

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CÂMPUS EXPERIMENTAL DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA E DE TELECOMUNICAÇÕES**

LARISSA CRISTINA NASCIMENTO RAMOS

**PROPRIEDADES DINÂMICAS E LEIS DE ESCALA EM MAPEAMENTOS
UNIDIMENSIONAIS DISCRETOS: APLICAÇÕES EM CIRCUITOS**

SÃO JOÃO DA BOA VISTA

2019

LARISSA CRISTINA NASCIMENTO RAMOS

**PROPRIEDADES DINÂMICAS E LEIS DE ESCALA EM MAPEAMENTOS
UNIDIMENSIONAIS DISCRETOS: APLICAÇÕES EM CIRCUITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" como requisito para obtenção de título de Bacharel em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações .

Orientador: Profº Dr. Juliano Antonio de Oliveira

SÃO JOÃO DA BOA VISTA

2019

Ramos, Larissa Cristina Nascimento

Propriedades dinâmicas e leis de escala em mapeamentos unidimensionais discretos: aplicações em circuitos / Larissa Cristina Nascimento Ramos. -- São João da Boa Vista, 2019.

54 p. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso – Câmpus Experimental de São João da Boa Vista – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

Bibliografia

1. Circuitos elétricos 2. Comportamento caótico nos sistemas 3. Sistemas não lineares 4. Telecomunicações

CDD 23. ed. – 621.382

Ficha catalográfica elaborada pela [Biblioteca-BJB](#)

Bibliotecário responsável: João Pedro Alves Cardoso – CRB-8/9717

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CÂMPUS EXPERIMENTAL DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA E DE TELECOMUNICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PROPRIEDADES DINÂMICAS E LEIS DE ESCALA EM MAPEAMENTOS
UNIDIMENSIONAIS DISCRETOS: APLICAÇÕES EM CIRCUITOS

Aluno: Larissa Cristina Nascimento Ramos

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

Banca Examinadora:

- Juliano Antonio de Oliveira (Orientador)
- Rafael Abrantes Penchel (Examinador)
- Crystopher Cardoso de Brito (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 11/2019)

São João da Boa Vista, 06 de dezembro de 2019

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela vida e por todas as oportunidades. Aos meus pais, Simone e Gustavo, e minha irmã Letícia por sempre estarem ao meu lado me apoiando e ajudando, por acreditarem em mim e me darem forças para continuar essa jornada.

Gostaria de agradecer também ao Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira por todos os anos de aprendizado, ajuda e orientação. Por fim, agradeço aos meus amigos que me ajudaram e torceram por mim durante todos esses anos.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - Processos 2017/17294-8 e 2018/14685-9, PROPe - Pró-Reitoria de Pesquisa da UNESP e CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Processos 303242/2018-3, 421254/2016-5 e 311105/2015-7.

*“ Caos é o nome de qualquer ordem que produz confusão em nossas mentes.”
(George Santayana)*

RESUMO

Neste trabalho foram investigadas algumas propriedades dinâmicas no mapa Smith e Slatkin, parametrizado pelo expoente γ e pelos parâmetros de controle α e r . Esse mapeamento pertence a um conjunto de mapas unidimensionais discretos utilizados para descrever a dinâmica de populações biológicas. Sistemas dinâmicos não lineares podem ser descritos por mapeamentos que dependem de parâmetros de controle. Assim, se os parâmetros de controle sofrerem alterações, o sistema poderá apresentar comportamentos distintos. Em muitos mapeamentos unidimensionais, o diagrama de bifurcações é utilizado para descrever matematicamente o comportamento da dinâmica, de modo que a estabilidade e a ocorrência de caos podem ser observadas. Inicialmente, foi construído numericamente o diagrama de bifurcações para ilustrar o comportamento dinâmico do sistema. Para caracterizar numericamente o caos no sistema foram utilizados os expoentes de Lyapunov. Posteriormente, foi introduzida uma pequena perturbação paramétrica no sistema definida pelos parâmetros de controle ε e b_n de modo que mudanças de bacia de atração puderam ser observadas no diagrama de bifurcações. Novamente o cálculo dos expoentes de Lyapunov foi utilizado para caracterizar o caos e permitindo a investigação do espaço de parâmetros. A investigação do espaço de parâmetros em mapas unidimensionais é um tema científico atual, pouco conhecido na literatura e exige um grande esforço computacional. Utilizando o cálculo dos expoentes de Lyapunov, construímos os espaços de parâmetros para o mapa Smith e Slatkin com o intuito de explorar as estruturas conhecidas como camarões. Depois, aplicou-se esses conhecimentos no estudo teórico do circuito caótico de Chua.

PALAVRAS-CHAVE: Mapa Smith e Slatkin. Sistema não linear. Caos. Espaço de parâmetros. Expoentes de Lyapunov. Circuito de Chua.

ABSTRACT

In this work some dynamic properties will be investigated in the Smith and Slatkin map parameterized by the γ exponent and the control parameters α and r . This mapping belongs to a set of discrete one-dimensional maps used to describe the dynamics of biological populations. Nonlinear dynamic systems can be described by mappings that depend on control parameters. Thus, if the control parameters change, the system may exhibit different behaviors. Initially, the bifurcation diagram was numerically built to illustrate the behavior of the dynamic system, so the stability and the chaos could be observed. The Lyapunov exponents were used to characterize the chaos in the system. After that a small parametric perturbation defined by the control parameters ε and b_n was introduced in the system and changes could be observed in the bifurcation diagram. Our studies was extended in the investigation of parameter space. The investigation of parameter space in one-dimensional maps is a current scientific theme, little known in the literature and requires a great computational effort. Using the calculation of Lyapunov exponents, we build the parameter spaces for the Smith and Slatkin map in order to explore the structures known as shrimps. This knowledge was applied to the study of the chaotic circuit of Chua.

KEYWORDS: Smith and Slatkin map. Non linear system. Chaos. Parameter space. Lyapunov exponents. Chua's circuit.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	O atrator de Lorenz - Solução caótica do sistema de Lorenz, projetada no plano xyz para os parâmetros $\rho = 28$, $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$	15
Figura 2	Aproximação/afastamento de trajetórias vizinhas no cálculo dos expoentes de Lyapunov	19
Figura 3	Diagrama de bifurcações obtido utilizando as condições: $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e $x_0 = 0,01$	22
Figura 4	Comportamento dos expoentes de Lyapunov no diagrama de bifurcações com $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e $x_0 = 0,01$ em (a) e (b).	23
Figura 5	Decaimento de órbitas para o ponto fixo para: $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e diferentes condições iniciais.	25
Figura 6	Gráfico do número de iterações n_x vs. a condição inicial x_0 junto com a lei de potência apropriada para $\gamma = 6$ e $\alpha = 1$ com inclinação $z = -5,99 \simeq -6$	26
Figura 7	Sobreposição das curvas dadas na Figura 5 para um plot universal com os eixos redimensionados apropriadamente.	26
Figura 8	Gráfico da relaxação do ponto fixo em função de μ para os parâmetros de controle $\gamma = 6$ e $\alpha = 1$	27
Figura 9	Diagrama de bifurcações do mapeamento com perturbação utilizando as condições: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$	28
Figura 10	Comportamento dos expoentes de Lyapunov no diagrama de bifurcações com $\gamma = 6$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$ em (a) e (b).	29
Figura 11	Espaço de parâmetros para: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$	30
Figura 12	Espaço de parâmetros para: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$	31
Figura 13	Espaço de parâmetros para: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$	31
Figura 14	Espaço de parâmetros para: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$	32
Figura 15	(a) Espaço de parâmetros e (b) Espaço de períodos.	32
Figura 16	(a) Espaço de parâmetros e (b) Espaço de períodos.	33
Figura 17	(a) Espaço de parâmetros e (b) Espaço de períodos.	33
Figura 18	(a) Espaço de parâmetros e (b) Espaço de períodos.	34
Figura 19	Circuito de Chua	36
Figura 20	Combinação de Amp-Ops para o diodo de Chua.	36
Figura 21	Curva característica da resistência linear por partes.	38
Figura 22	Espaço de fases xy para $\alpha = 9,4$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$	39
Figura 23	Espaço de fases xy para $\alpha = 12,0$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$	40
Figura 24	Espaço de fases xy para $\alpha = 13,4$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$	40
Figura 25	Espaço de fases xy para $\alpha = 13,6$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$	41

Figura 26 Espaço de fases xy para $\alpha = 14, 0, \beta = 28, x(0) = 0,7, y(0) = 0$ e $z(0) = 0$	41
Figura 27 Espaço de fases xy para $\alpha = 14, 6, \beta = 28, x(0) = 0,7, y(0) = 0$ e $z(0) = 0$	42

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Letra Grega Alfa
β	Letra Grega Beta
γ	Letra Grega Gama
λ	Letra Grega Lambda
σ	Letra Grega Sigma
ρ	Letra Grega Rô
C_1	Capacitor 1
C_2	Capacitor 2
L	Indutor
R	Resistor
V_{C_1}	Tensão no capacitor 1
V_{C_2}	Tensão no capacitor 2
i_L	Corrente que flui no indutor L
i_{R_1}	Corrente que flui através do resistor não linear

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Definição do problema	12
1.2	Objetivos	12
1.3	Justificativa	13
1.4	Organização	13
2	REVISÃO TEÓRICA	14
2.1	Teoria do Caos	14
2.2	Bifurcações	16
2.3	Atratores	17
2.4	Expoentes de Lyapunov	17
2.5	Espaço de Parâmetros	19
3	MATERIAIS E MÉTODOS	21
3.1	Propriedades dinâmicas no mapa de Smith e Slatkin	21
3.2	Expoentes críticos	23
3.3	Propriedades dinâmicas no mapa de Smith e Slatkin perturbado	27
3.4	Espaço de Parâmetros do Mapa Smith e Slatkin	29
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
4.1	Circuito de Chua	35
4.2	Aplicações de sistemas caóticos nas telecomunicações	43
5	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, o estudo de sistemas dinâmicos não lineares e a existência de fenômenos caóticos passou a ser de grande interesse para muitos pesquisadores. Isso se deve ao fato desse tipo de sistema utilizar modelos matemáticos que podem ser utilizados em diversas áreas, como na matemática, física, engenharia, biologia e economia (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992). O caos pode ser observado, por exemplo, na dinâmica de fluidos com a convecção Rayleigh-Bernard, na óptica não linear no estudo de lasers, em modelos de dinâmica populacional, como no caso do Mapa Smith e Slatkin, e até na eletrônica em circuitos como o circuito de Chua (BOLLT, 2003). Porém, grande parte desses estudos é teórica, devido à complexidade para implementar experimentalmente um sistema caótico (ROCHA R., 2005). No entanto, com o avanço dos computadores, a Teoria do Caos ganhou um grande impulso, já que, os computadores modernos constituem uma ferramenta eficaz no estudo de sistemas modelados matematicamente por equações diferenciais.

Sistemas dinâmicos podem ser descritos por mapeamentos que dependem de parâmetros de controle, cuja função é controlar a dinâmica do sistema. Ou seja, se alterarmos esses parâmetros, o sistema poderá apresentar comportamentos distintos, passando de periódico para caótico ou de caótico para periódico. Assim, pode-se classificar um sistema caótico como aquele que apresenta sensibilidade às condições iniciais (VALERIO, 2014). Um sistema ser sensível as condições iniciais, significa que com o passar do tempo suas trajetórias irão divergir exponencialmente uma da outra, o que causará uma perda de previsibilidade do comportamento conforme a evolução do sistema. Essa perda de previsibilidade ocorre até mesmo para sistemas que possuem a sua dinâmica modelada por sistemas de equações, como será o caso do mapa Smith e Slatkin, objeto de estudo desse trabalho. Outra característica importante de sistemas caóticos é que eles são aperiódicos, ou seja, o movimento do sistema não se repete. Porém, ao evoluir as variáveis do sistema, podemos obter, por exemplo, atratores, que são medidas invariantes no tempo (BAPTISTA, 1996).

O comportamento caótico foi visto pela primeira vez na década de 1880, por Henri Poincaré em seu estudo sobre o comportamento dinâmico de três corpos. Depois, em 1960, esse comportamento foi observado novamente por Edward Lorenz em seu estudo sobre problemas de convecção atmosférica em um modelo simplificado dando início à Teoria do Caos.

Neste trabalho, propomos investigar algumas propriedades dinâmicas e leis de escala no mapa Smith e Slatkin (SMITH; SLATKIN, 1973; STONE; HART, 1999; DOEBELI; JONG, 1999; NEDOREZOV; SADYKOVA, 2008) que pertence a um conjunto de mapas unidimensionais discretos utilizados para descrever a dinâmica de populações biológicas (FARAZMAND, 2003). A partir desse mapeamento, pretende-se construir o diagrama de bifurcações para avaliar o comportamento do sistema dinâmico conforme um dos parâmetros de controle for variado. Para caracterizar o caos nas trajetórias do mapeamento será utilizado o cálculo dos expoentes de Lyapunov, uma ferramenta matemática que

define se as trajetórias do sistema irão ou não divergir exponencialmente com o passar do tempo.

Posteriormente, será introduzida ao mapeamento uma pequena perturbação paramétrica. Novamente, o diagrama de bifurcações será utilizado para que as mudanças causadas pela adição da perturbação no mapeamento possam ser observadas. Neste ponto, nosso principal objetivo será utilizar o cálculo dos expoentes de Lyapunov para construir um espaço de parâmetros r como uma função de ε para explorar estruturas conhecidas como camarões ou *shrimps* (GALLAS, 1993; COSTA et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018). O diagrama de bifurcações e o espaço de parâmetros serão utilizados para facilitar a interpretação dos resultados.

O estudo do comportamento de sistemas dinâmicos pode ser aplicado em circuitos elétricos. Nesse caso, pretendemos aplicar os conhecimentos adquiridos na primeira etapa do trabalho em um estudo teórico sobre o sistema caótico de Chua, que é um dos circuitos eletrônicos, que apresenta comportamento caótico, mais fácil de se implementar. A aplicação desse tipo de estudo é importante, pois permite uma melhor compreensão do comportamento global do circuito, o que poderá auxiliar na escolha dos valores dos componentes que serão utilizados na construção do circuito de acordo com a aplicação e comportamento desejados.

1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Estudar conceitos de estabilidade e caos que podem ser aplicados em diversas áreas, afim de prever o comportamento de sistemas dinâmicos. Esses conceitos, serão aplicados no estudo de circuitos elétricos, mais precisamente no circuito de Chua, um circuito elétrico que, dependendo dos valores dos componentes utilizados em sua implementação pode apresentar caos. Esse estudo ajudará na melhor compreensão do sistema, possibilitando a utilização de circuitos caóticos em diversas aplicações.

1.2 OBJETIVOS

Para atingir o objetivo deste trabalho, pode-se estabelecer os seguintes objetivos específicos:

- Estudar propriedades dinâmicas e leis de escala no mapa Smith e Slatkin;
- Gerar o diagrama de bifurcações do mapeamento;
- Calcular os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos;
- Adicionar uma perturbação ao mapeamento para estudar o espaço de parâmetros;
- Aplicar alguns conceitos de propriedades de sistemas dinâmicos em um estudo teórico do circuito de Chua.

1.3 JUSTIFICATIVA

Nos últimos anos, o estudo de sistemas dinâmicos não lineares e a existência de fenômenos caóticos se tornaram de grande interesse científico, pelo fato desses sistemas poderem ser descritos por modelos matemáticos utilizados em diversas áreas. O estudo do comportamento desses sistemas pode ser aplicado, por exemplo, em circuitos elétricos como o circuito de Chua. Esse circuito é um dos mais estudados atualmente devido a sua fácil implementação e aplicabilidade, podendo ser utilizado em aplicações de controle do caos e comunicação segura, áreas que têm crescido substancialmente nos últimos anos. Por isso, o estudo do comportamento desse sistema é de grande importância, já que podemos, por exemplo, encontrar os valores dos componentes que podem ser utilizados para dimensionar o circuito de acordo com a aplicação e comportamento desejados.

1.4 ORGANIZAÇÃO

Este trabalho é apresentado em cinco capítulos. O primeiro Capítulo introduz os problemas que motivaram este trabalho, como a importância de estudar o comportamento de sistemas dinâmicos e como esse estudo pode ser aplicado em diversas áreas, como a área de circuitos elétricos. Além dos objetivos e justificativas do trabalho.

O segundo Capítulo trata de uma revisão teórica dos principais pontos que serão tratados durante o trabalho, como uma introdução a teoria do caos e alguns conceitos importantes como bifurcações, atratores, expoentes de Lyapunov e espaço de parâmetros.

