



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Estudo de Métodos de Ponto-Fixo para Contrações Locais em Economia Dinâmica

Alexandre Machado

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Agosto de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

M129e Machado, Alexandre.
Estudos de métodos de ponto-fixo para contrações locais em economia dinâmica / Alexandre Machado. - Presidente Prudente : [s.n], 2016
52 f.

Orientador: Marcelo Messias
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Matemática aplicada. 2. Métodos de ponto-fixo . 3. Economia dinâmica. I. Machado, Alexandre. II. Messias, Marcelo. III. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. IV. Estudos de métodos de ponto-fixo para contrações locais em economia dinâmica.

BANCA EXAMINADORA



PROF. DR. MARCELO MESSIAS
ORIENTADOR



PROF. DR. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
UNESP/FCT



PROF. DR. MÁRCIO RICARDO ALVES GOUVEIA
UNESP/IBILCE



ALEXANDRE MACHADO

Presidente Prudente (SP), 31 agosto de 2016.

Resultado: **APROVADO.**

*À minha mãe Regina,
por seu apoio constante dedico!*

Agradecimentos

Agradeço à minha família, em especial à minha mãe Regina Soares de Macedo por estar ao meu lado nos momentos bons e ruins e sempre ter me incentivado a estudar e me ajudar a descobrir o prazer de aprender. A meu irmão Luíz Gustavo Machado, por sua amizade e generosidade. À minha namorada Camila Valera Marquini por me dar o prazer de compartilhar sua vida comigo e fazer a minha mais feliz. A todos os professores do pós-MAC e do departamento de matemática que de maneira direta ou indireta tenham me ajudado a chegar até aqui. Em especial, ao professor Marcelo Messias não somente pela orientação, sem a qual este trabalho não seria possível, mas também por seu exemplo profissional. A todos os amigos da graduação e mestrado pelos momentos de estudo e descontração. Finalmente agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

*”Não é o conhecimento mas o ato de aprender,
não a posse mas o ato de se chegar lá,
que concede a maior satisfação.”*
Carl Friedrich Gauss

Resumo

O presente trabalho apresenta e prova um resultado sobre a existência e unicidade de um ponto-fixo para contrações locais sem assumir que a família de coeficientes seja uniformemente limitada por um número estritamente menor que a unidade, bem como sem restringir a cardinalidade desta família.

Mais importante, mostra como este resultado de ponto-fixo pode ser aplicado a fim de estudar a existência e unicidade de soluções para equações recursivas que aparecem em economia dinâmica.

Palavras-Chave: *Teorema de Ponto-Fixo, Contração Local, Agregador de Thompson, Utilidade Recursiva.*

Abstract

This work presents and proves a result on the existence and uniqueness of a fixed-point for local contractions without assuming that the family of coefficients is uniformly bounded for a number strictly less the unit, and without restricting the cardinality of this family.

More importantly, it shows how this fixed-point result can be applied to study the existence and uniqueness of solutions to recursive equations that arise in dynamic economy.

Keywords: *Fixed-Point theorem, Local Contraction, Thompson Aggregator, Recursive Utility.*

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
1 Introdução	11
1.1 Modelos Econômicos	12
1.1.1 Conceitos de Economia	12
1.1.2 Modelos Teóricos	12
1.2 Preferências e Utilidade	13
1.2.1 Axiomas das Preferências Racionais	13
1.2.2 O Conceito de Utilidade	15
1.3 Escolha e Maximização da Utilidade	15
1.3.1 Maximização da Utilidade, “Cálculos-Relâmpago” e Altruísmo x Egoísmo	15
1.3.2 O Modelo Formal	16
2 Preliminares	19
2.1 Espaços Normados	19
2.2 Espaços Métricos	20
2.3 Espaços Topológicos	21
2.3.1 Definições e Exemplos	21
2.3.2 Bases	22
2.3.3 Topologias Fracas	24
3 Existência e Unicidade de Ponto-Fixo para Contrações Locais	27
4 Aplicações em Modelos de Economia Dinâmica	35
4.1 Preferências Recursivas para Agregadores de Thompson	36
4.1.1 O operador	37
4.1.2 A Métrica de Thompson	39
4.2 Preferências Recursivas para Agregadores de Blackwell	43
4.2.1 Agregador Ilimitado Inferiormente	44
5 Considerações Finais	49

Introdução

Resultados sobre pontos-fixos envolvendo contrações locais se tornaram ferramentas muito eficazes para resolver problemas em economia dinâmica.

Muitas aplicações em programação dinâmica são encontradas por exemplo em [7] para o caso determinístico, bem como em [5] para o caso estocástico. Aplicações em problemas de utilidade recursiva podem ser encontradas em [8]. Resultados anteriores sobre pontos-fixos para contrações locais apoiaram-se em uma abordagem via espaços métricos. A ideia por trás desta abordagem é construir uma métrica que torne a contração local em uma contração global em um subespaço específico. A construção desta métrica adequada custa uma restrição à família de coeficientes relativos à contração, qual seja, exige-se que esta seja uniformemente inferior à unidade.

Em oposição a este tratamento, provaremos neste trabalho um teorema sobre pontos-fixos usando argumentos diretos os quais não requerem a aplicação do Teorema da Contração de Banach para uma métrica específica. A vantagem desta forma de demonstração é o fato de permitir que a família de coeficientes tenha supremo igual à unidade. Neste sentido, o teorema em questão generaliza os resultados sobre pontos-fixos previamente existentes na literatura. Um benefício adicional é que este resultado pode ser aplicado para operadores que são contrações locais em relação a uma família não-enumerável de semi-métricas.

Exibiremos ainda aplicações deste teorema em economia dinâmica. Neste contexto poderá ser reconhecida a importância de não restringir a cardinalidade da família de coeficientes da contração local, uma vez que trataremos de casos onde a mesma não é enumerável.

Feitas estas considerações iniciais, cabe salientar que, por motivos óbvios, a ênfase maior deste trabalho será dada ao seu aspecto matemático, no entanto, tendo a parte de economia dinâmica como uma aplicação. Sendo assim, utilizaremos o restante deste capítulo para introduzir alguns conceitos econômicos importantes que aparecerão posteriormente. Sendo evidente que esta apresentação será relativamente superficial, para uma leitura mais aprofundada apresentaremos algumas referências no final do capítulo.

1.1 Modelos Econômicos

1.1.1 Conceitos de Economia

Conforme pode ser encontrado em [12] etimologicamente a palavra economia vem do grego *oikos* (casa) e *nomos* (norma, lei). No sentido original, seria a “administração da casa”, que também pode ser generalizada para “administração da coisa pública”.

Economia pode ser definida como ciência social que estuda como o indivíduo e a sociedade decidem utilizar recursos produtivos escassos, na produção de bens e serviços, de modo a distribuí-los entre as várias pessoas e grupos da sociedade, com a finalidade de satisfazer às necessidades humanas. Assim, trata-se de uma ciência social, já que objetiva atender às necessidades humanas.

Contudo, por enfrentar restrições físicas, provocadas pela escassez dos recursos produtivos e dos fatores de produção (mão de obra, capital, terra, matérias-primas) pode-se dizer que o objeto de estudo da ciência econômica é a questão da escassez.

Essa insuficiência resulta da restrição física ou finitude dos recursos em contraposição às necessidades humanas ilimitadas. Afinal, o crescimento populacional acarreta aumento das necessidades básicas a serem atendidas. Por outro lado, o contínuo desejo de elevação do padrão de vida - que poderíamos classificar como necessidade “social” da melhoria do status - e a evolução tecnológica fazem com que surjam “novas” necessidades (computador, freezer, celular, DVD, etc).

Diante do contínuo e progressivo aumento de demanda, nenhum país, por mais rico que seja, é autossuficiente em termos de disponibilidade de recursos produtivos, para satisfazer a todas as necessidades da população. Eis porque é preciso compreender como “economizar” recursos.

Se não houvesse escassez de recursos, ou seja, se todos os recursos fossem abundantes (bens livres), não haveria necessidade de estudarmos questões como inflação, crescimento econômico, déficit na balança de pagamentos, desemprego, concentração de renda, etc. Estes problemas provavelmente não existiriam e, obviamente, nem a necessidade de se estudar Economia.

1.1.2 Modelos Teóricos

Conforme [6] uma economia moderna é uma entidade complexa. Milhares de empresas engajadas em produzir milhares de bens diferentes. Muitos milhões de pessoas trabalhando em vários tipos de ocupações e tomando decisões sobre quais bens adquirir. Tomando qualquer produto específico, por exemplo leite, é praticamente impossível descrever todo o processo de produção iniciando na agricultura até sua chegada aos supermercados. Por tal razão os economistas escolheram abstrair as complexidades do mundo real e desenvolver modelos relativamente mais simples mas que capturassem a “essência” do processo econômico. Assim como um mapa é útil ainda que no mesmo não apareçam todas as casas ou lojas, modelos econômicos (por exemplo, do mercado de leite) são também úteis embora não contenham todos os detalhes específicos da produção.

O uso de modelos é muito amplo tanto nas ciências naturais quanto nas sociais. Em física, a ideia de vácuo “perfeito” a gás “ideal” é uma abstração que permite o estudo e compreensão de fenômenos do mundo real através de estruturas simplificadas. Em química, a ideia do átomo ou molécula é na verdade um modelo simplificado da estrutura da matéria.

Modelos econômicos desempenham funções similares, ou seja, exibem um retrato simplificado do jeito como indivíduos tomam decisões, as empresas se comportam, e o jeito como esses dois grupos interagem em diferentes estruturas de mercado.

O número de modelos econômicos em corrente uso é, obviamente, muito extenso. Hipóteses específicas usadas e o grau de detalhes oferecidos variam consideravelmente de acordo com o problema a ser atacado. Apesar desta variação, praticamente todos os modelos econômicos contêm três elementos em comum, quais sejam:

1. A hipótese *Ceteris Paribus* (outras variáveis permanecem inalteradas);
2. A suposição de que o agente econômico sempre busca otimizar algo, dada uma situação de escassez;
3. Uma distinção cuidadosa entre questões “positivas” (como as coisas *são*) e questões “normativas” (como as coisas *deveriam ser*).

1.2 Preferências e Utilidade

Feita a introdução mais geral sobre modelos econômicos, a partir de agora trataremos de casos específicos. Abordaremos nessa seção e na próxima tópicos da teoria do consumidor, assim mostraremos como é feita a modelagem matemática de problemas econômicos e veremos o papel importante que o conceito de utilidade desempenha neste contexto.

O agente econômico a ser estudado é o consumidor. Assume-se que este agente tem suas preferências pessoais sobre os bens disponíveis no mercado e seu objetivo é obter a maior satisfação possível considerando suas preferências bem como as possibilidades de consumo que possui.

1.2.1 Axiomas das Preferências Racionais

Um caminho para começar uma análise da escolha do indivíduo é estabelecer um conjunto de postulados, ou axiomas, para caracterizar o comportamento “racional”. Isto começa com o conceito de “preferência”. Um indivíduo declara que “ A é preferível a B ” quando, considerando o contexto, ele ou ela sente-se melhor sob a situação A do que na situação B . A relação de preferência é considerada racional se segue os dois primeiros axiomas dentre os três apresentados a seguir:

I) Completude: Se A e B são quaisquer situações, então

- (i) “ A é preferível a B ”;

- (ii) “ B é preferível a A ”;
- (iii) “ A e B são igualmente atrativos”.

Consequentemente é assumido que o processo decisório nunca é interrompido por indecisão.

II) Transitividade: Se um indivíduo diz que “ A é preferível a B ” e “ B é preferível a C ” então pode-se concluir que “ A é preferível a C ”. Este postulado estabelece que as preferências de indivíduos racionais são internamente consistentes.

III) Continuidade: Se “ A é preferível a B ” então situações C que sejam suficientemente “próximas” de A são declaradas preferíveis a B , ou seja, “ C é preferível a B ”.

Este é um postulado mais “técnico” o qual é requerido quando, por exemplo, analisa-se a resposta de indivíduos em mudanças relativamente pequenas em preços. Ele simplifica bastante o modelo sob o aspecto matemático.

Esta é a apresentação mais “intuitiva” das preferências, um jeito de mostrá-las de maneira mais formal é:

Definição 1.1. *Seja X um conjunto não-vazio chamado conjunto das escolhas. Uma preferência sobre X , cuja notação é dada por $\succsim$ é simplesmente uma relação em X . Ou seja, $\succsim$ é um subconjunto R de $X \times X$ tal que dizemos que $x \succsim y \iff (x, y) \in R$.*

Definição 1.2. *Seja X um conjunto de escolhas. Uma preferência sobre X é dita racional se*

- (i) $\forall x, y \in X \implies x \succsim y \text{ ou } y \succsim x$.
- (ii) $\forall x, y, z \in X \text{ tais que } x \succsim y \text{ e } y \succsim z \implies x \succsim z$.

