



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Dienes de Lima Brandão

Sobre o Caos de Devaney e Implicações

São José do Rio Preto
2019

Dienes de Lima Brandão

Sobre o Caos de Devaney e Implicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Weber Flávio Pereira

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2019

B817o Brandão, Dienes de Lima
Sobre o Caos de Devaney e Implicações / Dienes de Lima Brandão.
-- São José do Rio Preto, 2019
76 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientador: Weber Flávio Pereira

1. Análise. 2. Geometria. 3. Topologia. 4. Sistemas Dinâmicos. 5.
Caos de Devaney. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Dienes de Lima Brandão

Sobre o Caos de Devaney e Implicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira
Orientador

Prof. Dr. Durval José Tonon
UFG - Câmpus Samambaia

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
22 de outubro de 2019

*Dedico este trabalho a Nossa Senhora da Conceição Aparecida, que misteriosamente
sempre se faz presente em minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela oportunidade concedida.

À minha família, meus pais Aparecida, Mario e minha irmã Daizy, por todo o carinho, incentivo, esforço e sacrifícios para me fazer chegar a onde cheguei. Ao meu grande amor, minha esposa Manuella, que tanto me incentiva e apoia.

Ao meu orientador Weber, pela orientação habilmente conduzida, por me incentivar e por acreditar no meu trabalho. À banca examinadora, pelas contribuições inestimáveis para a consecução do trabalho.

A todos os meus amigos do departamento de Matemática, que tanto me ajudaram e dos quais sempre me lembrarei.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

*Se te venceres a ti, vencerás facilmente todo mais. A maior de todas as vitórias é
vencer-se cada um a si próprio.* KEMPIS, 2013

RESUMO

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos pode ser aplicada em diversas áreas da ciência, para, por exemplo, modelar fenômenos e problemas: Biológicos, da Física, Mecânica, Eletrônica, Economia, etc. Um sistema pode ser definido como um conjunto de elementos agrupados que mantêm alguma interação, de modo que existam relações de causa e efeito. Dizemos que é dinâmico quando algumas grandezas que compõem os elementos variam no tempo, sendo o tempo discreto quando a variável tempo é um número inteiro. Na busca de uma compreensão qualitativa e/ou topológica de um sistema, revela-se uma gama muito grande de movimentos que podem ser tanto regulares quanto caóticos. O termo “caos” só foi introduzido por James Yorke e TienYien Li em 1975, num artigo que simplificava um dos resultados da escola russa: o Teorema de Sharkovskii de 1964. Esporadicamente, antes e depois da introdução do termo, os sistemas caóticos apareciam na literatura aplicada, o mais famoso deles foi por Edward Norton Lorenz em 1963, que se propôs a modelar a convecção atmosférica. Em seus estudos ele descobriu que, para o seu modelo matemático, ínfimas modificações nas coordenadas iniciais mudavam de forma significativa os resultados finais, daí originou o termo popular do fenômeno (Efeito Borboleta). Mais tarde, em 1989, Robert Luke Devaney no seu livro: “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems” [11], definiu um sistema como caótico se ele tem uma dependência sensível das condições iniciais, é topologicamente transitivo e suas órbitas periódicas formam um conjunto denso. O principal objetivo deste trabalho consiste em estudar e apresentar a evolução da definição de Sistemas Dinâmicos Caóticos, de tempo discreto, no sentido estabelecido por Devaney.

Palavras-chave: Análise, Geometria e Topologia, Sistemas Dinâmicos, Caos de Devaney, Efeito Borboleta.

ABSTRACT

Dynamical Systems Theory can be applied in various areas of science, for example, to model phenomena and problems: biology, physics, mechanics, electronics, economics, etc. A system can be defined as a set of grouped elements that maintain some interaction. We say that it is dynamic when some magnitudes that make up the elements vary in time, being discrete time when the variable time is an integer. In the pursuit of a qualitative and/or topological understanding of a system, a wide range of movements that can be both regular or chaotic is revealed. The term “chaos” was only introduced by James Yorke and TienYien Li in 1975, in an article that simplified one of the results of the Russian school: the 1964 Sharkovskii’s Theorem. Sporadically, before and after the introduction of the term, chaotic systems appeared in applied literature, the most famous of which was by Edward Norton Lorenz in 1963, who set out to model atmospheric convection. In his studies he found that for his created system, minor modifications to the initial coordinates significantly changed the final results, hence the popular term of the phenomenon (Butterfly Effect). Later, in 1989, Robert Luke Devaney in his book, “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems” [11], defined a system as chaotic if it has a sensitive dependence on initial conditions, is topologically transitive, and its periodic orbits form a dense set. The main objective of this work is to study and present the evolution of the definition of discrete time Chaotic Dynamic Systems in the Devaney sense.

Keywords: Analysis, Geometry and Topology, Dynamic Systems, Chaos of Devaney, Butterfly Effect.

Lista de Figuras

Figura 2.1: Análise gráfica da função $f(x) = x^2 - 0.2$ com valor inicial $p = 1.1$	23
Figura 2.2: Análise gráfica da função $f(x) = x^2 - 0.2$ com valor inicial 1.5.	24
Figura 2.3: Retrato de Fase das órbitas da função $f(x) = x^2 - 0.2$	24
Figura 2.4: Análise Gráfica da função $f(x) = 3.3x(1-x)$, com valor inicial 0.2.	28
Figura 2.5: Análise Gráfica da função $f^2(x) = 10.89x(1-x)(1-3.3x(1-x))$, com valor inicial 0.1.	28
Figura 2.6: Nó atrator no ponto 0 para a função $f(x) = 0.5x$ e foco atrator no ponto 0 para a função $f(x) = -0.5x$	29
Figura 2.7: Análise gráfica da função $f(y) = y^2$, com valor inicial $x = -0.75$	30
Figura 2.8: Análise gráfica da função $f(x) = x^3$, com valor inicial $x = 0.95$	30
Figura 2.9: Análise gráfica da função $f(x) = -x^3$, com valor inicial $x = 0.95$	30
Figura 2.10: Nó repulsor no ponto 0 para a função $f(x) = 1.55x$	32
Figura 2.11: Foco repulsor no ponto 0 para a função $f(x) = -1.55x$	32
Figura 2.12: Gráficos das funções $y = x$, $y = F_\mu(x)$ e $y = p_\mu$ quando (a) $\mu = 1$, (b) $\mu = 1.3$, (c) $\mu = 1.6$ e (d) $\mu = 2$	35
Figura 2.13: Em azul, gráfico da função, $F_\mu^2(x) = \mu^2x(1-x)(1-\mu x(1-x))$, com $p_1 = p_\mu$, $p' = \hat{p}_\mu$ e $2 < \mu < 3$	36
Figura 2.14: Análise gráfica da função $F_5(x) = 5x(1-x)$, com valor inicial $x = 0.199$	38
Figura 2.15: Gráfico da função, $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, com $\mu > 4$ e intervalo A_0	38
Figura 2.16: Gráficos de F_μ^n para $n=2, 3, 5$ e 7 assim como os respectivos pontos periódicos.	39
Figura 2.17: Gráfico da função $y = F'_\mu(x) $ para $\mu > 2 + \sqrt{5}$	40
Figura 4.1: Gráfico das funções $y = f(x)$ e $y = f^2(x)$	61
Figura 4.2: Gráficos das funções $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$ e $f^5(x)$	63
Figura 4.3: Gráfico da função f	64
Figura 4.4: Gráficos da função $T(x)$ e de suas segunda e terceira iterada $T^2(x)$ e $T^3(x)$	66
Figura 4.5: Gráficos das funções $F(x)$ e das suas segunda, terceira e quarta iterada $F^2(x)$, $F^3(x)$ e $F^4(x)$	67

Sumário

1	Introdução	19
2	Dinâmica Discreta	21
2.1	Definições Elementares	21
2.2	Hiperbolicidade	25
2.3	Entropia informacional de Shannon	33
2.4	A Família Quadrática	34
2.4.1	A construção de um Conjunto de Cantor	37
3	A Dinâmica Simbólica	43
3.1	Definições Preliminares	43
3.2	Conjugação Topológica	46
3.3	Definição de Caos de Devaney	49
4	Equivalências no Caos de Devaney	55
4.1	Transitividade e densidade implicam sensitividade	55
4.2	Demais Equivalências no Caos de Devaney	58
4.3	Em intervalos, a transitividade implica caos	59
4.4	Uma definição alternativa para transitividade	63
4.5	Uma nova definição de Caos	70
5	Conclusão	73
	Referências	75

1 Introdução

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos teve seus primórdios já no século XVI, nos trabalhos de Mecânica Celeste escritos por Johannes Kepler (1571-1628). Com as contribuições de Isaac Newton (1643-1727) à modelagem matemática, por meio da formalização da Mecânica Clássica, abriu-se espaço para uma sofisticação no aparato matemático que modela fenômenos mecânicos, culminando nos trabalhos de Lagrange (1736-1813) e Hamilton (1805-1865), que definiram a teoria da Mecânica Clássica em um contexto matemático, que essencialmente é o mesmo utilizado nos dias atuais. Já o matemático francês Henri Poincaré (1854-1912), considerado um dos criadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, introduziu muitos dos aspectos do estudo qualitativo [8].

Um sistema pode ser definido como um conjunto de elementos agrupados que mantêm alguma interação, de modo que existam relações de causa e efeito, por exemplo: Júpiter e seus satélites, a situação financeira de uma família, o ecossistema de um mangue, etc. Agora, um sistema é dinâmico quando algumas grandezas que compõem os elementos variam no tempo, por exemplo: a equação da onda, a equação do calor, a atividade dos neurônios do córtex visual, os gastos com vestuário, os modelos de crescimento populacional, o número de caranguejos fêmeas (no caso do mangue), etc.

No fim do século XIX, Poincaré, ao estudar o problema dos três corpos e a estabilidade do sistema solar, proposto pelo rei Oscar II da Suécia, em 1886, deparou-se com dificuldades analíticas intransponíveis na determinação exata das curvas contínuas. Basicamente, o problema pode ser descrito da seguinte forma: dados três corpos de massa m_1 , m_2 e m_3 que se movem sobre mútua atração gravitacional e sabendo suas condições iniciais, posição e velocidade, o que se deseja é determinar os valores dessas grandezas no tempo futuro. Como o movimento do problema era descrito por meio de três EDO's, achou, então, conveniente substituir o estudo das órbitas, de fluxo contínuo no tempo, por órbitas discretas, no qual o tempo aumentava por saltos regulares, de onde surgiu esta nova teoria [8] e [15].

O tempo é discreto quando a variável tempo é um número inteiro. Vários sistemas são representados em termos de equações de tempo discreto e mesmo quando não são, muitas vezes é possível e conveniente reescrevê-los de tal forma. Sistemas dinâmicos discretos são importantes em todos os ramos das Ciências, devido à sua capacidade de modelar fenômenos naturais que se comportam de maneira caótica, por exemplo, o qual será um dos enfoques desse trabalho [15].

Certamente, Poincaré vislumbrou a existência de caos, com seus estudos sobre o problema dos três corpos. Em 1903, escreveu que “pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final, um pequeno erro na entrada produzirá um erro enorme na saída. Previsão torna-se impossível ...” ([15], pg. 21-22). Tempos depois, no início dos anos 60, Stephen Smale (1930-...),

nas areias de Copacabana, abriu as portas para uma nova era da teoria dos sistemas dinâmicos, ao explorar a descoberta de Poincaré, do movimento complexo no problema restrito dos três corpos, ele desenvolveu um sistema conhecido como a “Ferradura de Smale” e mostrou que, embora seja um sistema determinístico, possui traços aleatórios. Deste modo, outros exemplos de sistemas determinísticos com traços de aleatoriedade foram desenvolvidos pelas escolas americana e russa de dinâmica e, assim, uma teoria geral começou a emergir [15] e [20].

Uma das pedras angulares no desenvolvimento da dinâmica caótica é o artigo de 1964 [18] “*Coexistence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*” de Oleksandr Mykolayovych Sarkovskii (1936-...). Contudo, o termo “caos” só foi introduzido por James Yorke (1941-...) e TienYien Li (1945-...) em 1975, no artigo [14] “*Period three implies chaos*” que simplificava um dos resultados da escola russa, o Teorema de Sharkovskii de 1964, o qual descrevia um padrão nas soluções periódicas de um sistema dinâmico discreto.

Esporadicamente, antes e depois do artigo de James Yorke e TienYien Li, os sistemas caóticos apareciam na literatura aplicada, o mais famoso deles foi introduzido por Edward Norton Lorenz (1917-2008) em 1963, que se propôs a modelar a convecção atmosférica. Produzindo equações com até três variáveis, que se aproximassem das equações para o fenômeno em questão e resolvendo-as numericamente, descobriu que a solução oscilava de maneira irregular. Descobriu, também, que se as mesmas equações são resolvidas usando diferentes valores iniciais com diferenças mínimas entre si, essas diferenças são amplificadas até que as soluções sejam completamente diferentes. Daí originou o termo popular para o fenômeno; “O Efeito Borboleta” [20].

Durante as décadas de 1970 e 1980, o interesse pela dinâmica caótica explodiu e várias tentativas foram feitas para dar um significado matematicamente preciso à noção de caos. Trabalhos destacados nesse período são os livros de Collet e Eckmann [9] “*Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*” de 1980; de 1989 [1] “*Dynamics of One-dimensional Mappings*” escrito por Sarkovskii, Kolyada, Sivak e Fedorenko e as notas da aula de 1992 [7] “*Dynamics in One Dimension*” de Block e Coppel. Contudo, a definição que se tornou mais popular surgiu em 1986, com Robert Luke Devaney (1948-...), em seu livro: “*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*” [11], definiu um sistema como caótico se ele tem uma dependência sensível às condições iniciais, é topologicamente transitivo e suas órbitas periódicas formam um conjunto denso.

Portanto, existem várias definições de Caos, para um estudo sobre três delas veja [3]. Contudo, o principal objetivo deste trabalho consiste em estudar e apresentar a evolução da definição de Sistema Dinâmico Caótico, no sentido apresentado por Devaney, além de apresentar alguns conceitos e definições elementares, necessários para uma melhor compreensão sobre o assunto. Para tanto, apresentaremos, inicialmente, alguns conceitos de dinâmica discreta tendo em vista o desenvolvimento de premissas, as quais nos guiarão. No Capítulo 2, iniciaremos o tema principal, de forma indireta, por meio do desenvolvimento e a demonstração de um sistema caótico. Por fim, no Capítulo 3, vamos de fato estudar a evolução da definição do Caos proposto por Devaney, até praticamente os dias atuais.

2 Dinâmica Discreta

Nesse capítulo, abordaremos alguns conceitos da dinâmica discreta, visando estabelecer uma base adequada para desenvolver os tópicos seguintes. Serão apresentados alguns resultados importantes sobre o assunto em questão e veremos o caso da família quadrática, que servirá, tanto como exemplo dos resultados anteriormente citados, quanto para motivação de discussões que virão a seguir.

Para tal, serão utilizadas algumas definições e conceitos básicos de topologia geral, como: espaços métricos, métrica; conjuntos abertos, fechados e densos; interior e fecho de um conjunto; convergência de sequências e compacidade. Vamos, também, usar a definição clássica de bijetividade, continuidade, homeomorfismo e difeomorfismo. Todas essas definições podem ser encontradas em [12] e [16]. Por fim, este capítulo foi baseado em [11].

2.1 Definições Elementares

Nesta seção, como o próprio título diz, abordaremos definições e conceitos elementares da dinâmica discreta, como órbita, pontos fixos e periódicos. Ainda, apresentaremos ferramentas valiosas, que são utilizadas nas análises de sistemas dinâmicos e finalizaremos com um exemplo, importante para este trabalho.

Observação 2.1. Para este trabalho, seja $f : M \rightarrow M$ uma função, onde M é um espaço métrico, definimos

$$\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x) = f^n(x),$$

onde $\circ$ é a composição usual e $f^n(x)$ é a n -ésima iterada de f em x , ou simplesmente a n -ésima iterada de x . Por fim, se $f^{-1}(x)$ existir, então definimos

$$\underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{n \text{ vezes}}(x) = f^{-n}(x).$$

Definição 2.2. A órbita de um ponto x_0 pela função f consiste da sequência de pontos gerada pelas sucessivas iteradas de f , a partir de uma condição inicial x_0 . Assim, essa sequência é formada pelos pontos x_0 , $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$, etc. A órbita de x_0 , será denotado por $O_f(x_0)$.

Definição 2.3. Chamamos de pontos fixos os pontos que representam as soluções estacionárias, em outras palavras, é onde o estado do sistema permanece constante. Isso significa que:

$$f(x) = x.$$

Note que a órbita de um ponto fixo x_0 é uma sequência constante $(x_0, x_0, x_0, \dots)$. Qualquer outro ponto x , que não seja o ponto fixo é chamado de ponto *ordinário* ou ponto *regular*.

Proposição 2.4. Se $h(x) = f^n(x)$ então $h'(x) = f'(f^{n-1}(x)) \cdot f'(f^{n-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Demonstração. De fato, basta aplicarmos a regra da cadeia sucessivamente. $\square$

Definição 2.5.

- a. Um ponto x é um ponto periódico para f se $f^n(x) = x$, para algum $n > 0$;
- b. Se x é tal que $f^n(x) = x$ e $f^k(x) \neq x$ para todo $k < n$, então ele é dito periódico de período n ;
- c. O conjunto desses pontos, gerados pelo ponto inicial x , é chamado de órbita periódica de período n , e é denotado por $Per_n(f)$, ou seja,

$$Per_n(f) = \{x : f^n(x) = x \text{ e } f^k(x) \neq x, \forall k < n\}.$$

Exemplo 2.6. A aplicação $f(x) = x^2 - 1$ tem como pontos fixos $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e tem como pontos periódicos de período 2 os pontos 0 e -1 .

De fato,

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Para os pontos periódicos temos que $f^2(x) = x^4 - 2x^2$, logo

$$f^2(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 - x) = 0.$$

Note que as raízes do primeiro fator dessa equação correspondem aos pontos fixos e as raízes do segundo fator aos pontos periódicos de período 2, a saber 0 e -1 .

Definição 2.7. Seja p um ponto periódico de período n . Um ponto x é assintótico futuro ao ponto p se $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^{in}(x) = p$. O conjunto estável de p , denotado por $W^s(p)$, consiste em todos os pontos assintótico futuro a p .

Se p é não periódico, ainda podemos definir os pontos assintótico futuro, exigindo que $|f^i(x) - f^i(p)| \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Ainda, se f é invertível, podemos chamar de assintótico passado os pontos que satisfazem a definição acima para f^{-1} , com $i \rightarrow -\infty$. O conjunto desses pontos é denotado por $W^u(p)$ e chamado de conjunto instável de p .

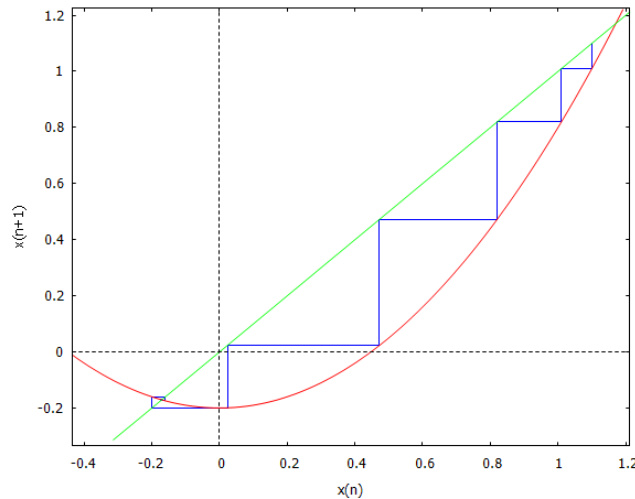
Exemplo 2.8. Seja $f(x) = x^3$. Então $W^s(0)$ é o intervalo aberto $(-1, 1)$. $W^u(1)$ é a reta real positiva e $W^u(-1)$ a reta real negativa.

Descreveremos a seguir uma ferramenta muito útil na compreensão e estudo de algumas órbitas de sistemas dinâmicos discretos, a saber, a *Análise Gráfica*.

Definição 2.9. Chamamos de *Análise Gráfica* a técnica utilizada para estudar órbitas de pontos em sistemas dinâmicos discretos. Tal técnica consiste em traçarmos, em um mesmo plano cartesiano, o gráfico de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e a diagonal $\Delta = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$. Para analisarmos a órbita de p por f , representamos o ponto inicial (p, p) na diagonal e, a partir desse ponto, traçamos uma vertical, essa vertical cruza o gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. A partir desse novo ponto, traçamos uma horizontal até a diagonal, obtendo o ponto $(f(p), f(p))$. Repetimos esse processo novamente, considerando agora como ponto inicial $(f(p), f(p))$ e após algumas (ou infinitas) repetições desse procedimento, temos uma representação (sob a diagonal Δ) da órbita do ponto p pela função f .

Exemplo 2.10. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2 - 0.2$. Para $p = 1.1$ obtemos o gráfico da Figura 2.1 e vemos, com a ajuda da análise gráfica, que a órbita de p consiste de uma sequência de pontos que converge para um valor x_1 negativo, e esse valor corresponde a um dos pontos de interseção entre o gráfico da função $f(x) = x^2 - 0.2$ e a diagonal $\Delta = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$. Resolvendo a equação $f(x) = x$, obtemos que esse valor é $x_1 = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$. Note que essa equação possui uma outra solução $x_2 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$ e tais pontos correspondem aos pontos fixos de f .

Figura 2.1: Análise gráfica da função $f(x) = x^2 - 0.2$ com valor inicial $p = 1.1$.

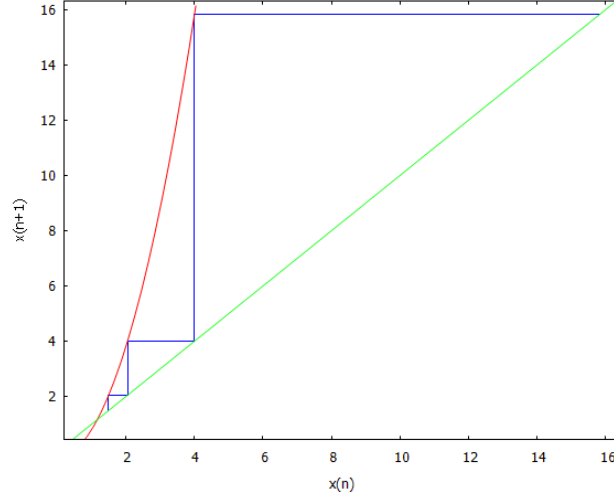


Fonte: Figura elaborada pelo autor.

