

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

**Instituto de Geociências e Ciências Exatas**

**Campus de Rio Claro**

**OSCILADOR ELETROMAGNÉTICO CAÓTICO**

**André Roberto Amâncio**

Orientador: **Prof. Dr. José Roberto Campanha**

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Física - Área de Concentração em Física Aplicada, para obtenção do Título de Mestre em Física.

Rio Claro (SP)

2008

621 Amâncio, André Roberto.  
A484o Oscilador eletromagnético caótico / André Roberto  
Amâncio. - Rio Claro: [s.n.], 2008  
158 f. : il., gráfs., figs., tabs., fots.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: José Roberto Campanha

1. Física aplicada. 2. Sistema eletro-magneto-mecânico.  
3. Movimentos caóticos. 4. Diagrama de bifurcação. I. Título.

## **Comissão Examinadora**

Prof. Dr. José Roberto Campanha

Instituição: IGCE/RC

Prof. Dr. Makoto Yoshida

Instituição: IGCE /RC

Prof. Dr. Camilo Rodrigues Neto

Instituição: EACH-USP/SP

André Roberto Amâncio

Rio Claro, 28 de abril de 2008.

Resultado: Aprovado

**Dedico este trabalho às memórias de  
meus avós Laurinda Mariotto Amâncio e  
Luis Duarte Filho.**

## **Agradecimentos**

Agradeço às seguintes pessoas e entidades:

Ao Prof. Dr. José Roberto Campanha, pela preciosa orientação deste trabalho, amizade e incentivo e pelos ensinamentos transmitidos.

Ao Departamento de Física da UNESP de Rio Claro, pelo apoio e facilidades proporcionadas.

Aos professores do curso de pós-graduação em Física, área de concentração Física Aplicada, pela amizade e ensinamentos.

Aos meus pais, Maria Aparecida Duarte Amâncio, Carlos Roberto Amâncio, a minha irmã, Simone Aparecida Amâncio, e meus avós Maria Madalena Duarte e Romildo João Amâncio pelo apoio dado em minha vida.

A todos que colaboraram de alguma forma na realização deste trabalho.

Obrigado a todos. Obrigado a Deus.

# Sumário

Índice	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de figuras	v
Lista de tabelas	vii
Nomenclatura	viii
I – Introdução	1
II – Caos e métodos matemáticos no estudo de sistemas dinâmicos	5
III – Equação do oscilador eletromagnético	24
IV – Simulações numéricas do sistema	54
V – Conclusão	72

# Índice

<b>Capítulo 1</b> – Introdução	1
1.1 – Vibrações	1
1.2 – Sistema proposto	3
1.3 – Objetivo	4
<b>Capítulo 2</b> – Caos e métodos matemáticos no estudo de sistemas dinâmicos	5
2.1 – Caos	5
2.2 – Breve histórico do caos	6
2.3 – Métodos matemáticos no estudo do sistema dinâmicos	14
2.3.1 – Transformada de Fourier	14
2.3.2 – Transformada discreta de Fourier	16
2.3.3 – Expoentes de Lyapunov	17
2.3.4 – Seção de Poincaré	21
2.3.4.1 – Atrator e Dimensão Fractal	22
<b>Capítulo 3</b> – Equação do oscilador eletromagnético	24
3.1 – Introdução	24
3.2 – Forças que agem no fio oscilante	25
3.2.1 – Força de amortecimento	25
3.2.2 – Força gravitacional	26
3.2.3 – Força magnética produzida pelos imãs	26
3.2.4 – Força magnética produzida pelos condutores estáticos retilíneos infinitos	28
3.2.5 – Força magnética produzida pelo eletroímã	33
3.3 – Correntes elétricas devido à indução eletromagnética	35
3.4 – Equação do movimento do fio oscilante	50

3.5 – Aproximação da equação do movimento com a de Duffing	51
<b>Capítulo 4 – Simulações numéricas do sistema</b>	54
4.1 – Introdução	54
4.2 – Atribuição de valores aos coeficientes do sistema	55
4.3 – Integração numérica do sistema	57
4.4 – Resultados das simulações	57
4.5 – Bifurcação	70
<b>Capítulo 5 – Conclusão</b>	72
5.1 – Comentários sobre os métodos utilizados	72
5.2 – Sugestões para trabalhos futuros	73
<b>Referências</b>	74
<b>Apêndices</b>	78
Apêndice A – Calculo da corrente induzida e, de deslocamento	78
Apêndice B – Posições do fio oscilante em função do tempo	130
Apêndice C – Velocidades do fio oscilante em função do tempo.	135
Apêndice D– Espaços de fases	139
Apêndice E – Seções de Poincaré	143
Apêndice F– Transformado de Fourier	148
Apêndice G – Expoentes de Lyapunov	152
Apêndice H – Diagrama de bifurcação	157

## **Resumo**

Uma oscilação mecânica pode gerar movimentos caóticos através de vibrações irregulares. O estudo da oscilação mecânica caótica é o objetivo deste trabalho e para isto propomos um sistema eletro - magneto mecânico que descreve um modelo físico que trata do movimento de um fio em um campo magnético. Com simulações numéricas estudamos o sistema, usando a transformada rápida de Fourier, expoentes de Lyapunov, diagrama de bifurcação, seção de Poincaré, trajetórias de plano de fase e gráficos das posições do fio em função do tempo que oscila em movimentos periódicos e caóticos.

Palavras-chave: sistema eletro-magneto-mecânico, movimentos caóticos, diagrama de bifurcação.

## **Abstract**

A mechanical oscillation can generate chaotic movements through irregular vibrations. The study of chaotic mechanical oscillation is the objective of this work and for this we proposed a mechanical electro - magneto system that describes a physical model that treats the movement of a thread in a magnetic field. With numeric simulations, we studied the system using the fast Fourier transform, Lyapunov exponents, bifurcation diagram, Poincaré section, phase plane trajectories and graphs of the thread positions in time function that oscillate in periodic and chaotic movements.

Keyword: mechanical electro-magneto system, chaotic movement, bifurcation diagram.

## Lista de Figuras

Figura 1-1 – Esquema experimental do oscilador eletromagnético	03
Figura 2-1 – Foto de Lord Rayleigh	06
Figura 2-2 – Foto de Georg Duffing	07
Figura 2-3 – Esquema experimental do pêndulo de Duffing	07
Figura 2-4 – Gráfico do atrator de Duffing	07
Figura 2-5 – Foto de Balthasar van der Pol	08
Figura 2-6 – Esquema experimental do modelo de van der Pol	08
Figura 2-7 – Atrator de van der Pol	08
Figura 2-8 – Foto de Edward Lorenz	09
Figura 2-9 – Atrator de Lorenz	10
Figura 2-10 – Foto de Robert May	10
Figura 2-11 – Foto de Gregory L. Baker	12
Figura 2-12 – Esquema experimental do pêndulo caótico	12
Figura 2-13 – Atrator do pêndulo caótico	13
Figura 2-14 – Foto de Joseph Fourier	15
Figura 2-15 – Foto de A. M. Lyapunov	18
Figura 2-16 – Evolução de um elemento de volume esférico	19
Figura 2-17 – Foto de H. Poincaré	21
Figura 2-18 – Seção de Poincaré	21
Figura 2-19 – Foto de Benoit Mandelbrot	22
Figura 2-20 – Geometria Fractal	22
Figura 3-1 – Diagramas de forças e campos do oscilador eletromagnético	25
Figura 3-2 – Força de amortecimento para diferentes velocidades	25
Figura 3-3 – Esquema tridimensional do fio oscilante e dos ímãs	26
Figura 3-4 – Diagrama de forças e campos do fio oscilante e, condutores estáticos retilíneos infinitos	28
Figura 3-5 – Campo magnético produzido por um fio infinito	29
Figura 3-6 – Gráfico da força magnética restauradora	33
Figura 3-7 – Esquema tridimensional do fio oscilante e, eletroímã	33
Figura 3-8 – Esquema no plano dos fios infinitos e do eletroímã	35

Figura 3-9 – Esquema no plano do fio oscilante e dos condutores infinitos	36
Figura 3-10 – Ampliação da parte do fio oscilante de comprimento } }	37
Figura 3-11 – Movimento de oscilação do fio oscilante	40
Figura 3-12 – Esquema no plano de uma região do eletroímã e do fio oscilante	45
Figura 4-1 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,450 \text{ dm} / \text{s}^2$	58
Figura 4-2 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,460 \text{ dm} / \text{s}^2$	59
Figura 4-3 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,470 \text{ dm} / \text{s}^2$	60
Figura 4-4 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,511 \text{ dm} / \text{s}^2$	61
Figura 4-5 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,536 \text{ dm} / \text{s}^2$	62
Figura 4-6 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,557 \text{ dm} / \text{s}^2$	63
Figura 4-7 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,596 \text{ dm} / \text{s}^2$	64
Figura 4-8 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,640 \text{ dm} / \text{s}^2$	65
Figura 4-9 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,700 \text{ dm} / \text{s}^2$	66
Figura 4-10 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,740 \text{ dm} / \text{s}^2$	67
Figura 4-11 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,812 \text{ dm} / \text{s}^2$	68
Figura 4-12 – Gráficos da simulação do sistema dinâmico para $q = 0,835 \text{ dm} / \text{s}^2$	69
Figura 4-13 – Diagrama de bifurcação	70

## Lista de Tabelas

Tabela 4-1 Valores numéricos das constantes da equação	56
Tabela A-1 Valores numéricos das constantes	98
Tabela A-2 Valores numéricos da tensão, resistência elétrica e área da seção reta do fio oscilante.	107
Tabela A-3 Valores numéricos do número de espiras, comprimento, área da seção reta e amplitude da voltagem do eletroímã	126

## Nomenclatura

$I_1$  – corrente elétrica no fio oscilante

$V_{01}$  – força eletromotriz que produz a corrente elétrica  $I_1$

$r_{01}$  – resistência elétrica acoplada ao circuito do fio oscilante


$I_2$  – corrente elétrica nos condutores retilíneos estáticos


$V_{03}$  – força eletromotriz que produz a corrente elétrica  $I_2$

$r_3$  – resistências elétricas em paralelo

**N** – pólo norte do imã

**S** – pólo sul do imã

 – gerador de corrente alternada

 **R** – resistência elétrica variável


$\vec{g}$  – vetor campo gravitacional

**g** – módulo do vetor campo gravitacional

$\vec{B}_I$  – vetor indução magnético produzido pelos imãs

**B<sub>I</sub>** – módulo do vetor indução magnético produzido pelos imãs

 – vetor entrando no plano

 – vetor saindo no plano

$\vec{B}_{EL}$  – vetor indução magnético produzido pelo eletroímã

**B<sub>EL</sub>** – módulo do vetor indução magnético produzido pelo eletroímã

$\vec{B}_0$  – amplitude de oscilação do vetor indução magnético produzido pelo eletroímã

**B<sub>0</sub>** – módulo da amplitude de oscilação do vetor indução magnético produzido pelo eletroímã

$\omega$  – frequência angular externa do gerador de corrente alternada do eletroímã

**t** – tempo

$\vec{B}_R$  – vetor indução magnético produzido pelos condutores retilíneos estáticos

$\vec{F}_R$  – vetor força restauradora produzida pelos condutores retilíneos estáticos

**F<sub>R</sub>** – módulo do vetor força restauradora produzida pelos condutores retilíneos estáticos

$\vec{F}_{am}$  – vetor força de amortecimento

**F<sub>am</sub>** – módulo do vetor força de amortecimento

$\vec{F}_g$  – vetor força gravitacional

$F_g$  – módulo do vetor força gravitacional

$\vec{F}_I$  – vetor força magnética criado pelo vetor indução magnético  $\vec{B}_I$  produzido pelos imãs

$F_I$  – módulo do vetor força magnético criado pelos imãs

$\vec{F}_{EL}$  – vetor força produzida pelo eletroímã

$F_{EL}$  – módulo do vetor força produzido pelo eletroímã

$\ddot{x}$  – derivada de segunda ordem da posição  $x$  em relação ao tempo

$\dot{x}$  – derivada de primeira ordem da posição  $x$  em relação ao tempo

$x$  – posição

$\rho$  – constante de amortecimento de Duffing

$\omega_{OD}$  – frequência linear de Duffing

$\kappa$  – constante cúbica de Duffing

$\omega_D$  – frequência externa de Duffing

$\ddot{Q}$  – derivada de segunda ordem da carga elétrica em relação ao tempo

$\dot{Q}$  – derivada de primeira ordem da carga elétrica em relação ao tempo

$Q$  – carga elétrica

$\mathfrak{S}$  – constante de amortecimento de van der Pol

$\Lambda$  – constante de van der Pol

$\omega_0$  – frequência externa de van der Pol

$I_0$  – gerador

$\eta$  – indutância

$C$  – capacitância

$E_0$  – diferença de potencial do diodo

$V$  – diferença de potencial do capacitor

$\dot{y}$  – derivada de primeira ordem de  $y$  em relação ao tempo

$\dot{z}$  – derivada de primeira ordem de  $z$  em relação ao tempo

$\lambda, \sigma, \zeta$  – parâmetros de controle do modelo de Lorenz

$\ddot{\theta}$  – derivada de segunda ordem de  $\theta$  em relação ao tempo

$\dot{\theta}$  – derivada de primeira ordem de  $\theta$  em relação ao tempo

- $\theta$  – ângulo percorrido pelo pêndulo  
 $h$  – constante de amortecimento do pêndulo  
 $M$  – massa do pêndulo  
 $l$  – comprimento do fio do pêndulo  
 $N_d$  – amplitude de oscilação da força externa  
 $\omega_P$  – frequência externa do pêndulo  
 $\omega_{OP}$  – frequência linear do pêndulo  
 $s, F$  – parâmetros de controle do pêndulo  
 $dm / s^2$  – decímetro por segundo ao quadrado  
 $b$  – constante de amortecimento  
 $dx/dt$  – velocidade do fio oscilante  
 $d^2x/dt^2$  – aceleração do fio oscilante  
 $m$  – massa do fio oscilante  
 $l$  – comprimento do fio oscilante  
 $\sim$  – permeabilidade magnética do meio  
 $\epsilon$  – permissividade elétrica do meio  
 $L$  – distância de separação entre os condutores estáticos retilíneos infinitos  
 $\hat{x}, \hat{y}$  e  $\hat{z}$  – vetores unitários  
 $d\psi$  – elemento angular  
 $D_1, D_2$  – distâncias entre os fios infinitos e o fio oscilante  
 $T$  – largura do eletroímã  
 $U$  – comprimento do eletroímã  
 $dx, dy$  – elementos de comprimento de largura e altura  
 $\hat{n}$  – vetor unitário normal  
 $\epsilon_i$  – tensão induzida produzida por  $i$  fatores  
 $I_{di}$  – corrente de deslocamento elétrico produzido por  $i$  fatores  
 $\varphi_{ij}$  – fluxo magnético  
 $\Theta_{ij}$  – fluxo elétrico  
 $\epsilon_2$  – tensão induzida nos fios infinitos produzida pelo eletroímã  
 $I_{a2}$  – corrente de deslocamento elétrico nos fios infinitos produzida pelo eletroímã  
 $A$  – área da seção reta dos fios infinitos

$A''$  – área da seção reta do fio oscilante

$A''''$  – área da seção reta dos fios do eletroímã

$S$  – comprimento dos fios infinitos

$\chi$  – distância da origem  $O$  até a superfície do fio oscilante

$\frac{d\chi}{dt}$  – derivada de primeira ordem da posição  $\chi$  em relação ao tempo

$\frac{d^2\chi}{dt^2}$  – derivada de segunda ordem da posição  $\chi$  em relação ao tempo

$\theta_1, \theta_2$  – ângulos que o fio oscilante forma em relação a um elemento retangular

$di$  – elemento de corrente que passa no comprimento }

$\vec{B}_f$  – vetor indução magnético produzido pelo fio oscilante

$r$  – raio do fio oscilante

$\vec{B}_1, \vec{B}_4$  – vetores induções magnéticas produzidos por elementos de circuito do fio oscilante

$\vec{r}_1, \vec{r}_4$  – distâncias dos elementos de comprimento do fio oscilante até o ponto de produção dos campos

$\alpha, \beta$  – ângulos que os elementos de comprimento do fio oscilante formam até o ponto de produção dos campos

$\varepsilon_2$  – tensão induzida nos fios infinitos produzida pelo fio oscilante

$I_{a2}$  – corrente de deslocamento elétrico nos fios infinitos produzida pelo fio oscilante

$I_{ind1}$  – corrente elétrica induzida no fio oscilante produzida pelos fios infinitos

$I_{d1}$  – corrente de deslocamento elétrico no fio oscilante produzida pelos fios infinitos

$I_{ind1}''$  – corrente elétrica induzida no fio oscilante produzida pelo eletroímã

$I_{d1}''$  – corrente de deslocamento elétrico no fio oscilante produzida pelo eletroímã

$I_2$  – corrente elétrica induzida no fio oscilante devido a sua auto – indutância

$I_{a2}''$  – corrente de deslocamento elétrico no fio oscilante devido a sua auto – indutância

$I_{ind}$  – corrente elétrica induzida no eletroímã devido a sua auto – indutância

$I_a$  – corrente de deslocamento elétrico no eletroímã devido a sua auto – indutância

$F_{EL1}$  – Força magnética que atua no fio oscilante produzida pelo eletroímã

$I_3$  – corrente elétrica induzida no eletroímã devido ao movimento do fio oscilante

**I**<sub>a3</sub> – corrente de deslocamento elétrico no eletroímã devido ao movimento do fio oscilante

**F**<sub>EL2</sub> – Força magnética que atua no fio oscilante produzida devido a sua auto – indução

**F** – Força magnética total que atua no fio oscilante

**H** – número de espiras do eletroímã

**J** – comprimento onde atua o vetor indução magnético  $\vec{B}_{EL}$  do eletroímã

# **CAPÍTULO 1**

## **Introdução**

### **1.1 Vibrações**

A vibração está presente já nos primeiros tempos da História da Humanidade. Instrumentos rudimentares, como apitos e tambores, têm no seu princípio de funcionamento, um problema vibratório como essência. Estes instrumentos tiveram muita importância entre os povos primitivos como meios de comunicação. Mais tarde uma série de instrumentos musicais (percussão, cordas, metais, etc.) foi concebida aproveitando movimentos vibratórios, geradores de ondas sonoras.

O desenvolvimento da teoria da vibração resultou na importância de seu estudo, pois a maioria das atividades humanas envolve alguma forma de vibração. A respiração está associada à vibração dos pulmões, os batimentos cardíacos são movimentos vibratórios, a fala se fundamenta na vibração das cordas vocais e os movimentos humanos envolvem oscilações dos braços e pernas. Outros campos da atividade humana também apresentam um comportamento oscilatório (economia, biologia, química, física, etc.). No campo tecnológico, as aplicações de vibrações na engenharia são de grande importância

nos tempos atuais. Projetos de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas, sistemas de controle, e outros, exigem que questões relacionadas a vibrações sejam levadas em conta. Uma outra aplicação que a vibração possui é a industrial. Esteiras transportadoras, peneiras, compactadores, misturadores, máquinas de lavar, utilizam em seu princípio de funcionamento a vibração.

Desse modo, a vibração é definida como qualquer movimento que se repete, regular ou irregularmente, depois de um intervalo de tempo. Assim, ela se apresenta em oito formas, que serão também definidas a seguir:

1- Vibração livre é aquela produzida por perturbação inicial que não persiste durante o movimento oscilatório.

2-Vibração forçada é provocada por um efeito externo que persiste durante o tempo em que o movimento vibratório existir.

3-Vibração amortecida é aquela em que a energia vibratória se dissipa com o transcorrer do tempo de forma que os níveis vibratórios diminuem progressivamente.

4-Vibração não amortecida é aquela em que a energia vibratória não dissipa de forma que o movimento vibratório permanece imutável com o passar do tempo.

5-Vibração linear é aquela que ocorre em um sistema cujos componentes atuam linearmente.

6-Vibração não linear é aquela em que os componentes do sistema não se comportam linearmente.

7-Vibração determinística é aquela que se pode prever todas as características do movimento vibratório em qualquer instante de tempo.

8-Vibração aleatória ou não determinística é aquela em que não é possível prever o que irá acontecer no movimento vibratório.

## 1.2 Sistema proposto

O sistema dinâmico que analisamos consiste de um fio oscilante que oscila entre dois condutores estáticos infinitos, ligados em um gerador de corrente contínua, e um eletroímã, que possui pólos norte e sul instantâneos, onde se cria um campo magnético alternado. Também há dois imãs que anulam a força gravitacional pela criação de uma força magnética em sentido oposto. O fio oscilante está preso a dois fios flexíveis ligados também a um gerador de corrente contínua. Este modelo está ilustrado na figura 1-1, abaixo.

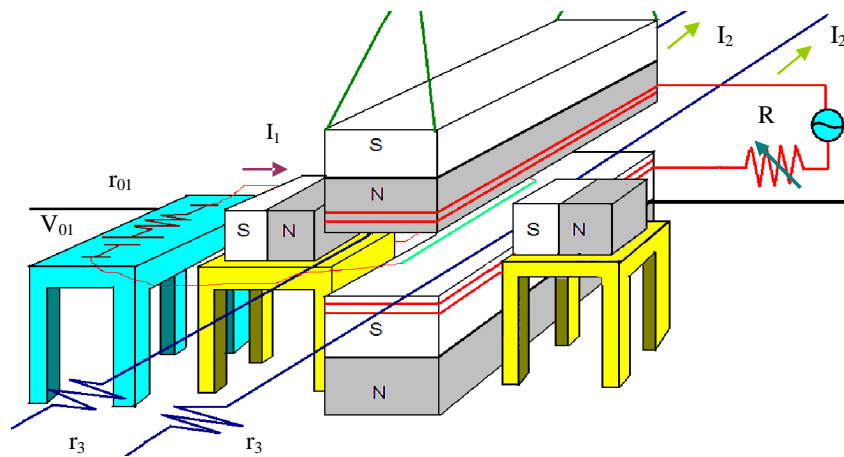


Figura 1-1 Esquema experimental do oscilador eletromagnético.

A equação diferencial que descreve o modelo proposto neste trabalho não consta na literatura, portanto, ela está sendo estudada pela primeira vez.

## 1.3 Objetivo

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento do modelo proposto por meio das séries temporais geradas quando integramos as equações do movimento pelo método numérico de Runge-Kutta. Para essa análise usamos a transformada de Fourier (Apêndice E), os expoentes de Lyapunov (Apêndice F), o

diagrama de bifurcação (Apêndice G) e as seções de Poincaré (Apêndice D). Também usamos os gráficos que dão a posição do fio oscilante em função do tempo (Apêndice A), a velocidade do fio oscilante em função do tempo (Apêndice B), e os espaços de fases (Apêndice C) definidas pela velocidade versus posição do fio oscilante. calculamos os expoentes de Lyapunov com recursos residentes no Mathematica 5.2 pelo algoritmo desenvolvido por (SANDRI, 1996).

Para atingir esse objetivo, no capítulo 2, fizemos um breve histórico sobre caos e descrevemos os métodos matemáticos: transformada contínua e discreta de Fourier, e os expoentes de Lyapunov. No capítulo 3, apresentamos a equação diferencial que descreve o sistema. No capítulo 4, atribuímos valores aos coeficientes do sistema, fizemos simulações numéricas, com estudos da seção de Poincaré e do diagrama de bifurcação e no capítulo 5, sugerimos a continuidade do trabalho com simulações numéricas do sistema para diferentes valores de amplitude da força externa. Sugerimos também, como continuidade lógica deste trabalho, a construção experimental do modelo aqui proposto.

## **CAPÍTULO 2**

### **Caos e métodos matemáticos no estudo de sistemas dinâmicos**

#### **2.1 Caos**

A teoria do caos avançou inicialmente a partir do trabalho de cientistas que lidavam com sistemas dinâmicos em Ciências como a Física, a Meteorologia, a Biologia e outras. A modelagem desses sistemas procura montar uma representação de determinado fenômeno do mundo real, que se pretende estudar. A abstração é exercida escolhendo-se um número manejável, naturalmente pequeno, de agentes relevantes em relação àquela problemática específica. No caso dos sistemas dinâmicos, entra em cena a matemática simplificadora e representa-se cada agente através de uma variável, e a inter-relação entre os mesmos por relações funcionais (equações diferenciais). A este conjunto de equações dá-se o nome de Sistema para indicar que se trata de algo que tem partes e, também, pode ser tratado como um todo. Desse modo, a abordagem quantitativa permite que cada agente tenha sua situação em cada momento representada por um número, que será diferente quando a situação do agente mudar. Isso é possível pelo uso de métodos numéricos que permitem revelar o comportamento dinâmico do sistema que pode exibir

um movimento caótico. Sendo assim, citamos como exemplos desse comportamento às variações climáticas, a dinâmica de populações, osciladores elétricos e mecânicos.

## 2.2 Breve histórico do caos

Faremos a seguir um breve histórico do caos onde os detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em PEITGEN, 1992, STEWART, 1991, RUELLE, 1993.

Uma área onde há contribuição e construção de sistemas dinâmicos é o estudo de osciladores não lineares. Um dos pioneiros nessa área foi o físico inglês John William Strutt Lord Rayleigh (1842-1919), que desenvolveu estudos referentes à física dos instrumentos musicais. Mediante um uso inteligente dos elementos dinâmicos básicos do problema, Lord Rayleigh criou modelos que explicam os sons emitidos pelos instrumentos quando tocados por músicos. Em seu famoso livro, A Teoria do Som, publicado em 1877, Rayleigh introduziu uma série de métodos gerais como a noção do ciclo limite, que é um movimento periódico que tende o sistema físico com independência em relação às condições iniciais. A imagem de Lord Rayleigh, retirada do site [www.aerialpress.com](http://www.aerialpress.com), será mostrada a seguir:



Figura 2-1 Foto de Lord Rayleigh

Em 1918, um engenheiro alemão conhecido como Georg Duffing (1861-1944) descobriu um modelo de oscilador não linear simétrico com um termo cúbico: o oscilador de Duffing. Baseado nesse oscilador existe o pêndulo de Duffing, que consiste de

uma viga flexível que oscila entre dois ímãs magnéticos sofrendo a ação de uma força periódica. Sua foto, também retirada do site [www.aerialpress.com](http://www.aerialpress.com), a equação segundo (PARLITZ, 2007, p.407), o esquema experimental do modelo e o atrator feito no software Mathematica 5.2 serão mostrados a seguir:



Figura 2-2 Foto de Georg Duffing.

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega_{0D}^2 x + \kappa x^3 = \gamma \cos(\omega_D t), \quad (2.1)$$

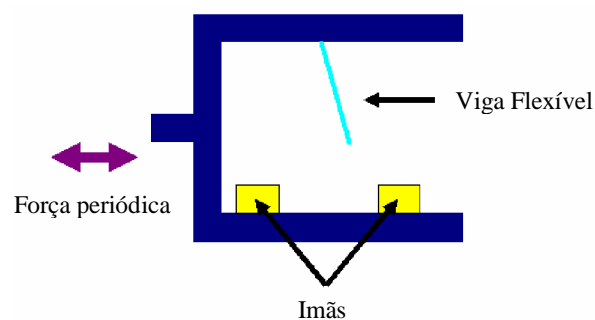


Figura 2-3 Esquema experimental do pêndulo de Duffing.

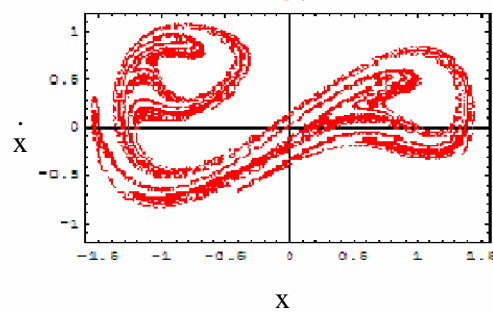


Figura 2-4 Atrator de Duffing.

Posteriormente, em 1927, um engenheiro elétrico holandês chamado Balthasar van der Pol (1889-1959), cuja foto retirada do site [www.ieee.org](http://www.ieee.org) é mostrada abaixo, criou um modelo matemático de um oscilador não linear que é usado para descrever oscilações em circuitos eletrônicos contendo tubos a vácuo que eram utilizados para construir rádios antes da invenção do transistor, com a equação diferencial, esquema experimental e o atrator, retirado do site [www.physics.drexel.edu](http://www.physics.drexel.edu) são dados a seguir :



Figura 2-5 Foto de Balthasar van der Pol.

$$\ddot{Q} + \mathfrak{S}(Q^2 - \Lambda^2)\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (2.2)$$

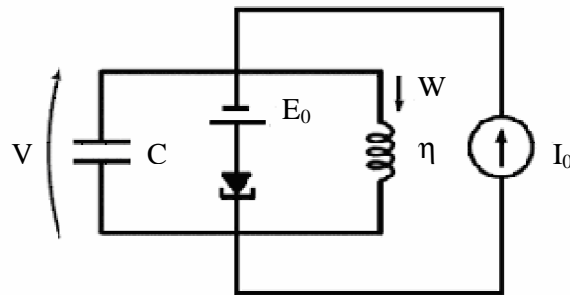


Figura 2-6 Esquema experimental do modelo de van der Pol.

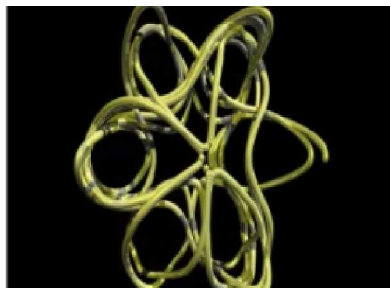


Figura 2-7 Atrator de van der Pol.

Cientistas de outras áreas não se conformavam com as limitações da matemática, pois precisavam utilizar modelos mais complexos, não lineares e de maior dimensão, que melhor representassem os fenômenos reais que estudavam. No entanto, além dos estudos científicos específicos e da matemática pura, foi necessário que entrasse em cena um terceiro ramo para que essa necessidade fosse atendida. Este era indispensável para tratar o enorme volume de informações e as complexas inter-relações entre as variáveis envolvidas. Trata-se da colaboração da matemática aplicada, especificamente aquela apoiada nos computadores, já que estes permitiam incursões por estas áreas utilizando métodos iterativos, e outros, para resolver, ou analisar qualitativamente, os sistemas dinâmicos até então praticamente inatingíveis.

Foi a combinação das simulações com as observações experimentais que permitiram importantes avanços na teoria do caos através da colaboração de cientistas de outras áreas como Edward Lorenz, pesquisador de meteorologia do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, no início da década de 1960, utilizando um computador Royal McBee LGP-30, criou um modelo descrito por um sistema de equações diferenciais com o objetivo de reproduzir o movimento das correntes de ar na atmosfera. Com a resolução numérica das equações pelo computador notou-se que para valores próximos atribuídos a condição inicial, os resultados obtidos se repetiam em um curto espaço de tempo e depois disso o comportamento desses resultados se tornava irregular e imprevisível. Esses dois fatores observados confirmam a definição de caos, segundo Stacey (ARAÚJO, 2004, p.82), esse fenômeno que em sistemas guiados por certos tipos de leis perfeitamente ordenadas são capazes de se comportar de uma maneira aleatória, e desta forma, completamente imprevisível no longo prazo. A foto de Lorenz, retirada de (SANJÚAN, VÁZQUEZ, 2005), os sistemas de equações diferenciais e seu atrator na figura 2.4, retirado de (ARAÚJO, 2004, p.83), são apresentados a seguir:



Figura 2-8 Foto de Edward Lorenz.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda(y - x), \\ \dot{y} &= \sigma x - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - \zeta z,\end{aligned}\tag{2.3}$$

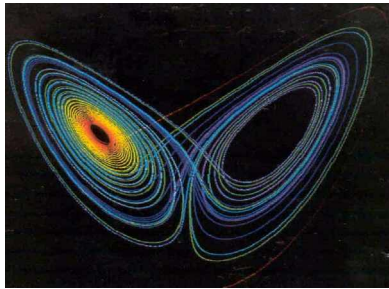


Figura 2-9 Atrator de Lorenz.

Seguiram-se a estes trabalhos muitos outros, tanto na extensão das técnicas matemáticas quanto na descoberta de novos e intrigantes exemplos de dinâmica caótica em modelos de baixa dimensão, isto é, um grau de liberdade. Dentre esses trabalhos cabe destacar o modelo matemático que descreve o comportamento da dinâmica de populações, na área de biologia, usado por Robert May, com sua foto mostrada abaixo retirada do site [www.broad.mit.edu](http://www.broad.mit.edu), no início da década de 70, do século passado, que também exibe um comportamento caótico.



Figura 2-10 Foto de Robert May.

A equação pode ser expressa por:

$$\Omega = kv(1-v), \quad (2.4)$$

que foi desenvolvida pelo matemático belga Pierre Verhulst em 1845, e acabou sendo usada por Robert May para simular a evolução de epidemias.

Robert May verificou que os resultados obtidos através dessa equação coincidiram com o comportamento de uma epidemia real. Desse modo, o número de infectados, em um momento aumentava rapidamente e posteriormente diminuía drasticamente.

Admitindo que  $k$  seja o valor da razão de crescimento da população em estudo e, no instante  $n$ ,  $v_n$  a porcentagem da população de infectados e  $1-v_n$  a porcentagem de não infectados dessa população, portanto, a população no instante  $n+1$ , pode ser obtida pela equação de recorrência.

$$\Omega_{n+1} = kv_n(1-v_n), \quad (2.5)$$

conhecida pelo nome de mapa logístico.

