



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Câmpus de São José do Rio Preto

Lucas de Souza Lima

Comparação de Operadores Diferenciais e Aplicações

São José do Rio Preto - SP  
2023

Lucas de Souza Lima

## Comparação de Operadores Diferenciais e Aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto - SP  
2023

L732c      Lima, Lucas de Souza  
              Comparação de Operadores Diferenciais e Aplicações / Lucas de  
              Souza Lima. -- São José do Rio Preto, 2023  
              63 p.  
  
              Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
              Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio  
              Preto  
              Orientador: Waldemar Donizete Bastos  
  
              1. Operadores Diferenciais Parciais Lineares. 2. Transformada de  
              Fourier. 3. Comparação de Operadores. 4. Traço em Hiperplanos. I.  
              Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Lucas de Souza Lima

## Comparação de Operadores Diferenciais e Aplicações

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

### Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos  
Orientador

---

Prof. Dr. German Lozada Cruz  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

---

Prof. Dr. Ruikson Sillas de Oliveira Nunes  
UFMT - Câmpus de Cuiabá - MT

São José do Rio Preto - SP  
17 de fevereiro de 2023

*Aos meus pais  
e minha esposa.*

## **AGRADECIMENTOS**

Eu devo agradecimentos a todos que me fizeram chegar até aqui e que estiveram comigo nos momentos mais difíceis. Em particular, agradeço:

Ao Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos pela orientação desde a graduação e também, por toda paciência e compreensão.

Aos meus pais, Odali e Vanda, por terem me apoiado sempre e me dado o melhor.

A minha amada esposa, Yen, por sempre estar ao meu lado.

Aos professores do IBILCE.

Aos amigos que o IBILCE me deu: Ilis, Osvaldo, Ricardo, Tiago entre outros.

Aos amigos que os cursos de verão me deu: Alan e Paulo.

A Deus, por me dar forças para nunca desistir.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*A paz de consciência será conseguida pelo cumprimento  
dos deveres a que o homem se obriga pela sua  
racionalidade e seu destino.*  
Plínio Salgado

## RESUMO

Neste trabalho usamos a transformada de Fourier e alguns resultados abstratos sobre operadores fechados para definir operador maximal e operador minimal associados a um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes. Provamos a sobrejetividade do operador maximal, o que equivale à existência de soluções fracas de quadrado integrável num domínio limitado, para a equação diferencial correspondente. Estudamos a noção comparação de operadores diferenciais segundo Lars Hormander estabelecendo uma condição necessária e suficiente para comparar dois operadores diferenciais. A título de aplicação mostramos como as desigualdades de comparação entre operadores permitem definir traços, localmente de quadrado integrável em hiperplanos, para soluções de algumas equações diferenciais parciais.

Palavras-chave: Operador Diferencial Parcial Linear. Transformada de Fourier. Comparação de Operadores. Traço em hiperplanos.

## ***ABSTRACT***

In this work we use the Fourier transform and some abstract results about closed operators to define maximal operator and minimal operator associated with a linear partial differential operator with constant coefficients. We prove the surjectivity of the maximal operator, which is equivalent to the existence of weak integrable square solutions in a bounded domain, for the corresponding differential equation. We study the notion of comparison of differential operators according to Lars Hormander, establishing a necessary and sufficient condition to compare two differential operators. As an application, we show how the inequalities of comparison between operators allow us to define locally square integrable traces on hyperplanes, for solutions of some partial differential equations.

Keywords: Linear Partial Differential Operator. Fourier Transform. Comparison of operators. Trace on hyperplane.

# Sumário

|            |                                                                     |           |
|------------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Considerações Iniciais</b>                                       | <b>9</b>  |
| I.1        | Introdução . . . . .                                                | 9         |
| I.2        | Notações básicas . . . . .                                          | 10        |
| I.3        | O espaço de Schwartz e a transformada de Fourier . . . . .          | 14        |
| I.4        | Distribuições . . . . .                                             | 16        |
| I.5        | Alguns resultados de Análise Funcional . . . . .                    | 21        |
| <b>II</b>  | <b>Extensões de <math>P(D)</math> e existência de solução fraca</b> | <b>27</b> |
| II.1       | Introdução . . . . .                                                | 27        |
| II.2       | Extensões de $P(D)$ . . . . .                                       | 27        |
| II.3       | Existência de solução fraca . . . . .                               | 32        |
| <b>III</b> | <b>Comparação de operadores</b>                                     | <b>35</b> |
| III.1      | Introdução . . . . .                                                | 35        |
| III.2      | Comparação de Operadores Diferenciais . . . . .                     | 35        |
| <b>IV</b>  | <b>Aplicações</b>                                                   | <b>46</b> |
| IV.1       | Introdução . . . . .                                                | 46        |
| IV.2       | Traço de $Q(D)u$ em variedades lineares . . . . .                   | 46        |
|            | <b>Referências</b>                                                  | <b>57</b> |
| <b>V</b>   | <b>Apêndice</b>                                                     |           |

# I Considerações Iniciais

## I.1 Introdução

Na segunda metade do século XX houve um grande desenvolvimento da teoria geral das equações diferenciais parciais lineares, em particular, as chamadas estimativas a priori tiveram um papel proeminente. Um dos líderes desse campo de pesquisa foi Lars Hörmander, ganhador da Medalha Fields em 1962 por suas contribuições ao estudo dos operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes suaves. Em seu trabalho de 1955 [5], publicado no jornal *Acta Mathematica*, introduziu a noção de força (strength) de um operador diferencial parcial à coeficientes constantes bem como a caracterizou em termos do símbolo do operador. Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^\nu$ , seja  $P(D)$  um operador diferencial parcial à coeficientes constantes com símbolo  $P(\xi)$  e seja  $P^{(\alpha)}(D)$  o operador diferencial parcial cujo símbolo é  $\partial^\alpha P(\xi)$ , onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$  é um multi-índice,  $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_\nu)$  e  $D = (-i\partial_1, \dots, -i\partial_\nu)$ . Em [5] foi obtida a estimativa

$$\|P^{(\alpha)}(D)u\|_{L^2} \leq C\|P(D)u\|_{L^2}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

e mais geralmente, para dois operadores diferenciais com coeficientes constantes  $P(D)$  e  $Q(D)$ , foi estabelecido uma condição necessária e suficiente para a existência de uma constante  $C = C(\Omega, P, Q) > 0$  de modo que

$$\|Q(D)u\|_{L^2} \leq C\|P(D)u\|_{L^2}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)$$

(theorem 2.2, [5]). Estas estimativas, juntamente com argumentos de dualidade levam a resultados de existência e regularidade de soluções para equações diferenciais parciais lineares gerais (sem especificar o tipo: parabólica, hiperbólica ou elíptica).

Em [5] Hörmander também estuda condições para existência do traço  $Q(D)u$ , da solução de  $P(D)u = f \in L^2(\Omega)$ , como função de quadrado integrável em variedades afins

de  $\mathbb{R}^\nu$  que interceptam  $\Omega$ . Este é o caso se valer uma estimativa do tipo

$$\int_{\Omega \cap \Sigma} |Q(D)u|^2 d\sigma \leq C (\|P(D)u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2), \quad u \in C_0^\infty(\Omega)$$

onde  $\Sigma$  é variedade afim em  $\mathbb{R}^\nu$ . De fato, se  $P(D)u = f \in L^2(\Omega)$  aplica-se a última desigualdade em  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ , onde  $u_n \rightarrow u$  e  $P(D)u_n \rightarrow f$  em  $L^2(\Omega)$  e obtém-se o traço  $Q(D)u \in L^2(\Omega \cap \Sigma)$ . O teorema 2.8 de [5] afirma que a condição necessária e suficiente para que exista em  $L^2(\Omega \cap \Sigma)$  o traço  $Q(D)u$  é que  $Q(\xi)/\tilde{P}(\xi)$  seja de quadrado integrável, uniformemente em variedades afins  $\Sigma'$ , ortogonais à  $\Sigma$  (aqui,  $\tilde{P}(\xi)^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2$ ). O teorema 2.9 de [5] trata o mesmo tema para variedades afins  $\Sigma$  de dimensão  $\nu - 1$  (hiperplanos) e  $Q(\xi) = \sum N_k \frac{\partial P^{(\alpha)}(\xi)}{\partial \xi_k}$  em que  $N = (N_1, \dots, N_\nu)$  é um vetor normal à  $\Sigma$ .

As demais seções deste primeiro capítulo apresenta a notação usada e uma coleção de resultados que são de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos seguintes destacando-se o teorema I.4.5.

No segundo capítulo da presente dissertação introduzimos as noções de operadores maximal e minimal de  $P(D)$  e provamos a existência de solução fraca para a equação  $P(D)u = f$  com  $f \in L^2(\Omega)$  dada e  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um domínio limitado.

No terceiro capítulo introduzimos a noção de comparação de operadores e estudamos condições necessárias e suficientes para que um operador seja mais forte que outro.

Finalmente, no quarto capítulo estudamos condições necessárias e suficientes para que a solução de  $P(D)u = f$  tenha traço do tipo  $Q(D)u$ , como função de quadrado integrável hiperplanos.

## I.2 Notações básicas

Sejam  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos *números naturais* (ou *inteiros positivos*),  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$  o conjunto dos *números inteiros não negativos*,  $\mathbb{R}$  o conjunto dos *números reais* e  $\mathbb{C}$  o conjunto dos *números complexos*. Dado  $\nu \in \mathbb{N}$ , seja  $\mathbb{R}^\nu$  o conjunto

$$\mathbb{R}^\nu =: \{(x_1, \dots, x_\nu); x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, \nu\}.$$

Os pontos de  $\mathbb{R}^\nu$  são denotados  $x = (x_1, \dots, x_\nu)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\nu)$ , etc. O conjunto  $\mathbb{R}^\nu$  munido de adição e produto por escalar usuais é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  com produto interno e norma dados por:

$$x \cdot \xi =: \sum_{j=1}^{\nu} x_j \xi_j \quad \text{e} \quad |x| =: \left( \sum_{j=1}^{\nu} x_j^2 \right)^{1/2}$$

respectivamente.

Um *multi-índice* é uma  $\nu$ -ulpa de números inteiros não negativos denotado por  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\nu)$  etc. O conjunto de todos os multi-índices é denotado por  $\mathbb{Z}_+^\nu$ .

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^\nu$  e  $x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ . Definimos;

$$(i) \quad |\alpha| =: \alpha_1 + \dots + \alpha_\nu,$$

$$(ii) \quad \alpha \pm \beta =: (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_\nu \pm \beta_\nu),$$

$$(iii) \quad x^\alpha =: x_1^{\alpha_1} \dots x_\nu^{\alpha_\nu},$$

$$(iv) \quad \alpha! =: \alpha_1! \dots \alpha_\nu!,$$

$$(v) \quad \alpha \leq \beta \text{ se, e somente se, } \alpha_j \leq \beta_j, j = 1, \dots, \nu \text{ e}$$

$$(vi) \quad \binom{\alpha}{\beta} =: \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}, \text{ sempre que } \beta \leq \alpha.$$

Como usual, denotaremos  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$  a derivação em relação à variável  $x_j, j = 1, \dots, \nu$ . Definimos  $D_j =: \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ , e também,  $\partial =: (\partial_1, \dots, \partial_\nu)$ ,  $D =: (D_1, \dots, D_\nu)$  de modo que, para  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in \mathbb{Z}_+^\nu$  tem-se;

$$\partial^\alpha =: \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_\nu^{\alpha_\nu} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_\nu^{\alpha_\nu}}$$

e

$$D^\alpha =: D_1^{\alpha_1} \dots D_\nu^{\alpha_\nu} = \left( \frac{1}{i} \right)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_\nu^{\alpha_\nu}},$$

ou seja,  $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$ .

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um conjunto aberto e não vazio e seja  $u$  uma função real (ou complexa) definida e contínua em  $\Omega$ . O *suporte de  $u$*  é definido por

$$\text{supp}(u) =: \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}},$$

onde a barra sobre o conjunto denota o fecho do conjunto na topologia usual de  $\mathbb{R}^\nu$ .

Seja  $m \in \mathbb{Z}_+$  um inteiro não negativo. Denotamos por  $C^m(\Omega)$  o conjunto das funções reais (ou complexas) definidas e continuamente diferenciáveis até a ordem  $m$  em  $\Omega$ , isto

é,

$$C^m(\Omega) =: \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}); \partial^\alpha \text{ é contínua em } \Omega, \alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu, |\alpha| \leq m\}.$$

$C^0(\Omega)$  é o conjunto das funções contínuas em  $\Omega$ .

Definimos também,

$$C_0^m(\Omega) =: \{u \in C^m(\Omega); \text{supp}(u) \text{ é compacto em } \Omega\}$$

e

$$C_0^\infty(\Omega) =: \bigcap_{m=0}^{\infty} C_0^m(\Omega).$$

Dados  $m \in \mathbb{Z}_+$  e uma coleção finita de escalares  $\{a_\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu, |\alpha| \leq m\}$  em que  $a_\alpha \neq 0$ , para algum  $\alpha, |\alpha| = m$ , o *polinômio de grau  $m$  em  $\nu$  variáveis e coeficientes  $a_\alpha$*  é a expressão

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha,$$

ou ainda,

$$P(\xi_1, \dots, \xi_\nu) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu \leq m \\ \alpha_1, \dots, \alpha_\nu \in \mathbb{Z}_+}} a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_\nu^{\alpha_\nu}.$$

Ao polinômio  $P(\xi)$  associamos os *operadores diferenciais*  $P(\partial)$  e  $P(D)$  dados por

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha, \quad \partial = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \quad (\text{I.2.1})$$

e

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad D = \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \quad (\text{I.2.2})$$

respectivamente. Ambos operadores atuam em  $C^m(\Omega)$  de modo que, para  $u \in C^m(\Omega)$  tem-se

$$[P(\partial)u](x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_\nu^{\alpha_\nu}}(x), x \in \Omega.$$

$$[P(D)u](x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_\nu^{\alpha_\nu}}(x), \quad x \in \Omega.$$

Os operadores  $P(\partial)$  e  $P(D)$  são *operadores diferenciais parciais lineares de ordem  $m$  à coeficientes constantes*. Neste caso o polinômio  $P(\xi)$  é o *símbolo* de  $P(\partial)$  e  $P(D)$ .

**Proposição I.2.1** (Fórmula de Leibniz-Hörmander). Seja  $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  um operador diferencial parcial linear de ordem  $m$  à coeficientes constantes. Então para todas  $u, v \in C^m(\Omega)$  tem-se

$$P(D)(uv) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(D)v,$$

$$\text{onde } P^{(\alpha)}(\xi) = [\partial^\alpha P](\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|} P}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_\nu^{\alpha_\nu}}(\xi).$$

*Demonstração.* Para qualquer  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu$  com  $|\alpha| \leq m$ , tem-se

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} u \partial^\beta v,$$

o que sugere

$$P(D)(uv) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha(uv) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u Q_\alpha(D)v, \quad (\text{I.2.3})$$

onde  $Q_\alpha(\xi)$  são polinômios a serem determinados.