No terceiro Capítulo busca-se estudar algumas propriedades dinâmicas no mapa de Smith e Slatkin com e sem a adição de uma perturbação. Nesse capítulo será apresentado os resultados numéricos e analíticos obtidos, como o diagrama de bifurcações, cálculo dos expoentes de Lyapunov, os espaços de parâmetros e os expoentes que definem a classe de universalidade a qual a bifurcação pertence.

Já no quarto Capítulo será feito um estudo teórico sobre o circuito caótico de Chua com o objetivo de aplicar os conceitos do capítulo anterior.

No quinto e último Capítulo serão apresentadas as considerações finais obtidas durante a realização deste trabalho.

2 REVISÃO TEÓRICA

2.1 TEORIA DO CAOS

O objetivo da Teoria do Caos é explicar o funcionamento de sistemas complexos e dinâmicos, a fim de entender fenômenos que até então pareciam não ter uma explicação matemática. O caos é um termo usado para descrever o comportamento complexo de um sistema, mas não se trata de uma desordem e sim de uma imprevisibilidade. Esses sistemas também não são aleatórios, já que seu comportamento pode ser definido por uma equação que possui alguns parâmetros de controle. A variação, mesmo que pequena, desses parâmetros podem levar a mudanças bruscas no sistema resultando em caos. Esse caos é definido como caos determinístico, já que seu comportamento pode ser definido por uma equação. (ROSA, 2012)

Há três condições que devem ocorrer para que um sistema apresente um comportamento caótico:

- Ser sensível às condições iniciais;
- Ter um atrator que seja limitado no espaço de fases, ou seja, ter um atrator caótico; e
- O sistema dinâmico deve ter, no mínimo, três dimensões.

Todos os componentes de um sistema complexo tem a capacidade de mudar, de forma aleatória e imprevisível, dentro do contexto do próprio sistema. São os princípios orientadores do sistema, os atratores, que permitem que essas partes sejam coerentes ao longo do tempo de forma definida e previsível (CHEN; YU, 2003; GLEICK, 1987; PETERS, 1988; SULLIVAN, 2004; WHEATLEY, 2001).

Henri Poincaré foi um dos primeiros cientistas a mencionar o caos durante os seus estudos, no final do século XIX, sobre a dinâmica de órbitas no problema de três corpos. Nesse estudo, ele observou um comportamento "estranho", pois identificou que algumas órbitas não eram periódicas, não se aproximavam de um ponto fixo e nem aumentavam indefinidamente. Com isso, Poincaré explicou que: *“Pode acontecer de que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam alterações muito grandes nos fenômenos finais. Um pequeno erro na primeira produzirá um erro enorme na última. A previsão se torna impossível”* (ROSA, 2012). Porém, o interesse no estudo do comportamento caótico em sistemas complexos só voltou no início do ano de 1960. Foi nessa época que Edward Lorenz, durante experimentos sobre padrões do tempo usando modelos computacionais, desenvolveu a tese de que *“situações iniciais ligeiramente diferentes podem se desenvolver em situações consideravelmente diferentes”* descobrindo um dos princípios da Teoria do Caos, o Efeito Borboleta – *“Previsibilidade: o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode desencadear um tornado no Texas?”* (LORENZ, 1972). Esse efeito se refere a ideia de que o bater de asas de uma borboleta, que representa uma variação infinitesimal das condições iniciais, poderá alterar o curso de um tornado. Mostrando que uma

mudança insignificante em uma parte do sistema pode ter um grande efeito em outra parte, introduzindo assim a ideia de que sistemas podem apresentar sensibilidade as condições iniciais (JUNIOR, 2010).

Os modelos de sistemas dinâmicos podem ser apresentados de duas formas: usando equações diferenciais ou em funções de tempo discreto. O modelo que Lorenz criou durante os seus estudos é um modelo simplificado de convecção baseado nas equações de Navier-Stokes, definido por equações diferenciais de primeira ordem, tridimensional e determinístico como mostrado a seguir (LORENZ, 1972):

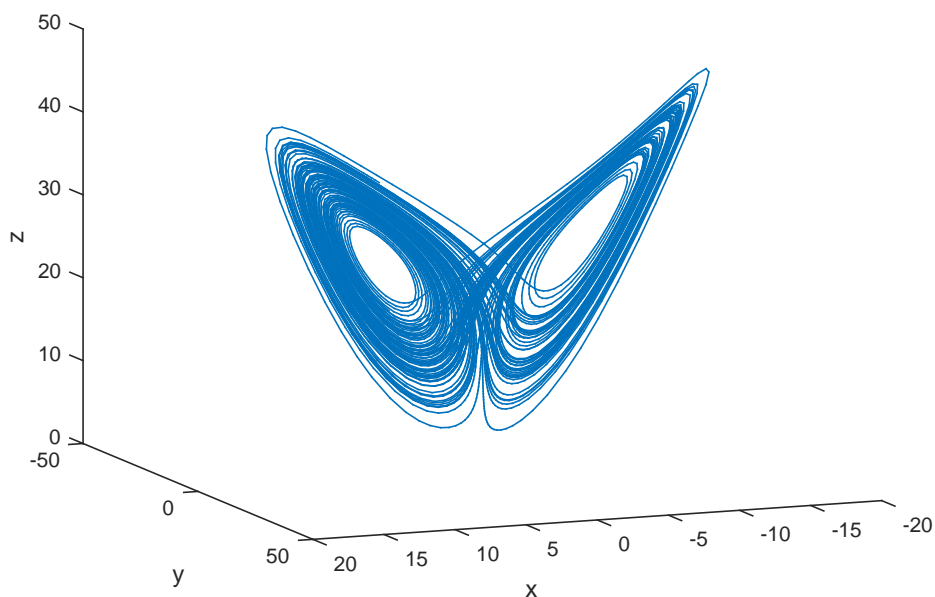
$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X), \quad (2.1)$$

$$\frac{dY}{dt} = -XZ + \rho Z - Y, \quad (2.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = XY - \beta Z, \quad (2.3)$$

onde σ , ρ e β são os parâmetros de controle e $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$ as variáveis do sistema. Dependendo dos parâmetros utilizados o sistema pode apresentar um comportamento caótico. O demonstrativo do Efeito Borboleta pode ser visto na Figura 1 que mostra o atrator de Lorenz obtido utilizando os parâmetros $\rho = 28$, $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$, tais parâmetros geram um atrator "estranho", o que define o sistema como caótico.

Figura 1 – O atrator de Lorenz - Solução caótica do sistema de Lorenz, projetada no plano xyz para os parâmetros $\rho = 28$, $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$



Fonte: Elaborada pelo autor

Antes do ano de 1970 todas as pesquisas eram voltadas para processos lineares, onde pequenas

mudanças causam efeitos proporcionalmente pequenos, porém grande parte dos fenômenos não seguiam fórmulas lineares. A partir disso, viu-se a necessidade de utilizar processos não lineares, onde as taxas são variáveis e pequenas mudanças podem causar grandes efeitos. Depois de Lorenz, Yorke e Robert May deram, em 1970, mais um passo em direção a teoria do caos ao estudar modelos simples que podiam ser usados para descrever o crescimento de populações (ROSA, 2012). Outro nome de grande importância na área de sistemas caóticos é o de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, que estudou diversos conceitos de sistemas dinâmicos não lineares utilizados até hoje. Um desses conceitos são os expoentes de Lyapunov que serão utilizados nesse trabalho para caracterizar o caos no sistema (JUNIOR, 2010).

Séries temporais caóticas não devem ser confundidas com séries temporais aleatórias. As séries temporais caóticas apresentam um grande número de oscilações em seu espectro de frequências da transformada de Fourier, que não são distribuídos igualmente em todo o espectro. Já em séries temporais aleatórias, como o ruído branco, os picos de oscilação são distribuídos igualmente em todas as faixas de frequências (JUNIOR, 2010).

2.2 BIFURCAÇÕES

Como mencionado anteriormente, sistemas dinâmicos são definidos por mapeamentos que dependem de parâmetros que, ao variarem, alteram o seu comportamento. As bifurcações estão associadas a essas mudanças na estabilidade decorrentes das variações dos parâmetros.

Podemos destacar quatro tipos de bifurcações:

- Sela-nó;
- Duplicação de período;
- Transcrítica; e
- Forquilha.

A bifurcação sela-nó acontece quando o sistema não tem nenhum ponto fixo, porém, quando um parâmetro é variado surge um ponto fixo não-hiperbólico que se separa em dois pontos fixos: um ponto de sela e um nó. Na de duplicação de período, há o surgimento de uma órbita com período duplicado, onde o ponto fixo perde a estabilidade e surgem dois ramos estáveis. Já uma bifurcação transcrítica acontece quando dois pontos fixos aproximam-se, combinando-se em único ponto fixo e depois se separam novamente em dois pontos. E a bifurcação de forquilha acontece quando existe um ponto fixo estável que se torna instável, originando dois novos pontos fixos estáveis (VILLATE, 2006).

Para auxiliar no estudo desses sistemas, utilizam-se os diagramas de bifurcações, que consistem em representações gráficas utilizadas para descrever matematicamente o comportamento da dinâmica do sistema, de modo que a estabilidade e a ocorrência de caos podem ser observadas. Assim, podemos

utilizar o diagrama para identificar como a variação de um parâmetro pode influenciar na resposta do sistema, facilitando a interpretação dos resultados e identificação de regiões caóticas.

2.3 ATRADORES

Outro ponto importante na teoria do caos é o conceito de atratores. O termo “atrator estranho” está associado ao Efeito Borboleta definido por Lorenz. Um atrator consiste em conjunto de pontos no espaço de fases para o qual as trajetórias convergem no tempo. Há três tipos de atratores:

- Atratores de ponto fixo;
- Atratores de ciclo limite; e
- Atratores estranhos.

Os atratores de ponto fixo são definidos por pontos aos quais o sistema sempre retorna, ou seja, é um ciclo de atração fechado e representam um sistema estacionário. Os atratores de ciclo limite tratam de parâmetros limitados que definem os limites em que o sistema pode oscilar e representam um sistema periódico. Já os atratores "estranhos" são ditos estranhos, pois não se sabe o motivo do sistema ser atraído por eles, passando a orbitar em torno dos pontos de maneira não repetitiva e caótica, representando os sistemas caóticos (FARAZMAND, 2003). Os atratores podem ser vistos no espaço de fases, uma ferramenta muito importante definida por um sistema de coordenadas associado às variáveis independentes que descrevem a dinâmica do sistema. É a representação da dinâmica de uma função no espaço de fases que chamamos de atrator.

2.4 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Os expoentes de Lyapunov são utilizados para caracterizar caos nas trajetórias do mapeamento. Eles descrevem a taxa de aproximação/afastamento de trajetórias de sistemas dinâmicos que possuem condições iniciais próximas. Considerando um mapeamento unidimensional, dado por (CESPEDES, 2015):

$$X_{n+1} = F(x_n), \quad (2.4)$$

com $F(x_n)$ sendo uma função não linear. Para determinarmos o expoente de Lyapunov, devemos medir a distância d entre as condições iniciais x_0 e $x_0 + \varepsilon$ após n iterações. Logo:

$$d = | F^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(x_0) |. \quad (2.5)$$

Podemos definir a distância relativa, dividindo-se a equação (2.5) por ε . Assim:

$$\frac{d}{\varepsilon} = \frac{| F^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(x_0) |}{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Tomando o limite para ε tendendo a zero, temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|F^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} = |F'^{(n)}(x_0)|. \quad (2.7)$$

Definindo

$$|F'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}, \quad (2.8)$$

e aplicando propriedades de logaritmos para $\lim_{n \rightarrow \infty}$, obtemos a equação para o cálculo dos expoentes de Lyapunov (LEONEL, 2019):

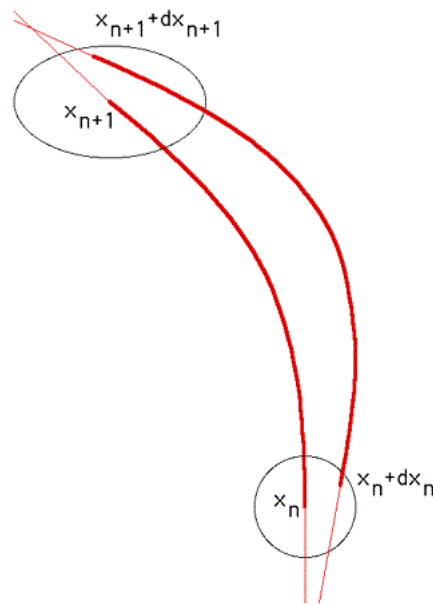
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|, \quad (2.9)$$

onde $|F'(x_i)|$ corresponde a derivada do mapeamento.

A obtenção desses expoentes torna possível verificar se duas trajetórias vizinhas divergem exponencialmente uma da outra com o decorrer do tempo. Ou seja, se todos os expoentes são negativos ($\lambda < 0$) as trajetórias permanecem próximas durante todo o tempo, o que caracteriza o sistema como estável. Porém, se pelo menos um expoente for positivo ($\lambda > 0$), as trajetórias passam a divergir exponencialmente uma da outra com o tempo, apresentando sensibilidade às condições iniciais, o que, neste caso, caracteriza o sistema como caótico.

O fato de trajetórias próximas divergirem não caracteriza o sistema como caótico, já que sistemas que não são caóticos também podem apresentar essa divergência. O que de fato diferencia, é que em sistemas não caóticos, a variação ocorre lentamente o que não causa grandes alterações no resultado final. Porém, em sistemas caóticos, as trajetórias divergem exponencialmente o que gera um comportamento crítico na resposta do sistema (JUNIOR, 2010). A Figura 2 mostra a taxa de aproximação/afastamento das trajetórias. Deixando dois pontos próximos evoluírem no tempo, vemos que os pontos podem se afastar (meio) ou se aproximar (final).

Figura 2 – Aproximação/afastamento de trajetórias vizinhas no cálculo dos expoentes de Lyapunov



Fonte: Imagem retirada de (BOURKE, 2001)

2.5 ESPAÇO DE PARÂMETROS

O espaço de parâmetros é uma ferramenta que também pode ser utilizada no estudo do comportamento dinâmico de sistemas. Eles são definidos por mapas bidimensionais descritos pela variação de dois parâmetros de controle do sistema, a resposta do sistema para essa condição inicial formada por esses parâmetros é codificada através de uma escala de cores. Essa é uma ferramenta muito importante, pois mostra como são organizadas as estruturas periódicas e caóticas. Possibilitando observar como pequenas variações nos parâmetros de controle podem afetar o comportamento do sistema que pode passar rapidamente de um comportamento periódico para um caótico. Isso mostra que mesmo que uma região pareça desorganizada é possível encontrar nela estruturas altamente organizadas, com diversos formatos e características (JUNIOR, 2010).

Assim, a investigação do espaço de parâmetros permite compreender a organização das curvas de retorno, dada à organização dos domínios caóticos e periódicos em função dos parâmetros de controle. Nesse trabalho, utilizou-se o cálculo dos expoentes de Lyapunov para obter o espaço de parâmetros e através dele explorar estruturas conhecidas como camarões ou *shrimps* (GALLAS, 1993; COSTA et al., 2016; OLIVEIRA et al., 2018). Essas estruturas foram classificadas por Gallas, que em seus estudos observou estruturas periódicas auto-similares com diversas periodicidades, imersas em um mar de caos, por conta disso e pela semelhança as chamou de camarões. De acordo com Vitolo, Glendinning e Gallas (VITOLO; GLENDINNING; GALLAS, 2011):

Shrimps são formados por um conjunto regular de janelas adjacentes centrado em torno do par principal de intersecção super estável de arcos parabólicos. Um shrimp é um mosaico

duplamente infinito de domínios de estabilidade composto por um domínio principal, acrescido de todos os domínios de estabilidade decorrentes de dois períodos adjacentes de duplicação por cascata, juntamente com os seus correspondentes domínios de caos.

O primeiro relato sobre a existência dessas estruturas foi feito por Gallas (GALLAS, 1993). Depois disso, passou a ser dada grande atenção à construção e caracterização de estruturas presentes no espaço de parâmetros em modelos teóricos (ALBUQUERQUE; RUBINGER; RECH, 2008; CELESTINO et al., 2011; STOOP; BENNER; UWATE, 2010; BONATTO; GALLAS, 2008) e experimentais (MATSUMOTO, 1985).

