

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor,
o texto completo desta dissertação
será disponibilizado somente a partir
de 03/02/2022.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Vagner Figueira de Faria

O triângulo e o tetraedro aritméticos: os teoremas binomial e multinomial e seus padrões geométricos

**Rio Claro
2020**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O triângulo e o tetraedro aritméticos: os teoremas binomial e multinomial e seus padrões geométricos

Vagner Figueira de Faria

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Érika Capelato
FCL - UNESP - Araraquara (SP)

Rio Claro
2020

F224t

Faria, Vagner Figueira de

O triângulo e o tetraedro aritméticos: os teoremas binomial e multinomial e seus padrões geométricos / Vagner Figueira de Faria. -- Rio Claro, 2020

108 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Érika Capelato

1. Álgebra. 2. Teorema binomial. 3. Coeficientes binomiais. 4. Pascal, Triângulo de. 5. Análise combinatória. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Vagner Figueira de Faria

O TRIÂNGULO E O TETRAEDRO ARITMÉTICOS: OS TEOREMAS
BINOMIAL E MULTINOMIAL E SEUS PADRÕES GEOMÉTRICOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Érika Capelato
FCL - UNESP - Araraquara (SP)
Orientadora

Prof. Dr. Thiago de Melo
IGCE - UNESP - Rio Claro (SP)

Prof. Dra. Denise de Mattos
ICMC - USP - São Carlos (SP)

Rio Claro, 03 de fevereiro de 2020

*Aos meus pais,
Geny e João Adelino,
com amor.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus caros professores Luiz Antonio Ponce Alonso e Carlos McDowell por terem lido as minhas primeiras descobertas sobre os Tetraedros Aritméticos e me incentivado em 1995, quando eu estudava no terceiro ano do Ensino Médio e no curso pré-vestibular.

Agradeço aos professores da UNESP: Prof. Dr. Thiago de Melo e Prof. Dr. Jamil Viana Pereira por terem avaliado de início minha proposta de tema para esta dissertação.

Agradeço aos professores do PROFMAT UNESP campus Rio Claro, Prof. Dr. Rawilson de Oliveira Araujo, Prof. Dr. Thiago de Melo, Prof. Dr. Jamil Viana Pereira e Prof. Dra. Érika Capelato pelas aulas bem preparadas e por terem seguido a bibliografia recomendada pelo PROFMAT; isso ajudou muito na minha preparação para o Exame Nacional de Qualificação e no resultado que obtive: aprovado com nota máxima.

Agradeço especialmente à minha orientadora, Prof. Dra. Érika Capelato por ter sugerido artigos, temas e demonstrações que deram estrutura sólida para esta dissertação. Além disso, é importante agradecer-lá pela disposição e motivação para ler e corrigir as versões deste trabalho, mesmo em dias e horários diversos. Sem seu incentivo esse projeto não teria se concretizado.

Em especial, agradeço ao saudoso Prof. Dr. Elon Lages Lima por ter idealizado o programa PROFMAT, possibilitando, assim, a oportunidade de realizar meu sonho de fazer o Mestrado em Matemática. Agradeço a todos os professores e autores dos livros do PROFMAT por terem sido tão caprichosos e precisos na execução desse grandioso projeto. À Sociedade Brasileira de Matemática e ao IMPA, centros de excelência em Matemática, que nos orgulham e nos guiam na Educação Matemática há décadas.

A todos os envolvidos o meu muito obrigado!

*A Matemática é a rainha das ciências e
a Aritmética é a rainha das matemáticas.*
Carl Friedrich Gauss

Resumo

Neste trabalho, com o objetivo de adquirir diferentes conhecimentos e novas formas de abordagem, estudamos diversas demonstrações para os teoremas binomial e multinomial. Estas demonstrações possibilitaram explorar técnicas matemáticas como a indução matemática, análise combinatória, probabilidades e cálculo diferencial. Resultados interessantes foram apresentados neste trabalho com relação à expansão do triângulo de Pascal para outras dimensões como o tetraedro aritmético formado por todas as camadas triangulares associadas às expansões trinomiais e os tetraedros que são associados às expansões tetranomiais.

Palavras-chave: Teorema Binomial, Teorema Multinomial, Triângulo de Pascal, Tetraedro Aritmético, Análise Combinatória.

Abstract

In this work, aiming to acquire different knowledge and new ways of approach, we study several demonstrations for the binomial and multinomial theorems. These demonstrations made it possible to explore mathematical techniques such as mathematical induction, combinatorial analysis, probabilities and differential calculus. Interesting results have been presented in this paper regarding the expansion of the Pascal triangle to other dimensions such as the arithmetic tetrahedron formed by all the triangular layers associated with trinomial expansions and the tetrahedra that are associated with tetranomial expansions.

Keywords: Binomial Theorem, Multinomial Theorem, Pascal's Triangle, Arithmetical Tetrahedron, Combinatorial Analysis.

Lista de Figuras

1.1	Diagramação usada por Montmort para o Triângulo Aritmético, 1708. Fonte: [7], p. xiv.	23
1.2	Os Números Triangulares	23
1.3	Números triangulares no triângulo de Pascal	24
1.4	A soma dos seis primeiros naturais resulta um número triangular. . . .	25
1.5	Os Números Quadrados ou Quadrados Perfeitos	26
1.6	Sequências de números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos. Fonte: [7], p.4.	26
1.7	Sequências de números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos.	27
1.8	Visualização de $(a + b)^2$	28
1.9	Visualização $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$	29
1.10	Michael Stifel, 1487–1567. Fonte: [26].	30
1.11	<i>Die Coss</i> , Rudolffs e Stifel: o Triângulo Aritmético e a Relação de Stifel como ele a apresentou em 1553 (RUDOLFFS, STIFEL, 1553, p.168). . .	31
1.12	1553: <i>Die Coss</i> , Rudolffs e Stifel: o Triângulo Aritmético e a Relação de Stifel como ele a apresentou; nesta página vemos a explicação do mecanismo da soma ou <i>Relação de Stifel</i> (RUDOLFFS, STIFEL, 1553, p.169).	32
1.13	Blaise Pascal, 1623–1662. Fonte: [25].	33
1.14	Capa da primeira edição do <i>Traité du triangle arithmétique</i> de Pascal, (PASCAL, 1665)	34
1.15	Apresentação original do triângulo aritmético de Pascal, (PASCAL, 1665). 35	
1.16	Jakob Bernoulli (também escrito como “Jacques Bernoulli”, “Jacobi Ber- noulli” ou ainda “James Bernoulli”). Fonte: [23].	36
1.17	Capa do livro <i>Ars Conjectandi</i> , de Jakob Bernoulli, 1713. Fonte: [24]. .	37
1.18	O Triângulo Aritmético apresentado por Jakob Bernoulli, em seu livro <i>Ars Conjectandi</i> , publicado em 1713. (BERNOULLI, 1713, p.87). . . .	38
2.1	Triângulo de Pascal	43
2.2	Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais	46
2.3	Teorema das colunas. Fonte: [15], p. 99.	50
2.4	Teorema das colunas. Fonte: [15], p. 96.	52
5.1	$(a + b + c)^2$	76
5.2	$(a + b + c)^3$	79
5.3	$(a + b + c)^4$	80
5.4	Coeficientes de $(a + b + c)^4$	81
5.5	$(a + b + c)^5$	82

5.6	Coeficientes de $(a + b + c)^5$	83
5.7	Princípio multiplicativo para obtenção da camada correspondente a $n = 4$	86
5.8	Princípio multiplicativo para obtenção da camada correspondente a $n = 5$	86
5.9	<i>O Tetraedro Aritmético</i> , com os coeficientes de $(a + b + c)^n$, até $n = 5$.	89
5.10	<i>O Tetraedro Aritmético</i> , com os coeficientes de $(a + b + c)^n$, até $n = 5$ - segunda visão	90
5.11	<i>O Tetraedro Aritmético</i> , com os coeficientes de $(a + b + c)^n$, até $n = 5$ - terceira visão	91
5.12	Tetraedro com os coeficientes de $(a + b + c + d)^5$	93
5.13	Tetraedro: princípio multiplicativo	94
5.14	Uma representação parcial do Hipertetraedro da expansão de $(a + b + c + d + e)^5$	95
6.1	Os Números Triangulares	100
6.2	Os Números Triangulares	101
6.3	Números triangulares no triângulo de Pascal	102
6.4	A soma $1 + 2 + \cdots + n$ no triângulo de Pascal	104
6.5	Números tetraédricos no triângulo de Pascal	106
6.6	A soma dos números triangulares resulta em um número tetraédrico: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$	107

