

Cláudio Henrique Cerqueira Costa Basquerotto

Aplicações das Simetrias de Lie na Dinâmica de Sistemas Mecânicos

Ilha Solteira

2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

FACULDADE DE ENGENHARIA

CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Cláudio Henrique Cerqueira Costa Basquerotto

Aplicações das Simetrias de Lie na Dinâmica de Sistemas Mecânicos

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Campus de Ilha Solteira - Unesp como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Especialidade: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Samuel da Silva

Coorientador: Prof. Edison Righetto

Ilha Solteira

2018

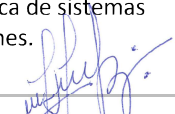
FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

B317a Basquerotto, Cláudio Henrique Cerqueira Costa.
Aplicações das simetrias de lie na dinâmica de sistemas mecânicos / Cláudio Henrique Cerqueira Costa Basquerotto. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018
99 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2018

Orientador: Samuel da Silva
Co-orientador: Edison Righetto
Inclui bibliografia

1. Simetrias de Lie. 2. Teorema de Noether. 3. Dinâmica de sistemas mecânicos. 4. Funções elípticas de Jacobi. 5. Moving frames.


João Josué Barbosa
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

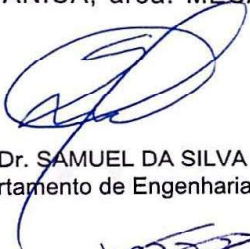
TÍTULO DA TESE: Aplicações das Simetrias de Lie na Dinâmica de Sistemas Mecânicos

AUTOR: CLÁUDIO HENRIQUE CERQUEIRA COSTA BASQUEROTTO

ORIENTADOR: SAMUEL DA SILVA

COORIENTADOR: EDISON RIGHETTO

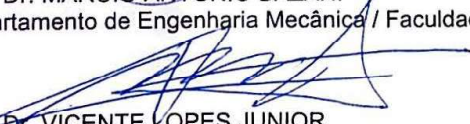
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA MECÂNICA, área: MECÂNICA DOS SÓLIDOS pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. SAMUEL DA SILVA

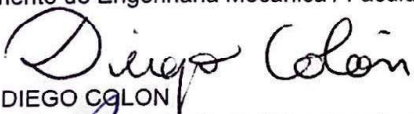
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI

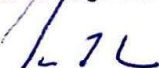
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. DIEGO COLON

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle / Universidade de São Paulo/Poli


PROFESSOR DOUTOR HANS INGO WEBER

Departamento de Engenharia Mecânica / PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Ilha Solteira, 20 de abril de 2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me ajudado e me dado forças para chegar até aqui e pelos milagres e maravilhas que Ele operou e opera na minha vida.

Agradeço também à minha esposa Renata pela força e incentivo que tem me dado desde o início dos meus estudos como graduando e pós-graduando. Se não fosse por ela acho que não conseguiria ter chegado até aqui. A Renata sempre me aconselhou muito e sempre me deu forças para continuar e persistir por um determinado objetivo. Durante os seis meses que passamos em Minneapolis, foi minha companheira e auxiliadora em tudo o que precisei.

À minha família por ter acreditado em mim, principalmente meus pais Samuel e Vânia, que sempre depositaram grande confiança me dizendo que o estudo seria uma grande ferramenta de crescimento para a minha vida. Meu irmão Guilherme por ser um grande amigo e companheiro para todas as horas que precisei. Minhas avós Antônia, a qual já não está mais entre nós, e Annahir pelo carinho e auxílio prestado em tudo.

Ao professor Samuel da Silva por estes 6 anos de trabalho e amizade. Desde o início do mestrado ele vem me mostrando que todo esforço que fazemos no final há sempre uma recompensa. Vários objetivos da minha vida consegui alcançar graças a ele. Obtive muitos conhecimentos no mestrado e principalmente no doutorado. Graças ao seu incentivo conheci outro país e abri muitos horizontes novos na minha vida. Sou grato pelo voto de confiança que ele me deu e espero ter correspondido. Pela sua orientação, hoje possui uma visão mais crítica sobre as coisas e sobre pesquisa.

Ao professor Edison Righetto pela amizade e coorientação deste trabalho. Ele sempre me ajudou a resolver alguns problemas e dificuldades tentando vê-las de uma maneira mais simples e desta forma facilitar sua compreensão. Agradeço também pelas vezes que fui recebido e acolhido por ele e por sua esposa Luzia para o desenvolvimento desta tese e para um almoço de domingo.

Ao professor Peter J. Olver por ter me recebido e me acolhido em Minneapolis durante o período sanduíche que realizei na *University of Minnesota* e por toda a sua contribuição direta para o desenvolvimento e finalização desta tese. Agradeço muito ao Adrián Ruiz Servan pela ajuda no período em que fiquei em Minneapolis, por ter me ensinado a manipular o Maple, aplicar as simetrias de Lie para redução de ordem e pelas várias conversas que tínhamos durante o almoço em Minneapolis para passar as horas. Ao Bjorn Berntson por ter me ajudado com as funções elípticas de Jacobi e ao Jimmy Broomfield pelo esclarecimento e contribuição com a parte sobre referencial móvel.

Aos amigos e colegas do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT) e filhos do Manuhell pelas ajudas e conversas que em momentos de muito stress foram de grande proveito para descanso e boas risadas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos que proporcionou dedicação integral ao curso e pelo período sanduíche de 6 meses na *University of Minnesota*.

Ao CNPq Edital Universal Processo 04463/2016-9 que tem como grande objetivo popularizar as simetrias de Lie no Brasil.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta e indireta para o desenvolvimento deste trabalho.



UNIVERSITY OF MINNESOTA

Resumo

Os métodos envolvendo simetria têm grande importância para o estudo das equações diferenciais decorrentes de áreas como a matemática, física, engenharia entre muitas outras. A existência de simetrias em equações diferenciais pode gerar transformações em variáveis dependentes e independentes que podem facilitar a integração. Em especial, Sophus Lie desenvolveu no século XIX uma forma de extração de simetrias que podem ser usadas efetivamente para revelar as integrais primeiras, ou seja, as constantes de movimento, que muitas vezes podem estar escondidas. Estes invariantes podem em algumas situações ser identificados pelo teorema de Noether ou a partir de manipulações das próprias equações com transformações de Lie. Assim, nesta tese foi proposto utilizar as simetrias de Lie para aplicação em problemas da dinâmica de sistemas mecânicos. As simetrias de Lie são aplicadas em dois problemas clássicos, primeiro em um pêndulo oscilando em um aro rotativo e em seguida em um pião simétrico com movimento de precessão estacionária com um ponto fixo. No primeiro problema foi realizada uma redução de ordem para solução por quadraturas da equação de movimento. Já no segundo foram mostradas as relações entre os invariantes e as leis de conservação extraídas das simetrias de Lie. Uma outra análise foi realizada através da teoria de referencial móvel, mostrando a possibilidade de outras aplicações das simetrias de Lie. Uma das aplicações desta teoria, também é a redução de ordem das equações diferenciais resultantes. Com isso os referenciais móveis foram calculados para os problemas do pêndulo oscilando em um aro rotativo, pião simétrico e apresentando uma aplicação em um problema de vínculo não-holonomo. A partir disto foi possível reduzir a ordem das equações e obter a solução analítica das mesmas. Com isto, esta tese buscou mostrar a aplicação das simetrias de Lie em problemas de dinâmica de sistemas mecânicos através de uma linguagem acessível e que motive a outros engenheiros a se interessarem pelo tema.

Palavras-chave: Simetrias de Lie. Teorema de Noether. Dinâmica de sistemas mecânicos. Funções elípticas de Jacobi. *Moving frames*.

