

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR E CONTROLE DE SISTEMAS
ELETROMECAÑICOS EM MACRO E MICRO ESCALAS

Autora: Dailhane Grabowski Bassinello

Orientador: Prof. Titular José Manoel Balthazar

BAURU
2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR E CONTROLE DE SISTEMAS
ELETROMECAÑICOS EM MACRO E MICRO ESCALAS

Autora: Dailhane Grabowski Bassinello

Orientador: Prof. Titular José Manoel Balthazar

Curso: Engenharia Elétrica

Área de concentração: Automação

Linha de pesquisa: Mecatrônica

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Bassinello, Dailhane Grabowski.

Comportamento Dinâmico não linear e Controle de sistemas eletromecânicos em macro e micro escalas / Dailhane Grabowski Bassinello, 2011.

84 f. il.

Orientador: José Manoel Balthazar.

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2011

1. Sistemas Eletromecânicos. 2. Sistemas não lineares e caos 2. Controle utilizando as equações de Riccati dependentes do estado. 3. Controle ótimo. 4. Técnica de Perturbação. I Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Comportamento Dinâmico não linear e Controle de sistemas eletromecânicos em macro e micro escalas.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado DE DAILHANE GRABOWSKI BASSINELLO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 27 dias do mês de junho do ano de 2011, às 14:00 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR do(a) Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação / Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP Rio Claro, Prof. Dr. ANGELO MARCELO TUSSET do(a) Departamento de Engenharias / Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de DAILHANE GRABOWSKI BASSINELLO, intitulada "COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR E CONTROLE DE SISTEMAS ELETROMECÂNICOS EM MACRO E MICRO ESCALAS". Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovada. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR



Prof. Dr. ANGELO MARCELO TUSSET



Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Leocadia e Joanino, pelo apoio, amor e carinho que sempre me dedicaram.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Manoel Balthazar pela confiança, apoio e dedicação com que me orientou e auxiliou no desenvolvimento do trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Angelo Marcelo Tusset, pela amizade, incentivo, apoio e sempre estar pronto a me ajudar.

Agradeço ao prof. Dr. Bento Rodrigues Pontes Jr. pelo conhecimento passado e apoio.

Agradeço aos meus colegas de mestrado pelos momentos alegres que compartilhamos.

A todos que por ventura não foram mencionados e de forma direta ou indireta colaboraram com este trabalho.

“O êxito da vida não se mede pelo caminho que você conquistou, mas sim pelas dificuldades que superou no caminho.”

Abraham Lincoln

Bassinello, D. G., **Comportamento Dinâmico não linear e Controle de sistemas eletromecânicos em macro e micro escalas**. 2011. 84f, Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Univ. Estadual Paulista – UNESP, Bauru, 2011.

RESUMO

Neste trabalho é realizada a análise do comportamento dinâmico não linear, caótico e controle, de um sistema macro eletromecânico e um sistema micro eletromecânico, e esta dividida em duas partes:

A primeira parte desta dissertação trata – se de um sistema eletromecânico de 2º ordem com um único grau de liberdade em escala macro. Tal sistema é constituído de um oscilador mecânico composto de massa, mola não linear e amortecedor acoplado a um circuito elétrico, este composto uma resistência em série com um atuador capacitivo e um magnético variável. O objetivo desta análise é estudar o comportamento dinâmico do modelo eletromecânico em estado de equilíbrio, e verificar como as simplificações das não linearidades podem alterar a resposta do sistema. São aplicadas duas técnicas de controle ativo o controle linear *feedback* e o controle utilizando a equação de Riccati dependente do estado, como ferramenta para obter as oscilações em uma órbita periódica desejada, e com a finalidade de realizar uma comparação entre a eficiência destes dois métodos, para este sistema.

Na segunda parte é analisado o comportamento dinâmico de um sistema micro eletromecânico “MEMS”, representado por um micro-acelerômetro modelado por uma equação diferencial não-linear de segunda ordem. Este sistema considera duas placas fixas e uma placa móvel entre elas, a qual é aplicada uma tensão $V(t)$, tais placas têm as funções de fornecer eletrodos para formar um capacitor e armazenar energia elétrica, e de fornecer elasticidade ou rigidez mecânica. Os resultados são obtidos através de simulações numéricas, sendo possível observar que para uma determinada faixa de parâmetros utilizados o sistema apresenta um comportamento indesejável. Através do uso da técnica do controle ótimo foi possível levar o sistema a uma orbita periódica desejada. Para o sistema com parâmetros adimensionais é possível observar um comportamento caótico. Como em geral, não é possível obter – se soluções analíticas exatas para equações, buscou – se uma solução aproximada obtida através do método de perturbação, o (Método das Múltiplas Escalas). Com o objetivo de controlar o sistema para atingir uma orbita desejada, são utilizados dois controles que

utilizam a realimentação de estados, o controle SDRE e o controle Ótimo LQR. Pode ser observado que após a aplicação das duas técnicas de controle utilizadas, estas levaram o sistema de uma condição inicial qualquer para uma órbita desejada, utilizando praticamente o mesmo sinal de controle e no mesmo período de tempo.

Palavras – chave: Sistemas Eletromecânicos. Sistemas não lineares e caos. Controle utilizando as equações de Riccati dependentes do estado. Controle ótimo. Método de Perturbação.

Bassinello, D. G., **Comportamento Dinâmico não linear e Controle de sistemas eletromecânicos em macro e micro escalas**. 2011. 84f, Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Univ. Estadual Paulista – UNESP, Bauru, 2011.

ABSTRACT

This work presented the analysis of the dynamic behavior of nonlinear and chaotic control, of electromechanical systems in macro and micro scales, and is divided into two parts.

The first part of this work is an electromechanical system in macro scale of second order with of a single degree of freedom. This system consists of a mechanical oscillator consisting of mass, spring nonlinear and damper, coupled to an electric circuit, this compound a resistance in series with a capacitive actuator and a magnetic variable. The purpose of this analysis is to study the dynamic behavior of electromechanical model in equilibrium, and see how the simplifications of nonlinearities can change the system response. Two techniques are applied to active control, linear feedback control, and control using the Riccati equation state-dependent, as a tool for the oscillations in a desired periodic orbit, and with the purpose to make a comparison between the effectiveness of two methods for this system.

In the second part we analyze the dynamic behavior of a micro electromechanical system MEMS, represented by a micro-accelerometer is modeled by a nonlinear differential equation of second order. This system takes two fixed plates and a movable plate between them, which is applied a voltage $V(t)$, such boards have the function of providing electrodes to form a capacitor or store electrical energy, and providing mechanical stiffness or elasticity. Results are obtained through numerical simulations. As can be seen that for a certain range of parameters the system presents an undesirable behavior. Through the using the technique of optimal control could cause the system to a desired periodic orbit. For the system with dimensionless parameters one can observe a chaotic behavior. As in general it is not possible to obtain exact analytical solutions to equations, sought an approximate solution obtained by the method of perturbation, the (Method of Multiple Scales). Aiming to control the system to achieve an orbiter, two controls are used to using state feedback, the SDRE control and LQR Optimal Control. Through numerical simulations, it was found

that for certain parameters the system has a chaotic behavior and that the two control groups brought the system to an initial condition for any desired orbits, using almost the same control signal and at the same time.

Keywords: Electromechanical Systems. Nonlinear systems and chaos. Control using the Riccati equations of state dependent. Optimal control. Perturbation Method.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Sistema Micro Eletromecânico.....	3
1.2	Objetivos do Trabalho.....	5
1.3	Organização do Trabalho.....	6
	PRIMEIRA PARTE.....	8
2	DINÂMICA NÃO LINEAR DE UM SISTEMA ELETROMECAÂNICO ACOPLADO COM INDUTÂNCIA VARIÁVEL	9
2.1	Equação Governante do Movimento Mecânico.....	10
2.2	Equação Governante do Circuito Elétrico.....	10
2.3	Acoplamento do Sistema Eletromecânico.....	12
2.4	Simulações Numéricas.....	13
3	PROJETO DE CONTROLE.....	17
3.1	Aplicação do Controle por Realimentação de Estados ao Sistema Eletromecânico.....	18
3.2	Controle Utilizando a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE)...	24
3.3	Análise da Ocorrência de Transferência de Energia no Sistema Eletromecânico em Escala Macro.....	29
	SEGUNDA PARTE.....	32
4	SISTEMA MICRO ELETROMECAÂNICO.....	33

4.1	Modelo Matemático do Modelo Micro Eletromecânico.....	34
4.2	Simulação Numérica do Sistema Micro Eletromecânico Com Comportamento Não Linear.....	37
4.3	Simulação Numérica do Sistema Micro Eletromecânico Com Comportamento Caótico.....	41
5	SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA POR MEIO DO MÉTODO DE PERTURBAÇÃO PARA O SISTEMA MICRO ELETROMECAÂNICO.....	45
6	PROJETO DE CONTROLE.....	54
6.1	Controle Por Realimentação de Estados Aplicado ao Sistema Micro Eletromecânico.....	54
6.2	Controle do Deslocamento do Sistema Micro Eletromecânico Com Comportamento Caótico.....	58
6.2.1	Controle do Deslocamento Por Meio de Realimentação de Estados.....	59
6.2.2	Controle Utilizando a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE)...	63
7	CONCLUSÃO.....	68
	CONCLUSÃO DA PRIMEIRA PARTE.....	68
	CONCLUSÃO DA SEGUNDA PARTE.....	69
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	70
	ANEXO I – CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS.....	73
	ANEXO 2 - CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES ATRAVES DO METODO DAS EQUAÇÕES DE RICCATI DEPENDENTES DO ESTADO.....	77
	ANEXO III – MÉTODO DE MÚLTIPLAS ESCALAS.....	80
	SÚMULA CURRICULAR.....	83

LISTA DE FIGURAS

1.1 Mecatrônica: a integração sinérgica de diferentes disciplinas.....	1
1.2 Instruções de processamento de sinal e estrutura essencial dos sistemas eletromecânicos.....	2
2.1 Sistema Eletromecânico Acoplado.....	9
2.2 Retrato de fase para o circuito elétrico acoplado, onde é possível observar o comportamento dinâmico não linear.....	15
2.3 Retrato de fase para o sistema mecânico acoplado, onde é possível observar o comportamento dinâmico não linear.....	15
2.4 Deslocamento no tempo, x_1 em preto para o sistema mecânico acoplado, e x_3 em cinza para o circuito elétrico acoplado.....	16
3.1 Diagrama de blocos do controlador proposto.....	18
3.2 Deslocamento de x_1 e x_3 para o sistema com controle	22
3.3 Diagrama de fase para o sistema com controle.....	23
3.4 $L(t)$ calculado na trajetória ótima.....	23
3.5 Descolamento de x_1 e x_3 para o sistema com controle (SDRE).....	28
3.6 Diagrama de fase para o sistema com controle (SDRE).....	28
3.7 Energia instantânea para o sistema sem controle	30
3.8 Energia instantânea para o sistema com controle por realimentação de estados.....	30
3.9 Energia instantânea para o sistema com controle (SDRE).....	31

4.1 Sistema micro eletromecânico.....	33
4.2 Deslocamento de x_I t=0:10.....	38
4.3 Deslocamento de x_I (b) t=100:102.....	39
4.4 Deslocamento de x_I t=0:500 s.....	39
4.5 Diagrama de fase 10s.....	40
4.6 Diagrama de fase 1000s.....	40
4.7 Deslocamento de u_I para o sistema micro eletromecânico.....	42
4.8 Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico.....	42
4.9 Seção de Poincaré para o sistema micro eletromecânico.....	43
4.10 Expoente de Lyapunov para o sistema micro eletromecânico.....	44
5.1 Deslocamento de u_1 para o sistema micro eletromecânico	46
5.2 Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico.....	47
5.3 Expoente de Lyapunov para o sistema micro eletromecânico.....	48
5.4 Retrato de fase para a solução do sistema micro eletromecânico.....	52
5.5 Solução do sistema com comportamento caótico em preto, e solução analítica por meio da aplicação do método de múltiplas escalas.....	53
6.1 Deslocamento de x_1 para o sistema micro eletromecânico controlado.....	57
6.2 Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico controlado.....	58
6.3 Deslocamento de u_I para o sistema micro eletromecânico com controle.....	62
6.4 Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico com controle.....	62
6.5 Função $L(T)$ para o sistema micro eletromecânico com controle	63
6.6 Deslocamento de u_I para o sistema micro eletromecânico com controle (SDRE)....	65
6.7 Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico com controle (SDRE).....	65
6.8 Sinal de controle para o controle Ótimo e o controle SDRE.....	66

6.9 Deslocamento de u_1 sem controle e considerando o controle Ótimo ($U = u_r + \tilde{u}$) e o controle SDRE (u_r).....67

LISTA DE TABELAS

3.1 Parâmetros utilizados nas simulações numéricas do sistema eletromecânico em escala macro.....	14
4.1 Parâmetros utilizados na simulação do sistema micro eletromecânico com comportamento não linear	38
3.3 Parâmetros utilizados na simulações numéricas do sistema micro eletromecânico com comportamento caótico.....	41

1 INTRODUÇÃO

Atualmente pode ser notado um crescente desenvolvimento de pesquisas, com o intuito de integrar sistemas mecânicos como os atuadores e sensores na microeletrônica, formando um sistema global e inseparável. Tais sistemas onde existe a interação entre componentes mecânicos e elétricos ou eletrônicos, são chamados de sistemas mecatrônicos. A palavra mecatrônica foi provavelmente citada pela primeira vez por um engenheiro japonês em 1969 [Kyura e Oho, 1969]. Em *IEEE / ASME Transactions on Mechatronics* preliminarmente uma definição é dada: onde a mecatrônica é definida como a integração sinérgica da engenharia mecânica com eletrônica e controle inteligente por computador no projeto e fabricação de produtos e processos industriais [Harashima et al, 1996].

Todas as definições concordam que a mecatrônica é uma área interdisciplinar, em que as seguintes disciplinas agem em conjunto Figura 1:

- Sistemas mecânicos: elementos mecânicos, máquinas, mecânica de precisão;
- Os sistemas eletrônicos: microeletrônica, eletrônica de potencia, sensores e tecnologia de atuadores;
- A tecnologia da informação: teoria de sistemas, automação, engenharia de software, inteligência artificial.

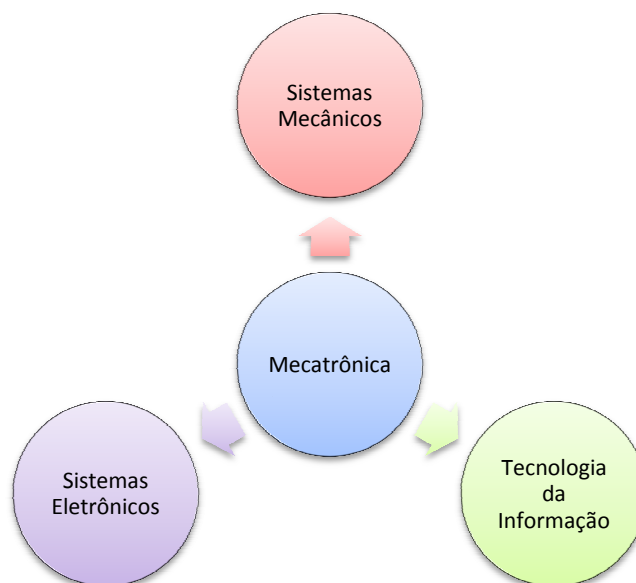


Fig. 1.1 – Mecatrônica: a integração sinérgica de diferentes disciplinas.

Interações entre estes diferentes domínios elétricos e mecânicos são causados por mecanismos de transformação elétrica, magnética ou mecânica. Na figura 1.2 é possível notar a reversibilidade dos sentidos no processamento de sinais mecânicos em elétricos e vice-versa, sendo possível observar a estrutura essencial dos sistemas eletromecânicos.

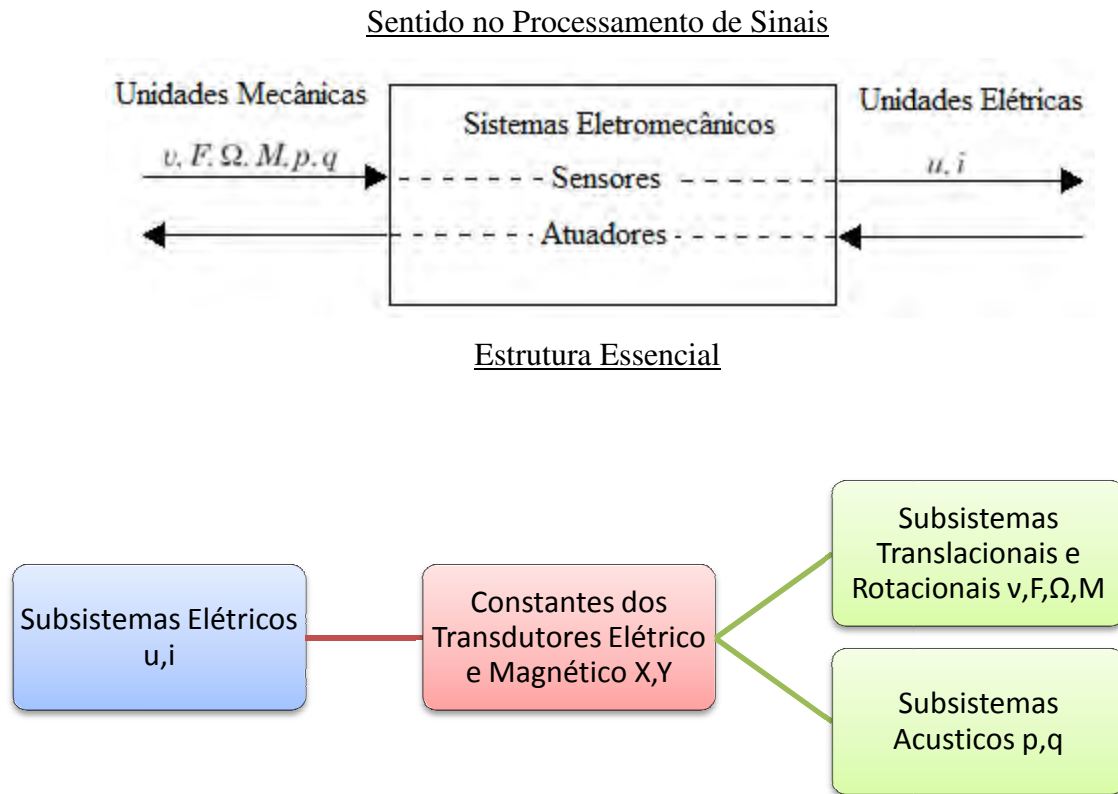


Figura. 1.2 – Instruções de processamento de sinal e estrutura essencial dos sistemas eletromecânicos [Bishop, 2006].

As principais aplicações dos sistemas eletromecânicos são realizadas sob a forma de equipamentos, conjuntos e componentes integrados em elementos de acionamentos, como por exemplo, alimentação de pequenos motores e sistemas de posicionamento e sistemas de sensores, como sensores individuais e conjuntos de sensores, bem como no acoplamento direto entre sensor, atuador e sistemas com processamento de sinal integrado. A redução das dimensões dos sistemas eletromecânicos, com melhoria simultânea da escala de integração tem sido possível graças à micro tecnologia e tecnologia de micro sistemas.

1.1 Sistema Micro Eletromecânico

Recentemente, a emergente tecnologia de sistemas micro eletromecânicos “MEMS” tem registado um rápido progresso na fabricação e testes de novos dispositivos, com a criação de aplicações e propostas inovadoras de novas tecnologias. Devido ao fato de que podem ser fabricados usando técnicas de produção e infra estrutura da indústria de semicondutores, significa que estes podem ser produzidos a baixo custo e em grandes quantidades, tornando a sua comercialização bastante atraente, devido ao seu leve peso, tamanho reduzido, baixo consumo de energia e durabilidade. Existem vários dispositivos de MEMS que foram utilizados com sucesso em diversas áreas da engenharia e da ciência como cabeçotes de impressão a jato de tinta, micro bombas, matrizes de exposição da projeção, e acelerômetros usados em *air bag* são apenas alguns exemplos de aplicações de dispositivos MEMS. Infelizmente, as ferramentas de simulação de MEMS não acompanharam o ritmo deste crescimento da tecnologia [Senturia et al., 1997]. Dispositivos de MEMS muitas vezes ainda são projetados por tentativas e erros. A principal razão deste fato se deve ao processo de concepção de um dispositivo MEMS ser uma tarefa multidisciplinar, que envolve domínios inerentes ao acoplamento de energia, tais como as forças eletrostáticas térmicas e mecânicas.

A área de MEMS explodiu notavelmente a demanda por filtros com alta frequência de ressonância aumentando rapidamente o fator de qualidade. Ressonadores micro eletromecânicos foram propostos em meados dos anos noventa como uma alternativa viável para atuadores do tipo *comb - drive* e outros filtros convencionais de grande porte . Há uma série de métodos de atuação que podem ser utilizados para acionar ressonadores, assim como os mecanismos térmicos, piezelétricos, eletromagnéticos e eletrostáticos esta ultima sendo o método mais utilizado devido a sua simplicidade e alta eficiência. [Varadan et al., 2003].

É possível notar um grande interesse em problemas envolvam sistemas eletromecânicos acoplados. Sabe-se que muitas práticas em dispositivos eletromecânicos podem ser modeladas por meio de equações acopladas, possibilitando sua compreensão no contexto da mecânica simples como massas concentradas e circuitos elétricos e magnéticos [Bassinello et al., 2011]. Um grande número de cálculos, simulações numéricas e experimentos foram realizados em sistemas de osciladores acoplados que podem fornecer

modelos fundamentais dos problemas dinâmicos em várias áreas, como química, sistemas biológicos e eletromecânica que podem ser encontrados em [Balthazar *et al.*, 2010]. Na maior parte desses estudos, a modelagem matemática é realizada com base na teoria lagrangeana, e obtém soluções no espaço de estados. O caos e mecanismos de rotas para o caos têm recebido maior atenção, pois eles definem a forma como o sistema perde estabilidade perto de um ponto de bifurcação. Muitas vezes, tal investigação tem sido orientada para a descoberta dos mecanismos que controlam o comportamento não linear próximo à região de ressonância, com o objetivo de obter um comportamento desejado dentro de um domínio de instabilidade dos parâmetros escolhidos. Pode ser observado um interesse significativo no controle dos sistemas não lineares, exibindo um comportamento caótico. Várias técnicas podem ser aplicadas a uma ampla gama de problemas. Uma das técnicas é o controle por realimentação, que foi originalmente desenvolvido para aplicação em sistemas lineares, e é utilizada em vários trabalhos inclusive em sistemas que apresentam dinâmica não linear [Tusset *et al.*, 2006]. Recentemente foi proposto por [Rafikov e Balthazar, 2008], a aplicação da técnica de controle por realimentação em sistemas não lineares. Em Chavarette *et al.*, 2009, foi utilizada a técnica de controle ótimo linear para reduzir oscilações não lineares (caóticas) dos sistemas, para uma órbita periódica.

