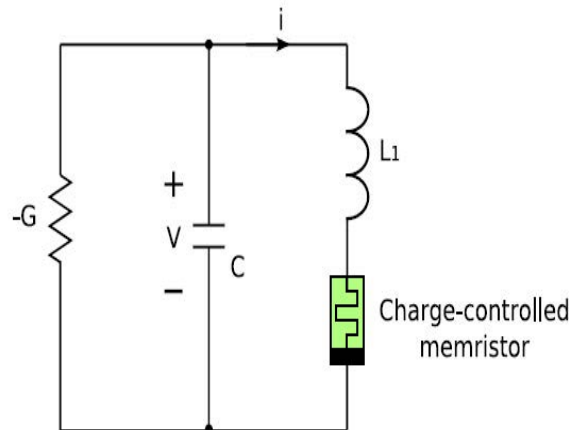


Figura 3.9: Circuito dual com um *memristor* carga controlada. Fonte: Referência [11].

Aplicando as leis de Kirchhoff no nó A e no laço C do circuito mostrado na Figura (3.8),

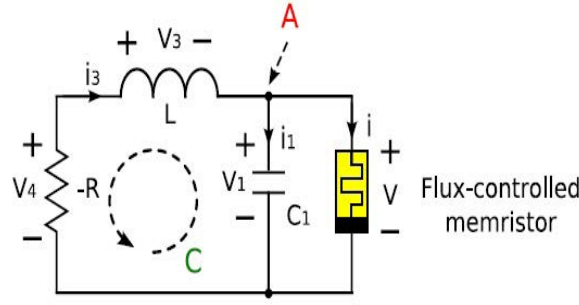


Figura 3.10: Corrente i_j , voltagem v_j , nó A e laço c . Fonte: Referência [11].

obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} i_1 = i_3 - i \\ v_3 = v_4 - v_1 \end{cases} . \quad (3.1)$$

Em [11], encontramos o sistema de equações que define a relação entre carga e fluxo, obtido integrando o sistema (3.1) com relação ao tempo:

$$\begin{cases} q_1 = q_3 - q(\varphi) \\ \varphi_3 = \varphi_4 - \varphi_1 \end{cases} , \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} q_1 &\triangleq \int_{-\infty}^t i_1(t)dt, & q_3 &\triangleq \int_{-\infty}^t i_3(t)dt, & q &\triangleq \int_{-\infty}^t i(t)dt, \\ \varphi_1 &\triangleq \int_{-\infty}^t v_1(t)dt, & \varphi_3 &\triangleq \int_{-\infty}^t v_3(t)dt, & \varphi_4 &\triangleq \int_{-\infty}^t v_4(t)dt, & \varphi &\triangleq \int_{-\infty}^t v(t)dt = \varphi_1. \end{aligned}$$

Lembrando que q_1 , q_2 e q denotam a carga no capacitor C_1 , no indutor L e no *memristor*, respectivamente, e φ_1 , φ_3 , φ_4 e φ denotam o fluxo no capacitor C_1 , no indutor L , na resistência $-R$ e no *memristor*, respectivamente. Considere o *memristor* caracterizado pela função monótona crescente e linear por partes dada por

$$q(\varphi) = b\varphi + 0,5(a-b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|), \quad (3.3)$$

em que $a, b > 0$. Resolvendo o sistema (3.2) para q_3 e φ_4 , obtemos

$$\begin{cases} q_3 = q_1 + q(\varphi) \\ \varphi_4 = \varphi_3 + \varphi \end{cases} .$$

Diferenciando o sistema (3.2) com relação ao tempo t , obtemos o sistema de três equações diferenciais de primeira ordem, que define a relação entre as três variáveis v_1 , i_3 ,

φ

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} = i_1 - W(\varphi)v_1 \\ L \frac{di_3}{dt} = Ri_3 - v_1 \\ \frac{d\varphi}{dt} = v_1 \end{cases}, \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} = i_1 = C \frac{dv_1}{dt}, \quad \frac{dq_3}{dt} = i_3, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = v_1, \\ \frac{d\varphi_3}{dt} = v_3 = L \frac{di_3}{dt}, \quad \frac{d\varphi_4}{dt} = v_3 = Ri_3, \quad W(\varphi) = \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variáveis e parâmetros, isto é, $x = v_1$, $y = i_3$, $z = \varphi$, $\alpha = \frac{1}{C_1}$, $\xi = \frac{1}{L}$ e $\beta = \frac{R}{L}$, e considerando as funções lineares por partes $q(z)$ e $W(z)$, definidas por,

$$q(z) = bz + 0,5(a - b)(|z + 1| - |z - 1|)$$

e

$$W(z) = \begin{cases} a & \text{se } |z| < 1 \\ b & \text{se } |z| > 1 \end{cases},$$

o sistema (3.4) pode ser transformado no seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(z)x) \\ \frac{dy}{dt} = -\xi x + \beta y \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases}, \quad (3.5)$$

com α , ξ , β , a e b constantes positivas.

Observe que o sistema (3.5) não pode ser definido nos planos $z = \pm 1$, pois o mesmo está definido em três zonas no $\mathbb{R}^3$, determinadas pelas inequações $|z| < 1$ e $|z| > 1$, sendo que a fronteira são os planos $z = \pm 1$.

Analisando o sistema (3.5), notamos que os pontos de equilíbrio desse sistema são da forma $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0, \quad z \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

A matriz A associada ao sistema (3.5) é da forma

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha W(z) & \alpha & 0 \\ \xi & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$ obtemos seu polinômio característico dado por

$$P(\lambda) = -\lambda[\lambda^2 - [\beta - \alpha W(z)]\lambda + \alpha[\xi - \beta W(z)]], \quad (3.7)$$

sendo seus autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3}$ dados pelo solução da equação quadrática

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - [\beta - \alpha W(z)]\lambda + \alpha[\xi - \beta W(z)] = 0. \quad (3.8)$$

Assumindo $\tau = \beta - \alpha W(z)$, $D = \alpha(\xi - \beta W(z))$ e $\Delta = \tau^2 - 4D$, os zeros de $Q(z)$ são dados por

$$\lambda_{2,3} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4D}}{2}. \quad (3.9)$$

Os autovetores correspondentes aos autovetores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3}$ são dados respectivamente por $v_1 = (0, 0, 1)$,

$$v_2 = \left(\frac{\tau - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-(\beta + \alpha W(z) - \sqrt{\Delta})(-\tau + \sqrt{\Delta})}{4\alpha}, 1 \right)$$

e

$$v_3 = \left(\frac{\tau + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-(\beta + \alpha W(z) + \sqrt{\Delta})(-\tau - \sqrt{\Delta})}{4\alpha}, 1 \right).$$

Veja que, $P(\lambda)$ é um polinômio de terceira ordem e encontrar seus zeros é relativamente simples, observe ainda que ao analisarmos os autovalores percebemos que $\lambda = 0$ é um autovalor de $P(\lambda)$ e os outros dois são obtidos através do polinômio $Q(\lambda)$ que é de segunda ordem, e encontrar seus zeros é muito fácil, basta usar a fórmula de Bháskara, porém se tivermos um polinômio de ordem maior que 3, sabemos que encontrar seus zeros não é uma tarefa nada fácil, e mais, muitas vezes estamos interessados apenas em analisar a estabilidade do sistema de equações, não precisamos explicitar os zeros do polinômio associado ao sistema em questão, isso justifica o uso do Critério de Routh-Hurwitz que nos permitirá dizer quando um polinômio é estável ($Q \in \mathcal{H}$) sem a necessidade de explicitar seus zeros, conforme veremos abaixo nessa seção e nas outras três seções seguintes.

Lema 3.1. $Q \in \mathcal{H}$ se, e somente se, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$ em que $\alpha, \beta, \xi, a, b > 0$.

Demonstração. Seja $Q(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + D$, com $\tau = \beta - \alpha W(z)$, $D = \alpha(\xi - \beta W(z))$ e

$$W(z) = \begin{cases} a & \text{se } |z| < 1 \\ b & \text{se } |z| > 1 \end{cases},$$

$\alpha, \beta, \xi, a, b > 0$. Para que $Q \in \mathcal{H}$, através do Teorema (2.4), devemos ter:

$$\Delta_1 = -\tau > 0, \text{ isto é, } \beta - \alpha W(z) = \tau < 0$$

e

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} -\tau & 0 \\ 1 & D \end{pmatrix} = -\tau D > 0, \text{ isto é, } \alpha(\xi - \beta W(z)) = D > 0.$$

Logo, $Q \in \mathcal{H}$ se, e somente se, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$. $\square$

Observe que a condição $\Delta \leq 0$ implica que $D > 0$, pois

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Leftrightarrow \tau^2 - 4D < 0 \Leftrightarrow 0 < \tau^2 < 4D \Rightarrow D > 0 \\ \Delta = 0 &\Leftrightarrow \tau^2 - 4D = 0 \Leftrightarrow 0 < \tau^2 = 4D \Rightarrow D > 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

O resultado a seguir determina condições necessárias e suficientes para que os pontos de equilíbrio do sistema (3.5) sejam estáveis.

Teorema 3.1. *Os pontos de equilíbrio do sistema (3.5) são estáveis se, e somente se, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$, com $\alpha, \beta, \xi, a, b > 0$ e*

$$W(z) = \begin{cases} a & \text{se } |z| < 1 \\ b & \text{se } |z| > 1 \end{cases}.$$

Demonstração. Como já descrito anteriormente, o polinômio característico relacionado ao sistema (3.5) é dado por

$$P(\lambda) = -\lambda[\lambda^2 - [\beta - \alpha W(z)]\lambda + \alpha[\xi - \beta W(z)]] = -\lambda Q(\lambda)$$

em que $Q(\lambda)$ é dado pela expressão (3.8).