Abstract

The methods involving symmetry are of great importance for the study of the differential equations arising from areas such as mathematics, physics, engineering among many others. The existence of symmetries in differential equations can generate transformations in dependent and independent variables that may be easier to integrate. In particular, Sophus Lie developed in the nineteenth century a form of extraction of symmetries that can be used effectively to reveal the first integrals, that is, the motion constants, which can often be hidden. These invariants can in some situations be identified by the Noether theorem or from manipulations of the equations themselves with Lie transformations. Thus, in this thesis it was proposed to use the Lie symmetries for application in problems of the dynamics of mechanical systems. The Lie symmetries are applied in two classic problems, first in a bead on a rotating wire hoop and then in a symmetric top with stationary precession with a fixed point. In the first problem, a reduction of order of the equation of motion was performed by quadratures. In the second one, the relations between the invariants and the conservation laws extracted from the Lie symmetries were shown. Another analysis was performed through the theory of moving frames, showing the possibility of other applications of Lie symmetries. One of the applications of this theory is also the order reduction of the resulting differential equations. Thus, moving frames were calculated for the bead on a rotating wire hoop, symmetric top and showing an application in a nonholonomic problem. From this it was possible to reduce the order of the equations and to obtain the analytical solution of the same ones. So, this thesis sought to show the application of Lie symmetries in problems of dynamics of mechanical systems through an accessible language and that motivate other engineers to take an interest in the subject.

Keywords: Lie symmetries. Noether theorem. Dynamics of mechanical systems. Jacobi elliptic functions. *Moving frames*.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Fluxograma representativo de como obter os geradores infinitesimais de forma geral para uma EDO.	29
Figura 2 – Pêndulo oscilando em um aro rotativo.	35
Figura 3 – Pião axisimétrico com um ponto fixo.	39
Figura 4 – Construção geométrica do referencial móvel.	48
Figura 5 – Pêndulo simples.	51
Figura 6 – Trajetória do homem e do cachorro	55
Figura 7 – Simetrias no triângulo equilátero.	77
Figura 8 – Rotação de um aro no espaço.	78
Figura 9 – Círculo unitário.	80
Figura 10 – Elipse.	81

Lista de tabelas

Tabela 1	– Geradores infinitesimais do oscilador harmônico.	31
Tabela 2	– Geradores infinitesimais do pião.	41
Tabela 3	– Geradores infinitesimais do cachorro.	58
Tabela 4	– Tabela de multiplicação.	76
Tabela 5	– Tabela de multiplicação para o triângulo equilátero.	77
Tabela 6	– Bibliotecas e comandos do Maple.	85

Lista de símbolos

$\mathcal{A}$	Constante de movimento
A	Centro de massa
$\mathcal{B}$	Base móvel
$*$	Operação de um grupo
cn	Cosseno elíptico
$\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_x$	Derivada total
dn	Função elíptica de Jacobi
$\mathcal{F}$	Funcional
g	Aceleração da gravidade
$\mathcal{G}$	Grupo
$\mathfrak{g}$	Mapa exponencial
I	Componente do tensor de inércia
$\mathbb{I}$	Tensor de inércia
$\mathcal{I}$	Base inercial
K	Seção transversal
k	Rigidez
k	Módulo elíptico
$\mathcal{L}$	Lagrangiana
ℓ	Comprimento
M	Variedade
m	Massa
O	Ponto de fixação do pião
$q = q(t)$	Coordenada generalizada
sn	Seno elíptico

t	Variável independente
$\mathcal{T}$	Energia potencial
T_θ	Matriz de rotação
$\mathcal{U}''$	Operador de simetria
$\mathcal{V}$	Energia cinética
$\mathcal{X}$	Gerador infinitesimal
$\mathfrak{w}, \mathfrak{y}$	Novas coordenadas
x, y, z, X, Y e Z	Eixos

Letras gregas

$\beta^{(1)}$	Prolongamento de primeira ordem
$\beta^{(2)}$	Prolongamento de segunda ordem
$\beta^{(k)}$	Prolongamento de ordem k
γ	Vetor tangente
ε	Parâmetro contínuo
θ	Ângulo de nutação
$\dot{\theta}$	Velocidade angular de nutação
ψ	Ângulo de precessão
$\dot{\psi}$	Velocidade angular de precessão
ϕ	Ângulo de spin
$\dot{\phi}$	Velocidade angular de spin
α, μ	Funções analíticas que realizam transformações
η, ξ	Funções infinitesimais
ρ	Referencial móvel
Υ	Coordenada utilizada para realizar projeção

ω	Velocidade angular
ω^2	Frequência natural não amortecida

Abreviações

EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Contribuições	11
1.2	Objetivo	12
1.3	Organização do trabalho	12
2	APLICAÇÕES DAS SIMETRIAS DE LIE	14
2.1	Simetrias de Lie	14
2.2	Aplicações	14
2.3	Considerações finais	23
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA EM SIMETRIAS DE LIE .	25
3.1	Transformação infinitesimal	25
3.2	Geradores infinitesimais	25
3.3	Prolongamento das transformações e seus geradores	26
3.4	Teorema de Lie	27
3.5	Redução de ordem utilizando os pontos de simetria na forma característica	28
3.6	Exemplo de aplicação em uma equação diferencial ordinária	29
3.7	Considerações finais	33
4	AS SIMETRIAS DE LIE EM PROBLEMAS DA DINÂMICA	34
4.1	Pêndulo oscilando em um aro rotativo	34
4.2	Pião Axisimétrico com um ponto fixo	38
4.3	Teorema de Noether	41
4.4	Redução de ordem e solução analítica da equação do movimento do pião	42
4.5	Considerações finais	45
5	AS SIMETRIAS DE LIE NA TEORIA DE REFERENCIAL	
	MÓVEL	47
5.1	Aspectos básicos na teoria de referencial móvel	47
5.2	Ação	49
5.3	Ação de um grupo infinitesimal	50
5.4	Invariância	51
5.5	Referencial móvel de um pêndulo simples	51
5.6	Utilização de referencial móvel para redução da ordem da equação do pêndulo oscilando em um aro rotativo	52

5.7	Utilização de referencial móvel para redução da ordem da equação do pião axisimétrico	53
5.8	Utilização de referencial móvel em um problema de vínculos não-holônomos	55
5.9	Considerações finais	59
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
6.1	Conclusões	61
6.2	Sugestões para trabalhos futuros	62
	 REFERÊNCIAS	 64
	 APÊNDICE A – CONCEITOS SOBRE GRUPOS E ÁLGEBRA DE LIE	 75
A.1	Definição de grupo	75
A.2	Grupos a parâmetros contínuos	77
	 APÊNDICE B – FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI	 80
B.1	Funções circulares	80
B.2	Elipse	81
B.3	Funções elípticas	83
	 APÊNDICE C – CÓDIGOS DO MAPLE	 85
C.1	Principais comandos	85
C.2	Códigos do oscilador harmônico	86
C.3	Códigos do pêndulo oscilando em um aro rotativo	89
C.4	Códigos do pião simétrico	96

1 Introdução

Muitos problemas encontrados em ciência podem ser descritos por equações diferenciais que precisam ser resolvidas ou aproximadas por métodos analíticos ou numéricos de integração (ROYCHOWDHURY, 2001; SCHUNCK et al., 2012; AKBULUT; TASCAN, 2017). Com isto, em meados do século XIX, o norueguês Sophus Lie apresentou uma engenhosa alternativa visando solucionar equações diferenciais usando simetrias que podem se associar com invariantes ou quantidades conservadas (OLVER, 2007; ARRIGO, 2015). A grande contribuição original de Lie foi avançar na compreensão da natureza do conceito de simetria e, assim, ajudar a preparar o cenário para os avanços fundamentais da física e da matemática que viriam a ocorrer no século XX. Como resultado do trabalho de Lie, diversos métodos de integração para a resolução de classes especiais de equações diferenciais foram desenvolvidos ou unificados de forma elegante. Importante destacar que antes do trabalho de Lie, os métodos conhecidos para solução de equações diferenciais eram extremamente dispersos e específicos com pouco ou quase nenhuma generalidade ou unificação de conceitos.