As não linearidades estão presentes em dispositivos eletromecânicos, onde há uma transferência de energia elétrica a partir de sistemas mecânicos e vice-versa. Em sistemas micro eletromecânicos (MEMS), as não linearidades podem surgir de várias fontes, como mecanismos de mola e de amortecimento, e elementos dos circuitos resistivos, indutivos e capacitivos. Um exemplo interessante da não linearidade em sistemas MEMS foi demonstrado em [Tusset *et al.*, 2011], onde é possível observar que a força eletrostática não linear, depende do tamanho do *gap* entre os dois eletrodos. Quando um dos eletrodos é movimentado, a força é não linear e depende do tempo. Portanto, a equação governante do movimento do MEMS é uma equação altamente não linear paramétrica.

A seguir são descritos os objetivos gerais e específicos desta dissertação.

1.2 Objetivos do Trabalho

Os objetivos gerais deste trabalho são:

Obter uma modelagem matemática para sistemas eletromecânicos, analisando o seu comportamento dinâmico não linear, formulando uma síntese de controle linear ótimo em sistemas eletromecânicos em macro e micro escalas.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

1. Analisar o comportamento dinâmico não linear de um sistema eletromecânico com indutância variável, realizando uma comparação entre duas técnicas de controle, o controle ótimo por realimentação de estados e o controle utilizando a equação de Riccati dependente do estado, são aplicadas ao sistema eletromecânico com a finalidade de obter um orbita periódica desejada;
2. Analisar o comportamento dinâmico de um sistema micro eletromecânico não linear, utilizando – se uma técnica de controle ótimo por realimentação de estados, com a finalidade de obter um orbita periódica desejada;
3. Analisar o comportamento caótico de um sistema micro eletromecânico, aplicando uma técnica de perturbação. Realizar uma comparação entre o controle ótimo e controle utilizando a equação de Riccati dependente do estado (SDRE), analisando sua eficiência.

1.3 Organização do Trabalho

Para atingir os objetivos propostos, esta dissertação está dividida em duas partes, como descrito a seguir:

- Capítulo 1: Apresenta – se uma breve descrição sobre a área da pesquisa e sua importância, a pesquisa bibliográfica trata – se de sistemas eletromecânicos em micro e macro escalas;

Primeira Parte

- Capítulo 2: Neste capítulo é demonstrado o sistema eletromecânico com indutância em escala macro, assim como a modelagem matemática e a dinâmica do problema e são realizadas as simulações numéricas;
- Capítulo 3: É realizada uma comparação entre duas técnicas de controle, sendo estas o controle ótimo por realimentação de estados e o controle utilizando a equação de Riccati dependente do estado, analisando a sua eficiência com o objetivo de obter uma órbita periódica desejada. Ainda neste capítulo é realizada uma análise da ocorrência de transferência de energia no sistema eletromecânico em escala macro;

Segunda Parte

- Capítulo 4: Neste capítulo é demonstrado o sistema micro eletromecânico, assim como a modelagem matemática e a dinâmica do problema e são realizadas as simulações numéricas;
- Capítulo 5: Aplicação do método de perturbação, com a finalidade de obter solução analítica aproximada para o sistema micro eletromecânico;
- Capítulo 6: É aplicada a técnica de controle por realimentação de estados ao sistema micro eletromecânico com o comportamento não linear. Para o sistema micro eletromecânico com comportamento caótico é realizada uma comparação entre duas técnicas de controle, sendo estas o controle ótimo por realimentação de estados e o controle utilizando a equação de Riccati dependente do estado,

analisando a sua eficiência com o objetivo de obter uma órbita periódica desejada determinada pelo método de múltiplas escalas;

- Capítulo 7: São apresentadas as conclusões;
- Referências Bibliográficas;
- Anexo I – Controle Por Realimentação de Estados;
- Anexo II – Controle de Sistemas Não Lineares Através do Método das Equações de Riccati Dependentes do Estado;
- Anexo III: Método de Múltiplas Escalas;
- Sumula Curricular.

A seguir é apresentada uma breve introdução da primeira parte desta dissertação.

PRIMEIRA PARTE

A primeira parte desta dissertação é dedicada à realização da modelagem matemática de um sistema eletromecânico em escala macro. Análise do comportamento dinâmico e simulações numéricas. É também realizado o projeto de controle para o sistema eletromecânico, com a finalidade de controlar o sistema, são propostas duas técnicas de controle, sendo estas o controle ótimo por realimentação de estados e o controle utilizando a equação de Riccati dependente do estado.

A seguir é realizada a modelagem matemática do sistema eletromecânico em escala macro.

2. DINÂMICA NÃO LINEAR DE UM SISTEMA ELETROMECAÂNICO ACOPLADO COM INDUTÂNCIA VARIÁVEL

O sistema eletromecânico mostrado na Figura 2.1 é um oscilador mecânico composto de mola, massa e amortecedor não linear acoplado a um circuito elétrico, trata-se de um atuador magnético em série com um atuador capacitivo e resistência, tanto o atuador indutivo como o capacitivo são consideradas variáveis e possuem características não lineares. As variáveis do problema são: $x(t)$ a posição para o sistema mecânico e $Q(t)$ a carga do sistema elétrico.

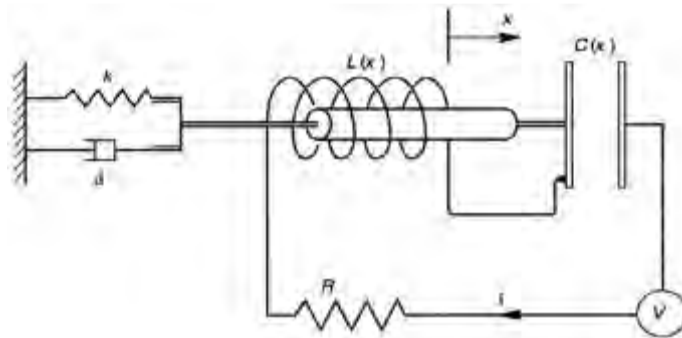


Fig. 2.1 – Sistema Eletromecânico Acoplado [Moon, 2000].

A seguir, obtém – se as equações governantes do movimento para o sistema eletromecânico.

2.1 Equação Governante do Movimento Mecânico

Para o conjunto da parte mecânica do sistema, a massa é considerada como uma constante, assim como o amortecimento. A rigidez da mola também é um parâmetro importante, que pode ser afetado por fenômenos termo elástico e não linearidades, assume – se então que a mola é não linear e representada por:

$$k = k_1x + k_3x^3 \quad (2.1)$$

As equações governantes do movimento são:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = F_m - F_e \quad (2.2)$$

Onde: m é a massa medida em Kg , c é o coeficiente de dissipação da mola na medida Ns/m , k_l coeficiente que representa a componente linear da mola na medida N/m , k_{nl} é o coeficiente que representa o componente da mola não linear medido em N/m , F_m representa a força magnética, F_e representa a força elétrica.

2.2 Equação Governante do Circuito Elétrico

O circuito elétrico, utilizado para acionar o oscilador mecânico é um circuito do tipo RLC em série, com fonte de tensão senoidal $V_{ac} \cos(\omega t)$. A ligação entre o sistema mecânico e o elétrico é realizada por uma força magnética não linear F_m , que é gerada no solenóide e depende das características elétricas do circuito. Aplicando a lei de Kirchhoff para tensão, a equação que descreve a dinâmica do circuito elétrico pode ser expressa como:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C(x)} = V \quad (2.3)$$

Onde: \dot{Q} representa a corrente elétrica no circuito e é medida em ampères, V representa fonte de tensão do circuito de medida em volts, R é a resistência em ohms, L é a indutância medida em Henry, C é a capacitância medida em Farads. O solenóide possui núcleo móvel (barra de metal oscilando no interior do solenóide), e sua indutância depende do deslocamento e pode ser expressa como:

$$L(x) = \mu_0 N^2 A \left(\frac{1}{(l-x)^2} \right) \quad (2.4)$$

A energia elétrica no capacitor pode ser calculada por $W_e^* = (V, x)$ ou $W_e = (Q, x)$. Assim a força elétrica usando $Q = C(x)V$, fica:

$$dW = \frac{Q}{C(x)} dQ \quad (2.5)$$

É possível determinar a energia armazenada no capacitor através da integração da equação (2.5). Considerando que o capacitor está descarregado ($q=0$) e movendo – se a carga elétrica de uma placa a outra até que as placas tenham carga $(+Q)$ e $(-Q)$, necessitando – se de um trabalho W , que pode ser obtido de:

$$W = \int_0^Q \frac{Q}{C(x)} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} = \frac{1}{2} C(x) V^2 \quad (2.6)$$

Onde $C(x)$ é a capacitância, e é representada por:

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 A}{d-x} \quad (2.7)$$

Assumindo – se que:

$$VC(x) = \frac{Q}{C(x)} \quad (2.8)$$

e

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0 A} (VC)^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0 A} V^2 \left[\frac{\varepsilon_0 A}{d-x} \right]^2 = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A V^2}{(d-x)^2} \quad (2.9)$$

A energia magnética pode ser obtida de:

$$W_m = \int_0^l \frac{I}{L(x)} d\phi = \frac{1}{2} \frac{I^2}{L(x)} \quad (2.10)$$

A força magnética é representada por:

$$F_m = \frac{I^2}{2} L(x) \quad (2.11)$$

2.3 Acoplamento do Sistema Eletromecânico

Substituindo as equações (2.9) e (2.11) em (2.2) e (2.7) e (2.11) em (2.2) e (2.3), as equações (2.3) e (2.2) podem ser reescritas como:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k_l}{m} x + \frac{k_{nl}}{m} x^3 = \frac{\mu_0 N^2 A \dot{Q}^2}{2m(l-x)^2} + \frac{Q^2}{2m\varepsilon_0 A} \quad (2.12)$$

$$\ddot{Q} + \frac{R\dot{Q}(l-x)^2}{\mu_0 N^2 A} + \frac{Q(l-x)^2(d-x)}{\varepsilon_0 \mu_0 N^2 A^2} = \frac{(l-x)^2 V}{\mu_0 N^2 A} \quad (2.13)$$

Definindo novas variáveis:

$$T = \omega_0 t, \quad u = \frac{x}{x_0}, \quad z = \frac{Q}{Q_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{k_l}{m}, \quad t = \frac{T}{\omega_0}, \quad x = x_0 u, \quad Q = Q_0 z$$

As equações (2.12) e (2.13) podem ser representadas de forma adimensional:

$$\ddot{u} + \alpha \dot{u} + \beta u + \delta u^3 - \frac{\gamma \dot{z}^2}{(l-u)^2} - \eta z^2 = 0 \quad (2.14)$$

$$\ddot{z} + a\dot{z} - b\dot{z}u + c\dot{z}u^2 + ez - fzu + gzu^2 - hzu^3 - pu^2 \cos(\omega T) - s \cos(\omega T) = 0 \quad (2.15)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c\omega_0 x_0}{m\omega_0^2 x_0}, & \beta &= \frac{x_0 k_l}{m\omega_0^2 x_0}, & \delta &= \frac{k_{nl} x_0^3}{m\omega_0^2 x_0}, & \gamma &= \frac{\mu_0 N^2 A \omega_0^2 Q_0^2}{2m\omega_0^2 x_0^3}, & \eta &= \frac{Q_0^2}{2m\epsilon_0 A \omega_0^2 x_0}, \\ a &= \frac{Rl^2}{\mu_0 \omega N^2 A}, & b &= \frac{2lx_0 R}{\mu_0 \omega N^2 A}, & c &= \frac{x_0^2 R}{\mu_0 \omega N^2 A}, & e &= \frac{l^2 d}{\epsilon_0 \omega^2 \mu_0 N^2 A^2}, & f &= \frac{l^2 x_0 + 2lx_0 d}{\epsilon_0 \omega^2 \mu_0 N^2 A^2}, \\ g &= \frac{2lx_0^2 + x_0^2 d}{\epsilon_0 \omega^2 \mu_0 N^2 A^2}, & h &= \frac{x_0^3}{\epsilon_0 \omega^2 \mu_0 N^2 A^2}, & p &= \frac{x_0^2 V_{ac}}{\mu_0 \omega^2 Q N^2 A}, & r &= \frac{2lV_{ac} x_0}{\mu_0 \omega^2 Q N^2 A}, \\ s &= \frac{l^2 V_{ac}}{\mu_0 \omega^2 Q N^2 A}, & t &= \frac{l}{x_0}, & w &= \frac{\omega}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Escrevendo as equações do movimento (2.14) e (2.15) em variáveis de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 + \frac{\gamma x_4^2}{(l - x_1)^2} + \eta x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\alpha x_4 + b x_4 x_1 - c x_4 x_1^2 - e x_3 + f x_3 x_1 - g x_3 x_1^2 + h x_3 x_1^3 + p x_1^2 \cos(\omega T) \\ &\quad - r x_1 \cos(\omega T) + s \cos(\omega T) \end{aligned} \quad (2.16)$$

A seguir são apresentadas as simulações numéricas obtidas para o sistema eletromecânico.

2.4 Simulações Numéricas

Considerando a equação do movimento (2.16) em variáveis de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 + \frac{\gamma x_4^2}{(l - x_1)^2} + \eta x_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 & (2.17) \\ \dot{x}_4 &= -ax_4 + bx_4x_1 - cx_4x_1^2 - ex_3 + fx_3x_1 - gx_3x_1^2 + hx_3x_1^3 + px_1^2\cos(wT) \\ &\quad - rx_1\cos(wT) + s\cos(wT) \end{aligned}$$

Na tabela 2.1, são apresentados para os valores dos parâmetros utilizados nas simulações.

Tabela (2.1) Parâmetros utilizados nas simulações numéricas do sistema eletromecânico em escala macro

Parâmetros	Valores
α	0.02
β	1
δ	1
γ	1.2
η	$1.77 \cdot (10^{-7})$
a	5
b	1
c	0.5
e	$1.4124 \cdot (10^{-6})$
f	$8.4745(10^3)$
g	$1.6949 \cdot (10^{-3})$
h	$8.85 \cdot (10^{-12})$
ρ	1
r	3
s	3
l	1
w	1

Na figura. (2.2) pode – se observar o retrato de fase para o circuito elétrico acoplado e na figura. (2.3) o retrato de fase do sistema mecânico acoplado.

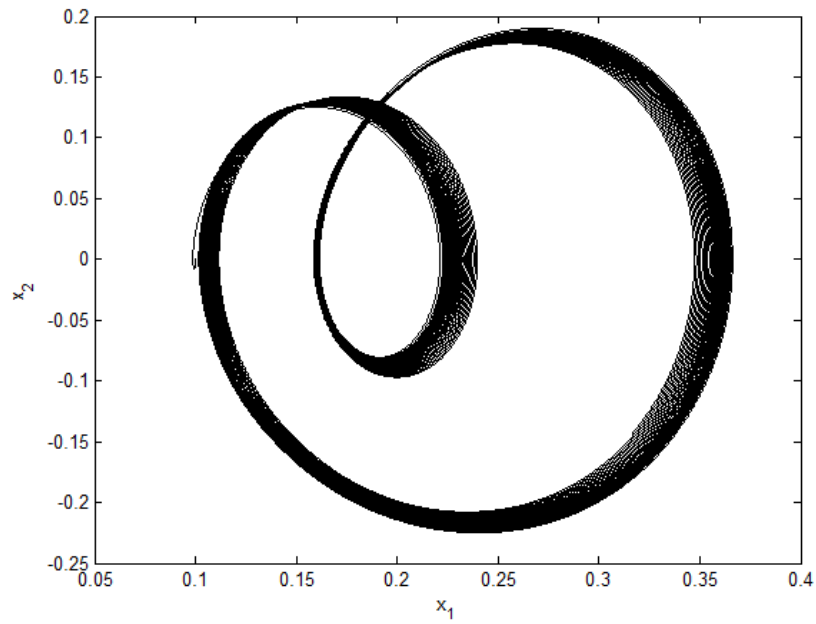


Fig. 2.2 – Retrato de fase para o circuito elétrico acoplado, onde é possível observar o comportamento dinâmico não linear.

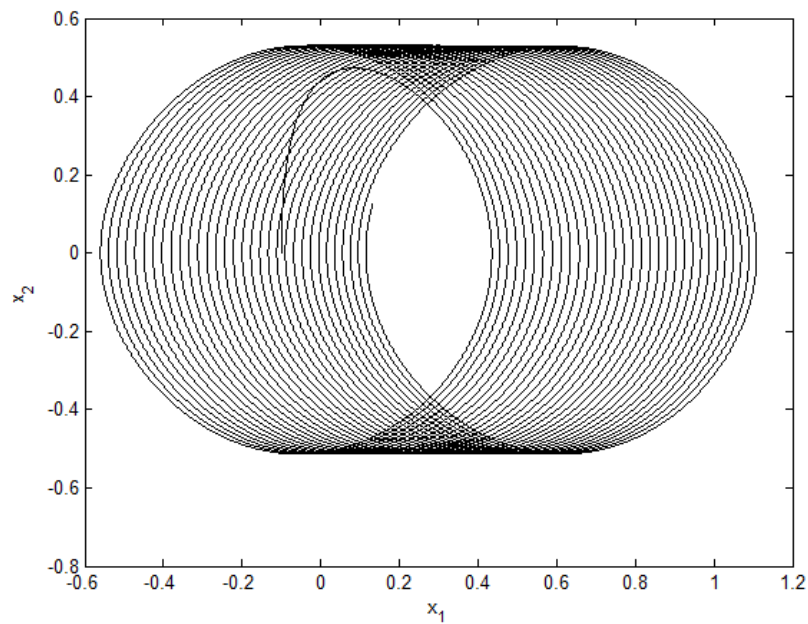


Fig. 2.3 – Retrato de fase para o sistema mecânico acoplado, onde é possível observar o comportamento dinâmico não linear.

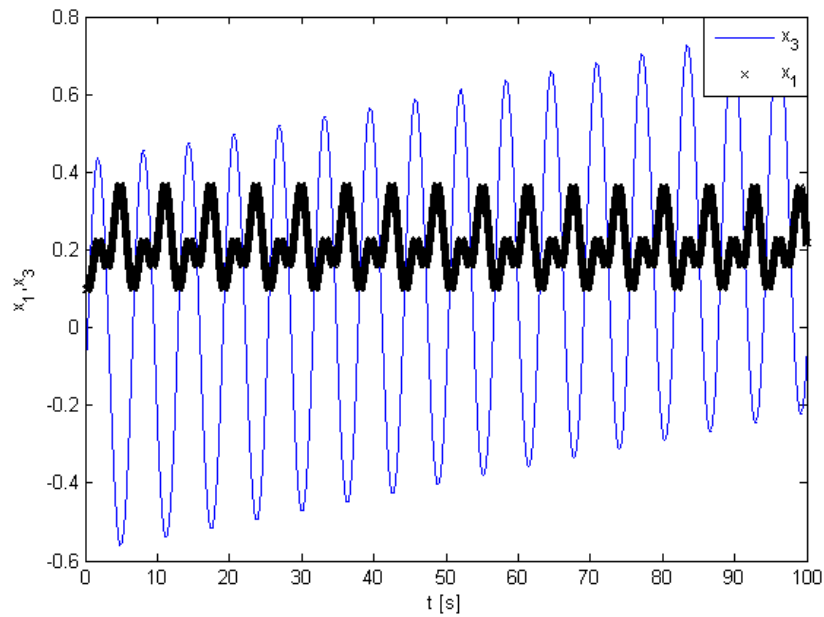


Fig. 2.4 – Deslocamento no tempo, x_1 em preto para o sistema mecânico acoplado, e x_3 em cinza para o circuito elétrico acoplado.

Analisando – se a fig. 2.4 é possível observar que o sistema acoplado possui amplitude e frequência diferentes, porém visando um bom funcionamento do sistema eletromecânico, deseja-se que o dispositivo acoplado, possua a mesma amplitude e frequência tanto no sistema mecânico como no elétrico. Com a finalidade de correção do dispositivo eletromecânico, será aplicada ao sistema uma técnica de controle.

A seguir são apresentadas as técnicas de controle aplicadas ao modelo eletromecânico em escala macro.

3. PROJETO DE CONTROLE

Neste capítulo o objetivo é realizar uma comparação entre duas técnicas de controle testando sua eficiência no controle de um sistema eletromecânico com comportamento não linear.

A primeira técnica de controle empregada será o controle desenvolvido por [Rafikov e Balthazar, 2008] para controlar os sistemas eletromecânicos. Este método visa encontrar um controle ótimo linear realimentado onde se encontram condições para a aplicação do controle linear em sistemas não lineares, garantindo a estabilidade do problema.

É possível notar que na teoria do controle existem dois tipos de problemas, sendo o primeiro deles a função do controle $u(t)$, que deve ser encontrada como uma função do tempo, ou seja, nesse caso a função de controle ótimo determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada do sistema. No segundo caso, a função de controle $u(t, x)$, que depende do tempo e de variáveis de estado; este tipo de controle é chamado controle com realimentação podendo ser aplicado para qualquer condição inicial. Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle ótimo estabiliza em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado [Tusset *et al.*, 2009].

A segunda técnica de controle aplicada será o controle para sistemas não lineares através do método da equação de Riccati dependente do estado, o qual utiliza o controle sub-ótimo e busca estabilidade local do sistema [Mracek e Cloutier, 1998].

No próximo sub-índice 3.1 é apresentada e aplicada ao sistema eletromecânico o controle por realimentação de estados.