Tomemos  $u(x) = e^{ix \cdot \xi}$  e  $v(x) = e^{ix \cdot \eta}$  de modo que  $(uv)(x) = e^{ix \cdot (\xi + \eta)}$  e

$$[P(D)(uv)](x) = P(\xi + \eta) e^{ix \cdot (\xi + \eta)}.$$

O desenvolvimento de Taylor para  $P(\xi)$  em torno do ponto  $\eta$  fornece

$$P(\xi + \eta) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(\eta) \xi^\alpha.$$

Voltando em I.2.3 obtemos

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(\eta) \xi^\alpha e^{ix \cdot (\xi + \eta)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^\alpha e^{ix \cdot \xi} Q_\alpha(\eta) e^{ix \cdot \eta}$$

de onde segue

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \xi^\alpha \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(\eta) = \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^\alpha Q_\alpha(\eta).$$

Portanto, para cada  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu$  com  $|\alpha| \leq m$ , tem-se

$$Q_\alpha(\eta) = \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(\eta).$$

Daí, para toda  $u, v \in C^m(\Omega)$ , tem-se

$$P(D)(uv) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(D)v.$$

■

### I.3 O espaço de Schwartz e a transformada de Fourier

Uma função  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu)$  é *rapidamente decrescente no infinito* se para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^\nu$  tem-se

$$\|u\|_{\alpha,\beta} =: \sup_{x \in \mathbb{R}^\nu} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty.$$

Denotamos por  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$  a coleção de todas as funções rapidamente decrescente no infinito;

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu); \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^\nu\}.$$

Claramente  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$  é um espaço vetorial e  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$  é semi-norma em  $\mathcal{S}$ . O espaço  $\mathcal{S}$  é chamado *espaço de Schwartz*. Em  $\mathcal{S}$  defini-se uma métrica por

$$\rho(u, v) = \sum_{\alpha, \beta} 2^{-|\alpha| - |\beta|} \frac{\|u - v\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|u - v\|_{\alpha, \beta}}$$

e prova-se que [9];

- (i)  $(\mathcal{S}, \rho)$  é espaço métrico completo.
- (ii)  $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$  é denso em  $\mathcal{S}$ .
- (iii) Se  $F \in C^\infty(\mathbb{C}^k, \mathbb{C})$  com  $F(0) = 0$  então

$$(f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{S}^k \rightarrow F(f_1, \dots, f_k).$$

define um mapeamento contínuo de  $\mathcal{S}^k$  em  $\mathcal{S}$ .

(iv) Se  $M \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu)$  e para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu$ , existe  $N \in \mathbb{N}, c > 0$  tal que  $|\partial^\alpha M(x)| \leq C(1 + |x|^N)$  então  $f \rightarrow Mf$  é uma transformação linear limitada de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{S}$ .

(v) Se em adição à (iv) existe  $n \in \mathbb{N}, c > 0$  tal que  $|M(x)| \geq c(1 + |x|)^{-n}$  então  $f \rightarrow Mf$  é bijetivo com inversa contínua.

**Definição I.3.1.** Para  $u \in \mathcal{S}$ , a *transformada de Fourier de  $u$*  é definida por

$$[\mathcal{F}u](\xi) = \hat{u}(\xi) =: \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx. \quad \square \quad (\text{I.3.1})$$

Se  $u(x) = e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}$ , então  $\hat{u}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ , ou seja,  $u(x) = e^{-x^2/2}$  é um ponto fixo de  $\mathcal{F}$ .

Seja  $D_\xi = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\right)$ . Temos

$$\begin{aligned} D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} D_\xi^\alpha [e^{-ix \cdot \xi} u(x)] dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-ix \cdot \xi} [(-x)^\alpha u(x)] dx \\ &= [\mathcal{F}((-x)^\alpha u)](\xi). \end{aligned}$$

Ou seja, para todo  $u \in \mathcal{S}$  tem-se

$$D_\xi^\alpha \hat{u} = \mathcal{F}((-x)^\alpha u). \quad (\text{I.3.2})$$

Por outro lado, integrando por partes  $|\alpha|$  vezes na definição de  $\mathcal{F}u$  obtemos

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(D^\alpha u)](\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-ix \cdot \xi} D^\alpha u(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} (-D)^\alpha e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \\ &= \xi^\alpha \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi). \quad (\text{I.3.3})$$

Se  $P(D)$  é um operador diferencial parcial linear à coeficientes constantes dado em I.2.2 temos

$$\widehat{P(D)u}(\xi) = P(\xi) \hat{u}(\xi). \quad (\text{I.3.4})$$

**Teorema I.3.2** (Inversão da Transformada de Fourier). A transformada de Fourier é uma bijeção linear contínua de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{S}$  com inversa contínua dada por

$$[\mathcal{F}^{-1}v](x) = \check{v}(x) =: \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{ix \cdot \xi} v(\xi) d\xi. \quad (\text{I.3.5})$$

*Demonstração.* Ver [11] capítulo 1. ■

Como corolário do teorema I.3.2 seguem as relações

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\nu} u(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^\nu} \hat{u}(x) v(x) dx, \\ \int_{\mathbb{R}^\nu} u(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^\nu} \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} d\xi, \\ \widehat{u * v} &= (2\pi)^{\nu/2} \hat{u} \hat{v}, \end{aligned}$$

$$\widehat{u} * \widehat{v} = (2\pi)^{\nu/2} \widehat{uv},$$

para todas  $u, v \in \mathcal{S}$ . Aqui

$$(f * g)(x) =: \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x-y)g(y)dy \quad (\text{I.3.6})$$

é o *produto de convolução* de  $f$  e  $g$ .

Denotando

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^\nu} u(x) \overline{v(x)} dx$$

o produto interno do espaço  $L^2(\mathbb{R}^\nu)$  das funções de quadrado integráveis à Lebesgue temos as *identidades de Parseval*

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{L^2}, \quad u, v \in \mathcal{S} \quad (\text{I.3.7})$$

$$\|u\|_{L^2} = \|\widehat{u}\|_{L^2}, \quad u \in \mathcal{S}. \quad (\text{I.3.8})$$

Como  $\mathcal{S}$  é denso em  $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ , usando I.3.8 é fácil verificar que a transformada de Fourier em  $\mathcal{S}$  estende-se de forma única para o espaço  $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ .

**Teorema I.3.3** (Plancherel). A transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  e sua inversa  $\mathcal{F}^{-1}$  em  $\mathcal{S}$  estendem-se de maneira única a um operador unitário de  $L^2(\mathbb{R}^\nu)$  em si próprio satisfazendo

$$\mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} = I$$

em que  $I$  representa o operador identidade em  $\mathcal{S}$ .

*Demonstração.* Ver [9], capítulo 2. ■

## I.4 Distribuições

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um conjunto aberto e não vazio.

**Definição I.4.1.** Um funcional linear

$$u : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

é uma *distribuição* em  $\Omega$  se para cada conjunto compacto  $K \subset \Omega$  existirem constantes  $C \geq 0$  e  $n \in \mathbb{Z}_+$  tais que

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \phi(x)| \quad (\text{I.4.1})$$

para toda função  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  com  $\text{supp } \phi \subset K$ .  $\square$

Dada uma distribuição  $u$  denota-se  $\langle u, \phi \rangle$  ao valor de  $u$  em  $\phi$ , isto é,  $u(\phi) = \langle u, \phi \rangle$ .

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Defina  $T_f : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dado  $K \subset \Omega$  compacto, se  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  é tal que  $\text{supp } \phi \subset K$  então

$$|\langle T_f, \phi \rangle| = \left| \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \right| \leq \sup_{x \in \Omega} |\phi| \int_K |f|dx.$$

Assim, tomando  $N = 0$  e  $c = \int_K |f|dx$  vemos que  $T_f$  é uma distribuição em  $\Omega$ .

**Teorema I.4.2.** Um funcional linear  $u : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  é uma distribuição em  $\Omega$  se, e somente se,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u, \phi_j \rangle = 0$$

para toda sequência  $(\phi_j)_{j=1}^\infty$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  convergindo para zero no seguinte sentido: existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $\text{supp } \phi_j \subset K$  para todo  $j$  e  $(\partial^\alpha \phi_j)_{j=1}^\infty$  converge uniformemente a zero em  $\Omega$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ .

*Demonstração.* Ver [7] p.31, th.2.1.4. ■

Prova-se que existe em  $C_0^\infty(\Omega)$  uma topologia (topologia do limite indutivo) em relação à qual uma sequência  $(\phi_j)_{j=1}^\infty$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  se, e somente se,  $(\phi_j - \phi)_{j=1}^\infty$  converge a zero no sentido da convergência mencionada no teorema I.4.2 (Veja [13], ch.I,8). Denota-se  $\mathcal{D}(\Omega)$  ao espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  munido dessa noção de convergência e denota-se  $\mathcal{D}'(\Omega)$  o espaço vetorial das distribuições em  $\Omega$ .

Usando o teorema I.4.2 verifica-se que, se  $f$  é *localmente integrável* em  $\Omega$ , isto é,  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ , então

$$T_f : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{I.4.2}$$

é uma distribuição em  $\Omega$ . Mais ainda, em vista do Lema de Du Bois Raymond ([2], Corollary 4.24) a aplicação

$$f \rightarrow T_f$$

é injetiva de  $L_{loc}^1(\Omega)$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Tal injeção nos permite, por exemplo, identificar uma função  $f \in L^2(\Omega)$  com a distribuição  $T_f$ . Denotando ainda por  $\langle, \rangle_{L^2}$  o produto interno de

$L^2(\Omega)$ , neste caso, (I.4.2) se torna

$$\langle T_f, \phi \rangle = \left\langle f, \bar{\phi} \right\rangle_{L^2}, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim, dado  $u \in L^2(\Omega)$  nos referiremos à "distribuição  $u$ " como sendo a distribuição  $T_u$  e escreveremos

$$\langle u, \phi \rangle = \left\langle u, \bar{\phi} \right\rangle_{L^2}, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (\text{I.4.3})$$

Identificaremos  $L^2(\Omega)$  como um subconjunto de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ;

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Teorema I.4.3.** Seja  $(u_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  uma sequência tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle$  existe para cada  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Definindo

$$\langle u, \phi \rangle =: \lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

tem-se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

*Demonstração.* Ver [7], capítulo 2. ■

Em vista do teorema I.4.4 introduzimos a seguinte definição.

**Definição I.4.4.** Sejam  $(u_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  uma sequência e  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Dizemos que a sequência  $(u_j)_{j=1}^\infty$  converge para  $u$  se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . □

**Proposição I.4.5.** Dados  $f \in C^\infty(\Omega)$  e  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  a aplicação de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $\mathbb{C}$  dada por

$$\phi \mapsto \langle u, f\phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

define uma distribuição em  $\Omega$  a qual denomina-se *multiplicação de  $f$  e  $u$*  e denota-se por  $fu$ .

*Demonstração.* Ver [8], capítulo 2. ■

Agora seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\partial^\alpha u$  é contínua em  $\Omega$ . Dada  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , a fórmula de integração por partes nos permite escrever

$$\int_{\Omega} \phi \partial^\alpha u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \phi dx$$

e

$$\int_{\Omega} \phi D^\alpha u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx, \quad (I.4.4)$$

pois a função teste se anula numa vizinhança da fronteira de  $\Omega$ .

Fazendo  $\phi = \bar{v}$  em I.4.4 e observando que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \bar{v} dx = \int_{\Omega} u \overline{D^\alpha v} dx$$

obtemos

$$\int_{\Omega} u \overline{D^\alpha v} dx = \int_{\Omega} \bar{v} D^\alpha u dx, \quad (I.4.5)$$

ou seja,

$$\langle D^\alpha u, v \rangle_{L^2} = \langle u, D^\alpha v \rangle_{L^2}, \quad v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (I.4.6)$$

**Proposição I.4.6.** Sejam  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu$ . A aplicação de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $\mathbb{C}$  definida por

$$\phi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

é uma distribuição em  $\Omega$ , a qual denotaremos por  $\partial^\alpha u$  e a chamamos de  $\alpha$ -derivada distribucional de  $u$ , ou  $\alpha$ -derivada da distribuição  $u$ .

*Demonstração.* Ver [8], capítulo 2. ■

Segue da definição de  $\alpha$ -derivada da distribuição  $u$  que  $D^\alpha u$  também é uma distribuição e

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

em concordância com I.4.4 quando as distribuições  $u$  e  $D^\alpha u$  são dadas por funções localmente integráveis em  $\Omega$ .

Seja  $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  o operador como em (I.2.2). Se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  então  $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq m$ . Logo a combinação linear  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u$  também é uma distribuição em  $\Omega$  pois  $\mathcal{D}'(\Omega)$  é espaço vetorial. Assim a distribuição  $P(D)u$  é dada por

$$\langle P(D)u, \phi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \langle D^\alpha u, \phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (I.4.7)$$

**Definição I.4.7.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  dado em (I.2.2) e  $u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Dizemos que  $u$  é *solução da equação*  $P(D)u = f$  *no sentido de distribuições* se

$$\langle P(D)u, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad \square \quad (\text{I.4.8})$$

**Definição I.4.8.** Sejam  $u, f \in L^2(\Omega)$ . Dizemos que  $u$  é *solução fraca* da equação

$$P(D)u = f$$

se as distribuições  $P(D)u$  e  $f$  são iguais, isto é,

$$\langle P(D)u, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle_{L^2}, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad \square \quad (\text{I.4.9})$$

**Definição I.4.9.** Seja  $P(D)$  um operador diferencial linear de ordem  $m$  dado em (I.2.2). O *adjunto formal* de  $P(D)$  é o operador diferencial dado por

$$P'(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} \overline{a_\alpha} D^\alpha. \quad (\text{I.4.10})$$

□

Seja  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  e  $u \in C^m(\Omega)$ . Usando a identidade (I.4.5) temos

$$\int_{\Omega} \overline{\phi} D^\alpha u dx = \int_{\Omega} u \overline{D^\alpha \phi} dx.$$

Agora, vamos calcular  $\int_{\Omega} \overline{\phi} P(D)u dx$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \overline{\phi} P(D)u dx &= \int_{\Omega} \overline{\phi} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u \right) dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \int_{\Omega} \overline{\phi} D^\alpha u dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \int_{\Omega} u \overline{D^\alpha \phi} dx \\ &= \int_{\Omega} u \sum_{|\alpha| \leq m} \overline{a_\alpha} D^\alpha \phi dx \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \overline{\phi} P(D)u dx = \int_{\Omega} u \overline{P'(D)\phi} dx, \quad (\text{I.4.11})$$

ou em termos de produto interno

$$\langle P(D)u, \phi \rangle_{L^2} = \langle u, P'(D)\phi \rangle_{L^2} \quad (\text{I.4.12})$$

para toda  $u \in C^m(\Omega)$  e  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Proposição I.4.10.** Sejam  $u \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ . A função  $u$  é solução fraca de  $P(D)u = f$  se, e somente se, vale

$$\langle u, P'(D)\phi \rangle_{L^2} = \langle f, \phi \rangle_{L^2}, \text{ para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

*Demonstração.* Sejam  $u \in L^2(\Omega)$  e  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Um cálculo direto usando (I.4.7) e (I.4.3) fornece

$$\begin{aligned} \langle P(D)u, \phi \rangle &= \sum a_\alpha \langle D^\alpha u, \phi \rangle \\ &= \sum a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle \\ &= \sum a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \left\langle u, \overline{D^\alpha \phi} \right\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle u, \sum \overline{a_\alpha} (-1)^{|\alpha|} \overline{D^\alpha \phi} \right\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Observando que,

$$(-1)^{|\alpha|} \overline{D^\alpha \phi} = D^\alpha \overline{\phi},$$

obtemos,

$$\langle P(D)u, \phi \rangle = \left\langle u, P'(D)\overline{\phi} \right\rangle_{L^2}.$$

Daí, se  $u$  é solução fraca de  $P(D)u = f$  então temos;

$$\left\langle f, \overline{\phi} \right\rangle_{L^2} = \langle f, \phi \rangle = \langle P(D)u, \phi \rangle = \left\langle u, P'(D)\overline{\phi} \right\rangle_{L^2}.$$

Trocando  $\overline{\phi}$  por  $\phi$ , segue que

$$\langle u, P'(D)\phi \rangle_{L^2} = \langle f, \phi \rangle_{L^2}, \text{ para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Fazendo o caminho inverso segue a outra direção do resultado. ■

A identidade I.4.12 mostra que solução clássica de  $P(D)u = f$  é solução fraca desta equação.