Robert May observou que, para uma seqüência crescente dos valores de  $k$ , a população apresentava um tamanho constante, e posteriormente oscilava entre valores grandes e pequenos até que passava a exibir uma falta de regularidade e previsibilidade em função do crescimento. Esse comportamento quebrou um dos pilares fundamentais da ciência que afirmava: equações matemáticas eram as formas mais elevadas para descreverem os princípios da natureza e suas soluções apresentavam uma forma regular de previsibilidade, não importando quantos cálculos fossem necessários. Esta é a idéia fundamental da matemática, a ciência que pretende fazer previsões exatas e repetidas. Robert May provou que equações usadas para descrever fenômenos da natureza podem mostrar resultados sem previsibilidade. A partir essa descoberta, em outras áreas, tais como epidemias, ritmos cardíacos, ciclos econômicos e fluxo de fluidos, também foram observados comportamentos caóticos.

Um outro tipo de sistema que exibe caos é o pêndulo caótico, que por volta de 1985, foi estudado por Gregory L. Baker, com sua foto retirada do site [www.physics.utoronto.ca](http://www.physics.utoronto.ca), com a colaboração do Prof. Jerry P. Gollub do Haverford College, realizaram simulações computacionais e estudaram o complexo comportamento do pêndulo, cujo modelo, a equação diferencial segundo (ARAUJO, 2006), e o atrator retirado do site [www.icpr.snu.ac.ky](http://www.icpr.snu.ac.ky), são mostrados a seguir.

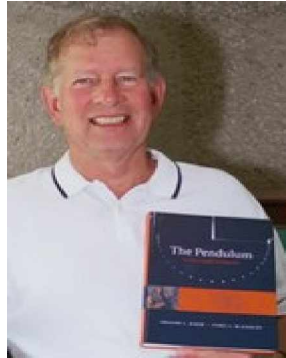


Figura 2-11 Foto de Gregory L. Baker.

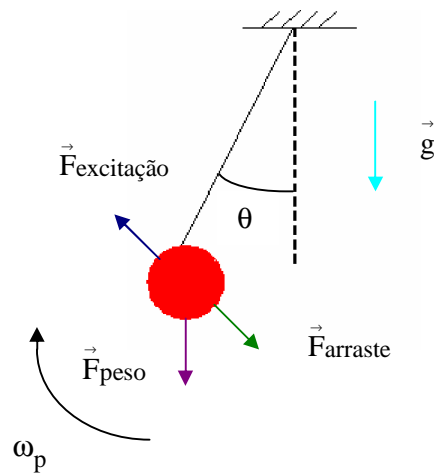


Figura 2-12 Esquema experimental do pêndulo caótico.

A equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo caótico é dada por:

$$\ddot{\theta} = -\frac{h}{Ml^2}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\text{sen}\theta + \frac{N_d}{Ml^2}\cos(\omega_p t), \quad (2.6)$$

Assim podemos definir novas constantes que são dadas a seguir:

$$s = \frac{h}{Ml^2}, \quad (2.7)$$

$$w_{0P}^2 = \frac{g}{l}, \quad (2.8)$$

$$F = \frac{N_d}{Ml^2}, \quad (2.9)$$

A equação adquire a seguinte forma:

$$\ddot{\theta} = -s \dot{\theta} - w_{0P}^2 \sin \theta + F \cos(\omega_P t). \quad (2.10)$$

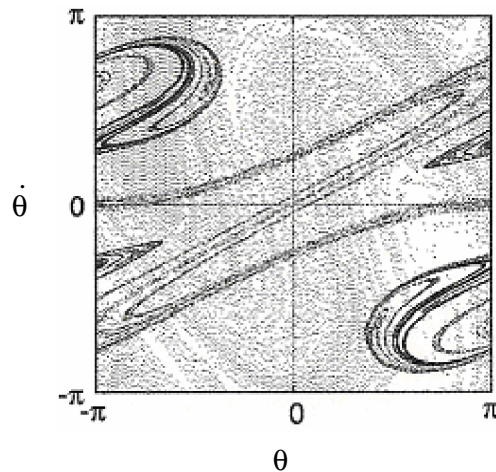


Figura 2-13 Atrator do pêndulo caótico.

Com o descobrimento do caos em muitos sistemas físicos, as leis da natureza passaram a ser interpretadas de uma outra forma. O caos aparece até em sistemas físicos bem simples. No entanto, há uma ordem que rege o caos devido às simetrias do movimento regular que o suporta. Sistemas que não exibem caos são poucos, mas servem de base para o entendimento físico da natureza. Já para os sistemas caóticos, erros iniciais de observação provocam um crescimento exponencial e o determinismo acaba em escala

de tempo pequena. Portanto, a precisão infinita deve ser abandonada e a previsibilidade acaba devido às incertezas nas condições iniciais dos sistemas em que são aplicadas.

## **2.3 Métodos matemáticos no estudo de sistemas dinâmicos**

Nas simulações numéricas de sistemas dinâmicos obtêm-se séries temporais que são analisadas pelos seguintes métodos matemáticos:

- a) Transformada rápida de Fourier.
- b) Expoentes de Lyapunov.

Para investigação periódica do espaço de fase e da análise da mudança qualitativa do sistema dinâmico através de uma pequena variação de um parâmetro também usamos, respectivamente:

- c) Seção de Poincaré.
- d) Diagrama de bifurcação.

O Diagrama de bifurcação será discutido no capítulo 4 em uma seção à parte.

### **2.3.1 Transformada de Fourier**

Um sistema dinâmico que evolui no tempo  $t$  pode ser representado por uma função  $f(t)$  ou por uma série dependente do tempo, desde que  $t$  seja dado por intervalos de tempo regulares.

Se a função  $f(t)$  não for periódica, o espectro deve ser expresso pela transformada de Fourier de  $f(t)$  (BAKER, 1996). Esse método em sistemas que apresentam

comportamentos caóticos é de grande utilidade, porque a transformada de Fourier é, na maioria dos casos, uma função complexa, portanto, é mais útil transformá-la em uma função real, que é chamada de espectro de potência de  $f(t)$ , utilizando a raiz quadrada do módulo da transformada.

O matemático francês, Joseph Fourier, cuja foto retirada do site [www.stetson.edu](http://www.stetson.edu) mostrada abaixo:



Figura 2-14 Foto de Joseph Fourier.

demonstrou que sua transformada pode também ser usada para funções não periódicas, ou seja, quando a periodicidade básica da função  $f(t)$  é infinitamente grande. Assim, quando o período básico tende para infinito, o espaço entre as componentes das frequências torna-se infinitesimal e o espectro discreto das componentes da frequência torna-se contínuo (BAKER, 1996).

Nessas condições a transformada inversa de Fourier é definida como:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.11)$$

com a equação dos coeficientes dada por:

$$c(\omega) d\omega = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega, \quad (2.12)$$

de onde deduzimos o valor de  $c(\omega)$ , que é denominada transformada de Fourier e definida por:

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt . \quad (2.13)$$

Usando a equação (2.13), é possível converter um grupo de sinal digital, no domínio do tempo, em um conjunto de pontos no domínio das frequências, como de uma maneira similar, reconstruir os sinais originais da função de partida, pela multiplicação dos coeficientes de Fourier por senóides e cossenóides com frequências apropriadas.

### 2.3.2 Transformada discreta de Fourier

Em simulações computacionais de modelos matemáticos obtemos um conjunto de valores discretos que não são séries temporais de uma função contínua e infinita.

A utilização do método de Runge-Kutta para resolução numérica da equação diferencial proposta neste trabalho permite obter uma série temporal discreta que possui um número finito de pontos,  $n$ , para intervalos iguais de tempos. Desse modo, para realizar o cálculo dos coeficientes de Fourier será necessário usar um método de integração que discutido a seguir.

Os pontos  $-\pi = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = \pi$  dividem o intervalo  $[-\pi, \pi]$  em  $n$  subintervalos iguais, cujo comprimento é definido por:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{n} . \quad (2.14)$$

Chamando os valores da função  $f(t)$  nos respectivos pontos  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  por  $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)$  e usando, a equação dos retângulos (PISKOUNOV, 1997) obtemos os coeficientes da transformada de Fourier, substituindo a integral apresentada em (2.13) por um somatório:

Assim,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \Delta t \sum_{k=1}^n f(t_k) e^{-i\omega_k t}. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.14) em (2.15) temos:

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) e^{-i\omega_k t}. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é a transformada de Fourier discreta. Enquanto a transformada de Fourier inversa é dada por:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-i\omega_k t}. \quad (2.17)$$

Mesmo com a utilização de modernos computadores, alguns cálculos numéricos levam um tempo longo para terminarem. Com a finalidade de diminuir esse tempo, Tukey e Cooley, em 1965, criaram um algoritmo que foi chamado de Fast Fourier Transform (FFT) para realizar o cálculo da transformada discreta de Fourier que permitiu encontrar o espectro de frequência de um sinal. A utilização desse algoritmo diminui o número de operações computacionais.

Assim partindo de um espectro de sinal, é possível definir se o comportamento de um sistema dinâmico é periódico ou caótico pelos números de picos de frequências que aparecem.

### 2.3.3 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov foram descobertos pelo matemático russo, A. M. Lyapunov (1857-1918), cuja foto, segundo (SANJUAN, VÁZQUEZ, 2005), é mostrada abaixo:



Figura 2-15 Foto de A. M. Lyapunov.

Segundo (BAKER, 1996) e (FERRARA, 1994) os expoentes de Lyapunov exercem uma função crucial na descrição do comportamento de sistemas dinâmicos. Eles medem a taxa média de divergência ou convergência das trajetórias do espaço de fase a partir de pontos iniciais próximos. Por essa razão, eles podem ser usados para analisar a estabilidade dos ciclos limites e para checar a dependência às condições iniciais indicando a presença de atratores caóticos (SANDRI, 1996).

Consideremos, em um instante inicial, sistemas contínuos com  $n$  equações diferenciais ordinárias (FERRARA, 1994) e imaginemos uma pequena hiper-esfera de condições iniciais no espaço de fase para escalas de tempo suficientemente pequenas. A dinâmica do sistema provocará um efeito que irá distorcer este conjunto para um hiper-elipsóide esticando ao longo de algumas direções e contraindo ao longo de outras. A taxa assintótica de expansão do eixo maior que corresponde à direção mais instável do fluxo é medida pelo maior expoente de Lyapunov  $\lambda_1$ . Em geral, se ordenarmos os eixos e os expoentes de Lyapunov em ordem decrescente pela magnitude,  $\epsilon_1 \geq \dots \geq \epsilon_n$  e  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , cada  $\lambda_i$  quantifica a taxa exponencial média de expansão ou contração para o  $i$ -ésimo eixo  $\epsilon_i$ .

Com um rigor formal, vamos considerar dois pontos iniciais próximos  $x_0$  e  $y_0$  em um espaço de fase, conforme figura 2-16 onde  $y_0$  é uma pequena hiper-esfera de

raio  $\varepsilon_0(x_0)$ , representada matematicamente na relação (2.18), cuja finalidade é de teste aos estados iniciais vizinhos em torno do ponto  $x_0$  de uma linha de fluxo.

$$|y_0 - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0). \quad (2.18)$$

Com o passar do tempo, o fluxo deforma a hiper-esfera que se transforma em um hiper-elipsóide com eixos principais  $\varepsilon_i(t)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , e que está representado na figura 2-16.

Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais  $\varepsilon_i(t)$  e são definidos por

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.19)$$

Em geral os  $\lambda_i$  dependem do estado inicial  $x_0$ , mas em muitos casos eles são constantes ao longo de uma significativa região do espaço de fase (FERRARA, 1994).

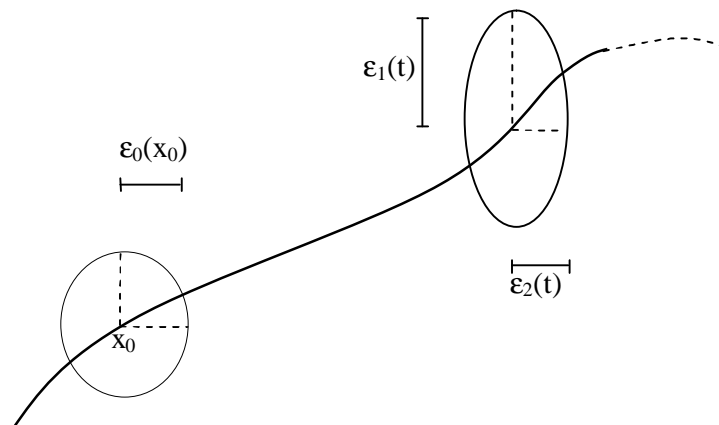


Figura 2-16 Evolução de um elemento de volume esférico de raio  $\varepsilon_0(x_0)$  em torno de um ponto inicial  $x_0$ . Depois de um tempo  $t$  a esfera torna-se um elipsóide com eixos principais.

Da equação 2.19 obtemos:

$$\varepsilon_i(t) \approx \varepsilon_0(x_0) e^{\lambda_i t}. \quad (2.20)$$

Concluimos que (FERRARA, 1994):

a) a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas;

b) para uma solução caótica, associada a um atrator estranho, a sensibilidade às condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov  $\lambda_i > 0$ ;

c) para uma solução periódica ou quasi-periódica podemos esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial. Segue, portanto, de (2.20) que no caso de solução periódica ou quasi-periódica  $\lambda_i < 0$  nas direções perpendiculares ao movimento e  $\lambda_i = 0$  ao longo da trajetória.

É possível identificar um atrator pelos sinais dos expoentes de Lyapunov. Assim, a dinâmica de um atrator para um sistema contínuo com três equações diferenciais será de um movimento periódico se o espectro de Lyapunov apresentar um expoente nulo e os demais negativos, caótico, se apresentar um positivo, um nulo e o outro negativo e ponto fixo se todos forem negativos (SANDRI, 1996). Esta classificação está descrita abaixo:

Dinâmica dos atratores	Espectros de Lyapunov
Ponto fixo	-, -, -
Movimento periódico	0, -, -
Movimento caótico	+, 0, -

Assim, um sistema contínuo com três equações diferenciais ordinárias será caótico, com base no espectro de Lyapunov, se tiver um expoente positivo, um nulo e o outro negativo e periódicos se o espectro tiver um nulo e os demais negativos.

### 2.3.4 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré foi o nome dado em homenagem ao físico e filósofo francês Henri Poincaré (1854-1912), com a foto mostrada a seguir segundo (SANJÚAN, VÁZQUEZ, 2005). Poincaré estudou problemas relacionados a sistemas dinâmicos que não exibiam soluções analíticas, ou seja, não são integráveis (FERRARI et al, 2006).



Figura 2-17 Foto de H. Poincaré.

Segundo (SAVI, 2002), a seção de Poincaré elimina uma dimensão do sistema permitindo que se transforme um sistema contínuo no tempo em um mapeamento discreto. Uma maneira de se definir a seção de Poincaré é observar uma dada órbita apenas em pontos discretos, tomados em uma superfície, conforme figura abaixo:

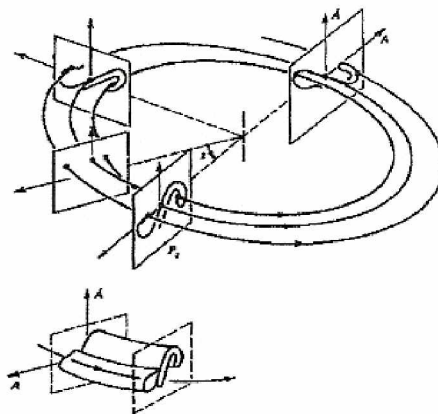


Figura 2-18 Seção de Poincaré (SAVI, 2002).

### 2.3.4.1 Atrator e Dimensão Fractal

Em paralelo ao estudo da dinâmica de sistemas, B. Mandelbrot (1982), com a foto mostrada abaixo segundo (BATANETE, CASTRO, LAGO, 2005),



Figura 2-19 Foto de Benoit Mandelbrot.

estabeleceu a existência da “geometria da natureza” em contraste com a geometria clássica que fornece uma primeira aproximação das estruturas dos objetos físicos. A Figura 2-20 (SAVI, 2002), que vista abaixo, mostra algumas representações de sistemas naturais a partir da geometria fractal.

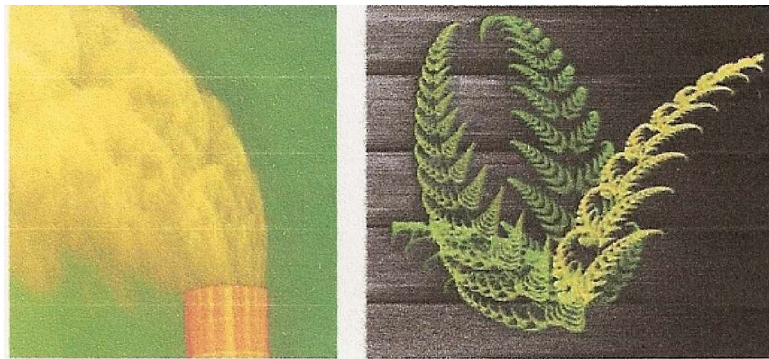


Figura 2-20 Geometria fractal.

Assim, a geometria fractal pode ser considerada como uma extensão da geometria clássica. Fractais têm sido observados na natureza em diferentes situações variando desde formas geométricas às ciências físicas. Basicamente, é possível caracterizar fractais em dois grupos distintos: objetos sólidos e atratores estranhos. O primeiro tipo

corresponde aos objetos físicos que existem no espaço físico ordinário. Por outro lado, o segundo tipo considera objetos conceituais que existem no espaço de estado de sistemas dinâmicos caóticos que apresentam trajetórias que convergem para um atrator estranho. A definição de atrator é um conjunto limite para o qual se converge na medida que o tempo evolui, segundo (SAVI, 2002). Desse modo, um atrator estranho apresenta como propriedade básica uma estrutura fractal, isto é, dimensão não inteira.

Associado a esse caráter fracionário existe dois tipos básicos de dimensão. O primeiro chamado de dimensão fractal ou métrica, que depende da propriedade geométrica; e um segundo dependente de propriedades geométricas e probabilísticas definido como dimensão de medida natural ou probabilística.

Portanto, a presença da estrutura fractal em um sistema dinâmico está associada à imprevisibilidade, ou seja, há uma forte dependência às condições iniciais que torna impossível prever a evolução do sistema.

# CAPÍTULO 3

## Equação do oscilador eletromagnético

### 3.1 Introdução

Existem movimentos oscilatórios que exibem um comportamento caótico. Como exemplo disso, pode-se citar o pêndulo caótico e o oscilador de Duffing que possuem um primeiro termo de amortecimento, um segundo não linear e um terceiro dependente da frequência da força externa. Assim, para cada valor nos parâmetros de controle, o sistema responde de uma determinada maneira, devido a sua sensibilidade em relação a eles. Desse modo, as soluções apresentam comportamentos periódicos e caóticos. Com isso, como um outro exemplo, propomos o oscilador eletromagnético caótico que exhibe oscilações não periódicas, conforme modelo proposto, na figura 3-1 que vem a seguir. Nessa ilustração, estão indicados os ímãs, condutores retilíneos estáticos infinitos, eletroímã e o fio oscilante. Esse condutor em movimento sofre a atuação das forças de amortecimento  $\vec{F}_{am}$ , gravitacional  $\vec{F}_g$  e magnéticas  $\vec{F}_I$ ,  $\vec{F}_{EL}$  e  $\vec{F}_R$ , devido a presença do ar e dos campos  $\vec{g}$ ,  $\vec{B}_I$ ,  $\vec{B}_{EL}$  e  $\vec{B}_R$ , respectivamente, criados pela terra, ímãs, eletroímã e os fios infinitos.

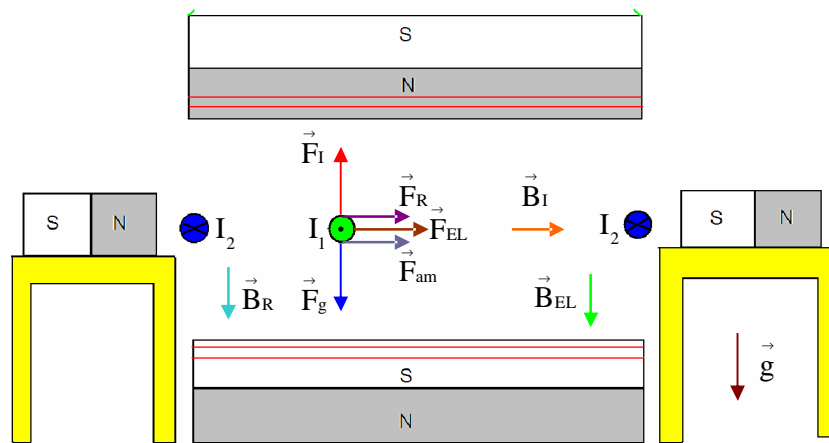


Figura 3-1 Diagrama de forças e campos do oscilador eletromagnético.

## 3.2 Forças que agem no fio oscilante

### 3.2.1 Força de amortecimento

A força de amortecimento é sempre oposta à velocidade; portanto, realiza trabalho negativo, isto é, absorve energia do corpo em movimento (SYMÓN, 1982). Desse modo, ela surge no sistema, devido a um fluido gasoso que é o ar. Sendo assim, na maioria dos casos, quando a força de atrito é pequena, pode-se supor que ela seja linearmente proporcional à velocidade.

$$F_{\text{am}} = -bv. \quad (3.1)$$

Em um modelo tradicional, a força de amortecimento, figura 3-2, é proporcional a velocidade.

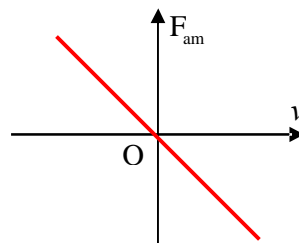


Figura 3-2 Força de amortecimento para diferentes velocidades.

### 3.2.2 Força gravitacional

Em casos de corpos de pequenas dimensões e massa  $m$ , na superfície da Terra (SYMON, 1982), a força gravitacional é dada por:

$$F_g = mg, \quad (3.2)$$

que será usada para estimar a massa  $m$  do fio oscilante com o objetivo de obter uma resultante vertical nula pela anulação da força gravitacional com a, magnética criada pelos imãs, que vai ser deduzida na próxima seção, e restringir o movimento na horizontal.

### 3.2.3 Força magnética produzida pelos imãs

O fio oscilante de comprimento  $l$  sofre influência de uma outra força, que será deduzida a seguir, devido ao campo magnético praticamente uniforme produzido pelos imãs, conforme figura 3-3, mostrada abaixo:

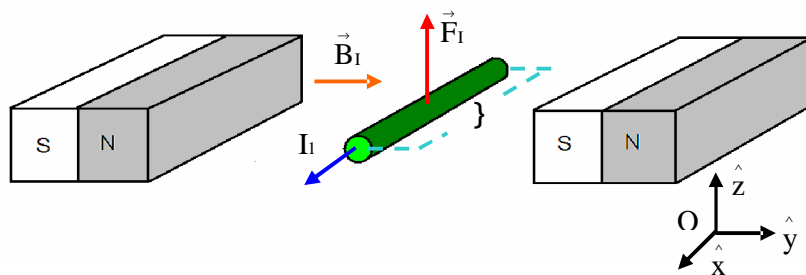


Figura 3-3 Esquema tridimensional do fio oscilante e ímãs.

$$d\vec{F}_1 = \vec{I}_1 \times \vec{B}_1, \quad (3.3)$$

Se  $\vec{I}_1 = (I_1 di) \hat{x}$  e  $\vec{B} = B_1 \hat{y}$ , temos:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1 &= ((I_1 di) \hat{x}) \times ((B_1) \hat{y}), \\ d\vec{F}_1 &= I_1 B_1 di (\hat{x} \times \hat{y}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

pela base ortonormal da figura 3-3, o produto vetorial entre  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , se torna:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad (3.5)$$

substituindo (3.5) em (3.4).

$$d\vec{F}_1 = I_1 B_1 di (\hat{z}), \quad (3.6)$$

pela figura 3-3,

$$d\vec{F}_1 = (dF_1) (\hat{z}), \quad (3.7)$$

$$(dF_1) (\hat{z}) = I_1 B_1 di (\hat{z}),$$

$$dF_1 = I_1 B_1 di, \quad (3.8)$$

Integrando (3.8) de 0 a } :

$$\int_0^} dF_1 = \int_0^} I_1 B_1 di, \quad (3.9)$$

como a integração está sendo feita em relação à  $i$ ,  $I_1$  e  $B_1$  podem sair da integral, em (3.9).

$$\int_0^} dF_1 = I_1 B_1 \int_0^} di,$$

$$F_1 = I_1 \} B_1, \quad (3.10)$$

### 3.2.4 Força magnética produzida pelos condutores retilíneos estáticos infinitos

Os condutores retilíneos estáticos infinitos criam sobre o fio oscilante uma força restauradora não linear que será demonstrada neste tópico. Sendo assim, considerando o esquema da figura 3-4 e a lei de Ampere:

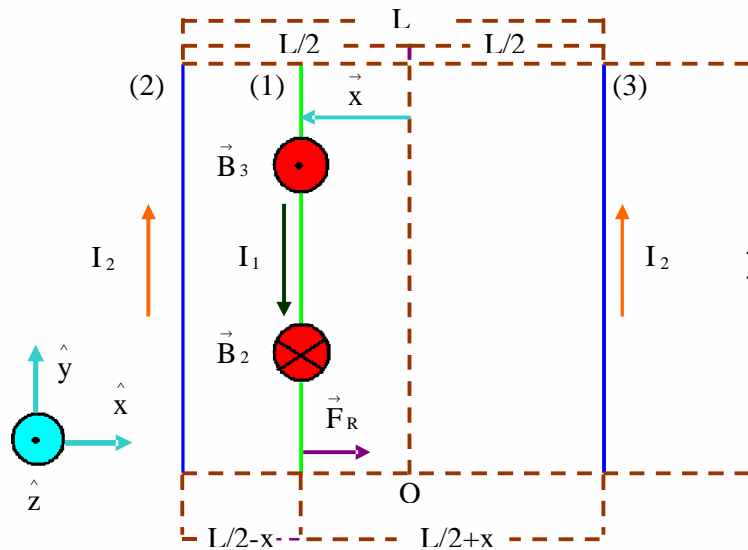


Figura 3-4 Diagrama de forças e campos do fio oscilante e, condutores estáticos retilíneos infinitos.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I + \mu \epsilon \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} da, \quad (3.11)$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \left( I + \epsilon \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} da \right),$$

se  $\dot{I} = I + \epsilon \frac{d}{dt} \int_s \vec{E} \cdot \hat{n} da$ , temos:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \dot{I}, \quad (3.12)$$

o campo magnético produzido pelos fios 2 e 3, conforme figura 3-4, onde  $\dot{I} = I_2$ , é definido por:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_2, \quad (3.13)$$

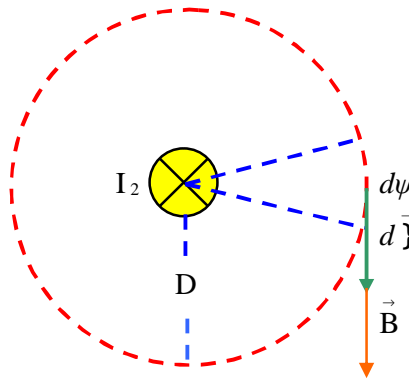


Figura 3-5 Campo magnético produzido por um fio infinito.

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} \cos 0 = \mu I_2,$$

sendo  $\cos 0 = 1$ , B pode sair para fora de integral, pois é o mesmo ao longo do contorno.

$$B \oint_c dl = \mu I_2,$$

onde  $dl = D d\psi$ :

$$B \int_0^{2\pi} D d\psi = \mu I_2,$$

$$B2\pi D = \mu I_2,$$

$$B = \frac{\mu I_2}{2\pi D}, \quad (3.14)$$

em termos vetoriais, os campos magnéticos dos fios 2 e 3 de acordo com a figura 3-4 e a orientação da base ortonormal são:

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu I_2}{2\pi D_2} \hat{z}, \quad (3.15)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu I_2}{2\pi D_3} \hat{z}, \quad (3.16)$$

o campo magnético resultante que atua no fio oscilante é definido por:

$$\vec{B}_R = \vec{B}_2 + \vec{B}_3, \quad (3.17)$$

substituindo (3.15) e (3.16) em (3.17):

$$\begin{aligned} \vec{B}_R &= -\frac{\mu I_2}{2\pi D_2} \hat{z} + \frac{\mu I_2}{2\pi D_3} \hat{z}, \\ \vec{B}_R &= -\left(\frac{\mu I_2}{2\pi}\right) \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_3}\right) \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

observando a figura 3-4, as distâncias dos fios 2 e 3 até o fio oscilante são:

$$D_2 = \frac{L}{2} - x, \quad (3.19)$$

$$D_3 = \frac{L}{2} + x, \quad (3.20)$$

levando  $D_2$  e  $D_3$  na relação (3.18) do campo magnético resultante:

$$\begin{aligned}\vec{B}_R &= -\left(\frac{\mu I_2}{2\pi}\right) \left( \frac{1}{\left(\frac{L}{2}-x\right)} - \frac{1}{\left(\frac{L}{2}+x\right)} \right) \hat{z}, \\ \vec{B}_R &= -\left(\frac{\mu I_2}{2\pi}\right) \left( \frac{\left(\frac{L}{2}+x\right) - \left(\frac{L}{2}-x\right)}{\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(\frac{L}{2}+x\right)} \right) \hat{z}, \\ \vec{B}_R &= -\left(\frac{\mu I_2}{2\pi}\right) \left( \frac{2x}{\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right)} \right) \hat{z}, \\ \vec{B}_R &= -\frac{4\mu I_2 x}{\pi(L^2-4x^2)} \hat{z},\end{aligned}\tag{3.21}$$

sendo

$$d\vec{F}_R = \vec{I}_1 \times \vec{B}_R,\tag{3.22}$$

e  $\vec{I}_1 = (-I_1 dy) \hat{y}$ ,

$$d\vec{F}_R = ((-I_1 dy) \hat{y}) \times \left( \left( -\frac{4\mu I_2 x}{\pi(L^2-4x^2)} \right) \hat{z} \right),$$

$$d\vec{F}_R = \left( \frac{4\mu I_1 I_2 x dy}{\pi(L^2-4x^2)} \right) (\hat{y} \times \hat{z}),$$

pela base ortonormal da figura 3-4:

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x},$$

$$d\vec{F}_R = \left( \frac{4\mu I_1 I_2 x dy}{\pi(L^2 - 4x^2)} \right) \hat{x},$$

integrando a relação do elemento de força restauradora  $d\vec{F}_R$  de 0 a  $l$ :

$$\int_0^l d\vec{F}_R = \int_0^l \left( \frac{4\mu I_1 I_2 x dy}{\pi(L^2 - 4x^2)} \right) \hat{x},$$

como a integração está sendo feita em relação ao comprimento do fio, os outros parâmetros podem sair para fora da integral,

$$\int_0^l d\vec{F}_R = \left( \frac{4\mu I_1 I_2 x}{\pi(L^2 - 4x^2)} \hat{x} \right) \left( \int_0^l dy \right),$$

$$\vec{F}_R = \frac{4\mu I_1 I_2 l}{\pi(L^2 - 4x^2)} \hat{x},$$

pela figura 3-4, observamos que os vetores  $\vec{F}_R = F_R \hat{x}$  e  $\vec{x} = -x \hat{x}$ , assim:

$$F_R \hat{x} = - \frac{4\mu I_1 I_2 l x}{\pi(L^2 - 4x^2)} \hat{x},$$

$$F_R = - \frac{4\mu I_1 I_2 l x}{\pi(L^2 - 4x^2)}. \quad (3.23)$$

A força restauradora (3.23), cujo gráfico está mostrado na figura 3-6, que vem a seguir, tem uma relação não linear com a posição.

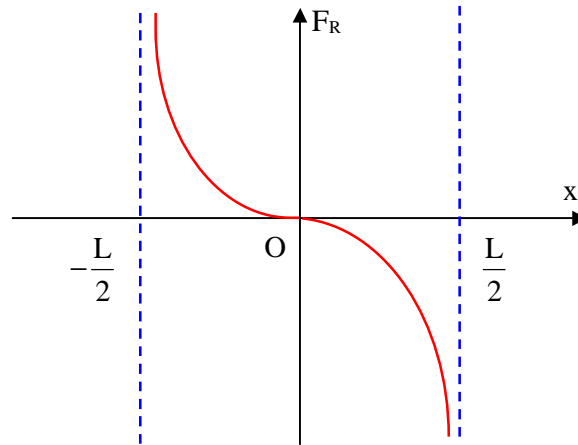


Figura 3-6 Gráfico da força magnética restauradora para  $-L/2 < x < L/2$ .

### 3.2.5 Força magnética produzida pelo eletroímã

O fio oscilante ainda sofre influência de uma força externa com excitação produzida pelo eletroímã que será deduzida a seguir, tendo como ilustração a figura 3-7 abaixo.

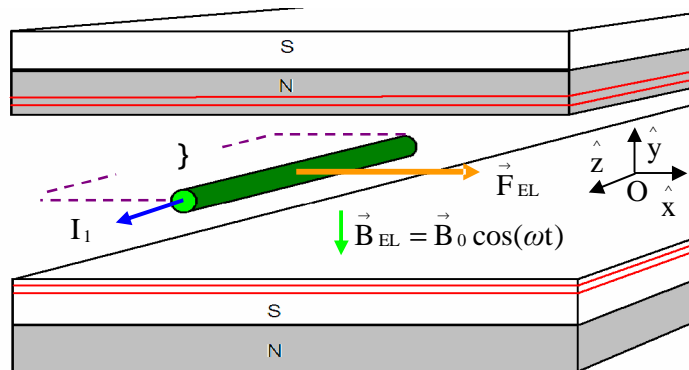


Figura 3-7 Esquema tridimensional do fio oscilante e, eletroímã.