3.1 Aplicação do Controle por Realimentação de Estados ao Sistema Eletromecânico

O objetivo é encontrar o Controle Ótimo, tal que a resposta do sistema controlado (3.1) resulte em uma órbita periódica $\tilde{x}(t)$ assintoticamente estável.

O controle aplicado pode ser representado por diagrama de blocos como mostra a figura 3.1.

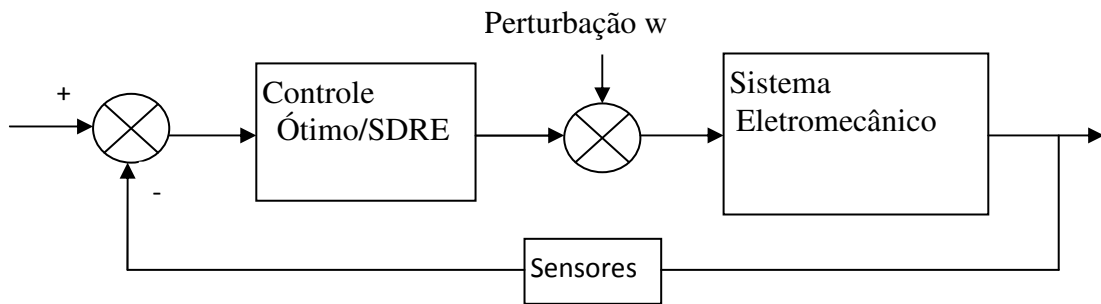


Figura 3.1 – Diagrama de blocos do controlador proposto

Considerando a introdução do sinal de controle U no sistema (2.16):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 - \delta x_1^3 + \frac{\kappa x_4^2}{(t-x_1)^2} + \eta x_3^2 + U_1 \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -ax_4 + bx_4x_1 - cx_4x_1^2 - ex_3 + fx_3x_1 - gx_3x_1^2 + hx_3x_1^3 + px_1^2 \cos(wT) \\
 &\quad - rx_1 \cos(wT) + s \cos(wT) + U_2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde: $U = u_r + \tilde{u}$

Sendo \tilde{u} o controle feedforward que mantém o sistema na trajetória desejada e dado por:

$$\tilde{u}_1 = \dot{\tilde{x}}_2 + \alpha \tilde{x}_2 + \beta \tilde{x}_1 + \delta \tilde{x}_1^3 - \frac{\tilde{\kappa} \tilde{x}_4^2}{(t-\tilde{x}_1)^2} - \eta \tilde{x}_3^2 \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_2 &= \dot{\tilde{x}}_4 + a \tilde{x}_4 - b \tilde{x}_4 \tilde{x}_1 + c \tilde{x}_4 \tilde{x}_1^2 + e \tilde{x}_3 - f \tilde{x}_3 \tilde{x}_1 + g \tilde{x}_3 \tilde{x}_1^2 - h \tilde{x}_3 \tilde{x}_1^3 - p \tilde{x}_1^2 \cos(wT) + r \tilde{x}_1 \cos(wT) \\
 &\quad - s \cos(wT)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Substituindo (3.1) e (3.2) em (2.16) e definindo os desvios da trajetória desejada como:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \\ x_4 - \tilde{x}_4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

O sistema (2.16) pode ser representado na forma de desvios na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\alpha y_2 - \beta y_1 - \delta (y_1 + \tilde{x}_1)^3 + \frac{\gamma (y_4 + \tilde{x}_4)^2}{(t - (y_1 + \tilde{x}_1))^2} + \eta (y_3 + \tilde{x}_3)^2 + \delta \tilde{x}_1^3 - \frac{\tilde{\gamma} \tilde{x}_4^2}{(t - \tilde{x}_1)^2} - \eta \tilde{x}_3^2 + u_{r_1} \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= -a y_4 + b (y_4 + \tilde{x}_4)(y_1 + \tilde{x}_1) - c (y_4 + \tilde{x}_4)(y_1 + \tilde{x}_1)^2 - e y_3 + f (y_3 + \tilde{x}_3)(y_1 + \tilde{x}_1) \\ &\quad - g (y_3 + \tilde{x}_3)(y_1 + \tilde{x}_1)^2 + h (y_3 + \tilde{x}_3)(y_1 + \tilde{x}_1)^3 + p (y_1 + \tilde{x}_1)^2 \cos(wT) - r (y_1 + \tilde{x}_1) \cos(wT) \\ &\quad - b \tilde{x}_4 \tilde{x}_1 + c \tilde{x}_4 \tilde{x}_1^2 - f \tilde{x}_3 \tilde{x}_1 + g \tilde{x}_3 \tilde{x}_1^2 - h \tilde{x}_3 \tilde{x}_1^3 - p \tilde{x}_1^2 \cos(wT) + r \tilde{x}_1 \cos(wT) + u_{r_2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

sendo $u_r = U - \tilde{u}$ o controle por realimentação de estados.

O sistema (3.5) pode ser representado em desvios como:

$$\dot{y} = Ay + G(y, \tilde{x}) + Bu_r \quad (3.6)$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -e & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + G(u, u^*) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

sendo:

$$G(y, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\delta(y_1 + \tilde{x}_1)^3 + \frac{\gamma(y_4 + \tilde{x}_4)^2}{(t - (y_1 + \tilde{x}_1))^2} + \eta(y_3 + \tilde{x}_3)^2 + \tilde{\alpha}_1^3 - \frac{\tilde{\kappa}_4^2}{(t - \tilde{x}_1)^2} - \eta\tilde{x}_3^2 \\ 0 \\ b(y_4 + \tilde{x}_4)(y_1 + \tilde{x}_1) - c(y_4 + \tilde{x}_4)(y_1 + \tilde{x}_1)^2 + f(y_3 + \tilde{x}_3)(y_1 + \tilde{x}_1) - g(y_3 + \tilde{x}_3)(y_1 + \tilde{x}_1)^2 \\ + h(y_3 + \tilde{x}_3)(y_1 + \tilde{x}_1)^3 + p(y_1 + \tilde{x}_1)^2 \cos(wT) - r(y_1 + \tilde{x}_1) \cos(wT) - b\tilde{x}_4\tilde{x}_1 + c\tilde{x}_4\tilde{x}_1^2 - f\tilde{x}_3\tilde{x}_1 \\ + g\tilde{x}_3\tilde{x}_1^2 - h\tilde{x}_3\tilde{x}_1^3 - p\tilde{x}_1^2 \cos(wT) + r\tilde{x}_1 \cos(wT) \end{bmatrix}$$

Conforme (Tusset *et al.*, 2009), se existirem matrizes Q e R , definidas positivas com matriz Q simétrica, tal que a matriz:

$$\tilde{Q} = Q - G^T(y, \tilde{x})P - PG(y, \tilde{x}) \quad (3.8)$$

seja definida positiva com matriz G limitada, então o controle u_r é ótimo e transfere o sistemas não-linear (3.5) de qualquer estado inicial ao estado final:

$$y(\infty) = 0 \quad (3.9)$$

Minimizando o funcional:

$$J = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q} y + u_r^T R u_r) dt \quad (3.10)$$

O controle u pode ser encontrado resolvendo a equação:

$$u_r = -R^{-1} B^T P y = -K y \quad (3.11)$$

Sendo a matriz P simétrica, e pode ser encontrada da equação algébrica de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.12)$$

Definindo com trajetórias desejadas as seguintes funções periódicas:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \sin(\omega t) \\ \omega 0.05 \cos(\omega t) \\ 0.05 \sin(\omega t) \\ \omega 0.05 \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -e & -a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Utilizando o comando `lqr` do matlab^f obtêm-se:

$$p = \begin{bmatrix} 131.6828 & 0.145812 & 0 & 0 \\ 0.145812 & 0.316688 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 230.4782 & 0.034968 \\ 0 & 0 & 0.034968 & 0.1532 \end{bmatrix} e \quad (3.16)$$

$$K = \begin{bmatrix} 145.8125 & 316.6875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34.96787 & 153.1996 \end{bmatrix}$$

Substituindo K em (3.11) obtêm-se o controle:

$$\begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -145.8125y_1 - 316.6875y_2 \\ -34.96787y_3 - 153.1996y_4 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

O deslocamento do pode ser observado na Figura 3.2, e o diagrama de fase pode ser observado na Figura 3.3, considerando a aplicação do controle (3.17), e a seguinte substituição:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 0.05 \sin(\omega t) \\ y_2 + w0.05 \cos(\omega t) \\ y_3 + 0.05 \sin(\omega t) \\ y_4 + w0.05 \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

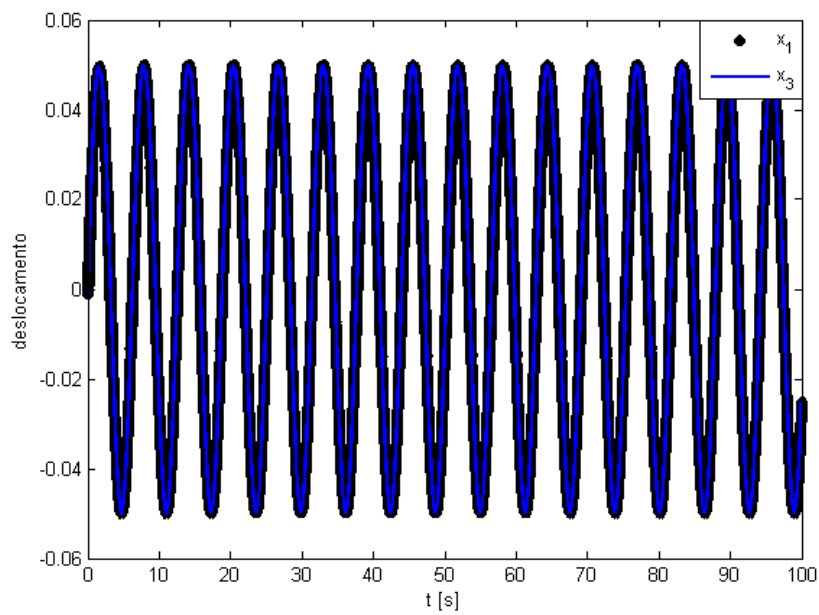


Figura 3.2 – Deslocamento de x_1 e x_3 para o sistema com controle

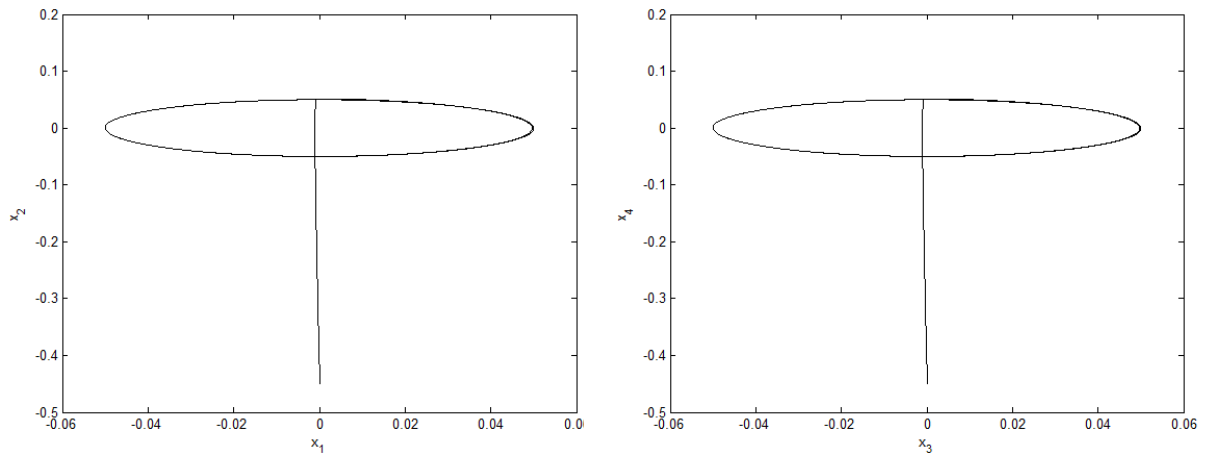


Figura 3.3 – Diagrama de fase para o sistema com controle.

Como pode ser observado nas Figuras 3.2 e 3.3, o controle levou o sistema (3.5) para à orbita desejada (3.13).

Conforme (Tusset *et al.*, 2009), para os casos em que analisar a matriz \tilde{Q} (3.8) analiticamente é muito difícil, é possível analisar numericamente considerando a função $L(t) = y^T(t)\tilde{Q}(t)y(t)$, calculada na trajetória ótima, se $L(t)$ for definida positiva para todo o intervalo de tempo, então a matriz \tilde{Q} é definida positiva.

Na Figura 3.4 pode ser observado o valor de $L(t)$ calculada numericamente.

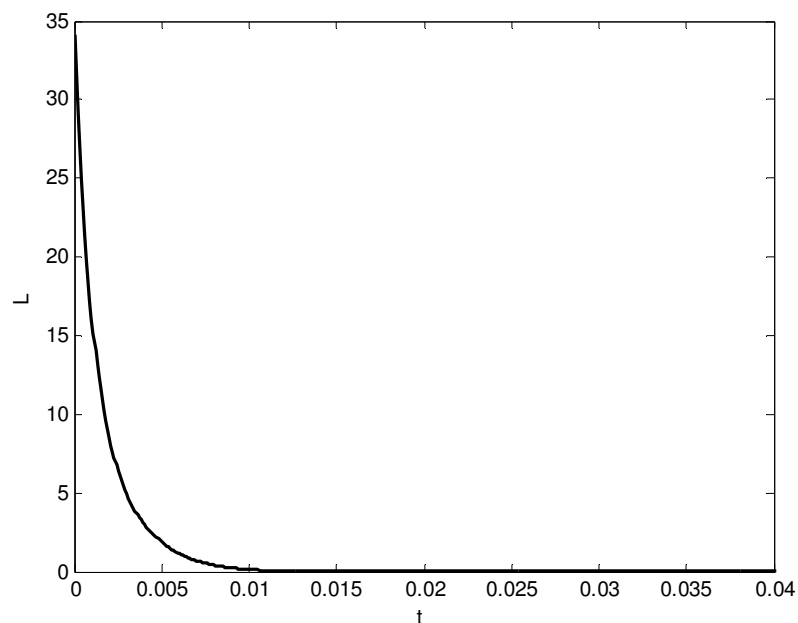


Figura 3.4 - $L(t)$ calculado na trajetória ótima.

Na Figura 3.4 pode ser observado que $L(t)$ manteve-se positiva até o momento em que $y \rightarrow 0$, demonstrando que o controle (32) é ótimo e que a matriz \tilde{Q} é definida positiva. Como $y \rightarrow 0$ para $t > 0.01$, para uma melhor visualização de $L(t)$ a Figura 3.4 foi gerada para um intervalo de $0 < T \leq 0.04$.

3.2 Controle Utilizando a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE)

Desde a década de 1990, a equação de Riccati dependente do estado (SDRE) tem sido muito utilizada como um método de concepção geral que fornecem um meio eficaz de projetar controladores não lineares, observadores e filtros. Este método supera muitas das dificuldades e limitações das metodologias existentes e fornece algoritmos computacionais simples e altamente eficazes em uma grande variedade de aplicações em diversos campos de estudo, incluindo mísseis, aeronaves, veículos aéreos não tripulados, satélites e naves espaciais, navios, veículos submarinos autônomos e sistemas automotivos, sistemas biomédicos, controle de processos e robótica, tempo de atraso, a vibração e comportamento caótico.

Em sistemas não lineares as matrizes de estado são dependentes das variáveis do problema. Um controle ótimo de um modelo dinâmico exige uma formulação que visa minimizar um funcional de custo e cumprir com as restrições sobre o modelo, que podem ser equações de equilíbrio dinâmico, as condições de contorno e ou outros.

Escrevendo o sistema dinâmico definido por (2.16) na seguinte forma [Shawky *et al*, 2007]:

$$\dot{u} = f(u) + B(u)u_r, \quad (3.19)$$

onde: $f(u) = A(u)u$

Onde o vetor $u = [u_1 \ u_2]^T$ representa os estado do sistema dependente do tempo, $\dot{u} \in R^2$ é o vetor de derivadas primeira do estado, $u_r \in U \in R$ é a função de controle.

Considerando as condições iniciais $u(T_0) = u_0$, e que $f(0) = 0$, o que implica que a origem seja um ponto de equilíbrio.

Escrevendo (2.16) na forma (5.57):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 - \delta x_1^3 + \frac{\gamma x_4^2}{(t-x_1)^2} + \eta x_3^2 \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -ax_4 + bx_4 x_1 - cx_4 x_1^2 - ex_3 + fx_3 x_1 - gx_3 x_1^2 + hx_3 x_1^3 + px_1^2 \cos(wT) \\
 &\quad - rx_1 \cos(wT) + s \cos(wT)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta - \delta x_1^2 & -\alpha & \eta x_3 & \frac{\gamma x_4^2}{(t-x_1)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ px_1 \cos(wT) - r \cos(wT) + bx_4 + fx_3 & 0 & -e - gx_1^2 + hx_1^3 & -a - cx_4 x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \cos(wT) \end{bmatrix}$$

Considerando as matrizes A e B na forma:

$$\dot{x} = A(x)x + F \tag{3.21}$$

Incluindo o controle U :

$$\dot{x} = A(x)x + F + U \tag{3.22}$$

Onde U é dado por:

$$U = u_f + u \tag{3.23}$$

Sendo que u_f é o controle *feedforward*:

$$u_f = -F \quad (3.24)$$

O sistema (3.20) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta - \delta x_1^2 & -\alpha & \eta x_3 & \frac{\gamma x_4}{(t - x_1)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ px_1 \cos(\omega T) - r \cos(\omega T) + bx_4 + fx_3 & 0 & -e - gx_1^2 + hx_1^3 & -a - cx_4 x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

Onde u é o controle feedback que pode ser obtido utilizando SDRE. Definindo as matrizes Q e R :

$$Q = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 0.001 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim o funcional custo a ser minimizado através do Controle SDRE, é dado por [Shawky *et al*, 2007]:

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Q(e) e + u_r^T R(u) u_r) dt \quad (3.25)$$

Sendo: $\dot{u} = Au + Bu_r$, $e(0) = e_0$, $e(\infty) = 0$ e $e = [u - u^*]$

O controle de realimentação de estados não-linear é obtido de:

$$u_r = -R^{-1}(e)B^T(e)P(e) = -K(e)e \quad (3.26)$$

onde: $P(e)$ é a solução da Equação de Riccati dependente do Estado:

$$P(e)A(e) + A^T(e)P(e) - P(e)B(e)R^{-1}(e)B^T(e)P(e) + Q(e) = 0 \quad (3.27)$$

O deslocamento pode ser observado na Fig. 3.5, e o diagrama de fase pode ser observado na Fig. 3.6, considerando a aplicação do controle (3.26) em (2.16), e a seguinte substituição:

$$u_r = -K(e)[u - u^*].$$

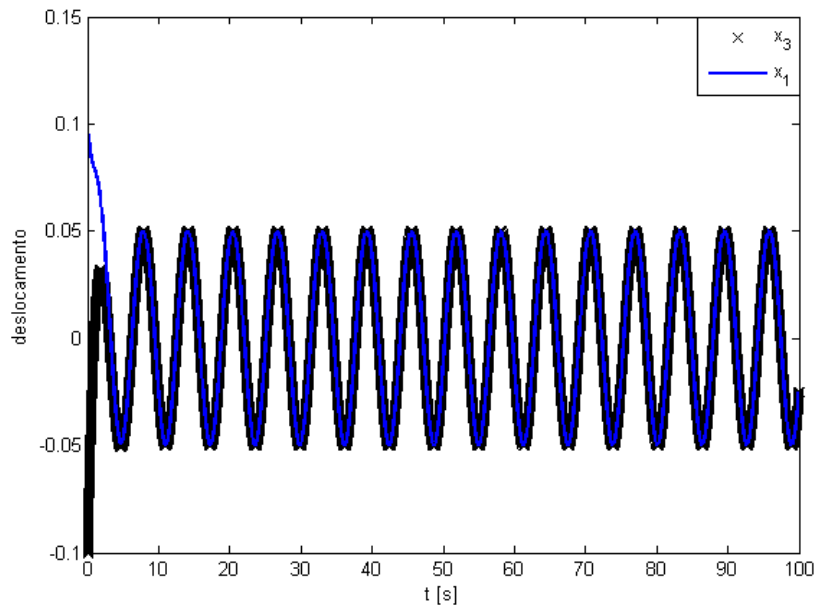


Figura 3.5 – Descolamento de x_1 e x_3 para o sistema com controle (SDRE)

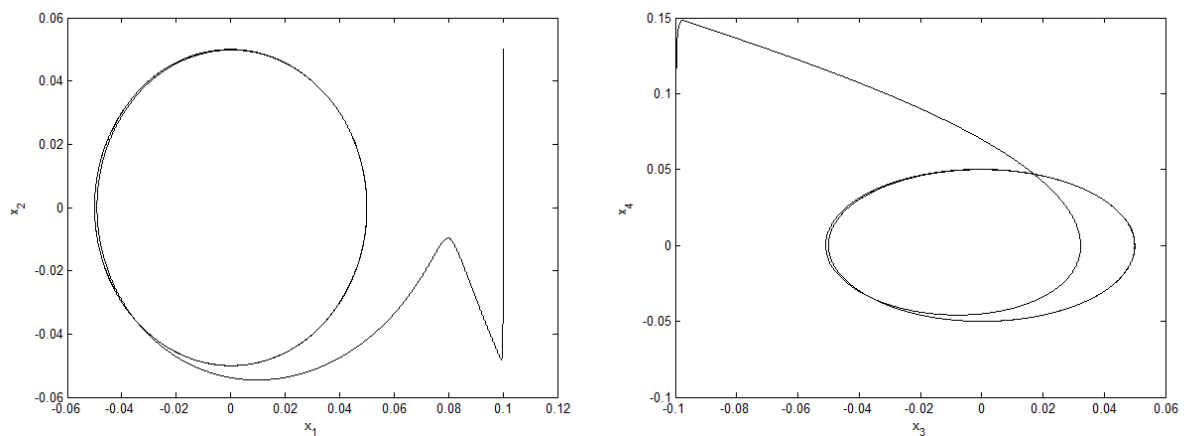


Figura 3.6 – Diagrama de fase para o sistema com controle (SDRE).