Ou seja, uma preferência é dita racional se é completa e transitiva.

Cabe-se notar que aqui estamos usando $\succsim$ com um sentido levemente diferente, lê-se $x \succsim y$ por “ x é preferível ou igualmente atrativo a y ” ou simplesmente “ x é pelo menos tão desejável quanto y ”.

Assim, dizemos que “ x é igualmente atrativo a y ”, tendo por notação $x \sim y$ quando $x \succsim y$ e $y \succsim x$.

Para falarmos de continuidade é preciso impor que X seja espaço topológico, e usar a noção de convergência advinda da topologia em X .

Definição 1.3. *Seja X um conjunto de escolhas (e espaço topológico). Uma preferência em X é dita contínua se*

- (i) $\forall x, y \in X \text{ tais que } x \succ y, \text{ então } \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sequência em } X \text{ tal que } x_n \longrightarrow x \text{ então existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > n_0 \implies x_n \succ y$.

Neste caso, a notação $x \succ y$ se lê “ x é estritamente preferível a y ”.

1.2.2 O Conceito de Utilidade

Dadas as hipóteses de completude, transitividade e continuidade, é possível mostrar formalmente que o agente econômico é capaz de “ranquear” todas as possíveis situações, desde a menos até a mais desejável.

Esta associação entre as possibilidades de escolha a um “ranking” é justamente a motivação para nossa próxima definição.

Definição 1.4. *Sejam X um conjunto de escolhas e $\succsim$ uma preferência sobre X . Uma função de utilidade que representa a preferência $\succsim$ é uma função $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in X$ tem-se que $x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$.*

A função de utilidade é um conceito, embora simples, extremamente importante. Observe que quando é possível representar preferências através de uma função de utilidade, pode-se resolver problemas originalmente no universo econômico em ambientes puramente matemáticos.

Por exemplo, suponha que um agente econômico se depare com um conjunto de escolhas. Seu objetivo será encontrar a situação melhor possível. Mas observe que fazer isto seria encontrar $x_0 \in X$ tal que $x_0 \succsim x \forall x \in X$, ou equivalentemente, encontrar o ponto de máximo da função de utilidade que representa a preferência $\succsim$.

Assim resolver este problema econômico, através do conceito de utilidade, é equivalente a resolver um problema de otimização matemática.

1.3 Escolha e Maximização da Utilidade

Nesta seção apresentaremos o modelo básico de escolha que economistas usam para explicar o comportamento individual. Este modelo assume que indivíduos que tem renda limitada se comportarão usando seu poder de compra de tal maneira que atinjam a maior utilidade possível. Isto é, assume-se que indivíduos se comportarão como se maximizassem suas funções de utilidade sujeitas a suas restrições orçamentárias.

1.3.1 Maximização da Utilidade, “Cálculos-Relâmpago” e Altruísmo x Egoísmo

Antes de apresentar de maneira formal o modelo, é apropriado falar sobre dois argumentos comuns que não-economistas utilizam muitas vezes para atacar a metodologia que será usada adiante.

Primeiro é a alegação de que nenhuma pessoa no mundo real é capaz de fazer os “cálculos-relâmpago” necessários para resolver o problema de maximização da utilidade. De acordo com este raciocínio, quando alguém vai ao supermercado simplesmente pega as mercadorias disponíveis sem nenhum padrão ou propósito específico em suas ações. Economistas não são persuadidos por tal argumento. Eles duvidam que as pessoas se comportam de maneira aleatória, e também encaram a visão dos “cálculos-relâmpago”

como erro de interpretação. Tomando por exemplo, especialistas em jogo de sinuca. Um bom modelo para entender/prever as jogadas seria adquirido através da física teórica. É óbvio que pelo menos a maioria dos jogadores não fazem “cálculos-relâmpago” em relação à angulação do taco, intensidade da batida, dentre outros fatores importantes para uma boa jogada, no entanto a física é uma ótima ferramenta para entender/prever o comportamento desses jogadores.

Da mesma maneira, o modelo de maximização da utilidade é eficaz para prever muitos aspectos comportamentais de agentes econômicos ainda que nenhum deles carregue consigo um computador com suas funções de utilidade programadas nele. Para ser mais preciso, economistas assumem que os agentes se comportam “como se” fizessem os cálculos necessários para se obter uma boa jogada. Desta forma, a argumentação de que os cálculos não são possíveis é irrelevante.

Um segundo argumento muitas vezes utilizado contra a metodologia do modelo é de que ele parece ser demasiadamente egoísta. Segundo esta linha de pensamento, ninguém tem somente objetivos centrados exclusivamente em maximizar seu bem-estar. Embora economistas estejam mais dispostos a aceitar o interesse próprio como uma importante força motivadora do que outros pensadores mais utópicos, essa visão também se dá por um erro de interpretação. Nada no modelo de maximização da utilidade impede indivíduos de obter satisfação advinda de atividades filantrópicas.

Pode-se assumir que escolher esses tipos de atividades também gera aumento da utilidade. De fato, economistas têm usado o modelo de maximização da utilidade extensivamente para estudar assuntos como voluntariedade, doações de caridade, herança para filhos e até doação de sangue. Não é necessário tomar posição se tais atividades são altruístas de fato, ou egoístas de alguma maneira, pois economistas simplesmente duvidam que indivíduos decidam participar de tais atividades contra seus próprios interesses, considerados de maneira mais abrangente.

1.3.2 O Modelo Formal

Consideramos uma economia com L bens, assim o candidato natural para ser considerado o espaço de escolhas X , é $X = \mathbb{R}_+^L$, onde $\mathbb{R}_+^L = \{(x_1, \dots, x_L); x_i \geq 0 \forall i \leq L\}$.

Interpretaremos o número x_i como a quantidade consumida do bem i .

Agora, considere um agente econômico com preferência definida em X tal que é possível representá-la por uma função de utilidade. Como na maioria dos modelos econômicos, o objetivo é a alocação ótima de recursos escassos. Assim, para finalizar o modelo basta tratar da “escassez”, que em nosso contexto é a restrição orçamentária. Nosso agente é considerado um *price-taker*, isto é, não tem influência isoladamente sobre os preços e também tem uma renda limitada.

Seja $p = (p_1, \dots, p_L)$ o vetor de preços, onde p_i é o preço do bem i . Assumiremos que $p_i > 0 \forall i \leq L$, p é constante e seja w a renda do agente.

Assim a solução do chamado problema do consumidor é otimizar sua utilidade (bem-estar) considerando sua limitação orçamentária (escassez).

O conjunto $B(p, w) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^L ; \sum_1^L p_i x_i \leq w \right\}$ é o conjunto das cestas de bens acessíveis ao agente.

Considerando $U : \mathbb{R}_+^L \longrightarrow \mathbb{R}$ a função de utilidade que representa as preferências do agente, então o problema do consumidor é:

$$\max_{x \in B(p, w)} \{U = U(x)\}.$$

Estabelecido o problema, é natural surgirem perguntas como: Em quais contextos o problema admite solução? Quando ela é única? Quais propriedades U deve ter a fim de garantir solução?

Com um conhecimento básico de análise, e considerando em $\mathbb{R}_+^L$ a topologia induzida pela norma usual, caso U seja contínua, é possível garantir a existência de solução do problema, uma vez que $B(p, w)$ é compacto. No capítulo 2 serão apresentados conceitos e resultados preliminares que servirão como base para a resolução deste problema.

No capítulo 4 usaremos o principal resultado apresentado neste trabalho, que será discutido no capítulo 3, afim de responder perguntas como as elaboradas acima bem como algumas ainda mais fundamentais: Quando é possível garantir a existência de uma função de utilidade representando preferências? Consegue-se garantir a continuidade desta função em relação a alguma topologia?

O contexto, no entanto será mais complexo, pois conforme será visto, o espaço das escolhas será um espaço vetorial de dimensão infinita, o que torna a discussão consideravelmente mais complexa.

Para uma leitura mais aprofundada sobre teoria do consumidor, bem como microeconomia em geral, recomendamos [6] e [11].

Preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos que serão fundamentais para o desenvolvimento de nosso trabalho.

Dado seu caráter introdutório, bem como sua natureza auxiliar, o foco não será exibir demonstrações detalhadas, mas sim apresentar as definições, resultados e exemplos importantes afim de dar suporte para teoremas apresentados posteriormente.

Os conceitos apresentados foram extraídos das referências [13], [14] e [15], onde podem ser encontradas em detalhes as demonstrações dos resultados apresentados.

2.1 Espaços Normados

Definição 2.1. *Seja X um espaço vetorial real. Uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$(N_1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X,$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X,$$

é chamada de norma.

Dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado.

Exemplo:

$$(E_1)$$

$$l_+^\infty = \{x; x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ onde } |x_t| < \infty \forall t \in \mathbb{N}\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{N}} |x_t|$$

$(l_+^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é espaço normado.

(E₂) Dado $(X, \|\cdot\|)$ espaço normado, podemos definir

$$X' = \{F; F : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ é linear e contínua}\}$$

$$\text{e } \|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|$$

$(X', \|\cdot\|)$ é espaço normado, chamado espaço dual de X .

Definição 2.2. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X , espaço normado. Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x , $x \in X$, ou simplesmente que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, se*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \implies \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Temos ainda a seguinte definição: Se

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall m, n > n_0 \implies \|x_m - x_n\| < \epsilon,$$

dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Proposição 2.1. *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Obs. A recíproca da proposição acima não é verdadeira, em geral. Os espaços onde é válida a recíproca são particularmente importantes, o que motiva a seguinte definição.

Definição 2.3. *Seja X um espaço normado. Se toda sequência de Cauchy for uma sequência convergente em X , dizemos que X é um espaço de Banach.*

Obs. Os exemplos E1, E2 são espaços de Banach.

2.2 Espaços Métricos

Definição 2.4. *Seja X um conjunto qualquer não vazio. Chamamos de métrica em X uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$(D_1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X, \text{ sendo que } d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(D_2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X,$$

$$(D_3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

É fácil verificar que, se X é espaço normado, a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica.

Com tal fato chegamos à seguinte conclusão:

Proposição 2.2. *Todo espaço normado é um espaço métrico.*

A recíproca é falsa, assim estamos em um contexto mais geral.

Podemos, ainda, definir sequência convergente e de Cauchy através de uma generalização bem simples:

Definição 2.5. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço métrico X . Então,*

- (i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente se $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \implies d(x_n, x) < \epsilon$, onde $x \in X$.
- (ii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy se $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Definição 2.6. *Seja X um espaço métrico. Se toda sequência de Cauchy em X for uma sequência convergente, então X é um espaço completo.*

Por fim, enunciaremos um importante teorema, cujo tema será estudado num contexto mais geral no decorrer deste trabalho.

Teorema 2.1. *Sejam (X, d) um espaço métrico completo, e $T : X \longrightarrow X$ tal que existe $\beta \in [0, 1)$ satisfazendo $d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y) \quad \forall x, y \in X$. Então*

- (a) $\exists! x^* \in X$ tal que $Tx^* = x^*$
- (b) $\forall x_0 \in X \quad T^n x_0 \longrightarrow x^*$.

Uma função que cumpre as condições do enunciado é chamada de contração. E todo $x \in X$ tal que $Tx = x$ é chamado de ponto fixo.

Estes conceitos são muito importantes para o presente trabalho, e serão bastante utilizados posteriormente.

2.3 Espaços Topológicos

Esta seção introduzirá uma estrutura mais geral do que as duas citadas nas seções anteriores. Serão apresentados alguns exemplos de topologias importantes em nosso contexto nos próximos capítulos, sobretudo no capítulo 4.

2.3.1 Definições e Exemplos

Definição 2.7. *Seja X um conjunto qualquer não-vazio. Uma coleção τ de subconjuntos de X tal que*

$$(T_1) \quad \emptyset, X \in \tau;$$

$$(T_2) \quad \text{Se } (O_i)_{i \leq n} \text{ é tal que } \forall i \leq n, O_i \in \tau \text{ então } \left(\bigcap_{i=1}^n O_i \right) \in \tau;$$

$$(T_3) \quad \text{Se } (O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ é tal que } \forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \tau \text{ então } \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) \in \tau.$$

é chamada topologia de X .

Dizemos que (X, τ) é um espaço topológico e os elementos de τ são chamados abertos de X .