Sumário

1	Introdução	21
2	O Triângulo Aritmético	43
2.1	Relação de Stifel	47
2.2	Teoremas relacionados aos termos do Triângulo Aritmético	49
3	O Teorema Binomial	55
3.1	Demonstração por Indução Matemática	56
3.2	Demonstração usando Análise Combinatória	58
3.3	Demonstração usando Probabilidade	59
3.4	Demonstração usando Cálculo Diferencial	62
4	O Teorema Multinomial	65
4.1	Demonstração usando Análise Combinatória	66
4.2	Demonstração probabilística	69
4.3	Demonstração usando Cálculo Diferencial	71
5	Padrões geométricos para as expansões trinomiais e tetranomiais	73
5.1	Expansão Trinomial	74
5.2	Expansão Tetranomial	92
5.3	Passos futuros para novas dimensões	95
6	Atividades para sala de aula	97
6.1	Atividade 1 - O Triângulo de Pascal e a Relação de Stifel	97
6.2	Atividade 2 - Os Números Triangulares	99
6.3	Atividade 3 - Números Tetraédricos	106
	Referências	109

1 Introdução

De acordo com Edwards (2019), o Triângulo Aritmético é o mais famoso de todos os padrões de números. À primeira vista parece tratar apenas dos coeficientes binomiais. Porém, ele contém os números triangulares e piramidais da Grécia Antiga, os números combinatórios que vieram com os estudos Hindus de arranjos e seleções de objetos e ainda, de forma um pouco velada, os números de Fibonacci¹ da Itália medieval. Ele revela padrões que agradam os olhos, levanta questões que instigam os estudiosos de Teoria dos Números e, sobretudo, “Há tantas relações presentes que quando alguém descobre uma nova identidade, não há mais tantas pessoas que se empolguem a seu respeito, exceto o descobridor!” - Knuth (1973).

O Triângulo Aritmético foi escrito pela primeira vez muito antes de 1654, ano em que Blaise Pascal escreveu o seu *Traité du triangle arithmétique*, mas foi o seu trabalho que uniu todos os diferentes aspectos dos números pela primeira vez. Nele, Pascal desenvolveu as propriedades dos números como uma peça de matemática pura (frequentemente usando indução matemática em suas demonstrações) e então, numa série de apêndices, mostrou como essas propriedades são relevantes para o estudo dos números figurados, para a teoria de combinações, para a expansão das expressões binomiais e para a solução de um importante problema da teoria das probabilidades. É, portanto, muito apropriado que o Triângulo Aritmético seja conhecido como Triângulo de Pascal.

O subsequente florescimento da teoria das probabilidades aumentou a importância dos coeficientes binomiais através da principal aplicação na distribuição binomial. Durante o desenvolvimento da análise no século XVII, esses coeficientes com grande frequência vinham à tona influenciando diretamente as descobertas de Wallis², Newton³ e Leibniz⁴. Mais recentemente, o crescimento da importância da análise combinatória tem fomentado novo interesse nos coeficientes binomiais. Para contarmos a história desses números, é importante distinguirmos três caminhos pelos quais eles vieram. Temos então que distinguir três tipo de números:

¹Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, (c.1170–c.1250), mais reconhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano. É considerado o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido pela grande descoberta da Sequência de Fibonacci e pela sua participação na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

²John Wallis (1616–1703) foi um clérigo inglês e matemático, a quem é dado crédito por parte do desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.

³Isaac Newton (1643–1727) foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático. Sua obra, *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* é considerada uma das mais influentes na história da ciência.

⁴Gottfried Wilhelm (von) Leibniz (1646–1716) foi um proeminente polímata alemão e um dos mais importantes lógicos, matemáticos e filósofos naturais do Iluminismo. Leibniz e Newton criaram o Cálculo Diferencial e Integral independentemente um do outro.

1. *Os números figurados.* São sequências de números associados a agrupamentos de pontos (ou objetos) que formam alguma figura ou padrão geométrico. Os números triangulares apresentados na Figura 1.2 são um exemplo de números figurados.

Podemos definir os *Números Figurados* como sendo os números que ocorrem numa certa família de progressões nas quais o l -ésimo número da k -ésima progressão, denotado por f_k^l , é a soma dos primeiros l números da progressão anterior (a $(k-1)$ -ésima progressão), sendo a primeira dessas progressões, a sequência dos números inteiros: $1, 2, 3, 4, \dots$.

2. *Números Combinatórios:* são aqueles que dão o número de maneiras de se escolher k elementos de um conjunto com n elementos, simbolizado atualmente como C_n^k ou nC_k ou ainda $C_{n,k}$. Algebricamente, a definição de combinação é dada por

$$C_n^k = {}^nC_k = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.1)$$

3. *Números Binomiais:* são os coeficientes que ocorrem na expansão da n -ésima potência da expressão binomial $(a+b)$; o coeficiente de um termo $a^{n-k}b^k$ dessa expansão é normalmente denotado por $\binom{n}{k}$ ⁵. Algebricamente temos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.2)$$

De maneira análoga, uma diagramação de números será chamada de *Triângulo Figurado*, *Triângulo Combinatório* ou *Triângulo Binomial* de acordo com o contexto no qual estiver inserido. Essas diagramações de números não estarão necessariamente em formato triangular – de fato, como esses padrões podem ser estendidos indefinidamente, não raramente ficará difícil atribuir um determinado formato geométrico a eles – mas é conveniente e consistente trabalharmos com a forma triangular. Claro que todos esses triângulos mostraram tratar das mesmas coisas; são de fato uma coisa só. Mas fizemos essa diferenciação para facilitar a apresentação de sua história. Ao pesquisarmos os estudos e descobertas ao longo da história, notamos que cada descobridor do Triângulo Aritmético estava mergulhado em um ambiente de estudo: *Números Figurados*, *Números Combinatórios* ou *Números Binomiais*.

Segundo Edwards (2019), foi Montmort⁶ que, em 1708, pela primeira vez atrelou o nome de Pascal ao Triângulo Combinatório (“*Table de M. Pascal pour les combinaisons*”). No entanto Montmort apresenta o Triângulo Aritmético com uma configuração um pouco diferente:

⁵Note que $C_n^k = {}^nC_k = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. Para usar notações distintas para contextos diferentes, alguns autores usam as notações C_n^k , nC_k e $C_{n,k}$ para se referirem aos *números combinatórios* e a notação $\binom{n}{k}$ para se referirem aos *coeficientes binomiais*.

⁶Pierre Rémond de Montmort, matemático francês, 1678–1719.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & \dots \\
& & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & \dots \\
& & & & 1 & . & 3 & . & 6 & \dots \\
& & & & & & 1 & . & 4 & \dots \\
& & & & & & & & 1 & \dots
\end{array}$$

Figura 1.1: Diagramação usada por Montmort para o Triângulo Aritmético, 1708. Fonte: [7], p. xiv.

Depois disso, em “*Miscellanea Analytica*” de 1730, De Moivre⁷ perpetuou a forma de Pascal batizando o triângulo aritmético como “*Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM*”, reservando o termo “*TRIANGULUM ARITHMETICUM*” para o formato apresentado por Montmort.

Os Números Figurados

A linha de raciocínio mais longa que Pascal desenvolveu em seu *Tratado do triângulo aritmético* foi sobre os números figurados, os quais remontam aos tempos da *Escola Pitagórica* que se dedicou muito a estudar padrões para os números 540 anos antes de Cristo.

Os pitagóricos estudaram os padrões numéricos formados por objetos (como pequenas pedras, esferas ou pontos) arrumados em forma de triângulos ou quadrados.