Como pode ser observado nas figuras 3.5 e 3.6, o controle (SDRE) levou mais tempo para levar o sistema para a órbita desejada em comparação com o controle ótimo.

3.3 Análise da Ocorrência de Transferência de Energia no Sistema Eletromecânico em Escala Macro

Nesta seção é analisada a transferência de energia entre o sistema mecânico e elétrico (*Energy Pumping*) do sistema eletromecânico apresentado na figura 2.1. O fenômeno de bombeamento de energia corresponde a uma canalização controlada de sentido único da energia. O tema tem ganho interesse por vários pesquisadores, tais como (Gendelman, 2007), (Dantas e Balthazar, 2007), (Vakakis e Gendelman, 2001), (Gourdon e Lamarque, 2005).

Considerando a Figura 3.5, a energia total do sistema mecânico pode ser obtida através da soma da Energia Potencial com a Energia Cinética (Bishop, 2006):

$$E_{TM} = \frac{1}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}k_l x^2 + \frac{1}{4}k_{nl}x^4 \quad (3.28)$$

E a energia total do sistema elétrico pode ser obtida da soma da Energia Magnética com campo de Energia Elétrica (Bishop, 2006):

$$E_{TE} = \frac{1}{2}L(x)\dot{Q}^2 + \frac{1}{2C(x)}Q^2 \quad (3.29)$$

Considerando as equações (2.34) e (2.35) temos que a Energia Total do sistema pode ser obtida de:

$$E_T = \frac{1}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}k_l x^2 + \frac{1}{4}k_{nl}x^4 + \frac{1}{2}L(x)\dot{Q}^2 + \frac{1}{2C(x)}Q^2 \quad (3.30)$$

Para a análise da transferência de energia, usamos os valores da energia instantânea ($E_{_inst}$). Considerando a interação entre os sistemas mecânicos e sistemas elétricos, é definido:

$$E_{MS,inst} = \frac{E_{MS}}{E_T} \quad (3.31)$$

$$E_{ES,inst} = \frac{E_{ES}}{E_T} \quad (3.32)$$

Na Figura 3.7 é possível observar as energias instantâneas total sem a aplicação de uma técnica de controle.

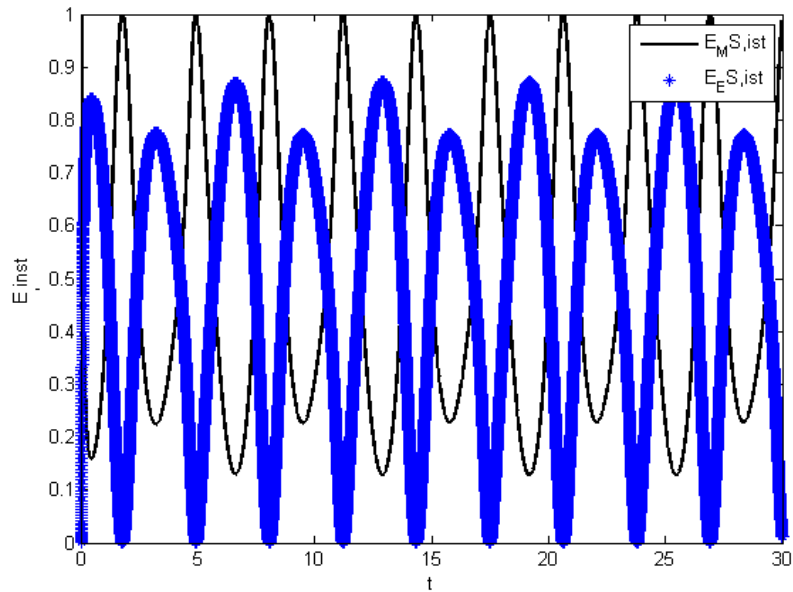


Figura 3.7 – Energia instantânea para o sistema sem controle

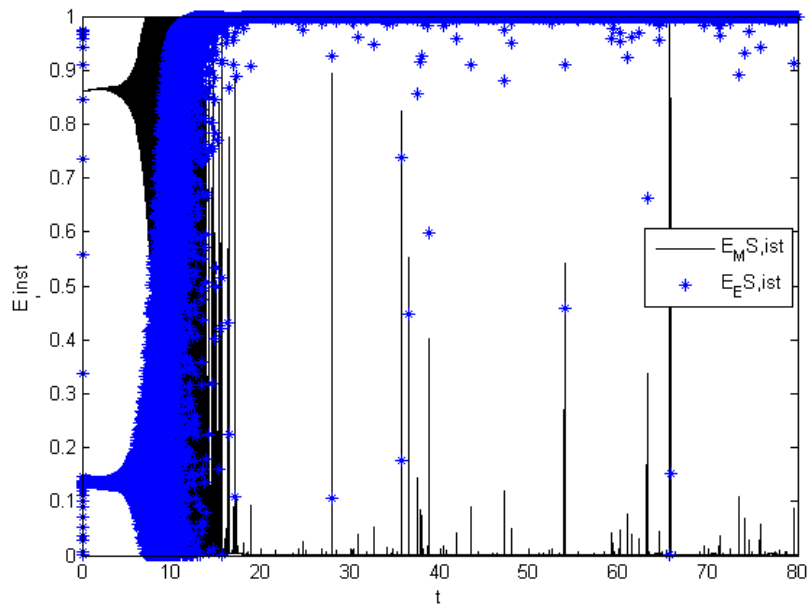


Figura 3.8 – Energia instantânea para o sistema com controle por realimentação de estados.

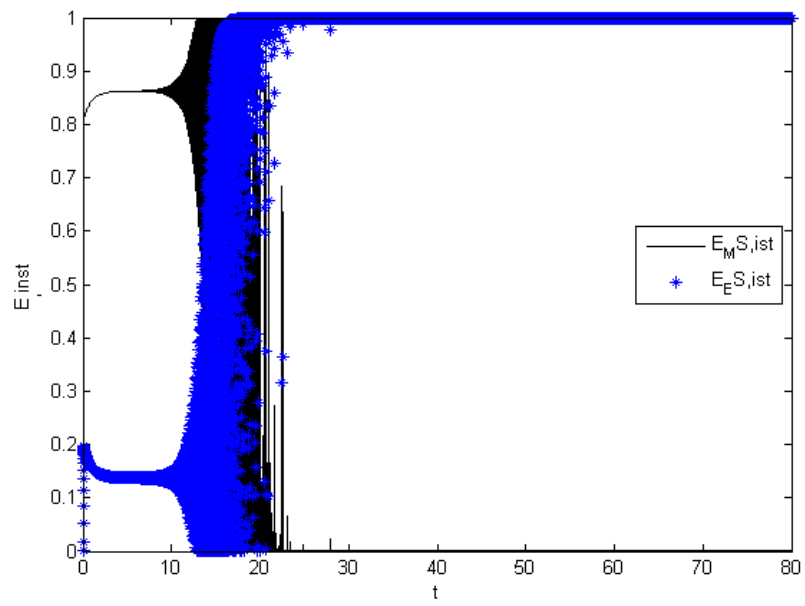


Figura 3.8 – Energia instantânea para o sistema com controle (SDRE).

Como pode ser observado nas Figuras 3.8 e 3.9, o sistema elétrico e o sistema mecânico estão trocando energia. Sendo facilmente observado que após aplicação das técnicas de controle existe uma redução notável da energia do sistema.

SEGUNDA PARTE

A segunda parte desta dissertação é dedicada à realização da modelagem matemática de um sistema micro eletromecânico. Analise do comportamento dinâmico deste sistema com o auxílio de simulações numéricas, sendo possível observar um comportamento não linear para o sistema operando em uma faixa de parâmetros e um comportamento caótico para o sistema adimensional. Ao modelo com comportamento não linear é aplicado o controle por realimentação de estados, com a finalidade estabilizar o deslocamento da placa central móvel em um orbita periódica desejada. Ao sistema adimensional, também com a finalidade de estabilizar o deslocamento da placa central móvel em uma orbita periódica desejada, tal orbita é obtida por meio da aplicação do método de múltiplas escalas, o qual encontra uma solução analítica para o problema. É realizada uma comparação entre duas técnicas de controle, sendo estas o controle ótimo por realimentação de estados e o controle por meio das equações de Riccati dependentes do estado.

A seguir é realizada a modelagem matemática do sistema micro eletromecânico.

4 SISTEMA MICRO ELETROMECHANICO

O sistema micro eletromecânico aqui estudado neste trabalho é representado como uma micro viga acionada eletrostaticamente e pode ser observada na Fig. 4.1. Micro vigas tem uma ampla gama de aplicações, devido à geometria simples, de fácil produção, durabilidade e área compacta do movimento.

O sistema representado na Fig. 4.1, é composto por duas placas fixas e uma placa móvel entre elas, a qual é aplicada uma tensão $V(t)$ que é composta por uma tensão de polarização DC, V_p , e uma tensão alternada AC, $V_i \sin(\omega t)$. A tensão DC aplica uma força eletrostática na viga e geralmente muda a posição de equilíbrio.

As placas têm as funções de fornecer eletrodos para formar um capacitor armazenando energia elétrica, e fornecer elasticidade ou rigidez mecânica.

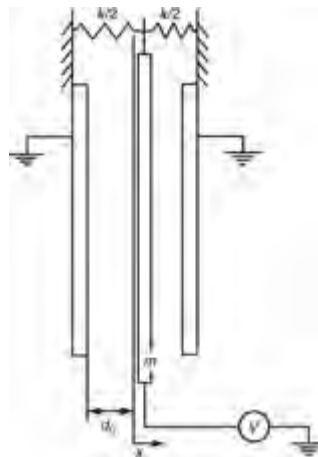


Fig. 4.1– Sistema micro eletromecânico [Moon, 2000].

Embora a estrutura flexível tenha muitos modos de vibrar, neste trabalho será considerado o modelo com um grau de liberdade denotado por $x(t)$ o movimento lateral da placa central de massa (m).

É importante analisar as possíveis não linearidades do sistema da Fig. 4.3, pois sistemas não lineares têm sido utilizados para expor a dinâmica caótica, bem como oscilações periódicas [Chavarette *et al*, 2009], sendo necessário em muitos casos suprimir o comportamento caótico ou levar o sistema a uma órbita periódica.

4.1 Modelo Matemático do Modelo Micro Eletromecânico

A equação governante do movimento das placas é dada por:

$$m\ddot{x} = -F_k - F_c + F_e \quad (4.1)$$

Onde, F_k é a força conservativa da mola, F_c amortecimento termo elástico e F_e a força elétrica.

A força elétrica entre a carga positiva no movimento da placa central e a carga negativa nas placas laterais, é dada por:

$$F_e = \frac{\partial W^*}{\partial x} \quad (4.2)$$

Onde W^* é a quantidade de energia elétrica armazenada em um capacitor é dada por:

$$W^* = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.3)$$

Sendo V a tensão elétrica e C a capacitância. A capacitância pode ser obtida de:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (4.5)$$

Onde, ε_0 é a permissividade no vácuo e d é a distância entre as placas, e A a área da placa.

Substituindo (4.4) em (4.3):

$$W^* = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} V^2 \quad (4.6)$$

Verifica-se na Fig. 1 que a distância d entre as placas fixas e a móvel depende da posição de x e de d_0 (distância inicial entre as placas). Considerando que as placas fixas

tenham as mesmas características, a quantidade de energia elétrica total armazenada no sistema pode ser obtida de:

$$W^* = \frac{\varepsilon_0}{2} V^2 A \left(\frac{1}{d_0 - x} \right) + \frac{\varepsilon_0}{2} V^2 A \left(\frac{1}{d_0 - x} \right) = \varepsilon_0 A V^2 \left(\frac{d_0}{d_0^2 - x^2} \right) \quad (4.7)$$

Assim a força elétrica F_e é uma função não linear do deslocamento em x e uma função quadrática da tensão:

$$F_e = \frac{\partial W^*}{\partial x} = 2\varepsilon_0 d_0 A V^2 \frac{x}{(d_0^2 - x^2)^2} \quad (4.8)$$

A rigidez da mola também é um parâmetro que pode ser afetado, por fenômenos termo elástico e não linearidades, considerando estas variações a Força conservativa da mola F_k pode ser representada por:

$$k = k_1 x + k_3 x^3 \quad (4.9)$$

Em sistemas MEMS tem se considerado um amortecimento termo elástico como uma possível fonte dominante de amortecimento intrínseco. Para o modelo estudado o amortecimento termo elástico é resultado do fluxo irreversível de calor gerado pela oscilação da massa m conforme a posição de x .

Esta variação na temperatura provoca um gradiente térmico no interior do material da estrutura, que se ajusta para permitir um equilíbrio térmico. No entanto, a energia utilizada neste ajuste não pode ser restaurada, mesmo com a estrutura retornando ao seu estado original [Jazar, 2006].

Considerando que o amortecimento termo elástico seja uma função de \dot{x} , a força de dissipação F_c pode ser obtida de:

$$F_c = c\dot{x} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.8), (4.9) e (4.10) em (4.1) obtêm-se a equação do movimento:

$$m\ddot{x} + k_1x + k_3x^3 + c\dot{x} = 2\varepsilon_0d_0AV^2 \frac{x}{(d_0^2 - x^2)^2} \quad (4.11)$$

onde:

$$V = (V_p + V_i \sin(\omega t)) \quad (4.12)$$

Considerando $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ e definindo novas variáveis $T = \omega_0 t, u = x/x_0$

onde:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}, t = \frac{T}{\omega_0}, x = x_0 u, \dot{x} = \omega_0 x_0 \dot{u}, \ddot{x} = \omega_0^2 x_0 \ddot{u}$$

A equação do movimento pode ser representada da forma adimensional:

$$m\omega_0^2 x_0 \ddot{u} + k_1 x_0 u + k_3 (x_0 u)^3 + c\omega_0 x_0 \dot{u} = 2\varepsilon_0 d_0 A V^2 \frac{x_0 u}{(d_0^2 - x_0 u^2)^2} \quad (4.13)$$

Considerando as seguintes substituições:

$$b = (c/m\omega_0), \quad \alpha_1 = (k_1/m\omega_0^2), \quad \alpha_3 = (k_3 x_0^2/m\omega_0^2), \quad \beta = (2\varepsilon_0 d_0 A/m\omega_0^2 x_0^4),$$

$w = \omega/\omega_0, d = d_0/x_0.$

O sistema adimensional (4.13) fica na seguinte forma:

$$\ddot{u} + b\dot{u} + \alpha_1 u + \alpha_3 u^3 = \beta V^2 \frac{u}{(d_2^2 - u^2)^2} \quad (4.14)$$

Onde, V^2 , pode ser representada na seguinte forma:

$$V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2V_p V_i \sin(wT) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2wT) \quad (4.15)$$

Reescrevendo a equação (4.15), em variáveis de estados:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -bu_2 - a_1u_1 - a_3u_1^3 \\ &+ \beta \frac{u}{(d_2^2 - u^2)^2} \left[V_p^2 + \frac{1}{2}V_i^2 + 2V_pV_i \sin(\omega T) - \frac{1}{2}V_i^2 \cos(2\omega T) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.2 Simulação Numérica do Sistema Micro Eletromecânico Com Comportamento Não Linear

Nesta seção, por meio de integrações numéricas realizadas com o auxílio do software MATLAB®, é possível demonstrar o comportamento não linear apresentado pelo sistema micro eletromecânico.

Considerando a equação do movimento para o sistema micro eletromecânico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_1x_1 - a_3x_1^3 + bx_2 + \frac{\beta xd^4}{(d^2 - x^2)^2} * \\ &\left[V_p^2 + \frac{1}{2}V_i^2 + 2*V_pV_i \sin(\omega t) - \frac{1}{2}V_i^2 \cos(2\omega t) \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Considerando – se a Tabela 4.1, para os valores dos parâmetros:

Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados na simulação do sistema micro eletromecânico com comportamento não linear

Parâmetros	Valores
b	0.005
a_1	1000
a_3	2000
w	0.54772
d	2
V_p	0.2
	$\sin(\omega t)$
β	$1.416 * 10^{-10}$

O deslocamento x_1 pode ser observado nas Fig. 4.2, 4.3 e 4.4, e o diagrama de fase pode ser observado na Fig. 4.5 e 4.6.

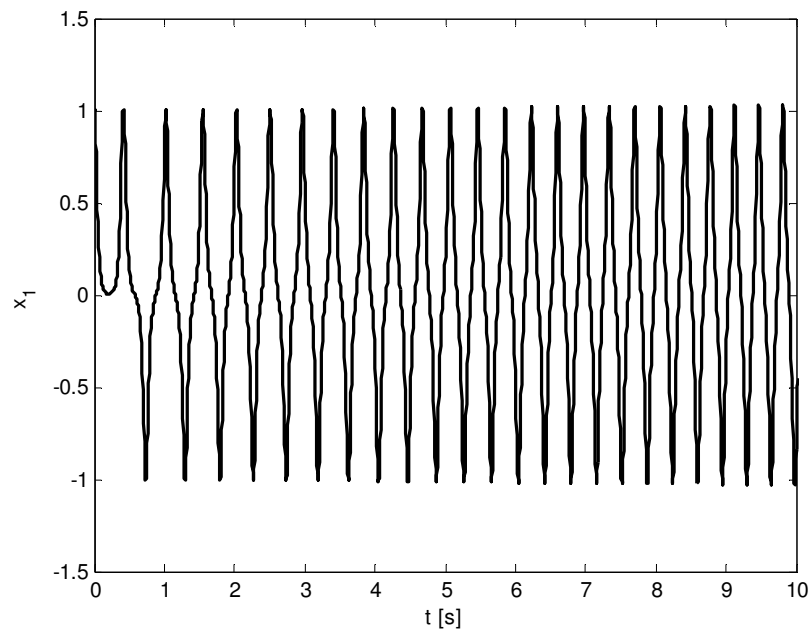


Fig. 4.2– Deslocamento de x_1 $t=0:10$

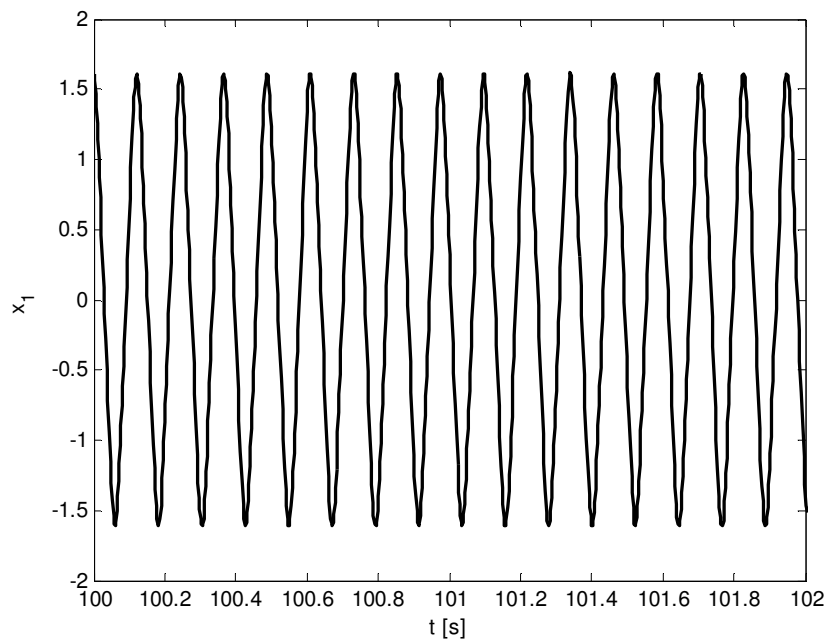


Fig. 4.3 – Deslocamento de x_1 (b) $t=100:102$

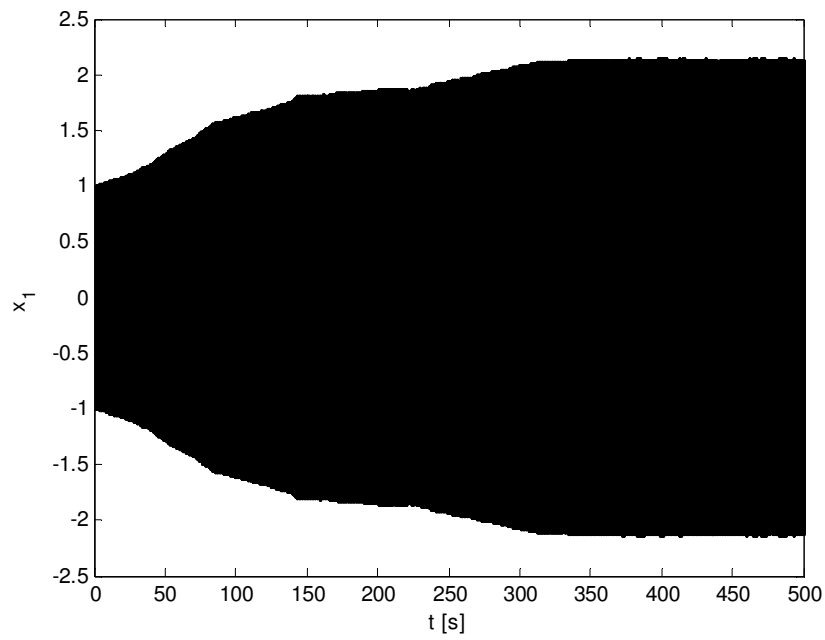


Fig. 4.4 – Deslocamento de x_1 t=0:500 s

É possível notar – se que com o passar do tempo o deslocamento de x_1 , continua aumentando, e isso pode causar danos ao dispositivo, uma vez que o deslocamento das placas $d = 2$ foi determinado na tabela 4.1.

