

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO” - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA CAMPUS ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Controle de Movimentos de Pacientes Paraplégicos Utilizando Modelos Fuzzy T-S

Candidato: Ruberlei Gaino

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Co-Orientador: Aparecido Augusto de Carvalho

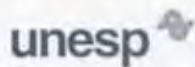
Tese Apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da Universidade
Estadual de Paulista- “Júlio Mesquita Filho”-
UNESP, CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA , para
preenchimento dos pré-requisitos parciais para
obtenção do Título de Doutor em Engenharia
Elétrica.

Ilha Solteira, SP
Julho, 2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

- G142c Gaino, Ruberlei.
 Controle de movimentos de pacientes paraplégicos utilizando modelos
 fuzzy T-S / Ruberlei Gaino. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2009.
 178 f. : il.
- Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
 Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2009
- Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
 Co-orientador: Aparecido Augusto de Carvalho
 Bibliografia: p. 168-173
1. Sistemas de controle linear. 2. Sistemas difusos. 3. Paraplégicos.
 4. Eletroestimulação. 5. Engenharia biomédica.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

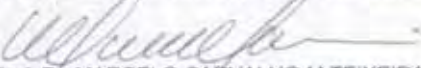
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

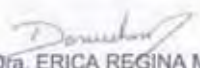
TÍTULO: Controle de Movimentos de Pacientes Paraplégicos Utilizando Modelos Fuzzy T-S

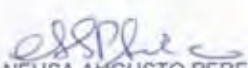
AUTOR: RUBERLEI GAINO

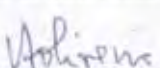
ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR em ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Profa. Dra. ERICA REGINA M D MACHADO
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Profa. Dra. NEUSA AUGUSTO PEREIRA DA SILVA
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Profa. Dra. VILMA ALVES DE OLIVEIRA
Depto. de Engenharia Elétrica / Escola de Engenharia de São Carlos - USP


Prof. Dr. WALTER GERMANOVIX
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina

Data da realização: 26 de junho de 2009.

Dedico aos meus avós (in memorian), pais, esposa e aos futuros filhos e netos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que me deu força e vontade para superar todos os obstáculos encontrados no caminho até chegar a este momento, sem sua vontade eu nada seria.

Aos meus suportes e exemplos morais desta vida: meus pais Jair e Darci. À minha esposa, amiga e companheira Ana Paula, aos meus sogros Ivonete e Ilton sempre presentes ajudando-nos e por último as cunhadas Fabiana e Alessandra presente até demais.

À família espiritual, agradeço pelo apoio, incentivo e carinho sempre presentes. Um agradecimento especial a Dona Judite e sua família que nos acolheram como filhos e nos deram preciosos conselhos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por participar diretamente da minha formação científica, pela amizade, humildade, altruísta em seus ensinamentos, competência e ajuda nos momentos mais decisivos da tese.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho, pela amizade, humildade, empenho, espírito nobre, correto e altruísta, que me deram muitos ensinamentos de formação pessoal.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelas suas dicas de organização, ajuda com o *Latex*, *Matlab* e teoria de controle digital.

Aos colegas de laboratório como Cardim que ajudou-me em muitas análises teóricas e simulações com os sistemas não-lineares, a Prof. Dr.(a) Erica, ajudou-me em vários momentos a passar por esta fase do doutorado, aos alunos de iniciação científica do Prof. Aparecido que convivemos quase dois anos no laboratório de sensores II: Douglas, Lucas, Fabrício, Marquinhos e Renan. Estes ajudaram muito com auxílio na instrumentação, problemas de informática em geral, desenvolvimento do programas no software Labview 8.20, projeto de condicionamento de sinais da cadeira ergonômica para pacientes, projetada e construída pelo amigo Flávio Sato. Agradecimento especial ao aluno Neto que em seu trabalho de formatura trouxe-nos uma visão diferente que propiciou a continuação dos trabalhos de dois outros grandes amigos que fiz na pós, o Thiago e o Sanches, juntos trabalhamos e aprendemos muito. Esses foram meus contatos diretos, mas muitos outros participaram desta fase que agradeço a Deus por vocês terem me ajudado muito.

Gostaria de deixar registrado, um agradecimento a Dr.(a) Regina Cubo fisioterapeuta e

docente há mais de 18 anos, que em breve contato, nos ensinou com sua simplicidade a responsabilidade do ser humano na pesquisa, no intuito de que não fosse escrito um milagre, mas sim pequenos passos nessa área fisiológica.

Uma pessoa especial na vida de minha família é nosso médico e advogado amigo Dr. Carlos Ruy Miksche (in memorian), que em muitas conversas em seu consultório, puxava antigos livros de anatomia de seus professores da USP, para nos ensinar sem hora para terminar, esse foi o grande incentivo para trabalhar junto à medicina.

Aos professores, técnicos e demais funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica e da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, que propiciaram a infra-estrutura necessária para a realização deste trabalho. Em particular dois funcionários que são exemplos de ajuda ao próximo, o João Josué Barbosa e sua esposa Célia Regina de Souza Barbosa, ambos trabalham na Biblioteca da FEIS-UNESP, estes demonstram mais por atos do que palavras como é possível e simples ajudar os alunos.

Agradecimentos ao prof. Dr. Eduardo Lázaro Martins Nave da UFG, Departamento de Ciência da Computação do Campus Avançado de Catalão, que enviou-me a sua tese de doutorado, como também o modelo do músculo no software Matlab/SIMULINK. Esta tese tem excelentes tópicos bem redigidos do livro “Biomechanics of Musculoskeletal System”. Algumas seções do capítulo 2, foram baseados na tese do prof. Eduardo e do livro citado acima.

Finalmente, ao CNPq, pelo auxílio financeiro dado a esta pesquisa e a Universidade Estadual de Londrina com seu departamento de Engenharia Elétrica lotado no Centro de Tecnologia e Urbanismo, pela licença de quatro anos para capacitação. Agradeço a todos que acreditaram que eu poderia fazer um trabalho de doutorado.

“Devemos julgar um homem mais pelas suas perguntas que pelas respostas. ”

Voltaire

“A ambição é o puro senso de dever pois a si só não produz frutos realmente importantes para a pessoa humana, pelo contrário os frutos verdadeiros derivam do amor e da dedicação para com as pessoas e as coisas. ”

Albert Einstein

Tese Apresentada à Universidade Estadual de Paulista-“Júlio Mesquita Filho”-UNESP,
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA, como parte dos pré-requisitos necessários à obtenção
do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Controle de Movimentos de Pacientes Paraplégicos Utilizando Modelos Fuzzy T-S

Ruberlei Gaino

Candidato: Ruberlei Gaino

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Co-Orientador: Aparecido Augusto de Carvalho

Área de Concentração: Automação e Controle

Palavras Chaves: Controle Não-Linear, Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno, Paraplegia,
Eletroneuroestimulação, Engenharia de Reabilitação

Números de Páginas: 178 páginas

Resumo

Foram realizados estudos, projetos e simulações do controle não-linear da posição da perna de um paraplégico, com eletroestimulação, utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S). Nessa pesquisa, foi adotado um modelo matemático que utiliza uma relação empírica do torque do músculo com a largura de pulso, representada por uma função de transferência de primeira ordem. A modelagem da dinâmica do modelo do paciente paraplégico foi realizada com variáveis de estado. Projetou-se um regulador fuzzy (T-S), inicialmente no ponto de operação com a posição da perna em 30° , utilizando-se a teoria de Lyapunov para o estudo da estabilidade dos sistemas dinâmicos e o projeto do controlador baseado em desigualdades matriciais lineares (Linear Matrix Inequalities, LMI). As especificações consideradas neste projeto foram a estabilidade, a taxa de decaimento e restrições nos sinais de entrada e saída. Foi também projetado um observador de estado e regulador com observador de estado, todos não-lineares e contínuos no tempo, para o paciente paraplégico, também baseado em LMI, no ponto de operação com a posição da perna em 60° . Devido à necessidade de implementação em hardware, um modelo discretizado foi proposto, para a obtenção de modelos fuzzy Takagi-Sugeno discretos no tempo, a partir de modelos fuzzy Takagi-Sugeno contínuos no tempo, considerando períodos de amostragem suficientemente pequenos. Análises teóricas e simulações digitais comprovaram a sua eficácia. Reguladores com observadores contínuos no tempo, considerando o rastreamento da posição da perna de um paraplégico e uso de variáveis virtuais foram também propostos. Neste projeto, pôde-se variar a posição angular desejada sem a necessidade do cálculo do novo ponto de operação e do projeto de um novo controlador para cada ponto de operação. Um método de identificação de modelos locais T-S, utilizando-se mínimos quadrados, baseado em LMI e que utiliza uma entrada degrau para excitar o sistema em torno do ponto de operação do modelo local desejado foi proposta. Uma metodologia com realimentação derivativa das variáveis de estado, utilizando-se somente acelerômetros como sensores, foi apresentada para o controle do movimento de paraplégicos, representando a planta através de modelos fuzzy T-S. Todos os resultados simulados nessa tese mostram que os procedimentos propostos são eficientes e oferecem bons resultados para esta classe de problemas de controle.

Abstract

This thesis presents studies, designs and simulations about the use of functional electrical stimulation, to control the leg position of a paraplegic patient. The plant is described by a nonlinear system using Takagi-Sugeno fuzzy models and a closed-loop control is presented. A transfer function represents the mathematical model related to the muscle torque and the pulse width. Considering the operation point at 30° and all state variables available, then a fuzzy regulator was designed. This design was based on the Lyapunov stability, Linear Matrix Inequalities (LMI), and considered the following specifications: decay rate, and input and output constraints. Moreover, the design of a state observer, also based on LMIs, to obtain a continuous-time regulator with an observer in the operation at 60° was presented. Due to the necessity of implementation in hardware, a new method to obtain a discrete-time T-S model of plants described by continuous-time nonlinear T-S models, considering small sampling periods was proposed. Another new methodology was proposed to design continuous-time regulators and observers, through the signal tracking (leg position of paraplegics) and the use of virtual variables. This procedure allows the tracking of the angular position, without the design of a new controller for each operation point. A new method for the identification of T-S local models, where the input is a step and the system operates around the operation point of the wanted local model was proposed. This procedure is based on LMI. Other new method, using state-derivative feedback, was proposed for the control of the leg position of a paraplegic patient, described by a T-S model, using only accelerometers as sensors. All the simulated results in this thesis show that the proposed procedures are efficient and offer good results to this control problem class.

Lista de Figuras

1.1	Esquemático de controle em malha fechada, adaptado de (SCHAUER; NEGARD; RAISH, 2009).	p. 28
2.1	Postura anatômica padrão, modificado de (FREIVALDS, 2004).	p. 32
2.2	Ossos do esqueleto humano, adaptado de (ESCOLA, 2009).	p. 33
2.3	Uma curva típica de pressão-deformação, modificado de (FREIVALDS, 2004).	p. 33
2.4	Diagrama esquemático dos ligamentos do joelho, adaptado de (PHOTO-BUCKET, 2009).	p. 34
2.5	Diagrama da relação entre fibras musculares, a porção do tendão interno, onde se inserem fibras musculares, adaptado de (BUCHANAN et al., 2004).	p. 34
2.6	Músculo do membro superior, veja (FREIVALDS, 2004).	p. 36
2.7	Ponto de inserção do músculo rectus femoris, adaptado de (ONLINE, 2009).	p. 37
2.8	Grupo de músculos e suas ligações ao modelo musculoesquelético. RF: rectus femoris; VS: vastus lateral e médio; TA: tibialis anterior; GU: gluteus máximos, médio e mínimo; HA: semi-membranoso, semi-tendinoso; GA: gastrocnemius; SO: soleus, BS: biceps femoris porção longa; IL: iliacus, adaptado de (WANG et al., 2004).	p. 37
2.9	Padrões de arranjos de fibras musculares, adaptado de (FREIVALDS, 2004).	p. 38
2.10	Ilustração esquemática de diferentes estruturas e sub-estruturas do músculo, adaptado (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 39
2.11	Esquema da unidade contrátil básica do músculo, o sarcômero, modificado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 40
2.12	Ilustração esquemática do miofilamento grosso, modificado de adaptado (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 40

2.13	Ilustração esquemática do miofilamento fino, composto por duas cadeias de glóbulos de actina ligados em série, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 41
2.14	Diagrama esquemático de uma unidade motora, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 42
2.15	Detalhe esquemático da junção neuromuscular, mostrando o neurônio motor e a membrana da célula muscular, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 42
2.16	Detalhe esquemático da junção neuromuscular mostrando o neurônio motor e a membrana da célula muscular, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 44
2.17	Ilustração esquemática dos túbulos T numa seção de uma fibra muscular, e sua associação com o retículo sarcoplasmático (RS) e os miofilamentos contráteis, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 44
2.18	Ilustração esquemática da regulação excitatória/inibitória da ligação da ponte cruzada no filamento de actina (A). Sem cálcio (esquerda), a tropomiosina (TM) e o complexo troponina (troponina T, C, e I) permanecem numa configuração que bloqueia o local de fixação da ponte cruzada (S). Acrescentando cálcio Ca^{++} , este se liga num ponto específico da troponina (troponina C) e altera a configuração do complexo tropomiosina-troponina deixando o caminho livre para a conexão da ponte cruzada, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 45

2.19	Ilustração esquemática do ciclo da ponte cruzada. (a) O músculo em repouso. O ponto de fixação sobre o filamento fino está coberto pelo complexo tropomiosina-troponina. O ATP está ligado à miosina da ponte cruzada. (b) Em ativação, a concentração de cálcio aumenta no sarcoplasma e o íon Ca^{++} liga-se à troponina C, causando uma mudança na configuração que expõe o ponto de conexão da actina. (c) A ponte cruzada se fixa à actina e sofre uma alteração. A quebra do ATP em ADP e Pi fornece a energia que resulta na contração, i.e., o movimento do filamento fino sobre o grosso. (d) Um novo ATP se fixa na ponte cruzada, e esta, agora, pode se desconectar do filamento fino, estando pronta para uma nova interação com outro local do filamento fino, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 46
2.20	Relação teórica de força-comprimento para fibras individuais de músculo esquelético de rãs, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 48
2.21	Note que as letras do gráfico estão associadas às diversas configurações de sarcômero mostradas.	p. 48
2.22	Relação força-velocidade normalizada do músculo esquelético contraído concentricamente, modificado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).	p. 49
2.23	Modelo de músculo a quatro elementos, adaptado de (FREIVALDS, 2004).	p. 54
2.24	Modelo do músculo de Hill simplificado, adaptado de (FREIVALDS, 2004).	p. 55
2.25	Modelo distribuído de (HATZE, 1981), adaptado de (FREIVALDS, 2004).	p. 56
2.26	Modelo concentrado do músculo de Hatze, adaptado de (FREIVALDS, 2004).	p. 57
2.27	Modelo simplificado de Hatze, adaptado de (FREIVALDS, 2004).	p. 57
2.28	Curva de recrutamento das fibras, adaptado de (MAKSSOUD; GUIRAUD; POIGNET, 2004)	p. 61
2.29	Nomenclatura das regiões da curva.	p. 62
3.1	Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy T-S.	p. 66
5.1	Complexo canela tornozelo.	p. 101
5.2	Curvas da função $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ exata e aproximação por série de Taylor de quinta ordem.	p. 109

5.3	Curvas da função $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ exata e aproximação por série de Taylor de décima primeira ordem.	p. 109
5.4	Relação força por largura de pulso, dados experimentais ao estímulo do músculo quadríceps.	p. 111
5.5	Relação força por largura de pulso com fadiga.	p. 112
5.6	Modelo matemático do músculo.	p. 112
6.1	Resposta do sistema controlado para condições iniciais $(\theta_v, \dot{\theta}_v, M_a) = (0, 0, 0)$ considerando somente a estabilidade.	p. 117
6.2	Resposta do sistema sem estímulo elétrico na perna.	p. 118
6.3	Resposta do sistema controlado, para condições iniciais $(\theta_v, \dot{\theta}_v, M_a) = (0, 0, 0)$, com $\beta = 1$	p. 119
6.4	Resposta do controlador com $\beta = 1$ e $\mu = 0.06$	p. 120
6.5	Resposta do controlador com $\beta = 0.001$ e $\mu = 0.0005$	p. 122
6.6	Regulador com observador.	p. 123
6.7	Resposta do controlador com estabilidade, taxa de decaimento e restrição no sinal de entrada.	p. 125
6.8	Resposta do sistema contínuo.	p. 126
6.9	Curva $f_{12n}(x_{1n}(t))$	p. 130
6.10	Simulação das equações dinâmicas do modelo do paraplégico para o ponto de operação de 30°	p. 132
6.11	Rastreamento do sinal para o ponto de operação de 30°	p. 133
6.12	Simulação das equações dinâmicas do paraplégico para o ponto de operação de 47°	p. 133
6.13	Rastreamento do sinal para o ponto de operação de 47°	p. 134
6.14	Simulação das equações dinâmicas do modelo do paraplégico para o ponto de operação de 30° e condições iniciais $\mathbf{e}(t) = [0 \ 0 \ 0]$	p. 136
6.15	Rastreamento do sinal para o ponto de operação de 30°	p. 137
6.16	Simulação das equações dinâmicas do modelo do paraplégico para o ponto de operação de 30° e condições iniciais $\mathbf{e}(t) = [-1.0 \ 0 \ -0.8]$	p. 138

6.17	Simulação do observador para o ponto de operação de 30°	p. 139
6.18	Sistema de controle utilizando modelos fuzzy TS.	p. 141
6.19	Posição dos acelerômetros para medida da aceleração tangencial.	p. 142
6.20	Curva exata e aproximada da função não-linear $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$	p. 143
6.21	Curva exata e aproximada da função $\tilde{f}_{21}(x_1(t))x_1(t)$	p. 144
6.22	Root locus com $c(t) > 0$	p. 145
6.23	Root locus com $c(t) < 0$	p. 145
6.24	Sistema de controle com o método proposto.	p. 146
6.25	Comportamento da curva aproximada e exata.	p. 147
6.26	Comportamento da largura de pulso ($P(t)$) do sistema com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$	p. 148
6.27	Aplicação do degrau as equações dinâmicas do paraplégico.	p. 149
6.28	Comportamento de θ_v em relação ao tempo.	p. 150
6.29	Resposta das variáveis $(\mathbf{z}_1(t))$, $(\mathbf{z}_2(t))$ e $(\mathbf{z}_3(t))$ em relação ao tempo de simulação.	p. 150
6.30	Comportamento de $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ em relação a $(\mathbf{z}_1(t))$	p. 151
6.31	Minimização do erro quadrático.	p. 152
6.32	Resposta das variáveis $(\mathbf{z}_1(t))$, $(\mathbf{z}_2(t))$ e $(\mathbf{z}_3(t))$ em relação ao tempo de simulação.	p. 152
6.33	Comportamento de θ_v em relação ao tempo.	p. 153
6.34	Comportamento de $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ em relação a $(\mathbf{z}_1(t))$	p. 153
6.35	Minimização do erro quadrático.	p. 154
6.36	Aplicação do degrau as equações dinâmicas do modelo do paraplégico, considerando o ruído.	p. 154
6.37	Resposta das variáveis $(\mathbf{z}_1(t))$, $(\mathbf{z}_2(t))$ e $(\mathbf{z}_3(t))$ em reação ao tempo de simulação, considerando o ruído.	p. 155
6.38	Comportamento de $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ em relação a $(\mathbf{z}_1(t))$, considerando o ruído.	p. 155

6.39	Minimização do erro quadrático.	p.156
6.40	Modelo discreto do modelo da dinâmica do parapléxico.	p.157
6.41	Resposta do sistema discretizado ao degrau aplicado.	p.157
6.42	Funções de pertinência $\sigma_1(z_1(t))$ e $\sigma_2(z_1(t))$ identificadas.	p.160

Lista de Tabelas

- 5.1 Grandezas Antropométricas do Paciente (FERRARIN; PEDOTTI, 2000). . p. 103

Sumário

1	Introdução	p. 25
2	Fisiologia Muscular	p. 31
2.1	Estrutura do Sistema Músculo Esquelético	p. 31
2.1.1	Sistema Músculo Esquelético	p. 31
2.1.2	Tecidos Conectivos Flexíveis	p. 32
2.2	Fisiologia Neuromuscular	p. 35
2.2.1	Estrutura do Músculo	p. 38
2.2.2	Unidades Motoras	p. 41
2.2.3	Contração Muscular	p. 42
2.2.4	Propriedade Física	p. 46
2.2.5	Relação Força-Comprimento	p. 47
2.2.6	Relação Força-Velocidade	p. 49
2.3	Modelo Matemático do Músculo	p. 53
2.3.1	Modelo Matemático do Músculo por Hill	p. 54
2.3.2	Resposta Ativa do Músculo	p. 55
2.3.3	Modelo Multi-Elemento de Hatze	p. 56
2.3.4	Modificação de Zajac no Modelo de Hill	p. 60
2.4	Modulação da Força Muscular pela Curva de Recrutamento .	p. 61
3	Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 64
3.1	Modelos Locais Lineares	p. 64

3.1.1	Representação Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 64
3.1.2	Forma Geral do Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 67
3.2	Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 68
3.2.1	Conceitos sobre a estabilidade	p. 69
3.2.2	Função de Lyapunov para Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo	p. 69
3.2.3	Condições de Estabilidade de Lyapunov Aplicada ao Re- gulador no Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 70
3.2.4	Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs	p. 72
3.2.5	Taxa de Decaimento	p. 74
3.2.6	Restrição da Entrada	p. 75
3.2.7	Restrição da Saída	p. 75
3.3	Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 75
3.3.1	Condições de Lyapunov Aplicadas ao Observador de Es- tado no Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 77
3.3.2	Projeto em LMIs para Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 79
3.3.3	Taxa de Decaimento	p. 80
3.4	Reguladores e Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 81
3.4.1	Condições para a Estabilidade de Sistemas Aumentados	p. 84
4	Contribuição ao Controle com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 86
4.1	Regulador Fuzzy Takagi-Sugeno Discreto	p. 86
4.1.1	Descrição do Problema de Discretização	p. 86
4.2	Reguladores Discretos Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 89
4.2.1	Análise da Estabilidade	p. 90
4.2.2	Projeto de Reguladores Discretos Fuzzy com LMIs . . .	p. 91
4.2.3	Condições de Estabilidade Relaxadas Usando Projeto de Controladores com Taxa de Decaimento	p. 91

4.3	Controle com Rastreamento Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 92
4.3.1	Controle com Rastreamento e Regulador de Estado . . .	p. 92
4.3.2	Restrições da Dinâmica Generalizada	p. 94
4.3.3	Controle de Rastreamento Baseado em Observador e Regu- lador de Estado	p. 95
4.3.4	Identificação de Modelos Lineares Ótimos	p. 96
4.3.5	Identificação de Modelos Lineares Ótimos Discretos . . .	p. 99
5	Modelo Dinâmico no Controle da Posição da Perna de Paraplégicos	p. 100
5.1	Modelo Matemático Utilizado	p. 100
5.1.1	Objetivo	p. 100
5.1.2	Modelo da Junção do Joelho	p. 100
5.1.3	Modelo Matemático para Outros Pontos de Operação .	p. 108
5.2	Modelagem do Músculo com Modelos Locais T-S	p. 110
6	Resultados do Controle da Posição da Articulação do Joelho	p. 114
6.1	Controle Não-Linear da Posição da Perna de Paraplégicos Uti- lizando um Modelo Exato Fuzzy (T-S)	p. 114
6.2	Projeto dos Reguladores	p. 116
6.2.1	Estabilidade	p. 116
6.2.2	Estabilidade e Taxa de Decaimento	p. 118
6.2.3	Estabilidade, Taxa de Decaimento $\beta = 1$, Condições Ini- ciais $[x_1, x_2, x_3] = [-\pi/6, 0, -4.6068]$ e Restrição no Sinal de Entrada $\mu = 0.06$	p. 119
6.3	Modelagem Matemática para Outros Pontos de Operação . . .	p. 120
6.4	Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 122
6.4.1	Projeto do Regulador com Observador de Estados Uti- lizando Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 122
6.5	Projeto Fuzzy Takagi-Sugeno Discreto	p. 124

6.5.1	Estabilidade e Taxa de Decaimento	p. 124
6.6	Projeto Com Rastreamento	p. 126
6.6.1	Projeto do Regulador com Rastreamento	p. 127
6.6.2	Resultado para o Rastreamento com Regulador	p. 130
6.6.3	Projeto do Regulador e Observador com Rastreamento da Referência	p. 134
6.6.4	Resultado para o Rastreamento com Regulador e Obser- vador	p. 135
6.7	Realimentação da Derivada de Estado	p. 139
6.7.1	Controle de Sistemas com Realimentação da Derivada de Estado	p. 139
6.7.2	Uso do Acelerômetro no Controle da Posição do Joelho	p. 140
6.7.3	Posicionamento dos Acelerômetros no Membro Inferior	p. 141
6.7.4	Estimativa da Posição da Perna	p. 142
6.7.5	Controle da Posição da Perna de um Paciente Paraplégico usando Fuzzy Takagi-Sugeno	p. 146
6.8	Identificação de Modelos Locais da Dinâmica do Paraplégico .	p. 148
6.8.1	Identificação com Ruído Branco de Média Nula	p. 154
6.8.2	Discretização da Dinâmica do Paraplégico	p. 156
6.8.3	Composição de Modelos Locais	p. 158
7	Conclusão	p. 161
8	Publicações Decorrentes	p. 163
8.1	Publicações e Trabalhos em Andamento	p. 163
8.2	Trabalhos Futuros	p. 171
	Referências	p. 172

**Apêndice A – Equação expandida em Série de Taylor Obtida Através
do Toolbox Symbolic do Matlab** p. 178

**Apêndice B – Programa Usando Funções do Toolbox Symbolic do Mat-
lab** p. 182

1 *Introdução*

Esta tese tem caráter multidisciplinar, havendo um desafio muito grande para integração de conceitos como Fisiologia Humana, Biomecânica, EENF (Estimulação Elétrica Neuromuscular Funcional), Instrumentação Eletrônica, Teoria de Controle e Identificação de Sistemas. A motivação para trabalhar com essas áreas, se concentra na pouca informação existente no Brasil sobre grupos de pesquisas, que integrem todos esses fundamentos, na solução dos problemas vivenciados por pacientes paraplégicos e hemiplégicos. Não se pretende provocar discussões, sobre a “falsa esperança submetida a portadores de deficiência física”. A colaboração entre pesquisadores de diversas áreas, foi fundamental na elaboração deste trabalho. No Brasil, são escassos os trabalhos de pesquisa voltados para a melhoria de vida de pacientes paraplégicos. Por exemplo, um tipo de pesquisa pouco desenvolvido nesta área, abordou uma cadeira de rodas controlada através de sopros e sucções, apresentada em (SOBRINHO et al., 2003). Ainda há, pouca integração entre as áreas de Controle e Instrumentação Eletrônica, aplicada a problemas neuromusculares. Têm-se excelentes pesquisadores trabalhando com teoria de controle, e excelentes pesquisadores trabalhando com instrumentação eletrônica, porém, são poucos os trabalhos conjuntos de pesquisadores destas duas áreas, realizadas com o objetivo de melhorar a qualidade de vida de pacientes portadores de alguma deficiência. Poucos trabalhos abordando, sistemas de geração de marcha em malha fechada, visando a reabilitação de pacientes paraplégicos, têm sido publicados, recentemente, em importantes congressos Brasileiros, como o Congresso Brasileiro de Automática e o Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica. Por exemplo no XXI-CBEB 2008 Salvador-Bahia, sobre este tema, apenas um artigo utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, propostos em (TAKAGI; SUGENO, 1985), com realimentação da derivada de estados (GAINO et al., 2008) e um artigo com projeto de controlador linear PID (PRADO et al., 2008), ambos do nosso grupo, foram apresentados. De acordo com o censo realizado em 1991, pelo IBGE, existiam no Brasil, 457.162 deficientes físicos, entre hemiplégicos, paraplégicos ou tetraplégicos. De acordo com os dados, 201.592 eram paraplégicos. O Estado de São Paulo ocupa o primeiro lugar

em números de casos, com 37.421 deficientes paraplégicos, em segundo lugar está Minas Gerais, com 22.507, e, em seguida, o Rio de Janeiro, com 16.690 casos. O Brasil possui, segundo o censo realizado pelo IBGE em 2000, 955.287 deficientes físicos, entre pacientes hemiplégicos, paraplégicos e tetraplégicos. O IBGE não distinguiu os hemiplégicos dos paraplégicos e tetraplégicos. Há 40 anos, as expectativas de vida de um paciente com lesão medular era de 5 anos. A maioria dos pacientes morria nesse período, devido a problemas nos rins. Atualmente, a expectativa de vida é, aproximadamente, normal. Uma pessoa jovem (13 a 30 anos), que sofreu uma lesão na medula, possui agora uma expectativa de vida em torno de 50 anos. Após a lesão medular, os músculos atrofiam rapidamente, principalmente os músculos grandes da coxa. Uma das conseqüências da atrofia muscular é que as atividades do coração e pulmão são reduzidas, fazendo com a saúde do indivíduo fique comprometida. Quando um indivíduo não exercita ou movimenta, de alguma forma o lado plégico, pode-se agravar o quadro clínico, influenciando diretamente na qualidade de vida da pessoa, e, de forma indireta, os que convivem à sua volta.

A estimulação elétrica neuromuscular funcional (EENF) pode auxiliar o sistema circulatório, aumentando a circulação de sangue no membro paralisado. Através da EENF, alguns desses pacientes, que perderam as funções motoras, mas que apresentam os nervos periféricos intactos, têm grandes chances de recuperar ou melhorar os movimentos perdidos. Há vários relatos de casos de pacientes que recuperaram a sensibilidade e o movimento dos membros paralisados após sessões de estimulação neuromuscular. No Canadá um hemiplégico recuperou a sensibilidade e o movimento do membro direito após ser submetido, por longos períodos, a estímulos elétricos. Nos Estados Unidos um paraplégico há 17 anos, depois de um tratamento fisioterápico com eletroestimulação, levantou da cadeira e deu vários passos pela sala. Na Alemanha, alguns pacientes, começaram a recuperar a capacidade de andar, depois de meses de tratamento intensivo com eletroestimulação. Um desses pacientes, que era paraplégico, recuperou quase que totalmente os movimentos das pernas, depois de um ano de tratamento, sendo capaz de caminhar com um andador e, com alguma ajuda, foi capaz até de subir degraus de uma escada (MARTIN, 1999). No Brasil, Cliquet em meados do ano 90, percebeu que pacientes tratados com estimulação elétrica neuromuscular estavam readquirindo movimento e sensibilidade nos membros afetados, voluntariamente, mesmo que de forma parcial (SUGIMOTO, 2004). Junto com a sua equipe conseguiram fazer com que um paraplégico voltasse a caminhar, apoiado num andador, após sessões de estímulo neuromuscular, entretando, operação em malha aberta. Mesmo após várias pessoas terem voltado a andar, muitos estudos necessitam ser realizados, uma vez que ainda não há teoria sólida que explique os diversos casos estuda-

dos. A teoria de biomecânica e a fundamentação matemática da teoria de controle são necessárias para explicar e conceituar mais adequadamente, os fenômenos em questão.

A justificativa para se trabalhar com teoria de controle, em malha fechada, concentra-se na perspectiva dos grupos de pesquisa envolvidos, implementarem equipamentos para geração de movimentos, ortostatismo e até mesmo a marcha em deficientes. Quando se trabalha em malha fechada, pode-se controlar, de maneira mais eficiente, a estimulação elétrica (CRAGO; PECKHAM; THROPE, 1980), portanto propiciando um melhor controle dos movimentos, evitando também, uma rápida fadiga dos músculos envolvidos no processo.

Desde os anos 60, tem sido utilizada a EENF na ajuda do restabelecimento de funções motoras em pacientes hemiplégicos e paraplégicos. Com a EENF, produz-se contração muscular semelhante à contração gerada por um estímulo enviado pelo Sistema Nervoso Central (SNC). Sua aplicação em tratamentos fisioterápicos de pacientes paraplégicos, em malha fechada, tem eficácia comprovada (FERRARIN; PEDOTTI, 2000). Como uma forma de contribuir com a melhora da qualidade de vida dos portadores de deficiência, muitos pesquisadores têm buscado desenvolver novos equipamentos e técnicas de controle, com o objetivo de fazer com que mais pacientes voltem a ter os movimentos dos membros paralisados, por exemplo (CRAGO; MORTIMER; PECHAM, 1980), (HATZE, 1981), (CHIZECK et al., 1983), (ZAJAC, 1989), (RIENER; FUHR, 1998), (HERZOG; NIGG, 1999) e (FREIVALDS, 2004).

No Brasil há poucos pesquisadores e centros de reabilitação que trabalham nesta área da Engenharia de Reabilitação, fazendo com que apenas um reduzidíssimo número de pacientes possa ser beneficiado.

A proposta desta tese abrange o desenvolvimento de um sistema de controle, em malha fechada, para variação angular da articulação do joelho de pacientes paraplégicos, com estímulos elétricos no músculo quadríceps, trabalhando com uma referência desejada, no caso o ângulo, como ilustrado na Figura 1.1. Obteve-se primeiramente o seu modelo em variáveis de estados (TEIXEIRA et al., 2006b), baseado nos estudos de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) e (RIENER; FUHR, 1998). Nesse modelo matemático, são aplicadas técnicas não-lineares para o projeto do controlador e observador (TEIXEIRA et al., 2006c) e (GAINO et al., 2007).

Estudos de modelos matemáticos e projetos com controle clássico digital foram utilizados em (CRAGO; MORTIMER; PECHAM, 1980), (CHIZECK et al., 1983). O que se pode observar é a dificuldade de se obter bons resultados, utilizando-se a teoria de sistemas lineares. (ABBAS; CHIZECK, 1995) e (CHANG et al., 1997) tiveram bons resultados, utilizando

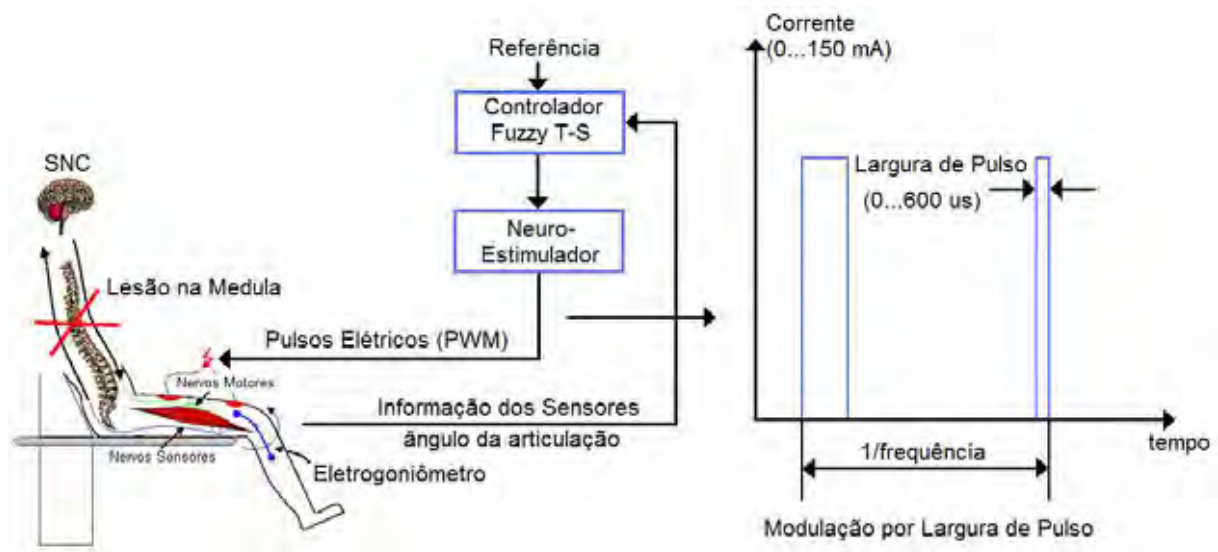


Figura 1.1: Esquemático de controle em malha fechada, adaptado de (SCHAUER; NEGARD; RAISH, 2009).

redes neurais. Em (CHANG et al., 1997) e (RIENER; FUHR, 1998) implementaram redes neurais e lógica fuzzy Mandani em um sistema projetado para utilização em pacientes paraplégicos.

Nossa proposta, foi a utilização de técnica de controle com modelos fuzzy (T-S) apresentados em (TANIGUCHI et al., 2001), aplicado em problemas da engenharia biomédica, no auxílio da reabilitação de pacientes paraplégicos através de EENF. Outra metodologia, além (TANIGUCHI et al., 2001), considerando outros modelos locais, pode se útil, na resolução destes casos (TEIXEIRA; ŽAK, 1999). Essas técnicas mostraram uma grande eficácia, para solucionar problemas de controle de sistemas não-lineares, sendo assim, além da proposta de controle, a idéia de trabalhar num ponto de operação, inspirou-nos a identificação de modelos locais aplicados ao caso do paciente paraplégico.

O algoritmo de controle foi implementado com modelos fuzzy Takagi-Sugeno, e o projeto é baseado em desigualdades matriciais lineares (em Inglês, LMI, Linear Matrix Inequalities). Esse modelo de projeto tem despertado um crescente interesse na literatura especializada (TANAKA; WANG, 2001). Normalmente utiliza-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CPD) (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) para o projeto de reguladores e observadores Fuzzy Takagi-Sugeno, para estabilizar sistemas não-lineares, descritos por modelos Fuzzy (TANIGUCHI et al., 2001).

O projeto do controlador e observador podem ser realizados, resolvendo-se desigualdades matriciais, LMI (Linear Matrix Inequalities).

O software MATLAB, com o “Toolbox LMI Control”, soluciona as LMIs, quando são factíveis, (BOYD et al., 1994). Pela primeira vez, através de simulação, essa técnica de con-

trole com modelos Fuzzy Takagi-Sugeno foi aplicada, utilizando um modelo matemático, associado a um paciente paraplégico em (TEIXEIRA et al., 2006b). O controle em malha fechada, aplicado em sistemas fisiológicos, requer técnicas de controle eficientes, pois a fisiologia humana e os modelos musculares são muito complexos (HILL, 1938) e (HUXLEY, 1957).

Do artigo de (KIM et al., 2006) surgiu a idéia de projeto de sistemas não-lineares com rastreamento do sinal. O projeto com rastreamento de sinal com reguladores e observadores, foi resolvido com conceitos de LMI e CPD, seu algoritmo produz os resultados do ponto de interesse desejado sem a necessidade de calcular um regulador e ou observador para um ponto específico de cada vez.

De (TEIXEIRA et al., 2006a) e seus estudos sobre realimentação de derivada de estados, inspirou o trabalho de realimentação da posição angular da perna do paciente paraplégico, utilizando acelerômetros fixados em pontos estratégicos. O uso de acelerômetros ao invés de eletrogoniômetros, produz um sinal mais confiável da posição angular, como mostrado em (WINTER, 1990). Usa-se a modelagem do paciente paraplégico para estimar a posição angular, obtida dos sensores disponíveis no sistema: o acelerômetro e o sensor de torque.

A seguir descreve-se, resumidamente, o conteúdo dos demais capítulos desta tese:

1. No capítulo 1, apresenta-se a introdução e objetivos do desenvolvimento da tese.
2. No capítulo 2, descreve os fenômenos fisiológico e biomecânico do músculo.
3. No capítulo 3, é apresentado o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, seus reguladores e observadores contínuos e reguladores discretos. Uma abordagem com rastreamento foi desenvolvida. A análise da estabilidade, com demais restrições no projeto, pode ser verificada com uso de LMIs. Inspirados em (TEIXEIRA; ŽAK, 1999) e (MACHADO, 2003), através de mínimos quadrados e restrições LMI, estuda-se a identificação de modelos locais para a aproximação fuzzy T-S.
4. No capítulo 4, é apresentado o modelo matemático em espaços de estados, desenvolvido segundo o modelo matemático apresentado por (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).
5. No capítulo 5, são discutidos resultados do desenvolvimento teórico do cap. 4, aplicadas nas equações do paraplégico do cap. 3, e mostrado os resultados obtidos

através da simulação.

6. No capítulo 6 foi realizado uma conclusão sobre o assunto tratado.
7. Neste capítulo 7, foram relacionadas as contribuições decorrentes do estudo e preparação desta tese. Existem trabalhos em andamento no grupo de instrumentação que foram gerados com a participação do candidato, durante a elaboração da sua tese; como estudos sobre os sinais dos acelerômetros e células de carga para medir o torque no joelho provocado pela eletroestimulação no quadríceps, sendo que um eletroestimulador modelo Neurodyn II da Ibramed, foi adquirido com recursos de taxa de bancada da bolsa de Doutorado do CNPq, número do processo 141159/2005-7, para identificação de modelos locais segundo a teoria desenvolvida pelo candidato; elaboração e estudo dos circuitos de eletromiografia para captação de sinais de atividade muscular do músculo quadríceps, captados pelos canais analógicos e tratados no software Labview 8.20; construção de uma cadeira para pacientes, e instrumentada com sensores, com sinais captados pelos canais analógicos do software Labview 8.20. Aplicação de teoria de controle digital em malha fechada no auxílio do tratamento do paciente, utilizando a plataforma do software Proteus, versão demo. Deve-se ressaltar que nem todo material gerado foi possível compilar na mesma, por uma dificuldade de concatenar todas as informações de diversas áreas abordadas. Entretanto os resultados parciais obtidos, junto com outros trabalhos em desenvolvimento, serão submetidos em periódicos e congressos relevantes na área. Existem perspectivas de novos trabalhos decorrentes dos resultados obtidos.

2 *Fisiologia Muscular*

2.1 Estrutura do Sistema Músculo Esquelético

O sistema músculo esquelético é um complexo de músculos, ossos e tecidos conectivos que produzem movimento no corpo humano (FREIVALDS, 2004). Os movimentos são tridimensionais, centrados ao redor de juntas, mas tipicamente definidos em duas dimensões, como mostra a Figura 2.1: *sagital*, observando-se o corpo pelo lado; *transverso*, observando-se o corpo acima da cabeça e *frontal* observando-se o corpo de frente, (i.e., face a face). Por exemplo, joelho e cotovelo são vistos no plano *sagital*, com apenas um grau de liberdade.

2.1.1 Sistema Músculo Esquelético

A função do sistema esquelético é promover um sistema rígido de conexões para fixação dos músculos (FREIVALDS, 2004), base do movimento e proteger o organismo interno. Existem mais de 200 ossos no corpo humano de vários tamanhos, formatos e propriedades mecânicas, compondo diversas categorias. Por exemplo; o fêmur, o humerus são classificados como *ossos longos*; a vértebra, a pelvis como *ossos axiais*. Outros ossos do sistema esquelético humano são mostrados na Figura 2.2.

A elasticidade e a resistência são as propriedades mecânicas mais importantes do osso. Sua relação é conhecida através da curva *pressão aplicada por deformação do material*. Na Figura 2.3 é mostrada a curva que relaciona a pressão com a deformação do material.

Inicialmente na região elástica, a relação entre a pressão e a deformação, é linear. Nessa região, a relação entre pressão e a deformação é dada por (FREIVALDS, 2004):

$$\sigma = E\epsilon, \quad (2.1)$$

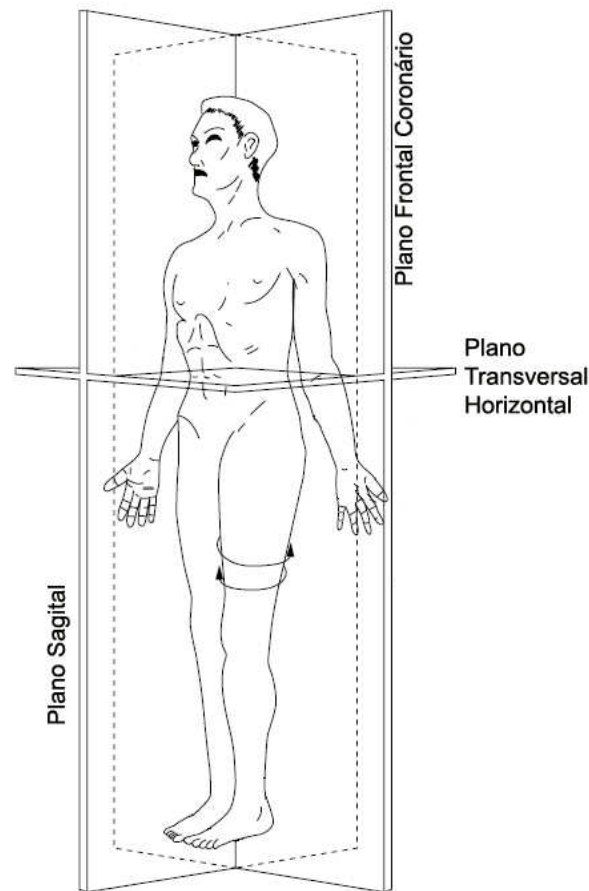


Figura 2.1: Postura anatômica padrão, modificado de (FREIVALDS, 2004).

sendo σ = pressão em (PA), E = módulo de Young (em PA), ϵ = deformação unitária. Para carregamento excessivo, o material entra na região de deformação plástica e não retorna mais ao formato original quando descarregado.

2.1.2 Tecidos Conectivos Flexíveis

Os tecidos conectivos flexíveis do corpo (FREIVALDS, 2004), compostos por ligamentos, tendões, fascia e cartilagem, promovem o suporte estrutural do sistema musculoesquelético e transmitem forças entre os seus componentes. Os tecidos conectivos são similares aos ossos, compostos de células, matrizes extracelulares de fibras, que determinam as propriedades mecânicas do tecido conectivo, e uma substância, contendo polissacarídeo com uma proteína no núcleo e lipídios imersos na água. Existem três tipos de fibras: colágenas, elastinas e reticulares. Fibras colágenas fornecem força e resistência ao tecido, elastinas



Figura 2.2: Ossos do esqueleto humano, adaptado de (ESCOLA, 2009).

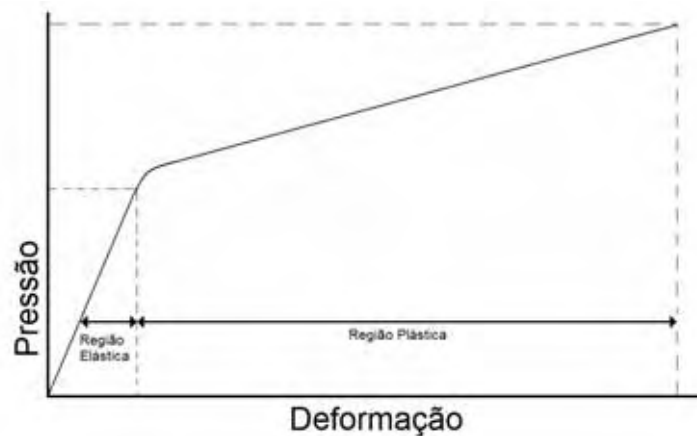


Figura 2.3: Uma curva típica de pressão-deformação, modificado de (FREIVALDS, 2004).

promovem elasticidade ao tecido e a reticulares promovem tamanho e volume ao músculo. Os ligamentos são compostos por elastina e colágeno, com maior proporção na última, e se conectam entre as extremidades de um osso ao outro, promovendo estabilidade e movimento das juntas. A Figura 2.4 mostra a junta do joelho, na qual os ligamentos fornecem estabilidade e movimentação à articulação.