Segue que os autovalores da matriz $A - \lambda I$ são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4D}}{2}$.

Em relação aos autovalores $\lambda_{2,3}$, segue, pelo Lema (3.1), que eles possuem parte real negativa se, e somente se, $\tau < 0$ e $D > 0$.

Como um dos autovalores de A é igual a zero, podem ocorrer situações em que os pontos de equilíbrio são degenerados.

Logo, os pontos de equilíbrio $(0, 0, z)$ do sistema (3.5) são estáveis se, e somente se, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$. $\square$

Graficamente, temos as seguintes situações possíveis, considerando $\alpha, \beta, \xi, a, b > 0$ e $a < b$:

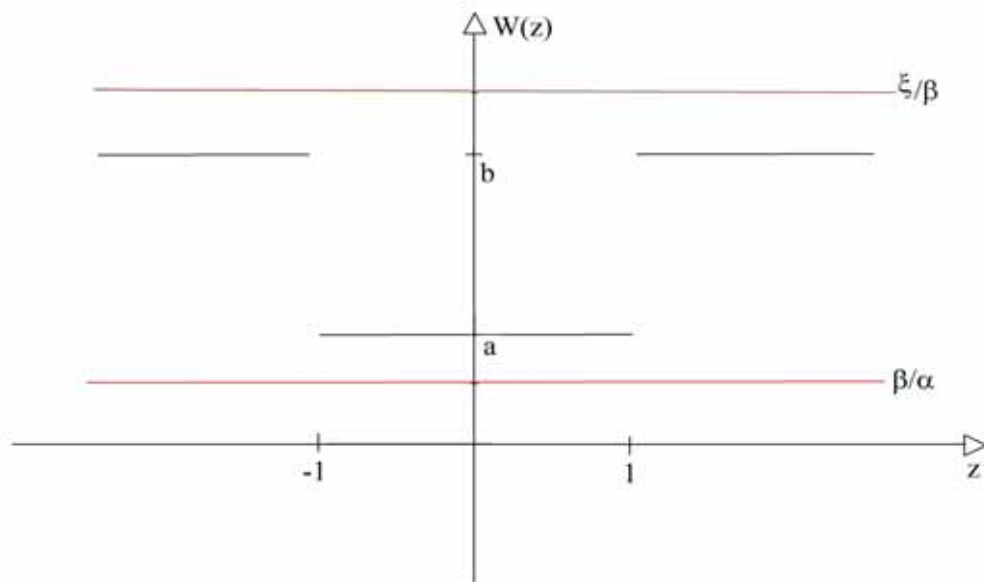


Figura 3.11: Para todo z , $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$.

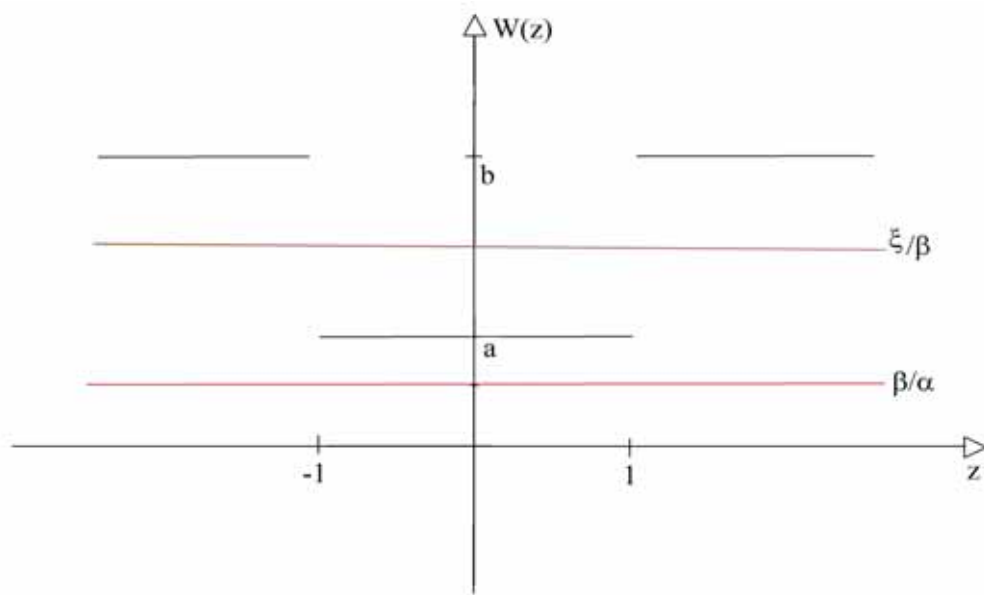


Figura 3.12: Para $|z| < 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$. Para $|z| > 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$.

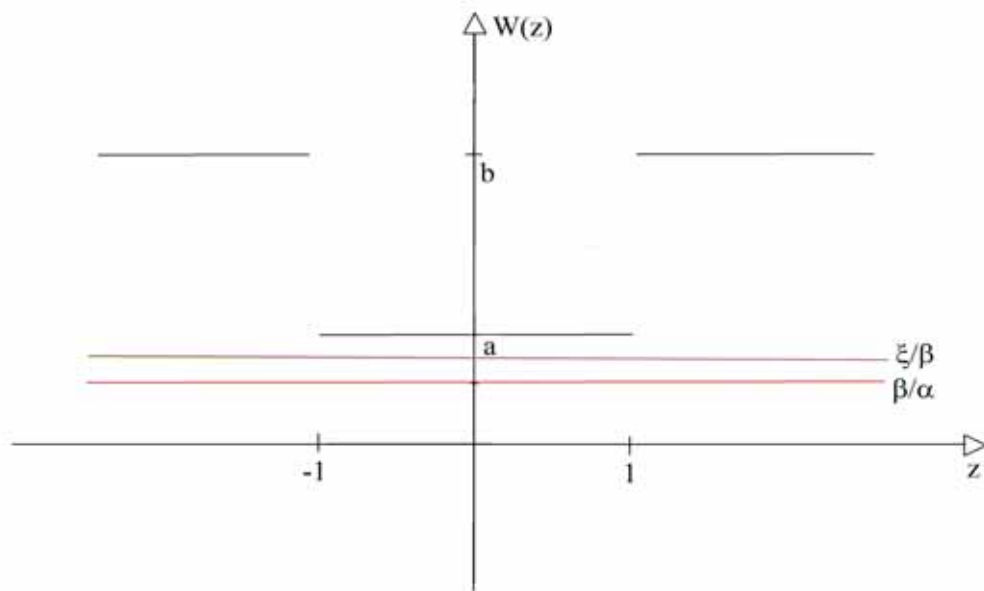


Figura 3.13: Para todo z , $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$.

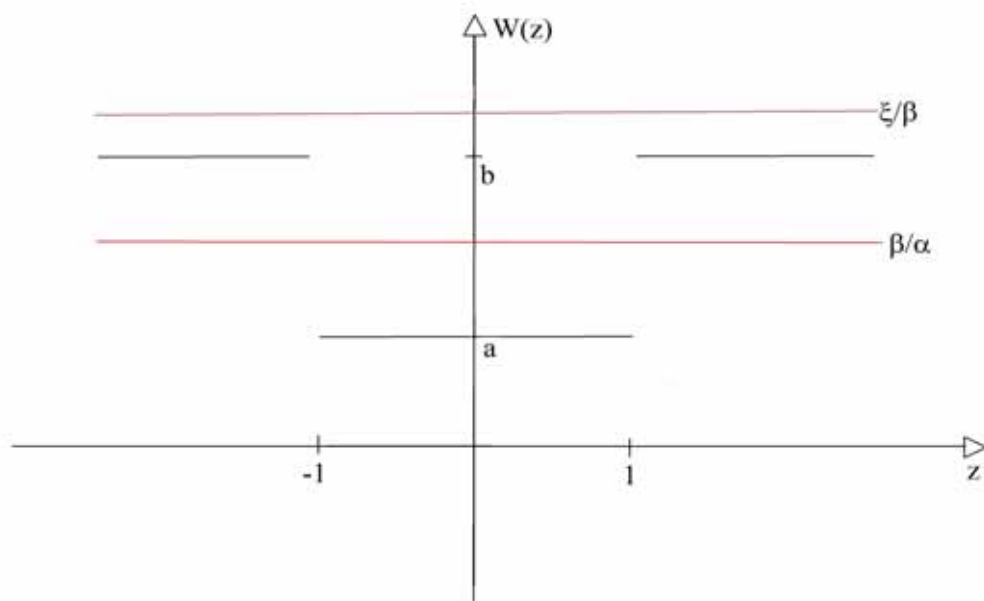


Figura 3.14: Para $|z| < 1$, $W(z) < \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$. Para $|z| > 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$.

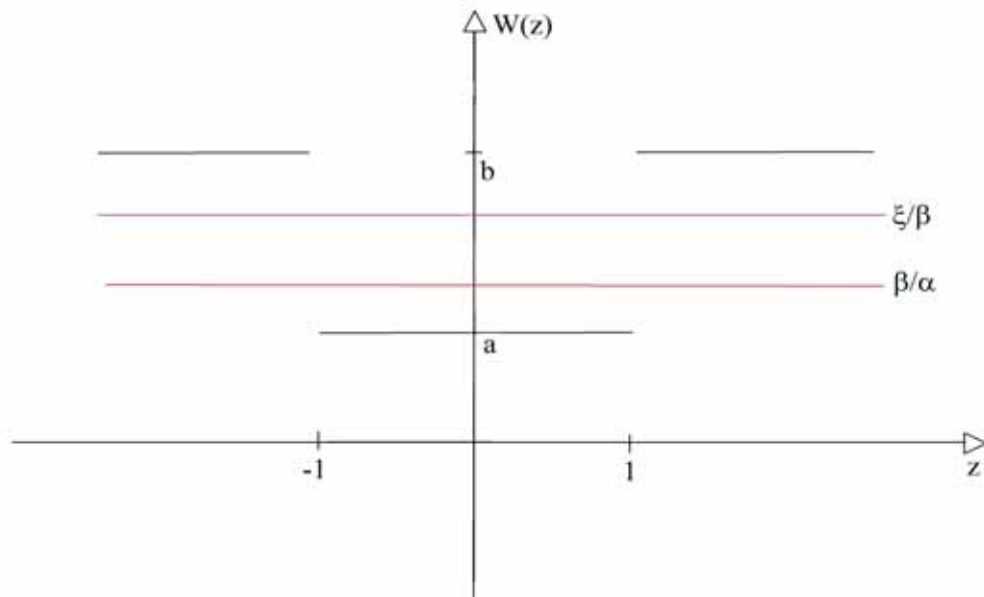


Figura 3.15: Para $|z| < 1$, $W(z) < \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$. Para $|z| > 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$.