No gráfico, podemos observar que, apesar do valor inicial p estar muito perto do ponto fixo x_2 , a órbita afasta-se desse ponto e tende para o ponto fixo x_1 . Inicialmente, uma justificativa geométrica para esse ocorrido é devido ao gráfico da função $f(x)$ se

encontrar abaixo da diagonal Δ , no intervalo (x_1, x_2) . Se usarmos um valor inicial à direita do ponto x_2 , por exemplo, $p = 1.5$, a órbita desse ponto pela f cresce rapidamente afastando-se para infinito conforme pode ser visto na Figura 2.2. Posteriormente, veremos uma justificativa algébrica para esse ocorrido (Proposição 2.26).

Figura 2.2: Análise gráfica da função $f(x) = x^2 - 0.2$ com valor inicial 1.5.



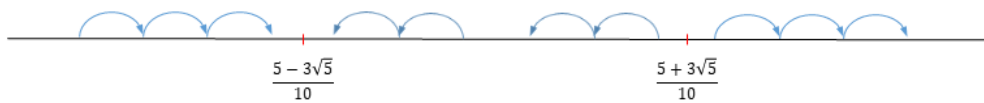
Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Dentro dos sistemas dinâmicos, um dos objetivos é tentar compreender o comportamento da maior quantidade de órbitas possíveis, em geral, mas isso nem sempre é possível. Das órbitas que compreendemos seu comportamento, podemos representá-las geometricamente, obtendo com isso, o que chamamos de *retrato de fase*.

Definição 2.11. *O Retrato de Fase é uma representação geométrica de todas as trajetórias de um sistema dinâmico em seu espaço domínio, podendo este ser a reta, o plano, etc. Para descrever um retrato de fase de um sistema na reta, as trajetórias estacionárias serão descritas com pontos e as demais trajetórias com setas, que indicam as posições desses pontos a cada iterado. Outros comportamentos podem ser observados, como estados estáveis e instáveis.*

Note que o retrato de fase revela algumas informações importantes, como se um ponto fixo ou periódico é atrator ou repulsor, definições estas que serão apresentadas na seção seguinte. A Figura 2.3 mostra o retrato de fase de $f(x) = x^2 - 0.2$ baseado um pouco na análise gráfica feita anteriormente.

Figura 2.3: Retrato de Fase das órbitas da função $f(x) = x^2 - 0,2$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Exemplo 2.12. Vejamos o caso da dinâmica da rotação $T_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$, com $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Essa dinâmica apresenta dois tipos de comportamento bem distintos, dependendo do valor de λ . Se λ é racional, ou seja, $\lambda = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, temos

$$T_\lambda^q(\theta) = \theta + q2\pi\lambda = \theta + q2\pi\frac{p}{q} = \theta + 2p\pi = \theta,$$

para todo $\theta \in S^1$.

Como consequência, temos que se λ é racional, então todo $\theta \in S^1$ é ponto periódico de período q . No caso de λ não ser racional, temos o resultado seguinte.

Teorema 2.13. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $T_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$, com $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$. Cada órbita de T_λ é densa em S^1 se λ é irracional.*

Demonstração. Seja $\theta \in S^1$. Os pontos da órbita de θ são distintos pois, se $T_\lambda^n(\theta) = T_\lambda^m(\theta)$, teríamos: $\theta + 2\pi n\lambda = \theta + 2\pi m\lambda$ o que nos dá $(n - m)\lambda = 0$ e daí $m = n$, já que λ é irracional. Portanto, o conjunto dos pontos formado pela órbita de θ é um conjunto com infinitos pontos.

Veja que, o fecho do conjunto $O_T(\theta) = \{T_\lambda^m(\theta); m \in \mathbb{N}\}$, é compacto, pois como $\overline{O_T(\theta)} \subset S^1$ é fechado em S^1 e S^1 é compacto, logo $\overline{O_T(\theta)}$ é compacto e, portanto, qualquer sequência $(T_\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{O_T(\theta)}$ admite uma subsequência $(T_\lambda^{q_k})_{k \in \mathbb{N}'} \subset \overline{O_T(\theta)}$ convergente. Sabemos, também, que toda sequência convergente em $\mathbb{R}^n$, e portanto em S^n , é de Cauchy, logo para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem $p, q \in \mathbb{N}'$ tais que $|T_\lambda^p(\theta) - T_\lambda^q(\theta)| < \varepsilon$. Suponha, sem perda de generalidade que $p > q$, então teremos um $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = p - q$, assim podemos afirmar que $|T_\lambda^k(\theta) - \theta| < \varepsilon$, pois

$$\begin{aligned} |T_\lambda^p(\theta) - T_\lambda^q(\theta)| &= |\theta + 2\pi p\lambda - \theta - 2\pi q\lambda| \\ &= |\theta + 2\pi(p - q)\lambda - \theta| \\ &= |(\theta + 2\pi k\lambda) - \theta| \\ &= |T_\lambda^k(\theta) - \theta|. \end{aligned}$$

Agora, vejamos que T_λ preserva a medida em S^1 . De fato,

$$\begin{aligned} |T_\lambda^k(\theta) - \theta| &= |(\theta + 2\pi k\lambda) - \theta| \\ &= |(\theta + 2\pi k\lambda) - \theta + 2\pi l\lambda - 2\pi l\lambda| \\ &= |\theta + 2\pi(k + l)\lambda - (\theta + 2\pi l\lambda)| \\ &= |T_\lambda^{k+l}(\theta) - T_\lambda^l(\theta)| \end{aligned} \quad ,$$

para qualquer $l \in \mathbb{N}$. Então, veja que podemos formar arcos, de medida menor que ε , que conectam θ à $T_\lambda^k(\theta)$, $T_\lambda^k(\theta)$ à $T_\lambda^{2k}(\theta)$ e assim por diante. Logo, os pontos $\theta, T_\lambda^k(\theta), T_\lambda^{2k}(\theta), T_\lambda^{3k}(\theta), \dots, T_\lambda^{nk}(\theta), \dots$, particionam S^1 por arcos de comprimento menor que ε . Assim, qualquer ponto $\varphi \in S^1$ está em um desses arcos, ou seja, $|\varphi - T_\lambda^{nk}(\theta)| < \varepsilon$ e temos que a órbita de $T_\lambda(\theta)$ é densa em S^1 . $\square$

2.2 Hiperbolicidade

Nesta seção, apresentaremos o conceito de hiperbolicidade. Aplicações com pontos periódicos hiperbólicos ocorrem em muitos sistemas dinâmicos e, além disso, fornecem

os tipos mais simples de comportamento periódico a serem analisados [11]. Nesta seção, vamos considerar a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.14. *Seja p um ponto periódico de período n . O ponto p é hiperbólico se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. E o número $(f^n)'(p)$ é chamado de multiplicador do ponto periódico.*

Exemplo 2.15. Considere o difeomorfismo $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$. Essa função tem três pontos fixos 0, 1 e -1 . Note que $f'(0) = 1/2$ e $f'(\pm 1) = 2$, assim, cada um desses pontos é hiperbólico.

A seguir, apresentaremos algumas proposições e exemplos sobre a estabilidade de funções, no que se refere ao comportamento destas em pontos fixos hiperbólicos. Veremos um critério que nos diz quando um ponto fixo hiperbólico atrai órbitas de pontos próximos a ele e, da mesma forma, veremos quando um ponto fixo hiperbólico repele órbitas de pontos próximos.

Proposição 2.16. *Seja p um ponto fixo hiperbólico de f , onde $f \in C^1$ e $|f'(p)| < 1$. Então, existe um intervalo aberto U , com $p \in U$, tal que se $x \in U$, então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p.$$

Demonstração. Como f é de classe C^1 , f' é contínua, daí como $|f'(p)| < 1$, pelo Teorema da Conservação de Sinal do Cálculo 1, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| < A < 1$ para todo $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. Então, considerando $U = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ e $x \in U$, aplicamos o Teorema do Valor Médio a f no intervalo I_0 de extremidades x e p , obtemos um ponto $c_0 \in I_0 \subset U$, tal que

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c_0)| \cdot |x - p| < A|x - p| < \varepsilon,$$

pois $|f'(x)| < A < 1$ para todo $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$.

Assim, $f(x) \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. E de forma análoga, temos que, ainda pelo Teorema do Valor Médio, considerando agora o intervalo I_1 de extremidades $f(x)$ e $f(p)$ contido em U , existe um $c_1 \in I_1$, tal que

$$\begin{aligned} |f^2(x) - p| &= |f(f(x)) - f(f(p))| \\ &= |f'(c_1)| \cdot |f(x) - p| < |f'(c_0)| \cdot |f'(c_1)| \cdot |x - p| < A^2|x - p| < \varepsilon, \end{aligned}$$

dessa forma, realizando esse passo n vezes, chegamos a

$$|f^n(x) - p| \leq A^n|x - p|$$

e, portanto, como $0 < A < 1$, então $A^n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e $f^n(x) \rightarrow p$, conforme queríamos provar. $\square$

Definição 2.17. *Um ponto fixo p com $|f'(p)| < 1$ é chamado de ponto fixo atrator.*

Observação 2.18. Segue que o intervalo $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ está contido no conjunto estável associado a p , $W^s(p)$.

Observação 2.19. Um resultado similar é verdadeiro para pontos periódicos hiperbólicos de período n , onde $f^n = \varphi$. Assumindo nesse caso que $|(\varphi)'(p)| < 1$.

Proposição 2.20. Se $|(f^n)'(p_0)| < 1$ então $|(f^n)'(p_i)| < 1$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$, onde $p_i = f^i(p_0)$, de tal forma que esses pontos formam a órbita de período n .

Demonstração. Temos que, pela Proposição 2.4,

$$(f^n)'(p_0) = f'(f^{n-1}(p_0)) \cdot f'(f^{n-2}(p_0)) \cdot \dots \cdot f'(f(p_0)) \cdot f'(p_0).$$

Como $p_i = f^i(p_0)$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$, então

$$(f^n)'(p_0) = f'(p_{n-1}) \cdot f'(p_{n-2}) \cdot \dots \cdot f'(p_1) \cdot f'(p_0). \quad (2.1)$$

Consideremos $(f^n)'(p_1) = f'(f^{n-1}(p_1)) \cdot f'(f^{n-2}(p_1)) \cdot \dots \cdot f'(f(p_1)) \cdot f'(p_1)$. Veja que $f^{n-1}(p_1) = f^{n-1}(f(p_0)) = f^n(p_0) = p_0$ e, de modo análogo, $f'(f^{n-i}(p_1)) = f'(f^{n-i+1}(p_0))$. Logo $(f^n)'(p_1) = f'(p_0) \cdot f'(f^{n-1}(p_0)) \cdot \dots \cdot f'(f^2(p_0)) \cdot f'(f(p_0))$ e daí

$$(f^n)'(p_1) = f'(p_0) \cdot f'(p_{n-1}) \cdot f'(p_{n-2}) \cdot \dots \cdot f'(p_1). \quad (2.2)$$

É clara a igualdade entre (2.1) e (2.2), portanto podemos afirmar que $|(f^n)'(p_1)| = |(f^n)'(p_0)| < 1$ e de forma análoga $|(f^n)'(p_i)| < 1$. □

Definição 2.21. Seja p um ponto hiperbólico e periódico, de período n com $|(f^n)'(p)| < 1$. O ponto p é chamado um ponto periódico atrator e a órbita é chamada de órbita atratora ou n -ciclo atrator.

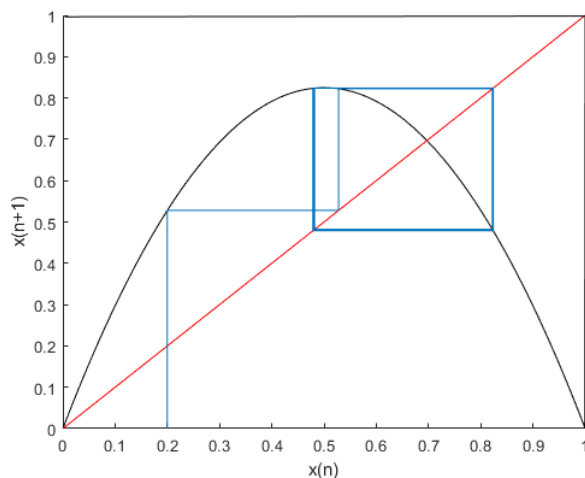
Para o exemplo seguinte, considere a função $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Vemos que os pontos periódicos de período 2 de f são $\frac{\mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}$.

Exemplo 2.22. No caso de f_μ para $\mu = 3.3$, temos $f(x) = 3.3x(1-x)$, assim

$$f^2(x) = 3.33(3.33x(1-x))(1-3.3x(1-x)),$$

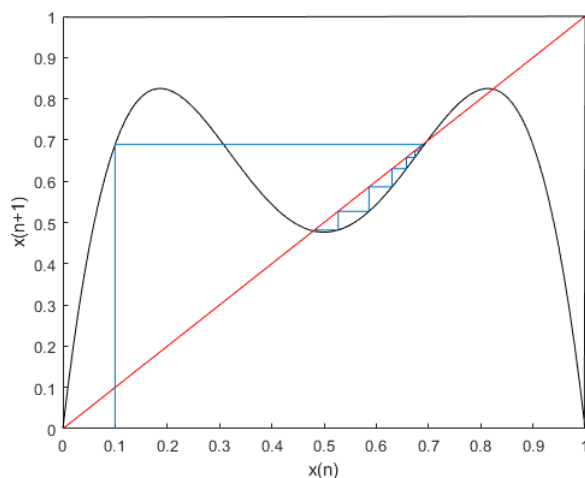
onde $f^2(0.479427) \cong 0.479427$, $(f^2)'(x) = 10.89 - 93.654x + 215.622x^2 - 143.748x^3$ e $|(f^2)'(0.479427)| = 0.29$. Logo $p = 0.479427$ é um ponto periódico atrator e isso pode se visto geometricamente nas figuras 2.4 e 2.5.

Figura 2.4: Análise Gráfica da função $f(x) = 3.3x(1 - x)$, com valor inicial 0.2.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 2.5: Análise Gráfica da função $f^2(x) = 10.89x(1 - x)(1 - 3.3x(1 - x))$, com valor inicial 0.1.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Um ponto periódico de período n pode estar em uma vizinhança onde a trajetória pela f^n de pontos tomados nessa vizinhança tende para esse ponto periódico. Essa vizinhança é chamada de *conjunto estável local* e denotado por W_{loc}^s . Podemos distinguir três diferentes tipos de pontos fixos atratores; aqueles onde $f'(p) = 0$, aqueles onde $0 < f'(p) < 1$ e, finalmente, os que satisfazem $-1 < f'(p) < 0$. O comportamento desses pontos fixos quando $f'(p) \neq 0$ pode ser visto pela Proposição 2.24 e pela análise gráfica das Figuras 2.6 e ???. O caso onde $f'(p) = 0$ a dinâmica pode ser um pouco mais diferente conforme Figuras 2.7 e 2.9.

Definição 2.23. Dizemos que um ponto fixo p de f , é um *nó atrator*, quando para pontos x quaisquer numa vizinhança de p , as sucessivas iteradas de f nesses pontos se

aproximam de p monotonamente e quando aproximam-se de p de maneira oscilatória, o chamamos de foco atrator.

Proposição 2.24. *Nas condições da Proposição 2.16, se $0 < f'(p) < 1$, então p é um nó atrator, e se $-1 < f'(p) < 0$, então p é um foco atrator.*

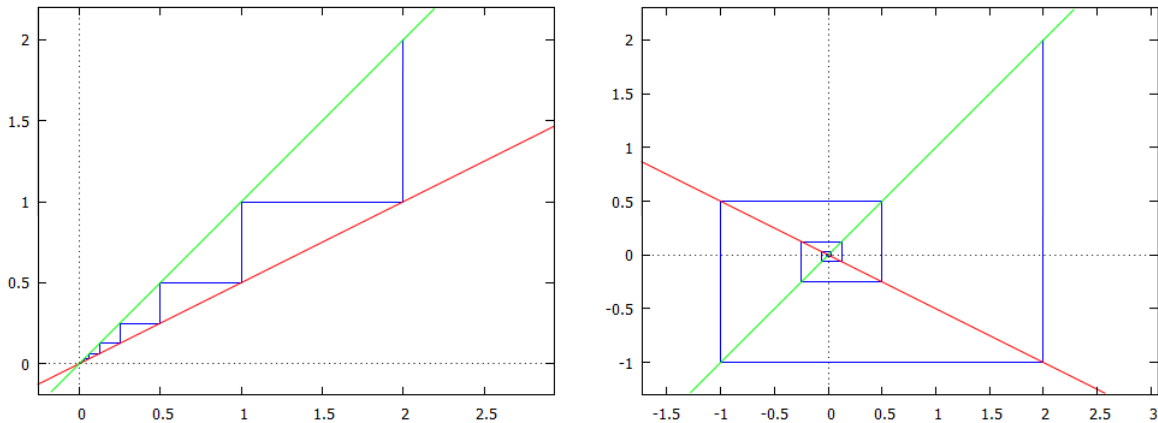
Demonstração. Veja que o intervalo aberto U da Proposição 2.16 foi escolhido com base no Teorema da Conservação de Sinal, onde para todo $x \in U$, temos que $0 < f'(x) < 1$ ($-1 < f'(x) < 0$), pois $0 < f'(p) < 1$ ($-1 < f'(p) < 0$). Agora, se $0 < f'(p) < 1$, vamos supor que x , um ponto inicial, se aproxima de p de maneira oscilatória, ou seja, $x < p$ e $f(x) > p$. Considerando o intervalo fechado $[x, p] \subset U$ e aplicando o Teorema do Valor Médio, sabemos que, existe $c \in (x, p)$ tal que $f'(c) = \frac{f(p) - f(x)}{p - x}$. Contudo,

$$\frac{f(p) - f(x)}{p - x} = \frac{p - f(x)}{p - x} < 0,$$

e daí temos que $f'(c) < 0$, com $c \in (x, p) \subset U$, o que contradiz o Teorema da Conservação de Sinal. Logo, se $x < p$ então $f(x) < p$, para todo $x \in U$, ou seja, p é um nó atrator. De forma análoga, podemos provar que se $x > p$ então $f(x) > p$, para todo $x \in U$ e se $-1 < f'(p) < 0$, então $x < p$ e $f(x) > p$ ($x > p$ e $f(x) < p$), ou seja, p é um foco atrator. $\square$

Podemos ver na Figura 2.6 abaixo alguns exemplos de pontos fixos dos tipos nó atrator e foco atrator, respectivamente.

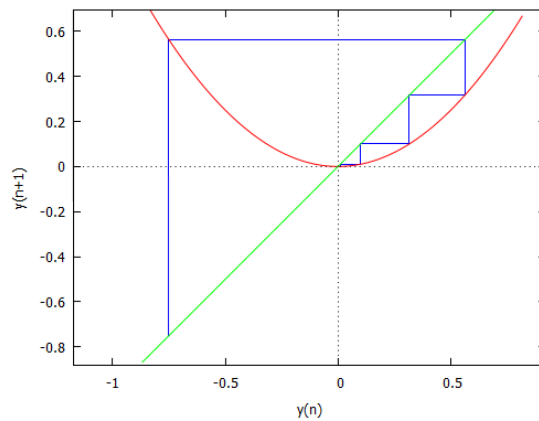
Figura 2.6: Nó atrator no ponto 0 para a função $f(x) = 0.5x$ e foco atrator no ponto 0 para a função $f(x) = -0.5x$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

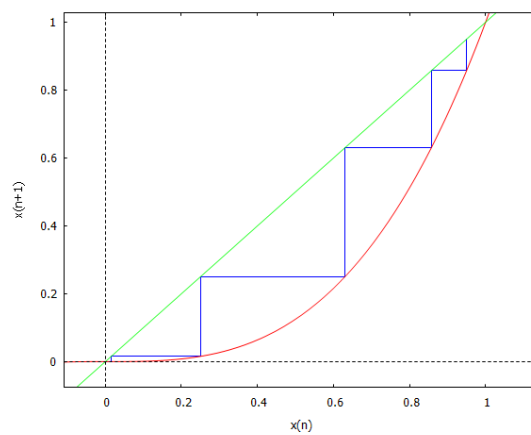
Observação 2.25. Veja que no caso em que $f'(p) = 0$, ocorre alguns diferentes comportamentos para a órbita de um ponto. Essa órbita tende a p , todavia, as iteradas de um ponto próximo a p pode se manter toda de um lado de p ou oscilar de lado, conforme pode ser visto nas análises gráficas das Figuras 2.7, 2.8 e 2.9. Em todos os casos temos 0 ponto fixo e $f'(0) = 0$.

Figura 2.7: Análise gráfica da função $f(y) = y^2$, com valor inicial $x = -0.75$.



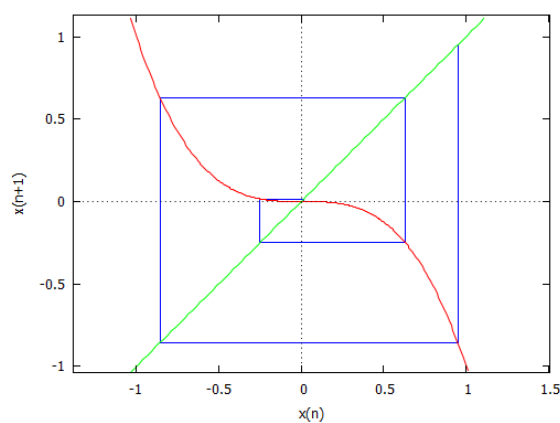
Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 2.8: Análise gráfica da função $f(x) = x^3$, com valor inicial $x = 0.95$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 2.9: Análise gráfica da função $f(x) = -x^3$, com valor inicial $x = 0.95$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Proposição 2.26. *Seja p um ponto fixo hiperbólico com $f \in C^1$ e $|f'(p)| > 1$. Assim, existe um intervalo aberto U contendo p tal que, se $x \in U$, $x \neq p$, então existe $k > 0$ tal que $f^k(x) \notin U$.*

Demonstração. De forma similar à Proposição 2.16, como f é de classe C^1 , existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| > 1$ para todo $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. Seja, então, $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) = U$. Como $|f'(x)| > 1$, para todo $x \in \overline{U}$, vamos tomar $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $1 < \beta < |f'(x)|$, para todo $x \in \overline{U}$. E, então, pelo Teorema do Valor Médio, considerando o intervalo $I_0 \subset [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$, de extremidades x e p , para um $x \neq p$ qualquer em U , existe um $c_0 \in I_0$, tal que

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c_0)| \cdot |x - p| > \beta |x - p|.$$

Caso $f(x) \notin U$, então já temos o que queríamos. Ao contrário, se $f(x) \in U$, então $f(x) \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. E de forma análoga, considerando agora o intervalo $I_1 \subset [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ de extremidades $f(x)$ e $f(p) = p$, temos ainda pelo TVM, que existe um $c_1 \in I_1$, tal que

$$\begin{aligned} |f^2(x) - p| &= |f^2(x) - f^2(p)| \\ &= |f(f(x)) - f(f(p))| \\ &= |f'(c_1)| \cdot |f(x) - f(p)| \\ &= |f'(c_1)| \cdot |f'(c_0)| \cdot |x - p| > \beta^2 |x - p|. \end{aligned}$$

Dessa forma, realizando esse passo n vezes, chegamos que

$$|f^n(x) - p| > \beta^n |x - p|. \quad (2.3)$$

Veja que o intervalo $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ tem comprimento 2ε e o intervalo I_n de extremidades $f^n(x)$ e p tem comprimento maior que $\beta^n |x - p|$. Como $\beta > 1$, $\beta^n \rightarrow +\infty$, logo existe $k > 0$ tal que $\beta^k |x - p| > 2\varepsilon$, ou seja, $f^k(x) \notin U$. $\square$

Observação 2.27. É errado acharmos que, devido a equação (2.3) e $\beta > 1$, que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = +\infty$. De fato, em alguns casos isso pode ocorrer, mas, em outros, a órbita pode se afastar do ponto fixo p e acabar por orbitar em um outro ponto fixo q ou alguma outra região distante de p .