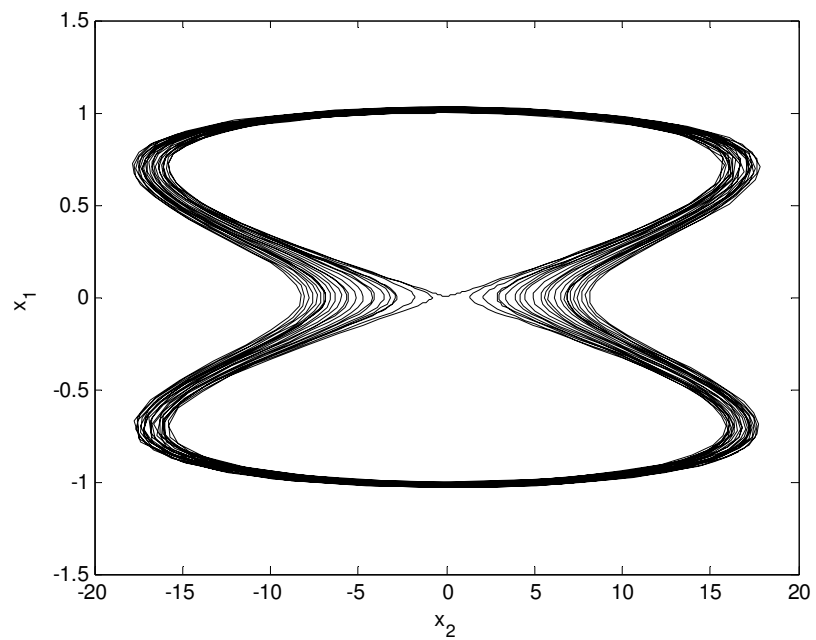


Fig.4.5 – Diagrama de fase 10s

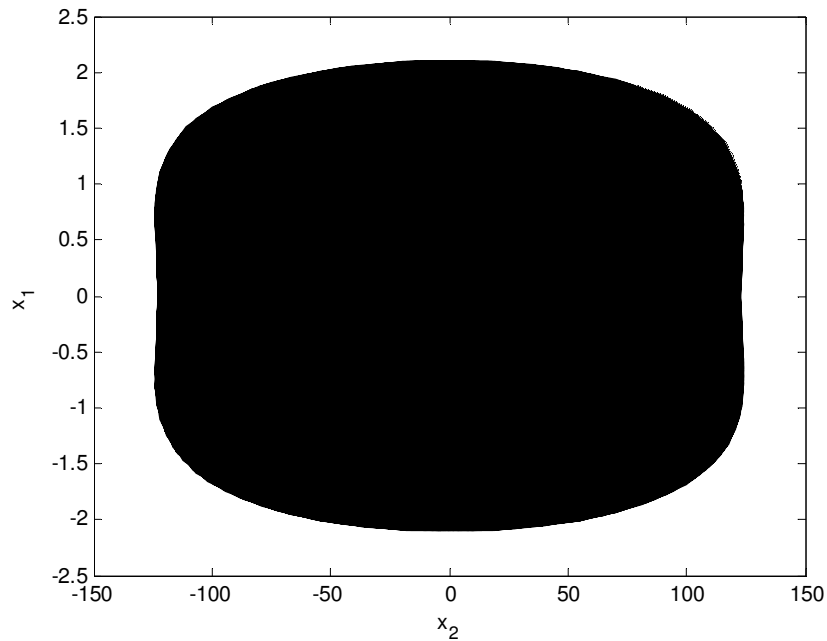


Fig.4.6 – Diagrama de fase 1000s

O retrato de fase também confirma o aumento contínuo do deslocamento do gap entre as placas. Posteriormente será realizado um projeto de controle com a finalidade de estabilizar o deslocamento em $d = 2$.

4.3 Simulação Numérica do Sistema Micro Eletromecânico Com Comportamento Caótico

Nesta seção, por meio de integrações numéricas realizadas com o auxílio do software MATLAB®, é possível demonstrar o comportamento caótico apresentado pelo sistema micro eletromecânico.

A equação governante do movimento para o sistema micro eletromecânico:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -bu_2 - a_1u_1 - a_3u_1^3 \\ &\quad + \beta \frac{u}{(d_2^2 - u^2)^2} \left[V_p^2 + \frac{1}{2}V_i^2 + 2V_pV_i \sin(\omega T) - \frac{1}{2}V_i^2 \cos(2\omega T) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para a simulação numérica são utilizados os parâmetros apresentados na tabela 4.2.

Tabela (4.2) Parâmetros utilizados na simulações numéricas do sistema micro eletromecânico com comportamento caótico

Parâmetros	Valores
b	1
α_1	1
α_3	0.445
w	6.28
d	25
V_p	2
V_i	10
β	69141.6

O deslocamento da placa central móvel pode ser observado na Fig. (4.7), e o retrato de fase pode ser observado na Fig. (4.8).

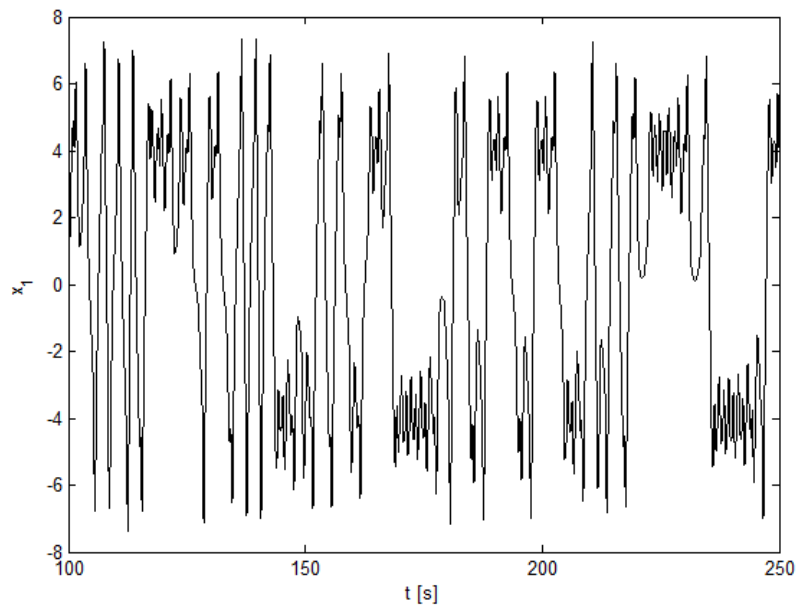


Fig. 4.7 – Deslocamento de u_1 para o sistema micro eletromecânico

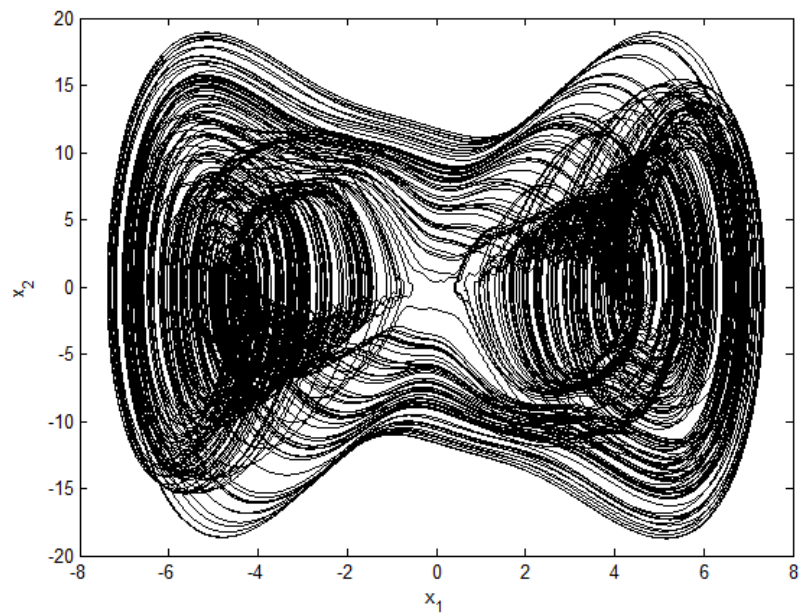


Fig. 4.8 – Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico

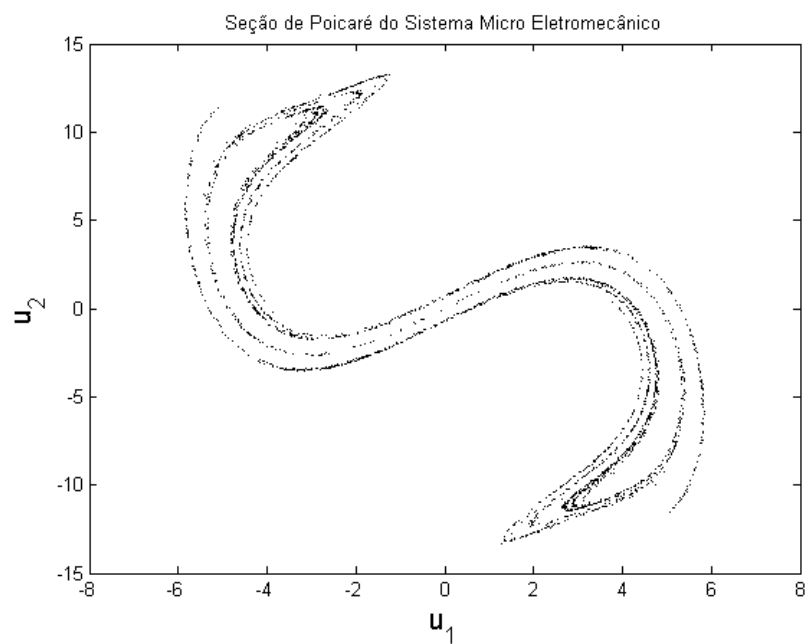


Fig. 4.9 – Seção de Poincaré para o sistema micro eletromecânico

O mapa de Poincaré é uma importante ferramenta para investigação teórica de sistemas dinâmicos, sendo utilizado basicamente com a finalidade de diferenciar o comportamento de sistemas periódicos, quase periódicos e caóticos. Uma seção de Poincaré é definida como sendo uma parte de um plano (superfície), localizada no espaço de fases (3D)

de um sistema contínuo, no qual uma órbita periódica ou um atrator caótico intercepta a seção de Poincaré. Os diversos pontos no gráfico representam cada diferente trajetória do sistema no espaço. Um sistema caótico possui infinitos pontos no mapa. Enquanto um sistema periódico possui finitos pontos no mapa. Sendo possível observar na figura 4.9, que o sistema micro eletromecânico possui comportamento caótico.

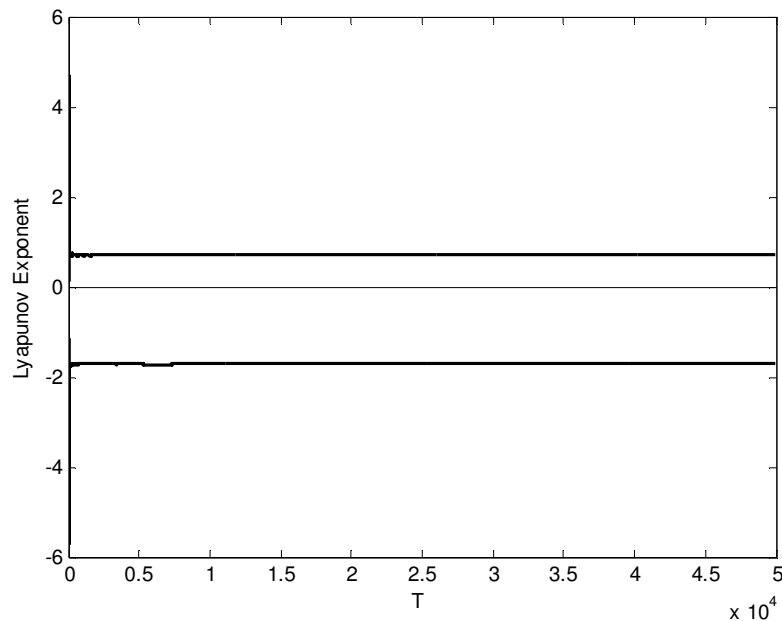


Fig.4.10 – Exponente de Lyapunov para o sistema micro eletromecânico

Exponente de Lyapunov é um conjunto de números que são utilizados como um método para detectar a presença do caos em sistemas dinâmicos, este expoente fornece uma medida sensível às condições iniciais. O expoente de Lyapunov tem sido um dos diagnósticos mais utilizados na análise de sistemas dinâmicos caóticos. Qualquer sistema que apresenta pelo menos um expoente positivo apresenta comportamento caótico. O significado matemático de um expoente de Lyapunov positivo é que trajetórias próximas divergem, portanto são necessárias diversas iterações para efetuar uma análise sobre o comportamento do sistema. Se o expoente é negativo significa que as trajetórias próximas comparadas convergem, portanto o comportamento do sistema é não caótico. Além disso, deve se descartar o período inicial que apresenta comportamento transiente na análise dos expoentes. Como pode ser observado na Fig. 4.10, o sistema tem um expoente de Lyapunov positivo. Calculando os expoentes de Lyapunov para $T = 50000$, obtêm-se: $\hat{\lambda}_1 = 0.708251$, $\hat{\lambda}_2 = -1.708251$ e $\hat{\lambda}_3 = 0$. Como um dos expoentes é positivo o sistema tem comportamento caótico, comportamento que pode ser observado no diagrama de fase na Fig. 4.8.

5 SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA POR MEIO DO MÉTODO DE PERTURBAÇÃO PARA O SISTEMA MICRO ELETROMECHANICO

Os métodos de perturbação (também denominados técnicas analíticas aproximadas) formulam procedimentos com os quais é possível introduzir perturbações em um sistema. A idéia básica é utilizar séries de potencia relativamente a um pequeno parâmetro, que represente a grandeza de uma perturbação. Trata-se de um procedimento analítico usado para obter soluções no tempo. Estes métodos são utilizados para gerar uma solução analítica para o problema, isto é, uma solução aproximada.

O método das escalas múltiplas (MME) é um dos métodos assintóticos de grande eficiência. Seus desenvolvimentos principais incluem oscilações não lineares, problemas de camadas limites, dinâmica dos fluídos, aerodinâmica e a teoria de movimento de astronave.

Pode – se dizer que o MME tem como idéia central a transformação das equações diferenciais do problema a ser abordado, sendo ele linear ou não, em uma série de equações diferenciais lineares solúveis onde as soluções são obtidas de forma recorrente, ou seja, a correção em primeira ordem depende da solução em ordem zero, a correção em segunda ordem depende das correções de ordem zero e um e assim sucessivamente.

A solução analítica aproximada por meio do método de múltiplas escalas para o sistema micro eletromecânico pode ser obtida através da equação (4.16) que corresponde à equação governante do movimento, da seguinte forma:

$$\ddot{u} + \varepsilon b\dot{u} + a_1u + \varepsilon a_3u^3 = \varepsilon\beta V^2 \frac{u}{(d_2^2 - u^2)^2} \quad (5.1)$$

onde ε é o parâmetro de perturbação.

Considerando primeiro a substituição do termo racional da equação (5.1), $\frac{u}{(d^2 - u^2)^2}$, por uma função polinomial $P_n(u) = \delta_0 + \delta_1u$, para $-9 \leq x \leq 9$.

Conforme [Burden e Faires, 2007] pode-se aproximar as duas funções através do método dos mínimos quadrados minimizando o erro:

$$\int_{-9}^9 \left[\left(\frac{u}{(d^2 - u^2)^2} \right) - (\delta_0 + \delta_1u) \right]^2 \quad (5.2)$$

Os parâmetros δ_0 e δ_1 podem ser obtidos através da solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \delta_0 \int_{-9}^9 du + \delta_1 \int_{-9}^9 u du = \int_{-9}^9 \frac{u}{(625 - u^2)} du \\ \delta_0 \int_{-9}^9 u du + \delta_1 \int_{-9}^9 u^2 du = \int_{-9}^9 \frac{u^2}{(625 - u^2)^2} du \end{cases} \quad (5.3)$$

Resolvendo (4.3) obtêm-se $\delta_0 = 0$ e $\delta_1 = 3.022(10^{-6})$ que minimizam o erro (5.2).

Resultando na seguinte aproximação:

$$\frac{u}{(d^2 - u^2)^2} = 3.022 \cdot (10^{-6})u \quad (5.4)$$

Substituindo (5.4) em (5.2) obtêm-se a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{u} + \alpha_1 u + \varepsilon \lambda_1 u + \varepsilon \alpha_3 u^3 + \varepsilon b \dot{u} - \varepsilon \lambda_2 u \sin(\omega t) + \varepsilon \lambda_3 x \cos(2\omega t) \quad (5.5)$$

Sendo:

$$\lambda_1 = -9.8230794208, \lambda_2 = 8.357836608 \text{ e } \lambda_3 = 10.44729576.$$

Na Fig. 5.1 pode ser observado o deslocamento u_1 , e na Fig. 5.2 o diagrama de fase, considerando o para o modelo (5.5) com $\varepsilon = 1$.

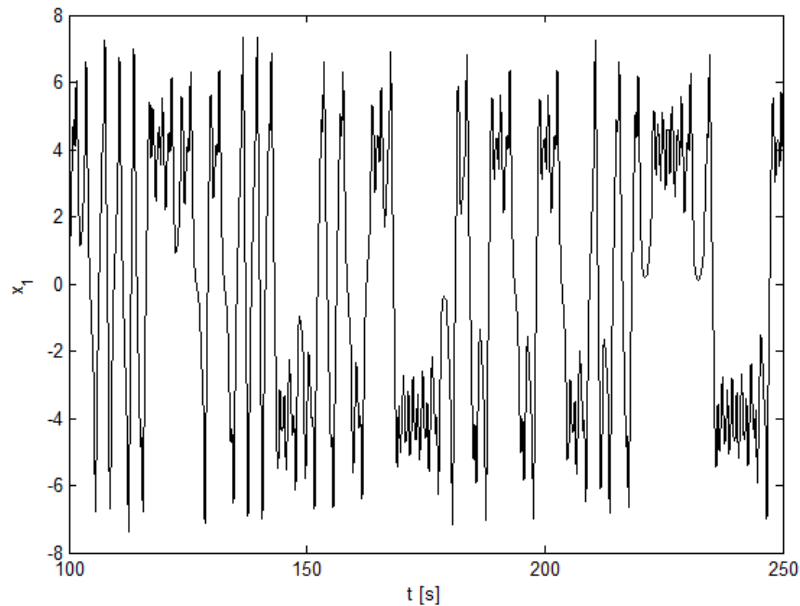


Fig. 5.1 - Deslocamento de u_1 para o sistema micro eletromecânico

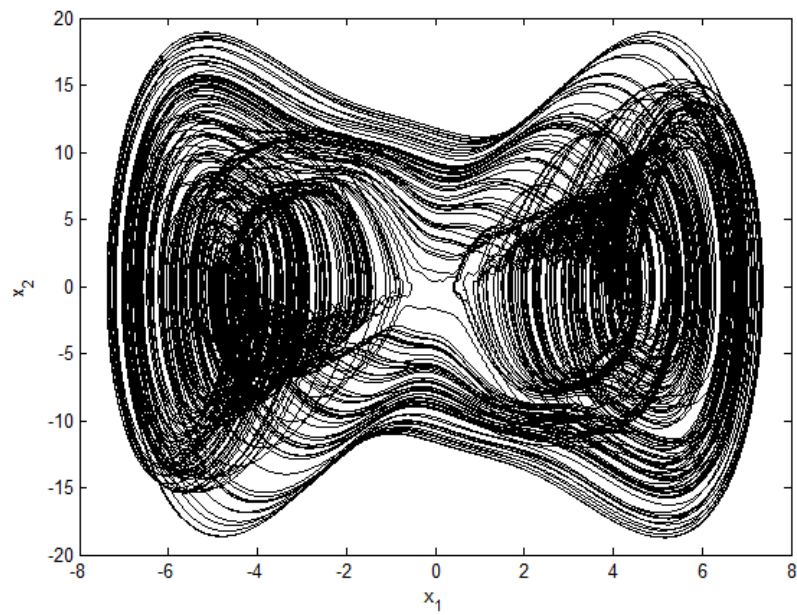


Fig.5.2 – Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico

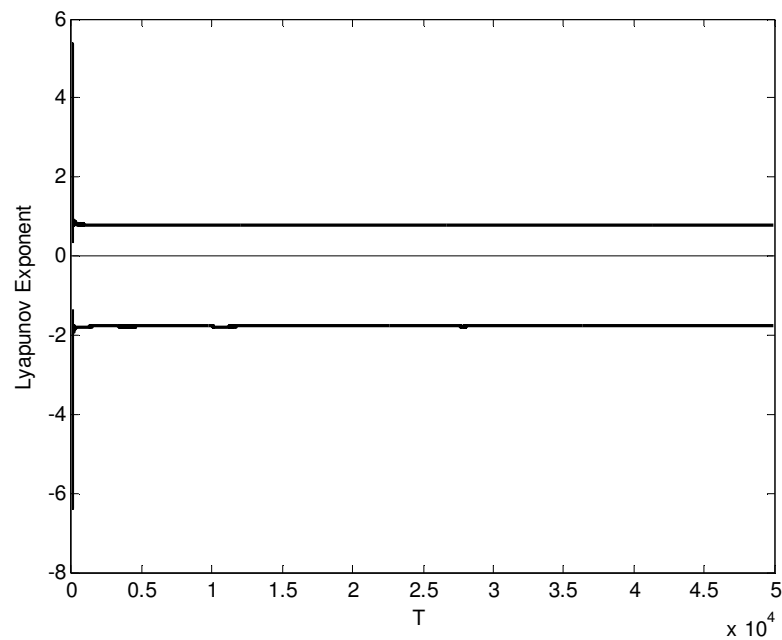


Fig.5.3 – Expoente de Lyapunov para o sistema micro eletromecânico

Como pode ser observado na Fig. 4.3, o sistema também tem um expoente de Lyapunov positivo como observado na Fig. 3.12 Calculando os expoentes de Lyapunov para $T = 50000$, obtêm-se: $\hat{\lambda}_1 = 0.769921$, $\hat{\lambda}_2 = -1.769921$ e $\hat{\lambda}_3 = 0$. Como um dos expoentes é

positivo o sistema tem comportamento caótico, comportamento que pode ser observado no diagrama de fase na Fig. 5.2.

Introduzindo as escalas $T_0 = T$, $T_1 = \varepsilon T$ e $T_2 = \varepsilon^2 T$. Procurando soluções na seguinte forma:

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) \quad (5.6)$$

Como a variável independente original (escala temporal t) foi substituída pelas escalas independentes T_0 , T_1 e T_2 , as derivadas em relação a τ devem ser expressas em termos de derivadas parciais, relativamente a T_n tal que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Onde, $D_n = \partial/\partial T_n$.

