



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de Presidente Prudente



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

**Camila Tolin Santos da Silva**

**Descobrimo a Topologia: um compêndio de  
fundamentos teóricos e atividades lúdicas para  
auxiliar na formalização de conceitos topológicos no  
Ensino Básico.**

Orientador

**Prof. Dr. José Roberto Nogueira**

Presidente Prudente

2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de Presidente Prudente



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

**Camila Tolin Santos da Silva**

**Descobrimo a Topologia: um compêndio de  
fundamentos teóricos e atividades lúdicas para  
auxiliar na formalização de conceitos topológicos no  
Ensino Básico.**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Presidente Prudente.

Orientador

**Prof. Dr. José Roberto Nogueira**

Presidente Prudente

2018

Silva, Camila Tolin Santos da.

Descobrimos a topologia: um compêndio de fundamentos teóricos e atividades lúdicas para auxiliar na formalização de conceitos topológicos no ensino básico. / Camila Tolin Santos da Silva . -- Presidente Prudente, 2018  
128 f. : il.

Orientador: José Roberto Nogueira

Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências e Tecnologia

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Topologia. 3. Continuidade. 4. Educação básica. 5. Matemática - Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Faculdade de Ciências e Tecnologia. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

# **TERMO DE APROVAÇÃO**

Camila Tolin Santos da Silva

## **DESCOBRINDO A TOPOLOGIA: UM COMPÊNDIO DE FUNDAMENTOS TEÓRICOS E ATIVIDADES LÚDICAS PARA AUXILIAR NA FORMALIZAÇÃO DE CONCEITOS TOPOLÓGICOS NO ENSINO BÁSICO.**

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Presidente Prudente, pela seguinte comissão examinadora:

Prof. Dr. José Roberto Nogueira

Depto. de Matemática e Computação/UNESP-Câmpus de Presidente Prudente  
Orientador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Dayene Miralha de Carvalho Sano

Núcleo de Educação à Distância-NEAD./Universidade do Oeste Paulista-Unoeste

Prof. Dr. Suetonio de Almeida Meira

Depto. de Matemática e Computação/UNESP-Câmpus de Presidente Prudente

**Presidente Prudente, 31 de julho de 2018.**



*À minha amada vovó Lydia (in memorian)  
que enxergou em mim asas para voar longe.*

# Agradecimentos

Agradeço à Deus pelo dom da vida, pelos pais amorosos, Nilton e Alzira, sábios em sua simplicidade e gentis em seus ensinamentos. Pelos irmãos, Carlos e Fábio, que serviram de exemplo para meu crescimento e pela minha amada sobrinha Fernanda, meu "xeroquinho".

Agradeço à Deus pelo dom do amor, que entrelaçou meu caminho com o do meu esposo Rogério, amigo, amante e protetor dos meus sonhos.

Agradeço à Deus pelo dom da sabedoria, por designar grandes tutores para guiar-me pelo caminho do conhecimento, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. José Roberto Nogueira, que inspirou-me pelas intrincadas veredas da Aritmética e Topologia; ao Coordenador do Curso, Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira, que pacientemente, ensinou-nos a ultrapassar limites quando as forças já se esgotavam; aos professores: Prof. Dr. Aylton Pagamisse, Prof. Dr. José Carlos Rodrigues, Prof. Dr. José Gilberto Spasiani Rinaldi, Prof. Dr. Luiz Carlos Benini, Prof. Dr. Marco Antonio Piteri e Prof. Dr. Ronaldo Celso Messias Correia, que formaram a base para toda essa trajetória e por último, mas não menos importante, à Profa. Dra. Cristiane Nespoli Morelato França que tornou mais doce os passos finais dessa jornada.

Agradeço à Deus pelo dom da amizade, que me concedeu amigos para toda vida: Aline Teixeira de Oliveira, sempre estilosa; Amanda Aléssio, nossa caçula; Dhiéssica Juventino, amiga amada; Leonardo Cintra Lopes da Silva, meu "Profeta"; Luzia de Souza, capaz de sorrir em plena sexta-feira de manhã; Rosangela Malaguti, nossa fornecedora e companheira de longas viagens; Rubens Luiz Rodrigues, que ainda me deve um churrasco e Thomaz Augusto Ferreira Assis, meu "Santo".

Agradeço à Deus pelo dom do trabalho, que me conduziu ao IFSP - Câmpus Presidente Epitácio, onde o incentivo da instituição para capacitação dos servidores, bem como dos amigos de trabalho, foi fundamental para este período de desenvolvimento acadêmico, em especial a todos os servidores dos setores subordinados à Diretoria Adjunta de Administração.

Agradeço à Deus pelo seu infinito amor.

*Se a importância da Analysis Situs não é compreendida por todos,  
é porque nem todos tem refletido suficientemente sobre isso.*

Jules Henri Poincaré (1854 - 1912)

# Resumo

A topologia é um ramo da matemática, sutilmente entrelaçado com a Geometria, de aplicação em diversas áreas do conhecimento, cuja conceituação foi apresentada de forma expressiva nas escolas durante as décadas de 60 e 70, com o movimento educacional conhecido como Matemática Moderna. Através das mudanças curriculares, muitos temas abordados no ensino fundamental e médio foram reestruturados dentro de um conjunto de parâmetros para a organização curricular da base nacional comum, os PCN's, que normatizam a base do ensino e orientam que a matemática deve ser apresentada para o desenvolvimento de habilidades inerentes à resolução de problemas, aquisição de linguagem simbólica, modelagem e interpretação de situações cotidianas, argumentação e aplicação em situações da vida real. Portanto, esse trabalho foi elaborado com o objetivo de fornecer suporte para o ensino da topologia no ensino básico, através da compilação de fatos históricos, formalização de definições básicas de caráter introdutório como continuidade, espaços métricos, espaços topológicos, entre outros, apresentação de atividades que poderão ser trabalhadas conjuntamente com o ensino da geometria, que de forma lúdica e intuitiva, ajudarão a alicerçar a base para um futuro aprofundamento desses conceitos, auxiliando no desenvolvimento do pensamento topológico.

**Palavras-chave:** Topologia. Ensino Básico. Continuidade. Espaços métricos. Espaços Topológicos.

# Abstract

Topology is a branch of mathematics, subtly intertwined with geometry, of application in several areas of knowledge, whose conceptualization was presented expressively in schools during the 60s and 70s, with the educational movement known as Modern Mathematics. Through the curricular changes, many topics addressed in elementary and secondary education have been restructured within a set of parameters for the curriculum organization of the common national base, the PCNs, that normalize the base of the teaching and guide that the mathematics must be presented for the development of inherent abilities to solve problems, acquisition of symbolic language, modeling and interpretation of everyday situations, argumentation and application in real life situations. Thus, this work was developed with the purpose of providing support for the teaching of topology in basic education, through the compilation of historical facts, formalization of basic definitions of introductory character such as continuity, metric spaces, topological spaces, among others, presentation of activities which can be worked together with the teaching geometry, which in a playful and intuitive way, will help to lay the foundation for a future deepening of these concepts, aiding in the development of topological thinking.

**Keywords:** Topology. Basic Education. Continuity. Metric spaces. Topological spaces.

# Lista de Ilustrações

|      |                                                                                                                            |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Ilustração. . . . .                                                                                                        | 14 |
| 2.1  | Primeiros textos matemáticos conhecidos . . . . .                                                                          | 17 |
| 2.2  | Matemática das borboletas . . . . .                                                                                        | 18 |
| 2.3  | Personalidades da Matemática. . . . .                                                                                      | 19 |
| 2.4  | Retrato de Euler desenhado por Jakob Emanuel Handmann. . . . .                                                             | 21 |
| 2.5  | Charge de Simon Kneebone, sobre as pontes de Königsberg. . . . .                                                           | 22 |
| 2.6  | Pontes de Königsberg em forma de grafo. . . . .                                                                            | 23 |
| 2.7  | Grafo em formato de envelope. . . . .                                                                                      | 24 |
| 2.8  | Grafo em formato de estrela. . . . .                                                                                       | 24 |
| 2.9  | Grafo em formato de pentagrama. . . . .                                                                                    | 24 |
| 2.10 | Planta da residência do bilionário. . . . .                                                                                | 25 |
| 2.11 | Grafo da Figura 2.10. . . . .                                                                                              | 25 |
| 2.12 | Grafo planar de um cubo. . . . .                                                                                           | 26 |
| 2.13 | Retrato de August Ferdinand Möbius. . . . .                                                                                | 27 |
| 2.14 | Modelo de construção da faixa de Möbius. . . . .                                                                           | 28 |
| 2.15 | Por Escher. . . . .                                                                                                        | 29 |
| 2.16 | Óleo sobre tela de Salvador Dalí. <i>Contorção topológica de uma figura feminina convertendo-se em violoncelo.</i> . . . . | 29 |
| 2.17 | <i>"Torção do amor"</i> por Max Bill, 1953-1955. . . . .                                                                   | 29 |
| 2.18 | Faixa de Möbius em um cemitério em Zaragoza, na Espanha. . . . .                                                           | 30 |
| 2.19 | Retrato de Felix Christian Klein. . . . .                                                                                  | 31 |
| 2.20 | Modelo tridimensional da Garrafa de Klein. . . . .                                                                         | 32 |
| 2.21 | Garrafa de Klein cortada ao meio formando duas faixas de Möbius. . .                                                       | 32 |
| 2.22 | Garrafa de Klein feita em vidro por Mitsugi Ohno (1926-1999). . . . .                                                      | 33 |
| 3.1  | Conjuntos numéricos. . . . .                                                                                               | 34 |
| 3.2  | União e interseção de conjuntos. . . . .                                                                                   | 36 |
| 3.3  | Complementar e diferença entre conjuntos. . . . .                                                                          | 37 |
| 3.4  | Aplicação injetora. . . . .                                                                                                | 38 |
| 3.5  | Aplicação sobrejetora. . . . .                                                                                             | 39 |
| 3.6  | Aplicação bijetora. . . . .                                                                                                | 39 |

|      |                                                                                      |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.7  | Aplicação composta. . . . .                                                          | 40 |
| 4.1  | Distância entre dois pontos em $\mathbb{R}$ . . . . .                                | 45 |
| 4.2  | Distância entre duas funções segundo a métrica definida. . . . .                     | 49 |
| 4.3  | A distância é a área da figura compreendida entre os gráficos de $f$ e $g$ . . . . . | 51 |
| 4.4  | Bola aberta na reta real. . . . .                                                    | 52 |
| 4.5  | Bola fechada na reta real. . . . .                                                   | 53 |
| 4.6  | Esfera na reta real. . . . .                                                         | 53 |
| 4.7  | Bola aberta no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d$ . . . . .                         | 53 |
| 4.8  | Bola fechada ou disco no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d$ . . . . .               | 54 |
| 4.9  | Esfera no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d$ . . . . .                              | 54 |
| 4.10 | Bola aberta no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d_1$ . . . . .                       | 55 |
| 4.11 | Bola fechada ou disco no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d_1$ . . . . .             | 55 |
| 4.12 | Esfera no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d_1$ . . . . .                            | 56 |
| 4.13 | Bola aberta no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d_2$ . . . . .                       | 56 |
| 4.14 | Bola fechada ou disco no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d_2$ . . . . .             | 57 |
| 4.15 | Esfera no $\mathbb{R}^2$ usando a métrica $d_2$ . . . . .                            | 57 |
| 4.16 | Bola aberta no $\mathcal{C}[a, b]$ usando a métrica do supremo. . . . .              | 58 |
| 4.17 | Bola fechada no $\mathcal{C}[a, b]$ usando a métrica do supremo. . . . .             | 58 |
| 4.18 | Bolas abertas disjuntas. . . . .                                                     | 59 |
| 4.19 | $B(q, s) \subset B(q, r)$ . . . . .                                                  | 60 |
| 4.20 | $\delta(B(p, r)) \leq 2r$ . . . . .                                                  | 61 |
| 5.1  | Topologias sobre $X$ . . . . .                                                       | 65 |
| 5.2  | Coleção de subconjuntos de $X$ que não é uma topologia. . . . .                      | 66 |
| 5.3  | Pontos $x \neq y$ em um Espaço de Hausdorff. . . . .                                 | 68 |
| 5.4  | Abertos de regiões circulares no plano. . . . .                                      | 68 |
| 5.5  | Abertos de regiões retangulares no plano. . . . .                                    | 69 |
| 5.6  | Caminho em $X$ entre $a$ e $b$ . . . . .                                             | 71 |
| 6.1  | Continuidade em espaços métricos. . . . .                                            | 73 |
| 6.2  | Caminhos homotópicos. . . . .                                                        | 75 |
| 6.3  | Caminho fechado em um Toro. . . . .                                                  | 75 |
| 7.1  | Superfícies isotópicas e homeomorfas. . . . .                                        | 77 |
| 7.2  | Construção do toro $T^2$ a partir do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ . . . . .       | 78 |
| 7.3  | Construção da garrafa de Klein a partir do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ . . . . . | 78 |
| 7.4  | Plano projetivo $P^2$ a partir do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ . . . . .          | 78 |
| 7.5  | Faixa de Möbius a partir de dois quadrados $[0, 1] \times [0, 1]$ . . . . .          | 79 |
| 7.6  | Bitoro. . . . .                                                                      | 79 |
| 7.7  | Nós triviais. . . . .                                                                | 81 |
| 7.8  | Nó trifólio canhoto e nó trifólio destro. . . . .                                    | 81 |

|      |                                                               |     |
|------|---------------------------------------------------------------|-----|
| 7.9  | Alguns exemplos de nós. . . . .                               | 82  |
| 7.10 | Nós primos com até nove cruzamentos e alguns enlaces. . . . . | 83  |
| 7.11 | Tipos de dobras em um padrão de vinco. . . . .                | 84  |
| 7.12 | Tsuru: origami e padrão de vinco. . . . .                     | 84  |
| 7.13 | Dobra para demonstração do Teorema de Maekawa. . . . .        | 85  |
| 7.14 | Padrão de dobra Tsuru com duas cores. . . . .                 | 86  |
| 7.15 | Tipos de Origami. . . . .                                     | 86  |
| 8.1  | Origami de uma cabeça de cachorro. . . . .                    | 88  |
| 8.2  | Origami de um cisne. . . . .                                  | 89  |
| 8.3  | Transformar uma fita retangular em um pentágono. . . . .      | 89  |
| 8.4  | Construção da dobra miura. . . . .                            | 92  |
| 8.5  | Padrão de vinco da dobra miura. . . . .                       | 92  |
| 8.6  | Passo-a-passo: Origami de um tetraedro. . . . .               | 94  |
| 8.7  | Passo-a-passo: Origami de um cubo. . . . .                    | 96  |
| 8.8  | Passo-a-passo: Origami de um octaedro. . . . .                | 98  |
| 8.9  | Relação de Euler para poliedros convexos. . . . .             | 98  |
| 8.10 | Passo-a-passo: Origami modular Shuriken. . . . .              | 100 |
| 8.11 | Modelo para confecção das faixas. . . . .                     | 101 |
| 8.12 | Posicionamento das faixas. . . . .                            | 101 |
| 8.13 | Modelo de corte da faixa. . . . .                             | 102 |
| 8.14 | Molde para construção de um trihexaflexágono. . . . .         | 103 |
| 8.15 | Configurações de desenhos no trihexaflexágono. . . . .        | 103 |
| 8.16 | Dobrando um trihexaflexágono. . . . .                         | 104 |
| 8.17 | Configurações de desenhos no trihexaflexágono. . . . .        | 104 |
| 8.18 | Modelo para construir um octaflexágono. . . . .               | 105 |
| 8.19 | Octaflexágono. . . . .                                        | 106 |
| 8.20 | Modelo Tetrahexaflexágono em 3D. . . . .                      | 107 |
| 8.21 | Montagem Tetrahexaflexágono em 3D. . . . .                    | 107 |
| 8.22 | Toro a partir de uma faixa retangular. . . . .                | 108 |
| 8.23 | Nó trifólio a partir de uma faixa retangular. . . . .         | 109 |
| 8.24 | Faixa de Möbius a partir de uma faixa retangular. . . . .     | 109 |
| 8.25 | Faixa de Möbius em nó trevo. . . . .                          | 110 |
| 8.26 | Xícara a partir de uma faixa retangular. . . . .              | 110 |
| 8.27 | Jogos projetados na superfície de um toro. . . . .            | 111 |
| 8.28 | Quebra-cabeça do anel. . . . .                                | 112 |
| 8.29 | Corações enlaçados. . . . .                                   | 113 |
| 8.30 | Enrolados, jogo lúdico. . . . .                               | 113 |
| 8.31 | Desafio do nó, jogo lúdico. . . . .                           | 113 |
| 8.32 | Transformação topológica. . . . .                             | 114 |
| 8.33 | Trança da quarta dimensão. . . . .                            | 114 |



|      |                                                            |     |
|------|------------------------------------------------------------|-----|
| 8.34 | Peças permitidas no jogo. . . . .                          | 115 |
| 8.35 | Exemplo de jogadas. . . . .                                | 115 |
| 8.36 | Passando pelo buraco de uma folha de papel??? . . . . .    | 116 |
| 8.37 | Padrão de corte. . . . .                                   | 117 |
| 8.38 | Solução para transformar uma fita em um pentágono. . . . . | 118 |
| 8.39 | Modelo hexahexaflexágono. . . . .                          | 119 |
| 8.40 | Receita de massa para modelar. . . . .                     | 120 |
| 8.41 | Solução do quebra-cabeça do anel . . . . .                 | 121 |
| 8.42 | Solução do quebra-cabeça corações enlaçados. . . . .       | 122 |
| 8.43 | Modelos de quebra-cabeça. . . . .                          | 122 |
| 8.44 | Solução do desafio do nó. . . . .                          | 123 |
| 8.45 | Solução do problema proposto na Figura 8.32. . . . .       | 123 |
| 8.46 | Solução do problema proposto na Figura 8.33. . . . .       | 123 |
| 8.47 | Solução Atividade 8.1.18.a. . . . .                        | 124 |
| 8.48 | Solução Atividade 8.1.18.b. . . . .                        | 124 |

# Sumário

|          |                                                                     |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                   | <b>14</b> |
| <b>2</b> | <b>Um pouco de História</b>                                         | <b>17</b> |
| 2.1      | Caminhos Eulerianos, Teoria dos Grafos e Relação de Euler . . . . . | 21        |
| 2.1.1    | Leonhard Paul Euler . . . . .                                       | 21        |
| 2.1.2    | As pontes de Königsberg e a Teoria dos grafos . . . . .             | 22        |
| 2.1.3    | Relação de Euler . . . . .                                          | 26        |
| 2.2      | A intrigante faixa de Möbius . . . . .                              | 27        |
| 2.2.1    | August Ferdinand Möbius . . . . .                                   | 27        |
| 2.2.2    | Uma superfície de um lado só. . . . .                               | 28        |
| 2.3      | A Garrafa de Klein . . . . .                                        | 31        |
| 2.3.1    | Felix Christian Klein . . . . .                                     | 31        |
| 2.3.2    | Um objeto de quarta dimensão. . . . .                               | 32        |
| <b>3</b> | <b>Preâmbulo</b>                                                    | <b>34</b> |
| 3.1      | Conjuntos . . . . .                                                 | 34        |
| 3.2      | Funções . . . . .                                                   | 38        |
| 3.3      | Espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ . . . . .                        | 41        |
| <b>4</b> | <b>Espaços métricos</b>                                             | <b>43</b> |
| 4.1      | Métricas . . . . .                                                  | 43        |
| 4.2      | Bolas abertas, bolas fechadas e esferas . . . . .                   | 51        |
| 4.2.1    | Propriedades Básicas das Bolas Abertas . . . . .                    | 59        |
| 4.3      | Topologia dos Espaços Métricos . . . . .                            | 61        |
| <b>5</b> | <b>Espaços topológicos</b>                                          | <b>65</b> |
| 5.1      | Topologias . . . . .                                                | 65        |
| 5.2      | Topologia Quociente . . . . .                                       | 69        |
| 5.3      | Interior, Vizinhança e Fronteira . . . . .                          | 70        |
| 5.4      | Espaços conexos . . . . .                                           | 70        |

|          |                                                           |            |
|----------|-----------------------------------------------------------|------------|
| <b>6</b> | <b>Continuidade</b>                                       | <b>72</b>  |
| 6.1      | Algumas definições . . . . .                              | 72         |
| <b>7</b> | <b>Superfícies, Teoria dos nós e Origami</b>              | <b>76</b>  |
| 7.1      | Superfícies isotópicas e homeomorfias . . . . .           | 76         |
| 7.2      | Superfícies . . . . .                                     | 77         |
| 7.3      | Teoria dos nós . . . . .                                  | 79         |
| 7.3.1    | História dos Nós . . . . .                                | 79         |
| 7.3.2    | Nó trivial e outros tipos de nós . . . . .                | 80         |
| 7.4      | Origami . . . . .                                         | 84         |
| 7.4.1    | Teorema escondido nas dobras de papel . . . . .           | 84         |
| <b>8</b> | <b>Aprendendo topologia através de atividades lúdicas</b> | <b>87</b>  |
| 8.1      | Atividades . . . . .                                      | 87         |
| 8.1.1    | Dobraduras . . . . .                                      | 87         |
| 8.1.2    | Superfícies . . . . .                                     | 101        |
| 8.1.3    | Atividades com nós . . . . .                              | 112        |
| 8.1.4    | Continuidade . . . . .                                    | 115        |
| 8.2      | Sugestões e soluções das atividades . . . . .             | 118        |
| <b>9</b> | <b>Considerações finais</b>                               | <b>125</b> |
|          | <b>Referências</b>                                        | <b>126</b> |

# 1 Introdução

A topologia, vista como uma ramificação da geometria, que tem por objetivo o estudo rigoroso do espaço e das formas das figuras e corpos que nele possam existir <sup>1</sup>, preocupa-se em analisar as propriedades das figuras geométricas que não se alteram na ocorrência de transformações<sup>2</sup>, mesmo que estas sejam drásticas ao ponto de que suas propriedades métricas e projetivas sejam perdidas (COURANT; ROBBINS, 2000).

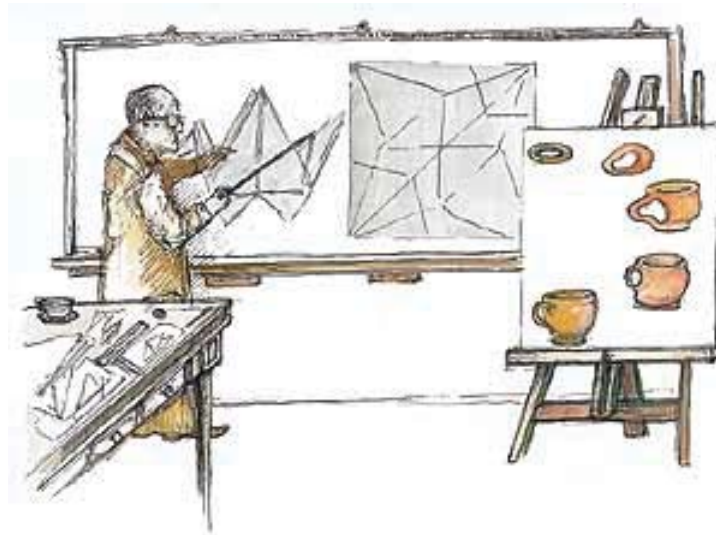


Figura 1.1: Ilustração.

Fonte: <<http://galileu.globo.com/edic/141/imagens/eureca01.jpg>>

Frequentemente chamada de "*geometria da folha da borracha*", pois seria conveniente que as figuras fossem desenhadas em uma folha elástica, ela utiliza os mesmos objetos que a Geometria, mas independente da distância, medida dos ângulos e configuração dos pontos, se for possível realizar a transformação desses objetos em outros através de funções contínuas reversíveis<sup>3</sup>, eles serão considerados equivalentes e indistinguíveis (VILCHES, 2000).

---

<sup>1</sup><<https://www.dicio.com.br/geometria/>>

<sup>2</sup>Deformações contínuas através de alongamento, torção, compressão ou corte com colagem no mesmo sentido do corte.

<sup>3</sup>Funções contínuas que possuem inversas também contínuas.

De forma simples, podemos defini-la como o estudo da continuidade. Alguns matemáticos e estudiosos de outras áreas exatas brincam ao dizer que um topologista é aquele que não sabe diferenciar uma xícara de uma rosquinha, pois para um topólogo, um bolinho de chuva, uma rosquinha e um pretzel<sup>4</sup>, só são diferentes porque a rosquinha possui um buraco<sup>5</sup>, o pretzel três, enquanto que o bolinho de chuva não tem nenhum.

Mas a topologia não se resume apenas em provar a equivalência de objetos, pois sua essência, por vezes complexa, mas ainda assim bela, a vasta gama de resultados com aplicações em diversas áreas das ciências, artes e recentemente na psicanálise, mostra sua relevância para o desenvolvimento humano.

É possível, a quem se aventurar, assimilar seus conceitos básicos através de atividades lúdicas e problemas que se relacionam com questões topológicas de fácil entendimento, mas além da uma fundamentação teórica, conhecer suas origens e os personagens que colaboraram para sua concepção é de suma importância para construção do pensamento topológico.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira deixa claro que a educação básica deve fornecer a cada indivíduo uma formação comum, garantindo meios para o futuro crescimento social e acadêmico, além de uma parte diversificada que levará em conta as características regionais, culturais e econômicas dos educandos.

As Diretrizes Curriculares Nacionais, orientam sobre os princípios, fundamentos e procedimentos, que devem subsidiar as propostas curriculares das unidades escolares públicas e particulares, destacando dentre suas normativas, a necessidade de considerar dentro do projeto político-pedagógico, atividades artístico-culturais, tecnológicas e de iniciação científica, problematização como incentivo à pesquisa, garantia ao desenvolvimento do espírito inventivo, aprendizagem como método de apropriação significativa dos conhecimentos, articulação entre teoria e prática, vinculando o trabalho intelectual às atividades práticas ou experimentais e a utilização de diferentes instrumentos para construção de novos saberes.

O ensino de Matemática deve levar o aluno a compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas de forma a desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral, aplicando seus conhecimentos em situações diversas para interpretação da ciência, tecnologia e atividades cotidianas, buscando analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, a fim de expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, de outras áreas do conhecimento e da atualidade. Deve também desenvolver capacidades de raciocínio e resolução de problemas, podendo expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas, estabelecendo conexões entre diferentes temas e o conhecimento de outras áreas do ensino, promovendo a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades

---

<sup>4</sup>Pão popular no sul da Alemanha, França, Itália e Estados Unidos em formato de nó, que pode ser doce ou salgado.

<sup>5</sup>Na literatura encontra-se o termo matemático *genus*, que significa buraco ou furo.

matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

A introdução de conteúdos e conceitos de forma mecânica e impessoal, muitas vezes impossibilita o desenvolvimento e estruturação de ideias, levando à frustração e ao desânimo. Assim, vincular o ensino à situações do cotidiano ou atividades que despertem a curiosidade, imaginação e contentamento, auxiliam na estruturação do pensamento matemático e à associação entre o concreto e o abstrato.

Utilizar uma metodologia que alie contextualização histórica, manipulação de objetos, situações problemas, atividades de caráter lúdico e o uso da tecnologia, amplia a chance de superar as dificuldades de aprendizagem, pois são fornecidas novas ferramentas para a reestruturação das concepções e desenvolvimento do raciocínio.

Os conteúdos básicos de matemática são organizados em quatro blocos: Números e operações, Funções, Geometria, Análise de dados e probabilidade, de modo o que o ensino possa acontecer de forma articulada. Devido a conexão existente entre a Geometria e a Topologia, é possível, sem afastar-se das normativas vigentes, aliar o ensino de conceitos topológicos iniciais ao estudo da geometria durante toda a formação básica.

Assim, com o objetivo de apresentar ferramentas para auxiliar o ensino de noções de topologia no ensino básico, respeitando as normativas curriculares, contribuindo para o aprofundamento teórico de docentes e demais interessados na área, este trabalho foi estruturado de forma a agregar tópicos considerados essenciais para o estudo da topologia.

O Capítulo 2 apresenta um resumo dos fatos históricos relacionados ao surgimento da Topologia, com detalhes sobre a vida e contribuições de Euler, Möbius e Klein.

O Capítulo 3 resgata noções fundamentais sobre conjuntos, funções e espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , que atuam como pré-requisitos para os capítulos seguintes.

Os Capítulos de 4 à 7 discorrem sobre espaços métricos, espaços topológicos, continuidade, superfícies, teoria dos nós e origami, de modo a fundamentar teoricamente conceitos que serão desenvolvidos nas atividades lúdicas.

No Capítulo 9 encontramos atividades lúdicas para aplicação em sala de aula ou oficinas matemáticas, que servirão de estímulo para a introdução de conceitos relacionados à topologia.

O Capítulo 10 finaliza o trabalho através das considerações finais.

## 2 Um pouco de História

Determinar o surgimento da matemática não é algo simples. Considerar como marco os primeiros textos conhecidos datados por volta de 2000-1600 a.C., como o *Plimpton 322* da matemática babilônica (FRIBERG, 1981) ou os *Papiro de Rhind* e *Papiro de Moscou* da matemática egípcia (NEUGEBAUER, 1969), que tratam, dentre outros temas, sobre o que chamamos de *equação pitagórica*, não faz jus a toda uma trajetória que vem sendo traçada desde a criação do universo.



Figura 2.1: Primeiros textos matemáticos conhecidos.<sup>1</sup>

Ao observar a beleza oculta da matemática em toda a natureza, encontramos maravilhas como a geometria dos alvéolos das abelhas, que assumindo um formato hexagonal, otimiza a relação entre o material gasto na sua construção e seu volume, ou ainda, as curiosas borboletas matemáticas apresentadas na Figura 2.1, que exibem em suas asas números indo-arábicos (TAHAN, 1973).

---

<sup>1</sup>(a)By UNSW/Andrew Kelly (b)By British Museum via The New York Times (c)By Carles Dorce

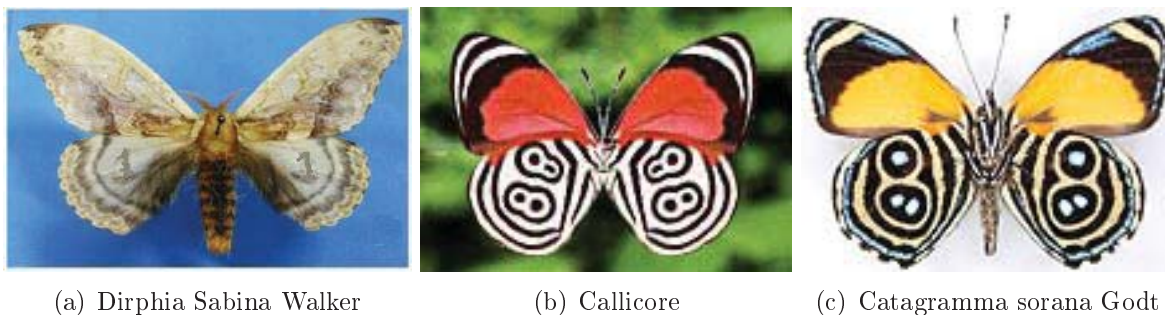


Figura 2.2: Matemática das borboletas.<sup>2</sup>

Características de corpos celestes como as espirais em nebulosas, trajetórias de planetas, cometas e diversos fenômenos cósmicos, foram estudados e explicados através de equações matemáticas (SMITH, 1958).

Conjectura-se como o homem primitivo esforçou-se para compreender questões de grandeza, forma e número. Percebemos que até os registros de fósseis pré-históricos apresentam simetrias em sua composição. A matemática harmoniosamente entrelaçou-se com tudo o que nos cerca, aquilo que somos, vemos e o que imaginamos.

O homem cresceu, evoluiu, buscou interagir e viver socialmente, desenvolveu linguagens e formas de perpetuar o conhecimento através de registros. Seja por pinturas em cavernas, símbolos gravados em pedras, anotações aleatórias ou organizadas, é certo que o conhecimento foi repassado por gerações até os dias atuais. O desenvolvimento intelectual ultrapassou barreiras nunca antes imaginadas pela humanidade, reduziu distâncias físicas e possibilitou a comunicação imediata entre pessoas.

Percorrendo a história registrada ao longo dos séculos, encontramos personagens que contribuíram com importantes descobertas matemáticas, que direta ou indiretamente, conduziram a humanidade para o cenário atual, definiram conceitos e estruturaram a matemática da forma como a conhecemos hoje. Os principais ramos da matemática são Aritmética, Álgebra e a Geometria. De sua associação surgiram os demais ramos, alguns tão antigos quanto os primeiros e outros de concepção mais recente.

Com surgimento no século XVII, originalmente chamada de Analysis Situs<sup>3</sup>, a Topologia é provavelmente a mais nova linha da Matemática clássica, com Leibniz<sup>4</sup>, em 1679, dedicando-se a estudar propriedades topológicas, seguido por Euler<sup>5</sup>, que em 1736 publicou a *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*<sup>6</sup>, onde solucionou o problema das pontes da cidade de Königsberg<sup>7</sup>, publicando em 1751 a demonstração

<sup>2</sup>Fonte: < <http://topicosmatematicos.blogspot.com.br/2009/03/matematica-das-borboletas.html> >

<sup>3</sup>Análise de posição.

<sup>4</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

<sup>5</sup>Leonhard Paul Euler (1707-1783).

<sup>6</sup>A solução de um problema relacionado à geometria da posição (tradução nossa).

<sup>7</sup>Território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado.



da relação  $V + F - A = 2$ , conhecida como Teorema de Euler para poliedros convexos<sup>8</sup>, que em 1813 foi reformulada por Lhuillier<sup>9</sup> para sólidos com furos neles, mostrando que em um sólido com  $g$  furos, teremos a relação  $V + F - A = 2 - 2g$ . Este foi o primeiro resultado conhecido com um invariante topológico.



Figura 2.3: Personalidades da Matemática.

Fonte: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>>

Em 1858, August Möbius<sup>10</sup> fez o estudo sobre a faixa de Möbius, um espaço topológico<sup>11</sup> obtido pela colagem das duas extremidades de uma faixa após sua torção e que foi nomeada em sua homenagem.

A Teoria dos conjuntos de Georg Cantor<sup>12</sup> contribuiu para a solução de difíceis questões topológicas e Listing<sup>13</sup> foi o primeiro a usar a terminologia topologia, publicando em 1847 o livro *Vorstudien zur Topologie*<sup>14</sup>.

Em 1882, Felix Klein<sup>15</sup> criou o conceito da garrafa de Klein, uma superfície fechada,

<sup>8</sup>Também conhecida como Característica de Euler ou Relação de Euler.

<sup>9</sup>Simon Antoine Jean Lhuillier (1750-1840).

<sup>10</sup>August Ferdinand Möbius (1790-1868).

<sup>11</sup>Estrutura que permite a formalização de conceitos como convergência, conexidade e continuidade.

<sup>12</sup>Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918).

<sup>13</sup>Johann Benedict Listing (1808-1882).