Exemplo 1. *Seja X um conjunto não-vazio qualquer. Tomando $\tau = \{\emptyset, X\}$ é fácil verificar que τ é uma topologia de X . Esta é a chamada topologia trivial.*

Exemplo 2. Seja X um conjunto não-vazio qualquer. Tomando $\tau = \mathcal{P}(X)$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto das partes de X (coleção de todos os subconjuntos de X) é óbvio que τ é uma topologia de X . Esta é a chamada topologia discreta.

Exemplo 3. Sejam (X, d) um espaço métrico e τ uma coleção de subconjuntos de X tal que $O \in \tau$ se e somente se:

$$\forall x_0 \in O \implies \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B(x_0, \epsilon) \subset O,$$

onde

$$B(x_0, \epsilon) = \{x \in X ; d(x, x_0) < \epsilon\}.$$

Não é difícil verificar que τ é uma topologia de X . Esta é chamada a topologia métrica ou topologia induzida pela métrica d .

O exemplo anterior é particularmente importante, pois mostra que toda métrica pode induzir uma topologia, assim todo espaço métrico é um espaço topológico.

Definição 2.8. Sejam (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) espaços topológicos. Uma função $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é chamada função contínua se, e somente se, $\forall O_2 \in \tau_2, f^{-1}(O_2) \in \tau_1$, onde $f^{-1}(O_2) = \{x \in X_1 ; f(x) \in O_2\}$. De maneira mais simples, a imagem inversa de qualquer aberto é um aberto.

2.3.2 Bases

Para especificar um espaço topológico, frequentemente não é necessário apresentar sua coleção inteira de abertos, mas apenas uma certa subcoleção que seja a “geradora” da topologia. Introduziremos nesta seção a forma de apresentar tal subcoleção que será muito útil para construir topologias.

Definição 2.9. Dado um espaço topológico (X, τ) , uma base para a topologia τ é qualquer coleção $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que, para todo aberto $O \in \tau$,

$$O = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B} ; B_i \subset O} B_i.$$

Equivalentemente, $\forall x \in O$ existe algum $B_i \in \mathcal{B}$ onde $x \in B_i$ e $B_i \subset O$.

Definição 2.10. Dado um espaço topológico (X, τ) uma coleção S de conjuntos é uma sub-base para a topologia τ se a coleção

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=0}^n S_i ; S_i \in S \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

for uma base para a topologia τ .

Observe que $\mathcal{B}$ é simplesmente a coleção de todas as intersecções finitas de elementos de S . Logo, se $B \in \mathcal{B}$ então existem $\{S_i\}_{i \leq n}$ onde $S_i \in S$ tal que $B = \bigcap_{i=1}^n S_i$, e daí, dado

o aberto $O \in \tau$, para todo $x \in O$ existem $\{S_i\}_{i \leq n}$, $S_i \in S$ em que

$$x \in \bigcap_{i=1}^n S_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^n S_i \subset O.$$

Proposição 2.3. *Seja X um conjunto não-vazio. Dada uma coleção qualquer S de subconjuntos de X tal que $\emptyset, X \in S$ então S é sub-base de uma topologia τ de X , a saber, a menor topologia que contém S . (Ou seja, se τ' é topologia de X com $S \subset \tau'$ então $\tau \subset \tau'$).*

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i ; S_i \in S \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$, definamos τ como

$$O \in \tau \iff \forall x \in O ; \exists B \in \mathcal{B} ; x \in B \text{ e } B \subset O$$

τ é uma topologia de X .

De fato, das três propriedades a serem verificadas, provaremos as duas últimas dado que é óbvio que $\emptyset$ e X pertencem a τ .

Suponha que $\{O_i\}_{i \leq n}$ é tal que $O_i \in \tau \forall i \leq n$. Então

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n O_i \implies x \in O_i \forall i \leq n \text{ e } O_i \in \tau.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \exists B_i \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B_i \text{ e } B_i \subset O_i \\ \implies & x \in \bigcap_{i=1}^n B_i \text{ e } \bigcap_{i=1}^n B_i \subset \bigcap_{i=1}^n O_i. \end{aligned}$$

E, uma vez que

$$B_i \in \mathcal{B} \implies B_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} S_j^i \implies \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^{n_i} S_j^i \right) = \bigcap_{i,j} S_j^i \implies \bigcap_{i=1}^n B_i \in \mathcal{B}.$$

Logo $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$.

Por fim, suponha $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ onde $O_\lambda \in \tau \forall \lambda \in \Lambda$. Logo $\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \implies x \in O_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$ e dado que $O_{\lambda_0} \in \tau \implies \exists B_{\lambda_0} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_{\lambda_0}$ e $B_{\lambda_0} \subset O_{\lambda_0}$, mas $O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$.

Assim, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \tau$.

Fica assim demonstrado que τ é uma topologia.

Resta agora provar que é a menor topologia de X que contém S . Com efeito, suponha τ' topologia de X que contém S .

$\forall O \in \tau$ então $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ para alguma classe de índices Λ com $O_\lambda \in \mathcal{B} \forall \lambda \in \Lambda$.

Assim, por definição $O_\lambda = \bigcap_{i=1}^{n_\lambda} S_i^\lambda$ onde $S_i^\lambda \in \mathcal{S}$. Por outro lado τ' é topologia de X que contém $\mathcal{S}$, isso é, $S_i^\lambda \in \tau' \forall \lambda \in \Lambda$ e $\forall i \leq n_\lambda$.

Segue que $\bigcap_{i=1}^{n_\lambda} S_i^\lambda \in \tau'$ pela definição de topologia, ou seja, $O_\lambda \in \tau' \forall \lambda \in \Lambda$ e novamente pela definição de topologia $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \tau'$. Portanto $\tau \subset \tau'$. ■

A topologia usada na demonstração deste teorema é chamada de topologia *gerada* pelos elementos de S . Ou seja, dados X um conjunto não-vazio e S uma coleção qualquer de elementos de X (caso esta coleção não contenha $\emptyset$, X basta acrescentá-los arbitrariamente, definindo $\mathcal{B}' = \{\mathcal{B}, \emptyset, X\}$ como base da topologia) a topologia gerada por S é a topologia tal que S é uma sub-base para ela.

2.3.3 Topologias Fracas

Considere um conjunto X não-vazio arbitrário e τ_1, τ_2 topologias de X . Se $\tau_1 \subset \tau_2$ dizemos que τ_1 é mais fraca (grossa) do que τ_2 ou equivalentemente que τ_2 é mais forte (fina) do que τ_1 .

Cabe notar que dado qualquer conjunto não-vazio X , então claramente a topologia trivial e a topologia discreta são respectivamente a topologia mais fraca (menor) e a mais forte(fina) definidas sobre X .

Proposição 2.4. *Seja X um conjunto qualquer não-vazio. Dada qualquer coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X , então existe uma única topologia contendo $\mathcal{C}$ que é a menor possível.*

Demonstração. Considere $A = \{\tau_\alpha ; \tau_\alpha \text{ é topologia de } X \text{ e } \mathcal{C} \subset \tau_\alpha\}$ ou seja A é o conjunto de todas as topologias de X que contém $\mathcal{C}$. Devemos mostrar que existe um elemento minimal de A , isso é, existe $\tau \in A$ tal que para todo $\tau_\alpha \in A \implies \tau \subset \tau_\alpha$.

Note primeiramente que $A \neq \emptyset$ pois $\mathcal{P}(X) \in A$.

Tome $\tau = \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ a intersecção de todos os elementos de A . Afirmamos que τ é topologia de X .

Com efeito,

(i) Tomando $\emptyset, X$ como ambos pertencem a $\tau_\alpha \forall \alpha \in A$, então $\emptyset, X \in \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$;

(ii) Suponha $(O_i)_{i \leq n}$ tal que $O_i \in \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha \forall i \leq n$ então

$$O_i \in \tau_\alpha \forall \alpha \in A \implies \left(\bigcap_{i=1}^n O_i \right) \in \tau_\alpha \forall \alpha \in A$$

$$\text{pois } \tau_\alpha \text{ é topologia} \implies \left(\bigcap_{i=1}^n O_i \right) \in \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha;$$

(iii) Suponha $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $O_\lambda \in \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha \forall \lambda \in \Lambda$. Assim $\bigcup O_\lambda \in \tau_\alpha$ pois τ_α é topologia $\implies \bigcup O_\lambda \in \bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$.

Portanto $\cap \tau_\alpha$ é uma topologia e obviamente $\cap \tau_\alpha \in A$. Mais ainda $\cap \tau_\alpha \subset \tau_\alpha$, qualquer que seja α , logo $\tau \subset \tau_\alpha$. ■

A proposição acima nos diz que dado qualquer conjunto X não-vazio, tomando uma coleção arbitrária de subconjuntos de X , digamos $\mathcal{C}$, é possível encontrar uma topologia que contenha todos os elementos de $\mathcal{C}$ e seja a menor possível. Cabe salientar que na seção anterior também mostramos que dados X conjunto não-vazio e $\mathcal{C}$ uma coleção qualquer de subconjuntos de X , podemos encontrar uma topologia de X para a qual $\mathcal{C}$ é uma sub-base. Uma questão interessante seria indagar qual a relação entre essas duas topologias. A resposta para essa pergunta está em nossa próxima proposição.

Proposição 2.5. *Seja X um conjunto qualquer não-vazio. Dada qualquer coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X então a topologia gerada por $\mathcal{C}$ e a menor topologia de X que contenha $\mathcal{C}$ são equivalentes.*

Usando as definições das topologias bem como argumentos similares usados nas demonstrações das proposições (2.4) e (2.3) obtém-se de maneira trivial a demonstração dessa proposição.

Trataremos agora de algumas topologias específicas que serão mencionadas posteriormente. Considere X um conjunto qualquer não-vazio. Seja $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos, tal que para todo $\alpha \in \Lambda$ existe uma função $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$.

Dado que em muitos contextos a continuidade é uma propriedade desejável, poderíamos fazer a seguinte indagação: é possível encontrar uma topologia em X tal que esta torne $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de funções contínuas e seja a menor possível?

Considerando as proposições anteriores é possível responder positivamente a esta questão. É justamente essa possibilidade que motiva nossa próxima definição.

Definição 2.11. *Sejam X um conjunto qualquer não-vazio, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ coleção de espaços topológicos e $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ família de funções tais que $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$.*

A menor topologia em X para a qual todas as funções $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ são contínuas é chamada de topologia fraca.

Dado que por definição uma função é contínua quando a imagem inversa de qualquer aberto é um aberto, em nosso contexto então temos que a topologia fraca é a menor topologia que contém $\mathcal{C} = \{f_\alpha^{-1}(O) ; \forall O \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\}$.

É também muito comum encontrar na literatura referências a topologia fraca como a topologia gerada por $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, isto se dá devido a equivalência entre essas topologias apresentadas na proposição 2.5.

Exemplo: Seja X um espaço normado e X' o seu respectivo dual. Indicaremos por $\sigma(X; X')$ a topologia fraca em X induzida (gerada) pelo seu dual.

Considere agora uma coleção $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de espaços topológicos e $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, onde

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x ; x : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha ; x(\alpha) \in X_\alpha \right\}.$$

Definiremos agora uma família de funções associadas a $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ particularmente importante, qual seja:

$$\forall \alpha \in \Lambda \implies pr_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha,$$

onde para todo x em X associa-se um $x(\alpha)$ em X_α , ou seja,

$$pr_\alpha(x) = x(\alpha).$$

pr_α é chamada de projeção de X em X_α .

Definição 2.12. *Considerando o contexto acima definido a topologia fraca induzida pela família $\{pr_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é chamada de topologia produto.*

Exemplo: Considerando $l^\infty(\mathbb{R})$ note que $l^\infty(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$, onde $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ é o espaço das sequências reais. Observe que $\mathbb{R}^\mathbb{N} = \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \right)$.

Assim, poderíamos definir em $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ a topologia produto e induzi-la em $l^\infty(\mathbb{R})$.

Existência e Unicidade de Ponto-Fixo para Contrações Locais

Neste capítulo será apresentado o principal resultado estudado para este trabalho. Este importante teorema foi introduzido em [4].

Isto será feito de uma maneira bem objetiva, apresentaremos a estrutura matemática em que o teorema será desenvolvido, logo após enunciaremos e demonstraremos o mesmo e por fim apresentaremos algumas observações bem como corolários e alguns paralelos com a literatura anterior à publicação do artigo.

Sejam F um conjunto não-vazio e $\mathcal{D} = (d_j)_{j \in J}$ uma família de semi-distâncias definidas em F , isto é,

$$\begin{aligned} \forall j \in J \quad d_j : F \times F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto d_j(f, g), \end{aligned}$$

onde d_j cumpre todas as condições da definição de distância, exceto a seguinte:

$$(i) \quad d_j(f, g) = 0 \implies f = g.$$

Seja σ a topologia fraca definida sobre F induzida pela família $\mathcal{D} = (d_j)_{j \in J}$.