## I.5 Alguns resultados de Análise Funcional

Nesta seção veremos alguns resultados clássicos da Análise Funcional que são fundamentais no estudo dos principais teoremas desta dissertação. Veja, por exemplo [2],[4],[10],[11],[12] e [13].

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados. Sejam  $\|\cdot\|_X$  e  $\|\cdot\|_Y$  as normas de  $X$  e  $Y$  respectivamente. O produto cartesiano  $X \times Y$  é também um espaço vetorial normado com a seguinte norma;

$$\|x\|_{X \times Y} =: (\|x_0\|_X^2 + \|x_1\|_Y^2)^{1/2}, \quad x = (x_0, x_1) \in X \times Y.$$

Seja  $D(T)$  um subespaço vetorial de  $X$  e seja

$$T : D(T) \subset X \rightarrow Y$$

um operador linear entre  $X$  e  $Y$ , com domínio  $D(T)$ . O *gráfico* de  $T$ , denotado por  $G_T$ , é o subconjunto de  $X \times Y$  dado por

$$G_T =: \{(x, Tx); x \in D(T)\}.$$

O gráfico de  $T$  é subespaço vetorial de  $X \times Y$  e não possui elementos da forma  $(0, x_1)$  com  $x_1 \neq 0$ . Um subespaço linear de  $X \times Y$  que não contém elementos da forma  $(0, x_1)$ , com  $x_1 \neq 0$ , é gráfico de um, e apenas um operador linear.

**Definição I.5.1.** Seja  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  um operador linear de  $X$  em  $Y$ .

- (a)  $T$  é *fechado* se  $G_T$  é fechado em  $X \times Y$ .
- (b)  $T$  é *fechável* se o fecho  $\overline{G_T}$  do gráfico de  $T$  é gráfico de algum operador linear entre  $X$  e  $Y$ . Neste caso, o operador linear cujo o gráfico é  $\overline{G_T}$  é chamado de *fecho de  $T$*  e denotado nesta dissertação por  $T^-$ .  $\square$

Da definição (I.5.1) segue que

- (a)  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  é fechado se, e somente se;

$$(x_n)_{n=1}^\infty \subset D(T), \text{ tal que } x_n \rightarrow x \text{ e } Tx_n \rightarrow y \text{ acarreta } x \in D(T) \text{ e } y = Tx.$$

- (b)  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  é fechável se, e somente se;

$$(x_n)_{n=1}^\infty \subset D(T), \text{ tal que } x_n \rightarrow 0 \text{ e } Tx_n \rightarrow y \text{ acarreta } y = 0.$$

- (c) Se  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  é fechável e  $T^-$  é seu fecho, então:

$$D(T^-) = \{x \in X \mid \exists y \in Y, \exists (x_n)_{n=1}^\infty \subset D(T) \text{ tais que } x_n \rightarrow x \text{ e } Tx_n \rightarrow y\}.$$

e

$$T^-x =: y = \lim Tx_n.$$

O resultado a seguir é simples, porém muito importante.

**Proposição I.5.2.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Seja

$$P(D) : D(P(D)) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

o operador linear de  $L^2(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  com domínio  $D(P(D)) =: C_0^\infty(\Omega)$  e

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)$$

sendo  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  como em (I.2.2). Então  $P(D)$  é fechável.

*Demonstração.* Seja  $(\psi_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $\psi_n \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega)$  e  $P(D)\psi_n \rightarrow v$  em  $L^2(\Omega)$ , para alguma  $v \in L^2(\Omega)$ . Seja  $\varphi \in C_0^\infty$  arbitrária. Usando a continuidade do produto interno, temos

$$\begin{aligned} \langle v, \varphi \rangle_{L^2} &= \lim \langle P(D)\psi_n, \varphi \rangle_{L^2} \\ &= \lim \langle \psi_n, P'(D)\varphi \rangle_{L^2} \\ &= \langle 0, P'(D)\varphi \rangle_{L^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo  $v = 0$ , e portanto  $P(D)$  é fechável. ■

**Definição I.5.3.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  um operador linear entre  $X$  e  $Y$ . Dizemos que  $T$  é *limitado* se existe  $C > 0$  tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad x \in D(T).$$

Neste caso definimos a norma de  $T$  como

$$\|T\|_{\mathcal{L}} =: \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}. \quad \square$$

Quando  $D(T) = X$ , denota-se  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço de todos os operadores lineares limitados entre  $X$  e  $Y$ . Neste caso,  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  é norma em  $\mathcal{L}(X, Y)$  e se  $Y$  é espaço de Banach,  $\mathcal{L}(X, Y)$  também o é. Se  $X = Y$  denota-se  $\mathcal{L}(X)$  ao espaço  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

O espaço  $X' =: \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$  ( ou  $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ ) é o *dual* de  $X$ . Claramente  $X'$  é espaço de Banach com norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  e seus elementos são os *funcionais lineares limitados* em  $X$ .

A seguir apresentamos o clássico Teorema do Gráfico Fechado e na sequência um teorema de suma importância nessa dissertação.

**Teorema I.5.4** (Teorema do Gráfico Fechado). Sejam  $X, Y$  espaços de Banach e

$$T : D(T) \subset X \rightarrow Y$$

um operador linear fechado com  $D(T)$  fechado em  $X$ . Então  $T$  é limitado.

*Demonstração.* Ver [2], capítulo 2. ■

**Teorema I.5.5.** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  espaços de Banach,  $T_1 : D(T_1) \subset X \rightarrow Y$  e  $T_2 : D(T_2) \subset X \rightarrow Z$ . Se  $T_1$  é fechado,  $T_2$  fechável e  $D(T_1) \subset D(T_2)$ , então existe  $C > 0$  tal que

$$\|T_2 u\|_Z^2 \leq C(\|T_1 u\|_Y^2 + \|u\|_X^2),$$

para todo  $u \in D(T_1)$ .

*Demonstração.* Por hipótese,  $G_{T_1}$  é fechado, assim  $G_{T_1}$  é um espaço de Banach. Defina

$$\begin{aligned} \Phi : G_{T_1} &\longrightarrow Z \\ (u, T_1 u) &\longmapsto T_2 u \end{aligned}$$

Vejamos que  $\Phi$  é fechada. Seja  $(u_n, T_1 u_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência convergente em  $G_{T_1}$  e  $T_2 u_n$  convergente em  $Z$ . Como  $T_1$  é fechado, existe  $u \in D(T_1)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $X$  e  $T_1 u_n \rightarrow T_1 u$  em  $Y$ . Por hipótese,  $D(T_1) \subset D(T_2)$ , então  $u \in D(T_2)$ . Além disso, como  $T_2$  é fechável e existindo o limite  $T_2 u_n$  temos  $T_2 u_n \rightarrow T_2 u$ . Logo,  $\Phi$  é fechada e pelo Teorema do Gráfico Fechado,  $\Phi$  é limitada.

Assim, existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\|\Phi(u, T_1 u)\|_Z \leq C_1 \|(u, T_1 u)\|_{G_{T_1}}, \text{ ou seja, } \|T_2 u\|_Z^2 \leq C_1(\|T_1 u\|_Y^2 + \|u\|_X^2).$$

Tomando  $C = C_1^2$ , temos

$$\|T_2 u\|_Z^2 \leq C(\|T_1 u\|_Y^2 + \|u\|_X^2),$$

para todo  $u \in D(T_1)$ . ■

Seja  $H$  um espaço de Hilbert complexo com produto interno e norma dados por

$$\langle x, y \rangle_H, \quad x, y \in H$$

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle_H} \quad x \in H$$

respectivamente.

**Teorema I.5.6** (Teorema de Representação de Riesz). Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Para cada funcional linear limitado  $F : H \rightarrow \mathbb{C}$ , existe um único elemento  $\omega \in H$  tal que

$$Fu = \langle u, \omega \rangle_H, \quad u \in H$$

e

$$\|F\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{C})} = \|\omega\|_H.$$

*Demonstração.* Ver [12], capítulo 1. ■

Um operador linear  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$  é *densamente definido* se o fecho de  $D(T)$  em  $H$  é todo o espaço  $H$ , isto é,

$$\overline{D(T)} = H.$$

Note que o Teorema I.5.6 pode ter como hipótese  $F$  linear, limitado e densamente definido.

**Definição I.5.7.** Seja  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$  um operador linear densamente definido. Seja  $D(T^*)$  o conjunto dos vetores  $\psi \in H$  para os quais existe  $\eta \in H$  tal que

$$\langle T\varphi, \psi \rangle_H = \langle \varphi, \eta \rangle_H, \quad \varphi \in D(T).$$

Para cada  $\psi \in D(T^*)$  definimos

$$T^*\psi = \eta.$$

O operador  $T^*$  assim definido é *adjunto de*  $T$ . □

Observe que o funcional linear  $\varphi \rightarrow \langle T\varphi, \psi \rangle$  é limitado e densamente definido em  $H$ , logo, do Teorema de Representação de Riesz segue que  $\eta$  é único, e portanto  $T^*$  é bem definido.

Para todo  $\varphi \in D(T)$  e  $\psi \in D(T^*)$  temos

$$\langle T\varphi, \psi \rangle_H = \langle \varphi, T^*\psi \rangle_H.$$

**Teorema I.5.8.** Seja  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$  um operador linear densamente definido num espaço de Hilbert  $H$ . Então

- (a)  $T^*$  é fechado.
- (b)  $T$  é fechável se, e somente se,  $D(T^*)$  é denso em  $H$ . Neste caso, temos

$$T^- = T^{**}.$$

(c) Se  $T$  é fechável, então

$$(T^-)^* = T^*.$$

*Demonstração.* Ver [10], capítulo 8. ■

Encerramos este capítulo enunciando o Teorema de Hahn-Banach no formato em que será usado posteriormente neste trabalho.

**Teorema I.5.9** (Hahn-Banach). Sejam  $H$  espaço de Hilbert,  $S$  um subespaço vetorial de  $H$  e  $T : S \rightarrow \mathbb{C}$  um funcional linear limitado satisfazendo

$$|Tu| \leq C\|u\|_H, \quad u \in S.$$

Então existe um funcional linear limitado  $G : H \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$Gu = Tu, \quad u \in S$$

e

$$|Gv| \leq C\|v\|_H, \quad v \in H.$$

*Demonstração.* Ver [12], capítulo 1. ■

## II Extensões de $P(D)$ e existência de solução fraca

### II.1 Introdução

Neste capítulo definiremos os operadores maximal e minimal relativos a um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes  $P(D)$ . Mostraremos que o operador maximal é sobrejetivo. As referências usadas aqui são [5] e [12].

### II.2 Extensões de $P(D)$

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um conjunto aberto. Seja

$$P(D) : C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (\text{II.2.1})$$

o operador linear de  $L^2(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  com domínio  $D(P(D)) =: C_0^\infty(\Omega)$  e

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{II.2.2})$$

sendo  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  dado em (I.2.2). Como vimos na proposição I.5.2,  $P(D)$  é fechável e isso justifica a próxima definição.

**Definição II.2.1** (Operador minimal). Seja  $P(D)$  o operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes definido por (II.2.1) e (II.2.2). O *operador minimal* de  $P(D)$ , denotado por  $P_0$ , é o fecho de  $P(D) : C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ .  $\square$

**Definição II.2.2** (Operador maximal). Sejam  $\Omega$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^\nu$  e

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

como em (II.2.1). Seja

$$P'(D) : C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (\text{II.2.3})$$

o operador linear de  $L^2(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  com domínio  $D(P'(D)) = C_0^\infty(\Omega)$  e

$$P'(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha D^\alpha u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (\text{II.2.4})$$

Definimos o *operador maximal* de  $P(D)$ , denotado por  $P_2$ , como sendo o adjunto do operador minimal de  $P'(D)$ , ou seja,  $P_2 = (P'_0)^*$ .  $\square$

Em geral os operadores os operadores maximal e minimal associados à  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  são distintos. Todavia, quando  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ou  $\Omega$  é um domínio limitado e tem fronteira continuamente diferenciável tem-se  $P_0 = P_2$ . Não discutiremos em detalhe este assunto por não ser o objetivo maior desta dissertação, veja por exemplo, [6] e [3].

**Proposição II.2.3.** Seja  $P(D)$  um operador diferencial parcial com coeficientes constantes. Então  $u \in D(P_2)$  e  $P_2 u = f$  se, e somente se,  $u$  é solução fraca de

$$P(D)u = f \text{ em } \Omega.$$

*Demonstração.* Seja  $u \in D(P_2)$  com  $P_2 u = f$ . Pela definição de  $P_2$  temos

$$\langle u, P'_0 v \rangle_{L^2} = \langle (P'_0)^* u, v \rangle_{L^2} = \langle f, v \rangle_{L^2} \quad (\text{II.2.5})$$

para toda  $v \in D(P'_0)$ . Em particular, se  $v = \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , a identidade (II.2.5) nos fornece

$$\langle u, P'_0 \phi \rangle_{L^2} = \langle f, \phi \rangle_{L^2}$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Para  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  temos  $P'_0 \phi = P'(D)\phi$ , logo

$$\langle u, P'(D)\phi \rangle_{L^2} = \langle f, \phi \rangle_{L^2}.$$

Pela proposição I.4.10 segue que  $u$  é solução fraca de  $P(D)u = f$  em  $\Omega$ .