Substituindo a equação (5.6) juntamente com as expansões (5.7) na equação (5.5), obtém-se o conjunto de equações perturbadas.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 \quad (5.8)$$

Para determinação de u_1 , conforme o valor do expoente presente no pequeno parâmetro ε , as quais podem ser resolvidas de maneira recursiva.

Substituindo (5.8) em (5.5) e considerando as derivadas (5.7), (5.5) é representado na forma perturbada:

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) + (u_0 + \varepsilon u_1) + \varepsilon \lambda_1 (u_0 + \varepsilon u_1) + \varepsilon \alpha_3 (u_0 + \varepsilon u_1)^3 \\ + \varepsilon b (D_0 + \varepsilon D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) - \varepsilon \lambda_2 (u_0 + \varepsilon u_1) \sin(\omega T_0) \\ + \varepsilon \lambda_3 (u_0 + \varepsilon u_1) \cos(2\omega T_0) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Agora, separando os termos em relação às potências de ε , temos:

$$\varepsilon^0: D_0^2 u_0 + \alpha_1 u_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1: D_0^2 u_1 + \alpha_1 u_1 & \\
&= -2D_0 D_1 u_0 - b D_0 D_0 - \lambda_1 u_0 - \alpha_3 u_0^3 + \lambda_2 \sin(\omega T_0) u_0 \\
&\quad - \lambda_3 \cos(2\omega T_0) u_0
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Uma possível solução é:

$$\mu_0 = a_0 \cos(\sqrt{\alpha_1} T_0 + \beta_0) \tag{5.11}$$

ou na forma polar:

$$\mu_0 = A e^{i\sqrt{\alpha_1} T_0} + \bar{A} e^{-i\sqrt{\alpha_1} T_0} \tag{5.12}$$

Onde \bar{A} é o complexo conjugado de A , sendo:

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \tag{5.13}$$

Substituindo (5.13) em (5.11) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_1 + u_1 &= (-2iD_1 A - 3\alpha_3 A^2 \bar{A} - A\lambda_1 - bA + \lambda_2 \sin(\omega T_0) A \\
&\quad - \lambda_3 \cos(2\omega T_0) A) e^{i\sqrt{\alpha_1} T_0} \\
&\quad + (-2iD_1 \bar{A} - 3\alpha_3 A \bar{A}^2 - A\lambda_1 - b\bar{A} - \lambda_3 \cos(2\omega T_0) \bar{A} \\
&\quad + \lambda_2 \sin(\omega T_0) \bar{A}) e^{-i\sqrt{\alpha_1} T_0} - \alpha_3 A^3 e^{3i\sqrt{\alpha_1} T_0} - \alpha_3 \bar{A}^3 e^{-3i\sqrt{\alpha_1} T_0}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Eliminando os termos seculares:

$$\begin{aligned}
-2iD_1 A - 3\alpha_3 A^2 \bar{A} - A\lambda_1 - bA + \lambda_2 \sin(\omega T_0) A - \lambda_3 \cos(2\omega T_0) A &= 0 \\
-2iD_1 \bar{A} - 3\alpha_3 A \bar{A}^2 - A\lambda_1 - b\bar{A} - \lambda_3 \cos(2\omega T_0) \bar{A} + \lambda_2 \sin(\omega T_0) \bar{A} &= 0
\end{aligned} \tag{5.15}$$

A equação (5.14) fica da seguinte forma:

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -\alpha_3 A^3 e^{3i\sqrt{\alpha_1} T_0} - \alpha_3 \bar{A}^3 e^{-3i\sqrt{\alpha_1} T_0} \tag{5.16}$$

Substituindo (5.13) em (5.16):

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -\frac{\alpha_3}{8} a^3 (e^{i3(\beta + \sqrt{\alpha_1} T_0)} + e^{-i3(\beta + \sqrt{\alpha_1} T_0)}) \quad (5.17)$$

Considerando a relação:

$$\cos\theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (5.18)$$

A equação pode ser representada na seguinte forma:

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -\frac{\alpha_3}{4} a^3 \cos(3\beta_0 + 3\sqrt{\alpha_1} T_0) \quad (5.19)$$

Resolvendo (5.19) considerando a solução homogênea (u_{1h}) e a particular (u_{1p}):

$$u_1 = a_1 \cos(\sqrt{\alpha_1} T_1 + \beta_1) + \frac{\alpha_3}{32\alpha_1} a_0^3 \cos(3\beta_0 + 3\sqrt{\alpha_1} T_0) \quad (5.20)$$

onde:

$$\begin{cases} u_{1h} = a_1 \cos(\sqrt{\alpha_1} T_1 + \beta_1) \\ u_{1p} = \frac{\alpha_3}{32\alpha_1} a_0^3 \cos(3\beta_0 + 3\sqrt{\alpha_1} T_0) \end{cases} \quad (4.21)$$

Substituindo (5.12) e (5.20) em (5.8) obtêm-se:

$$u = a_0 \cos(\sqrt{\alpha_1} t + \beta_0) + \varepsilon [a_1 \cos(\varepsilon \sqrt{\alpha_1} t + \beta_1) + \frac{\alpha_3}{32\alpha_1} a_0^3 \cos(3\beta_0 + 3\sqrt{\alpha_1} t)] \quad (5.22)$$

Derivando (5.22):

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -a_0 \sqrt{\alpha_1} \sin(\sqrt{\alpha_1} t + \beta_0) + \varepsilon [\varepsilon \sqrt{\alpha_1} a_1 \cos(\varepsilon \sqrt{\alpha_1} t + \beta_1) \\ & + \frac{\alpha_3 \sqrt{\alpha_1}}{32} a_0^3 \sin(3\beta_0 + 3\sqrt{\alpha_1} t)] \end{aligned} \quad (5.23)$$

Onde, a_0 , a_1 , β_0 e β_1 são constantes e podem ser obtidas considerando as condições iniciais.

Considerando que $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$, as equações (5.22) e (5.23) ficam na seguinte forma:

$$u = a_0 \cos(\beta_0) + \varepsilon[a_1 \cos(\beta_1) + \frac{\alpha_3}{32\alpha_1} \alpha_0^3 \cos(3\beta_0)] \quad (5.24)$$

$$\dot{u} = -a_0\sqrt{\alpha_1} \sin(\beta_0) - \varepsilon[\varepsilon\sqrt{\alpha_1}a_1 \cos(\beta_1) + \frac{\sqrt[3]{\alpha_1}\alpha_3}{32} \alpha_0^3 \sin(3\beta_0)] \quad (5.25)$$

Transpondo todos os termos para um lado e igualando os coeficientes das potências de ε para zero em (5.24) e (5.25) é equivalente a igualar os coeficientes de potências de ε como em ambos os lados destas equações. Os resultados são:

Ordem ε^0 :

$$u = a_0 \cos(\beta_0) \quad (5.26)$$

$$\dot{u} = -a_0\sqrt{\alpha_1} \sin(\beta_0) \quad (5.27)$$

Em quadratura e adicionando (5.26) e (5.27) obtém-se:

$$u^2_0 + \dot{u}^2_0 = a^2_0 \cos^2(\beta_0) + a^2_0\alpha_1 \sin^2(\beta_0) \quad (5.28)$$

Ordem ε :

$$a_1 \cos(\beta_1) = \frac{\alpha_3 \alpha_0^3}{32} \cos(3\beta_0) \quad (5.29)$$

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha_1}\alpha_3 \alpha_0^3}{32} \sin(3\beta_0) = 0 \quad (5.30)$$

Ordem ε^2 :

$$a_1 \sin(\beta_1) = 0 \quad (5.31)$$

Analisando (5.30) e (5.31), vemos que uma solução é a seguinte,

$$a_1 = \frac{\alpha_3 \alpha_0^3}{32}$$

$$a_0 = \sqrt{u^2_0 + \dot{u}^2_0} \quad (5.32)$$

o que implica em:

$$u = a_0 \cos(\sqrt{\alpha_1}T) + \varepsilon \left[-\frac{\alpha_3 \alpha_0^3}{32} \cos(\varepsilon \sqrt{\alpha_1}T) + \frac{\alpha_3}{32} \alpha_0^3 \cos(3\sqrt{\alpha_1}T) \right]$$

$$\dot{u} = -a_0 \sqrt{\alpha_1} \sin(\sqrt{\alpha_1}T) + \varepsilon \left[-\frac{\varepsilon \sqrt{\alpha_1} \alpha_3 \alpha_0^3}{32} \sin(\varepsilon \sqrt{\alpha_1}T) \right. \\ \left. + \frac{3\sqrt{\alpha_1} \alpha_3}{32} \alpha_0^3 \sin(3\sqrt{\alpha_1}T) \right] \quad (5.33)$$

O diagrama de fase para a solução analítica aproximada (5.33) pode ser observado na Fig. 5.4, e na Fig. 5.5 pode ser observada a comparação entre o diagrama do sistema (5.1) e o diagrama de fase da solução (5.33).

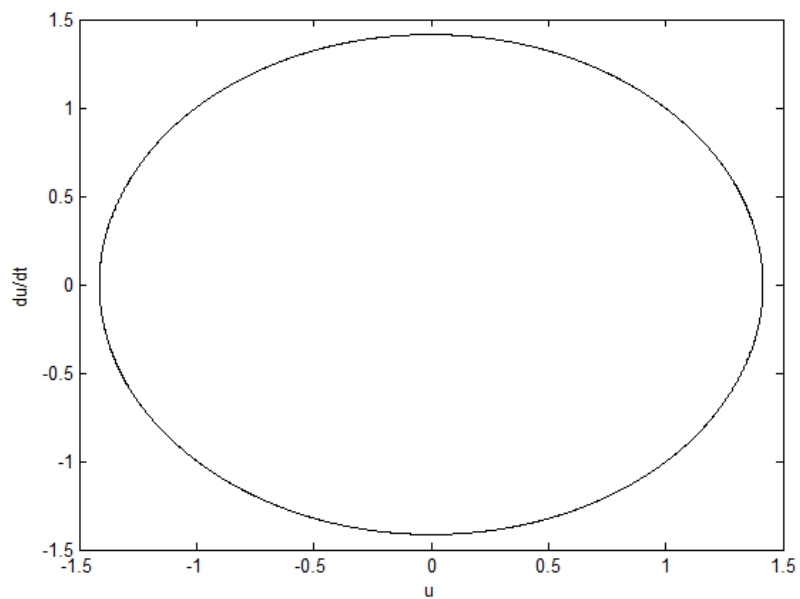


Fig. 5.4 – Retrato de fase para a solução do sistema micro eletromecânico

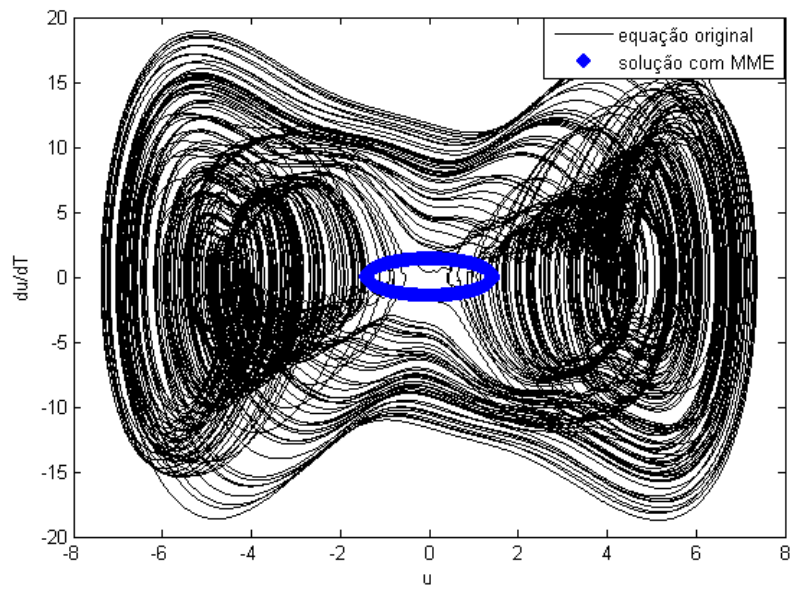


Figura 5.5 – Solução do sistema com comportamento caótico em preto, e solução analítica por meio da aplicação do método de múltiplas escalas.

6 PROJETO DE CONTROLE

Neste capítulo o objetivo é realizar uma comparação entre duas técnicas de controle testando sua eficiência no controle de um sistema micro eletromecânicas com comportamento caótico.

A primeira técnica de controle empregada será o controle desenvolvido por [Rafikov e Balthazar, 2008] para controlar os sistemas eletromecânicos. Este método visa encontrar um controle ótimo linear realimentado onde se encontram condições para a aplicação do controle linear em sistemas não lineares, garantindo a estabilidade do problema.

A segunda técnica de controle aplicada será o controle para sistemas não lineares através do método da equação de Riccati dependente do estado, o qual utiliza o controle sub – ótimo e busca estabilidade local do sistema [Mracek e Cloutier, 1998]

6.1 Controle Por Realimentação de Estados Aplicado ao Sistema Micro Eletromecânico

O objetivo é encontrar o Controle, tal que a resposta do sistema controlado (4.16) resulte em uma órbita periódica $\tilde{x}(t)$ assintoticamente estável.

Considerando a introdução do controle no sistema (4.16):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_3}{m}x_1^3 + \frac{c}{m}x_2 + \frac{\beta x d^4}{(d^2 - x^2)^2} * \\ &\left[V_p^2 + \frac{1}{2}V_i^2 + 2 * V_p V_i \sin(\omega t) - \frac{1}{2}V_i^2 \cos(2\omega t) \right] + U \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde: $U = u + \tilde{u}$

Sendo \tilde{u} o controle que mantêm o sistema na trajetória desejada.

O controle *feedforward* \tilde{u} é dado por:

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}}_2 - \frac{k_1}{m} \tilde{x}_1 + \frac{k_3}{m} \tilde{x}_1^3 + \frac{c}{m} \tilde{x}_2 - \frac{\beta \tilde{x}}{(d^2 - \tilde{x}^2)^2} * \left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2 * V_p V_i \sin(\omega t) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2\omega t) \right] \quad (6.2)$$

Substituindo (6.1) em (6.2) e definindo os desvios da trajetória desejada como:

$$e = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

O sistema (6.1) pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= a_1 e_1 - b e_2 - a_3 ((e_1 + \tilde{x}_1)^3 - \tilde{x}_1) + \frac{\beta(e_1 + \tilde{x}_1)}{(d^2 - (e_1 + \tilde{x}_1)^2)} * \\ &\left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2 * V_p V_i \sin(\omega t) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2\omega t) \right] + u \end{aligned} \quad (6.4)$$

sendo $u = U - \tilde{u}$ o controle *feedback*. O sistema (6.2) pode ser representado em desvios como:

$$\dot{e} = Ae + g(x) - g(\tilde{x}) + Bu \quad (6.5)$$

Representando o sistema (6.2) na forma (6.3):

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + g(x) - g(\tilde{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6.6)$$

sendo:

$$g(x) - g(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_3((e_1 + \tilde{x}_1)^3 - \tilde{x}_1) + \frac{\beta(e_1 + \tilde{x}_1)}{(d^2 - (e_1 + \tilde{x}_1)^2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2 * V_p V_i \sin(\omega t) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2\omega t) \right] \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Conforme [Rafikov e Balthazar, 2008], se existirem matrizes Q e R , definidas positivas com matriz Q simétrica, tal que a matriz:

$$\tilde{Q} = Q - G^T(x, \tilde{x})P - PG(x, \tilde{x}) \quad (6.8)$$

seja definida positiva com matriz G limitada, então o controle u é ótimo e transfere o sistemas não linear (6.2) de qualquer estado inicial ao estado final:

$$e(\infty) = 0 \quad (6.9)$$

Minimizando o funcional:

$$J = \int_0^{\infty} (e^T \tilde{Q} e + u^T R u) dt \quad (6.10)$$

O controle u pode ser encontrado resolvendo a equação:

$$u = -R^{-1} B^T P e = -K e \quad (6.11)$$

Sendo a matriz P simétrica, e pode ser encontrada da equação algébrica de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.12)$$

Como pode ser observado na Fig. 4.7, a amplitude de deslocamento aumenta com o passar do tempo chegando a valores críticos, pois o valor máximo permitido é $x_1 < 2$.

Definindo então a trajetória desejada como a órbita periódica:

$$\tilde{x} = \sin(\omega t) \quad (6.13)$$

A matriz A , e a matriz B , podem ser representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1000 & -0.005 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

e definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = [1].$$

Utilizando o comando `lqr` do `matlab`^f obtêm-se:

$$p = \begin{bmatrix} 63266,44 & 2000 \\ 2000 & 63,2563 \end{bmatrix} \text{ e } K = [2000 \quad 63,2563] \quad (6.15)$$

Substituindo em (6.11) obtêm-se o controle:

$$u = -2000e_1 - 63,2563e_2 \quad (6.16)$$

O deslocamento do pode ser observado na Fig. 6.1, e o diagrama de fase pode ser observado na Fig. 6.2, considerando a aplicação do controle (6.16) em (6.11), e a seguinte substituição:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 + \tilde{x}_1 \\ e_2 + \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

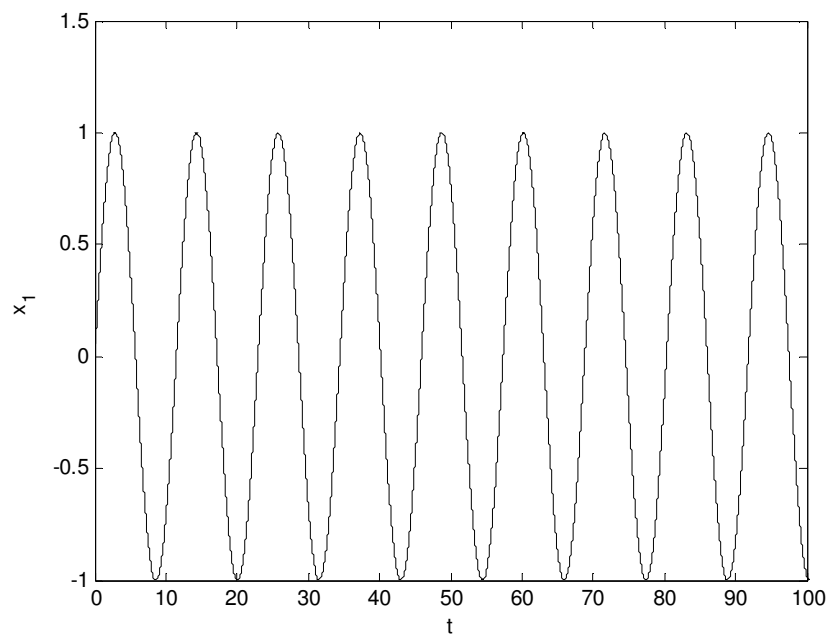


Fig. 6.1 – Deslocamento de x_1 para o sistema micro eletromecânico controlado

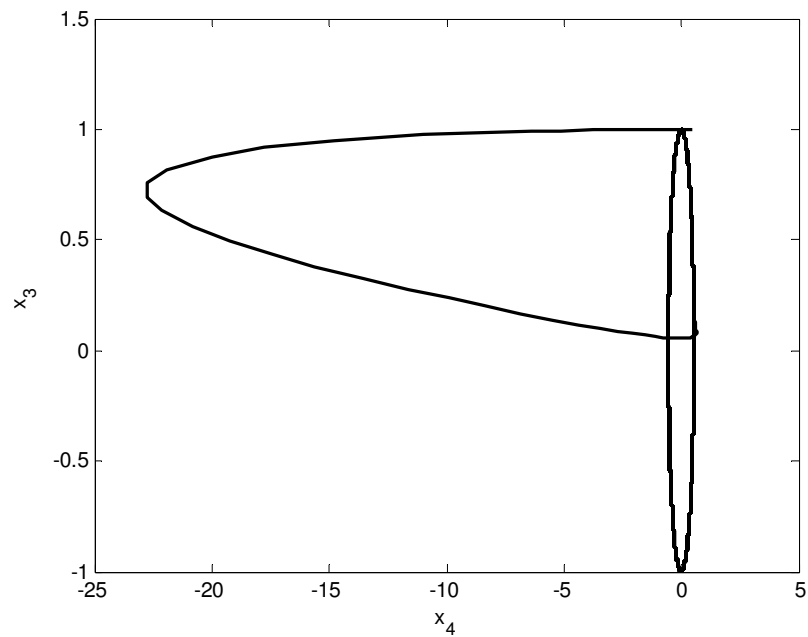


Fig. 6.2 – Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico controlado.

Como pode ser observado na Fig. 5.6, o controle (6.16) levou o sistema (6.2) para à órbita desejada (6.3), mantendo as oscilações em uma amplitude e frequência definida como satisfatória.

6.2 Controle do Deslocamento do Sistema Micro Eletromecânico Com Comportamento Caótico

Com o objetivo de controlar o sistema na órbita da solução analítica obtida através do Método das Múltiplas Escalas (5.33) são utilizados dois controles que utilizam a realimentação de estados, o controle SDRE e o controle Ótimo LQR.

6.2.1 Controle do Deslocamento Através Por Realimentação de Estados

O objetivo é encontrar o Controle Ótimo, tal que a resposta do sistema controlado (2.45) resulte em uma órbita periódica $u^*(t)$ assintoticamente estável.

Considerando a introdução do sinal de controle U no sistema (4.16):

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\alpha_1 u_1 - \alpha_3 u_1^3 - b u_2 + \beta \frac{u_1}{(d^2 - u_1^2)^2} \left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2V_p V_i \sin(wT) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2wT) \right] + U \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde: $U = u_r + \tilde{u}$

Sendo \tilde{u} o controle *feedforward* que mantêm o sistema na trajetória desejada e dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \dot{u}_2^* + \alpha_1 u_1^* + \alpha_3 u_1^{*3} + b u_2^* - \frac{\beta u_1^*}{(d^2 - u_1^{*2})^2} * \\ &\left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2 * V_p V_i \sin(wT) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2wT) \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

Substituindo (6.18) em (6.18) e definindo os desvios da trajetória desejada como:

$$e = \begin{bmatrix} u_1 - \tilde{u}_1 \\ u_2 - \tilde{u}_2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

O sistema (6.18) pode ser representado na forma de desvios na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\alpha_1 e_1 - b e_2 - \alpha_3 ((e_1 + u_1^*)^3 - u_1^*) + \\ &\frac{\beta (e_1 + u_1^*)}{(d^2 - (e_1 + u_1^*)^2)^2} \left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2 * V_p V_i \sin(wT) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2wT) \right] + u_r \end{aligned} \quad (6.21)$$

sendo $u_r = U - \tilde{u}$ o controle por realimentação de estados.