Definição 3.1. *Uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em F é σ -Cauchy se é d_j -Cauchy para cada $j \in J$. Ou seja, dado $j \in J, \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall m, n > n_0 \implies d_j(f_m, f_n) < \epsilon$.*

Definição 3.2. *Um subconjunto $A \subset F$ é sequencialmente σ -completo se toda sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σ -Cauchy for convergente em A na σ -topologia. Ou seja, $\exists f \in A$ tal que, dado $j \in J$,*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \implies d_j(f_n, f) < \epsilon.$$

Definição 3.3. *Um subconjunto $A \subset F$ é σ -limitado se for d_j -limitado para todo $j \in J$. Ou seja,*

$$\text{diam}_j(A) = \sup\{d_j(f, g); f, g \in A\} < \infty \quad \forall j \in J.$$

Definição 3.4. O espaço (F, σ) é chamado de σ -Hausdorff quando

$$\forall f, g \in F; f \neq g, \exists j \in J \text{ tal que } d_j(f, g) > 0.$$

Definição 3.5. Seja $r : J \rightarrow J$ uma função. Um operador $T : F \rightarrow F$ é uma contração local com respeito a $(\mathcal{D}, r)$ se, para todo $j \in J$, existe $\beta_j \in [0, 1)$ tal que

$$\forall f, g \in F \quad d_j(Tf, Tg) \leq \beta_j d_{r(j)}(f, g).$$

Teorema 3.1. Assuma que o espaço F é σ -Hausdorff. Considere uma função $r : J \rightarrow J$ e seja $T : F \rightarrow F$ uma contração local com respeito a $(\mathcal{D}, r)$. Considere $A \subset F$ tal que $A \neq \emptyset$, A é σ -limitado, sequencialmente σ -completo e T -invariante (isto é, $T(A) \subset A$). Se as seguintes condições são satisfeitas

$$\forall j \in J \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_j \beta_{r(j)} \dots \beta_{r^{n-1}(j)} \text{diam}_{r^n(j)}(A) = 0 \quad (3.1)$$

então o operador T admite um ponto fixo $f^* \in A$. Mais ainda, se $h \in F$ satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_j \beta_{r(j)} \dots \beta_{r^{n-1}(j)} d_{r^n(j)}(h, A) = 0 \quad (3.2)$$

então a sequência $(T^n h)_{n \in \mathbb{N}}$ é σ -convergente para f^* . Lembrando que $d_j(h, A) = \inf\{d_j(h, f); f \in A\}$.

Demonstração. Seja $g \in A$ um elemento qualquer fixo de A . Uma vez que T é uma contração local, para todo par $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$, temos que

$$d_j(T^m g, T^n g) \leq \beta_j d_{r(j)}(T^{m-1} g, T^{n-1} g),$$

e por mesma razão

$$d_{r(j)}(T^{m-1} g, T^{n-1} g) \leq \beta_{r(j)} d_{r^2(j)}(T^{m-2} g, T^{n-2} g).$$

Aplicando este raciocínio de maneira indutiva e recordando que $m > n$ chegamos a

$$\begin{aligned} d_j(T^m g, T^n g) &\leq \beta_j d_{r(j)}(T^{m-1} g, T^{n-1} g) \leq \dots \leq \beta_j \beta_{r(j)} \dots \beta_{r^{n-1}(j)} d_{r^n(j)}(T^{m-n} g, g) \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} \beta_{r^i(j)} \right] d_{r^n(j)}(T^{m-n} g, g). \end{aligned}$$

Por hipótese, A é T -invariante, assim trivialmente podemos concluir que A é T^n -invariante $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, $T^{m-n}(A) \subset A$, logo $T^{m-n} g \in A$, uma vez que $g \in A$. Segue que

$$\begin{aligned} d_{r^n(j)}(T^{m-n} g, g) &\leq \text{diam}_{r^n(j)}(A) \text{ (pela definição de } \text{diam}_{r^n(j)}(A)) \implies \\ d_j(T^m g, T^n g) &\leq \left[\prod_{i=0}^{n-1} \beta_{r^i(j)} \right] \text{diam}_{r^n(j)}(A). \end{aligned}$$

Pela hipótese (3.1), $\left[\prod_{i=0}^{n-1} \beta_{r^i(j)} \text{diam}_{r^n(j)}(A) \right] \rightarrow 0$. Logo, $\forall j \in J \implies (T^n g)_{n \in \mathbb{N}}$ é d_j -Cauchy, ou seja, $(T^n g)_{n \in \mathbb{N}}$ é σ -Cauchy. Uma vez que $A \subset F$ é sequencialmente σ -completo, existe $f^* \in A$ tal que $(T^n g) \xrightarrow{\sigma} f^*$.

Afirmamos que f^* é um ponto fixo de T . De fato, dado que $(T^n g)_{n \in \mathbb{N}}$ é σ -convergente para f^* , temos que

$$\forall j \in J \implies d_j(Tf^*, f^*) = d_j(Tf^*, \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}g) \stackrel{d_j \in C^0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} d_j(Tf^*, T^{n+1}g).$$

Por outro lado, T é contração local em relação a $(\mathcal{D}, r)$. Logo,

$$d_j(Tf^*, T^{n+1}g) \leq \beta_j d_{r(j)}(f^*, T^n g)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} d_j(Tf^*, T^{n+1}g) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_j d_{r(j)}(f^*, T^n g)$$

$$\implies d_j(Tf^*, f^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_j d_{r(j)}(f^*, T^n g) \stackrel{d_r(j) \in C^0}{=}$$

$$= \beta_j d_{r(j)}(f^*, \lim_{n \rightarrow 0} T^n g) = \beta_j d_{r(j)}(f^*, f^*) = 0$$

$$\implies d_j(Tf^*, f^*) = 0 \quad \forall j \in J.$$

Embora cada uma das d_j seja semi-distância, podemos concluir que $Tf^* = f^*$. De fato, suponhamos que Tf^* seja diferente de f^* . Uma vez que F é σ -Hausdorff temos que, $\exists j \in J$ tal que $d_j(Tf^*, f^*) > 0$, contradição com o fato que acabamos de mostrar, qual seja $d_j(Tf^*, f^*) = 0 \quad \forall j \in J$.

Suponhamos agora $h \in F$ tal que h satisfaz (3.2), isto é,

$$\forall j \in J \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=0}^n \beta_{r^i(j)} \right] d_{r^{n+1}(j)}(h, A) = 0.$$

Logo, dado qualquer $j \in J$, temos que

$$\forall n \in \mathbb{N} \implies d_j(T^{n+1}h, T^{n+1}f^*) \leq \beta_j d_{r(j)}(T^n h, T^n f^*) \leq \dots \leq \left[\prod_{i=0}^n \beta_{r^i(j)} \right] d_{r^{n+1}(j)}(h, f^*).$$

Note que $\forall g \in A$ temos que

$$\begin{aligned} d_{r^{n+1}(j)}(h, f^*) &\leq d_{r^{n+1}(j)}(h, g) + d_{r^{n+1}(j)}(g, f^*) \leq \\ &\leq d_{r^{n+1}(j)}(h, g) + \text{diam}_{r^{n+1}(j)}(A) \\ \implies d_{r^{n+1}(j)}(h, f^*) - \text{diam}_{r^{n+1}(j)}(A) &\leq d_{r^{n+1}(j)}(h, g). \end{aligned}$$

Uma vez que o lado esquerdo não depende de g , segue que

$$\begin{aligned} d_{r^{n+1}(j)}(h, f^*) - \text{diam}_{r^{n+1}(j)}(A) &\leq d_{r^{n+1}(j)}(h, A) \\ \implies d_{r^{n+1}(j)}(h, f^*) &\leq d_{r^{n+1}(j)}(h, A) + \text{diam}_{r^{n+1}(j)}(A). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$d_j(T^{n+1}h, T^{n+1}f^*) \leq \left[\prod_{i=0}^n \beta_{r^i(j)} \right] (d_{r^{n+1}(j)}(h, A) + \text{diam}_{r^{n+1}(j)}(A)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

em virtude das hipóteses (3.1) e (3.2).

Uma vez que $Tf^* = f^*$, logo $T^{n+1}f^* = f^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, assim mostramos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_j(T^n h, f^*) = 0 \forall j \in J$, e portanto $(T^n h)_{n \in \mathbb{N}}$ é σ -convergente para f^* , isto é, $(T^n h)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\sigma} f^*$. ■

Obs. Este teorema generaliza o resultado sobre existência de ponto-fixo proposto por [1]. Mais precisamente, [1] adiciona a exigência de que cada semi-distância d_j é a restrição de uma semi-norma definida em um espaço vetorial E contendo F , tal que E é um espaço vetorial topológico localmente convexo.

Sob tais condições, a tese de existência não pode ser aplicada a fim de resolver os problemas econômicos que apresentaremos no capítulo seguinte. Este teorema também apresenta um critério de estabilidade, dado pela hipótese 2, que também não aparece no resultado de [1].

A seguir apresentaremos a relação entre o teorema e o resultado de [1] de maneira mais detalhada.

Considere F no contexto definido neste capítulo. Fixando $r : J \rightarrow J$, seja $T : F \rightarrow F$ um operador localmente Lipschitziano com respeito a $(\mathcal{D}, r)$ no seguinte sentido

$$\begin{aligned} \forall j \in J &\implies \exists \beta_j \geq 0 \text{ tal que} \\ \forall f, g \in F &\implies d_j(Tf, Tg) \leq \beta_j d_{r(j)}(f, g). \end{aligned}$$

Assuma que F seja sequencialmente σ -completo. Aplicaremos o teorema para um conjunto $A \subset F$ específico. Primeiramente, suponha que exista $f \in F$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^n \beta_{r^i(j)} \right) d_{r^{n+1}(j)}(f, Tf) \quad (3.3)$$

é convergente. Seja $\mathcal{O}(f) = \{T^n f, n \in \mathbb{N}\}$ a órbita de f . Tome $A = \overline{\mathcal{O}(f)}$, ou seja, A é o σ -fecho de $\mathcal{O}(f)$. É fácil ver que A é T -invariante e sequencialmente σ -completo simplesmente pela definição. Provaremos que A é σ -limitado.

De fato, tomando $j \in J$ qualquer fixo, temos

$$\text{diam}_j(A) = \sup\{d_j(f, g), f, g \in A\} = \text{diam}_j(\mathcal{O}(f)).$$

Mas

$$\text{diam}_j(\mathcal{O}(f)) = \sup\{d_j(T^m f, T^n f), m, n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$d_j(T^m f, T^n f) \leq d_j(T^m f, f) + d_j(T^n f, f) \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} d_j(T^{n+1} f, f).$$

Por outro lado,

$$d_j(T^{n+1} f, f) \leq \sum_{i=0}^n d_j(T^{i+1} f, T^i f) \text{ (pela desigualdade triangular)}$$

e por hipótese, T é lipschitziano com respeito a $(\mathcal{D}, r)$, ou seja, $\forall i \leq n$ e $i \geq 1$,

$$d_j(T^{i+1} f, T^i f) \leq \left[\prod_{k=0}^{i-1} \beta_{r^k(j)} \right] d_{r^i(j)}(Tf, f).$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n d_j(T^{i+1}, T^i f) &\leq d_j(Tf, f) + \sum_{i=1}^n \left[\prod_{k=0}^{i-1} \beta_{r^k(j)} \right] d_{r^i(j)}(Tf, f) \\ &\leq d_j(Tf, f) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \beta_{r^k(j)} \right] d_{r^i(j)}(Tf, f) < \infty \end{aligned}$$

por conta da hipótese (3.3). Logo,

$$\text{diam}_j(A) \leq 2 \left[d_j(Tf, f) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \beta_{r^k(j)} \right] d_{r^i(j)}(Tf, f) \right] \quad \forall j \in J. \quad (3.4)$$

Portanto, A é σ -limitado.

Além disso, utilizando (3.4) chegamos ao seguinte fato:

$$\left(\prod_{k=0}^n \beta_{r^k(j)} \right) \text{diam}_{r^{n+1}(j)}(A) \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k+n} \beta_{r^i(j)} \right) d_{r^{k+n+1}(j)}(Tf, f).$$

Logo, como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k+n} \beta_{r^i(j)} \right) d_{r^{k+n+1}(j)}(Tf, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^n \beta_{r^k(j)} \right) \text{diam}_{r^{n+1}(j)}(A) = 0.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 3.1 e obter o seguinte corolário, que generaliza o lema 2 em [1].