<sup>14</sup>Estudos Introdutórios em Topologia.

<sup>15</sup>Felix Christian Klein (1849-1925).

sem margens e não orientável, que pertence a um espaço de quatro dimensões, embora possa ser visualizado em um espaço de três.

Com a publicação em 1895 de *Analysis Situs*, Henri Poincaré<sup>16</sup> forneceu o primeiro tratamento rigoroso a respeito da topologia, que levou ao desenvolvimento da topologia algébrica.

Existem ainda outros colaboradores como Volterra<sup>17</sup>, Arzelà<sup>18</sup>, Hadamard<sup>19</sup>, que fundamentaram a dissertação de doutorado de Fréchet<sup>20</sup>, apresentada em abril de 1906, onde ele introduziu o conceito de espaço métrico na análise funcional<sup>21</sup>.

Um dos fundadores da topologia moderna, contribuindo significativamente para a teoria dos conjuntos e para a análise funcional, foi Hausdorff<sup>22</sup>, que definiu em 1914, o que é conhecido atualmente como espaço de Hausdorff, mas foi em 1922 que Kuratowski<sup>23</sup> introduziu o conceito final de espaço topológico. Em 1900, no Congresso Internacional de Matemática, Riesz<sup>24</sup>, com base na teoria dos conjuntos, propôs a caracterização axiomática da topologia.

Com o intuito de enriquecer esse breve histórico, veremos de forma mais detalhada sobre a vida e contribuições de alguns desses notáveis matemáticos.

---

<sup>16</sup>Jules Henri Poincaré (1854-1912).

<sup>17</sup>Vito Volterra (1860-1940).

<sup>18</sup>Cesare Arzelà (1847-1912).

<sup>19</sup>Jacques Salomon Hadamard (1865-1963).

<sup>20</sup>Maurice René Fréchet (1878-1973).

<sup>21</sup>Ramo da matemática que trata do estudo de espaços de funções.

<sup>22</sup>Felix Hausdorff (1868-1942).

<sup>23</sup>Kazimierz Kuratowski (1896-1980).

<sup>24</sup>Frigyes Riesz (1880-1956).

## 2.1 Caminhos Eulerianos, Teoria dos Grafos e Relação de Euler

### 2.1.1 Leonhard Paul Euler



Figura 2.4: Retrato de Euler desenhado por Jakob Emanuel Handmann.

Fonte: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Euler.html>>

Retratado por Jakob Emanuel Handmann na Figura 2.4, Leonhard Paul Euler nasceu em 15 de abril de 1707, na Basileia<sup>25</sup>, filho primogênito de Paul Euler e Margarete Brucker. Inicialmente educado pelo próprio pai, um pastor calvinista com inclinações matemáticas, começou a estudar Teologia na Universidade da Basileia em 1720, mas foi graças a Johann Bernoulli que Euler seguiu a carreira de matemático e não se tornou pastor como seu pai.

Em 1727, conseguiu uma posição na Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia, passando a ocupar a cadeira sênior em matemática na Academia em 1733, no lugar de Daniel Bernoulli, com quem morava até então. Casou-se em 1734 com Katharina Gsell, filha de um pintor do Ginásio de São Petersburgo, com quem teve 13 filhos, dos quais apenas cinco sobreviveram à infância.

Euler perdeu a visão do olho direito em 1738, e em 1741, preocupado com a contínua agitação na Rússia, deixou São Petersburgo passando a viver em Berlim, onde assumiu uma posição na Academia de Ciências de Berlim e durante 25 anos escreveu cerca de 380 artigos.

Em 1766 retornou a São Petersburgo, onde perdeu a visão do olho esquerdo devido a uma catarata, no entanto sua condição não atrapalhou sua produtividade, pois suas habilidades de cálculo mental e de memória fotográfica compensaram sua falta de visão. Apesar da cegueira, Euler escreveu quase metade de suas 866 obras entre 1766 e 1783.

---

<sup>25</sup>Norte da Suíça quase na fronteira com a França

Faleceu em 1783, após uma conversa com Anders Johan Lexell<sup>26</sup> e Nikolai Fuss<sup>27</sup> sobre a descoberta de um novo planeta chamado Urano e sua órbita.

Segundo BOYER (2010, p. 305), "nenhum outro indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma matemática de nível universitário de hoje quanto Euler, o construtor de notação mais bem-sucedido em todos os tempos" e seus estudos sobre Teoria dos números, Teoria dos grafos, Matemática aplicada, Física, Astronomia, Geometria, Lógica e outros, contribuem até hoje para o surgimento de novas descobertas e soluções de problemas de caráter intrincado em diversas áreas do conhecimento.

### 2.1.2 As pontes de Königsberg e a Teoria dos grafos



Figura 2.5: Charge de Simon Kneebone, sobre as pontes de Königsberg.

Fonte: <<https://todomundoodeiamatematica.wordpress.com/2014/06/10/teoria-de-grafos-e-redes-sociais/>>

Em Königsberg, na Prússia, atual Kaliningrado, representadas através da Charge de Simon Kneebone na Figura 2.5, havia sete pontes que conectavam duas ilhas e sobre as quais surgiu o seguinte questionamento: "É possível fazer um caminho por entre as pontes de modo que se passe em cada uma delas exatamente uma única vez?"

Euler apresentou um critério para solucionar problemas do gênero, mostrando que no caso das pontes de Königsberg, não é possível fazer o caminho passando por todas uma única vez. Ele percebeu que, nessa situação, a geometria não importava, reduzindo o problema a uma rede de pontos e linhas, onde cada ponto corresponde a uma porção de terra e dois pontos estão conectados por uma linha que corresponde a um caminho.

<sup>26</sup>Anders Johan Lexell (1740-1784), astrônomo, matemático e físico.

<sup>27</sup>Nikolai Fuss (1755-1826), matemático suíço.

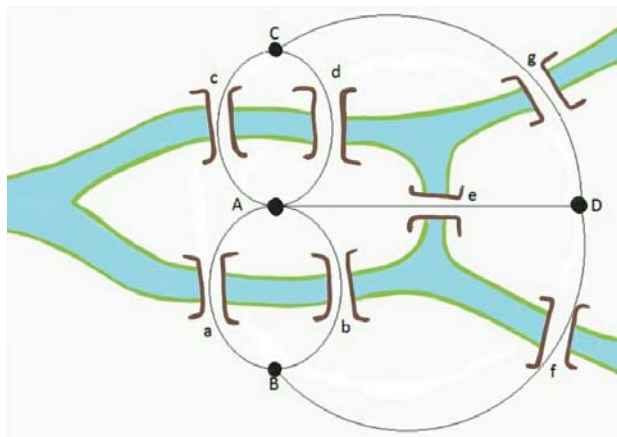


Figura 2.6: Pontes de Königsberg em forma de grafo.

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 2.6, temos os pontos A, B, C e D correspondentes as faixas de terra e as linhas a, b, c, d, e, f e g representando as pontes. O problema, então, se resume a verificar se existe uma maneira de percorrer toda a rede passando uma única vez por cada aresta.

Euler considerou duas possibilidades: um *caminho fechado*, que começa e termina no mesmo ponto e um *caminho aberto*, que começa e termina em pontos diferentes.

Para redes que não possuem pontos isolados, como a do problema das pontes, trabalhando com a hipótese de um caminho fechado, Euler provou que para existir uma solução, cada ponto deve possuir uma linha de entrada e outra de saída, isto é, ter valência<sup>28</sup> par. É possível verificar observando a Figura 2.6, que todos os pontos tem valência ímpar, logo o problema das pontes de Königsberg não possui solução, considerando um caminho fechado.

Para um caminho aberto, Euler observou que existe a necessidade de que o ponto de partida e o ponto de chegada tenham valência ímpar, e os demais valência par. No grafo das pontes existem quatro pontos de valência ímpar, portanto não existe um caminho aberto como solução do problema.

Temos, como definição, que um grafo euleriano é aquele que possui um caminho de Euler, isto é, aquele onde cada aresta pode ser percorrida exatamente uma única vez, independente de se utilizar um caminho aberto ou fechado.

Problemas que usam grafos eulerianos são comuns em jogos matemáticos, como por exemplo, desenhar um envelope sem retirar o lápis do papel e sem passar pelas linhas desenhadas, como mostra a Figura 2.7. O mesmo problema pode ser aplicado em diversas figuras, como uma estrela de cinco pontas ou um pentagrama, Figuras 2.8 e 2.9.

<sup>28</sup>Número de linhas que se encontram em um mesmo ponto.

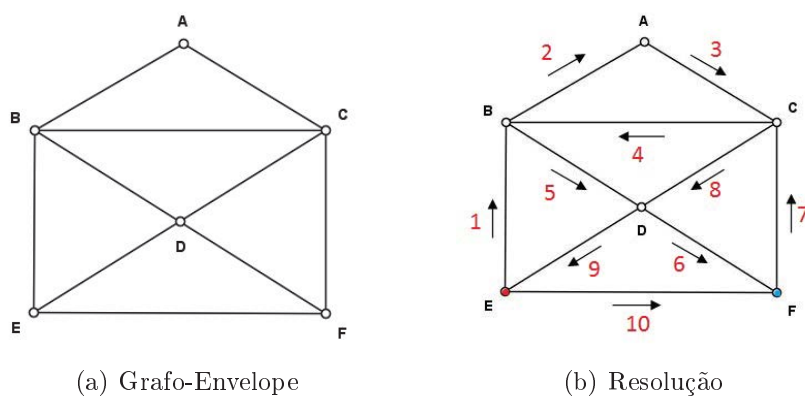


Figura 2.7: Grafo em formato de envelope.

Fonte: Elaborada pela autora.

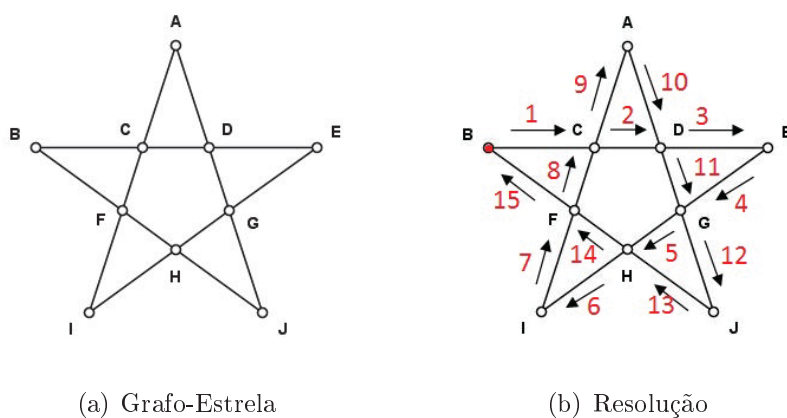


Figura 2.8: Grafo em formato de estrela.

Fonte: Elaborada pela autora.

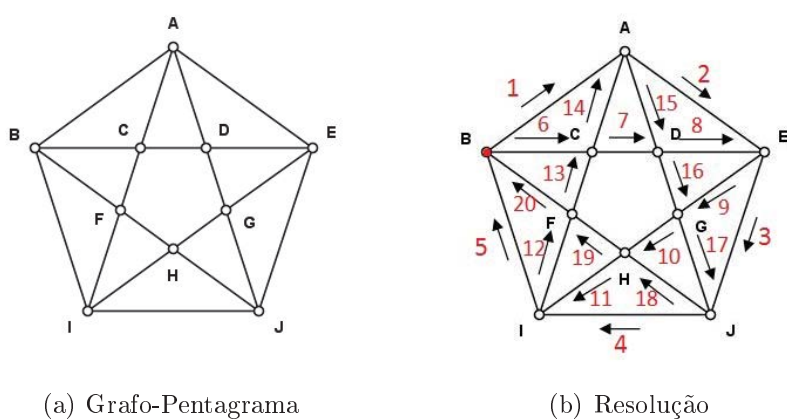


Figura 2.9: Grafo em formato de pentagrama.

Fonte: Elaborada pela autora.

Outro exemplo interessante traz o seguinte enunciado: "Um bilionário acaba de ser assassinado. Contrata-se um detetive, que nas horas vagas é um estudioso da Teoria de Grafos, para investigar o caso. O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina, lugar onde ocorreu o assassinato e logo em seguida deixar aquela sala pela mesma porta que havia entrado. O jardineiro, contudo, afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa. O detetive avaliou a planta da residência, conforme Figura 2.10, e em poucos minutos declarou solucionado o caso. Quem poderia ser o suspeito e qual o raciocínio utilizado pelo detetive para apontá-lo?"

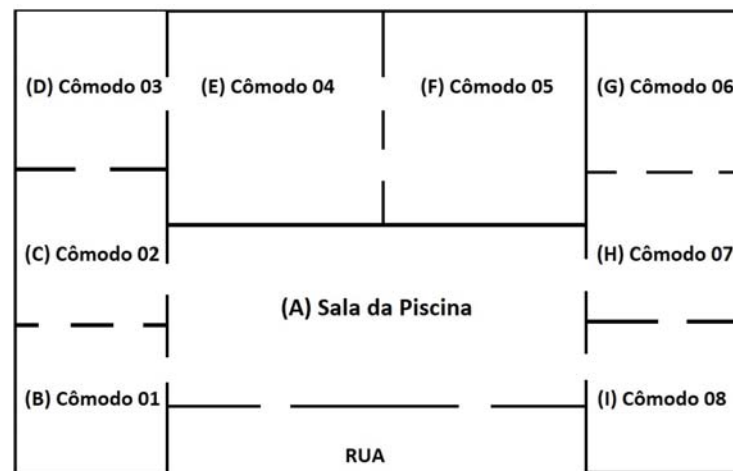


Figura 2.10: Planta da residência do bilionário.  
Fonte: Elaborada pela autora.

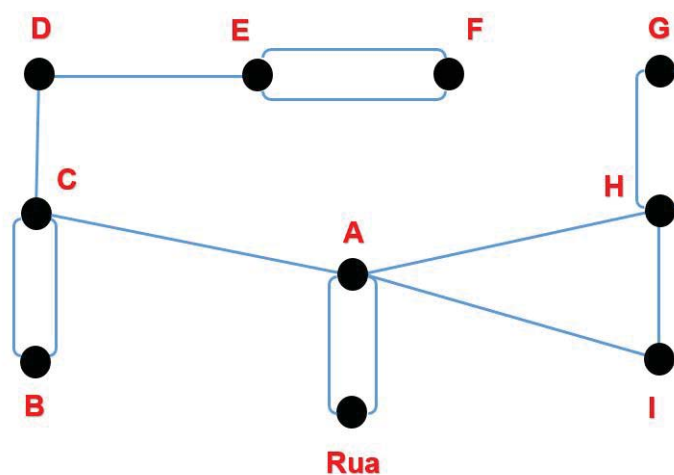


Figura 2.11: Grafo da Figura 2.10.  
Fonte: Elaborada pela autora.

Analisando a Figura 2.11, observamos que todos os pontos tem valência par, exceto o ponto  $A$ , cuja valência é cinco. Assim, de acordo com o estudo de Euler sobre grafos, não é possível fazer um caminho aberto ou fechado para a Figura 2.11. Logo o maior suspeito do assassinato é o jardineiro.

### 2.1.3 Relação de Euler

Euler e seus caminhos eulerianos deram origem a Teoria dos grafos, que possui aplicações em diversas áreas do conhecimento. Um fato curioso é que, a partir de um grafo simples, planar<sup>29</sup> e conexo<sup>30</sup>, que divide o plano em um número  $n$  de regiões delimitadas por suas arestas, as quais chamaremos de face, é possível estabelecer uma relação entre o número de vértices, arestas e faces. Note que a região exterior do grafo, que não é delimitada pelas suas arestas, também é contada como face. Assim, dado um grafo  $G(V, E)$ , planar e conexo, com  $V$  vértices,  $F$  faces e  $A$  arestas, vale a relação  $V + F - A = 2$ , conhecida como Relação de Euler. A mesma relação pode ser aplicada para poliedros convexos, bastando apenas transformá-los em grafos planares. Observe que  $E$  representa o conjunto formado pelas arestas.

Lembrando que é preciso contar como face o plano exterior do grafo, temos na Figura 2.12, oito vértices, seis faces e doze arestas que satisfazem a relação  $V + F - A = 2$ , pois  $8 + 6 - 12 = 2$ .

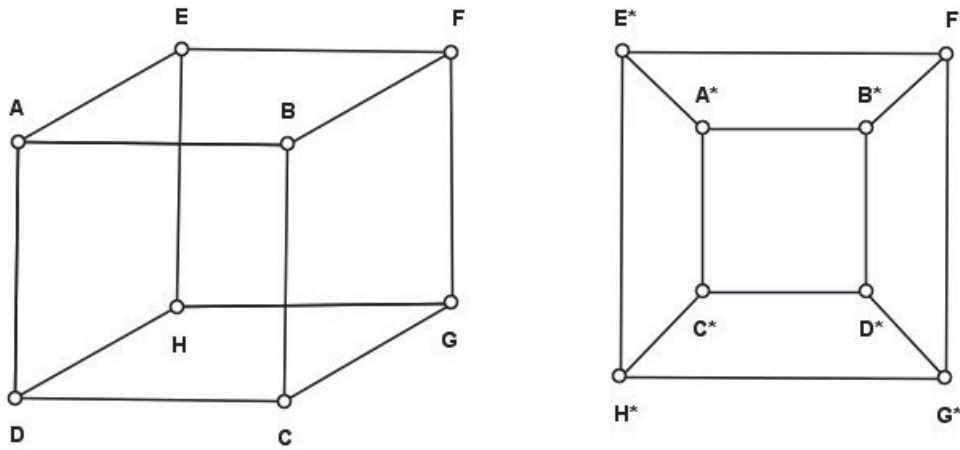


Figura 2.12: Grafo planar de um cubo.

Fonte: Elaborada pela autora.

<sup>29</sup>Que não possui cruzamento de arestas em um ponto que não seja vértice.

<sup>30</sup>Existe um caminho entre qualquer par de vértices



## 2.2 A intrigante faixa de Möbius

### 2.2.1 August Ferdinand Möbius



Figura 2.13: Retrato de August Ferdinand Möbius.

Fonte: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Mobius.html>>

Nascido em Schulpforta, Saxônia, em 1790, August Ferdinand Möbius foi filho único do professor de dança Johann Heinrich Möbius e Johanna Katharine Christiane, descendente de Lutero. Ficou órfão de pai quando tinha apenas três anos de idade. Estudou em casa com a mãe até entrar para o Colégio, em Schulpforta, em 1803.

Após graduar-se no colégio em 1809, entrou na Universidade de Leipzig, como estudante de direito, o que não lhe trouxe satisfação, assim decidiu seguir sua verdadeira vocação e passou a estudar matemática, física e astronomia. Tornou-se aluno do famoso astrônomo Karl Mollweide<sup>31</sup>, descobridor das relações trigonométricas de Mollweide entre os anos de 1807 a 1809 e criador do mapa de Mollweide, que preserva áreas.

Mudou-se para Göttingen em 1813 para estudar astronomia com Gauss<sup>32</sup>, que na época era diretor do Observatório de Göttingen e pesquisador de matemática aplicada à astronomia. Para ampliar seus conhecimentos em matemática, mudou-se para Halle, onde estudou com Johann Pfaff, e professor de Gauss. Escreveu em 1815 sua tese de doutorado, um trabalho em astronomia e completou sua tese de Habilitação em equações trigonométricas.

Nomeado em 1816 como professor extraordinário de astronomia e mecânica na Universidade de Leipzig, recusou convites para ser astrônomo em Greifswald e matemático em Dorpat, pois tinha esperança de se tornar professor titular em astronomia em Leipzig, e mesmo com a morte de Mollweide em 1825, isso só aconteceu em 1844, devido a pressão da Universidade de Jena, que fez uma proposta para que ele integrasse o seu

<sup>31</sup>Carl Brandan Mollweide(1774-1825)

<sup>32</sup>Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

quadro. Durante o período de espera para sua nomeação trabalhou no Observatório de Leipzig, inclusive, na sua reconstrução durante os anos de 1818 a 1821.

Casou em 1820 com Dorothea Rothe, filha de um cirurgião, com quem teve três filhos. Tornou-se diretor do Observatório em 1848 e morreu em Leipzig em 1868, depois de atuar por mais de 50 anos como professor. Vanguardista na área da topologia, foi premiado postumamente pela Académie des Sciences por suas descobertas sobre o assunto.

Trabalhando em geometria analítica, topologia, astronomia teórica, análise complexa e teoria dos números, publicou quase todos os seus trabalhos no *Journal de Crelle*, a primeira revista da história dedicada exclusivamente à matemática. Foi um dos inventores das coordenadas homogêneas, possuindo como uma de suas mais interessantes criações a faixa de Möbius.

### 2.2.2 Uma superfície de um lado só.

A faixa de Möbius ou fita de Möbius é famosa por sua curiosa propriedade de ser uma superfície não-orientável, isto é, possuir apenas um lado. Isto pode ser verificado ao se tentar pintá-la com duas cores e observar que elas se encontrarão em determinado ponto, conforme demonstrado na Figura 2.14.



Figura 2.14: Modelo de construção da faixa de Möbius.

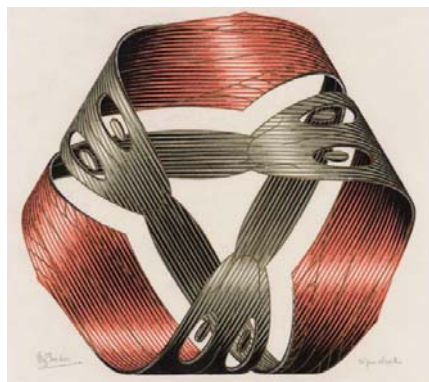
Fonte: adaptado de <<https://ipemsp.wordpress.com/2015/05/29/a-faixa-de-moebius/>>

Formalmente, é definida como um espaço topológico obtido pela colagem das duas extremidades de uma fita, após efetuar meia volta em uma delas. Apesar de ter seu nome atribuído a Möbius, que a mencionou num artigo sobre superfícies, ela também foi estudada por Listing, que publicou em 1858, um artigo denominado *Der Census Räumlicher Complex*<sup>33</sup>.

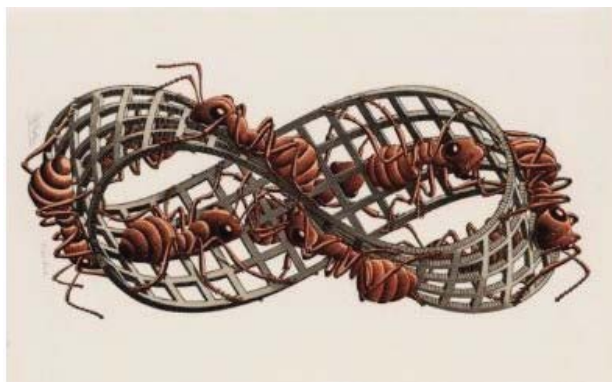
A faixa de Möbius é um dos poucos elementos da matemática que foram absorvidos em uma cultura mais ampla, com sua beleza inspirando artistas como Escher<sup>34</sup> (STAROSTIN; VAN DER HEIJDEN, 2007). É possível encontrá-la também na Engenharia, Arquitetura, Literatura, Moda e até na Psicanálise.

<sup>33</sup>O complexo censo espacial.

<sup>34</sup>Mauritius Cornelis Escher (1898-1972), artista holandês.



(a) Tira de Möbius I



(b) Tira de Möbius II

Figura 2.15: Por Escher.

Fonte: <<http://www.escherinhetpaleis.nl/verhaal-van-escher/perpetuum-mobile/>>



Figura 2.16: Óleo sobre tela de Salvador Dalí. *Contorção topológica de uma figura feminina convertendo-se em violoncelo.*

Fonte: <<http://www.museoreinasofia.es/coleccion/obra/contorsion-topologica-figura-femenina-convirtiendose-violonchelo>>



Figura 2.17: "Torção do amor" por Max Bill, 1953-1955.

Fonte: <<http://tribarte.blogspot.com.br/2011/03/arte-antecipa-o-olhar-max-bill-1908.html>>



Figura 2.18: Faixa de Möbius em um cemitério em Zaragoza, na Espanha.

Fonte: <[http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/FOTOGRAFIAS/fotografia\\_topologia.htm](http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/FOTOGRAFIAS/fotografia_topologia.htm)>

Ganhou destaque no mundo da Psicanálise, com o francês Jacques Lacan<sup>35</sup>, que a utilizou como modelo de representação da psiquê humana. Lacan utilizou vários objetos da topologia para representar os aspectos clínicos da sua teoria, como o toro para esclarecer a relação do desejo com a demanda, a repetição e a identificação; a garrafa de Klein, para representar a relação do sujeito com o outro e o Cross-cap<sup>36</sup>, que representa o sujeito em sua relação com o sujeito do desejo.

<sup>35</sup>Jacques-Marie Émile Lacan (1901-1981).

<sup>36</sup>Figura topológica heterogênea, constituída por uma faixa de Möbius e um disco.

## 2.3 A Garrafa de Klein

### 2.3.1 Felix Christian Klein



Figura 2.19: Retrato de Felix Christian Klein.

Fonte: <<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Klein.html>>

Felix Christian Klein, matemático alemão, nasceu em 1849 em Düsseldorf, na Prússia, filho de Elise Sophie Kayser e de Caspar Klein, secretário do chefe do governo. Estudou em Düsseldorf até 1865, quando foi para a Universidade de Bonn estudar matemática e física. Tornou-se assistente de Plücker<sup>37</sup>, que faleceu em 1868, ano em que Klein obteve seu doutorado.

Em 1870, em Paris, conheceu Sophus Lie<sup>38</sup>, com quem estudou teoria dos grupos. Em 1871, regressa à atual Alemanha, devido à Guerra franco-prussiana, tornando-se professor em Göttingen. No ano seguinte, Klein obteve um lugar em Erlangen, onde na sua aula inaugural estabeleceu o chamado Programa de Erlangen.

Casou com Anne Hegel, neta do filósofo Georg W. F. Hegel, em 1875 e mudou-se para Munique. Aceitou um lugar em Leipzig em 1880 e a partir de 1886 estabeleceu-se definitivamente em Göttingen, dedicando-se a reestabelecer esta universidade como centro mundial da investigação matemática. Em 1893 recebeu a Medalha De Morgan da Sociedade Matemática de Londres e em 1912, a medalha Copley da Royal Society. Aposentou-se em 1913 devido a problemas de saúde, mas continuou sua trajetória ministrando aulas em sua residência durante a Primeira Guerra Mundial.

---

<sup>37</sup>Julius Plücker (1801-1868).

<sup>38</sup>Marius Sophus Lie (1842-1899).

Klein escreveu sobre história da matemática e matemática na engenharia e em 1908 criou a Comissão Internacional de Instrução Matemática, trabalhando de 1908 até 1920 em uma pesquisa cujo objeto era a evolução da educação matemática em diversos países do mundo. Foi editor do periódico matemático *Mathematische Annalen*, que se tornou a principal publicação da época. Faleceu no ano de 1925 e seu corpo está sepultado no Cemitério municipal de Göttingen.

### 2.3.2 Um objeto de quarta dimensão.

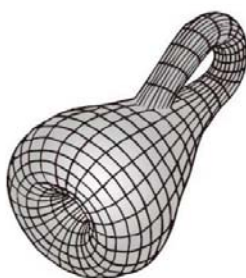


Figura 2.20: Modelo tridimensional da Garrafa de Klein.  
Fonte: STEWART, 2014.

Uma garrafa de Klein é uma superfície fechada, sem margens e não-orientável<sup>39</sup>, que pertence a um espaço de quatro dimensões, embora possa ser visualizado em um espaço de três (Figura 2.20). Obtida pela colagem de duas faixas de Möbius (Figura 2.21), pode ser construída no sentido matemático, mas não fisicamente, sem que apresente uma intersecção com ela mesma.

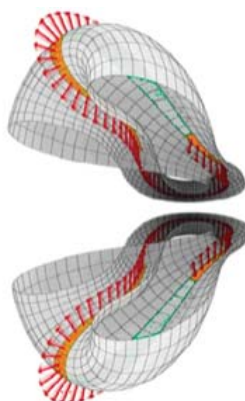


Figura 2.21: Garrafa de Klein cortada ao meio formando duas faixas de Möbius.

Fonte: <[http:](http://www.appoa.com.br/correio/edicao/246/o_discurso_historico_e_a_garrafa_de_klein/183)

[//www.appoa.com.br/correio/edicao/246/o\\_discurso\\_historico\\_e\\_a\\_garrafa\\_de\\_klein/183](http://www.appoa.com.br/correio/edicao/246/o_discurso_historico_e_a_garrafa_de_klein/183)>

<sup>39</sup>Não é possível definir um interior ou exterior, nem usar as noções de direita e esquerda, acima e abaixo.

Na Figura 2.22, temos a representação da garrafa de Klein, em vidro, criada por Mitsugi Ohno (1926-1999), soprador de vidro na Universidade Estadual de Kansas, nos Estados Unidos.

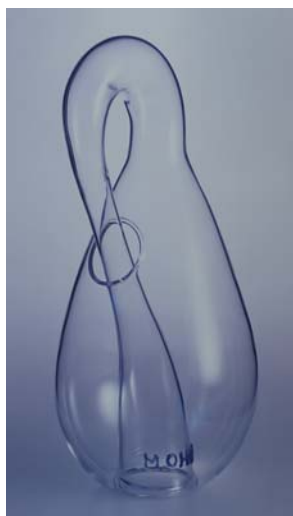


Figura 2.22: Garrafa de Klein feita em vidro por Mitsugi Ohno (1926-1999).

Fonte: <<http://www.blog.mcintifica.com.br/garrafa-de-klein/>>

## 3 Preâmbulo

Na Topologia, podemos destacar o estudo das funções contínuas definidas em conjuntos chamados *espaços topológicos*. Para isso é preciso que existam estruturas que possibilitem estabelecer ideias a respeito de distância e vizinhança entre pontos. Grande parte dos espaços topológicos, apresentam-se munidos de uma métrica e a esses conjuntos denominamos *espaços métricos*. Algumas noções básicas sobre conjuntos, funções e espaços vetoriais, convém serem resgatadas, a fim de garantir uma melhor compreensão desses conceitos.

### 3.1 Conjuntos

*Conjuntos* são objetos, concretos ou abstratos, agrupados coletivamente, de forma conveniente e com um motivo especificado. A esses objetos denominamos *elementos*. Os conjuntos em geral, são representados por letras maiúsculas do alfabeto e seus elementos por letras minúsculas. Alguns, por sua relevância, detêm notações especiais.

- $\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais
- $\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros
- $\mathbb{Q}$ : conjunto dos números racionais
- $\mathbb{R}$ : conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$ : conjunto dos números complexos

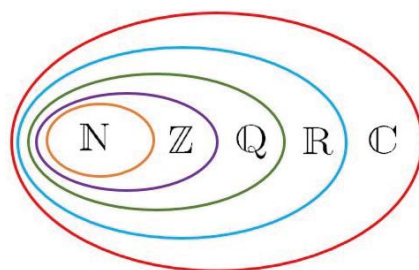


Figura 3.1: Conjuntos numéricos.  
Fonte: Elaborada pela autora.



Dados os elementos  $a, b, c, \dots$ , indica-se que  $\{a, b, c, \dots\}$  é o conjunto formado por esses elementos. Assim, chamando esse conjunto de  $A$ , temos que  $A = \{a, b, c, \dots\}$ . A notação  $x \in A$ , isto é,  $x$  pertence a  $A$ , significa que  $x$  é um elemento do conjunto  $A$ . De modo análogo, temos  $x \notin A$ , para representar que  $x$  não pertence a  $A$ , ou seja, que  $x$  não é um elemento do conjunto  $A$ .

É preciso tomar cuidado para não confundir  $x$ , elemento do conjunto  $A$ , com  $\{x\}$ , conjunto cujo único elemento é  $x$ .

Usualmente, obtemos um conjunto partindo de um conjunto básico  $X$ , considerando uma condição ou uma propriedade  $P$ , que diz respeito a um elemento qualquer do conjunto  $X$ . A propriedade  $P$  define um conjunto  $A$ , que é uma *parte* ou um *subconjunto* de  $X$ . Assim,

$$A = \{x \in X; x \text{ goza da propriedade } P\}$$

### Exemplos.

1.  $\{x \in \mathbb{N} | 0 < x \leq 2\} = \{1, 2\}$
2.  $\{x \in \mathbb{R} | \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
3.  $\{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$
4.  $\{x \in \mathbb{R} | x \notin \mathbb{Q}\}$  (*não é possível descrever todos os elementos desse conjunto.*)
5.  $\{x \in \mathbb{R} | x^2 = -1\}$  (*Se nenhum elemento do conjunto possuir a propriedade  $P$ , diremos que esse é um conjunto vazio ou  $\emptyset$* )

Dois conjuntos são ditos *iguais*, quando todo elemento de um conjunto também é elemento do outro e vice-versa. Se todo elemento de um conjunto  $A$  também é elemento de um conjunto  $B$ , dizemos que  $A$  está *contido* em  $B$  ( $A \subset B$ ), logo para obtermos  $A = B$ , precisamos que  $A \subset B$  e  $B \subset A$  ( $A = B \iff A \subset B \text{ e } B \subset A$ ).

A essa relação entre conjuntos denominamos de relação de *inclusão*, da qual extraímos as seguintes propriedades:

*Reflexiva*: para todo conjunto  $A$ , tem-se que  $A \subset A$ ;

*Anti-simétrica*: se  $A \subset B$  e  $B \subset A$ , então  $A = B$ ;

*Transitiva*: se  $A \subset B$  e  $B \subset C$ , então  $A \subset C$ .

Se  $A \subset X$ , dizemos que  $A$  é um *subconjunto* de  $X$ , assim dados  $A$  e  $B$  subconjuntos de  $X$ , a *união* de  $A$  e  $B$  também é um subconjunto de  $X$  e fica determinado como:

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Da mesma forma, determinamos a *interseção* dos conjuntos  $A$  e  $B$  por

$$A \cap B = \{x \in X | x \in A \text{ e } x \in B\},$$

onde os elementos do conjunto  $A \cap B$  pertencem, simultaneamente, aos conjuntos  $A$  e  $B$ .

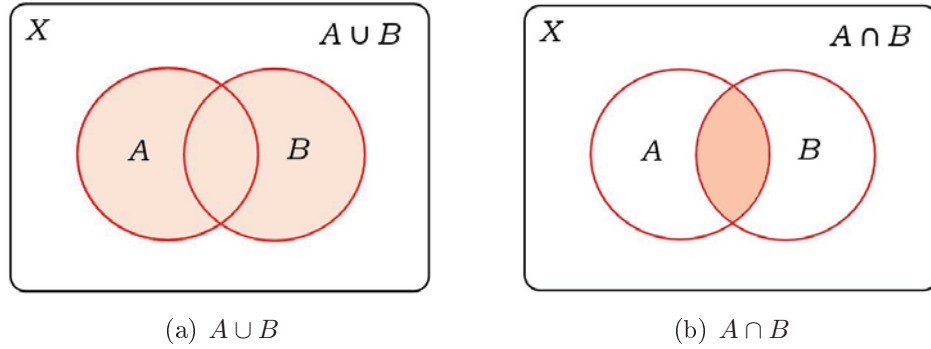


Figura 3.2: União e interseção de conjuntos.