Agora, suponhamos que  $u$  é solução fraca de  $P(D)u = f$  em  $\Omega$ . Também da proposição I.4.10 segue que

$$\langle u, P'(D)\phi \rangle_{L^2} = \langle f, \phi \rangle_{L^2}$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Seja  $v \in D(P'_0)$ . Então existe  $(v_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  tal que

$$v_n \rightarrow v \text{ em } L^2 \text{ e } P'(D)v_n \rightarrow P'_0v \text{ em } L^2.$$

Assim, pondo  $\phi = v_n$ , temos

$$\langle u, P'(D)v_n \rangle_{L^2} = \langle f, v_n \rangle_{L^2}.$$

Agora, tomando limite em ambos os lados, segue que

$$\langle u, P'_0v \rangle_{L^2} = \langle f, v \rangle_{L^2}.$$

Mas, por definição de adjunto, temos

$$\langle (P'_0)^*u, v \rangle_{L^2} = \langle u, P'_0v \rangle_{L^2} = \langle f, v \rangle_{L^2}.$$

Portanto, segue que  $u \in D(P_2)$  e  $P_2u = f$ . ■

O lema a seguir é devido à Lars Hörmander e foi apresentado em [5]. A demonstração aqui apresentada é baseada em [12].

**Lema II.2.4** ([5], Lemma 2.7). Sejam  $k$  um inteiro fixado,  $1 \leq k \leq \nu$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $M > 0$ . Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um domínio (aberto e conexo) contido na faixa  $\{x \in \mathbb{R}^\nu; |x_k - a| \leq M/2\}$ ,  $P(D)$  um operador diferencial parcial linear de ordem  $m$  com coeficientes constantes e símbolo  $P(\xi)$ . Sejam

$$P^{(k)}(\xi) =: \frac{\partial P}{\partial \xi_k}(\xi)$$

e

$$P^{(kk)}(\xi) =: \frac{\partial^2 P}{\partial \xi_k^2}(\xi).$$

Então

$$\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} \leq mM\|P(D)\phi\|_{L^2},$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , onde  $P^{(k)}(D)$  é o operador diferencial cujo símbolo é  $P^{(k)}(\xi)$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, vamos supor que  $a = 0$ .

Antes de mostrarmos a desigualdade desejada, vamos mostrar a seguinte desigualdade

$$\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}^2 \leq \|P(D)\phi\|_{L^2} \left( M\|P^{(k)}\phi\|_{L^2} + \|P^{(kk)}(D)\phi\|_{L^2} \right).$$

Seja  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Pela fórmula de Leibniz-Hörmander, temos

$$\begin{cases} P(D)(x_k\phi) = x_kP(D)\phi - iP^{(k)}(D)\phi \\ (P')^{(k)}(D)(x_k\phi) = x_k(P')^{(k)}(D)\phi - i(P')^{(kk)}(D)\phi. \end{cases}$$

Além disso, note que

$$\|x_kP^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} = \left( \int_{\Omega} |x_kP^{(k)}(D)\phi|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_{\Omega} \left| \left( \frac{M}{2} \right)^2 P^{(k)}(D)\phi \right|^2 dx \right)^{1/2} = \frac{M}{2} \|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}.$$

Agora vamos calcular  $\|P^{(k)}(D)\phi\|^2$ . Temos

$$\begin{aligned} \|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}^2 &= \left\langle P^{(k)}(D)\phi, P^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2} = \left\langle \frac{-1}{i}(P(D)(x_k) - x_kP(D)\phi), P^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2} \\ &= \frac{-1}{i} \left\langle P(D)(x_k\phi), P^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2} + \frac{1}{i} \left\langle x_kP(D)\phi, P^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2} \\ &= \frac{-1}{i} \left\langle (P')^{(k)}(D)\phi, P'(D)\phi \right\rangle_{L^2} + \frac{1}{i} \left\langle P(D)\phi, x_kP^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2} \\ &= \frac{-1}{i} \left\langle x_k(P')^{(k)}(D)\phi - i(P')^{(kk)}(D)\phi, P'(D)\phi \right\rangle_{L^2} + \frac{1}{i} \left\langle P(D)\phi, x_kP^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Assim, usando desigualdade triangular e Cauchy-Scharwz, obtemos

$$\begin{aligned} \|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}^2 &\leq \left| \frac{-1}{i} \left\langle x_k(P')^{(k)}(D)\phi - i(P')^{(kk)}(D)\phi, P'(D)\phi \right\rangle_{L^2} + \frac{1}{i} \left\langle P(D)\phi, x_kP^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{i} \left\langle x_k(P')^{(k)}(D)\phi - i(P')^{(kk)}(D)\phi, P'(D)\phi \right\rangle_{L^2} \right| + \left| \frac{1}{i} \left\langle P(D)\phi, x_kP^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2} \right| \\ &= \left| \left\langle x_k(P')^{(k)}(D)\phi - i(P')^{(kk)}(D)\phi, P'(D)\phi \right\rangle_{L^2} \right| + \left| \left\langle P(D)\phi, x_kP^{(k)}(D)\phi \right\rangle_{L^2} \right| \\ &\leq \|P(D)\phi\|_{L^2} \left[ \|x_k(P')^{(k)}(D)\phi - i(P')^{(kk)}(D)\phi\|_{L^2} \right] + \|P(D)\phi\|_{L^2} \|x_kP^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} \\ &\leq \|P(D)\phi\|_{L^2} [M\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} + \|P^{(kk)}(D)\phi\|_{L^2}]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}^2 \leq \|P(D)\phi\|_{L^2} \left( M\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} + \|P^{(kk)}(D)\phi\|_{L^2} \right).$$

Agora, vamos fazer indução na ordem de  $P(D)$ . Quando  $m = 1$ , então

$$P^{(kk)}(\xi) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} P(\xi) = 0.$$

Usando a desigualdade anterior, segue que

$$\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}^2 \leq \|P(D)\phi\|_{L^2} \left( M\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} + \|P^{(kk)}(D)\phi\|_{L^2} \right) = \|P(D)\phi\|_{L^2} M\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}.$$

Assim,

$$\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} \leq M\|P(D)\phi\|_{L^2}.$$

Agora, suponha que

$$\|Q^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} \leq (m-1)M\|Q(D)\phi\|_{L^2},$$

para todo operador  $Q(D)$  de ordem menor ou igual a  $m-1$ .

Sendo  $P(D)$  de ordem  $m$  então  $P^{(k)}$  tem ordem menor ou igual a  $m-1$ . Dessa forma podemos aplicar a hipótese de indução em  $P^{(k)}(D)$ .

Isto é,

$$\|P^{(kk)}(D)\phi\|_{L^2} \leq (m-1)M\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}.$$

Substituindo na desigualdade provada anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}^2 &\leq \|P(D)\phi\|_{L^2} \left( M\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} + \|P^{(kk)}(D)\phi\|_{L^2} \right) \\ &\leq \|P(D)\phi\|_{L^2} \left( M\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} + (m-1)M\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} \right) \\ &= \|P(D)\phi\|_{L^2} m M \|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|P^{(k)}(D)\phi\|_{L^2} \leq m M \|P(D)\phi\|_{L^2}.$$

■

**Corolário II.2.5** ([5], Lemma 2.8). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um domínio limitado tal que

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^\nu; |x_k - a_k| \leq M_k/2, k = 1, \dots, \nu\}.$$

Então para todo multi-índice  $\mu$  tem-se

$$\|P^{(\mu)}(D)\phi\|_{L^2} \leq \frac{m!M^\mu}{(m-|\mu|)!} \|P(D)\phi\|_{L^2}, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

onde  $M = (M_1, \dots, M_\nu)$  e  $P^{(\mu)}(\xi) = [\partial^\mu P](\xi) = \frac{\partial^{|\mu|} P}{\partial \xi_1^{\mu_1} \dots \partial \xi_\nu^{\mu_\nu}}(\xi)$ .

*Demonstração.* Note que

$$P^{(\mu)}(D)\phi = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial \xi_1^{\mu_1} \dots \partial \xi_\nu^{\mu_\nu}} P(D)\phi = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\partial^{|\mu|-1}}{\partial \xi_1^{\mu_1-1} \dots \partial \xi_\nu^{\mu_\nu}} P(D)\phi \right).$$

Assim, pelo lema, segue que

$$\|P^{(\mu)}(D)\phi\|_{L^2} \leq M_1(m - (|\mu| - 1)) \left\| \frac{\partial^{|\mu|-1} P(D)\phi}{\partial \xi_1^{\mu_1-1} \dots \partial \xi_\nu^{\mu_\nu}} \right\|_{L^2}.$$

Prosseguindo esse raciocínio até eliminarmos todas as derivadas, segue o resultado. ■

**Teorema II.2.6** ([5], Theorem 2.1). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um domínio limitado e  $P(D)$  um operador diferencial linear com coeficientes constantes de ordem  $m$ . Então existe  $C = C(\Omega, m) > 0$  tal que

$$\|\phi\|_{L^2} \leq C \|P(D)\phi\|_{L^2},$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

*Demonstração.* Tome  $\mu$  multi-índice tal que  $P^{(\mu)}(\xi) = k$ , constante. Daí,  $P^{(\mu)}(D)\phi = k\phi$  e pelo corolário,

$$\|k\phi\|_{L^2} = \|P^{(\mu)}(D)\phi\|_{L^2} \leq \frac{m!M^\mu}{(m - |\mu|)!} \|P(D)\phi\|_{L^2}.$$

Basta tomarmos  $C = \frac{1}{|k|} \frac{m!M^\mu}{(m - |\mu|)!}$ . Assim,  $\|\phi\|_{L^2} \leq C \|P(D)\phi\|_{L^2}$ . ■

## II.3 Existência de solução fraca

**Teorema II.3.1** ([5], Lemma 1.7). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um domínio limitado e  $f \in L^2(\Omega)$ . A equação  $P(D)u = f$  tem solução fraca se, e somente se, existe  $C > 0$  tal que

$$|\langle f, \phi \rangle|_{L^2} \leq C \|P'(D)\phi\|_{L^2}, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

*Demonstração.* Sejam  $f \in L^2(\Omega)$  e  $u \in L^2(\Omega)$  uma solução fraca de  $P(D)u = f$ . Temos

$$|\langle f, \phi \rangle_{L^2}| = |\langle u, P'(D)\phi \rangle_{L^2}| \leq \|u\|_{L^2} \|P'(D)\phi\|_{L^2}.$$

Ou seja, se existir solução fraca da equação  $P(D)u = f$  em  $\Omega$ , então existe  $C > 0$  tal que

$$|\langle f, \phi \rangle_{L^2}| \leq C \|P'(D)\phi\|_{L^2}.$$

Suponhamos que exista  $C > 0$  tal que

$$|\langle f, \phi \rangle_{L^2}| \leq C \|P'(D)\phi\|_{L^2}, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Seja  $W = \{w \in L^2(\Omega); \exists \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } P'(D)\phi = w\}$ . Verifica-se que  $W$  é um subespaço vetorial de  $L^2(\Omega)$ .

Definamos em  $W$  um funcional  $F$  dado por

$$F(w) = \langle \phi, f \rangle_{L^2},$$

onde  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  é qualquer satisfazendo  $P'(D)\phi = w$ .

(i)  $F$  está bem definida.

Sejam  $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty$  tais que  $P'(D)\phi_1 = w = P'(D)\phi_2$ . Logo,

$$|\langle f, \phi_1 - \phi_2 \rangle_{L^2}| \leq C \|P'(D)(\phi_1 - \phi_2)\|_{L^2} = C \|0\|_{L^2} = 0.$$

Isto é,  $\langle f, \phi_1 \rangle_{L^2} = \langle f, \phi_2 \rangle_{L^2}$ .

Assim,  $F$  não depende da escolha da solução de  $P'(D)\phi = w$ .

(ii)  $F$  é um funcional linear limitado

Sejam  $w_1, w_2 \in C_0^\infty$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Tome  $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$  tais que  $P'(D)\phi_1 = w_1$  e  $P'(D)\phi_2 = w_2$ .

Da linearidade de  $P'(D)$  temos

$$P'(D)(\phi_1 + \lambda\phi_2) = w_1 + \lambda w_2.$$

Ou seja,

$$F(w_1 + \lambda w_2) = \langle \phi_1 + \lambda\phi_2, f \rangle = F(w_1) + \lambda F(w_2).$$

Além disso,

$$|F(w)| = |\langle \phi, f \rangle| \leq C \|P'(D)\phi\|_{L^2} = C \|w\|_{L^2}.$$

Portanto,  $F$  é um funcional limitado.

Pelo teorema I.5.9 (Hahn-Banach), podemos estender  $F$  como funcional limitado em  $L^2(\Omega)$ .

Continuaremos a denotar por  $F$  tal extensão. Agora, pelo teorema I.5.6 (Teorema de Representação de Riesz), existe um único  $u \in L^2(\Omega)$  tal que

$$F(w) = \langle w, u \rangle_{L^2}$$

com  $\|u\|_{L^2} = \|F\|_{\mathcal{L}(W, \mathbb{C})} \leq C$ .

*Afirmção:* A função  $u$  é uma solução fraca de  $P(D)u = f$ .

De fato, se  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  então  $P'(D)\phi \in W$ . Seja  $w = P'(D)\phi$ .

Temos

$$\langle u, P'(D)\phi \rangle_{L^2} = \langle u, w \rangle_{L^2} = \overline{F(w)} = \langle f, \phi \rangle_{L^2}.$$

Portanto,  $\langle f, \phi \rangle_{L^2} = \langle u, P'(D)\phi \rangle_{L^2}$ , para toda  $\phi \in C_0^\infty$ . ■

**Teorema II.3.2** ([12], Corollary 1-14). Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  domínio limitado,  $P(D)$  um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes, e  $f \in L^2$  dada. Então a equação diferencial parcial  $P(D)u = f$  admite solução fraca.