Uma simetria de um sistema de equações diferenciais é um conjunto de transformações que mapeiam qualquer solução para outra solução do sistema, mantendo-a invariante (BOYKO; POPOVYCH; SHAPOVAL, 2013; CAI; FU; GUO, 2017). Tais transformações são grupos que dependem de parâmetros contínuos e consistem em transformações pontuais, também conhecidas como simetrias pontuais, atuando no espaço do sistema de variáveis dependentes e independentes, bem como em todas as derivadas envolvendo as variáveis dependentes (CANTWELL, 2002). Exemplos elementares de grupos de Lie incluem as translações, rotações e escalonamento que podem ser feitos corriqueiramente em algumas equações diferenciais. Porém, outras simetrias não triviais também são possíveis de existirem.

Já no início do século XX, a matemática Emmy Noether forneceu a conexão entre grupos de simetrias de Lie de um sistema de equações diferenciais e leis de conservação (CANDOTTI; PALMIERI; VITALE, 1972; LUTZKY, 1979; KOSMANN-SCHWARZBACH, 2011). O teorema de Noether diz respeito à invariância de um problema variacional¹ sob a ação de um grupo de Lie com um número finito de geradores infinitesimais independentes, que é a situação típica na mecânica clássica e na relatividade especial (ESTEVEZ et al., 2016). Neste teorema, Emmy Noether formulou com completa generalidade a correspon-

¹ As equações da mecânica clássica e relativística e da física são obtidas exigindo que uma integral de ação associada a uma lagrangiana que descreva o sistema, seja extrema. Tais equações são chamadas equações variacionais ou equações de Euler-Lagrange. Pode-se dizer que elas derivam de um princípio variacional, também chamado de princípio de ação. Elas expressam a anulação da derivada variacional, também denominada derivada de Euler-Lagrange ou diferencial de Euler-Lagrange da lagrangiana.

dência entre as simetrias de um problema variacional e as leis de conservação para as equações variacionais associadas (MARTINS; TORRES, 2010; JIA; WU; MEI, 2016). As relações entre simetria e invariância são fundamentais na física e aparecem em todas as áreas a partir de princípios de conservação (FU; CHEN, 2004). Um caso particular, é a obtenção de leis de conservação a partir da aplicação do Teorema de Noether² em sistemas de equações diferenciais variacionais descritos por uma lagrangiana (MARTINS, 1999; KOSMANN-SCHWARZBACH, 2011; FENG et al., 2017). Em um único artigo, Noether publicou suas descobertas envolvendo a relação crucial entre simetrias e constantes se conservando, bem como o impacto de simetrias nas equações de movimento.

Vários autores mostram que algumas classes de equações diferenciais geradoras de simetria de Lie também são simetrias de Noether, ou seja, estão associadas com a propriedade bem conhecida envolvendo os princípios de conservação de energia, conservação de momento linear e conservação de momento angular (FREIRE; SILVA; TORRISI, 2013; FREIRE; SILVA, 2013; ZHAI; ZHANG, 2017). Sabe-se que uma simetria de Lie também é uma simetria de Noether se há a conservação da ação integral (FU; CHEN, 2003). No entanto, existem casos em que uma simetria de Noether não é uma simetria de Lie (YUEYU, 1994). Os contra-exemplos mais comuns são dados por grupos de transformação de escala (OLVER, 1986).

Assim, o conhecimento de grupos de transformações de Lie de um sistema de equações diferenciais pode ser usado, por um lado, para reduzir a ordem ou, em alguns casos, reduzir as próprias equações diferenciais, tanto ordinárias quanto parciais, para uma quadratura³ (CARUSO, 2008; MOUCHET, 2016). Outra possível aplicação das simetrias de Lie, é na teoria de referencial móvel (*moving frames*), podendo-se produzir novos algoritmos para resolver problemas de simetria básica e equivalência de polinômios que formam o alicerce da teoria invariante clássica. Este método pode fornecer uma maneira sistemática para a construção de aproximações de preservação de simetria de invariantes diferenciais por invariantes diferenciais conjuntos e invariantes conjuntos em problemas de mecânica e dinâmica de sistemas mecânicos.

1.1 Contribuições

Esta tese busca contribuir com os seguintes aspectos:

- Popularizar o estudo e a utilização das simetrias de Lie na comunidade científica brasileira através de uma abordagem clara e objetiva.

² O trabalho magistral de Emmy Noether, (NOETHER, 1918), completa 100 anos em 2018.

³ Por quadratura se entende uma integral com resultado inverso conhecido por funções elementares ou especiais, por exemplo funções elípticas de Jacobi.

- Realizar redução de ordem para solução por quadraturas de equações de movimento. Este resultado foi publicado em Basquerotto, Righetto e Silva (2018b).
- Mostrar relações entre invariantes e leis de conservação extraídas de simetrias de Lie. Como resultado desta parte da tese se destaca o artigo publicado em Basquerotto, Righetto e Silva (2018a).
- Aplicar a teoria de referencial móvel na obtenção de simetrias de Lie para a solução de problemas envolvendo dinâmica de sistemas mecânicos, em especial em problemas com vínculos não-holonômos. Estes resultados estão sendo preparados para submissão para o periódico *Acta Mechanica*.

1.2 Objetivo

Aplicar as simetrias de Lie em problemas de dinâmica de sistemas mecânicos para redução da ordem de EDOs, obtenção de soluções analíticas e de leis de conservação e na teoria de referencial móvel para obtenção de referencial móvel e redução de ordem de EDOs em problemas da dinâmica de sistemas mecânicos.

1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado nos seguintes capítulos:

- **Capítulo 1 - Introdução:** Apresentação da motivação, contribuições e objetivos da presente tese.
- **Capítulo 2 - Aplicações das Simetrias de Lie:** Revisão básica da literatura mostrando o surgimento e aplicação das simetrias em diversas classes de problemas de mecânica descritos por equações diferenciais.
- **Capítulo 3 - Fundamentação Teórica em Simetrias de Lie:** Descrição do embasamento teórico utilizado neste trabalho, apresentando as definições básicas na teoria de grupos, em especial dos grupos contínuos e as simetrias de Lie, além de focar nas características das transformações infinitesimais que podem ser feitas para se aplicar e encontrar invariantes, permitindo redução de ordem, linearização ou mesmo separação de variáveis com solução completa de equações diferenciais por quadraturas.
- **Capítulo 4 - As simetrias de Lie em Problemas de Dinâmica:** Ilustra a aplicação das simetrias de Lie para solução de dois problemas clássicos da dinâmica de sistemas mecânicos: um pêndulo oscilando em um aro rotativo e um pião simétrico em movimento de precessão estacionária.

- **Capítulo 5 - As Simetrias de Lie na Teoria de referencial móvel:** Apresenta a teoria de álgebra e grupos de Lie e seu uso na teoria de referencial móvel. Uma das grandes aplicações desta teoria envolve a redução de ordem e obtenção de soluções analíticas de EDOs. Três exemplos são ilustrados neste capítulo incluindo entre eles um problema em vínculo não-holônomo.
- **Capítulo 6 - Considerações Finais:** Este capítulo apresenta as conclusões finais sobre a presente tese com propostas para desenvolvimento de trabalhos futuros.