O sistema (6.21) pode ser representado em desvios como:

$$\dot{e} = Ae + G(u, u^*) + Bu_r \quad (6.22)$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + G(u, u^*) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_r \quad (6.23)$$

sendo:

$$G(u, u^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_3((e_1 + u^*_1)^3 - u^*_1) + \frac{\beta(e_1 + u^*_1)}{(d^2 - (e_1 + u^*_1)^2)} \left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2 * V_p V_i \sin(wT) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2wT) \right] \end{bmatrix}$$

Conforme [Tusset *et al*, 2009], se existirem matrizes Q e R , definidas positivas com matriz Q simétrica, tal que a matriz:

$$\tilde{Q} = Q - G^T(u, u^*)P - PG(u, u^*) \quad (6.24)$$

seja definida positiva com matriz G limitada, então o controle u_r é ótimo e transfere o sistemas não linear (6.21) de qualquer estado inicial ao estado final:

$$e(\infty) = 0 \quad (6.25)$$

Minimizando o funcional:

$$J = \int_0^{\infty} (e^T \tilde{Q} e + u^T R u) dt \quad (6.26)$$

O controle u pode ser encontrado resolvendo a equação:

$$u_r = -R^{-1} B^T P e = -K e \quad (6.27)$$

Sendo a matriz P simétrica, e pode ser encontrada da equação algébrica de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.28)$$

Definindo com trajetória desejada a solução obtida em (5.33):

$$u = a_0 \cos(\sqrt{\alpha_1} T) + \varepsilon \left[-\frac{\alpha_3 a_0^3}{32} \cos(\varepsilon \sqrt{\alpha_1} T) + \frac{\alpha_3}{32} a_0^3 \cos(3\sqrt{\alpha_1} T) \right]$$

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1000 & -0.005 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, R = [0.0001].$$

Utilizando o comando `lqr` do matlab^f obtêm-se:

$$P = \begin{bmatrix} 152.7901 & 0.5582 \\ 0.5582 & 0.0333 \end{bmatrix} \text{ e } K = [5582.5756 \quad 333,4093] \quad (6.29)$$

Substituindo K em (6.27) obtêm-se o controle:

$$u = -5582.5756e_1 - 333,4093e_2 \quad (6.30)$$

O deslocamento do pode ser observado na Fig. 6.3, e o diagrama de fase pode ser observado na Fig. 6.4, considerando a aplicação do controle (6.30) em (6.27), e a seguinte

substituição:
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 + u_1^* \\ e_2 + u_2^* \end{bmatrix}.$$

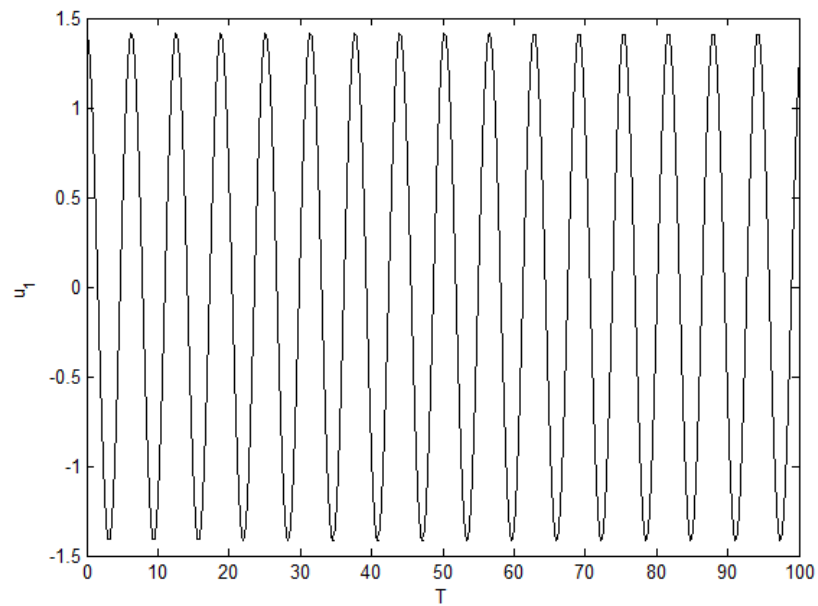


Fig. 6.3- Deslocamento de u_1 para o sistema micro eletromecânico com controle

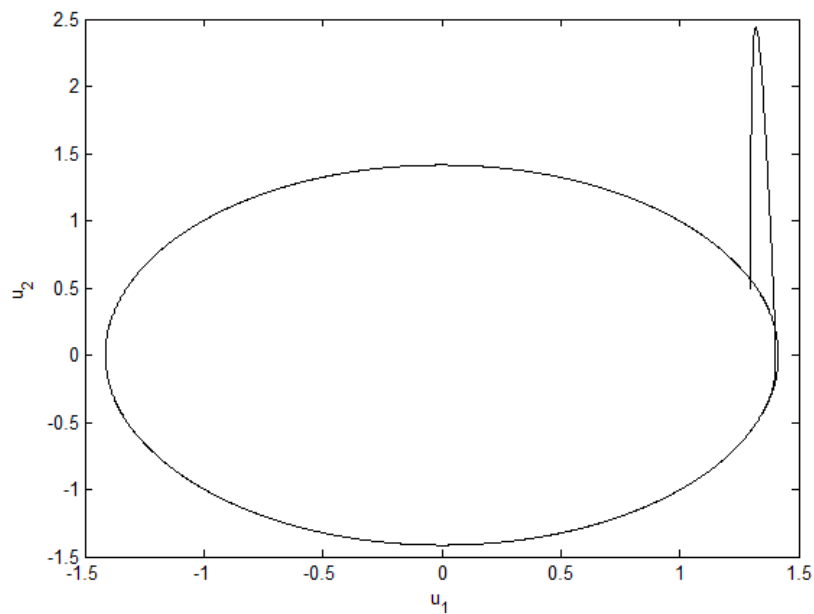


Fig. 6.4 – Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico com controle

Como pode ser observado na Fig. 6.4, o controle (6.30) levou o sistema (6.1) para à órbita desejada (5.33).

Conforme [Tusset *et al*, 2009] para os casos em que analisar a matriz \tilde{Q} analiticamente é muito difícil, é possível analisar numericamente considerando a função $L(T) = e^T(t)\tilde{Q}(t)e(t)$, calculada na trajetória ótima, se $L(t)$ for definida positiva para todo o intervalo de tempo, então a matriz \tilde{Q} é definida positiva.

Na Fig. 6.5 pode ser observado o valor de $L(t)$ calculada numericamente.

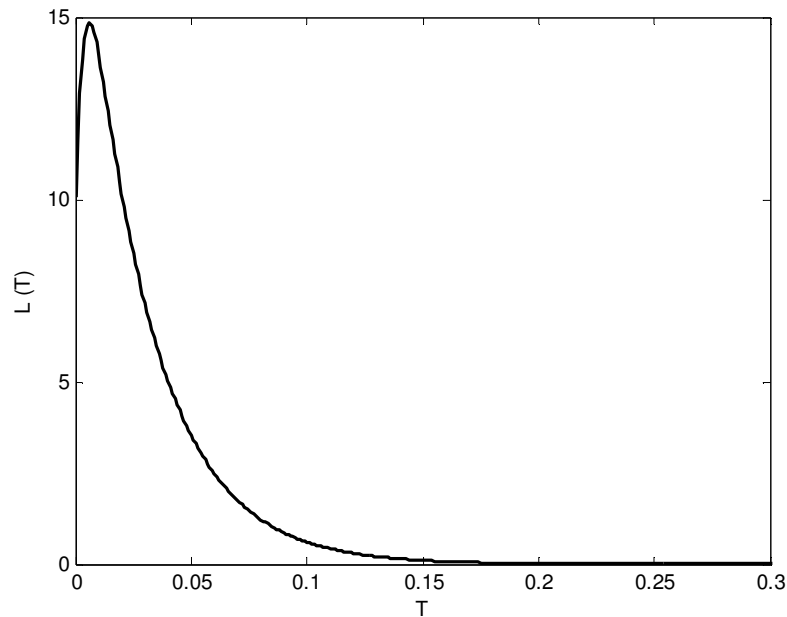


Fig. 6.5 – Função $L(T)$ para o sistema micro eletromecânico com controle

Na Fig. 6.5 pode ser observado que $L(T)$ manteve-se positiva até o momento em que $e \rightarrow 0$, demonstrando que o controle (6.30) é ótimo e que a matriz \tilde{Q} é definida positiva. Como $e \rightarrow 0$ para $T > 0.16$, para uma melhor visualização de $L(T)$ a Fig. 6.5 foi gerada para um intervalo de $0 < T < 0.3$.

6.2.2 Controle Utilizando a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE)

O método SDRE será utilizado para determinar o sinal de controle a ser aplicada no controle do sistema na órbita desejada. Diferentemente da estratégia de controle utilizado anteriormente, em que o controle dependia de dois controladores um não linear (*feedforward*) e outro controle com realimentação de estados (*feedback*), nesta secção, o controle será realizado apenas com um controle.

Escrevendo o sistema dinâmico definido por (4.16) na seguinte forma [Shawky *et al*, 2007]:

$$\dot{u} = f(u) + B(u)u, \quad (6.31)$$

onde: $f(u) = A(u)u$

Onde o vetor $u = [u_1 \ u_2]^T$ representa os estado do sistema dependente do tempo, $\dot{u} \in R^2$ é o vetor de derivadas primeira do estado, $u_r \in U \in R$ é a função de controle.

Considerando as condições iniciais $u(T_0) = u_0$, e que $f(0) = 0$, o que implica que a origem seja um ponto de equilíbrio.

Escrevendo (4.16) na forma (6.31):

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 u_1^2 + \frac{\beta}{(d^2 - u_1^2)^2} \left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2V_p V_i \sin(wT) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2wT) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -b \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_r$$

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 - a_3 u_1^2 + \frac{\beta}{(d^2 - u_1^2)^2} \left[V_p^2 + \frac{1}{2} V_i^2 + 2 * V_p V_i \sin(wT) - \frac{1}{2} V_i^2 \cos(2wT) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = [0.0001]$$

Assim o funcional custo a ser minimizado através do Controle SDRE, é dado por [Shawky *et al*, 2007]:

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Q(e) e + u_r^T R(u) u_r) dt \quad (6.33)$$

Sendo: $\dot{u} = Au + Bu_r$, $e(0) = e_0$, $e(\infty) = 0$ e $e = [u - u^*]$

O controle de realimentação de estados não-linear é obtido de:

$$u_r = -R^{-1}(e)B^T(e)P(e) = -K(e)e \quad (6.34)$$

onde: $P(e)$ é a solução da Equação de Riccati dependente do Estado:

$$P(e)A(e) + A^T(e)P(e) - P(e)B(e)R^{-1}(e)B^T(e)P(e) + Q(e) = 0 \quad (6.35)$$

O deslocamento pode ser observado na Fig. 5.10, e o diagrama de fase pode ser observado na Fig. 5.11, considerando a aplicação do controle (5.61) em (2.45), e a seguinte substituição: $u_r = -K(e)[u - u^*]$.

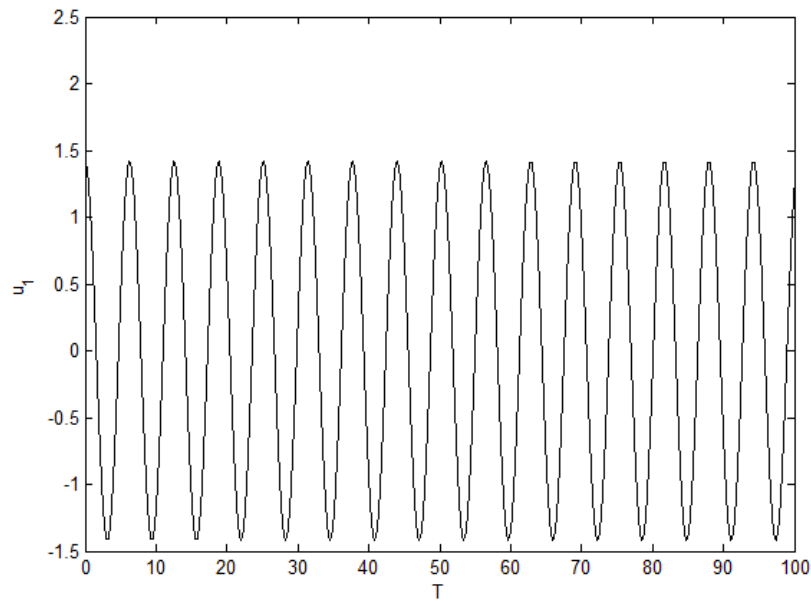


Fig. 6.6 – Deslocamento de u_I para o sistema micro eletromecânico com controle (SDRE)

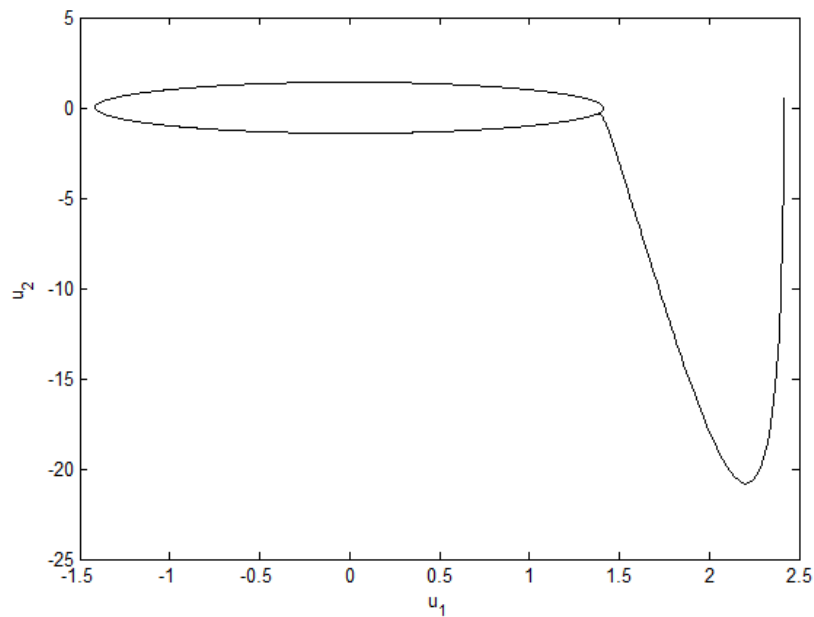


Fig. 6.7 – Diagrama de fase para o sistema micro eletromecânico com controle (SDRE)

Na Figura 6.8 pode ser observado o sinal de controle para o controle Ótimo e o Controle (SDRE).

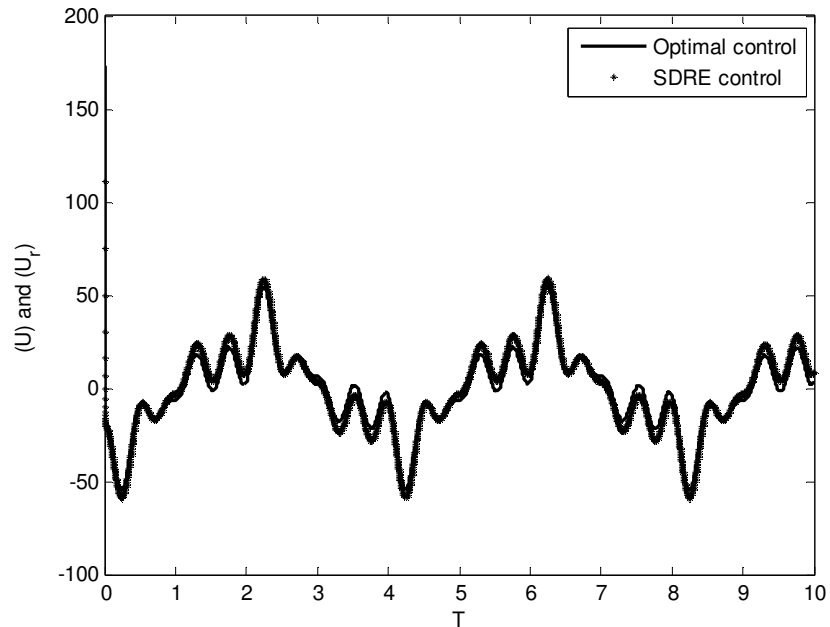


Fig. 6.8 – Sinal de controle para o controle Ótimo e o controle SDRE

Como pode ser observada na figura 6.8, a diferença entre os valores dos controles é muito pequena. Como os dois controles são praticamente iguais o tempo necessário para levar o sistema para a órbita desejada também é praticamente o mesmo, como pode ser observado na Fig. 6.9.

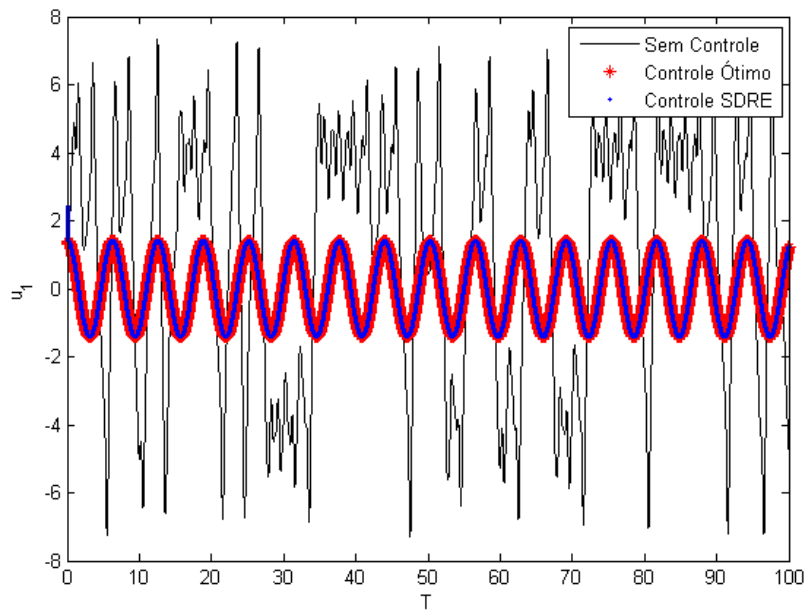


Fig. 6.9 – Deslocamento de u_1 sem controle e considerando o controle Ótimo ($U = u_r + \tilde{u}$) e o controle SDRE (u_r)

Como pode ser observado na Fig. 6.9, tanto o controle Ótimo como o controle SDRE foram eficientes no controle das oscilações do sistema (4.16) levando o sistema para a órbita periódica (5.33) obtida considerando o Método das Múltiplas escalas.

7 CONCLUSÃO

Nesta dissertação foram analisados sistema eletromecânicos em macro e micro escalas. Para isto a dissertação foi dividida em duas partes. A primeira parte é dedicada a modelagem matemática, análise do comportamento dinâmico, simulações numéricas e controle do sistema eletromecânico em macro escala. A segunda parte é dedicada a modelagem matemática, análise do comportamento dinâmico, simulações numéricas e controle do sistema micro eletromecânico.

CONCLUSÃO DA PRIMEIRA PARTE

Através de simulações numéricas, foi possível demonstrar o comportamento dinâmico não linear de um sistema eletromecânico com indutância variável. Com a aplicação do Controle Linear *Feedback* foi possível controlar a frequência e amplitude de deslocamento do sistema acoplado eletromecânico, considerando que tanto o sistema elétrico como o mecânico devem ter a mesma amplitude de deslocamento e frequência para um bom desempenho e funcionamento de dispositivo eletromecânico. O método de controle de realimentação linear atingiu o objetivo proposto, conforme pode ser observado nas simulações numéricas apresentadas no capítulo 2 desta dissertação. Com a aplicação do controle utilizando a equação de Riccati dependente do estado (SDRE), também foi possível controlar a amplitude e frequência do deslocamento do sistema eletromecânico, considerando que tanto o sistema elétrico como o mecânico devem ter a mesma amplitude de deslocamento e frequência. Quando realizada uma comparação entre as duas técnicas de controle para o sistema eletromecânico, foi possível observar que para esta aplicação a técnica de controle ótimo por realimentação de estados se mostrou mais eficiente visto que esta levou menos tempo para levar o sistema a orbita periódica desejada. Também foi possível analisar a transferência de energia no sistema eletromecânico onde a energia é dirigida a partir de uma fonte (doador) a um receptor em uma única direção irreversível, verificada através de simulações numéricas da energia instantânea, sem aplicar o controle e após o controle, conforme mostrado nas figuras 3.5 e 3.7, respectivamente.

CONCLUSÃO DA SEGUNDA PARTE

Através das simulações numéricas foi possível demonstrar o comportamento dinâmico de um sistema micro eletromecânico com comportamento não linear. Com a aplicação do Controle Linear *Feedback* foi possível controlar a amplitude de deslocamento do sistema, considerando que o deslocamento da placa móvel central deve ser inferior a distancia entre as placas laterais fixas, com o objetivo de evitar danos no dispositivo eletromecânico. O método de Controle Linear *Feedback*, atingiu o objetivo proposto, no capítulo 6, onde o deslocamento da placa móvel central ocorreu como o desejado. Considerando que os resultados obtidos, na aplicação do controle, como uma alternativa para melhorar o designer e fabricação de dispositivos MEMS.