Fonte: Elaborada pela autora.

De qualquer conjunto  $X$ , podemos extrair um conjunto formado por todos os seus subconjuntos, o qual denominamos *conjunto das partes* de  $X$  e indicamos por  $\mathcal{P}(X)$ . Assim, dado o conjunto  $X = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\}$ , temos que

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}.$$

Da *união* e *interseção* entre conjuntos, extraímos as seguintes propriedades:

- $A \cup \emptyset = A$  para qualquer  $A \subset X$  ( $\emptyset$  é o **elemento neutro**);
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$  para quaisquer  $A, B, C \subset X$  (**associativa**);
- $A \cup B = B \cup A$  para quaisquer  $A, B \subset X$  (**comutativa**);
- $A \cup A = A$  para qualquer  $A \subset X$ ;
- $A \cup X = X$  para qualquer  $A \subset X$ ;
- $A \cup B = B \iff A \subset B$  para quaisquer  $A, B \subset X$ ;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$  para qualquer  $A \subset X$ ;
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  para quaisquer  $A, B, C \subset X$ ;
- $A \cap B = B \cap A$  para quaisquer  $A, B \subset X$ ;

- $A \cap B = A \iff A \subset B$  para quaisquer  $A, B \subset X$ ;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  para quaisquer  $A, B, C \subset X$ ;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  para quaisquer  $A, B, C \subset X$ ;

Para cada subconjunto  $A \subset X$ , temos que  $\complement_X A$  é o complementar de  $A$  com relação a  $X$  onde

$$\complement_X A = \{x \in X | x \notin A\}$$

Podemos utilizar também a notação  $A^C$  para designar o complementar de um subconjunto quando o conjunto  $X$  estiver pré-fixado, como por exemplo,  $X$  é o conjunto dos números reais ( $X = \mathbb{R}$ ).

Dados  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de um conjunto  $X$ , a *diferença* entre  $A$  e  $B$  é definida por

$$A - B = \{x \in X | x \in A \text{ e } x \notin B\} = A \cap B^C$$

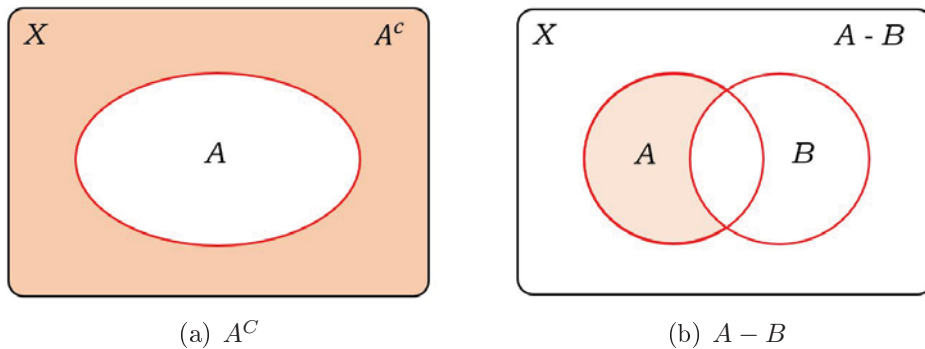


Figura 3.3: Complementar e diferença entre conjuntos.

Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, para  $A$  e  $B$  subconjuntos de um conjunto  $X$ , temos as seguintes propriedades envolvendo complementares e diferenças:

- $\emptyset^C = X$  e  $X^C = \emptyset$ ;
- $(A^C)^C = A$ ;
- $A \cap A^C = \emptyset$  e  $A \cup A^C = X$ ;
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$  e  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ ;
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ ;
- Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $X$  tais que  $A \subset B$ , então  $\complement_B A = A^C \cap B$ .

Considerando os conjuntos  $A$  e  $B$ , existe o *produto cartesiano* de  $A$  por  $B$  ( $A \times B$ ), cujos elementos são os pares ordenados  $(a, b)$ , com  $a \in A$  e  $b \in B$ , assim

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Note que  $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$ .

Uma *relação binária* do conjunto  $A$  no conjunto  $B$  é qualquer subconjunto de  $A \times B$ , isto é

$$(R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B) \iff R \subset A \times B$$

Desse modo, indicamos  $(x, y) \in R$  como  $xRy$ .

## 3.2 Funções

**Definição 3.2.1.**  $f \subset A \times B$  é uma *função*<sup>1</sup> ou *aplicação* de  $A$  em  $B$  se, para cada  $x \in A$ , existe um único  $y \in B$  de maneira que  $xfy$ .

$f : A \longrightarrow B$  é a notação normalmente utilizada para uma função, onde  $A$  é chamado de *domínio* de  $f$ ,  $B$  é o *contradomínio* e  $y$  é a *imagem* de  $x$  por  $f$ . O conjunto das imagens é chamado *imagem* de  $f$  e representado por  $Im(f) = \{f(x) | x \in A\}$ . Usa-se  $y = f(x)$ , que significa que  $(x, y) \in f$ , no lugar de  $xfy$ .

**Definição 3.2.2.** Uma aplicação  $f : A \longrightarrow B$  é *injetora* se, para qualquer  $x, y \in A$ , temos  $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$  ou de forma equivalente  $f(x) = f(y) \implies x = y$ .

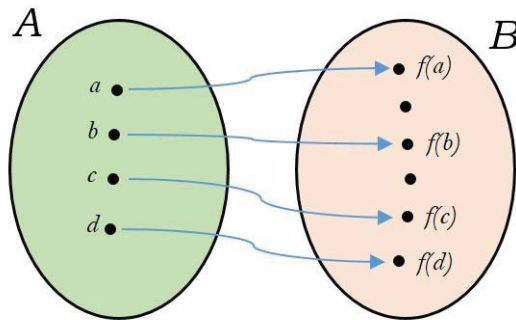


Figura 3.4: Aplicação injetora.

Fonte: Elaborada pela autora.

<sup>1</sup>Termo geralmente utilizado para aplicações que assumem valores numéricos.

**Definição 3.2.3.** Uma aplicação  $f : A \longrightarrow B$  é *sobrejetora* se,  $Im(f) = B$ , isto é, para todo  $y \in B$  existe  $x \in A$ , tal que  $f(x) = y$ .

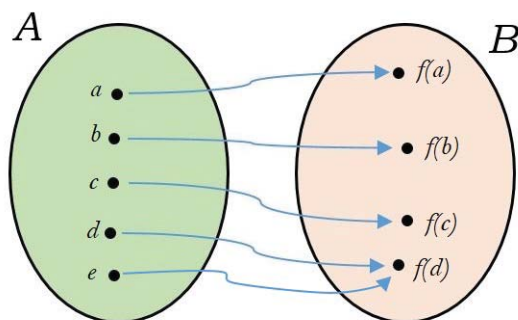


Figura 3.5: Aplicação sobrejetora.  
Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 3.2.4.** Uma aplicação  $f : A \longrightarrow B$  é *bijetora* se ela for, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.

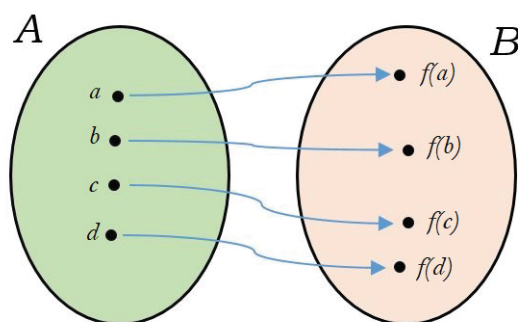


Figura 3.6: Aplicação bijetora.  
Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 3.2.5.** Duas aplicações  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : A \longrightarrow B$  são ditas *iguais* se, e somente se,  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \in A$ .

**Definição 3.2.6.** Seja  $A$  um subconjunto de um conjunto  $X$ . A aplicação  $j : A \longrightarrow X$ , definida por  $j(x) = x$ , para todo  $x \in A$ , chama-se *inclusão* de  $A$  em  $X$ . Para  $A = X$  temos a *aplicação idêntica*, também conhecida como *identidade* de  $X$ , indicada por  $id_X$ . Assim,  $id_X : X \longrightarrow X$  e  $id_X(x) = x$ , para todo  $x \in X$ .

**Definição 3.2.7.** Dadas duas aplicações  $f : A \longrightarrow B$  e  $g : B \longrightarrow C$ , a *aplicação composta* de  $f$  e  $g$  é a aplicação  $g \circ f : A \longrightarrow C$ , dada por  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , para todo  $x \in A$ .

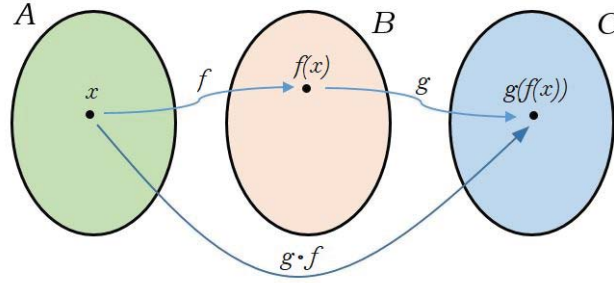


Figura 3.7: Aplicação composta.

Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 3.2.8.** Dada uma aplicação  $f : A \longrightarrow B$ , se existir  $g : B \longrightarrow A$ , tal que  $g \circ f = \text{id}_A$  e  $f \circ g = \text{id}_B$ , então  $g$  é chamada *inversa* de  $f$  e sua notação usual é  $f^{-1}$ . A inversa existirá e será única se, e somente se, a aplicação for bijetora.

**Definição 3.2.9.** Dados os conjuntos  $A, I \neq \emptyset$ , uma aplicação  $f : I \longrightarrow \mathcal{P}(A)$  que a cada  $i \in I$  associa um subconjunto  $f(i) \in \mathcal{P}(A)$ , é chamada de *família de subconjuntos de A* e indicada por  $(X_i)_{i \in I}$ , onde  $X_i = f(i)$ .

**Definição 3.2.10.** Seja  $(X_i)_{i \in I}$  uma família de subconjuntos de  $A$ , define-se a *união*  $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \in A \mid \text{existe } i \in I \text{ e } x \in X_i\}$ . Assim um elemento de  $A$  está nessa união se, e somente se, está em algum dos conjuntos da família considerada.

**Definição 3.2.11.** Seja  $(X_i)_{i \in I}$  uma família de subconjuntos de  $A$ , define-se a *interseção*  $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \in A \mid x \in X_i, \text{ para qualquer } i \in I\}$ . Logo um elemento de  $A$  pertence a interseção se, e somente se, pertence a todos os conjuntos da família considerada.

**Definição 3.2.12.** Dado um conjunto  $X \neq \emptyset$ , dizemos que uma função  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  é *limitada* se existir  $k > 0, k \in \mathbb{R}$ , tal que  $|f(x)| < k$ , para qualquer  $x \in X$ . Indicaremos o conjunto das funções limitadas de  $X$  em  $\mathbb{R}$  por  $\beta(X; \mathbb{R})$ .

### 3.3 Espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$

**Definição 3.3.1.** Um *espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$*  é um conjunto  $W$  sobre o qual estão definidas duas leis de composição a saber

- dados  $u, v \in W$ , temos  $(u, v) \mapsto u + v$  (*adição*)
- dados  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $u \in W$ , temos  $(\alpha, u) \mapsto \alpha u$  (*multiplicação por escalares*)

e para as quais se são verdadeiras as seguintes propriedades,  $\forall u, v, w \in W$  e  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$i) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$ii) \quad u + v = v + u$$

$$iii) \quad \text{Existe } 0 \in W \text{ de modo que } 0 + u = u$$

$$iv) \quad \text{Para todo } u \in W, \text{ existe } (-u) \in W \text{ de modo que } u + (-u) = 0$$

$$v) \quad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$$

$$vi) \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$vii) \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$$viii) \quad 1u = u$$

Temos que  $W$  é um grupo abeliano<sup>2</sup> em relação à adição e que os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.

**Definição 3.3.2.** *Norma* em um espaço vetorial  $W$  sobre  $\mathbb{R}$  é uma função  $\|\cdot\|: W \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada vetor  $u \in W$  a um número real não negativo, de modo que,  $\forall u, v \in W$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , temos

$$n_1) \quad \|u\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|u\| = 0 \iff u = 0$$

$$n_2) \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$$

$$n_3) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

---

<sup>2</sup>A aplicação da operação binária não depende da ordem dos elementos do grupo ou conjunto.

**Definição 3.3.3.** Chama-se *espaço vetorial com produto interno* a um espaço vetorial  $W$  dotado de uma função  $\langle, \rangle : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ , que associa cada par ordenado de vetores  $(u, v) \in W \times W$  a um número real, indicado por  $\langle u, v \rangle$  e chamado *produto interno de  $u$  por  $v$* , de modo que,  $\forall u, u_1, u_2, w \in W$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , temos

$$p_1) \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

$$p_2) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$p_3) \langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$$

$$p_4) \langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$$

**Proposição 3.3.1.** Em um espaço vetorial com produto interno, define-se a norma de um vetor  $u \in W$ , como a função  $\| \cdot \| : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

**Demonstração:** Usando a definição de norma, mostremos que a função dada por  $\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  satisfaz todas as propriedades  $\forall u, v \in W$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . De fato:

$n_1)$   $\| u \| = 0 \iff \sqrt{\langle u, u \rangle} = 0 \iff \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$  pela definição de produto interno

$$\begin{aligned} n_2) \quad \| \alpha u \| &= \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u \rangle} = \sqrt{\alpha \langle u, \alpha u \rangle} = \sqrt{\alpha \langle \alpha u, u \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle u, u \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle u, u \rangle} = \\ &= |\alpha| \| u \| \end{aligned}$$

$$n_3) \quad \| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$$

$$\begin{aligned} \text{Note que } \| u + v \|^2 &= (\sqrt{\langle u + v, u + v \rangle})^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle = \\ &= \langle u + v, u \rangle + \langle u + v, v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \| u \|^2 + 2\langle u, v \rangle + \| v \|^2 \leq \\ &\leq \| u \|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \| v \|^2 \leq \| u \|^2 + 2\| u \| \| v \| + \| v \|^2 \leq (\| u \| + \| v \|)^2 \end{aligned}$$

Utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, onde  $|\langle u, v \rangle| \leq \| u \| \| v \|$ , para mostrar que a desigualdade  $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$  é verdadeira.



## 4 Espaços métricos

O conceito de espaços métricos foi introduzido em 1906, por Maurice Fréchet, seu estudo permite a definição de propriedades topológicas, que por sua vez, levam ao estudo de espaços topológicos mais abstratos.

### 4.1 Métricas

**Definição 4.1.1.** Um *Espaço Métrico* é um par  $(M, d)$  formado por um conjunto  $M \neq \emptyset$  e uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par de pontos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado de *métrica* ou *distância* do ponto  $x$  ao ponto  $y$ , de tal modo que:

1.  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ,  $\forall x, y \in M$ ;
2.  $d(x, x) = 0$ ,  $\forall x \in M$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in M$  (**simétrica**);
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in M$  (**desigualdade triangular**).

Se  $d'$  é outra função satisfazendo as mesmas condições, os espaços métricos  $(M, d)$  e  $(M, d')$  são distintos.

O espaço métrico mais conhecido é o *espaço euclidiano*. A métrica euclidiana define a distância entre dois pontos como o comprimento do segmento de reta que os conecta.

**Exemplo 4.1.1.** A *métrica discreta* dada por  $(A, d)$ , onde  $d(x, y) = 0$  para  $x = y$  e  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$ ,  $\forall x, y \in A$

**Demonstração:** Usando a definição de espaço métrico, mostremos que a função  $d$  satisfaz todas as propriedades. De fato:

1. Sejam  $x, y \in A$ , com  $x \neq y$ , logo  $d(x, y) = 1 > 0$ .

2. Sejam  $x, y \in A$ , com  $x = y$ , logo  $d(x, x) = d(x, y) = 0$ .
3. Sejam  $x, y \in A$ , para  $x = y$  temos  $d(x, x) = 0$  e para  $x \neq y$  temos  $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ .
4. Sejam  $x, y, z \in A$ , para
  - i)  $x = y = z$  temos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies 0 \leq 0 + 0$ ;
  - ii)  $x = y$  e  $x \neq z$  temos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies 1 \leq 0 + 1$ ;
  - iii)  $x \neq y$  e  $x = z$  temos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies 0 \leq 1 + 1$ ;
  - vi)  $x \neq y \neq z$  temos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies 1 \leq 1 + 1$ .

Portanto, a função  $d$  é uma métrica sobre  $A$  e o par  $(A, d)$  é um espaço métrico.

**Exemplo 4.1.2.** A *reta*, ou seja, o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  entre dois pontos  $x, y \in \mathbb{R}$  é dada por  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Demonstração:** Usando a definição de espaço métrico, mostremos que a função  $d(x, y) = |x - y|$  satisfaz todas as propriedades. De fato:

1. Se  $x > y \implies x - y > 0$ , logo  $d(x, y) = |x - y| = (x - y) > 0$ .  
 Se  $x < y \implies x - y < 0 \implies y - x > 0$ , logo  $d(x, y) = |x - y| = -(x - y) = y - x > 0$ .  
 Assim,  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
2.  $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
3.  $d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |(-1)||y - x| = 1|y - x| = |y - x| = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
4.  $d(x, z) = |x - z| = |x + (-y + y) - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

Portanto, a função  $d$  é uma métrica sobre  $\mathbb{R}$  e o par  $(\mathbb{R}, d)$  é um espaço métrico.

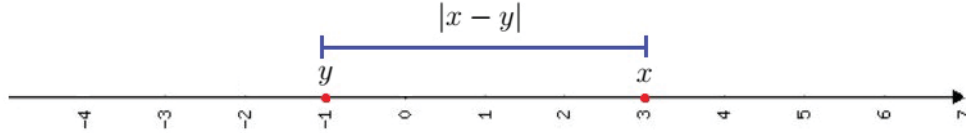


Figura 4.1: Distância entre dois pontos em  $\mathbb{R}$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 4.1.3.** O *espaço euclidiano*  $\mathbb{R}^n$  é o espaço de dimensão  $n$ , com a distância usual (*espaço vetorial euclidiano*), onde

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$  é chamada de *métrica euclidiana*.

**Demonstração:** Usando a definição de espaço métrico, mostremos que a função

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \text{ satisfaz todas as propriedades.}$$

De fato: Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  e  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  três pontos arbitrários do  $\mathbb{R}^n$

$$1. \text{ Se } x \neq y, \text{ logo } d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} > 0, \text{ pois } (x_i - y_i)^2 > 0.$$

$$2. \ d(x, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (0)^2} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} 3. \ d(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n ((-1)(y_i - x_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (-1)^2 (y_i - x_i)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

4. Temos que mostrar que  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , ou seja, que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}.$$

Para isso devemos tomar  $a_i = x_i - y_i$  e  $b_i = y_i - z_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ , logo

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &\leq \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right)^2 + 2 \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right) \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) + \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right) \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) &\leq \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right) \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) \end{aligned}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os lados chegamos a

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

A veracidade dessa sentença é assegurada pela *desigualdade de Cauchy-Schwarz\**, portanto a função  $d$  é uma métrica sobre  $\mathbb{R}^n$  e o par  $(\mathbb{R}^n, d)$  é um espaço métrico.

**\*Desigualdade de Cauchy-Schwarz no  $\mathbb{R}^n$ :** Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  números reais quaisquer, então

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Demonstração:** Para quaisquer valores de  $r, s \in \mathbb{R}$ , a desigualdade  $(r - s)^2 \geq 0$  é verdadeira e como  $(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2$ , temos  $r^2 - 2rs + s^2 \geq 0 \Rightarrow 2rs \leq r^2 + s^2$ .

Tomando  $p = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  e  $q = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$  é verdadeira a relação

$$2 \frac{|x_i|}{p} \frac{|y_i|}{q} \leq \left( \frac{x_i}{p} \right)^2 + \left( \frac{y_i}{q} \right)^2$$

para qualquer  $i = (1, \dots, n)$ . Somando em relação ao índice  $i$  teremos

$$\frac{2}{pq} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq 1 + 1$$

logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq pq &\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| &\leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Existem mais duas métricas importantes sobre  $\mathbb{R}^n$  a saber

- $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$  (métrica da soma)
- $d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$  (métrica do máximo)

**Proposição 4.1.1.** *Sejam  $d$ ,  $d_1$  e  $d_2$  as métricas definidas no Exemplo 3. Para qualquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$  temos a seguinte relação*

$$d_2(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_2(x, y)$$

**Demonstração:** Para um certo  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) temos  $d_2(x, y) = |x_r - y_r|$ . Segue que

$$d_2(x, y) = |x_r - y_r| = \sqrt{(x_r - y_r)^2} \leq d(x, y)$$

Para  $i, j = 1, \cdots, n$  temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2 + 2 \sum_{i < j} |x_i - y_i| |x_j - y_j|} = \\ &= \sqrt{(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)^2} = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = d_1(x, y) \end{aligned}$$

e supondo  $|x_r - y_r| = \max\{|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|\}$ , então  $|x_i - y_i| \leq |x_r - y_r|$ , logo

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq n|x_r - y_r| = nd_2(x, y)$$

Portanto, a relação  $d_2(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_2(x, y)$  é verdadeira e nesse caso dizemos que as métricas são equivalentes.

**Exemplo 4.1.4.** O *subespaço*; (métrica induzida), onde dado um espaço métrico  $X$ , todo subconjunto  $A \subset X$  é um espaço métrico, pois consideramos a restrição  $d_A$  de  $d$  a  $A \times A$ , logo a distância entre os elementos de  $A$  é a mesma distância que eles possuíam como elementos de  $X$ . Dessa forma,  $(A, d_A)$  é um subespaço métrico de  $(X, d)$ .

**Demonstração:** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $A \subset X$ . Assim, para  $\forall x, y, z \in A$ , temos que  $x, y, z \in X$ . Como  $X$  é um espaço métrico e estamos usando entre os elementos de  $A$  a mesma distância que eles possuíam como elementos de  $X$ , segue que todas as propriedades que caracterizam um espaço métrico satisfeitas em  $X$  também valem para  $A$ . Portanto  $d_A$  é uma métrica induzida de  $d$  e  $(A, d_A)$  é um subespaço métrico de  $(X, d)$ .

**Exemplo 4.1.5.** Um *espaço vetorial normado real* é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  dotado de uma norma, ou seja, se  $W$  é um espaço vetorial normado, então  $d : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por  $d(u, v) = \|u - v\|$  é chamada *métrica induzida pela norma* dada sobre  $W$ .

**Demonstração:** Usando a definição de espaço métrico, mostremos que a função  $d(u, v) = \|u - v\|$  satisfaz todas as propriedades,  $\forall u, v, w \in W$ . De fato:

1. Se  $u \neq v$ , logo  $d(u, v) = \|u - v\| > 0$ , pois a norma é um número real não negativo. Se  $u = v$ , logo  $d(u, v) = \|u - v\| = \|0\| = 0$  (pela definição de norma)
2.  $d(u, u) = \|u - u\| = \|0\| = 0$
3.  $d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |(-1)| \|v - u\| = 1 \|v - u\| = \|v - u\| = d(v, u)$
4.  $d(u, w) = \|u - w\| = \|u + (-v + v) - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w)$  (pela definição de norma)

Portanto, a função  $d$  é uma métrica induzida pela norma dada sobre  $W$  e o par  $(W, d)$  é um espaço métrico.

**Exemplo 4.1.6.** Um *espaço vetorial com produto interno*, com uma norma definida por  $d : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $d(u, v) = \|u - v\|$ , é um espaço métrico.

**Demonstração:** De fato, todo espaço vetorial com produto interno é um espaço vetorial normado<sup>1</sup> e, conforme demonstrado no **Exemplo 5**, um espaço vetorial normado é um espaço métrico.

**Exemplo 4.1.7.** O conjunto das funções reais limitadas  $\beta(X; \mathbb{R})$  é *espaço vetorial normado*, se para quaisquer  $f, g \in \beta(X; \mathbb{R})$  e qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definirmos

$$i) (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$$

$$ii) (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X$$

$$iii) \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

---

<sup>1</sup>a recíproca não é válida

Assim, teremos que  $\beta(X; \mathbb{R})$  é um espaço métrico induzido pela norma dada por  $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ .

**Demonstração:** Com relação à adição de funções e à multiplicação por um escalar que foram definidas, temos que  $\beta(X; \mathbb{R})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Como um espaço vetorial normado é um espaço métrico, verificaremos que  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$  é uma norma sobre esse espaço. De fato:

1.  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\} = 0 \iff |f(x)| = 0, \forall x \in X \iff f(x) = 0, \forall x \in X \iff f = 0$
2.  $\|\alpha f\| = \sup\{|\alpha f(x)| : x \in X\} = \sup\{|\alpha| |f(x)| : x \in X\} = |\alpha| \sup\{|f(x)| : x \in X\} = |\alpha| \|f\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in \beta(X; \mathbb{R})$
3. Dadas  $f, g \in \beta(X; \mathbb{R})$ , então para  $\forall x \in X$ , temos  $|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\}$ . Assim,  $\sup\{|f(x) + g(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\} \iff \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Portanto, a função  $d$  é uma métrica induzida pela norma dada sobre  $\beta(X; \mathbb{R})$  e o par  $(\beta, d)$  é um espaço métrico.

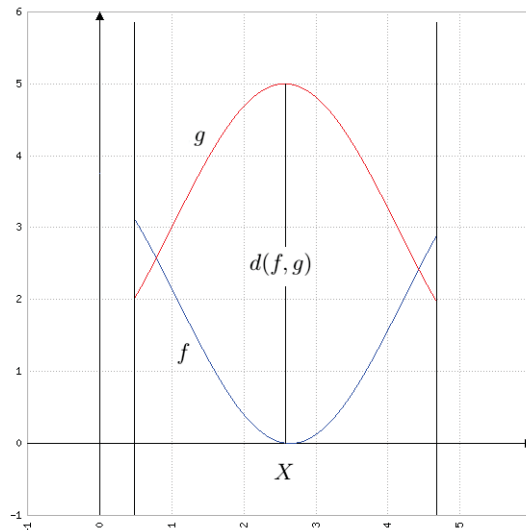


Figura 4.2: Distância entre duas funções segundo a métrica definida.

Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 4.1.8.** O conjunto das funções reais contínuas  $\mathcal{C}[a, b]$  definidas num intervalo fechado  $[a, b]$ , com  $[a, b] \in \mathbb{R}$ , é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$ , se para quaisquer  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  e qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definirmos

- i)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$
- ii)  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X$
- iii)  $\|f\| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Assim, teremos que  $\mathcal{C}[a, b]$  é um espaço métrico induzido pela norma dada por

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \forall f, g \in \mathcal{C}[a, b]$$

**Demonstração:** Com relação à adição de funções e à multiplicação por um escalar que foram definidas, temos que  $\mathcal{C}[a, b]$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Como um espaço vetorial normado é um espaço métrico, verificaremos que  $\|f\| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  é uma norma sobre esse espaço. De fato:

1.  $\|f\| = 0 \iff |f(x)| = 0, \forall x \in [a, b]$  (pois  $|f(x)|$  define uma função contínua)  
 $\iff f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \iff f = 0$
2.  $\|\alpha f\| = \int_a^b |\alpha f(x)| dx = \int_a^b |\alpha| |f(x)| dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)| dx = |\alpha| \|f\|, \forall \alpha \in \mathbb{R},$   
 $\forall f \in \mathcal{C}[a, b]$
3.  $\|f + g\| = \int_a^b |(f + g)(x)| dx = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx =$   
 $= \|f\| + \|g\|$

Portanto, a função  $d$  é uma métrica induzida pela norma dada sobre  $\mathcal{C}[a, b]$  e o par  $(\mathcal{C}, d)$  é um espaço métrico.



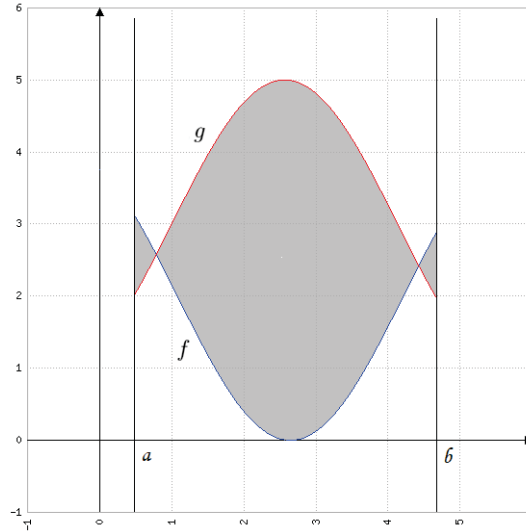


Figura 4.3: A distância é a área da figura compreendida entre os gráficos de  $f$  e  $g$ .  
Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 4.1.2.** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$  e  $p \in M$ . Temos que a distância do ponto  $p$  até o subconjunto  $A$  é dada por  $d(p, A) = \inf\{d(p, a) | a \in A\}$ , ou seja,  $d(p, A)$  é o único número real  $m$  tal que:

- i) para todo  $a \in A$ ,  $m \leq d(p, a)$ ;
- ii) dado  $r > 0$ , existe  $a \in A$  tal que  $d(p, a) < m + r$ .

## 4.2 Bolas abertas, bolas fechadas e esferas

**Definição 4.2.1.** Sejam  $p$  um ponto de um espaço métrico  $(M, d)$  e  $r > 0$  um número real. A *bola aberta* de centro  $p$  e raio  $r$ , indicada por  $B(p, r)$  e dada por

$$B(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) < r\}$$

são todos os pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $p$  é inferior a  $r$ .

**Definição 4.2.2.** Sejam  $p$  um ponto de um espaço métrico  $(M, d)$  e  $r > 0$  um número real. A *bola fechada ou disco* de centro  $p$  e raio  $r$ , indicada por  $D(p, r)$  e dada por

$$D(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) \leq r\}$$

são todos os pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $p$  é inferior ou igual a  $r$ .

**Definição 4.2.3.** Sejam  $p$  um ponto de um espaço métrico  $(M, d)$  e  $r > 0$  um número real. A *esfera* de centro  $p$  e raio  $r$ , indicada por  $S(p, r)$  e dada por

$$S(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) = r\}$$

são todos os pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $p$  é exatamente igual a  $r$ .

É interessante notar que  $D(p, r) = B(p, r) \cup S(p, r)$  é uma união disjunta<sup>2</sup>.

**Definição 4.2.4.** Dado um espaço métrico  $(M, d)$ , um ponto  $p \in M$  é chamado de *ponto isolado* se existe  $r > 0$  de maneira que  $B(p, r) = \{p\}$ .

**Exemplo 4.2.1.** Na *métrica zero-um*, com  $(M, d)$  um espaço métrico discreto e considerando todo  $p \in M$ , para todo  $r > 0$ , temos dois casos a analisar

1. Para  $0 < r \leq 1$ , tem-se

$$B(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) < r\} = \{p\},$$

$$D(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) \leq r\} = M \text{ e}$$

$$S(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) = r\} = M - \{p\}.$$

2. Para  $1 < r$ , tem-se

$$B(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) < r\} = M,$$

$$D(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) \leq r\} = M \text{ e}$$

$$S(p, r) = \{x \in M \mid d(x, p) = r\} = \emptyset.$$

**Exemplo 4.2.2.** Na *reta real*, utilizando sua métrica usual, para todo  $p \in \mathbb{R}$  e para todo  $r > 0$ , temos que

1.  $B(p, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, p) < r\} \iff |x - p| < r \iff -r < x - p < r \iff$   
 $\iff p - r < x < p + r$ , logo a bola aberta  $B(p, r)$  é o intervalo aberto  $(p - r, p + r)$ .

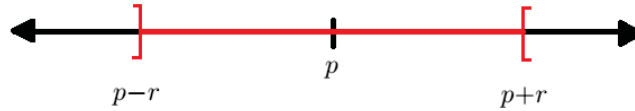


Figura 4.4: Bola aberta na reta real.

Fonte: Elaborada pela autora.

<sup>2</sup>união de conjuntos que não possuem nenhum elemento em comum, ou seja, a interseção deles resulta no conjunto vazio.

2.  $D(p, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, p) \leq r\} \iff |x - p| \leq r \iff -r \leq x - p \leq r \iff$   
 $\iff p - r \leq x \leq p + r$ , logo a bola fechada  $D(p, r)$  é o intervalo fechado  $[p - r, p + r]$ .

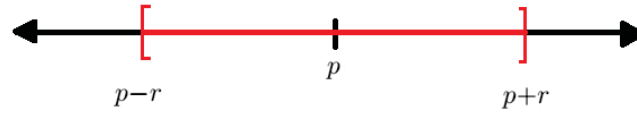


Figura 4.5: Bola fechada na reta real.

Fonte: Elaborada pela autora.

3.  $S(p, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, p) = r\} \iff |x - p| = r$ , logo a esfera  $S(p, r)$  possui apenas os pontos  $p - r$  e  $p + r$ .

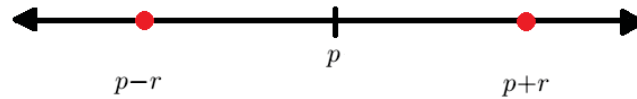


Figura 4.6: Esfera na reta real.

Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 4.2.3.** No espaço  $\mathbb{R}^2$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^2$  e para todo  $r > 0$ , temos que

a) usando a métrica  $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

1.  $B(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (p_1, p_2)) < r\} \iff$   
 $\iff \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2} < r \iff (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 < r^2$   
 é o interior de um *círculo* de centro  $p = (p_1, p_2)$  e raio  $r$ .

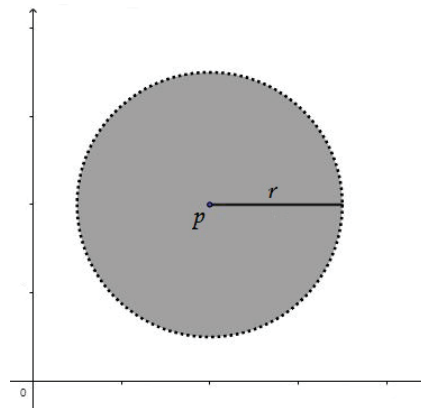


Figura 4.7: Bola aberta no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

2.  $D(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (p_1, p_2)) \leq r\} \iff$   
 $\iff \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2} \leq r \iff (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 \leq r^2$   
 é um *círculo* de centro  $p = (p_1, p_2)$  e raio  $r$ .

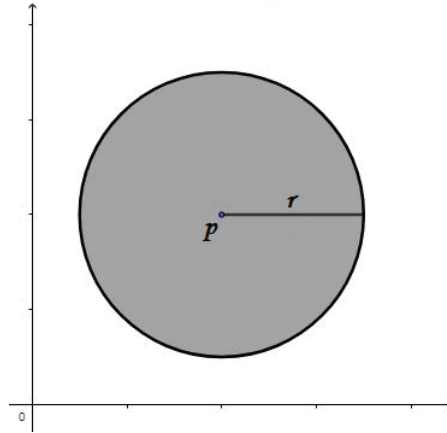


Figura 4.8: Bola fechada ou disco no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d$ .  
 Fonte: Elaborada pela autora.