Além disto, dois apêndices são apresentados versando sobre os tópicos complementares:

- **Apêndice A - Conceitos sobre grupos e álgebra de Lie:** Este apêndice visa trazer uma introdução sobre conceitos de grupos e álgebra de Lie. Algumas ideias de grupos, grupos discretos e contínuos são apresentadas neste apêndice.
- **Apêndice B - Funções elípticas de Jacobi:** Este apêndice é um complemento do Capítulo 4 a fim de fornecer ao leitor não familiarizado uma melhor compreensão sobre a aplicação das funções elípticas de Jacobi.
- **Apêndice C - Códigos do Maple:** Apresenta os códigos utilizados nos exemplos resolvidos nesta tese para cálculo das simetrias de Lie, redução de ordem e integração das equações através das funções elípticas de Jacobi.

2 Aplicações das Simetrias de Lie

Este capítulo apresenta uma revisão sucinta da literatura sobre a definição e a utilidade das simetrias de Lie. Primeiramente é feita uma apresentação sobre o que são as simetrias de Lie e quais são as principais propriedades e aplicações. Posteriormente são apresentados e discutidos diferentes exemplos de uso em áreas das mais diversas possíveis, como dinâmica de fluidos, transferência de calor e massa, mecânica dos sólidos, redução de ordem de equações diferenciais, além de usos recentes na teoria de referencial móvel. Por fim, as considerações finais são sumarizadas ao final do capítulo.

2.1 Simetrias de Lie

Quando se tem o primeiro contato com equações diferenciais em cursos introdutórios, são apresentadas as mais variadas técnicas especiais designadas para resolver certos tipos de equações particulares, tais como: as separáveis, as homogêneas e as exatas, sendo que a maioria das técnicas parecem ter pouca ou nenhuma ligação ou estrutura lógica (OLVER, 1986; ERDMANN; WILDON, 2006). Isto motivou a descoberta do norueguês Marius Sophus Lie, no final do século XIX, de que todos os procedimentos gerais de integração, se baseiam na invariância de equações diferenciais sob um grupo contínuo de simetrias ¹ (LIE, 1881; LIE; SCHEFFERS, 1891). O conceito de simetria está ligado a um tipo de invariância com uma propriedade de que algo não muda sob um conjunto de transformações (PLEITEZ, 1979; LIVIO, 2006).

Esta observação ao mesmo tempo unificou e expandiu significativamente as técnicas de integração disponíveis naquele tempo, e inspirou Lie a dedicar o restante de sua carreira ao desenvolvimento e aplicação de sua monumental teoria envolvendo grupo contínuos (OLVER, 1992). Estes grupos, hoje conhecidos como grupos de Lie, tiveram um impacto profundo em todas as áreas da matemática, tanto pura como aplicada, assim como nas áreas de física, engenharia e outras áreas correlatas (BLUMAN, 1990; BAUMANN, 2000; CARUSO, 2008).

2.2 Aplicações

Uma vez determinado o grupo de simetrias de Lie de um sistema de equações diferenciais, um número grande de aplicações se torna possível (BLUMAN; KUMEI, 1989). Para começar, pode-se usar diretamente as simetrias de Lie para a construção de novas soluções das equações originais (HOSKINS; BLUMAN, 2016). Outra opção, é utilizar os

¹ o conceito de grupo contínuo de simetria, é apresentado no próximo capítulo.

grupos de simetria para a redução de ordem das equações diferenciais de ordem elevada (MAHOMED; LEACH, 1990). Muitas vezes há uma boa razão física ou matemática para preferir essas equações com o maior grau de simetria possível, pois assim, pode-se retirar e analisar o maior número de informação possível sem necessariamente ter que integrar a equação diferencial em estudo (BLUMAN; ANCO, 2008). Outra abordagem é determinar quais tipos de equações diferenciais admitem um grupo de simetrias, podendo-se assim obter leis de conservação (BOCHAROV; SHCHIK; VINOGRADOV, 1999; CAI; FU; GUO, 2017; FENG et al., 2017).

As aplicações das simetrias de Lie podem ser feitas tanto em equações diferenciais ordinárias (EDOs), quanto em equações diferenciais parciais (EDPs) (ESTEVEZ et al., 2016). No caso das equações diferenciais ordinárias, a invariância sob um grupo de simetrias implica que pode-se reduzir a ordem da equação para grau um, ou seja, para uma quadratura (BOYKO; POPOVYCH; SHAPOVAL, 2013; CAMPOAMOR-STURBERG, 2016a; CAMPOAMOR-STURBERG, 2016b). Se a EDO ou o sistema de EDOs forem derivados de um princípio variacional, tais como as equações de Euler-Lagrange, ou um sistema hamiltoniano, a capacidade de redução de ordem pode ser dobrada (FU; CHEN, 2004; CANTWELL, 2002). Por exemplo, uma EDO de terceira ordem pode ser reduzida para uma EDO de primeira ordem (HOSKINS; BLUMAN, 2016).

Já para as EDPs ou sistemas de EDPs, os grupos de simetria são geralmente utilizados para ajudar na determinação de uma família ou solução geral da equação (NAZ; MAHOMED; MASON, 2008). As aplicações das simetrias de Lie incluem diversos campos como: dinâmica dos fluidos, transferência de calor, mecânica dos sólidos, mecânica quântica, relatividade, controle, redução de ordem, referencial móvel, entre outros (MEI, 2000; ROSA; BRUZÓN; GANDARIAS, 2015). Segundo autores como Hamermesh (1962) e Marsden e Ratiu (2010) é impossível estimar toda a contribuição de Lie para a ciência moderna e a matemática.

2.2.1 Dinâmica de fluidos

As descobertas de Lie levaram algum tempo para serem aceitas e estudadas pela comunidade científica. O assunto inteiro ficou inativo durante quase meio século até que G. Birkhoff chamou a atenção para algumas aplicações inexploradas dos grupos de Lie para as equações diferenciais da mecânica de fluidos (OLVER, 1986). Posteriormente, Ovsianikov começou um programa sistemático de aplicação, com êxito, desses métodos em uma ampla gama de problemas envolvendo fluidos. Nos últimos cinquenta anos houve uma verdadeira explosão de atividades de pesquisa neste campo, tanto nas aplicações para sistemas físicos concretos, quanto nas extensões do escopo e da profundidade da própria teoria envolvida na dinâmica de fluidos (OLVER, 1986; BLUMAN; KUMEI, 1989; BAUMANN, 2000).

Holm (1976) estudou a dinâmica de fluidos usando princípios de simetria. Uma técnica de álgebra de invariância que foi originalmente desenvolvida por Lie, foi usada em seu trabalho para investigar a dinâmica de fluidos não ideais na aproximação via Navier-Stokes.

As equações para descrição de camada limite laminar tridimensionais instáveis de um modelo geral de fluidos não-newtonianos foram tratadas por Yürüşoy e Pakdemrl (1997). Neste modelo, as tensões de cisalhamento foram assumidas como funções arbitrárias de gradientes de velocidade. Usando a análise do Grupo de Lie, os geradores infinitesimais aceitos pelas equações foram calculados para estes casos de tensão de cisalhamento arbitrária. A extensão da álgebra de Lie, para o caso de fluidos newtonianos, também foi apresentada. Foi considerado um problema de valor de limite geral que modela o fluxo sobre uma superfície móvel com aspiração ou injeção. As restrições impostas pelas condições de fronteira nos geradores foram calculadas. A análise do Grupo de Lie foi aplicada às equações resultantes e as reduções finais dos sistemas diferenciais comuns foram obtidas.