Definição 2.28. *Um ponto fixo p com $|f'(p)| > 1$ é chamado de ponto fixo repulsor e a vizinhança descrita na Proposição 2.26 é chamada de conjunto local instável e denotamos por W_{loc}^u .*

Um resultado similar é verdadeiro para pontos periódicos hiperbólicos de período n , onde $f^n = \psi$. Assumindo nesse caso que $|(\psi)'(p)| > 1$.

Proposição 2.29. *Se $|(f^n)'(p_0)| > 1$ então $|(f^n)'(p_i)| > 1$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$, onde $p_i = f^i(p_0)$, de tal forma que esses pontos formam a órbita de período n .*

Demonstração. A prova é análoga à da Proposição 2.20. $\square$

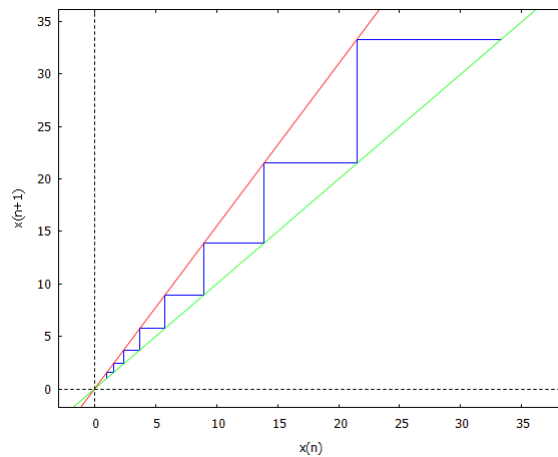
Definição 2.30. *Seja p um ponto hiperbólico e periódico, de período n , com $|(f^n)'(p)| > 1$. O ponto p é chamado um ponto periódico repulsor e a órbita é chamada de n -ciclo repulsor.*

Podemos distinguir em dois tipos diferentes os pontos fixos repulsores, quando $f'(p) > 1$ e quando $f'(p) < -1$.

Definição 2.31. *Seja p um ponto fixo de f , dizemos que p é um nó repulsor quando suas iteradas se afastam de p monotonamente e quando se afastam de p de maneira oscilatória, o chamamos de foco repulsor.*

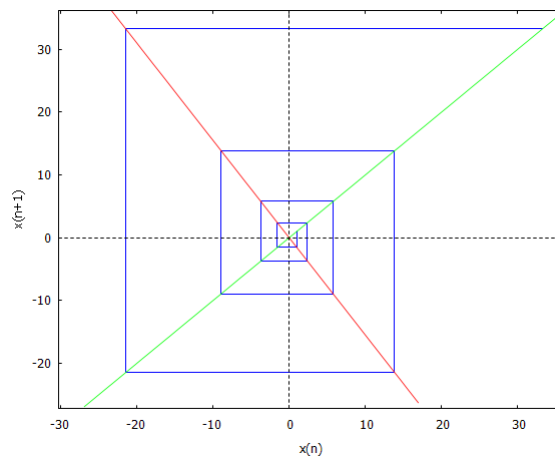
Observemos, nas figuras a seguir, o comportamento de um nó e um foco repulsor.

Figura 2.10: Nó repulsor no ponto 0 para a função $f(x) = 1.55x$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 2.11: Foco repulsor no ponto 0 para a função $f(x) = -1.55x$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Proposição 2.32. *Nas condições da Proposição 2.26, se $f'(p) > 1$, então p é um nó repulsor e, se $f'(p) < -1$, então p é um foco repulsor.*

Demonstração. A prova é análoga à da Proposição 2.24. $\square$

Os pontos periódicos hiperbólicos têm comportamento local que é governado pela derivada nos pontos periódicos, como vimos anteriormente. Contudo, isso não é verdade para pontos que não são hiperbólicos, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.33. Sejam as funções (a) $f(x) = x + x^3$, (b) $f(x) = x - x^3$ e (c) $f(x) = x + x^2$.

Note que todas satisfazem $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ mas, têm comportamentos diferentes próximas a 0. Na função (a) temos que o 0 é um ponto repulsor, na função (b) 0 é um ponto atrator e, para a função (c) o ponto 0 é repulsor pela esquerda, mas atrator pela direita.

Para os casos em que o ponto fixo revela-se não hiperbólico, pode-se tentar, por exemplo, determinar sua estabilidade ou pelo método direto de Lyapunov ou pela teoria da variedade central, veja [15].

2.3 Entropia informacional de Shannon

Para motivar a definição de entropia de Shannon (1916-2001), temos a seguinte situação, veja [15]. Suponha que ocorra um fato e que seja transmitida uma mensagem relatando sua ocorrência. Defini-se a quantidade de informação h contida nessa mensagem como o logaritmo da razão entre a probabilidade do evento da mensagem ter ocorrido (q) e a probabilidade da ciência do fato ocorrido pelo receptor antes da mensagem ser recebida (p). Logo, temos que

$$h = \log \left(\frac{q}{p} \right).$$

Em um canal sem interferências, o receptor tem certeza de que a mensagem recebida está correta, portanto $q = 1$ e a informação recebida h torna-se o logaritmo do inverso da probabilidade p , ou seja:

$$h = \log \left(\frac{1}{p} \right) = -\log(p).$$

Essa fórmula condiz com a noção de que a quantidade de informação aumenta quando a probabilidade da existência de uma tal mensagem tende a zero. Ainda, quando se sabe exatamente o que será transmitido, então a quantidade de informação recebida é nula, ou seja, $p = 1$ e daí $h = 0$.

Para o caso em que há N mensagens alternativas, cada qual com probabilidade de ocorrência p_j ($\sum_j p_j = 1$) e quantidade de informação h_j , então a quantidade média de informação H obtida por mensagem recebida é dado pela média ponderada dos h_j , isto é

$$H = -\sum_{j=1}^N p_j \log_2 p_j \quad (2.4)$$

Em Teoria da Informação é usual considerar log na base 2, isso porque praticamente todos os canais de informação são binários. Então, Shannon chamou H de *entropia informacional*. Existem ainda outras formas de se definir Entropia, para uma definição Topológica, entre outras, veja [17].

A Teoria da Informação aplica-se na representação de sistemas probabilísticos. Entretanto, a medida de entropia, em suas diversas definições, tem sido usada para caracterizar também sistemas dinâmicos, muitas vezes associada a ideia de caos e a tentativa de se medir caoticidade de uma função, veja [4]. Voltaremos a esse assunto no final do capítulo sobre Dinâmica Simbólica.

2.4 A Família Quadrática

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados, sobre a família quadrática. Esta família exibe muitos dos fenômenos que são cruciais na teoria geral de sistemas dinâmicos [11], como veremos a seguir.

A *família quadrática* que trataremos nesta seção é uma família a um parâmetro real de funções definida e denotada por $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, com $\mu \neq 0$.

Proposição 2.34. *Para a família F_μ , temos:*

1. $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ e $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$, quando $p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$;
2. $0 < p_\mu < 1$, se $\mu > 1$.

Demonstração. 1. Basta resolvermos as equações $F_\mu(x) = 0$ e $F_\mu(x) = x$ para obtermos as afirmações e o valor para p_μ .

2. Se $\mu > 1 \Rightarrow 0 < \mu - 1 < \mu \Rightarrow 0 < \frac{\mu - 1}{\mu} < 1 \Rightarrow 0 < p_\mu < 1$. □

A Proposição 2.34 nos diz que a família quadrática tem um ponto fixo sempre no ponto 0 e que o outro ponto fixo p_μ está no intervalo $(0, 1)$ para todo valor de $\mu > 1$. Veremos o comportamento das órbitas de pontos fora do intervalo $(0, 1)$ para a família F_μ .

Proposição 2.35. *Suponha que $\mu > 1$. Se $x < 0$, então $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. De forma similar, se $x > 1$, então $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Note que tanto para o intervalo $x < 0$ quanto $x > 1$, não há pontos fixos de F_μ . Se $x < 0$, então $-x > 0$, logo $(1 - x) > 1$ e daí, $\mu x(1 - x) < \mu x < x$ e $F_\mu(x) < x$. Logo $F_\mu^2(x) = \mu F_\mu(x)(1 - F_\mu(x)) < F_\mu(x) < x$ e, assim, temos que $F_\mu^n(x)$ é uma sequência monótona decrescente de pontos. Se $F_\mu^n(x)$ convergisse, então $F_\mu^n(x) \rightarrow p < 0$, pois $F_\mu^n(x) \notin (0, 1)$. Assim, como F_μ é contínua, teríamos

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) \Rightarrow p = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(F_\mu^{n-1}(x)) = F_\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^{n-1}(x)) = F_\mu(p).$$

Logo p é um ponto fixo de F_μ e $p < 0$, o que é um absurdo. Portanto, como $(F_\mu^n(x))$ é uma sequência monótona decrescente não convergente, então $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$.

Se $x > 1$, então $F_\mu(x) < 0$ e como já foi demonstrado, $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. □

Proposição 2.36. *Seja $1 < \mu < 3$.*

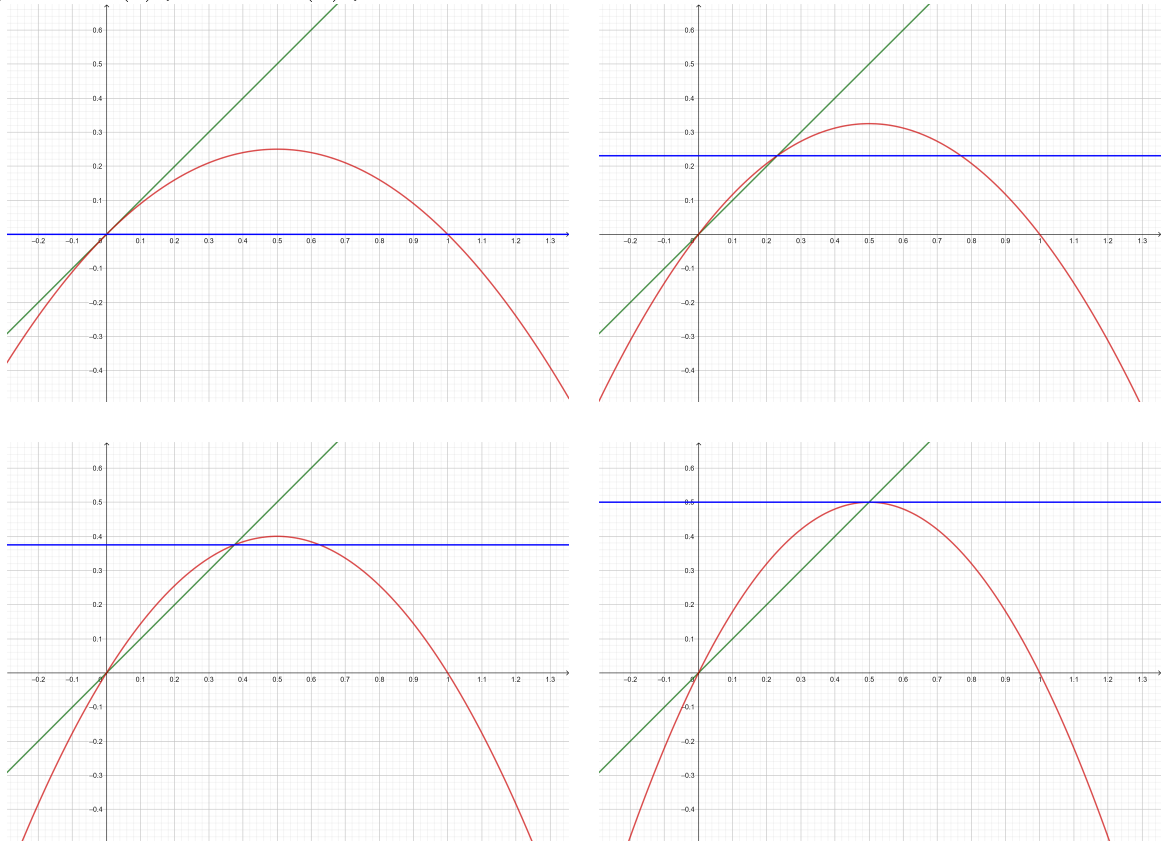
1. F_μ tem um ponto fixo atrator em $p_\mu = (\mu - 1)/\mu$ e um ponto fixo repulsor em 0.
2. Se $0 < x < 1$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu.$$

Demonstração. Para a primeira parte, note que F_μ tem dois tipos de pontos fixos, como já foi visto anteriormente, os pontos 0 e p_μ . Temos que $F'_\mu(0) = \mu$ e $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$. Então, 0 é um ponto repulsor quando $\mu > 1$ e p_μ é atrator para $1 < \mu < 3$.

Já para a segunda parte, vamos dividir a prova em algumas etapas. Na primeira, vamos considerar $1 < \mu < 2$ e $x \in (0, \frac{1}{2}]$. Vemos, pela Figura 2.12, que o gráfico da parábola, $y = F_\mu(x)$, tem o ponto de máximo sempre em $x = \frac{1}{2}$. Para $\mu = 1$, $p_\mu = 0$, logo F_μ tem um único ponto fixo em 0 e para a outra extremidade $\mu = 2$ o ponto fixo $p_\mu = \frac{1}{2}$ e se $1 < \mu < 2$, $0 < p_\mu < \frac{1}{2}$. Logo esboçando os gráficos das retas $y = x$, $y = p_\mu$ e da parábola $y = F_\mu(x)$, vemos que o gráfico da parábola, está mais próximo da reta $y = p_\mu$ do que a reta $y = x$ está de $y = p_\mu$, para $1 < \mu < 2$, em outras palavras, $|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$, para todo $x \in (0, \frac{1}{2}]$ e $x \neq p_\mu$.

Figura 2.12: Gráficos das funções $y = x$, $y = F_\mu(x)$ e $y = p_\mu$ quando (a) $\mu = 1$, (b) $\mu = 1.3$, (c) $\mu = 1.6$ e (d) $\mu = 2$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Agora, seja $\lambda > 0$, tal que para todo $x \in (0, \frac{1}{2}]$, com $x \neq p_\mu$, temos que

$$\frac{|F_\mu(x) - p_\mu|}{|x - p_\mu|} < \lambda < 1,$$

o que implica em $0 < \lambda < 1$ e $|F_\mu(x) - p_\mu| < \lambda \cdot |x - p_\mu|$. Veja que

$$F_\mu(x) \leq \max_{x \in (0, \frac{1}{2}]} F_\mu(x) = F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4},$$

pois $F'_\mu(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$. Como $1 < \mu < 2 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{\mu}{4} < \frac{2}{4}$, então $F_\mu(x) < \frac{1}{2}$ e assim $F_\mu(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Então,

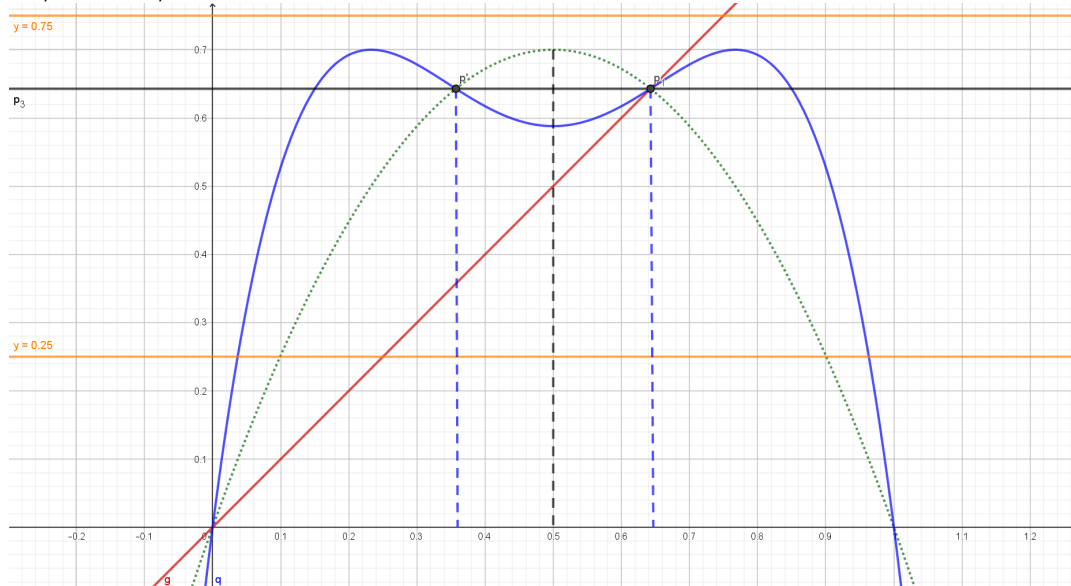
$$|F_\mu^n(x) - p_\mu| < \lambda \cdot |F_\mu^{n-1}(x) - p_\mu| < \lambda^2 \cdot |F_\mu^{n-2}(x) - p_\mu| < \dots < \lambda^n \cdot |x - p_\mu|,$$

para todo $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, com $x \neq p_\mu$. Por fim, como $0 < \lambda < 1$, $\lambda^n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e $|F_\mu^n(x) - p_\mu| \rightarrow 0$, ou seja, $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$ quando $n \rightarrow \infty$.

Agora se $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, temos que $0 < F_\mu(x) < \frac{1}{2}$ e, assim, $F_\mu(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e, como no caso anterior, $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$ quando $n \rightarrow \infty$.

Já para, $2 < \mu < 3$, podemos afirmar que $\frac{1}{2} < p_\mu < \frac{2}{3}$. Como $p_\mu > \frac{1}{2}$ e a parábola é simétrica, com relação a reta $x = \frac{1}{2}$, segue que uma das pré-imagens de p_μ por F_μ , denotada por $\hat{p}_\mu$ está em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Figura 2.13: Em azul, gráfico da função, $F_\mu^2(x) = \mu^2 x(1-x)(1-\mu x(1-x))$, com $p_1 = p_\mu$, $p' = \hat{p}_\mu$ e $2 < \mu < 3$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Considere o intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ e veja que $(F_\mu^2)' \left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e $(F_\mu^2)'' \left(\frac{1}{2}\right) = \mu^2(\mu - 2) > 0$, já que $2 < \mu < 3$, logo $x = \frac{1}{2}$ é ponto de mínimo para $F_\mu^2(x)$. E como $F_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right) =$

$\frac{\mu^2}{4} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right)$, onde para $\mu = 2$ temos $F_2^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ e para $\mu = 3$ temos $F_3^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$, temos que $F_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ para todo $2 < \mu < 3$. Logo, $F_\mu^2(x) \geq F_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ para todo $x \in [\widehat{p}_\mu, p_\mu]$, isto é, F_μ^2 manda todo ponto interior do intervalo $[\widehat{p}_\mu, p_\mu]$ para o interior do intervalo $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right] \subset [\widehat{p}_\mu, p_\mu]$, ou seja, $F_\mu^{2n}(x) \in [\widehat{p}_\mu, p_\mu]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2 < \mu < 3$ e $x \in [\widehat{p}_\mu, p_\mu]$.

Daí, analisando agora o gráfico F_μ^2 no intervalo $[\widehat{p}_\mu, p_\mu]$, como fica claro na Figura 2.13 e de forma análoga ao que já fizemos antes, vemos que o gráfico de $y = F_\mu^2(x)$, está mais próximo da reta $y = p_\mu$ do que a reta $y = x$ está de $y = p_\mu$, em outras palavras, $|F_\mu^2(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$, para todo $x \in [\widehat{p}_\mu, p_\mu]$.

Segue de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, que

$$|F_\mu^{2n}(x) - p_\mu| < \cdots < \lambda^n \cdot |x - p_\mu|,$$

para todo $x \in (\widehat{p}_\mu, p_\mu)$. Por fim, como $0 < \lambda < 1$, $\lambda^n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e $|F_\mu^{2n}(x) - p_\mu| \rightarrow 0$, ou seja, $F_\mu^{2n}(x) \rightarrow p_\mu$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para o caso onde $x \in (0, \widehat{p}_\mu)$, como pode ser constatado analisando a Figura 2.13, nesse intervalo deve existir um $k > 0$, tal que $F_\mu^k(x) \in (\widehat{p}_\mu, p_\mu)$ e pelo caso anterior, $F_\mu^m(F_\mu^k(x)) = F_\mu^{m+k}(x) \rightarrow p_\mu$, quando $m \rightarrow \infty$. Por fim, para $x \in (p_\mu, 1)$, temos que, $F_\mu(x) \in (0, \widehat{p}_\mu)$ e então caímos no caso anterior. Portanto temos que $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in (0, \widehat{p}_\mu) \cup [\widehat{p}_\mu, p_\mu] \cup (p_\mu, 1) = I$ e $2 < \mu < 3$.