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 PROPRIEDADES DINÂMICAS NO MAPA DE SMITH E SLATKIN

Para o desenvolvimento desse trabalho foi utilizado o mapa Smith e Slatkin, definido pela equação (3.1): (OLIVEIRA; RAMOS; LEONEL, 2018)

$$x_{n+1} = \frac{rx_n}{1 + (\alpha x_n)^\gamma}, \quad (3.1)$$

onde r , α , γ são parâmetros e x é uma variável dinâmica. Por tratar de um modelo populacional x_n é a variável que define o número de indivíduos no n -ésimo intervalo de tempo e r é a taxa de crescimento populacional.

Para construir o diagrama de bifurcações definimos $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e uma condição inicial x_0 , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= f(x_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

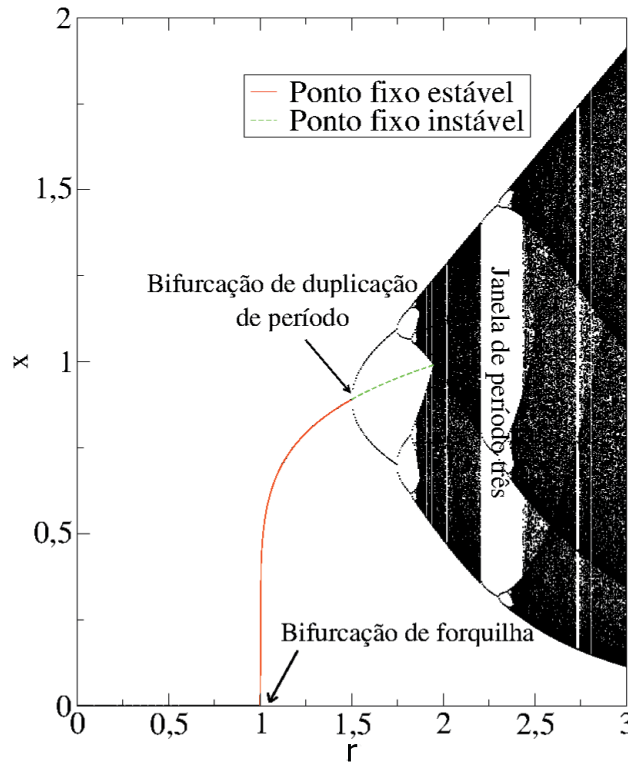
O diagrama de bifurcações é gerado a partir da variação de apenas um dos parâmetros de controle, no caso o parâmetro r . Para as investigações deste projeto foi considerado os valores de $r \in [0, 3]$.

A Figura 3 mostra o diagrama de bifurcações gerado a partir da equação 3.1, considerando $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e a condição inicial $x_0 = 0,01$. Através do diagrama de bifurcações, observou-se que para as condições consideradas as órbitas convergiam de acordo com o intervalo de r .

Assim, observou-se que no intervalo $r \in [0, 1]$ as órbitas convergiram para o ponto fixo $x=0$. Já no intervalo $r \in [1, 1, 5]$ as órbitas convergiram para uma duplicação de períodos e a partir desse ponto foi possível observar uma sequência de duplicações de período até que se alcançasse a região caótica.

Com isso, demonstrou-se que ao variar um dos parâmetros de controle o sistema apresentou comportamento caótico, isso se deve ao fato de que algumas regiões apresentaram trajetórias sensíveis as condições iniciais. Na Figura 3 também é possível perceber a presença de algumas janelas de periodicidade, como as janelas de período 3, identificadas na figura. Esses intervalos são ditos periódicos, pois neles temos o fim do comportamento caótico e a criação de uma órbita estável.

Figura 3 – Diagrama de bifurcações obtido utilizando as condições: $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e $x_0 = 0,01$.



Fonte: Elaborada pelo autor (OLIVEIRA; RAMOS; LEONEL, 2018).

Como o modelo estudado é referente a um modelo populacional, podemos entender o diagrama de bifurcações da seguinte maneira: até o ponto $r = 1$ a população é inexistente, a partir de $r = 1$ a população começa a crescer e as duplicações de período indicam que a população duplicou. Já o caos pode ser interpretado como uma alta taxa de natalidade e/ou mortalidade, que pode depender de alguns aspectos como alimentação, habitat natural e predadores.

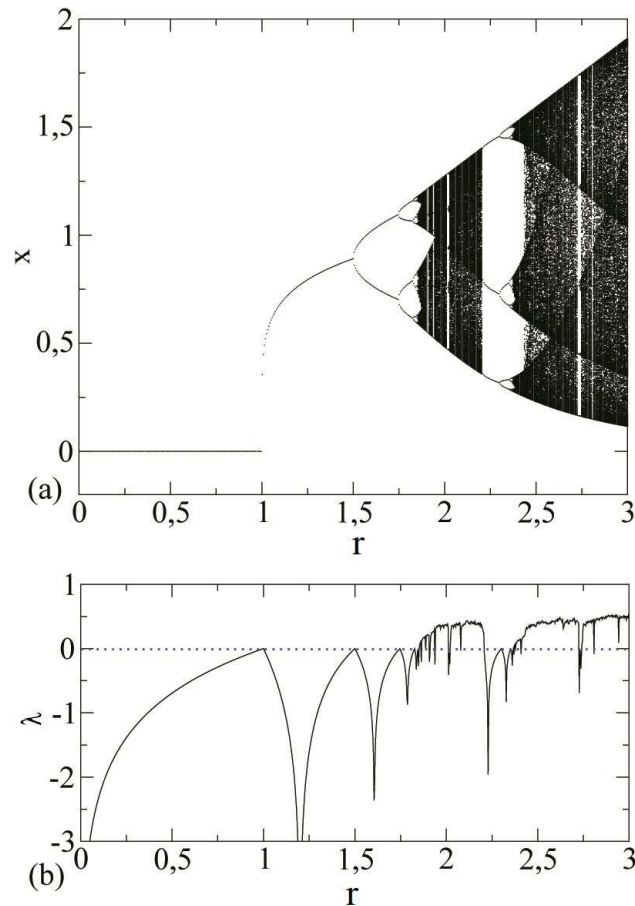
Na Figura 3 também vemos uma bifurcação de forquilha para $r = 1$, esse tipo de bifurcação acontece para um γ par, enquanto que uma bifurcação transcítica poderia ser observada para um mesmo r , mas para um valor de γ ímpar (OLIVEIRA; RAMOS; LEONEL, 2018). Também temos destacadas na figura duas curvas, sendo a curva vermelha utilizada para indicar um ponto fixo x^* estável, enquanto que a curva verde é uma continuação de x^* , porém, após uma curva de duplicação de período, o ponto fixo se torna instável.

Depois de gerar o diagrama de bifurcações para o mapeamento, calculou-se os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos no diagrama. A Figura 4(a) mostra o diagrama de bifurcações e a Figura 4(b) mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov no mapeamento utilizando os parâmetros da Figura 3: $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e $x_0 = 0,01$. Esses expoentes foram obtidos considerando um número de iterações $n = 1000$, descartando-se o transiente \square ($n = 1000$) e a condição inicial $x_0 = 0,01$. Através do resultado obtido pode-se concluir que as regiões escuras do diagrama de

¹ Transiente é o comportamento inicial caracterizado pelos primeiros pontos de uma órbita.

bifurcações são as regiões caóticas, uma vez que, $\lambda > 0$. Já as outras regiões são ditas estáveis, uma vez que, $\lambda < 0$. Já nos pontos de bifurcação os expoentes de Lyapunov valem zero, pois nesses pontos as regiões não podem ser caracterizadas como caóticas.

Figura 4 – Comportamento dos expoentes de Lyapunov no diagrama de bifurcações com $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e $x_0 = 0,01$ em (a) e (b).



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 EXPOENTES CRÍTICOS

Outro ponto de extrema importância nesse tipo de estudo é a investigação do decaimento de órbitas para os pontos fixos do mapeamento. Para isso, recorreremos à condição $x^* = f(x^*)$ e utilizando a equação (3.3) foi obtido o ponto fixo de período 1 através da seguinte manipulação algébrica:

$$\begin{aligned} s x^* &= \frac{rx^*}{1+(\alpha x^*)^\gamma} \\ x^*(1 + (\alpha x^*)^\gamma) &= rx^* \\ 1 + (\alpha x^*)^\gamma &= r \\ (\alpha x^*)^\gamma &= r - 1 \end{aligned}$$

$$\alpha x^* = (r - 1)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$x^* = \frac{(r - 1)^{\frac{1}{\gamma}}}{\alpha} \quad (3.3)$$

Para entender e descrever o decaimento para o ponto fixo, investigou-se o comportamento de x aproximando do ponto fixo x^* em r , onde x é uma função de n (número de iterações).

A distância do ponto fixo é utilizada como uma variável natural para descrever a convergência para o estado estacionário. Assim, a distância ao ponto fixo $x^* = 0$ é a própria variável dinâmica x . A convergência para o estado estacionário também depende do número de iterações n , da condição inicial x_0 e do parâmetro $\mu = r_c - r$. O parâmetro $\mu = 0$ define o ponto de bifurcação.

Para obter a convergência para o ponto fixo utilizou-se os parâmetros $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e diferentes condições iniciais. O resultado obtido pode ser visto na [Figura 5](#), onde vemos que dependendo da condição inicial x_0 a órbita mantém um valor x constante e só passa a decair através de uma lei de potência marcada por um expoente crítico β depois de atingir o número de iteração de crossover (n_x). Através do comportamento observado na [Figura 5](#) podemos supor que:

1. Para $n \ll n_x$ o comportamento de x vs. n é dado por:

$$x(n) \propto x_0^\alpha. \quad (3.4)$$

Sabendo que $x \propto x_0$, concluímos que o expoente crítico tem valor $\alpha = 1$.

2. Para $n \gg n_x$ o comportamento de x vs. n é dado por:

$$x(n) \propto n^\beta, \quad (3.5)$$

onde β é o expoente de decaimento.

3. O número de iterações de crossover n_x é dado por:

$$n_x \propto x_0^z, \quad (3.6)$$

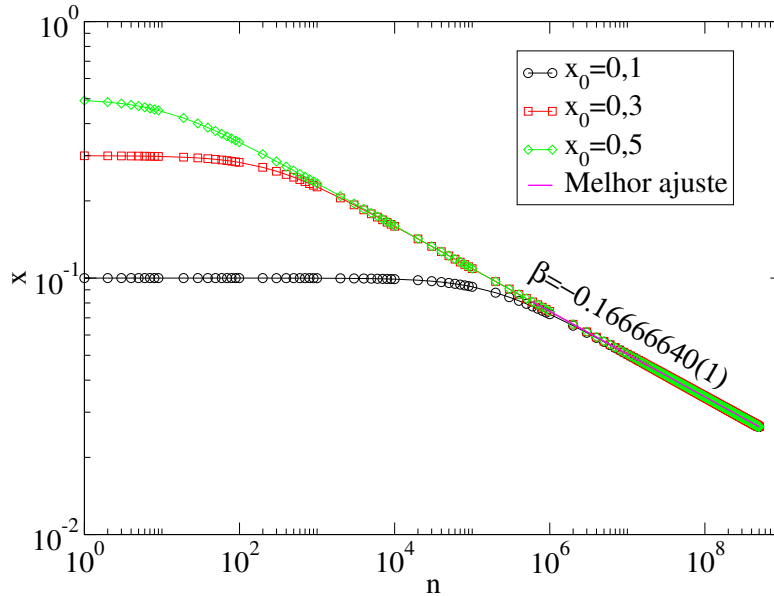
onde z é o expoente de mudança.

Os expoentes β e z foram obtidos utilizando gráficos específicos. O expoente β foi encontrado através de um ajuste da lei de potência no gráfico do decaimento de órbitas para o ponto fixo utilizando diferentes condições iniciais. O valor encontrado foi de $\beta = -0,16666640(1)$, como mostra a [Figura 5](#). Esse valor foi obtido considerando $\alpha = 1$, $\gamma = 6$, diferentes condições iniciais e o parâmetro $\mu = 0$.

Já o expoente z foi encontrado através do comportamento de n_x vs. x_0 , sendo n_x o número de iterações de crossover obtido através do decaimento da lei de potência. O valor resultante foi de

$z = -5,99$, como pode ser visto na [Figura 6](#). Esse valor foi obtido considerando $\alpha = 1$ e $\gamma = 6$. Para esse tipo de problemática é de suma importância descobrir o valor desses expoentes, pois esses resultados são utilizados para definir a classe de universalidade a qual a bifurcação pertence.

Figura 5 – Decaimento de órbitas para o ponto fixo para: $\gamma = 6$, $\alpha = 1$ e diferentes condições iniciais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O comportamento mostrado na [Figura 5](#) junto com três hipóteses de escala nos permite descrever o comportamento de x como uma função homogênea de variáveis n e x_0 , quando $\mu = 0$, do tipo:

$$x(x_0, n) = lx(l^a x_0, l^b n), \quad (3.7)$$

onde l é o fator de escala, a e b são expoentes característicos. Como l é um fator de escala escolhemos $l^a x_0 = 1$ levando a $l = x_0^{-1/a}$. Substituindo essa expressão na equação [\(3.8\)](#), temos:

$$x(x_0, n) = x_0^{-1/a} x(1, x_0^{-b/a} n). \quad (3.8)$$

Assumindo o termo $x(1, x_0^{-b/a} n)$ constante quando $n \ll n_x$ e comparando a equação [\(3.8\)](#) com a primeira hipóteses de escala pode-se concluir que $\alpha = -1/a$. Agora, assumindo que $l^b n = 1$, obtemos a condição $l = n^{-1/b}$ e substituindo ela na equação [\(3.9\)](#), temos:

$$x(x_0, n) = n^{-1/b} x(n^{-a/b} x_0, 1). \quad (3.9)$$

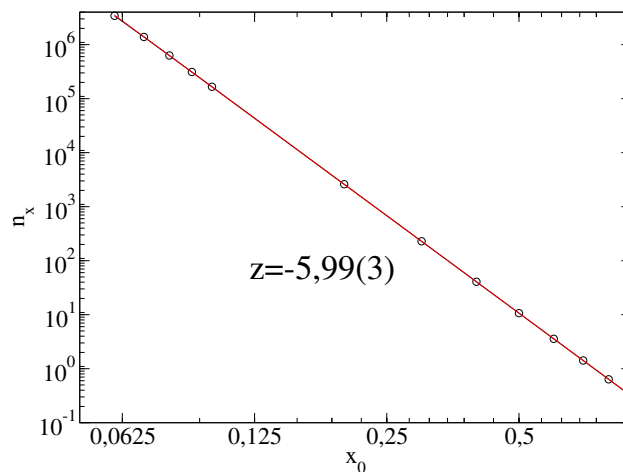
Novamente supomos o termo $x(n^{-a/b} x_0, 1)$ constante quando $n \gg n_x$. Comparando com a segunda hipótese de escala temos $\beta = -1/b$. Finalmente, as duas expressões obtidas para o fator de escala são comparadas, o que confirma que $n_x = x_0^{\alpha/\beta}$. A comparação com a terceira hipótese de escala nos permite obter a relação entre os três expoentes críticos α , β e z que converge para a seguinte lei de

escala:

$$z = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.10)$$

Essa equação mostra que se dois dos expoentes forem conhecidos torna-se possível obter o terceiro expoente. Esses expoentes também podem ser usados para reescalar as variáveis N e n de uma maneira mais conveniente para o problema.

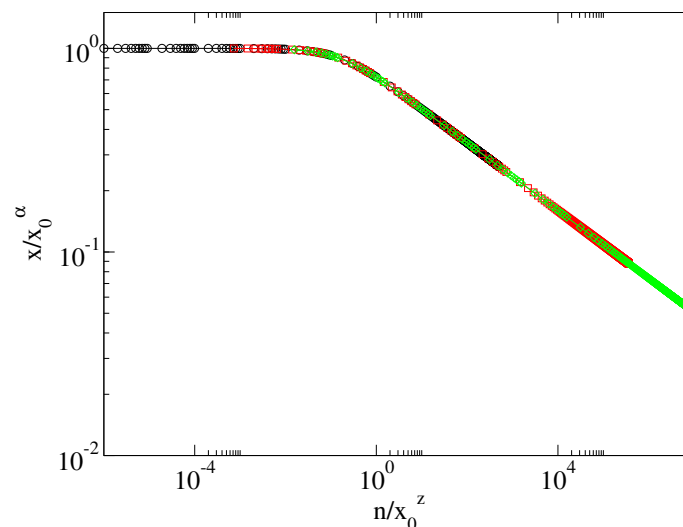
Figura 6 – Gráfico do número de iterações n_x vs. a condição inicial x_0 junto com a lei de potência apropriada para $\gamma = 6$ e $\alpha = 1$ com inclinação $z = -5,99 \simeq -6$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Outro objetivo desse trabalho era sobrepor todas as curvas de x em relação à n em uma única curva universal. Para isso foi necessário fazer um redimensionamento de $x \rightarrow x/x_0^\alpha$ e $n \rightarrow n/x_0^z$. O colapso das curvas pode ser observado na [Figura 7](#).