3.  $S(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (p_1, p_2)) = r\} \iff$   
 $\iff \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2} = r \iff (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 = r^2$   
 é uma *circunferência* de centro  $p = (p_1, p_2)$  e raio  $r$ .

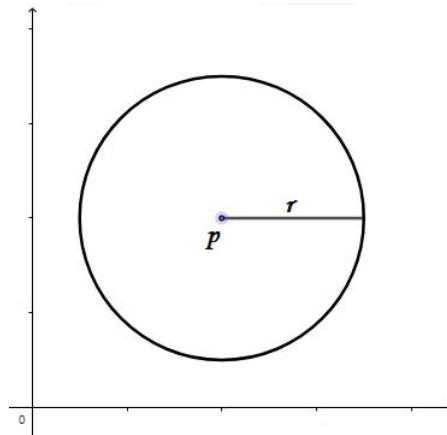


Figura 4.9: Esfera no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d$ .  
 Fonte: Elaborada pela autora.

b) usando a métrica  $d_1((x_1, x_2), (p_1, p_2)) = |x_1 - p_1| + |x_2 - p_2|$

1.  $B(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1((x_1, x_2), (p_1, p_2)) < r\} \iff$   
 $\iff |x_1 - p_1| + |x_2 - p_2| < r$  é o interior de um *quadrado* aberto<sup>3</sup> de centro  $p = (p_1, p_2)$  e diagonais de comprimento  $2r$  paralelas aos eixos coordenados.

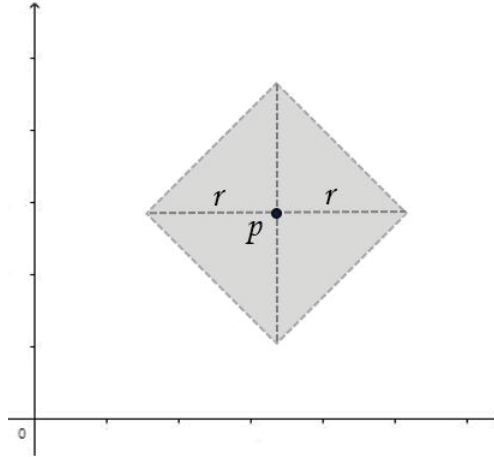


Figura 4.10: Bola aberta no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d_1$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

2.  $D(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1((x_1, x_2), (p_1, p_2)) \leq r\} \iff$   
 $\iff |x_1 - p_1| + |x_2 - p_2| \leq r$  é o *quadrado* de centro  $p = (p_1, p_2)$  e diagonais de comprimento  $2r$  paralelas aos eixos coordenados.

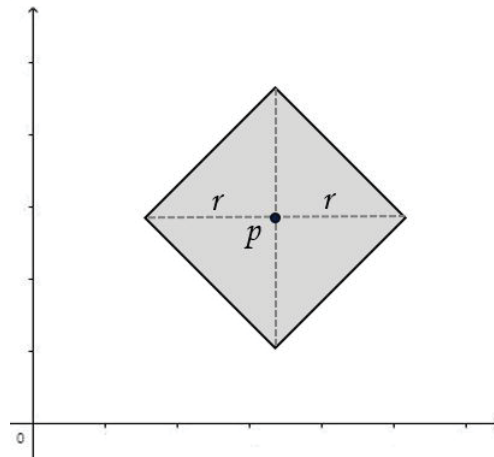


Figura 4.11: Bola fechada ou disco no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d_1$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

---

<sup>3</sup>sem os lados

3.  $S(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1((x_1, x_2), (p_1, p_2)) = r\} \iff$   
 $\iff |x_1 - p_1| + |x_2 - p_2| = r$  são as arestas de um *quadrado* de centro  $p = (p_1, p_2)$   
e diagonais de comprimento  $2r$  paralelas aos eixos coordenados.

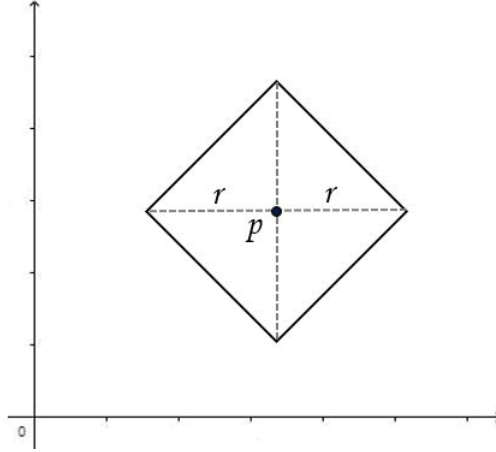


Figura 4.12: Esfera no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d_1$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

c) usando a métrica  $d_2((x_1, x_2), (p_1, p_2)) = \max\{|x_1 - p_1|; |x_2 - p_2|\}$

1.  $B(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1((x_1, x_2), (p_1, p_2)) < r\} \iff$   
 $\iff \max\{|x_1 - p_1|; |x_2 - p_2|\} < r$  é o interior de um *quadrado* de centro  $p =$   
 $(p_1, p_2)$ , cujos lados tem comprimento  $2r$  e são paralelos aos eixos coordenados.

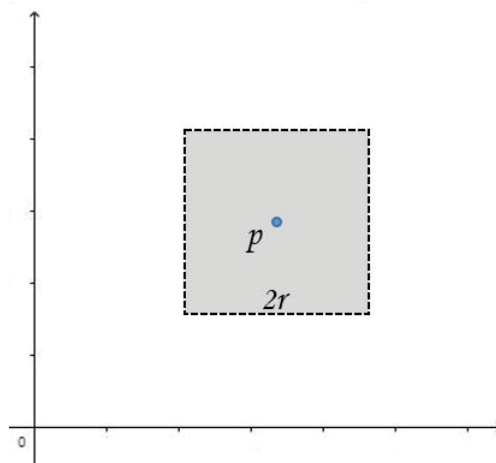


Figura 4.13: Bola aberta no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d_2$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

2.  $D(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1((x_1, x_2), (p_1, p_2)) \leq r\} \iff$   
 $\iff \max\{|x_1 - p_1|; |x_2 - p_2|\} \leq r$  é um *quadrado* de centro  $p = (p_1, p_2)$ , cujos  
 lados tem comprimento  $2r$  e são paralelos aos eixos coordenados.

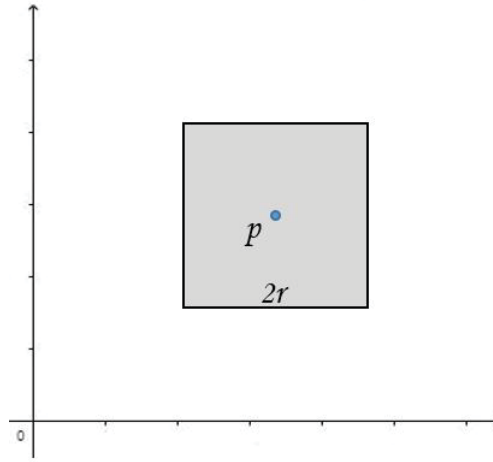


Figura 4.14: Bola fechada ou disco no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d_2$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

3.  $S(p, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d_1((x_1, x_2), (p_1, p_2)) = r\} \iff$   
 $\iff \max\{|x_1 - p_1|; |x_2 - p_2|\} = r$  são as arestas de um *quadrado* de centro  
 $p = (p_1, p_2)$ , cujos lados tem comprimento  $2r$  e são paralelos aos eixos coordena-  
 dos.

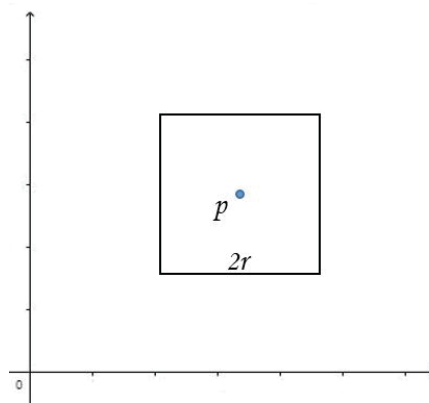


Figura 4.15: Esfera no  $\mathbb{R}^2$  usando a métrica  $d_2$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 4.2.4.** No espaço das funções  $\mathcal{C}[a, b]$  com métrica do supremo. A função  $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$  é uma métrica sobre este conjunto. Logo, uma bola aberta  $B(h, r)$  desse espaço é formada pelas funções cujos gráficos pertencem a região do plano em que  $a \leq x \leq b$ , precisamente entre os gráficos  $h + r$  e  $h - r$ .

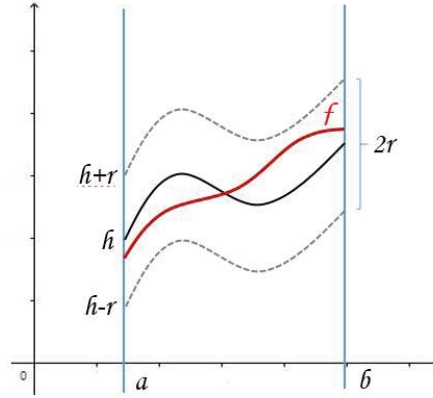


Figura 4.16: Bola aberta no  $\mathcal{C}[a, b]$  usando a métrica do supremo.

Fonte: Elaborada pela autora.

Note que se  $f \in B(h, r)$ , então  $\sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} < r$ , logo temos  $|f(x) - h(x)| < r, \forall x \in [a, b]$ . Por outro lado, se  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  é uma função cujo gráfico está localizado na região  $a \leq x \leq b$ , entre os gráficos  $h + r$  e  $h - r$ , então  $|f(x) - h(x)| < r$  para todo  $x \in [a, b]$ , e da continuidade das funções consideradas temos que  $\sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} < r$ , assim  $f \in B(h, r)$ . Portanto, nas duas situações, a função tem seu gráfico na região apontada.

Para que  $f$  pertença a bola fechada  $D(h, r)$ , é preciso que  $\sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} \leq r$ , assim  $|f(x) - h(x)| \leq r, \forall x \in [a, b]$ . Por fim, teremos  $f \in S(h, r)$ , quando  $\sup\{|f(x) - h(x)| : x \in [a, b]\} = r$  e consequentemente  $|f(x) - h(x)| = r, \forall x \in [a, b]$ .

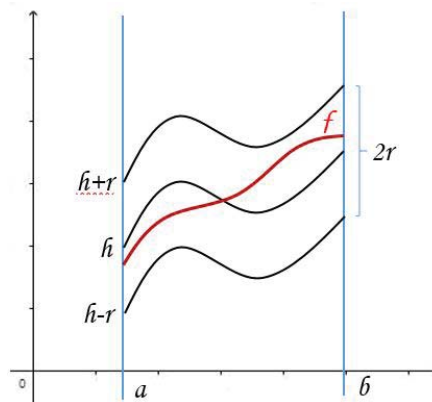


Figura 4.17: Bola fechada no  $\mathcal{C}[a, b]$  usando a métrica do supremo.

Fonte: Elaborada pela autora.



**Proposição 4.2.1.** *Dados os pontos  $a$  e  $b$ , distintos entre si, num espaço métrico arbitrário  $M$ , se  $r + s \leq d(a, b)$ ,  $\forall r, s > 0$ , as bolas abertas  $B(a, r)$  e  $B(b, s)$  são disjuntas.*

**Demonstração:** Suponha que exista  $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$ , logo  $d(x, a) < r$  e  $d(x, b) < s$ . Pela desigualdade triangular, temos que  $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + s \leq d(a, b)$ , o que é absurdo.

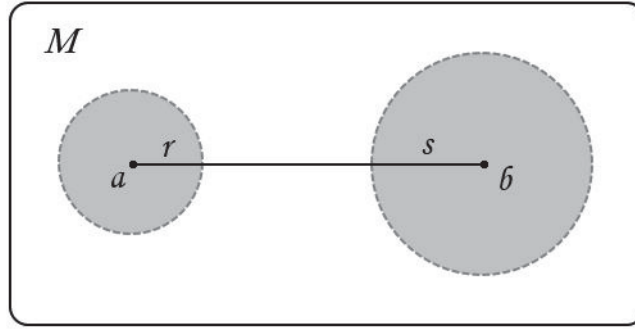


Figura 4.18: Bolas abertas disjuntas.

Fonte: Elaborada pela autora.

**Observação.** Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico é dito *limitado*, se existir um número  $r \geq 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , tal que  $d(x, y) \leq r$ ,  $\forall x, y \in X$ . O menor desses números é chamado de *diâmetro* do conjunto  $X$  e representado por  $\delta(X)$ . Assim  $\delta(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$ , se  $X$  não é vazio e  $\delta(\emptyset) = 0$ .

### 4.2.1 Propriedades Básicas das Bolas Abertas

Considerando bolas genéricas  $B(p, r)$  de um espaço métrico arbitrário  $(M, d)$  podemos destacar as seguintes propriedades:

**Propriedade 1.** *Dadas  $B(p, r)$  e  $B(p, s)$ , se  $r \leq s$ , então  $B(p, r) \subset B(p, s)$ .*

De fato, se  $x \in B(p, r)$ , então  $d(x, p) < r$ . Como  $r \leq s$  temos  $d(x, p) < s$ , logo  $x \in B(p, s)$ .

**Propriedade 2.** *Dadas  $q \in B(p, r)$ , então existe  $s > 0$  tal que  $B(q, s) \subset B(p, r)$ .*

De fato, seja  $x \in B(q, s)$ . Temos  $d(x, p) < d(x, q) + d(q, p)$  garantida pela desigualdade triangular. Tomando  $s = r - d(q, p)$  e como  $d(x, q) < s$ , segue que  $d(x, q) < r - d(q, p) \implies d(x, p) < r - d(q, p) + d(q, p) \implies d(x, p) < r \implies x \in B(p, r)$ . Portanto  $B(q, s) \subset B(p, r)$ .

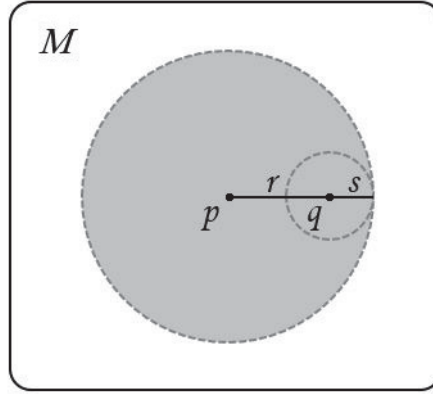


Figura 4.19:  $B(q, s) \subset B(p, r)$ .  
Fonte: Elaborada pela autora.

**Propriedade 3.** *Sejam  $B(p, r)$  e  $B(q, s)$  bolas não disjuntas. Se  $t \in B(p, r) \cap B(q, s)$ , então existe  $\lambda > 0$ , tal que  $B(t, \lambda) \subset B(p, r) \cap B(q, s)$ .*

De fato, pela propriedade  $P_1$  existem  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ , tal que  $B(t, \lambda_1) \subset B(p, r)$  e  $B(t, \lambda_2) \subset B(q, s)$ . Tomando  $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , temos que  $B(t, \lambda) \subset B(p, r)$  e  $B(t, \lambda) \subset B(q, s)$ . Portanto  $B(t, \lambda) \subset B(p, r) \cap B(q, s)$ .

**Propriedade 4.** *Sejam  $p$  e  $q$ , com  $p \neq q$ , dois pontos de um espaço métrico  $M$ . Se  $d(p, q) = r \Rightarrow B\left(p, \frac{r}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{r}{2}\right) = \emptyset$ .*

De fato, supondo que exista  $x \in B\left(p, \frac{r}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{r}{2}\right)$ , temos que  $x \in B\left(p, \frac{r}{2}\right)$  e  $x \in B\left(q, \frac{r}{2}\right)$ , assim  $d(x, p) < \frac{r}{2}$  e  $d(x, q) < \frac{r}{2}$ . Pela desigualdade triangular, temos que  $r = d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ , o que é absurdo.

**Propriedade 5.** *Dadas as bolas  $B(p, r)$  e  $B(q, s)$ , se  $r + s \leq d(p, q)$ , então  $B(p, r) \cap B(q, s) = \emptyset$ .*

Suponha que exista um ponto  $x \in B(p, r) \cap B(q, s)$ . Logo  $d(x, p) < r$  e  $d(x, q) < s$ . Pela desigualdade triangular, temos que  $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < r + s \leq d(p, q)$ , o que é absurdo.

**Propriedade 6.** O diâmetro de uma bola  $B(p, r)$  é menor ou igual a  $2r$ , ou seja,  $\delta(B(p, r)) \leq 2r$ .

De fato, sejam  $x, y \in B(p, r)$ . Pela desigualdade triangular, temos que  $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < r + r = 2r$ , assim  $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in B(p, r)\} \leq 2r$ , isto é,  $\delta(B(p, r)) \leq 2r$ .

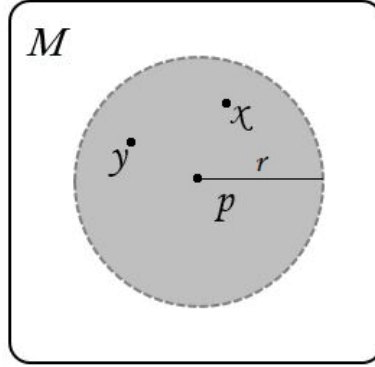


Figura 4.20:  $\delta(B(p, r)) \leq 2r$ .  
Fonte: Elaborada pela autora.

### 4.3 Topologia dos Espaços Métricos

**Definição 4.3.1.** Seja  $M$  um espaço métrico. Um subconjunto  $A \subset M$  se diz *aberto*, se para todo  $p \in A$ , existe um número real  $r > 0$ , tal que  $B(p, r) \subset A$ .

**Demonstração:** De fato, temos que se  $A \neq \emptyset$  é um conjunto aberto, logo ele é uma união de bolas abertas. E se  $A$  é uma união de bolas abertas,  $A$  é um conjunto aberto. Supondo  $A = \cup B_i$ , onde cada  $B_i$  é uma bola aberta, então dado  $p \in A$ , existe  $j$  tal que  $p \in B_j$ . Conforme as propriedades de bolas abertas, existe  $s > 0$ , tal que  $B(p, s) \subset B_j \implies B(p, s) \subset A$ .

**Proposição 4.3.1.** Seja  $\mathcal{A}$  a coleção dos abertos de um espaço métrico  $(M, d)$ . Então:

- i)  $\emptyset, M \in \mathcal{A}$
- ii)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
- iii) Se  $A_i$  é uma família de conjuntos abertos de  $M$ , isto é, cada  $A_i \in \mathcal{A}$ , então  $\cup A_i \in \mathcal{A}$ .

**Demonstração:**

i)  $\emptyset$  é um aberto, pois por não conter pontos não pode contrariar a definição de aberto. Sendo  $p \in M$ , toda bola aberta  $B(p, r) \subset M$ .

ii) Seja  $p \in A \cap B$ . Logo existem  $r > 0$  e  $s > 0$  tais que  $B(p, r) \subset A$  e  $B(p, s) \subset B$ . Supondo  $r \leq s$ , pelas propriedades das bolas abertas temos que  $B(p, r) \subset B(p, s)$ .

iii) Seja  $p \in \cup A_i$ , logo existe  $j$  tal que  $p \in A_j$ . Para certo  $r > 0$ , temos que  $A_j$  é um aberto, valendo assim a relação  $B(p, r) \subset A_j$ . Portanto  $B(p, r) \subset A_i$ .

**Proposição 4.3.2.** *Sejam  $d$  e  $d'$  métricas equivalentes em um espaço métrico  $M$ , se  $\mathcal{A}$  é a coleção dos conjuntos aberto de  $(M, d)$  e  $\mathcal{A}'$  é a coleção dos conjuntos aberto de  $(M, d')$ , então  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ .*

**Demonstração:** Considere  $A \in \mathcal{A}$  e  $p \in A$ , logo existe  $r > 0$  tal que  $B_d(p, r) \subset A$ . Como  $d$  e  $d'$  são métricas equivalentes, existe  $s > 0$  de modo que  $B_{d'}(p, s) \subset B_d(p, r)$ . Segue que  $B_{d'}(p, s) \subset A \implies A \in \mathcal{A}' \implies \mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ . De modo análogo, tomando  $B \in \mathcal{A}'$  e  $q \in B$ , logo existe  $s' > 0$  tal que  $B_{d'}(q, s') \subset B$ . Como  $d$  e  $d'$  são métricas equivalentes, existe  $r' > 0$  de modo que  $B_d(q, r') \subset B_{d'}(q, s')$ . Segue que  $B_d(q, r') \subset B \implies B \in \mathcal{A} \implies \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ . Portanto, temos que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$  e pode-se concluir que métricas equivalentes determinam a mesma estrutura topológica.

**Definição 4.3.2.** Em um espaço métrico  $(M, d)$ , se  $A \subset M$ , dizemos que um ponto  $p \in A$  é *ponto interior* ao conjunto  $A$  se existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \subset A$ . O conjunto dos pontos interiores a  $A$  é chamado *interior* de  $A$  e denotado por  $\overset{\circ}{A}$ . Note que  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .

**Proposição 4.3.3.**  *$A \subset M$  é aberto se, e somente se,  $A = \overset{\circ}{A}$ , isto é, se todos os pontos de  $A$  são interiores.*

**Demonstração:** De fato, dado  $p \in A$ , como  $A = \overset{\circ}{A}$ ,  $p \in \overset{\circ}{A}$ , assim existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \subset A$  e  $A$  é aberto. De modo análogo, se  $A$  é aberto, para todo  $q \in A$ , existe  $s > 0$  tal que  $B(q, s) \subset A$  e como todos os pontos de  $A$  são interiores, logo  $A = \overset{\circ}{A}$ .

**Definição 4.3.3.** Em um espaço métrico  $(M, d)$ , dizemos que um subconjunto  $F \subset M$  é *fechado* se, e somente se,  $F^c$  é aberto.

**Proposição 4.3.4.** *Seja  $\mathcal{F}$  a coleção de conjuntos fechados de um espaço métrico  $M$ . Então:*

- i)  $\emptyset, M \in \mathcal{F}$
- ii)  $H, F \in \mathcal{F} \implies H \cup F \in \mathcal{F}$
- iii) *Se  $F_i$  é uma família de conjuntos fechados de  $M$ , então  $\cap F_i \in \mathcal{F}$ .*

**Demonstração:**

i)  $\emptyset, M \in \mathcal{F}$  porque  $\emptyset^c = M$  e  $M^c = \emptyset$  pertencem a coleção dos abertos de  $M$  ( $\mathcal{A}$ ).

ii) Como  $H, F \in \mathcal{F}$ , logo  $H^c$  e  $F^c$  são abertos e consequentemente  $H^c \cap F^c = (H \cup F)^c$  é aberto. Portanto, por definição, temos que  $H \cup F$  é fechado.

iii) Como cada  $F_i$  é fechado, logo cada  $F_i^c$  é aberto e assim  $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$  também é aberto. Portanto, por definição, temos que  $\cap F_i$  é fechado.

**Definição 4.3.4.** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Um ponto  $p \in M$  é chamado *ponto aderente* ao conjunto  $A$  se, para todo  $r > 0$ , vale a relação  $B(p, r) \cap A \neq \emptyset$ . O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto  $A$  é denominado *fêcho* de  $A$  e representado por  $\overline{A}$ . Temos que  $\overline{A} \subset A$ .

**Proposição 4.3.5.** *Dado um espaço métrico  $(M, d)$ , temos que para todo  $A \subset M$  vale a relação  $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{A}^c$ .*

**Demonstração:** Tomemos  $p \in (\overline{A})^c$ , logo  $p \notin \overline{A}$ , assim existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \cap A = \emptyset \implies B(p, r) \subset A^c \implies p \in \overset{\circ}{A}^c$ . De modo análogo, tomando  $q \in \overset{\circ}{A}^c$ , logo existe  $s > 0$  tal que  $B(q, s) \subset A^c \implies B(q, s) \cap A = \emptyset \implies q \notin \overline{A} \implies q \in (\overline{A})^c$ . Portanto  $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{A}^c$ .

**Corolário 4.3.1.**  *$F \subset M$  é fechado se, e somente se,  $\overline{F} = F$ .*

**Demonstração:** De fato, se  $F$  é fechado, logo  $F^c$  é aberto e consequentemente  $\overset{\circ}{F}^c = F^c \iff (\overline{F})^c = F^c$  e, portanto  $\overline{F} = F$ . Do mesmo modo, se  $\overline{F} = F$ , então  $(\overline{F})^c = F^c \iff \overset{\circ}{F}^c = F^c$ , logo  $F^c$  é aberto e portanto  $F$  é fechado.

**Proposição 4.3.6.** *Seja um espaço métrico  $(M, d)$ . Se  $p \in M$  e  $A \subset M$ , então  $p \in \overline{A}$  se, e somente se,  $d(p, A) = 0$ .*

**Demonstração:** Se  $p \in \overline{A}$ , então para todo  $r > 0$ , temos  $B(p, r) \cap A \neq \emptyset$ , logo existe  $a \in A$ , tal que  $d(p, a) < r$ . Isso significa que  $d(p, A) = \inf\{d(p, a) | a \in A\} = 0$ , pois caso contrário, tomando  $d(p, A) = r > 0$ , então  $r = d(p, A) \leq d(p, a) < r$ , o que é absurdo.

Agora, tomando  $r > 0$ , temos pela hipótese que  $d(p, A) = \inf\{d(p, a) | a \in A\} = 0$ , assim existe  $a \in A$  tal que  $0 \leq d(p, a) < r$ . Segue que  $a \in B(p, r) \implies B(p, r) \cap A \neq \emptyset$  e portanto  $p \in \overline{A}$ .

**Definição 4.3.5.** Se  $M, N$  são espaços métricos, uma aplicação  $f : M \longrightarrow N$  é chamada *imersão isométrica* quando, para quaisquer  $x, y \in M$  temos  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ . Dizemos então que a aplicação  $f$  preserva distâncias.

*Observação 4.3.1.* Uma imersão isométrica  $f : M \longrightarrow N$  é sempre injetora, pois para quaisquer  $x, y \in M$ , temos  $f(x) = f(y) \implies d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \implies x = y$ . A uma imersão isométrica sobrejetiva chamamos de *isometria*. Temos ainda que a composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria também são isometrias.

# 5 Espaços topológicos

## 5.1 Topologias

**Definição 5.1.1.** Um espaço topológico é um par  $(X, \mathcal{T})$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{T}$  é uma coleção *abertos* de  $X$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\mathcal{T}$ ;
2. Se  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$  então  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{T}$ , ou seja, a interseção finita e não vazia de elementos  $\mathcal{T}$  é um elemento de  $(X, \mathcal{T})$ ;
3. Dada uma família arbitrária  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  com  $A_\lambda \in \mathcal{T}$  para cada  $\lambda \in L$ , tem-se  $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$ , ou seja, a união de qualquer elemento de  $\mathcal{T}$  é um elemento de  $\mathcal{T}$ .

Neste caso dizemos que  $\mathcal{T}$  é uma topologia sobre  $X$  ou que  $X$  está munido da topologia  $\mathcal{T}$  e que  $X$  é o suporte do espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$ . Os elementos de  $X$  são chamados de pontos do espaço.

Tomando um conjunto  $X = \{a, b, c\}$ , existem muitas topologias possíveis sobre  $X$  como mostra a Figura 5.1.

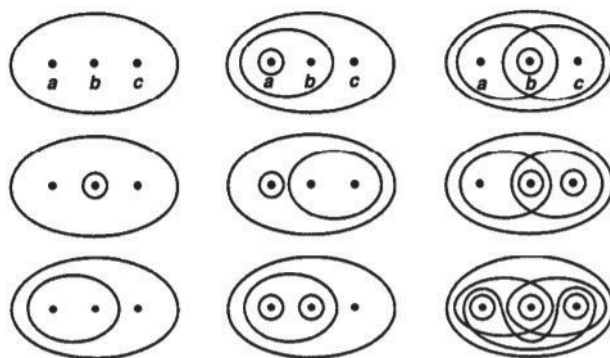


Figura 5.1: Topologias sobre  $X$ .  
Fonte: MUNKRES, 2000, p. 76.

Mas, como indicado na Figura 5.2, nem toda coleção de subconjuntos de  $X$  é uma topologia .



Figura 5.2: Coleção de subconjuntos de  $X$  que não é uma topologia.

Fonte: MUNKRES, 2000, p. 77.

**Definição 5.1.2.** Todo espaço métrico  $M$  pode ser considerado, de modo natural, como um espaço topológico, no qual a coleção  $\mathcal{T}$  é formada pelos subconjuntos abertos de  $M$ .

**Definição 5.1.3.** Uma topologia  $\mathcal{T}$  em  $X$  se diz *metrizável* quando existe uma métrica em  $X$  em relação à qual os abertos são elementos de  $\mathcal{T}$ .

**Definição 5.1.4.** Duas métricas  $d_1$  e  $d_2$  sobre um conjunto  $M$  são *equivalentes* se, e somente se, elas determinam a mesma topologia em  $M$ .

**Exemplo 5.1.1.** *Topologia Discreta.* Seja  $X \neq \emptyset$  um conjunto qualquer. A coleção  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  de todos os subconjuntos de  $X$  é uma topologia sobre  $X$ , conhecida como *Topologia Discreta*. Qualquer subconjunto de  $X$  é aberto na Topologia Discreta e temos que  $(X, \mathcal{P}(X))$  é metrizável, onde  $\mathcal{P}(X)$  é exatamente a coleção dos abertos de  $(X, d)$  e  $d$  é a métrica zero-um.

**Exemplo 5.1.2.** *Topologia Caótica, indiscreta ou grosseira.* Seja  $X \neq \emptyset$  um conjunto qualquer. A coleção  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  é uma topologia sobre  $X$ , conhecida como Topologia Caótica. Os conjuntos  $\emptyset$  e  $X$  são os únicos abertos de  $X$  na Topologia Caótica.

**Exemplo 5.1.3.** Se  $X = \{a, b, c, d\}$ , a coleção  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$  satisfaz todas as condições da definição de espaço topológico.

**Exemplo 5.1.4.** *Topologia Usual da Reta.* Consideremos o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. A coleção  $\mathcal{T}$  dada por:  $\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R}; \forall a \in A, \exists \epsilon > 0 \text{ com } (a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A\}$  é uma topologia sobre  $\mathbb{R}$ , conhecida como a *Topologia Usual da Reta*. Os abertos de  $\mathbb{R}$ , na Topologia Usual, são os subconjuntos  $A \subset \mathbb{R}$  tais que todos os seus pontos são centros de intervalos abertos inteiramente contidos em  $A$ .



**Exemplo 5.1.5.** Seja  $X$  um conjunto infinito. A coleção  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid A^c \text{ é finito}\}$  é uma topologia sobre  $X$  chamada *topologia cofinita*.

**Demonstração:** De fato,

1.  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\mathcal{T}$ ;

2. Seja  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ , logo  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$ .

Como  $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$  e  $A_i^c$  é finito, logo a interseção é finita.

Portanto  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  pertence a  $\mathcal{T}$ ;

3. Dada uma família arbitrária  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  com  $A_\lambda \in \mathcal{T}$  para cada  $\lambda \in L$ , tem-se

$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$ , ou seja, a união de qualquer elemento de  $\mathcal{T}$  é um elemento de  $\mathcal{T}$ , pois

$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$  e como  $\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda^c$  e  $A_\lambda^c$  é finito, logo a união é finita.

**Definição 5.1.5.** Dadas  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$  duas topologias sobre o mesmo conjunto  $X$ , diremos que  $\mathcal{T}$  é *mais fina* do que  $\mathcal{T}'$  quando  $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$ , ou seja, quando todo aberto segundo  $\mathcal{T}'$  for necessariamente aberto segundo  $\mathcal{T}$ . Do mesmo modo,  $\mathcal{T}$  é *menos fina* do que  $\mathcal{T}'$  quando  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ , isto é, quando dado  $A \subset X$ ,  $A \in \mathcal{T} \implies A \in \mathcal{T}'$ . Note que, toda topologia  $\mathcal{T}$  em  $X$  é menos fina do que a topologia discreta e mais fina do que a topologia caótica.

**Definição 5.1.6.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \longrightarrow Y$  se diz *aberta* quando, para cada aberto  $A \subset X$ ,  $f(A)$  é aberto em  $Y$ .

**Definição 5.1.7.** Seja  $X$  um espaço topológico. Dizemos que  $F \subset X$  é *fechado* quando seu complementar  $X - F$  é aberto.

**Definição 5.1.8.** Um espaço topológico  $X$  chama-se um *espaço de Hausdorff* quando, para cada par de pontos distintos  $x, y \in X$ , existem abertos  $A, B \subset X$  tais que  $x \in A$ ,  $y \in B$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

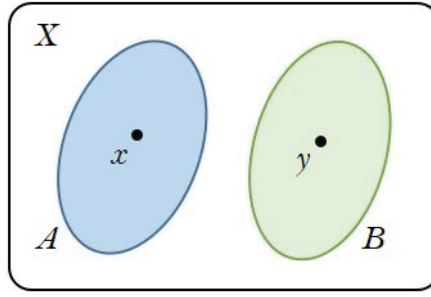


Figura 5.3: Pontos  $x \neq y$  em um Espaço de Hausdorff.  
Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 5.1.9.** Seja  $X$  um espaço topológico com a topologia  $\mathcal{T}$ . Se  $Y \subset X$ , então a *topologia induzida* em  $Y$  é definida por  $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$ . Temos que  $Y$  é um *subespaço* de  $X$ .

**Definição 5.1.10.** Seja  $X$  um conjunto, dizemos que uma coleção  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  é uma *base para uma topologia em  $X$*  se, e somente se,

- i) Para cada  $x \in X$ , existe pelo menos um conjunto  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ ;
- ii) Se  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  e  $x \in B_1 \cap B_2$ , então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

**Definição 5.1.11.** Seja uma coleção  $\mathcal{B}$  de abertos de  $X$  que constitui uma *base para uma topologia em  $X$* . Define-se a *topologia  $\mathcal{T}$  gerada por  $\mathcal{B}$*  de modo que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{A \subset X \mid \forall x \in A, \exists B \in \mathcal{B} \text{ com } x \in B \subset A\}.$$

**Exemplo 5.1.6.** Seja  $\mathcal{B}$  a coleção de abertos de todas as regiões circulares no plano. Como mostra a Figura 5.4,  $\mathcal{B}$  satisfaz as condições para uma base.