*Demonstração.* Por conta do teorema II.3.1, basta provarmos que existe  $C > 0$  tal que

$$|\langle f, \phi \rangle_{L^2}| \leq C \|P'(D)\phi\|_{L^2},$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Como  $P'(D)\phi = \sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha D^\alpha \phi$  é também um operador diferencial linear com coeficientes constantes, então do teorema II.2.6 segue que existe  $C_1 > 0$ ,  $C_1 = C_1(m, \Omega)$  tal que

$$\|\phi\|_{L^2} \leq C_1 \|P'(D)\phi\|_{L^2}.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade anterior, temos

$$|\langle f, \phi \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} (C_1 \|P'(D)\phi\|_{L^2}) = C \|P'(D)\phi\|_{L^2}.$$

Portanto,

$$|\langle f, \phi \rangle_{L^2}| \leq C \|P'(D)\phi\|_{L^2},$$

onde  $C = C_1 \|f\|_{L^2}$ . ■

O teorema II.3.2 mostra que o operador maximal de  $P(D)$  é sobrejetivo.

# III Comparação de operadores

## III.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos a noção de comparação entre operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes introduzida por Lars Hörmander em [5]. Afim de simplificar a escrita adotaremos as notações

$$\|\cdot\| \quad , \quad \langle \cdot, \cdot \rangle$$

para designar a norma e o produto interno de  $L^2(\Omega)$  para qualquer domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$ , inclusive  $\Omega = \mathbb{R}^\nu$ .

## III.2 Comparação de Operadores Diferenciais

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um domínio e sejam

$$P(D) : C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

e

$$Q(D) : C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes. Sejam  $P_0$  e  $Q_0$  os respectivos operadores minimais de  $P(D)$  e  $Q(D)$  conforme a definição II.2.1.

**Definição III.2.1.** Dados os operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes  $P$  e  $Q$ , dizemos que  $P$  é *mais forte* que  $Q$  ou que  $Q$  é *mais fraco* que  $P$  se

$$D(P_0) \subset D(Q_0).$$

Se  $P(D)$  é tanto mais fraco quanto mais forte que  $Q(D)$ , isto é,  $D(P_0) = D(Q_0)$ , vamos dizer que  $P$  e  $Q$  são *igualmente fortes*.  $\square$

**Lema III.2.2** ([5], Lemma 1.5). Sejam  $P(D)$  e  $Q(D)$  operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes. O operador  $P(D)$  é mais forte que  $Q(D)$  se, e somente se, existe  $C > 0$  tal que

$$\|Q(D)u\|^2 \leq C(\|P(D)u\|^2 + \|u\|^2), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (\text{III.2.1})$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $P(D)$  é mais forte que  $Q(D)$ . Pelo teorema I.5.5 segue que

$$\|Q_0u\|^2 \leq C(\|P_0u\|^2 + \|u\|^2), \quad u \in D(P_0). \quad (\text{III.2.2})$$

Em particular, quando  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , vale

$$P_0u = P(D)u$$

e

$$Q_0u = Q(D)u.$$

Logo existe  $C > 0$  tal que vale (III.2.1) para toda  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Agora, suponhamos que exista  $C > 0$  tal que

$$\|Q(D)u\|^2 \leq C(\|P(D)u\|^2 + \|u\|^2), \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Seja  $u \in D(P_0)$ . Então existe  $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  e  $P(D)u_n \rightarrow P_0u$  em  $L^2(\Omega)$ .

Logo,

$$\|Q(D)(u_n - u_m)\|^2 \leq C(\|P(D)(u_n - u_m)\|^2 + \|(u_n - u_m)\|^2).$$

Como  $(P(D)u_n)_{n=1}^\infty$  e  $(u_n)_{n=1}^\infty$  convergem em  $L^2(\Omega)$ , então são de Cauchy, logo  $(Q(D)u_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $L^2(\Omega)$  e portanto convergente em  $L^2(\Omega)$ .

Neste caso, temos  $Q(D)u_n \rightarrow Q_0u$  em  $L^2(\Omega)$  e como  $Q_0$  é um operador fechado, segue que  $u \in D(Q_0)$ .

Portanto  $D(P_0) \subset D(Q_0)$ , isto é,  $P(D)$  é mais forte que  $Q(D)$ . ■

Agora suponhamos que  $\Omega$  é um domínio limitado. Sejam  $P(D)$  e  $Q(D)$  operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes nas condições do lema III.2.2. Então,

$$\|Q(D)u\|^2 \leq C(\|P(D)u\|^2 + \|u\|^2), \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mas como  $\Omega$  é limitado, pelo teorema II.2.6, existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\|u\| \leq C_1 \|P(D)u\|, \text{ para toda } u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Logo, existe uma constante  $\tilde{C} > 0$  tal que

$$\|Q(D)u\| \leq \tilde{C} \|P(D)u\|, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Fazendo contas análogas as do lema III.2.2, se existir uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|Q(D)u\| \leq C \|P(D)u\|, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad (\text{III.2.3})$$

então  $P(D)$  é mais forte que  $Q(D)$ .

**Exemplo III.1.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  um domínio limitado,  $\mu \in \mathbb{Z}_+^\nu$ ,  $P(D)$  um operador diferencial parcial linear de ordem  $m$  com coeficientes constantes e  $P^{(\mu)}(D)$  o operador diferencial cujo símbolo é  $P^{(\mu)}(\xi)$ . Como vimos no corolário II.2.5, existe  $C = C(P(D), \Omega, m, \mu) > 0$  tal que

$$\|P^{(\mu)}(D)u\|^2 \leq C \|P(D)u\|^2, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Logo III.2.3 vale para  $Q(D) = P^{(\mu)}(D)$ .

Assim  $P(D)$  é mais forte que  $P^{(\mu)}(D)$ . Isto é,  $P(D)$  é mais forte que todos os operadores diferenciais cujos símbolos são derivadas do símbolo de  $P(D)$ .  $\square$

Dado um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes  $P(D)$  cujo símbolo é  $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ , associamos ao operador  $P(D)$  (ou ao polinômio  $P(\xi)$ ) a função

$$\tilde{P}(\xi) = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^\nu. \quad (\text{III.2.4})$$

O lema a seguir é elementar porém muito importante na demonstração do próximo teorema.

**Lema III.2.3.** Sejam  $a_1, \dots, a_n$  números complexos. Então

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} |a_1 + \dots + a_n|^2 &= (a_1 + \dots + a_n) \overline{(a_1 + \dots + a_n)} \\ &= (a_1 + \dots + a_n) (\overline{a_1} + \dots + \overline{a_n}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j}.$$

■

Doravante, a fim de simplificar os cálculos e a escrita, e conforme a necessidade, usaremos a identificação

$$\int_{\Omega} = \int_{\mathbb{R}^{\nu}} \quad (\text{III.2.5})$$

sempre que o integrando tiver suporte compacto em  $\Omega$ .

**Teorema III.2.4** ([5], Theorem 2.2). Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^{\nu}$  um domínio limitado,  $Q(D)$  um operador diferencial parcial linear de ordem  $m_1$  com coeficientes constantes e  $P(D)$  um operador diferencial parcial linear de ordem  $m_2$  com coeficientes constantes. Sejam  $\tilde{P}(\xi)$  e  $\tilde{Q}(\xi)$  as funções definidas em III.2.4 associadas à  $P(D)$  e  $Q(D)$  respectivamente. Uma condição necessária e suficiente para que  $P(D)$  seja mais forte que  $Q(D)$  em  $\Omega$  é que

$$\frac{\tilde{Q}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \leq C,$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^{\nu}$  e alguma constante  $C > 0$ .

*Demonstração.* Suponha que  $P(D)$  é mais forte que  $Q(D)$ .

Sejam  $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , com  $\psi \neq 0$ , e  $\xi \in \mathbb{R}^{\nu}$ . Defina  $u(x) = \psi(x)e^{i(x \cdot \xi)}$ .

Pela Fórmula de Leibniz-Hörmander dada na proposição I.2.1, temos

$$P(D)u(x) = e^{i(x \cdot \xi)} \sum_{|\alpha| \leq m_2} P^{(\alpha)}(\xi) \frac{D^{\alpha} \psi(x)}{\alpha!}$$

e

$$Q(D)u(x) = e^{i(x \cdot \xi)} \sum_{|\beta| \leq m_1} Q^{(\beta)}(\xi) \frac{D^{\beta} \psi(x)}{\beta!}.$$

Defina

$$\psi_{\alpha\beta} =: \frac{\langle D^{\alpha} \psi, D^{\beta} \psi \rangle_{L^2}}{\alpha! \beta!}, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^{\nu}.$$

Como  $P(D)$  é mais forte que  $Q(D)$  da desigualdade (III.2.3) segue que existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\|Q(D)u\|^2 \leq C_1 \|P(D)u\|^2, \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

isto é,

$$\langle Q(D)u, Q(D)u \rangle_{L^2} \leq C_1 \langle P(D)u, P(D)u \rangle_{L^2}, \quad \text{para toda } u \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m_1} Q^{(\alpha)}(\xi) \frac{D^\alpha \psi(x)}{\alpha!}, \sum_{|\beta| \leq m_1} Q^{(\beta)}(\xi) \frac{D^\beta \psi(x)}{\beta!} \right\rangle_{L^2} \leq \\ & \leq C_1 \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m_2} P^{(\alpha)}(\xi) \frac{D^\alpha \psi(x)}{\alpha!}, \sum_{|\beta| \leq m_2} P^{(\beta)}(\xi) \frac{D^\beta \psi(x)}{\beta!} \right\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\sum_{|\alpha| \leq m_1} \sum_{|\beta| \leq m_1} Q^\alpha(\xi) \overline{Q^\beta(\xi)} \psi_{\alpha\beta} \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq m_2} \sum_{|\beta| \leq m_2} P^\alpha(\xi) \overline{P^\beta(\xi)} \psi_{\alpha\beta}. \quad (\text{III.2.6})$$

Seja  $m$  o máximo das ordens de  $P(D)$  e  $Q(D)$ . Assim, podemos considerar ambas as somas em (III.2.6) com o multi-índice de norma menor ou igual a  $m$ .

Seja  $t = (t_\alpha)$  uma sequência finita de números complexos tais que  $t_\alpha = t_{\alpha'}$ , onde  $\alpha'$  é uma permutação de  $\alpha$ . Defina

$$Q(t) =: \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} t_\alpha \overline{t_\beta} \psi_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^\nu} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} \left( \frac{t_\alpha D^\alpha \psi(x)}{\alpha!} \right) \overline{\left( \frac{t_\beta D^\beta \psi(x)}{\beta!} \right)} dx.$$

Do lema III.2.3, e observando que  $t_\alpha = t_{\alpha'}$  obtemos

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} \left( \frac{t_\alpha D^\alpha \psi}{\alpha!} \right) \overline{\left( \frac{t_\beta D^\beta \psi}{\beta!} \right)} = \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \left( \frac{t_\alpha D^\alpha \psi}{\alpha!} \right) \right|^2.$$

Logo, podemos reescrever  $Q(t)$  como

$$Q(t) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} t_\alpha \overline{t_\beta} \psi_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^\nu} \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \left( \frac{t_\alpha D^\alpha \psi(x)}{\alpha!} \right) \right|^2 dx = \left\| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{t_\alpha D^\alpha \psi}{\alpha!} \right\|^2.$$

Usando a identidade de Parseval (I.3.8) e que  $\widehat{D^\alpha \psi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\psi}(\xi)$ , obtemos

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}^\nu} \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{t_\alpha \xi^\alpha}{\alpha!} \right|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Assim,  $Q(t) = 0$  se, e somente se,  $\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{t_\alpha \xi^\alpha}{\alpha!} = 0$ . Mas esse polinômio é idêntico ao polinômio nulo se, e somente se,  $t_\alpha = 0$  e portanto  $t = 0$ . Logo,  $Q(t)$  é uma forma positiva definida. Consequentemente, existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |t_\alpha|^2 = |t|^2 \leq C_2 Q(t) = C_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} t_\alpha \overline{t_\beta} \psi_{\alpha\beta},$$

onde  $|t|$  denota a norma euclidiana da sequência finita  $t = (t_\alpha)$ .

Tomando  $t_\alpha = Q^{(\alpha)}(\xi)$ , tem-se

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 \leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} Q^{(\alpha)}(\xi) \overline{Q^{(\beta)}(\xi)} \psi_{\alpha\beta}. \quad (\text{III.2.7})$$

Sejam  $M_1 = \max_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \left\{ \frac{\|D^\alpha\|}{\alpha!}, \frac{\|D^\beta \psi\|}{\beta!} \right\}$  e  $M_2$  o cardinal do conjunto  $\{\gamma \in \mathbb{Z}_+^\nu; |\gamma| \leq m\}$ .

Agora, vamos analisar a expressão:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} P^{(\alpha)}(\xi) \overline{P^{(\beta)}(\xi)} \psi_{\alpha\beta}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} P^{(\alpha)}(\xi) \overline{P^{(\beta)}(\xi)} \psi_{\alpha\beta} &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{P^{(\alpha)}(\xi) D^\alpha \psi}{\alpha!}, \sum_{|\beta| \leq m} \frac{P^{(\beta)}(\xi) D^\beta \psi}{\beta!} \right\rangle_{L^2} \\ &\leq \left\| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{P^{(\alpha)}(\xi) D^\alpha \psi}{\alpha!} \right\| \left\| \sum_{|\beta| \leq m} \frac{P^{(\beta)}(\xi) D^\beta \psi}{\beta!} \right\| \\ &= \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)| \frac{\|D^\alpha \psi\|_2}{\alpha!} \right) \left( \sum_{|\beta| \leq m} |P^{(\beta)}(\xi)| \frac{\|D^\beta \psi\|_2}{\beta!} \right) \\ &\leq M_1^2 \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)| \right) \left( \sum_{|\beta| \leq m} |P^{(\beta)}(\xi)| \right). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade Cauchy-Schwarz em  $\sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)|$  e observando que  $\left( \sum_{|\alpha| \leq m} 1 \right)^{1/2} = \sqrt{M_2}$ , obtemos

$$\left( \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)| \right) \leq \sqrt{M_2} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{M_2} \tilde{P}(\xi).$$

Logo,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} P^{(\alpha)}(\xi) \overline{P^{(\beta)}(\xi)} \psi_{\alpha\beta} \leq C_3 \tilde{P}(\xi)^2, \text{ onde } C_3 = M_1^2 M_2.$$

Daí, usando a desigualdade (III.2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\xi)^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 \leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} Q^{(\alpha)}(\xi) \overline{Q^{(\beta)}(\xi)} \psi_{\alpha\beta} \\ &\leq C_1 C_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} P^{(\alpha)}(\xi) \overline{P^{(\beta)}(\xi)} \psi_{\alpha\beta} \\ &\leq C_1 C_2 C_3 \tilde{P}(\xi)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{Q}(\xi) \leq C \tilde{P}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^\nu$$

onde  $C = \sqrt{C_1 C_2 C_3}$ .