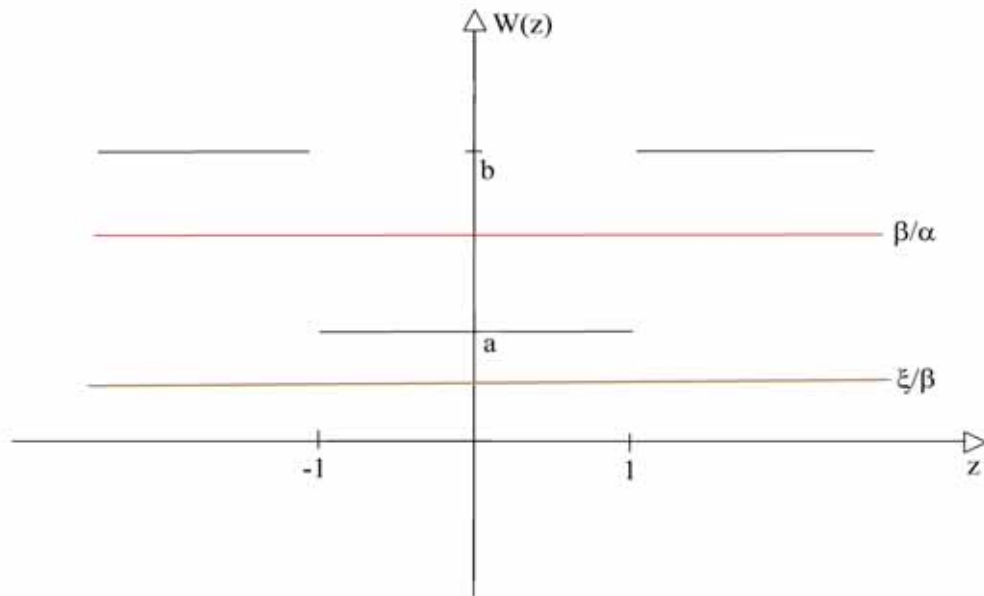


Figura 3.16: Para $|z| < 1$, $W(z) < \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$. Para $|z| > 1$, $W(z) > \frac{\beta}{\alpha}$ e $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$.

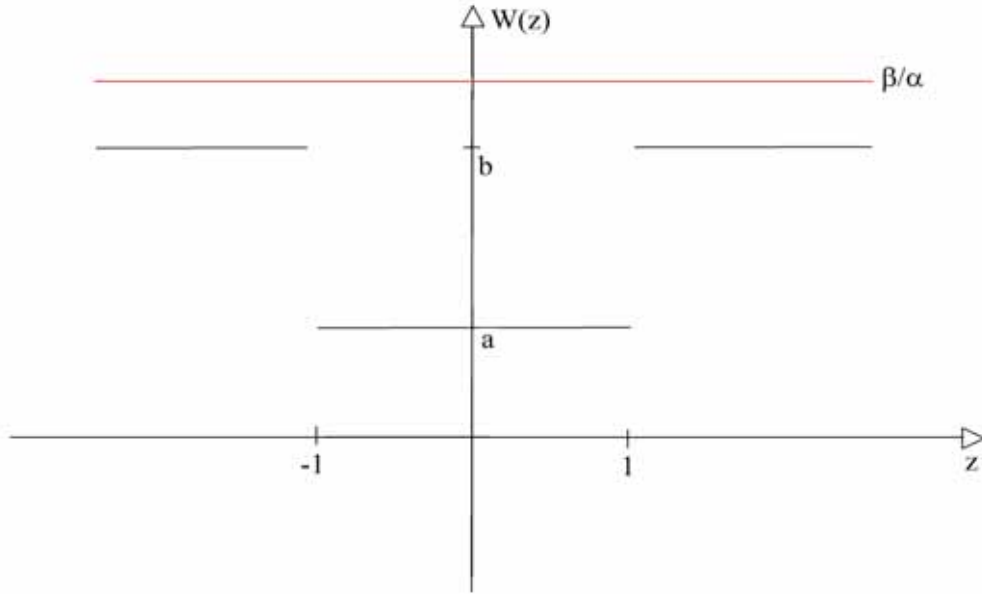


Figura 3.17: Para todo z , $W(z) < \frac{\beta}{\alpha}$, independente da posição de $\frac{\xi}{\beta}$.

De maneira análoga podemos representar o caso em que $0 < a < b$.

Vale ressaltar que a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema (3.5) já foi objeto de estudo das referências [19] e [20], dentre outros.

Em [20], o seguinte resultado foi apresentado:

Teorema 3.2. *A estabilidade linear dos pontos de equilíbrio $(0, 0, z)$ do sistema (3.5), com $0 < a < b$ é descrito na Tabela (3.1) a seguir, de acordo com os parâmetros positivos α, β, ξ, a, b .*

Condições sobre τ	Condições sobre Δ	Estabilidade Local de $(0, 0, z)$		Casos
		$ z < 1$	$ z > 1$	
$\tau < 0$ $\left(\frac{\beta}{\alpha} < W(z)\right)$	$\Delta < 0$	Foco estável	Foco Estável	(a)
	$\Delta = 0$	Nó impróprio estável	Nó próprio estável	(b)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$	Nó estável	Nó estável	(c)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$	Sela	Sela	(d)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco estável	(e)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó estável	Foco estável	(f)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z > 1$	Foco estável	Sela	(g)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco estável	nó estável	(h)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco estável	nó estável	(h)
$\tau > 0$ $\left(\frac{\beta}{\alpha} > W(z)\right)$	$\Delta < 0$	Foco instável	Foco instável	(i)
	$\Delta = 0$	Nó impróprio instável	Nó impróprio instável	(j)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$	Nó instável	Nó instável	(k)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$	Sela	Sela	(l)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco instável	(m)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó instável	Foco instável	(n)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z > 1$	Foco instável	Sela	(o)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco instável	Nó instável	(p)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco instável	Nó instável	(p)
τ muda de sinal de acordo com z $\left(a < \frac{\beta}{\alpha} < b\right)$	$\Delta < 0$	Foco instável	Foco estável	(q)
	$\Delta = 0$	Nó impróprio instável	Nó impróprio estável	(r)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$	Nó instável	Nó estável	(s)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$	Sela	Sela	(t)
	$\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Sela	Foco estável	(u)
	$\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z < 1$ $\Delta < 0$ se $ z > 1$	Nó estável	Foco estável	(v)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D < 0$ se $ z > 1$	Foco instável	Sela	(w)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco instável	Nó estável	(x)
	$\Delta < 0$ se $ z < 1$ $\Delta > 0$ e $D > 0$ se $ z > 1$	Foco instável	Nó estável	(x)

Tabela 3.1: Estabilidade local dos pontos de equilíbrio $(0, 0, z)$. Fonte: Referência [20].

A demonstração deste resultado pode ser vista em [20].

Para o caso em que $0 < b < a$, maiores detalhes podem ser encontrados em [19].

Fazendo uma comparação entre os resultados apresentados pelos Teoremas (3.1) e (3.2) (no caso em que $0 < a < b$), obviamente temos que a análise segundo o Teorema (3.2) é mais completa, fornecendo a topologia do retrato de fases do sistema (3.5). Porém, em alguns casos, somente a estabilidade do sistema é importante, o que justifica a apresentação do Teorema (3.1). Além disso, convém destacar o seguinte:

1. As condições obtidas no Teorema (3.1) estão descritas nos itens (a), (b), (c), (e) para $|z| > 1$, (f), (g) para $|z| < 1$, (h), (q) para $|z| > 1$, (r) para $|z| > 1$, (s) para

$|z| > 1$, (u) para $|z| > 1$, (v) para $|z| > 1$, (x) para $|z| > 1$ (que são os casos em que os pontos de equilíbrio do sistema (3.5) são estáveis, segundo [20]).

2. A tabela abaixo relaciona os casos da Tabela (3.1) com as figuras anteriores:

Casos da Tabela (3.1.1)	Figuras relacionadas
$(a), (b), (c), (f), (h)$	(3.11)
(g)	(3.12)
(d)	(3.13)
$(q), (r), (s), (x), (v)$	(3.14)
(w)	(3.15)
(t)	(3.16)
$(i), (j), (k), (l), (p), (n), (0)$	(3.17)

Tabela 3.2: Tabela de comparação entre a Tabela (3.1) e os gráficos que ilustram o Teorema (3.1).

3. Observe que os itens (e) , (m) e (u) são impossíveis de ocorrer quando $0 < a < b$, pois analisando as condições sobre Δ na Tabela (3.1), em tais itens segue que existe uma mudança de sinal de D em relação às regiões $|z| < 1$ e $|z| > 1$, cuja única representação gráfica pode ser visualizada na Figura (3.18) (no caso em que $0 < a < b$).