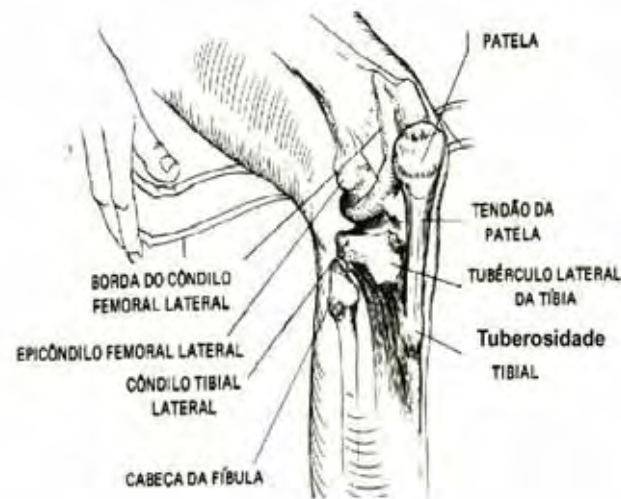


Figura 2.4: Diagrama esquemático dos ligamentos do joelho, adaptado de (PHOTOBUCKET, 2009).

Tendão é um tecido fibroso e denso que conecta o músculo ao osso, transmitindo a força muscular. É composto quase que completamente de feixes paralelos de fibras colaginosas sem elasticidade. O tendão existe em uma grande variedade de formatos e tamanhos, dependendo das características morfológicas, fisiológicas e mecânicas do músculo e do osso que será ligado. Geralmente, o tendão consiste de um tendão externo, tipicamente denominado *tendon*, e um tendão interno, referido como *aponeurosis*. O tendão externo conecta o músculo ao osso; a *aponeurosis* é uma expansão tendinosa com fibras musculares, servindo para conectar o músculo ao tendão. Um modelo apresentado por (ZAJAC, 1989) é mostrado da Figura 2.5.

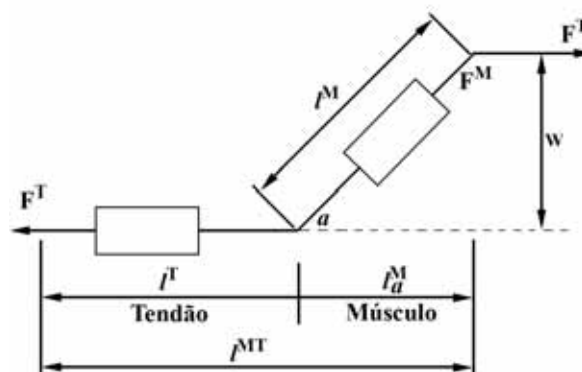


Figura 2.5: Diagrama da relação entre fibras musculares, a porção do tendão interno, onde se inserem fibras musculares, adaptado de (BUCHANAN et al., 2004).

sendo,

- F_T a força do tendão,
- k_{pe} , k_{se} a constante de rigidez dos elementos séries e paralelo,
- l_m o comprimento do músculo,
- l^T o comprimento do tendão,
- l_m , o comprimento do músculo,
- l_a^m a relação de *cosa* do comprimento do músculo,
- a o ângulo penado.

Fascia é um tecido conectivo que cobre órgãos e músculos. É muito elástico (alta porcentagem de elastina) com irregular arranjo das fibras, permitindo elasticidade em todas as direções. A cartilagem cobre a superfície óssea articular, sendo encontrada na orelha, nariz e discos intervertebrais. Composta de colágeno e elastina, transfere forças entre ossos articulados, distribui forças nas juntas e permite relativo movimento entre superfícies articuladas, com o mínimo de atrito.

2.2 Fisiologia Neuromuscular

O músculo é um material altamente estruturado e organizado, na qual cada estrutura e cada organização podem ser associadas com propriedades funcionais específicas, (HERZOG; NIGG, 1999). Geralmente, os músculos são classificados como músculos estriados e não estriados. Os estriados são divididos em esqueléticos e cardíacos. Os não-estriados são encontrados nos órgãos internos. Os cardíacos e não-estriados são controlados pelo sistema nervoso autônomo, e não estão sob controle direto voluntário.

Os esqueléticos são ligados aos ossos em um lado da junta pelos tendões, discutido anteriormente, e quando ativados pela contração ou alongamento, movimentam os ossos. Entretanto, devido o músculo ser um tecido flexível, a ação reversa da ativação do alongamento não é possível, e um segundo conjunto de músculos é exigido para retornar o membro à sua posição original.

O primeiro conjunto de músculos há os denominados *agonistas*, ou de movimento primário, atua como primeiro movimento do músculo. Em oposição ao conjunto de músculos (tipicamente do lado oposto das juntas), há os denominados *antagonistas*, que contrariam os

agonistas e opõem-se ao movimento. Tipicamente, um conjunto de músculos está ativo, enquanto o oposto está relaxado. Na Figura 2.6 é ilustrada a flexão do cotovelo, o Biceps é o *agonista* e também um *flexor*, enquanto o tríceps é o *antagonista* e também um *extensor*. Entretanto, durante a extensão do cotovelo, o tríceps torna-se o *agonista*, e o bíceps torna-se o *antagonista* (FREIVALDS, 2004).

No joelho, estão conectados músculos extensores e flexores. São extensores os *rectus femoris*, os *vastus laterais e médios*. São flexores os *Hamstrings: bíceps femoris (porção longa), semitendinosus e semimembranosus, gastrocnemius e biceps femoris (porção curta)* (HERZOG; NIGG, 1999).

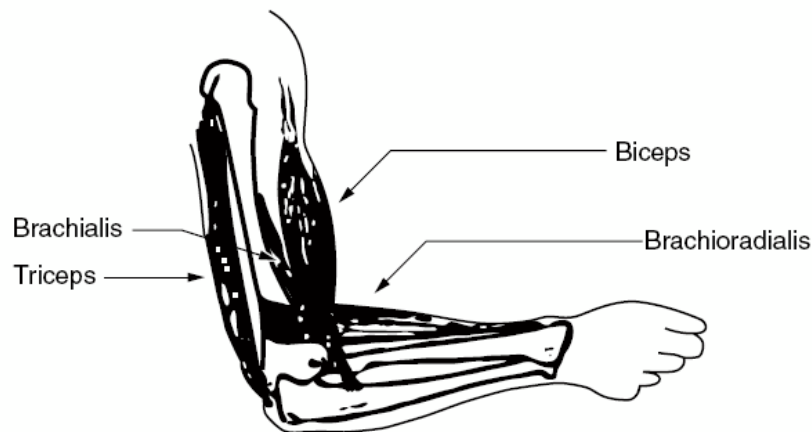


Figura 2.6: Músculo do membro superior, veja (FREIVALDS, 2004).

À conexão do músculo aos ossos também é uma informação importante. Por exemplo nos seres humanos, o músculo *rectus femoris* origina-se do *ilíaca posterior inferior da coluna*, e insere-se, via *patella*, dentro da tuberosidade da tíbia, como mostra a Figura 2.7, (WANG et al., 2004) e (FREIVALDS, 2004). Obviamente, as dimensões de ossos são diferentes para cada paciente. Então, cada músculo está localizado em um ponto “geográfico”. Isso influencia os braços de momentos de força dos músculos, e conseqüentemente, a distribuição de forças musculares (HERZOG; NIGG, 1999).

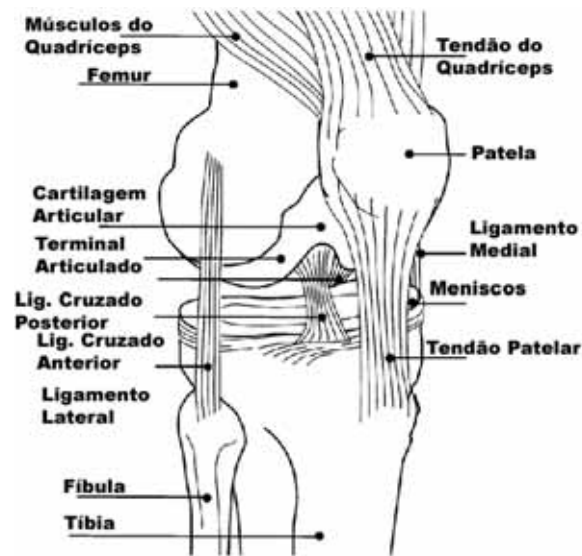


Figura 2.7: Ponto de inserção do músculo rectus femoris, adaptado de (ONLINE, 2009).

Na Figura 2.8 é apresentada uma versão simplificada dos músculos do membro inferior, no plano sagital.

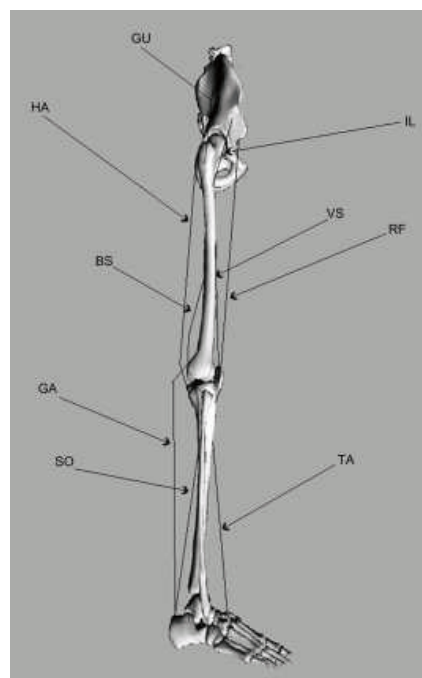


Figura 2.8: Grupo de músculos e suas ligações ao modelo musculoesquelético. RF: rectus femoris; VS: vastus lateral e médio; TA: tibialis anterior; GU: glúteo máximo, médio e mínimo; HA: semi-membranoso, semi-tendinoso; GA: gastrocnemius; SO: soleus, BS: bíceps femor porção longa; IL: ilíaco, adaptado de (WANG et al., 2004).

Visualmente, músculos esqueléticos podem ter uma variação de padrão, com arranjo

das fibras musculares em paralelo ou oblíquo ao longo do eixo do músculo, conforme ilustrada na Figura 2.9.

No músculo *fusiforme*, as fibras estão em paralelo ao longo do eixo longitudinal e possibilitam maior velocidade e movimento, devido ao comprimento das fibras. O músculo *penado*, assemelha-se às penas de aves. No *unipenado*, a inserção é apenas de um lado do tendão, e as fibras estão arranjadas obliquamente ao longo do eixo. No músculo *bipenado*, quando a inserção ocorre nos dois lados, as fibras estão arranjadas obliquamente em ambos os lados do eixo. No músculo *multipenado*, as fibras são pequenas e estão arranjadas obliquamente em várias direções. São usadas para pequenos movimentos, baixas velocidades e produzem maiores potências, como é o caso do deltóide (FREIVALDS, 2004). As diferentes disposições das fibras, dentro de um músculo, influenciam algumas características funcionais de maneira significativa, a arquitetura foi proposta em (ZAJAC, 1989) para quantificar a estrutura de um músculo em sua modelagem.

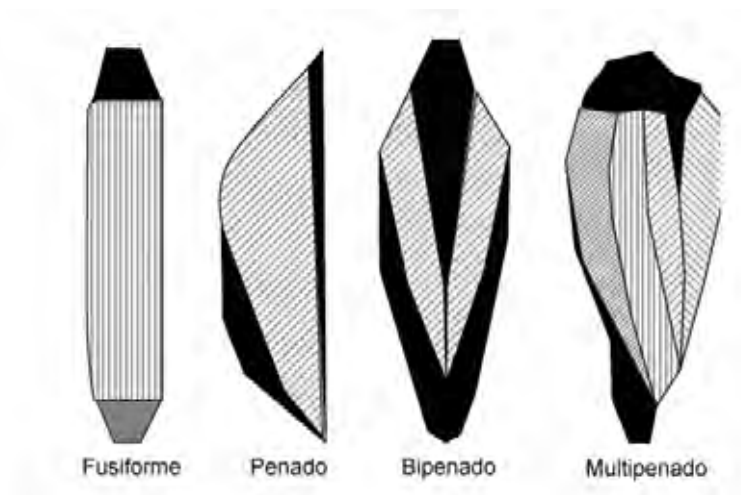


Figura 2.9: Padrões de arranjos de fibras musculares, adaptado de (FREIVALDS, 2004).

2.2.1 Estrutura do Músculo

O músculo esquelético é composto por unidades estruturais de tamanho decrescente, como mostrado na Figura 2.10. O músculo é tipicamente envolvido pela fáscia e por uma bainha adicional de tecido conjuntivo conhecida como epimísio. A fáscia é uma bainha de tecido conjuntivo, que envolve o epimísio, protegendo os grupos musculares, separando-os e direcionando seus movimentos. A próxima estrutura menor é o fascículo, que consiste de fibras musculares envoltas por uma camada de tecido conjuntivo, chamada perimísio. As fibras musculares são envolvidas pelo endomísio, uma fina bainha de tecido conjuntivo formada principalmente de fibras reticulares, que mantêm as fibras individuais

juntas, dentro do músculo. Fibras musculares são células com uma delicada membrana, o sarcolema. As fibras do músculo são constituídas de miofibrilas paralelas entre si. Esse arranjo sistemático dá ao músculo esquelético o seu típico padrão estriado, visível microscopicamente. O elemento repetido nesse padrão é chamado sarcômero, a unidade contrátil básica de um músculo. Os sarcômeros são limitados pelas chamadas linhas Z (Zwischenscheibe ou discos intermediários) e contêm filamentos finos (actina) e grossos (miosina).

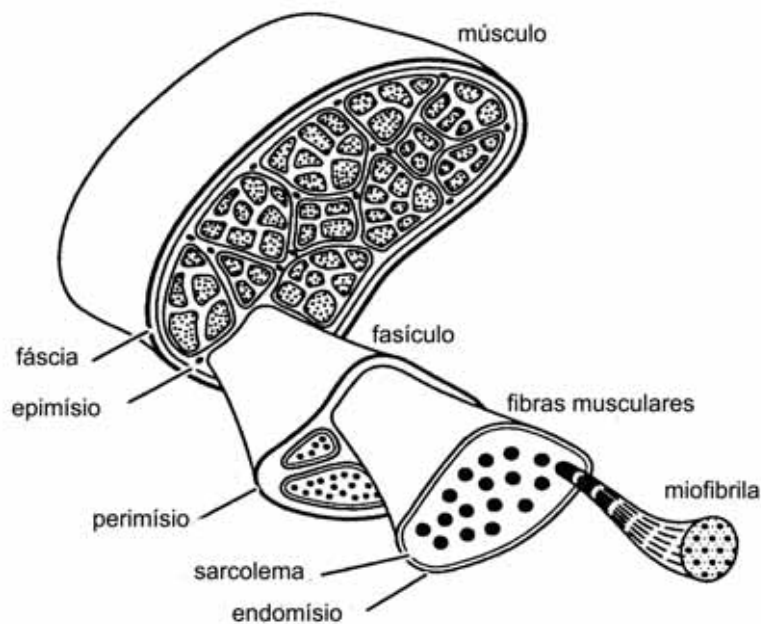


Figura 2.10: Ilustração esquemática de diferentes estruturas e sub-estruturas do músculo, adaptado (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

Esses filamentos são constituídos, basicamente de moléculas das proteínas que dão a eles seus nomes, e encontram-se paralelos uns aos outros, conforme mostrados na Figura 2.11. Os filamentos grossos estão localizados no centro do sarcômero. Porém, há evidências de que eles podem se mover do centro em direção à superfície do sarcômero durante uma contração prolongada (HERZOG; NIGG, 1999). Os filamentos grossos são responsáveis pelas áreas escuras do padrão estriado, chamadas bandas A (A = Anisotrópica), como mostrado na Figura 2.11. Eles são compostos primariamente de moléculas de miosina, uma extensa proteína, veja (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

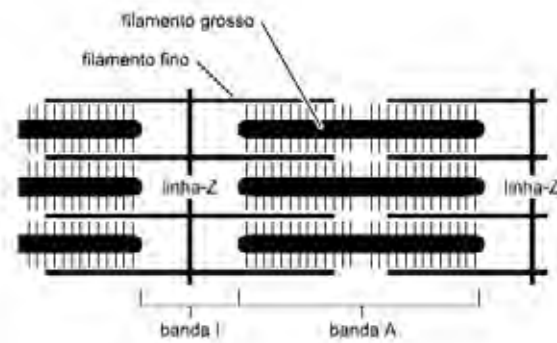


Figura 2.11: Esquema da unidade contrátil básica do músculo, o sarcômero, modificado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

Uma molécula de miosina contém uma longa cauda constituída de meromiosina leve, e uma cabeça globular fixada à cauda, composta de meromiosina pesada, sendo ilustrada na Figura 2.12. A cabeça estende-se para o exterior do filamento grosso. Ela contém um local de fixação para a actina e um local enzimático que catalisa a hidrólise do trifosfato de adenosina (ATP), responsável pela liberação da energia necessária à contração muscular. As moléculas de miosina, de cada metade do filamento grosso, estão dispostas de tal maneira que suas cabeças estão sempre dirigidas para fora do filamento. Por essa razão, as cabeças estão orientadas em direções opostas nas duas metades do filamento, e ao formar pontes cruzadas (i.e., quando as cabeças de miosina se fixam ao filamento fino), estas puxam os filamentos de actina em direção ao centro do sarcômero.

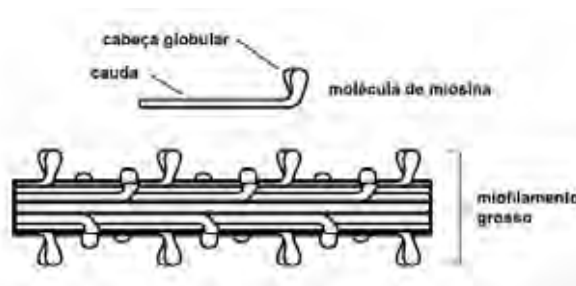


Figura 2.12: Ilustração esquemática do miofilamento grosso, modificado de adaptado (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

Os filamentos finos estão localizados em ambos os lados das linhas Z, dentro dos sarcômeros, como mostrado na Figura 2.11. Eles formam o padrão claro do estriamento do músculo esquelético, isto é, a chamada banda I (I = Isotrópica). A “espinha dorsal” dos filamentos finos é composta de dois cordões de glóbulos de actina ligados em série, ilustrada na Figura 2.13. O diâmetro de cada glóbulo de actina é de aproximadamente 5-6 nm.

Segundo (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006), os cordões de glóbulos ligados em série se cruzam a cada intervalo de cinco a oito unidades, num padrão relativamente aleatório. Os filamentos finos contêm ainda tropomiosina e troponina.

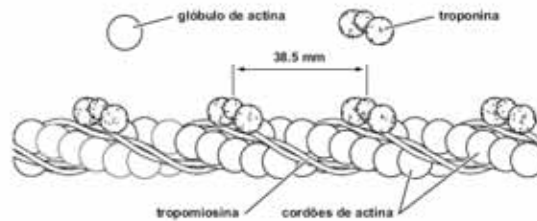


Figura 2.13: Ilustração esquemática do miofilamento fino, composto por duas cadeias de glóbulos de actina ligados em série, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

A tropomiosina é uma longa proteína fibrosa encontrada dentro do sulco formado pelas cadeias de actina, isto visto na Figura 2.13. A troponina está localizada em intervalos de aproximadamente 38,5 nm ao longo do filamento fino. Ela é composta de três subunidades: troponina C, que contém locais para ligação do íon Ca^{++} ; troponina T, que se conecta à tropomiosina; e troponina I, que bloqueia fisicamente o local de fixação da ponte cruzada, no estado de repouso (i.e., na ausência de Ca^{++}). Actina e miosina são, normalmente, referidas como proteínas contráteis, enquanto tropomiosina e troponina são proteínas reguladoras, devido a seu papel na regulação da fixação das pontes cruzadas e na produção da força.

2.2.2 Unidades Motoras

O músculo esquelético é organizado em unidades motoras. Uma unidade motora é definida como um conjunto de fibras musculares, enervadas pelo mesmo neurônio motor, como ilustrada na Figura 2.14. Uma pequena unidade motora, de um pequeno músculo, que necessite de um controle extremamente, fino pode consistir de umas poucas fibras musculares apenas, enquanto que uma unidade motora de um grande músculo esquelético humano pode conter mais de 2000 fibras musculares. Quando um neurônio motor é estimulado suficientemente, um potencial de ação percorre seu axônio, chegando a todas as fibras da unidade motora, que deverão se contrair. Considerando que a força da contração, dentre outros parâmetros, depende do número de fibras ativadas, uma grande unidade motora, que possua um grande número de fibras musculares, pode exercer mais força que uma pequena unidade motora, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

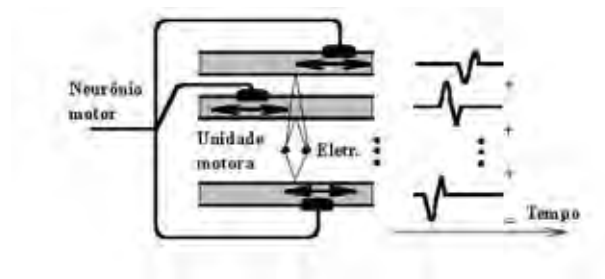


Figura 2.14: Diagrama esquemático de uma unidade motora, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

2.2.3 Contração Muscular

Músculos esqueléticos se contraem em resposta a estímulos eletroquímicos, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006). Células nervosas especializadas, chamadas neurônios motores, propagam potenciais de ação para as fibras musculares esqueléticas. Ao alcançarem o músculo, os axônios dos neurônios motores se dividem em pequenas ramificações, cada uma indo para uma fibra muscular. Normalmente, o neurônio motor alcança uma fibra muscular, próxima de seu centro, formando a então chamada junção neuromuscular ou sinapse, conforme Figura 2.15.

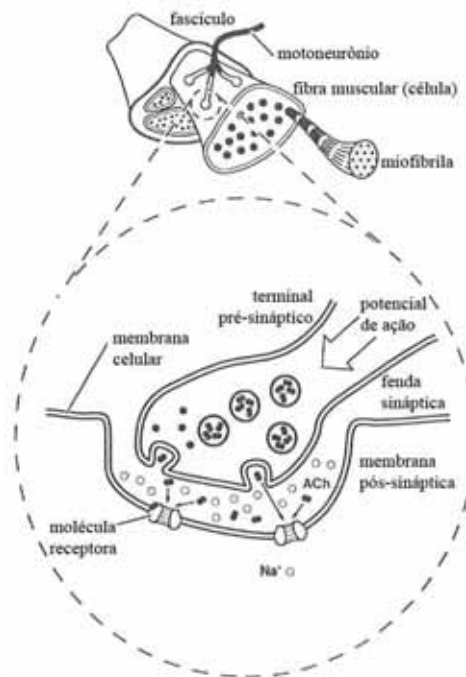


Figura 2.15: Detalhe esquemático da junção neuromuscular, mostrando o neurônio motor e a membrana da célula muscular, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

A junção neuromuscular é formada por um terminal nervoso ampliado, conhecido como terminal pré-sináptico, que se encaixa em pequenas invaginações da membrana celular, a placa motora final ou terminal pós-sináptico. O espaço entre os terminais pré-sináptico e pós-sináptico é a fenda sináptica, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

Quando um potencial de ação de um neurônio motor alcança o terminal pré-sináptico, acontece uma série de reações químicas que culminam na liberação da acetilcolina (ACh) das vesículas sinápticas localizadas no terminal pré-sináptico. A acetilcolina se difunde pela fenda sináptica, liga-se às moléculas receptoras do terminal pós-sináptico, e causa um aumento na permeabilidade da membrana aos íons de sódio Na^+ . Se a despolarização da membrana, devido à difusão dos íons de sódio, exceder a um limiar crítico, um potencial de ação então viajará através da fibra muscular estimulada. A fim de prevenir uma estimulação contínua das fibras musculares, a acetilcolina é rapidamente quebrada em ácido acético, e colina pela acetilcolinesterase, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

O processo de acoplamento excitação-contração envolve a transmissão dos sinais ao longo das fibras nervosas, cruzando a junção neuromuscular, (onde o final do nervo encontra a fibra muscular) e percorrendo as fibras musculares, conforme Figura 2.15. Em repouso, as fibras nervosas e musculares mantêm em seu interior uma carga elétrica negativa, comparada à carga externa (i.e., a membrana está polarizada). Fibras nervosas e musculares são excitáveis, o que significa que elas podem mudar o potencial local da membrana de uma forma característica quando o estímulo excede um determinado limiar. Quando uma membrana muscular despolariza-se além de certo limiar, existe uma súbita mudança em sua permeabilidade, particularmente para os íons de sódio positivamente carregados Na^+ , cuja concentração fora da célula é muito maior que dentro da célula. O fluxo de Na^+ para dentro da célula faz com que a carga no interior desta fique mais positiva. A membrana então diminui a permeabilidade ao sódio e aumenta a permeabilidade aos íons de potássio, que são muito mais abundantes dentro que fora da célula. O fluxo dos íons potássio, positivamente carregados, levados para o exterior da célula provocam a restauração do estado polarizado da membrana excitável. Essa mudança transitória no potencial da membrana é referida como um potencial de ação e dura, aproximadamente 1 ms, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

Ao longo da fibra muscular, este potencial se propaga a uma velocidade em torno de 5-10 m/s, Figura 2.16, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

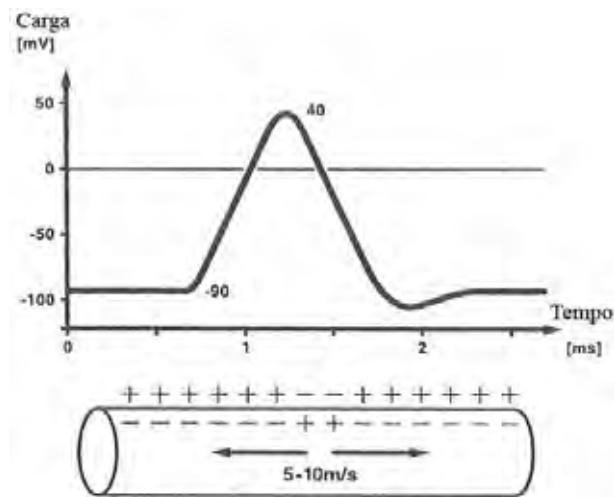


Figura 2.16: Detalhe esquemático da junção neuromuscular mostrando o neurônio motor e a membrana da célula muscular, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

Uma vez que o potencial de ação foi transmitido do axônio do nervo para a fibra muscular na junção neuromuscular, ele se propaga ao longo e ao redor da fibra, alcançando seu interior através das invaginações da membrana celular chamadas túbulos-T, conforme ilustrada na Figura 2.17. A despolarização dos túbulos-T causa a liberação dos íons Ca^{++} da cisterna terminal do retículo sarcoplasmático (estrutura membranosa em forma de saco que armazena cálcio) dentro do sarcoplasma que envolve as miofibrilas, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

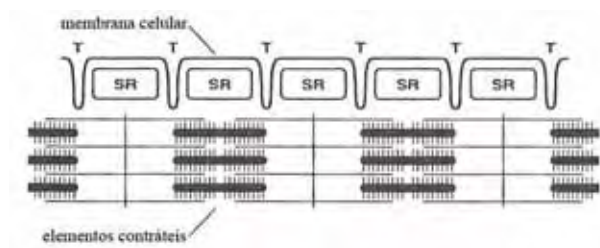


Figura 2.17: Ilustração esquemática dos túbulos T numa seção de uma fibra muscular, e sua associação com o retículo sarcoplasmático (RS) e os miofilamentos contráteis, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

Os íons Ca^{++} ligam-se a locais específicos das moléculas de troponina dos filamentos finos, e então removem o mecanismo inibitório que, naturalmente, impede a formação das pontes cruzadas no estado de repouso Figura 2.18.

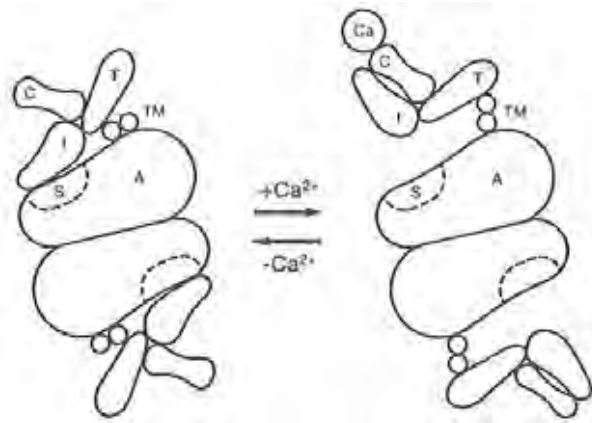


Figura 2.18: Ilustração esquemática da regulação excitatória/inibitória da ligação da ponte cruzada no filamento de actina (A). Sem cálcio (esquerda), a tropomiosina (TM) e o complexo troponina (troponina T, C, e I) permanecem numa configuração que bloqueia o local de fixação da ponte cruzada (S). Acrescentando cálcio Ca^{++} , este se liga num ponto específico da troponina (troponina C) e altera a configuração do complexo tropomiosina-troponina deixando o caminho livre para a conexão da ponte cruzada, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

As pontes cruzadas fixam-se, então, aos locais apropriados dos filamentos finos e, através da quebra do ATP em difosfato de adenosina (ADP) mais um íon fosfato (Pi), a energia necessária é fornecida para fazer com que a cabeça da ponte cruzada mova-se e, assim, tente puxar os filamentos finos sobre os filamentos grossos, mostrada na Figura 2.19. Ao final do movimento da ponte cruzada, uma molécula de ATP se fixa à miosina da ponte cruzada de modo que esta possa se liberar do seu local de fixação, retornando à sua configuração original, estando pronta para um novo ciclo de ligação. Esse ciclo repete-se por si só enquanto a fibra muscular estiver estimulada. Quando a estimulação cessa, os íons Ca^{++} são ativamente transportados de volta ao retículo sarcoplasmático, resultando num decréscimo de íons Ca^{++} no sarcoplasma. Como consequência, os íons Ca^{++} se difundem para longe de seus locais de fixação na molécula de troponina, finalizando o ciclo das pontes cruzadas, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

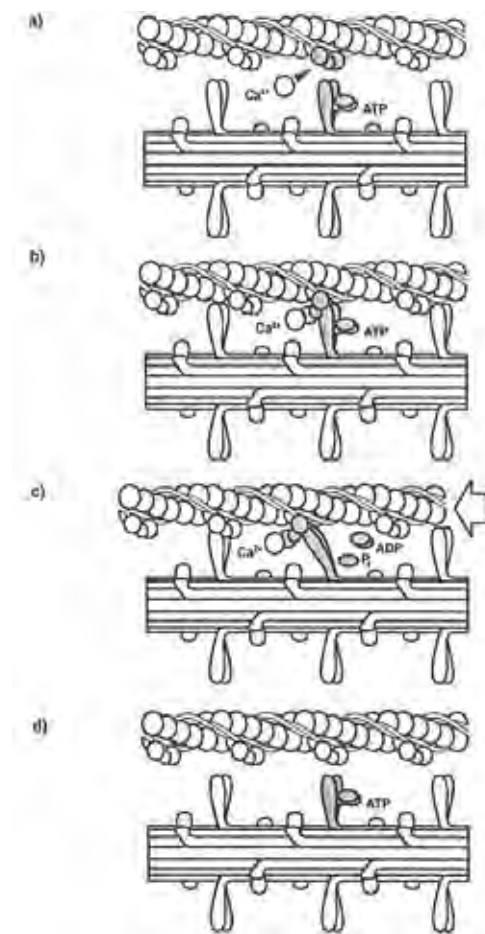


Figura 2.19: Ilustração esquemática do ciclo da ponte cruzada. (a) O músculo em repouso. O ponto de fixação sobre o filamento fino está coberto pelo complexo tropomiosina-troponina. O ATP está ligado à miosina da ponte cruzada. (b) Em ativação, a concentração de cálcio aumenta no sarcoplasma e o íon Ca^{++} liga-se à troponina C, causando uma mudança na configuração que expõe o ponto de conexão da actina. (c) A ponte cruzada se fixa à actina e sofre uma alteração. A quebra do ATP em ADP e P_i fornece a energia que resulta na contração, i.e., o movimento do filamento fino sobre o grosso. (d) Um novo ATP se fixa na ponte cruzada, e esta, agora, pode se desconectar do filamento fino, estando pronta para uma nova interação com outro local do filamento fino, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

2.2.4 Propriedade Física

De acordo com (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006), as propriedades de força-alongamento das estruturas músculo-esquelético passivas como ligamentos, ossos e cartilagens, são essenciais para um entendimento de sua função num sistema biológico intacto. Não obstante, duas importantes propriedades dos músculos são exaustivamente usadas

em experimentos biomecânicos envolvendo músculos ou o sistema músculo-esquelético. Essas propriedades são as relações força-comprimento e força-velocidade dos músculos, as quais serão discutidas a seguir.

As relações força-comprimento e força-velocidade dos tecidos esqueléticos musculares foram determinadas em diversos sub-níveis, como no sarcômero, na fibra isolada, no músculo isolado e nos músculos intactos; e, dependendo do nível de interesse, essas relações devem ser interpretadas diferentemente. Além disso, os termos relação força-comprimento e relação força-velocidade, sugerem um procedimento experimental ou um pensamento teórico governado por condições definidas. Por exemplo, é comum avaliar as relações de força-comprimento de um músculo sob condições isométricas, com o músculo em ativação máxima. As propriedades força-comprimento e força-velocidade são diferentes entre os músculos. A seguir, serão discutidas tanto as propriedades musculares como também o seu relacionamento com as demandas funcionais.

2.2.5 Relação Força-Comprimento

Como descrito em (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006), as relações força-comprimento se referem às relações entre a máxima força que um músculo (ou fibra, ou sarcômero) pode exercer e o seu comprimento. Elas são obtidas sob condições isométricas e para ativação máxima do músculo. O termo isométrica pode se referir ao comprimento do músculo inteiro, ao comprimento de uma fibra ou mesmo de um sarcômero, dependendo do nível investigado. Em 1966, Gordon, A.F. Huxley e Julian publicaram os resultados de um estudo clássico no qual eles mostraram que a produção de força em fibras isoladas de um músculo esquelético de rã dependiam do comprimento do sarcômero. Os resultados experimentais se mostraram de acordo com previsões teóricas baseadas na teoria da ponte cruzada ou teoria dos filamentos deslizantes, tornando-a o paradigma primário para descrever a produção de força muscular.

Para longos comprimentos de sarcômero, os filamentos grossos e finos interrompem sua sobreposição, impossibilitando a formação das pontes cruzadas, e, portanto, a força correspondente torna-se igual a zero. No músculo estriado da rã, a força nula é verificada quando o comprimento do sarcômero é da ordem de $3,6 \mu m$, que é a soma do (comprimento do filamento grosso ($1,6 \mu m$), mais o comprimento do filamento fino ($1,9 \mu m$) e mais a largura do disco Z ($0,1 \mu m$), conforme Figura 2.21e.

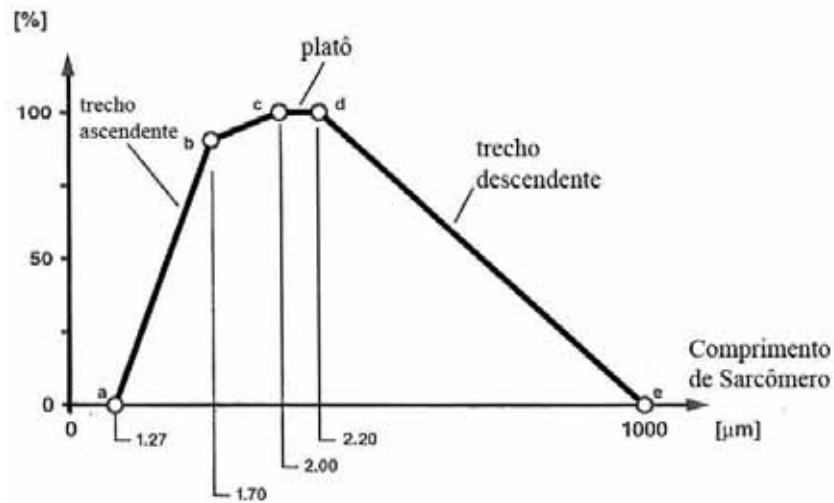


Figura 2.20: Relação teórica de força-comprimento para fibras individuais de músculo esquelético de rãs, adaptado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

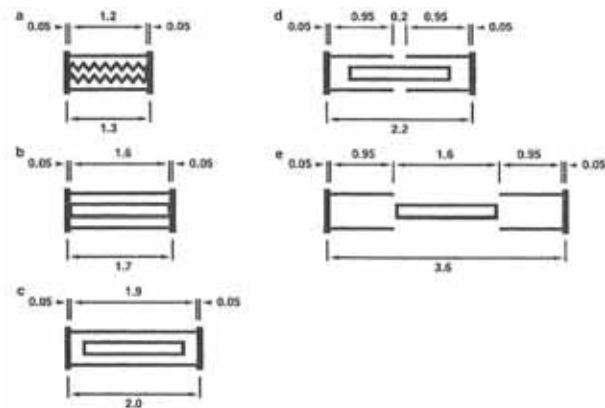


Figura 2.21: Note que as letras do gráfico estão associadas às diversas configurações de sarcômero mostradas.

O encurtamento dos sarcômeros aumenta o número de pontes cruzadas de forma linear com o comprimento do sarcômero ou, similarmente, com a sobreposição dos filamentos grosso e fino, até o número máximo de pontes cruzadas possível de serem atingidos, como mostra a Figura 2.21d. Essa sobreposição ótima corresponde ao comprimento de sarcômero igual a $(2,2 \mu m)$ no músculo da rã (duas vezes o comprimento do filamento fino $(1,9 \mu m)$, mais a largura do disco Z $(0,1 \mu m)$), mais a largura da zona H $(0,2 \mu m)$). Encurtamentos adicionais do sarcômero até $(2,0 \mu m)$, (Figura 2.21c: o dobro do comprimento do filamento fino $(1,9 \mu m)$, mais a largura do disco Z $(0,1 \mu m)$) aumentam a área sobreposta entre os filamentos mas não altera o número de pontes cruzadas, visto que a região média do filamento grosso não contém pontes cruzadas. Assim, a força permanece

constante entre $(2,0 \text{ } \mu\text{m})$ e $(2,2 \text{ } \mu\text{m})$.

O encurtamento do sarcômero abaixo de $(2,0 \text{ } \mu\text{m})$ têm sido associado a um decréscimo de força causada pela interferência dos filamentos finos que começam a se sobrepor entre si. Abaixo de $(1,7 \text{ } \mu\text{m})$, conforme a (Figura 2.21b: comprimento do filamento grosso $(1,6 \text{ } \mu\text{m})$, mais a largura do disco Z $(0,1 \text{ } \mu\text{m})$ a taxa de decréscimo da força torna-se mais alta que entre $(1,7 \text{ } \mu\text{m})$ e $(2,0 \text{ } \mu\text{m})$. Este declínio acentuado da força, para um determinado encurtamento do sarcômero, tem sido associado à força requerida para deformar o filamento grosso. Para um comprimento de sarcômero de $(1,27 \text{ } \mu\text{m})$, as forças determinadas experimentalmente no músculo da rã tornaram-se nulas (GORDON; HUXLEY; JULIAN, 1966).

2.2.6 Relação Força-Velocidade

A relação força-velocidade de um músculo é definida como a razão entre a máxima força do músculo e sua taxa instantânea de mudança de comprimento. As propriedades de força-velocidade são determinadas em condições de ativação máxima do músculo e são normalmente obtidas para um comprimento ótimo dos sarcômeros, ilustrado na Figura 2.22, conforme (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

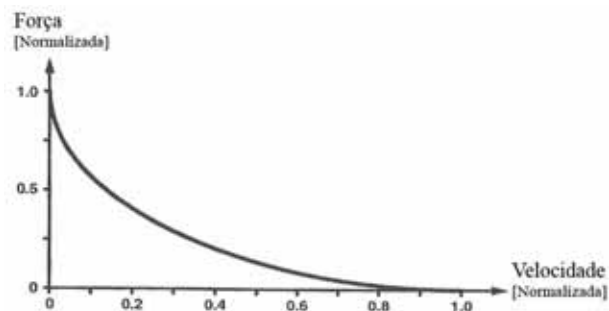


Figura 2.22: Relação força-velocidade normalizada do músculo esquelético contraído concentricamente, modificado de (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

(HILL, 1970) estabeleceu que a eficiência do movimento humano varia em função da velocidade do movimento. Ou seja, para uma dada quantidade de trabalho, a energia utilizada (medida da eficiência) aumentava para velocidades crescentes de contração muscular (i.e., a eficiência diminuía). (FENN; MARSH, 1935) foram os pioneiros na realização de experimentos e publicação de resultados sobre as propriedades de força-velocidade dos músculos, e seu trabalho foi seguido pelo clássico estudo de (HILL, 1938), que disse ter "tropeçado" na relação de força-velocidade enquanto estudava a produção de calor de

músculos esqueléticos isolados de rã. Hill, e provavelmente a maior parte dos fisiologistas musculares que o sucederam, pensaram na propriedade de força-velocidade de um músculo como a aplicação de uma força no músculo e a medida da correspondente velocidade de encurtamento (2.2):

$$v = \frac{b(F_0 - F)}{F + a}, \quad (2.2)$$

sendo:

- v = velocidade de encurtamento
- F_0 = força máxima para velocidade nula e comprimento ótimo do sarcômero
- F = força instantânea
- a , b = constantes com unidades de força e velocidade, respectivamente

De maneira alternativa, muitos experimentos em biomecânica tomam a velocidade do movimento como uma variável independente e medem a força correspondente (variável dependente). Para realização de tais experimentos em músculos esqueléticos intactos, baseados nessa idéia, os pesquisadores utilizam as chamadas máquinas "isocinéticas". Nesses casos, a equação (2.2) pode ser reestruturada para se obter a equação:

$$F = \frac{(bF_0 - av)}{(b + v)}. \quad (2.3)$$

Se v for igual a zero na equação (2.3), tem-se a medida da força sob condições isométricas. Nessa situação, F torna-se igual a F_0 . Se a força externa, que está agindo sobre o músculo (F), for igual a zero, a equação (2.3) pode ser resolvida para v , a qual, sob essas circunstâncias, corresponde à velocidade máxima de encurtamento v_0 :

$$v_0 = b \frac{F_0}{a}. \quad (2.4)$$

Ou ainda:

$$\frac{a}{F_0} = \frac{b}{v_0} = \text{constante}. \quad (2.5)$$

Valores típicos para a/F_0 e b/v_0 , são da ordem de 0,25 para músculos esqueléticos de uma variedade de animais, incluindo rã (HILL, 1938), rato (CLOSE, 1964) e pequenos

gatos (CLOSE; HOH, 1967). As equações (2.2) ou (2.3) podem ser obtidas para fibras ou músculos preparados in vitro determinando-se F_0 , e então F e v , para uma variedade de diferentes velocidades de contração. As constantes a e b podem então ser determinadas de maneira que a equação obtida proporcione um melhor ajuste aos dados experimentais.

Para estudos biomecânicos, é interessante descrever as propriedades de força-velocidade para os músculos esqueléticos humanos intactos. Considerando que a aproximação experimental é limitada nessa situação, as relações de força-velocidade podem ser obtidas estimando-se primeiro F_0 e v_0 , e, depois resolvendo-se a equação (2.5), para as constantes a e b . Uma vez que a e b foram determinados, as equações (2.2) ou (2.3) podem ser usadas, tendo-se como entrada as forças para se calcular as velocidades correspondentes ou as velocidades para se calcular as forças correspondentes.

Para se estimar as propriedades de força-velocidade do músculo esquelético humano intacto, é necessário conhecer a área de seção transversal fisiológica (PCSA) e o comprimento médio ótimo de fibra l_0 , comprimento no qual o músculo desenvolve a força isométrica máxima do músculo F_0 . Uma vez que esses dois valores estão diretamente relacionados a F_0 e v_0 , respectivamente. Uma forma comum para estimar (PCSA) portanto é:

$$PCSA = \frac{M \cos(\Theta)}{\rho f_l}, \quad (2.6)$$

sendo M a massa muscular, Θ é o ângulo penado, ρ é a densidade muscular (1.06g/cm^3) e f_l é o comprimento da fibra.

Pesquisas sobre os músculos esqueléticos de mamíferos, conforme citado em (HERZOG; NIGG, 1999), mostram que para os mamíferos conclui-se que,

$$F_0 \approx 25\text{N/cm}^2 \times PCSA. \quad (2.7)$$

Assumindo-se, como exemplo, ao estimar as propriedades de força-velocidade do músculo humano *vasto lateral*, que os valores médios obtidos em experimentos são 50 cm^2 para PCSA e 12 cm para l_0 , portanto,

$$F_0 \approx 25\text{N/cm}^2 \times 50\text{cm}^2 \approx 1250\text{N}, \quad (2.8)$$

$$v_0 = 6 \frac{l_0}{s}, \quad (2.9)$$

para músculos predominantemente constituídos de fibras de contração lenta e,

$$v_0 = 16 \frac{l_0}{s}. \quad (2.10)$$

para músculos formados predominantemente de fibras de contração rápida (ex. Spector et al., 1980). sendo s base de tempo em segundos.

Assim $F_0 = 1250\text{N}$ e $v_0 = 72\text{cm/s}$ ou $v_0 = 192\text{cm/s}$, dependendo do tipo de fibra contido no vastus lateralis. Considerando-se que os músculos esqueléticos humanos geralmente apresentam uma mistura de fibras em sua composição (i.e., possuem tanto fibras lentas como rápidas), pode-se adotar uma aproximação estatística para se obter as relações de força-velocidade.

As propriedades de força-velocidade de um músculo de composição mista de fibras podem ser calculadas através da separação do músculo inteiro em unidades de fibras lentas e rápidas, ou ainda, em uma escala contínua de fibras lentas a rápidas, pesando suas respectivas contribuições para o comportamento total de força-velocidade do músculo, em conformidade com a informação disponível sobre a distribuição dos tipos de fibras dentro do músculo (HILL, 1970).