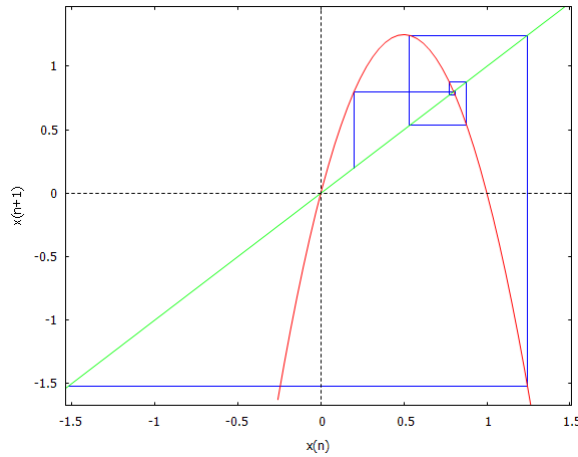
Para $\mu = 2$, temos que $p_\mu = \frac{1}{2}$. Note que se $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ as funções F_μ são crescentes no intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, daí a sequência $(F_\mu^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e como $x = \frac{1}{2}$ é ponto de máximo para F_μ , segue que a sequência é limitada e $F_2^n(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $n \rightarrow \infty$. Já para $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, tem-se que $F_2(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e segue, como no caso anterior, que $F_2^n(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $n \rightarrow \infty$. $\square$

2.4.1 A construção de um Conjunto de Cantor

Continuando a análise da função F_μ , vejamos o que acontece quando $\mu > 4$ e x está no intervalo unitário fechado $I = [0, 1]$, já que fora desse intervalo a órbita tende a infinito. Note que $|F'_\mu(p_\mu)| = |2 - \mu| > 1$, pois $\mu > 4$, então é possível que alguns pontos de I , deixem I depois de algumas iteradas. De fato, por exemplo, a órbita de 0.199, com relação a função F_5 , deixam I , após algumas iteradas, como se pode verificar na Figura 2.14.

Então, vamos denotar todos os pontos do intervalo I que saem desse intervalo após a primeira iterada de A_0 .

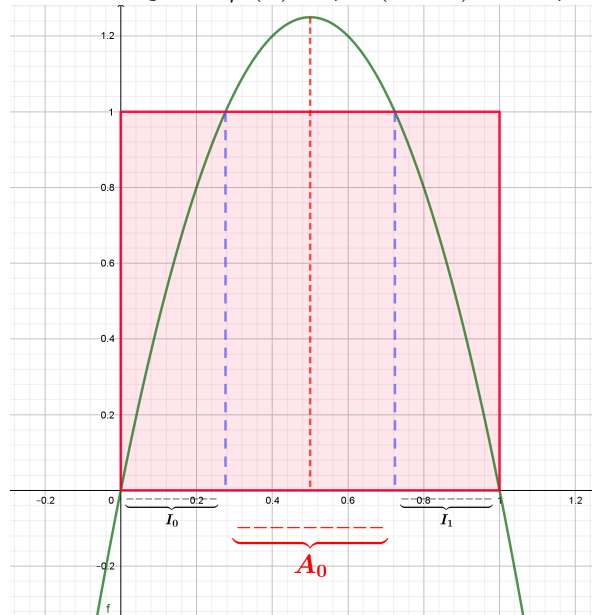
Figura 2.14: Análise gráfica da função $F_5(x) = 5x(1-x)$, com valor inicial $x = 0.199$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Ainda, como $F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} > 1$, temos que A_0 é um intervalo centrado em $\frac{1}{2}$ e aberto, como podemos ver na Figura 2.15. Note que se $x \in A_0$, então $F_\mu(x) > 1$, $F_\mu^2(x) < 0$ e $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$, como já mostramos na Proposição 2.35. Os pontos de I que não estão em A_0 permanecem em I até, pelo menos a primeira iterada.

Figura 2.15: Gráfico da função, $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, com $\mu > 4$ e intervalo A_0 .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Já para os outros pontos que continuam em I , vamos denotá-los por

$$A_1 = \{x \in I \mid F_\mu(x) \in A_0\} = F_\mu^{-1}(A_0).$$

Note que se $x \in A_1$, então $F_\mu^2(x) > 1$, $F_\mu^3(x) < 0$ e novamente $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. Indutivamente, seja $A_n = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in A_0\} = F_\mu^{-n}(A_0)$, isto é, $A_n = \{x \in I \mid F_\mu^i(x) \in I \text{ para } i \leq n, \text{ mas } F_\mu^{n+1}(x) \notin I\}$.

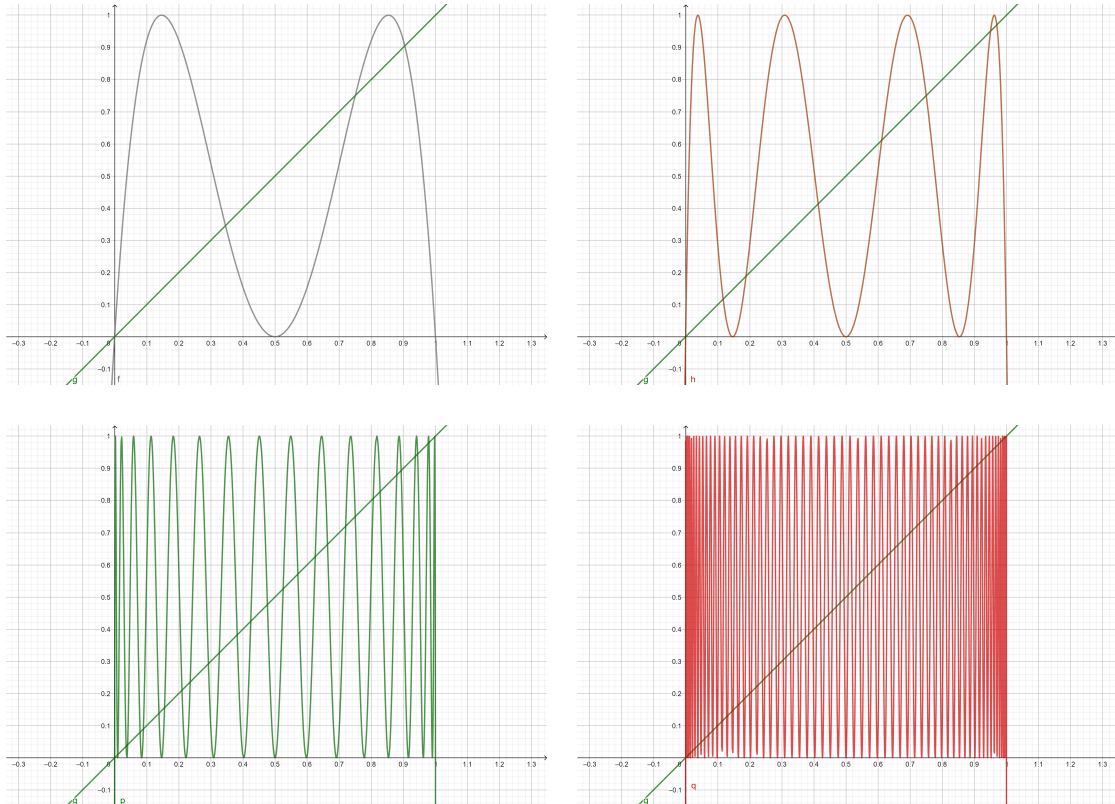
Veja que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n = F_\mu^{-n}(A_0)$ é um conjunto aberto, já que F_μ^n é contínua e A_0 é aberto. E, por fim, chamamos de Λ os pontos de I que nunca saem de I , ou seja,

$$\Lambda = I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right),$$

lembrando que como $\text{Per}_n(F_\mu) \neq \emptyset$, então $\Lambda \neq \emptyset$.

Temos que $I - A_0$ nos dá dois intervalos fechados simétricos, I_0 do lado esquerdo de A_0 e I_1 do lado direito de A_0 , como pode ser visto na Figura 2.15. Já $I - A_0 \cup A_1$, nos dá quatro intervalos fechados simétricos e logo $I - \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right)$ nos dará 2^{n+1} intervalos fechados e disjuntos. E, como é fácil ver na Figura 2.16, F_μ^n possui 2^n pontos fixos em I .

Figura 2.16: Gráficos de F_μ^n para $n = 2, 3, 5$ e 7 assim como os respectivos pontos periódicos.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Veja que a construção de Λ remete à construção de um Conjunto de Cantor.

Definição 2.37. Um conjunto é um Conjunto de Cantor se é fechado, totalmente desconexo e é um subconjunto perfeito de I . Um conjunto é totalmente desconexo se não contém intervalos; um conjunto é perfeito se todo ponto desse conjunto é um ponto de acumulação ou é um ponto limite de outra sequência de pontos do conjunto.

Proposição 2.38. Λ é um Conjunto de Cantor, para $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Demonstração. Para garantirmos que Λ é um conjunto de Cantor, precisamos mostrar, primeiro, que $|F'_\mu(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$. O que de fato ocorre, pois quando

$x \in I_0 \cup I_1$, como $F_{2+\sqrt{5}}(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, temos que no máximo

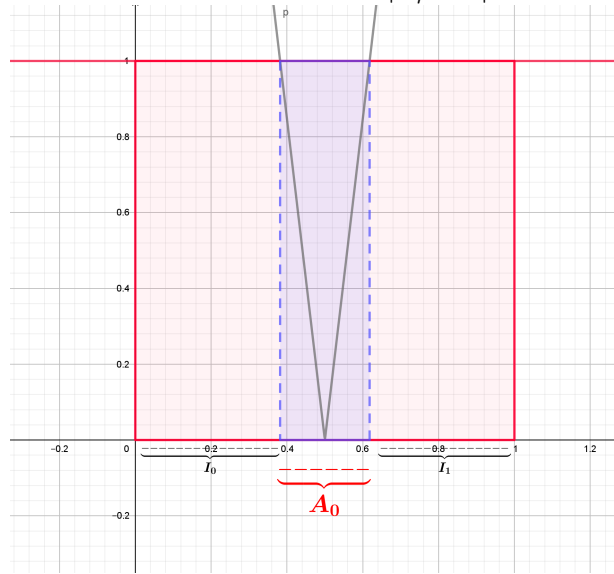
$$A_0 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

Agora para $x \in I_0$, temos $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 1-2x > -2+\sqrt{5}$. Como $\mu > 2+\sqrt{5} \Rightarrow F_\mu(x) = \mu(1-2x) > (2+\sqrt{5})(-2+\sqrt{5}) = 1$.

Analogamente, se $x \in I_1$, temos $x > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow 1-2x < 2-\sqrt{5} \Rightarrow |1-2x| > -2+\sqrt{5}$. Como $\mu > 2+\sqrt{5} \Rightarrow |\mu| = \mu > 2+\sqrt{5} \Rightarrow |F_\mu(x)| = |\mu(1-2x)| > |(-2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})| = 1$.

Portanto temos $|F'_\mu(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$. Isso fica mais fácil de ser visualizado na Figura 2.17 abaixo.

Figura 2.17: Gráfico da função $y = |F'_\mu(x)|$ para $\mu > 2 + \sqrt{5}$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Então, para μ suficientemente grande existe um $\lambda > 1$ tal que $|F'_\mu(x)| \geq \lambda$, para todo $x \in \Lambda$. Pela regra da cadeia, como $x_0 \in \Lambda$,

$$\left| (F_\mu^n)'(x_0) \right| = |F'_\mu(x_0) \cdot F'_\mu(x_{n-1}) \cdot F'_\mu(x_{n-2}) \cdot \dots \cdot F'_\mu(x_1)| \geq \lambda \cdot \dots \cdot \lambda = \lambda^n,$$

onde $x_i = F_\mu^i(x_0)$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$, e $\lambda^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Mostremos que Λ é totalmente desconexo. De fato, se existissem $x, y \in \Lambda$, com $x \neq y$, tal que $[x, y] \subset \Lambda$, então aplicando quantas vezes necessário, o Teorema do Valor Médio a F_μ no intervalo $[x, y]$, teríamos que existe n_0 , tal que $\lambda^{n_0} |x - y| > 1$ e, então

$$|F_\mu^{n_0}(y) - F_\mu^{n_0}(x)| > \lambda^{n_0} |x - y| > 1,$$

mas, isso nos diz que $F_\mu^{n_0}(y)$ ou $F_\mu^{n_0}(x)$ está fora de I , o que é uma contradição. Logo Λ é totalmente desconexo.

Agora como A_n são abertos, segue que $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ é aberta e como I é fechado, então Λ é fechado.

Por fim, nos resta mostrar que Λ é um subconjunto perfeito. Vamos supor que exista $p \in \Lambda$, que não seja um ponto de acumulação de Λ , logo p é um ponto isolado de Λ , ou seja, existe um $\varepsilon > 0$, tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \setminus \{p\} \cap \Lambda = \emptyset$, daí para todo $x \in (\varepsilon - p, \varepsilon + p)$, com $x \neq p$, temos que $x \notin \Lambda$. Assim, pela Proposição 2.35 a órbita de x vai para $-\infty$, ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_\mu^k(x) < 0$. Por outro lado, $F_\mu^k(p) > 0$, ou seja, $F_\mu^k(p)$ é um ponto de máximo local, para F_μ^k , e assim, $(F_\mu^k)'(p) = 0$. Pela regra da cadeia temos que

$$(F_\mu^n)'(p) = F_\mu'(p) \cdot F_\mu'(p_{n-1}) \cdot F_\mu'(p_{n-2}) \cdot \dots \cdot F_\mu'(p_1) = 0,$$

onde $p_i = F_\mu^i(p)$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$. Logo $F_\mu'(F_\mu^i(p)) = 0$ para algum $i < k$, o que implica que $F_\mu^i(p) = \frac{1}{2}$, mas $F_\mu^{i+1}(p) = F_\mu\left(\frac{1}{2}\right) \notin I$ o que contradiz a hipótese de $p \in \Lambda$. Portanto, p é um ponto de acumulação, o que segue que Λ é um subconjunto perfeito e, conseqüentemente, um Conjunto de Cantor, para $\mu > 2 + \sqrt{5}$. $\square$

Pois bem, neste capítulo acabamos por, primeiro, definir alguns conceitos básicos de dinâmica discreta e, por último, definimos o conjunto Λ , mostrando que ele é um caso particular de um conjunto de Cantor. Continuaremos a trabalhar com o conjunto Λ no próximo capítulo, assim como a função quadrática F_μ , mas dessa vez definida em Λ .

3 A Dinâmica Simbólica

Neste capítulo, vamos introduzir o conceito de dinâmica simbólica, forneceremos um modelo para a estrutura dinâmica da função quadrática, no conjunto Λ de Cantor, discutido no capítulo anterior. Para tanto, vamos construir uma aplicação cuja dinâmica seja, de certa forma, equivalente à dinâmica de F_μ , isto é, tal aplicação descreverá a dinâmica de F_μ completamente de maneira simples. Posteriormente, relacionaremos essa aplicação criada à função quadrática F_μ , quando μ é suficientemente grande, por meio de uma conjugação topológica.

Por fim, será apresentado o conceito do caos de Devaney e utilizando a aplicação criada, dentro da dinâmica simbólica, vamos demonstrar que a função F_μ , para μ suficientemente grande, definida no conjunto Λ , é caótica. Para tanto, vamos utilizar como base [11].

3.1 Definições Preliminares

Precisamos de um espaço no qual nosso modelo atue, esse espaço será denotado por Σ_2 e seus pontos consistirão de sequências infinitas de 0 e 1. Chamaremos este espaço de espaço das sequências em dois símbolos, assim fazemos a seguinte definição.

Definição 3.1. $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j = 0, 1\}$.

Queremos que este espaço seja um espaço métrico, para isso, precisaremos de uma métrica para esse espaço, assim como algumas propriedades. E, finalmente, definiremos o nosso modelo, a aplicação Shift, como veremos a seguir.

Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ e $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ duas sequências em Σ_2 , definimos a distância entre elas por

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Note que essa distância é finita pois $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$, ou seja, duas sequências distam no máximo duas unidades uma da outra.

Proposição 3.2. *A função $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida anteriormente é uma métrica.*

Demonstração. Claramente $d(s, t) \geq 0$, para qualquer $s, t \in \Sigma_2$, pois $\frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq 0$, para todo $i \geq 0$ e $d(s, t) = 0$ se, e somente se, $s_i = t_i$, para todo $i \geq 0$. Como,

$|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$, daí temos que $d(s, t) = d(t, s)$. E, finalmente, sendo $r, s, t \in \Sigma_2$, sabemos que $|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$, donde chegamos em $d(r, s) + d(s, t) \geq d(r, t)$. $\square$

Proposição 3.3. *Sejam $s, t \in \Sigma_2$ e suponha $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$, então $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. Consequentemente, se $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$, então $s_i = t_i$, para $i \leq n$.*

Demonstração. Se $s_i = t_i$, para $i \leq n$, então

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Daí, como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$, então $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$, o que implica em

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} &= 2 - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{2^{n+1} - 2^n - 2^{n-1} - \dots - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Então $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. Por outro lado, se $s_j \neq t_j$, para algum $j \leq n$, temos que

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \frac{1}{2^j} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n},$$

pois temos certeza que $\sum_{i=0}^{j-1} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq 0$ e como $j \leq n$, com $j, n \in \mathbb{N}$, então

$$2^j \leq 2^n \Rightarrow \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

Consequentemente, por contrapositiva, se $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$, então $s_i = t_i$, para $i \leq n$. $\square$

Definiremos uma aplicação em Σ_2 a qual chamaremos de aplicação deslocamento (ou shift).

Definição 3.4. *A aplicação shift em Σ_2 é a função $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, dada por $\tau(s) = \tau(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$.*

Proposição 3.5. *$\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ é contínua.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, escolhemos um n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Então, se $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ é tal que $d(s, t) < \frac{1}{2^{n+1}}$ logo, pela Proposição 3.3, temos que $s_i = t_i$, para $i \leq n + 1$. Consequentemente, $\tau(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\tau(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$ possuem as

n primeiras entradas iguais, ou seja, $s_k = t_k$ para $1 \leq k \leq n$ e $d(\tau(s), \tau(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, provando que τ é contínua. $\square$

Algumas propriedades podem ser totalmente compreendidas para a aplicação τ . Um ponto periódico de período n para τ tem a forma $(s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots)$, com $s_i = 0, 1$. Logo conseguimos listar todos os pontos periódicos de período n para τ . Para os pontos periódicos de τ , temos a seguinte proposição.

Proposição 3.6.

1. A cardinalidade de $Per_n(\tau)$ é 2^n ;
2. $Per(\tau)$ é denso em Σ_2 ;
3. Existe um ponto de Σ_2 cuja órbita pela aplicação τ é densa em Σ_2 .

Demonstração. 1. Para a primeira afirmação, basta observarmos que

$$Per_1(\tau) = \{(0000000\dots) \text{ e } (111111\dots)\},$$

tem cardinalidade 2,

$$Per_2(\tau) = \{(010101\dots), (101010\dots), (000\dots) \text{ e } (111\dots)\},$$

tem cardinalidade $4 = 2^2$ e assim $Per_n(\tau) = AR_2^n = 2^n$, onde AR_2^n é um arranjo com repetição entre dois elementos escolhido n vezes.

2. Para mostrarmos a densidade de $Per(\tau)$, vamos mostrar que para qualquer $s = (s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n \dots) \in \Sigma_2$, existe uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Per(\tau)$, onde $t_k \rightarrow s$, quando $k \rightarrow \infty$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, considere $t_k = (s_0 s_1 \dots s_k s_0 s_1 \dots s_k \dots)$, $k \in \mathbb{N}$, temos $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Per(\tau)$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ e, assim, para todo $k > n_0$ tem-se $s_i = t_i$, para $i = 0, 1, \dots, k$ e, pela Proposição 3.3,

$$d(s, t_k) \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Portanto $t_k \rightarrow s$.

3. Por fim, para a última afirmação, vamos considerar um ponto $s^* \in \Sigma_2$ da forma

$$s^* = (\underbrace{0\ 1}_{1^\circ \text{bloco}} \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{2^\circ \text{bloco}} \underbrace{000\ 001\ \dots\ 111}_{3^\circ \text{bloco}} \underbrace{\dots}_{n^\circ \text{bloco}} \dots).$$

Veja que no primeiro bloco, temos todas as combinações possíveis de 0's e 1's com um elemento, no segundo bloco, temos todas as combinações possíveis de 0's e 1's com dois elementos, no terceiro bloco, temos todas as combinações possíveis de 0's e 1's com três elementos, e assim por diante. Logo, seja qual for $s \in \Sigma_2$ e $\varepsilon > 0$, escolhamos $m \in \mathbb{N}$ onde $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ e fixemos o bloco com os m primeiros elementos de s . Esse bloco aparece em alguma posição dos m -ésimos blocos de s^* , assim, existe $k \in \mathbb{N}$, onde $\tau^k(s^*)$ tem os m primeiros elementos iguais aos m primeiros elementos de s e mais uma vez, pela Proposição 3.3

$$d(s, \tau^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^m} < \varepsilon.$$

Portanto, a órbita de s^* é densa em Σ_2 . $\square$

3.2 Conjugação Topológica

O objetivo desta seção é relacionar a aplicação Shift, discutida na seção anterior, com a aplicação quadrática F_μ quando μ é suficientemente grande. Para tanto, vamos definir o que é uma conjugação topológica entre sistemas e, a partir disso, tentar compreender totalmente o comportamento das órbitas de pontos de Λ pela aplicação F_μ . Para tal, começaremos definindo a aplicação Itinerário que relaciona os dois sistemas.

Definição 3.7. *Seja $x \in \Lambda$. O itinerário de x é dado pela sequência infinita de 0's e 1's, dada por:*

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$$

onde $s_j = 0$ se $F_\mu^j(x) \in I_0$ e $s_j = 1$ se $F_\mu^j(x) \in I_1$.

Veja que a função itinerário $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ está bem definida e ela possui várias propriedades sendo a primeira delas, o Teorema.