Corolário 3.1. *Considere a família $\mathcal{D} = (d_j)_{j \in J}$ de semi-distâncias definidas em um conjunto F tal que F é Hausdorff e sequencialmente completo com respeito à topologia associada a σ . Seja $T : F \rightarrow F$ um operador localmente lipschitziano com respeito a $(\mathcal{D}, r)$ para alguma $r : J \rightarrow J$. Assuma que exista $f \in F$ tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^n \beta_{r^k(j)} \right) d_{r^n(j)}(f, Tf) < \infty \quad \forall j \in J.$$

Então T admite um único ponto-fixo no σ -fecho da órbita de f .

Obs. Se $h \in A$ então a condição (3.2) é automaticamente satisfeita, pois

$$d_{r^{n+1}(j)}(h, A) = 0 \quad \forall j \in J \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=0}^n \beta_{r^i(j)} \right) d_{r^{n+1}(j)}(h, a) = 0,$$

o que significa que o ponto-fixo f^* é único em A .

De fato, seja $g^* \in A$ um ponto-fixo, logo, pela argumentação acima descrita, a condição (3.2) é satisfeita, segue que $(T^n g^*)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\sigma} f^*$, mas como $g^* \in A$ é ponto-fixo, $g^* = T^n g^* \forall n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} \forall j \in J \implies d_j(f^*, g^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_j(f^*, g^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_j(f^*, T^n g^*) = 0 \\ \implies d_j(f^*, g^*) &= 0 \quad \forall j \in J. \end{aligned}$$

Como F é σ -Hausdorff, segue que $f^* = g^*$. Na verdade, f^* é único no conjunto $G \subset F$

$$G = \left\{ h \in F; \forall j \in J \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=0}^n \beta_{r^i(j)} \right) d_{r^{n+1}(j)}(h, A) = 0 \right\}.$$

Obs. Se a função $r : J \rightarrow J$ é a identidade, isto é, $r(j) = j \quad \forall j \in J$, então o operador T é chamado de 0-contração local, e neste caso as condições (3.1) e (3.2) são automaticamente satisfeitas. Em particular, o ponto-fixo é único em todo espaço F .

Obs. Assuma que o espaço F é sequencialmente σ -completo e escolha um $f \in F$ arbitrário. Podemos mostrar que $F(f)$ definido por

$$F(f) = \left\{ g \in F; \forall j \in J; d_j(g, f) \leq \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f) \right\}$$

é não-vazio, σ -limitado, σ -fechado e T -invariante.

Demonstração. (i) $F(f) \neq \emptyset$. De fato,

$$\forall j \in J \implies d_j(f, f) = 0 \leq \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f).$$

Logo, $f \in F(f)$.

(ii) $F(f)$ é σ -limitado.

$\forall j \in J \implies$ para quaisquer $g, g' \in F(f)$ temos que

$$d_j(g, g') \leq d_j(g, f) + d_j(f, g') \leq \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f) + \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f).$$

Assim,

$$d_j(g, g') \leq \frac{2}{1 - \beta_j} d(Tf, f) \implies \text{diam}_j(F(f)) \leq \frac{2}{1 - \beta_j} d(Tf, f).$$

Portanto, $\text{diam}_j(F(f)) < \infty \forall j \in J$, ou seja $F(f)$ é σ limitado.

(iii) $F(f)$ é σ -fechado.

Devemos mostrar que $F(f) = \overline{F(f)}$, onde este fecho é obtido em relação à topologia induzida pela família $\mathcal{D} = (d_j)_{j \in J}$.

Seja $g_0 \in \overline{F(f)}$, logo existe $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $g_n \xrightarrow{\sigma} g_0$ e $g_n \in F(f) \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim $\forall j \in J$ temos que $d_j(g_0, f) \leq d_j(g_0, g_n) + d_j(g_n, f)$ mas $g_n \in F(f) \forall n \in \mathbb{N}$ e $g_n \xrightarrow{\sigma} g_0$. Logo,

$$d_j(g_0, f) \leq d_j(g_0, g_n) + \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f),$$

e assim

$$\begin{aligned} d_j(g_0, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_j(g_0, f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_j(g_0, g_n) + \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_j(g_0, g_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f) = 0 + \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_j(g_0, f) \leq \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f),$$

isto é, $g_0 \in F(f)$. Segue que $\overline{F(f)} \subset F(f)$, ou seja, $F(f)$ é σ -fechado.

(iv) $F(f)$ é T -invariante.

Com efeito, seja $g \in F(f)$.

$$\forall j \in J \implies d_j(Tg, f) \leq d_j(Tg, Tf) + d_j(Tf, f) \leq \beta_j d_j(g, f) + d_j(Tf, f),$$

mas

$$d_j(g, f) \leq \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f),$$

pois $g \in F(f)$. Assim,

$$\beta_j d_j(g, f) + d_j(Tf, f) \leq \frac{\beta_j}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f) + d_j(Tf, f) = \frac{\beta_j + (1 - \beta_j)}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f).$$

Portanto

$$d_j(Tg, f) \leq \frac{1}{1 - \beta_j} d_j(Tf, f).$$

Segue que $T(F(f)) \subset F(f)$, ou seja, $F(f)$ é T -invariante. ■

Aplicando o Teorema 3.1, escolhendo $A = F(f)$ obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.2. *Seja $T : F \longrightarrow F$ uma 0-contração local com respeito à família $\mathcal{D} = (d_j)_{j \in J}$ de semi-distâncias. Assuma que o espaço F é sequencialmente σ -completo. Então o operador T admite um único ponto-fixo $f^* \in F$. Mais ainda, para qualquer $f \in F$ arbitrário, a sequência $(T^n f)_{n \in \mathbb{N}}$ é σ -convergente para f^* .*

Este corolário é uma generalização de um resultado primeiramente estabelecido por [8]. Do ponto de vista econômico, a contribuição principal do Teorema 3.1 e suas consequências é mostrar a importância de estabelecer um teorema que permita que os coeficientes de contração sejam arbitrariamente próximos de 1. (Observe que não foi imposto $\sup_{j \in J} \beta_j < 1$.) Apresentaremos, no próximo capítulo, aplicações econômicas que ilustram este fato. Uma diferença adicional do Teorema 3.1 com respeito aos resultados de ponto-fixo de [5] e [9] é que a família J não é necessariamente enumerável. Embora com muitas aplicações é suficiente considerarmos uma família enumerável de semi-distâncias, em algumas circunstâncias é necessário não restringir a cardinalidade da família de semi-distâncias.

Aplicações em Modelos de Economia Dinâmica

Neste capítulo trataremos de aplicações do resultado apresentado no capítulo anterior em problemas de economia dinâmica. Mostraremos como ele é importante para garantir a existência de uma função de utilidade que represente preferências.

Cabe ressaltar que agora estaremos em um contexto dinâmico, onde o decorrer do tempo é levado em consideração, diferentemente do Capítulo 1, onde apresentamos o contexto estático. Em muitas situações agentes econômicos tomam decisões não somente baseadas em seus resultados imediatos, mas também em implicações futuras.

Nosso conjunto de escolhas será o espaço $l^\infty(\mathbb{R}_+)$ e $x = (x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ tal que $x \in l^\infty(\mathbb{R}_+)$ será chamado de fluxo de consumo, onde x_t é a cesta de consumo no período t .

Se a economia possui L bens, conforme foi desenvolvido no Capítulo 1, x_t pertenceria a $\mathbb{R}_+^L$ e o espaço de escolhas adequado seria na verdade $l^\infty(\mathbb{R}_+^L)$. No entanto, interpretaremos x_t como a quantidade de renda a ser destinada para o consumo (no caso, dos L bens).

Sendo assim, como o consumo é nulo ou positivo, e por mais abastado financeiramente que o agente econômico seja, ele enfrentará uma restrição orçamentária (ou seja, $\exists w \in \mathbb{R}_+; |x_t| \leq w \forall t \in \mathbb{N}$), a escolha de $l^\infty(\mathbb{R}_+)$ como o espaço das escolhas é razoável para o contexto dinâmico.

Nossa estrutura de preferências será dada por um objeto chamado agregador, e o objetivo principal será garantir a existência de funções de utilidade que representem essas preferências.

4.1 Preferências Recursivas para Agregadores de Thompson

Considere o modelo onde um agente econômico escolhe uma cesta de consumo no espaço

$$l_+^\infty = \left\{ x; x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, x_t \geq 0 \text{ e } \sup_{t \in \mathbb{N}} |x_t| < \infty \right\}$$

dotado da norma $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{N}} |x_t|$.

Nosso problema consiste em saber se é possível representar a relação de preferência do agente em l_∞ através de uma função de utilidade recursiva obtida através de um agregador $W : X \times Y \longrightarrow Y$, onde $X = \mathbb{R}_+$ e $Y = \mathbb{R}_+$. A resposta obviamente depende das propriedades assumidas do agregador W .

Posteriormente à importante contribuição dada por [2], existe uma vasta literatura lidando com o problema de existência e unicidade da função de utilidade recursiva obtida através de um agregador que satisfaça as propriedades da contração uniformemente. No que segue, estaremos interessados em saber se uma única utilidade recursiva pode ser derivada de agregadores de Thompson.

Nesta seção assumiremos que W satisfaz as seguintes condições:

Definição 4.1. *W é um agregador de Thompson quando:*

$W_1)$ *W é uma função contínua, não-negativa, não-decrescente e satisfaz a condição $W(0, 0) = 0$.*

$W_2)$ *Existe uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $W(x, f(x)) \leq f(x) \quad \forall x \in X$.*

$W_3)$ *A função W é côncava na segunda variável para $y = 0$, isto é,*

$$W(x, \alpha y) \geq \alpha W(x, y) + (1 - \alpha)W(x, 0) \quad \forall \alpha \in [0, 1], \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$W_4)$ *Para todo $x > 0$, temos $W(x, 0) > 0$.*

Para definirmos formalmente o conceito de função de utilidade recursiva, necessitamos introduzir algumas notações. Denotaremos por

$$\begin{aligned} \pi : l^\infty &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_t) &\mapsto x_0, \end{aligned}$$

ou seja, π é a projeção de $x = (x_t)$ em sua primeira entrada.

Denotaremos por

$$\begin{aligned} S : l^\infty &\longrightarrow l^\infty \\ (x_t) &\longrightarrow (x_{t+1}), \end{aligned}$$

ou seja, S é o operador *shift*.

Definição 4.2. *Seja $\mathbb{X}$ um subconjunto de l^∞ estável sobre o operador shift, ou seja, $S(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$. Uma função $u : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de utilidade recursiva sobre $\mathbb{X}$ se*

$$\forall x \in \mathbb{X} \implies u(x) = W(\pi x, u(Sx)).$$

Usaremos o Teorema 3.1 para mostrar que é possível encontrar tal função para agregadores de Thompson.

Faremos isso utilizando a métrica de Thompson e assumindo que o espaço $\mathbb{X}$ é constituído por sequências cujos termos são todos maiores que zero uniformemente. Ou seja,

$$\mathbb{X} = \{x \in l^\infty; \inf |x_t| > 0\}.$$

A topologia sobre $\mathbb{X}$ será induzida pela norma do sup.

4.1.1 O operador

Introduziremos agora um operador conveniente a fim de utilizarmos o Teorema 3.1 para garantir a existência de um ponto-fixo para este operador, e a partir deste, encontrar a função de utilidade recursiva.

Considere

$$l_+^\infty = \{x; x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+; \sup_{t \in \mathbb{N}} x_t < \infty\}$$

dotado da norma $\|\cdot\|_\infty$, isto é, $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{N}} x_t$.

Estaremos considerando a topologia em l_+^∞ induzida por esta norma.

Seja

$$\mathbb{X} = \{x \in l_+^\infty; \inf_{t \in \mathbb{N}} x_t > 0\}.$$

Definição 4.3. *Seja*

$$\mathcal{V} = \left\{ V; V = (v_t)_{t \in \mathbb{N}}; \forall t \in \mathbb{N} \quad v_t : \begin{array}{c} \mathbb{X} \xrightarrow{\text{contínua}} \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto v_t(x) \end{array} \right\}.$$

O número $v_t(x)$ é interpretado como a utilidade no tempo t obtida pelo consumo de x .

Definição 4.4. *Para cada $V \in \mathcal{V}$ e cada instante $t \in \mathbb{N}$ denotaremos $[TV]_t$ uma função dada por*

$$\begin{aligned} [TV]_t : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto W(x_t, v_{t+1}(x)), \end{aligned}$$

isto é,

$$[TV]_t(x) = W(x_t, v_{t+1}(x)),$$

onde $x = (x_t)_{t \in \mathbb{N}}$.