Figura 7 – Sobreposição das curvas dadas na [Figura 5](#) para um plot universal com os eixos redimensionados apropriadamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É válido também discutir a dinâmica nos casos em que $\mu \neq 0$, que inclui os casos que estão próximos da bifurcação. A convergência para o estado estacionário é marcada por uma lei exponencial do tipo:

$$x(n, \mu) \propto e^{-n/\tau}, \quad (3.11)$$

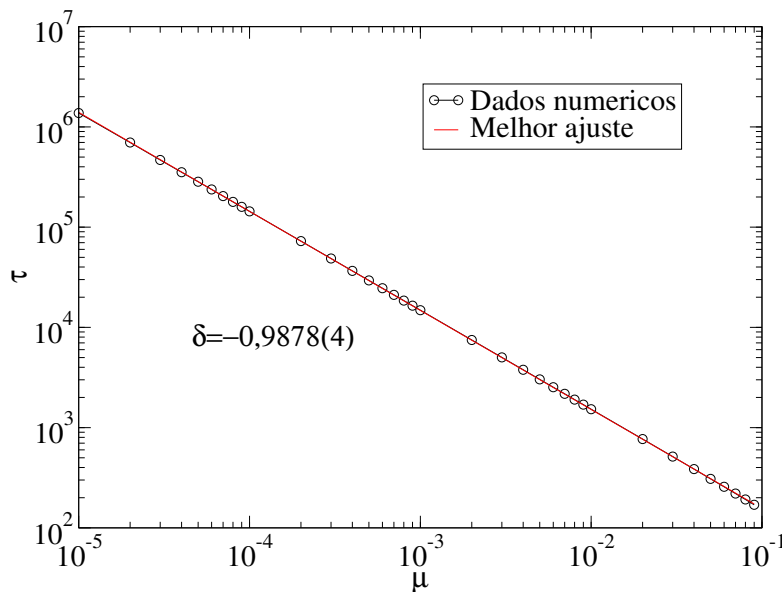
onde τ é o tempo de relaxação descrito por:

$$\tau \propto \mu^\delta, \quad (3.12)$$

onde δ é o expoente de relaxação.

A **Figura 8**, mostra o comportamento de τ vs. μ . Aplicando um ajuste da lei de potência foi obtido o expoente $\delta \cong 1$.

Figura 8 – Gráfico da relaxação do ponto fixo em função de μ para os parâmetros de controle $\gamma = 6$ e $\alpha = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 PROPRIEDADES DINÂMICAS NO MAPA DE SMITH E SLATKIN PERTURBADO

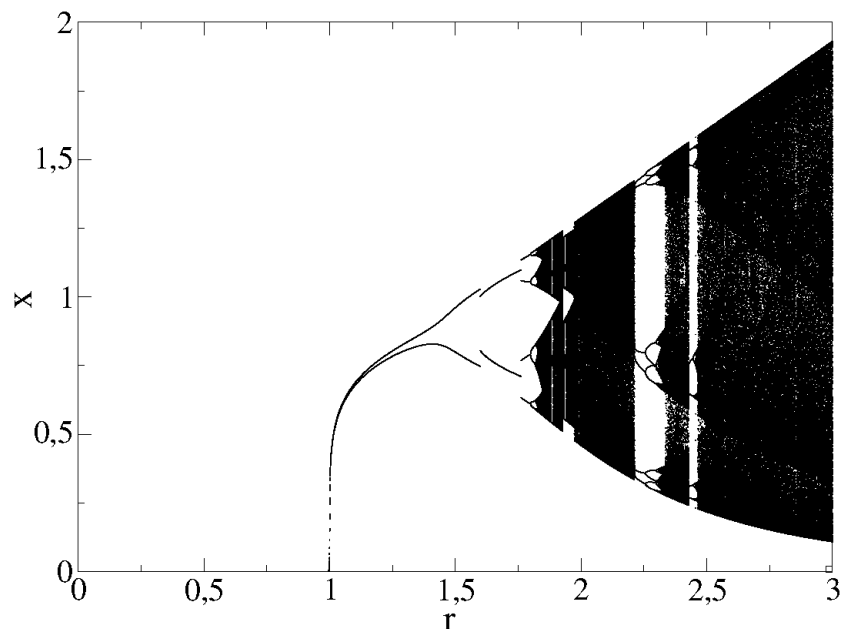
Nesse ponto do trabalho introduzimos ao mapa de Smith e Slatkin uma perturbação paramétrica, como mostrado na equação **(3.13)**:

$$x_{n+1} = \frac{(1 + b_n \varepsilon) r x_n}{1 - \alpha x_n^\gamma}, \quad (3.13)$$

onde α , r , γ e ε são parâmetros de controle. O parâmetro ε controla a amplitude da perturbação e b_n pode ser escolhido entre $b_n = (-1)^n$ ou $b_n = (-1)^{n+1}$, conseqüentemente, pode ser definido como $b_0 = 1$ ou $b_0 = -1$ para uma condição inicial x_0 . Quando $\varepsilon = 0$ o mapa tradicional de Smith e Slatkin é recuperado (OLIVEIRA; RAMOS; LEONEL, 2018).

Depois, gerou-se novamente o diagrama de bifurcações para observar os efeitos causados no mapeamento devido a introdução da perturbação. A Figura 9 mostra o diagrama de bifurcações para a equação (3.13), considerando $\gamma = 6$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e condição inicial $x_0 = 0,1$. Através do diagrama de bifurcações, observou-se que novamente que para as condições consideradas as órbitas convergiam de acordo com o intervalo de r .

Figura 9 – Diagrama de bifurcações do mapeamento com perturbação utilizando as condições: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, verificou-se que no intervalo $r \in [0, 1]$ as órbitas convergiram para o ponto fixo $x = 0$. Novamente, no intervalo $r \in [1, 1,75]$ as órbitas convergiram para duplicações de período, porém, agora podemos observar interrupções abruptas no cenário de duplicação de período, essas mudanças de bacia de atração² podem ser observadas nas descontinuidades do ponto fixo devido a introdução da perturbação no mapeamento.

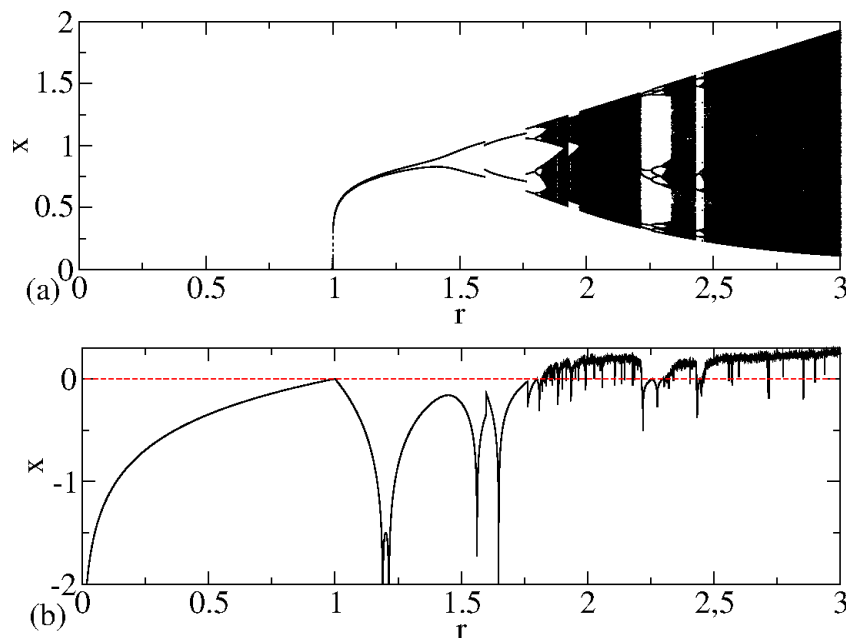
Com a variação dos parâmetros de controle, foi possível observar que o diagrama de bifurcações apresentou regiões em que algumas trajetórias apresentaram sensibilidade às condições iniciais, mostrando assim um comportamento caótico. Comportamento semelhante ao observado no mapeamento sem a introdução da perturbação.

² Define-se por bacia de atração o conjunto de todas as condições iniciais que levam a trajetória de um sistema para um determinado atrator (BAPTISTA, 1996).

A [Figura 10](#) mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov e uma comparação com o diagrama de bifurcações mostrado na [Figura 9](#). Através desse resultado verificou-se novamente que as regiões escuras do diagrama de bifurcações são as regiões caóticas, uma vez que, $\lambda > 0$. As outras regiões são ditas estáveis, uma vez que, $\lambda < 0$. Já nos pontos de bifurcação os expoentes de Lyapunov são iguais a zero, pois esses pontos identificam a troca de estabilidade. Com isso, pode-se concluir que os sistemas caóticos são sensíveis a perturbações, uma vez que, apresentam sensibilidade as condições iniciais. Por isso, os resultados mudam de acordo com a amplitude da perturbação.

É possível obter o controle de sistemas caóticos, para isso, é necessário, na maior parte das vezes, esperar que a trajetória do sistema atinja a vizinhança da órbita que deseja-se controlar. Porém, nesse trabalho não iremos explorar métodos de controle do caos.

Figura 10 – Comportamento dos expoentes de Lyapunov no diagrama de bifurcações com $\gamma = 6$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$ em (a) e (b).



Fonte: Elaborada pelo autor.

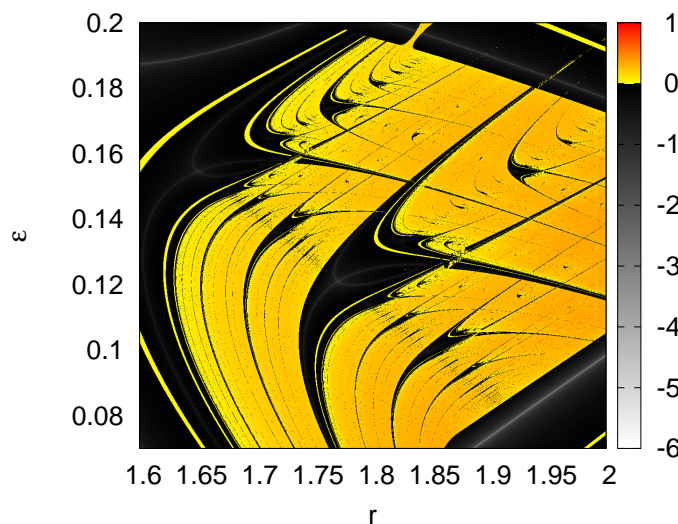
3.4 ESPAÇO DE PARÂMETROS DO MAPA SMITH E SLATKIN

Nessa etapa, nosso principal objetivo era construir o espaço de parâmetros para o mapeamento, para isso usou-se os expoentes de Lyapunov para discriminar entre o caos e a dinâmica regular. A construção do espaço de parâmetros exige um grande esforço computacional e é pouco conhecido na literatura, fazendo deste um tema importante para aprofundar as nossas investigações. A partir dos valores encontrados anteriormente para os expoentes de Lyapunov, foi construído o espaço de parâmetros r como uma função de ε com a finalidade de explorar as estruturas conhecidas como *shrimps* ou camarões ([OLIVEIRA et al., 2018](#)).

Considerando o mapeamento (1) para $\alpha = 1$ e $\gamma = 6$, a [Figura 11](#) mostra o espaço de parâmetros r como uma função de ε . As cores representam os expoentes de Lyapunov (λ), definidos pela equação (2.9). Para obter a [Figura 11](#), construímos uma grade de $10^3 \times 10^3$ combinações de r e ε . Para cada par de parâmetros de controle consideramos um transiente de 10^3 iterações. Depois disso, o expoente de Lyapunov foi calculado para as próximas 10^3 iterações. Na [Figura 11](#) podemos observar as estruturas periódicas conhecidas como *shrimps* ou camarões. Na paleta de cores podemos observar que os valores de λ negativos, são definidos pelas cores que vão de branco para preto. Já os expoentes de Lyapunov positivos representam as estruturas caóticas e na paleta de cores muda do amarelo para o vermelho.

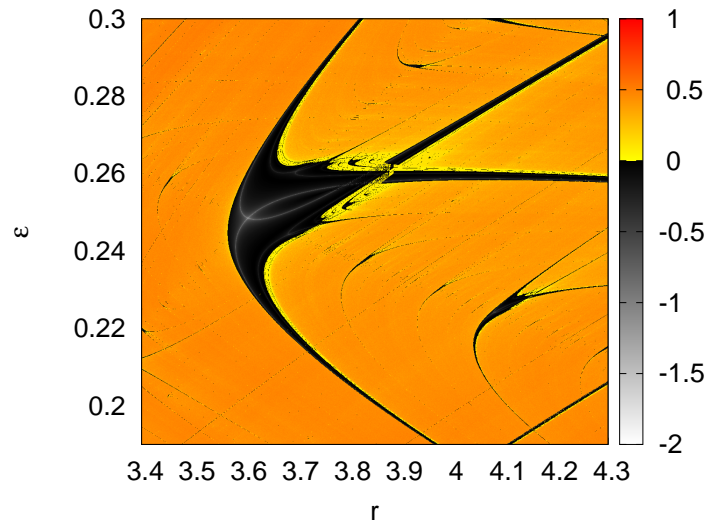
A [Figura 12](#), [Figura 13](#) e [Figura 14](#) mostram ampliações das estruturas apresentadas na [Figura 11](#). Ao fazer essas ampliações, encontramos estruturas camarões em paralelo e observamos que pode haver uma regularidade no aparecimento dessas estruturas, já que elas podem surgir alinhadas em algumas direções. Em todos os casos observamos pequenas mudanças qualitativas na geometria das estruturas.

Figura 11 – Espaço de parâmetros para: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$.



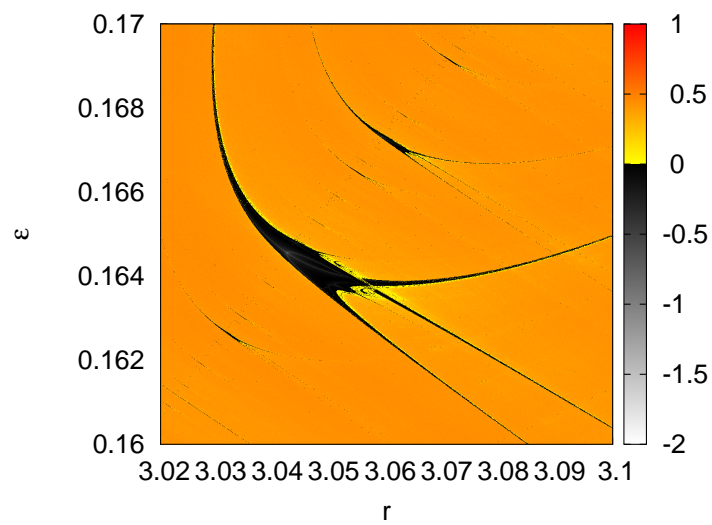
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Espaço de parâmetros para: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$.