Agora provemos a recíproca. Suponhamos que existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\tilde{Q}(\xi) \leq C_1 \tilde{P}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^\nu.$$

Então,

$$|Q(\xi)|^2 \leq \tilde{Q}^2(\xi) \leq C_1 \tilde{P}^2(\xi).$$

Seja  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , com  $u \neq 0$ . Lembrando que  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$ , a convenção (III.2.5) e usando a identidade de Parseval, obtemos

$$\|Q(D)u\|^2 = \|\widehat{Q(D)u}\|^2 = \|Q(\xi)\hat{u}\|^2,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} |Q(D)u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^\nu} |Q(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|Q(D)u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^\nu} |Q(D)u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^\nu} |Q(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^\nu} |\tilde{P}(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = C_1 \int_{\mathbb{R}^\nu} \sum |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C_1 \sum \int_{\mathbb{R}^\nu} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = C_1 \sum \int_{\mathbb{R}^\nu} |P^{(\alpha)}(D)u|^2 dx \\ &= \|P^{(\alpha)}(D)u\|^2. \end{aligned}$$

Mas, conforme o corolário II.2.5, para todo multi-índice  $\alpha$  existe  $C_\alpha > 0$  tal que

$$\|P^{(\alpha)}(D)u\|^2 \leq C_\alpha \|P(D)u\|^2.$$

Tome  $C_2 = \max_{|\alpha| \leq m} \{C_\alpha\}$ . Neste caso,  $\|P^{(\alpha)}u\|^2 \leq C_2 \|P(D)u\|^2$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu$ .

Portanto,

$$\|Q(D)u\| \leq C \|P(D)u\|, \text{ para toda } u \in C_0^\infty(\Omega)$$

onde  $C = C_1 C_2$ . ■

**Lema III.2.5** ([5], Lemma 1.6). Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^\nu$ . Sejam  $P(D), Q(D)$  operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes tal que  $P(D)$  mais forte que  $Q(D)$ . São equivalentes

- (i) Para todo  $u \in D(P_0)$ , a distribuição  $Q_0 u$  é dada por uma função limitada.

(ii) Existe  $C = C(P(D), Q(D), \Omega) > 0$  tal que

$$\left( \sup_{\Omega} |Q(D)u| \right)^2 \leq C \left( \|P(D)u\|^2 + \|u\|^2 \right), \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (\text{III.2.8})$$

Mais ainda, neste caso  $Q_0u$  é uniformemente contínua a menos de um conjunto de medida nula e tende a zero na fronteira, no seguinte sentido: para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $K$  compacto em  $\mathbb{R}^n$ ,  $K \subset \Omega$ , tal que

$$|Q_0u(x)| < \varepsilon \text{ em } \Omega - K.$$

*Demonstração.* Suponha que (i) é válido. Sejam

$$P_0 : D(P_0) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

e

$$Q_0 : D(Q_0) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$$

os operadores minimais dados na definição II.2.1 de  $P(D)$  e  $Q(D)$  respectivamente. Como  $P(D)$  é mais forte que  $Q(D)$ , então  $D(P_0) \subset D(Q_0)$ . Além disso, os espaços  $D(P_0)$ ,  $L^2(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$  são espaços de Banach. Aplicando o teorema I.5.5 temos

$$\left( \sup_{\Omega} |Q_0u| \right)^2 \leq C \left( \|P_0u\|^2 + \|u\|^2 \right), \quad u \in D(P_0).$$

Como  $C_0^\infty(\Omega) \subset D(P_0)$  segue (III.2.8).

Agora, suponha que existe  $C > 0$  tal que (III.2.8) seja satisfeita.

Seja  $u \in D(P_0)$ . Então existe uma sequência  $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^2(\Omega)$  e  $P(D)u_n \rightarrow P_0u$  em  $L^2(\Omega)$ .

Aplicando (III.2.8) em  $u_m - u_n$ , segue que  $(Q(D)u_n)$  é de Cauchy em  $L^\infty(\Omega)$ . Portanto existe  $w \in L^\infty(\Omega)$  tal que  $Q(D)u_n \rightarrow w$  em  $L^\infty(\Omega)$ .

Sabemos que  $|Q(D)u_n - w| \leq \|Q(D)u_n - w\|_\infty$  quase sempre em  $\Omega$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $E_n \subset \Omega$  mensurável,  $m(E_n) = 0$  e

$$|Q(D)u_n(x) - w(x)| \leq \|Q(D)u_n - w\|_\infty, \quad x \in \Omega - E_n.$$

Agora, seja  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente. Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|Q(D)u_n - w\|_\infty < \varepsilon.$$

O conjunto  $E = \bigcap E_n$  é mensurável e tem medida nula. Observando que

$$|Q(D)u_n(x) - w(x)| \leq \|Q(D)u_n - w\| < \varepsilon,$$

para todo  $x \in \Omega - E$  e todo  $n > n_0$  segue que  $(Q(D)u_n)_{n=1}^\infty$  converge uniformemente para  $w$  em  $\Omega - E$ . Como  $Q(D)u_n$  é uniformemente contínua para todo  $n$ , segue que  $w$  é uniformemente contínua em  $\Omega - E$ .

Como  $u \in D(P_0) \subset D(Q_0)$  e  $Q_0$  é fechado então  $Q(D)u_n \rightarrow Q_0u$  em  $L^2(\Omega)$ . Logo, existe uma subsequência  $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$  tal que  $Q(D)u_{n_k} \rightarrow Q_0$  quase sempre em  $\Omega$ .

Assim,  $w = Q_0u$  quase sempre em  $\Omega$ . Como  $\Omega$  é um domínio limitado, segue que  $Q_0u$  é uma função limitada em  $\Omega - E$ .

Agora seja  $\varepsilon > 0$ . Defina  $f(x) = |Q_0u(x)|$  para todo  $x \in \Omega - E$ . Logo  $f(x)$  é contínua.

Defina  $K = \{x \in \Omega - E; |f(x)| \geq \varepsilon\}$ .

Note que  $K = f^{-1}([\varepsilon, \infty))$  e,  $f$  é contínua logo  $K$  é fechado. Sendo  $\Omega$  limitado e  $K \subset \Omega$ , concluímos que  $K$  é compacto.

Portanto,  $|Q_0u(x)| < \varepsilon$  em  $\Omega - K$ . ■

**Teorema III.2.6** ([5], Theorem 2.6). Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^\nu$ . Sejam  $P(D), Q(D)$  operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes tal que  $P(D)$  mais forte que  $Q(D)$ . Então, se para todo  $u \in D(P_0)$ ,  $Q(D)u$  é contínua temos

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{|Q(\xi)|^2}{\tilde{P}(\xi)^2} d\xi < \infty. \quad (\text{III.2.9})$$

Reciprocamente, se (III.2.9) for satisfeita, então  $Q(D)u$  é uniformemente contínua e tende a zero na fronteira de  $\Omega$ .

*Demonstração.* Seja  $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ . Então, usando III.2.8 temos

$$\begin{aligned} \left( \sup_{\Omega} |\psi(x)Q(D)u(x)| \right)^2 &= \left( \sup_K |\psi(x)Q(D)u(x)| \right)^2 \leq M \left( \sup_K |Q(D)u(x)| \right)^2 \\ &\leq C \left( \|P(D)u\|^2 + \|u\|^2 \right), \end{aligned}$$

para toda  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , onde  $K$  denota o suporte de  $\psi$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $0 \in \Omega$  e  $\psi(0) = 1$ . Então,

$$|Q(D)u(0)| \leq C \left( \|P(D)u\|^2 + \|u\|^2 \right) \text{ para toda } u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Seja  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Defina

$$v(x) = (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{\varphi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(x \cdot \xi)} d\xi.$$

Derivando sob o sinal da integral, obtemos

$$P^{(\alpha)}(D)v(x) = (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{\varphi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} P^{(\alpha)}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d\xi.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|P^{(\alpha)}(D)v(x)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{|\varphi(\xi)|^2}{\tilde{P}(\xi)^2} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^\nu} |\varphi(\xi)|^2 d\xi = \|\varphi\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Fixe  $\chi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ , tal que  $\chi \equiv 1$  numa vizinhança da origem e tome  $u(x) = \chi(x)v(x)$ .

Pela fórmula de Leibniz-Hörmander dada na proposição I.2.1, temos

$$P(D)(\chi v) = \sum_{|\beta| \leq m} P^{(\beta)}(D)v \frac{D^{(\beta)}\chi}{\beta!}.$$

Como  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ , existe  $M > 0$  tal que  $\left\| \frac{D^\beta \chi}{\beta!} \right\| \leq M$ , para todo  $\beta \in \mathbb{Z}_+^\nu$  com  $|\beta| \leq m$ .

Dai,

$$\begin{aligned}\|P(D)(\chi v)\| &\leq \sum_{|\beta| \leq m} \|P^{(\beta)}(D)v\| \left\| \frac{D^\beta \chi}{\beta!} \right\| \leq M \sum_{|\beta| \leq m} \|P^{(\beta)}(D)v\| \\ &\leq C\|\varphi\|.\end{aligned}$$

Como  $Q(D)u(0) = Q(D)v(0)$ , segue que

$$\left| (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| \leq \tilde{C}\|\varphi\|.$$

Isso significa que o operador

$$T(\varphi) = (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \varphi(\xi) d\xi$$

é linear contínuo. Do Teorema de Representação de Riesz I.5.6, existe  $g \in L^2(\Omega)$  tal que

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^\nu} g(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \left( \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} - g(\xi) \right) \varphi(\xi) d\xi = 0, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Portanto,  $\frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} = g(\xi)$  quase sempre e segue que (III.2.9) é satisfeita.

Suponhamos agora que

$$M = \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{|Q(\xi)|^2}{\tilde{P}(\xi)^2} d\xi < \infty.$$

Podemos escrever  $Q(D)u$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned}Q(D)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} \widehat{Q(D)u(x)}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} Q(\xi) \hat{u}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d\xi.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |Q(D)u(x)|^2 &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} Q(\xi) \hat{u}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d\xi \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \hat{u}(\xi) \tilde{P}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d\xi \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} \left| \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^\nu} |\tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Logo,

$$|Q(D)u(x)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} \left| \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^\nu} |\tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \quad (\text{III.2.10})$$

Agora note que

$$|\tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi)|^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi) \hat{u}(\xi)|^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\widehat{D}u)(\xi)|^2.$$

Além disso, pela identidade de Parseval (I.3.8) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\nu} |\tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^\nu} |P^{(\alpha)}(\xi) \hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^\nu} |P^{(\alpha)}(\widehat{D}u)(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|P^{(\alpha)}(\widehat{D}u)\|^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|P^{(\alpha)}(D)u\|^2. \end{aligned}$$

Logo, substituindo as observações anteriores em (III.2.10), obtemos

$$|Q(D)u(x)|^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|P^{(\alpha)}(D)u\|^2.$$

Mas, conforme o corolário II.2.5, para todo multi-índice  $\alpha$  existe  $C_\alpha > 0$  tal que

$$\|P^{(\alpha)}(D)u\|^2 \leq C_\alpha \|P(D)u\|^2.$$

Tome  $C_1 = \max_{|\alpha| \leq m} \{C_\alpha\}$ . Neste caso,  $\|P^{(\alpha)}u\|^2 \leq C_1 \|P(D)u\|^2$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu$ . Assim, existe  $C = C_1 M > 0$  tal que

$$|Q(D)u(x)|^2 \leq C \|P(D)u\|, \text{ para toda } u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dáí,

$$\left( \sup_{x \in \Omega} |Q(D)u(x)| \right)^2 \leq C \|P(D)u\|, \text{ para toda } u \in C_0^\infty(\Omega).$$

As demais afirmações seguem do lema III.2.6. ■

## IV Aplicações

### IV.1 Introdução

Como aplicação da teoria desenvolvida até aqui, neste capítulo estudamos o traço de  $Q(D)u$  a variedades lineares de dimensão  $1 \leq \mu \leq \nu - 1$ , sempre que  $u \in D(P_0)$  sendo  $P_0$  o operador minimal de  $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  com coeficientes constantes e  $Q(D)$  um operador diferencial parcial linear mais fraco que  $P(D)$  num domínio limitado.

Como no capítulo III adotaremos as notações  $\|\cdot\|$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para designar a norma e o produto interno de  $L^2(\Omega)$  para qualquer domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$ , inclusive  $\Omega = \mathbb{R}^\nu$ .

### IV.2 Traço de $Q(D)u$ em variedades lineares

Em todo este capítulo  $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$  é um domínio limitado. Denotaremos  $\Sigma$  uma variedade linear de dimensão  $\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq \nu - 1$  em  $\mathbb{R}^\nu$  e denotaremos  $d\sigma$  área (Lebesgue) em  $\Sigma$ .

Assumiremos que  $\Sigma \cap \Omega \neq \emptyset$ . Usaremos  $\int_\Sigma d\sigma$  para designar integração em  $\Sigma$  sempre que o integrando tiver suporte compacto em  $\Sigma \cap \Omega$ .

Suponhamos que a desigualdade

$$\int_\Sigma |Q(D)\phi|^2 d\sigma \leq C(\|P(D)\phi\|^2 + \|\phi\|^2), \quad (\text{IV.2.1})$$

é válida para toda função  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Seja  $w \in D(P_0)$ . Então existe  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $w_n \rightarrow w$  em  $L^2(\Omega)$  e  $P(D)w_n \rightarrow P(D)w$  em  $L^2(\Omega)$ . Fazendo  $\phi = w_n$  em (IV.2.1) segue que  $Q(D)w_n$  é uma sequência de cauchy em  $L^2(\Sigma)$  e portanto convergente em  $L^2(\Sigma)$ .

Verifica-se facilmente que o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(D)w_n$  em  $L^2(\Sigma)$  não depende da sequência  $(w_n)_{n=1}^\infty$  escolhida. Assim, podemos definir o traço (de quadrado integrável) de  $Q(D)w$

em  $\Sigma$  como sendo tal limite, isto é,

$$Q(D)w =: \lim_{n \rightarrow \infty} Q(D)w_n \text{ em } L^2(\Sigma).$$

Dado  $\Sigma$  com dimensão  $\mu$ , denotaremos por  $\Sigma'$  qualquer variedade linear de dimensão  $\nu - \mu$  ortogonal à  $\Sigma$

$$\Sigma' \perp \Sigma$$

e denotaremos  $d\sigma'$  o elemento de área (Lebesgue) em  $\Sigma'$ .

**Teorema IV.2.1** ([5], Theorem 2.8). Sejam  $P(D)$  e  $Q(D)$  operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constante tal que  $P(D)$  é mais forte que  $Q(D)$  em  $\Omega$ . Para toda  $w \in D(P_0)$ , a função  $Q(D)w$  tem traço de quadrado integrável em  $\Sigma$  se, e somente se,  $\frac{Q}{\tilde{P}}$  é uniformemente de quadrado integrável nas variedades  $\Sigma', \Sigma' \perp \Sigma$ , isto é;

$$\int_{\Sigma'} \left| \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right|^2 d\sigma' \leq C, \quad (\text{IV.2.2})$$

onde  $\tilde{P}(\xi) = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^\nu$  e  $C > 0$  não depende da escolha da variedade  $\Sigma'$ .