Disposição de objetos formando triângulos

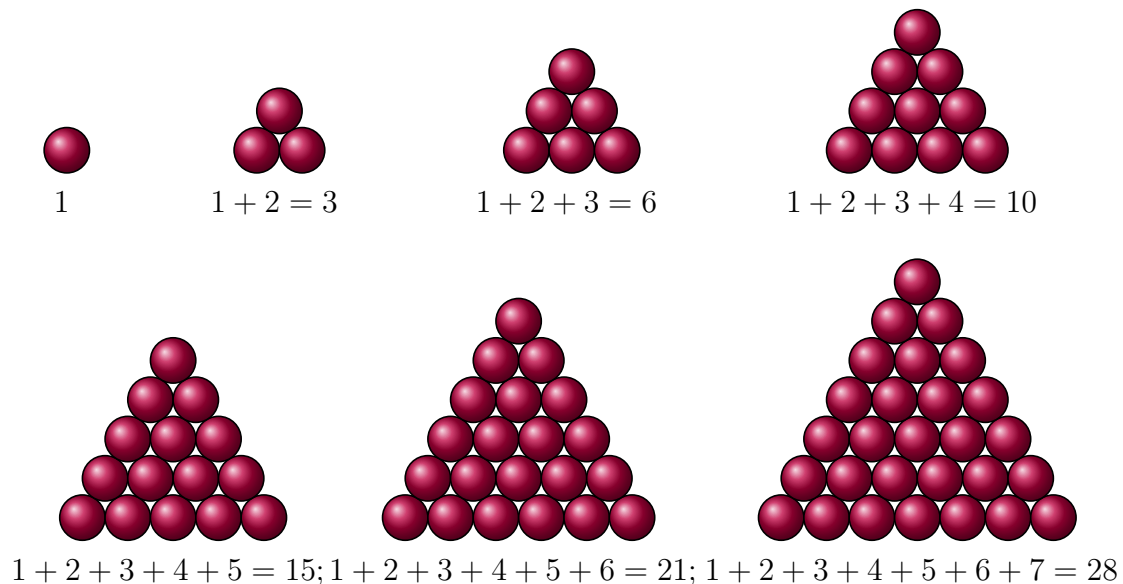


Figura 1.2: Os Números Triangulares

A sequência dos números triangulares é $1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \dots, f_2^{l-1} + l = f_2^l, \dots$, onde f_2^l representa o l -ésimo número

⁷Abraham de Moivre, matemático francês, conhecido pelas “*Fórmulas de De Moivre*” para os Números Complexos, 1667–1754.

triangular. O índice 2 indica 2 duas dimensões. Se o índice for 3, então estaremos falando sobre os números “piramidais” (o mais apropriado seria o termo: *números tetraédricos*).

Note que a sequência dos primeiros números triangulares associada à sequência dos primeiros números naturais, se escritos em disposição adequada, já gerariam naquela época (entre o século VI a.C. e o século II d.C.) uma parte do triângulo aritmético, ver Figura 1.6.

Note ainda que a soma dos seis primeiros números naturais, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, resulta no número triangular 21, ver Figura 1.4. Do mesmo modo, a soma dos n primeiros números naturais resulta um número triangular.

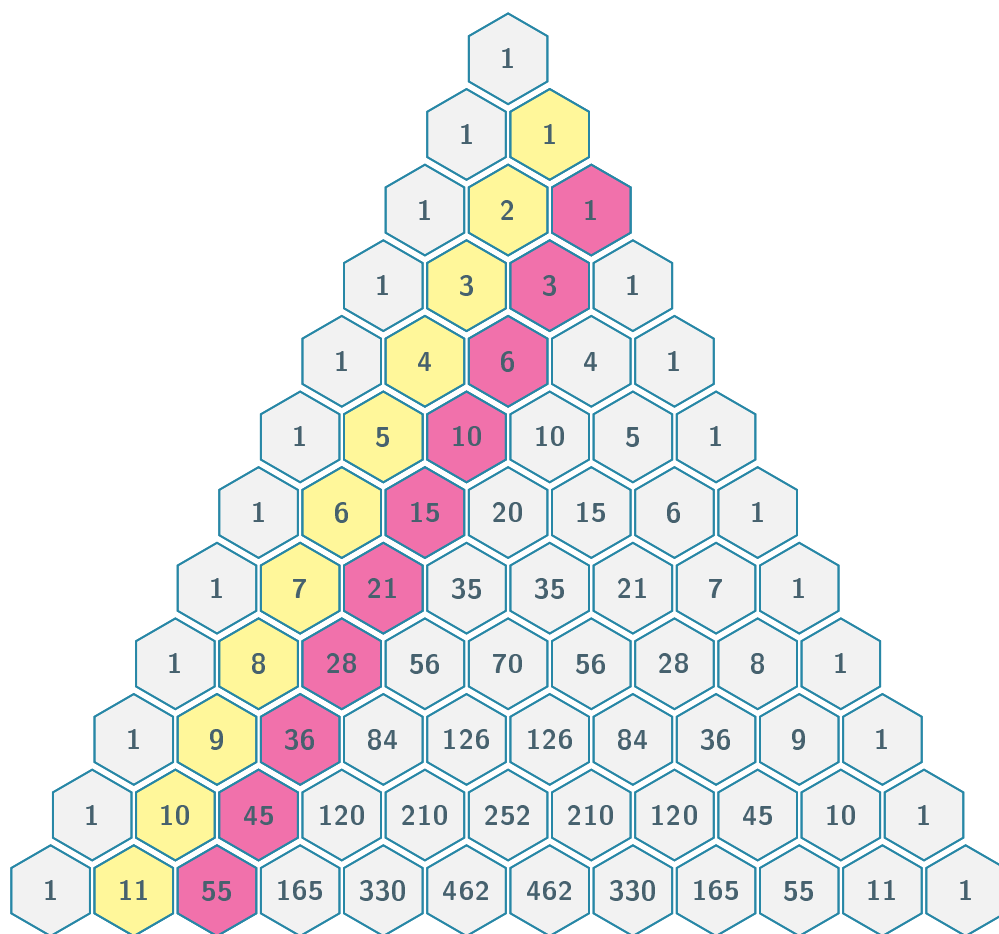


Figura 1.3: Números triangulares no triângulo de Pascal

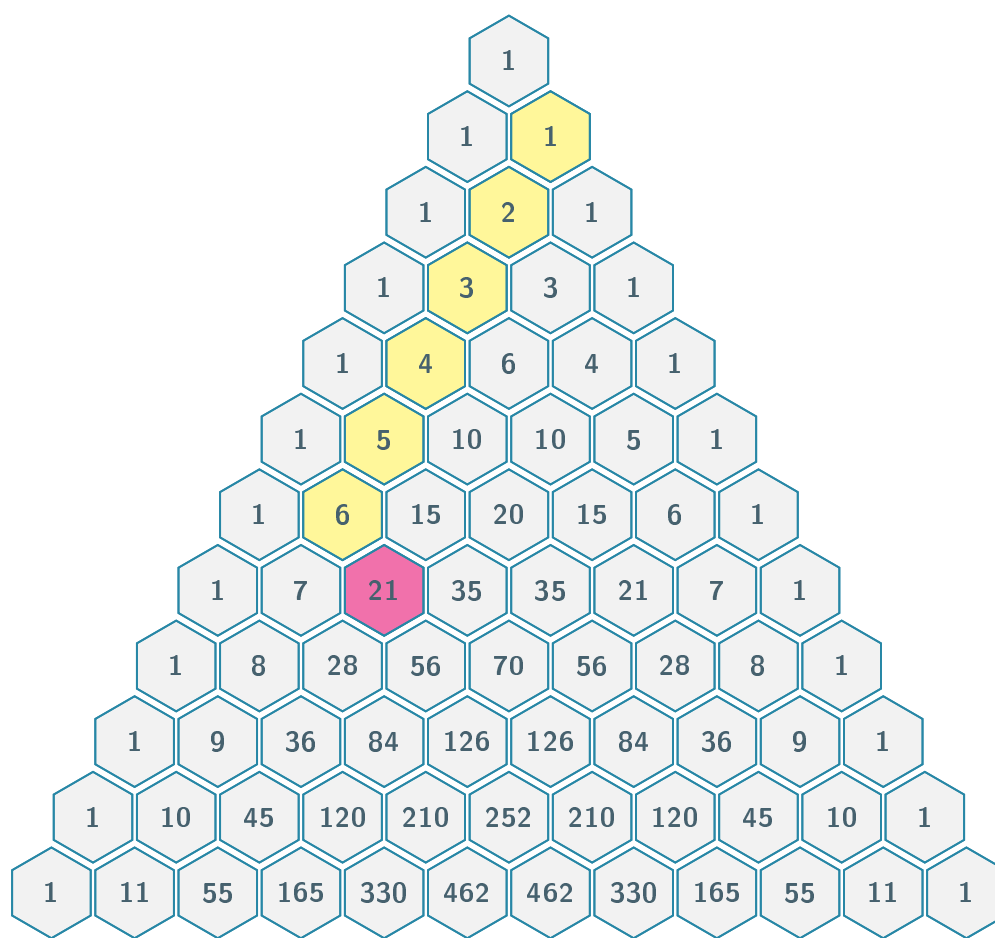


Figura 1.4: A soma dos seis primeiros naturais resulta um número triangular.

A Figura 1.5 mostra disposições de objetos formando quadrados. Essas disposições em figuras representam uma das maneiras mais antigas de se enxergar os números conhecidos por “Quadrados Perfeitos”.