O campo magnético criado pelo eletroímã é dado por:

$$\vec{B}_{EL} = \vec{B}_0 \cos(\omega t), \quad (3.24)$$

onde  $\vec{B}_{EL} = -B_0 \hat{y}$  e  $\omega$  é a frequência externa de excitação.

A corrente que passa pelo fio oscilante é definida como:

$$\vec{I}_1 = (I_1 dz) \hat{z}, \quad (3.25)$$

e o elemento de força que atua no fio oscilante é

$$d\vec{F}_{EL} = \vec{I}_1 \times \vec{B}_{EL}, \quad (3.26)$$

realizando as respectivas substituições de (3.24) e (3.25) em (3.26),

$$d\vec{F}_{EL} = ((I_1 dz) \hat{z}) \times (-B_0 \cos(\omega t) \hat{y}),$$

$$d\vec{F}_{EL} = -B_0 I_1 \cos(\omega t) dz (\hat{z} \times \hat{y}),$$

pela base ortonormal da figura 3-7, chega-se:

$$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x},$$

então,

$$d\vec{F}_{EL} = B_0 I_1 \cos(\omega t) dz \hat{x}, \quad (3.27)$$

integrando (3.27) de 0 a  $l$ :

$$\int_0^l d\vec{F}_{EL} = \int_0^l B_0 I_1 \cos(\omega t) dz \hat{x},$$

como a integração está sendo feita em relação ao comprimento do fio, os outros termos da integral da direita podem ser retirados para fora,

$$\int_0^l d\vec{F}_{EL} = B_0 I_1 \cos(\omega t) \hat{x} \int_0^l dz,$$

$$\vec{F}_{EL} = B_0 I_1 \cos(\omega t) \hat{x}, \quad (3.28)$$

na figura 3-7, observa-se que  $\vec{F}_{EL} = F_{EL} \hat{x}$ , portanto:

$$F_{EL} \hat{x} = B_0 I_1 \cos(\omega t) \hat{x},$$

$$F_{EL} = B_0 I_1 \cos(\omega t). \quad (3.29)$$

### 3.3 Correntes elétricas induzidas devido à indução eletromagnética

Nesta seção mostraremos que os efeitos das induções eletromagnéticas, com as correntes induzidas e de deslocamentos no eletroímã, condutores infinitos e fio oscilante podem ser desprezados em relação às voltagens de seus respectivos geradores de corrente alternada e contínua. Os cálculos com as aproximações e deduções feitas com rigor podem ser acompanhados no apêndice A.

Portanto, como ilustração é mostrada a figura 3-8, que vem a seguir, que permite calcular a corrente induzida e de deslocamento nos condutores retilíneos infinitos estáticos pela variação do campo magnético no tempo no eletroímã.

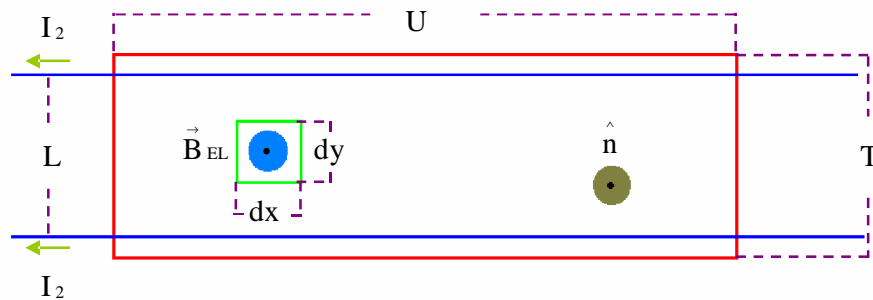


Figura 3-8 Esquema no plano dos fios infinitos e do eletroímã.

A corrente elétrica  $I_2$  que passa no circuito acima é dada por:

$$I_2 = \frac{V_{02}}{r_3} + \frac{\varepsilon_i}{r_3} + I_{di}, \quad (3.30)$$

onde  $r_3$  são as resistências em paralelo, referente ao circuito dos condutores infinitos e,

$$\varepsilon_i = - \sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_{ij}}{dt}, \quad (3.31)$$

$$I_{di} = \varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{d\Theta_{ij}}{dt}, \quad (3.32)$$

e  $\varepsilon$ ,  $\varphi_{ij}$  e  $\Theta_{ij}$  são a permissividade elétrica do meio, os fluxos magnético e elétrico, respectivamente.

Onde se chega,

$$\varepsilon_2 = B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t), \quad (3.33)$$

$$I_{d2} = \frac{B_0 T U \omega^2 \varepsilon A \text{cos}(\omega t)}{S}. \quad (3.34)$$

Desprezando os efeitos produzidos pelos fios flexíveis conectados ao fio oscilante, e considerando somente o campo criado pelo comprimento } dele, tem-se os esquemas das figuras 3-9 e 3-10.

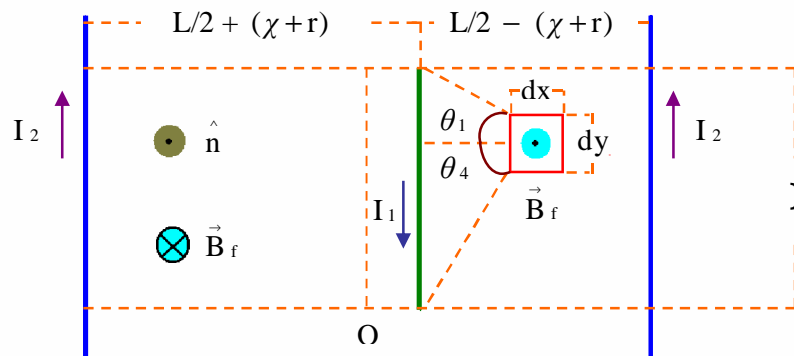


Figura 3-9 Esquema no plano do fio oscilante e dos condutores infinitos.

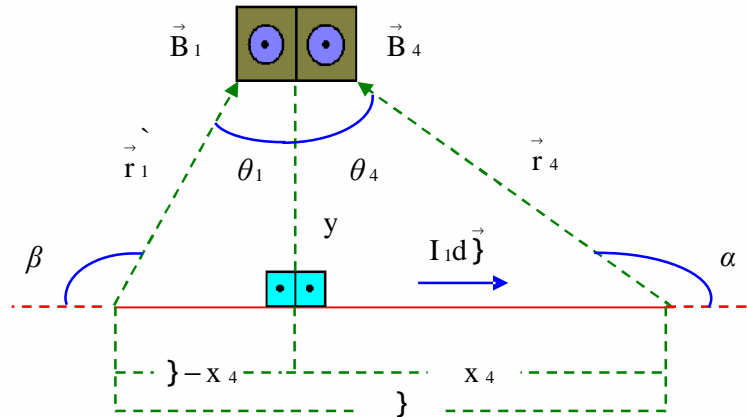


Figura 3-10 Ampliação da parte do fio oscilante de comprimento }.

Considerando a lei de Biot - Savart ,

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{j} \times \vec{r}}{r^2}, \quad (3.35)$$

e os esquemas das figuras (3.9) e (3.10) se deduz que,

$$\vec{B}_f = \frac{\mu I_1}{4\pi y} \left( \frac{-X_4}{\sqrt{y^2 + (-X_4)^2}} + \frac{X_4}{\sqrt{y^2 + X_4^2}} \right) \hat{n}_B. \quad (3.36)$$

e,

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\varphi_{21}}{dt} = \Phi(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (3.37)$$

onde,

$$\Phi(\chi) = \frac{\mu \Pi(\chi)}{2\pi}, \quad (3.38)$$

$$\frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (3.39)$$

también,

$$\dot{I}_{d2} = \Upsilon_1(t) + \Upsilon_2(t) + \Upsilon_3(t) + \Upsilon_4(t), \quad (3.40)$$

sendo,

$$\Upsilon_1(t) = \frac{d^2\Gamma(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (3.41)$$

$$\Upsilon_2(t) = \frac{d\Gamma(\chi)}{d\chi} \frac{d^2\chi}{dt^2} I_1, \quad (3.42)$$

$$\Upsilon_3(t) = 2 \frac{d\Gamma(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (3.43)$$

$$\Upsilon_4(t) = \Gamma(\chi) \frac{d^2I_1}{dt^2}, \quad (3.44)$$

$$\Gamma(\chi) = \frac{\mu \in A}{2\pi S} \Pi(\chi), \quad (3.45)$$

$$\frac{d\Gamma(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu \in A}{2\pi S} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (3.46)$$

$$\frac{d^2\Gamma(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu \in A}{2\pi S} \frac{d^2\Pi(\chi)}{d\chi^2}, \quad (3.47)$$

$$\Pi(\chi) = f_{21}^{\ddot{}}(\chi) - f_{21}^{\dot{}}(\chi), \quad (3.48)$$

$$\frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} = \frac{df_{21}^{\prime\prime}(\chi)}{d\chi} - \frac{df_{21}^{\prime}(\chi)}{d\chi}, \quad (3.49)$$

$$\frac{d^2\Pi(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2f_{21}^{\prime\prime}(\chi)}{d\chi^2} - \frac{d^2f_{21}^{\prime}(\chi)}{d\chi^2}, \quad (3.50)$$

onde as funções  $\frac{d^2f_{21}^{\prime\prime}(\chi)}{d\chi^2}$ ,  $\frac{d^2f_{21}^{\prime}(\chi)}{d\chi^2}$ ,  $\frac{df_{21}^{\prime\prime}(\chi)}{d\chi}$ ,  $\frac{df_{21}^{\prime}(\chi)}{d\chi}$ ,  $f_{21}^{\prime\prime}(\chi)$  e  $f_{21}^{\prime}(\chi)$  são mostradas no apêndice A,

dessa maneira,

$$I_2 = \frac{V_{03}}{r_3} (1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4), \quad (3.51)$$

tendo,

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_2}{V_{03}} = \frac{TU\omega}{V_{03}} \text{sen}(\omega t) B_0, \quad (3.52)$$

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_2}{V_{03}} = \Psi(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Psi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (3.53)$$

e,

$$\Psi(\chi) = \frac{\Phi(\chi)}{V_{03}} = \frac{\mu\Pi(\chi)}{2\pi V_{03}}, \quad (3.54)$$

$$\frac{d\Psi(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{V_{03}} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu}{2\pi V_{03}} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (3.55)$$

$$\tau_3 = \frac{r_3 I_{d2}}{V_{03}} = \frac{TU\omega^2 \in Ar_3 \cos(\omega t)}{SV_{03}} B_0, \quad (3.56)$$

$$\tau_4 = \frac{r_3 I_{d2}}{V_{03}} = \Xi_1(t) + \Xi_2(t) + \Xi_3(t) + \Xi_4(t), \quad (3.57)$$

$$\Xi_1(t) = \frac{\mu \in Ar_3}{2\pi SV_{03}} \frac{d^2 \Pi(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (3.58)$$

$$\Xi_2(t) = \frac{\mu \in Ar_3}{2\pi SV_{03}} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_1, \quad (3.59)$$

$$\Xi_3(t) = \frac{\mu \in Ar_3}{\pi SV_{03}} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (3.60)$$

$$\Xi_4(t) = \frac{\mu \in Ar_3}{2\pi SV_{03}} \Pi(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2}, \quad (3.61)$$

sendo os outros termos da soma de (3.51) muito menores do que um, conforme mostrado no apêndice A com os valores numéricos e válidos para baixas intensidades e variações no tempo da corrente elétrica, e pequenas velocidades e acelerações quando comparados com seus termos proporcionais,

$$I_2 \cong \frac{V_{03}}{r_3}. \quad (3.62)$$

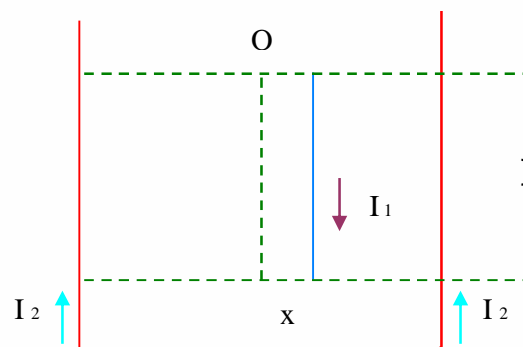


Figura 3-11 Movimento de oscilação do fio oscilante.

Sendo assim,

$$I_1 = \frac{V_{01}}{r_{01}} + \frac{\varepsilon_i}{r_{01}} + I_{di}, \quad (3.63)$$

o campo magnético que atua no fio oscilante é dado por:

$$\vec{B}_R = \frac{4\mu I_2(\chi+r)}{\pi(L^2-4(\chi+r)^2)} \hat{n},$$

então, as tensões induzidas e as correntes de deslocamentos no fio oscilante devido aos fios infinitos e ao eletroímã,

$$\varepsilon_1 = \mathfrak{R}(\chi) \frac{dI_2}{dt} + \frac{d\mathfrak{R}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_2, \quad (3.64)$$

$$\mathfrak{R}(\chi) = \frac{\mu\} {2\pi} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right), \quad (3.65)$$

$$\frac{d\mathfrak{R}(\chi)}{d\chi} = - \frac{4\mu\}(\chi+r)}{\pi(L^2-4(\chi+r)^2)}, \quad (3.66)$$

$$I_{di} = M_1(t) + M_2(t), \quad (3.67)$$

$$M_1(t) = A(\chi) \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{dA(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_2, \quad (3.68)$$

$$M_2(t) = 2A(\chi) \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_2}{dt} + \frac{d^2 A(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_2, \quad (3.69)$$

$$A(\chi) = \frac{\mu \in A}{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right), \quad (3.70)$$

$$\frac{dA(\chi)}{d\chi} = -\frac{4\mu \in A \ddot{(\chi+r)}}{\pi(L^2 - 4(\chi+r)^2)}, \quad (3.71)$$

$$\frac{d^2A(\chi)}{d\chi^2} = -\frac{4\mu \in A \ddot{(L^2 + 4(\chi+r)^2)}}{\pi(L^2 - 4(\chi+r)^2)^2}, \quad (3.72)$$

$$I_{d1} \dot{=} \frac{B_0 T U \omega^2 \in A \ddot{}}{\}} \cos(\omega t), \quad (3.73)$$

$$I_{d2} \ddot{=} \aleph_1(t) + \aleph_2(t) + \aleph_3(t) + \aleph_4(t), \quad (3.74)$$

$$\aleph_1(t) = \mathfrak{D}(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2}, \quad (3.75)$$

$$\aleph_2(t) = \frac{d\mathfrak{D}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_1, \quad (3.76)$$

$$\aleph_3(t) = 2 \frac{d\mathfrak{D}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (3.77)$$

$$\aleph_4(t) = \frac{d^2 \mathfrak{D}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (3.78)$$

$$\mathfrak{D}(\chi) = \frac{\mu \in A \ddot{}}{2\pi\}} \Pi(\chi), \quad (3.79)$$

$$\frac{d\mathfrak{D}(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu \in A \ddot{}}{2\pi\}} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (3.80)$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{D}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu \in A \ddot{}}{2\pi\}} \frac{d^2 \Pi(\chi)}{d\chi^2}, \quad (3.81)$$

portanto, a corrente  $I_1$ , é dada por,

$$I_1 = \frac{V_{01}}{r_{01}} \frac{(1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6)}{(1 - \Delta_7)}, \quad (3.82)$$

e,

$$\Delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{V_{01}} = P(\chi) \frac{dI_2}{dt} - \frac{dP(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_2, \quad (3.83)$$

$$P(\chi) = \frac{\Re(\chi)}{V_{01}} = \frac{\mu\}}{2\pi V_{01}} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right), \quad (3.84)$$

$$\frac{dP(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{V_{01}} \frac{d\Re(\chi)}{d\chi} = \frac{4\mu\}}{\pi V_{01} (L^2 - 4(\chi+r)^2)}, \quad (3.85)$$

$$\Delta_2 = \frac{r_{01}}{V_{01}} I_{d1} = \bar{p}_1(t) - \bar{p}_2(t), \quad (3.86)$$

$$\bar{p}_1(t) = \frac{r_{01}}{V_{01}} M_1(t) = \mathcal{Z}(\chi) \frac{d^2 I_2}{dt^2} - \frac{d\mathcal{Z}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_2, \quad (3.87)$$

$$\bar{p}_2(t) = \frac{r_{01}}{V_{01}} M_2(t) = 2 \frac{d\mathcal{Z}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_2}{dt} + \frac{d^2 \mathcal{Z}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_2, \quad (3.88)$$

$$\mathcal{Z}(\chi) = \frac{r_{01}}{V_{01}} A(\chi) = \frac{\mu \in A}{2\pi V_{01}} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right), \quad (3.89)$$

$$\frac{d\mathcal{Z}(\chi)}{d\chi} = \frac{r_{01}}{V_{01}} \frac{dA(\chi)}{d\chi} = \frac{4\mu \in A}{\pi V_{01} (L^2 - 4(\chi+r)^2)}, \quad (3.90)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{r_{01}}{V_{01}} \frac{d^2 A(\chi)}{d\chi^2} = \frac{4\mu \in A}{\pi V_{01} (L^2 - 4(\chi+r)^2)^2}, \quad (3.91)$$

$$\Delta_3 = \frac{\varepsilon_2}{V_{01}} = \frac{TU\omega}{V_{01}} \text{sen}(\omega t) B_0, \quad (3.92)$$

$$\Delta_4 = \frac{r_{01}}{V_{01}} I_{d1} = \frac{TU\omega^2 \in A}{\}V_{01}} r_{01} \cos(\omega t) B_0, \quad (3.93)$$

$$\Delta_5 = \frac{\Phi(\chi)}{V_{01}} \frac{dI_1}{dt} = \frac{\mu \Pi(\chi)}{2\pi V_{01}} \frac{dI_1}{dt}, \quad (3.94)$$

$$\Delta_6 = \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_3(t), \quad (3.95)$$

$$\mathcal{L}_1(t) = \frac{r_{01}}{V_{01}} \mathfrak{K}_1(t) = \frac{\mu \in A}{2\pi \}V_{01}} r_{01} \Pi(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2}, \quad (3.96)$$

$$\mathcal{L}_3(t) = \frac{r_{01}}{V_{01}} \mathfrak{K}_3(t) = \frac{\mu \in A}{\pi \}V_{01}} r_{01} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (3.97)$$

$$\Delta_7 = \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} + \frac{d\mathfrak{E}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} + \frac{d^2 \mathfrak{E}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2, \quad (3.98)$$

onde os parâmetros  $\frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}$ ,  $\frac{d\mathfrak{E}(\chi)}{d\chi}$  e  $\frac{d^2 \mathfrak{E}(\chi)}{d\chi^2}$  de  $\Delta_7$ , é, respectivamente, mostrado no apêndice A e foram determinados anteriormente.

Com os outros parâmetros da soma de (3.82) sendo muito menores do que um como mostrado no apêndice A, e válidos para baixas intensidades e variações no tempo das correntes elétricas  $I_1$  e  $I_2$  e pequenas velocidades e acelerações quando comparados com seus termos proporcionais,

$$I_1 \cong \frac{V_{01}}{r_{01}}. \quad (3.99)$$

Com o esquema da figura 3-8 e a lei de Faraday, calcula-se que a corrente induzida e, de deslocamento, no eletroímã devido à auto-indução são dadas por:

$$I_{\text{ind}} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_0 U T \omega \text{sen}(\omega t)}{R}, \quad (3.100)$$

$$I_d = \frac{\varepsilon B_0 A \omega^2 \cos(\omega t)}{H}, \quad (3.101)$$

e aplicando a lei de Ampere e a equação de força (3.26),

$$F_{\text{ELI}} = \frac{\mu H B_0 I_1 \} U T \omega \text{sen}(\omega t)}{R J} + \frac{\mu \varepsilon B_0 I_1 \} A \omega^2 \cos(\omega t)}{J}. \quad (3.102)$$

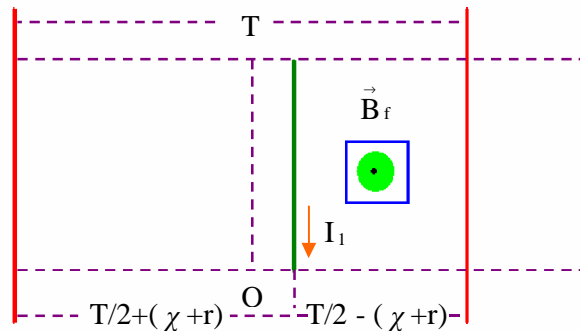


Figura 3-12 Esquema no plano de uma região do eletroímã e do fio oscilante.

Com os esquemas 3-10 e 3-12, realizando cálculos similares, e considerando a aproximação feita para a corrente  $I_1$ , que implica  $I_1 \cong \frac{V_{01}}{r_{01}}$ ,  $\frac{dI_1}{dt} \cong 0$  e

$\frac{d^2 I_1}{dt^2} \cong 0$  chega-se novamente na expressão (3.36). Portanto, sendo (1) referente ao fio limitado e (3) ao eletroímã, chega-se que a corrente induzida e, de deslocamento no eletroímã devido ao fio oscilante são dadas por:

$$I_3 = \frac{\varepsilon_3}{R} = \frac{d\kappa(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (3.103)$$

$$\frac{d\zeta(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu}{2\pi R} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi}, \quad (3.104)$$

$$I_{d3} = \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} \frac{d^2\chi}{dt^2} I_1 + \frac{d^2\vartheta(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (3.105)$$

$$\frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu \in A}{2\pi H U T} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi}, \quad (3.106)$$

$$\frac{d^2\vartheta(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu \in A}{2\pi H U T} \frac{d^2\vartheta(\chi)}{d\chi^2}, \quad (3.107)$$

$$\vartheta(\chi) = f_{31}(\chi) - f_{31}(\chi), \quad (3.108)$$

$$\frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} = \frac{df_{31}(\chi)}{d\chi} - \frac{df_{31}(\chi)}{d\chi}, \quad (3.109)$$

$$\frac{d^2\vartheta(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2f_{31}(\chi)}{d\chi^2} - \frac{d^2f_{31}(\chi)}{d\chi^2}, \quad (3.110)$$

sendo que as funções  $\frac{d^2f_{31}(\chi)}{d\chi^2}$ ,  $\frac{df_{31}(\chi)}{d\chi}$ ,  $f_{31}(\chi)$  e  $f_{31}(\chi)$  são também mostradas no apêndice A,

aplicando, novamente a lei de Ampere e (3.26),

$$F_{EL2} = \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1^2 + \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} \frac{d^2\chi}{dt^2} I_1^2 + \frac{d^2\vartheta(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1^2, \quad (3.111)$$

$$\frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu H}{J} \frac{d\zeta(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu^2 H}{2\pi R J} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi}, \quad (3.112)$$

$$\frac{d\varpi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu H}{J} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu^2 \in A''''}{2\pi T J U} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi}, \quad (3.113)$$

$$\frac{d^2\varpi(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu H}{J} \frac{d^2\vartheta(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu^2 \in A''''}{2\pi T J U} \frac{d^2\vartheta(\chi)}{d\chi^2}, \quad (3.114)$$

Portanto,

$$F = F_{EL} + F_{EL1} + F_{EL2}, \quad (3.115)$$

substituindo (3.29), (3.102) e (3.111) em (3.115),

$$F = B_0 I_1 \{ [\dot{\chi}_1 + [\dot{\chi}_2], \quad (3.116)$$

$$[\dot{\chi}_1 = \nabla_1 \cos(\omega t) + \nabla_2 \text{sen}(\omega t), \quad (3.117)$$

$$\nabla_1 = 1 + \frac{\mu \in A'''' \omega^2}{J}, \quad (3.118)$$

$$\nabla_2 = \frac{\mu H U T \omega}{R J}, \quad (3.119)$$

$$[\dot{\chi}_2 = \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1 + \frac{d\eta(\chi)}{d\chi} \frac{d^2\chi}{dt^2} I_1 + \frac{d^2\eta(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (3.120)$$

$$\frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{\mu B_0} \frac{d\eta(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu^2 H}{2\pi R J B_0} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi}, \quad (3.121)$$

$$\frac{d\eta(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{\mu B_0} \frac{d\varpi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu^2 \in A''''}{2\pi T J B_0 U} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi}, \quad (3.122)$$

$$\frac{d^2 \eta(\chi)}{d\chi^2} = \frac{1}{\mu B_0} \frac{d^2 \omega(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu^2 \in A}{2\pi T J B_0 U} \frac{d^2 \vartheta(\chi)}{d\chi^2}, \quad (3.123)$$

se,

$$\text{sen}(\arcsen(\delta)) = \delta, \quad (3.124)$$

e,

$$-1 < \delta < 1, \quad (3.125)$$

tem-se,

$$\text{sen}(\arcsen(\nabla_2)) = \nabla_2, \quad (3.126)$$

se,

$$-1 < \nabla_2 < 1, \quad (3.127)$$

usando a relação trigonométrica:

$$\text{sen}(\omega t) \text{sen}(\arcsen(\nabla_2)) = \frac{1}{2} \{ \cos(\vartheta) - \cos(\tau) \}, \quad (3.128)$$

onde,

$$\vartheta = \omega t - \arcsen(\nabla_2), \quad (3.129)$$

$$\tau = \omega t + \arcsen(\nabla_2), \quad (3.130)$$

então,

$$[ \textsubscript{1} = \nabla_1 \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \{ \cos(\varphi) - \cos(\psi) \} \text{sen}(\omega t), \quad (3.131)$$

para  $t = 0$ ,

$$\frac{1}{2} \{ \cos(-\arcsen(\nabla_2)) - \cos(\arcsen(\nabla_2)) \} = 0, \quad (3.132)$$

pois,

$$\cos(-\arcsen(\nabla_2)) = \cos(\arcsen(\nabla_2)), \quad (3.133)$$

para  $t \neq 0$  e  $t$  grande em relação a  $\arcsen(\nabla_2)$ , e  $\nabla_2 \ll 1$ , tem-se que  $\arcsen(\nabla_2) \cong \nabla_2$ ,

assim,

$$\varphi = \omega t - \arcsen(\nabla_2) \cong \omega t - \nabla_2 \cong \omega t, \quad (3.134)$$

$$\psi = \omega t + \arcsen(\nabla_2) \cong \omega t + \nabla_2 \cong \omega t, \quad (3.135)$$

$$\frac{1}{2} \{ \cos(\varphi) - \cos(\psi) \} \cong 0, \quad (3.136)$$

e, sendo os outros termos da soma de (3.116) muito menores do que um, de acordo com os cálculos numéricos mostrados no apêndice A, com  $[ \textsubscript{1} \cong \cos(\omega t)$  e  $[ \textsubscript{2} \cong 0$ ,

portanto,

$$F \cong F_{\text{EL}} = B_0 I_1 \cos(\omega t). \quad (3.137)$$

O campo magnético dos ímãs não produz corrente elétrica induzida, pois ele é perpendicular a normal do circuito, isto é,

$$\varphi = \int_{\mathcal{S}} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} \, da = \int_{\mathcal{S}} B_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) da = 0, \quad (3.138)$$

então, sendo o fluxo magnético igual a zero, tem-se que a tensão induzida também será nula.

### 3.4 Equação do movimento do fio oscilante

A equação que descreve o movimento do centro de massa do fio oscilante obedece à segunda lei de Newton e tem a seguinte forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F_x, \quad (3.139)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma F_y, \quad (3.140)$$

onde  $m$  é a massa do fio oscilante,  $x$  e  $y$  são seu deslocamento em relação a posição de equilíbrio,  $\Sigma F_x$  é o somatório das forças na direção  $x$  e  $\Sigma F_y$  é o somatório das forças na direção  $y$ .

Substituindo (3.1), (3.23) e (3.29) em (3.139), obtemos a equação que descreve o movimento do fio oscilante, definida por:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - \frac{4\mu I_1 I_2 \} x}{\pi(L^2 - 4x^2)} + B_0 I_1 \} \cos(\omega t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{4\mu I_1 I_2 \} x}{\pi m(L^2 - 4x^2)} = \frac{B_0 I_1 \} \cos(\omega t), \quad (3.141)$$

A aceleração na direção  $y$  é nula, ou seja,  $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ .

$$\Sigma F_y = 0, \quad (3.142)$$

Substituindo as relações (3.2) e (3.10) na relação (3.142), obtemos a seguinte relação:

$$m = \frac{B_0 I_1 \mu}{g}, \quad (3.143)$$

Onde, conforme foi dito anteriormente, é para estimar a massa do fio oscilante com o objetivo de restringir o movimento na horizontal.

### 3.5 Aproximação da equação do movimento com a de Duffing

Realizando uma expansão em série polinomial do termo não linear da equação (3.141), para pequenas deformações em relação a separação dos fios infinitos,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{4\mu I_1 I_2 \mu x}{\pi m (L^2 - 4x^2)} = \frac{B_0 I_1 \mu}{m} \cos(\omega t),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{4\mu I_1 I_2 \mu x}{\pi m L^2 \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)} = \frac{B_0 I_1 \mu}{m} \cos(\omega t),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{4\mu I_1 I_2 \mu x}{\pi m L^2} \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)^{-1} = \frac{B_0 I_1 \mu}{m} \cos(\omega t), \quad (3.144)$$

para  $L \gg 2x$ ,

$$\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{4x^2}{L^2} + \frac{16x^4}{L^4} + \dots, \quad (3.145)$$

considerando até o segundo termo da série em (3.145)

$$\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)^{-1} \cong 1 + \frac{4x^2}{L^2}, \quad (3.146)$$

substituindo (3.146) em (3.144),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{4\mu I_1 I_2 \} x}{\pi mL^2} \left(1 + \frac{4x^2}{L^2}\right) = \frac{B_0 I_1 \}}{m} \cos(\omega t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{4\mu I_1 I_2 \} x}{\pi mL^2} + \frac{16\mu I_1 I_2 \} x^3}{\pi mL^4} = \frac{B_0 I_1 \}}{m} \cos(\omega t), \quad (3.147)$$

comparando com (2.1) que é dada por,

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + w_{0D}^2 x + \kappa x^3 = \gamma \cos(\omega_D t),$$

conforme foi mostrado no capítulo 2, conclui-se que,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x},$$

$$\rho = \frac{b}{m},$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

$$w_{0D}^2 = \frac{4\mu I_1 I_2 \}}{\pi mL^2},$$

$$\kappa = \frac{16\mu I_1 I_2 \}}{\pi mL^4},$$

$$\gamma = \frac{B_0 I_1 \ell}{m},$$

$$\omega_D = \omega,$$

portanto,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \rho \frac{dx}{dt} + w_{0D}^2 x + \kappa x^3 = \gamma \cos(\omega_D t), \quad (3.148)$$

onde (3.148) é a equação de Duffing.

# **CAPÍTULO 4**

## **Simulações numéricas do sistema**

### **4.1 Introdução**

As séries temporais, posição versus tempo e velocidade versus tempo, obtidas por integração numérica permitem que se analise o comportamento do sistema. A partir dessas séries temporais obtivemos o espaço de fase, a seção de Poincaré, o espectro de frequência (análise -FFT) e o expoente de Lyapunov, utilizando os programas dos Apêndices B, C, D, E, F, G e H.

O espaço de fase é aquele em que o estado de uma partícula se movendo em uma dimensão é especificado pela sua posição  $x$  e velocidade  $v$  (BAKER, 1996). Portanto, o espaço de fase que se utilizou para análise deste trabalho foi construído usando a posição e velocidade do fio oscilante. A seção de Poincaré foi construída de tal modo que o movimento do fio oscilante seja observado através do período da força externa que age nele. O espectro de frequência foi usado para analisar o comportamento do sinal e o expoente de Lyapunov para medir a taxa de divergência ou convergência das trajetórias que partem de pontos iniciais próximos.

## 4.2 Atribuição de valores aos coeficientes do sistema

A equação diferencial que descreve o modelo proposto neste trabalho é, conforme as deduções feitas no Capítulo 3, dada por:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{4\mu I_1 I_2 x}{\pi m (L^2 - 4x^2)} = \frac{B_0 I_1}{m} \cos(\omega t) \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{4\mu I_1 I_2 x}{\pi m L^2 \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)} = \frac{B_0 I_1}{m} \cos(\omega t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Definindo novas constantes na segunda relação de (4.1):

$$c = \frac{b}{m}. \quad (4.2)$$

$$p = \frac{4\mu I_1 I_2 x}{\pi m L^2}. \quad (4.3)$$

$$u = \frac{4}{L^2}. \quad (4.4)$$

$$q = \frac{B_0 I_1}{m}. \quad (4.5)$$

Substituindo as constantes (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5) na segunda relação de (4.1):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + p \frac{x}{(1 - ux^2)} = q \cos(\omega t). \quad (4.6)$$

Na equação descrita em (4.6) atribuímos os valores numéricos que seguem na tabela abaixo:

$\}$	0,1 m	1 dm
L	0,2 m	2 dm
$I_1$	0,01 C/s	0,01 C/s
$I_2$	25 C/s	25 C/s
m	$1 \times 10^{-5}$ Kg	$1 \times 10^{-2}$ g
b	$9,8 \times 10^{-7}$ Kg/s	$9,8 \times 10^{-4}$ g/s
$\mu$	$4\pi \times 10^{-7}$ Kgm/C <sup>2</sup>	$4\pi \times 10^{-3}$ gdm/C <sup>2</sup>
$\omega$	0,3 rad / s	0,3 rad / s

Tabela 4-1 Valores numéricos das constantes da equação.

onde por facilidade de simulação, passamos a unidade de espaço de metros para decímetros e a massa de kilogramas para gramas.