A partir dos resultados das equações (2.7), (2.9) e (2.10), as constantes a e b podem ser determinadas usando:

$$\frac{a}{F_0} = \frac{b}{v_0} = 0.25. \quad (2.11)$$

Assim, para fibras de contração lenta:

$$\begin{aligned} a &= 0.25 \times 1250 \text{ N}, \\ b &= 0.25 \times 72 \text{ cm/s}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

e para fibras de contração rápida:

$$a = 0.25 \times 1250 \text{ N},$$

$$b = 0.25 \times 192 \text{ cm/s.} \quad (2.13)$$

Tendo determinado F_0 e as constantes a e b para o vastus lateralis humano, sua força como função da velocidade de encurtamento (i.e., sua relação força-velocidade) pode agora ser calculada pela equação (2.2). Considerando que a equação (2.2) foi deduzida, originalmente, para músculos, à temperatura de 0°C , levanta-se a questão se a equação (2.11) também é válida para a temperatura fisiológica dos músculos (i.e., 37°C em humanos). Valores para $a = F_0$ parecem ser largamente independentes da temperatura (HILL, 1938), enquanto que, b e v_0 mudam em função da temperatura. Como primeira aproximação, pode-se assumir, entretanto, que a relação $b = v_0$ permanece aproximadamente constante numa larga escala de temperaturas musculares (HERZOG; NIGG, 1999) e (NAVES, 2006).

2.3 Modelo Matemático do Músculo

Em 1938, Hill propôs um sistema mecânico análogo a um músculo e mostrou que o comportamento funcional de todos os elementos constituintes de seu modelo é não-linear. O modelo de (HILL, 1938), tipicamente, é composto por um elemento contrátil (CE- do inglês Contractile Element), um elemento elástico em paralelo (PEE- do inglês Parallel Elastic Element) e outro elemento elástico em série (SEE- do inglês Series Elastic Element).

O elemento contrátil representa a ação dos filamentos deslizantes da miofibrilas (HUXLEY, 1957). Seu estudo abordou a geração de força produzida durante o estímulo elétrico, e pode ser representada por um modelo massa-mola, que explica o fenômeno da contração muscular. O elemento elástico em paralelo, resiste a alongamentos e encurtamentos. Isso pode representar os vários tipos de fâscias e membranas que estão paralelas ao filamento. Todo tecido em série com a componente da tração, incluindo o tendão, é chamado elemento de elasticidade do tecido ou simplesmente elemento elástico em série.

A relação força-velocidade (i.e., força do músculo é máxima quando a velocidade é nula) sugere que há uma resistência dinâmica ao movimento, ou que a força é dissipada para superar uma resistência viscosa inerente ao tecido. Isso sugere um amortecedor viscoso em paralelo com o elemento contrátil. O modelo pode ser expresso matematicamente, como uma série de equações diferenciais. A solução pode explicar o comportamento das propriedades mecânicas do músculo. Usa-se a transformada de Laplace para obter soluções mais simplificadas desse modelo (FENN; MARSH, 1935).

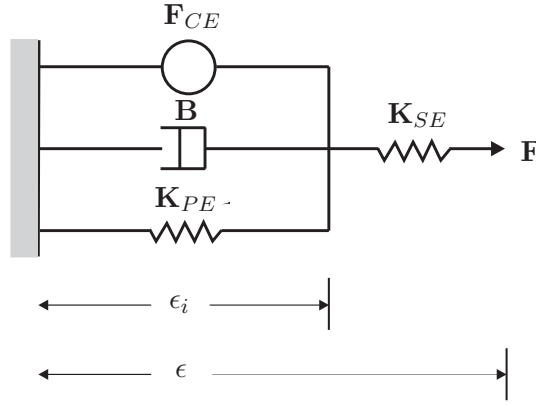


Figura 2.23: Modelo de músculo a quatro elementos, adaptado de (FREIVALDS, 2004).

Na Figura 2.23 é mostrado o modelo do músculo, ativo de quatro elementos, sendo F_{CE} a força produzida pelo elemento contrátil, B coeficiente de Coulomb do amortecimento viscoso, K_{PE} elemento elástico paralelo, K_{SE} elemento elástico em série, ϵ_i o comprimento inicial do músculo e ϵ a extensão final do músculo, conforme (FREIVALDS, 2004).

2.3.1 Modelo Matemático do Músculo por Hill

Experimentos de (FENN; MARSH, 1935) e depois usados por (HILL, 1938) conduzem à propriedade da relação força-velocidade, veja a Figura 2.22. Em termos do modelo viscoelástico de Hill, a equação (2.14) pode ser usada para aproximar a condição inicial (i.e., velocidade próxima de zero ou mínima deformação) da relação força-velocidade. A condição inicial fornece um valor aproximado para o parâmetro do amortecimento viscoso (B), representado na Figura 2.23. Expandindo a equação de (HILL, 1938) encontra-se,

$$(F + a)(v + b) = (F_0 + a)b. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é uma generalização da equação estudada por (HILL, 1938) (2.2). Multiplicando e subtraindo termos comuns, chega-se à equação (2.15):

$$F_0 - F = \frac{(a + F_0)}{(v + b)}v. \quad (2.15)$$

ou seja,

$$F_0 - F = Bv. \quad (2.16)$$

De acordo com a equação (2.16), pode-se aproximar a solução para determinar o parâmetro do amortecedor viscoso, como mostrado na Figura 2.24. No modelo simplificado de Hill, considera-se pequenos movimentos. O elemento elástico paralelo é negligenciável devido ao amortecedor viscoso não conseguir se mover instantaneamente e fornecer uma resistência inerente ao movimento.

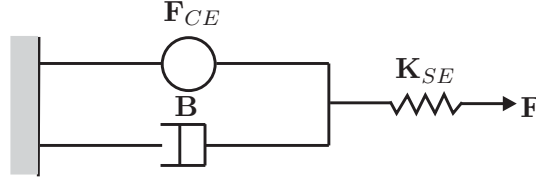


Figura 2.24: Modelo do músculo de Hill simplificado, adaptado de (FREIVALDS, 2004).

A partir dos experimentos realizados, (HILL, 1938) determinou os valores das constantes desconhecidas a e b das variáveis determinadas experimentalmente $F_0/4$ e $v_0/4$. Esses valores estão de acordo com a equação (2.11). Substituindo esses valores na expressão para B , encontra-se:

$$B = \frac{(1.25F_0)}{\left(v + \frac{v_0}{4}\right)}. \quad (2.17)$$

Para valores da velocidade muito menores do que $v_0/4$, (B) torna-se constante. Portanto a condição inicial da curva força-velocidade pode ser usada para estimar (B) .

2.3.2 Resposta Ativa do Músculo

A resposta ativa do músculo, pode ser baseada no modelo de quatro elementos de Hill, conforme mostrado na Figura 2.23. Ela pode ser mais facilmente obtida através da função de transferência do músculo:

Da Figura 2.23, encontram-se duas equações de equilíbrio.

$$\begin{aligned} F(s) &= F_{CE} + Bs\epsilon_i + K_{PE}\epsilon_i, \\ F(s) &= K_{SE}(\epsilon - \epsilon_i). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Fatorando a equação (2.18), encontra-se a expressão para a força externa produzido pelo músculo, como função da força do elemento contrátil produzido pela atividade mus-

cular (FREIVALDS, 2004):

$$F = \frac{K_{SE} F_{CE}}{B_s + K_{PE} + K_{SE}} + \frac{K_{SE} (B_s + K_{PE})}{B_s + K_{PE} + K_{SE}} \epsilon. \quad (2.19)$$

2.3.3 Modelo Multi-Elemento de Hatze

Em (FREIVALDS, 2004), evidencia que (HATZE, 1981) desenvolveu, um modelo consideravelmente mais complexo que o modelo a quatro elementos de (HILL, 1938). Ele é chamado modelo distribuído, porque inicia no nível do sarcômero, modelando todas as estruturas individuais melhor que o modelo de (HILL, 1938).

Como no modelo de (HILL, 1938), os filamentos dos elementos contráteis são representados por CE_i . O elemento elástico de cada sarcômero PS_i representa a fásia que circunda as fibras musculares internas do sarcolema ou endomísio, mas não inclui um componente amortecido individualmente. Os sarcolemas estão fixados firmemente nos discos-Z e não possibilitam movimento apreciável. O elemento amortecido DE_i está contido na fibra externa da estrutura e está paralelo à fibra inteira. Os elementos séries são particionados em alguns componentes: um elemento BE_i representando as estruturas elásticas dentro das pontes cruzadas e um elemento elástico série para o disco-Z SE_1 . Finalmente, o elemento elástico em série SE_2 representa a parte do tendão. Na Figura 2.25, são mostrados em detalhes os elementos descritos por (HATZE, 1981).

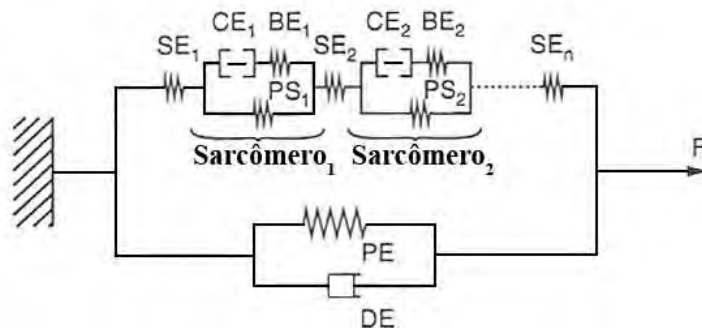


Figura 2.25: Modelo distribuído de (HATZE, 1981), adaptado de (FREIVALDS, 2004).

Obviamente, com centenas de milhares de sarcômeros, um modelo distribuído torna-se impossível para trabalhar. Isso justifica, porque todos os sarcômeros de uma fibra são

mais ou menos iguais e ativados aproximadamente ao mesmo tempo. Então, um modelo concentrado pode ser obtido, sendo com certeza, mais apropriado. O modelo de (HATZE, 1981) é ilustrado na Figura 2.26.

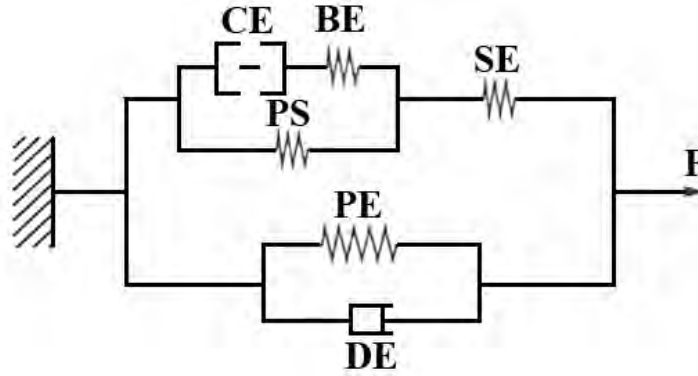


Figura 2.26: Modelo concentrado do músculo de Hatze, adaptado de (FREIVALDS, 2004).

Outras idealizações podem simplificar mais ainda o modelo de (HATZE, 1981). Em (BAWA; MANARD; STEIN, 1976), o elemento série SE e o elemento das pontes cruzadas BE podem ser considerados rígidos e desprezados. Eliminando-se SE e BE, tem-se como resultado um modelo a quatro elementos, dois dos quais são elásticos e podem combinar em um único elemento paralelo elástico. O modelo simplificado é mostrado na Figura 2.27.

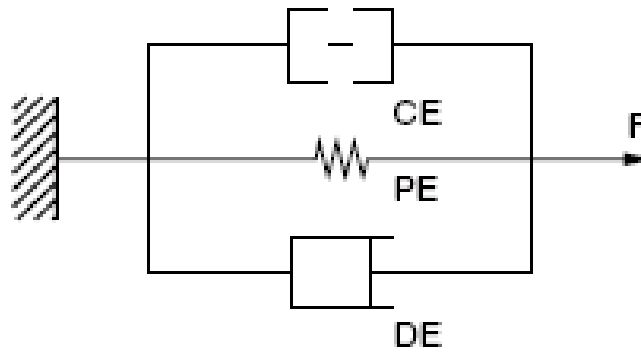


Figura 2.27: Modelo simplificado de Hatze, adaptado de (FREIVALDS, 2004).

A força total produzida pelo modelo simplificado, mostrado na Figura 2.27 pode ser expressa como,

$$F = (F_{PE} + F_{CE} + F_{DE})F_{max}. \quad (2.20)$$

Nota-se que cada elemento é expresso como uma fração de força, relativa à máxima força produzida pelo músculo. No modelo de (HILL, 1938), assume-se propriedades lineares, o que não é uma afirmação correta. Por exemplo, o elemento elástico PE, sob testes extensivos, do músculo humano sartorius, apresenta uma relação entre força e deformação exponencial, conforme mostrada na Figura 2.27 (YAMADA, 1970):

$$F_{PE} = 0.00163(e^{7.66\epsilon} - 1). \quad (2.21)$$

A dependência da velocidade do elemento amortecedor DE está expresso como um amortecedor viscoso. (ALEXANDER; JONHSON, 1965) relatam a propriedade do amortecimento, como a relação força-velocidade (FREIVALDS, 2004). (BAWA; MANARD; STEIN, 1976) encontraram, em suas pesquisas, que o coeficiente de amortecimento varia de $0.2F_{max} < F_{DE} < 0.6F_{max}$.

A força do elemento contrátil F_{CE} pode ser modelado pelas propriedades básicas do músculo: (A relação força-comprimento, a relação força-velocidade e a relação do estado de ativação), definidas por (HATZE, 1981)), que desenvolveu um modelo mais complexo de que os quatro elementos de (HILL, 1938) e pode explicar melhor o conceito da excitação neural. De (FREIVALDS, 2004) encontra-se,

$$F_{CE} = f_{act}(t) \times f_l(\epsilon) \times f_v(\dot{\eta}). \quad (2.22)$$

sendo $\dot{\eta} = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_{MAX}}$, relação entre a deformação normalizada e a pela máxima deformação permitida.

Na Figura 2.27 são definidos os seguintes parâmetros,

- $f_{act}(t)$, a força resultante devido a função de ativação $q(t)$,
- $f_l(\xi)$, a relação força-comprimento,
- $f_v(\dot{\eta})$, a relação força-velocidade.

O estudo de (Hatze, 1981), produziu equações aproximadas para interpretação das propriedades do músculo. Equações estas que foram seguidas e são adaptadas, até hoje, por demais autores que o sucederam. O trabalho de (GORDON; HUXLEY; JULIAN, 1966), (HATZE, 1981) adaptou uma função para expressar a relação força-comprimento,

$$f(\xi) = 0.32 + 0.71e^{-1.112(\xi-1)} \sin 3.722(\xi - 0.656), \quad (2.23)$$

sendo $f(\xi)$ a expressão para a força-comprimento, $\xi = l/l_0$ com l variando no intervalo $0 \leq l \leq 1.8 \text{ (cm)}$.

A função do estado de ativação é dada por,

$$f_{act} = \frac{0.005 + 82.63v^2(1 - e^{-mt})^2}{1 + 82.63v^2(1 - e^{-mt})^2}. \quad (2.24)$$

sendo v a razão de estimulação relativa variando entre 0 e 1.

E por último expressa-se a relação força-velocidade:

$$f(\dot{\eta}) = \frac{0.1433}{0.1074 + e^{-1.409 \sinh(3.2\dot{\eta} + 1.6)}}. \quad (2.25)$$

A propriedade de ativação de elemento contrátil está em função do estado de ativação. A força relativa da força do estado de ativação f_{act} é definida pela quantidade relativa de Cálcio Ca^{++} , liberada para retirada do mecanismo inibitório das cabeças de miosina. Se o máximo número de potencial do sítio está ativo e todos os filamentos são expostos pela ação de Ca^{++} , então $q(t) = 1$, enquanto em repouso, é denominado $q_0(t) = 0.005$. A força isométrica desenvolvida por uma fibra muscular, em um dado comprimento l_q , é diretamente proporcional a $q(t)$ (HATZE, 1981). O equacionamento de (HATZE, 1981), foi desenvolvido em (FREIVALDS, 2004). O estado de ativação é dado por,

$$q(\xi, \gamma) = \frac{q_0 + \rho^2(\epsilon)\gamma_c^2}{1 + \rho^2(\epsilon)\gamma_c^2}, \quad (2.26)$$

sendo,

$$\rho(\epsilon) = 125.780 \frac{\epsilon + 1}{1.9 - \epsilon}. \quad (2.27)$$

Verifica-se através de análise, para encontrar a função de ativação $q(t)$, defina γ_c como a diferença entre a concentração de cálcio livre Ca^{++} (γ_{cf}) e a concentração em repouso na fibra (γ_{c0}). Então, dados práticos que $\gamma_{c0} \ll \gamma_{cf}$ e γ_c, γ_{cf} são basicamente idênticos.

Em (HATZE, 1981), mostra-se detalhadamente o desenvolvimento das equações (2.26) e (2.27), que produzem o resultado da equação (2.24). A razão de contração m depende do tempo de contração muscular t_c . O tempo de contração está em função do tipo de fibras

da unidade motora, podendo ser de características lentas e/ou rápidas. Uma expressão aproximada por (Hatze, 1981) é definida como:

$$m = \frac{0.372}{t_c}. \quad (2.28)$$

Outro fator adicional a ser considerado é que o estado de ativação varia depende do tipo das unidades motoras e da razão de estimulação relativa. Considerando dois grupos de populações, o tipo Tipo I (refere-se a fibras lentas), e o Tipo II (refere-se a fibras rápidas). Isto conduz a seguinte equação,

$$F = (F_{PE} + F_{CEI} + F_{CEII} + F_{DE})F_{max} \quad (2.29)$$

O modelo foi aqui apresentado resumidamente. Maiores informações podem ser encontradas em (FREIVALDS, 2004).

2.3.4 Modificação de Zajac no Modelo de Hill

Desde a introdução do modelo de (HILL, 1938), a mais notável modificação foi realizada por (ZAJAC, 1989). Zajac baseou-se em Hill, mas estendendo seu conceito na inclusão da conexão do tendão e consideração de ângulos das fibras em relação à tensão do músculo, denominado *ângulo penado*. Na Figura 2.5, a é denominado o ângulo penado, definido como o ângulo entre o músculo e o tendão.

Baseado na geometria, as propriedades do músculo-tendão força-comprimento-velocidade podem ser definido por:

$$\frac{dP_T}{dt} = \frac{k_T k_{M\alpha} \cos(a)}{k_{M\alpha} \cos(a) + k_T} \left[v_{MT} - \frac{k_{SE}}{k_{M\alpha}} v_{ce} \right] \quad (2.30)$$

sendo,

$$k_{M\alpha} = k_M \cos(\alpha) + \left(\frac{P_T}{l_m} \tan^2(a) \right) \quad (2.31)$$

com, v_m , v_{ce} a velocidade do músculo tendão e do elemento contrátil respectivamente.

A dedução completa da força produzida P_T , do modelo de Zajac, é apresentado em (VIGNES, 2004).

2.4 Modulação da Força Muscular pela Curva de Recrutamento

Devido à natureza do músculo, sinais eletricamente estimulados são de vários formatos. São geralmente escolhidos para serem trens de pulsos retangulares, que podem ser modulados por amplitude, largura de pulso ou interpulso (IPI). Os estudos, inicialmente propostos por (CHIZECK et al., 1983), mostram bom desempenho em malha fechada, analisando-se as características experimentais da resposta de entrada e saída do músculo. A força muscular pode ser modulada pelo número de fibras musculares, denominado de *Recrutamento*, que envolve a variação de número de estados ativos das fibras pela variação da amplitude ou duração, i. e. largura de pulso.

Sendo não-linear, em geral a inclinação da curva da força versus amplitude do pulso ou largura do pulso depende do nível de recrutamento, do comprimento do músculo e da localização dos eletrodos, como também de outros fatores (CRAGO; PECKHAM; THROPE, 1980). Pelos estudos de (CHIZECK et al., 1983) a modulação por largura de pulso é o método mais adequado para o recrutamento das fibras.

A forma dessa relação determina o grau de proporcionalidade que pode ser realizado, sendo de fundamental importância para uso em controle de malha aberta ou fechada. O nível de recrutamento pode ser modulado, variando a amplitude ou a largura do pulso, as duas técnicas foram estudadas com experimentos em animais e seres humanos e mostram bons resultados quando se fixa uma e varia a outra.

A curva que relaciona o estímulo é não-linear, e suas regiões são mostradas na Figura 2.28.

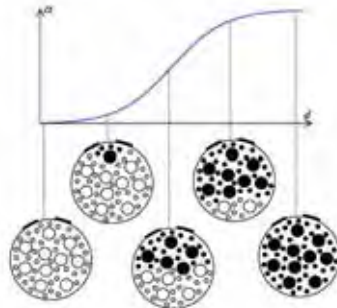


Figura 2.28: Curva de recrutamento das fibras, adaptado de (MAKSSOUD; GUIRAUD; POIGNET, 2004)

α o grau da ativação muscular e d duração do estímulo.

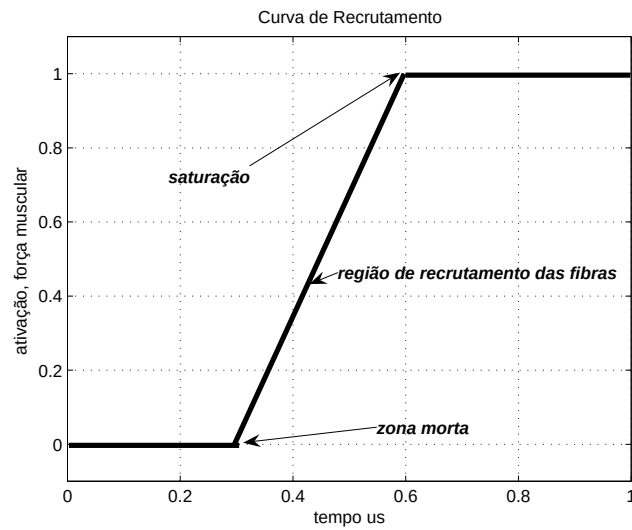


Figura 2.29: Nomenclatura das regiões da curva.

Na Figura 2.29, define-se uma região denominada de zona morta, na qual o estímulo não é suficiente para produzir nenhuma ativação ou força muscular. Na região de recrutamento há uma relação não-linear entre o estímulo e as fibras recrutadas. Na região de saturação, nenhuma fibra é recrutada.

Existe pouca diferença entre a modulação por amplitude e largura de pulso no formato das curvas. Entretanto, a curva por modulação de largura de pulso é mais consistente em comparação à modulação por amplitude, quando se obtém a máxima força muscular. Isso indica que uma força pode ser obtida com uma menor carga (Coulomb) por estímulo pela modulação por largura de pulso em comparação com modulação por amplitude (CRAGO; PECKHAM; THROPE, 1980).

Esta curva é adequada para estimar a força produzida em relação ao estímulo. A curva fornece uma proporção direta entre a entrada e a saída medida com sensores. Esses dados, retirados de cada paciente, fornecem um modelo comportamental dos músculos. Nos demais capítulos utilizou-se o modelo matemático do músculo de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000). Os autores usaram uma simplificação para a relação torque produzido pelo estímulo por largura de pulso aplicado, devido a complexidade da modelagem matemática dos músculos, (FERRARIN; PEDOTTI, 2000). Os autores encontraram uma maneira empírica para simplificar a relação de torque produzido por largura de pulso aplicado ao modelo do paciente paraplégico. Neste caso, sendo esta relação uma função de transferência linear,

então, propicia-se um uma boa descrição matemática para o projeto de controladores.

3 *Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno*

3.1 Modelos Locais Lineares

Nessa seção, apresenta-se um procedimento para projetos de sistemas de controle que envolve a construção de modelos fuzzy para sistemas não-lineares.

A idéia básica desses modelos consiste na descrição exata ou aproximada de um sistema não-linear, como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo (TANIGUCHI et al., 2001), (TAKAGI; SUGENO, 1985) e (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998), podendo considerar o comportamento desse sistema em diferentes pontos do seu espaço de estado (TEIXEIRA; ŽAK, 1999). Essa classe de modelos de projeto possibilita que o engenheiro utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos. O modelo global do sistema é obtido através da combinação fuzzy desses modelos lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja considerado um controle de realimentação linear. O regulador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual.

3.1.1 Representação Fuzzy Takagi-Sugeno

Certas classes de sistemas não-lineares podem ser exatamente representadas através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TANIGUCHI et al., 2001). Tem-se a descrição local da planta dinâmica a ser controlada nos termos dos modelos lineares locais:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$ (r é o número de modelos lineares), o vetor de estado $\mathbf{x}(t) \in R^n$, o vetor de entrada $\mathbf{u}(t) \in R^m$, o vetor de saída $\mathbf{y}(t) \in R^q$, $\mathbf{A}_i \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in R^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_i \in R^{q \times n}$. A informação acima é então fundida com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a i -ésima regra tem a forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i &: \text{ Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{ENTÃO} &\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Considerando o modelo fuzzy da equação (3.2), tem-se que por definição $M_j^i, j=1,2,\dots,p$ é o conjunto fuzzy j da regra i , as variáveis premissas $z_1(t), \dots, z_p(t)$, e a função de pertinência $\mu_j^i(z_j(t))$ do conjunto fuzzy M_j^i :

$$w^i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad \mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]. \quad (3.3)$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$w^i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) > 0. \quad (3.4)$$

Para a obtenção de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno para sistemas não-lineares, normalmente adota-se $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t)$ o vetor de estado do sistema não-linear.

Dessa forma, dado um par $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, o sistema fuzzy resultante é tido como a média ponderada dos modelos locais, e é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)), \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \right) \mathbf{u}(t), \\ &= \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

sendo que para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$\alpha_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{w^i(\mathbf{x}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \quad \alpha_i = [\alpha_1, \dots, \alpha_r]^T. \quad (3.6)$$

O sistema não forçado ($\mathbf{u}(t) = 0$) é definido como segue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t), \\ &= \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{3.7}$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t), \\ &= \mathbf{C}(\alpha) \mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{3.8}$$

É importante observar que, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) = 1.\tag{3.9}$$

O exemplo a seguir ilustra a aproximação obtida pelos modelos fuzzy T-S.

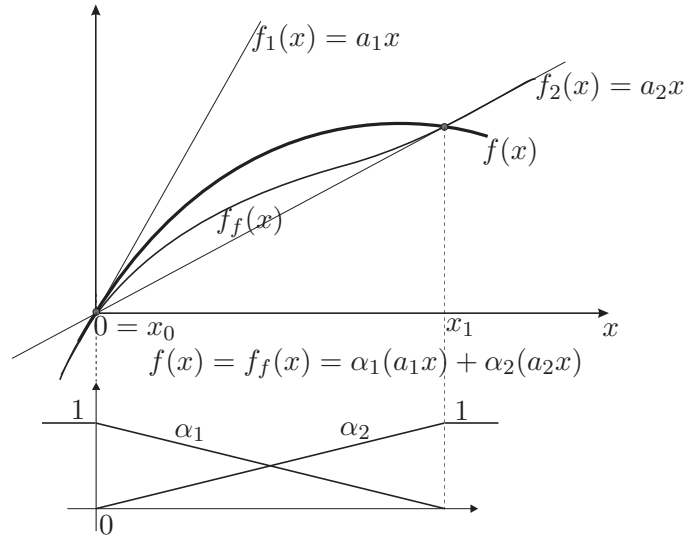


Figura 3.1: Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy T-S.

De (MACHADO, 2003), considerando a função não-linear $f(x)$, ilustrada na Figura 3.1, nota-se que esta pode ser aproximada, para $x \approx x_0 = 0$, por $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$. Uma aproximação linear para essa função, para $x \approx x_1$, é $f_2(x) = a_2x$; observe que essa segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois $f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$.

Considere $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definidas na Figura 3.1. Então, observe que $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ são positivas ou nulas, que $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$ e que um modelo fuzzy T-S para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 3.1. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $\alpha_2 \approx 1$, $\alpha_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Finalmente, verifique que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, por exemplo, para $x_0 \leq x \leq x_1$. Obviamente, se aumentarmos o número de modelos locais, a aproximação torna-se melhor. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos fuzzy T-S, no tratamento de funções e/ou de sistemas não-lineares.

3.1.2 Forma Geral do Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno

É possível representar, exatamente, certas classes de sistemas não-lineares com modelos fuzzy T-S, utilizando-se o método descrito em (TANIGUCHI et al., 2001). Nesse método de construção, os modelos locais são obtidos em função da região de operação. Os modelos utilizam os valores máximos e mínimos das funções não-lineares do sistema. Dessa forma, o número de modelos está diretamente relacionado ao número de funções não-lineares. Esta técnica de construção permite modelar uma grande variedade de sistemas que estejam no intervalo de operação. Portanto, na construção dos modelos não são consideradas particularidades do comportamento das funções não-lineares, mas apenas seus valores extremos. Nesse método, para a determinação dos modelos locais, foi considerada a seguinte classe de sistemas não-lineares (TANIGUCHI et al., 2001):

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(\mathbf{x}(t))u_k(t), \quad (3.10)$$

sendo que $i = 1, 2, \dots, r$, r é o número de regras, n e m denotam, respectivamente, o número de variáveis de estado e entradas e $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ e $g_{ik}(\mathbf{x}(t))$ são funções de $\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$.

Para se obter a forma generalizada desse método, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &\equiv \max_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))\}, & a_{ij2} &\equiv \min_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))\}, \\ b_{ik1} &\equiv \max_{\mathbf{x}(t)} \{g_{ik}(\mathbf{x}(t))\}, & b_{ik2} &\equiv \min_{\mathbf{x}(t)} \{g_{ik}(\mathbf{x}(t))\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para representar o sistema (3.10) com a forma generalizada, são necessários 2^s modelos

locais, sendo s o número de funções não-linearidades existentes no sistema (TANIGUCHI et al., 2001).

3.2 Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

No projeto de reguladores fuzzy, para estabilizar sistemas não-lineares, descritos por modelos fuzzy T-S, considera-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP), (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). A idéia é projetar um compensador para cada regra do modelo fuzzy. Para cada regra, são utilizadas leis de controle baseadas em controle linear. O regulador fuzzy global resultante, que é em geral não-linear, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual. A CDP oferece um procedimento de projeto do regulador para o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo Takagi-Sugeno da planta. O regulador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas. Para o modelo fuzzy (3.2), sendo $i = 1, 2, \dots, r$, os reguladores fuzzy via CDP possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \quad & \text{SE } x_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } x_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{ENTÃO } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_i \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (3.5), o regulador fuzzy é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \\ &= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t), \\ &= -\mathbf{F}(\alpha) \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

O objetivo do projeto do regulador fuzzy é determinar os ganhos de realimentação locais $\mathbf{F}_i$ nas partes conseqüentes. Substituindo a equação (3.13) na equação (3.5), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \left[-\sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t) \right], \quad (3.14)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t). \quad (3.15)$$

O modelo global do sistema é obtido através da combinação fuzzy desses modelos

lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. Então, de (3.15) e (3.9) tem-se que;

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t), \quad (3.16)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t), \quad (3.17)$$

ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t). \quad (3.18)$$

3.2.1 Conceitos sobre a estabilidade

Uma das mais importantes exigências a ser determinada em um sistema de controle é a sua estabilidade (VANANTWERP; BRAATZ, 2000). Para sistemas lineares invariantes no tempo, ferramentas da teoria clássica de controle podem ser aplicadas, dentre elas, o critério de estabilidade de Routh e o critério de estabilidade de Nyquist. Porém, esses critérios não podem ser aplicados nos casos em que o sistema é não-linear, ou linear, mas variante no tempo. Por volta de 1892, A.M. Lyapunov apresentou dois métodos para se determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos, descritos por meio de equações diferenciais. O Método de Linearização de Lyapunov, assim denominado, consiste na utilização das formas explícitas das soluções das equações diferenciais para verificação da estabilidade. Já o segundo, denominado Segundo Método de Lyapunov, não necessita do conhecimento das soluções das equações diferenciais, ou seja, não é necessário resolver as equações de estado para a análise de estabilidade. Esse método apresenta, portanto, maior abrangência em relação aos métodos da teoria de controle convencional, pois permite estender a análise de estabilidade à classe de sistemas não-lineares, ou lineares, mas variantes no tempo.

3.2.2 Função de Lyapunov para Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

As condições suficientes para a estabilidade, através de funções de Lyapunov quadráticas, utilizam funções do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$, com $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$ (isto é, $\mathbf{P}$ é

simétrica e definida positiva). Dada $V(\mathbf{x})$, deve-se derivá-la com relação ao tempo, para verificar a existência de uma matriz $\mathbf{P}$ de modo que $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{V}(\mathbf{0}) = 0$, para as trajetórias $\mathbf{x}(t)$. Se o problema for factível, o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é globalmente assintoticamente estável. Portanto tem-se,

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0. \quad (3.19)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} < 0. \quad (3.20)$$

Considere por definição,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.21)$$

Para modelos fuzzy contínuos no tempo, pode-se obter as condições suficientes para a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$, através de funções de Lyapunov quadráticas do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$ que é de grande importância para o projeto do regulador e de observador de estado.

3.2.3 Condições de Estabilidade de Lyapunov Aplicada ao Regulador no Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

Na seção anterior, foram apresentadas as condições exigidas para determinação da estabilidade, referenciadas por (BOYD et al., 1994) e (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). Para modelos fuzzy T-S, define-se a equação característica do regulador de estado, e faz-se o estudo da estabilidade segundo Lyapunov. De(3.18), definindo

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j, \quad (3.22)$$

tem-se que,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_{ij} \mathbf{x}(t), \quad (3.23)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t), \quad (3.24)$$

sendo (por exemplo),

$$\sum_{i < j}^3 a_{ij} = a_{12} + a_{13} + a_{23}.$$

Lema 1 *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema fuzzy contínuo descrito por (3.7), para $u(t) = 0$ é assintoticamente estável, globalmente, se existe uma matriz simétrica definida positiva comum $\mathbf{P}$ tal que,*

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0}, \quad (3.25)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$, isto é, para todos os subsistemas.

Prova: Seja a função de Lyapunov do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$. Dessa forma, sua derivada em relação ao tempo (que deve ser negativa definida) é dada por,

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(t) < 0. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.7) em (3.26), tem-se:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) \right)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) \right) < 0, \quad (3.27)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) < 0, \quad (3.28)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(t) < 0, \quad \text{para } \mathbf{x} \neq 0. \quad (3.29)$$

Assim,

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

é uma condição necessária e suficiente para (3.27), pois $\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\alpha_1(\mathbf{x}(t)) + \dots + \alpha_r(\mathbf{x}(t)) = 1$.

Isto conclui a prova.

Nosso maior interesse com relação ao Lema 1 é aplicá-lo no sistema realimentado (3.24), para que seja projetado um regulador que estabilize o sistema.

Substituindo (3.24) em (3.26) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = & \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{G}_{ii}^T + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)^T \left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \right] \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \\ & + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \mathbf{x}(t) \right]. \end{aligned}$$

Organizando os termos da equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = & \mathbf{x}(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim, verificando a equação (3.30), como $\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\alpha_1(\mathbf{x}(t)) + \dots + \alpha_r(\mathbf{x}(t)) = 1$, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (3.5), realimentado com a lei de controle (3.13),

- $\mathbf{P} > 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T;$
- $\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} < 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, r;$
- $\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \leq 0 \quad \text{para } i < j.$

3.2.4 Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs

Problemas como as análises de estabilidade e o projeto de controle podem ser muitas vezes reduzidos a problemas descritos por LMI (Linear Matrix Inequalities). Numericamente, as soluções de LMI, quando existem, podem ser obtidas, muito eficientemente, por meio de algumas ferramentas poderosas, disponíveis na literatura de programação matemática (BOYD et al., 1994). Dessa forma, a solução encontrada para tais problemas, descritos por LMI, é equivalente a encontrar soluções para o problema original. As técnicas de projeto, usando LMI, também permitem a introdução de outros índices de desempenho no projeto do controlador, por exemplo, a especificação da resposta transitória, através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle e nas saídas.

Como descrito anteriormente, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (3.5), realimentado com a lei de controle (3.13),

1. $\mathbf{P} > 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T;$
2. $\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} < 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, r;$
3. $\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \leq 0 \quad \text{para } i < j.$

Substituindo (3.22) na segunda condição, tem-se,

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i) < 0, \quad (3.31)$$

$$(\mathbf{A}_i^T - \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_i^T) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i) < 0, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i - \mathbf{P} \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i < 0. \quad (3.33)$$

Sejam,

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}.$$

Então, (3.33) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}_i - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1} < 0, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i < 0. \quad (3.35)$$

Portanto,

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.36)$$

Agora, analisando a terceira condição, tem-se que:

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i) \leq 0, \quad (3.37)$$

$$(\mathbf{A}_i^T - \mathbf{F}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_j^T - \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_j^T) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i) \leq 0. \quad (3.38)$$

Sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_i^T \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{A}_j^T \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T \mathbf{X}^{-1} \\ & + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}_i - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}_j - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1} \leq 0, \\ & \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i \leq 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Portanto,

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i \geq 0, \quad (3.40)$$

$$i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 2, 3, \dots, r \text{ e } j > i.$$

Assim, as LMIs (3.36) e (3.40), juntamente com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, garantem a estabilidade assintótica global do sistema, (3.5) realimentado com a lei de controle (3.13).

3.2.5 Taxa de Decaimento

É importante considerar não apenas a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado, tais como a velocidade de resposta, restrições da entrada e da saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento (β). Considere uma função candidata à função de Lyapunov do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$, com $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$. A taxa de decaimento β , $\beta > 0$ é obtida, se a condição $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta V(\mathbf{x}(t))$ for satisfeita para toda a trajetória $\mathbf{x}(t)$ do sistema (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Lembrando-se que da equação (3.30) e $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta V(\mathbf{x}(t))$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} + 2\beta \mathbf{P} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) + 2\beta \mathbf{P} \right] \right\} \mathbf{x}(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Assim, como $\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) = 1$, as condições mostradas a seguir, garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema com taxa de decaimento maior ou igual a β ($\beta > 0$).

1. $\mathbf{P} > 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$;
2. $\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} + 2\beta \mathbf{P} < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$;
3. $\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) + 2\beta \mathbf{P} \leq 0$ para $i < j$.

Analogamente ao cálculo das LMIs, considerando apenas a estabilidade do sistema, obtém-se:

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i - 2\beta \mathbf{X} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i - 4\beta \mathbf{X} \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 2, 3, \dots, r \text{ e } j > i. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Assim, as LMIs (3.42) e (3.43) garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema, com taxa de decaimento maior ou igual a β .

3.2.6 Restrição da Entrada

Considere que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida. A restrição $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$, se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.44)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.45)$$

sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$. As condições (3.44) e (3.45) devem ser consideradas simultaneamente com as LMIs (3.36) e (3.40), juntamente com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$ (estabilidade) ou com as LMIs (3.42) e (3.43), juntamente com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$ (estabilidade e taxa de decaimento β).

3.2.7 Restrição da Saída

Assuma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida e defina $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)$.

A restrição $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.46)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{C}_i^T \\ \mathbf{C}_i \mathbf{X} & \lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.47)$$

As condições (3.46) e (3.47) devem ser consideradas simultaneamente com as LMIs (3.36) e (3.40), juntamente com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$ (estabilidade) ou com as LMIs (3.42) e (3.43), juntamente com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$ (estabilidade e taxa de decaimento β).

3.3 Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno

Em sistemas dinâmicos, na prática, normalmente todas as variáveis de estado não estão disponíveis. Para sistemas lineares, um observador é viável se o sistema for observável, (OGATA, 2004). Esta seção apresenta o conceito de observadores fuzzy. Em sistemas lineares, um dos mais importantes resultados, no projeto de observadores é o chamado princípio de separação. Nos projetos do controlador e do observador, estes po-

dem ser considerados separadamente sem comprometimento da estabilidade em malha fechada. Considerando uma análise análoga ao caso dos reguladores, usa-se o projeto com LMI para obtenção da lei de controle do observador. Em todo projeto de observadores fuzzy, um requisito a ser cumprido é o seguinte,

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.48)$$

sendo que $\hat{\mathbf{x}}(t)$, denota o vetor de estado do observador fuzzy e $\mathbf{e}(t)$ representa o erro de estimação.

Considere como o trabalho apresentado por (PIETROBOM, 1999), no qual a planta é descrita por um modelo fuzzy T-S dado em (3.5) e (3.8), sendo que $\alpha_1(\mathbf{x}(t)), \alpha_2(\mathbf{x}(t)), \dots, \alpha_r(\mathbf{x}(t))$ dependem apenas das variáveis de estado disponíveis. Os observadores são projetados via CDP.

Para $i = 1, 2, \dots, r$, os observadores para estimar as variáveis de estado dos modelos dinâmicos fuzzy (3.5) e (3.8), as regras são projetados como segue. Os sistemas são contínuos no tempo.

$$\begin{aligned} & \text{Regra } i \text{ do Observador : Se } x_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } x_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{ENTÃO} \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i \{\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\}, \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.49)$$

O observador fuzzy possui as leis do observador de estado linear nas suas partes consequentes. Dessa forma, o estado estimado final do observador fuzzy para sistemas contínuo é o seguinte:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i \{\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\})}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i \{\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\}), \end{aligned} \quad (3.50)$$

e

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (3.51)$$

sendo utilizado o mesmo peso $w^i(x(t))$ da i -ésima regra fuzzy do sistema fuzzy contínuo, (3.50) e os parâmetros do observador, $\mathbf{H}_i$, para $i = 1, 2, \dots, r$. O projeto do observador

fuzzy e a determinação dos ganhos locais $\mathbf{H}_i$, p obtida substituindo (3.8) e (3.51) em (3.50), tem-se,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \left\{ \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t) \right] \right\}. \quad (3.52)$$

Rearranjando (3.52), encontra-se,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\}. \quad (3.53)$$

A equação dinâmica do observador, com sua forma generalizada pode ser obtida a partir do erro de observação $\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$ pela seguinte relação.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}, \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \right) \mathbf{u}(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\}, \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \{\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j\} \mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.3.1 Condições de Lyapunov Aplicadas ao Observador de Estado no Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

Foi demonstrado em (MA; SUN; HE, 1998) que o projeto dos ganhos do observador $\mathbf{H}_i$ e do regulador $\mathbf{F}_i$, para $i = 1, 2, \dots, r$, podem ser feitos separadamente. Esse resultado é uma generalização do Princípio da Separação, bem conhecido na teoria de sistemas lineares, e facilita o projeto de reguladores com observadores.

A equação do regulador (3.18) e a equação do observador (3.54) podem ser analisados separadamente, considerando que não haja incertezas nos parâmetros da planta.

A propriedade da separação, já bem conhecida da teoria de controle, estabelece que o desenvolvimento do projeto para o observador, é semelhante ao caso do regulador. Da equação (3.54) seja,

$$\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j. \quad (3.55)$$

Então,

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{E}_{ij} \mathbf{e}(t), \quad (3.56)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \mathbf{E}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{e}(t), \quad (3.57)$$

sendo que (por exemplo),

$$\sum_{i < j}^3 a_{ij} = a_{12} + a_{13} + a_{23}.$$

Lema 2 *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema fuzzy contínuo, descrito por (3.57), é assintoticamente estável, globalmente, se existe uma matriz simétrica definida positiva comum $\mathbf{P}$ tal que,*

$$(\mathbf{E}_{ii})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{E}_{ii}) < 0, \quad (3.58)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad (3.59)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$ executando-se os pares (i, j) nos quais $\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) = 0$.

Prova: Seja a função de Lyapunov para a função do erro do tipo $V(\mathbf{e}(t)) = \mathbf{e}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(t)$. Dessa forma, sua derivada em relação ao tempo (que deve ser negativa definida) é dada por,

$$\dot{V}(\mathbf{e}(t)) = \dot{\mathbf{e}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}(t)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}(t) < 0. \quad (3.60)$$

Do Lema 2, aplica-se ao sistema realimentado (3.57), para que seja projetado um observador que estime o estado do sistema.

Substituindo (3.57) em (3.60), tem-se:

$$\dot{V}(\mathbf{e}(t)) = \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \mathbf{e}(t)^T \mathbf{E}_{ii}^T + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{e}(t)^T \left(\frac{\mathbf{E}_{ij}^T + \mathbf{E}_{ji}^T}{2} \right) \right] \mathbf{P} \mathbf{e}(t) +$$

$$+\mathbf{e}(t)^T \mathbf{P} \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \mathbf{E}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left(\frac{\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}}{2} \right) \mathbf{e}(t) \right].$$

Organizando os termos da equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}(t)) = & \mathbf{e}(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{E}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{E}_{ii} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left[\left(\frac{\mathbf{E}_{ij}^T + \mathbf{E}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Assim, verificando a equação (3.61), como $\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\alpha_1(\mathbf{x}(t)) + \dots + \alpha_r(\mathbf{x}(t)) = 1$, as condições garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema (3.58) e (3.59).

3.3.2 Projeto em LMIs para Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno

As condições suficientes para garantir a estabilidade do sistema com observador são,

1. $\mathbf{P} > 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$;
2. $\mathbf{E}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{E}_{ii} < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$;
3. $\left(\frac{\mathbf{E}_{ij}^T + \mathbf{E}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}}{2} \right) \leq 0$ para $i < j$.

Substituindo (3.55) na segunda condição e definindo $\mathbf{M}_i = \mathbf{P} \mathbf{H}_i$, tem-se,

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_i) < 0, \quad (3.62)$$

$$(\mathbf{A}_i^T - \mathbf{C}_i^T \mathbf{H}_i^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_i) < 0, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{M}_i \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_i^T \mathbf{M}_i^T < 0, \quad (3.64)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, r$.

Agora, analisando a terceira condição, para $i < j$, $i, j = 1, 2, \dots, r$,

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{C}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{C}_i) \leq 0, \quad (3.65)$$

$$(\mathbf{A}_i^T - \mathbf{C}_j^T \mathbf{H}_i^T + \mathbf{A}_j^T - \mathbf{C}_i^T \mathbf{H}_j^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{C}_i) \leq 0. \quad (3.66)$$

Então, definindo $\mathbf{M}_i = \mathbf{P} \mathbf{H}_i$, $\mathbf{M}_j = \mathbf{P} \mathbf{H}_j$ tem-se que $\mathbf{H}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{H}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{P}^{-1}$ e de (3.66),

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{C}_j^T \mathbf{M}_i^T + \mathbf{A}_j^T \mathbf{P} - \mathbf{C}_i^T \mathbf{M}_j^T + \mathbf{P} \mathbf{A}_i - \mathbf{M}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{P} \mathbf{A}_j - \mathbf{M}_j \mathbf{C}_i \leq 0, \quad (3.67)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 2, 3, \dots, r$ e $j > i$. As LMIs (3.64), (3.67) e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, se factíveis, fornecem os ganhos do observador $\mathbf{H}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{P}^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, r$, de modo que o erro de estimação seja nulo no regime.