Teorema 3.8. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que a função S é injetora. Suponhamos que S não seja injetora. Então, existem $x_0, y_0 \in \Lambda$, com $x_0 \neq y_0$, tais que $S(x_0) = S(y_0)$, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_\mu^n(x_0)$ e $F_\mu^n(y_0)$ vão estar sempre do mesmo lado, ou em I_0 ou em I_1 . Veja que F_μ é uma função injetora quando restrita ao intervalo I_0 ou I_1 e que $|(F_\mu)'(x)| > \lambda > 1$, para todo $x \in I_0 \cup I_1$ e algum $\lambda \in \mathbb{R}$, como visto na Proposição 2.38. Considerando o intervalo $[x_0, y_0]$ contido em um dos intervalos I_0 ou I_1 então, pelo T.V.M. podemos dizer que existe $c_0 \in (x_0, y_0)$ tal que

$$|F_\mu(x_0) - F_\mu(y_0)| = |(F_\mu)'(c_0)| \cdot |x_0 - y_0| > \lambda \cdot |x_0 - y_0|.$$

Além disso, temos que $F_\mu(x_0) = x_1$ e $F_\mu(y_0) = y_1$, $x_1, y_1 \in I_0$ ou I_1 , como dito anteriormente. E, novamente, considerando o fato de F_μ ser uma função injetora no intervalo I_0 ou I_1 e o intervalo $[x_1, y_1]$ estar contido em um dos intervalos I_0 ou I_1 , pelo T.V.M. podemos dizer que existe $c_1 \in (x_1, y_1)$ tal que

$$\begin{aligned} |F_\mu^2(x_0) - F_\mu^2(y_0)| &= |F_\mu(x_1) - F_\mu(y_1)| = |(F_\mu)'(c_1)| \cdot |x_1 - y_1| > \lambda \cdot |x_1 - y_1| = \\ &= \lambda \cdot |F_\mu(x_0) - F_\mu(y_0)| = \lambda \cdot |(F_\mu)'(c_0)| \cdot |x_0 - y_0| > \lambda^2 \cdot |x_0 - y_0|. \end{aligned}$$

Lembrando que, como $x_0, y_0 \in \Lambda$, temos que $x_n, y_n \in \Lambda$, pra todo $n \in \mathbb{N}$, onde $F_\mu^n(x_0) = x_n$ e $F_\mu^n(y_0) = y_n$. Então, realizando o procedimento anterior n vezes, chegamos a

$$|F_\mu^n(x_0) - F_\mu^n(y_0)| > \lambda^n \cdot |x_0 - y_0|$$

e, dado que $\lambda^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que deve existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^k \cdot |x_0 - y_0| > 1$, o que é um absurdo, pois a distância máxima entre os pontos de Λ é 1. O absurdo está em supor que $F_\mu(x_0) = F_\mu(y_0)$, mas $x_0 \neq y_0$, logo S é injetora.

Agora, vamos provar que S é sobrejetora.

Primeiro, veja que para todo $J \subset I$, fechado, temos que $F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in J\}$ é um subconjunto fechado de I , isto é verdade devido à continuidade de F_μ^n para todo

$n \in \mathbb{N}$. Em particular, $F_\mu^{-1}(J) = I_x \cup I_y$, onde $I_x \subset I_0$ e $I_y \subset I_1$, ambos fechados. Considere $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ e vamos provar que existe $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = s$. Seja

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Temos que esse conjunto é fechado e não vazio, pois como vimos anteriormente, sem perda de generalidade, para I_0 fechado, $F_\mu^{-1}(I_0) = I_x \cup I_y$ é fechado, onde $I_x \subset I_0$ e $I_y \subset I_1$. Daí, por indução temos

$$\begin{array}{llll} I_{s_0 s_1} &= & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) &= & I_{s_0} \cap (I_{x_0} \cup I_{y_0}) &\neq & \emptyset \\ I_{s_0 s_1 s_2} &= & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap F_\mu^{-1}(F_\mu^{-1}(I_{s_2})) &= & I_{s_0} \cap (I_{x_0} \cup I_{y_0}) \cap (I_{x_1} \cup I_{y_1}) &\neq & \emptyset \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= & \dots &= & \dots &\neq & \emptyset \end{array}$$

Note, ainda, que $I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$, visto que

$$\begin{aligned} F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) &= F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap F_\mu^{-1}(F_\mu^{-1}(I_{s_2})) \cap \dots \cap F_\mu^{-1}(F_\mu^{-(n-1)}(I_{s_n})) \\ &= F_\mu^{-1}(I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap F_\mu^{-(n-1)}(I_{s_n})) \\ &= F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}) \end{aligned}$$

e, como $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ é não vazio, isso implica que $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ também é não vazio. Sendo $I_{s_0} = I_0$ ou $I_{s_0} = I_1$, então $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ consiste em um intervalo único e, além disso, veja que

$$\begin{array}{llll} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) &\subset & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-(n-1)}(I_{s_{n-1}}) &= \\ I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} &= & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-(n-1)}(I_{s_{n-1}}) &\subset & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-(n-2)}(I_{s_{n-2}}) &= \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ I_{s_0 s_1 s_2} &= & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap F_\mu^{-2}(I_{s_2}) &\subset & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) &= \\ I_{s_0 s_1} &= & I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) &\subset & I_{s_0}. \end{array}$$

Portanto, temos uma sequência decrescente $I_{s_0} \supset I_{s_0 s_1} \supset I_{s_0 s_1 s_2} \supset \dots \supset I_{s_0 s_1 \dots s_n} \supset I_{s_0 s_1 \dots s_{n+1}} \supset \dots$ composta por intervalos fechados não vazios e assim, pelo Teorema dos intervalos encaixados, obtemos

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n} \neq \emptyset.$$

Então, existe $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, ou seja, $x \in I_{s_0}$, $F_\mu(x) \in I_{s_1}$, $F_\mu^2(x) \in I_{s_2}$ e assim por diante. Logo, $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots) = s$, ou seja, S é sobrejetora e, portanto bijetora. Veja ainda, que $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ consiste em um único ponto, isso porque S é injetora.

Por fim, para provar a continuidade de S , vamos supor que, dados $x \in \Lambda$ qualquer, com $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, e $\varepsilon > 0$, escolhemos $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Seja, então, $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ um intervalo, como descrito anteriormente. Como F_μ^n é contínua para todo n , existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que se $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$, então $F_\mu^i(x)$ e $F_\mu^i(y)$ estão no mesmo intervalo I_0 ou I_1 para $i = 0, 1, \dots, n$, ou seja, $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, daí $S(y) = (s_1 s_2 \dots s_n k_0 k_1 \dots)$ e, assim, pela Proposição 3.3,

$$d(S(x), S(y)) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

portanto S é contínua.

Já para mostrar que S^{-1} é contínua, seja $s \in \Sigma_2$, como S é bijetora, existe $x \in \Lambda$ tal que $S^{-1}(s) = x$. Seja $\varepsilon > 0$, então existem $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, onde $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ e $\dim(I_{s_0 s_1 \dots s_{n_1}}) < \varepsilon$. Escolhemos $n = \max\{n_0, n_1\}$. Assim, com $\delta = \frac{1}{2^n}$, para todo $t \in \Sigma_2$ com $d(s, t) < \frac{1}{2^n} = \delta$, pela Proposição 3.3, $s_i = t_i$, para $i \leq n$, logo $y = S^{-1}(t) \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, ou seja,

$$d(s, t) < \frac{1}{2^n} = \delta \Rightarrow |S^{-1}(s) - S^{-1}(t)| = |x - y| < \varepsilon.$$

Portanto, S^{-1} é contínua e S é um homeomorfismo. $\square$

Esse Teorema e o próximo nos diz que a dinâmica de F_μ em Λ e de τ em Σ_2 são equivalentes, isto é, são as mesmas.

Teorema 3.9. $S \circ F_\mu = \tau \circ S$, com $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Demonstração. Um ponto $x \in \Lambda$, como já vimos, pode ser definido unicamente pela sequência de intervalos $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, determinada pelo itinerário de $S(x)$. Agora, como

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n})$$

temos que

$$F_\mu(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) = I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 s_2 \dots s_n},$$

pois F_μ restrita ao intervalo I_0 ou I_1 é sobrejetora, como pode ser visto na Figura 2.15, do capítulo anterior, logo $F_\mu(I_{s_0}) = I$. Então,

$$\begin{aligned} S(F_\mu(x)) &= S\left(F_\mu\left(\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}\right)\right) \\ &= S\left(\bigcap_{n \geq 1} I_{s_1 \dots s_n}\right) \\ &= (s_1 s_2 \dots) = \tau(S(x)). \end{aligned}$$

$\square$

Definição 3.10. Sejam $f : A \rightarrow A$ e $g : B \rightarrow B$ dizemos que f e g são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que $h \circ f = g \circ h$. O homeomorfismo h é chamada de conjugação topológica.

Veja que, considerando as hipóteses acima, podemos dizer que existe um homeomorfismo $h^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g$, e portanto, h^{-1} é também chamada de conjugação topológica.

Observação 3.11. As aplicações que são topologicamente conjugadas são completamente equivalentes em termos de suas dinâmicas. Por exemplo, se f é topologicamente conjugada a g via h e p é um ponto fixo de f então, $h(p)$ é um ponto fixo de g , pois $h(p) = h(f(p)) = g(h(p))$. Similarmente, h nos dá uma correspondência injetiva entre $Per_n(f)$ e $Per_n(g)$, ou seja, se $x \in Per_n(f)$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= h(f^n(x)) = h(f(f^{n-1}(x))) = g(h(f^{n-1}(x))) \\ &= g(h(f(f^{n-2}(x)))) = g(g(h(f^{n-2}(x)))) \\ &= g^2(h(f^{n-2}(x))) = \dots = g^n(h(x)) \end{aligned},$$

logo, $h(x) \in Per_n(g)$.

Proposição 3.12. *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Então,*

1. *A cardinalidade de $Per_n(F_\mu)$ é 2^n ;*
2. *$Per(F_\mu)$ é denso em Λ ;*
3. *Existe uma órbita densa de F_μ em Λ .*

Demonstração. 1. A questão da cardinalidade já foi abordado no capítulo anterior, na seção 2.4, com a figura 2.16.

2. Para a segunda afirmação, veja que seja qual for $x \in \Lambda$, como S é um homeomorfismo entre Λ e Σ_2 , existe um $y \in \Sigma_2$ tal que $y = S(x)$. Logo, dado X aberto em Λ , tal que $x \in X$, $S(X) = Y$ é um aberto em Σ_2 , com $y \in Y$. Como vimos da Proposição 3.6, $Per(\tau)$ é denso em Σ_2 e, portanto, $Y \cap Per(\tau) \neq \emptyset$. Agora, como F_μ e τ são topologicamente conjugadas, pela função S , existe $q \in Y \cap Per(\tau)$, onde $S^{-1}(q) = p \in Per(F_\mu)$, como vimos na Observação 3.11, pois $q \in Per(\tau)$ e, ainda, já que $q \in Y$, $p \in S^{-1}(Y) = X$, então $Per(F_\mu) \cap X \neq \emptyset$ e, portanto, $x \in \overline{Per(F_\mu)}$, ou seja, $\overline{Per(F_\mu)} \supset \Lambda$. Como $\overline{Per(F_\mu)} \subset \Lambda$ sempre acontece, $\overline{Per(F_\mu)} = \Lambda$.
3. Já para a terceira afirmação, vamos considerar a órbita do ponto $s^* \in \Sigma_2$ da Proposição 3.6 e seja $x^* = S^{-1}(s^*) \in \Lambda$. Veja que, de forma similar à prova da afirmação anterior, para um $x \in \Lambda$, com $x \neq y$, e um aberto U qualquer em Λ , com $x \in U$, considere o aberto $V = S(U)$. Portanto, como $V \cap O_\tau(s^*) \neq \emptyset$, temos que existe $t \in V \cap O_\tau(s^*)$, onde $y = S^{-1}(t)$ e sendo $t \in O_\tau(s^*)$, então $t = \tau^n(s^*)$, para um $n \in \mathbb{N}$. Assim, $y = S^{-1}(\tau^n(s^*))$, com $y \in U$ e, como S é uma conjugação topológica de F_μ e σ , então

$$y = S^{-1}(\tau^n(s^*)) = F_\mu^n(S^{-1}(s^*)) = F_\mu^n(x^*).$$

Portanto, $y \in O_{F_\mu}(x^*)$, o que implica em $y \in U \cap O_{F_\mu}(x^*)$ e, então, $U \cap O_{F_\mu}(x^*) \neq \emptyset$ e $x \in \overline{O_{F_\mu}(x^*)}$. Logo, temos que $\Lambda \subset \overline{O_{F_\mu}(x^*)}$ e, como $\Lambda \supset \overline{O_{F_\mu}(x^*)}$ sempre acontece, concluímos $\Lambda = \overline{O_{F_\mu}(x^*)}$.

□

3.3 Definição de Caos de Devaney

Nesta seção, para finalizar o conteúdo sobre a função F_μ , vamos mostrar algumas propriedades da função quadrática que implicam no fenômeno caos. Diz Devaney

(1989, p. 84) que: “A função quadrática exibe de maneira estonteante um fenômeno que é apenas parcialmente compreendido: o comportamento caótico das órbitas de um sistema dinâmico”. Então, para introduzir esse assunto, que será melhor abordado mais adiante, vamos, com uma abordagem topológica, definir o fenômeno caos, segundo Devaney.

Definição 3.13. *Seja A um conjunto e B um subconjunto de A . Podemos dizer que B é denso em A se para quaisquer $a \in A$ e $\varepsilon > 0$, existe um $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$.*

Exemplo 3.14. Veja a aplicação shift, $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$. Mostramos na Proposição 3.6, que $Per(\tau)$ é denso em Σ_2 . Assim como a função $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, com $\mu > 2 + \sqrt{5}$, mostrada na Proposição 3.12, que também tem seus pontos densos em Λ .

Definição 3.15. *Diz-se que um sistema dinâmico f definido em um conjunto D apresenta transitividade topológica se, para qualquer par de subconjuntos abertos U e V em D , existe um número inteiro positivo k , tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Dessa definição, podemos observar que se o sistema tem transitividade topológica, então dados quaisquer dois pontos do domínio, podemos encontrar uma órbita arbitrariamente próxima de ambos.

Exemplo 3.16. Seja $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $T_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$, com $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$. Sabemos, pelo Teorema 2.13, que a órbita de todo ponto de S^1 pela T_λ é densa em S^1 , pois λ é irracional. Então, dados $U, V \subset S^1$, existe $\theta \in U$, onde $\overline{O_{T_\lambda}(\theta)} = S^1$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $T_\lambda^k(\theta) \in V$, e portanto, T_λ é topologicamente transitivo.

Mais uma vez, um outro exemplo é a aplicação Shift. Contudo, vamos provar uma proposição que irá facilitar a demonstração do exemplo e que nos será útil futuramente.

Proposição 3.17. *Seja $T : X \rightarrow X$ uma função contínua em um espaço métrico. Se existe algum $x \in X$ tal que a órbita de x por T é densa em X , então T é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Suponhamos que existe algum $x \in X$ tal que a órbita de x por T é densa em X . Sejam U e V subconjuntos abertos e não vazios de X . Então, existem $n, m \geq 0$ tais que $T^n(x) \in U$ e $T^m(x) \in V$. Seja $m \neq n$, já que caso contrário $T^m(x) = T^n(x)$ e $U \cap V \neq \emptyset$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $m > n$, então, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $m = n + k$. Logo,

$$T^k(T^n(x)) = T^{n+k}(x) = T^m(x)$$

e portanto, $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$, ou seja, T é topologicamente transitivo. $\square$

Exemplo 3.18. Como já vimos na Proposição 3.6, a órbita $O_\tau(s^*)$ é densa em Σ_2 e, pela proposição anterior, τ é topologicamente transitivo.

Definição 3.19. Uma função $f : I \rightarrow J$ depende sensivelmente das condições iniciais se existe um número $\beta > 0$, tal que para qualquer condição inicial $x \in I$ e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $y \in I$ com $|x - y| < \varepsilon$ e existe $k \in \mathbb{N}$, tais que $|f^k(x) - f^k(y)| \geq \beta$.

Veja que essa definição exige apenas que pelo menos a k -ésima iterada de ambos os pontos estejam afastados, com uma distância entre elas maior ou igual a β . Portanto, essa definição nos diz que, não importa o quão perto os pontos estejam um do outro, em algum momento (alguma iterada) eles irão se afastar a pelo menos uma determinada distância.

Exemplo 3.20. Vamos, agora, averiguar que a aplicação Shift depende sensivelmente das condições iniciais. Seja $\beta = 1$, então, para algum $s \in \Sigma_2$ e $\varepsilon > 0$, vamos escolher $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Para todo $t \in \Sigma_2$, tal que $d(t, s) < \frac{1}{2^n}$, com $t \neq s$, segue da Proposição 3.3, temos que $t_j = s_j$ para todo $0 \leq j \leq n$. Agora, como $s \neq t$, podemos afirmar que existe $k > n$, onde $t_k \neq s_k$ e, considerando as iteradas $\tau^k(t)$ e $\tau^k(s)$, temos que

$$d(\tau^k(t), \tau^k(s)) = |t_k - s_k| + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} = 1 + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} \geq 1 = \beta.$$

Definição 3.21. Dizemos, que uma função contínua $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico, é caótica, segundo a definição de R. L. Devaney [11], se possui as seguintes propriedades.

1. Os pontos periódicos de f são densos em X ;
2. f é topologicamente transitiva;
3. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Observação 3.22. De imediato, já podemos afirmar, pelos exemplos anteriores que a aplicação Shift, é um sistema caótico, segundo a definição de Devaney. E, como será demonstrado a seguir, a função F_μ , com $\mu > 2 + \sqrt{5}$, também é caótica.

Proposição 3.23. A função, $F_\mu : \Lambda \rightarrow \Lambda$, onde $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, com $\mu > 2 + \sqrt{5}$ é caótica.

Demonstração. Já temos, pela Proposição 3.12 que os pontos periódicos de F_μ são densos em Λ .

Para provar a transitividade, veja que Λ é um espaço métrico completo pois é um subespaço fechado de um espaço completo e separável (pois é um espaço compacto e

todo espaço métrico compacto é separável). Também, pela Proposição 3.12, sabemos que existe uma órbita periódica densa de F_μ em Λ , então, pela Proposição 3.17, F_μ é transitivo, nos restando apenas averiguar se F_μ depende sensivelmente das condições iniciais.

Para tanto, vamos considerar $\beta = d(I_0, I_1)$ e a função $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$, definida na seção anterior. Então, dados $\varepsilon > 0$ e um $x \in \Lambda$, como Λ não contém pontos isolados, existe $y \in V_\varepsilon(x)$, com $x \neq y$. Sejam $S(x) = s = (s_0 s_1 \dots)$ e $S(y) = t = (t_0 t_1 \dots)$. Como $x \neq y$, existe $k > 0$ tal que $s_k \neq t_k$, o que nos diz que $F_\mu^k(x) \in I_0$ e $F_\mu^k(y) \in I_1$ (ou $F_\mu^k(x) \in I_1$ e $F_\mu^k(y) \in I_0$), daí

$$|F_\mu^k(x) - F_\mu^k(y)| \geq \beta.$$

□

Mais adiante vamos mostrar que F_4 também é caótica, contudo é necessário termos em mente que a aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(\theta) = 2\theta$ é caótica (ver [11], página 18).

Exemplo 3.24. $F_4(x) = 4x(1-x)$ é caótica no intervalo $I = [0, 1]$.

Demonstração. Vamos considerar $g(\theta) = 2\theta$, a função caótica citada anteriormente e definir $h_1 : S^1 \rightarrow [-1, 1]$, por $h_1(\theta) = \cos(\theta)$. Temos que h_1 é a projeção de S^1 para o intervalo $[-1, 1]$. Consideremos a função, também nesse intervalo, $q : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, onde $q(x) = 2x^2 - 1$, veja que

$$\begin{aligned} (h_1 \circ g)(\theta) &= \cos(2\theta) \\ &= 2\cos^2(\theta) - 1 = (q \circ h_1)(\theta), \end{aligned}$$

logo, h_1 é uma conjugação de g e q .

Agora, considerando $h_2 : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $h_2(x) = \frac{1}{2}(1-x)$, temos que

$$\begin{aligned} (F_4 \circ h_2)(\theta) &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot (1-x)\right) \\ &= 2(1-x) \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = (1-x)(1+x), \\ &= 1 - x^2 = \frac{1}{2} \cdot (2 - 2x^2) = \frac{1}{2} \cdot (1 - (2x^2 - 1)) \\ &= (h_2 \circ q)(\theta) \end{aligned}$$

portanto, h_2 é uma conjugação topológica entre F_4 e q .

Considerando a função, $\varphi = h_2 \circ h_1$, contínua, pois é composta de duas funções contínuas, temos que

$$\varphi \circ g = h_2 \circ (h_1 \circ g) = h_2 \circ (q \circ h_1) = (h_2 \circ q) \circ h_1 = (F_4 \circ h_2) \circ h_1 = F_4 \circ \varphi,$$

assim, φ é uma conjugação (perceba que φ não é uma conjugação topológica) entre F_4 e g .

Agora, veja que, seja qual for $x \in I$, como φ é sobrejetora, dado X aberto em I , com $x \in X$, já que φ é contínua, $\varphi^{-1}(X) = Y$ é um aberto em S^1 . Como vimos anteriormente, $Per(g)$ é denso em S^1 e, portanto, $Y \cap Per(g) \neq \emptyset$. Seja $q \in Y \cap Per(g)$,

temos $\varphi(q) = p \in \text{Per}(F_4)$, pois $q \in \text{Per}(g)$, daí $\varphi(q) = \varphi(g(q)) = F_4(\varphi(q))$. Similarmente, seja $q \in \text{Per}_n(g)$, então

$$\begin{aligned}\varphi(q) &= \varphi(g^n(q)) = \varphi(g(g^{n-1}(q))) = F_4(\varphi(g^{n-1}(q))) \\ &= F_4(\varphi(g(g^{n-2}(q)))) = F_4(F_4(\varphi(g^{n-2}(q)))) \\ &= F_4^2(\varphi(g^{n-2}(q))) = \dots = F_4^n(\varphi(q)).\end{aligned}$$

Logo $\varphi(q) = p \in \text{Per}_n(F_4)$ e $p \in X$, já que $q \in Y$, então $\text{Per}(F_4) \cap X \neq \emptyset$ e, portanto, $x \in \text{Per}(F_4)$, ou seja, $\text{Per}(F_4) \supset I$. Como $\text{Per}(F_4) \subset I$ sempre acontece, $\text{Per}(F_4) = I$. Com isso, temos a primeira condição para F_4 ser caótica.

Para a segunda condição, sejam U e V abertos quaisquer de I . Logo, existem A e B , abertos em S^1 , tais que $A = \varphi^{-1}(U)$ e $B = \varphi^{-1}(V)$. Como g é transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $g^k(A) \cap B \neq \emptyset$, daí

$$\emptyset \neq \varphi(g^k(A) \cap B) \subseteq \varphi(g^k(\varphi^{-1}(U))) \cap \varphi(\varphi^{-1}(V)) = F_4^k(\varphi(\varphi^{-1}(U))) \cap V = F_4^k(U) \cap V,$$

logo, $F_4^k(U) \cap V \neq \emptyset$. E portanto, F_4 apresenta transitividade topológica.