Substituindo os respectivos valores acima nas constantes (4.2), (4.3) e (4.4), obtemos:

$$\begin{aligned} c &= 0,098s^{-1}; \\ p &= 0,1s^{-2}; \\ u &= 1dm^{-2}; \end{aligned} \tag{4.8}$$

e podemos escrever a equação como:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 0,098 \frac{dx}{dt} + 0,1 \frac{x}{(1-x^2)} = q \cos(0,3t), \tag{4.9}$$

que será integrado pelo método numérico de Runge-Kutta, residente no software Mathematica 5.2.

### 4.3 Integração numérica do sistema

Transformando a equação diferencial ordinária de segunda ordem (4.9) em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pela mudança das variáveis, definidas conforme segue,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$

obtemos:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = -0,098v(t) - 0,1 \frac{x(t)}{(1-x(t)^2)} + q \cos(0,3t) \end{cases} \quad (4.10)$$

Com o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem, instalado no software Mathematica 5.2, integramos o sistema (4.10) no intervalo de zero a 20000 segundos, com intervalos de integração de 0,02 segundos e condições iniciais:  $x(0) = 0,4\text{dm}$  e  $v(0) = 0,3\text{dm/s}$ . Vamos desprezar a parte transiente, e analisar o comportamento dinâmico do sistema por meio dos métodos matemáticos propostos neste trabalho.

### 4.4 Resultados das simulações

Nas simulações realizadas, variamos o parâmetro  $q$  de  $q = 0,450 \text{ dm/s}^2$  a  $q = 0,835 \text{ dm/s}^2$ . Dentre essas simulações, escolhemos uma seqüência crescente do parâmetro  $q$ , que faz o sistema passar de um movimento periódico para um caótico. A seqüência de valores do parâmetro  $q$  é  $\{0,450; 0,460; 0,470; 0,511; 0,536; 0,557; 0,596; 0,640; 0,700; 0,740; 0,812; 0,835\}$ .

Exibimos a seguir, nas figuras de 4-1 até 4-12, em (a) posição do fio oscilante em função do tempo, em (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, em (c) as trajetórias do plano de fase, em (d) a seção de Poincaré, em (e) espectros de frequências da posição do fio oscilante e em (f) os expoentes de Lyapunov (SIU, 1998).

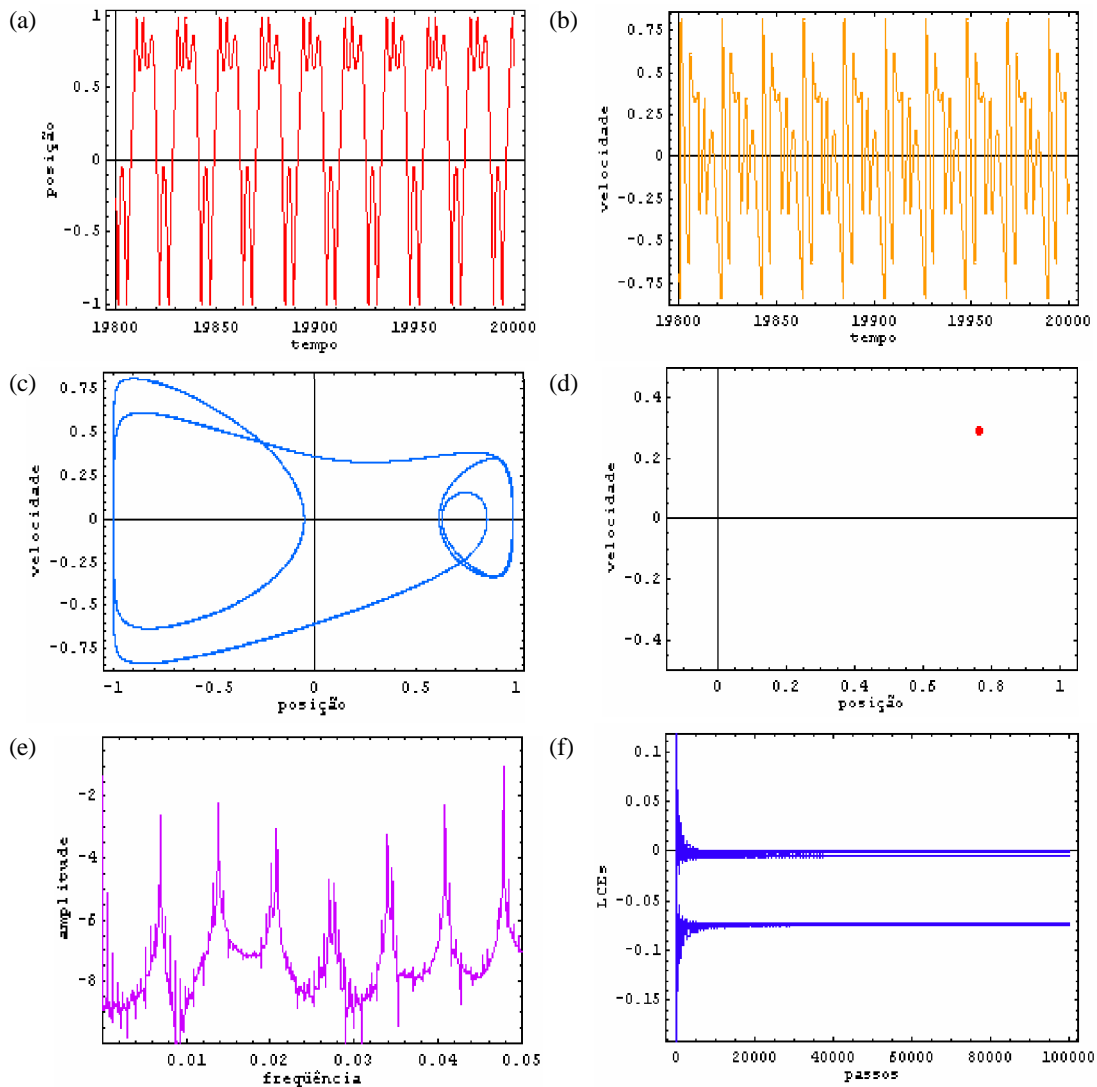


Figura 4-1 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,450 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetórias do plano de fase, (d) seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-1, para  $q = 0,450 \text{ dm} / \text{s}^2$ , a característica do gráfico em (a) e em (b) é de um movimento periódico e em (c), também, onde as trajetórias permanecem confinadas numa fina faixa, conforme ilustrado. Em (d) observa-se na seção de Poincaré que ocorre poucos pontos que caracteriza um comportamento periódico. Em (e), a

freqüência fundamental e suas freqüências múltiplas, também caracterizam movimento periódico do fio oscilante. Em (f), temos  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -0.00506525$ ,  $\lambda_3 = -0.0733393$  que confirma a existência de um comportamento periódico com um expoente de Lyapunov nulo e os demais negativos (SANDRI, 1996).

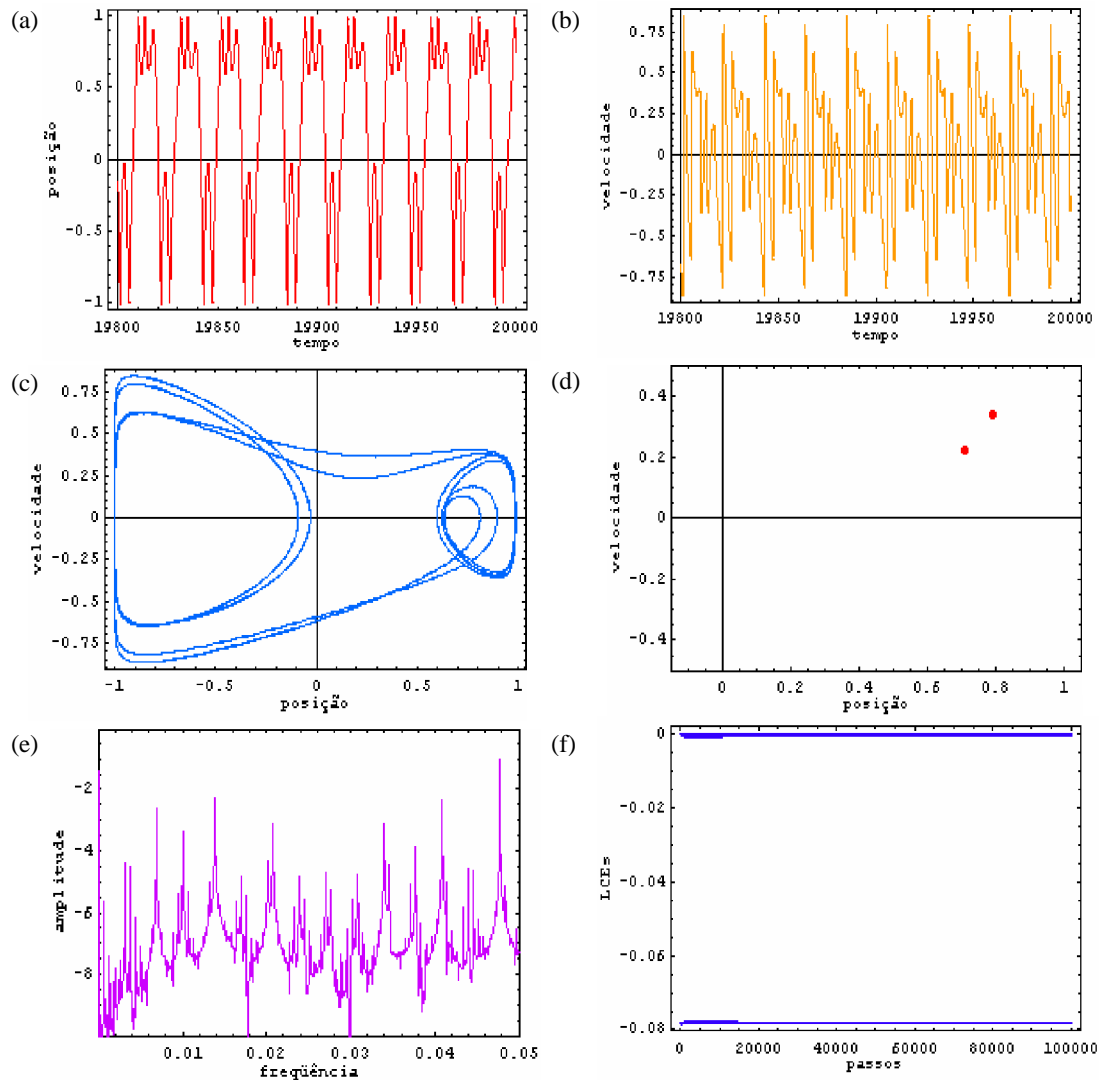


Figura 4-2 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,460 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetórias do plano de fase, (d) Seção de Poincaré, (e) espectro de freqüência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-2, para  $q = 0,460 \text{ dm} / \text{s}^2$ , em (a) e (b), podemos afirmar que o movimento do fio oscilante é periódico. Em (c) e (d) os gráficos dão indícios de movimento periódico do fio oscilante. Em (e) observamos também a freqüência natural e

suas frequências múltiplas. Em (f),  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -0,000178143$ ,  $\lambda_3 = -0,0782219$  temos a confirmação do comportamento periódico tendo como expoentes de Lyapunov um nulo e os demais negativos (SANDRI, 1996).

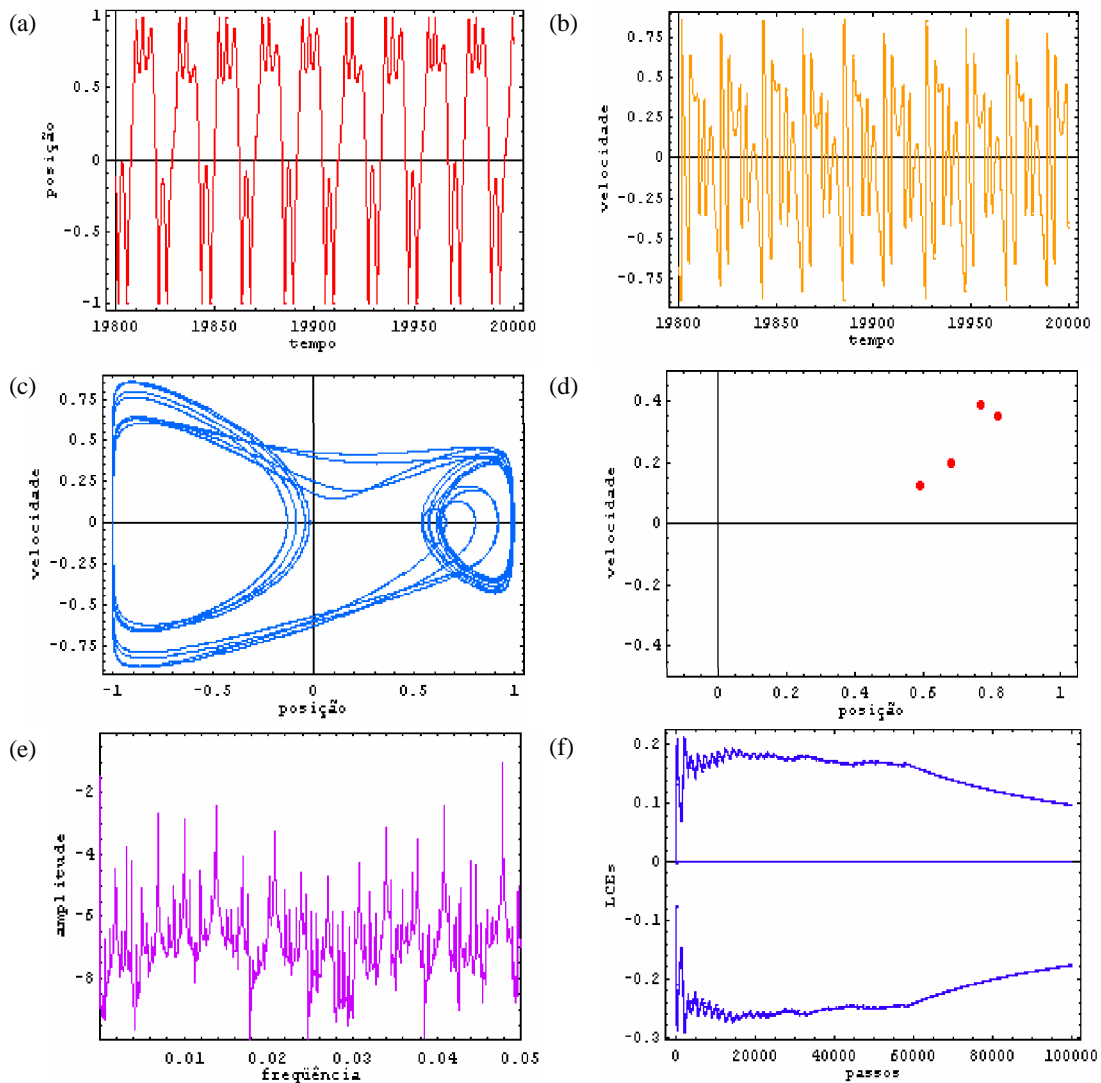


Figura 4-3 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,470 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetórias do plano de fase, (d) Seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-3, para  $q = 0,470 \text{ dm} / \text{s}^2$ , em (a), podemos afirmar quanto à periodicidade do movimento do fio oscilante. Em (b) e (c) os gráficos dão indícios de movimento periódico do fio oscilante. Em (d) a seção de Poincaré parece revelar uma estrutura característica de um comportamento periódico. Em (e), observamos a frequência

natural e suas frequências múltiplas. Em (f), temos a confirmação de um movimento periódico tendo com  $\lambda_1 = 0,0981317$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = -0,176436$  como expoentes de Lyapunov, ou seja, dois nulos e um negativo revelando um torus (SANDRI, 1996).

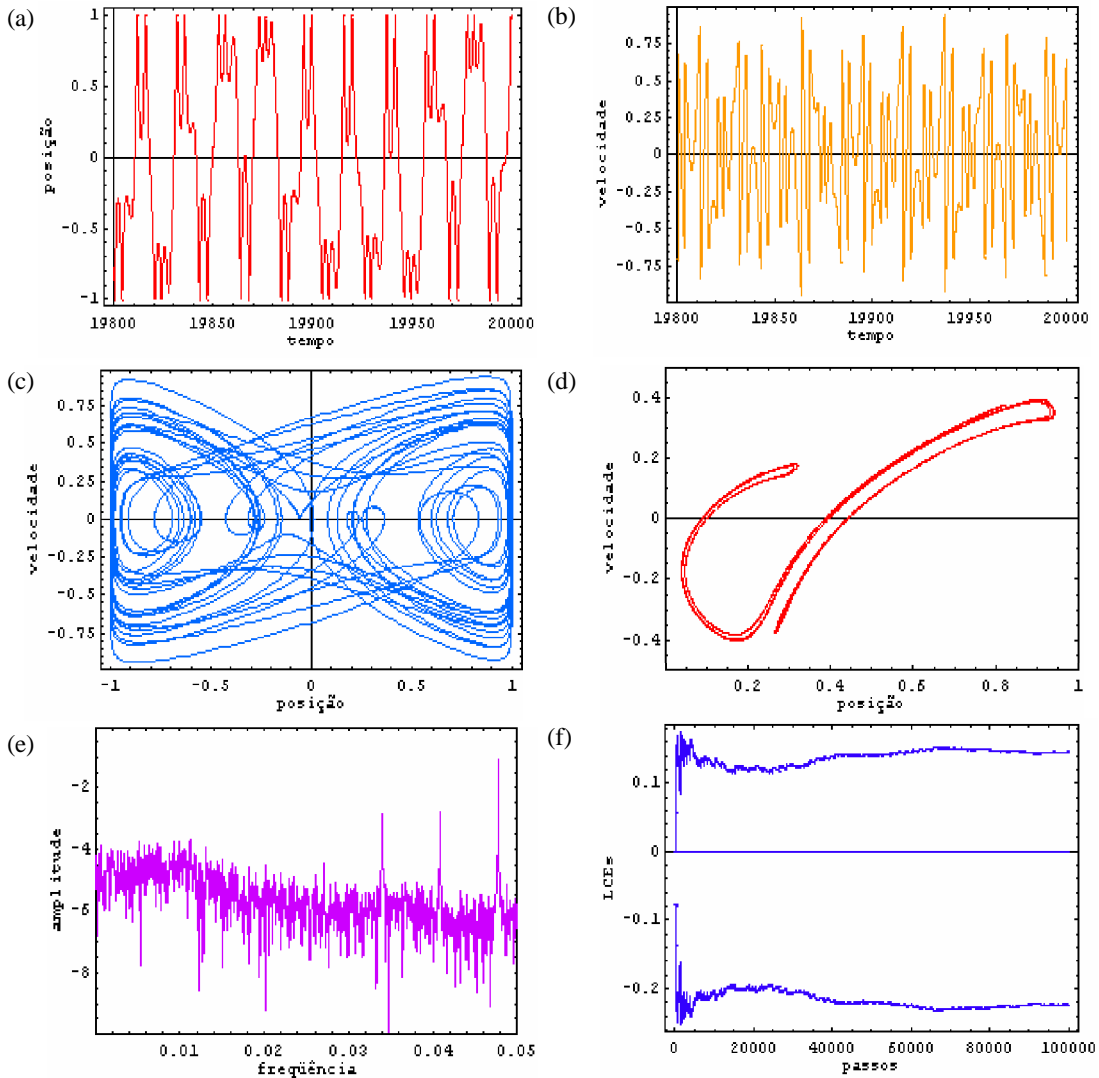


Figura 4-4 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,511 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetórias do plano de fase, (d) Seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-4, para  $q = 0,511 \text{ dm} / \text{s}^2$ , em (a) e (b), podemos afirmar quanto ao comportamento caótico do movimento do fio oscilante. Em (c) e (d) os gráficos dão indícios de movimento caótico do fio oscilante. Em (e) observamos também a frequência natural e suas frequências múltiplas. Em (f),  $\lambda_1 = 0,146128$ ,

$\lambda_2 = 0, \lambda_3 = -0,224782$  temos a confirmação do comportamento caótico tendo como expoentes de Lyapunov um positivo, um nulo e o outro negativo (SANDRI, 1996).

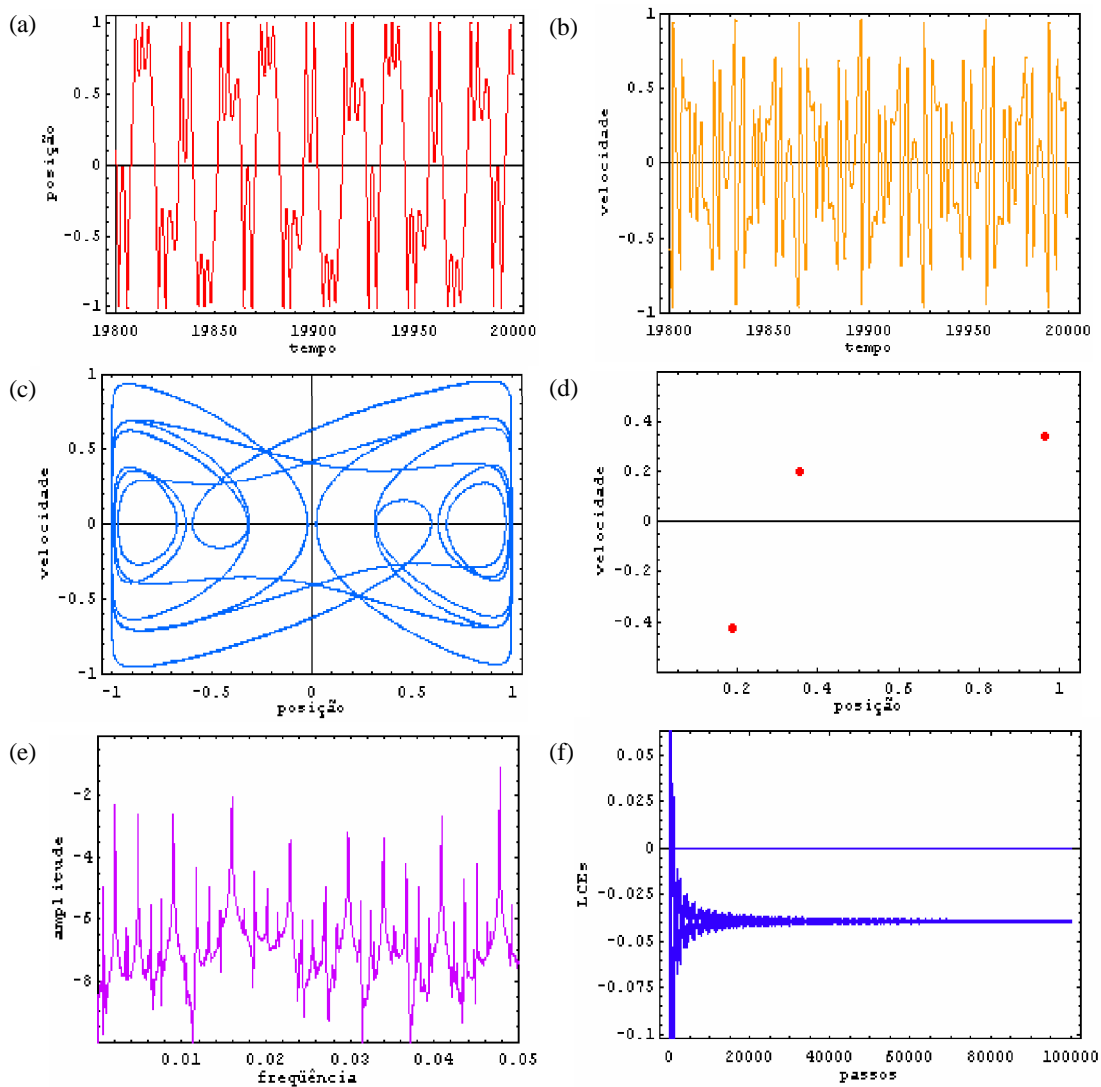


Figura 4-5 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,536 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetórias do plano de fase, (d) Seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-5, para  $q = 0,536 \text{ dm} / \text{s}^2$ , em (a) e (b) o movimento do fio oscilante tem características periódicas. Em (c) e (d) os gráficos dão indícios de movimento periódico do fio oscilante. Em (e) aparece a frequência natural e suas frequências múltiplas. Em (f), com  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -0,0390001$  e  $\lambda_3 = -0,0394078$  temos a

confirmação do movimento periódico tendo como expoentes de Lyapunov um nulo e os demais negativos (SANDRI, 1996).

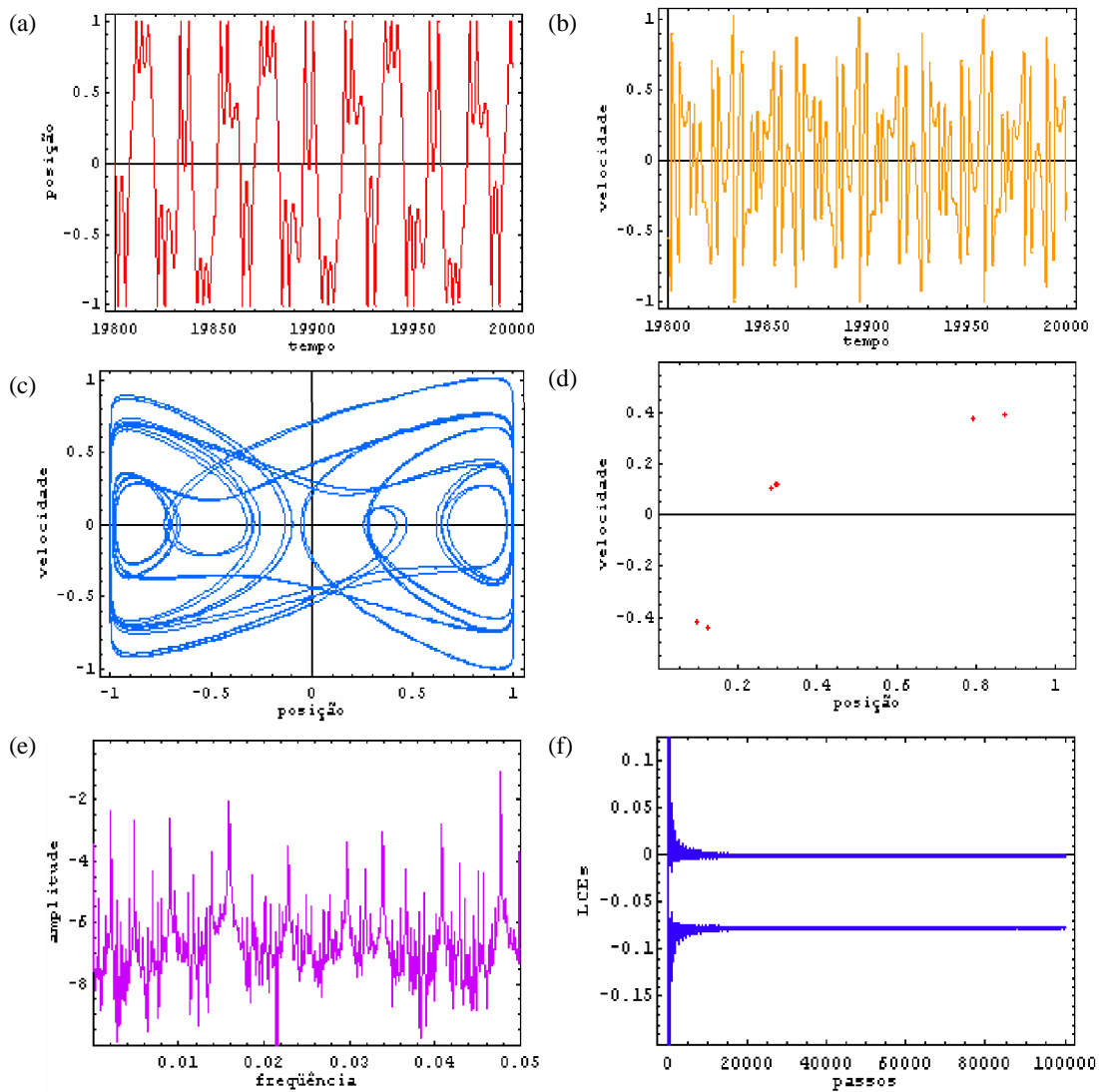


Figura 4-6 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,557 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetória do plano de fase, (d) seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-6, para  $q = 0,557 \text{ dm} / \text{s}^2$ , em (a) e (b) o movimento do fio oscilante não tem características periódicas. Em (c) e (d) o gráfico dá indícios de movimento periódico do fio oscilante. Em (e) aparece a frequência fundamental e suas frequências múltiplas. Em (f),  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -0,00146995$  e  $\lambda_3 = -0,0769544$  temos a

confirmação do comportamento periódico tendo como expoentes de Lyapunov um nulo e os demais negativos (SANDRI, 1996).

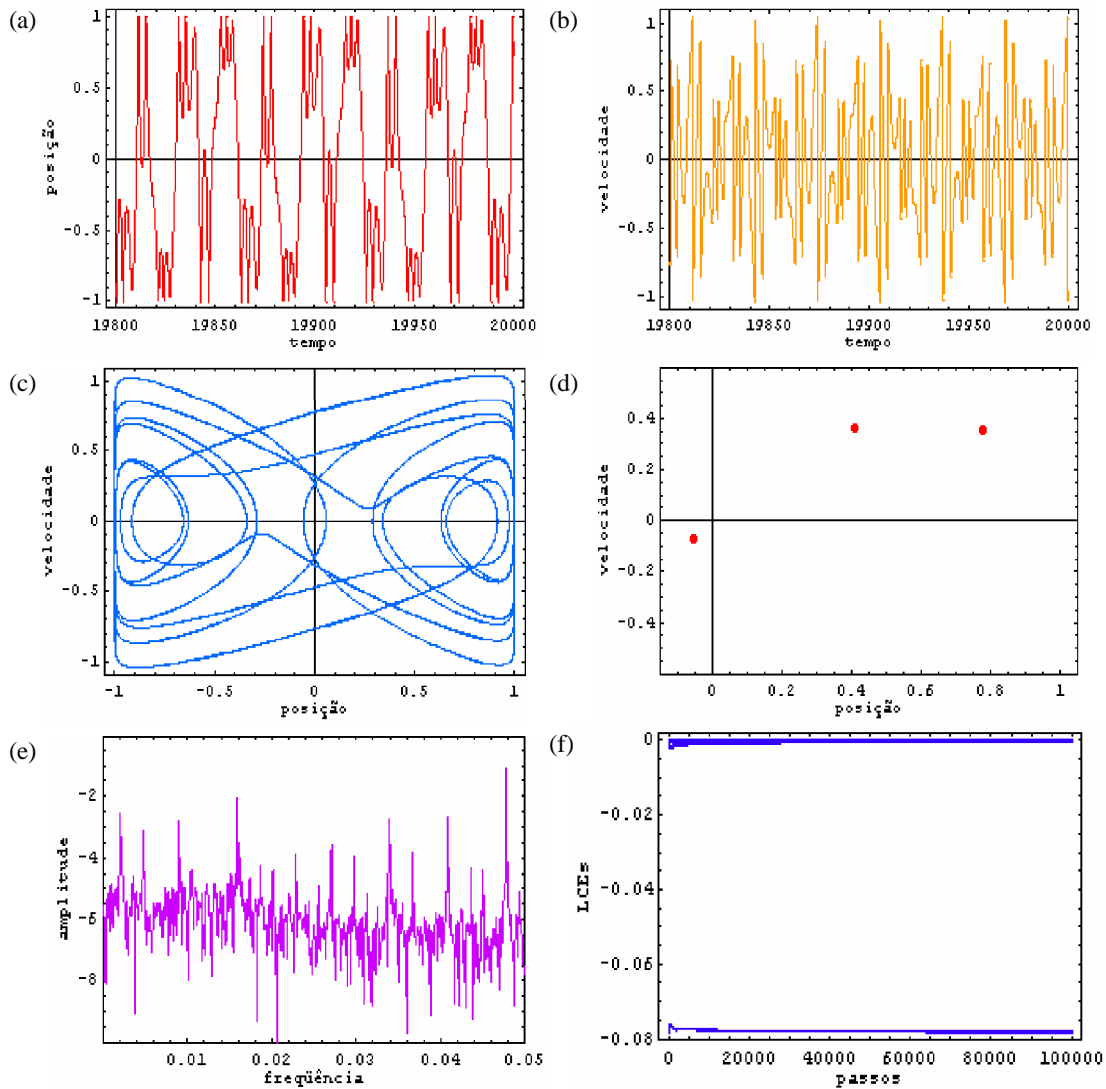


Figura 4-7 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,596 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante, (c) trajetória do plano de fase, (d) seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-7 para  $q = 0,596 \text{ dm} / \text{s}^2$ , a característica do gráfico em (a) e (b) é de movimento periódico do fio oscilante e em (c) também, onde as trajetórias permanecem confinadas em três faixas, conforme ilustrado. Em (c) o gráfico dá indícios de movimento periódico do fio oscilante. Em (d) a seção de Poincaré exhibe uma estrutura característica de um comportamento periódico. Em (e), o espectro de frequência também

exibe um comportamento periódico. Em (f),  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -0,000236334$ ,  $\lambda_3 = -0,0781637$  temos a confirmação do movimento periódico tendo como expoentes de Lyapunov dois nulos e um negativo, ou seja, um torus (SANDRI, 1996).