Também foi possível observar um comportamento caótico, por meio das simulações numéricas realizadas para o sistema micro eletromecânico. Esta análise possibilitou projetar a estratégia de controle, considerando uma orbita desejada, obtida da aplicação do Método das Múltiplas Escalas. As duas estratégias de controle utilizadas neste trabalho demonstraram ser eficientes no controle da trajetória do sistema dinâmico estudado. A comparação dos resultados obtidos com o controle Ótimo obtido analiticamente e o controle numérico SDRE mostrou que o controle SDRE para o caso estudado obteve o mesmo resultado, com mais simplicidade matemática e computacional do que o controle obtido analiticamente, mas sem a garantia de ser ótimo para outras aplicações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bassinello D. G., Balthazar J. M., Tusset A. M., Pontes B. R. Jr., Felix J. L. P., 2011. On Control and Non Linear Dynamic of a Coupled Electromechanical System, With Variable Inductance. 21st International Congress of Mechanical Engineering. October 24 – 28.
- Bishop, R. H., 2006. Mechatronics: an introduction, CRC Press.
- BURDEN R. L.; FAIRES, J. D., 2007. “Numerical analysis”. Cengage Learning.
- Chavarette F. R., Balthazar J. M. , Felix J. L. P., Rafikov M., 2009. “A reducing of a chaotic movement to a periodic orbit, of a micro-electro-mechanical system, by using an optimal linear control design” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 14, Issue 5, pp 1844-1853.
- Gendelman O., 2007. Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity, J. Sound Vib., 315, 723-745.
- Gourdon E., Lamarque C.H., 2005. Energy Pumping with various Nonlinear Structures: Numerical Evidences, Nonlin. Dyn., 40, 281-307.
- IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 1996: Piscataway: IEEE Press.
- Harashima, F. and M. Tomizuka (1996). Mechatronics – “what it is, why and how?”. IEEE/ASME Trans. on Mechatronics 1, 1–2.
- Isermann R., 2000. Mechatronic systems: concepts and applications. Transactions of the Institute of Measurement and Control 22, 1 pp. 29–55.
- Jazar R. N., Mahinfalah M., Mahmoudian N., Rastgaar M. A., 2009 “Effects of Nonlinearities on the Steady State Dynamic Behavior of Electric Actuated Microcantilever-based Resonators”, Journal of Vibration and Control Online First, doi:10.1177/1077546307086443.
- Jazar G. N., 2006. “Mathematical modeling and simulation of thermoelastic effects in flexural microcantilever resonators dynamics,” Journal of Vibration and Control Vol. 12, pp 139–163.
- Kyura, N. and Oho, H. 1996: Mechatronics – an industrial perspective. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics 1, 10–15.
- Moon F. C., 2000. Applied Dynamics - With Applications To Multibody And Mechatronic Systems, Wiley-Interscience.

- Mracek, C. P. e Cloutier, J. R. (1998). Control Designs for the Nonlinear Benchmark Problem via the State-dependent Riccati Equation Method, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 8: 401–433.
- Nayfeh A. H., Mook D. T., 1979. *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York.
- NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B., 1995. “Applied Nonlinear Dynamics - Analytical, Computational, and Experimental Methods”. John Wiley and Sons.
- Preumont A., 2006. *Mechatronics Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*. Springer.
- Rafikov M., Balthazar J.M., 2008. “On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via linear feedback control”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13, 7, pp.1246-1255.
- Rafikov, M., Balthazar J. M., Tusset, A. M., 2008, “An Optimal Linear Control Design for Nonlinear Systems”. *Journal Of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. ISSN 1678-5878.
- Senturia D. S., Aluru N., White J., 1997. *Simulating the Behavior of MEMS Devices: Computational Methods and Needs*. *IEEE Computational Science & Engineering*, Volume 4 Issue 1. doi10.1109/99.590854.
- Shawky, A. M.; Ordys, A. W.; Petropoulakis, L.; Grimble, M. J., 2007. “Position control of flexible manipulator using non-linear with state-dependent Riccati equation”. *Proc. IMechE*, 221 Part I: J. Systems and Control Engineering, 475-486.
- Tusset, A. M. ; Rafikov, M. ; Balthazar, J. M., 2009. An Intelligent Controller Design for Magnetorheological Damper Based on a Quarter-car Model. *Journal of Vibration and Control*, v. 15, p. 1907-1920.
- Tusset, A. M.; Balthazar, J. M, Chavarette F.R., Felix J.L., 2011. On Energy Transfer in a (MR) Damper Chaotic (Ideal and Non-Ideal) Vibrating System. In 7th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2011, Rome. July 24-29, accepted to publication.
- Tusset A. M., Balthazar J. M., Bassinello D. G., Pontes B. R. Jr., 2011. Controlling Chaotic Behaviour of a “MEMS” Comb-Drive Actuator. *7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)*. Rome, Italy. July 24 - 29, accepted to publication.

Vakakis A. F., Gendelman O., 2001. Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators: Part II—Resonance Capture. *J. Appl. Mech.* - January 2001 - Volume 68, Issue 1, 42 (7 pages) doi:10.1115/1.1345525.

Varadan K.C., Wang Q.. 2003. Transition of the buckling load of beams by the use of piezoelectric layers. *Smart Mater. Struct.* 12 696 doi: 10.1088/0964-1726/12/5/305.

ANEXO I – CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

O controle por realimentação é um mecanismo matemático que regula e estabiliza o comportamento de sistemas dinâmicos. Sendo o sinal de controle uma função da diferença dos valores atuais e os valores desejados das variáveis de estado do sistema. O controle utiliza a saída do sistema para realimenta – lo através do sinal de controle. A metodologia do controle ótimo busca controlar o processo de forma desejada ao mesmo tempo em que minimiza um índice de desempenho.

A aplicação desta técnica de controle por realimentação a sistemas não lineares se deve a sua simplicidade de configuração. Tal técnica esta baseada na teoria de estabilidade de Lyapunov e o controle linear quadrático (LQR). Pode ser observado em (Raficov e Balthazar, 2006) uma condição suficiente para utilização do controle por realimentação em sistemas não lineares.

Considerando o sistema, descrito pela equação (AI.1):

$$\dot{x} = Ax + g(x) + u \quad (\text{AI.1})$$

Sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de estados, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estados formada pelos termos lineares do sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, e $g(x)$ é um vetor de funções contínuas não lineares. O objetivo é encontrar uma lei de controle u capaz de conduzir o sistema sob ação de perturbações externas a um estado desejado, podendo ser este estado um ponto de equilíbrio, uma orbita periódica ou ainda uma orbita não periódica.

O vetor de controle u é constituído de duas partes:

$$U = \tilde{u} + u_r \quad (\text{AI.2})$$

Sendo \tilde{u} o controle *feedforward* que mantêm o sistema na trajetória desejada, e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{u} = \dot{x}^* - Ax^* - g(x^*) \quad (\text{AI.3})$$

Onde x^* é o estado de equilíbrio desejado e u_r é o controle por realimentação de estados e tem a seguinte forma:

$$u_r = Bu \quad (\text{AI.4})$$

Onde $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz constante. Definindo o erro dos seguimentos dos estados:

$$y = x - x^* \quad (\text{AI.5})$$

Como desvio da trajetória do sistema (AI.1) do estado desejado, e substituindo (AI.2), (AI.5) e (AI.3) em (AI.1) obtém-se a seguinte equação:

$$\dot{y} = Ay + g(x) - g(x^*) + Bu \quad (\text{AI.6})$$

A parte não linear do sistema (AI.6) pode ser escrita da seguinte forma:

$$g(x) - g(x^*) = G(y, x^*)(x - x^*) \quad (\text{AI.7})$$

Onde $G(y, x^*)$ é uma matriz limitada, cujos elementos dependem de y e x^* . Considerando (AI.7) o sistema descrito pela equação (AI.6) adquire a seguinte forma:

$$\dot{y} = Ay + G(y, x^*)y + Bu \quad (\text{AI.8})$$

Teorema. Se existe as matrizes Q e R , escolhidas de forma a serem positivas com Q simétrica, tal que a matriz:

$$\tilde{Q} = Q - G^T(x, \tilde{x})P - PG(x, \tilde{x}) \quad (\text{AI.9})$$

seja definida positiva, onde a matriz P é a solução da seguinte equação diferencial matricial de Riccati:

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (\text{AI.10})$$

então o controle por realimentação de estados:

$$u = -R^{-1}B^T P y \quad (\text{AI.11})$$

O controle u_r é ótimo e transfere o sistema não linear (AI.6) de qualquer estado inicial ao seu estado final:

$$y(\infty) = 0 \quad (\text{AI.12})$$

Minimizando o funcional:

$$J = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q} y + u^T R u) dt \quad (\text{AI.13})$$

Prova. Considerando o controle (AI.11) com matriz P determinada através da solução da equação (AI.10) que transfere o sistema não linear (AI.8) de qualquer estado inicial para o estado final (AI.12), minimizando o funcional (AI.13) sendo necessário determinar a função de \tilde{Q} .

Considerando as regras de Programação Dinâmica, se o mínimo de funcional (AI.13) existe e se uma função V é uma função suave das condições iniciais, então a função V satisfaz a equação de Hamilton – Jacobi – Bellman.

$$\underbrace{\min}_u = \left(\frac{dV}{dt} y^T \tilde{Q} y + u^T R u \right) = 0 \quad (\text{AI.14})$$

Considerando a função de Lyapunov:

$$V = y^T P y \quad (\text{AI.15})$$

Onde P é uma matriz simétrica definida positiva obtida pela equação de Riccati (AI.10). A derivada da função V avaliada na trajetória ótima como o controle dado por (AI.11) é:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{y}^T P y + y^T \dot{P} y + y^T P \dot{y} & (\text{AI.16}) \\ &= [y^T A^T + y^T G^T(y, \tilde{x}) - y^T P B (R^{-1})^T B^T] P y + y^T \dot{P} y + y^T P [A y \\ &\quad + G(y, \tilde{x}) y - B R^{-1} B^T P y]\end{aligned}$$

Substituindo então a equação de Hamilton – Jacobi – Bellman (AI.14), obtém – se:

$$\dot{y}^T [\dot{P} + A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + G^T(y, \tilde{x}) P + P G(y, \tilde{x}) + \tilde{Q}] y = 0 \quad (\text{AI.17})$$

Considerando a equação (AI.14), obtém – se:

$$\tilde{Q} = Q - G^T(y, \tilde{x}) P - P G(y, \tilde{x}) \quad (\text{AI.18})$$

Pra que as funções \tilde{Q} e R sejam definidas positivas a derivada da função V avaliada na trajetória ótima do sistema (AI.3) é definida negativa e dada por:

$$\dot{V} = -y^T \tilde{Q} y - u^T R u \quad (\text{AI.19})$$

Como (AI.15) é uma função de Lyapunov, e de acordo com a teoria de estabilidade de Lyapunov, é possível concluir que o sistema em desvios (AI.3) é localmente assintoticamente estável. Integrando (AI.19) ao longo da trajetória ótima tem – se:

$$J_{min} = y_0^T P(0) y_0 \quad (\text{AI.20})$$

Se $\Gamma = \mathfrak{R}^n$, então a estabilidade global do sistema controlado é uma consequência direta da propriedade da função de Lyapunov (AI.15), com $V(y) \rightarrow \infty$ quando $\|y\| \rightarrow \infty$.

Com base na teoria de controle ótimo de sistema lineares com funcional quadrático a solução de equação diferencial matricial de Riccati (AI.10) é uma matriz positiva e simétrica $P > 0$ para quaisquer $R > 0$ e $Q > 0$, completando assim a prova do teorema.

Conforme [Raficov e Balthazar, 2006] para os casos em que analisar a matriz \tilde{Q} é muito difícil, é possível analisar numericamente considerando a função

$L(t) = y^T(t)\tilde{Q}(t)y(t)$, calculada na trajetória ótima, se $L(t)$ é definida positiva para todo o intervalo de tempo, então a matriz \tilde{Q} é definida positiva.

ANEXO 2 - CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE RICCATI DEPENDENTES DO ESTADO.

O método das equações dependentes de estado SDRE aborda sistemas não lineares como sistemas lineares. Além disso, os resultados das simulações mostram que a abordagem SDRE tem características semelhantes à robustez do regulador linear quadrático LQR.

É apresentada a técnica do regulador linear quadrático LQR de forma resumida, visto que este é a base para a abordagem SDRE. O LQR pode ser aplicado a sistemas lineares da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\tag{AII.1}$$

Onde $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$ são matrizes em função do tempo, e $x(t)$ representa o estado do sistema.

Pode – se minimizar o funcional de custo por meio de:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u dt\tag{AII.2}$$

A abordagem LQR encontra a lei de controle (u) que minimiza o funcional de custo. Uma propriedade exclusiva deste controlador ideal é que a lei de controle tem a forma de estado *feedback*, isto é, u depende apenas dos estados. A abordagem SDRE pode ser considerada como uma extensão do LQR. Visto que este produz um controlador de qualidade sub – ótimo para sistemas não lineares. Isto porque das aproximações exigidas na parametrização de sistemas não lineares, bem como utilizando uma equação de Riccati para aproximar a solução para o problema de controle ótimo ao invés de resolver a equação de Hamilton-Jacobi correspondente.

Em vez de utilizar um modelo linear, o SDRE começa com um modelo de entrada de forma não linear:

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u\tag{AII.3}$$

Associado com o funcional de custo:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T Q(x)x + u^T R(x)u dt \quad (\text{AII.4})$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f(x) \in C^k$, $g \in C^k$, $Q(x) \in C^k$, $R(x) \in C^k$, $k \geq 1$, $Q(x) \geq 0$, e $R(x) > 0$ para todo x . Assumindo que $f(0) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo x .

O problema agora pode ser formulado como um problema para minimizar o funcional de custo da Equação (AII.3).

$$\begin{aligned} \min_u \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T Q(x)x + u^T R(x)u dt \\ \text{sujeito a } \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (\text{AI.5})$$

A solução para este problema é equivalente a resolver uma equação de Hamilton-Jacobi. No entanto, como resolver a equação de Hamilton-Jacobi é muito difícil, esta é aproximada usando o método da equação de Riccati dependente do (AI.6). Isto torna o problema viável, embora isso leva a um controlador de qualidade inferior.

A técnica de controle neste problema, como para o LQR, é também uma técnica de controle por realimentação de estados, que depende da solução para a equação de Riccati dependente do estado. Isto pode ser visto, reescrevendo o sistema da equação (AI.2) como:

$$\dot{x}(t) = A(x)x + B(x)u \quad (\text{AI.6})$$

Onde $f(x) = A(x)x$ e $B(x) = g(x)$. Em geral, $A(x)$ é única somente para um x escalar. Considerando um exemplo ilustrativo, em um caso multivariável $f(x) = [x_2, x_1^2]^T$. A parametrização óbvia para os coeficientes dependentes de estado (SDC) é:

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.7})$$

É possível realizar um número infinito de parametrizações para os coeficientes dependentes de estados. Sendo possível comprovar este fato desde que existam ao menos duas parametrizações para todo $0 \leq \alpha \leq 1$, satisfazendo:

$$\alpha A_1(x)x + (1 - \alpha)A_2(x)x = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x) = f(x) \quad (\text{AII.8})$$

Um importante fator na escolha das parametrizações a serem feitas é não violar a controlabilidade do sistema.

O controle de realimentação de estados não-linear é obtido de:

$$u_r = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = -K(x)x \quad (\text{AII.9})$$

onde: $P(x)$ é a solução da Equação de Riccati dependente do Estado:

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \quad)$$

Nos casos em que nem todos os estados estão disponíveis, existe a necessidade de projetar um observador para estimar os estados que não são avaliados. Em princípio, uma dupla para o controlador SDRE ou outros observadores não lineares.

É importante salientar que a existência do controle ideal para uma parametrização particular do sistema não é garantida. Além disso, pode haver um número infinito de parametrizações do sistema, então a escolha de parametrização é muito importante. O outro fator que pode determinar a existência de uma solução para a equação de Riccati é a seleção das matrizes Q e R com base na equação de Riccati (AII.10).

ANEXO III – MÉTODO DE MÚLTIPLAS ESCALAS

O método das escalas múltiplas (MEM) é um dos métodos assintóticos de grande eficiência. Seus desenvolvimentos principais incluem oscilações não-lineares, problemas de camadas limites, dinâmica dos fluídos, aerodinâmica e a teoria de movimento de astronave [Nayfeh e Mook, 1979].

O MEM tem como idéia central a transformação das equações diferenciais do problema a ser abordado, sendo ela linear ou não, em uma série de equações diferenciais lineares solúveis de forma recorrente, ou seja, a correção em primeira ordem depende da solução em ordem zero, a correção em segunda ordem, depende das correções de ordem zero e um e assim sucessivamente.

De um modo geral equações de sistemas não lineares utilizam métodos assintóticos para obter soluções aproximadas. Considerando como exemplo o movimento oscilatório de um sistema massa, mola e amortecedor sob ação de uma força restauradora, é possível considerar para a posição u do oscilador:

$$\ddot{u} + f(u) = 0 \quad (\text{AIII.1})$$

Sendo que $f(u)$, pode ser considerada uma função linear ou não linear, é possível assumir do tipo oscilador harmônico. Portanto $f(u)$ é um caso onde é possível o tipo de linearidade que a equação diferencial pode assumir em um determinado sistema físico.

Assim é possível escrever (AIII.1) em um sistema de coordenadas, tal que $x = u - u_0$. Sendo possível reescrever a equação diferencial da seguinte forma:

$$\ddot{u} + f(x + u_0) = 0 \quad (\text{AIII.2})$$

Verifica – se que f pode ser expandido em series de Taylor em torno do ponto u_0 , e assim buscar soluções aproximadas para esta equação.

$$f(x + u_0) = \sum_{n=1}^N a_n x^n \quad (\text{AIII.3})$$

com:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u_0) \quad (\text{AIII.4})$$

e $f^{(n)}$ denotado as n -ésimas derivadas no ponto u_0 . As condições iniciais são determinadas pela posição inicial u_0 e a sua velocidade inicial por \dot{u}_0 .

No método de múltiplas escalas, a idéia principal é aplicar uma transformação nas equações diferenciais em estudo sendo elas lineares ou não, gerando uma serie de equações lineares acopladas. Este método define n variáveis T_n de tempo, dadas por:

$$T_n = \varepsilon^n t \quad (\text{AIII.5})$$

Onde estas variáveis são interpretadas como diferentes escalas de tempo e tomadas como independentes, desde que o parâmetro ε assuma um valor pequeno $\varepsilon \ll 1$.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (\text{AIII.6})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (\text{AIII.7})$$

Para estas diferentes escalas de tempo, observamos que as derivadas na variável t também devem ser reescritas em termos das derivadas de T_n na forma. As derivadas são separáveis, pela expansão dos termos, de acordo com diferentes ordens de potências de ε . Deste modo, pode-se assumir então, uma solução para a Eq. (AIII.2), levando-se em conta a expansão dada pela Eq. (AIII.3), na forma:

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{AIII.8})$$

substituindo a Eq. (AIII.3) e em seguida as Eqs. (AIII.6), (AIII.8) na Eq. (AIII.2), obtemos, para cada ordem n em ε uma equação diferencial linear para a componente x_n na série (AIII.9):

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0 \\ \varepsilon^1 D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2D_0 D_1 x_0 - a_2 x_0^2 \\ \varepsilon^n D_0^2 x_n + \omega_0^2 x_n &= F_n(x_1, \dots, x_{n-1})\end{aligned}\tag{AIII.9}$$

Sendo possível notar que equações de ordens menores aparecem como os termos não homogêneos $F_n(x_1, \dots, x_{n-1})$, nas equações de ordens maiores.

SÚMULA CURRICULAR

DAILHANE GRABOWSKI BASSINELLO

1 FORMAÇÃO:

2009 – (em andamento). Mestrado em andamento em Engenharia Elétrica. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, Brasil. *Título:* Dinâmica Não-Linear, Caos e Controle de Sistemas Eletromecânicos, *Orientador:* José Manoel Balthazar. *Bolsista do(a):* Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior .

2007 – Graduação em Tecnologia em Eletrotécnica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Brasil. *Título da monografia de graduação:* AUTOMATIZAÇÃO DE UM AFIADOR DE LÂMINAS EM AÇO INOX. *Orientador:* Marcos Roberto Ruybal Bica.

2006 – Técnico em Eletrotécnica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Brasil.

2 LISTA DE PUBLICAÇÕES

2.1 Trabalhos Submetidos para publicação em Revista Indexada.

Bassinello D. G., Balthazar J. M., Tusset A. M., Pontes B. R. Jr., Felix J. L. P.. A NOTE ON AN ENERGY TRANSFER IN A MACRO COUPLED ELECTRO-MECHANICAL SYSTEM, WITH VARIABLE INDUCTANCE. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. Submetido em Fevereiro de 2011.

2.2 Trabalhos em Eventos.

Tusset A. M., Balthazar J. M., Bassinello D. G., Pontes B. R. Jr..Controlling Chaotic Behaviour of a “MEMS” Comb-Drive Actuator. *7th European Nonlinear Dynamics Conference* (ENOC 2011). Rome, Italy. July 24 - 29, 2011.

Bassinello D. G., Balthazar J. M., Tusset A. M., Pontes B. R. Jr., Felix J. L. P.. On Control and Non Linear Dynamic of a Coupled Electromechanical System, With Variable Inductance. 21st International Congress of Mechanical Engineering. October 24 – 28, 2011. Resumo aceito.

2.3 Trabalhos Apresentados em Eventos.

BASSINELLO, D. G.; BALTHAZAR, J. M.; TUSSET, A. M.; PONTES JR, B. R.. Uma Nota Sobre o Controle e Comportamento Dinâmico Não-Linear de um Sistema Micro-Eletromecânico. *Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications*, v. 9, p. 337-342, ISSN 212178-3667, 2010. [www.sbmac.org.br /dincon/trabalhos/PDF/micro/69663.pdf](http://www.sbmac.org.br/dincon/trabalhos/PDF/micro/69663.pdf).

BASSINELLO, D. G.; BALTHAZAR, J. M.; PONTES JR, B. R.. A Microelectromechanical System (MEMS) Device Behaviour. *Second Workshop on Nonlinear Dynamics with Applications on Engineering Sciences*. Unesp, Rio Claro – SP, 2009.

3 PARTICIPAÇÃO EM EVENTOS

9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications. 2010. (Congresso).

8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications. 2009. (Congresso).

7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and applications. 2008.

1º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional. 2008.

4 DISCIPLINAS CURSADAS E APROVADAS DURANTE O MESTRADO

- Controle de Sistemas Mecânicos – Aprovada com conceito A.

- Controle de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Caóticos – Aprovada com conceito A.
- Modelagem de Sistemas Mecânicos – Aprovada com conceito A.
- Atuadores Mecânicos – Aprovada com conceito A.
- Dinâmica Não-Linear e Caos – Aprovada com conceito A.
- Metodologia Científica – Aprovada com conceito A.