Disposição de objetos formando quadrados

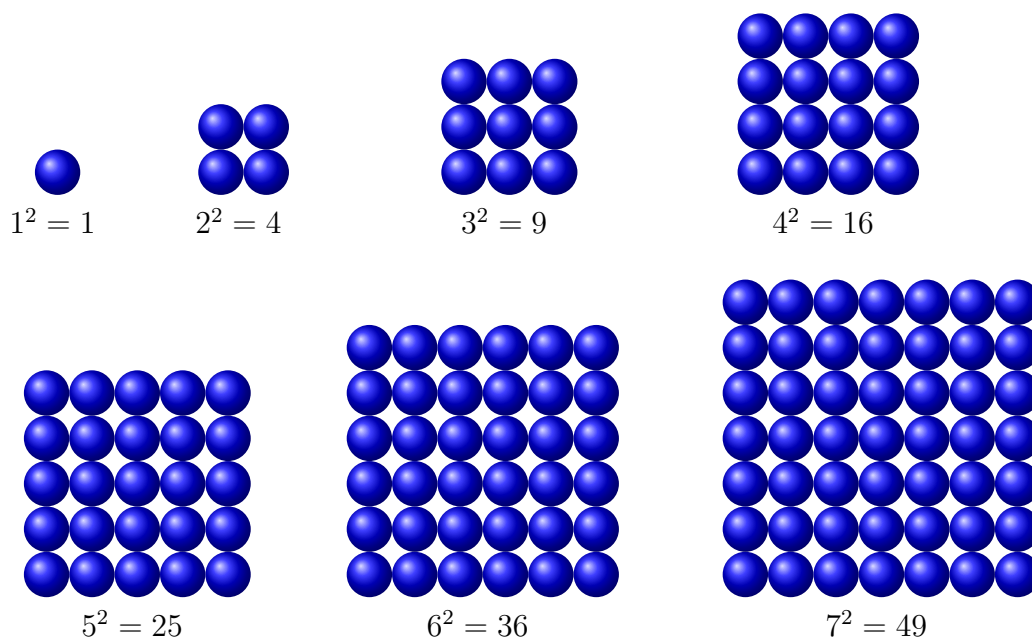


Figura 1.5: Os Números Quadrados ou Quadrados Perfeitos

Segundo Edwards (2019), mais adiante, no século II d.C., Theon de Smyrna⁸ e Nicomachus⁹ já sabiam que a soma de dois números triangulares resulta um quadrado perfeito. Além de conhecer os números triangulares, Nicomachus escreveu sobre os números tetraédricos.

1	4	10	20	35	56	84	120	165	...
1	3	6	10	15	21	28	36	45	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Figura 1.6: Sequências de números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos. Fonte: [7], p.4.

Note que cada linha pode ser obtida a partir da anterior, por diferenças entre termos consecutivos.

Nem Nicomachus nem Theon parecem ter percebido as relações entre os números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos. Muito menos parecem ter escrito esses números de maneira tabelada, como apresentamos na Figura 1.6.

Note que se as sequências que apresentamos na Figura 1.6 fossem reescritas com ordem inversa das linhas, teríamos:

⁸Theon de Smyrna (por volta de 100 d.C.) foi um matemático e filósofo grego, mas pouco se sabe sobre ele. Seus trabalhos foram fortemente influenciados pela Escola Pitagórica. Sua obra que sobreviveu aos dias atuais “Sobre a Matemática útil para o entendimento de Platão” é uma fonte introdutória à matemática grega. Theon é citado por Ptolomeu várias vezes em sua obra “Almagesto” como “Theon, o Matemático” (Observação: não deve ser confundido com “Theon de Alexandria”).

⁹Nicomachus de Gerasa (aproximadamente 60–120 d.C.) foi um importante matemático antigo, mais conhecido por suas obras “Introdução à Aritmética e Manual de Harmônicos, ambas em grego.

	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	1	1	1	1	1	1	...
1	1	2	3	4	5	6	7	...
2	1	3	6	10	15	21	28	...
3	1	4	10	20	35	56	84	...

Figura 1.7: Sequências de números tetraédricos, triangulares e naturais consecutivos. Essa disposição dos *números figurados* forma um diagrama (ou tabela) muito próximo da versão de Pascal do Triângulo Aritmético

Essa disposição dos *números figurados* forma um diagrama (ou tabela) muito próximo da versão que Blaise Pascal escolheu para o Triângulo Aritmético que apresenta em *Traité du Triangle Arithmétique*, 1665.

Coolidge (1949) aponta que o Teorema Binomial é bastante conhecido por todos os estudantes de Álgebra, pelo menos em seus aspectos elementares. A maioria das pessoas associam esse teorema ao nome de Sir Isaac Newton: ele o teria inventado (ou descoberto) ou o Teorema Binomial teria sido gravado em sua tumba. No entanto, nenhuma dessas expectativas é verdadeira. De fato, o Teorema Binomial não foi invenção de Newton, mas os seus trabalhos marcaram um importante avanço em sua teoria geral. A história do Teorema Binomial remonta a pelo menos 2000 anos antes de Newton, em *Os Elementos de Euclides*¹⁰, século III a.C. (BICUDO, 2009).

Encontramos um dos primeiros traços do Teorema Binomial em *Os Elementos de Euclides*, livro II, proposição 4:

“Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos.” (BICUDO, 2009, p.137)

Em linguagem algébrica, o trecho acima significa que, se os segmentos tiverem medidas a e b então obtemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (1.3)$$

¹⁰Euclides de Alexandria (em torno de 300 a.C.) foi um professor, matemático e escritor grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Seu livro mais famoso "Os Elementos" é o livro mais editado da história, depois da Bíblia.

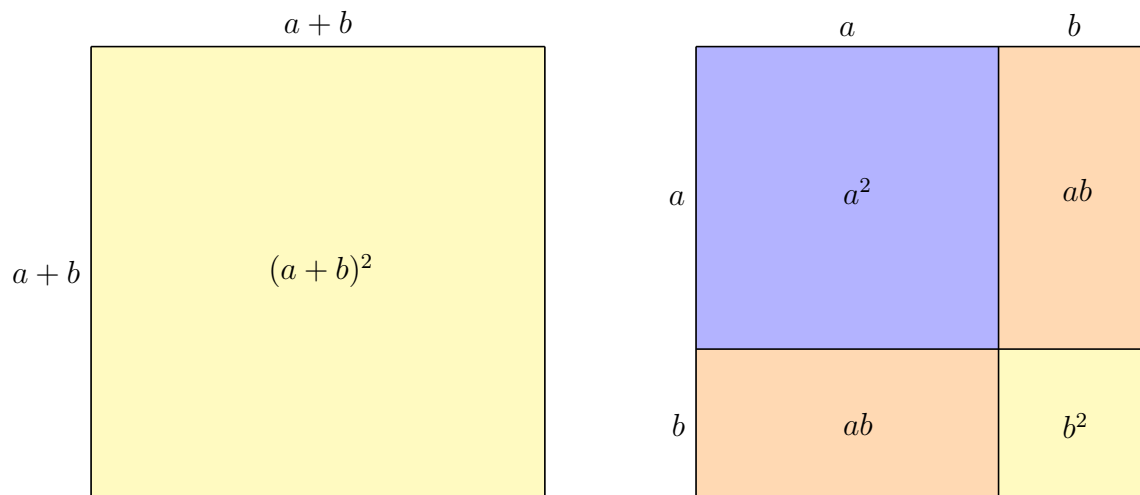


Figura 1.8: Visualização de $(a + b)^2$

Na Figura 1.8 apresentamos uma visualização geométrica para a equação (1.3). São apresentados dois quadrados, congruentes um ao outro, de lados de medida $a + b$. O quadrado à esquerda, foi construído com lados de comprimento $a + b$; assim, possui área $(a + b)^2$. O quadrado à direita tem os lados com a mesma medida $(a + b)$ e, portanto, com área igual à do primeiro, $(a + b)^2$. Nesse segundo quadrado dividimos cada segmento horizontal em duas partes, de medidas a saber: a e b . O mesmo foi feito com os segmentos na posição vertical. Dessa maneira temos a figura original dividida em dois retângulos de dimensões a por b , um quadrado de lado a e outro quadrado de lado b . Ao somarmos as áreas desses dois quadrados $a^2 + b^2$ com as desses dois retângulos $ab + ab$, obtemos a área do segundo quadrado. Da equivalência dos dois quadrados de lados $(a + b)$ obtemos a equação (1.3).

A equação correspondente para o quadrado da diferença é encontrada em *Os Elementos de Euclides*, livro II, proposição 7:

“Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, os quadrados ambos juntos, o sobre a reta toda e o sobre um dos segmentos, são iguais a duas vezes o retângulo contido pela reta toda e pelo dito segmento e também o quadrado sobre o segmento restante.” (BICUDO, 2009, p.141).