Por fim, vamos mostrar que F_4 depende sensivelmente das condições iniciais. Para tanto, veja primeiro que, para qualquer aberto $O \subset [0, 1]$, deve existir $n \in \mathbb{N}$, tal que $g^n(\varphi^{-1}(O)) = S^{-1}$. De fato, para qualquer aberto O de $[0, 1]$, existem $\theta, \alpha \in \varphi^{-1}(O)$, com $\alpha \neq \theta$, onde $[\theta, \alpha] \subset \varphi^{-1}(O)$. Agora, veja que $\dim(g^n(\alpha), g^n(\theta)) = 2^n \cdot \dim(\alpha, \theta)$ e, portanto, $g^n(\varphi^{-1}(O))$ deve cobrir S^1 , a partir de algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, $g^n(\varphi^{-1}(O)) = S^{-1}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos que

$$[0, 1] = \varphi(S^{-1}) = \varphi(g^n(\varphi^{-1}(O))) = F_4^n(\varphi(\varphi^{-1}(O))) = F_4^n(O),$$

que nos diz que F_4 depende sensivelmente das condições iniciais. Provamos então, que F_4 é caótica. $\square$

Agora, vamos voltar por um momento à seção 2.3, que fala sobre entropia informacional. Pode-se calcular a entropia de uma função $f : I \rightarrow I$, com $I \in \mathbb{R}$, procedendo da seguinte forma, veja [15].

- Divide-se o intervalo onde se pretende medir a entropia em N subintervalos;
- A partir de uma condição inicial, itera-se a função muitas vezes, descartando os primeiros pontos, a fim de se tentar ficar apenas com a solução assintótica;
- Calcula-se a frequência relativa, associando f_j à razão entre o número de vezes que cada subintervalo- j é visitado e o número total (menos os descartados) de pontos (iterações), onde $j = 1, 2, \dots, N$;
- Daí, aplica-se a fórmula 2.4 para calcular a entropia informacional, usando os valores da frequência relativa f_j no lugar da probabilidade de ocorrência p_j ;

Considerando a função F_μ , com $\mu < 3$, veja que as sucessivas iterações devem permanecer no ponto fixo atrator, de modo que apenas o subintervalo- k que contém esse ponto é visitado, ou seja, $f_k = 1$ e $f_{j \neq k} = 0$. Então, para $\mu < 3$, tem-se $H = 0$, ou seja, não devemos ter caos nesse caso.

Agora, consideramos $\mu = 4$ e os passos descritos mais acima. Seja o ponto inicial $x_0 = 0.2$ e $N = 50$, realizando 10.000 iterações, descartando as 5.000 primeiras, encontramos as frequências relativas f_j e logo as probabilidades de ocorrência p_j e por fim, utilizando a fórmula 2.4, chegaremos que $H \approx 5.34808$.

Ou seja, o que fizemos aqui foi associar a densidade das iteradas no intervalo unitário a uma informação dentro de uma rede, quando essas iteradas se concentram em um único ponto, como foi o primeiro caso, a informação é previsível, e portanto devemos ter $H = 0$. Já quando existe uma certa imprevisibilidade na informação, isto é, as iteradas se espalham ao longo do intervalo, devemos ter que $H > 0$. Contudo, a associação de caoticidade de uma função e sua entropia é um assunto amplo e que por não se tratar do tema dessa dissertação não será aqui tratado.

Portanto, acabamos de mostrar alguns exemplos de aplicações que podem se dizer caóticas, no sentido Devaney. Foi definido, também, o que entendemos por caos segundo Devaney, contudo esse assunto será melhor explicitado no capítulo a seguir.

4 Equivalências no Caos de Devaney

Neste capítulo vamos apresentar e demonstrar alguns resultados relevantes sobre a definição de Caos apresentada por Devaney. Já vimos no capítulo anterior, que Robert L. Devaney, propõe em [11] três propriedades essenciais para a definição de sistemas caóticos: a primeira, vista na Definição 3.13, trata-se da densidade dos pontos periódicos no domínio da aplicação; a segunda, vista na Definição 3.15, consiste no fato da aplicação ser topologicamente transitiva; e a última, vista na Definição 3.19, trata-se da aplicação depender sensivelmente das condições iniciais.

Neste capítulo, mostraremos as possíveis equivalências dessas três condições apresentadas por Devaney. Na primeira seção deste capítulo, com base na referências [5] e [2], vamos demonstrar que apenas duas dessas três condições são necessárias para que um sistema seja considerado caótico e na segunda seção vamos mostrar que, retirado o caso anterior, nenhuma combinação de duas condições irá implicar em caos. Contudo, baseado na referência [6], vamos mostrar que, em intervalos, apenas transitividade implica em caos e, por fim, vamos apresentar uma definição alternativa para o caos de Devaney, com base em [10] e [21].

4.1 Transitividade e densidade implicam sensibilidade

Para esta seção, vamos considerar as funções aqui tratadas como contínuas e os espaços como espaços métricos. Geometricamente, dizer que uma aplicação depende sensivelmente das condições iniciais é dizer, que não importa o quão perto dois pontos estejam, sempre vamos achar um momento onde as respectivas iteradas de cada um desses pontos se distanciam. Uma consequência dessa propriedade é que em sistemas caóticos, erros minúsculos em simulações experimentais levam, eventualmente, a divergência em grande escala. Logo, a dependência sensível às condições iniciais é entendida como sendo a ideia central do caos. Contudo a sensibilidade, em espaços métricos, em geral não é preservada em uma conjugação topológica, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. Considere o intervalo aberto da reta real positiva $X = (1, \infty)$ e $Y = \mathbb{R}^+$, ambos equipados com a métrica usual. Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $h : X \rightarrow Y$ dadas por $f(x) = 2x$, $g(x) = x + \ln(2)$ e $h(x) = \ln(x)$. Temos que h é uma conjugação topológica entre f e g , já que h é um homeomorfismo e

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \ln(2x) = \ln(x) + \ln(2) = g(h(x)) = (g \circ h)(x).$$

Veja que f depende sensivelmente das condições iniciais. Escolhendo, $\beta = 1$, para quaisquer $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, com $y \neq x$, tal que

$|f^n(x) - f^n(y)| = |2^n x - 2^n y| = 2^n |x - y|$, como $2^n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $2^m |x - y| > 1$.

Contudo, como g é uma translação, ele não depende sensivelmente das condições iniciais, pois para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $|g^n(x) - g^n(y)| = |x + n \cdot \ln(2) - (y + n \cdot \ln(2))| = |x - y|$.

Se supormos que X é compacto, a sensibilidade pode ser preservada por uma conjugação topológica, como veremos a seguir.

Proposição 4.2. *Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ topologicamente conjugadas por h . Se X é compacto e f depende sensivelmente das condições iniciais, então g depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Temos que f depende sensivelmente das condições iniciais, logo existe $\delta > 0$, onde para todo $x_1 \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $x_2 \in X$ e $k \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_1, x_2) < \varepsilon$ e $d(f^k(x_1), f^k(x_2)) \geq \delta$. Seja, então,

$$D_\delta = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid d(x_1, x_2) \geq \delta\},$$

Claramente D_δ é fechado em $X \times X$, pois se $(a, b) \in \overline{D_\delta}$, então existe $(x_n, y_n) \subset D_\delta$ tal que $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow b$, mas por outro lado, $d(x_n, y_n) \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $d(a, b) \geq \delta$, ou seja, $(a, b) \in D_\delta$.

Agora, como X é compacto, temos que $X \times X$ é compacto e como D_δ é um subconjunto fechado de um compacto, logo ele é compacto. Denotando por $E_\delta = \bar{h}(D_\delta)$, onde $\bar{h}(x, y) = (h(x), h(y))$, temos que E_δ é compacto, já que $\bar{h}$ também é um homeomorfismo. Agora veja que E_δ não intersecta a diagonal Δ_Y de $Y \times Y$, logo existe $\delta_Y > 0$, a distância mínima entre E_δ e Δ_Y .

Mostremos agora que g depende sensivelmente das condições iniciais com constante de sensibilidade igual a δ_Y . Para isso, considere $y \in Y$, $y = h(x)$ e $\varepsilon > 0$ dado, como h é contínua, para tal ε e $x \in X$, existe $\xi > 0$, tal que se $x' \in X$ e $d(x, x') < \xi$, então $d(h(x), h(x')) < \varepsilon$.

Agora para esse $\xi > 0$ e usando que f depende sensivelmente das condições iniciais, temos que existe $k \in \mathbb{N}$ e $x' \in X$ tal que $d(x, x') < \xi$ e $d(f^k(x), f^k(x')) \geq \delta$.

Assim, encontramos $y' \in Y$, $y' = h(x')$, tal que

$$d(y, y') = d(h(x), h(x')) < \varepsilon$$

e

$$d(g^k(y), g^k(y')) = d(g^k(h(x)), g^k(h(x'))) = d(h(f^k(x)), h(f^k(x'))).$$

Como $d(f^k(x), f^k(x')) \geq \delta$, segue que $(f^k(x), f^k(x')) \in D_\delta$ e portanto $(h(f^k(x)), h(f^k(x')))) \in E_\delta$, logo $d(g^k(y), g^k(y')) \geq \delta_Y$. $\square$

Apesar de ser interessante o resultado anterior, o objetivo desse capítulo consiste na prova elementar de um Teorema que contém um surpreendente resultado.

Teorema 4.3. *Se $f : X \rightarrow X$ é transitivo e tem o conjunto dos pontos periódicos denso em X , então f depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Primeiro, observemos que existe $\delta_0 > 0$, tal que para todo $x \in X$, existe um ponto periódico q , cuja órbita está distante a pelo menos $\frac{\delta_0}{2}$ de x , ou seja, $d(x, O_f(q)) \geq \frac{\delta_0}{2}$, para algum $q \in \text{Per}(f)$. Onde, vale lembrar que

$$d(x, O_f(q)) = \inf \{|x - f^k(q)|\}.$$

De fato, considere q_1 e q_2 dois pontos periódicos distintos e com órbitas disjuntas, isto é, $O_f(q_1) \cap O_f(q_2) = \emptyset$ e denote por $\delta_0 = d(O_f(q_1), O_f(q_2))$. Assim se $x \in X$ é um ponto qualquer e, sem perda de generalidade, se x está a uma distância menor que $\frac{\delta_0}{2}$ da órbita de q_1 , então a bola aberta de centro em x e raio $\frac{\delta_0}{2}$ contém algum ponto de $O_f(q_1)$ e essa bola não pode conter nenhum ponto de $O_f(q_2)$ pois senão $d(O_f(q_1), O_f(q_2)) < \delta_0$. Portanto $d(x, O_f(q_2)) \geq \frac{\delta_0}{2}$.

Vamos mostrar que f tem dependência sensível com relação às condições iniciais, com constante de sensibilidade igual a $\delta = \frac{\delta_0}{8}$.

Sejam $x \in X$, um ponto qualquer e N alguma vizinhança aberta de x . Como os pontos periódicos são densos em X , existe $p \in \text{Per}(f)$, tal que $p \in U = N \cap B_\delta(x)$, onde $B_\delta(x)$ é a bola de centro em x e raio δ . Vamos considerar n o período de p . Como vimos anteriormente, existe um ponto periódico $q \in X$ cuja órbita $O_f(q)$ é distante pelo menos 4δ de x , com $q = q_1$ ou $q = q_2$. Seja

$$V = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B_\delta(f^i(q))).$$

Primeiro, veja que $V \neq \emptyset$, pois pelo menos $q \in V$ e, como f é uma função contínua, $B_\delta(f^i(q))$ é uma bola aberta para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n$, então $f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$ é um aberto em X , para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Ainda, como V é uma interseção finita de abertos, então V é aberto. Consequentemente, como f é transitiva, existem $y \in U$ e um $k \in \mathbb{N}$ tais que $f^k(y) \in V$.

Agora, seja j a parte inteira de $\frac{k}{n} + 1$. Então,

$$\frac{1+k}{n} \leq j \leq 1 + \frac{k}{n} \Rightarrow 1 \leq nj - k \leq n.$$

Logo, por construção, temos

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subseteq f^{nj-k}(f^{-(nj-k)}(B_\delta(f^{nj-k}(q)))) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

Como $f^{nj}(p) = p$, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &= d(p, f^{nj}(y)) = d(f^{nj}(y), p) \\ &\geq d(f^{nj}(y), x) - d(x, p) = d(x, f^{nj}(y)) - d(p, x), \\ &\geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x) \end{aligned}$$

onde d é a função distância em X . Consequentemente, como $p \in B_\delta(x)$, $f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$ e $d(x, f^{nj-k}(q)) \geq d(x, O(q)) \geq \frac{\delta_0}{2} = 4\delta$, então

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Novamente, usando a desigualdade triangular, temos que

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) + (f^{nj}(x), f^{nj}(y)) \geq d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 2\delta.$$

Isto nos diz que, $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$ ou $d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta$ mas, em todo caso, achamos um ponto em N cuja a nj -ésima iterada é distante δ de $f^{nj}(x)$. $\square$

4.2 Demais Equivalências no Caos de Devaney

Dadas as definições de caoticidade, abordadas anteriormente, vimos que transitividade e densidade implicam sensibilidade, mas não foi mencionado se quaisquer outras duas propriedades, implicam a terceira. O que vamos fazer agora é justamente mostrar que essa possibilidade nem sempre é possível. Primeiro, note que transitividade e sensibilidade não implicam em densidade dos pontos periódicos, como é mostrado no próximo exemplo.

Exemplo 4.4. Seja $X = S^1 \setminus \{e^{i2\pi \frac{p}{q}} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, equipada com a métrica usual (comprimento de arco) d . Definimos a função contínua, $f : X \rightarrow X$, por $f(e^{i\theta}) = (e^{i\theta})^2$. Veja que essa função não contém pontos periódicos, já que

$$f^n(e^{i\theta}) = e^{i\theta} \Leftrightarrow (e^{i\theta})^{2^n} = e^{i\theta},$$

o que implica em $i\theta = i2^n\theta + 2i\pi p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$, o que só ocorre quando $\theta = 2\pi \frac{p}{1-2^n}$, onde $1-2^n = q \in \mathbb{Z}_*$ e, como esses pontos não pertencem a X , segue que f não contém pontos periódicos. Observe, também, que dado quaisquer $e^{i\theta} \in X$ e $e^{i\phi} \in X$, temos que

$$d(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = |\theta - \phi|,$$

é uma medida. Podemos ver que f é transitiva, pois note que a cada iterada, f dobra o ângulo, consequentemente vai dobrar de tamanho uma região aberta de X e, portanto em alguma iterado esse aberto irá cobrir X , ou seja, dados quaisquer abertos U e V em X , existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $f^j(U) \cap V \neq \emptyset$.

Ainda, f depende sensivelmente das condições iniciais, pois considerando $\beta = \frac{\pi}{2}$, dados quaisquer $e^{i\theta} \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $e^{i\phi} \in X$, onde $e^{i\theta} \neq e^{i\phi}$, com $d(e^{i\theta}, e^{i\phi}) < \varepsilon$, e como temos que

$$d(f^k(e^{i\theta}), f^k(e^{i\phi})) = |2^k\theta - 2^k\phi| = |2^k(\theta - \phi)| = 2^k|\theta - \phi|.$$

Então existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $2^k|\theta - \phi| < \pi < 2^{k+1}|\theta - \phi|$, ou seja,

$$d(f^k(e^{i\theta}), f^k(e^{i\phi})) > \frac{\pi}{2}.$$

Agora, vamos mostrar no exemplo a seguir que ter pontos periódicos densos no domínio e dependência sensível às condições iniciais não implicam em transitividade.

Exemplo 4.5. Considere o cilindro $Y = S^1 \times I$, onde $I = [0, 1]$, munido com a métrica da soma. Definimos a função contínua $g : Y \rightarrow Y$, onde $g(e^{i\theta}, t) = (e^{i2\theta}, t)$. Veja que g não é transitivo, por exemplo, para os abertos $U = S^1 \times [0, \frac{1}{4})$ e $V = S^1 \times (\frac{3}{4}, 1]$, temos que

$$g^n(U) \cap V = \emptyset,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. No entanto, g tem os pontos periódicos densos em Y , uma vez que $\text{Per}(g) = \text{Per}(f) \times I$, onde $f : S^1 \rightarrow S^1$, $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ e, como já vimos, $\overline{\text{Per}(f)} = S^1$. Logo,

$$Y = S^1 \times I = \overline{\text{Per}(f)} \times I = \overline{\text{Per}(f) \times I} = \overline{\text{Per}(g)}.$$

Além disso, g também depende sensivelmente das condições iniciais, pois basta notar que

$$d(g^k(e^{i\theta}, x), g^k(e^{i\phi}, y)) = d(f^k(e^{i\theta}), f^k(e^{i\phi})) + |x - y| > \frac{\pi}{4},$$

e de forma análoga ao que foi feito no Exemplo 4.4.

4.3 Em intervalos, a transitividade implica caos

Como já mostramos, na seção 4.1, transitividade e densidade dos pontos periódicos implicam sensibilidade. Nessa seção, como já diz o nome, mostraremos que, em intervalos, a transitividade implica caos, e para isso, basta demonstrarmos que transitividade implica densidade dos pontos periódicos. Para tanto, consideremos o seguinte Lema.

Lema 4.6. *Suponha que I é um intervalo, não necessariamente limitado, e $f : I \rightarrow I$ uma função contínua. Se $J \subset I$ é um intervalo que não contém pontos periódicos de f e $z, f^m(z)$ e $f^n(z) \in J$ com $0 < m < n$, então $z < f^m(z) < f^n(z)$ ou $z > f^m(z) > f^n(z)$.*

Demonstração. Vamos supor que $z < f^m(z)$, pois $z \in J$ e $f^k(z) \neq z$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e definimos $h(x) = f^m(x)$. Afirmamos que, como $z < h(z)$, então $h(z) < h^{k+1}(z)$, para todo número natural $k \geq 1$, por indução. Pois, caso contrário, se $z < h(z) < h^k(z)$ e $h(z) > h^{k+1}(z)$, para um certo $k \in \mathbb{N}_*$, então a função contínua $\varphi(x) = h^k(x) - x$ assume valor positivo no ponto $x = z$, isto é, $h^k(z) - z > 0$ e valor negativo para $x = h(z)$, visto que $h^k(h(z)) - h(z) = h^{k+1}(z) - h(z) < 0$.

Considerando o intervalo $[z, h(z)] \subset J$, como $\varphi(h(z)) < 0 < \varphi(z)$ então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (z, h(z))$, tal que $\varphi(c) = 0$, ou seja, $h^k(c) = c \Rightarrow f^{km}(c) = c$, ou seja c é um ponto periódico de f em J o que é uma contradição.

Então, de fato, $z < h^k(z)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, em particular, para $k = n - m > 0$, temos

$$z < f^{m(n-m)}(z).$$

Agora, como $f^m(z) \in J$, veja que

$$f^m(z) < f^{(n-m)}(f^m(z)),$$

pois, caso contrário, de forma similar ao que foi feito anteriormente, com $h = f^{(n-m)}$, temos $f^m(z) < h^k(f^m(z))$ e então, $f^m(z) > f^{(n-m)m}(f^m(z))$, para um $k = m$ e

daí, levando em consideração que $z < f^{m(n-m)}(z)$ e, novamente, usando o Teorema do Valor Intermediário, existiria um ponto $c \in (z, f^m(z)) \subset J$ periódico de f , de período $(n-m)m$. Portanto,

$$f^m(z) < f^{(n-m)}(f^m(z)) \Rightarrow f^m(z) < f^n(z)$$

e, logo, $z < f^m(z) < f^n(z)$. De maneira análoga, temos que se $z < f(z)$, então $z > f^m(z) > f^n(z)$. $\square$

Proposição 4.7. *Seja I um intervalo, não necessariamente limitado, e $f : I \rightarrow I$ uma função contínua e topologicamente transitiva. Então f depende sensivelmente das condições iniciais e os pontos periódicos de f são densos em I .*

Demonstração. Já mostramos no Teorema 4.3 que se f é transitiva e tem pontos periódicos densos, então f depende sensivelmente das condições iniciais, então vamos nos atentar em demonstrar que a transitividade de f implica que seus pontos periódicos são densos em I .

Suponhamos então que f é transitiva e não tem seus pontos periódicos densos em I , então existe um intervalo $J \subset I$ que não contém pontos periódicos. Escolhemos x no interior de J , uma vizinhança de x aberta $N \subsetneq J$ e um intervalo também aberto $E \subset J \setminus N$. Como f é transitivo, então existe $m \in \mathbb{N}$, com $f^m(N) \cap E \neq \emptyset$ e $f^i(N) \cap E = \emptyset$, para todo $i < m$. Logo, existe um $y \in N \subset J$ com $f^m(y) \in E \subset J$.

Sabido que J não contém pontos periódicos, temos que $y \neq f^m(y)$ e ainda, como f é contínua, temos que f^m é contínuo, para todo $m \in \mathbb{N}$, logo existe U aberto suficientemente pequeno, vizinhança de y tal que, para todo $i \leq m$, temos

$$f^i(U) \cap U = \emptyset.$$

Agora, como U é um aberto e f é topologicamente transitivo, deve existir $n > m$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, isto é, existe um $z \in U$ tal que $f^n(z) \in U$. Por conseguinte, temos $0 < m < n$; $z, f^n(z) \in U$ e $f^m(z) \notin U$, o que viola o Lema 4.6. Portanto, não existe intervalo $J \subset I$ sem pontos periódicos e, logo, os pontos periódicos de f são densos em I . $\square$

Note que a prova não pode ser generalizada para espaço de dimensões maiores ou até mesmo para o círculo unitário, já que o Lema utilizado na prova essencialmente é baseado na ordenação de $\mathbb{R}$, o que não ocorre nesses espaços.

É interessante acrescentar, também, que nenhuma das outras duas condições ou combinações, retirada a que foi tratada no seção 4.1, implica em caos, mesmo em intervalos, como veremos a seguir.

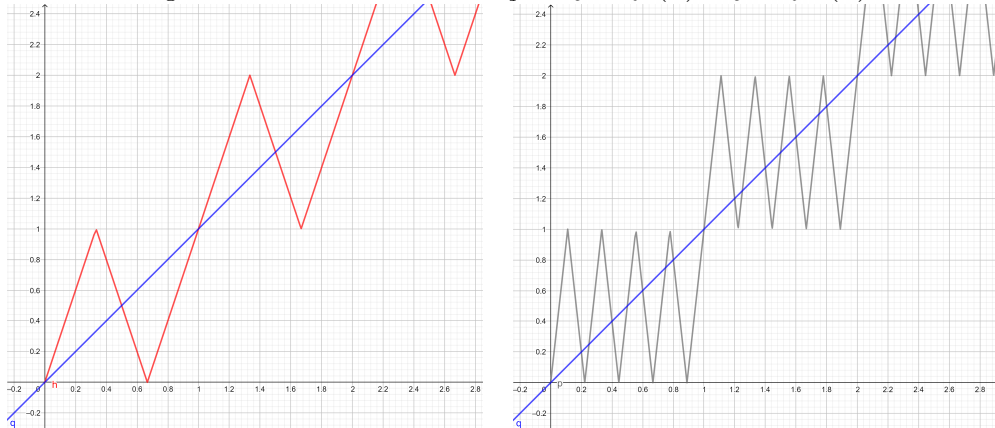
Exemplo 4.8. Afirmamos que uma função contínua, sobre um intervalo, com pontos periódicos densos nesse intervalo, não tem necessariamente dependência sensível às condições iniciais. De fato, basta tomarmos como exemplo a função identidade, $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $i(x) = x$. Todos os pontos de $\mathbb{R}$ são pontos periódicos e portanto o conjunto dos pontos periódicos é todo o domínio, contudo ela não depende sensivelmente das condições iniciais.