Hillgarter (2008) apresentou um exemplo da análise de simetria de uma equação de energia de fluxo de tubulação especial. Neste trabalho foi possível obter várias soluções da equação que descreve esta dinâmica e observou-se a importância das simetrias de Lie para determinação de critérios de valor de contorno para equações de energia de fluxo em tubulações especiais.

Já Razafindralandy, Hamdouni e Sayed (2012) mostraram que os grupos de simetria de Lie das equações Navier-Stokes não isotérmicas podem ser usados para desenvolver modelos de turbulência de preservação da física para o tensor de tensão e o fluxo de calor. As propriedades teóricas dos modelos foram investigadas. Em particular, sua compatibilidade com as leis de escala do fluxo foi comprovada. Os autores mostraram também que a abordagem de simetria pode levar a um método bem mais construtivo para obtenção de um modelo de turbulência. A forma do modelo e os invariantes não clássicos apareceram naturalmente sem qualquer outra suposição, além da utilização das simetrias de Lie.

O problema das estatísticas de turbulência descritas pela hierarquia Lundgren-Monin-Novikov (LMN) de equações integro-diferenciais foi estudado em termos de propriedades dos grupos de Lie por Waławczyk, Grebenev e Oberlack (2017). Para isso, foi realizada uma análise através dos grupos de Lie de uma cadeia de LMN truncada apresentando as duas primeiras equações em um conjunto infinito de equações integro-diferenciais para as funções de densidade de probabilidade envolvendo vários pontos da velocidade. Um conjunto completo de transformações pontuais foi obtido para as funções de densidade de probabilidade de um ponto conjuntamente com as variáveis independentes: espaço amostral de velocidade, espaço e tempo. Desta forma foi possível se encontrar as soluções exatas das equações envolvidas.

No geral, apesar de todo o potencial de aplicação das simetrias de Lie na dinâmica de fluidos, as aplicações em engenharia ainda são tímidas, talvez por não ser um assunto ainda tanto difundido em literatura mais básica ou usado de forma mais corriqueira no ensino da dinâmica dos fluidos. Acredita-se que uma popularização na comunidade de engenharia poderá acontecer nos próximos anos a medida que mais engenheiros tenham contato com esta teoria.

2.2.2 Transferência de calor

Oron e Rosenau (1986) apresentaram a aplicação das simetrias de Lie para deduzir as simetrias clássicas da equação do calor não linear, a equação da difusão-convecção e as equações da onda não linear. Determinadas as simetrias, pôde-se utilizá-las para procurar uma transformação não-local de uma determinada equação diferencial de modo que as novas equações obtidas tivessem simetrias diferentes, podendo-se, assim, resolver os problemas em questão.

Uma análise dos grupos de simetrias de Lie de um sistema acoplado das equações de calor de Burgers, inicialmente introduzidas em um estudo de soluções de similaridade não clássicas da equação de calor foi realizada por Webb (1990). Através do cálculo das simetrias de Lie do sistema, foi mostrado que a análise da estrutura de prolongamento do sistema produz a transformação Lie-Backlund. Esta transformação pode ser expressa como um mapa de soluções das duas equações de calor linear acopladas ou, alternativamente, como um mapa de solução na equação de Burgers.

As simetrias clássicas e não-clássicas da equação de calor não linear descrita por $u_t = u_{xx} + f(u)$ foram consideradas por Clarkson e Mansfield (1994). O método das características de Gröbner foi usado tanto para encontrar as condições em $f(u)$ sob as quais existem simetrias diferentes das simetrias triviais de translação espacial e temporal quanto para resolver as equações determinantes para os infinitesimais. Uma lista com as possíveis reduções de simetria foi apresentada, incluindo algumas novas reduções para a equação de calor linear assim como uma lista de soluções exatas da equação de calor não linear.

Budd e Collins (1998) consideraram o problema de Cauchy para a equação de difusão não-linear, $u^t = (u^m u_x)_x$ que é definida em um domínio infinito. A EDP e uma lei de conservação são invariantes para um grupo de Lie. Usando esses invariantes como variáveis de similaridade, o problema foi reduzido a uma ODE de segunda ordem e, em seguida, integrada para dar as bem conhecidas soluções de similaridade.

Dando continuidade ao trabalho de Budd e Collins (1998), Dorodnitsyn e Kozlov (2003) apresentaram o conjunto de equações a diferenças invariantes e malhas que preservam as simetrias do grupo de Lie da equação $u_t = (K(u)u_x)_x + Q(u)$, sendo u o campo de

temperaturas, $K(u)$ o coeficiente de transferência de calor e $Q(u)$ a fonte. Todos os casos especiais de $K(u)$ e $Q(u)$ que estendem o grupo de simetria admitido pela equação diferencial foram considerados. Com isso, foi possível reduzir a ordem e integrar a equação diferencial.

O trabalho de Cimpoiasu e Constantinescu (2008) generalizou os resultados obtidos da equação de fluxo 2D de Ricci. Os autores investigaram uma forma geral da equação de calor não-linear 2D e apontaram todos os casos possíveis em que as simetrias de Lie, as quantidades invariantes associadas e as soluções de similaridade pudessem aparecer.

Moitsheki e Harley (2011) estudaram a transferência transitória de calor através de uma aleta longitudinal, de vários perfis. Os coeficientes de condutividade térmica e transferência de calor foram considerados como dependentes da temperatura. A equação diferencial parcial resultante encontrada era altamente não linear. Métodos clássicos de simetria de Lie foram empregados e algumas reduções de ordem foram realizadas e pôde-se resolver de forma numérica a equação. Com isso, foi possível estudar os efeitos de parâmetros realistas da aleta, assim como o parâmetro da aleta termogeométrica e o expoente do coeficiente de transferência de calor na distribuição da temperatura.

Stepanova (2015) mostrou como se obter as formas de difusividade térmica desconhecida, difusão e coeficientes de difusão térmica podem ser encontradas através de grupos de Lie. As simetrias das equações governantes foram calculadas e uma solução exata foi obtida.

2.2.3 Problemas em mecânica dos sólidos

No contexto da mecânica dos sólidos, as simetrias de Lie foram aplicadas para resolver as equações dos problemas de forma analítica, formular leis de conservação e relações de invariância, analisar a cinemática dos mecanismos, entre outras aplicações. A seguir, são apresentados alguns problemas de grande interesse em mecânica dos sólidos tais como: mecânica do contínuo, teoria de vigas, elasticidade e dinâmica.

O grupo completo de simetrias do oscilador harmônico unidimensional foi investigado por Lutzky (1978). Verificou-se que um subgrupo de cinco parâmetros deixou invariante a ação, produzindo cinco quantidades conservadas, sendo que apenas duas delas eram funcionalmente independentes. Essas duas quantidades conservadas determinam as soluções e correspondem a um subgrupo Abelian de dois parâmetros. O autor também mostrou que, se uma quantidade conservada correspondesse a um grupo de simetria pelo teorema de Noether, o grupo transformava qualquer solução em outra solução possuindo o mesmo valor da quantidade conservada.

Um exemplo interessante é o caso do oscilador harmônico, como visto no trabalho de Gordon (1986). Ao se obter uma simetria de translação temporal, pôde-se observar que

a energia do sistema estava se conservando e através da simetria de rotação, o momento angular também se conservava.

A invariância das equações de viga de Euler-Bernoulli, de Timoshenko e de Marguerre-von Kármán foi abordada no trabalho de Vassilev e Djondjorov (1999). Neste trabalho, os autores determinaram, primeiramente as simetrias de Lie para cada equação de viga e posteriormente aplicaram o teorema de Noether para determinação das quantidades se conservando. Com isso, foi possível realizar algumas transformações nas equações, sempre mantendo-as invariantes, e obter as respectivas soluções.