*Demonstração.* Podemos assumir que  $\Sigma$  é definida pela equação

$$x_{\mu+1} = 0, \dots, x_\nu = 0.$$

Suponha que toda  $w \in D(P_0)$  tem traço  $Q(D)w$  de quadrado integrável em  $\Sigma$ , ou seja, a desigualdade (IV.2.1) é válida. Como  $\Omega$  é limitado, pelo teorema II.2.6, existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\|\phi\| \leq C_1 \|P(D)\phi\|,$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Logo,

$$\int_{\Sigma} |Q(D)\phi|^2 d\sigma \leq C_2 \|P(D)\phi\|^2, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (\text{IV.2.3})$$

Seja  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Fixemos  $\xi_1, \dots, \xi_\mu \in \mathbb{R}$  e defina

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\Sigma'} \frac{\varphi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(x \cdot \xi)} d\sigma' \\ &= e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \int_{\Sigma'} \frac{\varphi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(\xi_{\mu+1} x_{\mu+1} + \dots + \xi_\nu x_\nu)} d\sigma' \end{aligned}$$

onde

$$d\sigma' = d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu.$$

Aplicando  $P^{(\alpha)}(D)$  em  $v$  temos

$$\begin{aligned} P^{(\alpha)}(D)v(x_1, \dots, x_\nu) &= \int_{\Sigma'} \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(x, \xi)} d\sigma' \\ &= e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \int_{\Sigma'} \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(\xi_{\mu+1} x_{\mu+1} + \dots + \xi_\nu x_\nu)} d\sigma'. \end{aligned}$$

Por conveniência identificaremos  $\mathbb{R}^\nu$  com  $\mathbb{R}_{(1, \dots, \mu)}^\mu \times \mathbb{R}_{(\mu+1, \dots, \nu)}^{\nu-\mu}$  colocando

$$(x_1, \dots, x_\nu) = ((x_1, \dots, x_\mu), (x_{\mu+1}, \dots, x_\nu)).$$

Observe que podemos tratar

$$e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \int_{\Sigma'} \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(\xi_{\mu+1} x_{\mu+1} + \dots + \xi_\nu x_\nu)} d\sigma'$$

como a transformada de Fourier inversa  $\mathcal{F}_{(\mu+1, \dots, \nu)}^{-1}$  nas variáveis  $x_{\mu+1}, \dots, x_\nu$  uma vez que  $\frac{\varphi}{\tilde{P}} \in \mathcal{S}$  (a demonstração desse fato está no Apêndice). Observe que

$$\begin{aligned} e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \int_{\Sigma'} \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(\xi_{\mu+1} x_{\mu+1} + \dots + \xi_\nu x_\nu)} d\sigma' &= \\ &= \mathcal{F}_{(\mu+1, \dots, \nu)}^{-1} \left( (2\pi)^{(\nu-\mu)/2} \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \right) (x_{\mu+1}, \dots, x_\nu). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(\mu+1, \dots, \nu)}(P^{(\alpha)}(D)v(x_1, \dots, x_\nu))((\xi_{\mu+1}, \dots, \xi_\mu)) &= \\ &= \mathcal{F}_{(\mu+1, \dots, \nu)}(\mathcal{F}_{(\mu+1, \dots, \nu)}^{-1} \left( (2\pi)^{(\nu-\mu)/2} \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \right) (x_{\mu+1}, \dots, x_\nu)) \\ &= (2\pi)^{(\nu-\mu)/2} e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)}. \end{aligned}$$

Usando a identidade de Parseval (I.3.8) para a transformada de Fourier  $\mathcal{F}_{(\mu+1, \dots, \nu)}$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{(\mu+1, \dots, \nu)}^{\nu-\mu}} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx_{\mu+1} \dots dx_\nu &= \int_{\Sigma'} |\mathcal{F}_{(\mu+1, \dots, \nu)}(P^{(\alpha)}(D)v(x))(\xi)|^2 d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu \\ &= \int_{\Sigma'} \left| (2\pi)^{(\nu-\mu)/2} e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right|^2 d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu \\ &= (2\pi)^{\nu-\mu} \int_{\Sigma'} \left| \varphi(\xi) \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right|^2 d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu. \end{aligned}$$

Observando que  $|P^{(\alpha)}(\xi)| \leq \tilde{P}(\xi)$ , segue que

$$\int_{\mathbb{R}_{(\mu+1, \dots, \nu)}^{\nu-\mu}} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx_{\mu+1} \dots dx_{\nu} \leq (2\pi)^{\nu-\mu} \int_{\Sigma'} |\varphi(\xi)|^2 d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_{\nu}.$$

Portanto, como  $d\sigma' = d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_{\nu}$ , então

$$\int_{\mathbb{R}_{(\mu+1, \dots, \nu)}^{\nu-\mu}} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx_{\mu+1} \dots dx_{\nu} \leq (2\pi)^{\nu-\mu} \int_{\Sigma'} |\varphi(\xi)|^2 d\sigma'. \quad (\text{IV.2.4})$$

Agora considere uma função  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  que não seja identicamente nula em  $\Sigma$  e  $\psi$  é uma função apenas de  $x_1, \dots, x_\mu$  em uma vizinhança de  $\Sigma$ . Tome

$$u(x) = \psi(x)v(x), \quad x \in \mathbb{R}^\nu.$$

Pela Fórmula de Leibniz-Hörmander dada na proposição I.2.1, obtemos

$$P(D)u(x) = P(D)(\psi(x)v(x)) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \psi(x)}{\alpha!} P^{(\alpha)}(D)v(x).$$

Assim, denotando  $K$  o suporte de  $\psi$ , usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\nu} |P(D)u(x)|^2 dx &= \int_K \left( \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \psi(x)}{\alpha!} P^{(\alpha)}(D)v(x) \right|^2 dx_{\mu+1} \dots dx_{\nu} \right) dx_1 \dots dx_\mu \\ &\leq \int_K \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \left| \frac{D^\alpha \psi(x)}{\alpha!} \right|^2 \right) \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 \right) dx_1 \dots dx_\mu dx_{\mu+1} \dots dx_\nu \\ &\leq M \int_K \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx_1 \dots dx_\nu, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} |P(D)u(x)|^2 dx \leq M \int_K \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx_1 \dots dx_\nu. \quad (\text{IV.2.5})$$

Seja  $\Sigma_1$  a projeção ortogonal de  $K$  na variedade  $\Sigma$  e  $\Sigma_2$  a projeção ortogonal de  $K$  na variedade  $\Sigma'$ . Logo, usando o teorema de Tonelli-Fubini temos

$$\begin{aligned} \int_K \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 dx_1 \dots dx_\nu &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Sigma_1} \left[ \int_{\Sigma_2} |P^{(\alpha)}(D)v(x_1, \dots, x_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_\nu)|^2 dx_{\mu+1} \dots dx_\nu \right] \\ &\quad dx_1 \dots dx_\mu. \end{aligned}$$

Daí, (IV.2.5) juntamente com (IV.2.4) fornece

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^\nu} |P(D)u(x)|^2 dx &\leq M \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Sigma_1} \left[ \int_{\Sigma_2} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 d\sigma' \right] d\sigma \\
&\leq M \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Sigma_1} \left[ \int_{\mathbb{R}^{\nu-\mu}_{(\mu+1, \dots, \nu)}} |P^{(\alpha)}(D)v(x)|^2 d\sigma' \right] d\sigma \\
&\leq M \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Sigma_1} \left[ (2\pi)^{\nu-\mu} \int_{\Sigma'} |\varphi(\xi)|^2 d\sigma' \right] d\sigma \\
&= M' \int_{\Sigma'} |\varphi(\xi)|^2 \left( \int_{\Sigma_1} d\sigma \right) d\sigma' \\
&\leq C_3 \int_{\Sigma'} |\varphi(\xi)|^2 d\sigma'.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} |P(D)u(x)|^2 dx \leq C_3 \int_{\Sigma'} |\varphi(\xi)|^2 d\sigma'. \quad (\text{IV.2.6})$$

Para qualquer  $x \in \mathbb{R}^\nu$ , aplicando  $Q^{(\alpha)}(D)$  em  $v$  temos

$$\begin{aligned}
Q^{(\alpha)}(D)v(x_1, \dots, x_\nu) &= \int_{\Sigma'} \frac{\varphi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} Q^{(\alpha)}(D)e^{i(x \cdot \xi)} d\sigma' \\
&= \int_{\Sigma'} \varphi(\xi) \frac{Q^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(x \cdot \xi)} d\sigma' \\
&= e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \int_{\Sigma'} \varphi(\xi) \frac{Q^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} e^{i(\xi_{\mu+1} x_{\mu+1} + \dots + \xi_\nu x_\nu)} d\sigma'.
\end{aligned}$$

Na variedade linear  $\Sigma$  temos

$$Q^{(\alpha)}v(x_1, \dots, x_\mu, 0, \dots, 0) = e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_\mu x_\mu)} \int_{\Sigma'} \varphi(\xi) \frac{Q^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} d\sigma'.$$

Para  $x \in \Sigma$ , a Fórmula de Leibniz-Hörmander dada na proposição I.2.1 nos fornece

$$Q(D)u(x) = \sum^* \frac{D^\alpha \psi(x)}{\alpha!} Q^{(\alpha)}(D)v(x),$$

onde  $\sum^*$  é uma soma apenas sobre as seqüências de índices  $1, \dots, \mu$ , por conta da construção de  $\psi$ .

Tome

$$t_\alpha = \int_{\Sigma'} \varphi(\xi) \frac{Q^{(\alpha)}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} d\sigma'.$$

Daí, um cálculo direto fornece

$$\int_\Sigma |Q(D)u(x)|^2 d\sigma = \sum_\alpha^* \sum_\beta^* \psi_{\alpha\beta} t_\alpha \bar{t}_\beta,$$

onde  $\psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!} \int_{\Sigma} D^{\alpha}\psi \overline{D^{\beta}\psi} d\sigma$ .

Já vimos na demonstração do teorema III.2.4 que a forma quadrática  $\sum_{\alpha}^* \sum_{\beta}^* \psi_{\alpha\beta} t_{\alpha} \bar{t}_{\beta}$  é positiva definida. Consequentemente existe  $C_4 > 0$  tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |t_{\alpha}|^2 = |t|^2 \leq C_4 \sum_{|\alpha| \leq m}^* \sum_{|\beta| \leq m}^* t_{\alpha} \bar{t}_{\beta} \psi_{\alpha\beta},$$

onde  $|t|$  denota a norma euclidiana de  $t = (t_{\alpha})$ . Como  $|t_0|^2 \leq |t|^2$  temos

$$|t_0|^2 = \left| \int_{\Sigma'} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \varphi(\xi) d\sigma' \right|^2 \leq C_4 \sum_{|\alpha| \leq m}^* \sum_{|\beta| \leq m}^* t_{\alpha} \bar{t}_{\beta} \psi_{\alpha\beta} = C_4 \int_{\Sigma} |Q(D)u(x)|^2 d\sigma.$$

Além disso, usando as desigualdades (IV.2.3) e (IV.2.6) segue que

$$\left| \int_{\Sigma'} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \varphi(\xi) d\sigma' \right|^2 \leq C_2 C_4 \int_{\mathbb{R}^{\nu}} |P(D)u(x)|^2 dx \leq C_2 C_3 C_4 \int_{\Sigma'} |\varphi(\xi)|^2 d\sigma',$$

e portanto,

$$\left| \int_{\Sigma'} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \varphi(\xi) d\sigma' \right|^2 \leq C \int_{\Sigma'} |\varphi(\xi)|^2 d\sigma'$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  e algum  $C > 0$ . Isto nos diz que o funcional linear em  $\mathcal{S}$  dado por

$$T(\varphi) = \int_{\Sigma'} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \varphi(\xi) d\sigma'$$

é linear e contínuo. Do Teorema de Representação de Riesz I.5.6, existe  $g \in L^2(\Sigma')$  tal que

$$T(\varphi) = \int_{\Sigma'} g(\xi) \varphi(\xi) d\sigma'.$$

Logo,

$$\int_{\Sigma'} \left( \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} - g(\xi) \right) \varphi(\xi) d\sigma' = 0, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Portanto,  $\frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} = g(\xi)$  quase sempre em  $\Sigma'$  para toda variedade linear  $\Sigma'$  ortogonal à  $\Sigma$  e toda escolha  $\xi_1, \dots, \xi_{\mu}$ . Logo (IV.2.2) é satisfeita para alguma constante  $C > 0$  que não depende de  $\Sigma'$ .

Agora vamos provar a recíproca. Suponhamos que

$$\int_{\Sigma'} \left| \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right|^2 d\sigma' < C.$$

Para toda  $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , podemos escrever  $Q(D)u$  como

$$Q(D)u(x) = \int_{\mathbb{R}^{\nu}} Q(\xi) \hat{u}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d\xi.$$

Em  $\Sigma$ , temos

$$Q(D)u(x_1, \dots, x_\mu, 0, \dots, 0) = \int_{\mathbb{R}^\nu} Q(\xi) \hat{u}(\xi) e^{i(x_1 \xi_1 + \dots + x_\mu \xi_\mu)} d\xi.$$

Assim, a transformada de Fourier de  $Q(D)u(x_1, \dots, x_\mu, 0, \dots, 0)$  como função de  $x_1, \dots, x_\mu$  é

$$(2\pi)^{-(\nu-\mu)/2} \int_{\Sigma'} Q(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu.$$

Note que, usando Cauchy-Schwarz mais uma vez e a hipótese temos

$$\begin{aligned} \left| (2\pi)^{-(\nu-\mu)/2} \int_{\Sigma'} Q(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu \right|^2 &= (2\pi)^{-(\nu-\mu)} \left| \int_{\Sigma'} \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu \right|^2 \\ &\leq (2\pi)^{-(\nu-\mu)} \int_{\Sigma'} \left| \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right|^2 d\sigma' \int_{\Sigma'} \left| \tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi) \right|^2 d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu \\ &\leq C_1 \int_{\Sigma'} \left| \tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi) \right|^2 d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu. \end{aligned}$$

Agora, pela identidade de Parseval (I.3.8), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |Q(D)u(x)|^2 d\sigma &= (2\pi)^{-(\nu-\mu)/2} \int_{\Sigma} \left( \int_{\Sigma'} \left| Q(\xi) \hat{u}(\xi) \right|^2 d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu \right) d\xi_1 \dots d\xi_\mu \\ &\leq C \int_{\Sigma} \left( \int_{\Sigma'} \left| \tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi) \right|^2 d\xi_{\mu+1} \dots d\xi_\nu \right) d\xi_1 \dots d\xi_\mu \\ &= C \int_{\mathbb{R}^\nu} \left| \tilde{P}(\xi) \hat{u}(\xi) \right|^2 d\xi = C \sum_{|\alpha| \leq m} \| \widehat{P^{(\alpha)}(D)u} \|^2 \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq m} \| P^{(\alpha)}(D)u \|^2 \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^\nu} |P(D)u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Sigma} |Q(D)u(x)|^2 d\sigma \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^\nu} |P(D)u(x)|^2 dx.$$

■

**Lema IV.2.2.** Seja  $p(t)$  é um polinômio de grau  $n$  na variável real  $t$ . Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p'(t)|^2}{|p(t)|^2 + |p'(t)|^2} dt \leq 4n^2.$$

*Demonstração.* Sejam  $t_1, \dots, t_n$  os zeros de  $p$ . Então,

$$p(t) = a_n(t - t_1) \dots (t - t_n).$$

Daí,

$$\ln(p(t)) = \ln(a_n) + \sum_{k=1}^n \ln(t - t_k).$$

Derivando, obtemos

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - t_k}.$$

Vamos dividir a reta em dois intervalos

$$I_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid |\operatorname{Re}(t - t_k)| \leq 1 \text{ para algum } k\}$$

e

$$I_2 = \mathbb{R} - I_1.$$

Note que

$$I_1 = \bigcup_{k=1}^n \{t \in \mathbb{R} : t \in (\operatorname{Re}(t_k) - 1, \operatorname{Re}(t_k) + 1)\}.$$

Assim,

$$m(I_1) \leq \sum_{k=1}^n m((\operatorname{Re}(t_k) - 1, \operatorname{Re}(t_k) + 1)) = \sum_{k=1}^n (\operatorname{Re}(t_k) + 1 - \operatorname{Re}(t_k) + 1) = 2n,$$

onde  $m$  denota a medida de Lebesgue na reta.