Exemplo 4.9. Uma função contínua, definida num intervalo, que tem a dependência sensível com relação às condições iniciais e os pontos periódicos densos, não é necessariamente transitiva. Para tanto, basta definirmos $f : I \rightarrow I$, com $I = \mathbb{R}_+$ e

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ -3x + 2 & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ f(x-1) + 1 & x \geq 1 \end{cases}.$$

Para demonstrar que ela depende sensivelmente das condições iniciais, primeiro, vamos supor $\beta = \frac{1}{2}$. Note que, no intervalo $(0, 1)$, para n iterações de f , temos 3^n intervalos, associados a 3^n equações diferentes. Esse valor, de 3^n , vem dos arranjos que podem ser feitos com as três equações definidas nesse intervalo. Já o comprimento de cada subintervalo é de $\frac{1}{3^n}$, pois o coeficiente angular da f^n é 3^n e cada subintervalo tem imagem pela f^n no intervalo $[0, 1]$, como pode ser visto na Figura 4.1.

Figura 4.1: Gráfico das funções $y = f(x)$ e $y = f^2(x)$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Então, dados $x \in I$ e $\varepsilon > 0$, deve existir um $n \in \mathbb{N}$, tal que o intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contém $J_{k,n} = \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} \right]$, com $x \in J_{k,n}$, onde $f^n(J_{k,n}) = I_k$, sendo I_k um intervalo de comprimento unitário. Logo, como $I_k \subset \mathbb{R}$, existe $y \in J$, próximo o suficiente de $\frac{k}{3^n}$ caso x esteja mais próximo de $\frac{k+1}{3^n}$ e vice e versa, tal que $|f^n(y) - f^n(x)| \geq \beta$. Portanto, f depende sensivelmente das condições iniciais.

Para mostrar a densidade dos pontos periódicos de f em I , primeiro, perceba que todos os números naturais, mais o zero, são pontos fixos ou periódicos de f . De fato, temos que

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \cdot 0 = 0 \\ f(1) &= f(1-1) + 1 = f(0) + 1 = 1 \\ f(2) &= f(2-1) + 1 = f(1) + 1 = 2, \\ &\vdots \\ f(k) &= f(k-1) + 1 = k-1 + 1 = k \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Segundo, veja que, para todo intervalo $(k, k+1)$ contido em I , com $k \in \mathbb{N}$, após k iterações, temos

$$f^k(x) = f(\{x\}) + k,$$

onde $x \in (k, k+1)$, isso significa que basta analisarmos o intervalo $(0, 1)$ e logo a densidade em $(0, 1)$ implicará na densidade de toda reta real positiva. Agora, se considerarmos os 3^n intervalos, já citados, veja que as funções f^n restritas ao intervalo $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$, devem ter, cada uma, um ponto fixo, já que $f^n\left(\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]\right) = I_k$, o que nos leva ao número de $3^n - 2$ pontos fixos para f^n , isto é, teremos $3^n - 2$ pontos periódicos de período n . Sendo menos dois pois, as equações que sempre estão definidas em $\left[0, \frac{1}{3^n}\right)$, ou em $\left[\frac{2}{3^n}, 1\right)$, têm como pontos fixos, para qualquer iteração, os números 0 e 1 que estão fora do intervalo.

Por outro lado, veja que, para f existe um ponto fixo no intervalo $(0, 1)$, então temos a distância de uma unidade para o próximo, para f^2 temos 9 intervalos e 7 pontos fixos no intervalo $(0, 1)$, sendo a distância de $\frac{1}{3}$ entre cada ponto, para f^3 são 27 intervalos e 25 pontos fixos no intervalo $(0, 1)$, com a distância de $\frac{1}{9}$ entre eles, assim, podemos admitir que, para f^n , a distância entre dois pontos fixos seguidos é $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Então quando n cresce, o número de pontos fixos para f^n , ou periódicos de f cresce e a distância entre dois desses pontos seguidos vai para zero. Portanto, os pontos periódicos são densos em $(0, 1)$ e consequentemente são densos em toda reta real positiva.

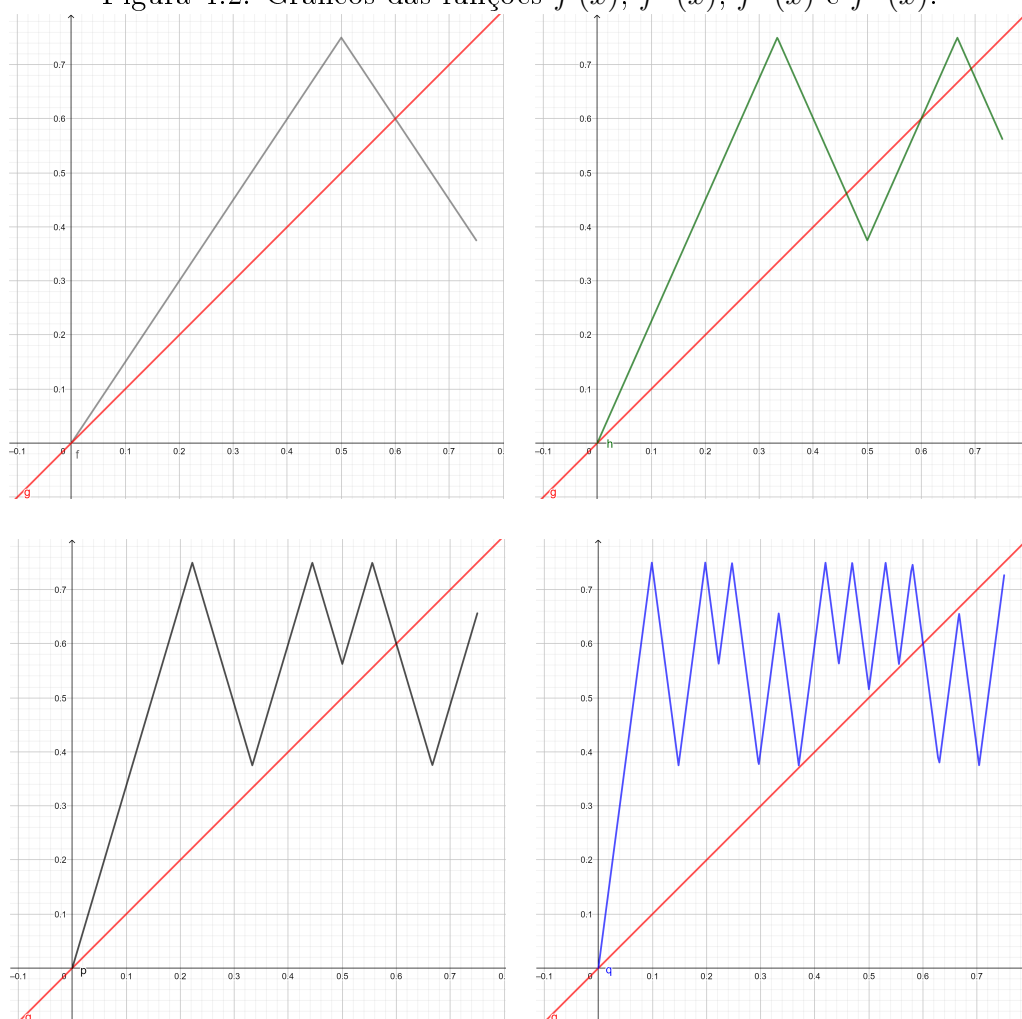
Contudo, como podemos ver, $f^p((0, 1)) = (0, 1)$ e $f^q((1, 2)) = (1, 2)$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$. Logo, isso nos diz que f não pode ser transitiva.

Observação 4.10. Veja que o exemplo anterior vale para qualquer intervalo $[0, k+1]$, com $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.11. Uma função contínua, definida num intervalo, que tem a dependência sensível com relação às condições iniciais, mas não tem necessariamente seus pontos periódicos densos. Consideremos o intervalo $I = \left[0, \frac{3}{4}\right]$ e a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Veja que, de forma análoga ao exemplo anterior, podemos dizer que essa função depende sensivelmente das condições iniciais mas ao contrário desse mesmo exemplo, essa função não contém pontos periódicos no intervalo $\left(0, \frac{3}{8}\right)$, já que $x < f(x) < f^2(x) < \dots < f^k(x)$, e existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $f^k(x) \geq \frac{3}{8}$, para cada $x \in \left(0, \frac{3}{8}\right)$ e uma vez fora desse intervalo, não há possibilidade de retorno, como pode ser melhor visto na Figura 4.2.

Figura 4.2: Gráficos das funções $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$ e $f^5(x)$.

Fonte: Figura elaborada pelo autor.

E ainda, um contra exemplo claro para o caso de intervalo infinito, é o que consideramos $I = \mathbb{R}_+$ e $f(x) = 2x$.

Dito e exemplificado, sobre as outras duas condições, menos a que foi tratada no Seção 4.1, não implicarem em caos, é interessante observar, que isso não é verdade para todos os domínios, como se pode verificar no Teorema 7.1 da referência [19].

4.4 Uma definição alternativa para transitividade

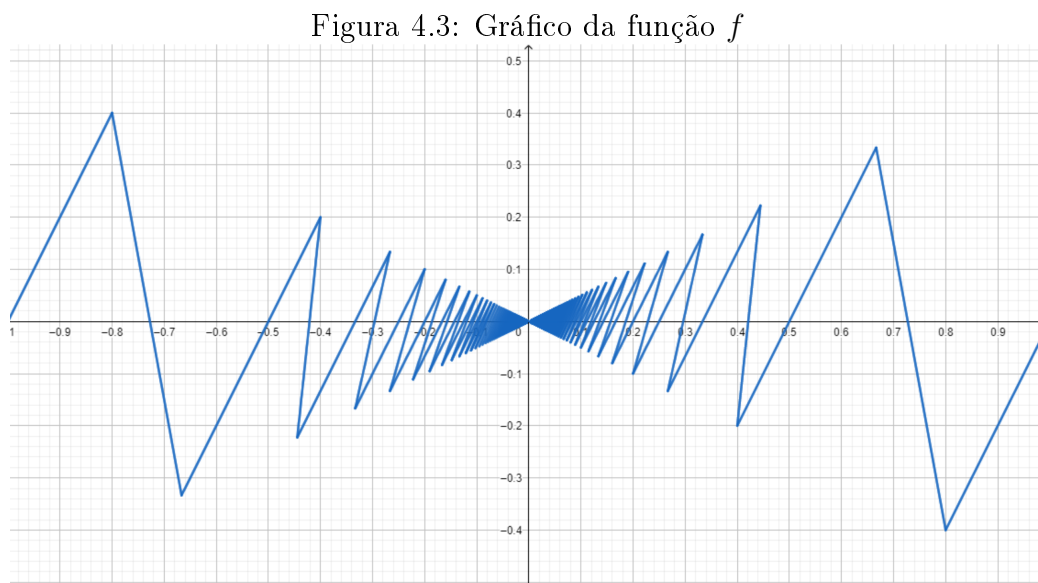
Nessa seção, vamos apresentar duas novas definições que nos irão conduzir a uma nova definição do Caos de Devaney. Note que as definições que serão apresentadas são como uma contraparte intuitiva à dependência sensível com relação às condições iniciais, dependência esta que, de certa forma, “empurra” pontos próximos afim de separá-los, já o fortemente e fracamente misturado, que serão definidos a seguir, “puxam” pontos distantes afim de os aproximá-los.

Definição 4.12. Uma função $f : M \rightarrow M$ é dita *fracamente misturadora* se, para qualquer par de abertos não vazios U e V em M , existe algum $k > 0$, tal que $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$. E, dizemos que f é *fortemente misturadora* se, para qualquer par de abertos não vazios U e V em M , existe algum $k > 0$ e um aberto não vazio B de M , tal que $B \subset f^k(U) \cap f^k(V)$.

Observe que as funções fortemente ou fracamente misturadoras não são necessariamente transitivas e as funções transitivas não são necessariamente fortemente ou fracamente misturadoras. Considere os dois exemplos a seguir.

Exemplo 4.13. Seja a função $T_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$, com $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$, tratada anteriormente no Teorema 2.13. Como cada órbita de T_λ é densa em S^1 , pela Proposição 3.17, T_λ é transitivo. Contudo, T_λ não é fracamente misturadora e logo, também, não é fortemente misturadora, tendo em vista que dados dois abertos A e B disjuntos, se existir $k > 0$ tal que $T_\lambda^k(A) \cap T_\lambda^k(B) \neq \emptyset$, isso implicaria que existe $T_\lambda^k(\theta) \in T_\lambda^k(A)$ e $T_\lambda^k(\theta) \in T_\lambda^k(B)$, mas como T_λ é uma função injetiva, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, isso nos diz que $\theta \in A \cap B$, o que contradiz a hipótese de B e A serem disjuntos.

Exemplo 4.14. Agora, vamos analisar a função $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, cujo o gráfico é apresentado na Figura 4.3.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Primeiro, veja que $|f^n(x)| \rightarrow 0$ de forma monótona, conforme $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in [-1, 1]$. Isso nos diz que a função não pode ser transitiva, pois não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n((-1, -0.8)) \cap (0.8, 1) \neq \emptyset$, por exemplo.

Contudo, ela é fortemente misturadora, já que para qualquer aberto V e U que escolhermos, devem existir $\varepsilon, \delta > 0$ e um $n \in \mathbb{N}$, onde $f^n(V) \supset (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $f^n(U) \supset (-\delta, \delta)$. Isso porque conforme iteramos essa função, o comprimento dos intervalos diminui e devem conter elementos tanto positivos, quanto negativos. Já que $f^n(x) \rightarrow 0$ de forma

alternada, ou seja, o resultado das iteradas tem seus sinais alternados conforme $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in [-1, 1]$, e sendo $\varepsilon < \delta$, temos $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset f^n(V) \cap f^n(U)$.

Uma característica comum desses dois exemplos é que nenhum deles possui pontos periódicos densos, o primeiro exemplo não possui pontos periódicos e o segundo exemplo possui um único ponto fixo. Se incluirmos pontos periódicos densos, a ideia de transitividade e misturadora para funções unidimensionais têm uma relação forte, especialmente quando se está considerando o caos. Isso pode ser visto nos teoremas a seguir.

Teorema 4.15. *Sejam M um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : M \rightarrow M$ uma função contínua com pontos periódicos densos em M . Se f é fortemente misturadora, então é também transitiva.*

Demonstração. Sejam dois conjuntos abertos quaisquer U e V de M . Como f é fortemente misturadora, sabemos que existem $k \in \mathbb{N}$ e um subconjunto N aberto de M , tal que $N \subset f^k(U) \cap f^k(V)$. Vamos considerar, por conveniência, que $\tilde{V} = f^{-k}(N) \cap V$. Note que, como f é contínua, o subconjunto $\tilde{V}$ é a intersecção de dois abertos, logo um aberto de M . Pela hipótese da densidade dos pontos periódicos em M , existe $x \in \tilde{V}$, tal que $f^p(x) = x$, para algum $p > k$ (por exemplo, basta escolhermos $p = n \cdot k$, onde n é o período de x). Considerando o fato de $f^k(x) \in N$ e $N \subset f^k(U)$, existe $y \in U$, tal que $f^k(x) = f^k(y)$, com $f^k(y) \in f^k(U) \cap f^k(V)$. Logo, seja $p = q + k$, daí

$$f^p(y) = f^{(q+k)}(y) = f^q(f^k(y)) = f^q(f^k(x)) = f^{(q+k)}(x) = f^p(x) = x$$

e, portanto, $x \in f^p(U) \cap V \neq \emptyset$. □

Então, a partir daqui podemos dizer, com base no Teorema anterior, que f contínua com pontos periódicos densos e fortemente misturadora implica em caos de Devaney.

Observação 4.16. Veja que a hipótese da existência de um aberto N na intersecção não pode ser retirada, ou seja, ser fracamente misturadora não implica em transitividade, como mostra o contra exemplo a seguir.

Exemplo 4.17. Vamos considerar função $T : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, onde

$$T(x) = \begin{cases} -2(x+1), & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x, & \text{se } |x| < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Figura 4.4: Gráficos da função $T(x)$ e de suas segunda e terceira iteradas $T^2(x)$ e $T^3(x)$.

Fonte: Figura elaborada pelo autor.

De forma similar ao que foi feito no Exemplo 4.9, temos que a função T^n possui $2^{n+1} - 1$ pontos fixos e que a distância entre dois desses pontos seguidos é de pelo menos $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ com $n \in \mathbb{N}$. E, portanto, podemos dizer que os pontos periódicos de T são densos no intervalo $[-1, 1]$.

Agora, vamos considerar o intervalo $[0, 1]$. Veja que para qualquer $x \in [0, 1]$, $T^k(x) \geq 0$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $T^k(x) \notin [-1, 0)$, para todo k e, com isso, T não é transitiva.

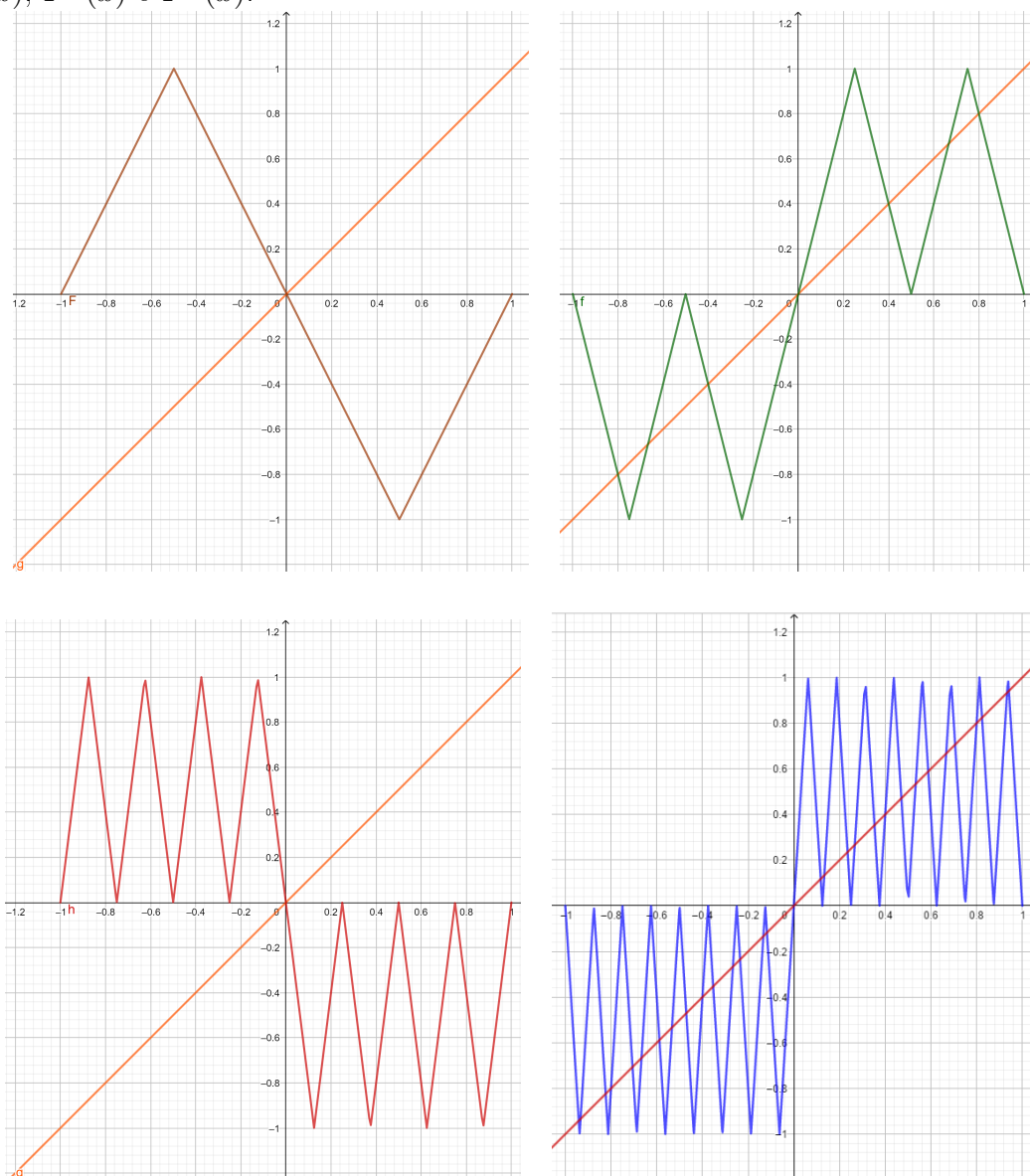
Analisando os gráficos de $T(x)$, $T^2(x)$ e $T^3(x)$ (restrito ao intervalo $[0, 1]$, por exemplo), podemos observar que a iterada o intervalo no qual T^n é sobrejetora é dividido em duas partes iguais e, em cada uma dessas partes (subintervalos) temos uma cópia do gráfico de T , logo será também sobrejetora nesses novos subintervalos. Além disso, podemos observar também que pelo menos uma das extremidades desses subintervalos é levada no ponto zero, ou seja, são eventualmente fixos. Essa mesma dinâmica ocorre na parte negativa $[-1, 0]$.

Assim, dados dois abertos U e $V \subset [-1, 1]$ e disjuntos existe um $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, onde U e V contém, em seu interior, um desses subintervalos obtidos em cada iterada de T e uma dessas extremidades desses subintervalos é levada na origem pela T^k , isto é, $0 \in T^k(U) \cap T^k(V)$, ou seja, T é fracamente misturadora.

Pode-se indagar se o inverso vale, ou seja, se o caos implica em fortemente misturadora, mas isso não ocorre, como poderá ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 4.18. Considerado a função $F(x) = -T(x)$, sendo T a função do Exemplo 4.17.