Mei (2000) mostrou a possibilidade de se encontrar uma quantidade conservada correspondente a partir de uma simetria de Lie conhecida e o problema inverso de encontrar a correspondente simetria de Lie a partir de uma integral primeira conhecida. Já o trabalho de Jing-Li et al. (2003) concentrou-se no estudo das simetrias de Lie e de quantidades conservadas de sistemas dinâmicos não holônomos controláveis. Com base na transformação infinitesimal, as equações determinantes simétricas de Lie e as equações restritivas foram determinadas.

Özer (2003) aplicou as simetrias de Lie para determinar as soluções analíticas das equações de Navier para a elasticidade. Primeiramente, a ordem da equação diferencial parcial foi reduzida para grau um, obtendo-se assim, um sistema de equações diferenciais ordinárias. Com a solução das equações diferenciais ordinárias, pode-se determinar a solução analítica das equações de Navier. Foi notável que as simetrias de Lie tinham vantagens importantes para resolver problemas em engenharia de estruturas.

Soh (2008) apresentou em seu trabalho a solução completa para o problema de equivalência para a equação de Euler-Bernoulli usando a análise de simetria de Lie. Cada simetria de quociente de álgebra de Lie determinou uma classe de equivalência das equações de Euler-Bernoulli. Salvo o caso genérico correspondente a densidade de massa linear e flexão, pôde-se caracterizar os elementos de cada classe fornecendo um conjunto determinado de equações diferenciais satisfeitas por parâmetros físicos.

Bocko, Nohajová e Harčarik (2012) apresentaram todos os geradores de simetrias de Lie e as possíveis transformações que podem ser realizadas em equações de vigas e placas. Com base nesses geradores infinitesimais, os grupos de Lie correspondentes foram gerados e outras propriedades das equações puderam ser reveladas tais como invariância sob parâmetros contínuos de simetria.

A classificação das simetrias de Lie das equações de onda não-lineares com dissipação fornecem um caso genérico e oito casos especiais tendo sido apresentadas por Franco (2015). Neste artigo, o autor mostrou que em sete dos oito casos estudados, a ação das simetrias de Lie poderia ser globalizada através de representações induzidas de uma família de grupos de Lie solúveis.

A equação de onda de menor dimensão foi discutida por He (2015). A equação foi reduzida à equação potencial de Korteweg–de Vries (KdV). Ao usar a análise de simetria de Lie, todos os campos vetoriais geométricos da equação foram obtidos e foram apresentadas reduções de simetria. Foram obtidas algumas novas soluções de ondas não-lineares, que envolvem funções arbitrárias diferenciáveis, expressas pelas funções elípticas de Jacobi, funções elípticas de Weierstrass, função hiperbólica e função trigonométrica.

No trabalho de Al-Omari, Zaman e Azad (2017) mostrou-se as simetrias de Lie e suas transformações de grupos de Lie para uma classe de sistemas de equações de Timoshenko. A classe considerada é a classe de sistemas Timoshenko não-lineares de equações diferenciais parciais. Um sistema ótimo de sub-álgebras unidimensionais da álgebra de Lie correspondente foi derivado. Todas as possíveis variáveis invariantes do sistema ideal foram obtidas. Com a aplicação das simetrias de Lie, foi possível transformar as EDPs em sistemas correspondentes de equações diferenciais ordinárias para resolução das equações.

Já no próprio grupo da UNESP, o bolsista FAPESP², Afonso Willian Nunes, estuda como usar as simetrias de Lie para calcular reações de apoio, energia de deformação e deflexão em pontos específicos de vigas. O trabalho será apresentado no X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM (NUNES et al., 2018). Este trabalho buscou determinar as simetrias de Lie e invariantes associados com o problema de viga de Euler-Bernoulli. A partir dos resultados obtidos com a teoria de Lie pôde-se confirmar a presença das quantidades físicas se conservando, os invariantes, e verificar que o remapeamento da solução em novas variáveis facilitou a resolução da equação da linha elástica, como no caso do quarto gerador de simetria.

2.2.4 Redução de ordem

O estudo das soluções invariantes de grupo da equação de Schrodinger não linear generalizada (GNLSE) foi apresentado por Gagnon et al. (1989). Os autores mostraram que oito tipos de subgrupos do grupo de simetria de Lie conduziam através de redução de ordem, para equações diferenciais ordinárias reais de terceira ordem, dando tanto a fase quanto o valor absoluto da solução. O método de Lie foi generalizado para equações diferenciais ordinárias no trabalho de Quispel e Sahadevan (1993). Os autores provaram que a ordem das equações diferenciais pôde ser reduzida em uma, desde que a equação em consideração possuísse uma simetria de Lie. Além disso, os autores também apresentaram uma condição suficiente para a redução da ordem da equação por dois.

A redução das equações diferenciais ordinárias não-lineares por uma combinação de integrais primeiras e simetrias de Lie foi investigada por Abraham-Shrauner (2002). As

² <http://bv.fapesp.br/pt/bolsas/170127/aplicacoes-das-simetrias-de-lie-na-teoria-de-vigas/>

equações diferenciais e as primeiras integrais foram expressas em termos dos invariantes das simetrias do grupo de Lie. Com isso foi possível reduzir a ordem das equações em estudo e obter, assim, a solução exata das equações diferenciais.

A teoria das reduções duplas de equações diferenciais parciais com duas variáveis independentes que admitem uma simetria de Lie e um invariante vetorial conservado sob a simetria, foram apresentados por Sjöberg (2009). A teoria foi aplicada a uma equação diferencial parcial não-linear de terceira ordem que descrevia a filtração de um líquido visco-elástico com relaxamento através de um meio poroso. O autor mostrou, que através da redução de ordem da EDP, foi possível obter um sistema de EDOs, facilitando-se assim, a obtenção das soluções das mesmas.

Oliveri (2010) mostrou que a análise de simetrias de Lie das equações diferenciais fornece uma estrutura poderosa e fundamental para a exploração de procedimentos sistemáticos que conduzam à integração por quadratura (ou pelo menos à redução da ordem) de equações diferenciais ordinárias. Outra abordagem realizada pelo autor foi com relação à determinação de soluções invariantes de problemas de valor inicial e de limite, à derivação das leis de conservação e à construção de ligações claras e lógicas entre diferentes equações diferenciais que se tornam equivalentes para a resolução dos mais variados tipos de problemas físicos e matemáticos.

Ao usar métodos de simetria de Lie, Güngör e Torres (2017) identificaram uma classe de equações diferenciais não lineares de segunda ordem comuns que são invariantes sob pelo menos um grupo de simetria da equação de Ermakov-Pinney. Neste contexto, a regra de superposição não linear para a equação de Kummer-Schwarz de segunda ordem foi redescoberta. A invariância sob o grupo de simetria unidimensional também foi usada para obter as integrais primeiras (invariantes de Ermakov-Lewis). Sob esta condição, a equação foi reduzida a uma equação autônoma equivalente por meio de uma transformação canônica, e as soluções das equações foram obtidas.

Baleanu et al. (2018) realizaram a análise das simetrias de Lie para redução de ordem, solução exata e obtenção de leis de conservação para a equação fracionária no tempo de Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera (CDGSK) com derivação de Riemann-Liouville. A CDGSK fracionada no tempo foi reduzida à uma equação diferencial ordinária não linear da ordem fracionária. Com isso, novas soluções exatas para a CDGDK fracionada no tempo foram obtidas. As soluções foram inéditas e não foram obtidas anteriormente por outros autores. As soluções adquiridas incluíam soluções hiperbólicas, trigonométricas e racionais.