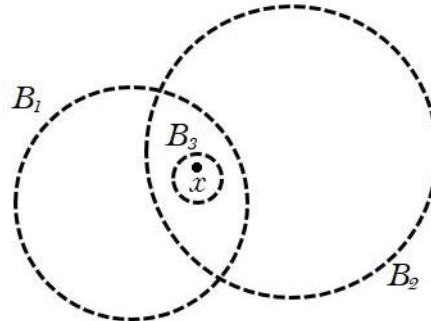


Figura 5.4: Abertos de regiões circulares no plano.  
Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 5.1.7.** Seja  $\mathcal{B}$  a coleção de abertos de todas as regiões retangulares no plano que possuem lados paralelos ao eixo das ordenadas. Como mostra a Figura 5.5,  $\mathcal{B}$  satisfaz as condições para uma base. Note que a interseção de quaisquer dois conjuntos da base é em si um conjunto da base ou o conjunto vazio.

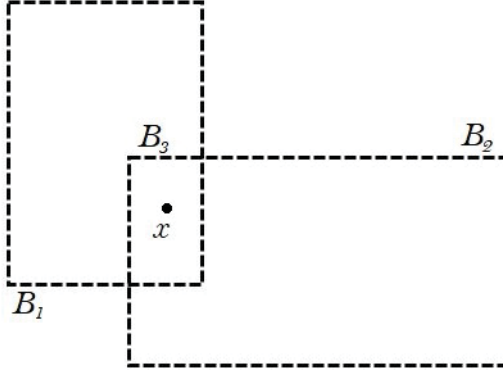


Figura 5.5: Abertos de regiões retangulares no plano.  
Fonte: Elaborada pela autora.

## 5.2 Topologia Quociente

A conceito de Topologia quociente ajuda na formalização da construção de objetos que podem ser obtidos através de técnicas de recortar e colar, como por exemplo, o Toro, a faixa de Möbius, a esfera e até mesmo a garrafa de Klein.

**Definição 5.2.1.** Dados um espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$ , um conjunto  $Y \neq \emptyset$  e uma função sobrejetiva  $f : X \longrightarrow Y$ , dizemos que

$$\mathcal{T}_f = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$$

é uma *topologia quociente* em  $Y$  induzida por  $f$ .

**Definição 5.2.2.** Dados os espaços topológicos  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , uma função sobrejetiva  $f : X \longrightarrow Y$  que induz a topologia quociente é chamada uma *identificação* se  $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y$ .

**Definição 5.2.3.** Dados um espaço topológico  $(X, \mathcal{T}_X)$ ,  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$  onde  $Y = X/\sim$  e a projeção canônica  $\pi : X \longrightarrow Y$ , que leva  $x$  a sua classe  $[x]$ , dizemos que o par  $(X/\sim, \mathcal{T}_{X/\sim, \pi})$  é o *espaço quociente* de  $X$  por  $\sim$ .

*Observação 5.2.1.* A projeção canônica  $\pi : X \longrightarrow Y$ , ou seja,  $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ , uma vez que  $Y = X/\sim$ , é definida por  $x \longrightarrow \pi(x) := [x]$ , onde  $[x] = \{x' \in X | x \sim x'\}$  é a classe de equivalência de  $x$  pela relação  $\sim$ .

## 5.3 Interior, Vizinhança e Fronteira

**Definição 5.3.1.** Seja um subconjunto  $S$  de um espaço topológico  $X$ . Temos que um ponto  $x \in S$  é um *ponto interior* de  $S$ , quando existe um aberto  $A$  de  $X$  tal que  $x \in A \subset S$ .

*Observação 5.3.1.* Chamamos de *interior* de  $S$  ao conjunto  $\text{int}(S)$  formado por todos os pontos interiores de  $S$ .

**Definição 5.3.2.** Seja um espaço topológico  $X$ . Um conjunto  $V$  é uma *vizinhança* de um ponto  $x \in S$  quando  $x \in \text{int}(V)$ . Logo, temos que  $V$  contém um aberto que contém o ponto  $x$ .

**Definição 5.3.3.** Seja um subconjunto  $S$  de um espaço topológico  $X$ . O conjunto  $\text{fr.}(S)$  formado por todos os pontos  $x \in X$ , tais que toda a vizinhança de  $x$  contém pontos de  $S$  e do complementar  $X - S$ , é chamado de *fronteira*.

*Observação 5.3.2.* Para que  $x \in \text{fr.}(S)$  é preciso que  $x$  não pertença ao interior de  $S$  e nem ao interior de  $X - S$ . Em um espaço métrico  $M$ ,  $x \in \text{fr.}(S)$  se, e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um ponto  $s \in \text{fr.}(S)$  e um ponto  $t \in M - S$ , tais que  $d(s, x) < \varepsilon$  e  $d(t, x) < \varepsilon$ .

## 5.4 Espaços conexos

*Observação 5.4.1.* Toda teoria referente a espaços conexos é válida tanto para *espaços métricos* quanto para *espaços topológicos*, bastando apenas substituir uma expressão pela outra.

**Definição 5.4.1.** Um espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$  é dito *desconexo* quando existe um par de abertos  $G$  e  $H$ , ambos não vazios, tais que  $G \cap H = \emptyset$  e  $G \cup H = X$ , ou seja,  $G$  e  $H$  formam uma partição não trivial de  $X$ .

**Exemplo 5.4.1.** Seja um conjunto  $X$  com pelo menos dois elementos, se considerarmos a topologia discreta sobre  $X$ , então o espaço topológico obtido é desconexo.

**Demonstração:** De fato, para todo  $x \in X$ , temos que  $G = \{x\}$  e  $H = X - \{x\}$  formam uma desconexão de  $X$ .

**Definição 5.4.2.** Um espaço topológico  $(X, \mathcal{T})$  é dito *conexo* se não existem abertos  $G$  e  $H$ , disjuntos e não vazios, tais que  $G \cup H = X$ . Note que  $\emptyset$  e  $X$  são os únicos subconjuntos de  $X$  abertos e fechados simultaneamente.

**Exemplo 5.4.2.** O espaço  $\mathbb{R}$  dotado da topologia cofinita<sup>1</sup> é conexo.

**Demonstração:** De fato, considerando  $G = \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_p\}$  e  $H = \mathbb{R} - \{b_1, \dots, b_q\}$ , então  $G \cap H = \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q\} \neq \emptyset$ .

**Definição 5.4.3.** Um caminho num espaço topológico  $X$  é uma aplicação contínua  $f : I \rightarrow X$ , onde  $I$  é o intervalo fechado  $[0, 1]$ . As extremidades do caminho  $f$  são os pontos  $f(0) = a$  e  $f(1) = b$  e dizemos que  $f$  é um *caminho* em  $X$  entre  $a$  e  $b$ .

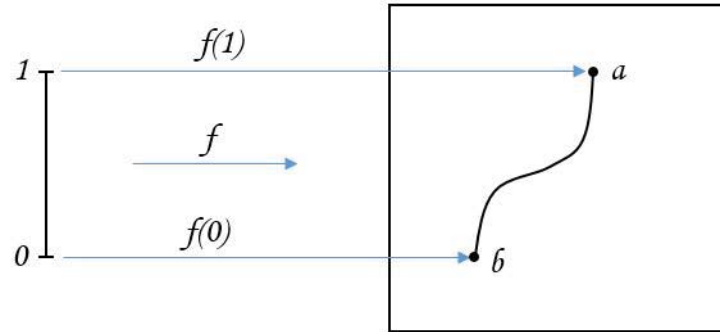


Figura 5.6: Caminho em  $X$  entre  $a$  e  $b$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 5.4.4.** Dizemos que um espaço topológico  $X$  é *conexo por caminhos* quando, dados dois pontos quaisquer  $a$  e  $b$ , existe sempre um caminho  $f : I \rightarrow X$ , com  $f(0) = a$  e  $f(1) = b$ .

**Observação 5.4.2.** Em um dado espaço topológico  $X$ , a relação  $x \sim y$  sobre os pontos de  $X$ , definida por  $x \sim y \iff$  existe um caminho  $f : I \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$  é uma relação de equivalência.

<sup>1</sup>Exemplo 5.1.5, página 77.

## 6 Continuidade

No dicionário, continuidade significa condição ou estado do que é contínuo, sem interrupções<sup>1</sup>. Para a matemática, a continuidade é uma propriedade de funções contínuas, isto é, funções cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel enquanto percorrermos o seu domínio. Mas trata-se de uma noção intuitiva e não formal do conceito.

Instintivamente, associamos a continuidade aos conceitos de convergência e limite, mas seu estudo também pode ser apresentado dentro da Topologia, de duas formas homólogas entre si, sendo considerado como o primeiro passo para a tentativa de distinguir objetos diferentes.

### 6.1 Algumas definições

**Definição 6.1.1.** *Continuidade em espaços métricos.* Sejam  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação de um espaço métrico  $M$  num espaço métrico  $N$  e  $a$  um ponto de  $M$ . Diz-se que  $f$  é *contínua no ponto  $a$*  quando, dado arbitrariamente um número  $\varepsilon > 0$ , sempre for possível determinar  $\delta > 0$ , tal que  $d(x, a) < \delta$  implique  $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ ,  $\forall x \in M$ . Ou seja,  $f : M \rightarrow N$  é contínua se  $f$  for contínua em todos os pontos de  $M$ .

*Observação 6.1.1.* Podemos dizer que para cada bola aberta  $B(f(a), \varepsilon)$ ,  $\exists B(a, \delta)$  tal que  $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$ <sup>2</sup>.

*Observação 6.1.2.* Dizemos que a função  $f$  é *descontínua* se ela não for contínua no ponto dado.

---

<sup>1</sup><<https://www.dicio.com.br/continuidade/>>

<sup>2</sup>Substituiu-se a notação  $r$ , utilizada na definição de bolas abertas, por  $\varepsilon$ , a mais usual em relação a continuidade.

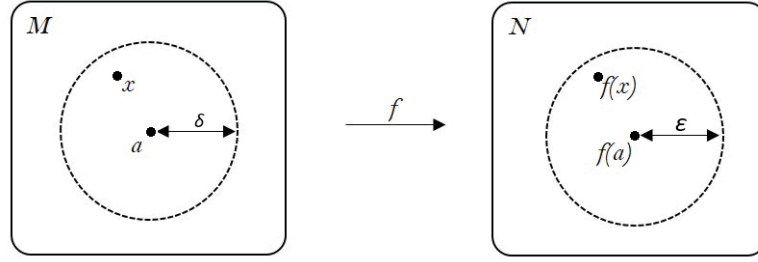


Figura 6.1: Continuidade em espaços métricos.

Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 6.1.1.** Uma *contração fraca*  $f : M \rightarrow N$  de um espaço métrico  $M$  num espaço métrico  $N$ , ou seja,  $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M$ , é contínua.

**Demonstração:** Seja  $a \in M$  um ponto qualquer de  $M$ , assim dado  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\delta = \varepsilon$ , temos que  $d(x, a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) \leq d(x, a) < \delta = \varepsilon$ . Portanto  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

*Observação 6.1.3.* Como decorrência desse exemplo as próximas aplicações também são contínuas.

**Exemplo 6.1.2.** As aplicações *constantes*  $f : M \rightarrow N$  de um espaço métrico  $M$  num espaço métrico  $N$ , onde  $f(x) = c \in N$ ,  $\forall x \in M$  são contínuas.

**Exemplo 6.1.3.** As imersões isométricas, em particular, as isometrias, as inclusões  $i : X \rightarrow M$ , onde  $X$  é um subespaço de  $M$ , com  $i(x) = x$ ,  $\forall x \in X$  e as imersões  $j_x : N \rightarrow x \times N \subset M \times N$ , com  $j_x(y) = (x, y)$  são contínuas.

**Exemplo 6.1.4.** As funções reais  $d_A : M \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $d_A(x) = d(x, A)$ , onde  $A$  é um subconjunto de um espaço métrico  $M$ , em particular para  $d_a : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in M$ , com  $d_a(x) = d(x, a)$ , são contínuas.

**Exemplo 6.1.5.** A aplicação canônica  $\pi : S^n \rightarrow P^n$ , da esfera unitária  $n$ -dimensional, sobre o espaço projetivo  $P^n$  é contínua.

**Definição 6.1.2.** *Continuidade em espaços topológicos.* Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação de um espaço topológico  $X$  num espaço topológico  $Y$ . Dizemos que  $f$  é contínua, se a *imagem inversa* de qualquer subconjunto aberto de  $Y$  é um subconjunto aberto de  $X$ , ou seja, para cada aberto  $A' \in Y$ ,  $f^{-1}(A')$  é um aberto em  $X$ .

**Definição 6.1.3.** Dizemos que  $f : X \rightarrow Y$  é *contínua no ponto*  $a \in X$  se, para cada aberto  $B \subset Y$ , com  $f(a) \in B$ , existir um aberto  $A \subset X$ , com  $a \in A$ , tal que  $f(A) \subset B$ .

**Definição 6.1.4.** *Equivalência das definições.* Sejam  $A$  e  $B$  espaços métricos e  $\mathcal{T}_A$  e  $\mathcal{T}_B$  as topologias geradas pelas métricas em  $A$  e  $B$ . A função  $f : A \rightarrow B$  é contínua pela definição topológica se, e somente se, ela é contínua pela definição métrica.

**Definição 6.1.5.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma bijeção entre dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$ . Dizemos que  $f$  é um *homeomorfismo* se, e somente se,  $f$  e sua função inversa  $f^{-1} : X \rightarrow Y$  são contínuas. Temos assim, que dois espaços topológicos são chamados de *homeomorfos* se existir um homeomorfismo entre eles.

*Observação 6.1.4.* Uma isometria  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo, pois  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  também é uma isometria. Temos ainda que as translações  $x \rightarrow x + a$  e homotetias<sup>3</sup>  $m_\lambda : x \rightarrow \lambda x$ , com  $\lambda \neq 0$ , em um espaço normado, são homeomorfismos.

**Definição 6.1.6.** Um invariante topológico é uma propriedade  $P$  aplicada sobre os elementos de um conjunto  $A$ , tal que dado  $X \in A$ , temos que  $P(X)$  é verdadeira se, e somente se,  $P(Y)$  é verdadeira para todo  $Y \in A$  homeomorfo a  $X$ , ou seja, é uma propriedade relativa a um objeto que não muda quando ele passa por finitas transformações, desde que estas sejam contínuas.

**Definição 6.1.7.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, dizemos que duas funções contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  são *homotópicas*, e escrevemos  $f \simeq g$ , se existir uma função contínua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ .

*Observação 6.1.5.* Pode-se pensar na homotopia  $H$  como uma coleção de funções  $h_t(x) = H(x, t)$ ,  $t \in [0, 1]$  tal que  $h_0 = f$  e  $h_1 = g$ . Se associarmos o segundo parâmetro de  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  ao tempo, teremos que a função  $H$  descreve uma deformação contínua de  $f$  em  $g$ .

**Definição 6.1.8.** Sejam  $X$  um espaço topológico e os pontos  $a, b \in X$ , dizemos que dois cominhos em  $X$  de  $a$  para  $b$ , dados por  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ , são *homotópicos* se existir uma função contínua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $H(s, 0) = \alpha(s)$ ,  $H(s, 1) = \beta(s)$ ,  $H(0, t) = a$  e  $H(1, t) = b$ , com  $s, t \in [0, 1]$ .

*Observação 6.1.6.* É equivalente dizer que dois caminhos são homotópicos se possuírem a mesma extremidade, pois nesse caso  $H(0, t) = a$  e  $H(1, t) = b$  representam as extremidades dos caminhos dados por  $H(s, 0) = \alpha(s)$  e  $H(s, 1) = \beta(s)$ .

<sup>3</sup>Ampliação ou a redução de distâncias e áreas a partir de um ponto fixo.



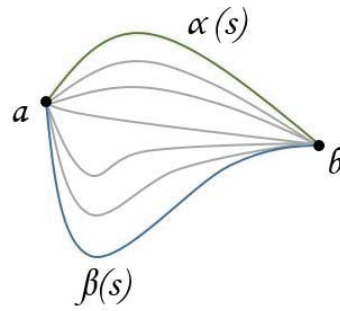


Figura 6.2: Caminhos homotópicos.

Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 6.1.9.** Sejam um espaço topológico  $X$  e  $p$  um ponto de  $X$ . O conjunto das classes de homotopia de caminhos para caminhos fechados com base em  $p$ , com a operação  $*$ , é chamado o *grupo fundamental de  $X$*  relativo ao ponto base  $p$  e denotado por  $\pi_1(X, p)$ .

*Observação 6.1.7.* Caminhos fechados com base em  $p$ , conhecidos por *laços* em  $p$ , são caminhos do espaço topológico  $X$  com início e fim no ponto  $p$ . Assim, o grupo fundamental é um invariante topológico que permite estabelecer formas de deformar laços continuamente em espaços topológicos e utilizar essas informações para identificar grupos fundamentais isomorfos existentes em espaços topológicos homeomorfos.

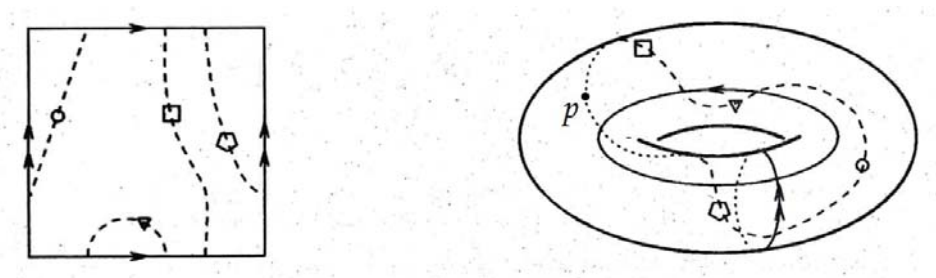


Figura 6.3: Caminho fechado em um Toro.

Fonte: FARMER; STANFORD, 2003, p.50.

## 7 Superfícies, Teoria dos nós e Origami

A topologia vem sendo utilizada em diversas áreas da ciência, como na física para o estudo dos materiais ou dentro da biologia no estudo do DNA. De forma prática, sua aplicação pode ser encontrada para análise de rotas, manipulação de objetos ou alteração de estruturas, tudo isso graças ao estudo de conceitos como superfícies, nós ou dobras de um origami.

### 7.1 Superfícies isotópicas e homeomorfias

De maneira elementar, podemos definir topologia de uma superfície, como o conjunto de aspectos geométricos que se mantêm inalterados quando são aplicadas deformações contínuas através de alongamento, torção, compressão ou corte com colagem no mesmo sentido do corte. Ao se aplicar a uma superfície, em um número finito de vezes, qualquer uma das três primeiras deformações ou mesmo uma combinação entre elas, diremos que a superfície resultante é isotópica à superfície original<sup>1</sup>. Ao incluir a última deformação, a superfície resultante será chamada de homeomorfa à superfície original<sup>2</sup>. Temos que superfícies isotópicas sempre serão homeomorfias, mas a recíproca nem sempre será verdadeira. Observe que um toro<sup>3</sup> é isotópico e homeomorfo a uma xícara (Figura 7.1-a), mas é apenas homeomorfo a um nó trifólio<sup>4</sup> (Figura 7.1-b).

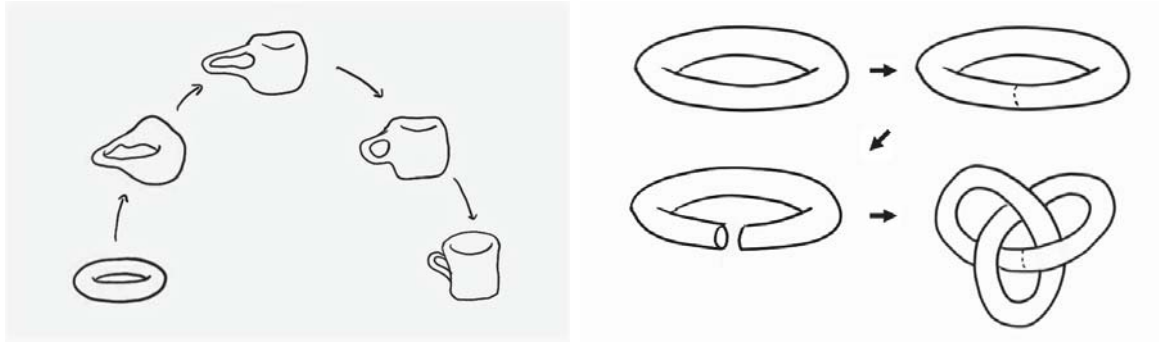
---

<sup>1</sup>Vide espaços métricos

<sup>2</sup>Vide espaços topológicos

<sup>3</sup>Toro é uma superfície topológica homeomorfa ao produto de dois círculos, apresentando o formato de uma câmara de pneu.

<sup>4</sup>Vide Teoria dos Nós



(a) Transformação de um toro em xícara.

(b) Transformação de um toro em nó trifólio.

Figura 7.1: Superfícies isotópicas e homeomorfas.

Fonte: Elaborada pela autora.

## 7.2 Superfícies

O conceito topológico de uma superfície ou variedade 2-dimensional, remete à ideia que temos de uma superfície feita de papel ou uma folha de qualquer material fino e maleável. Trata-se de um espaço topológico com as mesmas propriedades locais do plano da geometria euclidiana. Analogamente, uma superfície em dimensões superiores é uma variedade  $n$ -dimensional, ou seja, um espaço topológico com as mesmas propriedades locais que um  $n$ -espaço euclidiano. As  $n$ -variedades conexas, com  $n > 1$ , podem ser divididas em orientáveis, como uma esfera ou um toro e não-orientáveis, como a faixa de Möbius.

**Definição 7.2.1.** Uma *variedade  $n$ -dimensional* ou  *$n$ -variedade*  $X$  é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável, e tal que para cada  $x \in X$ , existe um aberto  $A \subset X$ , com  $x \in A$  e um homeomorfismo  $\varphi : A \rightarrow B$ , onde  $B$  é um aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Chamamos de *superfície* a uma variedade de dimensão dois.

**Definição 7.2.2.** *Teorema da Classificação.* Toda superfície compacta orientável é homeomorfa a uma esfera ou a uma soma conexa de toros. Toda superfície não orientável é homeomorfa a uma soma conexa de planos projetivos<sup>5</sup>.

**Exemplo 7.2.1.** Podemos obter o toro  $T^2 = S^1 \times S^1$  através da relação de equivalência  $(0, y) \sim (1, y)$  e  $(x, 0) \sim (x, 1)$  que identifica pares de pontos opostos a partir do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

<sup>5</sup>É o espaço topológico obtido pela identificação dos pontos opostos da fronteira de uma bola fechada.

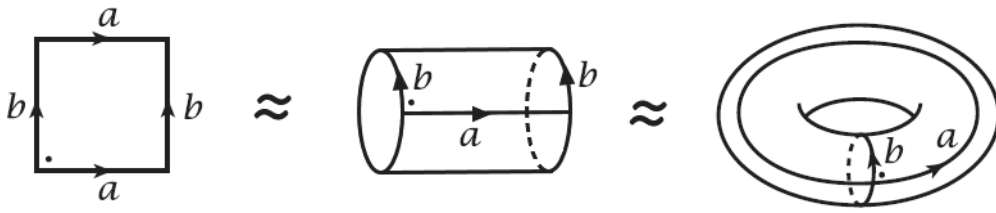


Figura 7.2: Construção do toro  $T^2$  a partir do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Fonte: Adaptado de HATCHER, 2002, p.449.

**Exemplo 7.2.2.** A garrafa de Klein pode ser obtida a partir do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , de forma similar ao toro, mas considerando a orientação reversa de um dos extremos.

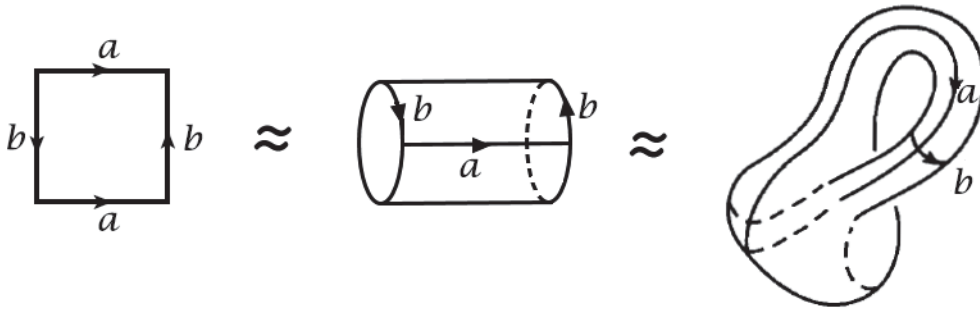


Figura 7.3: Construção da garrafa de Klein a partir do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Fonte: Adaptado de HATCHER, 2002, p.454.

**Exemplo 7.2.3.** O plano projetivo  $P^2$  é homeomorfo ao espaço da esfera unitária  $B^2$ , que por sua vez é homeomorfa ao quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , onde os pares de pontos opostos são identificados por  $(0, y) \sim (1, y)$  e  $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ , conforme mostra a Figura 7.4.

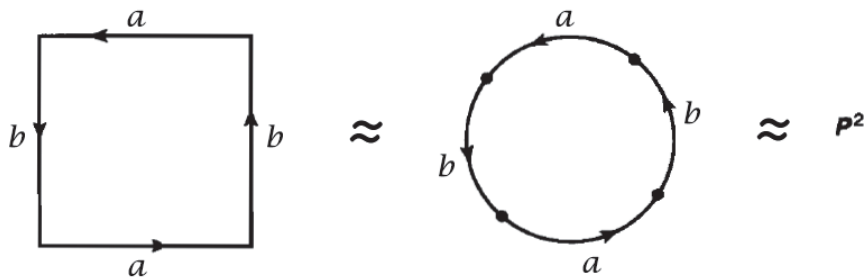


Figura 7.4: Plano projetivo  $P^2$  a partir do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Fonte: HATCHER, 2002, p.449.

**Exemplo 7.2.4.** A Figura 7.5 apresenta a faixa de Möbius obtida a partir de dois quadrados  $[0, 1] \times [0, 1]$ , sendo um com os pares de pontos opostos identificados do mesmo modo utilizado para se obter o toro e o outro referente a garrafa de Klein.

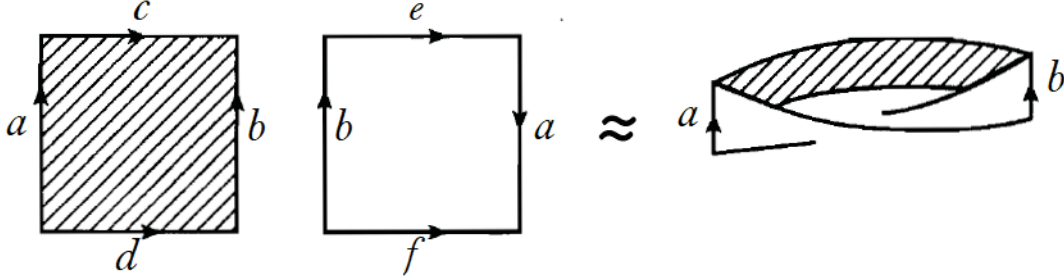


Figura 7.5: Faixa de Möbius a partir de dois quadrados  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Fonte: HATCHER, 2002, p.450.

**Exemplo 7.2.5.** O Bitoro é uma superfície topológica formada pela soma conexa de dois toros.

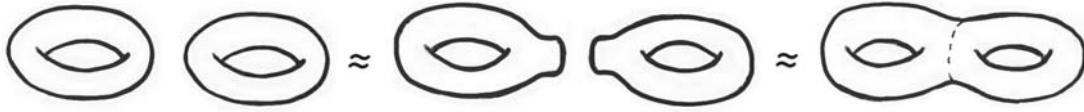


Figura 7.6: Bitoro.

Fonte: Elaborada pela autora.

## 7.3 Teoria dos nós

### 7.3.1 História dos Nós

A Teoria dos Nós, que está inserida no campo da Topologia Algébrica<sup>6</sup>, estuda as curvas no espaço que não possuem auto-interseções e são fechadas, isto é, uma imersão de círculos no espaço euclidiano tridimensional<sup>7</sup>, o  $\mathbb{R}^3$ .

A primeira teoria matemática dos nós foi desenvolvida em 1771, por Vandermonde<sup>8</sup>, que mostrou a importância das características topológicas ao discorrer sobre a geometria de posição e sua relação com as propriedades dos nós. Gauss, por sua vez, definiu o número de enlaces, isto é, o número de vezes que cada curva se envolve em torno uma

<sup>6</sup>Ramo da matemática que associa estruturas algébricas a um espaço topológico para obter informações sobre esse espaço

<sup>7</sup>Espaço matemático abstrato contendo um conjunto de pontos que satisfazem a determinadas relações.

<sup>8</sup>Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796).

da outra, através do que chamou de enlace integral. Tait<sup>9</sup> criou uma das primeiras tabelas de nós para a classificação completa, e em 1885, publicou uma tabela de nós, com até dez cruzamentos, que ficou conhecida como as conjecturas de Tait. Apesar disso, a teoria dos nós foi negligenciada pelos estudiosos da topologia.

No início do século XX, Max Dehn<sup>10</sup>, J. W. Alexander<sup>11</sup> e outros, estudaram nós sob a ótica do grupo de nó e invariantes da teoria da homologia. William Thurston<sup>12</sup> introduziu a geometria hiperbólica no estudo dos nós com o teorema da hiperbolização, no final dos anos de 1970. Muitos nós foram mostrados como nós hiperbólicos, permitindo o uso da geometria na definição de novos tipos de nós.

Em 1984, Vaughan Jones<sup>13</sup> fez a descoberta do polinômio de Jones que é calculado sobre uma projeção do nó, isto é, sua imagem projetada no plano. Posteriormente as contribuições dos estudos de Witten<sup>14</sup>, Maxim Kontsevich<sup>15</sup> e outros, mostraram que existem relações profundas entre a teoria dos nós e os métodos matemáticos na áreas da estatística, mecânica e no campo da teoria quântica. Uma infinidade de invariantes de nós surgiram com o uso dos grupos quânticos<sup>16</sup> e homologia Floer.

No final do século XX, os cientistas passaram a estudar nós físicos para entender fenômenos de nó em DNA e outros polímeros<sup>17</sup>. Estima-se que a teoria dos nós ajudará na construção de computadores quânticos<sup>18</sup> através do modelo de computação quântica topológica.

### 7.3.2 Nó trivial e outros tipos de nós

Chamamos de nó trivial ao conjunto de curvas que podem ser deformadas até se transformarem em círculos. Nó trifólio ou nó de trevo é um exemplo de um nó não trivial, que pode ser obtido com a junção das duas extremidades resultando em um laço atado.

Dois nós são considerados equivalentes se for possível deformar um deles continuamente, sem rompimento ou colapsos<sup>19</sup>, até ficar idêntico ao outro. O formato em si não é importante, mas sim poder estabelecer a equivalência dos nós, isto é, um homeomorfismo que preserve a orientação. Um nó não é uma curva específica, mas todo o conjunto de curvas que surgirem após a deformação.

Os invariantes são, na maioria das vezes, calculados sobre projeções e podem ser

---

<sup>9</sup>Peter Guthrie Tait (1831-1901).

<sup>10</sup>Max Wilhelm Dehn(1878-1952).

<sup>11</sup>James Waddell Alexander II (1888-1971).

<sup>12</sup>William Paul Thurston (1946-2012).

<sup>13</sup>Vaughan Frederick Randal Jones, matemático neozelandês.

<sup>14</sup>Edward Witten, matemático norte-americano.

<sup>15</sup>Maxim Lvovich Kontsevich, matemático russo.

<sup>16</sup>Objetos clássicos deformados que perdem as propriedades de grupos.

<sup>17</sup>Química.

<sup>18</sup>Dispositivo que executa cálculos fazendo uso direto de propriedades da mecânica quântica, tais como sobreposição e interferência.

<sup>19</sup>Um nó muito apertado que acaba desaparecendo.

números, podem ser valores lógicos<sup>20</sup>, no sentido de que a projeção tem ou não determinada propriedade, podem ser polinômios de uma ou mais variáveis<sup>21</sup>, podem ser grupos ou outros, mas é preciso que o invariante não dependa da projeção do nó que foi utilizada para calculá-lo (Colli, 20??).

Podemos afirmar que nós com invariantes diferentes certamente são diferentes topologicamente, mas nem sempre nós com os mesmos invariantes são iguais do ponto de vista topológico (Stewart, 2010).

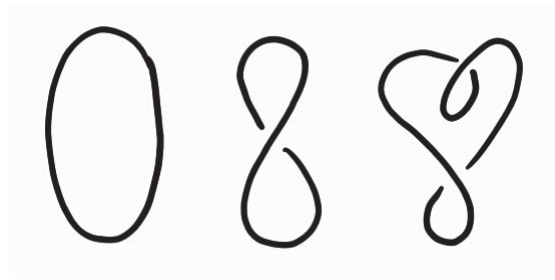


Figura 7.7: Nós triviais.  
Fonte: Elaborada pela autora.

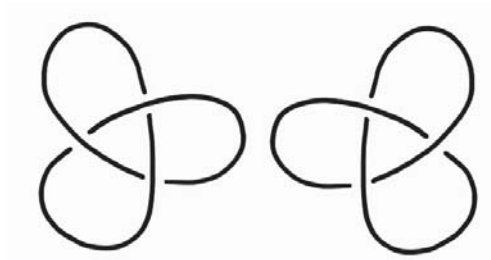


Figura 7.8: Nó trifólio canhoto e nó trifólio destro.  
Fonte: Elaborada pela autora.

Para melhor visualização dos nós, usa-se o diagrama de nós, um esboço projetado no plano de forma a representar a sobreposição das vertentes do nó, criando uma ruptura na vertente que está por baixo, como na Figura 7.9.

<sup>20</sup>Verdadeiro ou falso

<sup>21</sup>Polinômio de Jones

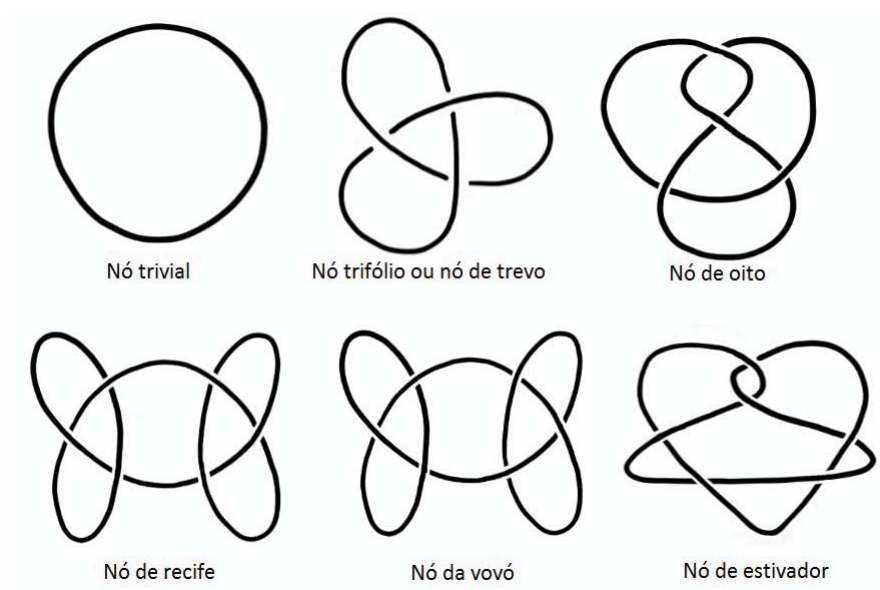


Figura 7.9: Alguns exemplos de nós.