Como

$$\frac{|p'(t)|^2}{|p(t)|^2 + |p'(t)|^2} \leq 1,$$

temos

$$\int_{I_1} \frac{|p'(t)|^2}{|p(t)|^2 + |p'(t)|^2} \leq \int_{I_1} 1 = m(I_1) \leq 2n \leq 2n^2.$$

Além disso, como  $|p(t)|^2 \leq |p(t)|^2 + |p'(t)|^2$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{|p'(t)|^2}{|p(t)|^2 + |p'(t)|^2} &\leq \left| \frac{p'(t)}{p(t)} \right|^2 = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - t_k} \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n 1 \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{|t - t_k|^2} \right) \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{1}{|t - t_k|^2} \end{aligned}$$

Note que  $|t - t_k|^2 \geq |\operatorname{Re}(t - t_k)|^2$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{I_2} \frac{|p'(t)|^2}{|p(t)|^2 + |p'(t)|^2} dt &\leq \int_{I_2} \left| \frac{p'(t)}{p(t)} \right|^2 dt \leq n \sum_{k=1}^n \int_{|t-t_k| \geq 1} \frac{1}{|t-t_k|^2} dt \\ &\leq n \left( \int_{|t-t_1| \geq 1} \frac{1}{|\operatorname{Re}(t) - t_1|^2} dt + \cdots + \int_{|t-t_n| \geq 1} \frac{1}{|\operatorname{Re}(t) - t_n|^2} dt \right) \\ &= n^2 \int_{|t| \geq 1} \frac{1}{t^2} dt = 2n^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p'(t)|^2}{|p(t)|^2 + |p'(t)|^2} dt \leq 4n^2.$$

■

Quando a variedade linear tem dimensão  $\nu - 1$  ela é chamada *hiperplano*.

**Teorema IV.2.3.** Se  $\Sigma$  é um hiperplano com vetor normal  $N = (N_1, \dots, N_\nu)$ , então existe  $C = C(P, \Omega) > 0$  tal que

$$\int_{\Sigma} |P_N^{(\alpha)}(D)u|^2 d\sigma \leq C \int_{\mathbb{R}^\nu} |P(D)u|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

onde  $P_N^{(\alpha)}(\xi) = \sum_{k=1}^{\nu} N_k \frac{\partial P^{(\alpha)}(\xi)}{\partial \xi_k} = N \cdot \nabla P^{(\alpha)}(\xi)$  e  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\nu$ . Isto é, para todo  $u \in D(P_0)$ , podemos definir o traço de  $P_N^{(\alpha)}(D)u$  em  $\Sigma$  como função localmente de quadrado integrável.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponhamos  $\|N\| = 1$ .

Seja

$$p(t) = P^{(\alpha)}(\xi + tN).$$

Assim,

$$p'(t) = P_N^{(\alpha)}(\xi + tN) = N \cdot \nabla P^{(\alpha)}(\xi + tN).$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\xi + tN)^2 &= \sum_{|\beta| \leq m} |P^{(\beta)}(\xi + tN)|^2 \geq |P^{(\alpha)}(\xi + tN)|^2 + \sum_{k=1}^{\nu} \left| \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial \xi_k}(\xi + tN) \right|^2 \\ &= |P^{(\alpha)}(\xi + tN)|^2 + \left( \sum_{k=1}^{\nu} N_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^{\nu} \left| \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial \xi_k}(\xi + tN) \right|^2 \right) \\ &\geq |P^{(\alpha)}(\xi + tN)|^2 + \left| \sum_{k=1}^{\nu} N_k \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial \xi_k}(\xi + tN) \right|^2 \\ &= |p(t)|^2 + |p'(t)|^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\tilde{P}(\xi + tN)^2 = \sum_{|\beta| \leq m} |P^{(\beta)}(\xi + tN)|^2 \geq |p(t)|^2 + |p'(t)|^2.$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{P_N^{(\alpha)}}{\tilde{P}}(\xi + tN) \right|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p'(t)|^2}{|p'(t)|^2 + |p(t)|^2} dt \leq 4n^2.$$

Portanto, pelo teorema anterior com  $Q(D) = P_N^{(\alpha)}(D)$  segue que

$$\int_{\Sigma} |P_N^{(\alpha)}(D)u|^2 d\sigma \leq C \int_{\mathbb{R}^{\nu}} |P(D)u|^2 dx, \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

■

**Exemplo IV.1.** Seja  $\nu = n + 1$ ,  $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_n, t) ; x_i \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $\Sigma$  um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com vetor normal  $N = (N_1, \dots, N_n, N_t)$  e seja  $P(\xi)$  o polinômio dado por

$$P(\xi) = \xi_t^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_t).$$

Neste caso,  $P(D)$  é dado por

$$P(D)u = \Delta_{(x_1, \dots, x_n)}u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

conhecido como D'Alembertiano associado a equação da onda.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um domínio limitado para o qual os operadores maximal e minimal associados à  $P(D)$  são iguais.

Assuma que  $\Omega \cap \Sigma \neq \emptyset$ . Para  $\alpha = (0, \dots, 0)$ , o operador  $P_N^{(\alpha)}(D)u = P_N(D)u$  do teorema IV.2.3 é dado por

$$P_N(D) = \frac{2}{i} \left( N_t \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

denominado operador *derivada conormal* associada ao operador  $P(D)$  e ao hiperplano  $\Sigma$ .

O teorema IV.2.3 nos garante que existe  $C = C(P, \Omega) > 0$  tal que

$$\int_{\Sigma} |P_N(D)u|^2 d\sigma \leq C \int_{\mathbb{R}^{\nu}} |P(D)u|^2 dx, \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Logo podemos definir o traço de quadrado integrável em  $\Sigma \cap \Omega$  para a função  $P_N(D)u$  sempre que  $u \in L^2(\Omega)$  e  $P(D)u \in L^2(\Omega)$ .

Observe que se o hiperplano  $\Sigma$  é paralelo ao eixo  $t$ , então  $N_t = 0$ . Logo,

$$P_N(D) = \frac{-2}{i} \sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{-2}{i} \frac{\partial}{\partial N_{(1,\dots,n)}},$$

onde  $\frac{\partial}{\partial N_{(1,\dots,n)}}$  é a derivada normal usual ao longo de  $\Sigma$  na direção normal à  $\Sigma$  (veja [1]).■

# Referências

- [1] BASTOS, W. D. ; Ferreira, J. ; Exact Boundary Control for the Wave Equation in a Polyhedral Time-Dependent Domain, Applied Mathematics Letters, 1999.
- [2] BREZIS, H. ; Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New Jersey, 2010.
- [3] FUGLEDE. B; Extremal Lengths and Closed Extensions of Partial Differential Operators, Jul. Gjellerups Boghandel, Kobenhavn, 1960.
- [4] GOLDBERG, S; Unbounded Linear Operators: Theory and Applications, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [5] HÖRMANDER, L.; On the Theory of General Partial Differential Operators, Acta Mathematica, Vol 94, pp 161-248l 1955.
- [6] HÖRMANDER, L.; Definitions of Maximal Differential Operators, Arkiv For Matematik, Vol .3, n.46, pp.501-504, 1958.
- [7] HÖRMANDER, L. ; The analysis of Linear Partial Differential Operators I, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1990.
- [8] MITREA, D. ; Distributions, Partial Differential Equations and Harmonic Analysis, Springer, New York, 2013.
- [9] RAUCH, J.; Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] REED,M.; Simon, B.; Methods of Modern Mathematical Physics, I, Academic Press, New York, 1975.

- 
- [11] REED, M.; Simon, B.; *Methods of Modern Mathematical Physics, II*, Academic Press, New York, 1975.
  - [12] SCHECHTER, M.; *Modern Methods in Partial Differential Equations*. Mc Graw-Hill, New York, 1976.
  - [13] YOSHIDA, K. ; *Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1974.

# V Apêndice

**Lema V.0.1.** Sejam

$$P(D) = \sum a_\alpha D^\alpha$$

como em I.2.2,

$$\tilde{P}(\xi) = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \right)^{1/2}$$

e  $\phi \in \mathcal{S}$ . Então

$$\frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \in \mathcal{S}.$$

*Ideia da demonstração:*

Queremos provar que

$$\sup \left| \xi^\beta \partial^\alpha \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \right| < \infty, \text{ para todos } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^\nu.$$

Suponhamos  $|\alpha| = 1$ .

Neste caso,  $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ , para algum  $j \in Z_+$ . Como

$$\frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \tilde{P}(\xi) = \phi(\xi),$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \tilde{P}(\xi) \right) = \frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi_j}.$$

Usando a regra do produto segue que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \tilde{P}(\xi) + \frac{\phi}{\tilde{P}(\xi)} \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi_j}.$$

Agora note que

$$\frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j} = \frac{\partial (\tilde{P}(\xi) \tilde{P}(\xi))}{\partial \xi_j} = 2 \tilde{P}(\xi) \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j}$$

e daí,

$$\frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j} = \frac{1}{2\tilde{P}(\xi)} \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j}.$$

Substituindo na fórmula anterior, temos

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) = \frac{1}{\tilde{P}(\xi)} \frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi_j} - \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)^2} \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j}.$$

Como podemos limitar

$$\frac{1}{\tilde{P}(\xi)} \leq \frac{1}{c},$$

$\phi$  está no espaço de Schwartz e  $\tilde{P}(\xi)^2$  é um polinômio, segue que

$$\sup \left| \xi^\beta \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \right| \leq \sup \left| \frac{\xi^\beta}{c} \frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi_j} \right| + \sup \left| \frac{\xi^\beta}{c^3} \phi(\xi) \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j} \right| < \infty.$$

Suponhamos agora que  $|\alpha| = 2$ . Aqui temos dois casos a considerar. Podemos derivar na mesma direção duas vezes ou em direções distintas.

Já temos que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \tilde{P}(\xi)^2 = \frac{\partial \phi(\xi)}{\partial \xi_j} \tilde{P}(\xi) - \phi(\xi) \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j}.$$

Derivando novamente na mesma direção, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) = \frac{\partial^2 \phi(\xi)}{\partial \xi_j^2} \frac{1}{\tilde{P}(\xi)} - \frac{\phi}{\tilde{P}(\xi)^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j^2} - \frac{1}{\tilde{P}(\xi)^2} \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right).$$

Aqui só precisamos analisar o termo  $\frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j^2}$ .

Já tínhamos que

$$2\tilde{P}(\xi) \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j}.$$

Derivando e fazendo alguns substituições, obtemos

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j^2} = \frac{1}{2\tilde{P}(\xi)} \frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j^2} - \frac{1}{4\tilde{P}(\xi)^3} \left( \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j} \right)^2.$$

Fazendo observações similares ao caso anterior, obtemos

$$\sup \left| \xi^\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \right| < \infty.$$

Para o segundo caso, quando temos derivadas em direções diferentes, obtemos

$$\tilde{P}(\xi)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) = \frac{\partial^2 \phi(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \tilde{P}(\xi) - \phi(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right).$$

De forma similar ao que fizemos antes, vamos obter

$$\sup \left| \xi^\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \right| < \infty.$$

Para  $|\alpha| = 3$ , vamos fazer o caso mais geral em que as três direções são diferentes.

Temos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial \xi_l \partial \xi_i \partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \tilde{P}^2(\xi) + \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) &= \frac{\partial^3 \phi(\xi)}{\partial \xi_l \partial \xi_i \partial \xi_j} \tilde{P}(\xi) + \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \phi(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \\ &\quad - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \phi \frac{\partial^3 \tilde{P}}{\partial \xi_l \partial \xi_i \partial \xi_j} \\ &\quad - \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \xi_l \partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) - \frac{\partial \tilde{P}^2}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \end{aligned}$$

Nós precisamos analisar apenas o termo

$$\frac{\partial^3 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_l \partial \xi_i \partial \xi_j}.$$

Já temos que

$$2\tilde{P}(\xi) \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j}$$

e

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j^2} = \frac{1}{2\tilde{P}(\xi)} \frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j^2} - \frac{1}{4\tilde{P}(\xi)^3} \left( \frac{\partial \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_j} \right)^2.$$

Além disso, derivando a primeira expressão mais duas vezes em direções diferentes, vamos obter

$$2\tilde{P}(\xi) \frac{\partial^3 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_l \partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial^3 \tilde{P}(\xi)^2}{\partial \xi_l \partial \xi_i \partial \xi_j} - 2 \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_l \partial \xi_i} - 2 \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - 2 \frac{\partial \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 \tilde{P}(\xi)}{\partial \xi_l \partial \xi_j}$$

Segue do que já foi feito anteriormente que podemos colocar tal derivada em função de  $\tilde{P}(\xi)^2$  que é um polinômio e portanto estará em  $\mathcal{S}$ .

Disso segue que

$$\sup \left| \xi^\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_i \partial \xi_j} \left( \frac{\phi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \right) \right| < \infty.$$

Para o caso geral, basta prosseguir com tal raciocínio e usar o princípio de indução.