2.2.5 Referencial móvel

A ideia inicial de se trabalhar com referencial móvel começou com o problema de equivalência que tratava em analisar quando duas superfícies podiam ser mapeadas uma para a outra, sob uma transformação de coordenadas de um tipo específico. Acontece que existem muitos problemas que podem ser formulados dessa maneira. Um é o problema de classificação das equações diferenciais. Se há uma equação diferencial para resolver e um banco de dados de equações resolvidas, é sensato perguntar se existe uma transformação de coordenadas que conduza esta equação a uma das soluções já conhecidas. Visualizando as equações diferenciais como superfícies, pode-se aplicar a teoria de referencial móvel. A seguir são apresentados alguns trabalhos mostrando a combinação das simetrias de Lie com a teoria de referencial móvel.

Olver (2000) mostrou que o prolongamento de um grupo de transformação forma o fundamento geométrico subjacente à teoria de Lie de grupos de simetria de equações diferenciais, a teoria de invariantes diferenciais e a teoria de Cartan sobre referencial móvel. Os desenvolvimentos na teoria de referencial móvel exigiram uma compreensão detalhada da geometria dos grupos de transformação prolongados. Neste trabalho, o autor começa com uma revisão básica de referencial móvel e, em seguida, concentra-se no estudo de órbitas de grupo prolongadas regulares e singulares. Os destaques incluem uma versão corrigida do teorema de estabilização básico, uma discussão de pontos totalmente singulares e caracterizações geométricas e algébricas de subvariedades totalmente singulares, que são aqueles que não admitem referencial móvel. Além de algumas aplicações para o método de referencial móvel, o artigo inclui um lema Wronskian generalizado para funções vetoriais e métodos para a solução das equações determinantes de Lie.

Olver e Pohjanpelto (2008) propuseram uma nova e construtiva teoria denominada de referencial móvel para ações de pseudo-grupo de Lie. Através da teoria desenvolvida pelos autores, foi possível fornecer um meio efetivo para determinar sistemas completos de invariantes diferenciais e formas diferenciais invariantes, classificando suas relações de recorrência e resolvendo problemas de equivalência e simetria decorrentes de uma ampla gama de aplicações.

Uma nova abordagem para a construção de referencial móvel que permitia tornar invariante o esquema de diferenças finitas, foi desenvolvida por Chhay e Hamdouni (2010). Esta abordagem levava em consideração a ordem de precisão e garantia das propriedades numéricas de esquemas invariantes que superavam os de esquemas clássicos. Os benefícios obtidos com este processo foram ilustrados com a equação de Burgers. A vantagem do presente método encontrado pelos autores é a garantia de boas propriedades numéricas além da preservação do grupo de simetria da equação contínua.

Siminos e Cvitanović (2011) apresentaram dois métodos contínuos de redução de

simetria para reduzir fluxos de dissipação de alta dimensão para mapas de retorno locais. Na abordagem de base polinomial de Hilbert, a dinâmica equivariante foi reescrita em termos de coordenadas invariantes. No método de referencial móvel, o espaço de estados foi cortado localmente de tal forma que cada órbita de grupo de pontos equivalentes de simetria foi representada por um único ponto. Em qualquer das abordagens, os cálculos numéricos puderam ser realizados na representação do espaço de estado original, e as soluções foram então projetadas no espaço de estados reduzido de simetria. Os dois métodos foram ilustrados na redução do sistema Lorenz complexo com um fluxo dissipativo em cinco dimensões com simetria rotacional. Para os autores, embora a abordagem de base polinomial de Hilbert não era inviável para fluxos de alta dimensão, a redução de simetria pelo método de referencial móvel oferecia boas ferramentas para utilização nestes tipos de problemas.

Dando continuidade ao avanços do trabalho de Olver e Pohjanpelto (2008), Gonçalves e Mansfield (2012) explicaram a estrutura matemática tanto do sistema Euler-Lagrange quanto do conjunto de leis de conservação, em termos de invariantes diferenciais da ação de um grupo de Lie e referencial móvel. Os autores demonstraram que através do conhecimento desta estrutura, permitiu-se que as equações de Euler-Lagrange fossem integradas com relativa facilidade.

2.3 Considerações finais

A partir desta curta compilação de algumas aplicações das simetrias de Lie, pode-se observar a grande faixa de utilização envolvendo essencialmente os tópicos:

- Construir novas soluções para equações originais;
- Reduzir a ordem de equações diferenciais;
- Obter leis de conservação.

Pela revisão da literatura, observa-se que há diversas aplicações das simetrias de Lie em diferentes áreas. A área que inicialmente teve mais atenção e até hoje há muitos trabalhos relacionados no assunto ainda é a de mecânica de fluidos. Apesar disto, ainda se observa pouca aplicação industrial disto nestes problemas envolvendo fluidos, pois essencialmente, o tópico é tratado pela comunidade de pesquisadores da área de matemática. Portanto, ainda existe lacuna para aplicações e uso mais prático e corriqueiro nesta teoria na solução de problemas práticos da dinâmica dos fluidos, por exemplo.

No geral, verifica-se que nos diversos casos em que as equações não podem ser resolvidas facilmente, através da aplicação das simetrias de Lie, pode-se reduzir a ordem e em alguns casos até mesmo obter a solução analítica da equação. Outro aspecto muito

importante é a conciliação das simetrias de Lie para extração de leis de conservação que muitas vezes não estão claras. Isto pode ser feito adequadamente com o Teorema de Noether.

3 Fundamentação Teórica em Simetrias de Lie

A meta deste capítulo é fornecer ao leitor uma introdução sobre a teoria de Lie, motivando o seu uso para aplicações na análise e solução de equações diferenciais. Também são apresentadas as principais definições e conceitos sobre transformações e geradores infinitesimais e ainda a obtenção de simetrias em equações diferenciais ordinárias (EDOs), assim como as técnicas para redução de ordem em equações diferenciais. O Apêndice A traz uma introdução sobre grupos e álgebra de Lie que pode auxiliar o leitor na leitura deste capítulo.

3.1 Transformação infinitesimal

Assumindo que uma equação diferencial ordinária de segunda ordem possa ser descrita na seguinte forma (GORDON, 1986; MOSHINSKY; SMIRNOV, 1996):

$$\mathcal{F}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \quad (1)$$

sendo $q = q(t)$ funções desconhecidas¹, t a variável independente, o ponto acima as derivadas temporais e $\mathcal{F}$ pode ser uma função para representar uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais. Soluções simples para algumas destas equações são altamente conhecidas. Porém, algumas transformações podem ser aplicadas para manter a equação invariante e facilitar ainda mais a sua possível integração. O primeiro passo é encontrar geradores infinitesimais que produzem estas transformações.

3.2 Geradores infinitesimais

Esta seção busca apresentar os fundamentos básicos envolvidos na extração de simetrias de Lie a partir de sistemas de equações diferenciais. O assunto aqui abordado é amplamente disponível em excelentes livros textos como Olver (1986), Bluman e Kumei (1989) assim como em Baumann (2000).