Fonte: Elaborada pela autora.

As curvas no espaço, eventualmente enlaçadas entre si, são chamadas de enlaces<sup>22</sup>. O símbolo das olimpíadas é um enlace de cinco componentes. Um enlace é chamado primo quando não pode ser escrito como a composição de dois outros. Em geral, as tabelas de nós só apresentam nós primos.

<sup>22</sup>União de nós que não se intersectam entre si.



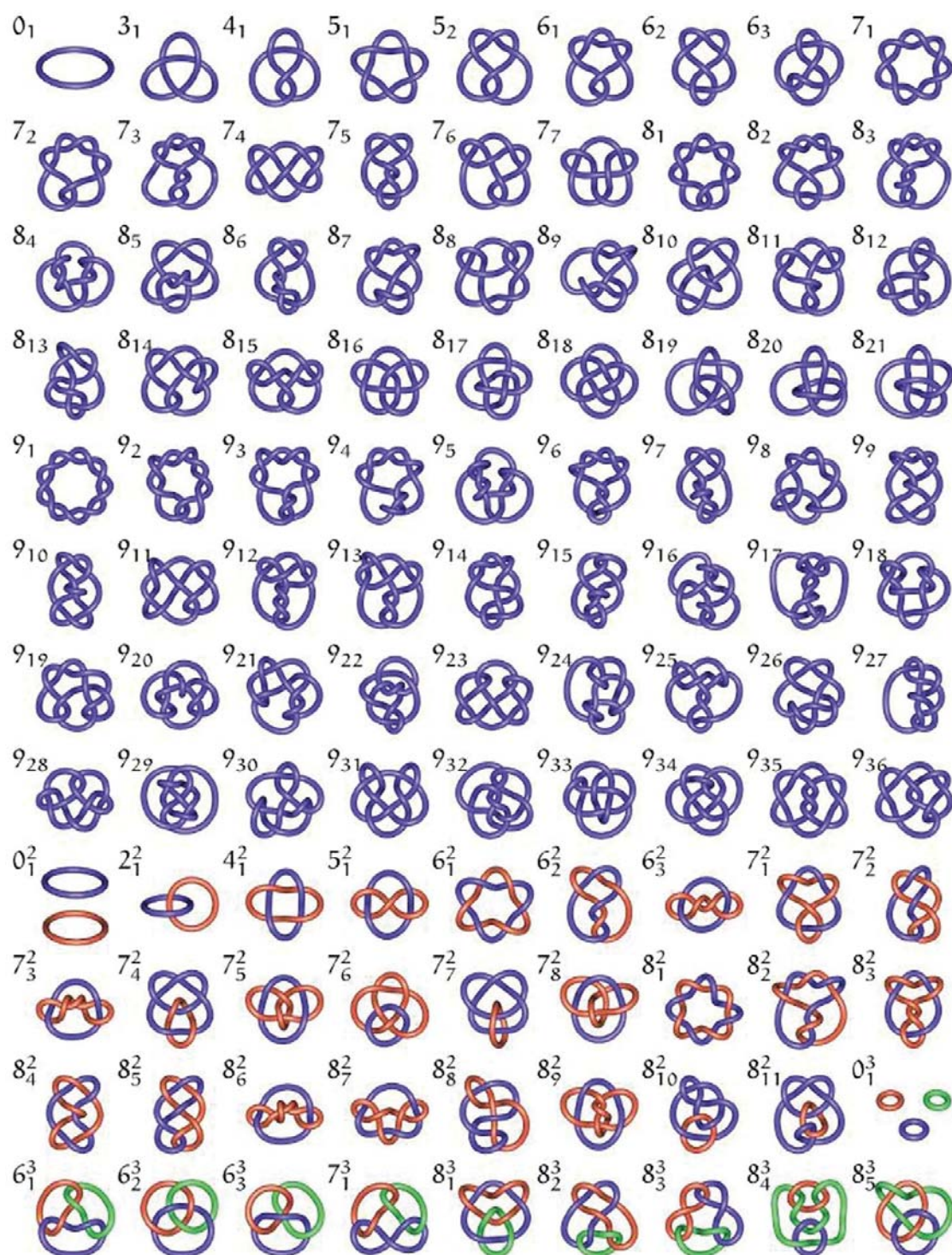


Figura 7.10: Nós primos com até nove cruzamentos e alguns enlaces.  
 Fonte: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tabela\\_de\\_n%C3%B3s.pdf](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tabela_de_n%C3%B3s.pdf)>

## 7.4 Origami

### 7.4.1 Teorema escondido nas dobras de papel

O origami é uma arte secular japonesa, que consiste em representar seres ou objetos através da dobradura de papel. Com modelos cada vez mais sofisticados, o origami ganhou espaço na matemática, passando de hobby para objeto de pesquisa, inspirando soluções para diversos problemas matemáticos, de tal forma que seu estudo culminou na formalização de alguns teoremas. Através da dobradura é possível descrever e estudar aspectos da natureza e da ciência, como o desdobramento das asas de uma joaninha, a deformação da capota de automóveis envolvidos em colisões e até mesmo a criação de painéis solares dobráveis. pela NASA.

Ao desdobrar-se um origami, ficam visíveis as marcações no papel, dobras e vincos, resultando em um diagrama chamado *padrão de vinco*. No padrão de vinco, verifica-se dois tipos de dobras: as de montanhas e as de vales.

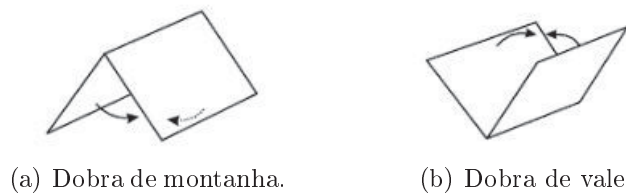


Figura 7.11: Tipos de dobras em um padrão de vinco.  
Fonte: ALSINA; NELSEN, 2010, p.56.

As dobras de montanha são representadas por linhas inteiras, enquanto as dobras de vale por linhas tracejadas. O *vértice* é ponto onde duas ou mais dobras de um padrão de vinco se interceptam e uma *dobra de vértice plana* é um padrão de vinco com apenas um vértice. Chamamos de *origami plano* ao origami cujas configurações podem ser pressionadas, dentro de um livro por exemplo, sem acrescentar novas dobras ou vincos.

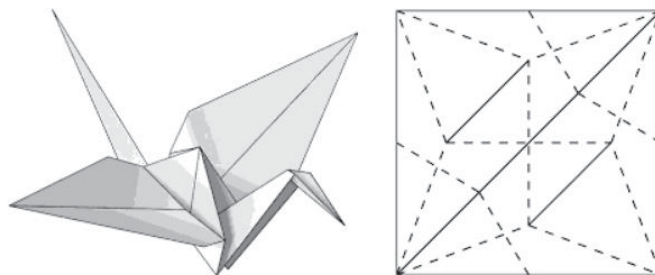


Figura 7.12: Tsuru: origami e padrão de vinco.  
Fonte: ALSINA; NELSEN, 2010, p.56.

De acordo com o *Teorema de Maekawa*, em um origami plano, o módulo da diferença entre o número de dobras de montanha e o número de dobras de vale de uma dobra de vértice plana é sempre igual a dois.

De fato, considere o disco  $C$ , conforme apresentado na Figura 7.14, com  $n = m + v$ , onde  $n$  é o número total de dobras em uma dobra de vértice plana,  $m$  o número de dobras de montanha e  $v$  o número de dobras de vale. Após efetuar a dobra, é preciso fazer um corte abaixo do vértice para expor uma seção transversal poligonal dobrada, que resultará em um polígono plano onde seus ângulos internos serão  $0^\circ$  ou  $360^\circ$ , lembrando que se trata de um origami plano. Assumindo que o vértice estava apontando para cima quando dobrado, teremos que as dobras de montanha correspondem aos ângulos de  $360^\circ$  e as dobras de vale ao ângulo de  $0^\circ$ . Como  $n$  coincide em igual valor ao número de lados do nosso polígono, então a soma dos ângulos internos será  $(n - 2)180^\circ$ . Assim teremos,  $0m + 360^\circ v = (n - 2)180^\circ$  e como  $n = m + v$ , logo  $0m + 360^\circ v = (m + v - 2)180^\circ \iff 360^\circ v = (m + v - 2)180^\circ \iff 2v = (m + v - 2) \iff v = m - 2 \iff m - v = 2$ . No caso do vértice estar apontando para baixo, o mesmo raciocínio resultará em  $v - m = 2$ , portanto teremos  $|m - v| = 2$ . É interessante ressaltar que esta prova foi apresentada por Jan Siwanowicz, um estudante do ensino médio, durante um minicurso de matemática e origami, em Hampshire, no ano de 1993.

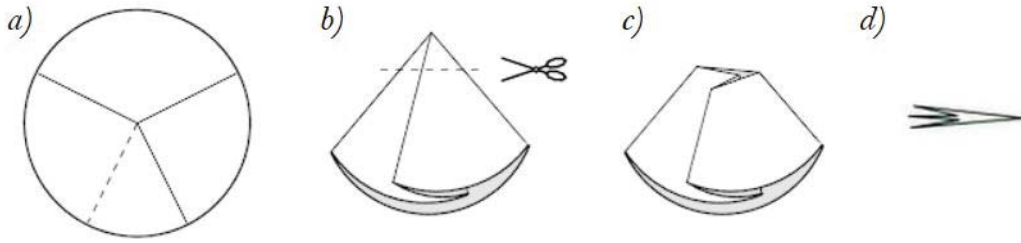


Figura 7.13: Dobra para demonstração do Teorema de Maekawa.

Fonte: ALSINA; NELSEN, 2010, p.56.

Como consequência do Teorema de Maekawa, temos que o número de vincos no disco  $C$  é par, pois sendo  $n$  o número de vincos de  $C$ , com  $n = m + v$  e  $|m - v| = 2$ , logo  $|m - v| = 2 \implies |n - v - v| = 2 \implies |n - 2v| = 2 \implies n = 2(v - 1)$  ou  $n = 2(v + 1)$ .

Outra formalização importante é dada pelo *Teorema de Kawasaki*, onde temos que a soma dos ângulos alternados formados pelos vincos em volta de uma dobra de vértice plana, em um origami plano aberto, será sempre  $180^\circ$ .

Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  uma sequência de ângulos envolvendo cada vértice do padrão formado pelos vincos em um papel de origami desdobrado. Temos que:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = 180^\circ \text{ e } a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = 180^\circ, \text{ assim}$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = 0$$

Outra propriedade matemática importante no origami é que pode-se colorir o papel inteiro desdobrado, somente com duas cores sem que se repita a mesma cor lado a lado.

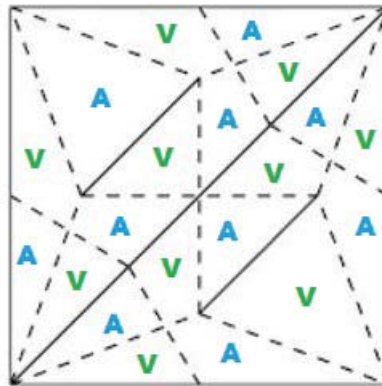
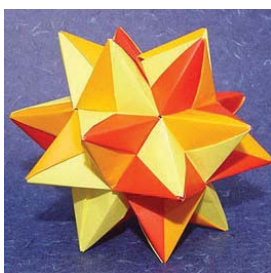


Figura 7.14: Padrão de dobra Tsuru com duas cores.

Fonte: Adaptado de ALSINA; NELSEN, 2010, p.56.

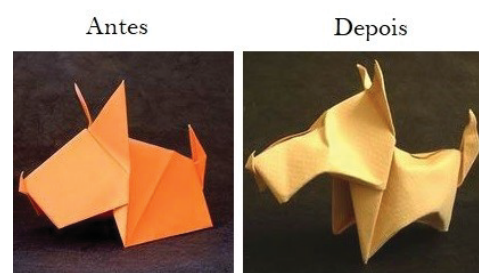
Com o passar do tempo, as técnicas de origami foram aperfeiçoadas. Além do origami tradicional, que é construído a partir de uma folha de papel, sem cortes ou uso de cola, temos o *origami modular*, onde cria-se uma figura a partir da junção de várias peças iguais, como um quebra-cabeça; o *block folding*, onde cria-se peças tridimensionais através de módulos triangulares; o *wet folding*, técnica de molhar um origami pronto com água para fazer curvas no papel, criando relevo e deixando as figuras com aspecto mais realista. Existem outras técnicas, mas que requerem um profundo grau de especialização.



(a) Origami modular



(b) Block folding



(c) Wet folding

Figura 7.15: Tipos de Origami.

Fonte: <<http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/tipos-de-origami.html>>

## 8 Aprendendo topologia através de atividades lúdicas

### 8.1 Atividades

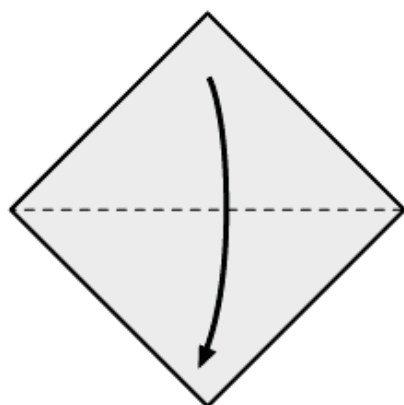
A atividade desenvolvida de forma lúdica estimula a criatividade, contextualização e generalização de conceitos, permitindo ao aluno expressar suas ideias e opiniões. "A resistência para substituir alguns conceitos só é superada se o conceito científico trouxer maior satisfação: for significativo, fizer sentido e for útil"(NÉBIAS, 1999). A evolução só acontece após diversas reestruturações, lógicas e conceituais, que servirão de alicerce para formalizações mais elaboradas. O essencial é garantir que todo conhecimento possa ser estendido para o cotidiano de cada indivíduo. Assim, essas atividades destinam-se a servir como motivação para introdução de diversos conteúdos de Geometria, permitindo que noções elementares de topologia sejam trabalhadas, conjuntamente, de forma direta ou indireta, servindo de apoio para elaboração de oficinas matemáticas.

#### 8.1.1 Dobraduras

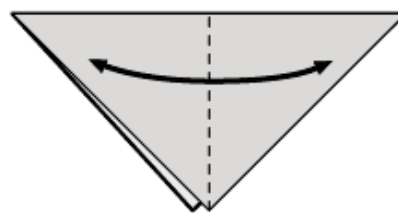
Atividades com dobraduras estimulam a criatividade, auxiliam na introdução de conceitos de noções espaciais e figuras geométricas, além de estimular o desenvolvimento da coordenação motora fina.

##### **Atividade 8.1.1.** *Origami cabeça de cachorro*

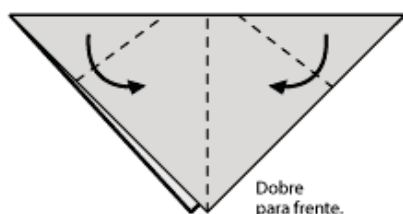
Indicada para aplicação a partir do 1º ano do ensino fundamental.



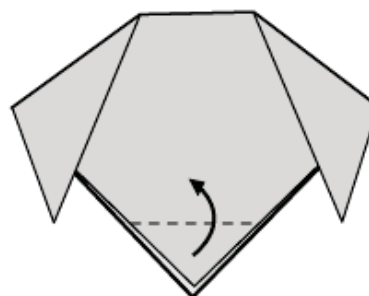
1 - Dobre ao meio



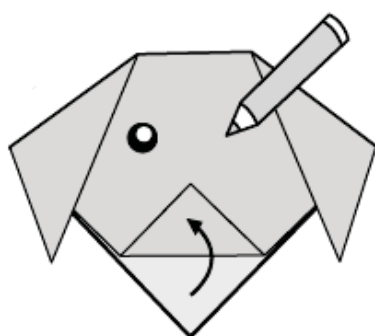
2 - Dobre para marcar e abra



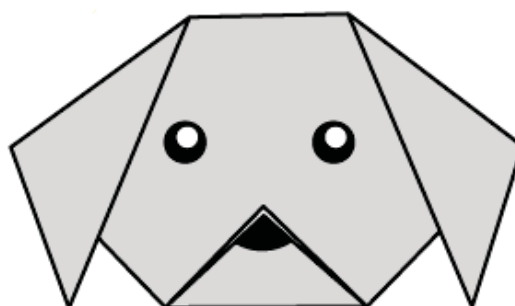
3 - Dobre para frente como indicado



4 - Dobre a ponta



5 - Desenhe os detalhes



6 - Está pronto!

— — — dobrar

Figura 8.1: Origami de uma cabeça de cachorro.

Fonte: Adaptado de

<<http://not1.xpg.com.br/dobraduras-arte-em-papel-decoracao-como-fazer-passo-a-passo/>>.



**Atividade 8.1.2. Origami de um Cisne**

Indicada para aplicação a partir do 1º ano do ensino fundamental.

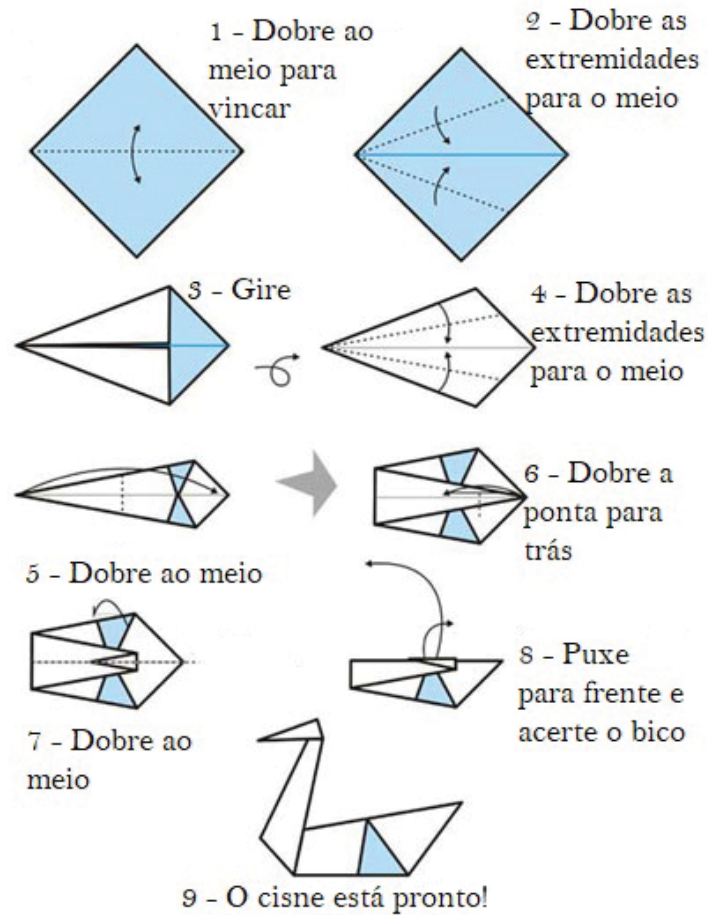


Figura 8.2: Origami de um cisne.

Fonte: Adaptado de <<https://www.smartkids.com.br/colorir/desenho-origami-cachorro>>.

**Atividade 8.1.3. Desafio do pentágono**

O desafio consiste em transformar uma fita de papel fina e longa, de formato retangular, em um pentágono regular, sem cortá-la ou rasgá-la. Conceitos iniciais sobre origami, teoria dos nós, transformações e continuidade podem ser introduzidos através dessa atividade. Indicada para aplicação a partir do 6º ano do ensino fundamental.



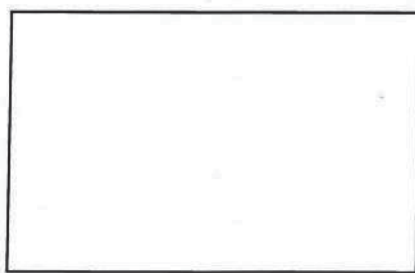
Figura 8.3: Transformar um fita retangular em um pentágono.

Fonte: Elaborada pela autora.

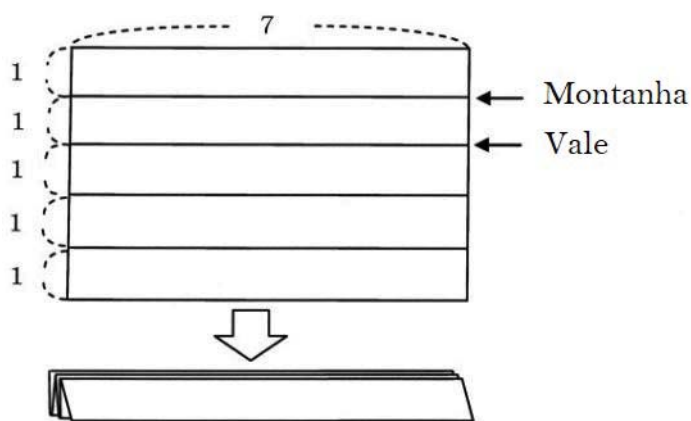
**Atividade 8.1.4. A dobra miura**

A dobra miura ficou assim conhecida em homenagem ao seu inventor, o astrofísico Koryo Miura. Seus padrões de vincos formam um mosaico de paralelogramos em zigue-zague, alternando dobras de montanha e dobras de vale. Sua construção foi utilizada principalmente na área da engenharia para construção de grandes painéis solares dobráveis ou outras estruturas feitas de materiais rígidos. Outros tipos de padrões podem ser montados com base nesse modelo.

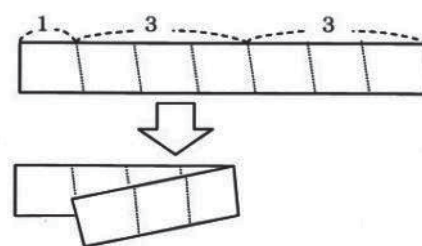
A construção de uma dobra miura auxilia na conceituação dos elementos básicos do estudo de origamis, como a identificação dos tipos de dobras e padrões de vinco; isometrias, homeomorfismos, superfícies e transformações através da dobra compacta e posterior abertura do material utilizado, vinculando conceitos básicos do ensino da geometria, além de auxiliar na concentração e desenvolvimento de habilidades motoras. Indicada para aplicação a partir do 6º ano do ensino fundamental.



(a) Pegue uma folha de papel, quanto maior, mais fácil de dobrar



(b) Dobre o papel em 5 partes horizontais iguais



(c) As dobras verticais devem ser feitas em 7 partes iguais diagonalmente e quanto maior o ângulo, fica mais fácil de dobrar

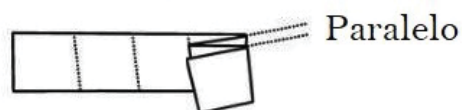




(d) A primeira camada é dobrada ao longo de seu comprimento, fazendo com que a linha horizontal inicial e a linha horizontal atual sejam paralelas



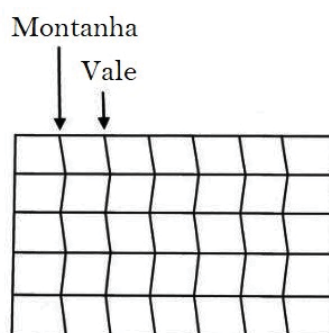
(f) Dobre todas as partes seguindo os passos d) e e)



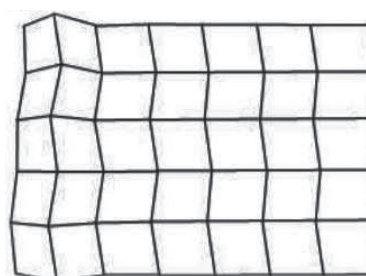
(e) A diagonal é dobrada da mesma maneira iniciando um padrão de zigue-zague



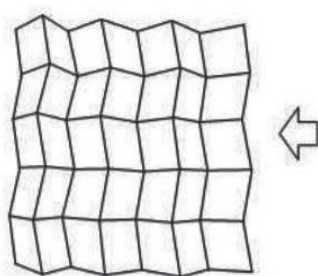
(g) A primeira parte do trabalho está pronta



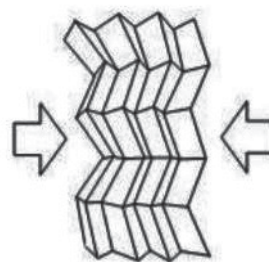
(h) Espalhe o papel aberto



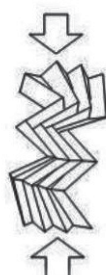
(i) Nas dobras verticais, respeitando as marcações, vá alternando entre dobra montanha e dobra vale



(j) Se a dobra vale for difícil, basta virar o papel para fazer a dobra montanha



(k) Proceda com cuidado para não danificar o papel ou acrescentar novas marcações



(l)



(m) A dobra miura está concluída!



(n)



(o)

Figura 8.4: Construção da dobra miura.

Fonte: NISHIYAMA, 2012, p. 273-275.

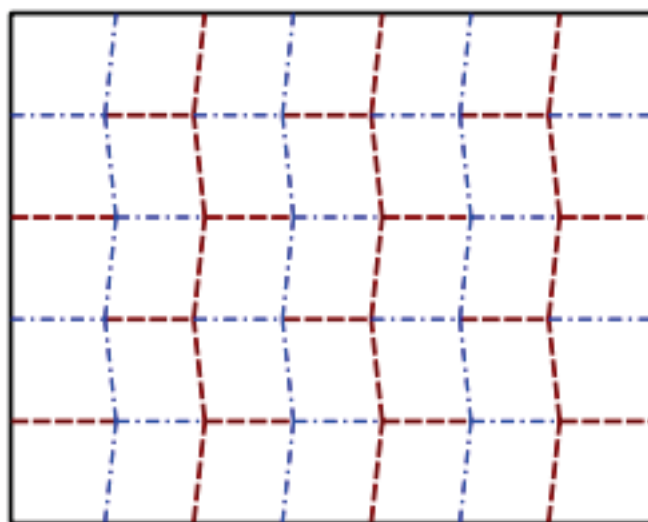
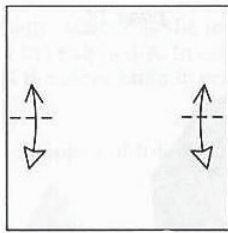


Figura 8.5: Padrão de vinco da dobra miura.

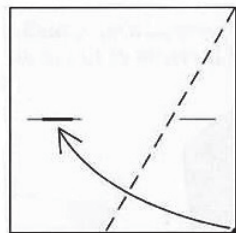
Fonte: <[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/13/Miura-Ori\\_CP.svg/250px-Miura-Ori\\_CP.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/13/Miura-Ori_CP.svg/250px-Miura-Ori_CP.svg.png)>.

**Atividade 8.1.5.** *Construindo poliedros de origami*

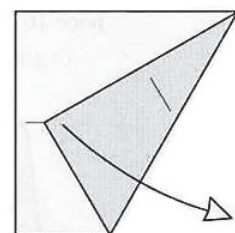
As construções de poliedros, através dobraduras, permitem o estudo de diversos temas, tanto da geometria, quanto da topologia. Definição de superfícies, orientação, formas geométricas, conceitos de continuidade, isometrias e homeomorfismos, dimensão, relação de Euler, entre outros, podem ser desenvolvidos e aplicados através dessas atividades. Indicada para aplicação a partir do 7º ano do ensino fundamental.

1) *Tetraedro*

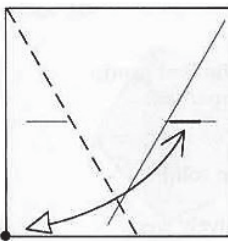
(a) Dobre e desdobre



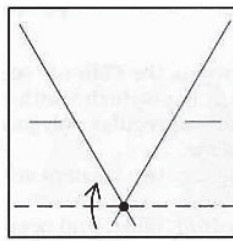
(b) Traga a quina direita mais baixa ao centro da linha



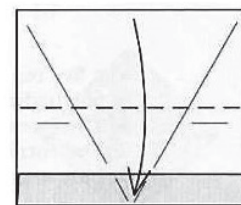
(c) Desdobre



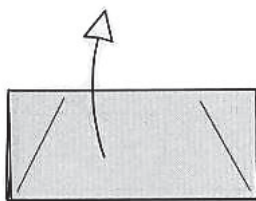
(d) Repita o passo b) e c) para o lado esquerdo



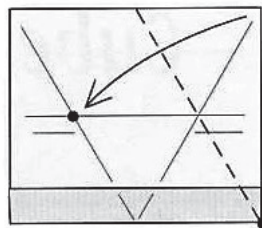
(e) Dobre a parte de baixo sobre a linha passando no vértice



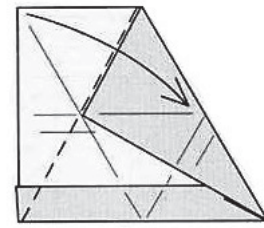
(f) Dobre ao meio



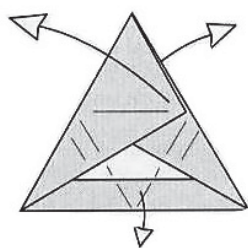
(g) Desdobre



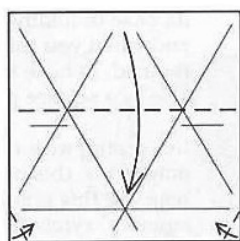
(h) Leve a quina direita mais alta no meio da nova linha



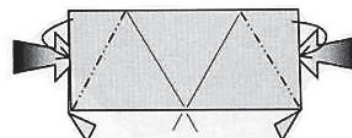
(i) Leve a quina esquerda no meio da nova linha



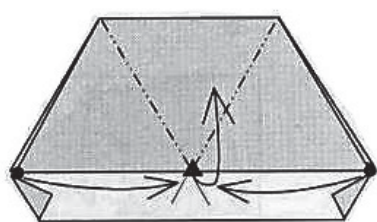
(j) Desdobre



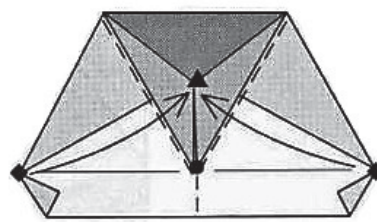
(k) Dobre ao longo da linha tracejada



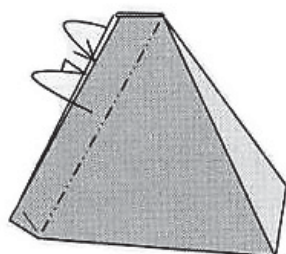
(l) Reverta as dobras laterais



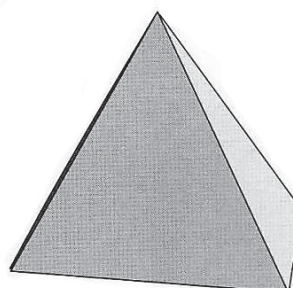
(m) Puxe no ponto ▲ enquanto os pontos se encontram para ficar tri-dimensional



(n) Os pontos ◆ devem se encontrar no topo ▲

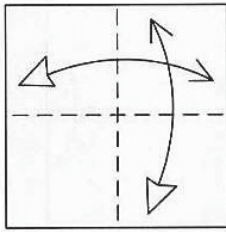


(o) Coloque as laterais para dentro

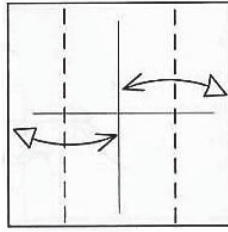


(p) O tetraedro está pronto!

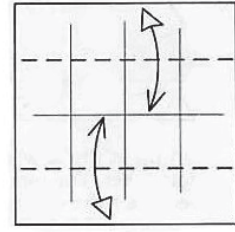
Figura 8.6: Passo-a-passo: Origami de um tetraedro.  
 Fonte: Adaptado de MONTROLL, 2002, p. 12-13.

2) *Cubo*

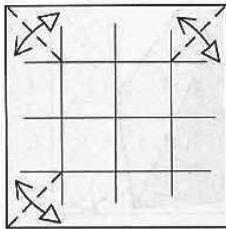
(a) Dobre e desdobre conforme indicado



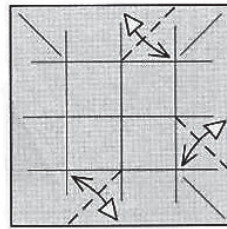
(b)



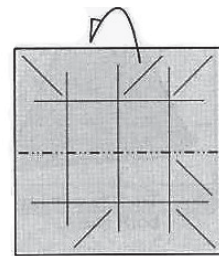
(c)



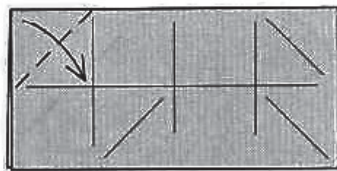
(d)



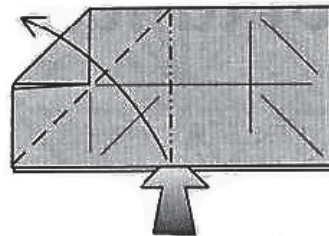
(e) Vire o papel para o outro lado



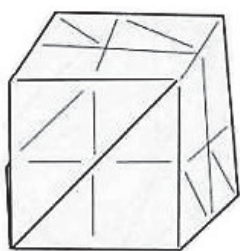
(f) Dobre e desdobre conforme indicado



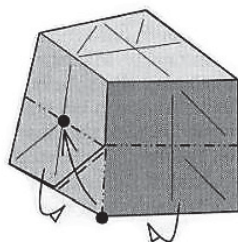
(g) Dobre a ponta esquerda do quadrado superior



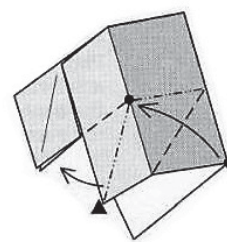
(h) Abra no meio para ver o interior



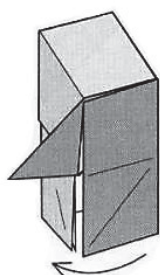
(i) Gire para ver o lado de fora e para que o lado com várias camadas fique à esquerda



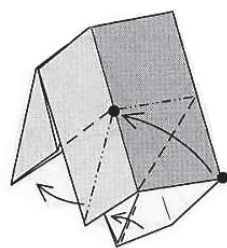
(j) Junte os pontos indicados



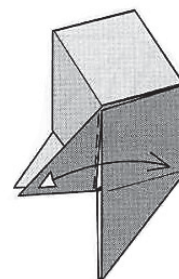
(k) Traga os pontos juntos e mantenha o ▲ fora



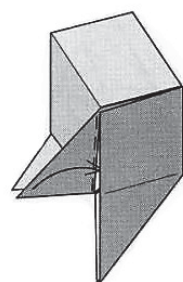
(l) Gire à esquerda e depois para baixo



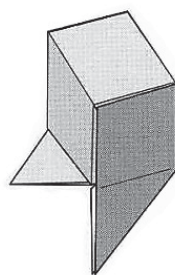
(m) Junte os pontos indicados



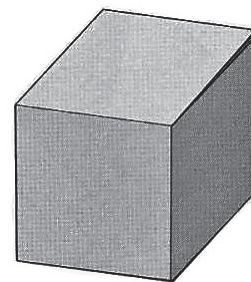
(n) Dobre e desdobre para reforçar a dobra



(o) Coloque a parte indicada para dentro



(p) Repita os passos n) e o) para os outros dois lados



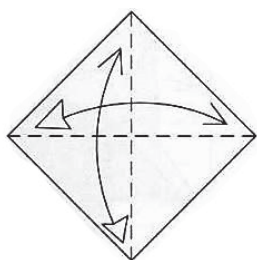
(q) Temos um cubo!