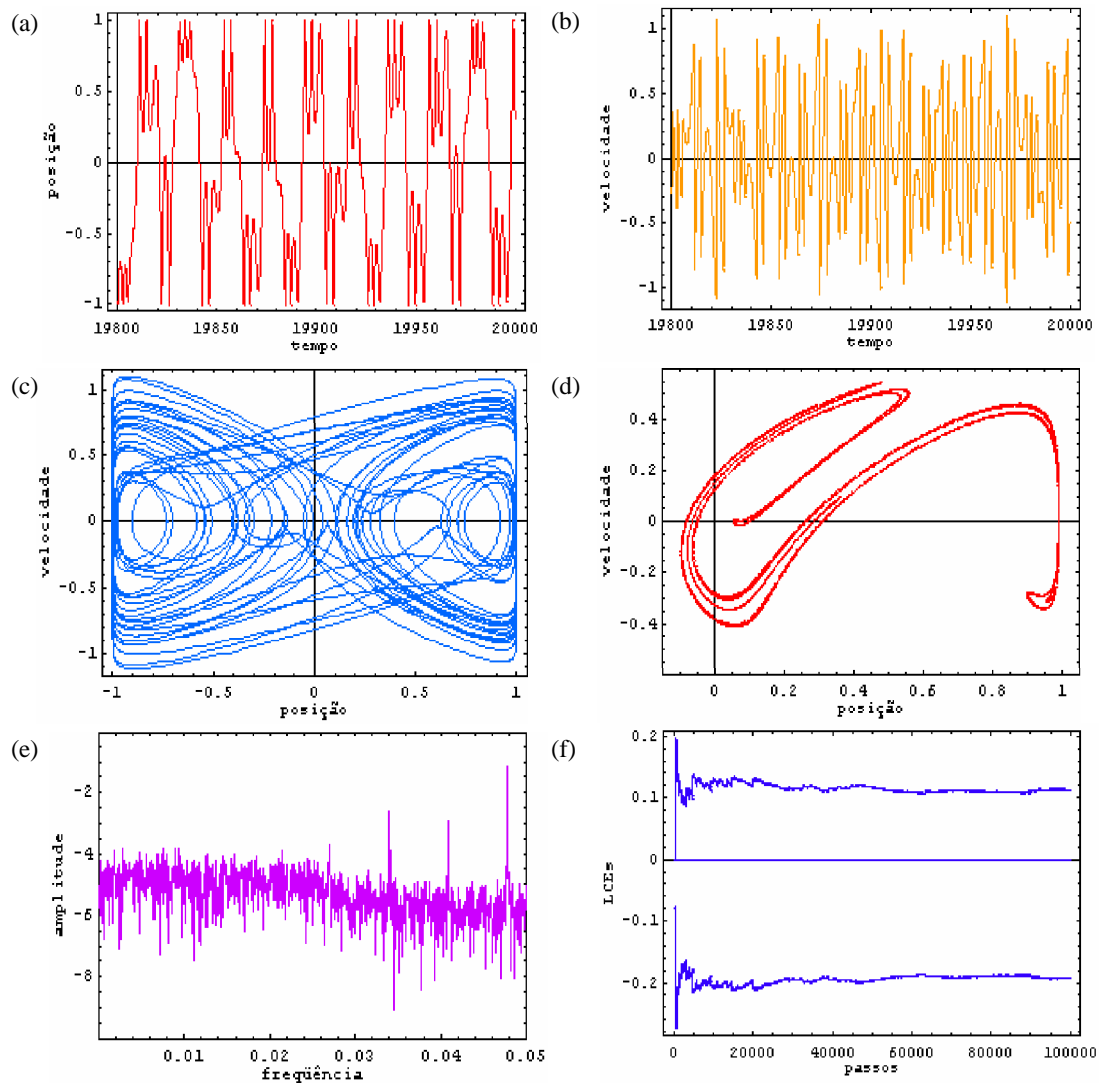


Figura 4-8 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,640 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetória do plano de fase, (d) seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-8, para  $q = 0,640 \text{ dm} / \text{s}^2$ , as características dos gráficos em (a) e (b) são de um movimento caótico do fio oscilante e em (c), também, onde as trajetórias permanecem confinadas numa fina faixa, conforme ilustrado. Em (d) a seção de Poincaré uma estrutura fractal característico de um sistema caótico. Em (e), a frequência

fundamental e suas frequências múltiplas, também caracterizam movimento caótico do fio oscilante. Em (f), com  $\lambda_1 = 0,112966$ ,  $\lambda_2 = -3,92588 \times 10^{-28}$ , e  $\lambda_3 = -0,191808$  temos a confirmação do movimento caótico com um expoente positivo, um nulo e outro negativo (SANDRI, 1996).

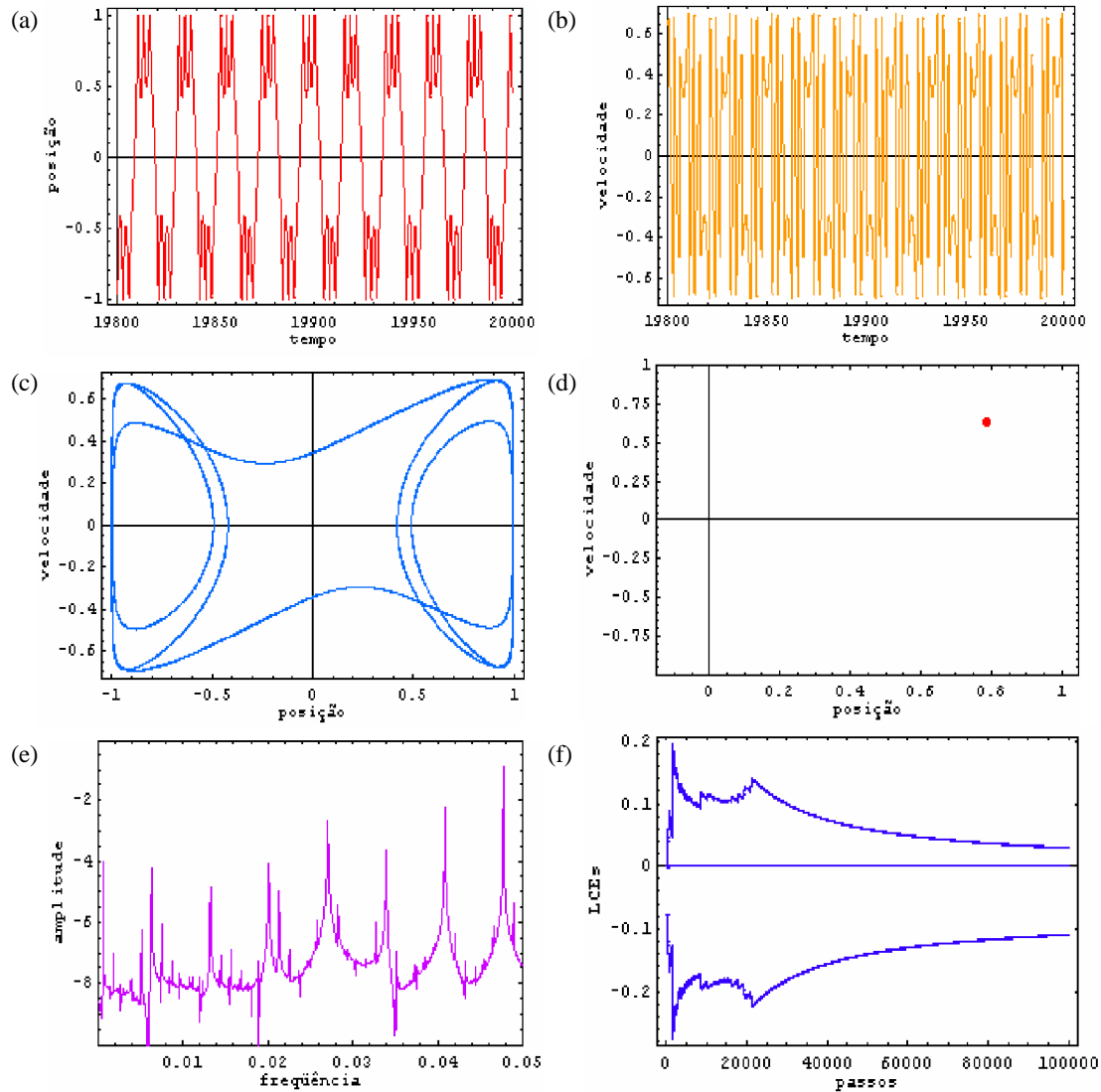


Figura 4-9 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,700 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetória do plano de fase, (d) seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-9, para  $q = 0,700 \text{ dm} / \text{s}^2$ , a característica do gráfico em (a) e em (b) é de um movimento periódico e em (c), também, onde as trajetórias permanecem confinadas numa fina faixa, conforme ilustrado. Em (d) observa-se na seção de Poincaré

que ocorre um ponto que caracteriza um comportamento periódico. Em (e), a frequência fundamental e suas frequências múltiplas, também caracterizam movimento periódico do fio oscilante. Em (f), temos  $\lambda_1 = 0,029688$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -0,109234$  que confirma a existência de um comportamento periódico com dois expoentes de Lyapunov nulos e o outro negativo (SANDRI, 1996).

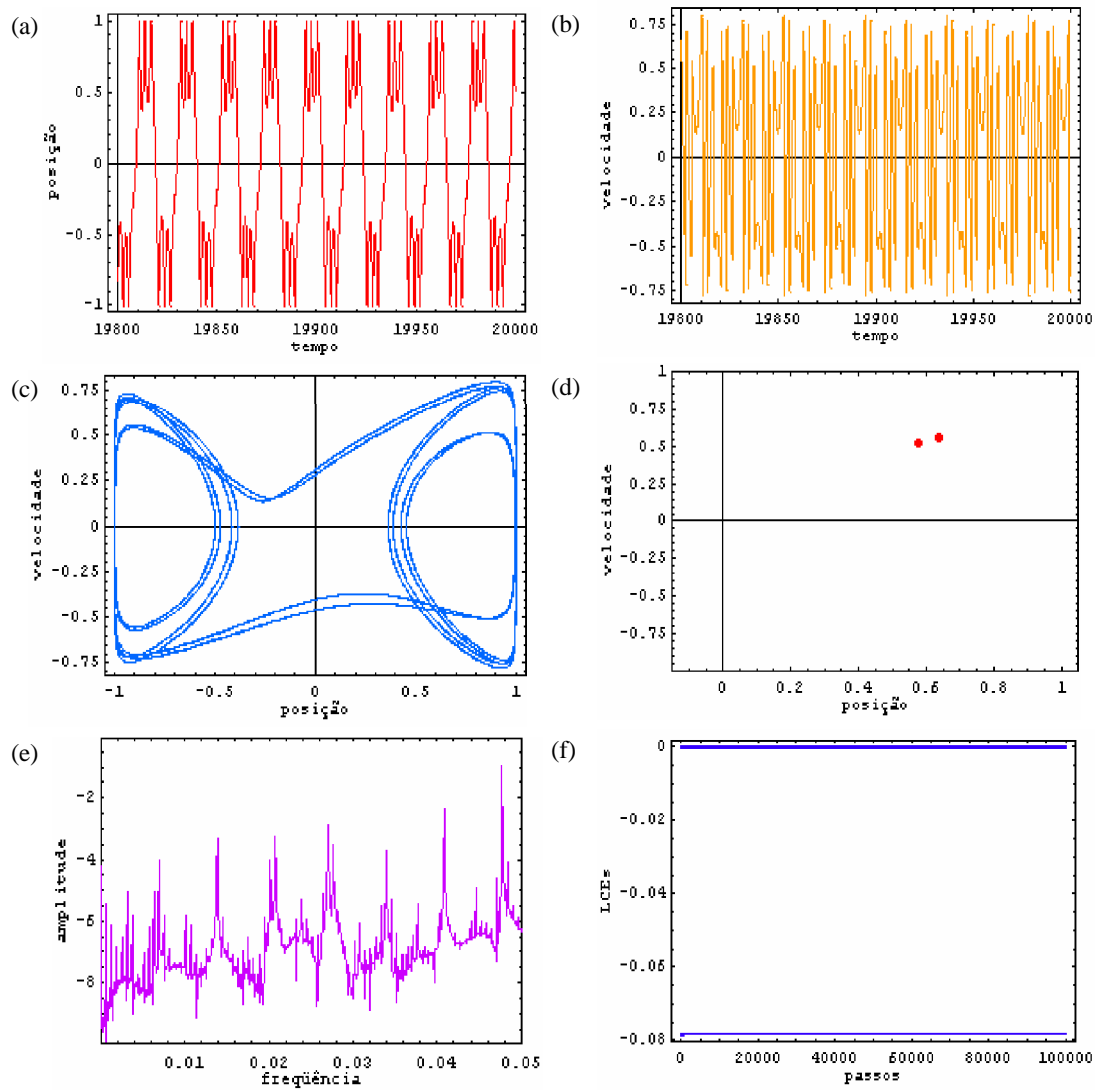


Figura 4-10 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,740 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetória do plano de fase, (d) seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-10, para  $q = 0,740 \text{ dm} / \text{s}^2$ , a característica do gráfico em (a) e em (b) é de um movimento periódico e em (c), também, onde as trajetórias permanecem

confinadas numa fina faixa, conforme ilustrado. Em (d) observa-se na seção de Poincaré que ocorrem dois pontos que caracterizam um comportamento periódico. Em (e), a frequência fundamental e suas frequências múltiplas, também caracterizam movimento periódico do fio oscilante. Em (f), temos  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -0,000118551$ ,  $\lambda_3 = -0,0782814$  que confirma a existência de um comportamento periódico com dois expoentes de Lyapunov nulos e o outro negativo (SANDRI, 1996).

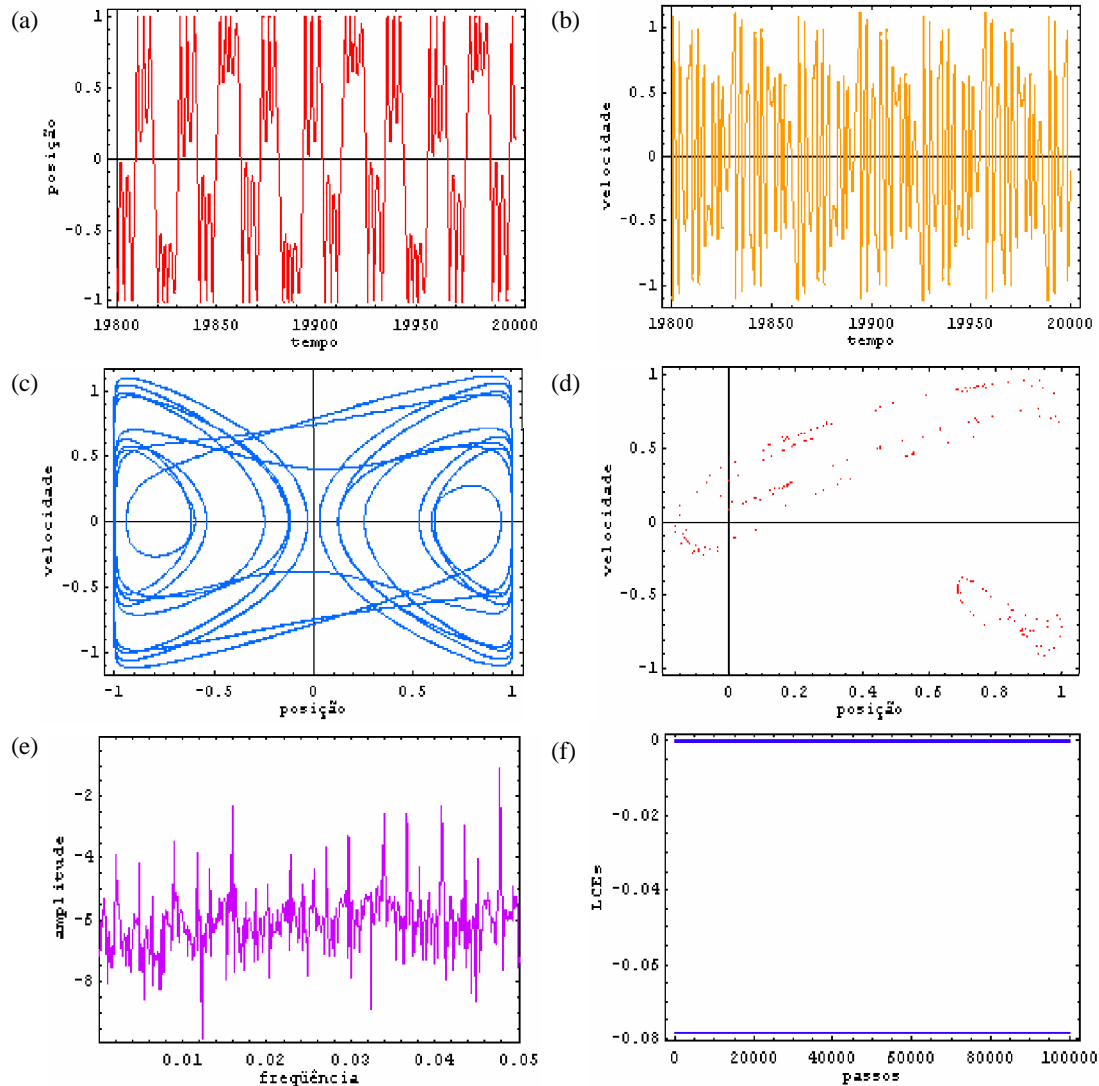


Figura 4-11 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,812 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetória do plano de fase, (d) seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-11, para  $q = 0,812 \text{ dm} / \text{s}^2$ , a característica do gráfico em (a) e em (b) é de um movimento periódico e em (c), também, onde as trajetórias permanecem confinadas numa fina faixa, conforme ilustrado. Em (d) observa-se na seção de Poincaré que ocorrem alguns pontos que caracterizam um comportamento periódico. Em (e), a frequência fundamental e suas frequências múltiplas, também caracterizam movimento periódico do fio oscilante. Em (f), temos  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -0,0000982283$ ,  $\lambda_3 = -0,0783018$  que confirma a existência de um comportamento periódico com dois expoentes de Lyapunov nulos e o outro negativo (SANDRI, 1996).

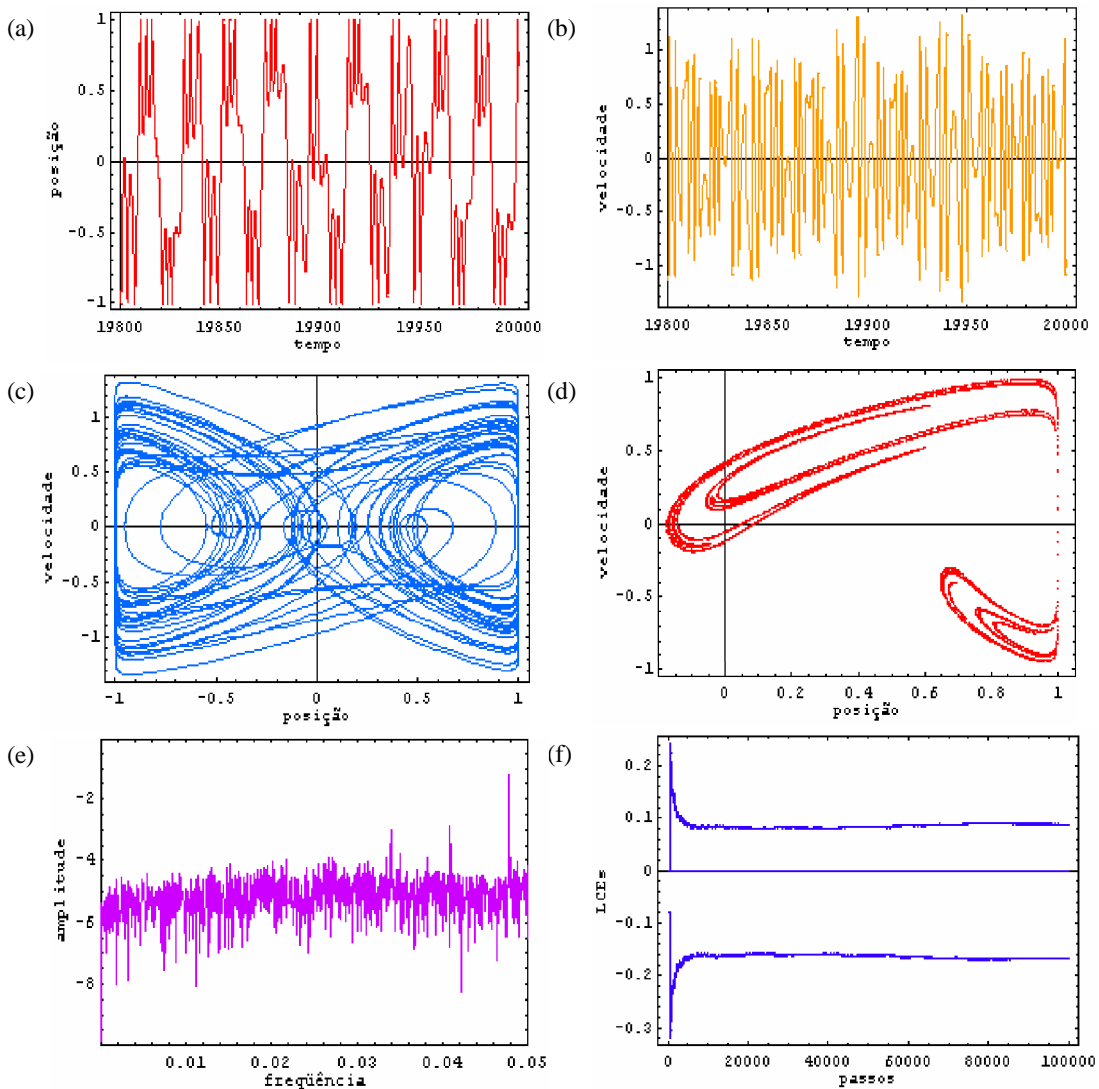


Figura 4-12 Gráficos da simulação do sistema dinâmico proposto para  $q = 0,835 \text{ dm} / \text{s}^2$ ; (a) posição do fio oscilante em função do tempo, (b) velocidade do fio oscilante em função do tempo, (c) trajetória do plano de fase, (d) seção de Poincaré, (e) espectro de frequência e (f) expoentes de Lyapunov.

Na figura 4-12, para  $q = 0,835 \text{ dm} / \text{s}^2$ , a característica do gráfico e (a) e em (b) é de um movimento caótico e em (c), também, onde as trajetórias permanecem confinadas numa fina faixa, conforme ilustrado. Em (d) observa-se na seção de Poincaré uma estrutura fractal característica de um comportamento caótico. Em (e), a frequência fundamental e suas frequências múltiplas, também caracterizam movimento caótico do fio oscilante. Em (f), temos  $\lambda_1 = 0,0875546$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -0,165968$  que confirma a existência de um comportamento caótico com um expoente de Lyapunov positivo, um nulo e o outro negativo (SANDRI, 1996).

## 4.5 Bifurcação

Uma bifurcação ocorre quando uma pequena mudança feita no valor de um parâmetro (parâmetro de bifurcação) de um sistema dinâmico causa uma súbita mudança qualitativa no comportamento dinâmico desse sistema (STROGATZ, 1994).

O comportamento do sistema dinâmico pode ser globalmente observado quando verificamos a posição do fio oscilante no início de cada ciclo para um determinado intervalo do parâmetro  $q$  da força externa. Para isto integramos o sistema numericamente calculando para vários valores do parâmetro  $q$  desse intervalo à posição do fio oscilante. O gráfico gerado pela posição do fio oscilante no começo de cada ciclo versus o parâmetro  $q$  é denominado diagrama de bifurcação e está representado na figura 4-13, que vem a seguir, para os valores  $q$  da força externa que variam de  $q = 0,450 \text{ dm} / \text{s}^2$  até  $q = 0,835 \text{ dm} / \text{s}^2$  em passos de  $9,625 \times 10^{-4} \text{ dm} / \text{s}^2$ .

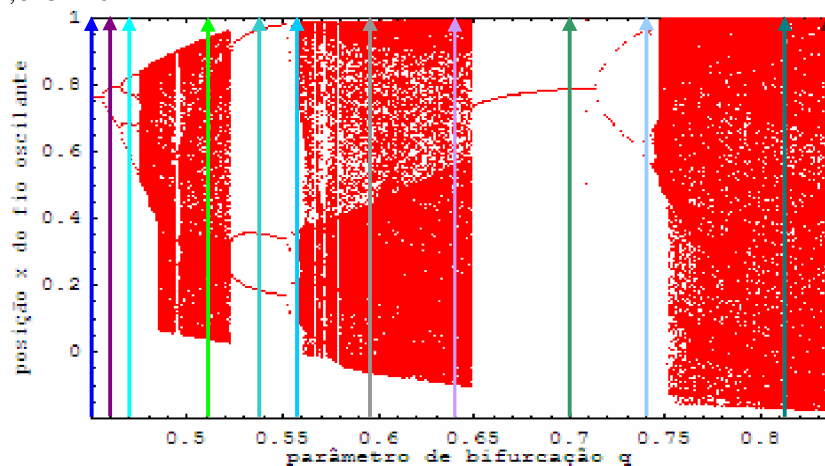


Figura 4-13 Diagrama de bifurcação da posição  $x$  do fio oscilante em função do parâmetro  $q$ .

Notamos no diagrama de bifurcação (figura 4-13) que, quando  $q$  varia de  $q = 0,450 \text{ dm} / \text{s}^2$  até  $q = 0,835 \text{ dm} / \text{s}^2$ , o fio oscilante passa de um comportamento periódico para, um caótico, conforme pode ser visto pelas setas indicadas no gráfico que indicam onde foram feitas as simulações para os valores de  $q$ .

# **CAPÍTULO 5**

## **Conclusão**

### **5.1 Comentários sobre os métodos utilizados**

Pela dificuldade de se saber quando um sistema dinâmico oscilatório se encontra num estado periódico ou caótico, o que fizemos neste trabalho foi aplicar métodos diferentes para analisar o estado dinâmico do sistema proposto. Observamos que o uso do expoente de Lyapunov oferece uma interpretação conclusiva sobre um comportamento periódico e, caótico.

Cabe aqui salientar que a transformada de Fourier é um bom método para fornecer com precisão os valores das frequências para movimentos oscilatórios periódicos e caóticos.

Concluimos que, as trajetórias do plano de fase, o espectro de frequência (FFT), os expoentes de Lyapunov, e os gráficos da posição do fio oscilante em função do tempo, foram significativos na análise, pois reúnem informações que nos fazem acreditar que o comportamento do sistema analisado é coerente com os resultados obtidos. O

diagrama de bifurcação e o mapa de Poincaré complementam o estudo e dão uma explicação satisfatória para o comportamento caótico.

## 5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como as simulações em sistemas dinâmicos são muitas, este trabalho com certeza não esgotou todas as possibilidades existentes neste campo. O que queremos propor são outras simulações para o mesmo modelo aqui apresentado onde a variação da amplitude da força externa deve ser estudada. Seria também interessante explorar as amplitudes externas iguais a  $q = 0,511 \text{ dm} / \text{s}^2$ ,  $q = 0,640 \text{ dm} / \text{s}^2$  e  $q = 0,835 \text{ dm} / \text{s}^2$ , visto que para esses valores o sistema proposto apresentou um comportamento caótico, conforme revelam os estudos realizados no capítulo 4.

Dado a importância ao movimento oscilatório, a continuidade natural deste trabalho seria a construção experimental do modelo aqui proposto.

Comparações com outros sistemas semelhantes também podem ser feitas, tentando fazer alguma analogia aos métodos aqui utilizados. Essas são as novas possibilidades de pesquisa que podem ser exploradas futuramente.

## Referências

ABRAHAM, H. R.; SHAW, D. C. **The geometry of behavior**. [www.aerialpress.com](http://www.aerialpress.com), 1-12, 1991.

ANGOTTI, P. J. A.; FERRARI, C. F.; TRAGTENBERG, R. H. M. **Introdução ao Caos em Sistemas Dinâmicos**, 1-12, 2008.

ARAÚJO, L. H. L. **Uma aplicação da dinâmica não linear para avaliação do desempenho de comunidades virtuais de aprendizagem**, 82-83, 2004.

ARAUJO, D. H. C. **Controle de caos e dinâmica não linear**, 2006.

BATANETE, A.; CASTRO, A.; LAGO, H. **Natureza- caos ou ordem ?**, 2004 – 2005.

BAKER, G. L.; GOLLUB, J. P. L. **Chaotic dynamics: an introduction**. New York, USA, Cambridge University 2nd ed. Press 1996.

BLEGDAMSVEJ, N.; CVITANOVIC', P. **Universality in Chaos**, 4-33, 1982.

CHATTERJEE, A.; CUSUMANO. J. P.; D. C. **A Dynamical System Approach to Damage Evolution Tracking, Part 1:Description and Experimental Application.** Transaction of the ASME, 250-257, 2002.

CHATTERJEE, A.; CUSUMANO. J. P.; D. C. **A Dynamical System Approach to Damage Evolution Tracking, Part 2 :Model-Based Validation and Physical Interpretation.**Transaction of the ASME,258-264, 2002.

CHATTERJEE, A.; CUSUMANO, J. P.; D. C. **Hidden Variable Tracking: Formulation & Analysis of a Mathematical Model.** Transaction of the ASME,1-10, 2002.

CHRISTY, R. W.; MILFORD, F. J.; REITZ , J. R. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética.** Editora Campus 1982 Rio de Janeiro.

CRUTCHFIELD, J.; DONNELLY, R. J.; FARMER, D.; JONES, GPACKARD, N.; SHAW, R. **Power Spectral Analysis of a Dynamical System.** Physics Letters, 1-4, 1980.

DONNAGÁIN, M. Ó.; RASSKAZOV, O. **Numerical modeling of an iron pendulum in a magnetic field.** [Science@Direct](http://www.sciencedirect.com). available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com), 37-39, 2005.

FARMER, D.; CRUTCHFIELD, J.; PACKARD, N.; SHAW, R.; DONNELLY, R. J.; JONES. **Power Spectral Analysis of a Dynamical System.** Physics Letters, 1- 4, 1980.

FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C. **Caos uma introdução** Editora Edgard Blücher Ltda 1994 São Paulo SP Brasil.

JÚNIOR, N. C. **O uso da análise de Fourier, de wavelets e dos expoentes de Lyapunov no estudo de um sistema dinâmico não ideal com atrito seco e excitação externa.** 2007 f.71. Dissertação (mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

MICKENS, R. E. **Mathematical and Numerical Study of The Duffing-Harmonic Oscillator**. Journal of Sound and Vibration, available online at [www.ideallibrary.com](http://www.ideallibrary.com), 563-567, 2000.

PARLITZ, U. **Complex dynamics of nonlinear systems**, 407, 2007.

PEITGEN, H. O.; JURGENS, H; SAUPE, D. **Chaos and fractals: new frontiers of science**. New York: Springer Verlag, 1992.

PISKOUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**. 11<sup>a</sup> ed em língua portuguesa. Editora Lopes da Silva – Porto – 1997 vol I e II 457p.

RUELLE, D. **Strange Attractors**. The Mathematical Intelligencer, 126-137, 1980.

SANDRI, M. **Numerical Calculation of Lyapunov Exponents**. The Mathematica Journal, 78-84, 1996.

SAVI, M. A. **Caos em sistemas mecânicos**, 1- 29, 2002.

SANJUÁN, F. A. M.; VÁZQUEZ, C. M. J. **Dinámica No Lineal: Orígenes y Futuro**, 23-31, 2005.

STEWART, I. **Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos**; tradução, Maria Luiza X. de A. Borges revisão técnica , Ildeu de Castro Moreira, Alexandre Tort. – Rio de Janeiro; Jorge Zahar. Ed., 1991.

SYMON, K. R. **Mecânica**. Editora Campus 1982 Rio de Janeiro.

SIU, S. W. K. **LET - Lyapunov exponent toolbox**, Department of Electronic Engineering, University of Hong Kong, 1998.

Disponível em:

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=233&objectType=file>. Acesso em 13 de novembro de 2006.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: with application to physics, biology, chemistry, and engineering**, Addison – Wesley Publishing Company, 1994.

KARLORIS, F. G.; MENDELSON.; K. S. **Chaoticlike motion of a linear dynamical system**. American Association of Physics Teachers, 221-224,1991.

WEISSTEIN, E. W. **Duffing Differential Equation**. <http://math.wolfram.com/DuffingDifferentialEquation.html>, 1-12, 2003.

# Apêndices

## Apêndice A

### Cálculo da corrente induzida e, de deslocamento

Neste apêndice irá se calcular o efeito da indução eletromagnética em relação aos condutores estáticos retilíneos infinitos, fio oscilante e no eletroímã devido a corrente induzida e, de deslocamento pelas variações dos campos magnético e elétrico no tempo relacionados pelas leis de Faraday e Ampere. Posteriormente, serão mostrados através de tabelas os valores numéricos para realizar as respectivas aproximações para as correntes elétricas envolvidas no processo. Portanto, como ilustração da primeira parte do cálculo é mostrada a Figura A-1, que vem abaixo.

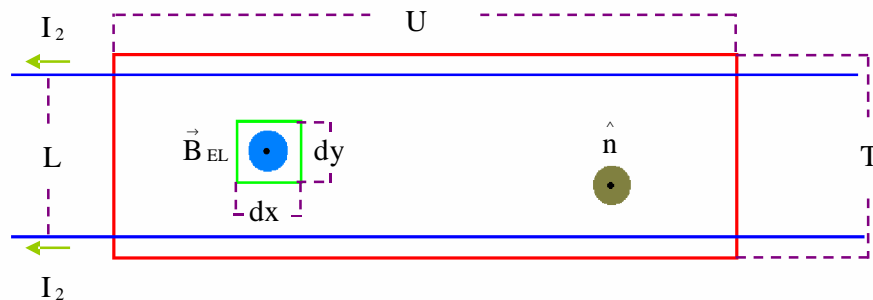


Figura A-1 Esquema no plano dos fios infinitos e do eletroímã.