3.3.3 Taxa de Decaimento

Da mesma forma efetuada no caso dos reguladores, desenvolvem-se as LMI com taxa de decaimento para os observadores. A taxa de decaimento β , $\beta > 0$ é obtida se a condição $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta V(\mathbf{x}(t))$ for satisfeita para toda a trajetória $\mathbf{x}(t)$ do sistema (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Lembrando-se que da equação (3.61) e $\dot{V}(\mathbf{e}(t)) \leq -2\beta V(\mathbf{e}(t))$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{E}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{E}_{ii} + 2\beta \mathbf{P}) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left[\left(\frac{\mathbf{E}_{ij}^T + \mathbf{E}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}}{2} \right) + 2\beta \mathbf{P} \right] \right\} \mathbf{e}(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Assim, como $\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) = 1$, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\mathbf{e} = 0$ do sistema, com taxa de decaimento maior ou igual a β ($\beta > 0$):

1. $\mathbf{P} > 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$;
2. $\mathbf{E}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{E}_{ii} + 2\beta \mathbf{P} < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$;
3. $\left(\frac{\mathbf{E}_{ij}^T + \mathbf{E}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}}{2} \right) + 2\beta \mathbf{P} \leq 0$ para $i < j$.

Das LMIs da segunda condição acima, considerando-se a estabilidade do sistema com taxa de decaimento e (3.55), obtém-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_i) + 2\beta \mathbf{P} < 0, \\ (\mathbf{A}_i^T - \mathbf{C}_i^T \mathbf{H}_i^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_i) + 2\beta \mathbf{P} < 0, \\ \mathbf{P} \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{M}_i \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_i^T \mathbf{M}_i^T + 2\beta \mathbf{P} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Agora, da terceira condição acima e (3.55) note que:

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{C}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{C}_i) + 4\beta \mathbf{P} \leq 0, \quad (3.70)$$

$$(\mathbf{A}_i^T - \mathbf{C}_j^T \mathbf{H}_i^T + \mathbf{A}_j^T - \mathbf{C}_i^T \mathbf{H}_j^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{C}_i) + 4\beta \mathbf{P} \leq 0. \quad (3.71)$$

Então, definindo $\mathbf{M}_i = \mathbf{P}\mathbf{H}_i$, $\mathbf{M}_j = \mathbf{P}\mathbf{H}_j$ tem-se que $\mathbf{H}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{P}^{-1}$ $\mathbf{H}_j = \mathbf{M}_j\mathbf{P}^{-1}$ e de (3.71),

$$\mathbf{A}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{C}_j^T\mathbf{M}_i^T + \mathbf{A}_j^T\mathbf{P} - \mathbf{C}_i^T\mathbf{M}_j^T + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{M}_i\mathbf{C}_j + \mathbf{P}\mathbf{A}_j - \mathbf{M}_j\mathbf{C}_i + 4\beta\mathbf{P} \leq 0. \quad (3.72)$$

Assim, as LMIs (3.69) e (3.72), juntamente com $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, se factíveis, garantem a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\mathbf{e} = 0$ do observador, com taxa de decaimento maior ou igual a β .

3.4 Reguladores e Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno

O processo de projeto, passa por dois estágios, sendo o primeiro a determinação das matrizes dos ganhos do controlador $\mathbf{F}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, e o segundo a determinação das matrizes dos ganhos $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, do observador, que produzirão a equação característica desejada do observador (MA; SUN; HE, 1998) e (PIETROBOM, 1999). Da teoria de controle linear, sabe-se que a realimentação realizada pelo regulador é composta pelo estado estimado. Portanto, pode-se definir, de forma análoga, as regras para o observador fuzzy:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i &: \text{ SE } x_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } x_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ &\text{ ENTÃO } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_i\hat{\mathbf{x}}(t). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Finalmente, define-se a lei de controle para o observador fuzzy, da equação (3.73),

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{F}_i\hat{\mathbf{x}}(t). \quad (3.74)$$

Substituindo (3.74) em (3.5), tem-se,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)), \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_i \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{x}(t))\mathbf{F}_j\hat{\mathbf{x}}(t) \right), \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t))\alpha_j(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}_i\mathbf{F}_j\hat{\mathbf{x}}(t)). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Aplicando-se um artifício matemático, inserindo na equação (3.75), seu efeito é obser-

vado na equação (3.76), tem-se,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \hat{\mathbf{x}}(t) \\
&- \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t) \\
&+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Dessa forma, agrupando-se os termos semelhantes, tem-se,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t) \\
&+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(t).
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Considerando o vetor de erro $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, então o regulador com realimentação do vetor de estado do observador fuzzy pode ser obtido,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t) \\
&+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{e}(t).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

A equação característica do observador fuzzy (3.53) e inserindo a equação (3.74) conduz ao seguinte resultado,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \left(- \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}(t) \right) \\
&+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Rearranjando os termos da equação (3.79),

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \hat{\mathbf{x}}(t) \\
&+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\}.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Introduzindo-se o vetor erro na equação anterior,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \hat{\mathbf{x}}(t) \\
&+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \mathbf{e}(t).
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Aplicando-se a definição da equação do vetor do erro, na análise do comportamento dinâmico, se o sistema for estável o erro $\mathbf{e}(t)$ tenderá a ser valor nulo, com um erro inicial $\mathbf{e}(0)$. Sabendo-se que, $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, obtém-se,

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t). \tag{3.82}$$

Substituindo (3.78) e (3.81) em (3.82), tem-se

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \{\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j\} \mathbf{e}(t). \tag{3.83}$$

A equação que descreve a dinâmica do sistema, realimentado por estado observado é composta pelas equações:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{e}(t), \\
\dot{\mathbf{e}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \{\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j\} \mathbf{e}(t).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Colocando a equação (3.84) na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j & \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.85}$$

De (3.85), a equação do observador, define-se,

$$\mathbf{G}_{ij}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j & \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Substituindo as novas definições de (3.86) em (3.85), encontra-se,

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_{ij}^a \mathbf{x}_a(t). \quad (3.87)$$

Desenvolvendo (3.87), como exemplo de resolução desses tipos de sistemas, tem-se,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_a(t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_{ij}^a, \\ &= \alpha_1 \alpha_1 \mathbf{G}_{11}^a + \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{G}_{12}^a + \alpha_2 \alpha_1 \mathbf{G}_{21}^a + \alpha_2 \alpha_2 \mathbf{G}_{22}^a, \\ &= \alpha_1^2 \mathbf{G}_{11}^a + \alpha_2^2 \mathbf{G}_{22}^a + 2 \alpha_1 \alpha_2 \left\{ \frac{\mathbf{G}_{12}^a + \mathbf{G}_{21}^a}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Generalizando a equação (3.88), tem-se,

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_{ii}^a \mathbf{x}_a(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \alpha_i \alpha_j \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right\} \mathbf{x}_a(t). \quad (3.89)$$

As representações do sistema, aumentado na forma (3.89), foram obtidas em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998)

3.4.1 Condições para a Estabilidade de Sistemas Aumentados

Observe-se que o sistema aumentado, dado em (3.89), tem a mesma forma da equação da planta com regulador, dada em (3.24).

Lema 3 *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_a = 0$, do sistema aumentado contínuo, descrito por (3.89) assintoticamente estável, globalmente, se existe uma matriz simétrica definida positiva comum $\mathbf{P}$ tal que,*

$$(\mathbf{G}_{ii}^a)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{G}_{ii}^a) < 0, \quad (3.90)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^a + G_{ji}^a}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^a + \mathbf{G}_{ji}^a}{2} \right) \leq 0. \quad (3.91)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$ executando os pares (i, j) nos quais $\alpha_i(\mathbf{x}(t))\alpha_j(\mathbf{x}(t)) = 0$

Neste capítulo, abordou-se a literatura existente dos controladores e reguladores fuzzy Takagi-Sugeno. Procurou-se detalhar algumas deduções matemáticas, como forma de contribuição a pesquisadores da área de sistemas não-lineares com aproximação fuzzy Takagi-Sugeno. No próximo capítulo, abordaram-se tópicos de reguladores discretos, rastreamento de sinal de saída, com reguladores e observadores e identificação de modelos locais, baseado em mínimos quadrados e LMI.

4 *Contribuição ao Controle com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno*

4.1 Regulador Fuzzy Takagi-Sugeno Discreto

Abordou-se o projeto de reguladores fuzzy Takagi-Sugeno, discretos no tempo, para controlar o ângulo da articulação do joelho de pacientes paraplégicos, utilizando eletroestimulação. Foi proposto um método de discretização de sistemas não-lineares, contínuos no tempo, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, baseado na observação de projetos de controladores lineares discretos no tempo, por emulação (TEIXEIRA et al., 2007) e (GAINO et al., 2007). Um novo método simplificado baseado na idéia de emulação de controle digital linear, considerando período de amostragem suficientemente pequeno, foi utilizado na discretização de sistemas não-lineares, descritos através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

4.1.1 Descrição do Problema de Discretização

No projeto de controladores digitais, pode-se utilizar a metodologia convencional para discretização de plantas lineares invariantes, como descrita a seguir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (4.1)$$

Se uma entrada $\mathbf{u}(t)$ é gerada por um computador digital, seguido de um conversor digital para analógico, com T sendo o período de amostragem, pode-se definir,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT), \quad t \in [kT, kT + T). \quad (4.2)$$

Para a equação (3.1), considerando (4.2), pode ser demonstrado que a discretização

do modelo, segundo (OGATA, 1995), é dada por,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT + T) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) \\ &+ \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(kT) d\tau \\ &= \mathbf{T} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{K} \mathbf{u}(kT). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da equação (4.3), tem-se, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= e^{\mathbf{A}T} = I + \mathbf{A}T\Psi, \quad \mathbf{K} = \Psi T \mathbf{B}, \\ \Psi &= I + \frac{\mathbf{A}T}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2 T^2}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Essa equação (4.4), se $A = \alpha_1(\mathbf{x}(t))A_1 + \alpha_2(\mathbf{x}(t))A_2$, sendo $\alpha_1\mathbf{x}(t)$, $\alpha_2\mathbf{x}(t)$ funções de pertinência e A_1 , A_2 , valores mínimo e máximo no conjunto convexo de A , então, substituindo em (4.4), e, se o período de amostragem for suficientemente pequeno, pode-se desprezar as ordens altas da série, e por consequência $\Psi = I$. Uma idéia intuitiva para discretizar o modelo contínuo fuzzy T-S é aplicar diretamente o método de discretização para sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI) nas partes consequentes das regras fuzzy, (KIM et al., 2006).

Para $i = 1, 2, \dots, r$, a regra do correspondente modelo fuzzy T-S discreto, relacionado ao modelo local T-S (3.2), contínuo no tempo é obtida a seguir,

$$\begin{aligned} &\text{Regra: Se } x_1(kT) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } x_p(kT) \text{ é } M_p^i, \\ &\text{ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{L}_i \mathbf{x}(kT) + \mathbf{V}_i \mathbf{u}(kT), \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{J}_i \mathbf{x}(kT). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como mostrado em (KIM et al., 2006):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i &= e^{\mathbf{A}_i T} = I + \mathbf{A}_i T \Psi_i, \quad \mathbf{V}_i = \Psi_i T \mathbf{B}_i, \\ \Psi_i &= I + \frac{\mathbf{A}_i T}{2!} + \frac{\mathbf{A}_i^2 T^2}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Considerando o modelo fuzzy da equação (4.5), tem-se por definição M_j^i , $j=1, 2, \dots, p$

é o conjunto fuzzy j da regra i , as variáveis premissas $x_1(kT), \dots, x_p(kT)$, e a função de pertinência $\mu_j^i(\mathbf{x}_j(kT))$ do conjunto fuzzy M_j^i :

$$w^i(\mathbf{x}(kT)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(x_j(kT)),$$

$$\mathbf{x}(kT) = [x_1(kT) \ x_2(kT) \ \dots \ x_p(kT)]^T. \quad (4.7)$$

Como $\mu_j^i(\mathbf{x}_j(kT)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$w^i(\mathbf{x}(kT)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(kT)) > 0. \quad (4.8)$$

Por fim, tem-se,

$$\alpha_i(\mathbf{x}(kT)) = \frac{w^i(\mathbf{x}(kT))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(kT))}, \quad (4.9)$$

sendo que,

$$\alpha_i(\mathbf{x}(kT)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) = 1. \quad (4.10)$$

Com essas definições, encontra-se a forma discretizada para o modelo T-S,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT + T) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(kT))(\mathbf{L}_i \mathbf{x}(kT) + \mathbf{V}_i \mathbf{u}(kT))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(kT))}, \\ &= \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{x}(kT) + \mathbf{V}(\alpha) \mathbf{u}(kT), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$i = 1, 2, \dots, r.$$

A análise da equação (4.11) com (4.6), pode ser encontrada em (KIM et al., 2006), que consideram o comportamento não-linear e as regras fuzzy. Agora, será apresentado o método de discretização, proposto nesta tese. Considere-se o modelo fuzzy Takagi-Sugeno contínuo no tempo dado por,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)). \quad (4.12)$$

Teorema 1 *Considere o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, contínuo na tempo, descrito na equação (4.12). Então, para período de amostragem T , suficientemente pequeno, a equação (4.12) pode ser bem representada através do modelo fuzzy T-S, discreto no tempo, apresentado em (4.11), sendo que:*

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{I} + \mathbf{A}_i T, \quad \mathbf{V}_i = T \mathbf{B}_i, \quad (4.13)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$.

Prova: Suponha agora que o período de amostragem T seja suficientemente pequeno, de modo que a aproximação abaixo seja válida:

$$\dot{\mathbf{x}}(kT) \approx \frac{\mathbf{x}(kT + T) - \mathbf{x}(kT)}{T}. \quad (4.14)$$

Então, de (4.12):

$$\dot{\mathbf{x}}(kT) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(kT)). \quad (4.15)$$

Considerando (4.10), (4.14) e (4.15) note que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT + T) &\approx T \dot{\mathbf{x}}(kT) + \mathbf{x}(kT) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) (\mathbf{I} + \mathbf{A}_i T) \mathbf{x}(kT), \\ &+ \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) T \mathbf{B}_i \mathbf{u}(kT), \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) \left[\underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{A}_i T)}_{\mathbf{L}_i} \mathbf{x}(kT) + \underbrace{T \mathbf{B}_i}_{\mathbf{V}_i} \right] \mathbf{u}(kT). \end{aligned} \quad (4.16)$$

A prova está concluída.

4.2 Reguladores Discretos Fuzzy Takagi-Sugeno

Apresenta-se uma condição suficiente para estabilidade assintótica do modelo (4.16), utilizando-se a lei de controle (3.13) discretizada, dada por,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(kT) &= - \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(kT)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(kT)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(kT))}, \\ &= - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(kT), \\ &= - \mathbf{F}(\alpha) \mathbf{x}(kT). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Compõem-se, então, o sistema em malha fechada na forma abaixo,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) \alpha_j(\mathbf{x}(kT)) (\mathbf{L}_i - \mathbf{V}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(kT). \quad (4.18)$$

4.2.1 Análise da Estabilidade

Da equação (4.18), define-se,

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{L}_i - \mathbf{V}_i \mathbf{F}_j. \quad (4.19)$$

Então, de (4.18), tem-se que,

$$\mathbf{x}(kT+T) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) \alpha_j(\mathbf{x}(kT)) \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{x}(kT). \quad (4.20)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT + T) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(kT)) \mathbf{Q}_{ii} \mathbf{x}(kT) \\ &+ 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(kT)) \alpha_j(\mathbf{x}(kT)) \left\{ \frac{\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(kT), \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo que por definição,

$$\sum_{i < j}^3 a_{ij} = a_{12} + a_{13} + a_{23}.$$

Lema 4 (TANAKA; WANG, 2001) *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema fuzzy discreto, descrito por (4.21), é globalmente assintoticamente estável, se existe uma matriz simétrica positiva definida comum $\mathbf{P}$ tal que,*

$$\left\{ \frac{\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ji}}{2} \right\}^T \mathbf{P} \left\{ \frac{\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ji}}{2} \right\} - \mathbf{P} < \mathbf{0}, \quad (4.22)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.

A estabilidade assintótica global do sistema (3.5) realimentado com a lei de controle (3.13) e descrito em (4.21),

1. $\mathbf{P} > \mathbf{0}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$;

2. $\mathbf{Q}_{ii}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_{ii} - \mathbf{P} < \mathbf{0}$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$;
3. $\left(\frac{\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ji}}{2}\right) - \mathbf{P} \leq \mathbf{0}$ para $i < j$.

4.2.2 Projeto de Reguladores Discretos Fuzzy com LMIs

No projeto de controladores discretos, o problema de minimização convexa é formulado também em termos de LMI.

4.2.3 Condições de Estabilidade Relaxadas Usando Projeto de Controladores com Taxa de Decaimento

Semelhante ao apresentado nos itens 1, 2 e 3 da Seção 4.2.1, (TANAKA; WANG, 2001) apresentam LMIs com condições relaxadas que aumentam a área de factibilidade do sistema. Defina $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{W} \mathbf{X}$. O projeto de controle fuzzy e taxa de decaimento, para o caso discreto, é o seguinte. Encontre $\mathbf{X} > \mathbf{0}$, $\mathbf{W} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$, tais que,

1. $\mathbf{P} > \mathbf{0}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$;
2. $\mathbf{Q}_{ii}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_{ii} - \sigma^2 \mathbf{P} + (s - 1) \mathbf{W} < \mathbf{0}$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$;
3. $\left(\frac{\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}_{ji}}{2}\right) - \sigma^2 \mathbf{P} - \mathbf{W} \leq \mathbf{0}$ para $i < j$.

sendo $\beta = \sigma^2$ a taxa de decaimento, $0 \leq \beta < 1$ e s é o número de regras que estão ativas. Por exemplo, o projeto para solucionar o controle do movimento de paraplégicos, considerado no próximo capítulo, contém 2 regras ativas.

A seguir são apresentadas as LMIs que solucionam os itens 1, 2 e 3 acima, usando complemento de Schur (BOYD et al., 1994). De (TANAKA; WANG, 2001) estas LMIs são as seguintes,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \beta \mathbf{X} - (s - 1) \mathbf{Y} & \mathbf{X} \mathbf{L}_i^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{V}_i^T \\ \mathbf{L}_i \mathbf{X} - \mathbf{V}_i \mathbf{M}_i & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \\
 & \begin{bmatrix} \beta \mathbf{X} + \mathbf{Y} & \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i \mathbf{X} + \mathbf{L}_j \mathbf{X} - \mathbf{V}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{V}_j \mathbf{M}_i)^T \\ \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i \mathbf{X} + \mathbf{L}_j \mathbf{X} - \mathbf{V}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{V}_j \mathbf{M}_i) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Se (4.23) é factível para $i, j = 1, 2, \dots, r$ e $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, os ganhos do controlador podem ser obtidos através da equação, $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

4.3 Controle com Rastreamento Fuzzy Takagi-Sugeno

Os modelos fuzzy Takagi Sugeno podem ser utilizados para projetar sistemas de controle com rastreamento para sistemas não-lineares. A proposta de projeto com rastreamento abordada nesta tese, utiliza o conceito de variável virtual (LIAN; LIOU, 2006), introduzida para simplificar os procedimentos de projeto. Em resumo esse método pode ser dividido em duas etapas:

1. determinam-se as variáveis virtuais desejadas da dinâmica do sistema;
2. determinam-se os ganhos de controle, utilizando um projeto baseado em LMI, para estabilização do sistema.

Esse conceito de variável virtual é utilizado para variáveis de estado imensuráveis em sistemas dinâmicos não-lineares (LIAN; LIOU, 2006).

4.3.1 Controle com Rastreamento e Regulador de Estado

Nesta seção, explica-se a arquitetura básica para controle de rastreamento na saída, considerando todas as variáveis acessíveis. O método apresentado foi proposto em (LIAN; LIOU, 2006). De forma geral, considere uma equação dinâmica não-linear dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{q}(\mathbf{x}(t)),\end{aligned}\tag{4.24}$$

sendo que $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ é o vetor de estado, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ é a variáveis de saída; $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ é o vetor de entrada; $\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{g}(x)$ e $\mathbf{q}(x)$, são funções não-lineares com dimensões adequadas.

Para controle do rastreamento, o objetivo é o seguinte,

$$\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{r}}(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.\tag{4.25}$$

Em (4.25), $\bar{\mathbf{r}}(t)$ denota a trajetória desejada ou a referência do sinal. Para converter o problema de rastreamento em estabilidade, usam-se as *variáveis virtuais desejadas*, representadas pelo vetor $\mathbf{x}_d(t)$, que será rastreado pelo vetor $\mathbf{x}(t)$, e é natural que seja definida $\bar{\mathbf{r}}(t) = \phi(\mathbf{x}_d)$, ou seja, vetor das referências desejadas. Definindo $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)$, o erro de rastreamento pelo vetor de estado, e a representação da primeira equação da planta (4.24) pelo modelo fuzzy T-S dado em (3.5), tem-se,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_d(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \right) - \dot{\mathbf{x}}_d(t).\end{aligned}\quad (4.26)$$

Se a lei de controle $\mathbf{u}(t)$ satisfaz a seguinte equação (LIAN; LIOU, 2006),

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \boldsymbol{\tau}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}_d(t) - \dot{\mathbf{x}}_d(t), \quad (4.27)$$

sendo $\boldsymbol{\tau}(t)$, a nova lei de controle, então a equação do erro (4.26) conduz às equações,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \boldsymbol{\tau}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i \boldsymbol{\tau}(t).\end{aligned}\quad (4.28)$$

A lei de controle do novo controlador fuzzy $\boldsymbol{\tau}(t)$ é determinado pela compensação paralela distribuída (CDP),

$$\boldsymbol{\tau}(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (4.29)$$

Substituindo (4.29) em (4.26), chega-se à forma em malha fechada,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (4.30)$$

4.3.2 Restrições da Dinâmica Generalizada

O objetivo para o rastreamento da saída é determinar $\mathbf{x}_d$ e obter um controlador prático com saída $\mathbf{u}(t)$. Para esse fim usa-se $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}_i$ o que permite reescrever a equação (4.27) na forma compacta,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}(t)) = -\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}_d(t) + \dot{\mathbf{x}}_d(t), \quad (4.31)$$

sendo $\mathbf{A}(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_i(t))\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$. De (4.31) a existência da lei de controle $\mathbf{u}(t)$ depende da forma de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Considere que a matriz de entrada $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ tem posto completo e apresenta a forma,

$$\mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-m} \\ \mathbf{B}(x) \end{bmatrix},$$

sendo que $\mathbf{0}_{n-m} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times m}$ é uma matriz com elementos nulos e $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ é não singular. Similarmente, particiona-se $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x}_d$ na seguinte forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-m}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(t)_{n-m} \\ \mathbf{x}_d(t)_m \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Consequentemente, a condição (4.31) é descrita como a seguir,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-m} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d(t)_{n-m} - \mathbf{A}_{n-m}(\mathbf{x})\mathbf{x}_d(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_d(t)_m - \mathbf{A}_m(\mathbf{x})\mathbf{x}_d(t) \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Como resultado, as variáveis virtuais são determinadas de acordo com as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}(t) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_d) \\ \dot{\mathbf{x}}_d(t)_{n-m} &= \mathbf{A}_{n-m}(\mathbf{x})\mathbf{x}_d(t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

De (4.29) e (4.33), tem-se a lei de controle obtida de (LIAN; LIOU, 2006),

$$\mathbf{u}(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})^{-1} (\dot{\mathbf{x}}_d(t)_m - \mathbf{A}_m(\mathbf{x}) \mathbf{x}_d(t)). \quad (4.35)$$

Especificando-se a nova lei de controle

$$\boldsymbol{\tau}(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (4.36)$$

Para muitos sistemas físicos, as variáveis virtuais desejadas $\mathbf{x}_d = (x_{1d}, \dots, x_{nd})$ podem ser exatamente determinadas por (4.34).

4.3.3 Controle de Rastreamento Baseado em Observador e Regulador de Estado

No projeto do rastreamento, com observador fuzzy (LIAN; LIOU, 2006), o erro de estimação é requerido para satisfazer,

$$\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (4.37)$$

sendo $\hat{\mathbf{x}}(t)$, a estimação do estado de $\mathbf{x}(t)$. Para esse fim, expressa-se o sistema não-linear em equações fuzzy (4.24), com $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_i(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)$. Portanto, a equação genérica para o observador pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \text{Regra } i \text{ do Observador : Se } x_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } x_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i \{\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\}, \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para $i = 1, 2, \dots, r$, $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\hat{\mathbf{y}}(t)$ denotam os estados estimados de $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, respectivamente, e $\mathbf{H}_i$ o ganho do observador. As variáveis premissas dependem de $\hat{\mathbf{x}}(t)$, portanto a equação do observador torna-se,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \left(\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t) \right\} \right),$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t). \quad (4.39)$$

O projeto dos ganhos do observador, $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, foi discutido na Seção 3.3.1. A regra de controle, baseada no observador pode ser representada como,

$$\begin{aligned} \text{Regra } i \text{ do Controlador} &: \text{ Se } x_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } x_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ &\text{ENTÃO } \boldsymbol{\tau}(t) = -\mathbf{K}_i \{ \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}_d(t) \}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Comparando com a restrição (4.31) referente ao caso do regulador, a restrição para o observador é a seguinte (LIAN; LIOU, 2006):

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}(t)) = -\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{x}_d(t) + \dot{\mathbf{x}}_d(t). \quad (4.41)$$

A lei prática de controle resulta,

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\hat{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{K}_i (\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}_d(t)) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} (\dot{\mathbf{x}}_d(t)_m - \mathbf{A}_m(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{x}_d(t)). \quad (4.42)$$

4.3.4 Identificação de Modelos Lineares Ótimos

A busca por um modelo matemático que represente sistemas e fenômenos observados é um antigo desafio do homem. Mesmo considerando-se as novas técnicas de modelagem, o desafio de tal busca continua (AGUIRRE, 2000). A identificação busca a determinação de um modelo de um sistema dinâmico partindo da observação da entrada e saída do sistema (AGUIRRE, 2000). O conhecimento do modelo matemático é fundamental para o projeto e implementação de um sistema de controle de alto desempenho. Na maioria das situações práticas é necessária a implementação de uma metodologia para a identificação direta desses modelos dinâmicos (SILVA, 2008).

Sendo uma aproximação experimental para a determinação da dinâmica do sistema, uma identificação completa é constituída por quatro estágios (SILVA, 2008):

1. Aquisição da informação referente à entrada/saída do sistema sob um protocolo experimental;

2. Escolha da estrutura do modelo;
3. Estimação dos parâmetros do modelo;
4. Validação do modelo identificado.

O primeiro estágio diz respeito basicamente ao tipo de entrada que será utilizada na identificação. O segundo estágio trata da ordem do sistema e depende do sistema a ser identificado. O terceiro estágio refere-se ao procedimento (algoritmo) e no quarto verifica-se o modelo identificado (ao comportamento dinâmico) do modelo real (SILVA, 2008).

O objetivo do estudo realizado nessa seção é identificar modelos locais, com uso da excitação de entrada. Por exemplo a entrada degrau (KOSAKA et al., 2005), e solução baseadas em LMI. Uma forma analítica de se obter modelos locais ótimos de uma classe de sistemas não-lineares, operando nas proximidades de um ponto de operação, foi demonstrado em (TEIXEIRA; ŽAK, 1999). A idéia da obtenção de modelos locais de (TEIXEIRA; ŽAK, 1999), inspirou o trabalho de (MACHADO, 2003) na determinação de modelos locais ótimos para aproximação com modelos fuzzy, solução da função de pertinência por LMIs e projetos de controladores com fuzzy Takagi-Sugeno baseados também em LMIs.

A solução das LMIs, pode ser facilmente obtidas (BOYD et al., 1994) utilizando-se softwares disponíveis, por exemplo, o LMI Control Toolbox do Matlab, para cada $x_f \in \chi$. No cálculo numérico, define-se um conjunto abrangente de pontos x_f em χ , correspondentes às variáveis de estado do sistema operando nas proximidades do ponto de operação e, em cada um deles, $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$ é obtida através da solução do problema de otimização descrito na equação (4.43). O valor ótimo do modelo linear local $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$ de (3.1), portanto deve-se minimizar, $\gamma > 0$ tal que,

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}_i \Delta \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{u}(t) \approx 0, \quad (4.43)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, q$, q o número de modelos locais a serem determinados.

Expandindo (4.43), na forma de mínimos quadrados tem-se,

$$\left(\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}_i \Delta \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{u}(t) \right)^T \left(\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}_i \Delta \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{u}(t) \right) < \gamma. \quad (4.44)$$

Considere na identificação que, $\Delta\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\Delta\mathbf{x}(t)$ e $\Delta\mathbf{u}(t)$ são conhecidos e as matrizes desejadas em (4.44) são $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$. De (4.44), tem-se,

$$\gamma - \left(\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}_i\Delta\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_i\Delta\mathbf{u}(t) \right)^T \left(\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}_i\Delta\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_i\Delta\mathbf{u}(t) \right) > 0. \quad (4.45)$$

Em (4.45), usando-se complemento de Schur, como mostrado em (BOYD et al., 1994),

$$\begin{bmatrix} \gamma & \left(\Delta\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_i\Delta\mathbf{x} - \mathbf{B}_i\Delta\mathbf{u} \right)^T \\ \left(\Delta\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_i\Delta\mathbf{x} - \mathbf{B}_i\Delta\mathbf{u} \right) & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} > 0, \quad \gamma > 0. \quad (4.46)$$

sendo $\mathbf{I}_n$, matriz identidade de ordem n do sistema.

Na determinação das matrizes do modelo local linear, $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$, o algoritmo utilizado é o seguinte:

1. Iniciar programa;
2. Especificar um ponto de operação referente e as variáveis do modelo local desejado;
3. Aplicar um sinal de entrada, por exemplo degrau, ou senoidal, de modo que as variáveis de estado fiquem na vizinhança do ponto de operação especificado;
4. Obter os vetores de posição, velocidade angular e torque muscular, correspondentes ao vetor de estado da planta em alguns instantes de tempo, gerados a partir do procedimento descrito no item anterior.
5. Compôr as variáveis $\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$, sendo $\mathbf{x}_0$, o ponto de operação, especificado no item 2;
6. Resolver o problema (4.46), e determinar as matrizes $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$, ótimas.
7. Fim do programa

Este método, tem a vantagem de especificar a ordem dos vetores extraídos dos sensores e restringir os elementos da matriz de forma desejada a dimensão do modelo matemático desconhecido.

4.3.5 Identificação de Modelos Lineares Ótimos Discretos

Em sistemas de identificação, deve-se usar *hardware* com entradas analógicas para captar o sinal proveniente do estímulo da largura de pulso e o sinal dos sensores envolvidos, como o eletrogoniômetro que fornece a posição da articulação do joelho, e do sensor de força que fornece o valor do torque produzido pela contração do quadríceps. Naturalmente, esses sinais dos canais analógicos, são discretizados, conforme a capacidade de bits especificados que possuem. Portanto uma equação discretizada de (4.46) é mais conveniente. De forma a discretizar a equação (4.46), que possui derivada de primeira ordem, pode-se utilizar a aproximação de Euler, como já mostrado em (4.14).

$$\begin{bmatrix} \gamma & \left(\frac{\Delta \mathbf{x}(kT+T) - \Delta \mathbf{x}(kT)}{T} - \mathbf{A}_i \Delta \mathbf{x}(kT) - \mathbf{B}_i \Delta u(kT) \right)^T \\ \left(* \right) & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} > 0, \quad \gamma > 0. \quad (4.47)$$

sendo $(*)$, a operação transposta, $i = 1, 2, \dots, q$, q o número de modelos locais desejados e $\mathbf{I}_n$ a matriz identidade de orden n .

No capítulo 5, o método proposto será aplicado na identificação do modelo Takagi-Sugeno de um paciente paraplégico.

5 Modelo Dinâmico no Controle da Posição da Perna de Paraplégicos

5.1 Modelo Matemático Utilizado

5.1.1 Objetivo

O controle do movimento de pacientes paraplégicos, através de estimulação elétrica, é um assunto relevante dentro da engenharia de reabilitação. Por exemplo (RIENER; FUHR, 1998), estudaram esse problema e utilizaram um controlador fuzzy do tipo Mamdani. O modelo matemático da perna em estudo foi elaborado por (FERRARIN; PEDOTTI, 2000). No controle, a perna é levada do repouso até um ângulo de, por exemplo, 30° e deve voltar à posição de repouso (pela ação da gravidade) com a retirada da estimulação no músculo mencionado.

5.1.2 Modelo da Junção do Joelho

O modelo matemático do membro inferior empregado neste trabalho, foi proposto por Ferrarin e Pedotti em 2000. Esse modelo, relaciona de uma maneira empírica, a largura do pulso aplicado com o torque gerado em torno da articulação do joelho. Em estudos dos autores, estes não mencionam a o valor da corrente utilizada, especificam apenas qual é a frequência aplicada pelo estimulador. Na modelagem, (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) consideraram o membro inferior como uma cadeia cinemática aberta, composta de dois segmentos rígidos: a coxa, e o complexo canela-pé, conforme mostra a Figura 5.1 (FERRARIN; PEDOTTI, 2000). Os movimentos da junção do tornozelo não foram considerados, reduzindo o número dos graus de liberdade, evitando toda a modificação das características passivas do joelho devido aos movimentos do tornozelo. A coxa foi considerada estacionária, isto é, fixa em uma mesa suporte, e, assim somente uma dinâmica de

canela-pé foi considerada no modelo. Somente os movimentos do joelho de flexão-extensão foram considerados. Os comportamentos passivos do complexo do músculo-tendão da junção do joelho assumiram a existência de uma rigidez M_s e de uma componente de amortecimento M_d , que dependem respectivamente do ângulo do joelho e da velocidade angular. E também, as componentes inercial M_i e gravitacional M_g foram consideradas, junto com o torque ativo do joelho M_a , resultado da estimulação do quadríceps.

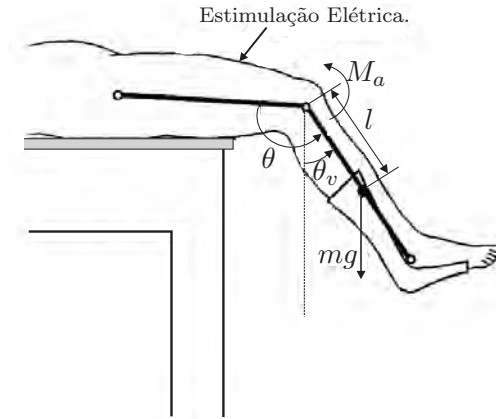


Figura 5.1: Complexo canela tornozelo.

O equilíbrio dinâmico desses componentes em torno da junção do joelho é representado pela seguinte equação:

$$M_i = M_g + M_s + M_d + M_a. \quad (5.1)$$

Isso pode ser expresso pela seguinte equação diferencial não-linear de segunda-ordem (FERRARIN; PEDOTTI, 2000),

$$J\ddot{\theta}_v = -mgl\sin(\theta_v) + M_s - B\dot{\theta} + M_a, \quad (5.2)$$

sendo

- J é o momento inercial do complexo de canela-pé;
- θ é o ângulo comum do joelho (ângulo entre a canela e a coxa no plano sagital);
- $\dot{\theta}$ é a velocidade angular comum do joelho;
- θ_v é o ângulo da canela (ângulo entre a canela e o sentido vertical no plano sagital);
- $\ddot{\theta}_v$ é a aceleração angular da canela;

- m é a massa do complexo canela-pé;
- g é a aceleração gravitacional;
- l a distância entre o joelho e o centro da massa do complexo canela-pé;
- B é o coeficiente de atrito viscoso;
- M_s é o torque devido ao componente de rigidez;
- M_a o torque ativo do joelho produzido pela estimulação elétrica.

Uma distinção foi feita entre o ângulo da junção do joelho (usado para a rigidez e os componentes de amortecimento) e o ângulo absoluto entre a canela e o sentido vertical (usado para o termo gravitacional e inercial). Entretanto, desde que os movimentos da coxa sejam negligenciados, a aceleração angular absoluta da canela coincidiu com a aceleração angular relativa do joelho. A respeito da componente de amortecimento, a exemplo de autores precedentes como descritos em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), consideram um termo linear com um coeficiente de viscosidade constante. Com respeito à componente da rigidez, a seguinte expressão foi considerada:

$$M_s = -\lambda e^{-E\theta} (\theta - \omega), \quad (5.3)$$

sendo,

- λ e E são coeficientes do termo exponencial;
- ω é o ângulo elástico de repouso do joelho.

O sinal negativo é devido à escolha do torque do extensor como o positivo. Nessas fórmulas, o fator exponencial é responsável pelo comportamento não-linear da elasticidade do joelho. Os componentes não-lineares da rigidez, representados por termos exponenciais, foram considerados em diversos estudos precedentes e encontrados para melhorar o componente linear puro da elasticidade. Em todos os modelos previamente descritos, o ângulo de descanso do joelho foi considerado na correspondência com a posição vertical do pé. Entretanto, assim como outros autores, em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) foram encontradas posições de descanso entre 5° e 15° em todos os pacientes. Isso implica que o componente elástico do torque passivo, aplicado à junção do joelho torna-se zero (posição

neutra), quando o ângulo vertical do pé mais baixo é maior que 0° . Foi verificado que o torque, ao qual o músculo estará sujeito, M_a , e a largura dos pulsos da estimulação elétrica P , podem ser relacionados, adequadamente, pela função de transferência a seguir,

$$H(s) = \frac{M_a(s)}{P(s)} = \frac{G}{1 + s\tau}, \quad (5.4)$$

sendo os valores de τ e de G , apresentados em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

Os autores (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) sugerem métodos para obtenção experimental dos parâmetros de interesse. Na Tabela (4.1), são apresentados valores antropométricos de um paciente paraplégico.

Tabela 5.1: Grandezas Antropométricas do Paciente (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

J	0.362 $[Kgm^2]$
m	4.37 $[Kg]$
l	23.8 $[cm]$
B	0.27 $[Nms/rad]$
λ	41.208 $[Nm/rad]$
E	2.024 $[1/rad]$
ω	2.918 $[rad]$
τ	0.951 $[s]$
G	42500 $[Nm/s]$

Substituindo (5.3) em (5.2), e considerando $\theta = \theta_v + \pi/2$, obtém-se,

$$\ddot{\theta}_v = \frac{1}{J} \left[-mgl \sin(\theta_v) - \lambda e^{-E\theta_v} e^{-E\frac{\pi}{2}} \left(\theta_v + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - B\dot{\theta}_v + M_a \right]. \quad (5.5)$$

Antes de iniciar a modelagem, foram obtidos os valores de M_{a0} e P_0 , calculados no ponto de operação de interesse, ou seja, $\theta_{v0} = 30^\circ$. Para a obtenção de M_{a0} , utilizouse (5.5), determinada no ponto de operação. Sabendo-se que, no ponto de operação, as derivadas $\dot{\theta}_v$ e $\ddot{\theta}_v$ são nulas, e isolando-se M_{a0} de (5.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} M_{a0} &= mgl \sin(\theta_{v0}) + \lambda e^{-E\theta_{v0}} e^{-E\frac{\pi}{2}} \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right), \\ &= 4.6068 [Nm]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Então de (5.4),

$$(1 + s\tau)M_a(s) = GP(s). \quad (5.7)$$

Passando (5.7) para o domínio do tempo, obtém-se,

$$\tau \dot{M}_a + M_a = GP, \quad (5.8)$$

e, definindo ΔM_a de modo que

$$M_a = \Delta M_a + M_{a0}, \quad (5.9)$$

portanto,

$$\Delta \dot{M}_a = \dot{M}_a. \quad (5.10)$$

Substituindo-se (5.9) e (5.10) em (5.8), obtém-se

$$\tau \Delta \dot{M}_a + \Delta M_a + M_{a0} = GP, \quad (5.11)$$

e então,

$$\tau \Delta \dot{M}_a + \Delta M_a = G \left(P - \frac{M_{a0}}{G} \right). \quad (5.12)$$

De (5.12), conclui-se que, no ponto de operação, a largura dos pulsos P é igual a

$$P_0 = \frac{M_{a0}}{G}. \quad (5.13)$$

Com a definição de P_0 , agora é possível encontrar,

$$P_0 = 1.0839 \cdot 10^{-4} [s]. \quad (5.14)$$

Quando o ponto de equilíbrio de interesse do sistema não é a origem, da teoria de estabilidade segundo Lyapunov, é necessário efetuar uma troca de variáveis para transladar o novo ponto de equilíbrio para a origem. A seguir, foi realizada uma mudança de variáveis de forma que (5.4) e (5.5) sejam escritas em termos de ΔM_a e $\Delta\theta_v$ respectivamente. A modelagem para esse novo conjunto de equações, utiliza as variáveis definidas abaixo:

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_v &= \theta_v - \theta_{v0}, \\
 \theta_v &= \Delta\theta_v + \theta_{v0}, \\
 \dot{\theta}_v &= \Delta\dot{\theta}_v, \\
 \ddot{\theta}_v &= \Delta\ddot{\theta}_v, \\
 \Delta M_a &= M_a - M_{a0}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Dessa forma, reescrevendo a equação (5.5), encontra-se,

$$\begin{aligned}
 J\Delta\ddot{\theta}_v &= \left[\frac{-mgl \sin(\Delta\theta_v + \theta_{v0}) \lambda e^{-E(\Delta\theta_v + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} (\Delta\theta_v + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega) + M_{a0}}{\Delta\theta_v} \right] \Delta\theta_v \\
 &- B\Delta\dot{\theta}_v + \Delta M_a.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

A equação (5.16) está pronta para ser composta em variáveis de estados. Definindo as variáveis de estados na forma,

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_v &= x_1, \\
 \Delta\dot{\theta}_v &= \dot{x}_1 = x_2, \\
 \Delta M_a &= x_3.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Substituindo (5.17)-se em (5.16), encontra-se,

$$\begin{aligned}
 J\dot{x}_2 &= \left[\frac{-mgl \sin(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} (x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega) + M_{a0}}{x_1} \right] x_1 \\
 &- Bx_2 + x_3.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Reescrevendo a equação (5.12), tem-se,

$$\tau \Delta \dot{M}_a + \Delta M_a = G \left(P - \frac{M_{a0}}{G} \right). \quad (5.19)$$

Rearranjando a equação,

$$\tau \Delta \dot{M}_a = -\Delta M_a + G \left(P - \frac{M_{a0}}{G} \right), \quad (5.20)$$

e

$$\begin{aligned} \tau \Delta \dot{M}_a &= -\Delta M_a + G(P_N), \\ P_N &= P - \frac{M_{a0}}{G}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Substituindo (5.17) em (5.21), tem-se,

$$\tau \dot{x}_3 = -x_3 + G(P_N). \quad (5.22)$$

Escrevendo (5.18) e (5.22) em variáveis de estado, tem-se,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21}(x_1(t)) & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix} P_N. \quad (5.23)$$

$\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ é uma não linearidade do sistema, definida como:

$$\tilde{f}_{21}(x_1(t)) = \frac{1}{Jx_1} \left[-mgl \sin(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) + M_{a0} \right] \quad (5.24)$$

e

$$M_{a0} = mgl \operatorname{sen}(\theta_{v0}) + \lambda e^{-E(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right). \quad (5.25)$$

Observa-se que em (5.24), quando for atribuído o valor zero à variável x_1 , ocorre um problema na determinação de $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$, pois nesse caso, o denominador torna-se nulo. Esse fato dificulta a determinação das funções de pertinências, utilizadas na descrição da planta, através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno exatos. Para solucioná-lo, expandiu-se (5.24) em série de Taylor, o que permite cancelar o termo $x_1(t)$ no denominador de $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ em (5.24) e assim superar o problema. Considerando a série de Taylor até a quinta ordem, obtém-se,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(x_1(t)) = & \frac{1}{Jx_1} \left\{ -mgl \left[(x_1 + \theta_{v0}) - \frac{1}{6} (x_1 + \theta_{v0})^3 + \frac{1}{120} (x_1 + \theta_{v0})^5 \right] \right. \\ & - \lambda e^{-E\frac{\pi}{2}} \left[1 - E(x_1 + \theta_{v0}) + \frac{1}{2} (E(x_1 + \theta_{v0}))^2 - \frac{1}{6} (E(x_1 + \theta_{v0}))^3 \right. \\ & + \frac{1}{24} (E(x_1 + \theta_{v0}))^4 - \frac{1}{120} (E(x_1 + \theta_{v0}))^5 \left. \right] \left[(x_1 + \theta_{v0}) + \frac{\pi}{2} - \omega \right] \\ & + mgl \left[\theta_{v0} - \frac{1}{6} \theta_{v0}^3 + \frac{1}{120} \theta_{v0}^5 \right] + \lambda e^{-E\frac{\pi}{2}} \left[1 - E\theta_{v0} + \frac{1}{2} E^2 \theta_{v0}^2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} E^3 \theta_{v0}^3 + \frac{1}{24} E^4 \theta_{v0}^4 - \frac{1}{120} E^5 \theta_{v0}^5 \right] \left[\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right] \right\}. \quad (5.26) \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação (5.26) e cancelando $x_1(t)$, encontra-se,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(x_1(t)) = & \frac{1}{J} \left\{ -mgl \left[1 - \frac{1}{6} x_1^2 - \frac{1}{2} \theta_{v0} x_1 - \frac{1}{2} \theta_{v0}^2 + \frac{1}{120} x_1^4 + \frac{1}{24} \theta_{v0} x_1^3 + \frac{1}{12} \theta_{v0}^2 x_1^2 \right. \right. \\ & + \frac{1}{12} \theta_{v0}^3 x_1 + \frac{1}{24} \theta_{v0}^4 \left. \right] - \lambda e^{-E\frac{\pi}{2}} \left[1 - Ex_1 - E \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - E\theta_{v0} + \frac{1}{2} E^2 x_1^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} E^2 x_1 \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) + E^2 \theta_{v0} x_1 + E^2 \theta_{v0} \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) + \frac{1}{2} E^2 \theta_{v0}^2 - \frac{1}{6} E^3 x_1^3 \\ & - \frac{1}{6} E^3 x_1^2 \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - \frac{1}{2} E^3 x_1^2 \theta_{v0} - \frac{1}{2} E^3 x_1 \theta_{v0} \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - \frac{1}{2} E^3 x_1 \theta_{v0}^2 \\ & - \frac{1}{2} E^3 \theta_{v0}^2 \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - \frac{1}{6} E^3 \theta_{v0}^3 + \frac{1}{24} E^4 x_1^4 + \frac{1}{24} E^4 x_1^3 \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) \\ & + \frac{1}{6} E^4 x_1^3 \theta_{v0} + \frac{1}{6} E^4 x_1^2 \theta_{v0} \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) + \frac{1}{4} E^4 x_1^2 \theta_{v0}^2 + \frac{1}{4} E^4 x_1 \theta_{v0}^2 \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) \\ & + \frac{1}{6} E^4 x_1 \theta_{v0}^3 + \frac{1}{6} E^4 \theta_{v0}^3 \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) + \frac{1}{24} E^4 \theta_{v0}^4 - \frac{1}{120} E^5 x_1^5 - \frac{1}{120} E^5 x_1^4 \left(\theta_{v0} \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - \frac{1}{24} E^5 x_1^4 \theta_{v0} - \frac{1}{24} E^5 x_1^3 \theta_{v0} \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - \frac{1}{12} E^5 x_1^3 \theta_{v0}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12}E^5x_1^2\theta_{v0}^2\left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega\right) - \frac{1}{12}E^5x_1^2\theta_{v0}^2 - \frac{1}{12}E^5x_1\theta_{v0}^3\left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega\right) \\
& -\frac{1}{24}E^5x_1\theta_{v0}^4 - \frac{1}{24}E^5\theta_{v0}^4\left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega\right) - \frac{1}{120}E^5\theta_{v0}^5\left]\right\}. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Pode-se verificar a validade da equação (5.27) observando-se que a curva denominada de aproximada, obtida usando-se esta equação, é praticamente idêntica à curva denominada exata, usando-se a equação (5.24), veja a Figura 5.2.