Figura 8.7: Passo-a-passo: Origami de um cubo.

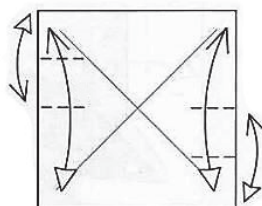
Fonte: Adaptado de MONTROLL, 2002, p. 14-15.



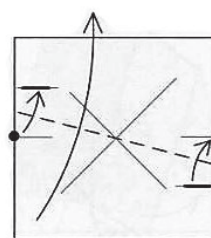
## 3) Octaedro



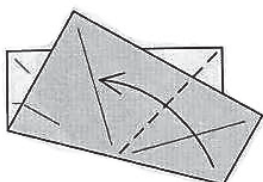
(a) Dobre e desdobre nas diagonais



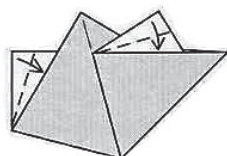
(b) Dobre e desdobre na altura de um quarto



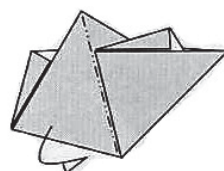
(c) Dobre de acordo com as indicações



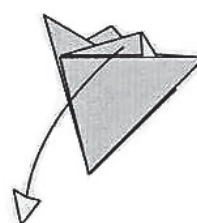
(d)



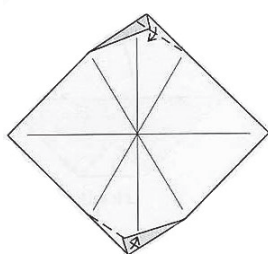
(e)



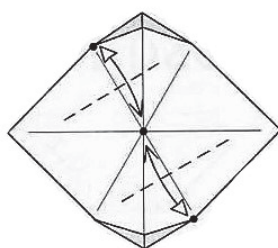
(f)



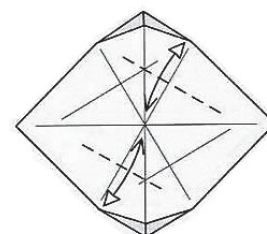
(g) Abra todo o papel



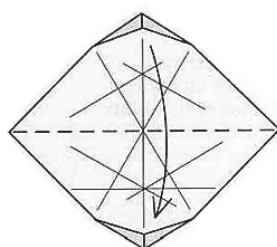
(h) Dobre as pontas



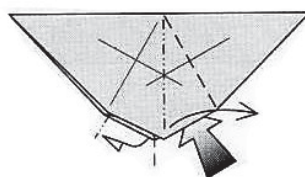
(i) Dobre e desdobre as marcações para o centro



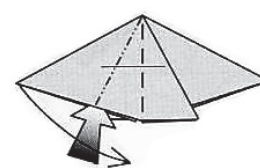
(j) Repita do outro lado



(k) Dobre as pontas juntas



(l) Levante no ponto indicado pela seta



(m) Coloque cada uma das laterais para dentro, vire e repita

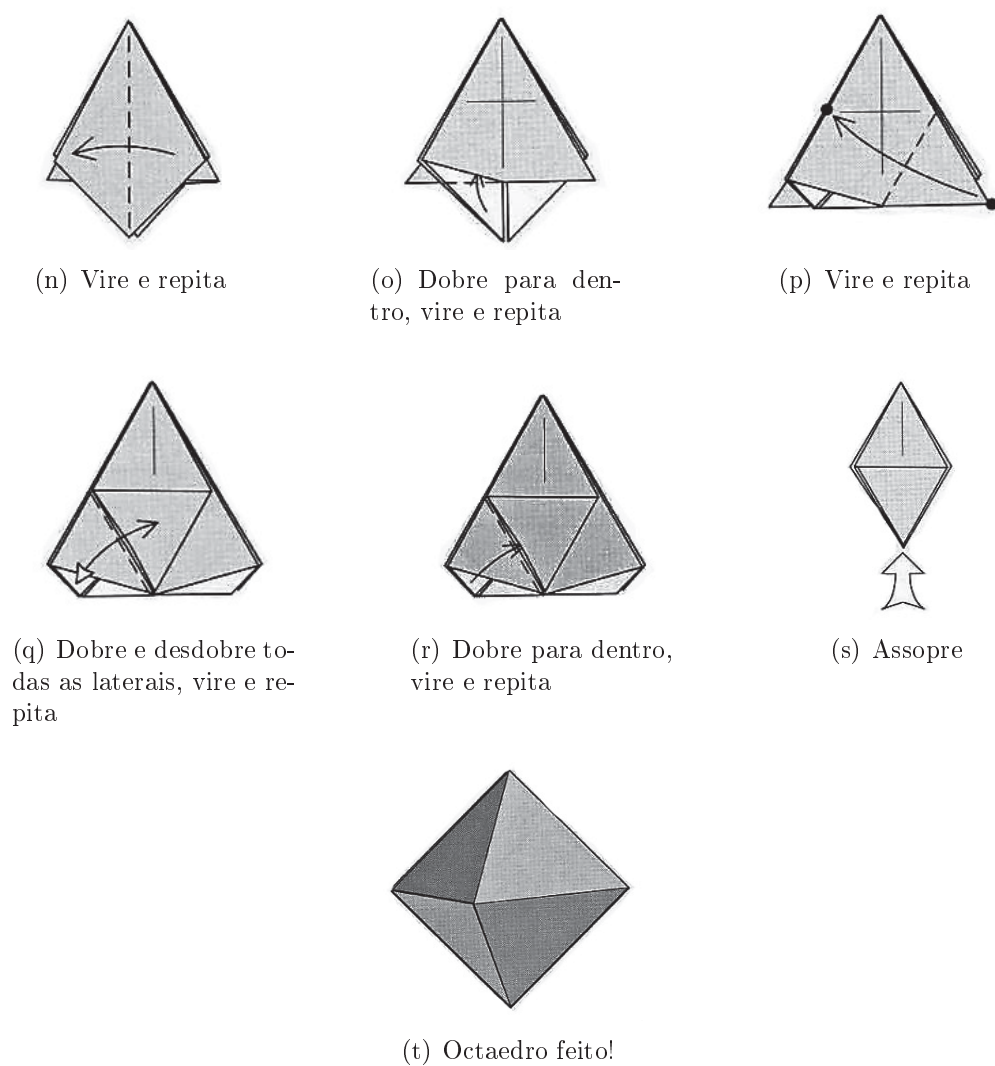


Figura 8.8: Passo-a-passo: Origami de um octaedro.  
 Fonte: Adaptado de MONTROLL, 2002, 16-17.

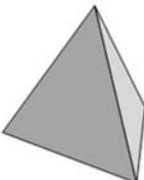
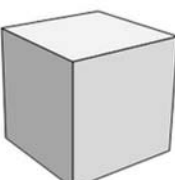
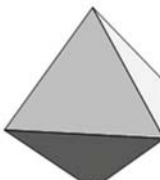
|                                                                                     |                                                                                     |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
| <b>TETRAEDRO</b>                                                                    | <b>CUBO</b>                                                                         | <b>OCTAEDRO</b>                                                                      |
| $F = 4$                                                                             | $F = 6$                                                                             | $F = 8$                                                                              |
| $V = 4$                                                                             | $V = 8$                                                                             | $V = 6$                                                                              |
| $E = 6$                                                                             | $E = 12$                                                                            | $E = 12$                                                                             |
| $F + V - E = 2$                                                                     | $F + V - E = 2$                                                                     | $F + V - E = 2$                                                                      |

Figura 8.9: Relação de Euler para poliedros convexos.  
 Fonte: Adaptado de <<https://www.livescience.com/51307-topology.html>>



**Atividade 8.1.6. Origami modular: Shuriken**

Indicada para aplicação a partir do 3º ano do ensino fundamental.



(a) Pegue uma folha de papel quadrada



(b) Dobre ao meio



(c) Dobre a ponta até a metade do retângulo



(d) Abra



(e) Dobre as pontas no centro formando um triângulo



(f) Empurre a parte do vinco para dentro



(g) Temos um paralelogramo



(h) Faça oito peças iguais em duas ou mais cores



(i) Encaixe duas peças de cores distintas



(j) Dobre as pontas para dentro



(k)



(l) Encaixe outra peça



(m) Dobre as pontas



(n)



(o)



(p)



(q)



(r) Quando chegar à oitava peça prenda as pontas dentro da primeira



(s) Shuriken fechado



(t) Shuriken aberto.

Figura 8.10: Passo-a-passo: Origami modular Shuriken.  
Fonte: Elaborada pela autora.

### 8.1.2 Superfícies

O estudo de superfícies orientáveis e não-orientáveis pode ser estimulado e contextualizado através das atividades relacionadas à faixa de Möbius, flexágonos, modelagem e manipulação de objetos ou jogos topológicos, como o "Torus Game". Essas atividades são indicadas para aplicação a partir do 6º ano do ensino fundamental.

#### Atividade 8.1.7. A faixa de Möbius

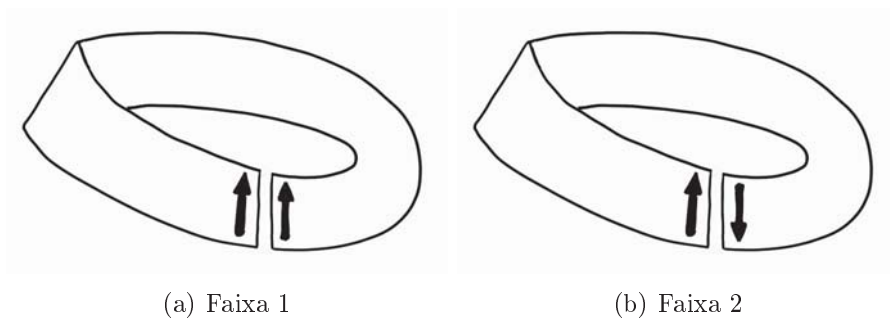
Em duas faixas de papel, desenhe em suas extremidades setas apontando para direções opostas.



Figura 8.11: Modelo para confecção das faixas.

Fonte: Elaborada pela autora.

Conforme mostra a figura 8.12, cole as pontas da faixa 1 de forma que as setas fiquem sobrepostas e com a mesma orientação, fazendo-se, em uma das pontas, um giro de  $180^\circ$ . Cole as pontas da faixa 2 para que as setas também fiquem sobrepostas, mas com orientações opostas, desta vez fazendo um giro de  $360^\circ$  em uma de suas pontas.



(a) Faixa 1

(b) Faixa 2

Figura 8.12: Posicionamento das faixas.

Fonte: Elaborada pela autora.

Escolha duas cores distintas para pintar o lado de dentro e o lado de fora de cada uma das faixas. O que aconteceu?

Agora pegue uma tesoura e corte as faixas ao meio conforme o tracejado da figura 8.13.

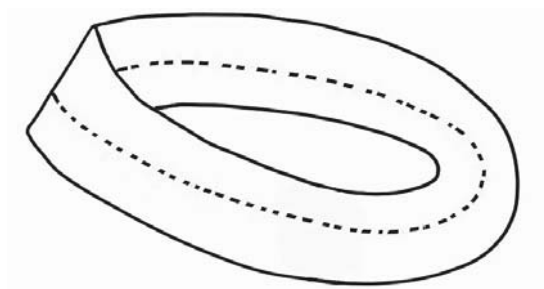


Figura 8.13: Modelo de corte da faixa.

Fonte: Elaborada pela autora.

Com quantas faixas você ficou? Qual a aparência delas agora? Pegue uma caneta e passe por toda a extensão das faixas. O que aconteceu?

Confeccione novas faixas iguais as primeiras e dessa vez faça o corte descentralizado em torno de um terço da largura da faixa. Que tipo de faixas obtivemos agora?

Por uma última vez confeccione outra faixa, mas desta vez fazendo três giros de  $180^\circ$  em uma das pontas, o que equivale a um giro de  $540^\circ$ . Analise essa faixa, e diga o que descobriu sobre ela.

### Atividade 8.1.8. *Flexágonos*

Flexágonos são brinquedos matemáticos, construídos através da dobra de uma fita de papel, de modo que o resultado final é um polígono, que após a dobra correta, exhibe faces escondidas, ou seja, tem-se uma figura plana com mais de duas faces, que com a manipulação adequada, mostra suas faces ocultas, sem deformar o objeto original. Existem vários tipos de flexágonos, tanto em formato como número de faces, permitindo a contextualização de dimensão, orientação, superfícies, isometrias, homeomorfismos, continuidade e propriedades inerentes ao conceito de dobraduras.

Para a construção de um trihexaflexágono<sup>1</sup> regular, divida uma fita de papel em dez triângulos equiláteros, dobre bem as arestas e marque a frente e o verso, conforme indicado na Figura 8.14, podendo usar cores, imagens, frases ou o que a criatividade permitir, nos lugares dos números. Mas por que dez triângulos? Estamos trabalhando com a figura de um hexágono regular que pode ser dividido em seis triângulos equiláteros. Se quisermos três faces contaremos  $6 \times 3 = 18$  triângulos, mas o interessante é que cada triângulo da fita conta duas vezes, a frente e o verso, então precisamos só da metade, ou seja, nove triângulos equiláteros e mais um para fazer a colagem. Seguindo esse raciocínio, para seis faces são necessários  $[(6 \times 6) \div 2] + 1 = 19$  triângulos equiláteros na fita.

<sup>1</sup>Com três faces em formato de hexágono regular.

Após a construção e manipulação por parte dos alunos, peça que com uma caneta comecem a desenhar setas seguindo a direção do papel, flexionando, e marcando as setas. Ao final irão perceber que esta superfície não é orientável, pois trata-se de uma faixa de Möbius torcida em um nó trifólio, ou seja, torcida com três giros de  $180^\circ$ .

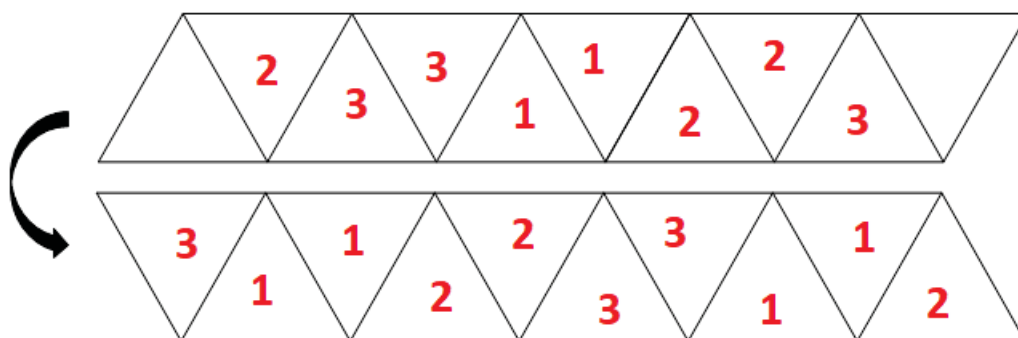


Figura 8.14: Molde para construção de um trihexaflexágono.

Fonte: Elaborada pela autora.

Para a dobra e colagem, acompanhe a sequência apresentada na Figura 8.15, colando os dois triângulos brancos ao final. Agora basta descobrir como flexigar!

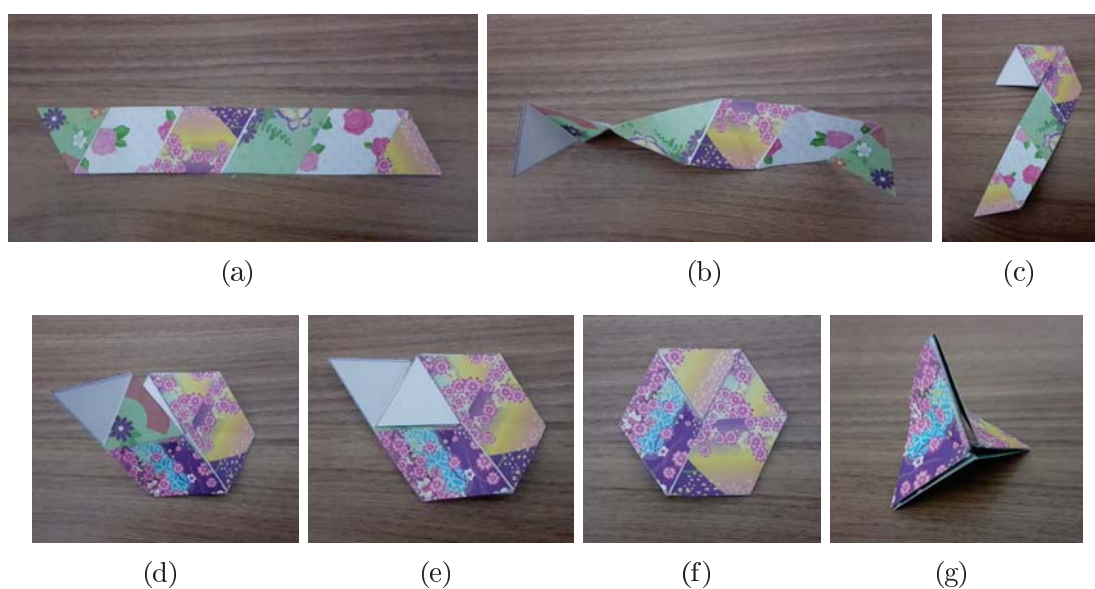


Figura 8.15: Configurações de desenhos no trihexaflexágono.

Fonte: Elaborada pela autora.

Para dobrar o trihexaflexágono e mostrar a face oculta, proceda conforme indicado na Figura 8.16.

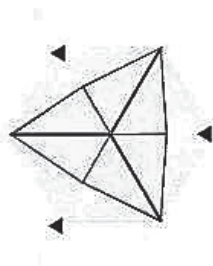


Figura 8.16: Dobrando um trihexaflexágono.

Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que um mesmo trihexaflexágono pode fornecer seis configurações distintas de desenhos, dependendo para qual lado se flexiona.

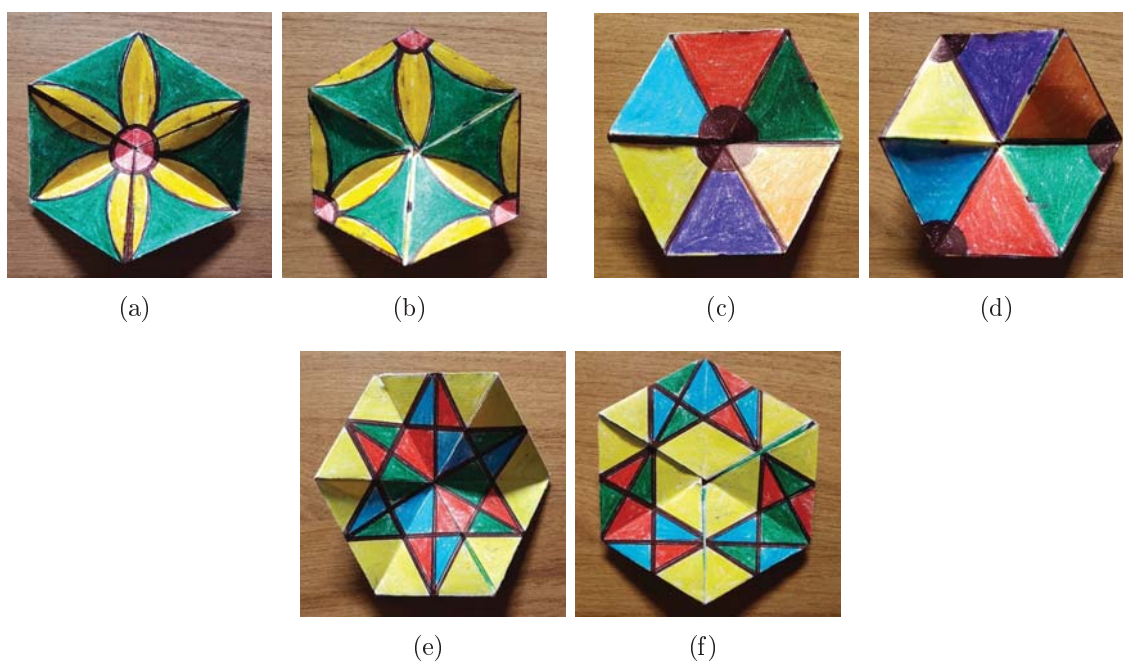


Figura 8.17: Configurações de desenhos no trihexaflexágono.

Fonte: Elaborada pela autora.

O modelo seguinte é de um octaflexágono, que possui números impressos em sua face. Esses números, após sua construção, terão a propriedade de apresentar a soma de cada diagonal principal igual 222. Ele pode ser reproduzido com outros números e outras propriedades diagonais.



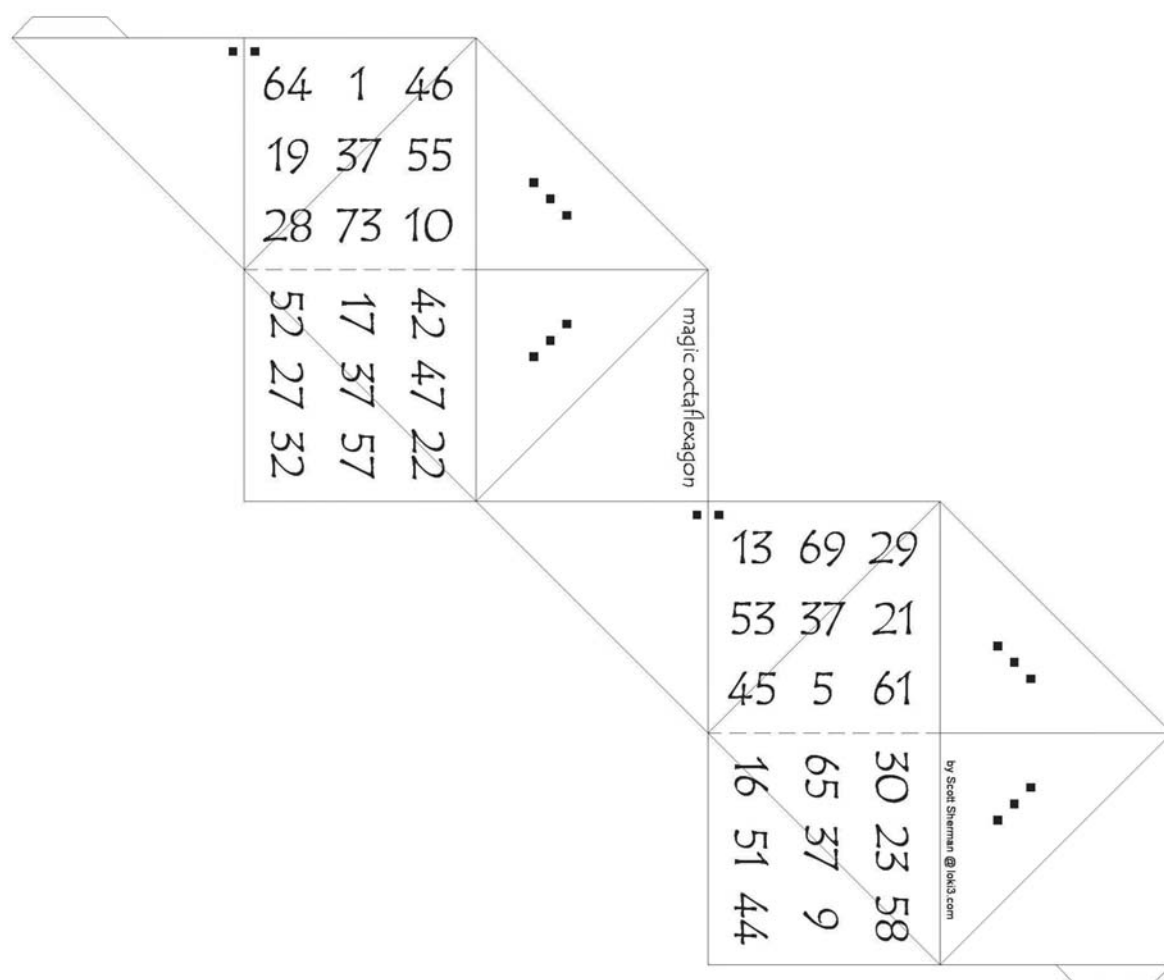
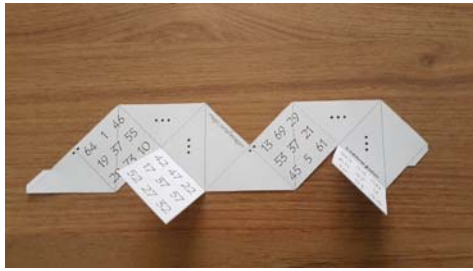
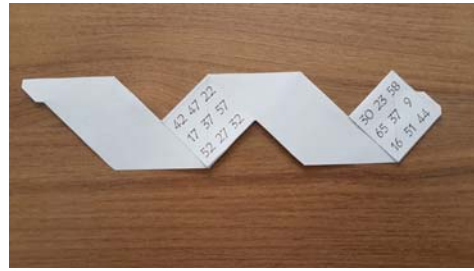


Figura 8.18: Modelo para construir um octaflexagono.

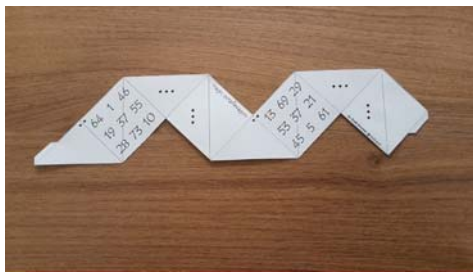
Fonte: <<http://loki3.com/flex/magic/tri-octa.html>>.



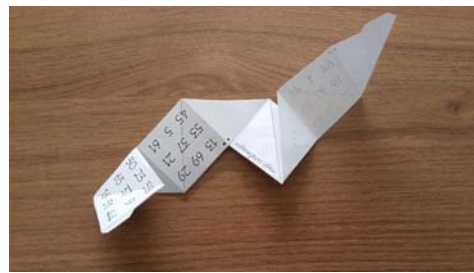
(a) Após cortar o modelo, as linhas tracejadas também devem ser cortadas



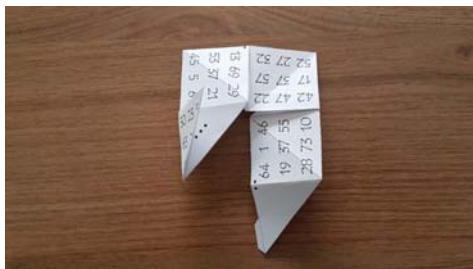
(b) Os quadrados de números conectados apenas por uma aresta devem ser colados na para traz



(c) Os números podem ser escritos no verso, mas o modelo foi concebido assim para facilitar a montagem



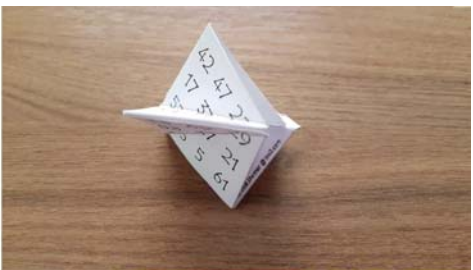
(d) Dobre todos as linhas para formar o vinco no papel, os triângulos adjacentes com três losangos desenhados devem ser dobrados face a face.



(e) Os triângulos adjacentes com um único quadrado devem ser dobrados para traz



(f) As abas extras devem ser coladas, moldando assim um quadrado



(g) Para flexionar, junte as quatro diagonais em dobra vale



(h) Pronto!

Figura 8.19: Octaflexágono.

Fonte: Elaborada pela autora.



Existe uma grande variedade de tipos de flexágonos, e não somente em duas dimensões. Segue um modelo de um tetrahexaflexágono em 3D.

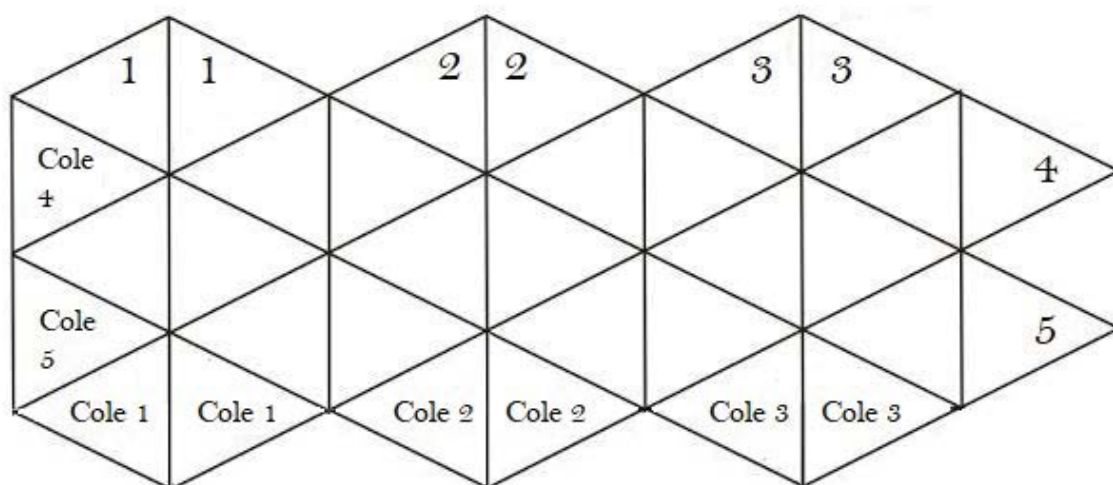


Figura 8.20: Modelo Tetrahexaflexágono em 3D.

Fonte: Elaborada pela autora.



(a) No molde, monte o padrão de desenho



(b) Dobre todas as arestas dos triângulos e cole nos pontos indicados



(c)



(d) Está pronto!

Figura 8.21: Montagem Tetrahexaflexágono em 3D.

Fonte: Elaborada pela autora.

Agora, é possível solicitar que os alunos tentem criar novos modelos de flexágonos a partir das figuras geométricas regulares conhecidas.

**Atividade 8.1.9. Moldando a topologia**

Como sugestão, utilize materiais como massa de modelar, massa de biscuit, massa de EVA, ou qualquer outro material similar e de fácil modelagem, lembrando que essas massas podem ser produzidas de forma caseira, o que provavelmente será estimulante para os alunos.

Essa atividade consiste em modelar objetos como a faixa de Möbius, faixa de Möbius torcia em nó trevo, o toro, o bitoro, uma xícara a partir do toro, um nó trifólio a partir de um toro, e todos esses a partir de uma tira retangular, identificando a orientação dos pontos opostos. Apesar de ser uma atividade elementar, seguindo o princípio de partir sempre da modelagem de uma tira retangular, pode-se trabalhar noções de transformações, conceitos de superfícies isotópicas e homeomorfas, orientação, continuidade, teoria dos nós, além de visualizar e verificar concretamente como essas transformações ocorrem, tudo isso agregado ao ensino da geometria. Esta atividade pode ser adaptada para aplicação em qualquer série do ensino básico.



(a) Moldar um retângulo



(b) Juntar as arestas do comprimento com auxílio de um lápis ou outro objeto



(c)



(d) Juntar as pontas formando o toro.

Figura 8.22: Toro a partir de uma faixa retangular.

Fonte: Elaborada pela autora.



(a) Moldar um retângulo



(b) Juntar as arestas do comprimento



(c) Juntar as pontas formando o toro



(d) Separar as pontas do toro e cruzar em um nó



(e) Juntar as pontas formando um nó trifólio.

Figura 8.23: Nó trifólio a partir de uma faixa retangular.

Fonte: Elaborada pela autora.



(a) Moldar um retângulo



(b) Juntar as pontas dando um giro de  $180^\circ$  em uma das extremidades.

Figura 8.24: Faixa de Möbius a partir de uma faixa retangular.

Fonte: Elaborada pela autora.



(a) Moldar um retângulo

(b) Juntar as arestas do comprimento após efetuar três giros de  $180^\circ$  em um das pontas para enlaçar em nó trifólio.

Figura 8.25: Faixa de Möbius em nó trevo.

Fonte: Elaborada pela autora.



(a) Moldar um retângulo



(b) Juntar as arestas do comprimento



(c) Juntar as pontas formando o toro



(d) Deformar para moldar a xícara tomando o cuidado de deixar o furo e parte do toro para a asa.



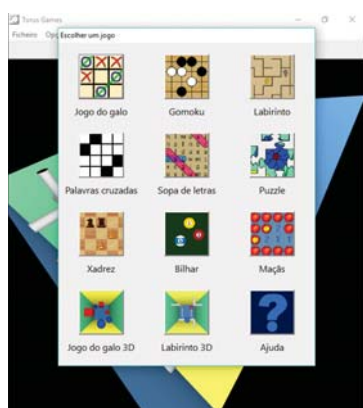
(e)

Figura 8.26: Xícara a partir de uma faixa retangular.

Fonte: Elaborada pela autora.

### Atividade 8.1.10. *Torus Games*

Desenvolvido por Jeff Weeks, o Torus Games apresenta nove jogos em um "universo multiconexo". O jogo do galo, labirintos, palavras cruzadas, sopas de letras, puzzles, xadrez, bilhar, gomoku e maçãs são trabalhados em espaços topológicos como o toro ou a faixa de Klein, ajudando na compreensão de um universo finito sem fronteira. Possui a opção de jogar contra outro jogador ou contra o computador. Por tratar-se de um jogo de licença freeware<sup>2</sup>, pode ser obtido na página do desenvolvedor<sup>3</sup> em versões para Windows, iOS, Android e macOS, com suporte para jogos 3D.



(a) Jogos 2D e 3D



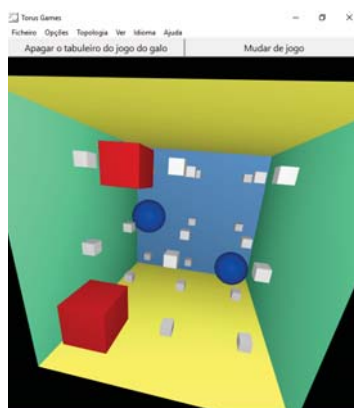
(b) Jogo do Gato



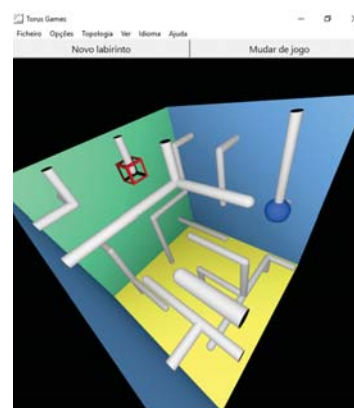
(c) Sopa de letras



(d) Palavras cruzadas



(e) Jogo do galo 3D



(f) Labirinto 3D

Figura 8.27: Jogos projetados na superfície de um toro.