A corrente elétrica  $I_2$  que passa na figura mostrada anteriormente é dada por:

$$I_2 = \frac{V_{02}}{r_3} + \frac{\varepsilon_i}{r_3} + I_{di}, \quad (\text{A.1})$$

onde,

$$\varepsilon_i = - \sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_{ij}}{dt}, \quad (\text{A.2})$$

$$I_{di} = \varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{d\Theta_{ij}}{dt}, \quad (\text{A.3})$$

e  $r_3$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varphi_{ij}$  e  $\Theta_{ij}$  são a resistência elétrica referente ao circuito dos condutores infinitos, a permissividade elétrica do meio, os fluxos magnético e elétrico, respectivamente.

Calculando as correntes dependentes do tempo nos fios infinitos devido ao eletroímã. Sendo (1) referente ao fio oscilante, (2) aos fios infinitos e (3) ao eletroímã, tem-se:

$$\varepsilon_2 = - \frac{d\varphi_{23}}{dt}, \quad (\text{A.4})$$

$$\varphi_{23} = \int_S \vec{B}_{EL} \cdot \hat{n} da = \int_0^T \int_0^U B_0 \hat{z} \cdot \hat{z} \cos(\omega t) dx dy = B_0 TU \cos(\omega t),$$

$$\varepsilon_2 = - \frac{d(B_0 TU \cos(\omega t))}{dt} = B_0 TU \omega \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.5})$$

sendo,

$$\varepsilon_2 = \oint_C \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}, \quad (\text{A.6})$$

relacionando (A.5) e (A.6),

$$\oint_C \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.7})$$

$$E_2 \oint_C d\vec{l} = B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t),$$

$$E_2 S = B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t),$$

$$E_2 = \frac{B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t)}{S},$$

$$\vec{E}_2 = \frac{B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t)}{S} \hat{n}_2, \quad (\text{A.8})$$

$$\Theta_{23} = \int_S \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 \, da = \int_S (B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t) A / S) \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2 \, da = \frac{B_0 T U \omega A \text{sen}(\omega t)}{S},$$

$$I_{d2} = \epsilon \frac{d(B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t) A / S)}{dt} = \frac{B_0 T U \omega^2 \epsilon A \cos(\omega t)}{S}. \quad (\text{A.9})$$

Desprezando os efeitos produzidos pelos fios flexíveis conectados ao fio oscilante, e considerando somente o campo criado pelo comprimento } dele, tem-se os esquemas das Figuras A-2 e A-3.

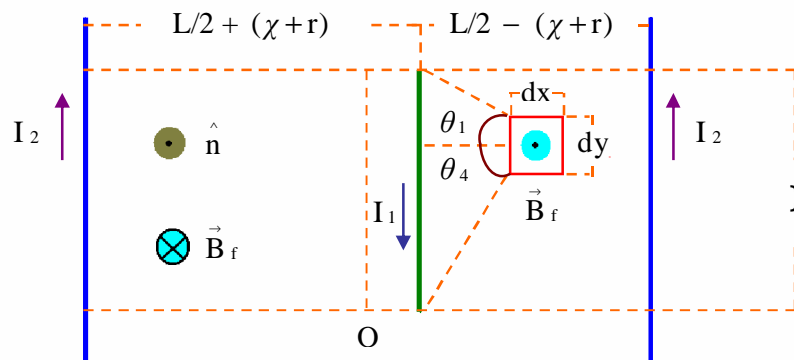


Figura A-2 Esquema no plano do fio oscilante e dos condutores infinitos.

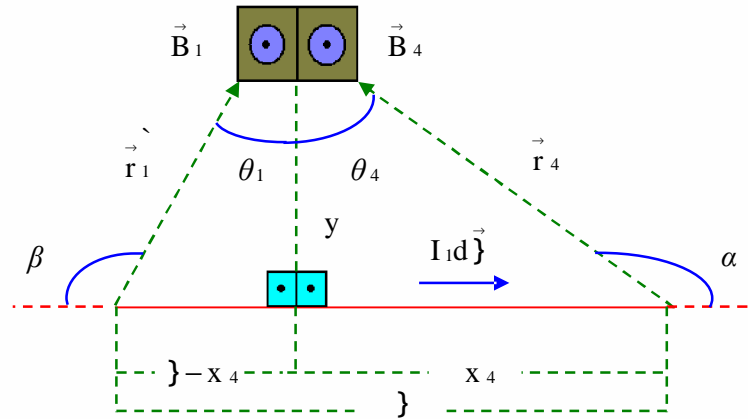


Figura A-3 Ampliação da parte do fio oscilante de comprimento  $x_4$ .

Considerando a lei de Biot - Savart ,

$$d\vec{B}_4 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{j}_4 \times \hat{r}_4}{r_4^2}, \quad (\text{A.10})$$

$$dB_4 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{j}_4 \text{sen}\alpha}{r_4^2}, \quad (\text{A.11})$$

se  $d\vec{j}_4 = dx_4$ , então:

$$dB_4 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 dx_4 \text{sen}\alpha}{r_4^2}, \quad (\text{A.12})$$

pela figura A-3, observa-se:

$$\alpha = \theta_4 + \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.13})$$

aplicando seno em ambos os lados de (A.13),

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \left( \theta_4 + \frac{\pi}{2} \right) \\ \operatorname{sen} \alpha = \cos \theta_4 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{sen} \theta_4 \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) = \cos \theta_4 \end{cases}, \quad (\text{A.14})$$

substituindo a segunda parte de (A.14) em (A.12),

$$dB_4 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 dx_4 \cos \theta_4}{r_4^2}, \quad (\text{A.15})$$

com a figura A-3,

$$\operatorname{tg} \theta_4 = \frac{x_4}{y},$$

$$x_4 = y \operatorname{tg} \theta_4, \quad (\text{A.16})$$

derivando (A.16) em relação a  $\theta_4$ ,

$$\frac{dx_4}{d\theta_4} = y \sec^2 \theta_4,$$

$$dx_4 = y \sec^2 \theta_4 d\theta_4, \quad (\text{A.17})$$

observando, novamente a figura A-3, chega-se:

$$\cos \theta_4 = \frac{y}{r_4}, \quad (\text{A.18})$$

assim,

$$\sec \theta_4 = \frac{1}{\cos \theta_4} = \frac{r_4}{y}, \quad (\text{A.19})$$

relacionando (A.19) com (A.17),

$$dx_4 = y \left( \frac{r_4}{y} \right)^2 d\theta_4,$$

$$dx_4 = y \frac{r_4^2}{y^2} d\theta_4,$$

$$dx_4 = \frac{r_4^2}{y} d\theta_4, \quad (\text{A.20})$$

desse modo,

$$dB_4 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 r_4^2 \cos \theta_4 d\theta_4}{y^2}, \quad (\text{A.21})$$

$$dB_4 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 \cos \theta_4 d\theta_4}{y}, \quad (\text{A.22})$$

integrando (A.22) de 0 a  $\theta_4$ ,

$$\int_0^{\theta_4} dB_4 = \int_0^{\theta_4} \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 \cos \theta_4 d\theta_4}{y},$$

$$B_4 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 \text{sen} \theta_4}{y}. \quad (\text{A.23})$$

Considerando, agora, a segunda parte do cálculo, tem-se:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{j}_1 \times \hat{r}_1}{r_1^2}, \quad (\text{A.24})$$

$$dB_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\} _1 \text{sen}\beta}{r_1^2}, \quad (\text{A.25})$$

sendo  $d\} _1 = dx_1$ , então:

$$dB_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 dx_1 \text{sen}\beta}{r_1^2}, \quad (\text{A.26})$$

na figura A-3, observa-se que:

$$\beta = \theta_1 + \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.27})$$

operando a função seno em (A.27),

$$\begin{cases} \text{sen}\beta = \text{sen}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{sen}\beta = \cos\theta_1 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\theta_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta_1 \end{cases}, \quad (\text{A.28})$$

usando a segunda parte de (A.28) em (A.26),

$$dB_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 dx_1 \cos\theta_1}{r_1^2}, \quad (\text{A.29})$$

pela figura A-3,

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{x_1}{y},$$

$$x_1 = y \text{tg}\theta_1, \quad (\text{A.30})$$

aplicando a derivação em (A.30) em relação a  $\theta_1$ ,

$$\frac{dx_1}{d\theta_1} = y \sec^2 \theta_1,$$

$$dx_1 = y \sec^2 \theta_1 d\theta_1, \quad (\text{A.31})$$

com o esquema da figura A-3, chega-se:

$$\cos \theta_1 = \frac{y}{r_1}, \quad (\text{A.32})$$

portanto,

$$\sec \theta_1 = \frac{1}{\cos \theta_1} = \frac{r_1}{y}, \quad (\text{A.33})$$

e,

$$dx_1 = y \left( \frac{r_1}{y} \right)^2 d\theta_1,$$

$$dx_1 = y \frac{r_1^2}{y^2} d\theta_1,$$

$$dx_1 = \frac{r_1^2}{y} d\theta_1, \quad (\text{A.34})$$

levando (A.34) em (A.29),

$$dB_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 r_1^2 \cos \theta_1 d\theta_1}{r_1^2 y},$$

$$dB_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 \cos \theta_1 d\theta_1}{y}, \quad (\text{A.35})$$

efetuando a integração em (A.35) de 0 a  $\theta_1$ ,

$$\int_0^{\theta_1} dB_1 = \int_0^{\theta_1} \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 \cos \theta_1 d\theta_1}{y},$$

$$B_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 \text{sen} \theta_1}{y}. \quad (\text{A.36})$$

Somando (A.23) e (A.36),

$$B_f = B_1 + B_4,$$

$$B_f = \frac{\mu I_1}{4\pi y} (\text{sen} \theta_1 + \text{sen} \theta_4), \quad (\text{A.37})$$

utilizando relações trigonométricas nos triângulos retângulos da figura A-3, chega-se:

$$\text{sen} \theta_1 = \frac{\text{oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y - x_4}{\sqrt{y^2 + (y - x_4)^2}}, \quad (\text{A.38})$$

$$\text{sen} \theta_4 = \frac{\text{oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x_4}{\sqrt{y^2 + x_4^2}}, \quad (\text{A.39})$$

sendo assim, conclui-se que:

$$B_f = \frac{\mu I_1}{4\pi y} \left( \frac{y - x_4}{\sqrt{y^2 + (y - x_4)^2}} + \frac{x_4}{\sqrt{y^2 + x_4^2}} \right), \quad (\text{A.40})$$

em termos vetoriais, tem-se:

$$\vec{B}_f = \frac{\mu I_1}{4\pi y} \left( \frac{\} - x_4}{\sqrt{y^2 + (\} - x_4)^2} + \frac{x_4}{\sqrt{y^2 + x_4^2}} \right) \hat{n}_f. \quad (\text{A.41})$$

$$\varphi_{21} = \int_r^{L/2-(\chi+r)} \int_0^{\} \vec{B}_f \cdot \hat{n} \, dx_4 dy + \int_r^{L/2+(\chi+r)} \int_0^{\} \vec{B}_f \cdot \hat{n} \, dx_4 dy, \quad (\text{A.42})$$

desse modo,

$$\varphi_{21} = \int_r^{L/2-(\chi+r)} \int_0^{\} \vec{B}_f \cdot \hat{n} \, dx_4 dy, \quad (\text{A.43})$$

com isso,

$$\varphi_{21} = \int_r^{L/2-(\chi+r)} \int_0^{\} \left( \frac{\mu I_1}{4\pi y} \left( \frac{\} - x_4}{\sqrt{y^2 + (\} - x_4)^2} + \frac{x_4}{\sqrt{y^2 + x_4^2}} \right) \hat{n}_f \right) \cdot \hat{n} \, dx_4 dy,$$

se  $\hat{n}_f \cdot \hat{n} = 1$ , tem-se:

$$\varphi_{21} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \left( \int_r^{L/2-(\chi+r)} \int_0^{\} \frac{(\} - x_4) dx_4 dy}{y \sqrt{y^2 + (\} - x_4)^2} + \int_r^{L/2-(\chi+r)} \int_0^{\} \frac{x_4 dx_4 dy}{y \sqrt{y^2 + x_4^2}} \right), \quad (\text{A.44})$$

resolvendo as integrais duplas em (A.44),

$$\varphi_{21} = \frac{\mu I_1}{2\pi} [\wp(\chi) + X(\chi) + P], \quad (\text{A.45})$$

onde,

$$\wp(\chi) = \sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2} - \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right), \quad (\text{A.46})$$

$$X(\chi) = G_1(\chi) + G_2(\chi), \quad (\text{A.47})$$

$$G_1(\chi) = \} \ln \left( 1 - \frac{2(\chi+r)}{L} \right), \quad (\text{A.48})$$

$$G_2(\chi) = -\} \ln \left( \frac{2\}}{L} + \sqrt{\frac{4\}^2}{L^2} + \left( 1 - \frac{2(\chi+r)}{L} \right)^2} \right), \quad (\text{A.49})$$

$$P = \} \ln \left( \frac{\} + \sqrt{\}^2 + r^2}}{r} \right) - \sqrt{\}^2 + r^2} + r, \quad (\text{A.50})$$

onde  $r$  e  $\chi$  são raio do fio oscilante e a posição do fio oscilante descontando seu centro de massa.

$$\varphi_{21} = \int_r^{\infty} \int_0^{L/2+(\chi+r)} \mathbf{B}_f \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dx_4 \, dy, \quad (\text{A.51})$$

$$\varphi_{21} = \int_r^{\infty} \int_0^{L/2+(\chi+r)} \left( \frac{\mu I_1}{4\pi y} \left( \frac{\} - x_4}{\sqrt{y^2 + (\} - x_4)^2}} + \frac{x_4}{\sqrt{y^2 + x_4^2}} \right) \hat{\mathbf{n}}_f \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dx_4 \, dy,$$

se  $\hat{\mathbf{n}}_f \cdot \hat{\mathbf{n}} = -1$ ,

$$\varphi_{21} = -\frac{\mu I_1}{4\pi} \left( \int_r^{\infty} \int_0^{L/2+(\chi+r)} \frac{(\} - x_4) \, dx_4 \, dy}{y \sqrt{y^2 + (\} - x_4)^2}} + \int_r^{\infty} \int_0^{L/2+(\chi+r)} \frac{x_4 \, dx_4 \, dy}{y \sqrt{y^2 + x_4^2}} \right), \quad (\text{A.52})$$

integrando as funções de (A.52),

$$\ddot{\varphi}_{21} = -\frac{\mu I_1}{2\pi} (\Psi(\chi) + \chi + P), \quad (\text{A.53})$$

sendo,

$$\Psi(\chi) = \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2} - \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right), \quad (\text{A.54})$$

$$\chi = G_3(\chi) + G_4(\chi), \quad (\text{A.55})$$

$$G_3(\chi) = \chi \ln \left( 1 + \frac{2(\chi+r)}{L} \right), \quad (\text{A.56})$$

$$G_4(\chi) = -\chi \ln \left( \frac{2\chi}{L} + \sqrt{\frac{4\chi^2}{L^2} + \left( 1 + \frac{2(\chi+r)}{L} \right)^2} \right), \quad (\text{A.57})$$

se,

$$\dot{f}_{21}(\chi) = \varphi(\chi) + X(\chi) + P, \quad (\text{A.58})$$

e,

$$\ddot{f}_{21}(\chi) = \Psi(\chi) + \chi + P, \quad (\text{A.59})$$

então,

$$\dot{\varphi}_{21} = \frac{\mu I_1}{2\pi} \dot{f}_{21}(\chi), \quad (\text{A.60})$$

$$\ddot{\varphi}_{21} = -\frac{\mu I_1}{2\pi} \ddot{f}_{21}(\chi), \quad (\text{A.61})$$

$$\dot{\varphi}_{21} = \dot{\varphi}_{21} + \ddot{\varphi}_{21} = -\dot{\Phi}(\chi)I_1, \quad (\text{A.62})$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\frac{d\dot{\varphi}_{21}}{dt} = \dot{\Phi}(\chi)\frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi}\frac{d\chi}{dt}I_1, \quad (\text{A.63})$$

$$\Phi(\chi) = \frac{\mu\Pi(\chi)}{2\pi}, \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.65})$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}, \quad (\text{A.66})$$

relacionando (A.63) e (A.66),

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \dot{\Phi}(\chi)\frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi}\frac{d\chi}{dt}I_1, \quad (\text{A.67})$$

$$E_2 \oint_{\mathcal{C}} d\vec{s} = \dot{\Phi}(\chi)\frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi}\frac{d\chi}{dt}I_1,$$

$$E_2 S = \dot{\Phi}(\chi)\frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi}\frac{d\chi}{dt}I_1,$$

$$E_2 = \frac{\dot{\Phi}(\chi)}{S}\frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{S}\frac{d\Phi(\chi)}{d\chi}\frac{d\chi}{dt}I_1,$$

em termos vetoriais,

$$\vec{E}_2 = \left( \frac{\dot{\Phi}(\chi)}{S}\frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{S}\frac{d\Phi(\chi)}{d\chi}\frac{d\chi}{dt}I_1 \right) \hat{n}_E, \quad (\text{A.68})$$

$$\Theta_{21} = \int_S \vec{E}_2 \cdot \hat{n} da, \quad (\text{A.69})$$

levando (A.68) em (A.69) e usando  $\hat{n}_E \cdot \hat{n} = 1$ , chega-se:

$$\Theta_{21} = \frac{A\Phi(\chi)}{S} \frac{dI_1}{dt} + \frac{A}{S} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (\text{A.70})$$

e,

$$I_{d2} = \epsilon \frac{d\Theta_{21}}{dt}, \quad (\text{A.71})$$

substituindo (A.70), em (A.71):

$$I_{d2} = \epsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{A\Phi(\chi)}{S} \frac{dI_1}{dt} + \frac{A}{S} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1 \right),$$

$$I_{d2} = \Upsilon_1(t) + \Upsilon_2(t) + \Upsilon_3(t) + \Upsilon_4(t), \quad (\text{A.72})$$

sendo,

$$\Upsilon_1(t) = \frac{d^2\Gamma(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (\text{A.73})$$

$$\Upsilon_2(t) = \frac{d\Gamma(\chi)}{d\chi} \frac{d^2\chi}{dt^2} I_1, \quad (\text{A.74})$$

$$\Upsilon_3(t) = 2 \frac{d\Gamma(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (\text{A.75})$$

$$\Upsilon_4(t) = \Gamma(\chi) \frac{d^2I_1}{dt^2}, \quad (\text{A.76})$$

onde,

$$\Gamma(\chi) = \frac{\in A \Phi(\chi)}{S} = \frac{\mu \in A}{2\pi S} \Pi(\chi), \quad (\text{A.77})$$

$$\frac{d\Gamma(\chi)}{d\chi} = \frac{\in A}{S} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu \in A}{2\pi S} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{d^2\Gamma(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\in A}{S} \frac{d^2\Phi(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu \in A}{2\pi S} \frac{d^2\Pi(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.79})$$

e também,

$$\frac{d^2\Phi(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{d^2\Pi(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.80})$$

onde já foram definidos  $\Phi(\chi)$  e  $\frac{d\Phi(\chi)}{d\chi}$ , anteriormente.

$$\Pi(\chi) = f_{21}^{\ddot{}}(\chi) - f_{21}^{\dot{}}(\chi), \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} = \frac{df_{21}^{\ddot{}}(\chi)}{d\chi} - \frac{df_{21}^{\dot{}}(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.82})$$

$$\frac{d^2\Pi(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2f_{21}^{\ddot{}}(\chi)}{d\chi^2} - \frac{d^2f_{21}^{\dot{}}(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{df_{21}^{\dot{}}(\chi)}{d\chi} = \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} + \frac{dX(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{d\varphi(\chi)}{d\chi} = -\frac{\left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)}{\sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2} + 1, \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{dX(\chi)}{d\chi} = \frac{dG_1(\chi)}{d\chi} + \frac{dG_2(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{dG_1(\chi)}{d\chi} = -\frac{\} }{\frac{L}{2} - (\chi+r)}, \quad (\text{A.87})$$

$$\frac{dG_2(\chi)}{d\chi} = \} \frac{\left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)}{\left(\} + \sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2\right) \left(\sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2}\right)}, \quad (\text{A.88})$$

$$\frac{d\overset{\wedge}{f}_{21}(\chi)}{d\chi} = \frac{d\mathcal{Y}(\chi)}{d\chi} + \frac{d(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.89})$$

$$\frac{d\mathcal{Y}(\chi)}{d\chi} = \frac{\left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)}{\sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2} - 1, \quad (\text{A.90})$$

$$\frac{d(\chi)}{d\chi} = \frac{dG_3(\chi)}{d\chi} + \frac{dG_4(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.91})$$

$$\frac{dG_3(\chi)}{d\chi} = \frac{\} }{\frac{L}{2} + (\chi+r)}, \quad (\text{A.92})$$

$$\frac{dG_4(\chi)}{d\chi} = -\frac{\left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)}{\left(\}\ + \sqrt{\}\ ^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2\right) \left(\sqrt{\}\ ^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2}\right)}, \quad (\text{A.93})$$

$$\frac{d^2 f_{21}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2 \wp(\chi)}{d\chi^2} + \frac{d^2 X(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.94})$$

$$\frac{d^2 \wp(\chi)}{d\chi^2} = \frac{1}{\sqrt{\}\ ^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2} - \frac{\left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2}{\sqrt{\left(\}\ ^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2\right)^3}}, \quad (\text{A.95})$$

$$\frac{d^2 X(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2 G_1(\chi)}{d\chi^2} + \frac{d^2 G_2(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.96})$$

$$\frac{d^2 G_1(\chi)}{d\chi^2} = -\frac{\}\ }{\left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2}, \quad (\text{A.97})$$

$$\frac{d^2 G_2(\chi)}{d\chi^2} = \mathcal{J}_1(\chi) + \mathcal{J}_2(\chi) + \mathcal{J}_3(\chi), \quad (\text{A.98})$$

$$\mathcal{J}_1(\chi) = -\frac{\}\ }{\left(\}\ + \sqrt{\}\ ^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2\right) \left(\sqrt{\}\ ^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2}\right)}, \quad (\text{A.100})$$

$$\mathcal{J}_2(\chi) = \frac{\left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2}{\left(\}\ + \sqrt{\}\ ^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2\right)^2 \left(\}\ ^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2\right)}, \quad (\text{A.101})$$

$$J_3(\chi) = \frac{\left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2}{\left(\} + \sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2\right)^2 \left(\sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} - (\chi+r)\right)^2}\right)^3}, \quad (\text{A.102})$$

$$\frac{d^2 \overset{\circ}{f}_{21}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2 \Psi(\chi)}{d\chi^2} + \frac{d^2 \chi}{d\chi^2}, \quad (\text{A.103})$$

$$\frac{d^2 \Psi(\chi)}{d\chi^2} = \frac{1}{\sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2} - \frac{\left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2}{\sqrt{\left(\}^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2\right)^3}}, \quad (\text{A.104})$$

$$\frac{d^2 \chi}{d\chi^2} = \frac{d^2 G_3(\chi)}{d\chi^2} + \frac{d^2 G_4(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.105})$$

$$\frac{d^2 G_3(\chi)}{d\chi^2} = -\frac{\}}{\left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2}, \quad (\text{A.106})$$

$$\frac{d^2 G_4(\chi)}{d\chi^2} = \dot{\jmath}_1(\chi) + \dot{\jmath}_2(\chi) + \dot{\jmath}_3(\chi), \quad (\text{A.107})$$

$$\dot{\jmath}_1(\chi) = -\frac{\}}{\left(\} + \sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2\right)^2 \left(\sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2}\right)^2}, \quad (\text{A.108})$$

$$\dot{\jmath}_2(\chi) = \frac{\left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2}{\left(\} + \sqrt{\}^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2\right)^2 \left(\}^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi+r)\right)^2\right)^2}, \quad (\text{A.109})$$

$$\dot{I}_3(\chi) = \frac{\left(\frac{L}{2} + (\chi + r)\right)^2}{\left(\chi + \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi + r)\right)^2}\right)^2 \left(\sqrt{\chi^2 + \left(\frac{L}{2} + (\chi + r)\right)^2}\right)^3}, \quad (\text{A.110})$$

dessa maneira,

$$I_2 = \frac{V_{03}}{r_3} (1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4), \quad (\text{A.111})$$

tendo,

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon^2}{V_{03}} = \bar{H}(t) B_0, \quad (\text{A.112})$$

$$\bar{H}(t) = \frac{TU\omega}{V_{03}} \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.113})$$

$$\tau_2 = \frac{r_3 I_{d2}}{V_{03}} = B(t) B_0, \quad (\text{A.114})$$

$$B(t) = \frac{TU\omega^2 \in Ar_3 \cos(\omega t)}{SV_{03}}, \quad (\text{A.115})$$

$$\tau_3 = \frac{\varepsilon^2}{V_{03}} = \Psi(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Psi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (\text{A.116})$$

e,

$$\Psi(\chi) = \frac{\Phi(\chi)}{V_{03}} = \frac{\mu \Pi(\chi)}{2\pi V_{03}}, \quad (\text{A.117})$$

$$\frac{d\Psi(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{V_{03}} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu}{2\pi V_{03}} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.118})$$

$$\tau_4 = \frac{r_3 I_{d2}}{V_{03}} = \Xi_1(t) + \Xi_2(t) + \Xi_3(t) + \Xi_4(t), \quad (\text{A.119})$$

$$\Xi_1(t) = \mathcal{K}(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2}, \quad (\text{A.120})$$

$$\Xi_2(t) = \frac{d\mathcal{K}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_1, \quad (\text{A.121})$$

$$\Xi_3(t) = 2 \frac{d\mathcal{K}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (\text{A.122})$$

$$\Xi_4(t) = \frac{d^2 \mathcal{K}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (\text{A.123})$$

$$\mathcal{K}(\chi) = \frac{\mu \in Ar_3}{2\pi S V_{03}} \Pi(\chi), \quad (\text{A.124})$$

$$\frac{d\mathcal{K}(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu \in Ar_3}{2\pi S V_{03}} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.125})$$

$$\frac{d^2 \mathcal{K}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu \in Ar_3}{2\pi S V_{03}} \frac{d^2 \Pi(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.126})$$

A auto-indutância referente aos fios infinitos será nula, pois o fluxo magnético total que passa pela área se anula, assim a corrente induzida e, de deslocamento para esse fator são iguais a zero.

Como o fluido envolvido é o ar, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica podem ser aproximadas para os respectivos valores do vácuo.

Com os valores das constantes da tabela abaixo, limitando os valores para a amplitude de oscilação do campo magnético do eletroímã para  $0 < B_0 < 1$ , e maximizando as funções de  $x$  para o valor máximo de oscilação dado por  $\chi = L/2 - 2r$ ,

}	1 dm
L	2 dm
$\mu$	$4\pi \times 10^{-3} \text{ gdm} / \text{C}^2$
$\epsilon$	$8,854 \times 10^{-18} \text{ C}^2 \text{ s}^2 / \text{gdm}^3$
$V_{03}$	$25 \times 10^5 \text{ gdm}^2 / \text{Cs}^2$
$r_3$	$1 \times 10^5 \text{ gdm}^2 / \text{C}^2 \text{ s}$
$\omega$	0,3 rad / s
r	$1 \times 10^{-2} \text{ dm}$
A	$3,14 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$
S	150 dm
T	3 dm
U	10 dm

Tabela A-1 Valores numéricos das constantes.

$$-3,6 \times 10^{-6} \frac{\text{Cs}}{\text{g}} < \mathfrak{H}(t) < 3,6 \times 10^{-6} \frac{\text{Cs}}{\text{g}}, \quad (\text{A.127})$$

$$-2 \times 10^{-24} \frac{\text{Cs}}{\text{g}} < \mathfrak{B}(t) < 2 \times 10^{-24} \frac{\text{Cs}}{\text{g}}, \quad (\text{A.128})$$

$$-4 \times 10^{-9} \frac{\text{s}^2}{\text{C}} < \Psi(\chi) < 4 \times 10^{-9} \frac{\text{s}^2}{\text{C}}, \quad (\text{A.129})$$

$$-8 \times 10^{-8} \frac{\text{s}^2}{\text{Cdm}} < \frac{d\Psi(\chi)}{d\chi} < 8 \times 10^{-8} \frac{\text{s}^2}{\text{Cdm}}, \quad (\text{A.130})$$

$$-7,4 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^3}{\text{C}} < \mathfrak{K}(\chi) < 7,4 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^3}{\text{C}}, \quad (\text{A.131})$$

$$-1,46 \times 10^{-25} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}} < \frac{d\mathcal{K}(\chi)}{d\chi} < 1,46 \times 10^{-25} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}}, \quad (\text{A.132})$$

$$-1,48 \times 10^{-23} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2} < \frac{d^2\mathcal{K}(\chi)}{d\chi^2} < 1,48 \times 10^{-23} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2}, \quad (\text{A.133})$$

onde o sinal negativo e positivo de (A.127) a (A.133), indicam o mínimo e o máximo valor que essas funções envolvidas podem assumir.

Pelas respectivas variações observadas acima e para baixas intensidades e variações no tempo da corrente elétrica  $I_1$ , e pequenas velocidades e acelerações da posição  $\chi$ . Quando se realizar o produto desses parâmetros com as funções de (A.127) a (A.133), em (A.111), eles serão muito menores do que um, que implica,

$$I_2 \cong \frac{V_{03}}{r_3} = 25 \frac{\text{C}}{\text{s}}. \quad (\text{A.134})$$

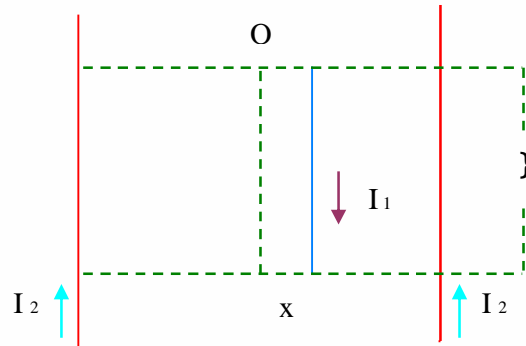


Figura A-4 Movimento de oscilação do fio oscilante.