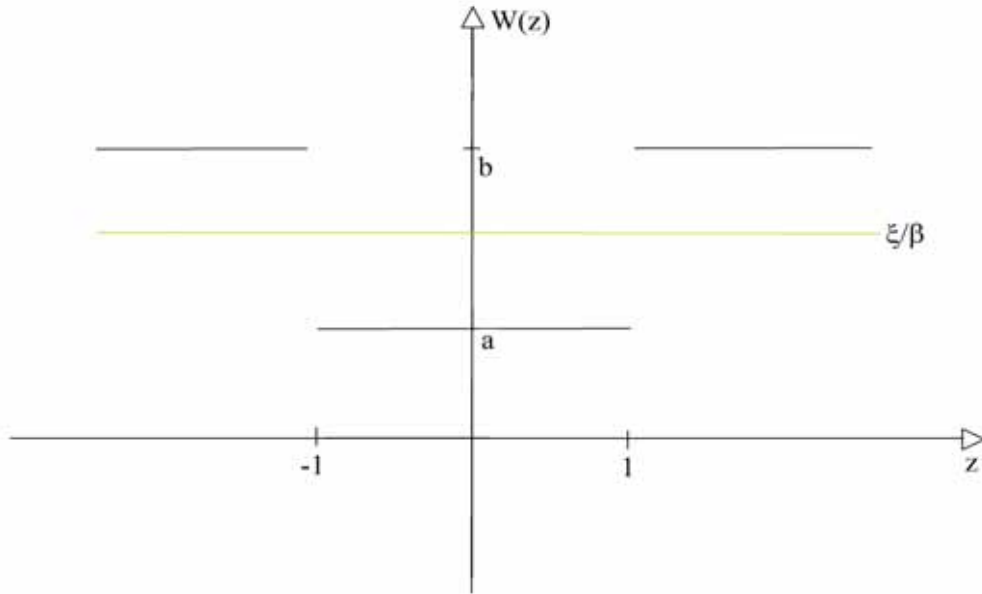


Figura 3.18: Para $|z| < 1$, $W(z) < \frac{\xi}{\beta}$ e para $|z| > 1$ $W(z) > \frac{\xi}{\beta}$.

Porém, em tais itens segue que $D < 0$ para $|z| < 1$, isto é, $a = W(z) > \frac{\xi}{\beta}$, e $D > 0$ para $|z| > 1$ (segue da observação (3.10)), isto é, $b = W(z) < \frac{\xi}{\beta}$, contradizendo o que foi apresentado na figura acima. Contudo, no caso em que $0 < b < a$, tal fato já é possível de ocorrer, conforme demonstrado em [19].

4. Em [19] mostrou-se também que os casos (f) , (m) e (v) são impossíveis de ocorrer quando $0 < a < b$. Porém, tal fato não é possível de ser demonstrado através da interpretação gráfica que utilizamos nos outros itens, visto que a análise apresentada em [19] se baseia na mudança de sinal de Δ .
5. Os casos degenerados estão representados nos itens (b) , (j) e (r) da Tabela (3.1), que ocorrem quando $\Delta = 0$, isto é, $\tau^2 = 4D$, sendo estáveis nos casos (b) e (r) para $|z| > 1$ e não estáveis em (j) e (r) para $|z| < 1$.
6. Outro fato importante de ser destacado tem relação com o uso do Critério de Routh-Hurwitz. No caso do sistema (3.5), que é de terceira ordem, o polinômio característico relacionado tem grau 3 e como $\lambda = 0$ é zero de $P(\lambda)$, o problema de determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema (3.5) recai na análise da parte real dos zeros de $Q(\lambda)$, representado pela equação (3.8), que é um polinômio de grau 2. Tal análise é simples, visto que os zeros de $Q(\lambda)$ são determinados explicitamente pela fórmula de Bhaskara, onde não seria necessário o uso do Critério de Routh-Hurwitz. Porém, no caso de sistemas de equações diferenciais ordinárias de ordem maior que 2, a determinação dos zeros do polinômio característico torna-se cada vez mais difícil à medida que o grau do polinômio aumenta, o que justifica a utilização do Critério de Routh-Hurwitz, pois é possível analisar o sinal da parte real dos zeros de um polinômio sem a necessidade de calculá-los explicitamente. Por exemplo, na próxima seção estudaremos um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem 4, onde tal critério será de extrema importância.

3.1.2 Oscilador Canônico de terceira ordem com um memristor fluxo controlado

Nesta subseção faremos a análise de um sistema de equações diferenciais ordinárias que modelam o comportamento de um circuito, representado na Figura (3.19), obtido a partir de um curto circuito no resistor da Figura (3.8) em [11].

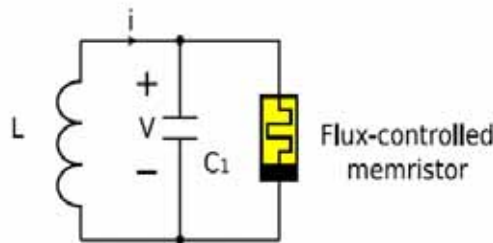


Figura 3.19: Circuito de terceira ordem com *memristor* fluxo-controlado. Fonte: Referência [11].

A dinâmica deste circuito é dada por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(z)x) \\ \frac{dy}{dt} = -\xi x \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases}, \quad (3.11)$$

em que α , ξ , a e b são constantes positivas.

O resultado a seguir estabelece condições necessárias e suficientes para que os pontos de equilíbrio do sistema (3.11) sejam estáveis.

Teorema 3.3. *Os pontos de equilíbrio do sistema (3.11) são sempre estáveis, considerando α , ξ , a e b constantes positivas e*

$$W(z) = \begin{cases} a & \text{se } |z| < 1 \\ b & \text{se } |z| > 1 \end{cases}.$$

Demonstração. Os pontos de equilíbrio do sistema (3.11) são da forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0, \quad z \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, z) / \quad y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Relacionado a este sistema, seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha W(z) & \alpha & 0 \\ -\xi & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = -\lambda[\lambda^2 + \alpha W(z)\lambda + \alpha\xi] = -\lambda Q(\lambda),$$

com $Q(\lambda) = \lambda^2 + \alpha W(z)\lambda + \alpha\xi$.

Observe que $\lambda_1 = 0$ é zero de $P(\lambda)$. Os outros zeros de $P(\lambda)$ são os zeros de $Q(\lambda)$.

Logo, para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio $(0, 0, z)$ do sistema (3.11), devemos determinar condições para os zeros de $Q(\lambda)$ tenham parte real negativa.

Através do Critério de Routh-Hurwitz, segue que

$$\Delta_1 = \alpha W(z) > 0, \quad \forall \alpha, a, b$$

e

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha W(z) & 0 \\ 1 & \alpha\xi \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow (\alpha W(z))(\alpha\xi) > 0, \quad \forall \alpha, \xi, a, b.$$

Logo, os pontos de equilíbrio do sistema (3.11) são sempre estáveis, para α, ξ, a, b po-

sitivos. □

3.1.3 Memristor de terceira ordem baseado no oscilador de Chua

Nesta subseção, analisaremos a estabilidade do sistema que representa um circuito obtido da seguinte maneira: consideraremos um circuito com o oscilador de Van der Pol e diodo de Chua, mostrado na Figura (3.20). Substituindo o diodo de Chua com um circuito de dois terminais consistindo de uma condutância e um *memristor* fluxo controlado, obteremos na Figura (3.21).

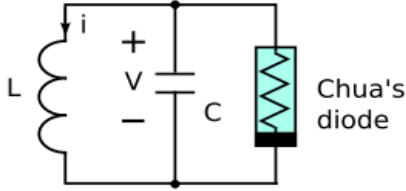


Figura 3.20: Oscilador de Van der Pol. Fonte: Referência [11].

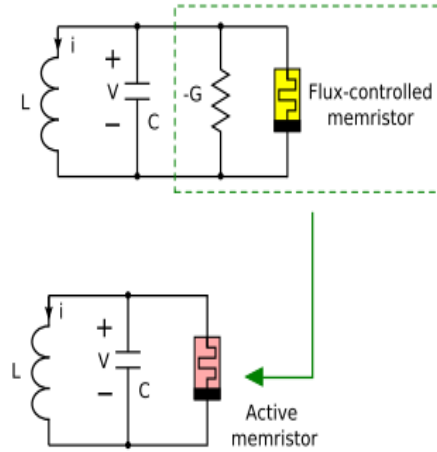


Figura 3.21: Oscilador de terceira ordem com *memristor* fluxo controlado e condutância negativa. Fonte: Referência [11].

A dinâmica deste circuito é dada por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(-y - W(z)x + \gamma x) \\ \frac{dy}{dt} = \beta x \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases} \quad (3.12)$$

, em que α , β , γ , a e b são constantes positivas.

O resultado a seguir estabelece condições necessárias e suficientes para que os pontos de equilíbrio do sistema (3.12) sejam estáveis.

Teorema 3.4. *Os pontos de equilíbrio do sistema (3.12) são estáveis, se e somente se, $W(z) > \gamma$ com $\gamma > 0$.*

Demonstração. Os pontos de equilíbrio do sistema (3.12) são da forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0, \quad z \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, z) / \quad y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Além disso, a matriz A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha(-W(z) + \gamma) & -\alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é

$$P(\lambda) = -\lambda[\lambda^2 + \alpha(W(z)\lambda - \gamma)\lambda + \alpha\beta] = -\lambda Q(\lambda),$$

com $Q(\lambda) = \lambda^2 + \alpha(W(z)\lambda - \gamma)\lambda + \alpha\beta$.

Como $\lambda = 0$ é zero de $P(\lambda)$, utilizaremos o Critério de Routh-Hurwitz para determinar condições sobre os parâmetros α, β, γ, a e b para que os zeros de $Q(\lambda)$ tenham parte real negativa.