Assim, se a representa o todo e b representa o primeiro segmento, temos:

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2 \quad (1.4)$$

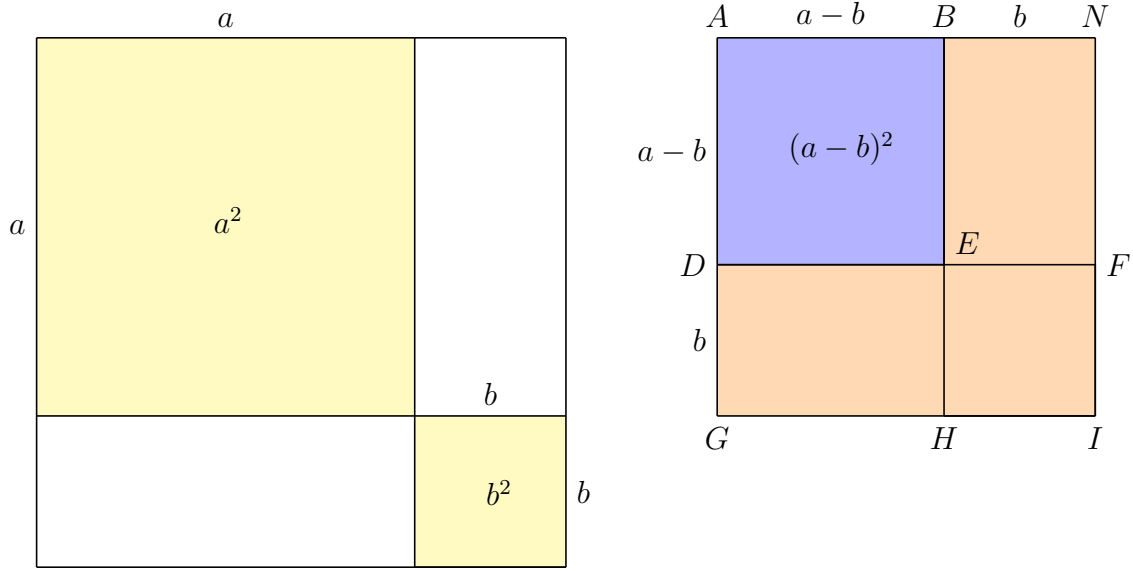


Figura 1.9: Visualização $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$

Na Figura 1.9 apresentamos uma visualização geométrica para a equação (1.4). Nas versões que conhecemos de *Os Elementos*, Euclides nos apresenta figuras semelhantes a essas como parte do argumento, porém as medidas indicadas na figura são notações atuais que nós colocamos por motivos didáticos. À esquerda vemos o quadrado de lado a e o quadrado de lado b . Suas áreas somadas são $a^2 + b^2$. À direita temos o quadrado $AGIN$ de lado a , que é congruente ao quadrado (amarelo) de lado a da esquerda e que, portanto, tem a mesma área: a^2 . O quadrado $ABED$, de lado $a - b$ tem área $(a - b)^2$. Note que há dois retângulos (cor laranja), $DGIF$ e $BHIN$, que têm dimensões a por b ; suas áreas somadas, portanto, podem ser dadas por $2ab$. Note que o quadrado $EHIF$ tem área b^2 , mas estamos contando esta área duas vezes ao fazermos a soma anterior. Dessa forma, notamos que $(ABED) + (DGIF) + (BHIN) - (EHIF) = (AGIN)$, ou seja, $(a - b)^2 + ab + ab - b^2 = a^2$. De forma equivalente, podemos escrever: $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$.

Teria sido perfeitamente fácil para Euclides ir adiante e provar a fórmula para o cubo de um binômio, mas isso teria quebrado a sua linha de raciocínio. Nos livros II e X ele estava prodigiosamente interessado nos quadrados de binômios; qualquer generalização deles não parece ter-lhe de fato interessado. A moderna tendência de generalizar tão amplamente quanto possível, e estender cada teorema à sua forma mais geral, era quase algo estranho ao pensamento dos gregos em matemática; clareza e precisão eram as qualidades soberanas que sempre eram solicitadas.

Em Coolidge (1949) o autor escreve, como fato curioso, que um dos primeiros usos das fórmulas das potências binomiais tenha sido para descobrir as raízes aproximadas de números. O método de Heron¹¹ é a simplicidade por si mesma. Se desejamos encontrar uma aproximação para $\sqrt{A}$ e a_1 é um primeiro valor, o valor mais próximo será

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{A}{a_1} \right). \quad (1.5)$$

De acordo com Struik (1969), o triângulo de Pascal aparece pela primeira vez (até

¹¹Heron de Alexandria, ou ainda Hero ou Herão (século I d.C.) foi um matemático e mecânico grego.

onde sabemos) em um livro de 1261 escrito por Yang Hui, um dos matemáticos da dinastia Sung na China. As propriedades dos coeficientes binomiais foram discutidas pelo matemático persa Jamshid Al-Kashi em “Chave para a aritmética” de c.1425.

De acordo com Struik (1969), Chu Shi-kié (nativo de Yen-shan, na China) escreveu sua segunda obra intitulada *O precioso espelho dos quatro elementos* em 1303. Ele começa essa obra com o triângulo aritmético, apresentando os valores dos coeficientes binomiais e se referindo ao esquema (do triângulo) como se fosse antigo.

Tanto na China quanto na Pérsia o conhecimento dessas propriedades pode ter sido muito mais antigo.

Esse conhecimento foi compartilhado por alguns matemáticos da Renascença, e nós vemos o triângulo de Pascal na página do título “Aritmética”, de Peter Apian (ou Petrus Apianus) escrito em 1527, como menciona Smith (1958). Essa obra nos chama a atenção especialmente por ser a primeira versão impressa do triângulo aritmético. Essa obra apareceu anos antes de Michael Stifel tocar no assunto.

Michael Stifel, 1487–1567



Figura 1.10: Michael Stifel, 1487–1567. Fonte: [26].

Em 1553, Michael Stifel publicou uma nova edição da obra de Christoffs Rudolffs chamada *Die Coss*. Nessa nova edição, o próprio Stifel acrescentou e complementou assuntos e, como resultado final, a nova edição foi publicada com mais do que o dobro do número de páginas da edição anterior. Podemos observar na Figura 1.11 duas páginas em que Stifel apresenta o triângulo aritmético e explica o padrão da soma para se obter os coeficientes da linha seguinte.

der andern vnderſchied fol. 168

Item außs $36z\text{re} - 96zz + 64z$ kommen
 $6\text{re} - 82z$. etc.

¶ Wir wollen aber künstlichere extractiones ſehen . Als ich ſoll radicem cubicam extrahiren außs

$1\text{re} + 25z + 18752z + 15625$ außs diſer zal
 wirt die cubic wurzel $12z + 25$.

Wer nu meyn extrahiren kan (der cubic wurzeln) außs ledigen zalen / dem iſt hie leychtlich zu helfen . Derhalben will ich hie die tafel ſetzen ſollicher zalen die man brauchet zu ſollicher extrahiren von allerley wurzeln .

1z .	2	1					
1re .	3	3	1				
1zz	4	6	4	1			
1ß .	5	10	10	5	1		
1zre .	6	15	20	15	6	1	
1ßß .	7	21	35	35	21	7	1

So weyt iſt yetzt gnug .

Wenn ich nu cubice will extrahiren / ſo neme ich
 außs der Tafel die zalen 3 vnd 3 .

27 ij Wenn

Figura 1.11: *Die Coss*, Rudolffs e Stifel: o Triângulo Aritmético e a Relação de Stifel como ele a apresentou em 1553 (RUDOLFFS, STIFEL, 1553, p.168).

Der driitt Anhang

Wenn ich will radicem zensizensicam extrahiren/so neme ich dise zalen . 4 . 6 . 4 .

Wenn ich will radicem sursolidam extrahiren/so neme ich 5 . 10 . 10 . 5 .

Wenn ich will radicem zensicubicam extrahiren/so neme ich dise zalen . 6 . 15 . 20 . 15 . 6 .

Wenn ich will radicem Bsur-solidam extrahiren/so neme ich > . 21 . 35 . 35 . 21 . >

Vnd also hette ich die Tafel wol lenger vnd breyter machen können für mehr species . Aber das sey hie gnug .

So will ich außs diser zal

1 ϵ + > 5 z + 18 > 5 2z + 15 62 5 die cubic wurzel extrahiren . vnd verzeichne die erste vnd letzte coffische teyl (wie du sihest) das zwen teyl / im mittel bleyben vnuerzeichner .