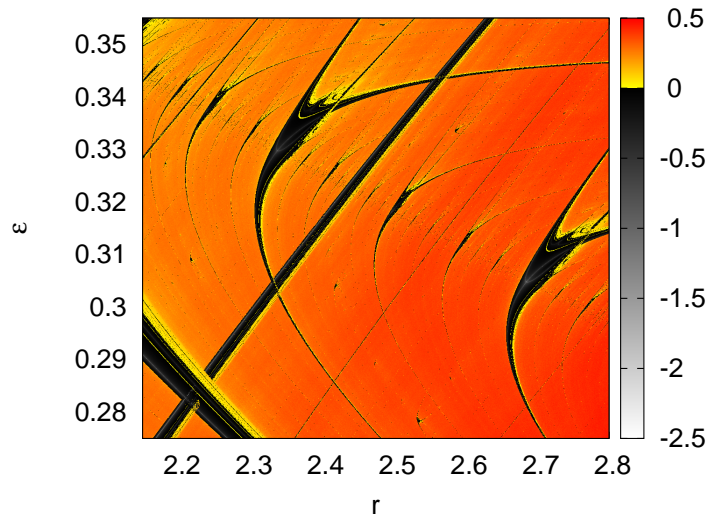
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Espaço de parâmetros para: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

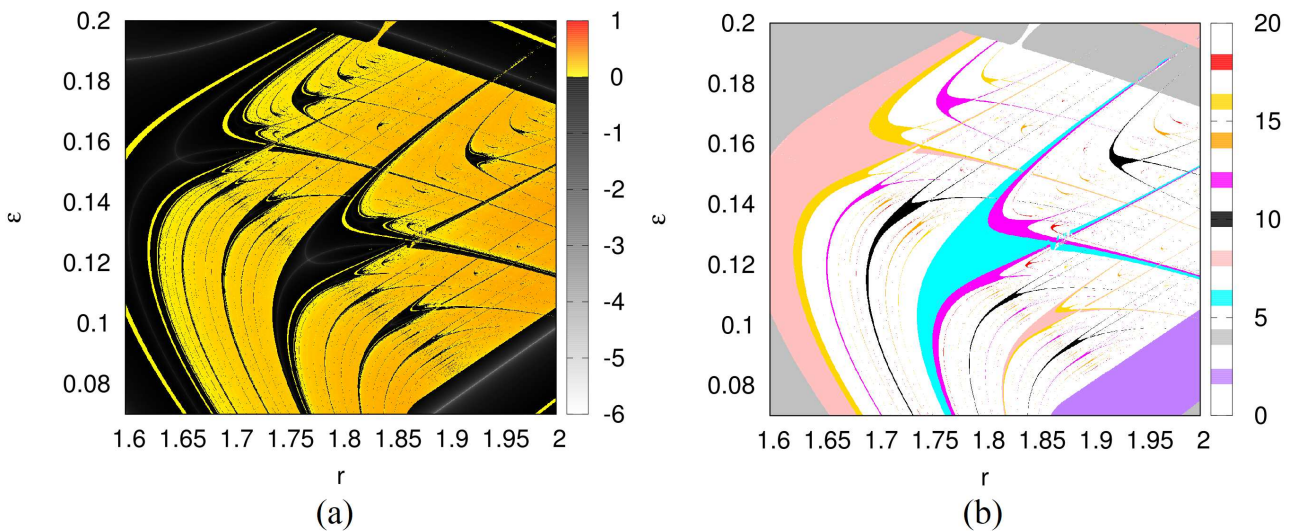
Figura 14 – Espaço de parâmetros para: $\gamma = 6$, $a = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como as estruturas camarões são estruturas periódicas, depois de investigar o espaço de parâmetros também foi necessário investigar o espaço de períodos para poder definir o período das estruturas camarões. O espaço de período foi obtido utilizando: $\gamma = 6$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0,01$ e $x_0 = 0,1$, que são as mesmas condições utilizadas anteriormente para construir os espaços de parâmetros.

Figura 15 – (a) Espaço de parâmetros e (b) Espaço de períodos.

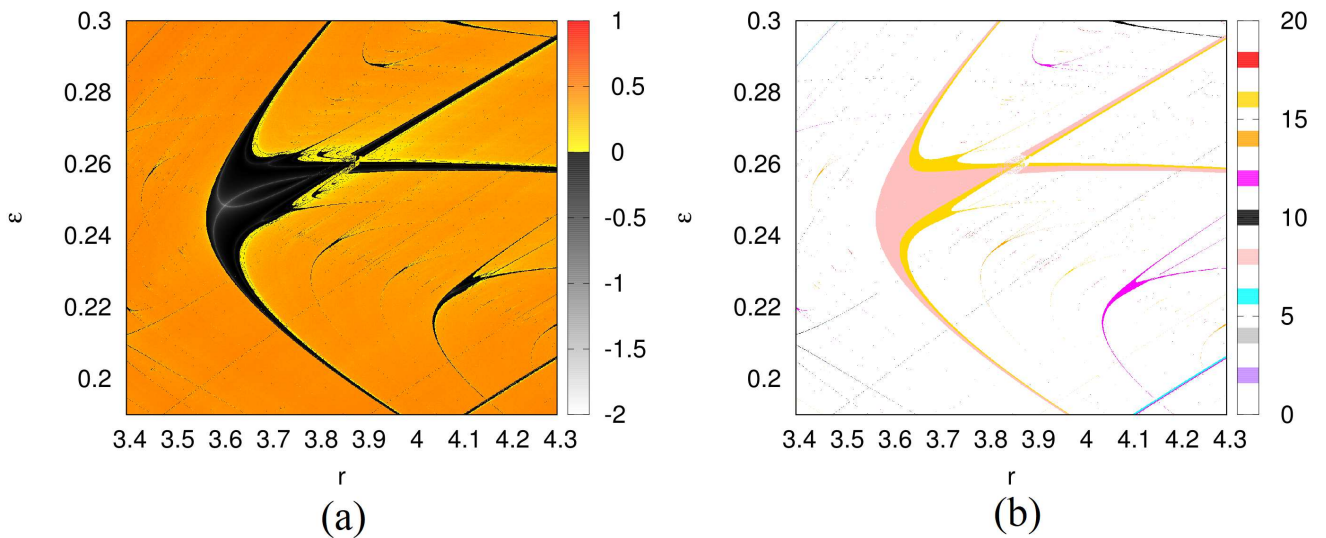


Fonte: Elaborada pelo autor.

A [Figura 15\(a\)](#) mostra o espaço de parâmetros apresentado anteriormente e a [Figura 15\(b\)](#) mostra o espaço de períodos para esse espaço de parâmetros, onde as cores indicam o número de períodos dos camarões apresentados. Com isso, é possível observar que cada estrutura camarão do espaço

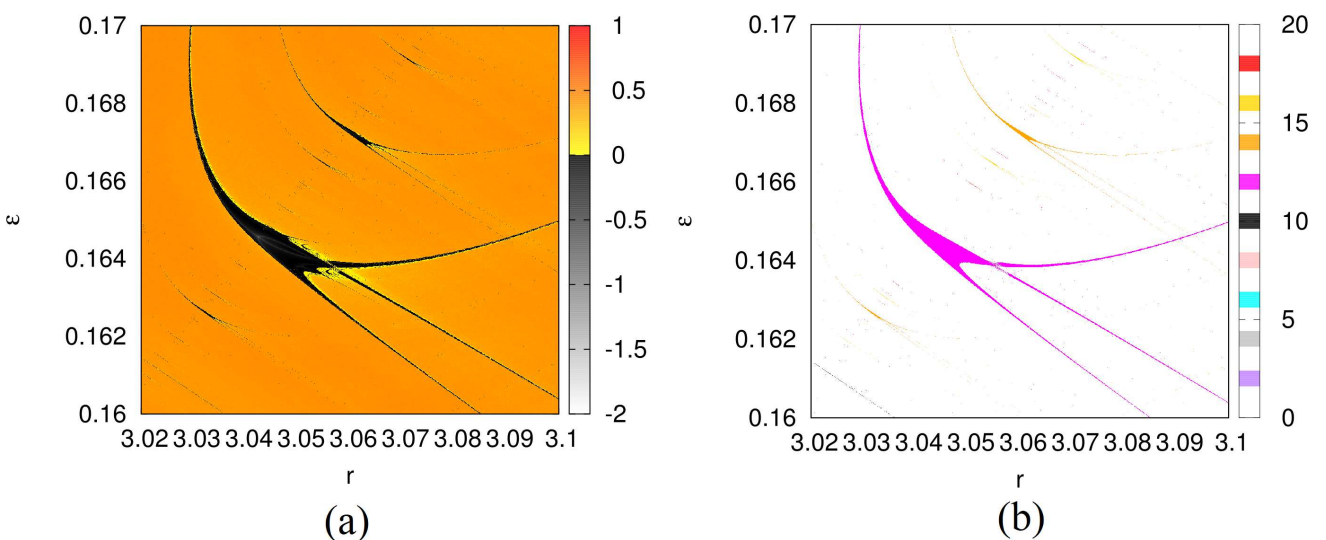
de parâmetros apresenta um período distinto o que mostra que há um alto nível de complexidade conforme os parâmetros são alterados. Também é possível observar que todas as estruturas camarões apresentaram apenas períodos pares, isso ocorre devido ao fato do parâmetro de controle γ também ser par, ou seja, $\gamma = 6$. A [Figura 16](#), [Figura 17](#) e [Figura 18](#) mostram ampliações dos espaços apresentadas na [Figura 15](#). Novamente observamos pequenas mudanças qualitativas na geometria das estruturas camarões.

Figura 16 – (a) Espaço de parâmetros e (b) Espaço de períodos.



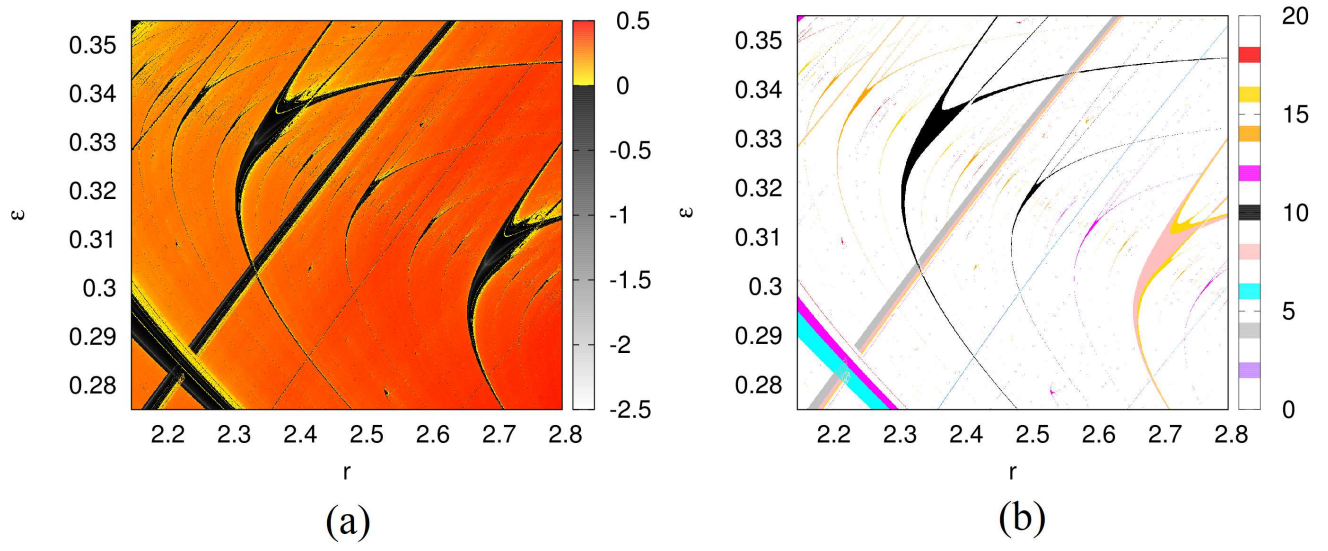
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – (a) Espaço de parâmetros e (b) Espaço de períodos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – (a) Espaço de parâmetros e (b) Espaço de períodos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 CIRCUITO DE CHUA

O circuito de Chua foi proposto por Leon Ong Chua, em 1983. A ideia era desenvolver um circuito elétrico que se comportasse de maneira caótica para demonstrar experimentalmente o comportamento caótico do sistema de Lorenz, refutando assim a ideia de que esse era apenas um fenômeno matemático (OLIVEIRA, 2016). As primeiras experiências realizadas, em uma versão simplificada, do circuito foram feitas por Matsumoto, onde ele utilizou simulações computacionais para provar a existência de caos no circuito (MATSUMOTO, 1985). Em 1985 foram obtidos os primeiros resultados experimentais utilizando esse circuito, sendo essa uma descoberta muito importante, já que foi a primeira confirmação experimental da existência do caos em circuitos elétricos (ZHONG; AYROM, 1985). Foi em Agosto desse mesmo ano que Takashi Matsumoto, Leon Chua e Motomasa Komuro publicaram o artigo "The Double-Scroll" (MATSUMOTO; CHUA; KOMURO, 1985), onde eles fizeram análises detalhadas dos atratores encontrados experimentalmente no circuito de Chua, utilizando os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos, o que fez com que o artigo fosse considerado um dos mais importantes da época.

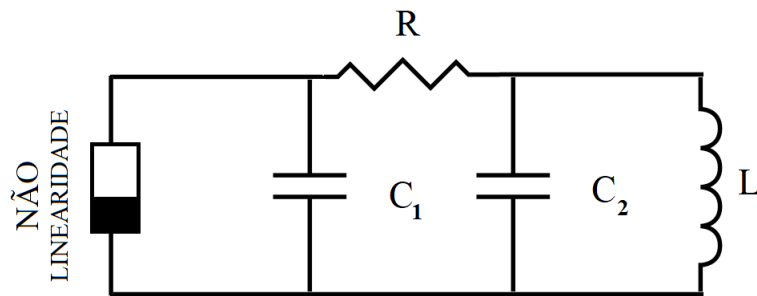
Então, para desenvolver um circuito caótico Chua projetou um circuito autônomo¹ com três pontos de equilíbrio instáveis, partindo da ideia de que os sistemas de Rossler e Lorenz tinham pelo menos dois pontos. Um circuito autônomo deve atender a três critérios para exibir um comportamento caótico, ou seja, ele deve conter:

1. Pelo menos um elemento não linear;
2. Pelo menos um resistor ativo localmente; e
3. Três ou mais elementos de armazenamento de energia.

O circuito de Chua é o circuito elétrico mais simples que atende a esses três critérios (KENNEDY, 1996). Ele é composto por uma rede de elementos lineares passivos: dois capacitores (C), um indutor (L) e um resistor (R) que estão conectados a uma resistência não linear, o diodo de Chua. O circuito de Chua se comporta como um oscilador eletrônico que possui uma não linearidade acoplada a um oscilador LC (PREBIANCA, 2014). A configuração do circuito pode ser vista na Figura 19 (VALERIO, 2014).

¹ Circuito que contém apenas elementos eletrônicos invariantes no tempo e com fontes de corrente constante (BAPTISTA, 1996).

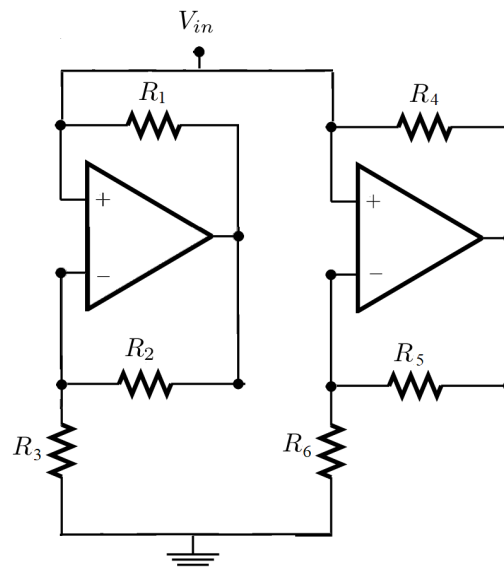
Figura 19 – Circuito de Chua



Fonte: Adaptado pelo autor, com base em (OLIVEIRA, 2016)

O diodo de Chua é uma função por partes, que possui três segmentos com inclinação negativa e três pontos de equilíbrio instáveis. Como a não linearidade do diodo é linear por partes, foi possível aos matemáticos da época estudá-lo analiticamente (OLIVEIRA, 2016). O diodo de Chua pode ser construído utilizando amplificadores operacionais (Amp-Ops), como mostra a Figura 20. O diodo Chua apresenta o efeito de uma resistência negativa do tipo NDC, ou seja, sua configuração facilita o fluxo de corrente elétrica, fornecendo energia para o sistema, funcionando assim como a fonte restauradora de energia do circuito (PREBIANCA, 2014).

Figura 20 – Combinação de Amp-Ops para o diodo de Chua.



Fonte: Adaptado pelo autor, com base em (OLIVEIRA, 2016)

Nesse sistema, o comportamento caótico acontece, pois o funcionamento periódico do sistema depende de um equilíbrio entre os circuitos e o resistor R. Se esse equilíbrio é instável ocorrerá o caos, assim como proposto por Chua (BONATTO; GALLAS, 2008). Porém, é possível projetar esse

circuito para ser estável, para isso deve-se substituir o indutor físico por um circuito que simulará o seu comportamento. A utilização desse indutor eletrônico torna o sistema mais robusto e estável (TORRES; AGUIRRE, 2000). O circuito de Chua é um dos poucos sistemas físicos não lineares que apresenta regimes caóticos por diferentes abordagens, como simulações computacionais, experimentais e análises matemáticas (JUNIOR, 2010; MITAL; KUMAR; PRASAD, 2019)

Aplicando a lei das malhas de Kirchoff no circuito de Chua apresentado na Figura 19, é possível obter as equações diferenciais que regem a dinâmica do circuito, como apresentado a seguir (JUNIOR, 2010):

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{1}{R}(V_{C2} - V_{C1}) - i_{R_1}(V_{C1}), \quad (4.1)$$

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{R}(V_{C1} - V_{C2}) + i_L, \quad (4.2)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{-V_{C2}}{L}. \quad (4.3)$$

Com isso, temos que V_{C1} , V_{C2} e i_L são as variáveis dinâmicas do sistema, sendo V_{C1} a tensão no capacitor C_1 , V_{C2} a tensão no capacitor C_2 e i_L a corrente que flui no indutor L e R é o parâmetro que define a resistência. Já a corrente elétrica que flui através do resistor não linear é i_{R_1} definida pela equação 4:

$$i_{R_1} = m_0 V_{C1} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|V_{C1} + \beta_p|) - |V_{C1} - \beta_p|, \quad (4.4)$$

onde m_0 é o valor que influencia na inclinação da parte central de i_{R_1} , m_1 o valor relacionado com as outras duas partes e β_p o fator de inclinação da curva i_{R_1} , como mostra a Figura 21.