Observe que

$$\Delta_1 = \alpha(W(z) - \gamma) > 0 \Leftrightarrow W(z) > \gamma.$$

e

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha(W(z) - \gamma) & 0 \\ 1 & \alpha\beta \end{vmatrix} = (\alpha(W(z) - \gamma))(\alpha\beta) > 0.$$

Logo, para que os zeros de $Q(\lambda)$ tenham parte real negativa, devemos ter $(W(z) - \gamma) > 0$ ou, equivalentemente, $W(z) > \gamma$.

Portanto, os pontos de equilíbrio do sistema (3.12) são estáveis, se e somente se $W(z) > \gamma$, para quaisquer valores positivos das constantes $\alpha, \gamma, \beta, a, b$ positivas. $\square$

Graficamente, temos as seguintes situações possíveis, considerando $0 < a < b$ (de forma análoga podemos representar o caso em que $0 < b < a$):

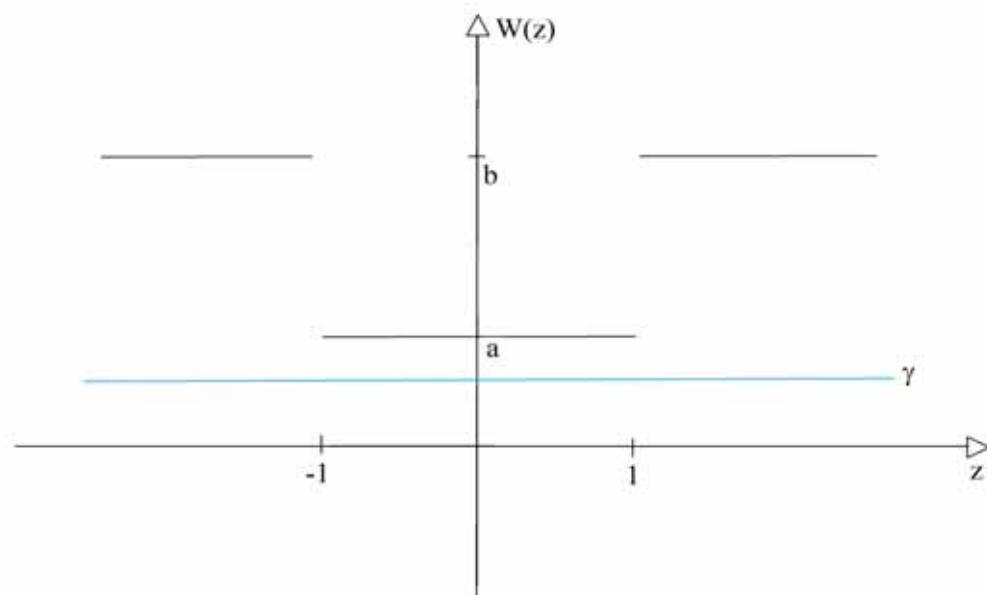


Figura 3.22: $W(z) > \gamma, \forall z$.

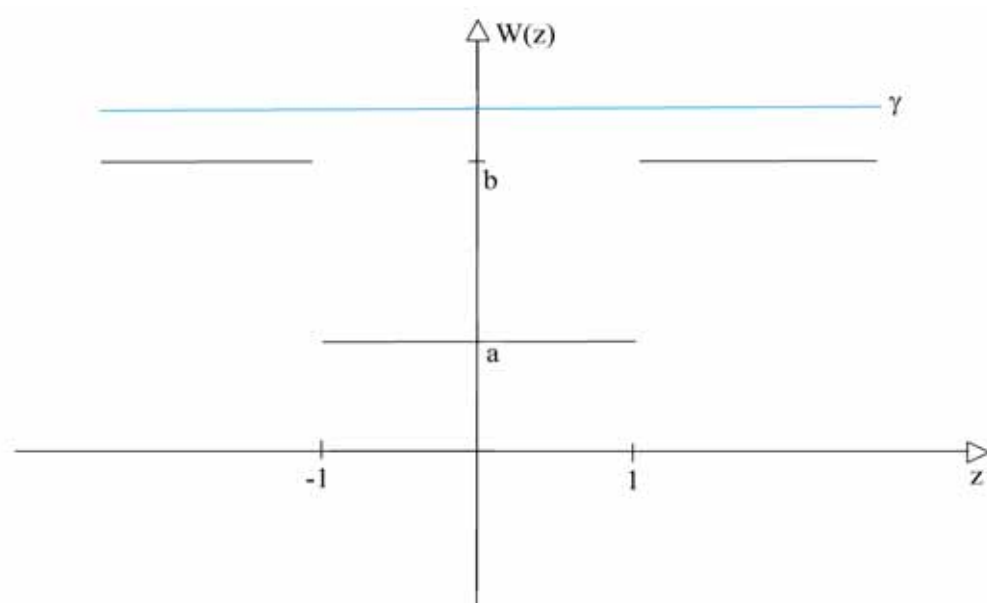


Figura 3.23: $W(z) < \gamma, \forall z$.

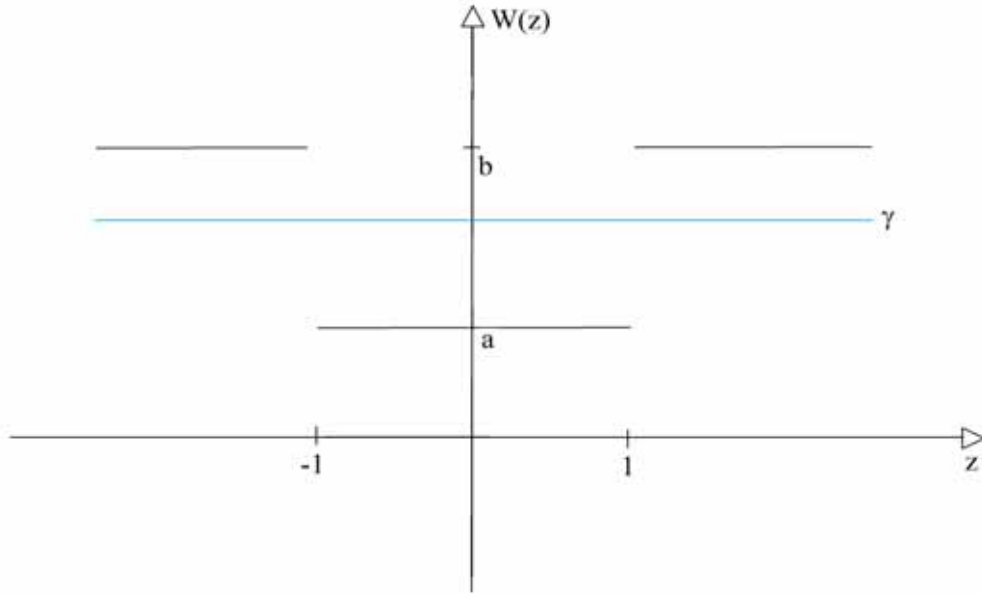


Figura 3.24: Para $|z| > 1$, $W(z) > \gamma$ e para $|z| < 1$, $W(z) < \gamma$.

A Figura (3.22) representa o caso em que os pontos de equilíbrio do sistema (3.12) são estáveis para quaisquer valores de z tal que $|z| \neq 1$. Na Figura (3.23), segue que tais pontos de equilíbrio não são estáveis, pois $W(z) < \gamma$, $\forall z$ tal que $|z| \neq 1$. Na Figura (3.24), observamos que os pontos de equilíbrio do sistema (3.12) são estáveis para valores de z tal que $|z| > 1$ e não é estável quando $|z| < 1$.

3.2 Memristor com oscilador canônico de quarta ordem

Nesta seção, estudaremos a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais ordinárias de quarta ordem apresentado em [11], que representa um circuito elétrico envolvendo um *memristor*. Para a obtenção de tal circuito, consideremos o oscilador canônico na Figura (3.25).

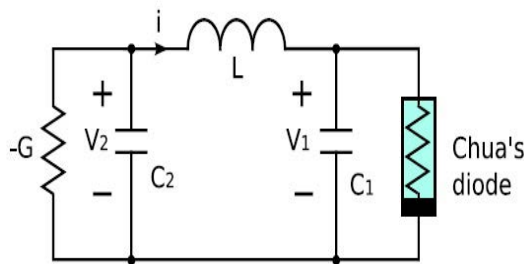


Figura 3.25: Oscilador canônico de Chua. Fonte: Referência [11].

Substituindo na Figura (3.25) o diodo de Chua por um *memristor* fluxo controlado, obtemos o circuito da Figura (3.26). A Figura (3.7) representa um circuito dual, obtido a partir da utilização do *memristor* carga controlada.

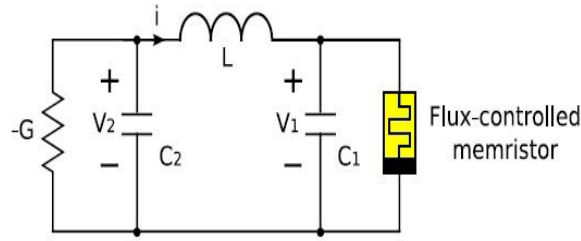


Figura 3.26: Oscilador canônico de Chua com *memristor* fluxo controlado. Fonte: Referência [11].