So ich nun hab vnder 1 ϵ gefunden 1 2z zu setzen in den Quotient/als der in sich multiplicirt cubice/durch sollich product mit subtrahiren hin neme 1 ϵ . so neme ich die zalen außs der Tafel . 3 . vnd . 3 . setz die vndereinander (wie du sehen wirst) Vnd fah an zur lincken hand/ein progress anzurichten/die vbersich steige . Also

$$\begin{array}{rcl} 18 & \cdot & 3 \cdot \\ 12z & \cdot & 3 \cdot \end{array}$$

Verzt

Figura 1.12: 1553: *Die Coss*, Rudolffs e Stifel: o Triângulo Aritmético e a Relação de Stifel como ele a apresentou; nesta página vemos a explicação do mecanismo da soma ou *Relação de Stifel* (RUDOLFFS, STIFEL, 1553, p.169).

Depois de Stifel, encontramos o triângulo e as propriedades dos coeficientes binomiais em muitos outros autores. Um exemplo é Johann Scheubel (1494–1570), que apresentou o triângulo aritmético um século antes de Pascal escrever sobre ele. Em seu trabalho, Scheubel extraiu raízes de índices até 24 (raízes 24-ésimas) por um processo similar ao processo de extração de raízes que utiliza o Teorema Binomial.

“Traité du Triangle Arithmétique” de Blaise Pascal, de 1665



Figura 1.13: Blaise Pascal, 1623–1662. Fonte: [25].

De acordo com Struik (1969), o chamado Triângulo de Pascal aparece no famoso tratado de Blaise Pascal (1623–1662), publicado postumamente em 1665, sob o título *Traité du Triangle Arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la mesme matière*.

Esse tratado é importante, não somente por examinar cuidadosamente as propriedades dos coeficientes binomiais, mas também por suas aplicações em jogos de azar. Outro ponto muito importante de sua obra é que, em determinada parte, Pascal expressa de maneira clara e correta o Princípio da Indução Completa ou Princípio da

Indução Matemática.

Smith (1958) aponta que Blaise Pascal escreveu de maneira tão extensa e completa sobre o arranjo triangular dos coeficientes das potências de um binômio, que a partir dessa obra esse arranjo passou a ser chamado de “Triângulo de Pascal”.

A Figura 1.14 apresenta a capa desta obra e a Figura 1.15 mostra a apresentação original do triângulo aritmético.

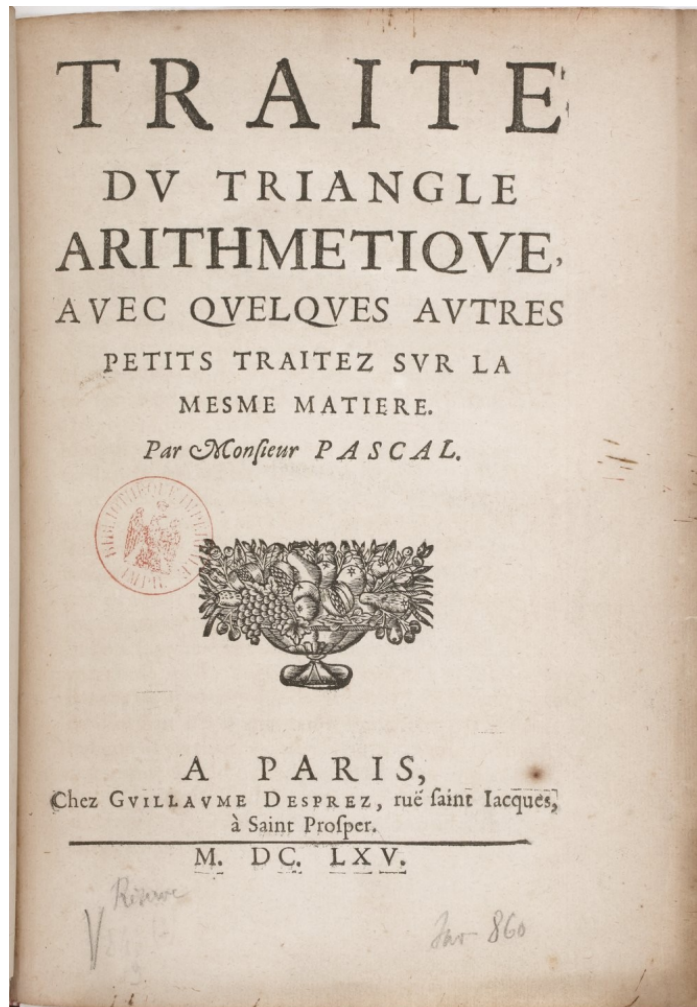


Figura 1.14: Capa da primeira edição do *Traité du triangle arithmétique* de Pascal, (PASCAL, 1665)

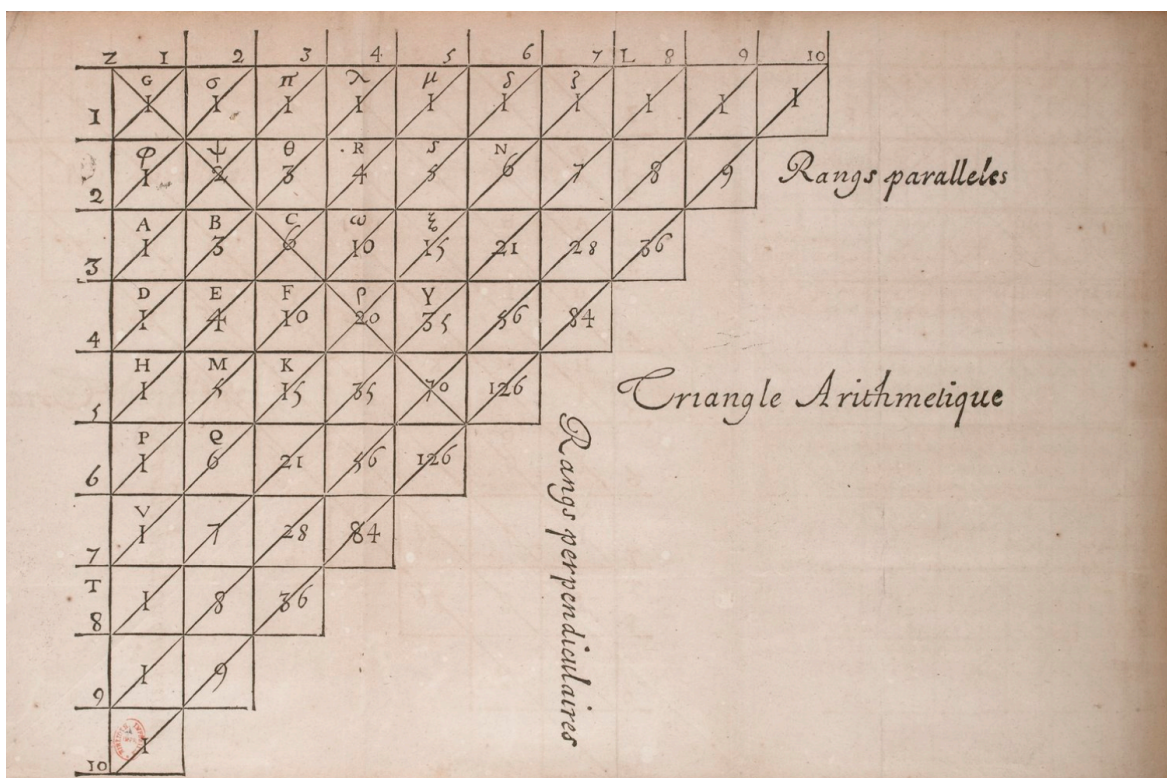


Figura 1.15: Apresentação original do triângulo aritmético na obra *Traité du triangle arithmétique* de Blaise Pascal, (PASCAL, 1665)

“Ars Conjectandi”, de Jakob Bernoulli, de 1713



Figura 1.16: Jakob Bernoulli (também escrito como “Jacques Bernoulli”, “Jacobi Bernoulli” ou ainda “James Bernoulli”). Fonte: [23].

Em 1713 foi publicada a obra póstuma de Jakob Bernoulli: *Ars Conjectandi*. Essa obra foi publicada por seu filho, Nicolaus Bernoulli, 8 anos após a morte de Jakob. De acordo com Edwards (2019), esta famosa obra é notada especialmente pelo primeiro teorema sobre limite em Probabilidade; o “Teorema de Bernoulli”. Outro ponto de grande destaque dessa obra são os tratamentos que Bernoulli dá à Distribuição Binomial, à Teoria Combinatória e aos Números Figurados (especialmente sobre como usá-los nas somas de potências, que o leva à descoberta dos *Números de Bernoulli* da Análise).