Pela expansão da série de Taylor, ao se plotarem as duas curvas no mesmo gráfico, deve-se observar que no ponto $\Delta\theta_v = 0$, as duas curvas serão exatas. À medida que crescem ou decrescem as curvas, dentro de um intervalo fechado, ocorre um pequeno erro de aproximação, (diferença diminuída ao se elevar a ordem da série de Taylor).

Nesse caso, foi utilizada uma série de quinta ordem. Nas potências mais elevadas, fica inviável e exaustivo, se for considerado o método analítico. Para solucionar esse problema, foi utilizado um método recursivo com toolbox do Matlab Symbolic, que permite a expansão em potências mais elevadas. Nesse resultado, torna-se praticamente nulo o erro de aproximação para um intervalo fechado e de interesse de estudo.

Este modelo matemático em espaço de estados e seu projeto de reguladores fuzzy Takagi-Sugeno, no ponto de operação de $\theta_{v0} = 30^\circ$ e $\theta_{v0} = 60^\circ$ (mostrada na seção 5.1.3), foram apresentadas pela primeira vez pelos autores (TEIXEIRA et al., 2006b) e (TEIXEIRA et al., 2006c), em periódicos e congressos relevantes da área. Da idéia original dos autores, a modelagem foi mais claramente apresentada nesta seção. Primeiramente a modelagem foi adaptada, resumidamente nas teses de doutorados de (FARIA, 2006) e (SILVA, 2007), pois a finalidade destas eram apenas a implementação em hardware do controle T-S e o neuroestimulador em malha fechada, para testes com pacientes paraplégicos.

5.1.3 Modelo Matemático para Outros Pontos de Operação

Na modelagem estudada anteriormente, foi considerado que no ponto de operação, $\theta_{v0} = 30^\circ$. A função não-linear $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))$ foi expandida em série de Taylor de quinta ordem da série, mas mesmo assim existe um certo erro entre a curva exata e a aproximada (Figura 5.2). Assim para melhorar a aproximação em torno de $\theta_v = 30^\circ$, é necessário utilizar ordens mais elevadas da série. Observou-se também que no estudo de outros pontos de operação, com $\theta_{v0} > 30^\circ$, as ordens da série também cresciam. Como consequência dessa

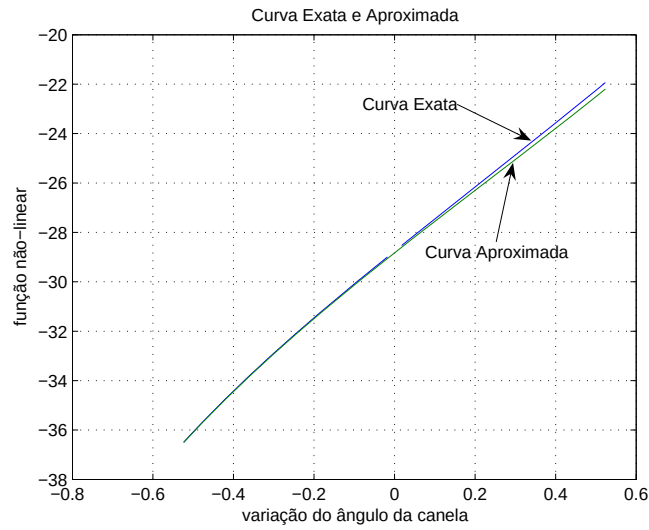


Figura 5.2: Curvas da função $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ exata e aproximação por série de Taylor de quinta ordem.

necessidade e motivação, foi proposto um programa computacional no *Toolbox Symbolic* do *software* Matlab.

Portanto, para ilustrar o procedimento, na análise em questão, considerou-se $\theta_{v0} = 60^\circ$. Todos os resultados para obtenção de $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))$ foram desenvolvidos, computacionalmente e o seu resultado é mostrado na Figura 5.3.

O motivo gerou um eficiente modelo para obter as séries de Taylor. Uma aproximação encontrada está na décima primeira ordem e representa, quase que fielmente a curva exata da função não-linear no intervalo considerado. Devido ao fato da equação resultante ser extremamente grande, o resultado é apresentado no Apêndice A.

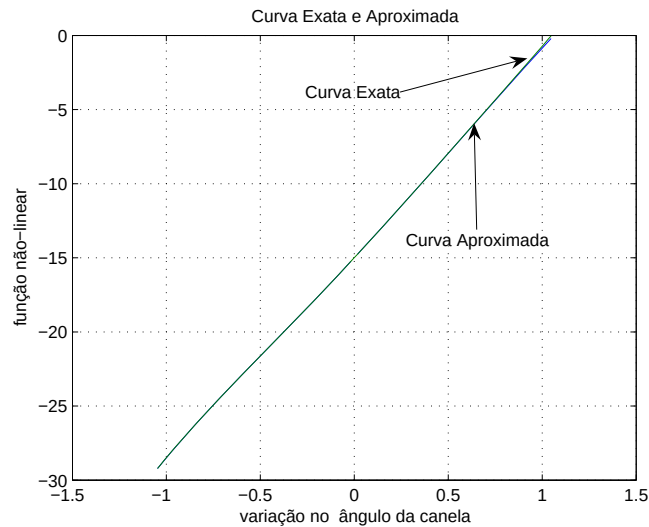


Figura 5.3: Curvas da função $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ exata e aproximação por série de Taylor de décima primeira ordem.

Observa-se que o método recursivo, resolvido no ambiente Matlab, especificamente no conjunto de comandos do Toolbox Symbolic, apresenta uma melhor manipulação das fórmulas, e, conseqüentemente, melhores resultados. Todos esses resultados, são desenvolvidos computacionalmente, portanto pode-se elevar a ordem da aproximação tanto quanto seja necessária. Uma melhor aproximação poderia estar entre a décima quinta e a décima sétima ordem, e pode representar fielmente a curva exata da função não-linear no intervalo considerado.

5.2 Modelagem do Músculo com Modelos Locais T-S

Em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), a equação (5.4) denota a função de transferência entre o estímulo elétrico e o torque resultante. Usando técnica de identificação paramétrica, foi considerado o modelo ARX (do inglês, autoregressive with exogenous inputs) com uso do método de mínimos quadrados.

Essa identificação se refere a sistemas lineares e invariantes no tempo. No entanto, relação força produzida por estímulo elétrico, como já comentado nos capítulos anteriores, apresenta uma característica não-linear. Além disso, (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) não demonstram uma preocupação com a variação paramétrica em função do paciente. Deve-se lembrar que a fisiologia do paciente varia com a questão da temperatura da pele e músculo, quando o estímulo elétrico é aplicado sobre o mesmo. Acredita-se que as considerações de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), possam ser generalizadas, usando conceitos de sistemas não-lineares para representar melhor a relação força produzida por estímulo elétrico. Essa característica da função não-linear pode ser melhor visualizada pela Figura 5.4.

Em (CHOU; BLINDER-MACLEOD, 2007), sugere-se a determinação de uma função matemática dos dados experimentais. O caso mostra a importância do conhecimento dessa função matemática para prever o comportamento da fadiga com a máxima frequência de estimulação. De (CHOU; BLINDER-MACLEOD, 2007), a curva da Figura 5.4 fica representada pela seguinte aproximação exponencial,

$$\begin{aligned} F(PD) &= A(1 - e^{-(PD-PD_0)/\tau}) \quad \text{para } PD \geq PD_0, \\ F(PD) &= 0 \quad \text{para } PD < PD_0, \end{aligned} \tag{5.28}$$

sendo A como um fator de escala da força F , PD representa a duração do estímulo μs ,

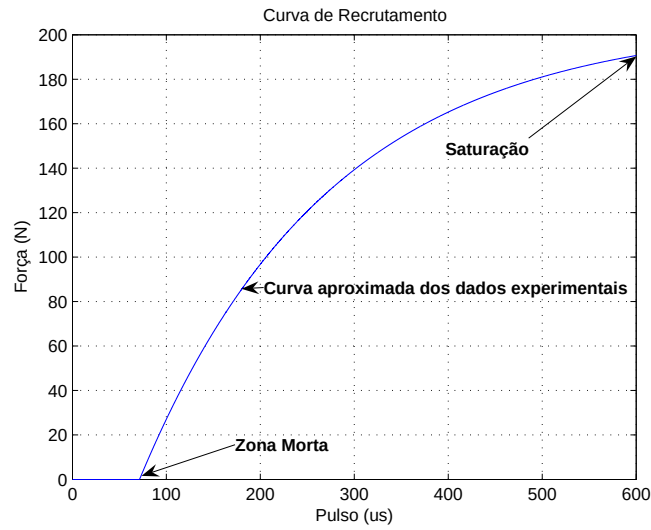


Figura 5.4: Relação força por largura de pulso, dados experimentais ao estímulo do músculo quadríceps.

PD_0 representa o limiar da duração do estímulo, e τ denota a constante de tempo da subida da força, com o aumento da duração do pulso.

Na Figura 5.4 mostra-se a relação da força e a largura de pulso, duração do pulso entre $0\mu s$ e $600\mu s$. Os parâmetros obtidos para a curva foram os seguintes: $A=205.74$, $PD_0 = 71.42$ e $\tau = 202.28$.

Os estudos de (CHOU; BLINDER-MACLEOD, 2007) mostraram que durante a estimulação elétrica repetitiva, com uma duração de pulso constante, a máxima força produzida pelo quadríceps declina devido à fadiga muscular. Esses resultados de (CHOU; BLINDER-MACLEOD, 2007), mostram que podem ocorrer variações paramétricas da equação (5.4). Os parâmetros da curva de recrutamento, após atingir o nível de fadiga, são alterados, como mostra a Figura 5.5.

Após a fadiga, os parâmetros da equação exponencial são os seguintes: $A=109.8$, $PD_0 = 73.18$ e $\tau = 181.94$.

Visivelmente, existe uma grande diferença entre pré-fadiga e pós-fadiga do músculo rectus femoris do quadríceps. Comprovando-se que a equação (5.4) somente é válida para um período curto de aplicação do estímulo e um grande repouso muscular, antes da reaplicação do estímulo. Com parâmetros fixados na equação (5.4), o controle em malha fixa torna-se um fator limitante, quando se trata de estabilidade. Pelas figuras 5.4 e 5.5, observa-se uma grande variação paramétrica. Antes de se propor algum esquema de controle, fica evidente a necessidade de se representar o mais fielmente possível as variações da curva de recrutamento. O controle poderia ser adaptativo e rápido para

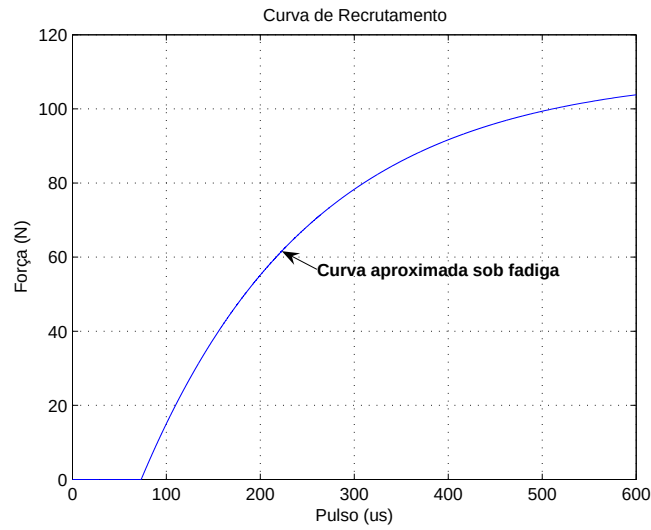


Figura 5.5: Relação força por largura de pulso com fadiga.

prever as variações fisiológicas que ocorrem no músculo.

Uma proposta de modelo muscular experimental, considerando a fadiga, é apresentada na Figura 5.6. Esta modelagem foi inspirada nos modelos fuzzy T-S.

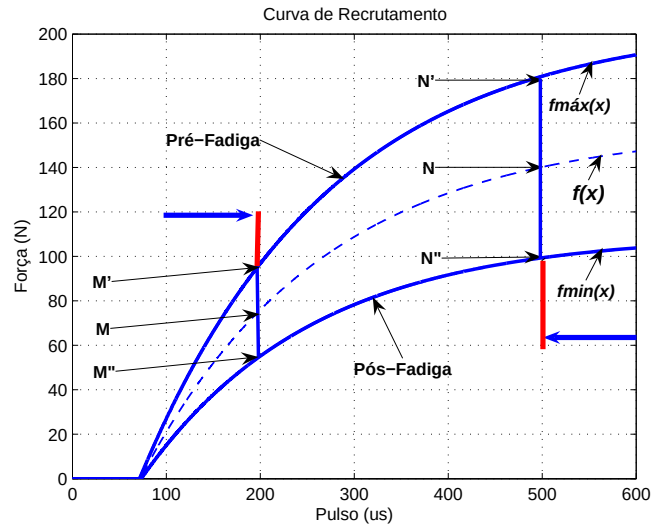


Figura 5.6: Modelo matemático do músculo.

A equação exponencial (5.28) pode ser representada, utilizando uma combinação convexa, pela seguinte forma, substituindo-se F por f e PD por x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_1(x)(\max f(x)) + \alpha_2(x)(\min f(x)), \\ f(x) &= \alpha_1(x)N + \alpha_2(x)M. \end{aligned} \quad (5.29)$$

A $f(x)$ simboliza uma curva ótima a ser especificada pelo projetista de controle. Nesse caso, a curva $f(x)$ torna-se segura para não ocorrer a fadiga do músculo, pois considera-se um nível menor de recrutamento, mas suficiente para produzir a força. Essa diminuição pode ser feita pela diminuição da amplitude do sinal, mantendo a mesma frequência e duração do pulso.

Compondo-se os valores numéricos encontrados de N e M, mostrados na Figura 5.6, de forma convexa com seus limites N', N'' e M' e M'', tem-se,

$$\begin{aligned} M &= \lambda_1(x)M' + \lambda_2(x)M'', \\ N &= \lambda_3(x)N' + \lambda_4(x)N''. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Substituindo a equação (5.30) em (5.29) tem-se,

$$f(x) = \alpha_1(x)(\lambda_3(x)N' + \lambda_4(x)N'') + \alpha_2(x)(\lambda_1(x)M' + \lambda_2(x)M''). \quad (5.31)$$

Desde que seja válido,

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) + \alpha_2(x) &= 1, \quad \alpha_1(x), \alpha_2(x) \geq 0, \\ \lambda_1(x) + \lambda_2(x) &= 1, \quad \lambda_1(x), \lambda_2(x) \geq 0, \\ \lambda_3(x) + \lambda_4(x) &= 1, \quad \lambda_3(x), \lambda_4(x) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

A equação (5.31) possibilita determinar precisamente o valor da força muscular, produzida pelo estímulo elétrico aplicado. Quando um músculo estimulado eletricamente começa a fadigar, sua resposta muda não-linearmente e possivelmente o músculo não consegue mais produzir mais contrações (LYNCH; POPOVIC, 2008).

Essa composição mostra-se mais precisa para trabalhos com estrutura de controle e é um tema para pesquisas futuras neste assunto. Finalmente, note que a equação (5.31) apresenta uma forma adequada para a modelagem e controle utilizando modelos fuzzy T-S. Essa proposta é inédita e na opinião do autor, possibilita o projeto de controladores Takagi-Sugeno, mais eficientes do que métodos apresentados anteriormente nesta tese.

6 *Resultados do Controle da Posição da Articulação do Joelho*

Neste capítulo são apresentadas aplicações originais dos métodos de modelagem, análise e projeto discutidos nos capítulos anteriores, visando o controle da posição da perna de paraplégicos utilizando eletroestimulação.

6.1 Controle Não-Linear da Posição da Perna de Paraplégicos Utilizando um Modelo Exato Fuzzy (T-S)

A aplicação, neste caso, é o projeto de um controlador que leve a perna do paciente do repouso até um ângulo de 30° graus. Da mesma maneira, ao retirar a excitação do controlador, a perna deve voltar ao repouso pela ação da gravidade.

Para o ponto de operação desejado de 30°, conforme (TANIGUCHI et al., 2001) existe uma não-linearidade $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))$ em (5.23), então, determinam-se dois modelos locais, ou seja, os vértices do politopo. Analisando a curva da função não-linear aproximada (5.27), determinam-se os valores mínimos e máximos da função $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))$ para o intervalo $-\pi/6 < x_1 < \pi/6$, veja Figura 5.2. O projeto não-linear da função $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))$ descreve o comportamento de uma região maior que a de interesse, porém somente há interesse de projeto, segundo a restrição física ao movimento permitido para θ_v , variando entre $0 < \theta_v < \pi/2$. Nesse caso, θ_v terá uma variação angular entre $0 < \mathbf{x}_1(t) < \pi/6$, e assim,

$$a_{211} = \max \left\{ \tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) \right\} = -22.20124,$$

$$a_{212} = \min \left\{ \tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) \right\} = -36.50663.$$

Definindo as funções de pertinências usadas para solução do sistema com dois modelos locais,

$$\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) = \sigma_{211}(\mathbf{x}_1(t))a_{211} + \sigma_{212}(\mathbf{x}_1(t))a_{212}, \quad (6.1)$$

sendo por definição da combinação convexa,

$$\sigma_{211}(\mathbf{x}_1(t)) + \sigma_{212}(\mathbf{x}_1(t)) = 1, \quad \sigma_{211}(\mathbf{x}_1(t)) \geq 0, \quad \sigma_{212}(\mathbf{x}_1(t)) \geq 0. \quad (6.2)$$

Logo, de (6.1) e (6.2) tem-se que:

$$\sigma_{211}(\mathbf{x}_1(t)) = \frac{\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) - a_{212}}{a_{211} - a_{212}} \quad (6.3)$$

e,

$$\sigma_{212}(\mathbf{x}_1(t)) = \frac{\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) - a_{211}}{a_{212} - a_{211}}. \quad (6.4)$$

Os modelos locais determinados, através dos valores mínimos e máximos da função $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))$, seus valores são, a_{211} e a_{212} , e inseridas na equação (6.5),

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{211} & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{212} & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

As matrizes de (6.5), formam a base dos vértices do politopo. A matriz $\mathbf{B}$ é constante, pois não existem não-linearidades multiplicando a entrada P_N no sistema não-linear (5.23).

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Compondo o modelo não-linear em modelos locais, para modelagem exata, conforme (TANIGUCHI et al., 2001), encontra-se,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_{21i}(\mathbf{x}_1(t)) \left(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \right). \quad (6.7)$$

6.2 Projeto dos Reguladores

No projeto do regulador, são utilizadas as condições que garantem a estabilidade assintótica global do sistema (3.5) realimentado com a lei de controle (3.13). Na apresentação dos resultados simulados, para o caso estudado, considera-se apenas a estabilidade. Primeiro, deve-se compor os modelos locais, no ponto de operação de 30°.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -22.2012 & -0.7458 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -36.5066 & -0.7458 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Segundo dados disponíveis na literatura de programação matemática (BOYD et al., 1994), as técnicas de projeto do regulador usando LMI, consideram a estabilidade, resposta transitória e especificação de restrições nos sinais de entrada e saída. Cada seção mostra os resultados considerando as restrições de desempenho do sistema.

6.2.1 Estabilidade

Definindo $r = 2$, $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$, tem-se que, se (3.36) e (3.40) são factíveis e $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, os ganhos do controlador que asseguram a estabilidade assintótica do ponto

de equilíbrio $x = 0$ do sistema (3.5) realimentado com a lei de controle (3.13) são dados por $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{X}$, $i = 1, 2$.

Para a modelagem Takagi-Sugeno da planta com $\theta_{v0} = 30^\circ$, dada em (6.3)-(6.7), as LMIs (3.36) e (3.40) são factíveis para $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, e os ganhos do controlador são dados por,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.21 & 0.13 & 0.04 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.22 & 0.13 & 0.04 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 6.1, são mostrados os resultados da simulação do projeto do regulador, considerando a estabilidade.

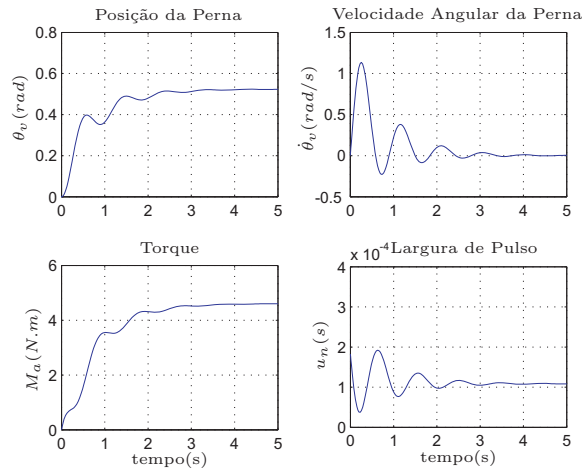


Figura 6.1: Resposta do sistema controlado para condições iniciais $(\theta_v, \dot{\theta}_v, M_a) = (0, 0, 0)$ considerando somente a estabilidade.

Na Figura 6.2, mostra-se o comportamento, da retirada da excitação do sinal, então, a perna estará sujeita apenas a ação da gravidade, assim retornando ao repouso.

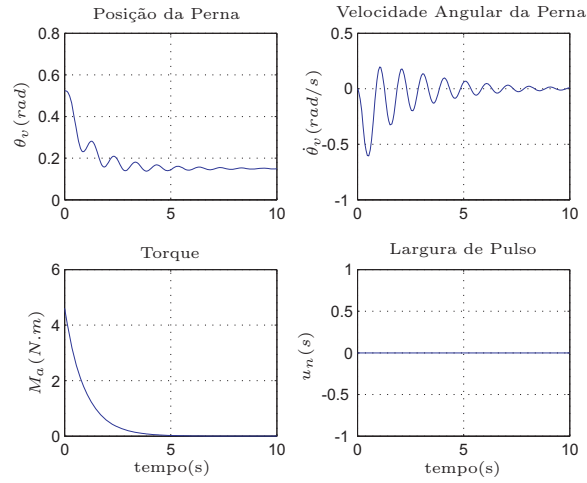


Figura 6.2: Resposta do sistema sem estímulo elétrico na perna.

6.2.2 Estabilidade e Taxa de Decaimento

As LMIs (3.36) e (3.40), consideraram somente a estabilidade do sistema. Inclui-se agora as restrições do controle da velocidade da resposta transitória, as quais foram demonstradas em (3.42) e (3.43), isto é, obtendo-se as condições suficientes para uma taxa de decaimento maior ou igual a β . Nessas condições, são utilizadas as LMIs $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, (3.42) e (3.43) e agora impõem-se uma taxa de decaimento $\beta = 1$, tendo como consequência, uma resposta transitória mais rápida, isto é, um menor tempo de estabelecimento. Os ganhos do regulador, calculados de (3.42) e (3.43), com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$ e os modelos locais (6.5), são dados por,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.21 & 0.31 & 0.13 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.28 & 0.28 & 0.12 \end{bmatrix}.$$

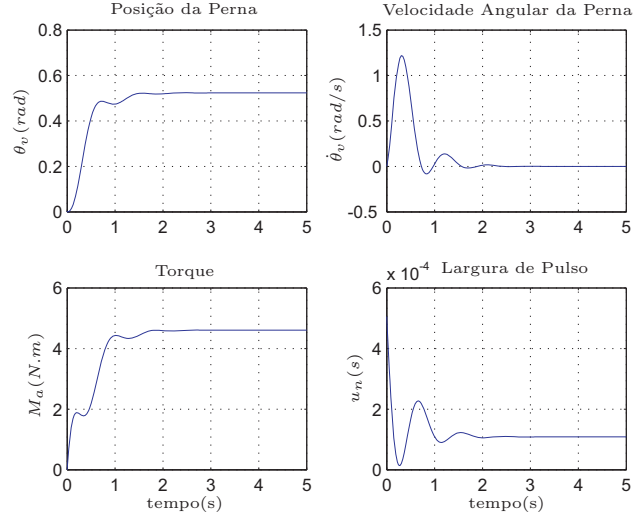


Figura 6.3: Resposta do sistema controlado, para condições iniciais

$$(\theta_v, \dot{\theta}_v, M_a) = (0, 0, 0), \text{ com } \beta = 1.$$

O sistema da Figura 6.1 com $\beta = 0$, apresentou um tempo de estabelecimento de aproximadamente 3 segundos, enquanto na Figura 6.3, com $\beta = 1$ o tempo de estabelecimento foi reduzido para aproximadamente 2 segundos.

6.2.3 Estabilidade, Taxa de Decaimento $\beta = 1$, Condições Iniciais $[x_1, x_2, x_3] = [-\pi/6, 0, -4.6068]$ e Restrição no Sinal de Entrada $\mu = 0.06$

Uma solução ótima para o controle da posição da perna do paraplégico, atendendo aos requisitos de estabilidade, taxa de decaimento e restrição no sinal de entrada, é dada por $\beta = 1$ e $\mu = 0.06$, sendo que μ representa um limitante superior para a variação da largura de pulso, conforme (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

Os ganhos do regulador para a solução factível das LMIs (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45), com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, foram os seguintes:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.53 & 0.03 & 0.08 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.62 & 0.09 & 0.09 \end{bmatrix}.$$

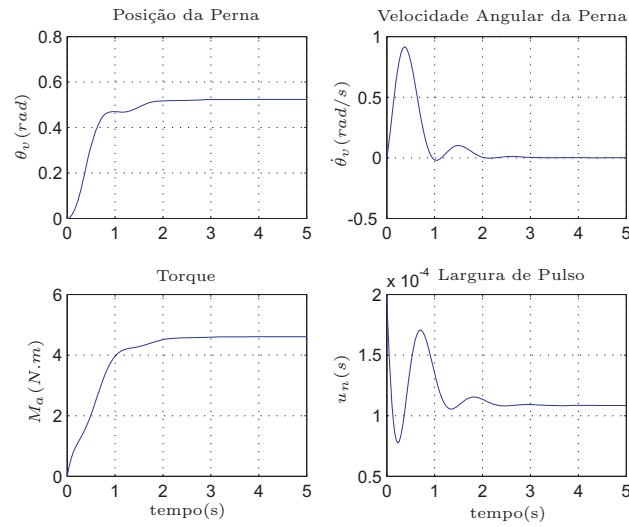


Figura 6.4: Resposta do controlador com $\beta = 1$ e $\mu = 0.06$.

Com $\beta = 1$ e $\mu = 0.06$, consegue-se diminuir a amplitude da lei de controle (compare com a Figura 6.1 com a Figura 6.4). Como uma consequência da restrição no sinal de entrada, o tempo de estabelecimento passou a ser aproximadamente 2,5 segundos. No entanto, esse fato não compromete a resposta do sistema. As LMI utilizadas, são conservativas, acredita-se encontrar outras soluções factíveis e com a largura de pulso positiva, fazendo-se LMI com condições relaxadas.

6.3 Modelagem Matemática para Outros Pontos de Operação

Neste caso, visou-se, o ponto de operação de 60° . O procedimento realizado, no item anterior, para obter a $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))$, foi o analítico. Agora no ponto de operação de 60° , a metodologia analítica para determinar a $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))$, não mostra-se adequada, pois necessita-se de uma série de Taylor de ordem superior a 5, para que as curvas exata e aproximada apresentem um pequeno erro. A solução foi utilizar um método recursivo, já que o Toolbox Symbolic do Matlab permite manipulações e simplificações matemáticas, tornando o trabalho do projetista menos custoso. O tamanho das equações obtidas é razoavelmente grande, e não serão apresentadas aqui. Seguindo a mesma metodologia, para o controlador do item anterior, mostram-se os resultados no ponto de operação de 60° .

Da curva aproximada de (5.27), determinam-se os valores mínimo e máximo da função $\tilde{f}_{21}\mathbf{x}_1(t)$ para o intervalo $-\pi/3 < x_1 < \pi/3$, veja a Figura 5.3. Porém pelas restrições

físicas, somente é possível projetar o controle no intervalo $0 < x_1 < \pi/3$:

$$a_{211} = \max \left\{ \tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) \right\} = -0.0332,$$

$$a_{212} = \min \left\{ \tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) \right\} = -29.2165.$$

Compõem-se os modelos locais, com seus respectivos valores, para o ponto de operação de 60° .

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.0332 & -0.7458 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -29.2165 & -0.7458 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Foram utilizadas as LMIs para estabilidade, com taxa de decaimento e restrição no sinal de entrada. Uma solução factível das LMIs (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45), com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$ e $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [-\pi/6, 0, -8.76]$ é dada por:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.2019 & 0.1612 & 0.1054 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1664 & 0.1640 & 0.1047 \end{bmatrix}.$$

Foi considerado no projeto, $\beta = 0.001$ e restrição no sinal de entrada igual a $\mu = 0.0005$, os resultados da simulação para o ponto de operação de 60° , são mostrados na Figura 6.5.

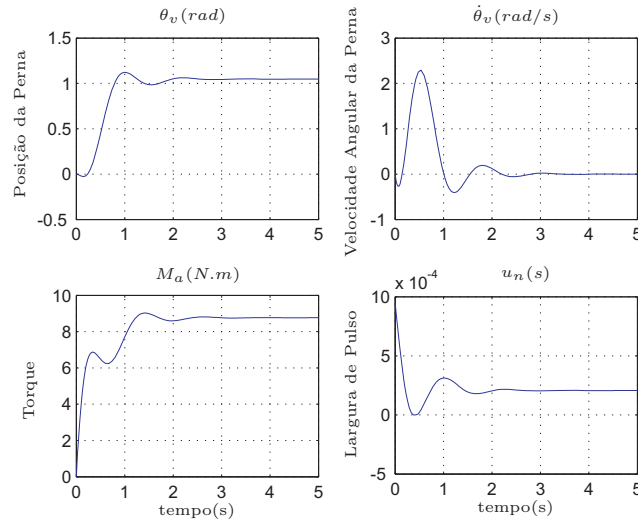


Figura 6.5: Resposta do controlador com $\beta = 0.001$ e $\mu = 0.0005$.

Nesse ponto de operação, a combinação de restrições é ótima para fornecer uma largura de pulso estritamente positiva. Várias simulações foram realizadas, com LMI sem condições relaxadas, para fornecer uma solução factível em que a largura de pulso fosse positiva.

6.4 Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno

6.4.1 Projeto do Regulador com Observador de Estados Utilizando Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

No projeto do regulador com o observador, foi utilizado a dinâmica da equação (3.85). A matriz resultante, com as dimensões próprias das equações dinâmicas do paciente paraplégico, conduz a uma matriz de dimensão $n=6$. Devido à dificuldade encontrada no cálculo dessa matriz, novamente utilizou-se o *Toolbox Symbolic* do *software* Matlab. O programa utilizado encontra-se no Apêndice B. Para estabelecer as constantes da taxa de decaimento do regulador e observador, sugere-se que o tempo de estabelecimento do observador deva ser aproximadamente cinco vezes mais rápido que o tempo de estabelecimento do regulador (OGATA, 2004). Assim, foram adotadas as taxas de decaimento do regulador e do observador, respectivamente, iguais a $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.5$, e restringiu-se o sinal de entrada em $\mu = 0.005$. A seguir, mostra-se os resultados, considerando a estabilidade com taxa de decaimento.

As LMIs para estabilizar (3.85) são (3.42)-(3.43), para os ganhos do regulador, e a (3.69)-(3.72), para os ganhos do observador, sendo $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0$. Para o ponto de $\theta_{v0} = 60^\circ$, tem-se,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.21 & 0.17 & 0.12 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.17 & 0.18 & 0.12 \end{bmatrix}.$$

e

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 8.52 \\ 86.15 \\ 2.07 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 11.54 \\ 79.34 \\ 0.85 \end{bmatrix}.$$

O regulador com o observador foi simulado com os ganhos obtidos acima.

Os resultados simulados, conforme os ganhos do regulador e observador são mostrados na Figura 6.6. O ponto de operação desejado é $\theta_{v0} = 60^\circ$, como desenvolvido em (TEIXEIRA et al., 2006b). Com a equação (3.85), o vetor de estado inicial é definido, $[\theta_v; \dot{\theta}_v; M_{ao}; e_1(0); e_2(0); e_3(0)] = [-\pi/3; 0; -8.76; -0.3; 0; -0.02]$. Foi considerado que apenas θ_v está acessível.

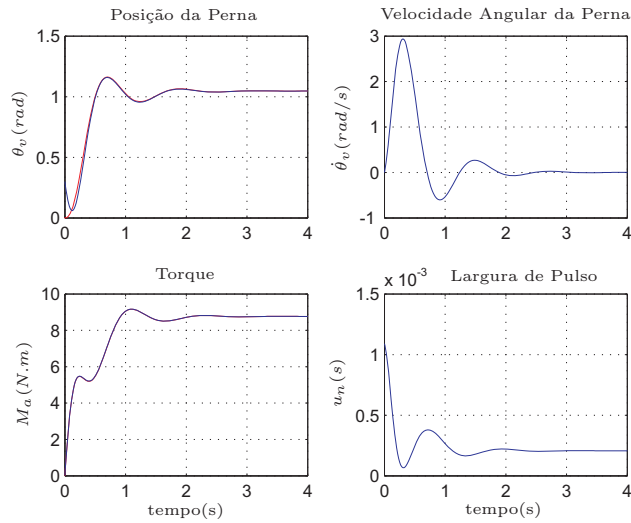


Figura 6.6: Regulador com observador.

Esses resultados consideraram o regulador e observador de estados para o ponto de 60° . As simulações mostram que o sistema controlado apresenta o desempenho esperado.

6.5 Projeto Fuzzy Takagi-Sugeno Discreto

A maior parte dos sistemas dinâmicos, são descritos por modelos contínuos no tempo. Por outro lado, ao invés de se implementar controladores analógicos, é preferível implementá-los, usando um dispositivo digital, pois apresentam maior flexibilidade e menor custo. Em fase inicial de estudo, foram projetados controladores lineares, conforme a técnica de emulação apresentada em (OGATA, 1995), utilizando-se como base o o controlador analógico projetado em (TEIXEIRA et al., 2007). Este trabalho está sendo implementado em laboratório (GAINO et al., 2007). O projeto utilizou o modelo matemático, proposto por (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) que mostra uma relação empírica da produção do torque do músculo com a largura de pulso. O modelo em variáveis de estado, é o mesmo desenvolvido em (TEIXEIRA et al., 2006b) e (TEIXEIRA et al., 2006c).

No projeto de controladores digitais de sistemas não-lineares, vários resultados considerando a planta descrita por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) têm sido publicados (KIM et al., 2006). A discretização de sistemas não-lineares não é sempre uma tarefa fácil, porém nossa percepção de sistemas emulados nos sistemas lineares, inspirou uma metodologia para discretizar sistemas não-lineares, como será apresentado a seguir.

O objetivo é a implementação do controle, em malha fechada dos movimentos do complexo canela-pé de paciente paraplégico. Na análise e projeto, o ponto de operação foi $\theta_{v0} = 60^\circ$. Para projetar o controlador discreto, foi proposto um método simples de discretização de sistemas não-lineares contínuos no tempo, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Esse método idealizado e sua análise com simulações, demonstram a sua validade para períodos de amostragens suficientemente pequenos (como descrito na Seção 3.5).

6.5.1 Estabilidade e Taxa de Decaimento

O sistema (3.5) e as condições suficientes apresentadas em 1, 2 e 3, da Seção 4.2.3, na modelagem Takagi-Sugeno, para $\theta_{v0} = 60^\circ$ são factíveis, se e somente se as LMIs (4.23) são factíveis para $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$. Na Figura 6.7, são mostrados os resultados das simulações, considerando três períodos de amostragem; $T = 0.01s$, $T = 0.1s$ e $T = 0.3s$. Para $\beta = 0.99$ e $\mu = 0.005$. No caso estudado, mantendo a taxa de decaimento e a restrição do sinal de entrada, verificou-se a infactibilidade das LMI para $T \geq 0.305s$. A

seguir, são apresentados os ganhos para os três períodos de amostragens.

Ganhos para $T = 0.01s$:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.00105 & 0.000372 & 0.00016 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 0.00004 & 0.00037 & 0.00016 \end{bmatrix}.$$

Ganhos para $T = 0.1s$:

$$\mathbf{F}_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.67341 & 0.24705 & 0.13177 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.47729 & 0.18614 & 0.12794 \end{bmatrix}.$$

Ganhos para $T = 0.3s$:

$$\mathbf{F}_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.27134 & 0.12408 & 0.10069 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.93390 & -0.04295 & 0.10104 \end{bmatrix}.$$

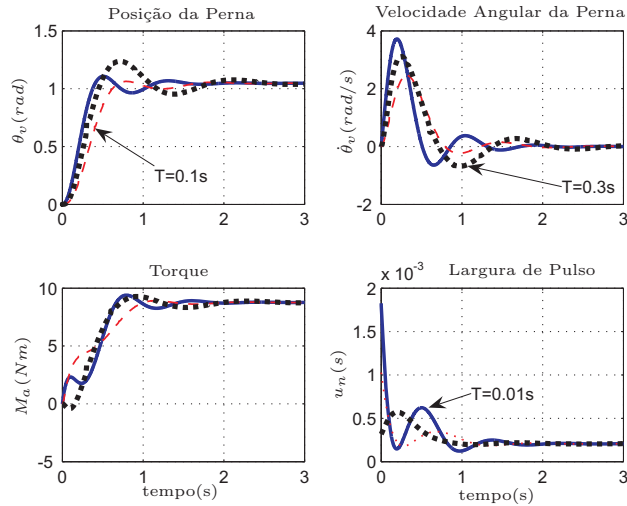


Figura 6.7: Resposta do controlador com estabilidade, taxa de decaimento e restrição no sinal de entrada.

Na Figura 6.7, pode-se observar que para períodos de amostragem pequenos, a aproximação (4.16) torna-se válida. Para períodos maiores, ocorrem imprecisões, devido à aproximação do modelo da equação (4.16). Ou seja, a análise efetuada em (4.16) cor-

responde a uma emulação discreta de sistemas não-lineares. Para comparação, a seguir mostram-se os resultados do modelo analógico simulado, cujos resultados são apresentados na Figura 6.8. Para estimar o valor de βc , taxa de decaimento do plano contínuo, usou-se uma transformação bilinear que relaciona a localização dos pólos do plano contínuo, com a localização dos pólos do plano discreto, e assim por está transformação, pôde-se estimar a taxa de decaimento βc . Para $\beta c = 0.1005$ e $\mu = 0.005$, descrevem-se os ganhos do controlador, para o caso contínuo, que, nesse caso, correspondem ao sistema analógico que foi discretizado:

$$\mathbf{F}_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.76442 & 0.28727 & 0.13308 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.02724 & 0.28438 & 0.13413 \end{bmatrix}.$$

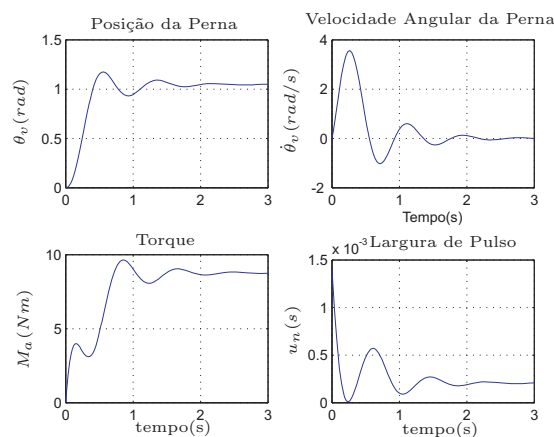


Figura 6.8: Resposta do sistema contínuo.

A solução apresenta após transitório, em regime permanente, a posição angular em 60° , velocidade angular nula e torque ativo devido ao estímulo do pulso ao músculo do quadríceps com valor igual a $8.76 Nm$. Portanto, o resultado do projeto atendeu às especificações de desempenho e estabilidade exigidas para o sistema discreto.

6.6 Projeto Com Rastreamento

A vantagem de se trabalhar com o rastreamento do sinal é a facilidade de projetar o regulador ou observador sem a necessidade de se obter, uma nova representação através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno para cada ponto. Esse método conduz a uma generalização

do projeto considerando um dado ponto de operação. Da matriz que define a dinâmica do movimento do paciente paraplégico, veja (5.23), apresenta-se um novo método que utiliza uma troca de variáveis, para o projeto do regulador, e em seguida o projeto do regulador e observador.

Este resultado é uma das principais contribuições dessa tese, junto com a realimentação de derivada de estado e identificação do modelo local baseado em LMI, aplicados ao controle de movimentos do paciente paraplégico.

6.6.1 Projeto do Regulador com Rastreamento

Considere a planta definida por (5.23) e (5.24), com $(\theta_{v0}, \dot{\theta}_{v0}, M_{a0}) = (0, 0, 0)$. Assim, de (5.15) e (5.17), note que $x_1(t) = \theta_v(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}_v(t)$ e $x_3(t) = M_a(t)$. Esta informação é necessária, pois na planta (5.23) e (5.24) as variáveis $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ são as variações das variáveis de estado da planta, com relação aos seus valores no ponto de operação, e no nosso equacionamento, não é definido antes do projeto.

O motivo desse procedimento foi que a planta (5.23) não satisfaz a condição (4.33), necessária para a aplicação do método de projeto proposto por (LIAN; LIOU, 2006). Seja por definição,

$$\mathbf{x}_{1n}(t) = \tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t))\mathbf{x}_1(t) = f(\mathbf{x}_1(t)). \quad (6.10)$$

Considerando $f(\mathbf{x}_1)(t)$ invertível, ou seja, bijetora em seu domínio, pode-se escrever,

$$f(\mathbf{x}_1(t)) = \mathbf{x}_{1n}(t) \iff f^{-1}(\mathbf{x}_{1n}(t)) = \mathbf{x}_1(t). \quad (6.11)$$

Definindo uma letra grega para a equação (6.11),

$$f^{-1}(\mathbf{x}_{1n}(t)) \triangleq \psi(\mathbf{x}_{1n}(t)). \quad (6.12)$$

Da matriz (5.23) compõe-se uma nova matriz com a definição de (6.12). Determinando as novas equações de (5.23), (6.10)-(6.12), considerando $\mathbf{x}_{2n}(t) = \mathbf{x}_2(t)$ e $\mathbf{x}_{3n}(t) = \mathbf{x}_3(t)$,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \frac{\partial \psi(\mathbf{x}_{1n}(t))}{\partial(\mathbf{x}_{1n}(t))} \frac{\partial(\mathbf{x}_{1n}(t))}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\mathbf{x}_{1n}(t))}{\partial(\mathbf{x}_{1n}(t))} \dot{\mathbf{x}}_{1n}(t) = \mathbf{x}_2(t) \\
\dot{\mathbf{x}}_{2n}(t) &= \mathbf{x}_{1n}(t) - \frac{B}{J} \mathbf{x}_2(t) + \frac{1}{J} \mathbf{x}_3(t) \\
\dot{\mathbf{x}}_{3n}(t) &= \frac{-1}{\tau} \mathbf{x}_3(t) + \frac{GP}{\tau}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

O equacionamento a seguir, baseado em (6.13) existe se e somente se,

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}_{1n}(t))}{\partial(\mathbf{x}_{1n}(t))} \neq 0. \tag{6.14}$$

As novas definições de (6.13) e (6.14), permitem definir à nova variável,

$$\dot{\mathbf{x}}_{1n}(t) = \underbrace{\frac{1}{\frac{\partial \psi(\mathbf{x}_{1n}(t))}{\partial \mathbf{x}_{1n}(t)}}}_{\tilde{f}_{12n}(\mathbf{x}_{1n}(t))} \mathbf{x}_2(t) \tag{6.15}$$

As equações (6.13), (6.14) e (6.15), redifinem a matriz (5.23), para representar o novo sistema,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{1n} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2n} \\ \dot{\mathbf{x}}_{3n} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \tilde{f}_{12n}(\mathbf{x}_{1n}(t)) & 0 \\ 1 & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\mathbf{x}_n(t))} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1n} \\ \mathbf{x}_{2n} \\ \mathbf{x}_{3n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_n(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_n(t))} P_N, \tag{6.16}$$

Considera-se que o problema consiste, a partir das condições de repouso, aplicar as condições especificadas no projeto, e sustentar a perna em $\theta_v = \theta_{v0}$, sendo que θ_{v0} , é um valor conhecido. Então, defini-se para o rastreamento deseja-se que $\mathbf{x}_{in}(t) \rightarrow \mathbf{x}_{ind}(t)$, $i = 1, 2, 3$, sendo que de (6.10), $x_{1nd} = f(\theta_{v0})$, $x_{2nd} = d(\theta_{v0})/dt = 0$ e $x_{3nd} = x_3 = M_{a0}$.

Escrevendo as variáveis virtuais de referência em forma de vetor,

$$\mathbf{x}_{nd} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1nd} \\ \mathbf{x}_{2nd} \\ \mathbf{x}_{3nd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\theta_{v0}) \\ 0 \\ M_{a0} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Como consequência natural, as derivadas primeiras de x_{nd} são nulas. Assim, de acordo com a equação (4.31),

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}_c(t)) = -\mathbf{A}(\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{nd}(t) + \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_{nd}(t)}_{=0}. \quad (6.18)$$

Substituindo-se as parcelas das matrizes definidas em (6.16) em (6.18), obtém-se a seguinte equação,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x}_n(t))} (\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}_c(t)) = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \tilde{f}_{12n(\mathbf{x}_{1n}(t))} & 0 \\ 1 & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\mathbf{x}_n(t))} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\theta_{v0}) \\ 0 \\ M_{a0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{nd}(t)} \quad (6.19)$$

sendo $\mathbf{u}(t) = P$

Aplicando-se a propriedade distributiva na equação (6.19) encontra-se,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau}(\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}_c(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(\theta_{v0}) - \frac{M_{a0}}{J} \\ \frac{M_{a0}}{\tau} \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

A equação (6.20) é satisfeita para $t \geq 0$. Assim de (6.20), determina-se a lei de controle,

$$\begin{aligned}\frac{G}{\tau}(\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}_c(t)) &= \frac{M_{a0}}{\tau}, \\ \mathbf{u}(t) &= \frac{M_{a0}}{G} + \boldsymbol{\tau}_c(t),\end{aligned}\tag{6.21}$$

sendo $\boldsymbol{\tau}_c(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}_i(t)) \mathbf{F}_i \tilde{\mathbf{x}}_n(t)$ e $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{nd}(t)$.