Sendo assim,

$$I_1 = \frac{V_{01}}{r_{01}} + \frac{\varepsilon_i}{r_{01}} + I_{di}, \quad (\text{A.135})$$

o campo magnético que atua no fio oscilante é dado por:

$$\vec{B}_R = \frac{4\mu I_2 x}{\pi(L^2 - 4x^2)} \hat{n},$$

então, as tensões induzidas e as correntes de deslocamentos no fio oscilante devido aos fios infinitos e ao eletroímã,

então, o fluxo magnético,

$$\varphi_{12} = \int_S \vec{B}_R \cdot \hat{n} da = \int_0^{\chi+r} \frac{4\mu I_2 x}{\pi(L^2 - 4x^2)} \hat{n} \cdot \hat{n} dx = -\frac{\mu I_2}{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right),$$

onde  $da = dx$ , e  $x = \chi + r$ ,

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\varphi_{12}}{dt}, \quad (\text{A.136})$$

$$\varepsilon_1 = \Re(\chi) \frac{dI_2}{dt} - \frac{d\Re(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_2, \quad (\text{A.137})$$

$$\Re(\chi) = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right), \quad (\text{A.138})$$

$$\frac{d\Re(\chi)}{d\chi} = \frac{4\mu(\chi+r)}{\pi(L^2 - 4(\chi+r)^2)}, \quad (\text{A.139})$$

sendo,

$$\varepsilon_1 = \oint_C \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}, \quad (\text{A.140})$$

$$\oint_C \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \Re(\chi) \frac{dI_2}{dt} - \frac{d\Re(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_2,$$

$$\mathbf{E}_1 \{ \frac{d}{dt} \} = \mathfrak{R}(\chi) \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} - \frac{d\mathfrak{R}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \mathbf{I}_2,$$

$$\mathbf{E}_1 \} = \mathfrak{R}(\chi) \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} - \frac{d\mathfrak{R}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \mathbf{I}_2,$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathfrak{R}(\chi)}{\} } \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} - \frac{1}{\} } \frac{d\mathfrak{R}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \mathbf{I}_2,$$

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \left( \frac{\mathfrak{R}(\chi)}{\} } \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} - \frac{1}{\} } \frac{d\mathfrak{R}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \mathbf{I}_2 \right) \hat{\mathbf{n}}_1, \quad (\text{A.141})$$

$$\Theta_{12} = \int_S \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} da, \quad (\text{A.142})$$

levando (A.141), em (A.142), tem-se:

$$\Theta_{12} = \frac{A}{\} } \mathfrak{R}(\chi) \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} - \frac{A}{\} } \frac{d\mathfrak{R}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \mathbf{I}_2, \quad (\text{A.143})$$

$$\mathbf{I}_{d1} = \epsilon \frac{d\Theta_{12}}{dt}, \quad (\text{A.144})$$

substituindo (A.143), em (A.144),

$$\mathbf{I}_{d1} = \mathbf{M}_1(t) + \mathbf{M}_2(t), \quad (\text{A.145})$$

$$\mathbf{M}_1(t) = \mathbf{A}(\chi) \frac{d^2 \mathbf{I}_2}{dt^2} - \frac{d\mathbf{A}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} \mathbf{I}_2, \quad (\text{A.146})$$

$$\mathbf{M}_2(t) = -2 \frac{d\mathbf{A}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} - \frac{d^2 \mathbf{A}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 \mathbf{I}_2, \quad (\text{A.147})$$

$$A(\chi) = \frac{A}{\chi} \Re(\chi) = \frac{\mu \in A}{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right), \quad (\text{A.148})$$

$$\frac{dA(\chi)}{d\chi} = \frac{A}{\chi} \frac{d\Re(\chi)}{d\chi} = \frac{4\mu \in A (\chi+r)}{\pi(L^2 - 4(\chi+r)^2)}, \quad (\text{A.149})$$

$$\frac{d^2A(\chi)}{d\chi^2} = \frac{A}{\chi} \frac{d^2\Re(\chi)}{d\chi^2} = \frac{4\mu \in A (L^2 + 4(\chi+r)^2)}{\pi(L^2 - 4(\chi+r)^2)^2}, \quad (\text{A.150})$$

onde,

$$\frac{d^2\Re(\chi)}{d\chi^2} = \frac{4\mu \in \chi (L^2 + 4(\chi+r)^2)}{\pi(L^2 - 4(\chi+r)^2)^2}, \quad (\text{A.151})$$

pela figura A-1,

$$\varphi_{13} = \varphi_{23} = B_0 TU \cos(\omega t), \quad (\text{A.152})$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = B_0 TU \omega \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.153})$$

$$\varepsilon_1 = \oint_{\vec{c}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}, \quad (\text{A.154})$$

$$\oint_{\vec{c}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = B_0 TU \omega \text{sen}(\omega t),$$

$$E_1 \oint_{\vec{c}} d\vec{l} = B_0 TU \omega \text{sen}(\omega t),$$

$$E_1 \int_{\vec{c}} d\vec{l} = B_0 TU \omega \text{sen}(\omega t),$$

$$E_1 = \frac{B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t)}{c},$$

na forma vetorial,

$$\vec{E}_1 = \left( \frac{B_0 T U \omega \text{sen}(\omega t)}{c} \right) \hat{n}_1, \quad (\text{A.155})$$

$$\Theta_{13} = \int_S \vec{E}_1 \cdot \hat{n} \, da = \frac{B_0 T U \omega A \text{sen}(\omega t)}{c}, \quad (\text{A.156})$$

$$I_{d1} = \epsilon \frac{d\Theta_{13}}{dt}, \quad (\text{A.157})$$

$$I_{d1} = \frac{B_0 T U \omega^2 \epsilon A}{c} \cos(\omega t). \quad (\text{A.158})$$

A corrente induzida do fio oscilante é a mesma que ele realiza em relação aos fios infinitos, e é dada por,

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\varphi_{21}}{dt} = \Phi(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1,$$

definindo a tensão induzida abaixo:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2 = \oint_C \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}, \quad (\text{A.159})$$

$$\oint_C \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \Phi(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1,$$

$$\varepsilon_2 \oint_C d\vec{s} = \Phi(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1$$

$$\vec{E}_2^{\wedge} = \Phi(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1,$$

$$\vec{E}_2^{\wedge} = \frac{\Phi(\chi)}{\} \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{\} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1$$

então,

$$\vec{E}_2^{\wedge} = \left( \frac{\Phi(\chi)}{\} \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{\} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1 \right) \hat{n}_2^{\wedge}, \quad (\text{A.160})$$

$$\Theta_{21} = \int_S \vec{E}_2^{\wedge} \cdot \hat{n}_2^{\wedge} da, \quad (\text{A.161})$$

$$\Theta_{21} = \frac{A}{\} \Phi(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{A}{\} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (\text{A.162})$$

$$I_{d2}^{\wedge} = \epsilon \frac{d\Theta_{21}}{dt}, \quad (\text{A.163})$$

desse modo,

$$I_{d2}^{\wedge} = \aleph_1(t) + \aleph_2(t) + \aleph_3(t) + \aleph_4(t), \quad (\text{A.164})$$

$$\aleph_1(t) = \mathfrak{D}(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2}, \quad (\text{A.165})$$

$$\aleph_2(t) = \frac{d\mathfrak{D}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_1, \quad (\text{A.166})$$

$$\aleph_3(t) = 2 \frac{d\mathfrak{D}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (\text{A.167})$$

$$\mathfrak{K}_4(t) = \frac{d^2 \mathfrak{D}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (\text{A.168})$$

$$\mathfrak{D}(\chi) = \frac{\mu \in A}{2\pi} \Pi(\chi), \quad (\text{A.169})$$

$$\frac{d\mathfrak{D}(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu \in A}{2\pi} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.170})$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{D}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu \in A}{2\pi} \frac{d^2 \Pi(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.171})$$

portanto, a corrente  $I_1$ , é dada por,

$$I_1 = \frac{V_{01}}{r_{01}} \frac{(1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6)}{(1 - \Delta_7)}, \quad (\text{A.172})$$

e,

$$\Delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{V_{01}} = \mathfrak{q}(\chi) \frac{dI_2}{dt} - \frac{d\mathfrak{q}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_2, \quad (\text{A.173})$$

$$\mathfrak{q}(\chi) = \frac{\mathfrak{R}(\chi)}{V_{01}} = \frac{\mu}{2\pi V_{01}} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right), \quad (\text{A.174})$$

$$\frac{d\mathfrak{q}(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{V_{01}} \frac{d\mathfrak{R}(\chi)}{d\chi} = \frac{4\mu(\chi+r)}{\pi V_{01}(L^2 - 4(\chi+r)^2)}, \quad (\text{A.175})$$

$$\Delta_2 = \frac{r_{01}}{V_{01}} I_{d1} = \mathfrak{p}_1(t) - \mathfrak{p}_2(t), \quad (\text{A.176})$$

$$\mathfrak{p}_1(t) = \frac{r_{01}}{V_{01}} \mathfrak{M}_1(t) = \mathfrak{z}(\chi) \frac{d^2 I_2}{dt^2} - \frac{d\mathfrak{z}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_2, \quad (\text{A.177})$$

$$\bar{p}_2(t) = \frac{r_{01}}{V_{01}} \mathbf{M}_2(t) = 2 \frac{d\mathcal{Z}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} + \frac{d^2\mathcal{Z}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 \mathbf{I}_2, \quad (\text{A.178})$$

$$\mathcal{Z}(\chi) = \frac{r_{01}}{V_{01}} \mathbf{A}(\chi) = \frac{\mu \in A}{2\pi V_{01}} \ln \left( 1 - \frac{4(\chi+r)^2}{L^2} \right), \quad (\text{A.179})$$

$$\frac{d\mathcal{Z}(\chi)}{d\chi} = \frac{r_{01}}{V_{01}} \frac{d\mathbf{A}(\chi)}{d\chi} = \frac{4\mu \in A}{\pi V_{01} (L^2 - 4(\chi+r)^2)} r_{01}(\chi+r), \quad (\text{A.180})$$

$$\frac{d^2\mathcal{Z}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{r_{01}}{V_{01}} \frac{d^2\mathbf{A}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{4\mu \in A}{\pi V_{01} (L^2 - 4(\chi+r)^2)^2} r_{01} (L^2 + 4(\chi+r)^2), \quad (\text{A.181})$$

$$\Delta_3 = \frac{\dot{\varepsilon}_1}{V_{01}} = \mathbf{I}\mathbf{O}(t) \mathbf{B}_0, \quad (\text{A.182})$$

$$\mathbf{I}\mathbf{O}(t) = \frac{\text{TU}\omega}{V_{01}} \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.183})$$

$$\Delta_4 = \frac{r_{01}}{V_{01}} \dot{\mathbf{I}}_{d1} = \mathbf{I}(t) \mathbf{B}_0, \quad (\text{A.184})$$

$$\mathbf{I}(t) = \frac{\text{TU}\omega^2 \in A}{V_{01}} \cos(\omega t), \quad (\text{A.185})$$

$$\Delta_5 = \mathfrak{D}(\chi) \frac{d\mathbf{I}_1}{dt}, \quad (\text{A.186})$$

$$\mathfrak{D}(\chi) = \frac{\Phi(\chi)}{V_{01}} = \frac{\mu \Pi(\chi)}{2\pi V_{01}}, \quad (\text{A.187})$$

$$\Delta_6 = \mathcal{U}_1(t) + \mathcal{U}_3(t), \quad (\text{A.188})$$

$$\mathcal{C}_1(t) = \frac{r_{01}}{V_{01}} \mathfrak{K}_1(t) = \Pi(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2}, \quad (\text{A.189})$$

$$\Pi(\chi) = \frac{\mu \in A \overset{\sim}{r}_{01}}{2\pi} V_{01} \Pi(\chi), \quad (\text{A.190})$$

$$\mathcal{C}_3(t) = \frac{r_{01}}{V_{01}} \mathfrak{K}_3(t) = 2 \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (\text{A.191})$$

$$\frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu \in A \overset{\sim}{r}_{01}}{2\pi} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.192})$$

$$\Delta_7 = \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} + \frac{d^2 \Pi(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2, \quad (\text{A.193})$$

$$\frac{d\Pi(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{r_{01}} \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu}{2\pi r_{01}} \frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.194})$$

onde os parâmetros,  $\frac{d\Pi(\chi)}{d\chi}$  e  $\frac{d^2 \Pi(\chi)}{d\chi^2}$  de  $\Delta_7$ , foram determinados anteriormente.

Pelos valores numéricos das constantes das tabelas A-2, dada abaixo, e A-1, mostrada anteriormente, usando  $0 < B_0 < 1$  e  $\chi = L/2 - 2r$ ,

$V_{01}$	$2 \times 10^3 \text{ gdm}^2 / \text{Cs}^2$
$r_{01}$	$2 \times 10^5 \text{ gdm}^2 / \text{C}^2 \text{s}$
$A \overset{\sim}$	$3,14 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$

Tabela A-2 Valores numéricos da tensão, resistência elétrica e área da seção reta do fio oscilante.

$$-7,80 \times 10^{-6} \frac{\text{S}^2}{\text{C}} < \mathfrak{u}(\chi) < 0, \quad (\text{A.195})$$

$$-1,00 \times 10^{-4} \frac{s^2}{C_{dm}} < \frac{d\varphi(\chi)}{d\chi} < 1,00 \times 10^{-4} \frac{s^2}{C_{dm}}, \quad (\text{A.196})$$

$$-4,34 \times 10^{-21} \frac{s^3}{C} < \zeta(\chi) < 0, \quad (\text{A.197})$$

$$-5,60 \times 10^{-20} \frac{s^3}{C_{dm}} < \frac{d\zeta(\chi)}{d\chi} < 5,60 \times 10^{-20} \frac{s^3}{C_{dm}}, \quad (\text{A.198})$$

$$1,10 \times 10^{-21} \frac{s^3}{C_{dm}^2} < \frac{d^2\zeta(\chi)}{d\chi^2} < 5,60 \times 10^{-21} \frac{s^3}{C_{dm}^2}, \quad (\text{A.199})$$

$$-4,50 \times 10^{-3} \frac{Cs}{g} < \text{IO}(t) < 4,50 \times 10^{-3} \frac{Cs}{g}, \quad (\text{A.200})$$

$$-7,51 \times 10^{-19} \frac{Cs}{g} < \text{H}(t) < 7,51 \times 10^{-19} \frac{Cs}{g}, \quad (\text{A.201})$$

$$-5,00 \times 10^{-6} \frac{s^2}{C} < \text{D}(\chi) < 5,00 \times 10^{-6} \frac{s^2}{C}, \quad (\text{A.202})$$

$$-2,78 \times 10^{-21} \frac{s^3}{C} < \text{II}(\chi) < 2,78 \times 10^{-21} \frac{s^3}{C}, \quad (\text{A.203})$$

$$-5,00 \times 10^{-20} \frac{s^3}{C_{dm}} < \frac{d\text{II}(\chi)}{d\chi} < 5,00 \times 10^{-20} \frac{s^3}{C_{dm}}, \quad (\text{A.204})$$

$$-1,00 \times 10^{-6} \frac{s}{dm} < \frac{d\text{III}(\chi)}{d\chi} < 1,00 \times 10^{-6} \frac{s}{dm}, \quad (\text{A.205})$$

$$-5,56 \times 10^{-22} \frac{s^2}{dm} < \frac{d\text{IV}(\chi)}{d\chi} < 5,56 \times 10^{-22} \frac{s^2}{dm}, \quad (\text{A.206})$$

$$-5,55 \times 10^{-20} \frac{\text{s}^2}{\text{dm}^2} < \frac{d^2 \mathfrak{E}(\chi)}{d\chi^2} < 5,55 \times 10^{-20} \frac{\text{s}^2}{\text{dm}^2}, \quad (\text{A.207})$$

Pelas variações das funções observadas acima e para baixas intensidades e variações no tempo das correntes elétricas  $I_1$  e  $I_2$ , e pequenas velocidades e acelerações da posição  $\chi$ . Pela realização do produto desses parâmetros com as funções de (A.195) a (A.207), eles serão muito menores do que um, que implica:

$$I_1 \cong \frac{V_{01}}{r_{01}} = 0,01 \frac{\text{C}}{\text{s}}. \quad (\text{A.208})$$

Com o esquema da figura A-1 e a lei de Faraday, calcula-se que a corrente induzida e, de deslocamento, no eletroímã devido à auto-indução são dadas por:

$$\varphi = B_0 U T \cos(\omega t), \quad (\text{A.209})$$

que já foi calculado anteriormente,

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = B_0 U T \omega \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.210})$$

$$I_{\text{ind}} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_0 U T \omega \text{sen}(\omega t)}{R}, \quad (\text{A.211})$$

sendo,

$$\varepsilon = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{C}}, \quad (\text{A.212})$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{C}} = B_0 U T \omega \text{sen}(\omega t),$$

$$\varepsilon = B_0 U T \omega \text{sen}(\omega t),$$

$$E = \frac{B_0 \omega \sin(\omega t)}{H},$$

em um caráter vetorial,

$$\vec{E} = \frac{B_0 \omega \sin(\omega t)}{H} \hat{n}. \quad (\text{A.213})$$

A corrente de deslocamento,

$$\Theta = \int_s \vec{E} \cdot \hat{n} \, da = \int_s \frac{B_0 \omega \sin(\omega t)}{H} \hat{n} \cdot \hat{n} \, da = \frac{B_0 A \omega \sin(\omega t)}{H},$$

$$I_d = \epsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{B_0 A \omega \sin(\omega t)}{H} \right) = \frac{\epsilon B_0 A \omega^2 \cos(\omega t)}{H}, \quad (\text{A.214})$$

aplicando a lei de Ampere,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu (I_{\text{ind}} + I_d), \quad (\text{A.215})$$

onde a corrente elétrica devido a bateria, já foi considerada anteriormente,

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu H B_0 U T \omega \sin(\omega t)}{R} + \frac{\mu \epsilon B_0 A \omega^2 \cos(\omega t)}{H},$$

$$B \oint_c d\vec{l} = \frac{\mu H B_0 U T \omega \sin(\omega t)}{R} + \mu \epsilon B_0 A \omega^2 \cos(\omega t),$$

$$B J = \frac{\mu H B_0 U T \omega \sin(\omega t)}{R} + \mu \epsilon B_0 A \omega^2 \cos(\omega t),$$

$$\vec{B} = \frac{\mu H B_0 U T \omega \text{sen}(\omega t)}{R J} + \frac{\mu \in B_0 A \omega^2 \cos(\omega t)}{J},$$

$$\vec{B} = \left( \frac{\mu H B_0 U T \omega \text{sen}(\omega t)}{R J} + \frac{\mu \in B_0 A \omega^2 \cos(\omega t)}{J} \right) \hat{n}. \quad (\text{A.216})$$

Considerando um elemento de força,

$$d\vec{F}_{ELI} = \vec{I}_1 \times \vec{B},$$

onde,

$$\vec{I}_1 = (I_1 dy) \hat{y},$$

e,

$$\hat{n} = \hat{z},$$

dessa maneira,

$$d\vec{F}_{ELI} = (I_1 dy) \left( \frac{\mu H B_0 U T \omega \text{sen}(\omega t)}{R J} + \frac{\mu \in B_0 A \omega^2 \cos(\omega t)}{J} \right) (\hat{y} \times \hat{z}),$$

fazendo  $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ , e integrando a relação acima de 0 a  $l$ , chega-se:

$$\vec{F}_{ELI} = \left( \frac{\mu H B_0 I_1 U T \omega \text{sen}(\omega t)}{R J} + \frac{\mu \in B_0 I_1 A \omega^2 \cos(\omega t)}{J} \right) \hat{x},$$

sendo  $\vec{F}_{ELI} = F_{ELI} \hat{x}$ ,

$$F_{EL1} = \frac{\mu H B_0 I_1 \int UT \omega \sin(\omega t)}{RJ} + \frac{\mu \in B_0 I_1 \int A \omega^2 \cos(\omega t)}{J}. \quad (A.217)$$

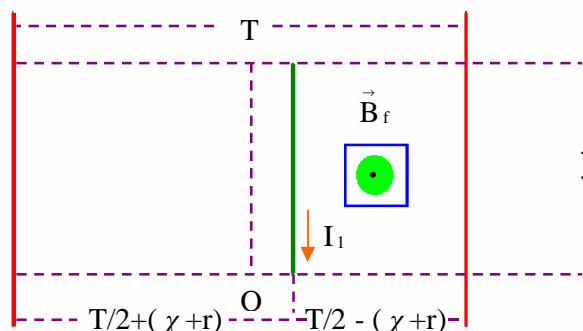


Figura A-5 Esquema no plano de uma região do eletroímã e do fio oscilante.

Com os esquemas das figuras A-2 e A-5, realizando cálculos similares, chega-se:

$$\vec{B}_f = \frac{\mu I_1}{4\pi y} \left( \frac{\} - x_4}{\sqrt{y^2 + (\} - x_4)^2} + \frac{x_4}{\sqrt{y^2 + x_4^2}} \right) \hat{n}_f. \quad (A.218)$$

$$\varphi_{31} = \int_r^{T/2-(\chi+r)} \int_0^{\} \vec{B}_f \cdot \hat{n} \, dx_4 \, dy + \int_r^{T/2+(\chi+r)} \int_0^{\} \vec{B}_f \cdot \hat{n} \, dx_4 \, dy,$$

sendo assim,

$$\varphi_{31} = \int_r^{T/2-(\chi+r)} \int_0^{\} \vec{B}_f \cdot \hat{n} \, dx_4 \, dy, \quad (A.219)$$

$$\varphi_{31} = \int_r^{T/2-(\chi+r)} \int_0^{\} \frac{\mu I_1}{4\pi y} \left( \frac{\} - x_4}{\sqrt{y^2 + (\} - x_4)^2} + \frac{x_4}{\sqrt{y^2 + x_4^2}} \right) \hat{n}_f \cdot \hat{n} \, dx_4 \, dy,$$

tendo  $\hat{n}_f \cdot \hat{n} = 1$ ,

$$\varphi_{31} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \left( \int_r^{T/2-(\chi+r)} \int_0^{\chi} \frac{(\chi - x_4) dx_4 dy}{y \sqrt{y^2 + (\chi - x_4)^2}} + \int_r^{T/2-(\chi+r)} \int_0^{\chi} \frac{x_4 dx_4 dy}{y \sqrt{y^2 + x_4^2}} \right), \quad (\text{A.220})$$

integrando as integrais duplas em (A.220),

$$\varphi_{31} = \frac{\mu I_1}{2\pi} [ \chi(\chi) + \Xi(\chi) + P ], \quad (\text{A.221})$$

onde,

$$\chi(\chi) = \sqrt{\chi^2 + \left( \frac{T}{2} - (\chi+r) \right)^2} - \left( \frac{T}{2} - (\chi+r) \right), \quad (\text{A.222})$$

$$\Xi(\chi) = G_5(\chi) + G_6(\chi), \quad (\text{A.223})$$

$$G_5(\chi) = \chi \ln \left( 1 - \frac{2(\chi+r)}{T} \right), \quad (\text{A.224})$$

$$G_6(\chi) = -\chi \ln \left( \frac{2\chi}{T} + \sqrt{\frac{4\chi^2}{T^2} + \left( 1 - \frac{2(\chi+r)}{T} \right)^2} \right), \quad (\text{A.225})$$

$$\varphi_{31} = \int_r^{T/2+(\chi+r)} \int_0^{\chi} \vec{B}_f \cdot \hat{n} dx_4 dy, \quad (\text{A.226})$$

$$\varphi_{31} = \int_r^{T/2+(\chi+r)} \int_0^{\chi} \left( \frac{\mu I_1}{4\pi y} \left( \frac{\chi - x_4}{\sqrt{y^2 + (\chi - x_4)^2}} + \frac{x_4}{\sqrt{y^2 + x_4^2}} \right) \hat{n}_f \right) \cdot \hat{n} dx_4 dy,$$

se  $\hat{n}_f \cdot \hat{n} = -1$ ,

$$\ddot{\varphi}_{31} = -\frac{\mu I_1}{4\pi} \left( \int_r^{T/2+(\chi+r)} \int_0^{\} \frac{(\} - x_4) dx_4 dy}{y \sqrt{y^2 + (\} - x_4)^2}} + \int_r^{T/2+(\chi+r)} \int_0^{\} \frac{x_4 dx_4 dy}{y \sqrt{y^2 + x_4^2}} \right), \quad (\text{A.227})$$

integrando as funções de (A.227),

$$\ddot{\varphi}_{31} = -\frac{\mu I_1}{2\pi} (\mathbf{y}(\chi) + \nabla(\chi) + \mathbf{P}), \quad (\text{A.228})$$

sendo,

$$\mathbf{y}(\chi) = \sqrt{\}^2 + \left( \frac{\mathbf{T}}{2} + (\chi+r) \right)^2} - \left( \frac{\mathbf{T}}{2} + (\chi+r) \right), \quad (\text{A.229})$$

$$\nabla(\chi) = \mathbf{G}_7(\chi) + \mathbf{G}_8(\chi), \quad (\text{A.230})$$

$$\mathbf{G}_7(\chi) = \} \ln \left( 1 + \frac{2(\chi+r)}{\mathbf{T}} \right), \quad (\text{A.231})$$

$$\mathbf{G}_8(\chi) = -\} \ln \left( \frac{2\}}{\mathbf{T}} + \sqrt{\frac{4\}}{\mathbf{T}^2} + \left( 1 + \frac{2(\chi+r)}{\mathbf{T}} \right)^2} \right), \quad (\text{A.232})$$

se,

$$\dot{f}_{31}(\chi) = (\chi) + \Xi(\chi) + \mathbf{P}, \quad (\text{A.233})$$

e,

$$\ddot{f}_{31}(\chi) = \mathbf{y}(\chi) + \nabla(\chi) + \mathbf{P}, \quad (\text{A.234})$$

então,

$$\dot{\varphi}_{31} = \frac{\mu I_1}{2\pi} \dot{f}_{31}(\chi), \quad (\text{A.235})$$

$$\ddot{\varphi}_{31} = -\frac{\mu I_1}{2\pi} \ddot{f}_{31}(\chi), \quad (\text{A.236})$$

$$\varphi_{31} = \dot{\varphi}_{31} + \ddot{\varphi}_{31} = -\&(\chi)I_1, \quad (\text{A.237})$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = -\frac{d\varphi_{31}}{dt} = \&(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\&(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (\text{A.238})$$

$$\&(\chi) = \frac{\mu \mathfrak{D}(\chi)}{2\pi}, \quad (\text{A.239})$$

$$\frac{d\&(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{d\mathfrak{D}(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.240})$$

$$I_3 = \frac{\dot{\varepsilon}_3}{R} = \mathfrak{K}(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\mathfrak{K}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (\text{A.241})$$

$$\mathfrak{K}(\chi) = \frac{\&(\chi)}{R} = \frac{\mu \mathfrak{D}(\chi)}{2\pi R}, \quad (\text{A.242})$$

$$\frac{d\mathfrak{K}(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{R} \frac{d\&(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu}{2\pi R} \frac{d\mathfrak{D}(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.243})$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{\chi}, \quad (\text{A.244})$$

relacionando (A.238) e (A.244),

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{\chi} = \&(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\&(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1,$$

$$\vec{E}_3 = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left\{ \int_V \rho \, d\tau \right\} = \epsilon_0(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\epsilon_0(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1,$$

$$\vec{E}_3^{\text{HUT}} = \epsilon_0(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\epsilon_0(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1,$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\epsilon_0(\chi)}{\text{HUT}} \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{\text{HUT}} \frac{d\epsilon_0(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1,$$

em termos vetoriais,

$$\vec{E}_3 = \left( \frac{\epsilon_0(\chi)}{\text{HUT}} \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{\text{HUT}} \frac{d\epsilon_0(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1 \right) \hat{n}_E, \quad (\text{A.245})$$

$$\Theta_{31} = \int_S \vec{E}_3 \cdot \hat{n} \, da, \quad (\text{A.246})$$

levando (A.245) em (A.246) e usando  $\hat{n}_E \cdot \hat{n} = 1$ , chega-se:

$$\Theta_{31} = \frac{A}{\text{HUT}} \frac{d}{dt} \left\{ \int_V \rho \, d\tau \right\} + \frac{A}{\text{HUT}} \frac{d\epsilon_0(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (\text{A.247})$$

e,

$$I_{d3} = \epsilon_0 \frac{d\Theta_{31}}{dt}, \quad (\text{A.248})$$

substituindo (A.247), em (A.248):

$$I_{d3} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{\text{HUT}} \frac{d}{dt} \left\{ \int_V \rho \, d\tau \right\} + \frac{A}{\text{HUT}} \frac{d\epsilon_0(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1 \right),$$

$$I_{d3} = Z_1(t) + Z_2(t) + Z_3(t) + Z_4(t), \quad (\text{A.249})$$

sendo,

$$Z_1(t) = \frac{d^2 \vartheta(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (\text{A.250})$$

$$Z_2(t) = \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_1, \quad (\text{A.251})$$

$$Z_3(t) = 2 \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (\text{A.252})$$

$$Z_4(t) = \vartheta(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2}, \quad (\text{A.253})$$

$$\vartheta(\chi) = \frac{\epsilon \overset{\text{HUT}}{A} \&(\chi)}{\text{HUT}} = \frac{\mu \epsilon \overset{\text{HUT}}{A}}{2\pi \text{HUT}} \vartheta(\chi), \quad (\text{A.254})$$

$$\frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} = \frac{\epsilon \overset{\text{HUT}}{A} \frac{d\&(\chi)}{d\chi}}{\text{HUT}} = \frac{\mu \epsilon \overset{\text{HUT}}{A} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi}}{2\pi \text{HUT}}, \quad (\text{A.255})$$

$$\frac{d^2 \vartheta(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\epsilon \overset{\text{HUT}}{A} \frac{d^2 \&(\chi)}{d\chi^2}}{\text{HUT}} = \frac{\mu \epsilon \overset{\text{HUT}}{A} \frac{d^2 \vartheta(\chi)}{d\chi^2}}{2\pi \text{HUT}}, \quad (\text{A.256})$$

$$\vartheta(\chi) = f_{31}^{\text{HUT}}(\chi) - f_{31}^{\text{HUT}}(\chi), \quad (\text{A.257})$$

$$\frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi} = \frac{df_{31}^{\text{HUT}}(\chi)}{d\chi} - \frac{df_{31}^{\text{HUT}}(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.258})$$

$$\frac{d^2 \vartheta(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2 f_{31}^{\text{HUT}}(\chi)}{d\chi^2} - \frac{d^2 f_{31}^{\text{HUT}}(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.259})$$

$$\frac{df_{31}(\chi)}{d\chi} = \frac{d(\chi)}{d\chi} + \frac{d\Xi(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.260})$$

$$\frac{d(\chi)}{d\chi} = -\frac{\left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)}{\sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2} + 1, \quad (\text{A.261})$$

$$\frac{d\Xi(\chi)}{d\chi} = \frac{dG_5(\chi)}{d\chi} + \frac{dG_6(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.262})$$

$$\frac{dG_5(\chi)}{d\chi} = -\frac{\}}{\frac{T}{2} - (\chi+r)}, \quad (\text{A.263})$$

$$\frac{dG_6(\chi)}{d\chi} = \} \frac{\left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)}{\left(\} + \sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2\right) \left(\sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2\right)}, \quad (\text{A.264})$$

$$\frac{df_{31}(\chi)}{d\chi} = \frac{dy(\chi)}{d\chi} + \frac{d\mathcal{V}(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.265})$$

$$\frac{dy(\chi)}{d\chi} = \frac{\left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)}{\sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2} - 1, \quad (\text{A.266})$$

$$\frac{d\mathcal{V}(\chi)}{d\chi} = \frac{dG_7(\chi)}{d\chi} + \frac{dG_8(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.267})$$

$$\frac{dG_7(\chi)}{d\chi} = \frac{\}}{\frac{T}{2} + (\chi+r)}, \quad (\text{A.268})$$

$$\frac{dG_8(\chi)}{d\chi} = -\frac{\left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)}{\left(\chi + \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2}\right) \left(\sqrt{\chi^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2}\right)}, \quad (\text{A.269})$$

$$\frac{d^2 f_{31}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2 \chi}{d\chi^2} + \frac{d^2 \Xi(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.270})$$

$$\frac{d^2 \chi}{d\chi^2} = \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}} - \frac{\left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}{\sqrt{\left(\chi^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2\right)^3}}, \quad (\text{A.271})$$

$$\frac{d^2 \Xi(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2 G_5(\chi)}{d\chi^2} + \frac{d^2 G_6(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.272})$$

$$\frac{d^2 G_5(\chi)}{d\chi^2} = -\frac{\chi}{\left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}, \quad (\text{A.273})$$

$$\frac{d^2 G_6(\chi)}{d\chi^2} = \bar{\sigma}_1(\chi) + \bar{\sigma}_2(\chi) + \bar{\sigma}_3(\chi), \quad (\text{A.274})$$

$$\bar{\sigma}_1(\chi) = -\frac{\chi}{\left(\chi + \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}\right) \left(\sqrt{\chi^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}\right)}, \quad (\text{A.275})$$

$$\bar{\sigma}_2(\chi) = \frac{\left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}{\left(\chi + \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}\right)^2 \left(\chi^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2\right)}, \quad (\text{A.276})$$

$$\sigma_3(\chi) = \frac{\left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}{\left(\} + \sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2\right)^2 \left(\sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} - (\chi+r)\right)^2}\right)^3}, \quad (\text{A.277})$$

$$\frac{d^2 f_{31}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2 \mathbf{y}(\chi)}{d\chi^2} + \frac{d^2 \mathbb{V}(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.278})$$

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{1}{\sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2} - \frac{\left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2}{\sqrt{\left(\}^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2\right)^3}}, \quad (\text{A.279})$$

$$\frac{d^2 \mathbb{V}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{d^2 \mathbf{G}_7(\chi)}{d\chi^2} + \frac{d^2 \mathbf{G}_8(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.280})$$

$$\frac{d^2 \mathbf{G}_7(\chi)}{d\chi^2} = -\frac{\}}{\left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2}, \quad (\text{A.281})$$

$$\frac{d^2 \mathbf{G}_8(\chi)}{d\chi^2} = \mathfrak{h}_1(\chi) + \mathfrak{h}_2(\chi) + \mathfrak{h}_3(\chi), \quad (\text{A.282})$$

$$\mathfrak{h}_1(\chi) = -\frac{\}}{\left(\} + \sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2\right)^2 \left(\sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2}\right)^3}, \quad (\text{A.283})$$

$$\mathfrak{h}_2(\chi) = \frac{\left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2}{\left(\} + \sqrt{\}^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2\right)^2 \left(\}^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi+r)\right)^2\right)^2}, \quad (\text{A.284})$$

$$b_3(\chi) = \frac{\left(\frac{T}{2} + (\chi + r)\right)^2}{\left(\left\{1 + \sqrt{\left\{1^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi + r)\right)^2}\right\}^2} \left(\sqrt{\left\{1^2 + \left(\frac{T}{2} + (\chi + r)\right)^2}\right\}^3}\right)\right)}, \quad (\text{A.285})$$

aplicando a lei de Ampere,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu H (I_3 + I_{d3}), \quad (\text{A.286})$$

$$B \oint_C dl = \mu H (I_3 + I_{d3}),$$

$$B J = \mu H (I_3 + I_{d3}),$$

$$B = \frac{\mu H}{J} (I_3 + I_{d3}),$$

na forma vetorial,

$$\vec{B} = \frac{\mu H}{J} (I_3 + I_{d3}) \hat{n}. \quad (\text{A.287})$$

Tendo um elemento de força definido por,

$$d\vec{F}_{EL2} = \vec{I}_1 \times \vec{B}, \quad (\text{A.288})$$

onde,

$$\vec{I}_1 = (I_1 dy) \hat{y},$$

e,

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}},$$

substituindo (A.287) em (A.288),

$$d\vec{\mathbf{F}}_{EL2} = I_1 \frac{\mu H}{J} \left( I_3 + I_{d3} \right) dy (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}), \quad (\text{A.289})$$

sendo  $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$ , e integrando  $d\vec{\mathbf{F}}_{EL2}$  de 0 a  $\hat{\mathbf{x}}$ , chega-se:

$$\int_0^{\hat{\mathbf{x}}} d\vec{\mathbf{F}}_{EL2} = \int_0^{\hat{\mathbf{x}}} I_1 \frac{\mu H}{J} \left( I_3 + I_{d3} \right) dy \hat{\mathbf{x}},$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{EL2} = \frac{\mu H I_1}{J} \left( I_3 + I_{d3} \right) \hat{\mathbf{x}},$$

sendo  $\vec{\mathbf{F}}_{EL2} = F_{EL2} \hat{\mathbf{x}}$ , então:

$$F_{EL2} = \varpi_1(t) + \varphi_2(t), \quad (\text{A.290})$$

onde,

$$\varpi_1(t) = \varpi(\chi) \frac{dI_1}{dt} I_1 + \frac{d\varpi(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1^2, \quad (\text{A.291})$$

$$\varpi(\chi) = \frac{\mu H}{J} \xi(\chi) = \frac{\mu^2 H}{2\pi R J} \vartheta(\chi), \quad (\text{A.292})$$

$$\frac{d\varpi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu H}{J} \frac{d\xi(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu^2 H}{2\pi R J} \frac{d\vartheta(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.293})$$

$$\varphi_2(t) = \varpi_1(t) + \varpi_2(t) + \varpi_3(t) + \varpi_4(t), \quad (\text{A.294})$$

$$\mathfrak{D}_1(t) = \frac{d^2 \mathfrak{s}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1^2, \quad (\text{A.295})$$

$$\mathfrak{D}_2(t) = \frac{d\mathfrak{s}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_1^2, \quad (\text{A.296})$$

$$\mathfrak{D}_3(t) = 2 \frac{d\mathfrak{s}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt} I_1, \quad (\text{A.297})$$

$$\mathfrak{D}_4(t) = \mathfrak{s}(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2} I_1, \quad (\text{A.298})$$

$$\mathfrak{s}(\chi) = \frac{\mu H \mathfrak{H}}{J} \mathfrak{v}(\chi) = \frac{\mu^2 \in A \mathfrak{H}}{2\pi U T J} \mathfrak{v}(\chi), \quad (\text{A.299})$$

$$\frac{d\mathfrak{s}(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu H \mathfrak{H}}{J} \frac{d\mathfrak{v}(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu^2 \in A \mathfrak{H}}{2\pi U T J} \frac{d\mathfrak{v}(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.300})$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{s}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu H \mathfrak{H}}{J} \frac{d^2 \mathfrak{v}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu^2 \in A \mathfrak{H}}{2\pi U T J} \frac{d^2 \mathfrak{v}(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.301})$$