Fonte: Jogo Torus Games.

<sup>2</sup>seu uso não implica o pagamento de licenças de uso ou royalties.

<sup>3</sup><<http://www.geometrygames.org/index.html>>

### 8.1.3 Atividades com nós

Existem diversos *jogos topológicos* relacionados a teoria dos nós, que por vezes são vistos apenas como distração lúdica, mas que se analisados sobre o ponto de vista da topologia, permitem estabelecer noções de interior e exterior, estruturas abertas e fechadas, espaços conexos, continuidade, equivalências e transformações, que auxiliam na resolução do problema, caso exista solução.

Esses jogos geralmente possuem um estrutura de apoio que aparenta não permitir rotas de saída, mas que em certos lugares, apresentam pontos críticos que ao serem trabalhados revelam a solução para o problema. Assim, características como forma e tamanho do objeto, o número de conexões, o tipo de material do qual é constituído, se é rígido ou maleável, se aceita ou não transformações topológicas, influenciam na resolução do problema e permitem que seu estudo auxilie a alcançar o objetivo. Atividades indicadas para aplicação a partir do 4º ano do ensino fundamental.

#### Atividade 8.1.11. *Quebra-cabeça do anel*

Este é um quebra-cabeça fácil de se fazer utilizando materiais como palito de sorvete, barbante e anéis de metal, ou qualquer outro material semelhante, sendo a única restrição, que cada um dos três buracos feito no palito, deve ser menor que cada um dos anéis. O objetivo é mover um anel para o outro lado sem que o barbante seja cortado.

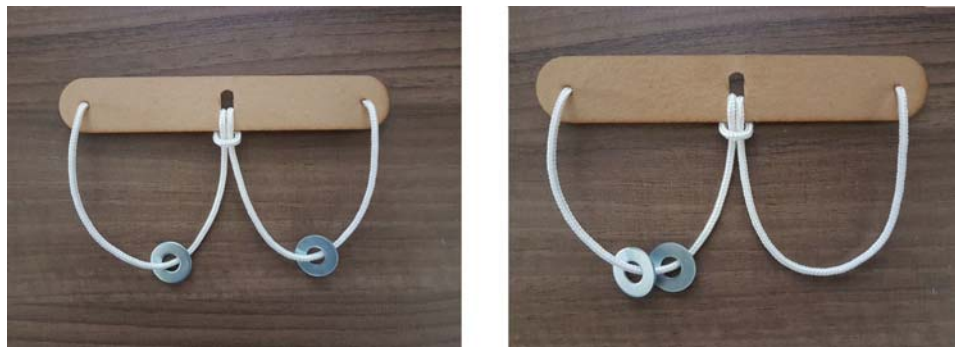


Figura 8.28: Quebra-cabeça do anel.

Fonte: Elaborada pela autora.

#### Atividade 8.1.12. *"Corações enlaçados"*

Nesse outro quebra-cabeça, o desafio consiste em separar as duas peças, sem quebrar ou deformar qualquer uma das partes. Como dito antes, a solução consiste em analisar as propriedades topológicas e achar o ponto crítico da peça base, que nesse caso pode ser qualquer uma das duas.



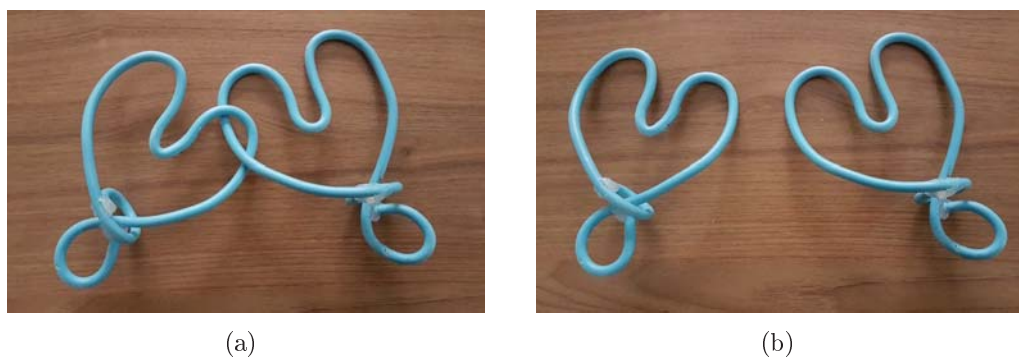


Figura 8.29: Corações enlaçados.  
Fonte: Elaborada pela autora.

#### Atividade 8.1.13. "Enrolados"

Em dupla, cada pessoa deverá ter os pulsos presos pelas extremidades de um barbante, com o barbante cruzado conforme a Figura 8.30. O objetivo é encontrar uma forma de se separar do parceiro sem quebrar os barbantes ou soltá-los das mãos.



Figura 8.30: Enrolados, jogo lúdico.  
Fonte: Elaborada pela autora.

#### Atividade 8.1.14. Desafio do nó

O desafio consiste em agarrar uma fita ou lenço pelos cantos opostos e amarrar um único nó no centro sem soltá-lo. Será possível?

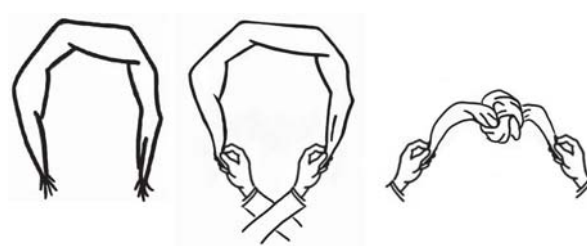


Figura 8.31: Desafio do nó, jogo lúdico.  
Fonte: Elaborada pela autora.

**Atividade 8.1.15.** *Matemática*

Observando a Figura 8.32, será possível transformar a primeira figura na segunda, sem fazer rompimentos?

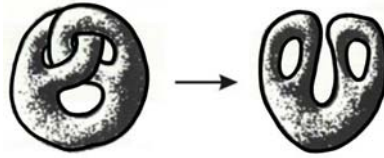


Figura 8.32: Transformação topológica.  
Fonte: SAMPAIO; MALAGUTTI, 2006, p.45.

**Atividade 8.1.16.** *Trança da quarta dimensão*

Fazer uma "*trança da quarta dimensão*", consiste em trançar uma faixa com dois cortes em seu comprimento, conforme mostra a Figura 8.33. Note que a faixa trançada não foi cortada e colada em nenhum ponto. Nessa atividade, o desafio está em descobrir a técnica empregada.

Uma curiosidade sobre esse tipo de trança remonta da década de 1980, quando Henry Slade, um médium americano, utilizava esse método para provar que tinha acesso à quarta dimensão, isto é, o "mundo dos espíritos". Ele dizia que as fitas eram trançadas, mandadas à quarta dimensão para serem colocadas na posição correta e depois trazidas de volta à terceira dimensão. Mas tudo isso feito sob uma mesa, é claro! (STEWART, 2010).

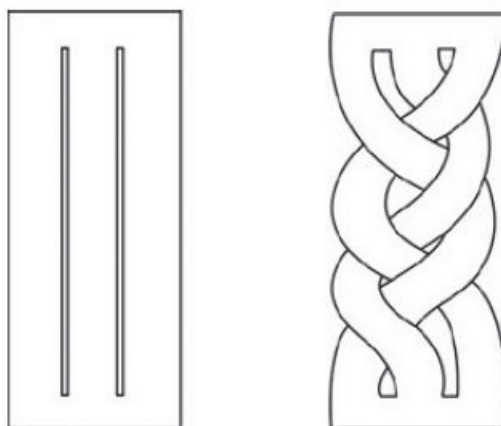


Figura 8.33: Trança da quarta dimensão.  
Fonte: STEWART, 2010, p.278.



### 8.1.4 Continuidade

Continuidade, descontinuidade, caminhos, homotopias, isometrias, homeomorfismos, são conceitos que podem ser introduzidos nas atividades a seguir. Atividades indicadas para aplicação a partir do 5º ano do ensino fundamental.

#### Atividade 8.1.17. Jogo da serpente

Em uma folha de papel desenhe um tabuleiro  $8 \times 8$ , com uma cruz no canto superior esquerdo e removendo o canto inferior direito. As peças permitidas são as constantes na Figura 8.34, que podem ser rotacionadas livremente. Ao lado da cruz desenhada no tabuleiro, o primeiro jogador pode desenhar qualquer um das figuras permitidas na horizontal ou vertical. Os jogadores deverão se revezar dando continuidade ao desenho da serpente, sendo permitido a serpente cruzar-se sobre si mesma. Perderá o jogo, o primeiro jogador que fizer com que a serpente chegue à borda do tabuleiro, incluindo a reentrância no canto inferior direito, sem opção de movimento posterior.

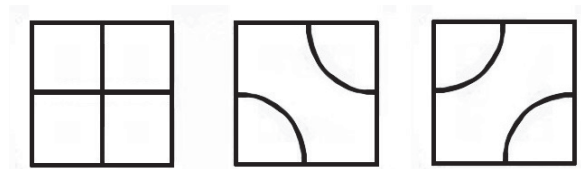


Figura 8.34: Peças permitidas no jogo.  
Fonte: Elaborada pela autora.

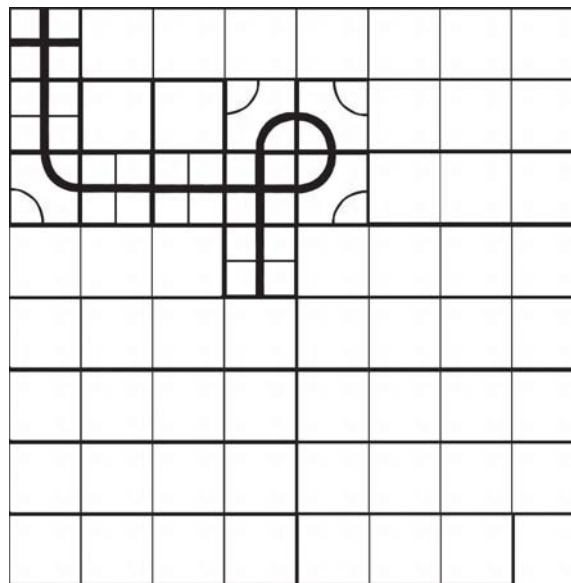


Figura 8.35: Exemplo de jogadas.  
Fonte: Elaborada pela autora.

**Atenção!** Se a borda inferior do tabuleiro não for retirada, caso a quantidade de linhas e colunas sejam pares, o primeiro jogador será beneficiado e poderá ganhar o jogo utilizando estratégias baseadas em dominós. Para linhas e colunas ímpares, o segundo jogador pode vencer sempre, utilizando estratégia similar à primeira situação.

**Atividade 8.1.18.** *Como fazer???*

As seguintes atividades possibilitam a discussão sobre equivalência de superfícies, continuidade, descontinuidade, isometrias e homeomorfismos. A existência da continuidade é essencial para que possamos considerar a equivalência entre superfícies, pois através das deformações contínuas, podemos ir de uma superfície para à outra quantas vezes quisermos. Quando rompemos ou cortamos uma superfície, geramos uma descontinuidade, criando uma nova superfície, que não poderá ser revertida na superfície original. O corte só é permitido, quando for possível voltar a colar as peças, de modo que se ajustem ao longo da linha de corte original, o que pode ser visto quando transformamos um toro em um nó trifólio.

a) *Para passar por um buraco numa folha de papel.*

Em uma folha de papel sulfite, tamanho A4, é possível fazer um buraco de forma que uma pessoa passe por ele?



Figura 8.36: Passando pelo buraco de uma folha de papel???

Fonte: Elaborada pela autora.

*b) Uma folha de papel com aba central.*

Em uma folha de papel sulfite, tamanho A4, é possível fazer uma aba central conforme mostra a Figura 8.37? Apresente um modelo para exposição, mas não permita que ele seja manipulado.



Figura 8.37: Padrão de corte.

Fonte: Elaborada pela autora.

## 8.2 Sugestões e soluções das atividades

**Atividade 8.1.3:** Dê um nó na ponta da fita, achatando-o com cuidado para não amassar. Depois vá dobrando a fita em torno das arestas, escondendo a ponta que sobrar. Essa é a dobradura usada para fazer uma estrela de origami, bastando achatar as arestas do pentágono com cuidado para moldar a estrela.

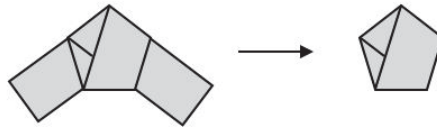


Figura 8.38: Solução para transformar uma fita em um pentágono.

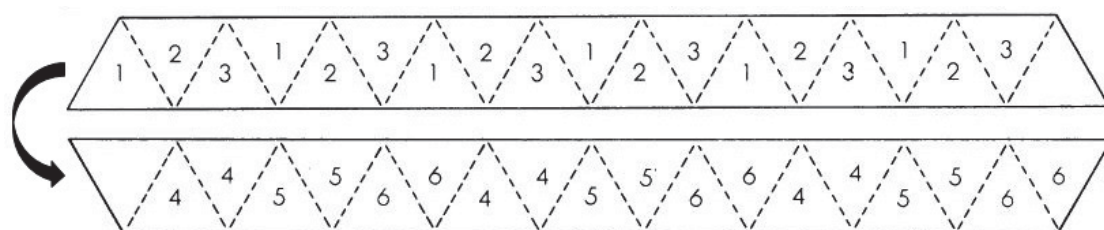
Fonte: Elaborada pela autora.

**Atividade 8.1.7:** Na Figura 8.12, a faixa 1 é uma faixa de Möbius e sendo uma superfície não-orientável possui apenas um lado, o que faz com que a cor que se inicie a pintura percorra toda a faixa até voltar a origem. A faixa 2 possui dois lados e apenas a torção de  $360^\circ$  feita em sua construção a diferencia de uma faixa comum.

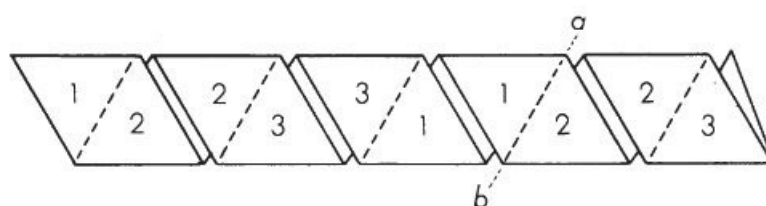
Ao cortar a faixa 1 ao meio, ela deixa de ser uma faixa de Möbius para ser uma faixa com a mesma orientação da faixa 2, mas com o dobro de seu comprimento original, já que a torção inicial que era de  $180^\circ$  passou a ser de  $360^\circ$  após o corte. A faixa 2 foi dividida em duas faixas com a mesma orientação e comprimento, mas entrelaçadas entre si.

A faixa 1, após o corte em torno de um terço da largura, transforma-se em duas faixas entrelaçadas, uma sendo de Möbius e outra com dois lados contendo mais torções. A faixa 2 divide-se em duas faixas iguais em comprimento e número de torções, diferindo apenas na largura.

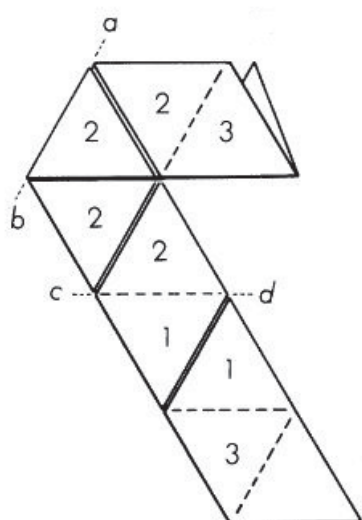
Na última faixa obtemos uma faixa de superfície não-orientável, o que pode ser verificado pintando-a. Note que depois no primeiro giro de  $180^\circ$  obtemos uma faixa de Möbius, no segundo giro de  $180^\circ$  uma faixa com dois lados, no terceiro giro de  $180^\circ$  temos novamente uma faixa de um lado só. Se continuarmos assim sucessivamente, a cada giro de  $360^\circ$  após o primeiro giro de  $180^\circ$  que originou a faixa de Möbius, continuaremos com uma superfície de um lado só.

**Atividade 8.1.8:** Modelo de Hexahexaflexágono

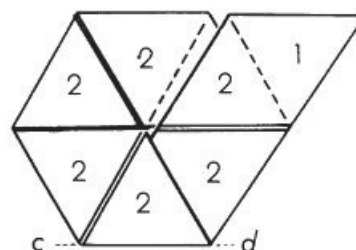
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.39: Modelo hexahexaflexágono.

Fonte: GARDNER, 1988, p.4.

**Atividade 8.1.9:** Receita de massa para modelar.



Figura 8.40: Receita de massa para modelar.

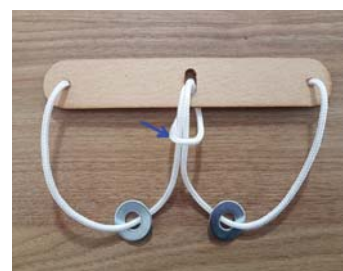
Fonte: Elaborada pela autora.

*Atividade 8.1.11:*

(a) Modelo



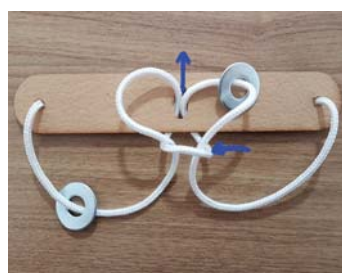
(b) Detalhe da confecção



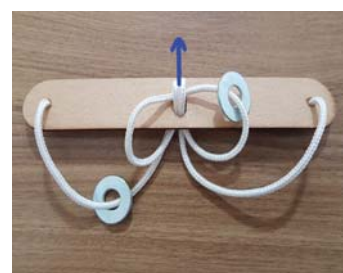
(c) Puxe o centro do laço



(d) Deslize o anel para o centro



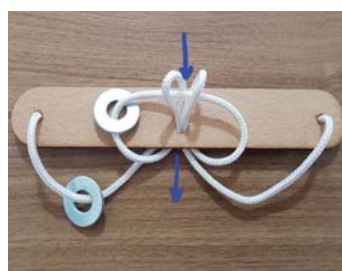
(e) Puxe as duas cordinhas de modo que o laço central passe pelo buraco



(f)



(g) Puxe as duas cordinhas do centro



(h) Passe o anel pelas cordinhas do centro



(i) Puxe as cordinhas centrais de volta para dentro do buraco



(j) Deslize o anel por dentro do laço central



(k)



(l) Pronto!

Figura 8.41: Solução do quebra-cabeça do anel.

Fonte: Elaborada pela autora.

**Atividade 8.1.12:** Para confecção das peças, pode-se usar arame ou fio de luz rígido, para que as partes não deformem com o manuseio.

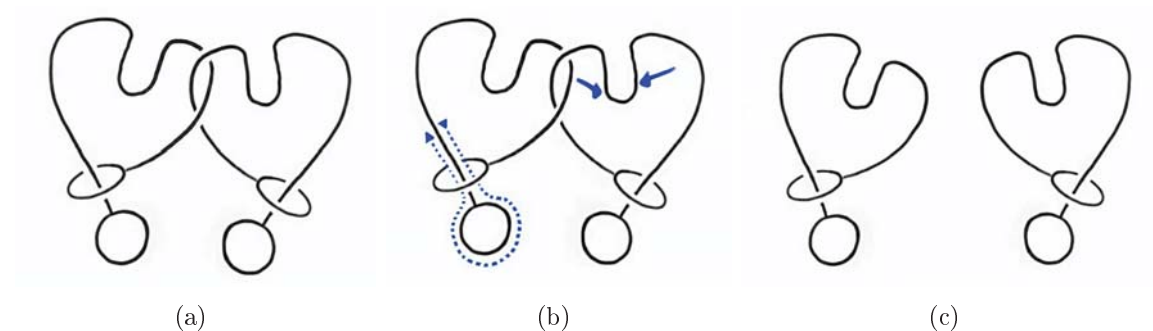


Figura 8.42: Solução do quebra-cabeça corações enlaçados.

Fonte: Elaborada pela autora.

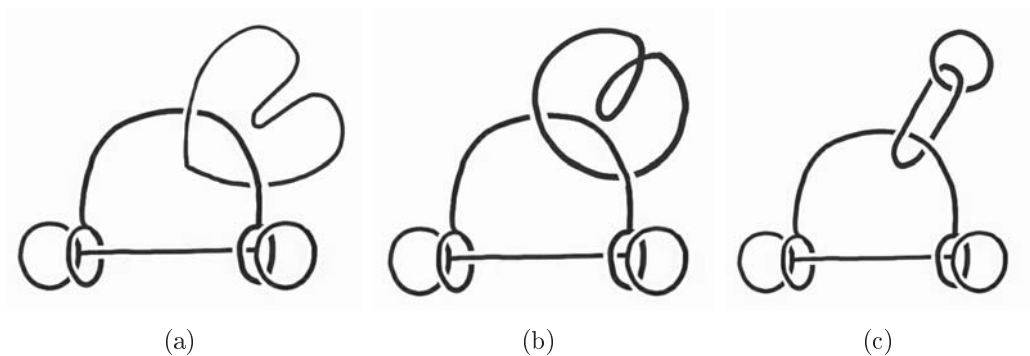


Figura 8.43: Modelos de quebra-cabeça.

Fonte: Elaborada pela autora.

**Atividade 8.1.13:** Como sugestão, um dos integrantes da dupla deve passar o barbante do parceiro por dentro de uma de suas "algemas", contornar a mão e por último puxar o barbante livre.

**Atividade 8.1.14:** Segure a ponta oposta a um dos braços, enquanto o outro passa por baixo da fita, contorna o braço como se fosse cruzá-lo para pegar a outra ponta que está solta conforme a figura 8.44. Puxe os braços descruzando-os sem soltar a fita e o nó estará feito. Não utilize uma fita ou lenço muito curto.





Figura 8.44: Solução do desafio do nó.  
Fonte: Elaborada pela autora.

*Atividade 8.1.15:*

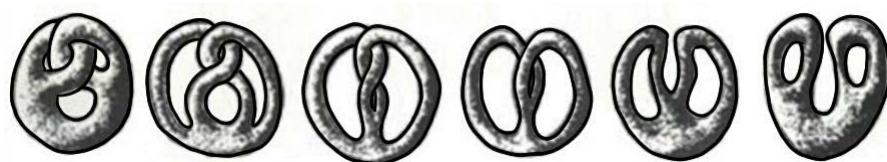


Figura 8.45: Solução do problema proposto na Figura 8.32.  
Fonte: SAMPAIO; MALAGUTTI, 2006, p.45.

*Atividade 8.1.16:* Método para trançar a faixa.

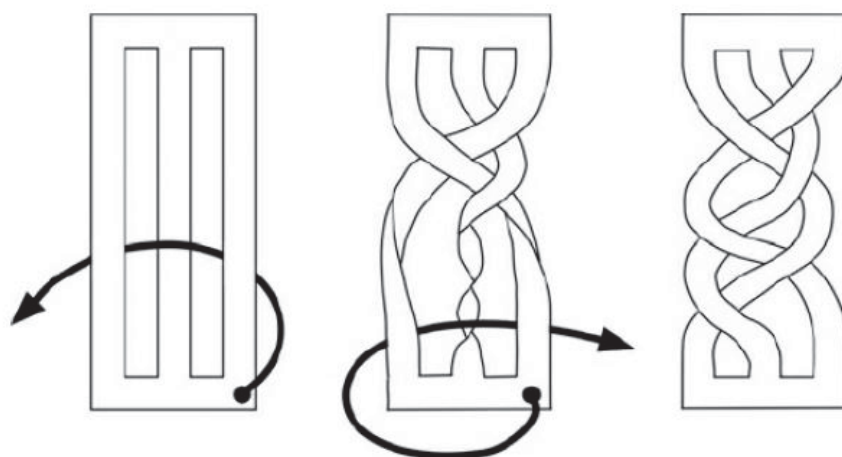


Figura 8.46: Solução do problema proposto na Figura 8.33.  
Fonte: SAMPAIO; MALAGUTTI, 2006, p.45.

**Atividade 8.1.18:**

a) Primeiramente, dobre a folha ao meio. Deixando um centímetro de borda dos dois lados faça um recorte rente à dobra do papel, fazendo no centro do papel sulfite uma abertura longa e estreita. Faça recortes em linha reta como ilustrado na Figura 8.47. Após abrir a folha cuidadosamente um grande buraco surgirá.

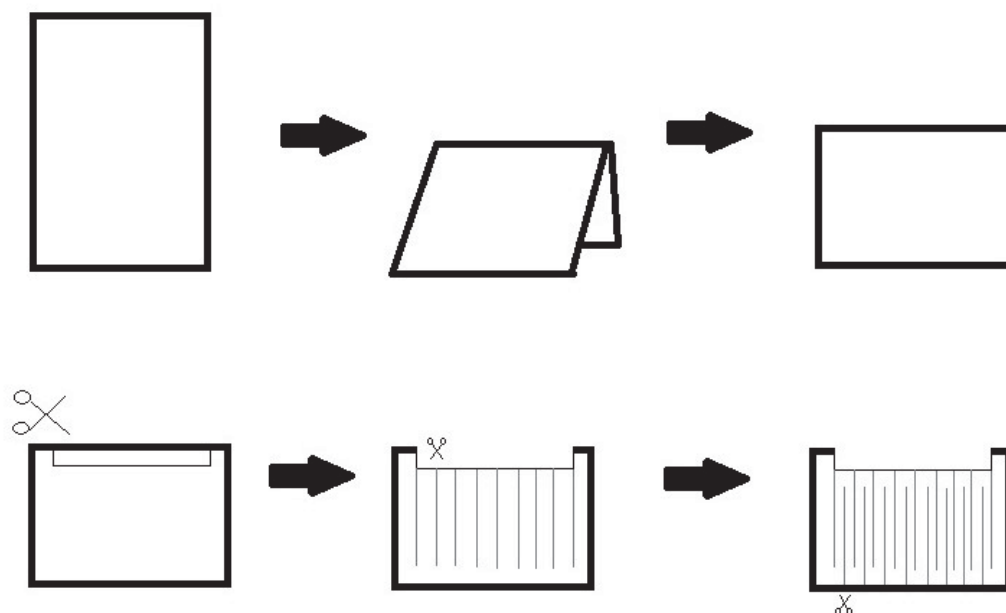
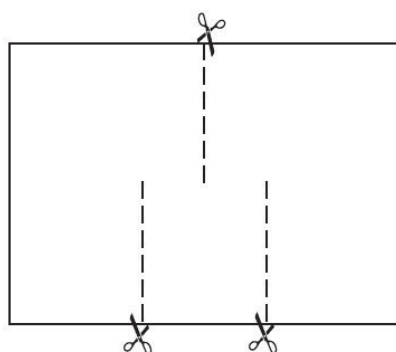


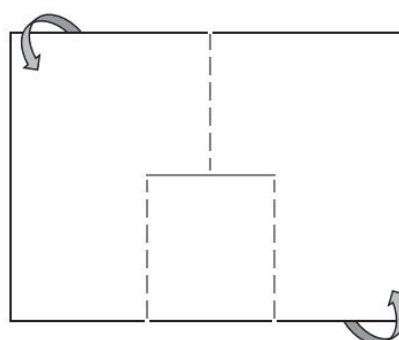
Figura 8.47: Solução Atividade 8.1.18.a.

Fonte: Elaborada pela autora.

b)



(a) Corte nas linhas tracejadas



(b) Marque o vinco no centro da folha, depois gire as laterais em sentidos contrários.

Figura 8.48: Solução Atividade 8.1.18.b.

Fonte: Elaborada pela autora.

## 9 Considerações finais

Este trabalho foi idealizado com base no minicurso "Do concreto para o abstrato: formalizando conceitos Topológicos através de atividades práticas", elaborado e aplicado por mim, sob a orientação do Prof. Dr. José Roberto Nogueira, durante o XII Simpósio de Matemática - SMAT 2017, realizado no período de 25 a 28 de outubro de 2017, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP.

O minicurso em questão, contou principalmente com a participação de alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, abordando de forma prática conceitos básicos de topologia, obtendo uma resposta positiva dos participantes quanto a realização de atividades práticas para introdução de conceitos. Surgiu assim, a ideia de pesquisar sobre o tema para aplicação no ensino básico, buscando despertar o interesse pela topologia desde as séries iniciais.

Todo material aqui compilado, tem o objetivo de auxiliar docentes no ensino da Topologia para alunos do ensino básico, além de oferecer aos interessados no assunto, uma base para um futuro aprofundamento teórico.

As atividades sugeridas, visam introduzir conceitos básicos, comuns no cotidiano dos alunos, mas que acabam sendo relegados a segundo plano, por não constarem explicitamente da base curricular.

As mudanças culturais, sociais, tecnológicas e científicas, exigem que o educador detenha uma nova postura frente aos métodos tradicionais da ensino, buscando novas práticas, através de ações que sejam significativas para os alunos e os incentivem a atuar como protagonistas no processo de ensino-aprendizagem.

Assim, com sentimento de satisfação e gratidão por toda a jornada percorrida, finalizo este trabalho, com o desejo de que atue como ferramenta para construção de novas práticas educativas e que desperte, nos educandos, o prazer para o estudo da topologia.

# Referências

- ALSINA, C.; NELSEN, R. B. *Charming proofs: a journey into elegant mathematics*. [S.l.]: Mathematical Association of America, 2010.
- BASSI, A. Da importância da topologia na matemática moderna. *Gazeta de Matemática*, 1945.
- BERGAMINI, D. *As matemáticas*. Rio de Janeiro: José Olympio, 1969.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- BRASIL. Resolução CNE CEB nº 2, de 30 de janeiro de 2012. *Define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, 2012.
- BRASIL. Resolução CNE/CP 2, de 22 de dezembro de 2017. *Institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular, a ser respeitada obrigatoriamente ao longo das etapas e respectivas modalidades no âmbito da Educação Básica*, 2017.
- BRASIL, M. E. C. SEB. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. *Bases Legais*. Brasília: MEC, SEB, 2000.
- BRASIL, M. E. C. SEB. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, SEB, 2000.
- BRASIL, M. E. C. SEB. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, SEB, 2006.
- COLLI, E. *Introdução à Teoria dos Nós*. 2008.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* 5. ed. Rio de Janeiro: RJ: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.
- DOMINGUES, H. H. *Espaços métricos e introdução à topologia*. São Paulo, SP: Atual Editora, 1982.
- EDUCAÇÃO, C. P. *Os Tipos de Origamis*. 20?? <<https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/direito/os-tipos-de-origamis/60707>>. Acesso em: 14 jun. 2018.
- EVES, H. *Introdução á história da matemática*. Campinas, SP: Trad. Hygino H. Domingues. Editora UNICAMP, 2004.
- FARMER, D. W.; STANFORD, T. B. *Nós e Superfícies*. 1. ed. [S.l.]: Gradiva, 2003.
- FRIBERG, J. Methods and traditions of babylonian mathematics: Plimpton 322, pythagorean triples, and the babylonian triangle parameter equations. *Historia Mathematica*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 277–318, 1981.

- GARDNER, M. *Mathematics, Magic and Mystery*. 1. ed. [S.l.]: Dover Publications, INC., New York., 1956.
- GARDNER, M. *Hexaflexagons and other mathematical diversions: The first Scientific American book of puzzles and games*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1988.
- GRANON-LAFONT, J. *A topologia de Lacan*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Jorge Zahar Ed., 1990.
- HATCHER, A. Topology of numbers. *Unpublished manuscript, in preparation*, 2002.
- HIGA, A. *Tipos de Origami*. 2011. <<http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/tipos-de-origami.html>>. Acesso em: 14 jun. 2018.
- KATZ, V. J. *A History of Mathematics: an Introduction*. 2. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 1998.
- LAMB, E. *A Few of My Favorite Spaces: The Möbius Strip*. 2016. <<https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/a-few-of-my-favorite-spaces-the-moebius-strip/>>. Acesso em: 09 jul. 2017.
- LIMA, E. L. O teorema de euler sobre poliedros. *Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro*, n. 2, p. 57–74, 1985.
- LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro, RJ: Editora SBM, 2009.
- MONTROYA, C.; FLORES, P. Los puzzles en alambre como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, v. 6, n. 3, p. 665–684, 2003.
- MONTROLL, J. *A plethora of polyhedra in origami*. [S.l.]: Dover Publications, INC., New York., 2002.
- MUNKRES, J. R. *Topology*. [S.l.]: Prentice Hall, 2000.
- NASIO, J. D. *Introdução á topologia de Lacan*. [S.l.]: Trad. Claudia Berliner. Rio de Janeiro: Zahar, 2000.
- NÉBIAS, C. Formação dos conceitos científicos e práticas pedagógicas. *Interface-Comunicação, Saúde, Educação, SciELO Public Health*, v. 3, n. 4, p. 133–140, 1999.
- NEUGEBAUER, O. *The exact sciences in antiquity*. New York: Dover Publications, 1969. v. 9.
- NISHIYAMA, Y. Miura folding: Applying origami to space exploration. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 79, n. 2, p. 269–279, 2012.
- O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *A history of Topology*. 1996. <[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Topology\\_in\\_mathematics.html#27](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Topology_in_mathematics.html#27)>. Acesso em: 11 jul. 2017.
- O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *August Ferdinand Möbius, Biography*. 1997. <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mobius.html>>. Acesso em: 11 jul. 2017.

- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Leonhard Euler, Biography*. 1998.  
<<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html>>. Acesso em: 11 jul. 2017.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Felix Christian Klein, Biography*. 2003.  
<<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Klein.html>>. Acesso em: 11 jul. 2017.
- SAMPAIO, J. C.; MALAGUTTI, P. L. *Mágicas, matemática e outros mistérios*. [S.l.]: Edufscar, 2006.
- SMITH, D. E. *History of mathematics*. New York: Dover Publications, 1958. v. 1.
- SOSSINSKY, A. *Knots Mathematics With a Twist*. London, England: Havard University Press, 2002.
- STAROSTIN, E. L.; HEIJDEN, G. H. M. van der. *The shape of a Möbius strip*. 2007.  
<<https://www.nature.com/nmat/journal/v6/n8/pdf/nmat1929.pdf>>. Acesso em: 14 jul. 2017.
- STEWART, I. *Almanaque das curiosidades Matemáticas*. Rio de Janeiro: Trad. Diego Alfaro. Jorge Zahar Ed., 2009.
- STEWART, I. *Incríveis passatempos matemáticos*. Rio de Janeiro: Trad. Diego Alfaro. Jorge Zahar Ed., 2010.
- STEWART, I. *Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*. Rio de Janeiro: Trad. George Schlesinger. Jorge Zahar Ed., 2014.
- TAHAN, M. *As maravilhas da matemática*. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1973.
- VILCHES, M. A. *Topologia Geral*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática e Estatística UERJ, 2000.