Note que, uma vez que W e V são contínuas por definição, necessariamente, dado $t \in \mathbb{N}$ e $V \in \mathcal{V}$, $[TV]_t(x)$ é contínua $\forall x \in \mathbb{X}$. Ou seja, se $V \in \mathcal{V}$, então $TV \in \mathcal{V}$, isto é, $T(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

Definição 4.5. Denotaremos por $\mathcal{K}$ a família de todos os conjuntos $\mathbb{K} = [a\mathbf{1}, b\mathbf{1}]$, com $0 < a < b < \infty$. $[a\mathbf{1}, b\mathbf{1}]$ é chamado de intervalo ordenado em l_+^∞ no seguinte sentido.

$$\mathbf{1} = (1, 1, \dots) \in l_+^\infty \text{ e } [a\mathbf{1}, b\mathbf{1}] = \{x \in l_+^\infty; a \leq x_t \leq b \forall t \in \mathbb{N}\}.$$

Assim,

$$\mathcal{K} = \{\mathbb{K}, \mathbb{K} = [a\mathbf{1}, b\mathbf{1}]; 0 < a < b < \infty\}.$$

Definição 4.6. Consideremos F o subespaço de $\mathcal{V}$ composto de todas as sequências V tais que em todos os conjuntos $\mathbb{K} = [a\mathbf{1}, b\mathbf{1}] \in \mathcal{K}$, a sequência $V = (v_t)_{t \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, sendo a limitação inferior estritamente maior do que zero, ou seja,

$$F = \left\{ V \in \mathcal{V}; \forall \mathbb{K} \in \mathcal{K} \implies \exists \underline{v}, \bar{v} \in \mathbb{R}_+; \right. \\ \left. \forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{K} \implies 0 < \underline{v} \leq v_t(x) \leq \bar{v} < \infty \right\}.$$

Proposição 4.1. F é T -invariante.

Demonstração. Devemos mostrar que para todo $V \in F$, então $TV \in F$, ou seja, $\forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}$, $\exists \underline{v}', \bar{v}' \in \mathbb{R}_+$ tais que $\forall t \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{K} \implies 0 < \underline{v}' \leq [TV]_t(x) \leq \bar{v}' < \infty$.

De fato, temos que W é não-decrescente por hipótese. Assim tomando $V \in F$, temos que

$$\forall \mathbb{K} \in \mathcal{K} \implies \exists \underline{v}, \bar{v} \in \mathbb{R}_+$$

tais que

$$\forall x \in \mathbb{K} \text{ e } \forall t \in \mathbb{N} \implies 0 < \underline{v} \leq v_t(x) \leq \bar{v} < \infty.$$

Tomando $\underline{v}' = W(a, \underline{v})$ e $\bar{v}' = W(b, \bar{v})$, afirmamos que

$$0 < \underline{v}' \leq [TV]_t(x) \leq \bar{v}' < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{K}.$$

Com efeito, sabemos que $a > 0$ logo pela definição de agregador de Thompson usando $W_4 \implies W(a, 0) > 0$ e por W_1 (W é não-decrescente),

$$0 < W(a, 0) \leq W(a, \underline{v}) = \underline{v}',$$

pois $\underline{v} > 0$.

Usando sucessivamente W_1 temos que

$$0 < \underline{v}' = W(a, \underline{v}) \leq W(x_t, \underline{v}) \leq W(x_t, v_{t+1}(x)) \leq \\ \leq W(x_t, \bar{v}) \leq W(b, \bar{v}) = \bar{v}'.$$

Por definição, $W(x_t, v_{t+1}(x)) = [TV]_t(x)$. Logo, $0 < \underline{v}' \leq [TV]_t(x) \leq \bar{v}' < \infty$ e portanto $T(F) \subset F$. ■

O objetivo agora é mostrar que T admite um único ponto-fixo $v^* \in F$. A razão para tal é que, se v^* for ponto-fixo de T , então v_0^* será a função de utilidade recursiva. Para chegarmos neste ponto, será necessário a introdução de uma estrutura semelhante a que temos no teorema, isto motiva as definições a seguir.

4.1.2 A Métrica de Thompson

Definição 4.7. Fixado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$, introduziremos a semi-distância $d_{\mathbb{K}}$ em F , definida como

$$d_{\mathbb{K}}(V, V') = \max \{ \ln M_{\mathbb{K}}(V|V'), \ln M_{\mathbb{K}}(V'|V) \},$$

onde

$$M_{\mathbb{K}}(V, V') = \inf \{ \alpha > 0; \forall x \in \mathbb{K}, \forall t \in \mathbb{N} \implies v_t(x) \leq \alpha v'_t(x) \}.$$

Proposição 4.2. $d_{\mathbb{K}}$ está bem definida e é de fato uma semi-distância.

Demonstração. Sejam $V, V' \in F$. Logo existem $\underline{v}, \bar{v}, \underline{v}', \bar{v}' \in \mathbb{R}$ tais que

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{K} = [a1, b1],$$

temos

$$0 < \underline{v} \leq v_t(x) \leq \bar{v} < \infty \text{ e } 0 < \underline{v}' \leq v'_t(x) \leq \bar{v}' < \infty.$$

Segue que

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{\bar{v}'} &\leq \frac{1}{\bar{v}'_t(x)} \leq \frac{1}{\underline{v}'} < \infty \\ \implies 0 < \frac{\underline{v}}{\bar{v}'} &\leq \frac{v_t(x)}{\bar{v}'_t(x)} \leq \frac{\bar{v}}{\underline{v}'} < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Logo,

$$0 < \frac{\bar{v}}{\bar{v}'} \leq M_{\mathbb{K}}(V|V') \leq \frac{\bar{v}}{\underline{v}'} < \infty,$$

e por raciocínio análogo prova-se a existência de $M_{\mathbb{K}}(V'|V)$.

Provaremos agora que $d_{\mathbb{K}}$ é de fato uma semidistância.

1. $d_{\mathbb{K}}(V, V') \geq 0 \quad \forall V, V' \in F$. Já demonstramos que $\forall V, V' \in F \implies M_{\mathbb{K}}(V|V') \in (0, +\infty)$ bem como $M_{\mathbb{K}}(V'|V) \in (0, +\infty)$. Suponha que $M_{\mathbb{K}}(V|V') \in (0, 1)$. Logo, $\forall t \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{K} = [a1, b1]$, temos por definição

$$\begin{aligned} v_t(x) &\leq M_{\mathbb{K}}(V|V') v'_t(x) < v'_t(x) \leq M_{\mathbb{K}}(V'|V) v_t(x) \\ \implies v_t(x) &< M_{\mathbb{K}}(V'|V) v_t(x) \implies v_t(x) [M_{\mathbb{K}}(V'|V) - 1] > 0 \\ \implies M_{\mathbb{K}}(V'|V) &> 1, \end{aligned}$$

uma vez que $v_t(x) > 0$.

Acabamos de mostrar que se $M_{\mathbb{K}}(V|V') \in (0, 1)$ então $M_{\mathbb{K}}(V'|V) \in (1, +\infty)$, ou seja,

$$\forall V, V' \in F \implies \max\{\ln M_{\mathbb{K}}(V|V'), \ln M_{\mathbb{K}}(V'|V)\} \geq 0$$

e portanto $d_{\mathbb{K}} \geq 0$.

2. Se $V = V'$ então $d_{\mathbb{K}}(V, V') = 0$. Note que se $V = V' \implies M_{\mathbb{K}}(V|V') = M_{\mathbb{K}}(V'|V) = 1$ e $\ln M_{\mathbb{K}}(V|V') = \ln M_{\mathbb{K}}(V'|V) = 0$, isto é, $d_{\mathbb{K}}(V, V') = 0$.
3. $d_{\mathbb{K}}(V, V') = d_{\mathbb{K}}(V', V) \quad \forall V, V' \in F$.

$$d_{\mathbb{K}}(V, V') = \max\{\ln M_{\mathbb{K}}(V|V'), \ln M_{\mathbb{K}}(V'|V)\} = \max\{\ln M_{\mathbb{K}}(V'|V), \ln M_{\mathbb{K}}(V|V')\} = d_{\mathbb{K}}(V'|V).$$

4. $d_{\mathbb{K}}(V, V') \leq d(V, V'') + d(V'', V') \quad \forall V, V', V'' \in F$. A desigualdade segue imediatamente do seguinte fato:

$$x, b, z \in \mathbb{R} \implies \max\{x, b\} \leq \max\{x, z\} + \max\{z, b\}$$

quaisquer que sejam $x, b, z \in \mathbb{R}$.

Fica assim demonstrado que $d_{\mathbb{K}}$ está bem definida e é uma semi-distância. ■

Definição 4.8. Seja $V^{\infty} \in \mathcal{V}$ tal que $V^{\infty} = (v_t^{\infty})_{t \in \mathbb{N}}$ é a sequência de funções definida por $v_t^{\infty}(x) = f(\|x\|_{\infty})$, onde f é a função que satisfaz W_2 , ou seja, $W(x, f(x)) \leq f(x) \quad \forall x$.

Definição 4.9. Seja $V^0 \in \mathcal{V}$ tal que $V^0 = (v_t^0)_{t \in \mathbb{N}}$ é a sequência de funções definida por $v_t^0(x) = [T0]_t(x) = W(x_t, 0)$.

Observe que para todo $x \in \mathbb{K} = [a\mathbf{1}, b\mathbf{1}]$ temos que $0 < a \leq x_t \leq b < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N}$. Logo $0 < W(a, 0) \leq W(x_t, 0) \leq W(b, 0) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N}$, ou seja, $0 < W(a, 0) \leq v_t^0(x) \leq W(b, 0) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{K}$, isto é, $V^0 \in F$.

Também sabemos que f é contínua e $[a, b]$ é compacto, logo f admite máximo e mínimo em $[a, b]$. Ou seja, existem $\underline{z}, \bar{z} \in [a, b]$ tais que

$$f(\underline{z}) \leq f(z) \leq f(\bar{z}) \quad \forall z \in [a, b].$$

Em particular, para todo $x \in \mathbb{K} = [a\mathbf{1}, b\mathbf{1}] \implies \|x\|_{\infty} \in [a, b] \implies f(\underline{z}) \leq f(\|x\|_{\infty}) \leq f(\bar{z})$. Tomando $x = (x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ tal que $x_t = \underline{z} \quad \forall t \in \mathbb{N}$ então $x \in [a\mathbf{1}, b\mathbf{1}]$ e uma vez que $x_t \geq a > 0 \implies 0 < W(x_t, f(x_t)) = W(\underline{z}, f(\underline{z})) \leq f(\underline{z})$, isto é, $0 < f(\underline{z}) \leq v_t^{\infty}(x) \leq f(\bar{z}) < \infty \quad \forall x \in \mathbb{K}, \forall t \in \mathbb{N}$ e portanto $V^{\infty} \in F$.

Evidentemente $[V^0, V^{\infty}] \subset F$. Uma vez que T é uma aplicação monótona temos que $T([V^0, V^{\infty}]) \subset [V^0, V^{\infty}]$.

De fato, para todo $v \in [V^0, V^{\infty}]$ temos que

$$\forall x \in \mathbb{K} \text{ e } \forall t \in \mathbb{N} \implies v_t^0(x) \leq v_t(x) \leq v_t^{\infty}(x).$$

Mas

$$v_t^0(x) = W(x_t, 0) \leq W(x_t, v_{t+1}(x)) \leq W(x_t, v_t^\infty(x)) \leq W(\|x\|_\infty, f(\|x\|_\infty)) \leq f(\|x\|_\infty) = v_t^\infty(x)$$

e

$$W(x_t, v_{t+1}(x)) = [TV]_t(x),$$

ou seja

$$v_t^0(x) \leq [TV]_t(x) \leq v_t^\infty(x) \quad \forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{K}.$$

Proposição 4.3. *Se $T : [V^0, V^\infty] \longrightarrow [V^0, V^\infty]$ é tal que $[TV]_t(x) = W(x_t, V_{t+1}(x))$ então T é uma 0-Contração local com respeito à família $\mathcal{D} = (d_{\mathbb{K}})_{\mathbb{K} \in \mathcal{K}}$. Mais precisamente,*

$$d_{\mathbb{K}}(TV, TV') \leq \beta_{\mathbb{K}} d_{\mathbb{K}}(V, V') \quad \forall V, V' \in [V^0, V^\infty],$$

onde

$$\beta_{\mathbb{K}} = 1 - [\mu_{\mathbb{K}}]^{-1}; \quad \mu_{\mathbb{K}} = M_{\mathbb{K}}(V^\infty | V^0).$$

Lembrando que

$$M_{\mathbb{K}}(V^\infty | V^0) = \inf\{\alpha > 0; \forall x \in \mathbb{K} \text{ e } \forall t \in \mathbb{N}, f(\|x\|_\infty) \leq \alpha W(x_t, 0)\}.$$

Dado que, pela definição, chegamos a

$$\mu_{\mathbb{K}} = \sup_{x \in \mathbb{K}} \left(\sup_{t \in \mathbb{N}} \frac{f(\|x\|_\infty)}{W(x_t, 0)} \right) = \sup_{x \in \mathbb{K}} \left(\frac{f(\|x\|_\infty)}{\inf_{t \in \mathbb{N}} W(x_t, 0)} \right) = \frac{f(b)}{W(a, 0)}.$$

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [3]

Proposição 4.4. *O conjunto $[V^0, V^\infty]$ é sequencialmente completo com respeito à família $\mathcal{D} = (d_{\mathbb{K}})_{\mathbb{K} \in \mathcal{K}}$.*

Demonstração. Devemos mostrar que toda sequência σ -Cauchy em $[V^0, V^\infty]$ é σ -convergente em $[V^0, V^\infty]$.