Portanto,

$$F = F_{EL} + F_{EL1} + F_{EL2}, \quad (\text{A.302})$$

substituindo (3.29), (A.217) e (A.290) em (A.302),

$$F = B_0 I_1 \{ [ \mathfrak{I}_1 + [ \mathfrak{I}_2 ], \quad (\text{A.303})$$

$$[ \mathfrak{I}_1 = \nabla_1 \cos(\omega t) + \nabla_2 \text{sen}(\omega t), \quad (\text{A.304})$$

$$\nabla_1 = 1 + \frac{\mu \in A \overset{\sim}{\omega}^2}{J}, \quad (\text{A.305})$$

$$\nabla_2 = \frac{\mu H U T \omega}{R J}, \quad (\text{A.306})$$

$$\Gamma_2 = \zeta + \mathfrak{L}, \quad (\text{A.307})$$

$$\zeta = \mathfrak{z}(\chi) \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\mathfrak{z}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} I_1, \quad (\text{A.308})$$

$$\mathfrak{z}(\chi) = \frac{1}{\}B_0} \mathfrak{n}(\chi) = \frac{\mu^2 H}{2\pi R J B_0} \mathfrak{z}(\chi), \quad (\text{A.309})$$

$$\frac{d\mathfrak{z}(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{\}B_0} \frac{d\mathfrak{n}(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu^2 H}{2\pi R J B_0} \frac{d\mathfrak{z}(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.310})$$

$$\mathfrak{L} = \mathcal{V}_4 + \gg, \quad (\text{A.311})$$

$$\mathcal{V}_4 = \mathfrak{n}(\chi) \frac{d^2 I_1}{dt^2} + 2 \frac{d\mathfrak{n}(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} \frac{dI_1}{dt}, \quad (\text{A.312})$$

$$\gg = \frac{d\mathfrak{n}(\chi)}{d\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} I_1 + \frac{d^2 \mathfrak{n}(\chi)}{d\chi^2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 I_1, \quad (\text{A.313})$$

$$\mathfrak{n}(\chi) = \frac{1}{\}B_0} \mathfrak{u}(\chi) = \frac{\mu^2 \in A \overset{\sim}{\omega}}{2\pi U T J B_0} \mathfrak{z}(\chi), \quad (\text{A.314})$$

$$\frac{d\mathfrak{n}(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{\}B_0} \frac{d\mathfrak{u}(\chi)}{d\chi} = \frac{\mu^2 \in A \overset{\sim}{\omega}}{2\pi U T J B_0} \frac{d\mathfrak{z}(\chi)}{d\chi}, \quad (\text{A.315})$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{n}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{1}{\}B_0} \frac{d^2 \mathfrak{u}(\chi)}{d\chi^2} = \frac{\mu^2 \in A \overset{\sim}{\omega}}{2\pi U T J B_0} \frac{d^2 \mathfrak{z}(\chi)}{d\chi^2}, \quad (\text{A.316})$$

se,

$$\text{sen}(\arcsen(\delta)) = \delta, \quad (\text{A.317})$$

e,

$$-1 < \delta < 1, \quad (\text{A.318})$$

tem-se,

$$\text{sen}(\arcsen(\nabla_2)) = \nabla_2, \quad (\text{A.319})$$

se,

$$-1 < \nabla_2 < 1, \quad (\text{A.320})$$

usando a relação trigonométrica:

$$\text{sen}(\omega t) \text{sen}(\arcsen(\nabla_2)) = \frac{1}{2} \{ \cos(\varphi) - \cos(\psi) \}, \quad (\text{A.321})$$

onde,

$$\varphi = \omega t - \arcsen(\nabla_2), \quad (\text{A.322})$$

$$\psi = \omega t + \arcsen(\nabla_2), \quad (\text{A.323})$$

então,

$$I_1 = \nabla_1 \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \{ \cos(\varphi) - \cos(\psi) \}, \quad (\text{A.324})$$

para  $t = 0$ ,

$$\frac{1}{2} \left\{ \cos(-\arcsen(\nabla_2)) - \cos(\arcsen(\nabla_2)) \right\} = 0, \quad (\text{A.325})$$

pois,

$$\cos(-\arcsen(\nabla_2)) = \cos(\arcsen(\nabla_2)), \quad (\text{A.326})$$

Pelos valores numéricos das constantes das tabelas A-1, A-2, mostradas anteriormente, e A-3, dada abaixo, usando  $0 < B_0 < 1$  e  $\chi = L/2 - 2r$ ,

H	4 espiras
J	0,4 dm
$A^{\wedge\wedge\wedge}$	$2 \times 10^{-4} \text{ dm}^2$
$V_0$	$2 \times 10^5 \text{ gdm}^2 / \text{Cs}^2$

Tabela A-3 Valores numéricos do número de espiras, comprimento, área da seção reta e amplitude da voltagem do eletroímã.

$$\frac{\mu \in A^{\wedge\wedge\wedge} \omega^2}{J} = 5 \times 10^{-24}, \quad (\text{A.327})$$

portanto,

$$\nabla_1 \cong 1, \quad (\text{A.328})$$

sendo a variação de R dada por,

$$2,99 \times 10^4 \text{ gdm}^2 / \text{C}^2 \text{ s} < R < 5,56 \times 10^4 \text{ gdm}^2 / \text{C}^2 \text{ s}, \quad (\text{A.329})$$

tem-se,

$$2,03 \times 10^{-5} < \nabla_2 < 3,78 \times 10^{-5}, \quad (\text{A.330})$$

para  $t \neq 0$ , e  $t = 1s$ ,

$$\varphi = 0,3 - \arcsen(2,03 \times 10^{-5}), \quad (\text{A.331})$$

$$\varphi = 0,3 + \arcsen(2,03 \times 10^{-5}), \quad (\text{A.332})$$

$$\frac{1}{2} \{ \cos(\varphi) - \cos(\varphi) \} \cong 9,6 \times 10^{-8} \cong 0, \quad (\text{A.333})$$

$$\varphi = 0,3 - \arcsen(3,78 \times 10^{-5}), \quad (\text{A.334})$$

$$\varphi = 0,3 + \arcsen(3,78 \times 10^{-5}), \quad (\text{A.335})$$

$$\frac{1}{2} \{ \cos(\varphi) - \cos(\varphi) \} \cong 1,8 \times 10^{-7} \cong 0, \quad (\text{A.336})$$

válidos para  $R = 2,99 \times 10^4 \text{ gdm}^2 / \text{C}^2 \text{ s}$ ,  $B_0 = 0,835 \text{ g/Cs}$ ,  $R = 5,56 \times 10^4 \text{ gdm}^2 / \text{C}^2 \text{ s}$  e  $B_0 = 0,450 \text{ g/Cs}$ .

$$-8,3 \times 10^{-9} \frac{\text{s}^2}{\text{C}} < \mathfrak{v}(\chi) < 8,3 \times 10^{-9} \frac{\text{s}^2}{\text{C}}, \quad (\text{A.337})$$

$$-1,28 \times 10^{-8} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}} < \frac{d\mathfrak{v}(\chi)}{d\chi} < 1,28 \times 10^{-8} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}}, \quad (\text{A.338})$$

para  $B_0 = 0,450 \text{ g/Cs}$ ,

$$-6,40 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^3}{\text{C}} < \mathfrak{n}(\chi) < 6,40 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^3}{\text{C}}, \quad (\text{A.339})$$

para  $B_0 = 0,835 \text{ g/Cs}$ ,

$$-3,46 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^3}{\text{C}} < n(\chi) < 3,46 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^3}{\text{C}}, \quad (\text{A.340})$$

para  $B_0 = 0,450 \text{g/Cs}$ ,

$$-1,05 \times 10^{-26} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2} < \frac{dn(\chi)}{d\chi} < 1,05 \times 10^{-26} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2}, \quad (\text{A.341})$$

para  $B_0 = 0,835 \text{g/Cs}$ ,

$$-5,67 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2} < \frac{dn(\chi)}{d\chi} < 5,67 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2}, \quad (\text{A.342})$$

para  $B_0 = 0,450 \text{g/Cs}$ ,

$$-2,70 \times 10^{-26} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2} < \frac{d^2n(\chi)}{d\chi^2} < 2,70 \times 10^{-26} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2}, \quad (\text{A.343})$$

para  $B_0 = 0,835 \text{g/Cs}$ ,

$$-1,46 \times 10^{-26} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2} < \frac{d^2n(\chi)}{d\chi^2} < 1,46 \times 10^{-26} \frac{\text{s}^3}{\text{Cdm}^2}, \quad (\text{A.344})$$

e, sendo os outros termos da soma de (A.303) muito menores do que um, de acordo com os cálculos numéricos mostrados, anteriormente, implica que  $[ \_1 \cong \cos(\omega t)$  e  $[ \_2 \cong 0$ , que leva:

$$F \cong F_{\text{EL}} = B_0 I_1 \} \cos(\omega t) = (0,01)(B_0) \cos(0,3t). \quad (\text{A.345})$$

O campo magnético dos ímãs não produz corrente elétrica induzida, pois ele é perpendicular a normal do circuito, isto é,

$$\varphi = \int_{\mathcal{S}} \vec{B}_I \cdot \hat{n} \, da = \int_{\mathcal{S}} B_I \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) da = 0, \quad (\text{A.346})$$

então, sendo o fluxo magnético igual a zero, tem-se que a tensão induzida também será nula.

## Apêndice B

### Posições do fio oscilante em função do tempo

O programa que será apresentado a seguir, com a definição dos respectivos parâmetros de controle, quando executado no Mathematica 5.2 exibe os gráficos que tratam da posição do fio oscilante em função do tempo, onde o parâmetro  $q$  foi definido conforme os valores dados no capítulo 4. Neste programa, definimos a função integradora  $\text{sol}[q, \text{tmax}]$ , para obter diferentes soluções numéricas, em função do parâmetro de controle  $q$  e um determinado instante de tempo máximo  $\text{tmax}$  onde usamos  $\text{MaxSteps} \rightarrow \text{Infinity}$ , pois a solução da equação diferencial apresenta uma estrutura complexa,  $\text{MaxStepSize} \rightarrow \text{Infinity}$  porque a solução varia muito rapidamente em uma determinada região. Enquanto que o uso do comando " $\text{StiffnessTest} \rightarrow \text{False}$ " foi para anular a avaliação de um sistema Stiff devido a transformação de uma equação diferencial de segunda ordem ordinária em duas de primeira ordem. Já a utilização de  $\text{StartingStepSize} \rightarrow \text{stepsize}$  foi para prolongar as soluções até um tempo grande. Posteriormente, também definimos a função geradora dos gráficos das posições  $x(t)$  versus o tempo  $t$   $\text{pos}[A, \text{tmin}, \text{tmax}]$  em função de  $A$ , que será um termo usado para diferentes nomeações da função integradora, mencionada anteriormente, com o objetivo de mostrar os gráficos das posições para distintos valores de  $q$  em um instante de tempo mínimo  $\text{tmin}$  até um instante de tempo máximo  $\text{tmax}$ . Na função  $\text{pos}[A, \text{tmin}, \text{tmax}]$  usamos os comandos  $\text{PlotRange} \rightarrow \text{All}$ ,  $\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Hue}[0]\}$ ,  $\text{Frame} \rightarrow \text{True}$ ,  $\text{PlotPoints} \rightarrow 5000$ ,  $\text{FrameLabel} \rightarrow \{\text{"tempo"}, \text{"posição"}\}$ ,  $\text{Axes} \rightarrow \text{True}$ , respectivamente, para esboçar todos os intervalos de tempo dos gráficos, a cor da linha de contorno dos pontos da solução numérica, uma melhoria da curva em relação aos pontos do gráfico, especificação dos eixos e a limitação retangular. Também o uso do comando  $\text{Clear}$  foi definido para apagar o valor da variável anterior.

Definição dos parâmetros de controle 1.

```
c=0.098;
p=0.1;
u=1;
```

```
w=0.3;
r=0.4;
d=0.3;
tmin=19800;
tmax=20000;
stepsize=0.02;
```

Gráficos das posições  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para vários valores de  $q$ .

Definição da função integradora.

```
sol[q_, tmax_] := NDSolve[{x'[t]== v[t], v'[t]== -c*v[t] - p*x[t]/(1 - u*x[t]^2) +
q*Cos[w*t],x[0]== r,v[0]== d}, {x, v}, {t, 0, tmax}, MaxSteps -> Infinity, MaxStepSize -
> Infinity, Method ->{"ExplicitRungeKutta", "StiffnessTest" ->False}, StartingStepSize ->
stepsize];
```

Definição da função geradora dos gráficos das posições  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para vários valores de  $q$ .

```
pos[A_, tmin_, tmax_] := Plot[x[t] /.A, {t, tmin, tmax}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
{Hue[0]},Frame -> True, PlotPoints -> 5000, FrameLabelË{"tempo","posição"}, Axes -
>True];
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,450 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q=0.450;
osciladorpos1=sol[q,tmax];
pos[osciladorpos1,tmin,tmax];
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,460 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.460;
osciladorpos2 = sol[q, tmax];
```

```
pos[osciladorpos2, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,470 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.470;
osciladorpos3 = sol[q, tmax];
pos[osciladorpos3, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,511 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.511;
osciladorpos4 = sol[q, tmax];
pos[osciladorpos4, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,536 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.536;
osciladorpos5 = sol[q, tmax];
pos[osciladorpos5, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,557 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.557;
osciladorpos6 = sol[q, tmax];
pos[osciladorpos6, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,596 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.596;
```

```
osciladorpos7 = sol[q, tmax];  
pos[osciladorpos7, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,640 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.640;  
osciladorpos8 = sol[q, tmax];  
pos[osciladorpos8, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,700 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.700;  
osciladorpos9 = sol[q, tmax];  
pos[osciladorpos9, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,740 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.740;  
osciladorpos10 = sol[q, tmax];  
pos[osciladorpos10, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,812 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.812;  
osciladorpos11 = sol[q, tmax];  
pos[osciladorpos11, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da posição  $x(t)$  em decímetro versus o tempo  $t$  em segundo para  $q = 0,835 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.835;  
osciladorpos12 = sol[q, tmax];  
pos[osciladorpos12, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

## Apêndice C

### Velocidades do fio oscilante em função do tempo

O programa mostrado abaixo quando executado no Mathematica 5.2 exibe os gráficos da velocidade do fio oscilante em função do tempo, onde o parâmetro  $q$  foi definido conforme os valores dados no capítulo 4. Nesse programa usamos a função `vel[B, tmin, tmax]`, onde o termo  $B$  tem o objetivo de dar distintas nomeações a função integradora, definida no apêndice A, para construir os gráficos das velocidades  $v(t)$  versus o tempo  $t$  em um instante de tempo mínimo  $t_{\min}$  até um máximo  $t_{\max}$ . Os comandos usados `PlotRange -> All`, `PlotStyle -> {Hue[0.1]}`, `Frame -> True`, `PlotPoints -> 5000`, `FrameLabel -> {"tempo", "velocidade"}`, `Axes -> True` e `Clear` tem as funções, conforme apresentadas no apêndice A.

Gráficos das velocidades  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para vários valores de  $q$ .

Definição da função geradora dos gráficos das velocidades  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para vários valores de  $q$ .

```
vel[B_, tmin_, tmax_] := Plot[ v[t] /.B, {t, tmin, tmax}, PlotRange -> All, PlotStyle ->
{Hue[0.1]}, Frame -> True, PlotPoints -> 5000, FrameLabel -> {"tempo", "velocidade"},
Axes -> True];
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,450 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.450;
osciladorvel1 = sol[q, tmax];
vel[osciladorvel1, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,460 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.460;  
osciladorvel2 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel2, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,470 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.470;  
osciladorvel3 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel3, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,511 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.511;  
osciladorvel4 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel4, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,536 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.536;  
osciladorvel5 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel5, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,557 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.557;  
osciladorvel6 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel6, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,596 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.596;  
osciladorvel7 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel7, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,640 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.640;  
osciladorvel8 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel8, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,700 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.700;  
osciladorvel9 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel9, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,740 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.740;  
osiladorvel10 = sol[q, tmax];  
vel[osiladorvel10, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,812 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.812;  
osciladorvel11 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel11, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus o tempo  $t$  em segundo para o valor de  $q = 0,835 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.835;  
osciladorvel12 = sol[q, tmax];  
vel[osciladorvel12, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

## Apêndice D

### Espaços de fases

O programa abaixo quando executado no Mathematica 5.2 exibe os gráficos do espaço de fase da velocidade em função da posição do fio oscilante, onde o parâmetro  $q$  foi definido conforme os valores dados no capítulo 4. A definição da função `espfase[H, tmin, tmax]`, onde  $H$  dá diferentes nomeações a função a função integradora, apresentada no apêndice A, é usada para construir os gráficos dos espaços de fase em um instante de tempo mínimo  $tmin$  até um máximo  $tmax$ . Os comandos `PlotStyle -> {Hue[0.6]}`, `Frame -> True`, `PlotPoints -> 5000`, `PlotRange -> All`, `FrameLabel Ë {"posição","velocidade"}`, usados na função `espfase[H, tmin, tmax]` e `Clear` exercem as mesmas funções mostradas no apêndice A.

Gráficos do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para vários valores de  $q$ .

Definição da função geradora dos gráficos do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para vários valores de  $q$ .

```
espfase[H_, tmin_, tmax_] := ParametricPlot[Evaluate[{x[t], v[t]} /. H], {t, tmin, tmax},
PlotStyle -> {Hue[0.6]}, Frame -> True, PlotPoints -> 5000, PlotRange -> All,
FrameLabel Ë {"posição","velocidade"}]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,450 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.450;
osciladorespfase1 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase1, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,460 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.460;
osciladorespfase2 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase2, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,470 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.470;
osciladorespfase3 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase3, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,511 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.511;
osciladorespfase4 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase4, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,536 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.536;
osciladorespfase5 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase5, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,557 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.557;
osciladorespfase6 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase6, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,596 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.596;
osciladorespfase7 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase7, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,640 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.640;
osciladorespfase8 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase8, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,700 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.700;
osciladorespfase9 = sol[q, tmax];
espfase[osciladorespfase9, tmin, tmax];
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,740 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.740;  
osciladorespfase10 = sol[q, tmax];  
espfase[osciladorespfase10, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,812 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.812;  
osciladorespfase11 = sol[q, tmax];  
espfase[osciladorespfase11, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espaço de fase da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo em relação à posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,835 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.835;  
osciladorespfase12 = sol[q, tmax];  
espfase[osciladorespfase12, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

## Apêndice E

### Seções de Poincaré

O programa abaixo, retirado de (WEISSTEIN, 2003, p.1-4), quando executado no Mathematica 5.2 exibe os gráficos da seção de Poincaré da velocidade em função da posição do fio oscilante, onde o parâmetro  $q$  foi definido conforme os valores dados no capítulo 4. Nesse programa definimos os parâmetros de controle e a função `poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]`, onde `xtmin`, `xmax`, `vmin` e `vmax` são os valores máximo e mínimo da posição e velocidade que serão construídos os gráficos para diferentes valores de  $q$ . Já os termos  $c$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $q$  e  $w$  são as constantes da equação diferencial enquanto que `nprod`, `ntlop` e `psize` são os números de pontos desconsiderados dos gráficos, os pontos finais mostrados nos gráficos e o tamanho dos pontos considerados, respectivamente. Os comandos `MaxSteps -> Infinity`, `MaxStepSize -> Infinity`, `Method -> {"ExplicitRungeKutta", "StiffnessTest" -> False}`, `StartingStepSize -> stepsize`, e `PlotStyle -> {PointSize[psize], Hue[0]}`, `PlotRange -> {{xtmin,xmax},{vmin,vmax}}`, `Frame -> True`, `FrameLabel -> {"posição","velocidade"}`, `Axes -> True`) e `Clear` com suas respectivas funções foram discutidos no apêndice A.

Definição dos parâmetros de controle 2.

```

xtmin = -0.2;
xmax = 1.05;
vmin = -1.05;
vmax = 1.05;
nprod = 200;
ntlop = 15000;
psize = 0.015;

```

Gráficos da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para vários valores de  $q$ .

Definição da função geradora dos gráficos da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para vários valores de  $q$ .

```
poincare[xtmin_, xmax_, vmin_, vmax_, c_, p_, u_, q_, w_, nprod_, ntlop_, psize_] := (R
= 2*Pi/w; g[{r_, d_}] := {x[R],v[R]} /. Flatten[NDSolve[{v'[t] == - c*v[t] - p*x[t]/(1-
u*x[t]^2) + q*Cos[w*t], x'[t] == v[t], x[0] == r, v[0] == d}, {x, v}, {t, 0,R}, MaxSteps -
> Infinity, MaxStepSize -> Infinity, Method -> {"ExplicitRungeKutta", "StiffnessTest" ->
False}, StartingStepSize -> stepsize]];
lp=ListPlot[Drop[NestList[g,{r,d},ntlop+ nprod],nprod], PlotStyle -> {PointSize[psize],
Hue[0]}, PlotRange -> {{xtmin, xmax}, {vmin, vmax}}, Frame -> True, FrameLabel
Ë {"posição","velocidade"}, Axes -> True]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,450 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.450;
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
Clear[q]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,460 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.460;
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
Clear[q]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,470 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.470;
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
```

```
Clear[q, psize]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,511 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.511;
```

```
psize = 0.003;
```

```
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
```

```
Clear[q, psize]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,536 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.536;
```

```
psize = 0.015;
```

```
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
```

```
Clear[q]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,557 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.557;
```

```
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
```

```
Clear[q]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,596 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.596;
```

```
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
```

```
Clear[q, psize]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,640 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.640;
psize = 0.003;
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
Clear[q, psize]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,700 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.700;
psize = 0.015;
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
Clear[q]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,740 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.740;
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
Clear[q]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,812 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.812;
poincare[xtmin, xmax, vmin, vmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]
Clear[q, psize]
```

Gráfico da seção de Poincaré da velocidade  $v(t)$  em decímetro por segundo versus a posição  $x(t)$  em decímetro para  $q = 0,835 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.835;
```

```
psize = 0.003;  
poincare[xtmin, xtmax, vtmin, vtmax, c, p, u, q, w, nprod, ntlop, psize]  
Clear[q, tmin]
```

## Apêndice F

### Transformadas de Fourier

O programa mostrado a seguir quando executado no Mathematica 5.2 exibe os gráficos do espectro de frequência da posição do fio oscilante, onde o parâmetro  $q$  foi definido conforme os valores dados no capítulo 4. Dessa maneira nesse programa definimos a função `espectro[Ç, tmin, tmax]`, onde  $\Ç$  tem o papel de nomear a função integradora, definida no apêndice A, para construção dos espectros de frequências usando a transformada de Fourier para um instante de tempo mínimo  $tmin$  até um máximo  $tmax$ .

Gráficos do espectro de frequência para diferentes valores de  $q$ .

Definição da função geradora dos gráficos do espectro de frequência para vários valores de  $q$ .

```
espectro[Ç_, tmin_, tmax_] := (lista1 = Partition[Flatten[N[Table[{t, Evaluate[(x[t] /. Ç)}],
{t, tmin, tmax, tmax/2048}]]], 2];Length[lista1];dado = Transpose[lista1];lista2 =
dado[[1]];lista3=dado[[2]];Val=(Max[lista2]-Min[lista2])/N;Valorn=Val/Length[lista2]
//N;alcan=Range[0,1/Valorn-1/Val,1/Val];lista4=Fourier[lista3];
lista5= lista4/Sqrt[Length[lista3]] // Chop; graf = Transpose[{alcan, Log[Abs[lista5]]}];
ListPlot[graf, PlotRange -> {{0, 0.05}, {-10, -0.05}},
FrameLabel È {"frequência","amplitude"}, Axes -> True, PlotStyle -> {Hue[0.8]},
PlotJoined -> True,Frame -> True])
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,450 \text{ dms}^{-2}$ .

```
tmin = 45.6;
q = 0.450;
osciladorespectro1 = sol[q, tmax];
espectro[osciladorespectro1, tmin, tmax];
```

```
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,460 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.460;  
osciladorespectro2 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro2, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,470 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.470;  
osciladorespectro3 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro3, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,511 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.511;  
osciladorespectro4 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro4, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,536 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.536;  
osciladorespectro5 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro5, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,557 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.557;  
osciladorespectro6 = sol[q, tmax];
```

```
espectro[osciladorespectro6, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,596 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.596;  
osciladorespectro7 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro7, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,640 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.640;  
osciladorespectro8 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro8, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,700 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.700;  
osciladorespectro9 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro9, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,740 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.740;  
osciladorespectro10 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro10, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,812 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.812;
```

```
osciladorespectro11 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro11, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

Gráfico do espectro de frequência para  $q = 0,835 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.835;  
osciladorespectro12 = sol[q, tmax];  
espectro[osciladorespectro12, tmin, tmax];  
Clear[q]
```

## Apêndice G

### Expoentes de Lyapunov

O programa mostrado a seguir adaptado e retirado de (SANDRI, 1996, p.78-84) quando executado no Mathematica 5.2, exibe os gráficos dos expoentes de Lyapunov, onde o parâmetro  $q$  foi definido conforme os valores dados no capítulo 4.

Definição dos parâmetros de controle 3.

```
T=0.05;
K=100000;
trans=200;
```

Gráficos dos expoentes de Lyapunov para diversos valores de  $q$ .

Definição da função geradora dos gráficos dos expoentes de Lyapunov para diferentes valores de  $q$ .

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
Norm[x_]:=Sqrt[x.x]
JacobianMatrix[funs_List,vars_List]:=Outer[D,funs,vars]
RKStep[f_,y_,y0_,dt_]:=Module[{k1,k2,k3,k4},k1=dt N[f/.Thread[yËy0]];
  k2=dt N[f/.Thread[yËy0+k1/2]];
  k3=dt N[f/.Thread[yËy0+k2/2]];
  k4=dt N[f/.Thread[yËy0+k3]];
  y0+(k1+2 k2+2 k3+k4)/6]

IntVarEq[F_List,DPhi_List,x_List,Phi_List,x0_List,Phi0_List,{t1_,dt_}]:=
Module[{n,f,y,y0,yt},n=Length[x0];
  f=Flatten[Join[F,DPhi]];
```

```

y=Flatten[Join[x,Phi]];
y0=Flatten[Join[x0,Phi0]];
yt=Nest[RKStep[f,y,#,N[dt]]&,N[y0],Round[N[t1/dt]]];
{First[#],Rest[#]}&@Partition[yt,n]]

```

```

LyapunovDimension[x_]:=Module[{l,suml,j},l=Sort[x,Greater];
suml=Rest[FoldList[Plus,0,l]];
If[Last[suml]>0,Message[LCE::pos];Return[$Failed]];
j=Last[Position[suml,_?Positive]];
First[j-suml[[j]]/l[[j+1]]]]

```

```

ConvergencePlot[x_List]:=Show[Map[ListPlot[#,PlotJoined->True,PlotStyle->{Hue[0.7]},
DisplayFunction->Identity]&,Transpose[x]],Frame->True,FrameLabel->{"passos","LCEs"}
,DisplayFunction->$DisplayFunction]

```

```

LCEsC[f_,initcond_,T_,K_,trans_:0,stepsize_:0.02,opts___Rule]:=Module[{opt,n,a,b,x,x0,
Phi,DPhi,V0,s,W,norms,lcelist,lces},opt=LCEsPlot/.{opts}/.Options[LCEsC];
n=Length[initcond];
x=Array[a,n];
Phi=Transpose[Array[b,{n,n}]];
DPhi=Phi.Transpose[JacobianMatrix[f[x],x]];
x0=Nest[RKStep[f[x],x,#,N[stepsize]]&,N[initcond],Round[N[trans/stepsize]]];
V0=IdentityMatrix[n];
s={};
Do[{x0,V0}=IntVarEq[f[x],DPhi,x,Phi,x0,V0,{T,stepsize}];
W=GramSchmidt[V0,Normalized->False];
norms=Map[Norm,W];
s=Append[s,norms];
V0=W/norms,{K}];
If[opt,lcelist=Rest[FoldList[Plus,0,Log[s]]]/(T Range[K]);
ConvergencePlot[lcelist];
lces=Sort[Last[lcelist],Greater],lces=Sort[Apply[Plus,Log[s]]/(T K),Greater];
{lces,LyapunovDimension[lces]}]

```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,450 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.450;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Ë True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,460 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.460;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Ë True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,470 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.470;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Ë True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,511 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.511;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Ë True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,536 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.536;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Ë True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,557 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.557;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Æ True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,596 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.596;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Æ True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,640 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.640;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Æ True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,700 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.700;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Æ True]
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,740 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.740;
eletromagnetico[{x_,y_,t_}]:= {y,- c*y- p*x/(1 - u*x^2)+q*Cos[w*t],w}
LCEsC[eletromagnetico,{r,d,0},T,K,trans,stepsize,LCEsPlot Æ True]
```

```
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,812 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.812;
```

```
eletromagnetico[{x_,y_,t_}] := {y, -c*y - p*x/(1 - u*x^2) + q*Cos[w*t], w}
```

```
LCEsC[eletromagnetico, {r,d,0}, T, K, trans, stepsize, LCEsPlot Æ True]
```

```
Clear[q]
```

Gráfico dos expoentes de Lyapunov para  $q = 0,835 \text{ dms}^{-2}$ .

```
q = 0.835;
```

```
eletromagnetico[{x_,y_,t_}] := {y, -c*y - p*x/(1 - u*x^2) + q*Cos[w*t], w}
```

```
LCEsC[eletromagnetico, {r,d,0}, T, K, trans, stepsize, LCEsPlot Æ True]
```

```
Clear[q]
```

## Apêndice H

### Diagrama de bifurcação

O programa abaixo, retirado de (WEISSTEIN, 2003, p.1-4), quando executado no Mathematica 5.2 exibe os gráficos do diagrama de bifurcação, onde o parâmetro  $q$  deve variar de 0,450 até 0,835. Assim, definimos nesse programa a função `bifurcation[qmin,qmax,nq,xmin,xmax,p,u,c,w,ndrop,nplot,psize]` que irá construir o gráfico da posição  $x$ , em um intervalo de  $x_{\min}$  até  $x_{\max}$ , versus o parâmetro de bifurcação  $q$  indo de  $q_{\min}$  até  $q_{\max}$ . Já  $p,u,c,w$  são as constantes da equação diferencial, enquanto que `ndrop` e `nplot` possuem a mesma função de `nprod` e `ntlop`, definidos no apêndice D. O mesmo acontece com `psize`.

Definição dos parâmetros de controle 4.

```
xmin=-0.2;
xmax=1;
qmin=0.450;
qmax=0.835;
nq=400;
ndrop=2500;
nplot=600;
psize=0.003;
```

Gráfico do diagrama de bifurcação.

Definição da função geradora do gráfico do diagrama de bifurcação.

```
bifurcation[qmin_,qmax_,nq_,xmin_,xmax_,p_,u_,c_,w_,ndrop_,nplot_,psize_] := (
  R=2*Pi/w;g[{r_,d_}] := {x[R],v[R]}/.
  Flatten[NDSolve[{v'[t] == - p*x[t]/(1 - u*x[t]^2) - c*v[t] + q*Cos[w*t],
```

```

x'[t] := v[t], x[0] := r, v[0] := d,
{x, v}, {t, 0, R}, MaxSteps -> Infinity, MaxStepSize == Infinity,
Method == {"ExplicitRungeKutta", "StiffnessTest" == False}, StartingStepSize == stepsize]; f[{x
_, y_}] := {q, x};
ListPlot[Flatten[Table[Map[f, Drop[NestList[g, {r, d}, nplot + ndrop], ndrop]],
{q, qmin, qmax, (qmax - qmin) / nq}], 1],
PlotStyle == {PointSize[psize], Hue[0]}, PlotRange == {{qmin, qmax}, {xmin, xmax}},
Frame == True, FrameLabel == {"parâmetro de bifurcação q", "posição x do fio
oscilante"}, AxesOrigin == {qmin, xmin},
Axes -> True];)

bifurcation[qmin, qmax, nq, xmin, xmax, p, u, c, w, ndrop, nplot, psize]

```