O vetor $\tilde{\mathbf{x}}_n(t)$ denota o erro de rastreamento das variáveis de estado.

6.6.2 Resultado para o Rastreamento com Regulador

Nesta seção serão plotados os resultados da simulação, realizada na plataforma do *software* Matlab. O sistema possui como referência o ângulo desejado $\theta_v = 30^\circ$. O ângulo de repouso da perna é $\theta_v = 10^\circ$ e pode ser verificado graficamente. Os ganhos do regulador, para a solução factível das LMIs (3.42)-(3.43) e $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$, com taxa de decaimento $\beta = 1.6$ e restrição no sinal de entrada $\mu = 0.000050$, são mostrados na Figura 6.10.

Para o ângulo desejado de 30° , da função não-linear $\tilde{f}_{12n}(\mathbf{x}_{1n}(t))$, encontram-se os modelos locais.

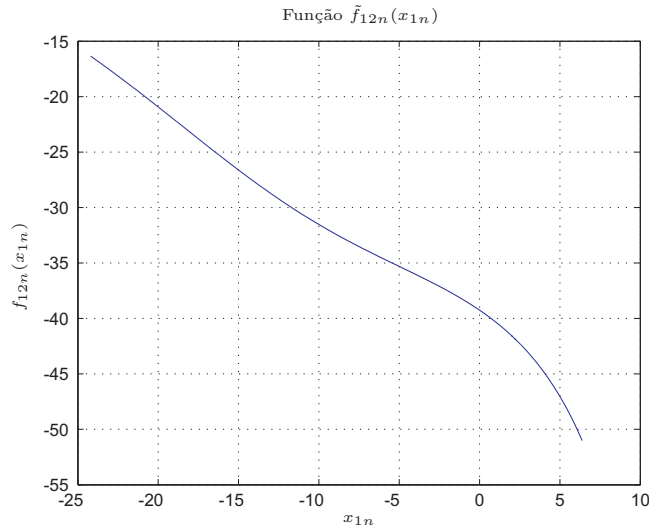


Figura 6.9: Curva $f_{12n}(x_{1n}(t))$.

Da curva aproximada representada na Figura 6.9, determinam-se os valores mínimos e máximos da função $\tilde{f}_{12n}(\mathbf{x}_{1n}(t))$,

$$a_{121} = \max \left\{ \tilde{f}_{12n}(\mathbf{x}_{1n}(t)) \right\} = -16.3561,$$

$$a_{122} = \min \left\{ \tilde{f}_{12n}(\mathbf{x}_{1n}(t)) \right\} = -51.0113.$$

Portanto, defini-se as matrizes dos modelos locais,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -16.3561 & 0 \\ 1 & -0.7458 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -51.0113 & 0 \\ 1 & -0.7458 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Na nova formulação, as definindo as funções de pertinência, para o caso do rastreador são,

$$\sigma_{121}(\mathbf{x}_{1n}(t)) = \frac{\tilde{f}_{12n}(\mathbf{x}_{1n}(t)) - a_{122}}{a_{121} - a_{122}}, \quad (6.23)$$

e,

$$\sigma_{122}(\mathbf{x}_{1n}(t)) = \frac{\tilde{f}_{12n}(\mathbf{x}_{1n}(t)) - a_{121}}{a_{122} - a_{121}}. \quad (6.24)$$

Note que de (6.23) e (6.24),

$$\sigma_{121}(\mathbf{x}_{1n}(t)) + \sigma_{122}(\mathbf{x}_{1n}(t)) = 1, \quad \sigma_{121}(\mathbf{x}_{1n}(t)) \geq 0, \quad \sigma_{122}(\mathbf{x}_{1n}(t)) \geq 0. \quad (6.25)$$

Os ganhos do regulador são,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 1.0 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0266 & 0.3176 & 0.1692 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = 1.0 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0302 & 0.1685 & 0.1541 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 6.10, mostra-se o comportamento das equações dinâmicas do modelo do paraplégico em malha, fechada com controlador fuzzy Takagi-Sugeno, isto é, usando a proposta de rastreamento do sinal de referência.

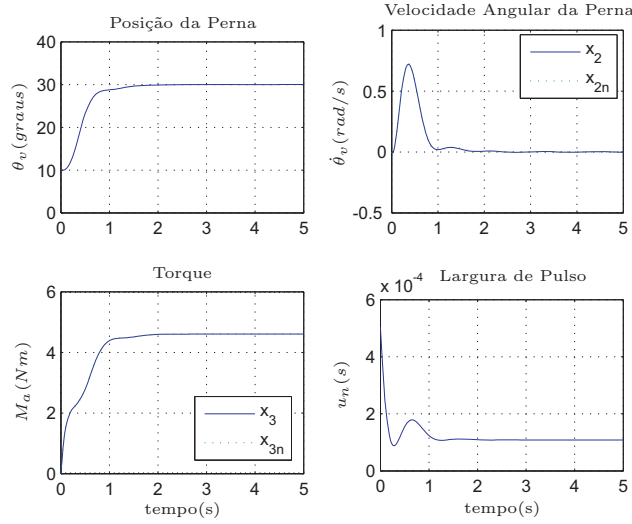


Figura 6.10: Simulação das equações dinâmicas do modelo do paraplégico para o ponto de operação de 30° .

Nos resultados de interesse, na Figura 6.11 relaciona-se a equação $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{nd}(t)$ para 30° , mostra o comportamento do rastreamento de sinal em função do tempo, que é definido como, a variável de estados da planta, menos a variável de estado das referências desejadas. Para $t \rightarrow \infty$, $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = 0$.

Quando escolhe-se, o ponto de operação em $\theta_{v0} = 30^\circ$, o resultado considerando o rastreamento, são semelhantes aos resultados, considerando o projeto específico para este ponto de operação, abordado anteriormente. O uso do rastreamento, por este motivo, verifica-se a facilidade de encontrarmos as respostas desejadas, sem necessidade de calcular pontos de operação de interesse.

Abordou-se também, na simulação com referência em outro ponto de operação, 47° , de forma a mostrar a versatilidade do método em um intervalo não-linear. Os ganhos do regulador para a solução factível das LMI (3.42)-(3.43), que leva a perna do repouso para a posição angular de 47° , obtidos com taxa de decaimento igual a $\beta = 1.6$ e restrição no sinal de entrada $\mu = 0.000050$ são os seguintes:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 1.0 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0266 & 0.3176 & 0.1692 \end{bmatrix},$$

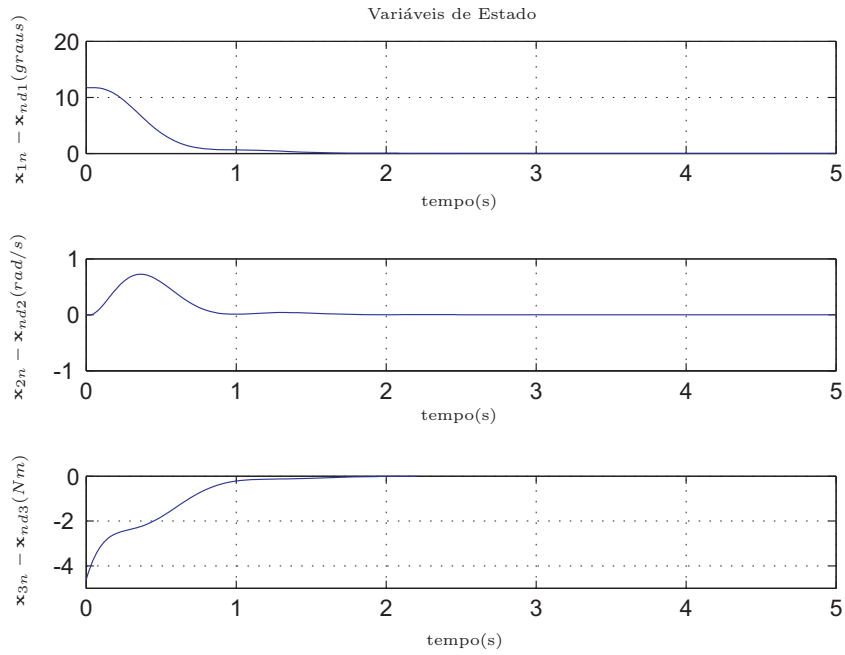


Figura 6.11: Rastreamento do sinal para o ponto de operação de 30° .

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = 1.0 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0302 & 0.1685 & 0.1541 \end{bmatrix}.$$

Resultados da simulação são mostrado na Figura 6.12.

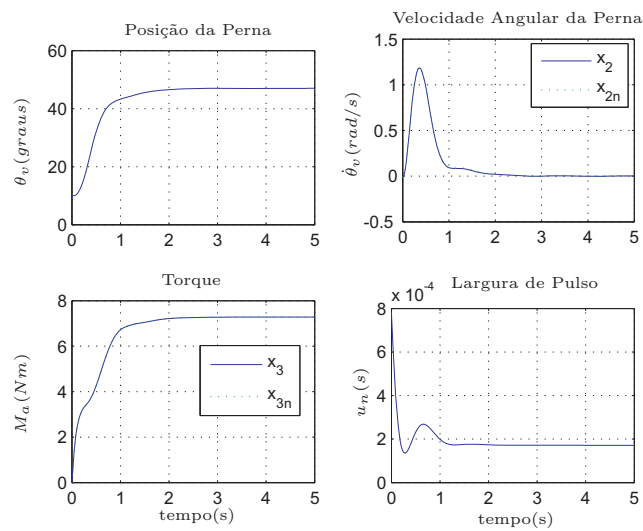


Figura 6.12: Simulação das equações dinâmicas do paraplégico para o ponto de operação de 47° .

Na Figura 6.13, mostra-se o comportamento da equação $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{nd}(t)$ para 47° . Sendo $t \rightarrow \infty$, $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = 0$.

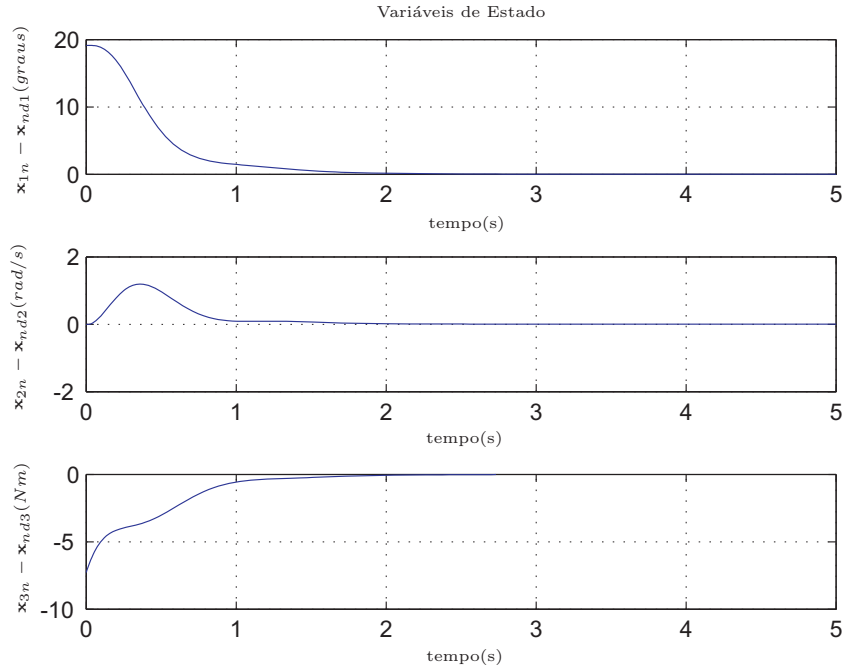


Figura 6.13: Rastreamento do sinal para o ponto de operação de 47° .

6.6.3 Projeto do Regulador e Observador com Rastreamento da Referência

A proposta para projetar o observador de estados é utilizar a concepção apresentada em (MA; SUN; HE, 1998). Definindo as novas variáveis para o observador, considerando o rastreamento.

$$\dot{\mathbf{x}}_n(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}_{1n}(t)) (A_i \mathbf{x}_n(t) + B_i \mathbf{u}(t)). \quad (6.26)$$

Como definido na equação do rastreamento com regulador, então de (6.21) defini-se para lei do observador,

$$\boldsymbol{\tau}_c(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}_{1n}(t)) \mathbf{F}_i \tilde{\mathbf{x}}_n(t), \quad (6.27)$$

sendo $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = \tilde{\mathbf{x}}_n(t) - \mathbf{e}(t)$, $\tilde{\mathbf{x}}_n(t)$ denota o vetor da variável de estados estimada, $\mathbf{x}_n(t)$ o vetor de estados da planta, e, $\mathbf{e}(t)$ denota o erro entre o vetor de estados da planta e o vetor de estados estimado, portanto:

$$\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = \tilde{\mathbf{x}}_n(t) - e(t) = \left((\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{nd}(t)) - \mathbf{e}(t) \right). \quad (6.28)$$

Na formulação da equação (6.28) é necessário compor uma equação que forneça o valor de $e(t)$. Esse valor é obtido, usando a matriz aumentada, que contém informações sobre o vetor de estados da planta e o erro de estimação, escrita em (6.29),

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_n(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i(\mathbf{x}_{1n}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}_{1n}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j & \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_n(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

6.6.4 Resultado para o Rastreamento com Regulador e Observador

Simulando a equação (6.29), considerando apenas $x_1(t) = \theta_v(t)$ disponível, então para a estabilidade utilizam-se as equações (3.42) e (3.43) com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$, para o regulador e as LMIs (3.69)-(3.72) com $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ para o observador. No ponto de operação de 30° são estipulados $\beta_r = 1.6$ para o regulador, $\beta_o = 8.0$ para o observador, $\mu = 0.000050$ e o vetor do erro inicial $\mathbf{e}(t) = [0 \ 0 \ 0]^T$. Os resultados são mostrados na Figura 6.14 e os ganhos do regulador e observador são respectivamente,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 1.0 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0263 & 0.3154 & 0.1684 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = 1.0 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0294 & 0.1705 & 0.1546 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 123.4225 \\ -149.1897 \\ -399.6385 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0.3419 \\ -0.4501 \\ -1.2537 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Na Figura 6.14 mostra a evolução temporal da equação (6.29), para o ângulo de referência de $\theta_v = 30^\circ$. Deve-se lembrar que a variável que está acessível para medição é $\theta_v(t)$.

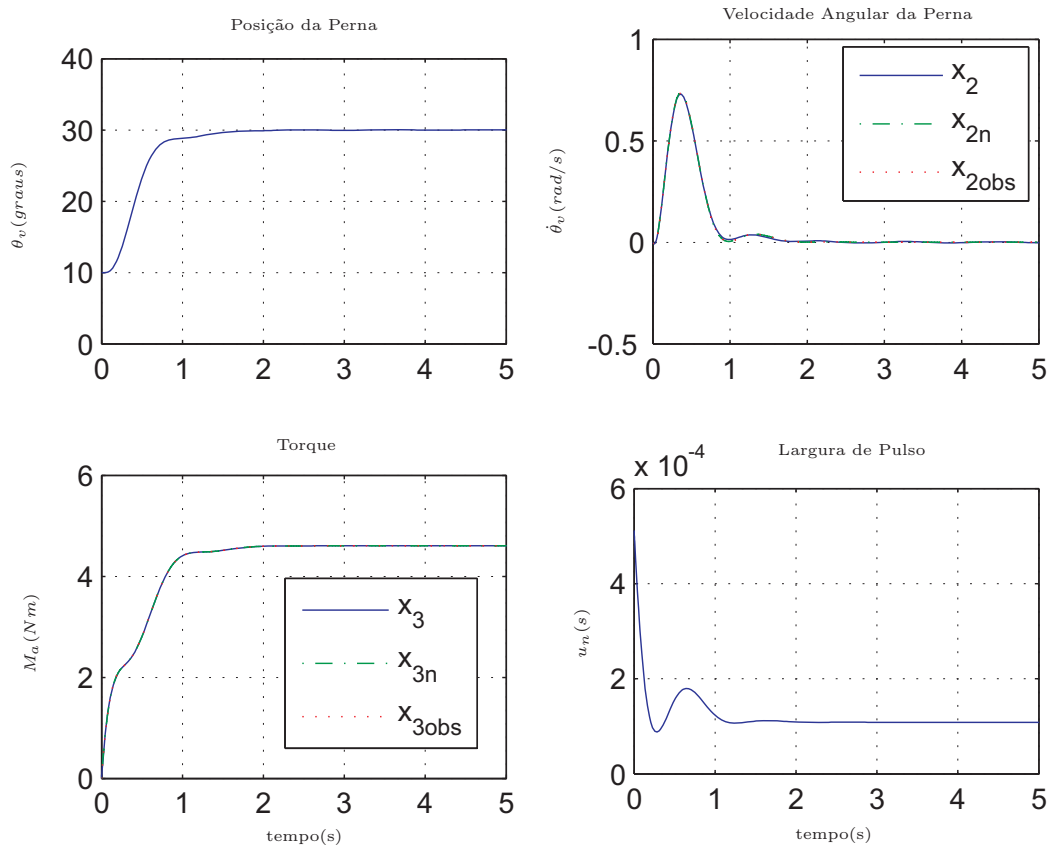


Figura 6.14: Simulação das equações dinâmicas do modelo do paraplégico para o ponto de operação de 30° e condições iniciais $\mathbf{e}(t) = [0 \ 0 \ 0]$.

Como as condições iniciais do erro são nulas, e a taxa de decaimento do observador é cinco vezes mais rápida que a taxa de decaimento do regulador, a Figura 6.15 torna-se idêntica a Figura 6.11.

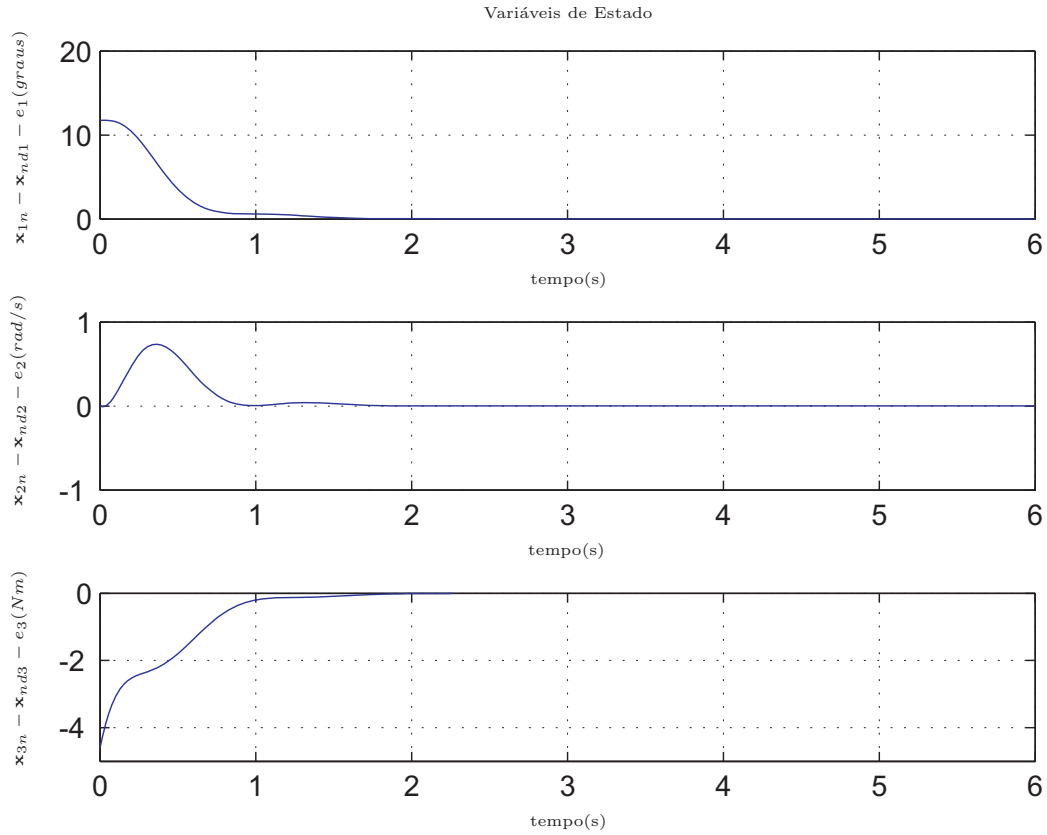


Figura 6.15: Rastreamento do sinal para o ponto de operação de 30° .

Na Figura 6.15, mostra-se o comportamento da equação $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{nd}(t) - \mathbf{e}(t)$ para 30° . Sendo $t \rightarrow \infty$, $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = 0$.

No rastreamento com observador será considerado que existe um erro inicial entre o estado da planta e o estimado, na prática, isto, é mais verossível devido à dificuldade de se conhecer os reais parâmetros dos estados da planta. Da equação (6.29) o vetor erro inicial, é definido com $\mathbf{e}(t) = [-1.0 \ 0 \ -0.8]$. Considere-se as demais condições restrições de velocidade da resposta transitória e restrição do sinal de entrada, semelhante ao caso anterior, o resultado é mostrado na Figura 6.16. Os ganhos do regulador e observador obtidos são respectivamente,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 1.0 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0265 & 0.3194 & 0.1698 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = 1.0 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0296 & 0.1749 & 0.1561 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 34.5151 \\ -9.6565 \\ -7.3907 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 41.5198 \\ -12.0667 \\ -9.1356 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

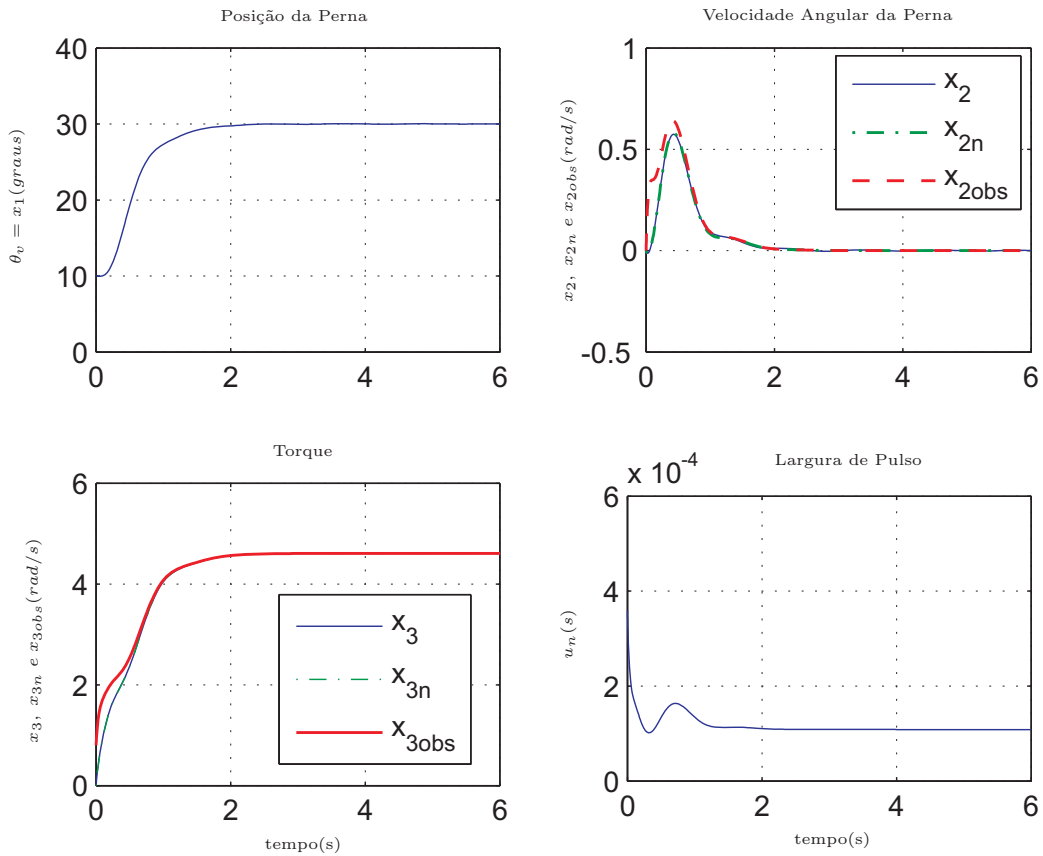


Figura 6.16: Simulação das equações dinâmicas do modelo do paraplégico para o ponto de operação de 30° e condições iniciais $\mathbf{e}(t) = [-1.0 \ 0 \ -0.8]$.

Na Figura 6.17, mostra-se o comportamento da equação $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{nd}(t) - \mathbf{e}(t)$ para 30° . Sendo $t \rightarrow \infty$, $\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = 0$.

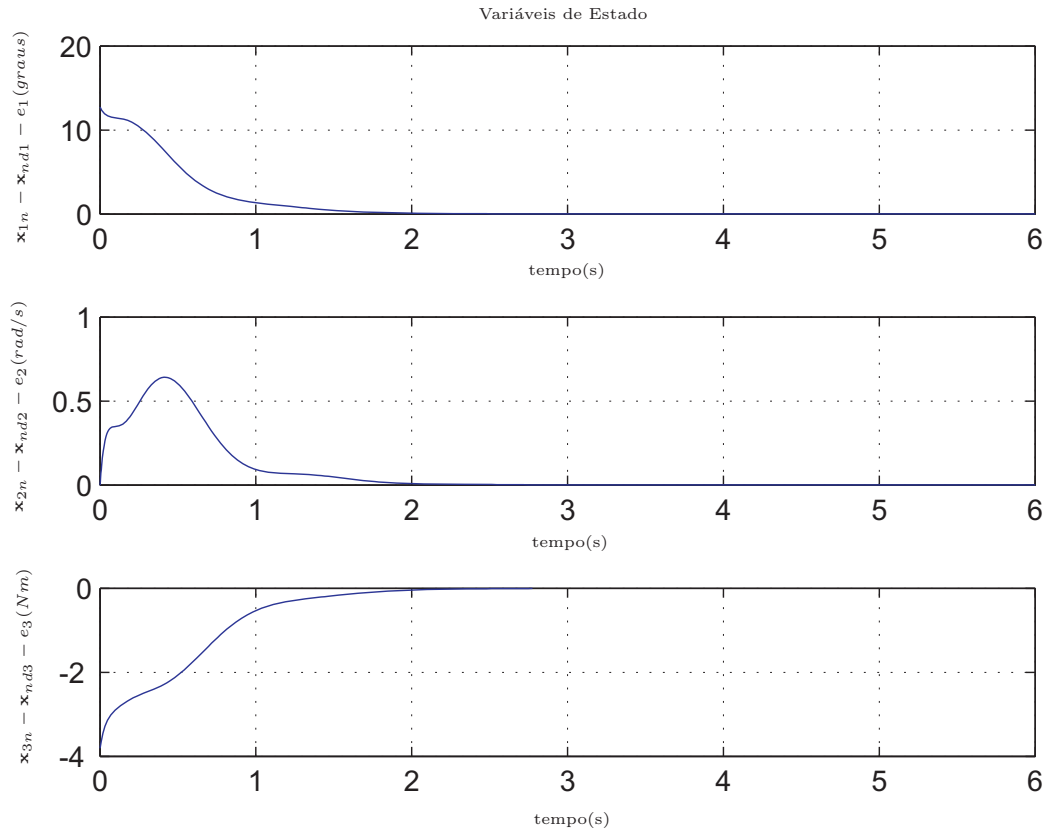


Figura 6.17: Simulação do observador para o ponto de operação de 30° .

O comportamento das curvas obedece as leis de controle que regem o sistema.

6.7 Realimentação da Derivada de Estado

6.7.1 Controle de Sistemas com Realimentação da Derivada de Estado

Da teoria de controle clássico, sabe-se que a realimentação da derivada de estado pode ser extremamente útil e até mesmo, em alguns casos, essencial para alcançar o desempenho desejado em sistemas de controle (LEWIS; SYRMOS, 1991). Nos últimos anos, a realimentação proporcional e derivativa de estado tem sido utilizada no projeto de controladores para vários problemas, tais como: estabilização com robustez de sistemas lineares descritores (DUAN; IRWIN; LIU, 1999), controle realimentado de sistemas singulares (JIN, 1994), controle não-linear realimentado com linearização exata (BOUKAS; HA-

BETLER, 2004), e controle H_∞ de sistemas contínuos com atraso de estados (FRIDMAN; SHAKED, 2002). Alguns pesquisadores procuram desenvolver métodos similares aos já existentes para a realimentação de estado. Por exemplo, (ABDELAZIZ; VALÁ SEK, 2004) desenvolveram uma fórmula de Ackermann generalizada para sistemas lineares com uma entrada (SI) sob realimentação da derivada de estado.

Existem problemas práticos onde os sinais da derivada de estado são fáceis de obter. Por exemplo, em sistemas mecânicos para controle de vibrações (ABDELAZIZ; VALÁ SEK, 2004), onde os sensores mais usados são os acelerômetros. A partir da aceleração, é possível obter a velocidade com boa precisão, porém é mais complexo obter o deslocamento, podem-se usar os sinais de aceleração e velocidade para realimentar sistemas.

6.7.2 Uso do Acelerômetro no Controle da Posição do Joelho

O sinal de realimentação, relacionado ao ângulo da articulação do joelho, pode ser obtido utilizando-se eletrogoniômetro, porém este sinal pode não ser confiável, devido à dificuldade de fixação do dispositivo sobre a pele (DEJNABADI; JOLLES; AMINIAN, 2005). O uso de acelerômetros em pontos estratégicos é mais seguro e confiável (DEJNABADI; JOLLES; AMINIAN, 2005) e (GAINO et al., 2008), e pode ser relacionado com estudos utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, usando a realimentação proporcional e derivativa de estados (TEIXEIRA et al., 2006a). O objetivo deste trabalho foi utilizar técnicas de controle fuzzy Takagi-Sugeno em aplicações de Engenharia de Reabilitação nas quais os sinais disponíveis para o controle são obtidos através de acelerômetros. Através do sinal da aceleração, pode-se estimar o sinal da velocidade (TEIXEIRA et al., 2006a). É importante lembrar que, pelo conhecimento dos autores desta tese, a literatura não registra trabalhos com realimentação derivativa em controle de plantas usando modelos fuzzy Takagi-Sugeno com o propósito de controlar a posição da articulação do joelho, até este momento.

De (3.10) pode-se encontrar os modelos locais e as funções de pertinência para a modelagem fuzzy (T-S), para a modelagem exata (TANIGUCHI et al., 2001). No caso da dinâmica do modelo do paciente paraplégico, são consideradas as equações (6.1), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6).

Considerando os valores da Tabela 5.1, $\theta_v \in [0^\circ \ 60^\circ]$ e $\theta_{v0} = 30^\circ$ tem-se, $a_{211} = -21.9396$ e $a_{212} = -36.4938$. Logo, o modelo fuzzy (T-S) é dado pela equação (6.7).

Uma representação em diagrama de blocos do sistema em malha fechada, utilizando o modelo fuzzy (T-S) é ilustrada na Figura 6.18.

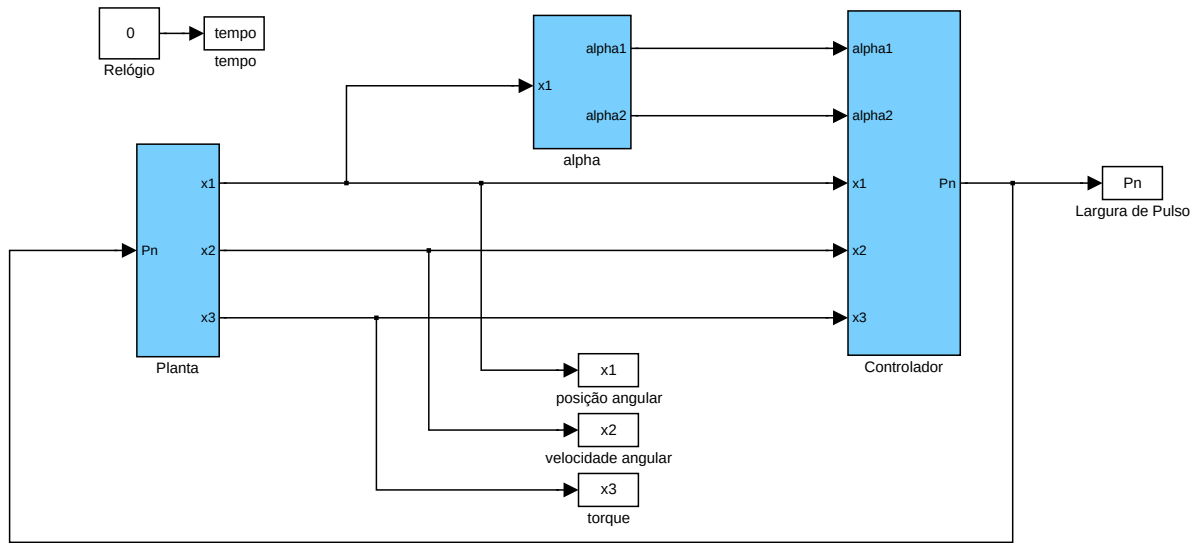


Figura 6.18: Sistema de controle utilizando modelos fuzzy TS.

O modelo da Figura 6.18, a variável $x_1(t)$ é obtida através de sensores de posição angular, como por exemplo o eletrogoniômetro.

6.7.3 Posicionamento dos Acelerômetros no Membro Inferior

Os resultados publicados em (TEIXEIRA et al., 2006b) e (TEIXEIRA et al., 2006c) consideram a realimentação do sistema com eletrogoniômetros, nos quais uma das extremidades é presa na coxa e a outra na canela. Devido à dificuldade de alinhar a haste do eletrogoniômetro com o eixo da coxa e a outra haste com o eixo da canela, e ainda o efeito do deslizamento sobre a pele, as medidas não são confiáveis (WINTER, 1990) e (GAINO et al., 2008). Para resolver este problema, acelerômetros são fixados em pontos estratégicos, conforme descrito em (DEJNABADI; JOLLES; AMINIAN, 2005), e obtiveram resultados mais confiáveis, mostrando que acelerômetros e giroscópios oferecem soluções mais práticas e menos onerosas, do que quando se utiliza eletrogoniômetros. No presente trabalho, houve uma evolução na precisão do modelo, tornando-se o sistema mais confiável com a utilização de dois acelerômetros para medir as acelerações tangenciais a_{t1} e a_{t2} . Na Figura 6.19 mostra como os acelerômetros são localizados sobre a pele, entre o joelho e o tornozelo (FRANKEN et al., 1993).

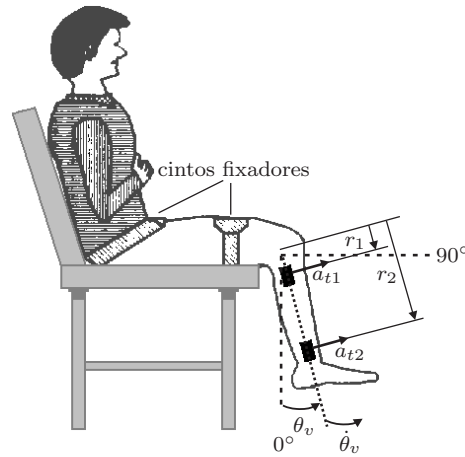


Figura 6.19: Posição dos acelerômetros para medida da aceleração tangencial.

A aceleração da articulação do joelho, $\ddot{\theta}_v(t)$, é determinada pela equação:

$$\ddot{\theta}_v(t) = \frac{a_{t1} - a_{t2}}{r_1 - r_2}. \quad (6.32)$$

A velocidade angular $\dot{\theta}_v(t)$ pode ser obtida com uso da integração da equação (6.32). Autores sugerem técnicas para obter a velocidade e minimizar ruído (DEJNABADI; JOLLES; AMINIAN, 2005) e (FRANKEN et al., 1993).

6.7.4 Estimativa da Posição da Perna

Assim como no exemplo do levitador magnético (TEIXEIRA et al., 2006a), que inspirou a adaptação da técnica de realimentação por derivada de estado, usando acelerômetros ao caso do modelo do paciente paraplégico, verifica-se através das equações (6.3) e (6.4) que as funções de pertinências dependem apenas da variável de estado $x_1(t)$. Como somente acelerômetros são usados, só há acesso à aceleração angular como observado na Figura 6.19, ou seja, $x_1(t)$ não está acesível e deve ser estimado, usando a resultante da integração de (6.32). Assim dessa relação $\dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t)$, integrando-se, é obtido $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, isto é, a velocidade angular. A variável $x_3(t)$ é estimada, refere-se ao torque produzido pela estimulação elétrica, esta variável é disponível, pois pode ser medida através de sensores de força. No projeto do controlador apresentado em (TEIXEIRA et al., 2006b), (TEIXEIRA et al., 2006c) somente é possível sua implementação com o acesso a $x_1(t)$, necessário para o cálculo das funções de pertinências (6.3) e (6.4), com realimentação pelo eletrogoniômetro. Considerando a equação (5.23), a estimação de $x_1(t)$ obtida a partir de,

$$\dot{x}_2(t) = \tilde{f}_{21}(x_1(t))x_1(t) - \frac{B}{J}\dot{x}_1(t) + \frac{1}{J}x_3(t), \quad (6.33)$$

$\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ dada em (5.24).

A função não-linear $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$ representada na Figura 6.20, para $x_1(t)$ variando, $0^\circ \leq \theta_v(t) \leq 60^\circ$ (com $\theta_{v0} = 30^\circ$), pode ser aproximada por uma reta usando *basic fitting tool* do *software* Matlab, e utilizando os valores da Tabela 5.1, obtém-se uma aproximação de primeira ordem da equação (6.33) e pode ser escrita da seguinte forma,

$$\dot{x}_2(t) = \underbrace{(ax_1 + b)}_{\cong \tilde{f}_{21}(x_1(t))} x_1(t) - \frac{B}{J}\dot{x}_1(t) + \frac{1}{J}x_3(t), \quad (6.34)$$

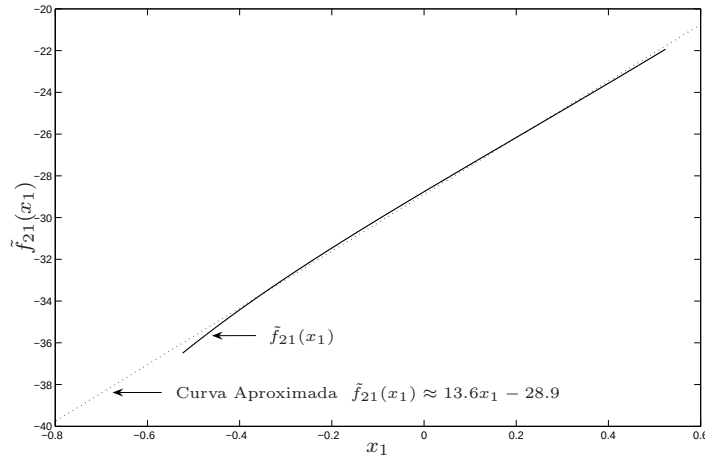


Figura 6.20: Curva exata e aproximada da função não-linear $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$.

Da Figura 6.20 o resultado da curva aproximada pelo *basic fitting* do *software* , Matlab fornece os coeficientes $a = 13.584$ e $b = -28.896$.

Os resultados apresentados na Figura 6.21, mostram a curva $\tilde{f}_{21}(x_1(t))x_1(t)$, utilizando-se uma forma aproximada (equação (6.34)). Verifica-se um bom resultado, com um erro padrão máximo de 1.33%.

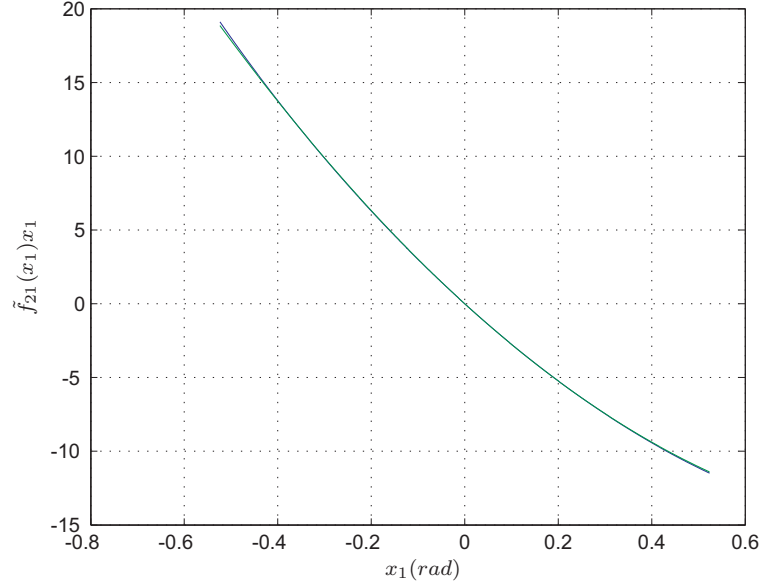


Figura 6.21: Curva exata e aproximada da função $\tilde{f}_{21}(x_1(t))x_1(t)$.

De (6.34),

$$\dot{x}_2(t) = ax_1^2(t) + bx_1(t) - \frac{B}{J}\dot{x}_1(t) + \frac{1}{J}x_3(t), \quad (6.35)$$

$$ax_1^2(t) + bx_1(t) - \frac{B}{J}\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) + \frac{1}{J}x_3(t) = 0. \quad (6.36)$$

Seja $c(t) = -\frac{B}{J}\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) + \frac{1}{J}x_3(t)$. Assim de (6.34) tem-se que,

$$ax_1^2(t) + bx_1(t) + c(t) = 0. \quad (6.37)$$

Note que de (6.37) tem-se

$$x_1(t) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac(t)}}{2a}. \quad (6.38)$$

Através de (6.37) pode-se obter a equação característica

$$1 + \frac{c(t)}{ax_1^2(t) + bx_1(t)} = 0. \quad (6.39)$$

Como $c(t)$ é um parâmetro variável, as raízes características do sistema devem satisfazer a equação (6.39) onde se posicionam as raízes $(x_1(t))$ no plano complexo de $x_1(t)$, (DORF; BISHOP, 2001). Como (6.38) é solução do problema $(x_1(t) \in \mathbf{R}, x_1(t) \in [-\pi/6, \pi/6])$, o “root locus” da equação característica (6.39) também deve ser real no intervalo $[-\pi/6, \pi/6]$

quando $c(t)$ variar. As Figuras 6.22 e 6.23 mostram o “root locus” quando $c(t) > 0$ e $c(t) < 0$, respectivamente.

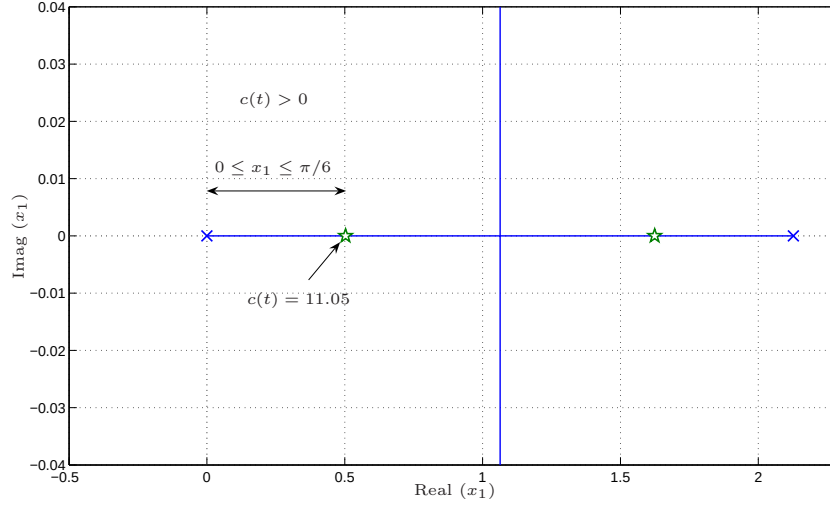


Figura 6.22: Root locus com $c(t) > 0$.

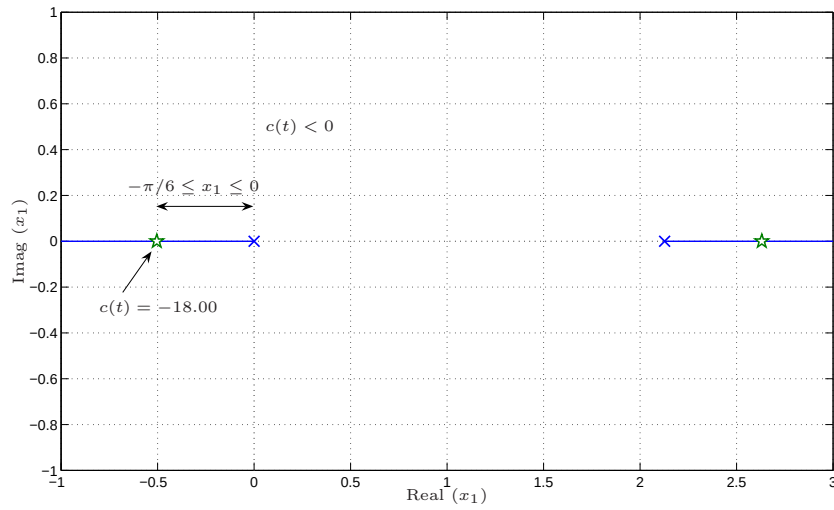


Figura 6.23: Root locus com $c(t) < 0$.

Note que analisando as Figuras 6.22 e 6.23, verifica-se a existência do root locus no intervalo $-\pi/6 \leq x_1(t) \leq \pi/6$ quando $-18.00 \leq c(t) \leq 11.05$. Desta forma, pode-se concluir que a solução analítica da equação (6.37) existe e é única no intervalo $[-\pi/6, \pi/6]$. Logo,

$$x_1(t) = 1.0636 - \sqrt{1.1313 - 0.0736c(t)}, \quad (6.40)$$

é a solução de (6.37). Assim, $x_1(t)$ pode ser obtida em função de $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t)$

e $x_3(t)$. Uma representação em diagrama de blocos do sistema de controle proposto é ilustrado na Figura 6.24.