Aplicando as leis de Kirchhoff nos nós *A* e *B* no laço *C* do circuito mostrado na Figura (3.27) a seguir

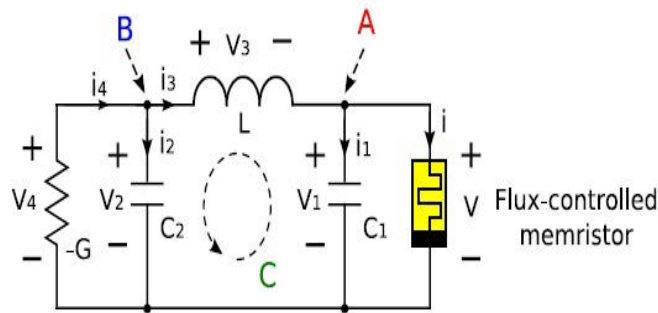


Figura 3.27: Corrente i_j , tensão v_j , nós *A* e *B* e no laço *C* conforme indicado na figura. Fonte: Referência [11].

obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} i_1 = i_3 - i \\ v_3 = v_2 - v_1 \\ i_2 = -i_3 + i_4 \end{cases} \quad (3.13)$$

Através do sistema (3.13), obtemos o seguinte sistema de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que define a relação entre as variáveis v_1 , v_2 , i_3 , φ :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} = i_3 - W(\varphi)v_1 \\ L \frac{di_3}{dt} = v_2 - v_1 \\ C_2 \frac{d\varphi}{dt} = -i_3 + Gv_2 \\ \frac{\varphi}{t} = v_1 \end{cases}, \quad (3.14)$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} = i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt}, \quad \frac{dq_2}{dt} = i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt}, \quad \frac{dq_3}{dt} = i_3, \quad \frac{dq_4}{dt} = i_4 = Gv_2, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} = v_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = v_2, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = v_3 = L \frac{di_3}{dt}, \quad W(\varphi) = \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variáveis $x = v_1$, $y = i_3$, $z = v_2$, considerando $w = \varphi$, $\alpha = \frac{1}{C_1}$, $\gamma = \frac{G}{C_2}$ e $\beta = \frac{1}{C_2}$, $L = 1$, e definindo as funções lineares por partes $q(w)$ e $W(w)$ por

$$q(w) = bw + 0,5(a - b)(|w + 1| - |w - 1|)$$

e

$$W(w) = \frac{dq(w)}{dw} \begin{cases} a & \text{se } |w| < 1 \\ b & \text{se } |w| > 1 \end{cases},$$

o sistema (3.14) pode ser transformado no seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - W(w)x) \\ \frac{dy}{dt} = z - x \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y + \gamma z \\ \frac{dw}{dt} = x \end{cases}, \quad (3.15)$$

em que α , β , γ , a e b são constantes positivas.

Portanto, analisaremos agora a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema (3.15), que são dados por

$$E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x = y = z = 0, \quad w \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, 0, w) / w \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema 3.5. *Os pontos de equilíbrio do sistema (3.15) são estáveis se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas: $W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$ e $W_1 < W(w) < W_2$, onde $W_1 = \frac{(\alpha + \gamma^2)^2 - \sqrt{((\alpha + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2\beta)}}{2\alpha\beta}$, $W_2 = \frac{(\alpha + \gamma^2)^2 + \sqrt{((\alpha + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2\beta)}}{2\alpha\beta}$ e $(\alpha + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2\beta > 0$.*

Demonstração. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha W(w) & \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & \gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico $P(\lambda) = \lambda Q(\lambda)$, onde

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha W(w) - \gamma)\lambda^2 + (\alpha + \beta - \alpha\gamma W(w))\lambda + \alpha(\beta W(w) - \gamma).$$

Observe que um dos autovalores da matriz $A - \lambda I$ é $\lambda_1 = 0$. Os outros são os zeros do polinômio $Q(\lambda)$. Logo, para determinar condições sobre os parâmetros α , β , γ , a e b para

que os pontos de equilíbrio do sistema (3.15) sejam estáveis, devemos analisar os zeros de $Q(\lambda)$.

Através do Critério de Routh-Hurwitz, temos:

$$\Delta_1 = \alpha W(w) - \gamma$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \alpha W(w) - \gamma & \alpha(\beta W(w) - \gamma) \\ 1 & \alpha + \beta - \alpha\gamma W(w) \end{vmatrix} \\ &= (\alpha W(w) - \gamma)(\alpha + \beta - \alpha\gamma W(w)) - \alpha(\beta W(w) - \gamma) \\ &= -\alpha^2\gamma(W(w))^2 + \alpha(\alpha + \gamma^2)W(w) - \beta\gamma \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha W(w) - \gamma & \alpha(\beta W(w) - \gamma) & 0 \\ 1 & \alpha + \beta - \alpha\gamma W(w) & 0 \\ 0 & \alpha(W(w) - \gamma) & \alpha(\beta W(w) - \gamma) \end{vmatrix} = \alpha(\beta W(w) - \gamma)\Delta_2.$$

Logo, as condições para que os zeros de $Q(z)$ tenham parte real negativa são as seguintes:

1. $\alpha W(w) - \gamma > 0 \Leftrightarrow W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$;
2. $-\alpha^2\gamma(W(w))^2 + \alpha(\alpha + \gamma^2)W(w) - \beta\gamma > 0$;
3. $\beta W(w) - \gamma > 0 \Leftrightarrow W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$.

Observe que a condição apresentada no item (2) é uma inequação do segundo grau em $W(w)$, que é satisfeita quando $W_1 < W(w) < W_2$, onde $(\alpha + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2\beta > 0$,

$$W_1 = \frac{(\alpha + \gamma^2)^2 - \sqrt{((\alpha + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2\beta)}}{2\alpha\beta} \quad \text{e} \quad W_2 = \frac{(\alpha + \gamma^2)^2 + \sqrt{((\alpha + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2\beta)}}{2\alpha\beta}.$$

Portanto, os pontos de equilíbrio do sistema (3.15) são estáveis se, somente se, $W(z) > \frac{\gamma}{\alpha}$, $W(z) > \frac{\gamma}{\beta}$ e $W_1 < W(z) < W_2$ com $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta > 0$, onde α, β, γ, a e b são constantes positivas. $\square$

Analisando de maneira mais detalhada a inequação do item (2) acima, temos as seguintes situações:

- 1) Se $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta = 0$, segue que $W_1 = W_2 = \frac{\alpha + \gamma^2}{2\alpha\gamma} > 0$. Graficamente, temos:

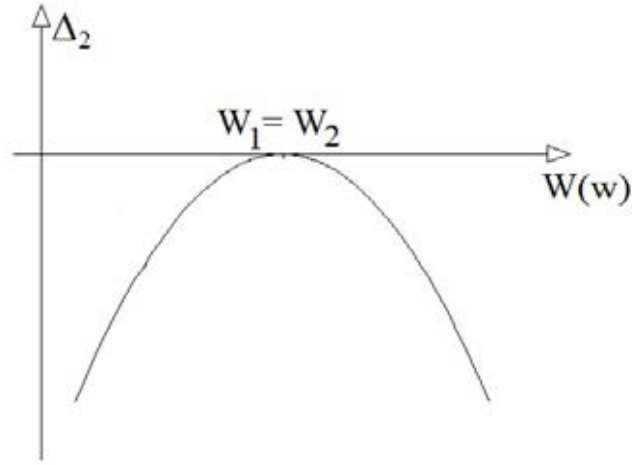


Figura 3.28: Análise do sinal da inequação do item (2), onde $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta = 0$.

Logo, para qualquer valor de $W(w)$, temos

$$-\alpha^2\gamma(W(w))^2 + \alpha(\alpha + \gamma^2)W(w) - \beta\gamma \leq 0,$$

não satisfazendo a condição $\Delta_2 > 0$.

2) Se $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta < 0$, segue que W_1 e W_2 são números complexos com parte real positiva. Graficamente, temos a seguinte situação:

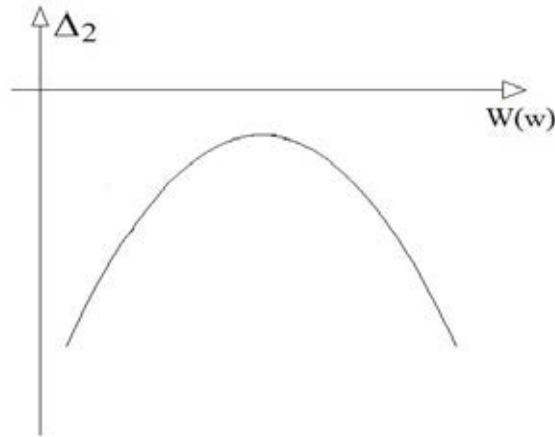


Figura 3.29: Análise do sinal da inequação do item (2), onde $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta < 0$.

Assim, para qualquer valor de $W(w)$

$$-\alpha^2\gamma(W(w))^2 + \alpha(\alpha + \gamma^2)W(w) - \beta\gamma < 0,$$

onde a condição $\Delta_2 > 0$ não é satisfeita.

3) Se $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta > 0$, segue que W_1 e W_2 são números reais positivos (observe

que o sinal da expressão $\frac{\alpha + \gamma^2}{2\alpha\gamma}$ é o sinal dominante) e então temos a seguinte situação:

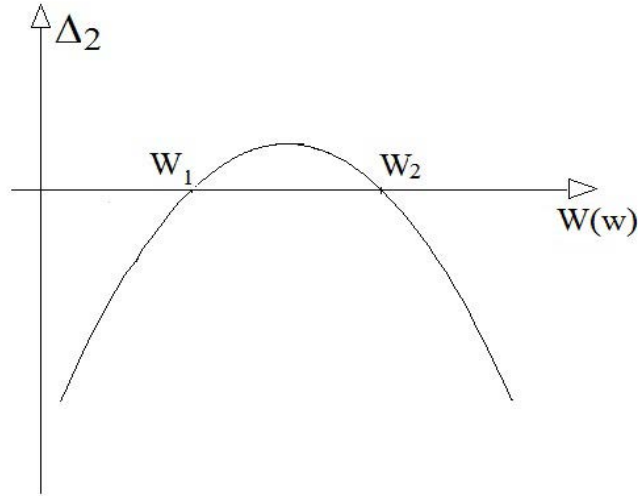


Figura 3.30: Análise do sinal da inequação do item (2), onde $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta > 0$.