Para reduzir o número de parâmetros e facilitar a análise é possível parametrizar as variáveis sem alterar a dinâmica do sistema (ROCHA; MARTINS-FILHO; MACHADO, 2006). As equações parametrizadas são definidas por:

$$x = \frac{V_{C1}}{\beta_p}, y = \frac{V_{C2}}{\beta_p}, z = \frac{Ri_L}{\beta_p}, \tau = \frac{t}{RC_2}. \quad (4.5)$$

Utilizando essas equações parametrizadas podemos reescrever as equações do circuito, como mostrado a seguir:

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha[-x + y - i_{R_n}(x)], \quad (4.6)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \quad (4.7)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -\beta y, \quad (4.8)$$

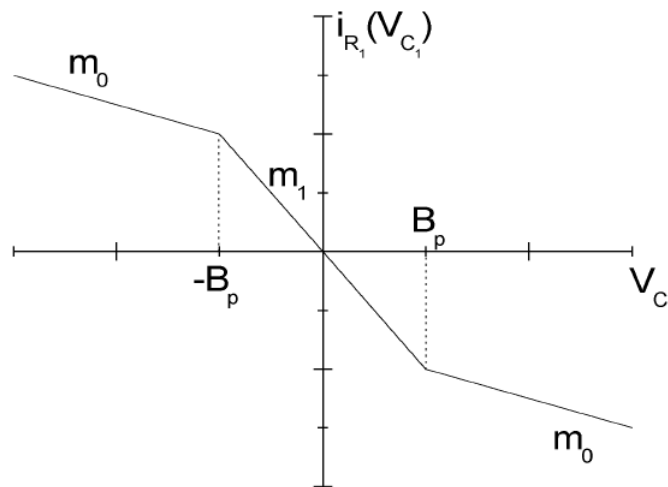
$$i_{R_n}(x) = a_0x + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|), \quad (4.9)$$

onde as variáveis a , b , α e β são definidas por:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, a = Rm_1 \text{ e } b = Rm_0.$$

A partir disso, o estudo será feito utilizando as equações parametrizadas.

Figura 21 – Curva característica da resistência linear por partes.



Fonte: Caos em equações diferenciais - Oscillations Control Group, Institute of Physics - University of São Paulo

O circuito de Chua possui uma dinâmica mais complexa do que aquela exibida pelos atratores de Lorenz ou de Rossler (RADWAN; FOUDA, 2015). Há quatro tipos de atratores que podem ser vistos nesse circuito:

- Ponto fixo;
- Ciclo limite ou periódico;
- *Single scroll* (único rolo);
- *Double scroll* (duplo rolo).

Para observar os atratores utilizamos o espaço de fases, que é uma importante ferramenta utilizada para evidenciar o comportamento caótico (VALERIO, 2014). O espaço de fases consiste de um sistema de coordenadas associado às variáveis que descrevem a dinâmica de um sistema. Como mencionado anteriormente, observar um atrator estranho no espaço de fases caracteriza o sistema como caótico. Nas figuras a seguir podemos observar o espaço de fases, associado às variáveis x e y , construído

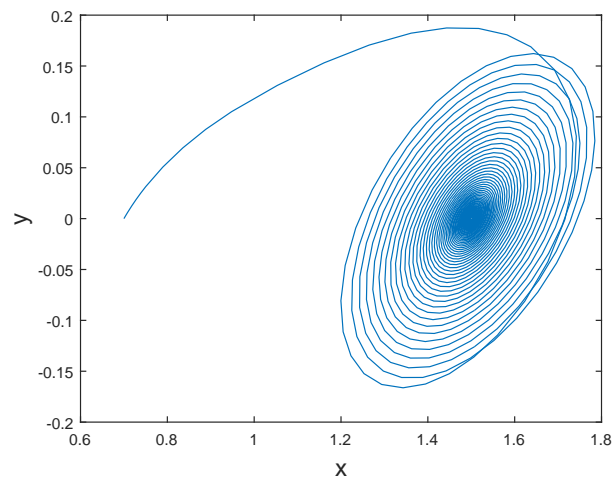
considerando $\beta = 28$, $a = -1,143$, $b = -0,714$, $x(0) = 0,7$, $b(0) = 0$, $z(0) = 0$ e diferentes valores de α .

Na [Figura 22](#), [Figura 23](#), [Figura 24](#) e [Figura 25](#) podemos observar o sistema oscilando de forma periódica, na [Figura 26](#) vemos um atrator *single scroll* e na [Figura 27](#) vemos um atrator *double scroll*.

A transição do comportamento *single scroll* para *double scroll* é chamada de crise interna, caracterizada pelo aumento abrupto da amplitude. Porém, alguns dos atratores caóticos encontrados no circuito de Chua não apresentam nenhuma relação com os atratores do sistema de Lorenz.

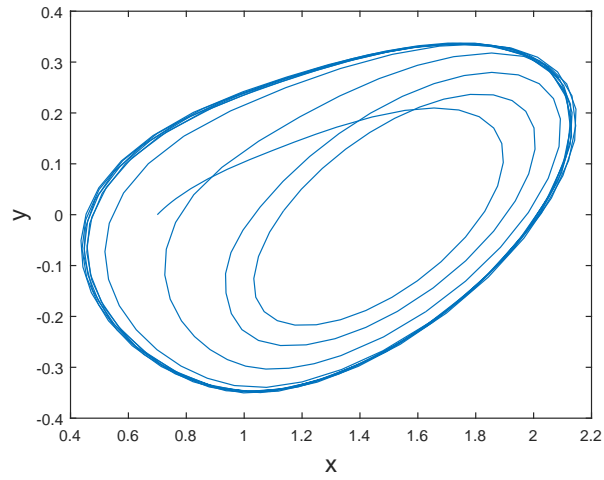
A partir dessas figuras, vemos que ao aumentar o valor de α o sistema passa a ter comportamento caótico. O *double scroll* define o atrator estranho ou caótico, na [Figura 27](#) vemos que as órbitas nunca repetem o mesmo caminho, porém são limitadas no espaço de fase e apresentam sensibilidade as condições iniciais.

Figura 22 – Espaço de fases xy para $\alpha = 9,4$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$.



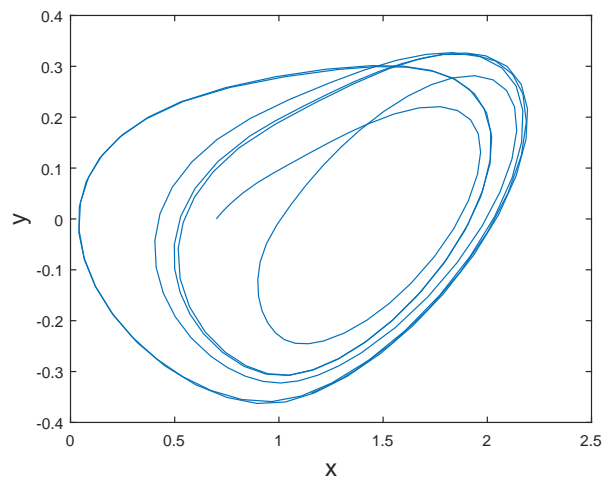
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 23 – Espaço de fases xy para $\alpha = 12,0$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$.



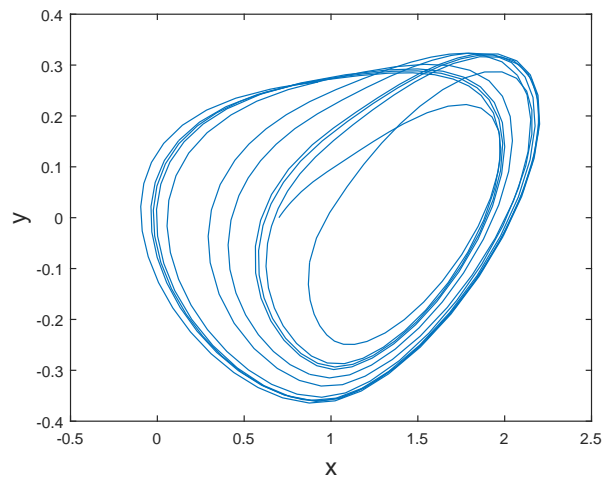
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24 – Espaço de fases xy para $\alpha = 13,4$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$.



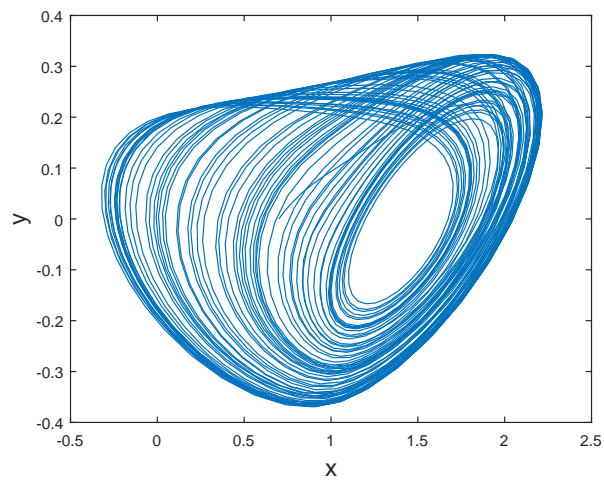
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 25 – Espaço de fases xy para $\alpha = 13,6$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$.



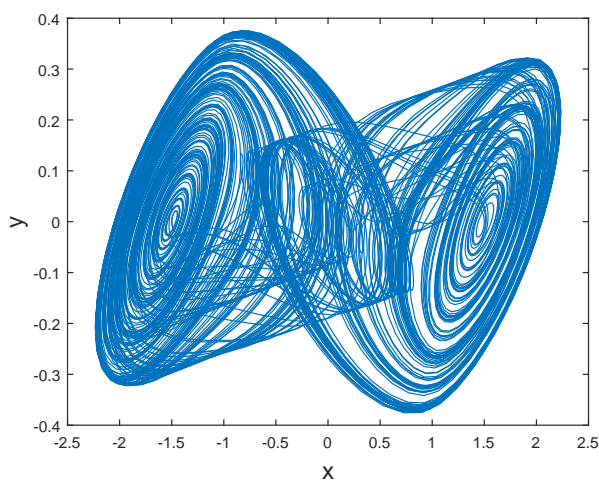
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 26 – Espaço de fases xy para $\alpha = 14,0$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 27 – Espaço de fases xy para $\alpha = 14,6$, $\beta = 28$, $x(0) = 0,7$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor

No estudo dinâmico do mapa Smith e Slatkin feito no Capítulo 2, observou-se que mesmo depois de atingir o caos, o sistema pode voltar a apresentar um comportamento periódico. Por isso, se continuarmos aumentando o valor do parâmetro α , o sistema irá novamente para uma condição de oscilação periódica e depois voltará novamente para um estado caótico.

Além do espaço de fases, também poderia ser gerado o diagrama de bifurcações e o espaço de parâmetros para esse circuito. Nesse caso, essas ferramentas poderiam ser usadas para dimensionar o valor dos parâmetros/componentes do circuito para que ele opere de maneira periódica ou caótica, dependendo da aplicação desejada para o circuito. Por isso, é interessante aplicar o estudo de propriedades de sistemas dinâmicos nesse circuito.

Esse circuito é um dos mais estudados atualmente devido a sua fácil implementação e aplicabilidade, podendo ser utilizado em aplicações de controle do caos e comunicação segura, áreas que têm crescido substancialmente nos últimos anos.

A criptografia constitui-se em uma importante aplicação para esse tipo de circuito (RADWAN; FOUADA, 2015), por causa da sensibilidade às condições iniciais, pode-se gerar diferentes chaves criptográficas variando apenas os parâmetros, o que torna a criptografia altamente segura e difícil de descriptografar. Sistemas criptográficos baseados no caos podem ser aplicados em comunicações seguras (MURILLO-ESCOBAR et al., 2015; MENDEZ-RAMIREZ et al., 2017), sistemas biométricos (ABUNDIZ-PÉREZ et al., 2016), em sistemas de medicina a distância (MURILLO-ESCOBAR et al., 2016) e geração de números aleatórios (SOUZA, 2018).

Foi na década de 90, depois da publicação do trabalho de Ott, Grebogi e York (OTT; GREBOGI; YORKE, 1990), que começou-se a estabelecer alguns princípios para a construção de sistemas de comunicação baseado em caos. A proposta do trabalho consistia em adicionar pequenas perturbações no sistema, com o intuito de alterar a evolução das trajetórias caóticas. Em (HAYES; GREBOGI; OTT,

1993), os mesmos autores mostraram que um sinal caótico pode ser empregado como uma forma de onda transmissora de informação.

4.2 APLICAÇÕES DE SISTEMAS CAÓTICOS NAS TELECOMUNICAÇÕES

Sistemas caóticos também são muito empregados na área das Telecomunicações (RAMIREZ, 2018), como, por exemplo:

- Design de Radares: A teoria do caos é usada para processar o sinal de retorno, gerar códigos binários, implementar sistemas codificados e implementar radares de sinal de ruído (SNR), como mostrado em: (LEUNG; LO, 1993)
- Antenas MIMO (*Multiple-Input-Multiple-Output*): essas antenas podem utilizar algoritmos baseado em caos, pois eles permitem otimizar a comunicação em um conjunto de antenas, como mostrado em: (FU et al., 2014);
- Antenas fractal: O projeto dessas antenas usa as entropias de Shannon, Rényi e Kolmogorov, que analisam e comparam a geometria fractal da antena e o desempenho físico, juntamente com suas principais propriedades, como mostrado em: (FIGUEROA-TORRES et al., 2017; GUARIGLIA, 2016);
- Ressonadores de microondas: O caos se manifesta em ressonadores de microondas, onde seu comportamento caótico imita o comportamento de uma bola em uma mesa de bilhar e estabelece experimentalmente um elo entre uma função da mecânica quântica e as trajetórias clássicas das ondas, como mostrado em: (STOCKMANN, 2013).

5 CONCLUSÃO

Inicialmente nosso foco foi investigar algumas propriedades dinâmicas no mapa Smith e Slatkin. Esse mapeamento é utilizado para descrever a dinâmica de populações biológicas e depende de parâmetros de controle. Foi através da variação de um desses parâmetros, o parâmetro r , que pôde ser observado, através do diagrama de bifurcações gerado, algumas regiões que apresentaram sensibilidade às condições iniciais, sendo assim classificadas como caóticas.

Para caracterizar o caos nesse sistema, utilizou-se os expoentes de Lyapunov, uma ferramenta matemática que permite verificar se duas trajetórias divergiram exponencialmente uma da outra com o decorrer do tempo. Ao realizar o cálculo desses expoentes, se pelo menos um for positivo significa que as trajetórias divergiram exponencialmente uma da outra, pois apresentaram sensibilidade a condição inicial imposta, definindo assim a região como caótica. Através dos resultados obtidos também foi possível observar que mesmo depois de atingir o caos uma região pode voltar a ser periódica conforme o parâmetro de controle for variado.

Depois disso, investigou-se numericamente o decaimento de órbitas para os pontos fixos perto do ponto de bifurcação do mapeamento, para isso foi necessário utilizar diferentes condições iniciais. Foi através do gráfico do decaimento de órbitas que encontrou-se o expoente de decaimento β , para isso aplicou-se uma lei de potência no decaimento e o resultado encontrado foi de $\beta = -0,16666640(1)$. Gerou-se também o gráfico do número de iterações de crossover n_x vs. a condição inicial x_0 e novamente junto com a lei de potência apropriada descobriu-se o valor do expoente $z = -5,99$. Ambos os expoentes são utilizados para definir a qual classe de universalidade a bifurcação pertence.

Discutiu-se também a dinâmica do sistema nos casos em que $\mu \neq 0$, para esse caso obteve-se o tempo de relaxação que pode ser descrito por uma lei de potência do tipo $\tau \propto \mu^\delta$, que resultou em $\delta = -1$.