Figura 4.5: Gráficos das funções $F(x)$ e das suas segunda, terceira e quarta iterada $F^2(x)$, $F^3(x)$ e $F^4(x)$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Veja que $F^{2n}(x) = T^{2n}(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso nos diz que, assim como a $T(x)$ do Exemplo 4.17, a função tem os pontos periódicos densos em $[-1, 1]$. Porém, como pode ser visto na Figura 4.5, $F(x)$ é transitiva e a prova é análoga ao do Exemplo 4.9. Portanto, temos mais que o necessário, se considerarmos a Proposição 4.7, para admitir que $F(x)$ é caótica. Contudo, ela não é fortemente misturadora pois, se escolhermos dois intervalos que estão em lados opostos com relação ao eixo Oy , eles jamais, na mesma iterada, terão pontos distintos que não seja o 0, logo F é somente fracamente misturante.

Todavia, podemos enunciar uma versão fraca dessa recíproca, que será o Teorema 4.20 adiante, mas antes disso, necessitamos do seguinte Lema.

Lema 4.19. *Seja $f : I \rightarrow I$ uma função contínua e transitiva, I um intervalo compacto e x_0 um ponto fixo repulsor de I . Então:*

1. x_0 tem um número infinito de eventuais pré-imagens em I ;
2. As eventuais pré-imagens de x_0 são densas em I .

Demonstração. Para a primeira parte do Lema, vamos mostrar por indução. Para isso, consideremos o conjunto formado pelas $n - 1$ pré-imagens do x_0 e o próprio x_0 , a saber, $X_n = \{x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0\}$, onde $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ e mostremos que sempre conseguimos um novo elemento y , fora desse conjunto, tal que $f(y) = x_{-n}$, assim, esse conjunto pode ser aumentado por um ponto a cada iterada inversa e, então, x_0 possuirá infinitas pré-imagens. Naturalmente, se $n = 0$, então $X_0 = \{x_0\}$. Veja que esse é um dos caminhos possíveis das pré-imagens de x_0 .

Definimos, $B_\varepsilon = B(x_{-n}, \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$ qualquer, a bola de raio ε e centro em x_{-n} . Escolhemos, agora, um conjunto aberto U de I , com $X_n \subset U$ e que satisfaz as seguintes condições:

- (1) se $y \in U$ então $f(y) \neq x_{-n}$, ou seja, $f(U) \cap \{x_{-n}\} = \emptyset$ (a não ser que $n = 0$ e $y = x_0$);
- (2) $f(U \setminus B_\varepsilon) \cap B_\varepsilon = \emptyset$, sendo essa condição possível graças a continuidade da função f . No caso em que $n = 0$, usamos o fato de que x_0 é um ponto repulsor, ou seja, qualquer vizinhança suficientemente pequena de x_0 é expandida pela f e logo (2) é satisfeito.

Dadas as condições, como U é aberto, temos que U^c é fechado e $U^c \cap B_\varepsilon = \emptyset$. Sabemos que $\text{int}(U^c)$ é aberto e, usando a transitividade de f para esse aberto e B_ε , existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $f^{k+1}(\text{int}(U^c)) \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$ e, como $f^{k+1}(\text{int}(U^c)) \subset f^{k+1}(U^c)$, então $f^{k+1}(U^c) \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$, para algum $k \geq 0$. Vamos mostrar que isso também é válido para $k = 0$, isto é, $f(U^c) \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$. Para isso, vamos definir um subconjunto de pontos Y da seguinte forma:

$$Y = \{y \in U^c \mid f^{k+1}(y) \in B_\varepsilon : f^j(y) \notin B_\varepsilon \text{ se } 1 \leq j \leq k\}.$$

Note que, da definição de Y , temos claramente

$$f^k(Y) \cap B_\varepsilon = \emptyset. \quad (4.1)$$

Além disso, temos $f^k(y) \in U^c$ se $y \in Y$, pois, caso contrário, se $f^k(y) \notin U^c \Rightarrow f^k(y) \in U$, mas $f^k(y) \in f^k(Y)$, daí da equação (4.1), temos que $f^k(y) \notin B_\varepsilon \Rightarrow f^k(y) \in U \setminus B_\varepsilon$ e, então, da condição (2) acima, concluímos que $f(f^k(y)) = f^{k+1}(y) \notin B_\varepsilon$, o que contradiz a definição do conjunto Y , pois $y \in Y$.

Portanto, $f^k(Y) \subset U^c$ e $f(f^k(Y)) \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$ o que implica em

$$f(U^c) \cap B_\varepsilon \neq \emptyset.$$

conforme queríamos.

Assim, para $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $x_\varepsilon \in U^c$, tal que $f(x_\varepsilon) \in B_\varepsilon$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{k}$, conseguimos uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U^c$ tal que $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \subset B_{\frac{1}{k}}$, todavia, a sequência das bolas $B_{\frac{1}{k}}$ colapsa em x_{-n} . Portanto, $f(x_k) \rightarrow x_{-n}$. Agora U^c é compacto e $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset U^c$, então, sem perda de generalidade (já considerando uma subsequência), temos que $x_k \rightarrow y \in U^c$, daí como f é contínua, $f(x_k) \rightarrow f(y)$, ou seja, $f(y) = x_{-n}$, conforme queríamos mostrar e isso prova a primeira parte do Lema.

Para segunda parte, consideremos o conjunto das pré-imagens de x_0 , isto é,

$$X = \{y \in I \mid f^k(y) = x_0, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

e queremos mostrar que esse conjunto é denso em I . Para isso, note que se X for denso em alguma parte de I , isto é, se existe um intervalo aberto $J \subset I$ tal que para qualquer ponto $b \in J$ e $\varepsilon > 0$, existe $x_b \in X$ tal que $|x_b - b| < \varepsilon$, então a transitividade de f dará que X é denso em qualquer lugar de I , ou seja, denso em I .

De fato, seja $a \in I$ ponto qualquer e $B_\varepsilon = B(a, \varepsilon)$ a bola aberta de centro a e raio ε . Pela transitividade de f , existem $k \in \mathbb{N}$ e $y \in J$ tais que $f^k(y) \in B_\varepsilon$. Agora, para tal $y \in J$, existe $x_y \in X$ suficientemente próximo de y , assim, pela continuidade de f^k , temos $f^k(x_y) \in B_\varepsilon$. Por fim, como $x_y \in X$, então

$$f^S(x_y) = x_0 \Rightarrow f^S(f^k(x_y) = x_0) = f^k(f^S(x_y) = x_0) = f^k(x_0) = x_0 \Rightarrow f^k(x_y) \in X.$$

Portanto, dado $a \in I$ e uma vizinhança qualquer desse ponto, conseguimos um ponto em X nessa vizinhança, ou seja, X é denso em I .

Resta então, provar que X é denso em alguma parte de I todavia, suponhamos que isso não é verdade, logo X é totalmente desconexo.

Neste caso, temos que X^c é aberto, logo existe uma família $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, onde $X^c = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$ e os I_i 's são intervalos abertos distintos, sendo seus pontos extremos elementos de X e, portanto, disjuntos. Repare ainda, que essa família de abertos é infinita, justamente por X ser infinito, como demonstramos anteriormente. Agora, veja que x_0 deve ser o ponto extremo de dois I_i 's, que denotamos $I_1 = (x_0, a)$ e $I_0 = (b, x_0)$, para algum $a, b \in X$.

Primeiramente, note que como f é uma função contínua e I_i é conexo, $f(I_i)$ também é conexo, ou seja, $f(I_i)$ deve estar contido, ou ser, algum dos intervalos I_i 's. Além disso, sendo x_0 um ponto fixo, temos que $f(I_1)$ e $f(I_0)$, devem ter como um dos pontos limites o x_0 e como $a, b \in X$ então, $f(a) \neq a$, $f(b) \neq b$, $f(a) \notin I_i$ e $f(b) \notin I_i$, para qualquer i . Juntando esses dois fatos, temos que; ou $f(I_1) \subset I_1$, ou $f(I_1) \subseteq I_0$ e, neste caso, $f^2(I_1) \subset I_0$, onde ou $f(a) = x_0$; ou $f(a) = b$ e $f(b) = x_0$. De qualquer forma, temos, portanto, que $f^k(I_1) \subset I_i$, para qualquer $i \neq 0, 1$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, o que contradiz a hipótese de f ser transitiva, pois I_1 teria que visitar todos os infinitos intervalos I_i . Logo, temos um absurdo, que surgiu de termos suposto que X não era denso em I , assim, terminamos a prova do Lema. $\square$

Em posse desse Lema, podemos demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 4.20. *Sejam $f : I \rightarrow I$ uma função contínua e transitiva, I um intervalo compacto e x_0 um ponto fixo repulsor de I . Então f é fracamente misturadora.*

Demonstração. Sejam U e V dois abertos quaisquer de I . Pela segunda parte do Lema anterior, devem existir $u \in U$ e $v \in V$, $k, j \in \mathbb{N}$, tais que $f^k(u) = x_0$ e $f^j(v) = x_0$. Sem perda de generalidade, assumimos que $k > j$. Como x_0 é ponto fixo, $f^k(v) = x_0$ e, daí

$$x_0 \in f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset.$$

$\square$

4.5 Uma nova definição de Caos

Nesta seção será proposta uma nova definição de Caos, baseada nos resultados que já foram apresentados e com a demonstração de mais alguns, conseguiremos uma nova definição que é equivalente ao que já foi conseguido na primeira seção desse trabalho, assim como novas equivalências. Para isso, necessitamos, primeiramente, da proposição seguinte.

Proposição 4.21. *Seja X um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma função contínua. Então, f é topologicamente transitivo e tem pontos periódicos densos em X , se e somente se, dados U e V quaisquer, subconjuntos não vazios e abertos de X , existe um ponto periódico $p \in U$ e um $k \in \mathbb{N}$, tal que $f^k(p) \in V$, isto é, todo par de abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica.*

Demonstração. Admitindo que f é topologicamente transitivo e tem pontos periódicos densos, dados dois pares U e V de abertos não vazios de X , sabemos que existem $u \in U$ e $k \in \mathbb{N}$, tal que $f^k(u) \in V$. Agora, vamos definir $W = f^{-k}(V) \cap U$. Veja que W é um aberto, pois trata-se da interseção de dois abertos, e não vazio, pois $u \in f^{-k}(V) \cap U$. Também, temos que

$$f^k(W) = f^k(f^{-k}(V) \cap U) \subseteq f^k(f^{-k}(V)) \cap f^k(U) \subseteq V \cap f^k(U) \subset V.$$

E, como os pontos periódicos são densos em X , existe um ponto periódico $p \in W \subset U$. Logo, $f^k(p) \in f^k(W) \subset V$.

Agora, vamos assumir que dados U e V subespaços não vazios e abertos quaisquer de X , existe um ponto periódico $p \in U$ e um $k \in \mathbb{N}$, tal que $f^k(p) \in V$. Veja que a transitividade é uma consequência direta da hipótese e, como é para qualquer aberto, W por exemplo, deve existir ponto periódico p e uma bola $B(p, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, onde $p \in W$ ou existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(p) \in W$, onde $f^k(p) = q$ também é periódico e, portanto, f tem pontos periódicos densos em X . $\square$

Então, a partir dessa proposição e considerando o Teorema 4.3, podemos ter uma nova definição de caos.

Definição 4.22. *Dados um espaço métrico X e uma função contínua $f : X \rightarrow X$, diremos que f é caótica se todo par de abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica.*

Agora é possível mostrar que qualquer número finito de conjuntos abertos não vazios compartilha uma órbita periódica sempre que f é caótica.

Proposição 4.23. *Seja $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico e f caótica. Então, qualquer coleção finita de abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica.*

Demonstração. Seja N o número de abertos não vazios dessa coleção. Para $N = 1$ é verdadeiro devido à densidade dos pontos periódicos. Para $N = 2$, também é verdadeiro e, para isto, basta usarmos a Proposição 4.21 ou a nova definição de função caótica.

Vamos usar o princípio da indução finita, admitir que a proposição é verdadeira para $N = n$ e mostrar que vale para $N = n + 1$.

Sem perda de generalidade, vamos supor que os abertos dessa coleção são todos disjuntos pois, caso contrário, se dois deles se intersectam, basta substituímos esses dois conjuntos pela intersecção, que também é aberta, e passaremos a ter uma coleção de n conjuntos que, pela hipótese de indução, compartilha uma órbita periódica e essa órbita como está na intersecção dos dois conjuntos, está, portanto, nos $n + 1$ conjuntos.

Agora, da coleção de abertos não vazios e disjuntos, vamos separar um desses abertos e chamá-lo de V . Olhando para os n abertos restantes, sabemos que eles compartilham uma órbita periódica de período que designaremos por M . Desses n abertos, escolhemos qualquer um deles e o denotamos de U_0 . Seja p o ponto periódico, de período $M > n - 1$, com $p \in U_0$ e a propriedade de sua órbita $O_f(p)$ intersectar todos os n abertos, diferentes de V . Então, denominamos os $n - 1$ restantes da seguinte maneira. Como os abertos contêm um ponto da órbita de p , existe $k_1 \in \mathbb{N}$, com $0 < k_1 < M$, onde a k_1 -iterada é a primeira a intersectar um dos $n - 1$ abertos restantes dos conjuntos. O aberto ao qual pertence a k_1 -iterada de p denotaremos por U_1 , ou seja, $f^{k_1}(p) \in U_1$. Continuando, da mesma forma com os $n - 2$ abertos restantes, existe $k_2 \in \mathbb{N}$, com $0 < k_1 < k_2 < M$, onde a k_2 -iterada é a primeira a intersectar um dos $n - 2$ abertos restantes e denotaremos o aberto ao qual pertence a k_2 -iterada de p por U_2 , ou seja, $f^{k_2}(p) \in U_2$. E, assim por diante, até termos que $f^{k_i}(p) \in U_i$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, onde $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} < M$.

A partir deste momento, vamos definir uma nova coleção de abertos não vazios. Seja $W_0 = U_{n-1}$, definimos

$$W_1 = f^{-[k_{n-1}-k_{n-2}]}(W_0) \cap U_{n-2}.$$

Veja que, $f^{k_{n-1}}(p) \in W_0$ e $f^{k_{n-2}}(p) \in U_{n-2}$ e como

$$f^{k_{n-2}}(p) = f^{-[k_{n-1}-k_{n-2}]}(f^{k_{n-1}}(p)) \in f^{-[k_{n-1}-k_{n-2}]}(W_0),$$

então, $f^{k_{n-2}}(p) \in W_1$ e, portanto, W_1 é não-vazio. Além disso, W_1 é um aberto de X , pois é a intersecção do aberto U_{n-2} com a pré-imagem por uma função contínua do aberto W_0 . Note que

$$f^{[k_{n-1}-k_{n-2}]}(W_1) \subset W_0$$

e, então, continuando a construção desses abertos, temos

$$W_i = f^{-[k_{n-i}-k_{n-(i+1)}]}(W_{i-1}) \cap U_{n-(i+1)},$$

para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. E, daí,

$$f^{[k_{n-i}-k_{n-(i+1)}]}(W_i) \subset W_{i-1},$$

para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Por fim, como V e W_{n-1} são dois abertos e f é caótica, segundo a Proposição 4.21, existe um ponto periódico $p' \in V$ e um $q \in \mathbb{N}$, tal que $f^q(p') \in W_{n-1} \subset U_0$. Agora, usando esse fato, conseguimos a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} f^q(p') &= f^{[q+k_0]}(p') \in W_{n-1} \subset U_0 \\ f^{q+k_1}(p') &= f^{[k_1-k_0]}(f^{[q+k_0]}(p')) \in f^{[k_1-k_0]}(W_{n-1}) \subset W_{n-2} \subset U_1 \\ &\vdots \\ f^{q+k_i}(p') &= f^{[k_i-k_{i-1}]}(f^{[q+k_{i-1}]}(p')) \in f^{[k_i-k_{i-1}]}(W_{n-i}) \subset W_{n-(i+1)} \subset U_i \\ &\vdots \\ f^{q+k_{n-1}}(p') &= f^{[k_{n-1}-k_{n-2}]}(f^{[q+k_{n-2}]}(p')) \in f^{[k_{n-1}-k_{n-2}]}(W_1) \subset W_0 = U_{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que existe uma órbita $O_f(p')$, que intersecta cada um dos abertos $V, U_0, U_1, \dots, U_{n-1}$. $\square$

Corolário 4.24. *Seja $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico e f é caótica. Então, qualquer coleção finita de abertos não vazios de X compartilha uma infinidade de órbitas periódicas.*

Demonstração. Vamos assumir que existe uma coleção finita $\{U_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ de abertos não vazios, que compartilham apenas um número finito de órbitas periódicas. Definimos P como sendo a união dos pontos dessas órbitas periódicas. Veja que, como as órbitas periódicas são finitas e temos um número finito delas, então P é um conjunto finito e, portanto, fechado. Agora, vamos construir uma outra coleção de abertos não vazios $\{V_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, onde $V_i = U_i \setminus P$. De fato, esses abertos são não vazios, pois retiramos um número finito de pontos de um aberto em X e, também por isso, é um aberto. Logo, pela Proposição 4.23, existe uma órbita periódica que intersecta todos esses abertos dessa coleção e, por construção, essa órbita periódica não pertence a P , mas como $V_i \subset U_i$, então essa nova órbita também intersecta a coleção $\{U_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, que é uma contradição e que surgiu de termos suposto P finito, provando o nosso resultado. $\square$

Proposição 4.25. *Seja X um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i) f é caótica em X ;
- (ii) f é topologicamente transitiva e tem um conjunto denso de pontos periódicos;
- (iii) Qualquer coleção finita de abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica;
- (iv) Qualquer coleção finita de abertos não vazios de X compartilha uma infinidade de órbitas periódicas.

Demonstração. Já mostramos que $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Se qualquer coleção finita de abertos não vazios, contidos em X , compartilha infinitas orbitas periódicas, é claro que qualquer par de abertos compartilha uma órbita periódica. Então $(iv) \Rightarrow (i)$, que fecha o ciclo e completa a prova. $\square$

5 Conclusão

Neste trabalho apresentamos a evolução da definição de Sistemas Dinâmicos Caóticos, no sentido Devaney, além de alguns conceitos e definições, necessários para uma melhor compreensão sobre o assunto, e suas implicações. Estudamos, inicialmente, alguns conceitos de dinâmica discreta e, com um caso particular, introduzimos o conceito de Caos, segundo Devaney.

Posteriormente, apresentamos algumas implicações dessa definição e sua evolução ao longo do tempo. Mostramos que:

Primeiro, uma função contínua com transitividade topológica e que tem seus pontos periódicos densos no domínio deve ter sensibilidade das condições iniciais, ou seja, é caótica.

Segundo, nenhuma combinação das outras condições implica em uma terceira.

Terceiro, em intervalos, uma função contínua com transitividade topológica deve ter seus pontos periódicos densos no domínio e, portanto, é caótica.

Quarto, mesmo em intervalos, nenhuma outra condição ou até qualquer outra combinação implicará em caos.

Quinto, definimos o conceito de fortemente e fracamente misturadora e a partir dessas definições, pudemos dizer que uma função fortemente misturadora e com pontos periódicos densos no domínio deve ter transitividade topológica, sendo caótica.

E por fim, pudemos observar uma nova definição de Caos, baseada em uma equivalência entre a definição que inicialmente foi proposta por Devaney e três novas proposições, onde, sendo a função contínua,

- i. Todo par de abertos não vazios do domínio compartilha uma órbita periódica;
- ii. Qualquer coleção finita de abertos não vazios do domínio compartilha uma órbita periódica;
- iii. Qualquer coleção finita de abertos não vazios do domínio compartilha uma infinidade de órbitas periódicas.

Ainda, observamos a possibilidade de também se encontrar Caos de Devaney em casos mais específicos, onde não são necessários todos os requisitos citados no último Teorema da dissertação como, por exemplo, a função que consta na referência [19], página 367.

Portanto, esse trabalho contribui com o tema, sendo uma nova fonte para quem deseja iniciar ou até se aprofundar sobre o Caos de Devaney.

Referências

- [1] ALEKSANDR, N. ET AL. *Dynamics of one-dimensional mappings*. Kiev Izdatel Naukova Dumka, 1989.
- [2] ASSAF, IV, D., AND GADBOIS, S. Letters. *The American Mathematical Monthly* 99 (Nov. 1992), 865.
- [3] AULBACH, B., AND B.KIENINGER. On three definitions of chaos. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory* 01, 01 (2001), 23–37.
- [4] BALIBREA, F., AND SNOHA, L. Topological entropy of devaney chaotic maps. *Topology and its Applications* 133, 3 (2003), 225–239.
- [5] BANKS, J. ET AL. On devaney’s definition of chaos. *The American Mathematical Monthly* 99 (Apr. 1992), 332–334.
- [6] BERGLUND, R., AND VELLEKOOP, M. On intervals, transitivity = choas. *The American Mathematical Monthly* 101, 4 (1994), 353–355.
- [7] BLOCK, L. S., AND COPPEL, W. A. *Dynamics in one dimension*. Springer, 2006.
- [8] CIPOLLI, V. G. Sistemas dinâmicos discretos - análise de estabilidade. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2012.
- [9] COLLET, P., AND ECKMANN, J. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [10] CRANNELL, A. The role of transitivity in devaney’s definition of chaos. *The American Mathematical Monthly* 102 (Nov. 1995), 788–793.
- [11] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2 ed. Addison-Wesley, 1989.
- [12] HYGINO, H. D. *Espaços Métricos e Introdução a Topologia*, 1 ed. Atual, São Paulo, 1982.
- [13] KEMPIS, T. *Imitação de Cristo*, 27 ed. Ave-Maria, São Paulo, 2013.
- [14] LI, T. J., AND YORKE, J. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly* 82, 10 (1975), 985–992.

- [15] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*, 3 ed. Livra da Física, São Paulo, 2001.
- [16] MUNKRES, J. *Topology*, 2 ed. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 2014.
- [17] OLIVEIRA, K., AND VIANA, M. *Fundamentos da teoria ergódica*. Rio de Janeiro, 2014.
- [18] SHARKOVSKY, A. N. Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal* 16, 01 (1964), 61–71.
- [19] SILVERMAN, S. On maps with dense orbits and the definition of chaos. *Rocky Mountain Mathematics Consortium* 22 (1992), 353–375.
- [20] STEWART, I. *Taming the infinite: The story of Mathematics from the first numbers to chaos theory*, 1 ed. Quercus Publishing, Londres, 2009.
- [21] TOUHEY, P. Yet another definition of chaos. *The American Mathematical Monthly* 104 (May. 1997), 411–414.