Para $W(w) < W_1$ e $W(w) > W_2$, segue que a condição $\Delta_2 > 0$ não é satisfeita. Porém, para $W_1 < W(w) < W_2$, segue que $\Delta_2 > 0$, que é o caso que nos interessa.

Graficamente, as situações possíveis de acordo com as condições apresentadas no Teorema (3.4) são as seguintes (para $0 < a < b$, α, β, γ, a e b constantes positivas e $(\alpha + (\gamma)^2)^2 - 4\gamma^2\beta > 0$):

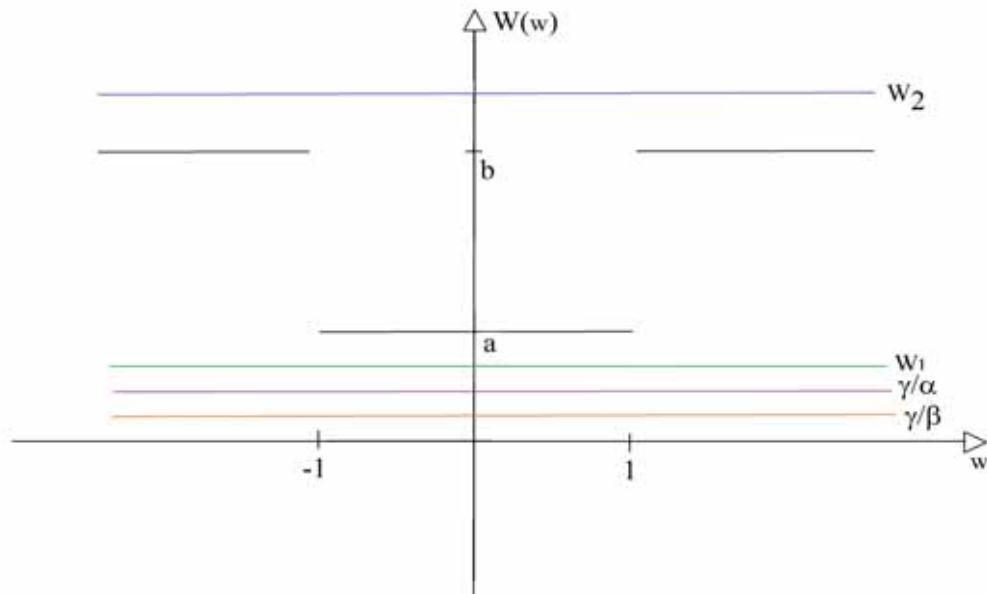


Figura 3.31: Para todo w , $W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$ e $W_1 < W(w) < W_2$.

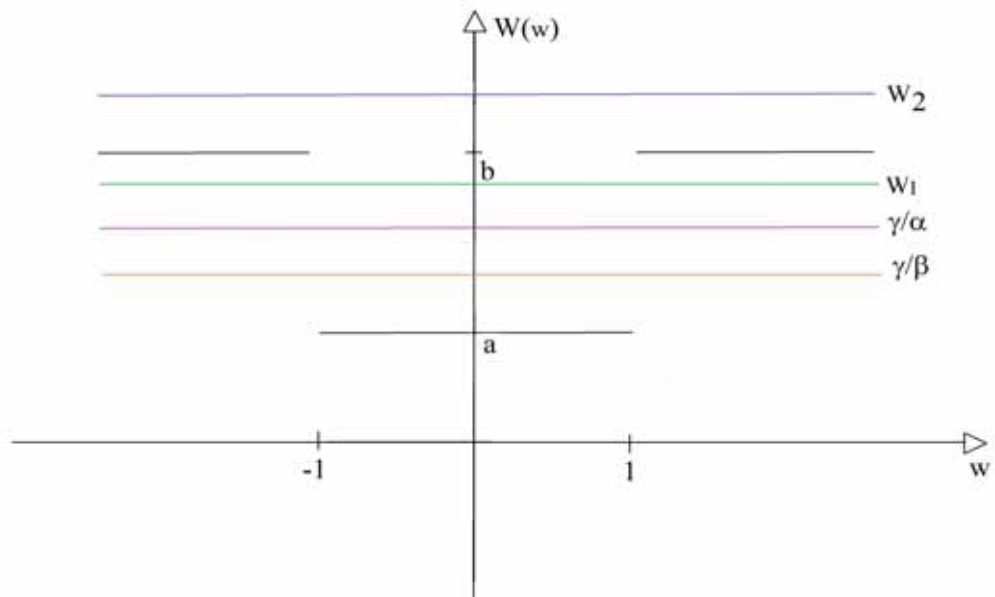


Figura 3.32: $W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, se $|w| > 1$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, se $|w| > 1$ e $W_1 < W(w) < W_2$, se $|w| > 1$.

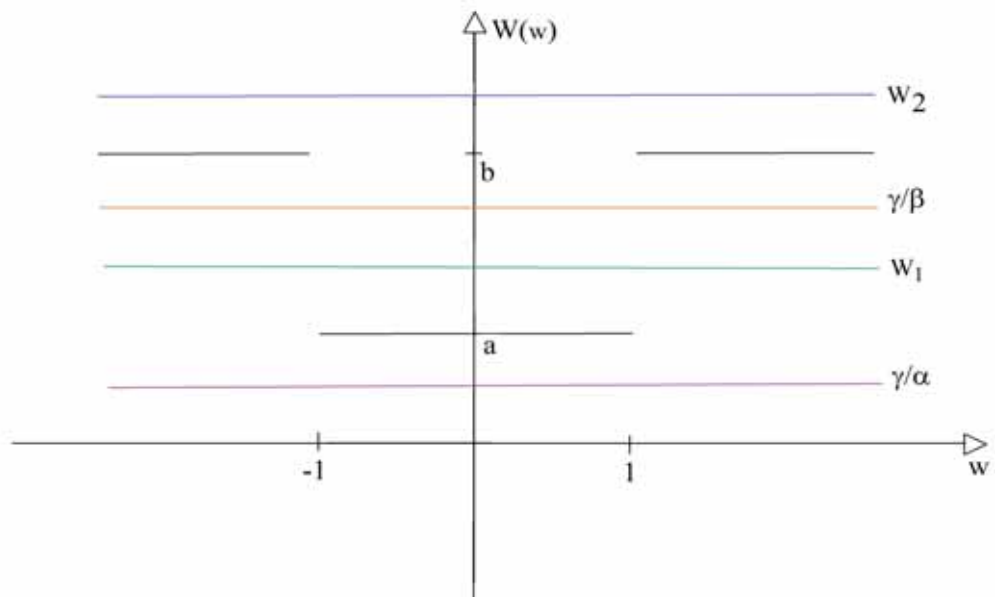


Figura 3.33: $W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, $\forall w$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, se $|w| > 1$ e $W_1 < W(w) < W_2$, se $|w| > 1$.

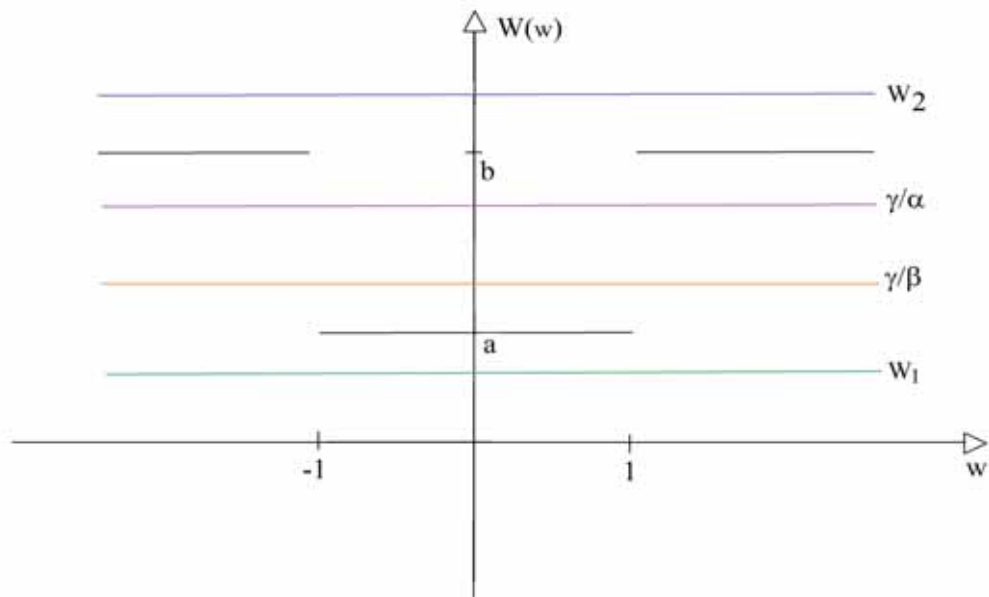


Figura 3.34: $W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, se $|w| > 1$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, $\forall w$ e $W_1 < W(w) < W_2$, se $|w| > 1$.