Para confirmar os resultados obtidos numericamente através dos gráficos, foi feita uma descrição analítica do problema. Considerando primeiro ponto de bifurcação utilizamos uma descrição fenomenológica para provar que o decaimento para o ponto fixo pode ser descrito por uma função homogênea com três expoentes críticos $\alpha = 1$, $\beta = 1/\gamma$ e $z = -\gamma$. Através disso, observamos que esses expoentes podem ser relacionados entre si através de uma lei de escala dada por $z = \alpha/\beta$.

Utilizando essa relação, podemos concluir que os resultados analíticos confirmam os resultados obtidos numericamente. Esses resultados são originais e em 2018 foram publicados em forma de artigo na periódico indexado *Chaos, Solitons and Fractals* (OLIVEIRA; RAMOS; LEONEL, 2018) em anexo.

Posteriormente, introduzimos ao mapa de Smith e Slatkin uma perturbação paramétrica, com o intuito de observar o efeito que uma perturbação pode causar em um mapeamento. Através do diagrama de bifurcações observamos mudanças de bacias de atração causadas pela adição da perturbação, além

do surgimento de regiões caóticas. Utilizou-se novamente os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos. Com isso, concluiu-se que os sistemas caóticos são sensíveis a perturbações, uma vez que, apresentam sensibilidade as condições iniciais.

Os expoentes de Lyapunov também foram utilizados para construir o espaço de parâmetros do mapeamento, onde pudemos observar estruturas periódicas conhecidas como *shrimps* ou camarões. Para diferentes ampliações no espaço de parâmetros observamos que pode haver uma regularidade no aparecimento dessas estruturas, já que essas estruturas periódicas aparecem em paralelo nas ampliações envoltas por um mar de caos. Também foi observada pequenas mudanças qualitativas na forma geométrica das estruturas periódicas.

Como os *shrimps* são estruturas periódicas, construiu-se também o espaço de período dessas estruturas, onde observamos que mesmo estando em um mesmo espaço de parâmetro, essas estruturas podem apresentar períodos distintos e que o valor desses períodos irá depender dos parâmetros de controle utilizados.

Depois disso, vimos que esses conceitos podem ser aplicados em diversas áreas, o que torna esse tipo de estudo muito importante. A partir disso, escolhemos aplicar esses conceitos em um estudo teórico sobre o circuito de Chua, que é um circuito caótico muito estudado na literatura devido a sua boa reprodutibilidade e facilidade de implementação. Para confirmar que dependendo dos parâmetros utilizados esse circuito pode funcionar de maneira caótica gerou-se o espaço de fases variando o parâmetro α , nesse espaço pudemos observar os atratores. Vimos que para certo valor de α o atrator se tornou caótico, o que confirma o caos no circuito. Por conta desse comportamento caótico, esse circuito é muito utilizado em comunicações seguras, já que pode ser utilizado para gerar chaves criptográficas difíceis de serem descriptografadas.

Como perspectivas futuras, pode-se gerar o diagrama de bifurcações e espaço de parâmetros para esse circuito o que auxiliará na escolha dos componentes de acordo com a aplicação e comportamento desejados.

Com isso, concluímos que por conta da sua vasta aplicabilidade, o estudo de sistemas caóticos descritos por mapeamentos vêm crescendo cada vez mais, o que torna os temas tratados nesse trabalho atuais e de alta relevância.

REFERÊNCIAS

- ABUNDIZ-PÉREZ, F. et al. A fingerprint image encryption scheme based on hyperchaotic rössler map. **Mathematical Problems in Engineering**, 12 2016.
- ALBUQUERQUE, H.; RUBINGER, R.; RECH, P. Self-similar structures in a 2d parameter-space of an inductorless chua's circuit. **Physics Letters A**, v. 372, p. 4793–4798, 06 2008.
- BAPTISTA, M. da S. **Perturbando sistemas não lineares, uma abordagem ao controle do caos**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, Brasil, 1996.
- BOLLT, E. M. Targeting control of chaotic systems. **Lecture Notes in Control and Information Sciences**, v. 292, p. 1–24, 01 2003.
- BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C. Periodicity hub and nested spirals in the phase diagram of a simple resistive circuit. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 101, p. 054101, Aug 2008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.054101>.
- BOURKE, P. **Random Attractors Found using Lyapunov Exponents**. 2001. Disponível em: <http://paulbourke.net/fractals/lyapunov/>.
- CELESTINO, A. et al. Ratchet transport and periodic structures in parameter space. **Physical review letters**, v. 106, p. 234101, 06 2011.
- CESPEDES, A. M. **Termodinâmica do modelo Bouncer - um gás unidimensional simplificado**. 2015.
- CHEN, G.; YU, X. Chaos control. theory and applications. 11 2003.
- COSTA, D. D. et al. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimensional maps. **Physics Letters A**, v. 380, 03 2016.
- DOEBELI, M.; JONG, G. de. Genetic variability in sensitivity to population density affects the dynamics of simple ecological models. **Theoretical population biology**, v. 55, p. 37–52, 03 1999.
- FARAZMAND, A. Chaos and transformation theories: A theoretical analysis with implications for organization theory and public management. **Public Organization Review: A Global Journal**, v. 3, p. 339–372, 12 2003.
- FIGUEROA-TORRES, C. et al. A novel fractal antenna based on the sierpinski structure for super wide-band applications. **Microwave and Optical Technology Letters**, v. 59, p. 1148–1153, 05 2017.
- FU, X. et al. An improved chaos genetic algorithm for t-shaped mimo radar antenna array optimization. **International Journal of Antennas and Propagation**, v. 2014, 10 2014.
- GALLAS, J. Structure of the parameter space of the hénon map. **Physical review letters**, v. 70, p. 2714–2717, 06 1993.
- GLEICK, J. Chaos: Making a new science. In: _____. [S.l.: s.n.], 1987.

GUARIGLIA, E. Entropy and fractal antennas. **Entropy**, v. 18, 03 2016.

HAYES, S.; GREBOGI, C.; OTT, E. Communicating with chaos. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 70, p. 3031–3034, May 1993. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.3031>.

JUNIOR, E. R. V. **Espaços de Parâmetros para um Circuito Caótico Experimental**. Minas Gerais, Brasil: [s.n.], 2010.

KENNEDY, M. P. Três etapas para o caos - parte 1: Evolução. **Circuits and Systems, IEEE Transactions on**, v. 40, p. 640, 10 1996.

LEONEL, E. D. **Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares**. [S.l.: s.n.], 2019. v. 1. ISBN 9788521218517.

LEUNG, H.; LO, T. Chaotic radar signal processing over the sea. **IEEE Journal of Oceanic Engineering**, v. 18, p. 287–295, 08 1993.

LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and chaotic dynamics**. [S.l.]: Applied Mathematical Sciences, 1992.

LORENZ, E. Does a flap of a butterfly's wings in brazil set off a tornado in texas? 01 1972.

MATSUMOTO, T. A chaotic attractor from chua's circuit. **Circuits and Systems, IEEE Transactions on**, v. 31, p. 1055 – 1058, 01 1985.

MATSUMOTO, T.; CHUA, L.; KOMURO, M. The double scroll. **Circuits and Systems, IEEE Transactions on**, v. 32, p. 797, 09 1985.

MENDEZ-RAMIREZ, R. et al. A new simple chaotic lorenz-type system and its digital realization using a tft touch-screen display embedded system. **Complexity**, v. 2017, p. 1–13, 07 2017.

MITAL, P.; KUMAR, U.; PRASAD, R. S. Chua's circuit - a universal paradigm for generating and studying chaos. 11 2019.

MURILLO-ESCOBAR, M. et al. A robust embedded biometric authentication system based on fingerprint and chaotic encryption. **Expert Systems with Applications**, v. 42, p. 8198–8211, 07 2015.

MURILLO-ESCOBAR, M. et al. A novel pseudorandom number generator based on pseudorandomly enhanced logistic map. **Nonlinear Dynamics**, 09 2016.

NEDOREZOV, L.; SADYKOVA, D. Green oak leaf roller moth dynamics: An application of discrete time mathematical models. **Ecological Modelling**, v. 212, p. 162–170, 03 2008.

OLIVEIRA, C. M. Tulio Meneghelli de. **Estudo da dinâmica de um circuito de Chua com realimentação do tipo seno**. 2016.

OLIVEIRA, J. et al. Effects of a parametric perturbation in the hassell mapping. **Chaos, Solitons Fractals**, v. 113, p. 238–243, 08 2018.

OLIVEIRA, J.; RAMOS, L.; LEONEL, E. Dynamics towards the steady state applied for the smith-slatkin mapping. **Chaos, Solitons Fractals**, v. 108, p. 119–122, 03 2018.

- OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 64, p. 1196–1199, Mar 1990. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.1196>.
- PETERS, T. Thriving on chaos: Handbook for a management revolution. 01 1988.
- PREBIANCA, F. **Estudo de um circuito de Chua com realimentação do tipo seno**. Joinville, Santa Catarina - Brasil: [s.n.], 2014.
- RADWAN, A.; FOUADA, M. E. **On the Mathematical Modeling of Memristor, Memcapacitor, and Meminductor**. [S.l.: s.n.], 2015. v. 26.
- RAMIREZ, R. D. M. **Implementación de osciladores caóticos en sistemas embebidos y aplicaciones**. Ensenada, Baja California, México: [s.n.], 2018.
- ROCHA, R.; MARTINS-FILHO, L.; MACHADO, R. A methodology for the teaching of dynamical systems using analogous electronic circuits. **International Journal of Electrical Engineering Education**, v. 43, p. 334–345, 11 2006.
- ROCHA R., M.-F. L. S. e. M. R. F. Analogia eletrônica no ensino de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, p. 211–218, 2005.
- ROSA, F. F. e Jarbas André da. Teoria do caos: a ordem na não-linearidade. **Universo Acadêmico, Taquara**, v. 5, 01 2012.
- SMITH, J.; SLATKIN, M. The stability of predator-prey systems. **Ecology**, v. 54, p. 384–391, 03 1973.
- SOUZA, C. E. C. D. **Sistemas de comunicação digital baseados em atratores caóticos**. 2018.
- STOCKMANN, H.-J. Chaos in microwave resonators. **Progress in Mathematical Physics**, v. 66, 10 2013.
- STONE, L.; HART, D. Effects of immigration on the dynamics of simple population models. **Theoretical population biology**, v. 55, p. 227–34, 07 1999.
- STOOP, R.; BENNER, P.; UWATE, Y. Real-world existence and origins of the spiral organization of shrimp-shaped domains. **Physical review letters**, v. 105, p. 074102, 08 2010.
- SULLIVAN, T. The viability of using various system theories to describe organisational change. **Journal of Educational Administration**, v. 42, p. 43–54, 02 2004.
- TORRES, L.; AGUIRRE, L. Inductorless chua's circuit. **Electronics Letters**, v. 36, p. 1915 – 1916, 12 2000.
- VALERIO, L. R. **Dinâmica não linear e Caos – Circuito de Chua**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Alfenas, MG, Minas Gerais, Brasil, 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física).
- VILLATE, J. Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com máxima. 03 2006.

VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. A. C. Global structure of periodicity hubs in lyapunov phase diagrams of dissipative flows. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 84, p. 016216, Jul 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.016216>.

WHEATLEY, M. **Leadership and the New Science: Discovering Order in a Chaotic World Revised**. [S.l.]: San Francisco: Berrett-Koehler, 2001.

ZHONG, G.-Q.; AYROM, F. Experimental confirmation of chaos from chua's circuit. **International Journal of Circuit Theory and Applications**, v. 13, p. 93 – 98, 01 1985.



Review

Dynamics towards the steady state applied for the Smith-Slatkin mapping



Juliano A. de Oliveira^{a,b,*}, Larissa C. N. Ramos^b, Edson D. Leonel^a

^a Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Departamento de Física, Câmpus de Rio Claro, Av.24A, 1515, SP 13506-900, Brazil

^b Universidade Estadual Paulista (UNESP), Câmpus de São João da Boa Vista, Av. Profa., Isette Corrêa Fontão, 505, SP 13876-750, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 9 October 2017

Revised 20 December 2017

Accepted 23 December 2017

Keywords:

Smith–Slatkin mapping

Critical exponents

Scaling invariance

ABSTRACT

We derived explicit forms for the convergence to the steady state for a 1-D Smith–Slatkin mapping at and near at bifurcations. We used a phenomenological description with a set of scaling hypothesis leading to a homogeneous function giving a scaling law. The procedure is supported by numerical simulations and confirmed by a theoretical description. At the bifurcation we used an approximation transforming the difference equation into a differential one whose solution remount all scaling features. Near the bifurcation an investigation of fixed point stability leads to the decay for the stationary state. Simulations are made in the pitchfork, transcritical and period doubling bifurcations.

© 2018 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The pioneer application of nonlinear mapping for the investigation of population dynamics in biology is due to May [1]. After his publication many different contributions appeared. Applications of mappings are vast and can be seen in physics [2–6], chemistry, biology, engineering, mathematics and many others [7–17].

The investigation of stability of fixed points as well as conditions leading to bifurcations are well known [18–21]. Intermittence was investigated in Ref. [22] and led to interesting properties where a pseudo regularity along a chaotic dynamics is anticipating a tangent bifurcation giving birth to a periodic window, hence to regularity. It is known that the convergence to the fixed point at the bifurcation was proved to obey an homogeneous function characterized by a set of three critical exponents [23,24]. Near the bifurcations the dynamics converges to the steady state by means of an exponential decay [23] whose relaxation time is given by a power law for a bifurcation parameter. The set of critical exponents dictates the speed of convergence to the stationary point and can also be used to identify, whenever it is not possible analytically what type the bifurcation is. In this paper, we consider the Smith–Slatkin mapping, derived from applications in biology, and seek to obtain, understand and describe the critical exponents near the bifurcations. We implement different procedures to describe the dynamics and hence obtain the exponents. First we identify

where the bifurcations are. Then we investigate the convergence to the fixed point using numerical simulations. We consider and approximation that transforms the difference equation, near the fixed point, into a differential equation, and solve it analytically to compare the arguments with the corresponding scaling times. The critical exponents emerge naturally from such a procedure and are obtained for short and large times. Near the bifurcation we obtain the relaxation time to the steady state by using fixed point stability analysis. At the bifurcation the convergence is described by an homogeneous function while near the bifurcations an exponential decay explains how the steady state is reached.

The organization of the paper is simple. Section 2 describes the mapping, the numerical simulations as well as the analytical findings. Conclusions are shown in Section 3.

2. The model and scaling properties

The model we consider in this paper is a version of the Smith–Slatkin mapping, which is written as [25–28]

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{Rx_n}{1 + ax_n^\gamma}, \quad (1)$$

where R , a and γ are control parameters and we consider them to be non negative. The dynamical variable is represented by x when the index n denotes the iteration number. For the case of $\gamma = 1$ the Skellam model [28,29] is recovered. To give a glimpse of the orbit diagram, Fig. 1 was constructed for the parameters $\gamma = 6$, $a = 1$ for the initial condition $x_0 = 0.01$.

* Corresponding author.

E-mail address: julianoantonio@sjbv.unesp.br (J.A. de Oliveira).

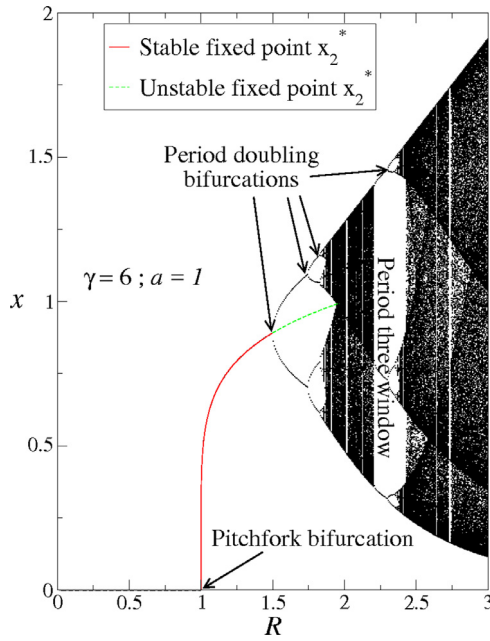


Fig. 1. Orbit diagram obtained for Eq. (1) using $\gamma = 6$, $a = 1$ and the initial condition $x_0 = 0.01$. Fixed point x_2^* is represented in red (stable) and green (unstable). Bifurcations as well as the main periodic window are identified in the diagram. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

The fixed points, obtained from the condition $x_{n+1} = x_n = x^*$ are: (i) $x_1^* = 0$, which is asymptotically stable for $R \in [0, 1)$, (ii) and (iii) deserve a short discussion first. For any odd γ , fixed points are: (ii) $x_{2,3}^* = \pm \left[\frac{R-1}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}$ while γ is of any other kind, even, irrational etc, we obtain (iii) $x_2^* = \left[\frac{R-1}{\gamma-2} \right]^{\frac{1}{\gamma}}$. Fixed points $x_{2,3}^*$ are asymptotically stable¹ for $R \in (1, \frac{\gamma}{\gamma-2})$, for $\gamma \neq 2$. A pitchfork supercritical bifurcation happens at $R = 1$ for an odd γ while a transcritical is observed at same R for any other value of γ . Red curve in Fig. 1 shows the stable fixed point x_2^* while green curve is a continuation of x_2^* however after a period doubling bifurcation where it is unstable. A period two orbit arises at $R = \frac{\gamma}{\gamma-2}$ following normal Feigenbaum scaling [30,31] after that.