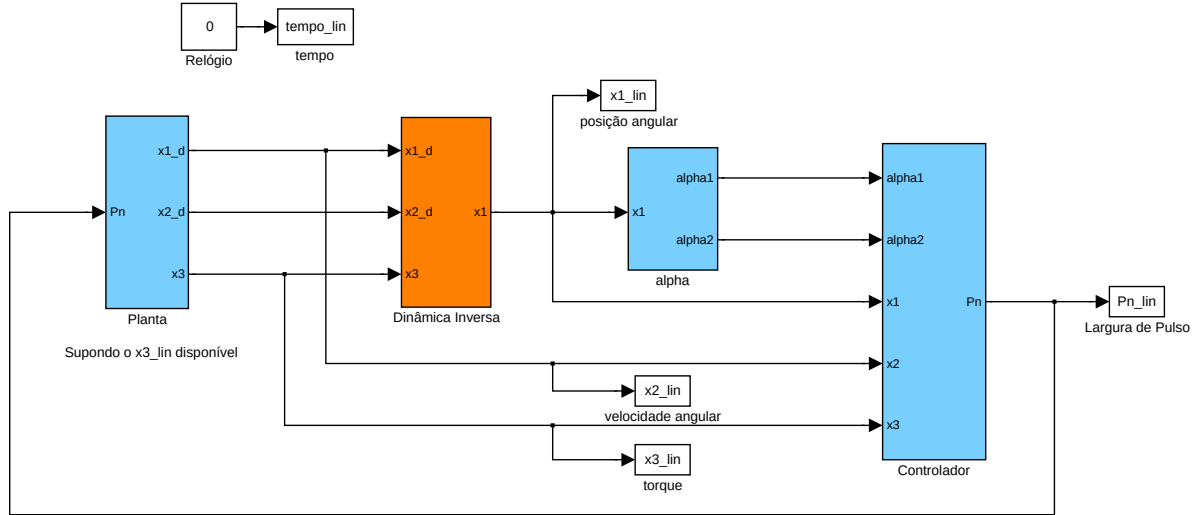


Figura 6.24: Sistema de controle com o método proposto.

O bloco **Dinâmica Inversa** na Figura 6.24, refere-se a estimação de $x_1(t)$, conforme a equação 6.38.

6.7.5 Controle da Posição da Perna de um Paciente Paraplégico usando Fuzzy Takagi-Sugeno

O regulador é determinado através da resolução de LMI, segundo critérios apresentados em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) e desenvolvidos para o caso do controle do movimento de paraplégicos em (TEIXEIRA et al., 2006b) e (TEIXEIRA et al., 2006c).

Para o projeto do controlador, considerou-se a restrição na entrada $\mu = 500 \times 10^{-6}$ e a taxa de decaimento $\beta = 1.4$. Desta forma, através das LMIs (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45) obteve-se os seguintes ganhos:

$$\mathbf{F}_1 = 1 \times 10^{-3} [-0.6197 \quad 0.1286 \quad 0.1174], \quad (6.41)$$

$$\mathbf{F}_2 = 1 \times 10^{-3} [-0.8619 \quad 0.1347 \quad 0.1175]. \quad (6.42)$$

Na Figura 6.25, mostram o resultados das simulações considerando a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \quad 0 \quad -M_{a0}]^T$.

O projeto do regulador foi realizado para o ponto de operação de $\theta_v = 30^\circ = \theta_{v0}$, isto é, a trajetória da perna sai do estado de repouso e estabiliza-se no ponto de operação de $\theta_v = 30^\circ = \theta_{v0}$. Note que as respostas aproximadas mostram com fidelidade o comportamento

exato do sistema.

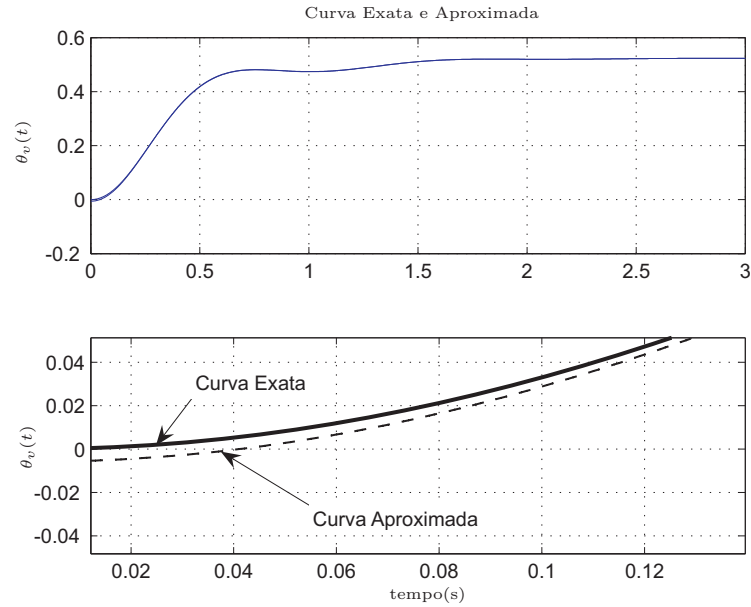


Figura 6.25: Comportamento da curva aproximada e exata.

Na Figura 6.26 é mostrado o efeito da retirada do estímulo aplicado ao músculo. O músculo não produz mais força e portanto não há mais torque no joelho que sustente a perna naquela posição. O que ocorre a partir nesse efeito, é, que a perna fica apenas sujeita a lei da gravidade, então, ela retorna a posição de repouso, portanto o comportamento do sistema sem o sinal de controle P_N com a perna na posição inicial $\theta_v = 30^\circ = \theta_{v0}$, fica evidenciado na resposta transitória mostrada na Figura 6.26. O uso da aproximação linear, para a função não-linear da equação 5.24, justifica-se pela facilidade de implementação computacional. Observado a Figura 6.25, observa-se que as curvas exata e aproximada são praticamente idênticas. Na Figura 6.25 verifica-se que o sistema no regime, convergiu para o ponto de equilíbrio desejado, 0.52 rad ou em (30°). O sistema de controle projetado considerou todas as não-linearidades da planta e satisfaz às restrições de projeto, mostrando-se um método eficiente, viável e rigoroso.

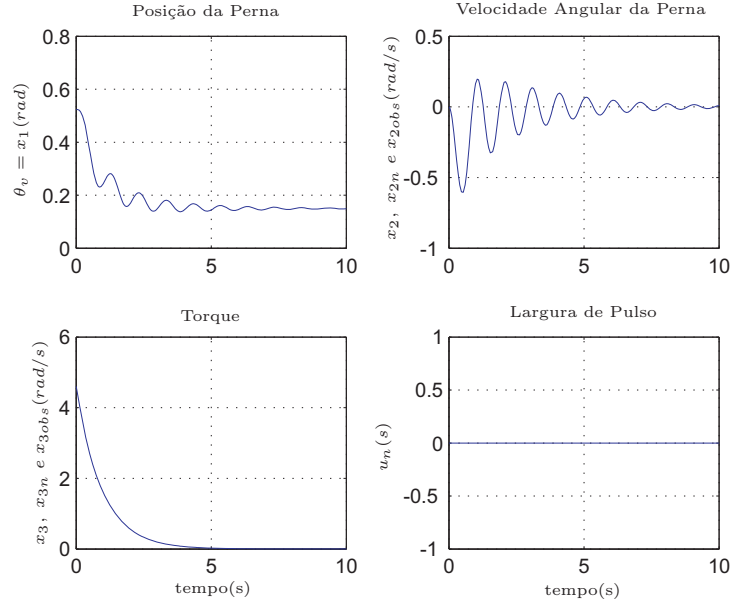


Figura 6.26: Comportamento da largura de pulso ($P(t)$) do sistema com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$.

6.8 Identificação de Modelos Locais da Dinâmica do Paraplégico

A metodologia requerida para identificação baseia-se na idéia do uso de mínimos quadrados com restrições LMI. Procura-se mostrar nessa identificação, a validade deste método, aplicando um degrau, agindo como uma excitação em torno do modelo local desejado. Foram considerados para recursos de simulação, as equações da dinâmica do do modelo do paraplégico (5.2), (5.3) e (5.4), o modelo apresentado para simulação foi adaptado de (SILVA, 2007). Primeiro especifica-se o modelo local desejado, através de um ponto x_0 , o degrau é aplicado de forma simétrica ao modelo local, obtendo como resposta de excitação do sistema vetor $\mathbf{z}(t)$; e com um conjunto abrangente de pontos forma-se, $\Delta\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_0(t)$. Esta idéia se baseia na teoria de Lyapunov, em que ponto de operação nem sempre pertence a origem, e definindo um novo vetor de estado $\Delta\mathbf{z}(t)$, ocorre a translação do ponto de operação à origem, para estudo da estabilidade.

Considere o modelo local escolhido em $\theta_{v0} = 15^\circ$. Então posiciona-se as condições iniciais da posição inicial da perna para aplicação do degrau em 14° . Pelas equações (5.6) e (5.13), determina-se as condições iniciais de θ_v , $\dot{\theta}_v$, M_{a0} e P_0 , posição angular, velocidade angular,

torque produzido pelo estímulo elétrico e largura de pulso inicial (tempo = 0, do sinal degrau), respectivamente. Aplica-se o degrau com a amplitude desejada, e, simétrica ao modelo local.

Após a simulação são produzidos os vetores, θ_v , $\dot{\theta}_v$, M_{a0} , em seguida formam-se os vetores $\mathbf{z}_1(t)$, $\mathbf{z}_2(t)$ e $\mathbf{z}_3(t)$, como mostrado a seguir,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(t) &= \Delta\theta_v = \theta_v - \theta_{v0}, \\ \mathbf{z}_2(t) &= \Delta\dot{\theta} = \dot{\theta}_v - \dot{\theta}_{v0}, \\ \mathbf{z}_3(t) &= \Delta M_a = M_a - M_{a0}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

A amplitude do degrau projetado neste caso, resulta em um acréscimo na saída de $\theta_v = 2^\circ$, ou seja, o degrau inicia-se em 14° e estabiliza-se na posição de 16° . O objetivo é excitar o sistema próximo da posição de 15° . Na Figura 6.27, mostra-se a configuração realizada para aplicar o degrau.

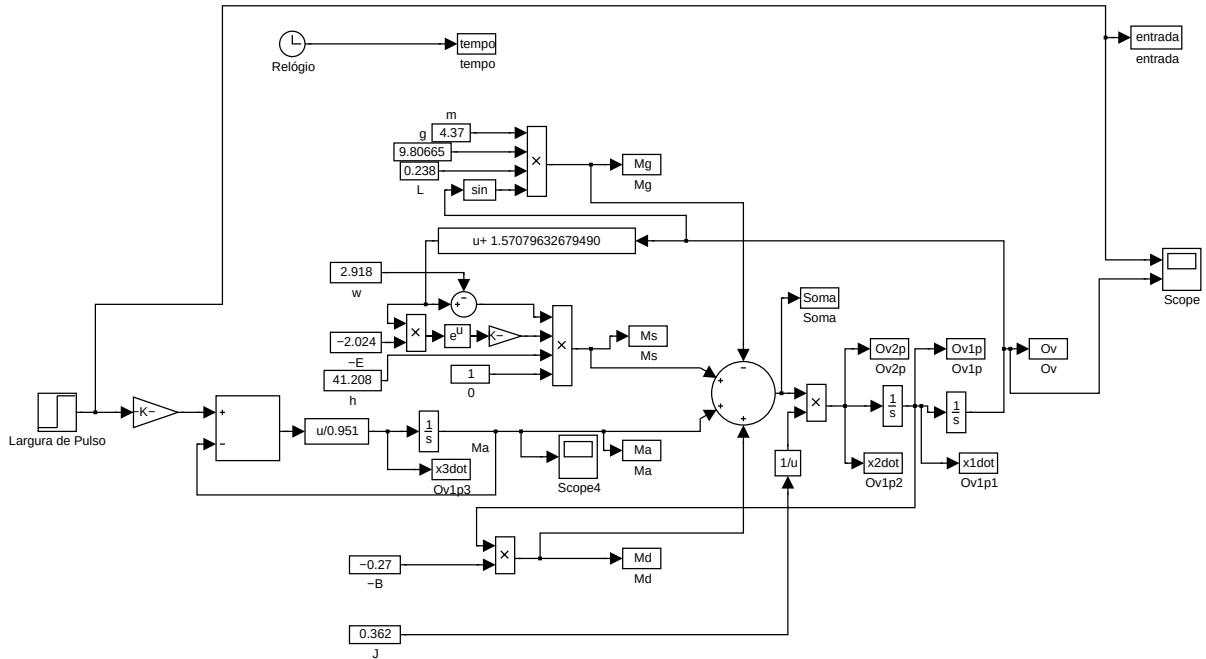


Figura 6.27: Aplicação do degrau as equações dinâmicas do paraplégico.

Na Figura 6.28, mostra-se o efeito do degrau ao sistema da Figura 6.27. Pode-se observar que, os valores de θ_v , para esta simulação são, $14\pi/180 = 0.2443\text{rads}$, $15\pi/180 = 0.2618\text{rads}$ e $16\pi/180 = 0.2793\text{rads}$. O tempo de simulação foi de 15 segundos. Este valor é constante em todas as simulações desta seção.

Na Figura 6.29, mostram-se os resultados da simulação, de $\mathbf{z}_1(t)$, $\mathbf{z}_2(t)$ e $\mathbf{z}_3(t)$ em

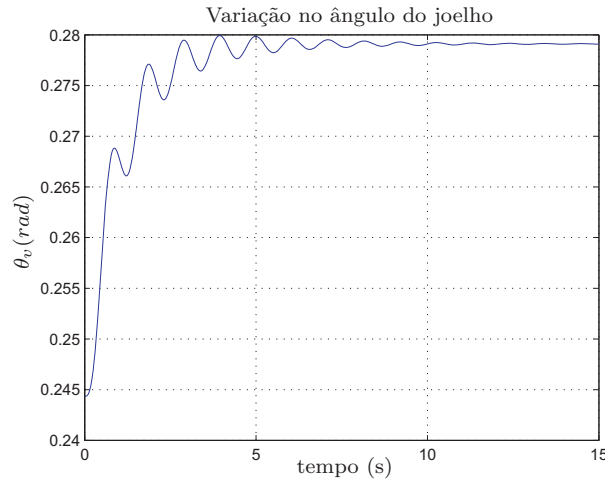


Figura 6.28: Comportamento de θ_v em relação ao tempo.

função do tempo para a condição especificada no exemplo desta seção.

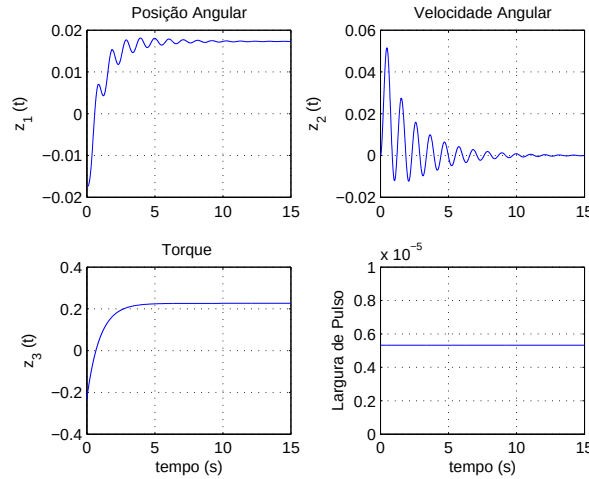


Figura 6.29: Resposta das variáveis $(\mathbf{z}_1(t))$, $(\mathbf{z}_2(t))$ e $(\mathbf{z}_3(t))$ em relação ao tempo de simulação.

Utilizando as equações (5.23), (5.24) e (5.25), como base para validar os resultados das equações de identificação do modelo local usando (4.46), e o comportamento de (5.24), tão bem conhecida em outras discussões, a função não-linear $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ foi calculado no intervalo de $14\pi/180 < \theta_v(t) < 16\pi/180$. A amplitude do degrau aplicado em torno do modelo local desejado, e o resultado de $\tilde{f}_{21analitico}$ em função de $\mathbf{z}_1(t)$ é mostrado na Figura 6.30. Deve-se ressaltar que foram considerados na simulação 1501 pontos para solução das LMIs.

Quando $z_1(t) = 0$, isto é, $\theta_v = \theta_{v0}$, a função não-linear $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t)) = -36.119$.

Na utilização a equação (4.46), para identificar as matrizes do modelo local desejado

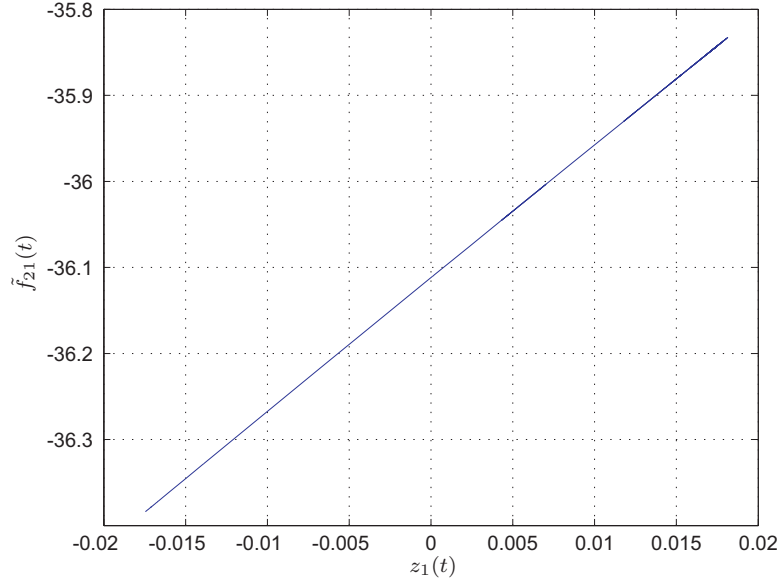


Figura 6.30: Comportamento de $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ em relação a $(\mathbf{z}_1(t))$.

$\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$, a primeira tentativa preferiu-se restringir a quantidade de variáveis de (5.23), (5.24) e (5.25), de modo que, a variável a ser identificada, pela equação (4.46), seja $\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t))$.

Utilizando o modelo de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), redefinindo (5.23), considera-se as variáveis do sistema a ser identificado.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21identificado} & \frac{-B_i}{J_i} & \frac{1}{J_i} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G_i}{\tau_i} \end{bmatrix} P_{iN}. \quad (6.44)$$

$\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t))$ é a variável a ser identificada, as demais variáveis, por facilidade, seguem os mesmos valores da Tabela 5.1.

Portanto o uso de (4.46), segundo as condições apresentadas, soluciona (6.44) por LMI, e, produz o resultado de $\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t)) = -35.8370$.

Nas condições apresentadas na determinação da variável $\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t))$, mostra-se na Figura 6.31, a função custo da minimização de γ .

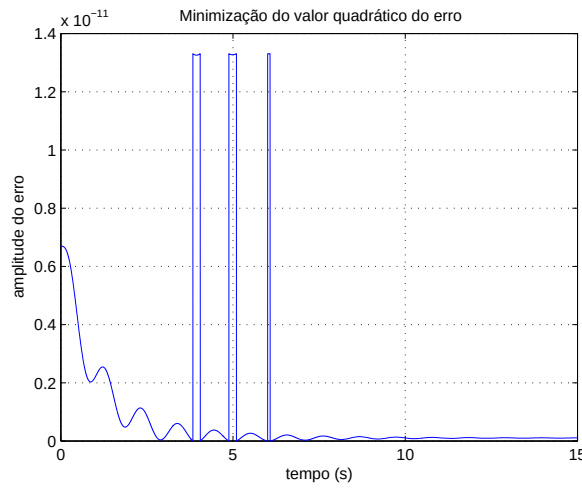


Figura 6.31: Minimização do erro quadrático.

Para melhor conclusão dos primeiros resultados, realiza-se a simulação, agora com uma menor amplitude do degrau, em torno do mesmo modelo local, portanto $14.5\pi/180 < \theta_v(t) < 15.5\pi/180$, mostrando-se na Figura 6.32 a evolução de $\mathbf{z}_1(t)$, $\mathbf{z}_2(t)$, $\mathbf{z}_3(t)$, e $\mathbf{P}(t)$, em relação ao tempo de simulação.

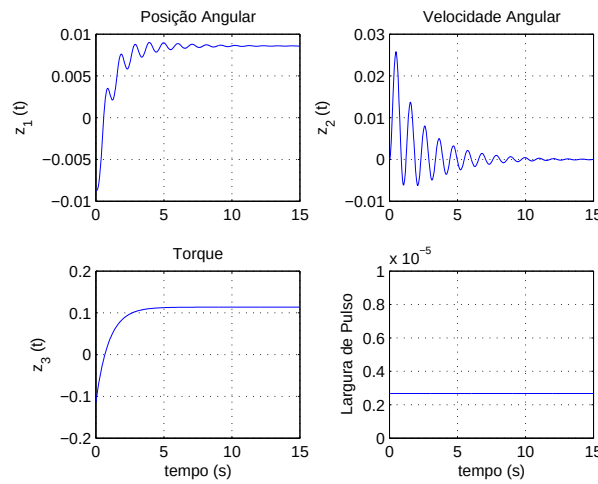


Figura 6.32: Resposta das variáveis $(\mathbf{z}_1(t))$, $(\mathbf{z}_2(t))$ e $(\mathbf{z}_3(t))$ em relação ao tempo de simulação.

Na Figura 6.32 em comparação com a Figura 6.29, é observado claramente o efeito da aplicação de um degrau, de menor amplitude em torno do modelo local.

Na Figura 6.33, observa-se a variação de θ_v , sendo, $14.5\pi/180 = 0.2531\text{rads}$, $15\pi/180 = 0.2618\text{rads}$ e $15.5\pi/180 = 0.2705\text{rads}$

Para se obter $\tilde{f}_{21\text{identificado}}(\mathbf{z}_1(t))$, utiliza-se para comparação $\tilde{f}_{21\text{analitico}}(\mathbf{z}_1(t))$, como mostrado na Figura 6.34.

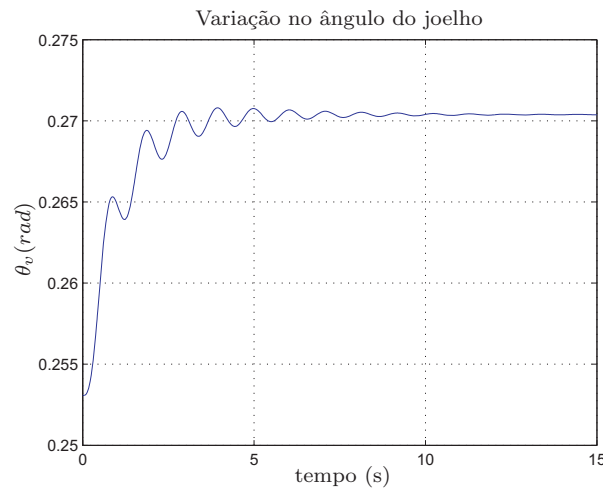


Figura 6.33: Comportamento de θ_v em relação ao tempo.

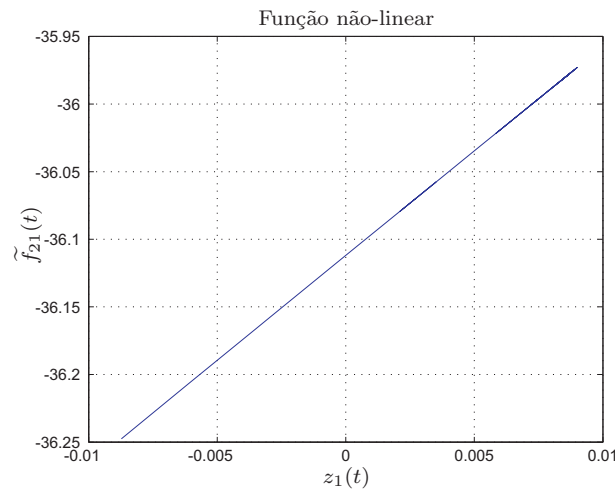


Figura 6.34: Comportamento de $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ em relação a $(\mathbf{z}_1(t))$.

Como já observado anteriormente nesta seção, a função não-linear $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t)) = -36.119$, porém quando aplicado uma menor amplitude em torno do modelo local, a solução de (4.46), fornece o valor de $\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t)) = -35.9730$. Numa análise mais explícita, a Figura 6.31 foi comparada a Figura 6.35. Este resultado explica o efeito, de que, quanto menor é a amplitude do degrau, menor é o erro observado entre $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ e $\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t))$.

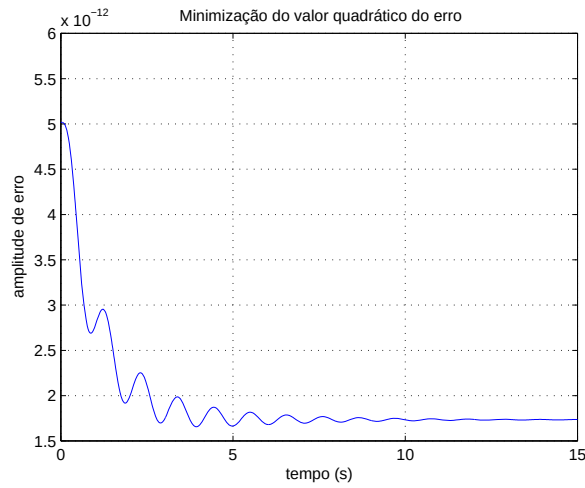


Figura 6.35: Minimização do erro quadrático.

6.8.1 Identificação com Ruído Branco de Média Nula

Para generalização dos resultados, considera-se um ruído branco gaussiano de média nula. Na simulação este tipo de sinal a ser analisado é muito útil, pretende-se aqui, verificar o quanto isso influencia a identificação de um modelo local.

Na Figura 6.36, a nova configuração com ruído é apresentada para a simulação. A amplitude do degrau continua variando entre $14.5\pi/180 < \theta_v(t) < 15.5\pi/180$.

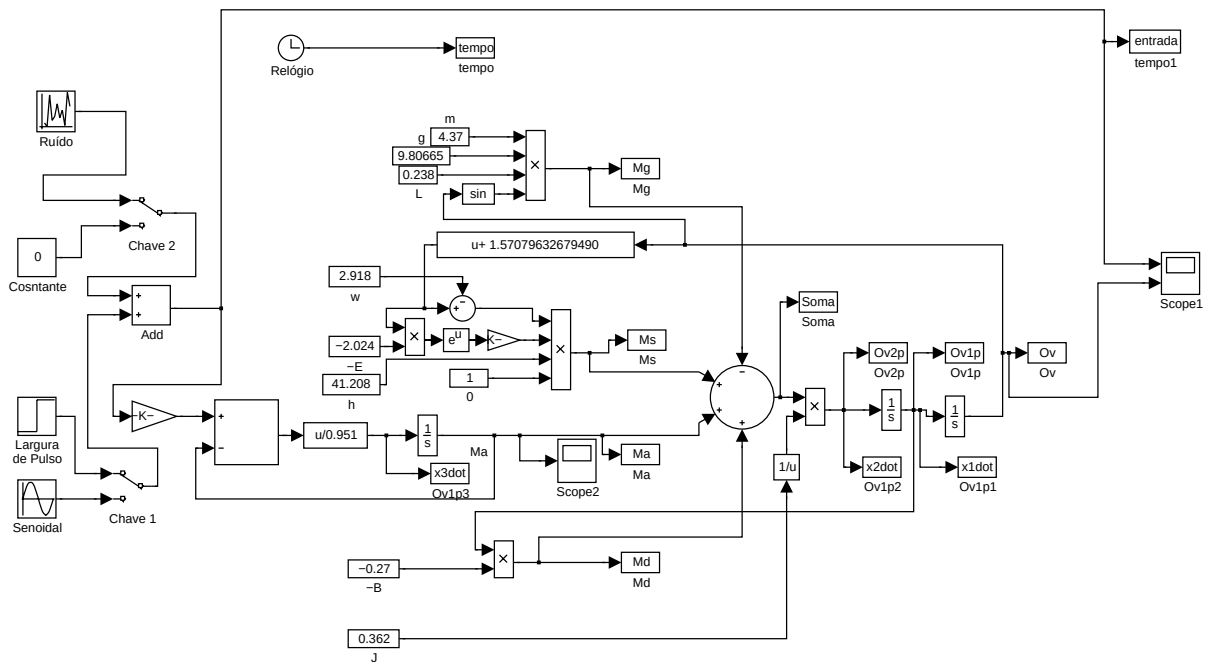


Figura 6.36: Aplicação do degrau às equações dinâmicas do modelo do paraplégico, considerando o ruído.

Analisa-se como nas considerações anteriores, $\mathbf{z}_1(t)$, $\mathbf{z}_2(t)$, $\mathbf{z}_3(t)$, e P_0 , em relação ao tempo, como visto na Figura 6.37; $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ em relação a $\mathbf{z}_1(t)$, como visto na Figura 6.38 e a função custo em relação ao tempo, como visto na Figura 6.39.

Com essa ferramenta, a princípio, tem-se a intenção de estimar modelo locais do modelo dinâmico do paraplégico com entrada degrau fornecida por um eletroestimulador e os sinais captados por sensores como eletrogoniômetro, acelerômetros e sensores de força, na obtenção de θ_v , $\dot{\theta}_v$, Ma .

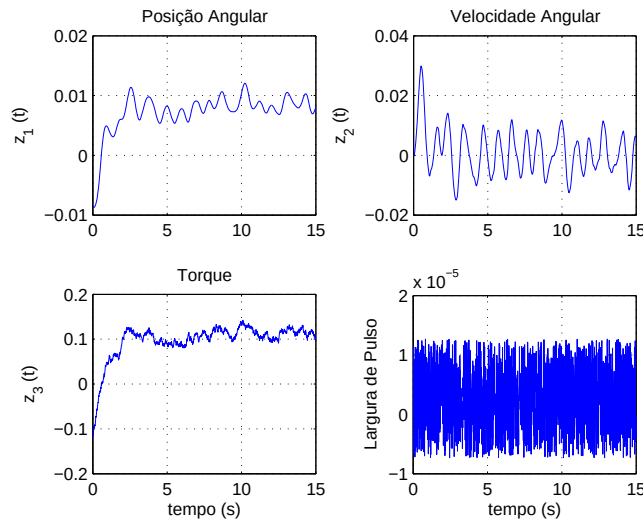


Figura 6.37: Resposta das variáveis $(\mathbf{z}_1(t))$, $(\mathbf{z}_2(t))$ e $(\mathbf{z}_3(t))$ em reação ao tempo de simulação, considerando o ruído.

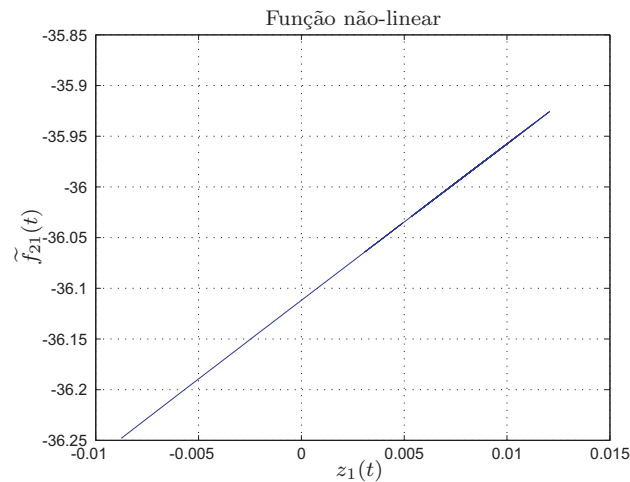


Figura 6.38: Comportamento de $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$ em relação a $(\mathbf{z}_1(t))$, considerando o ruído.

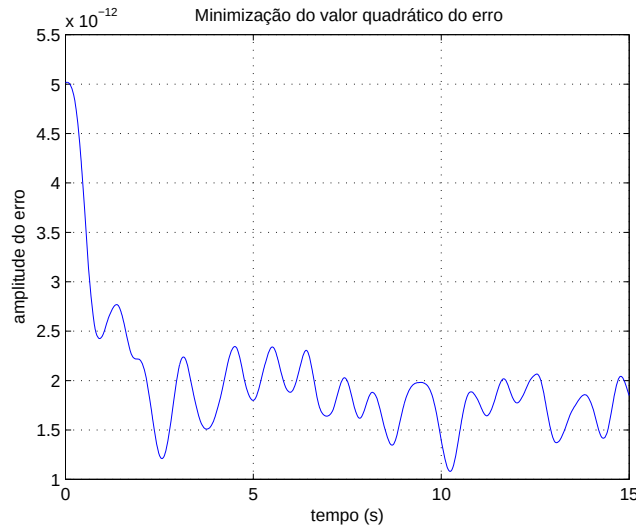


Figura 6.39: Minimização do erro quadrático.

O valor de $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t)) = 36.1119$, com ruído. O valor encontrado pela equação (4.46), com ruído é $\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t)) = -35.9258$. Conclui-se que o sistema a ser identificado, mesmo com um ruído admissível ao sistema, consegue convergir a uma solução factível das LMI, e o sistema minimizado fornece uma solução para $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$, semelhante as condições sem ruído.

6.8.2 Discretização da Dinâmica do Paraplégico

Uma adaptação de (SILVA, 2007) e melhor representação do modelo, foi simulada na seção anterior. Na prática o modelo discreto é mais utilizado (OGATA, 1997) e (KIM et al., 2006), pois se o sistema de aquisição e processamento de sinais trabalham com conversores A/D e D/A, então, em nosso estudo, necessita-se de uma representação mais adequada. Assim os vetores obtidos, pelo canais analógicos do software Labview 8.20, seus sinais são tratados com filtros digitais, armazenados em arquivo do tipo txt e posteriormente convertidos em ASCII, então, os dados são carregados no prompt do Matlab e assim através da equação (4.46), produzem as variáveis estimadas e desejada $\tilde{f}_{21analitico}(\mathbf{z}_1(t))$, ou seja, identificar o modelo local com dados práticos. Uma versão discretizada da seção anterior, para análise em simulação é apresentada na Figura 6.40.

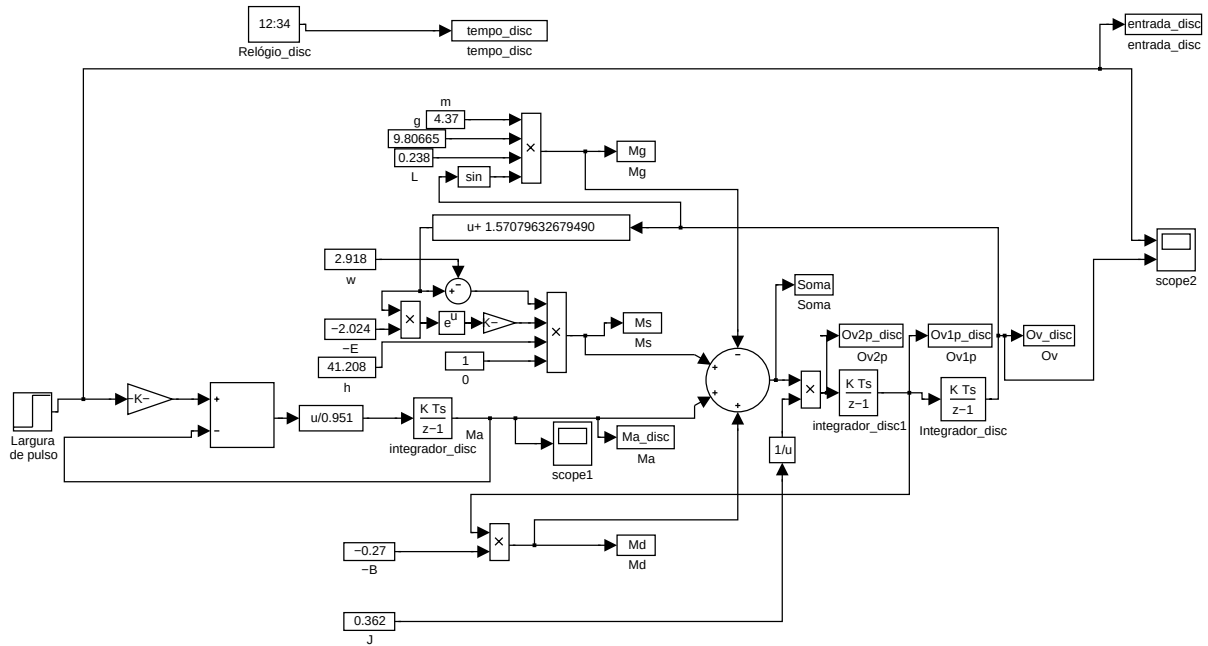


Figura 6.40: Modelo discreto do modelo da dinâmica do paraplégico.

Na Figura 6.41, mostra-se o resultado da simulação discreta. A amplitude do degrau varia entre $14\pi/180 < \theta_v(t) < 15\pi/180$. Utilizando (4.47), com $T=0.01s$, determina-se $\tilde{f}_{21identificado}(z_1(t)) = -35.8371$. Pode-se observar que a resposta é coerente com o caso contínuo aplicado as mesmas condições.

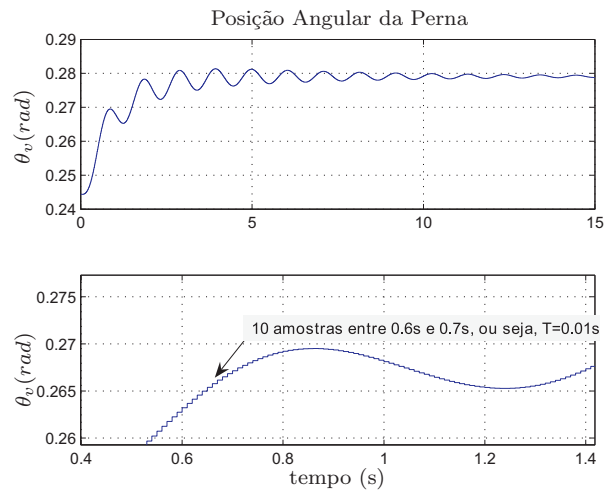


Figura 6.41: Resposta do sistema discretizado ao degrau aplicado.

6.8.3 Composição de Modelos Locais

Nessa seção, a motivação foi baseada na tese de (MACHADO, 2003), para construção de funções de pertinência, a partir dos modelos locais determinados, conforme a equação (4.46). Para a construção da função de pertinência, foi utilizado o mesmo método apresentado em (TANIGUCHI et al., 2001), isto é, $\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t))$ para cada modelo local.

A cada variável determinada de $\tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t))$, com a excitação em torno do modelo local desejado, determina-se as matrizes da equação (6.44). A escolha dos modelos locais de preferência do projetista fornece então, como em (TANIGUCHI et al., 2001), uma idéia do comportamento da função não-linear $\tilde{f}_{21}(\mathbf{z}_1(t))$, num determinado intervalo em estudo. Assim, de acordo com (TANIGUCHI et al., 2001), compõem-se os as funções de pertinência (6.45) e (6.46).

$$\sigma_1(\mathbf{z}_{ident}(t)) = \frac{\tilde{f}_{21d}(\mathbf{z}_1(t)) - a_2}{a_1 - a_2}. \quad (6.45)$$

e,

$$\sigma_2(\mathbf{z}_{ident}(t)) = \frac{\tilde{f}_{21d}(\mathbf{z}_1(t)) - a_1}{a_2 - a_1}. \quad (6.46)$$

$$\sigma_1(\mathbf{z}_{ident}(t)) + \sigma_2(\mathbf{z}_{ident}(t)) = 1, \quad \sigma_1(\mathbf{z}_{ident}(t)) \geq 0, \quad \sigma_2(\mathbf{z}_{ident}(t)) \geq 0. \quad (6.47)$$

Definindo, a_i $i = 1, 2$, sendo que $a_1 = \tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t))$ do primeiro modelo local identificado e $a_2 = \tilde{f}_{21identificado}(\mathbf{z}_1(t))$ do segundo modelo local identificado, $\tilde{f}_{21d}(\mathbf{z}_1(t))$ é a função não-linear que descreve a trajetória de pontos, ao se aplicar um degrau entre o primeiro modelo local identificado e o segundo modelo local identificado.

Especificamente, pode-se estabelecer dois modelos locais, $\theta_v = 0^\circ$ e $\theta_v = 30^\circ$, usando a equação (4.46), determina-se $\tilde{f}_{21\ 0^\circ}(\mathbf{z}_1(t))$ e $\tilde{f}_{21\ 30^\circ}(\mathbf{z}_1(t))$, compondo-se as matrizes lineares do modelo local (6.44). Da anotação anterior, $a_1 = \tilde{f}_{21\ 0^\circ}(\mathbf{z}_1(t))$ e $a_2 = \tilde{f}_{21\ 30^\circ}(\mathbf{z}_1(t))$. Ao se aplicar um degrau de $\theta_v \in [0^\circ\ 30^\circ]$ fornece a trajetória de pontos entre os dois modelos locais, ou seja, $\tilde{f}_{21d}(\mathbf{z}_1(t))$. Nesse caso pelas equações (6.45) e (6.46), pode-se

encontrar, as funções de pertinência $\sigma_1(\mathbf{z}_{ident}(t))$ e $\sigma_2(\mathbf{z}_{ident}(t))$ que descrevem o sistema.

A seguir mostra-se os resultados da simulações, que determinam os modelos locais e a função de pertinência. Para determinar o modelo local, os valores são os mesmos, obtidos da Tabela 5.1 e o ponto de operação próximo a $\theta_v = 0^\circ$ e mostrado na Figura 6.48 e então,

$$\mathbf{A}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & -0.7458 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}, \quad (6.48)$$

sendo $a_1 = \tilde{f}_{21(0^\circ)}(\mathbf{z}_1(t))$.

Para o modelo local próximo a $\theta_v = 30^\circ$ é mostrado na Figura 6.49.

$$\mathbf{A}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_2 & -0.7458 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

sendo $a_2 = \tilde{f}_{21(30^\circ)}(\mathbf{z}_1(t))$.

Resolvendo a equação (4.46), encontra-se para valores de $a_1 = -45.2813$ e $a_2 = -28.5255$. Na Figura 5.2, pode-se observar que, quando $\Delta x_1(t) = 0^\circ$ a função não-linear tem o valor de $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) = -28.8296$. Portanto, por obsevação entre $a_2 = -28.5255$ e $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}_1(t)) = -28.8296$, projetado para o ponto de operação de $\theta_v = 30^\circ$, fornecem resultados muito próximos. Evidenciado a eficácia da metodologia apresentada.

As funções de pertinências (6.45) e (6.46), podem ser determinadas, ao se gerar os pontos da trajetória, com o degrau aplicado entre $[0^\circ \ 30^\circ]$. O degrau aplicado, primeiramente determina-se $\tilde{f}_{21d}(\mathbf{z}_1(t))$ e depois compõem-se (6.45) e (6.46), então na Figura 6.42,

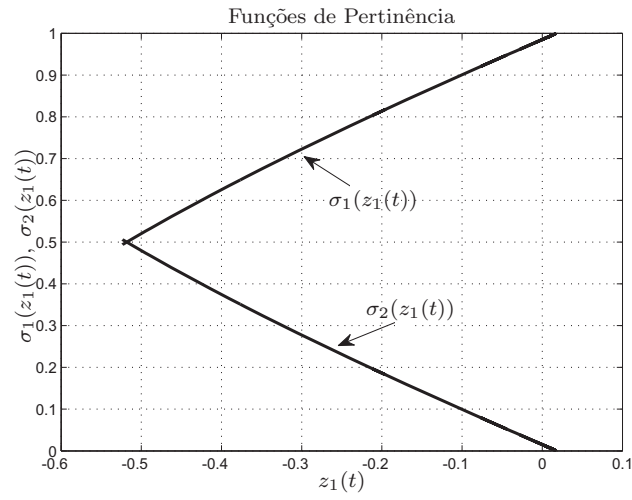


Figura 6.42: Funções de pertinência $\sigma_1(z_1(t))$ e $\sigma_2(z_1(t))$ identificadas.

O método de identificação proposto nesta seção ainda será objeto de estudos futuros, entretanto a obtenção da função de pertinência baseados em projetos com LMI está em desenvolvimento.

7 Conclusão

Os projetos do regulador e observador, propostos para controlar a posição da perna de um paraplégico, atenderam os requisitos de estabilidade e desempenho, utilizando-se um estímulo elétrico aplicado ao músculo quadríceps. Os projetos foram rigorosamente elaborados com funções de Lyapunov, baseados em Desigualdades Matriciais Lineares (Linear Matrix Inequalities, LMI), e utilizaram modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) para a representação da planta não-linear. Foram consideradas restrições tais como estabilidade, taxa de decaimento, restrição na entrada e saída. Pontos de operação para a posição da perna em 30° e 60° , foram especificados para projetos de controladores não-lineares contínuos no tempo (regulador e/ou observador, rastreamento do sinal com regulador e observador) e discretos no tempo (regulador e/ou observador). Novos resultados foram obtidos para o projeto do rastreamento da posição da perna, com regulador e observador. Esses resultados facilitam a visão do projetista, pois não há necessidade de projetar controladores específicos para cada ponto de operação. O sistema controlado apresenta um bom desempenho, dentro de um intervalo de operação especificado. Esta foi a principal contribuição da tese. Um método simples para a obtenção de modelos fuzzy Takagi-Sugeno discretos no tempo (discretização) a partir de modelos fuzzy Takagi-Sugeno contínuos no tempo foi desenvolvido, analisado teoricamente e simulações digitais comprovaram a sua eficácia. Resultados significativos foram propostos, com o uso da realimentação derivativa no controle da posição da perna de um paraplégico. Este procedimento permite que acelerômetros sejam os principais sensores utilizados no sistema de controle. Outra contribuição, ainda em desenvolvimento, foi a modelagem do músculo, usando-se o princípio dos modelos locais propostos por Takagi e Sugeno. Ainda em estudo, essa contribuição poderá ser adicionada ao modelo matemático da dinâmica do paraplégico e possibilitará uma modelagem mais completa do que a considerada nos projetos propostos nesta tese. Finalmente, bons resultados, baseados em LMI, foram obtidos na identificação de modelos locais T-S, utilizando-se mínimos quadrados. Praticamente, nessa tese mostra-se a viabilidade de projetos, com modelos fuzzy T-S, para controlar movimentos de pacientes

paraplégicos e acredita-se que, tendo em vista os resultados obtidos e publicados em congressos e periódico, que a comunidade científica tem avaliado positivamente este trabalho. No capítulo a seguir apresenta-se um resumo dos trabalhos que foram publicados durante o período de 2006 a 2008. No entanto, outros já estão sendo confeccionados e serão submetidos a periódicos e congressos relevantes nas áreas de controle automático e engenharia biomédica.

8 *Publicações Decorrentes*

8.1 Publicações e Trabalhos em Andamento

Os artigos publicados em periódicos e congressos, decorrentes das pesquisas desenvolvidas nessa tese, tiveram uma boa aceitação pela comunidade científica da teoria de controle. Foram publicados artigos na área de controle e instrumentação eletrônica. Nessa tese, abordou-se principalmente os resultados referentes ao controle automático. Outros trabalhos em andamento na área de instrumentação eletrônica, que não fazem parte do contexto dessa tese, evidenciam a boa aceitação da comunidade científica de instrumentação biomédica, dos resultados parciais obtidos. Uma observação importante é que os resumo ou abstracts citados abaixo, foram retirados diretamente dos artigos apresentados e/ou que serão apresentados, citados também abaixo.