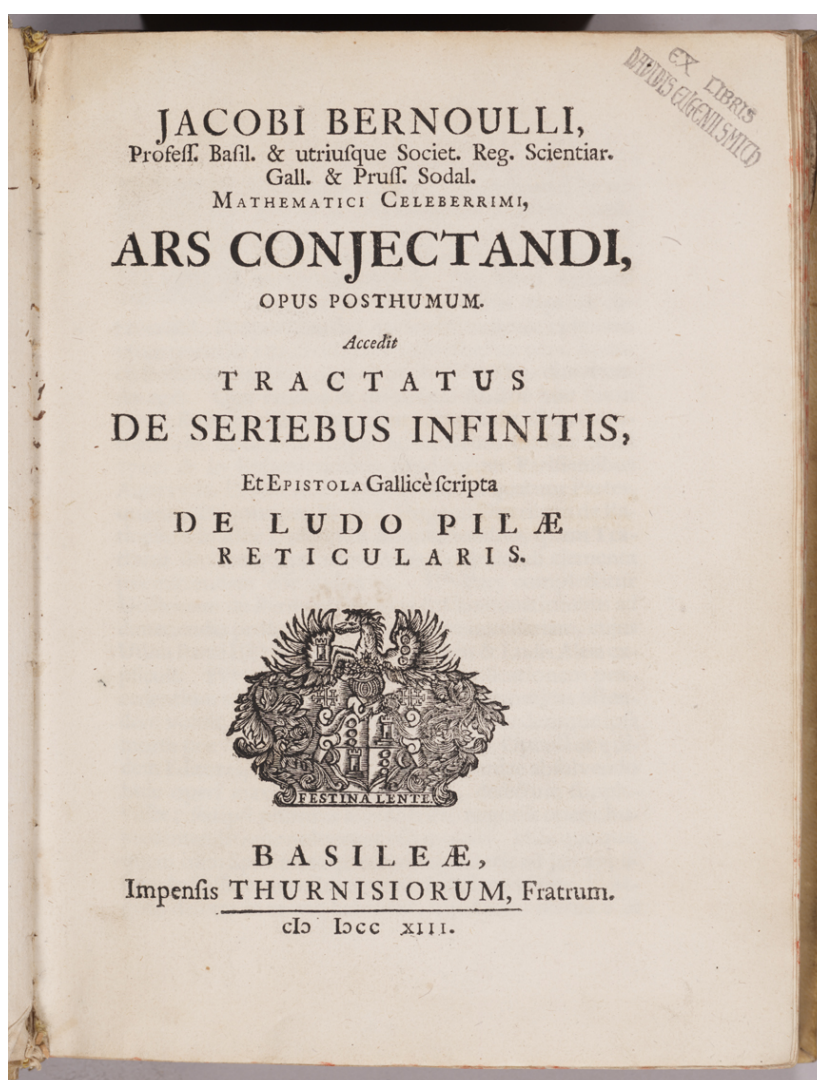


Figura 1.17: Capa do livro *Ars Conjectandi*, de Jakob Bernoulli, 1713. Fonte: [24].

Na primeira parte de seu livro Bernoulli dedica uma seção para desenvolver a Distribuição Binomial para probabilidades gerais, encontrando a expressão para obter no mínimo m sucessos em n provas (ou experimentos - os *experimentos de Bernoulli*).

P A R S S E C U N D A .

87

Pari ratione Quiniones omnes seriem constituunt Trianguli-pyramidalium 0.0.0.0.1.5.15.35. &c. Seniones seriem Pyramidi-pyramidalium 0.0.0.0.0.1.6.21. &c. aliæque combinationes secundum altiores exponentes efficiunt alias atque alias series Figuratorum altioris generis in infinitum.

Et sic occasione Doctrinæ Combinationum in speculationem insperatam Numerorum Figuratorum incidimus, quâ appellatione vulgè insigniuntur numeri, qui ex continuâ Arithmetice proportionalium indeque ortorum numerorum additione vel collectione generantur.

Ut verò hæ figuratorum numerorum series sub unum aspectum caderent, eoque facilius comprehenderentur quæ de illis dicenda sunt, sequentem apposui Tabellam, quam quis nullo negotio quous-

Tabula

Combinationum, seu Numerorum Figuratorum.

Exponentes Combinationum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Figura 1.18: O Triângulo Aritmético apresentado por Jakob Bernoulli, em seu livro *Ars Conjectandi*, publicado em 1713. (BERNOULLI, 1713, p.87).

Na Figura 1.18 observa-se o Triângulo Aritmético apresentado por Jakob Bernoulli na segunda parte de seu livro *Ars Conjectandi*, 1713. (BERNOULLI, 1713, p.87).

Já na segunda parte, ele apresenta a sua versão do Triângulo Aritmético em seu *Ars Conjectandi*; porém, de acordo com Edwards (2019), pela maneira única com que Bernoulli escreveu e pelas citações que faz ao longo do texto, fica evidente que ele não havia tomado conhecimento do *Traité du Triangle Arithmétique* de Pascal. Bernoulli descobriu por conta própria o Triângulo Aritmético e muitas de suas propriedades. Nessa obra, Bernoulli detalha como usar os Números Combinatórios e chega a calcular $\binom{100}{20}$ - o maior número combinatório escrito em um livro até então. Por curiosidade, apresentamos o resultado:

$$\binom{100}{20} = 535.983.370.403.809.682.970.$$

Objetivo e motivação do tema

O triângulo aritmético é um tema extremamente rico em aplicações e em propriedades matemáticas. Normalmente os estudantes têm acesso a esse tema somente no Ensino Médio. Os cronogramas e planejamentos escolares acabam por deixar pouco tempo ou quase nenhum para explorar algumas das principais propriedades que o triângulo de Pascal, como é mais conhecido, apresenta.

A maioria dos livros para o Ensino Médio apresentam o triângulo de Pascal e a expansão binomial logo após Análise Combinatória e Probabilidade. Dessa forma, os alunos acabam deixando de ver relações entre a expansão binomial e a análise combinatória, pois o assunto já passou. Poucas vezes vemos questões de Análise Combinatória que levem os alunos a encontrar os termos de uma linha do triângulo de Pascal, por exemplo. Uma obra que é uma ótima exceção à regra é o livro “Análise Combinatória e Probabilidade” de Morgado et al (1991), da Coleção do Professor de Matemática, da SBM.

O triângulo aritmético apresenta uma quantidade muito grande de propriedades: propriedade das linhas, propriedade das colunas, das diagonais, os números triangulares e sua soma, os números tetraédricos e sua soma, entre tantas. Até mesmo a famosa sequência de Fibonacci aparece no triângulo aritmético. Em Green (2012 e 2015), encontramos uma quantidade enorme de propriedades e atividades sobre o triângulo aritmético ao longo de mais de 500 páginas, somando os dois volumes.

Por ser um tema que pode ser explorado em vários níveis de profundidade, poderia ser apresentado já no Ensino Fundamental, ainda que de modo mais simples, adequado à faixa etária dos alunos, e também de maneira mais ampla no Ensino Médio, pois hoje fala-se muito pouco sobre esse assunto. As propriedades com os números que figuram no triângulo de Pascal, quando bem apresentadas, podem despertar o interesse de muitos estudantes.

Dentre os muitos aspectos que podemos investigar e escrever sobre o triângulo de Pascal, escolhemos dois pontos de vista que a nosso ver são bastante ricos: o entendimento dos teoremas binomial e multinomial assim como os padrões geométricos que as expansões trinômiais e tetranômiais nos sugerem.

A seguir pretendo contar um pouco da minha experiência com o triângulo de Pascal no último ano do Ensino Médio e assim, espero apontar melhor para a primeira motivação para este trabalho.

Em 1995, quando eu estudava no terceiro ano do Ensino Médio e também em um curso pré-vestibular, comecei a me interessar pelas expansões binomiais e sua relação com o triângulo de Pascal. Em determinado momento, divagando sobre o assunto, eu me fiz as seguintes perguntas: “Como seriam as expansões de $(a+b+c)^n$? Que padrões geométricos teriam essas expansões?”.

Não havia livros a respeito (que estivessem ao meu alcance pelo menos), muito menos fontes na *internet*, a qual estava apenas começando a se popularizar e com a qual tive contato apenas em meados de 1996. Como estudante curioso, vi que só saberia a resposta se tentasse descobrir por meios próprios. Então comecei a calcular as expansões trinômiais na ponta do lápis, através de seguidas aplicações da propriedade distributiva.