De fato, seja $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência σ -Cauchy em $[V^0, V^\infty]$.

Ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$ temos que $V_n : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. $\forall x \in \mathbb{X}$ temos que $V_n(x) = (v_{n,t}(x))_{t \in \mathbb{N}}$ onde $V_n \in [V^0, V^\infty]$, isto é, $\forall n \in \mathbb{N} \implies v_t^0(x) \leq v_{n,t}(x) \leq v_t^\infty(x) \quad \forall x \in \mathbb{X} \text{ e } \forall t \in \mathbb{N}$.

Dado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$ podemos definir $\|\cdot\|_{\mathbb{K}} : [V^0, V^\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\|V\|_{\mathbb{K}} = \sup_{t \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{K}} |v_t(x)|$. Esta função é uma norma.

Agora, dadas duas sequências $V, V' \in [V^0, V^\infty]$ e fixado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$ temos que

$$v_t(x) \leq (M_{\mathbb{K}}(V|V') - 1) v'_t(x).$$

Por raciocínio análogo

$$v'_t(x) - v_t(x) \leq (M_{\mathbb{K}}(V'|V) - 1) v_t(x)$$

e como $V, V' \in [V^0, V^\infty] \implies v_t(x) \leq v_t^\infty(x)$ e

$$v_t'(x) \leq v_t^\infty(x) \implies \max \{v_t(x), v_t'(x)\} \leq f(\|x\|_\infty) \leq F(b)$$

logo

$$\begin{aligned} |v_t(x) - v_t'(x)| &\leq (\max \{M_{\mathbb{K}}(V|V'), M_{\mathbb{K}}(V'|V)\} - 1) f(b) \implies \\ \implies \|V - V'\|_{\mathbb{K}} &\leq (\exp d_{\mathbb{K}}(V, V') - 1) f(b). \end{aligned}$$

Dessa forma dado que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é σ -Cauchy segue $\forall \mathbb{K} \in \mathcal{K} \implies d_{\mathbb{K}}(V_m, V_n) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$.

Como a função exponencial é contínua temos que $\|V_m - V_n\|_{\mathbb{K}} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$, ou seja, considerando $V_n^{\mathbb{K}} = V_n|_{\mathbb{K}}$, isto é, $V_n^{\mathbb{K}}$ é a restrição de V_n a $\mathbb{K}$.

Temos que $(V_n^{\mathbb{K}})_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em relação a $\|\cdot\|_{\mathbb{K}}$. Observe que $V_n^{\mathbb{K}}$ pertence ao espaço das funções limitadas e contínuas de $\mathbb{N} \times \mathbb{K}$ em $\mathbb{R}$, esse espaço é um espaço de Banach caso usemos a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{K}}$.

Portanto, existe $V^{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ contínua tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^{\mathbb{K}} - V^{\mathbb{K}}\|_{\mathbb{K}} = 0.$$

Dado que $V_n \in [V^0, V^\infty] \forall n \in \mathbb{N}$ passando o limite é possível concluir que $V^0(x) \leq V^{\mathbb{K}}(x) \leq V^\infty(x) \forall x \in \mathbb{K}$.

Observe que pela definição de $V_n^{\mathbb{K}}$ e unicidade do limite podemos concluir que se $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ então

$$V^{\mathbb{K}}(x) = V^{\mathbb{K}'}(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}.$$

Portanto é possível definir sem ambiguidade $V : X \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ como $V(x) = V^{\mathbb{K}}(x)$ para qualquer $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$ tal que $x \in \mathbb{K}$. Como $V^0(x) \leq V^{\mathbb{K}}(x) \leq V^\infty(x) \forall \mathbb{K} \in \mathcal{C}$ segue que

$$V^0(x) \leq V(x) \leq V^\infty(x).$$

Para concluir nossa prova devemos mostrar que V é contínua (em reação à norma do sup). De fato, seja $x \in \mathbb{X}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \longrightarrow x$.

Tomando $\mathbb{K} = [a_0 1, b_0 1]$ onde $a_0 < \inf x_t$ e $b_0 > \sup x_t$ temos por definição que $x \in \mathbb{K}$, e como $x_n \longrightarrow x$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 \implies x_n \in \mathbb{K}$.

Dado que $V^{\mathbb{K}}$ é contínua então $V^{\mathbb{K}}(x_n) \longrightarrow V^{\mathbb{K}}(x)$, ou seja, $V \in [V^0, V^\infty]$. ■

Usando a proposição acima juntamente com o corolário 3.2, podemos concluir que existe $V^* \in [V^0, V^\infty]$ tal que $TV^* = V^*$.

Afirmamos que $v_0^* : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função de utilidade recursiva que estamos procurando, onde $V^* = (v_t^*)_{t \in \mathbb{N}}$.

De fato, pelo corolário acima sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [T^n 0]_t(x) = v_t^*(x),$$

e temos que:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad [T^n 0]_t(x) &= [T(T^{n-1}0)]_t(x) = W(x_t, (T^{n-1}0)_{t+1}(x)) = W(x_t, W(x_{t+1}, (T^{n-2}0)_{t+2}(x))) = \\ &= W(x_t, W(x_{t+1}, \dots, W(x_{t+n}, 0) \dots)). \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad [T^n 0]_t(Sx) = [T^n 0]_{t+1}(x).$$

Logo

$$v_{t+1}^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [T^n 0]_{t+1}(x) \stackrel{(ii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [T^n 0]_t(Sx) = v_t^*(Sx).$$

Assim nós temos que

$$v_0^*(x) = [TV^*]_0(x) = W(x_0, v_1^*(x)) = W(x_0, v_0^*(Sx)).$$

Desta forma fica demonstrado o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Dado um Agregador de Thompson W , então existe uma função de utilidade recursiva $u^* : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ a qual é contínua em $\mathbb{X}$ para a norma do sup. Mais ainda, esta função é única entre todas as funções contínuas que são limitadas para todo intervalo ordenado de $\mathcal{K}$.*

4.2 Preferências Recursivas para Agregadores de Blackwell

Agora continuaremos com as notações da seção 4.1 e consideraremos novamente um modelo onde o agente econômico escolhe seu fluxo de consumo no espaço $l^\infty(\mathbb{R}_+)$ através de uma função de utilidade recursiva obtida através de um agregador $W : X \times Y \rightarrow Y$, onde $X = \mathbb{R}_+$ e $Y \subset [-\infty, +\infty)$ tal que $0 \in Y$.

A existência de tal função de utilidade dependerá das propriedades do agregador W . No decorrer desta seção assumiremos que W é um agregador de Blackwell cuja definição é a seguinte:

Definição 4.10. *Seja $W : X \times Y \rightarrow Y$ onde $X = \mathbb{R}_+$ e $Y \subset [-\infty, +\infty)$ onde $0 \in Y$. Dizemos que W é um agregador de Blackwell se são satisfeitas as seguintes condições:*

(W_1) W é contínua e não-decrescente em $X \times Y$;

(W_2) W é Lipschitziana na segunda variável, ou seja, existe $\delta \in (0, 1)$ tal que

$$|W(x, y) - W(x, y')| < \delta |y - y'| \quad \forall x \in X \text{ e } \forall y, y' \in Y.$$

O objetivo agora será encontrar um subespaço $\mathbb{X} \in l^\infty(\mathbb{R}_+)$ estável em relação a S (operador *shift*) tal que W admite uma função de utilidade recursiva de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{R}$. Tomar $l^\infty(\mathbb{R}_+)$ como o espaço dos fluxos de consumo é feito em muitos modelos intertemporais. Isto se dá devido à vantagem de $l^\infty(\mathbb{R}_+)$ em relação a outros espaços (por exemplo $l^p(\mathbb{R}_+)$)

$1 \leq p < \infty$) pois não impõe restrições severas no tipo de dinâmica a ser considerada. Ver capítulo 15 em [10] para uma discussão sobre o tema.

A escolha de $l^\infty(\mathbb{R}_+)$ como espaço dos fluxos de consumo também traz algumas complicações em relação à escolha adequada da topologia sobre o espaço. Podem ser consideradas várias topologias em $l^\infty(\mathbb{R}_+)$. Temos a topologia induzida da norma do sup, a topologia produto, a topologia fraca induzida pelo dual $\sigma(l^\infty(\mathbb{R}_+), l^1(\mathbb{R}_+))$. No que segue mostraremos como o Teorema 3.1 pode ser aplicado para provar a existência da função de utilidade recursiva para um agregador de Blackwell, definida em um subconjunto de $l^\infty(\mathbb{R}_+)$ dotado de alguma topologia específica.

4.2.1 Agregador Ilimitado Inferiormente

Nesta subseção permitiremos que o agregador seja ilimitado inferiormente. Mais precisamente, segue a estrutura

$$W : X \times Y \longrightarrow Y$$

tal que W é agregador de Blackwell com $Y = [-\infty, +\infty)$ e $W(x, b) \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$.

Definição 4.11. *Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as sequências $a = (a_t)_{t \in \mathbb{N}}$ onde $a \in l_+^\infty(\mathbb{R})$ tais que a série*

$$\sum_{t \in \mathbb{N}} \delta^t |W(a_t, 0)|$$

é convergente, ou seja,

$$\mathcal{A} = \left\{ a \in l^\infty(\mathbb{R}_+) ; \sum_{t \in \mathbb{N}} \delta^t |W(a_t, 0)| < \infty \right\}.$$

Definição 4.12. *Seja $\mathcal{K}$ a seguinte família*

$$\mathcal{K} = \{ \mathbb{K} ; \mathbb{K} = [a, b] \text{ onde } a \in \mathcal{A} \text{ e } b > \|a\|_\infty \}.$$

Definição 4.13. *Seja $\mathbb{X} = \bigcup_{\mathbb{K} \in \mathcal{K}} \mathbb{K}$.*

Definição 4.14. *Seja F o conjunto de todas as funções de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{R}$ que são limitadas e contínuas em relação à topologia produto para cada $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$. Ou seja,*

$$F = \{ U ; U : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R} ; \exists M \in \mathbb{R} ; |U(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{X} \text{ e } U \in C^0 \}.$$

Definição 4.15. *Para cada $\mathbb{K}$ seja $\mathcal{D} = (d_{\mathbb{K}})_{\mathbb{K} \in \mathcal{K}}$ uma família de semi-distâncias definidas da seguinte forma:*

$$d_{\mathbb{K}}(U, V) = \sup_{x \in \mathbb{K}} |U(x) - V(x)| = \|U - V\|_{\mathbb{K}} \forall U, V \in F.$$

Por fim podemos definir o operador $T : F \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{X}}$ onde $(TU)(x) = W(x, U(Sx))$.

É claro que se esse operador possuir um ponto-fixo ele será exatamente a função de utilidade recursiva procurada.

Usaremos o Teorema 3.1 para garantir que neste contexto o operador acima descrito, de fato, possui um ponto-fixo. Mas antes precisaremos provar alguns fatos a fim de que as hipóteses do Teorema 3.1 sejam satisfeitas.