1. Título: **“PROJETO DE UM CONTROLADOR FUZZY TAKAGI-SUGENO PARA VARIAR O ÂNGULO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO”**. Autores: MARCELO C. M. TEIXEIRA, GRACE S. DEAECTO, RUBERLEI GAINO, EDVALDO ASSUNÇÃO, APARECIDO A. CARVALHO, UENDER C. FARIA. Artigo publicado no XVI Congresso Brasileiro de Automática, Salvador-BA, 2006.

Resumo: O estudo apresentado demonstra, através de estudos teóricos e simulações, que utilizando a descrição da planta através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno, é possível projetar um sistema não-linear para controlar a posição da perna de um paciente parapléico. No caso, o sistema de controle foi projetado para variar o ângulo da articulação de 30°. Pelo minucioso levantamento bibliográfico realizado, este foi o primeiro estudo da aplicação da modelagem fuzzy Takagi-Sugeno neste tipo de problema.

2. Título: **“DESIGN OF A FUZZY TAKAGI-SUGENO CONTROLLER TO**

VARY THE JOINT KNEE ANGLE OF PARAPLEGIC PATIENTS”.

Autores: Marcelo C. M. Teixeira, Grace S. Deaecto, Ruberlei Gaino, Edvaldo Assunção, Aparecido A. Carvalho, Uender C. Farias. Periódico publicado no ICONIP 2006-LNCS, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.

Abstract: The paper shows, through theoretical studies and simulations, that using the description of the plant by Takagi-Sugeno, it is possible to design a nonlinear controller to control the position of the leg of a paraplegic patient. The control system was designed to change the angle of the joint knee of 60° . This is the first study that describes the application of Takagi-Sugeno models in this kind of problem

3. Título: **“CONTROLE DIGITAL PARA FES NO ESTÍMULO DO MÚSCULO QUADRÍCEPS EM PACIENTES PARAPLÉGICOS”.** Autores: Ruberlei Gaino, Tony Inácio da Silva, Marcelo Augusto Assunção Sanches Ricardo Luiz Barros de Freitas, Flávio Hirochi Sato, Elcio Alteris dos Santos Aparecido Augusto de Carvalho, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Edvaldo Assunção, Erica Regina Marani Daruichi Machado. Artigo publicado no 6º Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications-DINCON, São José do Rio Preto-SP, 2007.

Abstract: This paper shows, the design of a digital linear controller and implementation of control of joint knee angle of paraplegic patients.

4. Título: **“PROJETO DE UM CONTROLADOR LINEAR PARA VARIAR O ÂNGULO DE ARTICULAÇÃO DO JOELHO DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO”.** Autores: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Grace Silva Deaecto, Ruberlei Gaino, Edvaldo Assunção, Aparecido Augusto de Carvalho, Érica Regina Marani Daruichi Machado, Tony Inácio da Silva. Artigo publicado no 6º Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications-DINCON, São José do Rio Preto-SP, 2007.

Abstract: This paper shows, the design of a linear controller for control of joint knee angle of paraplegic patients.

5. Título **“REGULADORES E OBSERVADORES FUZZY TAKAGI-SUGENO PARA VARIAR O ÂNGULO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO DE**

UM PACIENTE PARAPLÉGICO”. Autores: Ruberlei Gaino, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Aparecido Augusto de Carvalho, Edvaldo Assunção, Tony Inácio da Silva. Artigo publicado no VII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Florianópolis-SC, 2007.

Resumo: É demonstrado, por estudos teóricos e simulações, que é possível projetar um regulador com observador não-linear, para controlar a posição da perna do paraplégico, considerando a planta descrita por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. No caso, o sistema de controle foi concebido para variar o ângulo da articulação de 30° e 60°. Este estudo generaliza resultados prévios, utilizando realimentação das variáveis de estado da planta.

6. Título: **“ELECTRONIC SYSTEM TO MEASURE PLANTAR FORCE DISTRIBUTION IN PATIENTS”**. Autores: Marcelo Augusto Assunção Sanches, Mateus Fernandes Réu Urban, Elcio Alteris dos Santos, Flavio Hiochio Sato, Ricardo Luiz Barros de Freitas, Ruberlei Gaino, Tony Inácio da Silva, Uender da Costa Faria, Aparecido Augusto de Carvalho. Artigo publicado no XXV International Symposium on Biomechanics in Sports, Ouro Preto-MG, 2007.

Abstract: This article describes an electronic system, projected to measure the force distribution under patients' foot soles by instrumented soles with sensors. The system is basically composed of load cells installed in the soles, signal conditioning circuit, interfacing circuit and a computer, from which the measurement results can be read. It is possible to measure static and dynamic forces. Data visualization on the computer screen is displayed by a Visual Basic program. The system presents linear response with the applied force, small hysteresis, precision higher than 99.4%, in addition to its simple operation and handling. It could be used by sports and fitness professionals and other health area professionals to assist in the evaluation of specific programs that aim at increasing athletes' performance.

Contribuição neste trabalho com estudos e artigos na área de biomecânica.

7. Título: **“IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ESTÁVEIS UTILIZANDO COMO ENTRADA UM DEGRAU**. Autores: Dário dos Santos Silva, Marcelo C. M. Teixeira, Francisco Villarreal Alvarado, Edvaldo Assunção, Rodrigo Cardim, Ruberlei Gaino. Artigo publicado I Simpósio Regional

de Matemática e suas Aplicações de Ilha Solteira. Ilha-Solteira-SP, 2007.

Resumo: Frequentemente a Função de Transferência (FT) de um sistema de controle é desconhecida, acarretando dificuldades para o projeto de tais sistemas. Alguns métodos tais como o dos Mínimos Quadrados e a resposta à entrada degrau são amplamente utilizados na prática de identificação de modelos de sistemas de controle. A resposta à entrada degrau apresenta um bom desempenho na identificação porque os ruídos e vibrações de sistemas mecânicos tendem a zero quando o sistema entra em regime permanente.

Contribuição com programação no software Matlab/SIMULINK.

8. Título: **“CONTROLE NÃO-LINEAR FUZZY T-S DO MOVIMENTO DE PARAPLÉGICOS UTILIZANDO ACELERÔMETROS”**. Autores: Ruberlei Gaino, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Rodrigo Cardim, Aparecido Augusto de Carvalho, Edvaldo Assunção e Marcelo Augusto Assunção Sanches. Artigo publicado no 21º Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, Salvador-BA, 2008.

Abstract: A simple method for design a control system, to vary the joint knee angle of paraplegic patients using Function Neuromuscular Stimulation (FNS) is presented. The nonlinear system is described by Takagi-Sugeno fuzzy models. Closed control techniques for the rehabilitation of paraplegic patients, improve the quality of (FNS). We investigated the use of accelerometers as the main sensors for feedback. Accelerometers are very suitable for these applications because of their small dimension, weight and cost. Simulations results show that the proposed procedure is efficient and offers a good resolution for this control problem.

9. Título: **“DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA PARA PROJETO DE CONTROLADORES PID APLICADOS EM ESTIMULAÇÃO NEUROMUSCULAR FUNCIONAL”**. Autores: T. A. Prado, R. Gaino, A. A. Carvalho, M. C. Pereira, E. A. Batista e A. M. Carneiro. Artigo publicado no 21º Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, Salvador-BA, 2008.

Abstract: This paper covers the development of a computational tool for designing PID controllers to be used in Neuro Muscular Electrical Stimulation (NMES). Both analog digital PID controllers can be designed from information supplied by the user, specifically the patient's parameters and the desired specifications for the controller. This tool is based on a second order linear mathematical model that

predicts the muscle strength behaviour resulting from the applied electrical stimulus.

Contribuição neste trabalho: o modelo matemático do músculo utilizado, representa uma função de transferência de segunda ordem. Seu modelo e como estimar os parâmetros, são extraídos de (LAW; SHIELDS, 2006).

10. Título: **“Sistema Eletrônico para Monitoramento de Forças na Região Plantar ”**. Autores: Marcelo Augusto Assunção Sanches, Aparecido Augusto de Carvalho, Augusto Cesinando de Carvalho, Flavio Hiokio Sato, Maurizio Babini, Wesley Pontes, Ricardo Luiz Barros de Freitas, Elcio Alteris dos Santos, Mateus Fernandes Réu Urban, Ruberlei Gaino. Artigo publicado no 21º Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, Salvador-BA, 2008.

Abstract: This paper describes the development of a computer-based system able for monitoring forces acting on patients lower limbs. The system consists of insoles instrumented with load cells, signal conditioning circuits, data acquisition system, USB communication port and a program developed in Visual Basic. All transducers presented linear response, small hysteresis, precision of 0.6%, and resolution better than 0.5 N. Static and dynamic measurements performed with a load cell are presented as well as the visualization of the forces exerted on the plantar area of a hemiplegic patient and a healthy patient.

Colaboração com conceitos de biomecânica e confecção do artigo.

11. Título: **“INTEGRAÇÃO DE CONTROLE E INSTRUMENTAÇÃO COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE PROTEUS PARA CONTROLE DE MOVIMENTOS NA REABILITAÇÃO DE PARAPLÉGICOS”**. Autores: Ruberlei Gaino, Aparecido Augusto de Carvalho, Marcelo Augusto Assunção Sanches, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, José Bonvino Carvalho Neto, Edvaldo Assunção, Thiago Alexandre Prado. Artigo publicado no V Congreso Tecnologías de Apoyo A La Discapacidad-Iberdiscap, Bogotá-Colombia, 2008.

Resumo: Este trabalho propõe o uso de software computacional, para projeto de controladores em malha fechada, usando um eletro-estimulador neuromuscular, com o objetivo de auxiliar a restauração de movimentos em paraplégicos. São usados conceitos de teoria de controle, instrumentação eletrônica e modelos fisiológicos, unidos

em uma única plataforma, isto é, todos estes elementos são integrados no ISIS Proteus da Labcenter Electronics. O uso deste software permite integrar todos estes elementos e consegue-se verificar o conjunto controlador-estimulador, observando-se a resposta temporal através de simulações, pois assim evita-se inicialmente que os primeiros testes reais sejam aplicados diretamente em pacientes, desta forma preservando os mesmos.

Este artigo publicado, num dos mais importantes congressos de Engenharia Biomédica, teve seu êxito devido a grande flexibilidade do *software* ISIS Proteus da Labcenter Eletronics, versão demo. Pela primeira vez, utilizou-se o *software* ISIS Proteus para auxílio no projeto de controladores analógicos, para posicionar a perna de um paciente paraplégico em um ângulo desejado, utilizando-se amplificadores operacionais (NETO, 2008). Trabalhos posteriores com projetos de controladores discretos, e, discretização do modelo não-linear do músculo, foram implementados no *software* ISIS Proteus, com alunos de mestrado e doutorado em Engenharia Biomédica, e serão submetidos em congressos e periódicos relevantes na área.

12. **Título: “REGULADOR FUZZY TAKAGI-SUGENO DISCRETO PARA VARIAR O ÂNGULO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO”.** Autores: Ruberlei Gaino, Marcelo C. M. Teixeira, Aparecido A. de Carvalho, Edvaldo Assunção, Erica R. M. D. Machado. Em submissão a congressos e/ou periodicos da área de teoria de controle.

Resumo: É abordado o projeto de reguladores fuzzy Takagi-Sugeno, discretos no tempo, para controlar o ângulo da articulação do joelho de pacientes paraplégicos utilizando eletroestimulação. Para este fim é proposto um novo método de discretização de sistemas não-lineares contínuos no tempo descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Este método é muito simples e uma análise teórica demonstra a sua validade para períodos de amostragem suficientemente pequenos.

13. **Título: “CONTROLE DA POSIÇÃO DA PERNA, UTILIZANDO FUZZY T-S E REALIMENTAÇÃO POR ACELERÔMETROS”.** Autores: Ruberlei Gaino, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Rodrigo Cardim, Aparecido Augusto de Carvalho, Edvaldo Assunção e Marcelo Augusto Assunção Sanches. Em processo de submissão ao periódico da Sociedade Brasileira de Engenharia Biomédica-SBEB,

Rio de Janeiro-RJ, 2009.

Abstract: A new method for designing the control of position of the leg of a paraplegic patient is proposed. The main idea of this work it is to use as sensors the accelerometers, instead of electrogoniometers, because, is more comfortable for the patients and measures are more accurate. The use of the control technique is possible change the electrogoniometers for accelerometers and we obtain good results to control the position of the knee joint.

14. Título: “**MONITORAMENTO DA ATIVIDADE DOS MEMBROS SUPERIORES UTILIZANDO DINAMÔMETRO E EMG**”. Autores: Douglas Antonio José de Araujo, Aparecido Augusto de Carvalho, Ruberlei Gaino, Lucas de Oliveira Galan Cappi, Fabrício Bonfim Rodrigues de Oliveira, Marcelo Augusto Assunção Sanches. Resumo Expandido publicando no XX Congresso Iniciação Científica-UNESP, São José dos Campos-SP, 2008.

Resumo: Neste trabalho é descrito um sistema eletrônico projetado para medir a força de aperto das mãos e o EMG de músculos dos membros superiores de pacientes. O sistema é constituído basicamente por um dinamômetro ergonômico, um amplificador para sinais de eletromiografia, um computador e um software desenvolvido em LabVIEW da National Instruments. A força medida pelo dinamômetro e o EMG podem ser visualizados na tela de um computador. O dinamômetro apresentou resposta linear. O sistema pode armazenar os dados pessoais e os resultados de avaliações realizados pelo paciente, tornando possível que o profissional de saúde possa documentar e avaliar a eficácia de um determinado tratamento fisioterápico a que o paciente foi submetido

15. Título: “**MONITORAMENTO DA ATIVIDADE MIOELÉTRICA E DA FORÇA EXERCIDA PELO RECTUS FEMORIS DURANTE SUA EXTENSÃO**”. Autores: Fabrício Bonfim Rodrigues de Oliveira, Aparecido Augusto de Carvalho, Ruberlei Gaino, Marcelo Augusto Assunção Sanches, Douglas Antonio José de Araujo, Lucas de Oliveira Galan Cappi. Resumo Expandido publicando no XX Congresso Iniciação Científica-UNESP, São José dos Campos-SP, 2008.

Resumo: Em tratamentos fisioterápicos, utilizam-se sistemas eletrônicos (eletromiógrafo - sensor que mede sinal eletromiográfico; dinamômetro - sensor que mede sinais de forças exercidas pelos músculos) para monitorar a atividade mioelétrica de pacientes que possuem, ou sofreram, algum tipo de enfermidade (acidente vas-

cular cerebral, por exemplo), comprometendo, assim, seus movimentos musculares. Com essa finalidade, confeccionou-se um circuito para processamento, e condicionamento, do sinal eletromiográfico de superfície (EMGs) produzido pelo músculo rectus femoris.

16. Título: **“ESTUDO E MANIPULAÇÃO DE SINAIS DE ELETROGONIÔMETROS E ACELERÔMETROS PARA A MEDIÇÃO DE ÂNGULO”**.

Autores: Lucas de Oliveira Galan Cappi, Aparecido Augusto de Carvalho, Ruberlei Gaino, Douglas Antonio José de Araujo. Resumo Expandido publicando no XX Congresso Iniciação Científica-UNESP, São José dos Campos-SP, 2008.

Resumo: A mensuração de ângulos articulares é um dos objetos de estudo da cinemática, tendo elevada importância na área biomédica. O objetivo desse trabalho foi utilizar eletrogoniômetros e acelerômetros, e, empregar os softwares Matlab/Simulink da Mathworks e LabVIEW da National Instruments para obter a leitura do ângulo correspondente ao sinal de tensão. A goniometria é a medida dos ângulos, particularmente aqueles formados por articulações, cujo instrumento de medida é o goniômetro. É um método simples, de baixo custo e não invasivo para quantificar a Amplitude de Movimento (ADM), devendo ser válido e confiável para utilização no ambiente terapêutico. O eletrogoniômetro é uma versão eletrônica do goniômetro manual, porém mais versátil, por permitir a mensuração dinâmica do deslocamento angular de uma determinada articulação. A acelerometria é um método comumente utilizado para análise biomecânica do movimento humano, sendo ferramenta fundamental no controle de sobrecarga mecânica nas mais diversas atividade cotidiana.

17. Título: **“CONTROLE DA POSIÇÃO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO”**.

Autores: Renan Fernandes Kozan, Aparecido Augusto de Carvalho, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, José Bonvino Carvalho Neto, Ruberlei Gaino, Marcos Vinícius Nascimento Junqueira. Resumo Expandido publicando no XX Congresso Iniciação Científica-UNESP, São José dos Campos-SP, 2008.

Resumo: O estudo para controlar o movimento de pacientes paraplégicos através de estimulação elétrica, é um assunto relevante dentro da engenharia de reabilitação. Para facilitar este estudo, modelos biomecânicos foram criados. Contudo, devido à complexidade e não linearidade dos complexos musculares, o controle em malha fechada sobre estes sistemas requer técnicas de controle eficientes. Estudos de modelos matemáticos e projetos com controle clássico digital foram utilizados e nesse trabalho apresenta um projeto de um compensador para o controle do posiciona-

mento da perna através de um modelo biomecânico. A simulação deste e os passos para a implementação eletrônica do modelo biomecânico.

18. Título: **“CIRCUITO DE CONDICIONAMENTO DE SINAIS PARA MEDIÇÃO DE PARÂMETROS DA JUNCTÃO DO JOELHO”**. Autores: Marcos Vinícius Nascimento Junqueira, Aparecido Augusto de Carvalho, Marcelo Augusto Assunção Sanches, Ruberlei Gaino, Renan Fernandes Kozan, Matheus Fernandes Réu Urban. Resumo Expandido publicando no XX Congresso Iniciação Científica-UNESP, São José dos Campos-SP, 2008.

Resumo: O objetivo deste trabalho foi implementar e avaliar um circuito de condicionamento de sinais para uma célula de carga, com a finalidade de obter alguns parâmetros da junção do joelho, como o momento de inércia, a viscoelasticidade e o coeficiente de amortecimento. Estes parâmetros serão captados a partir de um estímulo elétrico aplicado no músculo quadríceps.

8.2 Trabalhos Futuros

Ao decorrer deste trabalho, idéias foram sendo anotadas para continuação do projeto, algumas delas foram anotadas abaixo.

1. projeto de controladores robustos, considerando incertezas paramétricas,
2. consideração da saturação na entrada, na realimentação de estados, pois a largura de pulso deve ser positiva,
3. implementação em malha fechada utilizando hardware,
4. identificação paramétrica do modelo matemático do paciente,
5. após identificação do modelos local e sua função de pertinência, projetos usando aproximação com modelo fuzzy Takagi-Sugeno,
6. aprimoramento da cadeira ergonômica para levantamento dos parâmetros, captados pelo software e hardware Labview da National Instruments.

Acredita-se que muitos projetos subsequentes serão apresentados a partir desta tese realizada.

Referências

- ABBAS, J. J.; CHIZECK, H. J. Neural network control of functional neuromuscular stimulation systems: computer simulation studies. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, New York, v. 42, n. 11, p. 1117–1127, 1995.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁ SEK, M. Pole-placement for siso linear systems by state-derivative feedback. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, v. 151, n. 4, p. 377–385, 2004.
- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Belo Horizonte: UFMG, 2000.
- ALEXANDER, R. S.; JONHSON, P. D. Muscle stretch and theories of contraction. *American Journal of Physiology*, Baltimore, v. 213, p. 1560–1564, 1965.
- BAWA, P.; MANARD, A.; STEIN, R. B. Predictions and experimental tests of a viscoelastic muscle model using elastic and inertial loads. *Biological Cybernetics*, New York, v. 22, p. 139–145, 1976.
- BOUKAS, T. K.; HABETLER, T. G. High-performance induction motor speed control using exact feedback linearization whith state and state derivative feedback. *IEEE Transactions on Power Electronics*, New York, v. 19, n. 4, p. 1022–1028, 2004.
- BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHAN, V. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. New York: SIAM Studies in Appllied Mathematics, 1994.
- BUCHANAN, T. S.; LLOYD, D. G.; MANAL, K.; BESIER, T. Neuromusculoskeletal modeling: estimation of muscle of forces and joint movements and from measurements of neural command. *Journal of Applied Biomechanics*, Champaign, v. 20, n. 4, p. 1–34, 2004.
- CHANG, G.-C.; LUH, J.-J.; LIAO, G.-D.; LAI, J.-S.; CHENG, C.-K.; KUO, B.-L.; KUO, T.-S. A neuro-control system for the knee joint position control with quadriceps stimulation. *IEEE Transacttions On Rehabilitation Engineering*, San Diego, v. 5, n. 1, p. 2–11, 1997.
- CHIZECK, H. J.; KOFMAN, L.; CRAGO, P. E.; WILHERE, G. F. Pulse-train controllers for functional neuromuscular stimulation. *IEEE Transactions On Rehabilitation Engineering*, San Diego, v. 14, n. 5, p. 628–639, 1983.
- CHOU, L.-W.; BLINDER-MACLEOD, S. A. The effects of stimulation frequency and fatigue on the force-intensity relationship for human skeletal muscle. *Clinical Neurophysiology*, Italia, v. 6, n. 118, p. 1387–1396, 2007.

- CLOSE, R. Dynamic properties of fast and slow skeletal muscle of the rat during development. *Journal of Physiologie*, Paris, n. 173, p. 4–95, 1964.
- CLOSE, R.; HOH, J. F. Y. Force velocity properties of kitten muscle. *Journal of Physiologie*, Paris, n. 192, p. 815–822, 1967.
- CRAGO, P. E.; MORTIMER, T.; PECHAM, P. H. Closed-Loop control of force during electrical stimulation of muscle. *IEEE Transactions On Rehabilitation Engineering*, San Diego, v. 27, n. 6, p. 306–312, 1980.
- CRAGO, P. E.; PECKHAM, P. H.; THROPE, G. B. Modulation of muscle force by recruitment during intramuscular stimulation. *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, New York, v. 27, n. 12, p. 679–684, 1980.
- DEJNABADI, H.; JOLLES, B. M.; AMINIAN, K. A new approach to accurate measurement of uniaxial joint angles based on a combination of accelerometers and gyroscopes. *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, San Diego, v. 52, n. 8, p. 1478–1484, 2005.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle modernos*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- DUAN, G. R.; IRWIN, G. W.; LIU, G. P. Robust stabilization of descriptor linear systems via proportional-plus-derivative state feedback. In: *PROCEEDINGS OF THE 1999 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1999, San Diego. Proceedings of the...* San Diego: [s.n.], 1999. p. 1304–1308.
- ESCOLA, B. Anatomia humana. *Biologia-Anatomia Humana, Brasil Escola*, 2009. Disponível em: <<http://www.brasilecola.com/biologia/anatomia-humana.htm>. Acesso em: 18 fev. 2009>.
- FARIA, U. C. *Implementação de um sistema de geração para pacientes com lesões medulares*. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- FENN, W. O.; MARSH, B. S. Muscular force at different speeds of shortening. *Journal of Physiologie*, Paris, n. 85, p. 277–296, 1935.
- FERRARIN, M.; PEDOTTI, A. The relationship between electrical stimulus and joint torque: a dynamic model. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, San Diego, v. 8, n. 3, p. 342–352, 2000.
- FRANKEN, H. M.; VELTINK, P. H.; TIJSMANS, R.; NIJMEIJER, H.; BOOM, H. B. K. Identification of passive knee joint and shank dynamics in paraplegics using quadriceps stimulation. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, San Diego, v. 1, n. 3, p. 154–164, 1993.
- FREIVALDS, A. *Biomechanics of the upper limbs, mechanics modeling and musculoskeletal injuries*. New York: CRC PRESS, 2004.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. $\mathcal{H}_\infty$ -Control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach. *Linear Algebra and Its Applications*, New York, v. 351, p. 271–302, 2002.

GAINO, R.; SILVA, T. I.; SANCHES, M. A. A.; FREITAS, R. L. B.; SATO, F. H.; SANTOS, E. A.; CARVALHO, A. A.; TEIXEIRA, M. M.; ASSUNÇÃO, E.; MACHADO, E. R. M. D. Controle digital para fcs no estímulo do músculo quadríceps em pacientes paraplégico. In: *BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, DINCON, 6, 2007, São José do Rio Preto. Anais...* São José do Rio Preto: [s.n.], 2007. p. 764–771.

GAINO, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; CARVALHO, A. A.; ASSUNÇÃO, E.; SANCHES, M. A. A. Controle não-linear fuzzy takagi-sugeno do movimento de paraplégicos utilizando acelerômetros. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, CBEB, 21, 2008, Salvador. Anais...* Salvador: [s.n.], 2008. p. 1254–1257.

GAINO, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, T. I. da. Reguladores e observadores fuzzy takagi-sugeno para variar o ângulo da articulação do joelho de um paciente paraplégico. In: *SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, SBAI, 7, 2007, Florianópolis. Anais...* Florianópolis: [s.n.], 2007.

GORDON, A. M.; HUXLEY, A. F.; JULIAN, F. J. The Variation in isometric tension with sarcomere length in vertebrate muscle fibres. *Journal of Physiology*, Paris, n. 184, p. 170–192, 1966.

HATZE, H. *Myocybernetic control models of skeletal muscle*. Pretoria: University of South Africa Press, 1981.

HERZOG, W.; NIGG, B. M. *Biomechanics of musculoskeletal system*. Chichester, England: Wiley & Sons Ltd, 1999.

HILL, A. V. The heat of shortening and the dynamic constant of muscle. *Proceedings of the Royal Society, B*, n. 126, p. 136–195, 1938.

HILL, A. V. *First and last experiments in muscle mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1970.

HUXLEY, A. F. Muscle structure and theories of contraction. *Progress and Biophysical Chemistry*, Elmsford, n. 7, p. 255–318, 1957.

JIN, H. Y. Eigenstructure assignment by proportional-derivative state feedback in singular systems. *System and Control Letters*, Amsterdam, v. 22, n. 1, p. 47–52, 1994.

KIM, D. W.; PARK, J. B.; LEE, H. J.; JOO, Y. H. Discretisation of continuous-time t-s fuzzy system global approach. *Iee Proceedings of the Control Theory Application*, 2006, New York, v. 153, n. 2, p. 237–246, 2006.

KOSAKA, M.; UDA, H.; BAMBIA, E.; SHIBATA, H. Dynamic system identification using a step input. *Journal of Low Frequency Noise Vibration And Active Control*, v. 24, n. 2, p. 125–134, 2005.

LAW, L.; SHIELDS, R. Predicting human chronically paralyzed muscle force: a comparison of three mathematical models. *Journal of Applied Physiology*, Bethesda, n. 100, p. 1027–1036, 2006.

- LEWIS, F. L.; SYRMOS, V. L. A Geometric Theory for Derivative Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 36, n. 9, p. 1111–1116, 1991.
- LIAN, K.-Y.; LIOU, J.-J. Output tracking control for fuzzy systems via output feedback design. *IEEE Transaction on Fuzzy Models*, New York, v. 14, n. 5, p. 628–639, 2006.
- LYNCH, C. L.; POPOVIC, M. R. Closed-loop control of induced muscle contractions. *IEEE Control Systems Magazine*, Michigan, v. 28, n. 2, p. 40–50, 2008.
- MA, X. J.; SUN, Z. Q.; HE, Y. Y. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 1, p. 41–51, 1998.
- MACHADO, E. R. M. D. *Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno*. 190 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.
- MAKSSOUD, H. E.; GUIRAUD, D.; POIGNET, P. Mathematical muscle model for functional electrical stimulation control strategies. In: *PROCEEDINGS OF THE 2004 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTIS & AUTOMATION, 2004, New Orleans. Proceedings of the...* Barcelona: [s.n.], 2004. v. 2, p. 1282–1287.
- MARTIN, P. S. Pesquisadores da Unicamp desenvolveram aparelhos para recuperar paraplégicos. *Jornal da Unicamp*, Campinas, p. 57–61, 1999.
- NAVES, E. L. M. *Modelagem e simulação do controle da postura ereta humana quasi-estática com reflexos neuromusculares*. 187 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2006.
- NETO, J. B. C. *Modelagem de músculo esquelético para controle da posição da perna*. Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2008. 50 p.
- OGATA, K. *Discrete-Time control systems*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- OGATA, K. *Modern control engineering*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1997.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. São Paulo: Prentice Hall, 2004.
- ONLINE, P. Y. L. I'm having trouble with my knees! *PersonalMD Your Lifeline Online*, 2009. Disponível em: <www.personalmd.com>. Acesso em: 18 fev. 2009>.
- PHOTOBUCKET, W. V. Albums. *Photobucket*, 2009. Disponível em: <<http://i5.photobucket.com/albums/y151/Minduintorrad0/78.gif>>. Acesso em: 18 fev. 2009>.
- PIETROBOM, H. C. *Controle de sistemas não-lineares baseados em lmi utilizando modelos fuzzy*. 94 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 1999.

PRADO, T. A.; GAINO, R.; PEREIRA, M. C.; BATISTA, E. A.; CARNEIRO, A. M. Desenvolvimento de uma ferramenta para projeto de controladores pid aplicados em estimulação elétrica neuromuscular funcional. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, CBEB, 21, 2008, Salvador. Anais...* Salvador: [s.n.], 2008. p. 891–894.

RIENER, R.; FUHR, T. Patient-driven control of fes-supported standing up: a simulation study. *IEEE Transaction on Rehabilitation Engineering*, San Diego, v. 6, n. 2, p. 113–124, 1998.

SCHAUER, T.; NEGARD, N. O.; RAISH, J. Controlled Functional Electrical Stimulation (FES) in the Rehabilitation of Spinal Cord Injured Persons and Stroke Patients. *Max-Planck-Gesellschaft*, 2009. Disponível em: <<http://www.de.mpi-magdeburg.mpg.de/newlayout/research/projects/1046/1133>>. Acesso em: 11 fev. 2009>.

SILVA, D. D. S. *Identificação de funções de transferência utilizando como entrada um degrau*. 118 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2008.

SILVA, T. I. D. *Implementação de um Sistema para Geração e Avaliação de Movimentos em Pacientes Hemiplégicos*. 194 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica), Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2007.

SOBRINHO, A. S.; SUZUKI, I.; GERMANOVIX, W.; GAINO, R. Implementação e análise do controle de uma cadeira de rodas através de sopros e sucções. In: *SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, SBAI, 5, 2003, BAURU. Anais...* Bauru: [s.n.], 2003.

SUGIMOTO, L. Paraplégicos submetidos a tratamento com estímulos elétricos começam a readquirir movimentos. *Jornal da Unicamp*, Campinas, p. 12–13, 2004.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and applications to modeling and control. *IEEE Transaction Systems, Man and Cybernetics*, New York, v. 15, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, O. H. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. Canada: A Wiley-Interscience Publication, 2001.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHATAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; COVACIC, M. R. Realimentação da derivada de estados a partir do projeto com realimentação de estados. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 16, 2006, Salvador. Anais...* Salvador: [s.n.], 2006. p. 726–731.

TEIXEIRA, M. C. M.; DEAECTO, G. S.; GAINO, R.; ASSUNÇÃO, E.; CARVALHO, A. A.; FARIAS, U. C. Design of a fuzzy Takagi-Sugeno controller to vary the joint knee angle of paraplegic patients. *Lectures Notes in Computer Science Springer Berlin/Heidelberg*, v. 4234, n. 3, p. 118–126, 2006.

TEIXEIRA, M. C. M.; DEAECTO, G. S.; GAINO, R.; ASSUNÇÃO, E.; CARVALHO, A. A.; FARIAS, U. C. Projeto de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno para variar o ângulo da articulação do joelho. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 16, 2006, Salvador. Anais...* Salvador: [s.n.], 2006. p. 2287–2292.

TEIXEIRA, M. C. M.; DEAECTO, G. S.; GAINO, R.; ASSUNÇÃO, E.; CARVALHO, A. A.; MACHADO, E. R. M. D.; SILVA, T. I. Projeto de um controlador linear para variar o ângulo de articulação do joelho de um paciente paraplégico. In: *BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, DINCON, 6, 2007, São José do Rio Preto. Anais...* São José do Rio Preto, São Paulo: [s.n.], 2007. p. 950–956.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain non-linear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.

VANANTWERP, J. G.; BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, Oxford, v. 10, p. 363–385, 2000.

VIGNES, R. M. *Modeling Muscle Fatigue in Digital Humans*. Dissertação (Master of Science degree in Mechanical Engineering) — University of Iowa, Iowa City, Iowa, 2004.

WANG, W.; CROMPTON, R. H.; CREY, T. S.; GUNTHER, M. M.; LI, Y.; SAVAGE, R.; WILLIAMS. Comparasion of invserse-dynamics musculoesketal models of AL 288-1 Australopithecus afarensis and KNM-WT 15000 Homo ergaster to moder humans, with implications for the evolution of bipedalism. *Jornal of Human Evolution*, London, B, n. 47, p. 453–478, 2004.

WINTER, D. A. *Biomechanics and motor control of human movement*. New York: John Wiley Sons, Inc, 1990.

YAMADA, H. *Strength of biological materials*. Baltimore: Willians & Wilkins, 1970.

ZAJAC, F. E. Muscle and tendon: properties, models scaling and aplication to biomechanics and motor control. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, Boca Raton, v. 17, n. 4, 1989.

APÊNDICE A – Equação expandida em Série de Taylor Obtida Através do Toolbox Symbolic do Matlab

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21} = & (1/J) * (-\lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) - 1/40320 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^8 * \theta_v^8 + \\ & (-34160637173536209/147573952589676412928 * m * g * l * \theta_v^6 + 312325825586616765/755578- \\ & 63725914323419136 * m * g * l * \theta_v^8 + 1/2 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^3 * \theta_v + 1/12 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\ & \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^5 * \theta_v^2 - 1/12 * m * g * l * \theta_v^2 + 14640273074372661/14757395258967641292- \\ & 8 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^9 * \theta_v^7 - 1/48 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^6 * \theta_v^4 - 1/1440 * \lambda * \exp(-1/2 * \\ & E * \pi) * E^8 * \theta_v^6 - 1/2 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^2 + 1/144 * m * g * l * \theta_v^4 - 1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * \\ & E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^8 * \theta_v^5 + 1/6 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^3 + \\ & 312325825586616765/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * \\ & E^{11} * \theta_v^8 + 1/6 * m * g * l - 58561092297490635/4722366482869645213696 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\ & \pi) * E^{10} * \theta_v^8 + 104108608528872255/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{11} * \\ & \theta_v^9 + 1/240 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^7 * \theta_v^5 + 34160637173536209/147573952589676412928 * \\ & \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^9 * \theta_v^6 + 1/12 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^5 * \theta_v^3 - \\ & 19520364099163545/590295810358705651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{10} * \\ & \theta_v^7 - 1/6 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^4 * \theta_v - 1/36 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + \\ & 1/2 * \pi - \omega) * E^6 * \theta_v^3 - 1/4 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^4 * \theta_v^2 + 1/144 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + \\ & 1/2 * \pi - \omega) * E^7 * \theta_v^4) * x_1^2 + \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E * \theta_v + \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \\ & \omega) * E - 1/5040 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^8 * \theta_v^7 - \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + \\ & 1/2 * \pi - \omega) * E^2 * \theta_v + 20821721705774451/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\ & \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{11} * \theta_v^{10} + 1/2 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^3 * \theta_v^2 + 1/24 * \lambda * \\ & \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^5 * \theta_v^4 + 14640273074372661/590295810358705651712 * \\ & \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^9 * \theta_v^8 - 1/120 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\ & \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^6 * \theta_v^5 - 6506788033054515/2361183241434822606848 * \lambda * \\ & \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{10} * \theta_v^9 + 1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^7 * \theta_v^6 - 1/6 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^4 * \theta_v^3 + \\
& 1892883791434041/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{11} * x_1^{11} - 1/720 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * E^6 * \theta_v^6 + 1892883791434041/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * \\
& E * \pi) * E^{11} * \theta_v^{11} - 1/24 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^4 * \theta_v^4 + 1/6 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^3 * \theta_v^3 - \\
& 1/2 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^2 * \theta_v^2 + 1/2 * m * g * l * \theta_v^2 - 1/24 * m * g * l * \theta_v^4 + 1/120 * \lambda * \exp(-1/2 * \\
& E * \pi) * E^5 * \theta_v^5 + 1/720 * m * g * l * \theta_v^6 - 1301357606610903/4722366482869645213696 * \\
& \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} * \theta_v^{10} - 14640273074372661/590295810358705651712 * m * \\
& g * l * \theta_v^8 + (1626697008263629/590295810358705651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^9 + \\
& 20821721705774451/75557863725914323419136 * m * g * l * \theta_v + 104108608528872255/755578- \\
& 63725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{11} * \theta_v^2 + 20821721705774451/7555786372591432- \\
& 3419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{11} * \theta_v - 6506788033054515/2361183241434- \\
& 822606848 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} * \theta_v - 1301357606610903/4722366482869645213696 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{10} * x_1^9 + 20821721705774451/755578637259143234191- \\
& 36 * m * g * l * \theta_v^{10} + 1626697008263629/590295810358705651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& E^9 * \theta_v^9 - m * g * l + (-58561092297490635/4722366482869645213696 * \lambda * \exp(-1/2 * \\
& E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{10} * \theta_v^2 - 1/5040 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^8 * \theta_v - \\
& 14640273074372661/590295810358705651712 * m * g * l * \theta_v - 1/40320 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^8 + 1/5040 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^7 + 14640273074372661/5902958103587- \\
& 05651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^9 * \theta_v - 19520364099163545/5902958- \\
& 10358705651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} * \theta_v^3 + 312325825586616765/755578637259143234- \\
& 19136 * m * g * l * \theta_v^3 + 14640273074372661/147573952589676412928 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& E^9 * \theta_v^2 + 312325825586616765/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \\
& \pi - \omega) * E^{11} * \theta_v^3 + 312325825586616765/37778931862957161709568 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& E^{11} * \theta_v^4) * x_1^7 + (14640273074372661/147573952589676412928 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + \\
& 1/2 * \pi - \omega) * E^9 * \theta_v^2 + 34160637173536209/147573952589676412928 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& E^9 * \theta_v^3 - 19520364099163545/590295810358705651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \\
& \pi - \omega) * E^{10} * \theta_v^3 + 1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^7 * \theta_v + 1/5040 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + \\
& 1/2 * \pi - \omega) * E^7 - 1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^6 - 1/1440 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^8 * \theta_v^2 + \\
& 1/5040 * m * g * l + 312325825586616765/37778931862957161709568 * m * g * l * \theta_v^4 - 1/5040 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^8 * \theta_v - 14640273074372661/147573952589676412928 * \\
& m * g * l * \theta_v^2 + 312325825586616765/37778931862957161709568 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + \\
& 1/2 * \pi - \omega) * E^{11} * \theta_v^4 - 136642548694144815/2361183241434822606848 * \lambda * \exp(-1/2 * \\
& E * \pi) * E^{10} * \theta_v^4 + 437256155821263471/37778931862957161709568 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& E^{11} * \theta_v^5) * x_1^6 + (-1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^6 - 1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * \\
& E * \pi) * E^8 * \theta_v^3 + 437256155821263471/37778931862957161709568 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{11} * \theta_v^5 - 34160637173536209/147573952589676412928 * m * g * l * \theta_v^3 - \\
& 81985529216486889/1180591620717411303424 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} * \theta_v^5 + 1/720 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^7 * \theta_v + 102481911520608627/295147905179352825856 * \\
& \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^9 * \theta_v^4 + 437256155821263471/37778931862957161709568 * m * \\
& g * l * \theta_v^5 - 136642548694144815/2361183241434822606848 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + \\
& 1/2 * \pi - \omega) * E^{10} * \theta_v^4 + 1/720 * m * g * l * \theta_v + 1/240 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^7 * \theta_v^2 + \\
& 34160637173536209/147573952589676412928 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * \\
& E^9 * \theta_v^3 - 1/120 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^6 * \theta_v - 1/1440 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \\
& \pi - \omega) * E^8 * \theta_v^2 + 437256155821263471/37778931862957161709568 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& E^{11} * \theta_v^6 + 1/120 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^5 * x_1^5 + (-1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \\
& \pi - \omega) * E^8 * \theta_v^3 + 437256155821263471/37778931862957161709568 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{11} * \theta_v^6 - 1/48 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^6 * \theta_v^2 - 1/576 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\
& \pi) * E^8 * \theta_v^4 - 136642548694144815/2361183241434822606848 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} * \\
& \theta_v^6 - 1/24 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^4 + 312325825586616765/37778931862957161709568 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{11} * \theta_v^7 + 1/24 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^5 * \theta_v - 1/120 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\
& \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^6 * \theta_v - 1/120 * m * g * l + 1/120 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * \\
& E^5 - 81985529216486889/1180591620717411303424 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \\
& \omega) * E^{10} * \theta_v^5 + 1/240 * m * g * l * \theta_v^2 + 102481911520608627/295147905179352825856 * \\
& \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^9 * \theta_v^4 + 1/240 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\
& \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^7 * \theta_v^2 + 102481911520608627/295147905179352825856 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * E^9 * \theta_v^5 + 437256155821263471/37778931862957161709568 * m * g * l * \\
& \theta_v^6 - 102481911520608627/295147905179352825856 * m * g * l * \theta_v^4 + 1/144 * \lambda * \exp(-1/2 * \\
& E * \pi) * E^7 * \theta_v^3 * x_1^4 + (1/144 * m * g * l * \theta_v^3 - 1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^8 * \theta_v^5 + \\
& 312325825586616765/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{11} * \theta_v^8 - 1/36 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * E^6 * \theta_v^3 - 102481911520608627/295147905179352825856 * m * g * l * \theta_v^5 - \\
& 1/24 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^4 + 312325825586616765/37778931862957161- \\
& 709568 * m * g * l * \theta_v^7 + 1/24 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^5 * \theta_v - \\
& 136642548694144815/2361183241434822606848 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{10} * \\
& \theta_v^6 + 312325825586616765/37778931862957161709568 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \\
& \omega) * E^{11} * \theta_v^7 - 1/6 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^4 * \theta_v - 1/576 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * \\
& E^8 * \theta_v^4 + 1/12 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^5 * \theta_v^2 + 34160637173536209/147573952589676412928 * \\
& \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^9 * \theta_v^6 - 1/48 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^6 * \\
& \theta_v^2 + 1/6 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^3 + 1/144 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \\
& \omega) * E^7 * \theta_v^3 + 102481911520608627/295147905179352825856 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + \\
& 1/2 * \pi - \omega) * E^9 * \theta_v^5 + 1/144 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^7 * \theta_v^4 - 1/24 * m * g * l * \theta_v -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 19520364099163545/590295810358705651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} * \theta_v^7 * x_1^3 + (\lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * E - 1/1440 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^8 * \theta_v^6 - 1/48 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^6 * \theta_v^4 + 1/240 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^7 * \\
& \theta_v^5 + 104108608528872255/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \\
& \omega) * E^{11} * \theta_v^9 - 1/4 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^4 * \theta_v^2 + 1/2 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^3 * \theta_v - 58561092297490635/4722366482869645213696 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\
& \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{10} * \theta_v^8 + 14640273074372661/147573952589676412928 * \lambda * \exp(-1/2 * \\
& E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^9 * \theta_v^7 + 20821721705774451/75557863725914323419136 * \lambda * \\
& \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{11} * \theta_v^{10} - 1/5040 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^8 * \theta_v^7 - 1/120 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \\
& \pi) * E^6 * \theta_v^5 + 14640273074372661/590295810358705651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^9 * \theta_v^8 - \\
& \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^2 * \theta_v - 1/6 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^4 * \theta_v^3 + 1/2 * m * g * l * \theta_v - 1/12 * m * \\
& g * l * \theta_v^3 + 1/240 * m * g * l * \theta_v^5 - 14640273074372661/147573952589676412928 * m * g * l * \theta_v^7 + \\
& 104108608528872255/75557863725914323419136 * m * g * l * \theta_v^9 + 1/24 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * \\
& E^5 * \theta_v^4 + 1/720 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^7 * \theta_v^6 + 1/12 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * \\
& E^5 * \theta_v^3 + 1/2 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^3 * \theta_v^2 - 6506788033054515/2361183241434822606848 * \\
& \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} * \theta_v^9 - 1/2 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^2 * x_1 + \\
& (1892883791434041/75557863725914323419136 * m * g * l + 20821721705774451/7555786372- \\
& 5914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{11} * \theta_v - 1301357606610903/472236648286964521369- \\
& 6 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} + 1892883791434041/75557863725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * \\
& E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{11}) * x_1^{10} + 1/5040 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^7 * \theta_v^7 + \\
& (104108608528872255/75557863725914323419136 * m * g * l * \theta_v^2 + 14640273074372661/59029- \\
& 5810358705651712 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^9 * \theta_v - 58561092297490635/472236648286964521- \\
& 3696 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{10} * \theta_v^2 + 104108608528872255/75557863725914323419136 * \\
& \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{11} * \theta_v^2 - 1/40320 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^8 - \\
& 6506788033054515/2361183241434822606848 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^{10} * \\
& \theta_v - 1626697008263629/590295810358705651712 * m * g * l + 312325825586616765/75557863- \\
& 725914323419136 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * E^{11} * \theta_v^3 + 1626697008263629/5902958103587056517- \\
& 12 * \lambda * \exp(-1/2 * E * \pi) * (\theta_v + 1/2 * \pi - \omega) * E^9 * x_1^8)
\end{aligned}$$

APÊNDICE B – Programa Usando Funções do Toolbox Symbolic do Matlab

Programa para cálculo da matriz que contém a dinâmica do vetor de estados e a dinâmica do vetor do erro. No programa, é descrito os modelos locais, as funções de pertinência, os ganhos do regulador e observador. Executando esse programa no Matlab, e usando o comando *simple(ans)*, chega-se ao resultado usado para a simulação.

```
deltaA=max( $\tilde{f}_{21}$ );
deltaB=min( $\tilde{f}_{21}$ );
A1=[0 1 0; deltaA (-B/J) 1/J; 0 0 -1/tal];
A2=[0 1 0; deltaB (-B/J) 1/J; 0 0 -1/tal];
B1=[0 0 (G/tal)]';
B2=[0 0 (G/tal)]';
C1=[1 0 1];
C2=[1 0 1];
syms alfa1 alfa2
alfa1*alfa1*[A1-B1*F1 B1*F1; zeros(3,3) A1-H1*C1]+alfa1*alfa2*[A1-B1*F2 B1*F2;
zeros(3,3) A1-H1*C2]+alfa2*alfa1*[A2-B2*F1 B2*F1; zeros(3,3) A2-H2*C1]+
alfa2*alfa2*[A2-B2*F2 B2*F2; zeros(3,3) A2-H2*C2]
```