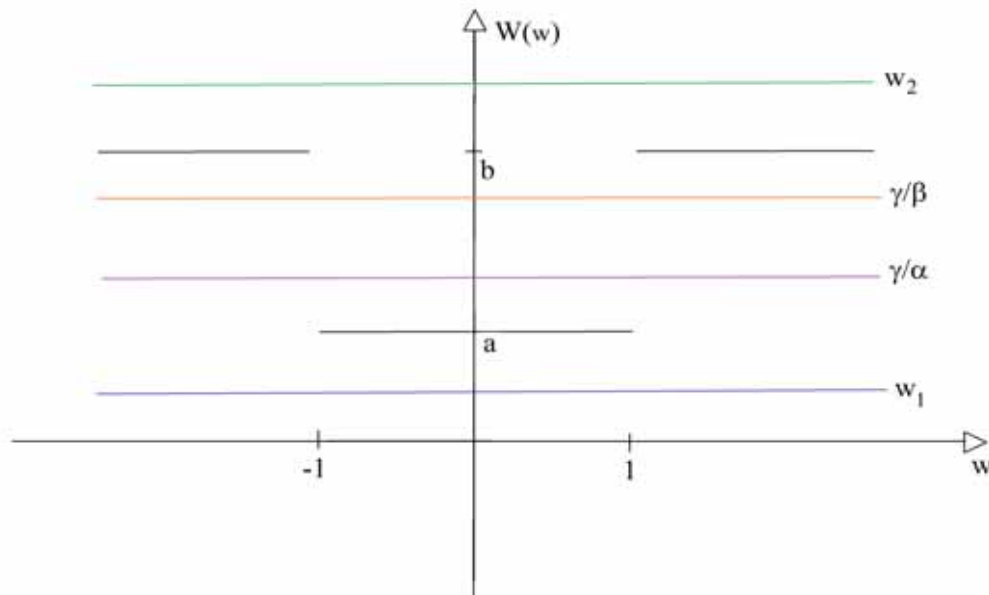


Figura 3.35: $W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}$, se $|w| > 1$, $W(w) > \frac{\gamma}{\beta}$, se $|w| > 1$ e $W_1 < W(w) < W_2$, $\forall w$.

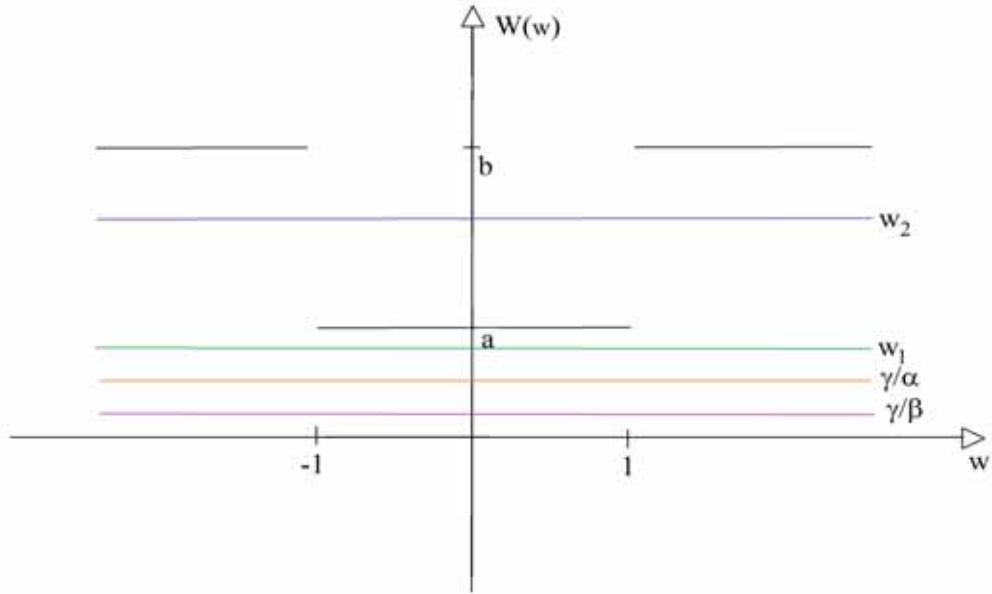


Figura 3.36: $W(w) > \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \forall w, W(w) > \frac{\gamma}{\beta}, \quad \forall w$ e $W_1 < W(w) < W_2, \quad \text{se } |w| < 1$.

Observe, nas ilustrações, que as posições relativas das retas paralelas $\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\gamma}{\alpha}, W_1$ e W_2 podem ter outra ordenação. Por exemplo, de acordo com a representação da Figura (3.31), segue que $\frac{\gamma}{\beta} < \frac{\gamma}{\alpha} < W_1$. Porém, podemos ter, por exemplo $\frac{\gamma}{\alpha} < \frac{\gamma}{\beta} < W_1$, isto é, estamos considerando que $\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\gamma}{\alpha}, W_1$ encontram-se abaixo de $W(w) = a$.

Tal observação pode ser estendida nos outros casos.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos modelos matemáticos formados por sistemas de equações diferenciais ordinárias de terceira e quarta ordens que representam um circuito elétrico obtido a partir da substituição do diodo de Chua por *memristores* e estudamos a estabilidade de tais sistemas.

Para a análise da estabilidade, realizamos um estudo dos pontos de equilíbrio dos sistemas de equações diferenciais ordinárias de terceira e quarta ordens envolvendo funções lineares por partes que modelam os circuitos elétricos que possuem os *memristores* em sua composição. Em tal processo é de fundamental importância o conhecimento de resultados relacionados a zeros de polinômios, pois a análise da estabilidade de tais sistemas está diretamente relacionado à determinação dos autovalores da matriz dos coeficientes do sistema, ou seja, a estabilidade de um ponto de equilíbrio é estabelecida pelo sinal da parte real dos autovalores da matriz dos coeficientes. Assim, o estudo da estabilidade através dos autovalores nos leva ao estudo das raízes da equação característica relacionada ao sistema de equações diferenciais ordinárias em estudo. Dessa maneira, o objetivo principal é caracterizar os polinômios cujos zeros possuem todas partes reais negativas, denominados polinômios estáveis ou de Hurwitz. Para isso, utilizamos o Critério de Routh-Hurwitz, que nos permitiu dizer se todos os zeros de um polinômio têm parte real negativa sem ser preciso calculá-los, ou seja, se o polinômio é estável.

Ao aplicar o Critério Routh-Hurwitz nos sistemas para a análise da estabilidade, observou-se que tal Critério é uma ferramenta simples, importante e muito eficaz, que nos garante quando um polinômio é estável sem a necessidade de calcular explicitamente seus zeros, afinal descobrir os zeros de um polinômio de grau n , com $n > 4$ não é uma tarefa nada fácil.

Além do modelo de quarta ordem estudado, em [11], os autores apresentam mais modelos relacionados ao *memristor*. Portanto, a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio apresentada neste trabalho pode ser estendida para os outros sistemas apresentados em

[11], algo que pretendemos realizar em estudos futuros.

Bibliografia

- [1] Boyce, W. E.; DiPrima R. C. *Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 2003.
- [2] Botta, V. A. et al. *Mathematical Analysis of a Third-order Memristor-based Chua's Oscillator*. TEMA - Tend. Mat. Apl. Comput., 12, n. 2, p. 91-99, 2011.
- [3] Chua, L. O. *Memristor - the missing circuit element*. IEEE Trans. Circuit Th., 18, p. 507-519, 1971.
- [4] Chua, L. O.; Lin, G. N. *Canonical realization of Chua's circuit family*. IEEE Trans. Circuit Syst, ed. 37, p. 885-902, 1990.
- [5] Dumortier, F. et al. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Universitex, Springer, 2006.
- [6] Gantmacher, F.R. *The theory of matrices*. Chelsea: New York, 1959.
- [7] Grupo "Memristor" sob a orientação do professor Manfredo H. Tabaknicks. *Estudo de Efeitos Memristivos em Filmes Finos de TiO₂*. Departamento de Física Aplicada do IFUSP, Junho de 2010.
- [8] Hirsch, M. W. et al. *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Second Edition. Academic Press: New York, 2004.
- [9] Hopkin, M. *Found: the missing circuit element*. Nature News, April 2008.
- [10] Hurwitz, A. *Über die bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*. Math. Ann, 46 (1895), p. 273-384, also in Mathematische Werke, Basel, 1933, 2, p. 533-545.
- [11] Itoh, M.; Chua, L. O. *Memristor oscillators*. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng., 18, p. 3183-3206, 2008.
- [12] Jimenez-Fernandez, V.M. et al. *Descripción del modelo eléctrico del memristor*. Revista Mexicana de Física, v.58, p. 113-119, 2012.

-
- [13] Junjian, H. et al. *Stabilization of a memristor-based chaotic system by intermittent control and fuzzy processing*. International Journal of Control, Automation and Systems. June 2013, Volume 11, Issue 3, pp 643-647.
 - [14] Lavrentiev, M.; Chabat B. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. MIR Moscou, 1977.
 - [15] Liénard, A.; Chipart, M. H. *Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique*. J. Math. Pures Appl. (6) 10 (1914), p 291-346.
 - [16] Madan, R. N. *Chua's Circuit: A paradigm for Chaos*. World Scientific, Singapore, 1993.
 - [17] Marden, M. *Geometry of Polynomials*. Providence: American Mathematical Society, 1966.
 - [18] Moretti, A. J. *Estudo de ciclos limites em sistemas diferenciais lineares por partes*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática / Instituto de biociências, letras e ciências exatas / Unesp São José do Rio Preto, 2012
 - [19] Scarabello, M. C. *Estudo de Sistemas Lineares por Partes com Três Zonas e Aplicação na Análise de um Circuito Elétrico Envolvendo um Memristor*. Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências e Tecnologia / Unesp. Dissertação de Mestrado, 2012.
 - [20] Messias, M. et al. *Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristor oscillators*. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng., 20, p. 437-450, 2010.
 - [21] Milovanović, G. V. et al. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. Singapore: World Scientific, 1994.
 - [22] Monteriro, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física - São Paulo - 2006 - 2ª edição.
 - [23] Routh, E. J. *Stability of a Given State of Motion*. London, 1877; *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamic of a System of Rigid Bodies*. 6th ed., London, 1930; Dover, New York, 1955.
 - [24] Souza, G. R. *Critério de Hurwitz e Estabilidade de Equilíbrios*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática / Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
 - [25] Strukov, D. B. et al. *The missing memristor found*. Nature, 453, p. 80-83, May 2008.
 - [26] Yinfang, S. et al. *Chaos Control of a Memristor-based Chua's Oscillator via Backstepping Method*. International Conference on Information Science and Technology, March 26-28, 2011 Nanjing, Jiangsu, China.