Our first objective in this paper is to consider the convergence to the fixed point $x_1^* = 0$ at the bifurcation in $R = 1$. We shall show it obeys scaling properties leading different curves generated by different initial conditions to overlap onto each other, after appropriate scaling transformations, into a single and universal plot. Near the bifurcation, the convergence is so far described by an exponential decay whose relaxation time depend on the distance of the bifurcation. We use Taylor expansion near the fixed point, investigating the fixed point stability to prove it.

To illustrate how the dynamical variable evolves to the equilibrium at a bifurcation, we considered $R = 1$, $\gamma = 6$, $a = 1$ and different initial conditions for x_0 . Fig. 2(a) shows the convergence to the fixed point $x_1^* = 0$. We see that for short n , the orbit stays confined in a regime of seemingly constant plateau. After a while eventually it suffers a changeover at a typical crossover iteration number denoted as n_x and ultimately bends towards a regime of decay to its final state x^* .

The scaling properties extracted from Fig. 2(a) are the following: (i) For a short $n \ll n_x$ we notice $x(n) \propto x_0^\alpha$, leading us to con-

¹ By asymptotically stable we mean that given an initial condition inside of the basin of attraction of the fixed point, in the limit of $\lim n \rightarrow \infty$, the orbit has a final state at x^* , hence converging to the fixed point.

clude that $\alpha = 1$ since $x(n) \propto x_0$; (ii) For large enough n , typically $n \gg n_x$, the dynamical variable is described as $x(n) \propto n^\beta$ where β is a decay exponent which depends on the nonlinearity of the mapping γ . For $\gamma = 6$ we obtained from fitting numerically the data an exponent $\beta = -0.16666320(8)$, as shown in the decaying regime of Fig. 2; (iii) Finally, the crossover iteration number n_x is given by $n_x \propto x_0^z$ where z is a changeover exponent.

A homogeneous function of the type

$$x(x_0, n) = lx(l^{\tilde{a}}x_0, l^{\tilde{b}}n), \tag{2}$$

is a natural consequence of the behavior observed from Fig. 2(a) as well as from the scaling hypotheses. Here l is a scaling factor, \tilde{a} and \tilde{b} are characteristic exponents. Doing a similar procedure as made in Ref.[23] a scaling law appears as

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{3}$$

The knowledge of any two exponents allows one to find the third by using Eq. (3). The relevant scaling transformations to be made are $x \rightarrow x/x_0^\alpha$ and $n \rightarrow n/x_0^z$, leading to a perfect overlap of all curves shown in Fig. 2(a) onto a single and hence universal curve, as shown in Fig. 2(b).

When the dynamical variable $x(n)$ is very close to the equilibrium, the expression $x_{n+1} = Rx_n(1 + ax_n^\gamma)^{-1}$ can be Taylor expanded leading to $x_{n+1} = Rx_n(1 - ax_n^\gamma)$. Moreover its variation as compared to the next iterate to be very small, i. e., $x_{n+1} - x_n$ is small enough. Such property allows us to use the following approximation $x_{n+1} - x_n \cong \frac{df}{dn}$. For $R = 1$, this leads to $\frac{df}{dn} = -ax^{\gamma+1}$. This is a first order differential equations that must be solved for the ranges $x \in [x_0, x(n)]$ and n starting from $n = 0$. The solution is written as

$$x(n) = \frac{x_0}{[1 + a\gamma x_0^\gamma n]^{\frac{1}{\gamma}}}. \tag{4}$$

Eq. (4) allows us to do the following analysis: (i) when $a\gamma x_0^\gamma n \ll 1$, we have $x(n) \cong x_0$, therefore leading to $\alpha = 1$; (ii) For the case of $a\gamma x_0^\gamma n \gg 1$ we end up with $x(n) \approx n^{-1/\gamma}$, hence $\beta = -1/\gamma$; (iii) for the case $a\gamma x_0^\gamma n_x = 1$ we have $n_x \propto x_0^{-\gamma}$, therefore $z = -\gamma$. All of these findings are giving support for the numerical simulations. Eq. (4) is plotted in Fig. 2(a) as dashed lines and we see the agreement between the numerical an analytical description is remarkable.

Near the bifurcation the dynamics is not described anymore by an homogeneous function. Instead of it the convergence is described rather by an exponential decay of the type (see Refs. [32,33])

$$x(n) - x^* = (x_0 - x^*)e^{-n/\tau}, \tag{5}$$

where τ is the relaxation time described by

$$\tau \propto \mu^\delta, \tag{6}$$

and δ is a relaxation exponent. Fig. 3 shows the behavior of τ vs. μ given an exponent $\delta = -0.9879(4) \cong -1$, obtained by a numerical fitting of the data, and this result is invariant with respect to the parameter γ .

Let us now describe the convergence to the steady state when $R \neq 1$, therefore near the bifurcation. There is no difference on the procedure considering before or after the bifurcation. We shall consider the neighborhood of $R = R_c = 1$, where the index c denotes the critical, i.e., the bifurcation parameter. Starting from an initial condition near the fixed point we have $x_0 = x^* + \epsilon_0$, where x^* denotes the fixed point and ϵ_0 corresponds to an initial distance from the fixed point. Since the mapping is given by $x_{n+1} = f(x_n)$, we have that $x_1 = f(x^* + \epsilon_0)$. Since ϵ_0 is sufficiently small, a Taylor

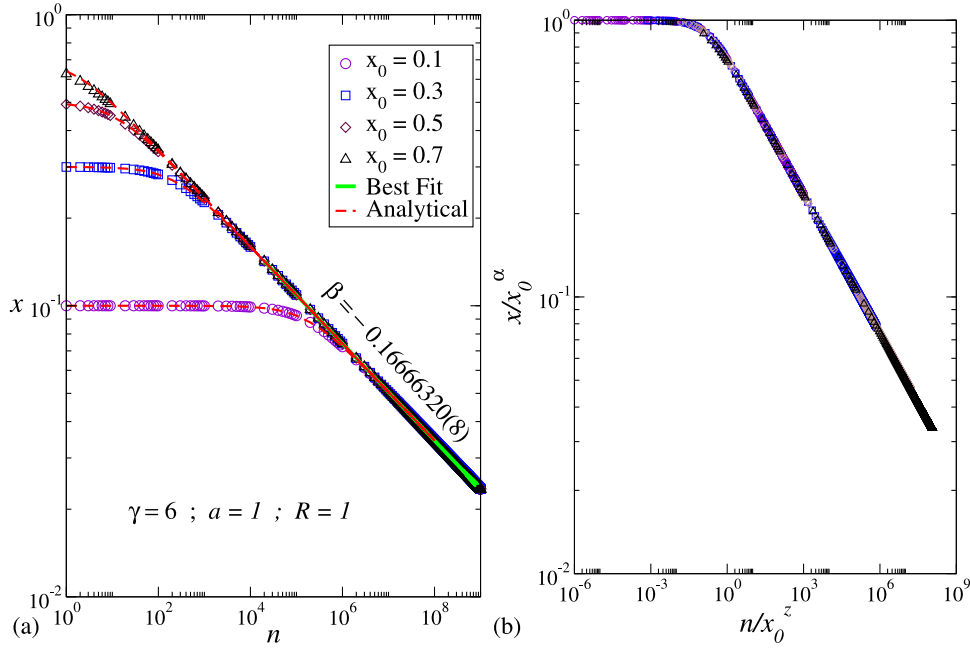


Fig. 2. (a) Plot of the convergence towards the steady state $x_1^* = 0$, at $R = 1$ for $\gamma = 6$, $a = 1$ and considering different initial conditions as labeled in the figure. Dashed curves (red) correspond to the analytical result and the line (green) corresponds to the fitting of the decay. (b) Overlap of the curves shown in (a) onto a single and universal plot. The scaling transformations used are $x \rightarrow x/x_0^\alpha$ and $n \rightarrow n/x_0^z$. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

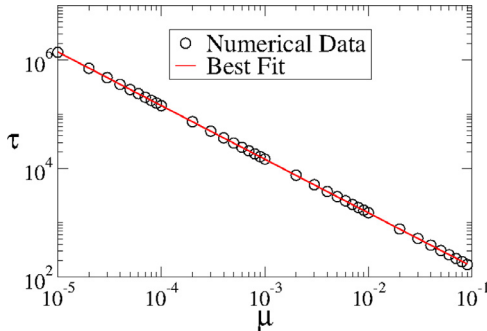


Fig. 3. Plot of τ vs. μ for the control parameters $\gamma = 6$ and $a = 1$. A power law fitting gives $\delta = -0.9879(4)$ and correlation coefficient $c_f = -0.9999966$. It is invariant with respect to γ .

expansion to the expression of f gives

$$x_1 = f(x_0) = f(x^*) + \epsilon_0 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} + \frac{\epsilon_0^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x^*} + \dots \quad (7)$$

Keeping only first order and from the fixed point condition $f(x^*) = x^*$ we have $x_1 - x^* = \epsilon_1 = \epsilon_0 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*}$. When going further to the second iterated of the mapping we obtain $\epsilon_2 = \epsilon_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*}$ that may be rewritten in a convenient way as $\epsilon_2 = \epsilon_0 \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} \right)^2$. Generalizing for the iterated n we have

$$\epsilon_n = \epsilon_0 \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} \right)^n \quad (8)$$

The condition $-1 < \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} < 1$ warrants convergence to the stationary state. Let us now consider a specific case. Fixed point $x_1^* = 0$ and $R < 1$ but close to one with $R_c = 1$. The distance from the fixed

point at iterated n can be written in a convenient way as

$$\epsilon_n = \epsilon_0 e^{\ln \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} \right]^n} \quad (9)$$

where $\epsilon_n = x_n - x^*$. Since for $x_1^* = 0$ we have $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} = R$, then $\epsilon_n = \epsilon_0 e^{n \ln(R)}$. Let us now write $R = R_c - \mu$ where μ gives the distance from the bifurcation. $R_c = 1$ identifies the bifurcation parameter. Substituting the expression of R in $\ln(R)$ we have

$$\begin{aligned} \ln(R) &= \ln(R_c - \mu), \\ &= \ln \left[R_c \left(1 - \frac{\mu}{R_c} \right) \right], \\ &= \ln(R_c) - \frac{\mu}{R_c}, \end{aligned} \quad (10)$$

where the last expression comes from Taylor expansion. The leading term is then written as

$$\epsilon_n = \epsilon_0 e^{-\mu n} \quad (11)$$

Because the term $\epsilon_n = x_n - x^*$ and $\epsilon_0 = x_0 - x^*$ an immediate comparison with Eq. (5) can be made. We conclude that $\delta = -1$, in well agreement with Fig. 3.

The procedure made for $R = 1$ can also be made at the period doubling bifurcation as well no matter if first, second or any other order of the period doubling bifurcation. For the first period doubling, the mapping must be iterated twice. For the second period doubling bifurcation, the mapping must iterated four times and so on. Our results for the case of $R = \frac{\gamma}{\gamma-2}$, i.e., at the first period doubling bifurcation gives $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$, $z = -2$ and $\delta = -1$.

3. Conclusions

As a short summary we have investigated the convergence to the steady state in a 1-D Smith-Slatkin mapping near three bifurcations: (i) a pitchfork for γ odd; (ii) transcritical for any other γ , which leads to similar results as of case (i) and; (iii) period

doubling bifurcation, no matter the order considered for the bifurcation. At the bifurcation the decay is described by homogeneous function leading to three critical exponents $\alpha = 1$, $\beta = -1/\gamma$ and $z = -\gamma$. The relevant scaling law describing the invariance is $z = \alpha/\beta$. Near the bifurcation the convergence to the fixed point is given by an exponential decay and the relaxation time is described by a power law of the type $\tau \propto \mu^\delta$, with $\delta = -1$ independent of the three bifurcations considered. Such exponent was obtained via fixed point investigation.

The procedure discussed here is an extension of the results presented in Ref. [23]. Generalizations for other mappings, particularly for the case of 2-D can be made. For such type of mappings, the convergence is observed in a plane. One has to find convenient variables, possible the distance from the fixed point - polar coordinates is a natural candidate since the convergence spirals around the fixed point - and describe in such coordinates the evolution towards the steady state. With this set of variables the scaling should emerge easily.

Acknowledgments

JAO thanks CNPq (421254/2016-5) (311105/2015-7) and FAPESP(2014/18672-8). LCNr thanks PROPe/UNESP and FAPESP (2017/17294-8). EDL acknowledges support from CNPq (303707/2015-1), FAPESP (2017/14414-2) and FUNDUNESP.

References

- [1] May RM. *Science* 1974;86:645.
- [2] Grebogi C, Ott E, Yorke JA. *Phys Rev Lett* 1982;48:1507. *Physica D* 7 (1983), 181.
- [3] Pounder JR, Rogers TD. *Nonlinear Anal Theor Methods Appl* 1986;10:415.
- [4] Joglekar M, Ott E, Yorke A. *Phys Rev Lett* 2014;113. 084101.
- [5] Gallas JAC. *Phys Rev Lett* 1983;70:2714.
- [6] Collet P, Eckmann J-P. *Iterated maps on the interval dynamical systems*. Boston, MA: Birkhauser; 1980.
- [7] May RM, Oster GA. *Am Nat* 1976;110:573.
- [8] Hamacher K. *Chaos* 2012;22:033149.
- [9] McCartney M. *Chaos* 2012;21:043104.
- [10] Philominathan P, Santhiah M, Mohamed IR, et al. *Int J Bifurcations Chaos* 2011;21:1927.
- [11] Santhiah M, Philominathan P. *Pramana J Phys* 2010;75:403.
- [12] Zhang Y-G, Zhang J-F, Ma Q, et al. *Int J Nonlinear Sci Numer Simul* 2010;11:157.
- [13] Wen H, Guang-Hao Z, Gong Z, et al. *Acta Physica Sinica* 2012;17:170505.
- [14] Urquizu M, Correig AM. *Chaos, Solitons Fractals* 2007;33:1292.
- [15] Livadiotis G. *Adv Complex Syst* 2005;8:15.
- [16] Ilhem D, Amel K. *Discrete Dyn Nat Soc* 2006;2006. Article ID 15840.
- [17] Li TY, Yorke JA. *Am Math Monthly* 1975;82:985.
- [18] Martelli M. *Introduction to discrete dynamical systems and chaos*. New York: Wiley; 1999.
- [19] Devaney RL. *A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experiment (studies in nonlinearity)*. Westview Press; 1992.
- [20] Galor O. *Discrete dynamical systems*. Heidelberg: Springer; 2007.
- [21] Devaney RL. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Cambridge: Westview Press; 2003.
- [22] Hirsch JE, Huberman BA, Scalapino DJ. *Phys Rev A* 1982;25:519.
- [23] Teixeira RMN, Rando DS, Geraldo FC, Filho RNC, de Oliveira JA, Leonel ED. *Phys Lett A* 2015;379:1246.
- [24] Leonel ED, Teixeira RMN, Rando DS, Filho RNC, de Oliveira JA. *Phys Lett A* 2015;379:1796.
- [25] Maynard Smith J, Slatkin M. *Ecology* 1973;54:384.
- [26] Stone L, Hart D. *Theor Popul Biol* 1999;55:227.
- [27] Doebeli M, Jong G. *Theor Popul Biol* 1999;55:37.
- [28] Nedorezov LV, Sadykova D. *Ecol Modell* 2008;212:162.
- [29] Skellam JG. *Biometrika* 1951;38:196.
- [30] Feigenbaum MJ. *J Stat Phys* 1979;21:669.
- [31] Feigenbaum MJ. *J Stat Phys* 1978;19:25.
- [32] Leonel ED, da Silva JKL, Kamphorst SO. *Int J Bifurcation Chaos* 2002;12:1667.
- [33] Hohenberg PC, Halperin BI. *Rev Mod Phys* 1977;49:435.