O primeiro padrão que encontrei foi para $(a+b+c)^3$: percebi que se eu encontrasse uma maneira de dispor as parcelas da expansão desse trinômio numa folha de papel de modo que os expoentes de a ficassem em ordem crescente, assim como os de b e de c ,

as próprias parcelas me “diriam” como deveria ser a geometria dessa configuração. Se fosse uma configuração boa, valeria para todos os casos (todos os valores de n). Quando finalmente consegui encontrar o padrão geométrico procurado, fiquei maravilhado com a simetria e com a elegância: era a Matemática elegante e simples por natureza, a meu ver.

Depois fui variando n até $n = 5$ ou $n = 6$. Lembro de apresentar as ideias para três professores que me falaram que o assunto era muito interessante e nunca tinham visto algo parecido. O meu sentimento era o de estar em mares ainda não navegados. A sensação que tive foi de muita empolgação.

Ao enxergar os padrões triangulares para $(a + b + c)^n$ comecei a investigar (sempre por conta própria) as suas relações com o triângulo de Pascal original, o que me levou a descobrir o que chamamos de “princípio multiplicativo” no Capítulo 5 deste trabalho. Além disso, descobri um padrão de organização que me levou a construir o que chamamos neste trabalho de “tetraedro aritmético”.

A curiosidade só aumentava, então passei a investigar os padrões para $(a + b + c + d)^n$, descobrindo que a melhor geometria para organizar as parcelas das expansões tetranomiais, respeitando as ordens crescentes dos expoentes de a , b , c e d , seriam tetraedros, um para cada n não-negativo escolhido.

Continuei a fazer várias investigações interessantes a respeito de $(a + b + c + d + e)^n$ e acabei por descobrir o que hoje alguns chamam de “hipertetraedro”, ou seja, o análogo para 4 dimensões do que é o tetraedro para 3 dimensões - ou do triângulo, para 2 dimensões. Observação: o hipertetraedro não apresentaremos neste trabalho.

Em 2017, quando terminei de cursar as matérias do PROFMAT na Unesp de Rio Claro, apresentei esse assunto como proposta para a minha dissertação. Confesso que apresentei a ideia ainda de maneira tímida porque não sabia ao certo se o assunto seria de interesse de algum orientador. Aqui agradeço muito ao Prof. Dr. Thiago de Melo e à minha orientadora, Prof. Dra. Érika Capelato, por aceitarem a proposta e por terem me incentivado. A Prof. Dra. Érika foi de fundamental importância para dar rumo, orientação e profundidade para essa dissertação de mestrado.

Penso que compartilhar um pouco dessa história e desse tema possa ter algum proveito em sala de aula. Talvez seja uma leitura agradável para quem queira ver um pouco além do tradicional triângulo de Pascal. Talvez seja o ponto de partida para enxergar relações matemáticas ainda não vistas.

O mais importante para que haja o aprendizado é que a pessoa se sinta envolvida pelo tema, não importa qual seja.

Estrutura da dissertação

Além desta introdução esta dissertação possui outros cinco capítulos. No Capítulo 2 descrevemos sobre o Triângulo Aritmético, também conhecido como Triângulo de Pascal. Neste capítulo definimos os coeficientes binomiais e demonstramos a Relação de Stifel, além de outros teoremas relacionados ao Triângulo Aritmético.

No Capítulo 3 apresentamos quatro demonstrações para o Teorema Binomial. A primeira demonstração, utilizando indução matemática, e a segunda, utilizando argumentos de análise combinatória, foram retiradas de Ross (2014). A terceira demonstração, retirada de Rosalsky (2007), usa resultados probabilísticos e a quarta demonstração, proposta por Hwang (2009) usa conceitos do cálculo diferencial.

No Capítulo 4 apresentamos três demonstrações para o Teorema Multinomial. A primeira demonstração foi feita utilizando conceitos de Análise Combinatória, a segunda por argumentos probabilísticos proposta por Kataria (2016) e a última foi uma generalização que fizemos baseada na demonstração para o caso binomial feita por Rosalsky (2007).

No Capítulo 5 apresentamos padrões geométricos para as expansões de trinômios, bem como uma relação com o triângulo de Pascal tradicional para a obtenção dos coeficientes dos termos dessas expansões trinomiais. Nesse mesmo capítulo, apresentamos padrões geométricos para as expansões tetranomiais.

No Capítulo 6 apresentaremos três atividades para a sala de aula do Ensino Médio. A primeira atividade está relacionada com a identificação da Relação de Stifel no Triângulo de Pascal. A segunda atividade, refere-se à observação dos “números triangulares”, o que são e qual a sua relação com o triângulo de Pascal. Na terceira atividade apresentamos uma extensão da segunda atividade, ou seja, uma atividade para os “números tetraédricos”.

Referências

- [1] BERNOULLI, Jakob. **Ars Conjectandi**. Basileia, (Suíça). 1713.
- [2] BICUDO, Irineu. **Os elementos de Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo**. São Paulo, SP: Editora UNESP, 2009.
- [3] CARVALHO, Paulo César Pinto; MORGADO, Augusto César de Oliveira. **Matemática Discreta: coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [4] COOLIDGE, Julian L. The story of the binomial theorem. **The American Mathematical Monthly**, v. 56, n. 3, p. 147-157, 1949.
- [5] COSTA NETO, Pedro Luiz de Oliveira; CYMBALISTA, Melvin. **Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos**. Edgard Blücher, 2006.
- [6] COXETER, H. S. M. **Regular Polytopes**. First edition at Dover Publications, USA, New York, 1973.
- [7] EDWARDS, Anthony William Fairbank. **Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea**. First edition: Oxford University Press, 1987; (2019: Dover edition).
- [8] EÜLER, Leonhard; LAGRANGE, Joseph-Louis; BERNOULLI III, Johann. **Elements of Algebra**. CreateSpace, Inc. and Kindle Direct Publishing, Divisions of Amazon.com, 2015, based on the 1828 edition of John Hewlett's 1822 translation from german to english.
- [9] GREEN, Thomas Marshall; HAMBERG, Charles L. **Pascal's Triangle**. Second edition. Right Angle, USA, 2012.
- [10] GREEN, Thomas Marshall. **The simplex, duplex and Pascal's triangles: relatives of Pascal's triangle, with excursions into hyperspace**. First edition. Right Angle, USA, 2015.
- [11] HEFEZ, Abramo. **Indução matemática**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.
- [12] HWANG, Leng-Cheng. A simple proof of the binomial theorem using differential calculus. **The American Statistician**, v. 63, n. 1, p. 43-44, 2009.
- [13] KATARIA, Kuldeep Kumar. A Probabilistic Proof of the Multinomial Theorem. **The American Mathematical Monthly**, vol. 123, n.1, pág. 94-96, 2016.

-
- [14] KNUTH, Donald E.; GRAHAM, Ronald L.; PATASHNIK, Oren. **Concrete mathematics: a foundation for computer science**. 2nd edition, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1994.
 - [15] MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Instituto de Matemática pura e aplicada, 1991.
 - [16] PASCAL, Blaise. **Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière**. A Paris, Chez Guillaume Dresprez, Rue Saint Iacques, à Saint Prosper. 1665.
 - [17] ROSALSKY, Andrew. A simple and probabilistic proof of the binomial theorem. **The American Statistician**, v. 61, n. 2, p. 161-162, 2007.
 - [18] ROSS, Sheldon. **A first course in probability**. Pearson, 2014.
 - [19] RUDOLFFS, Christoffs; STIFEL, Michael. **Die Coss Christoffs Rudolffs, bearbeitet von Michael Stifel**, 1553.
 - [20] SMITH, David Eugene. **History of Mathematics General survey of the history of elementary mathematics**. v.1, Dover Publications. New York, NY, USA. 1958.
 - [21] SMITH, David Eugene. **History of Mathematics. Special topics of the history of elementary mathematics**. v.2, Dover Publications. New York, NY, USA. 1958.
 - [22] STRUIK, D. J. **A Source Book in Mathematics, 1200 - 1800**. Editado por D. J. Struik, Massachusetts Institute of Technology (MIT). Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.
 - [23] Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli#/media/File:Jakob_Bernoulli.jpg. Acesso em 02/03/2020.
 - [24] Mathematical Association of America. <https://www.maa.org/book/export/html/116876>. Acesso em 01/03/2020.
 - [25] Mathematical Association of America. <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-blaise-pascals-collected-works>. Acesso em 02/03/2020.
 - [26] School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland. <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stifel.html>. Acesso em 02/03/2020.