Proposição 4.5. *O espaço F é sequencialmente completo em relação a $\mathcal{D} = (d_{\mathbb{K}})_{\mathbb{K} \in \mathcal{K}}$.*

Demonstração. Seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência σ -Cauchy em F . Logo, dado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$ então,

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m, n > n_0 \text{ temos } d_{\mathbb{K}}(U_m, U_n) < \epsilon.$$

Mas

$$d_{\mathbb{K}}(U_m, U_n) = \sup_{x \in \mathbb{K}} |U_m(x) - U_n(x)|.$$

Segue que $\forall x \in \mathbb{K} \implies (U_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é Cauchy em $\mathbb{R}$. Mas $\mathbb{R}$ é espaço de Banach, logo existe $u_x^{\mathbb{K}} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = u_x^{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |U_n(x) - u_x^{\mathbb{K}}| = 0.$$

Pela unicidade do limite é possível definir sem ambiguidade a seguinte função:

$$U^{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } U^{\mathbb{K}}(x) = u_x^{\mathbb{K}}.$$

Por outro lado, é possível ver de maneira trivial que se $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ então $U^{\mathbb{K}}(x) = U^{\mathbb{K}'}(x) \forall x \in \mathbb{K}$.

Logo podemos definir de maneira mais geral a função

$$U : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde $U(x) = U^{\mathbb{K}}(x)$ para qualquer $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$ tal que $x \in \mathbb{K}$.

Afirmamos que $U_n \xrightarrow{\sigma} U$ e que $U \in F$.

Com efeito, provaremos primeiro a σ -convergência.

Dado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$ note que $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n > n_0 \implies \sup_{x \in \mathbb{K}} |U_n(x) - U_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{K}} |U_n(x) - U_m(x)| &\leq \frac{\epsilon}{2} \\ \implies \sup_{x \in \mathbb{K}} |U_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(x)| &\leq \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

pois tanto o $\sup$ como $|\cdot|$ são funções contínuas donde temos

$$\sup_{x \in \mathbb{K}} |U_n(x) - U(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > n_0,$$

isto é,

$$\forall n > n_0 \implies d_{\mathbb{K}}(U_n, U) < \epsilon$$

e portanto $U_N \xrightarrow{\sigma} U$.

Por fim, resta mostrar que $U \in F$, ou seja, U é contínua (topologia produto) e limitada.

Seja $x \in \mathbb{X}$ e tome $\mathbb{K} = [a1, b1]$ onde $a < \inf x_t$ e $b > \sup x_t$, e $x_n \rightarrow x$ (convergência na topologia produto). Devemos mostrar que $U(x_n) \rightarrow U(x)$ (convergência na norma em $\mathbb{R}$). De fato, note que

$$\begin{aligned} |U(x_n) - U(x)| &\leq |U(x_n) - U_m(x_n)| + |U_m(x_n) - U_m(x)| + |U_m(x) - U(x)| \\ &\leq d_{\mathbb{K}}(U, U_m) + |U_m(x_n) - U_m(x)| + d_{\mathbb{K}}(U_m, U). \end{aligned}$$

Observe que como $x_n \rightarrow x$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ então $x_n \in \mathbb{K}$.

Dado que $U_m \xrightarrow{\sigma} U$ temos que $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m > m_0$ então $d_{\mathbb{K}}(U_m, U) < \epsilon/3$, e dado que $U_m \in F \forall m \in \mathbb{N}$, logo U_m é contínua, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_m(x_n) - U_m(x)| = 0$.

Assim, tomando m_1 fixo tal que $m_1 > m_0$,

$$\exists n_0^1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > n_0^1 \implies |U_{m_1}(x_n) - U_{m_1}(x)| < \epsilon/3.$$

Assim,

$$d_{\mathbb{K}}(U, U_{m_1}) + |U_{m_1}(x_n) - U_{m_1}(x)| + d_{\mathbb{K}}(U, U_{m_1}) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3,$$

ou seja,

$$\forall n > n_0^1 \implies |U(x_n) - U(x)| < \epsilon.$$

Portanto, U é contínua.

De maneira semelhante é possível demonstrar que U é limitada. Fica assim provado que F é sequencialmente completo. ■

Observe ainda que $T(F) \subset F$, pois W, π, S, U são funções contínuas e $(TU)(x) = W(\pi x, U(Sx))$.

Seja $r : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que $r(\mathbb{K}) = S(\mathbb{K})$. Então temos a seguinte proposição.

Proposição 4.6. *Considerando o contexto acima definido, $T : F \rightarrow F$ é uma contração local em relação a $(\mathcal{D}, r)$.*

Demonstração. De fato, seja $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$, e dados $U, V \in F$, então $\forall x \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned}
 |(TU)(x) - (TV)(x)| &= |W(\pi x, U(Sx)) - W(\pi x, V(Sx))| \\
 &\leq \delta |U(Sx) - V(Sx)| \\
 &\leq \sup_{x \in \mathbb{K}} |U(Sx) - V(Sx)| \\
 &= \delta \sup_{x \in S(\mathbb{K})} |U(x) - V(x)| \\
 &= \delta d_{r(\mathbb{K})}(U, V) \\
 \implies |(TU)(x) - (TV)(x)| &\leq \delta d_{r(\mathbb{K})}(U, V) \quad \forall x \in \mathbb{K}.
 \end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{x \in \mathbb{K}} |(TU)(x) - (TV)(x)| \leq \delta d_{r(\mathbb{K})}(U, V),$$

ou seja,

$$d_{\mathbb{K}}(TU, TV) \leq \delta d_{r(\mathbb{K})}(U, V) \quad \forall U, V \in F \text{ e } \forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}.$$

■

Considerando os resultados acima demonstrados bem como o Teorema 3.1 provamos a seguinte proposição.

Proposição 4.7. *Existe uma função de utilidade recursiva $U : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e contínua para a topologia produto em todo intervalo ordenado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$. Mais ainda, U é o único ponto-fixo de T no conjunto de todas as funções $V : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e limitadas para a topologia produto em todo intervalo ordenado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$ satisfazendo:*

(1)

$$\forall \mathbb{K} \in \mathcal{K} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \delta^t \sup_{x \in \mathbb{K}} |V(S^t x)| = 0.$$

Demonstração. Observe que $\forall t \geq 1$ temos que dado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
 \|T0\|_{r^t(\mathbb{K})} &= \|W(\pi x, 0)\|_{r^t(\mathbb{K})} = \sup_{x \in r^t(\mathbb{K})} |W(\pi x, 0)| = \sup_{x \in \mathbb{K}} |W(\pi(S^t x), 0)| = \sup_{x \in \mathbb{K}} |W(x_t, 0)| \\
 \implies \|T0\|_{r^t(\mathbb{K})} &= \sup_{x \in \mathbb{K}} |W(x_t, 0)|.
 \end{aligned}$$

Assim temos

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \|T0\|_{r^t(\mathbb{K})} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sup_{x \in \mathbb{K}} |W(x_t, 0)|.$$

Como $x \in \mathbb{K}$, segue da definição que a série $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \|T0\|_{r^t(\mathbb{K})}$ é convergente.

Assim, aplicando o corolário 3.1 podemos concluir que existe um ponto-fixo U do operador T o qual é único em A , onde $A = \overline{\mathcal{O}(0)}$ (fecho da órbita do operador nulo 0).

Agora, fixemos uma função $V : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua para a topologia produto em todo o intervalo ordenado $\mathbb{K} \in \mathcal{K}$ satisfazendo (1). Devemos mostrar que $\forall \mathbb{K} \in \mathcal{K} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} d_{\mathbb{K}}(T^t V, U) = 0$.

De acordo com o Teorema 3.1 é suficiente mostrar que

$$\forall \mathbb{K} \in \mathcal{K} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \delta^t d_{r^t(\mathbb{K})}(V, A) = 0,$$

onde

$$d_{r^t(\mathbb{K})}(V, A) = \inf_{U \in A} d_{r^t(\mathbb{K})}(V, U).$$

Note que $0 \in A$, logo

$$d_{r^t(\mathbb{K})}(V, A) \leq d_{r^t(\mathbb{K})}(V, 0),$$

mas

$$d_{r^t(\mathbb{K})}(V, 0) = \|V\|_{r^t(\mathbb{K})}.$$

Segue que

$$\delta^t d_{r^t(\mathbb{K})}(V, 0) = \delta^t \|V\|_{r^t(\mathbb{K})} = \delta^t \sup_{x \in r^t(\mathbb{K})} |V(x)| = \delta^t \sup_{x \in \mathbb{K}} |V(S^t x)|.$$

e por (1) podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta^t d_{r^t(\mathbb{K})}(V, A) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \delta^t \sup_{x \in \mathbb{K}} |V(S^t x)| = 0.$$

■

Considerações Finais

Neste trabalho foi estudado um importante teorema sobre pontos-fixos para contrações locais associadas à uma família de semi-distâncias não-enumerável bem como sua aplicabilidade na resolução de problemas em economia dinâmica. O objeto principal de estudo foi o recente artigo de Martins da Rocha e Vailakis [4]. Cabe ressaltar que este artigo é sobre teoria econômica, e portanto, através de modelos matemáticos tem como principal objetivo o desenvolvimento teórico da ciência econômica. Assim sendo, em geral, artigos desta natureza não costumam trazer explicações muito profundas sobre as interpretações econômicas de seus resultados ou suas aplicações. O artigo [4] segue essa tendência. Isto justifica a ausência no presente trabalho de interpretações mais profundas sobre o sentido econômico das aplicações apresentadas no capítulo 4, pois as mesmas não são encontradas no artigo objeto de estudo. No entanto, conforme foi dito no capítulo introdutório, a ênfase maior deste trabalho foi dada ao aspecto matemático do artigo. Dessa forma, foram utilizados os dois primeiros capítulos para apresentação de noções e conceitos necessários ao bom entendimento do conteúdo do mesmo.

O teorema encontrado em [4] é enunciado e demonstrado em detalhes no capítulo 3, no qual também é exposto um paralelo entre este resultado e teoremas anteriores sobre o assunto presentes na literatura. Ainda é destacado neste capítulo que importantes diferenciais deste resultado em relação aos anteriores são a não restrição da cardinalidade da família de semi-distâncias bem como a não imposição que a família de coeficientes relativos à contração seja uniformemente inferior à unidade.

No capítulo 4 são apresentadas as aplicações do teorema, quais sejam, sua utilização para garantir a existência e unicidade de funções de utilidade recursiva em diferentes contextos. Note-se que para os agregadores de Thompson não existe a exigência de que os coeficientes associados à contração local sejam uniformemente inferiores à unidade e para os agregadores de Blackwell a família de semi-distâncias não é enumerável.

Referências

- [1] Hadzic, O. (1979), *Some theorems on the fixed point of multivalued mappings in locally convex spaces*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, 27(3-4), 277-285.
- [2] Lucas, R. E. J.; Stokey, N. L. (1984), *Optimal growth with many consumers*, Journal of Economic Theory, 32(1), 139-171.
- [3] Marinaci, M.; Montrucchio, L. (2007), *Unique solutions of some recursive equations in economic dynamic*, Collegio Carlo Alberto, Working Paper #46
- [4] Martins-da-Rocha, V. F.; Vailakis, Y., *Fixed point for local contractions: Applications to recursive utility*, International Journal of Economic Theory (Print), v. 9, p. 23-33, 2013.
- [5] Matkowski, J.; Nowak, A. (2008) *On discounted dynamic programming with unbounded returns*, Working Paper, University of Zielona Góra
- [6] Nicholson, E. (1998) *Microeconomic Theory: Basic Principle and Extensions*, Seventh Edition, Driden Press.
- [7] Rincón-Zapatero, J. P.; Rodríguez-Palmero (2003), *Existence and uniqueness of solutions to the Bellman equation in the unbounded case*, Econometrica, 71(5), 1519-1555.
- [8] Rincón-Zapatero, J. P.; Rodríguez-Palmero (2007), *Recursive utility with unbounded aggregators*, Economic Theory, 33(2), 381-391.
- [9] Rincón-Zapatero, J. P.; Rodríguez-Palmero (2009), *Corrigendum to "Existence and Uniqueness of solutions to the Bellman equation in the unbounded case" Econometrica, 71(5), 2003, 1519-1555*, Econometrica, 77(1), 317-318.
- [10] Stokey, N. L.; Lucas, J.; Prescott, E. C. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, Cambridge, MA.
- [11] Varian, H. (2006), *Microeconomia: Princípios Básicos*, Tradução da 7ª Edição Americana, Rio de Janeiro, Editora Campus.
- [12] Vasconcellos, Marco Antonio Sandoval de; (2011), *Economia: Macro e Micro*, 5ª Edição, São Paulo: Editora Atlas.

-
- [13] Lima, Elon Lages; (2013), *Espaços Métricos*, 5ª Edição, Rio de Janeiro: IMPA.
- [14] Kreyszig, Erwin; (1978), *Introductory Funcional Analysis with applications*, John Wiley and Sons, Inc, Canada.
- [15] Bachman, George; (1966), *Functional Analysis*, Academic Press, New York.