De forma geral, assumindo uma variável genérica $q = q(t)$, um grupo de transformação envolvendo as variáveis dependente q e independente t com um parâmetro contínuo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ pode ser feito para obter novas variáveis $\bar{t}$ e $\bar{q}$ a partir de (OLVER, 1986; BLUMAN; KUMEI, 1989; BAUMANN, 2000):

$$\bar{t} = \alpha(t, q, \varepsilon), \quad \bar{q} = \mu(t, q, \varepsilon) \quad (2)$$

¹ Lembrando que pode-se assumir qualquer variável para q

sendo α e μ funções analíticas² que, normalmente, são desconhecidas e que realizam estas transformações. Pode-se expandir $\bar{t}$ e $\bar{q}$ usando séries de MacLaurin em torno de ε através de:

$$\bar{t} \approx t + \varepsilon \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon \rightarrow 0} \right), \quad \bar{q} \approx q + \varepsilon \left(\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon \rightarrow 0} \right) \quad (3)$$

desde que $\varepsilon \rightarrow 0$ represente a identidade do grupo. Definindo novas funções infinitesimais descritas por:

$$\xi(t, q) = \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad \eta_q(t, q) = \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon \rightarrow 0} \quad (4)$$

pode-se reescrever as expressões da eq. (3) como:

$$\bar{t} \approx t + \varepsilon \xi(t, q), \quad \bar{q} \approx q + \varepsilon \eta_q(t, q) \quad (5)$$

Contudo, além das mudanças nas variáveis t e q , extensões para as derivadas de alta ordem $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ devem ser obtidas, conhecidas como prolongamentos de ordem superior.

3.3 Prolongamento das transformações e seus geradores

Uma vez que as transformações com os geradores infinitesimais serão feitas em uma equação diferencial, é necessário se prolongar as transformações nas respectivas derivadas (LIE; SCHEFFERS, 1891; LIE, 1881; BLUMAN, 1990; MAHOMED; LEACH, 1990). A aproximação de $\dot{\bar{q}}$ fica sendo:

$$\dot{\bar{q}} = \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} \quad (6)$$

sendo $d\bar{q} = dq + \varepsilon d\eta_q$ e $d\bar{t} = dt + \varepsilon d\xi$. Dividindo estes termos por dt :

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} = \dot{q} + \varepsilon \mathcal{D}_t(\eta_q), \quad \frac{d\bar{t}}{d\bar{t}} = 1 + \varepsilon \mathcal{D}_t(\xi)$$

sendo $\mathcal{D}_t$ o operador derivada total, definido por:

$$\mathcal{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \quad (7)$$

sabe-se que $\varepsilon \rightarrow 0$ e com o auxílio da regra do binomial³:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= \frac{\dot{q} + \varepsilon \mathcal{D}_t(\eta_q)}{1 + \varepsilon \mathcal{D}_t(\xi)} \approx \{\dot{q} + \varepsilon \mathcal{D}_t(\eta_q)\} \{1 - \varepsilon \mathcal{D}_t(\xi)\} = \\ &\dot{q} - \dot{q} \varepsilon \mathcal{D}_t(\xi) + \varepsilon \mathcal{D}_t(\eta_q) - \varepsilon^2 \mathcal{D}_t(\eta_q) \mathcal{D}_t(\xi) \approx \dot{q} + \varepsilon \beta^{(1)} \end{aligned} \quad (8)$$

² Por função analítica entende-se funções que podem ser expandidas em séries.

³ $(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} x^2 + \dots$ (DINGLE, 1973).

como pode-se observar, na penúltima passagem há uma simplificação, já que $\varepsilon \approx 0$ consequentemente condiz que $\varepsilon^2 = 0$. O termo $\beta^{(1)}$ pode ser então escrito como:

$$\beta^{(1)}(t, q, \dot{q}) = \mathcal{D}_t(\eta_q) - \dot{q}\mathcal{D}_t(\xi) = \frac{\partial \eta_q}{\partial t} + \left(\frac{\partial \eta_q}{\partial q} - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \dot{q} - \frac{\partial \xi}{\partial q} (\dot{q})^2 \quad (9)$$

que é o prolongamento de primeira ordem.

Em sistemas de equações diferenciais com termos de alta ordem, deve-se estender essa ideia para todas as variáveis. Com isso, pode-se escrever $\ddot{q}$ através do campo vetorial $\gamma = \{\xi \quad \eta_q\}^T$ e ε através do mesmo procedimento realizado anteriormente:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\mathcal{D}_t(\dot{q} + \varepsilon\beta^{(1)})}{\mathcal{D}_t(t + \varepsilon\xi)} = \frac{\ddot{q} + \varepsilon\mathcal{D}_t(\beta^{(1)})}{1 + \varepsilon\mathcal{D}_t(\xi)} \approx \\ &\{\ddot{q} + \varepsilon\mathcal{D}_t(\beta^{(1)})\} \{1 - \varepsilon\mathcal{D}_t(\xi)\} \approx \ddot{q} + \varepsilon\beta^{(2)} \end{aligned} \quad (10)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \beta^{(2)}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) &= \mathcal{D}_t(\beta^{(1)}) - \ddot{q}\mathcal{D}_t(\xi) = \frac{\partial^2 \eta_q}{\partial t^2} + \left(2\frac{\partial^2 \eta_q}{\partial t \partial q} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) \dot{q} + \\ &\left(\frac{\partial^2 \eta_q}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial q} \right) (\dot{q})^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial q^2} (\dot{q})^3 + \left(\frac{\partial \eta_q}{\partial q} - 2\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \ddot{q} - 3\frac{\partial \xi}{\partial q} \dot{q}\ddot{q} \end{aligned} \quad (11)$$

o prolongamento de segunda ordem (BLUMAN; KUMEI, 1989). De forma geral um prolongamento de ordem k é dado por (BLUMAN; KUMEI, 1989):

$$\beta^{(k)}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(k)}) = (\mathcal{D}_t)^k \eta_q - \sum_{j=1}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} q^{(k-j+1)} (\mathcal{D}_t)^j \xi \quad (12)$$

sendo $k = 1, 2, 3, \dots$

3.4 Teorema de Lie

Após calcular o prolongamento das transformações e com o conhecimento das funções ξ e η_q formando o campo vetorial $\gamma = \{\xi \quad \eta_q\}^T$, um gerador infinitesimal de simetria pode ser obtido a partir de (MARSDEN; RATIU, 2010):

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{matrix} \xi \\ \eta_q \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_q} \end{matrix} \right\} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta_q \frac{\partial}{\partial q} \quad (13)$$

e aplicando o operador de segunda ordem $\mathcal{U}''$ para estas variáveis obtém-se (MCWEENY, 2002):

$$\mathcal{U}'' = \beta^{(1)} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \beta^{(2)} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}} \quad (14)$$

Com isso, a condição de Lie pode ser definida como::

$$(\mathcal{U}'' + \mathcal{X}) \mathcal{F} = 0 \quad (15)$$

sendo $\mathcal{F}$ a equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais em estudo.

O critério infinitesimal de invariância envolve t , q e as derivadas de q com respeito a t , assim como as variáveis ξ e η_q . Depois de eliminar toda a dependência das derivadas envolvendo q , pode-se equacionar os coeficientes das derivadas parciais remanescentes de q a zero. Com isso, pode-se ter como resultado um grande número de equações diferenciais parciais para determinar estas funções. Estas equações são conhecidas como equações determinantes para um grupo de simetrias de um determinado sistema (OLVER, 1986). A obtenção das soluções destas equações determinantes pode ser muitas vezes trabalhosa e pode ser feita através da utilização de alguns pacotes de manipulação simbólica, como o wxMaxima, Mathematica (Sym (DIMAS; TSUBELIS, 2004) e/ou MathLie (BAUMANN, 2000)), Maple (DETools e/ou PDETools), entre outros. O Apêndice C apresenta os códigos utilizados nesta tese para o cálculo das simetrias de Lie usando o Maple.

3.5 Redução de ordem utilizando os pontos de simetria na forma característica

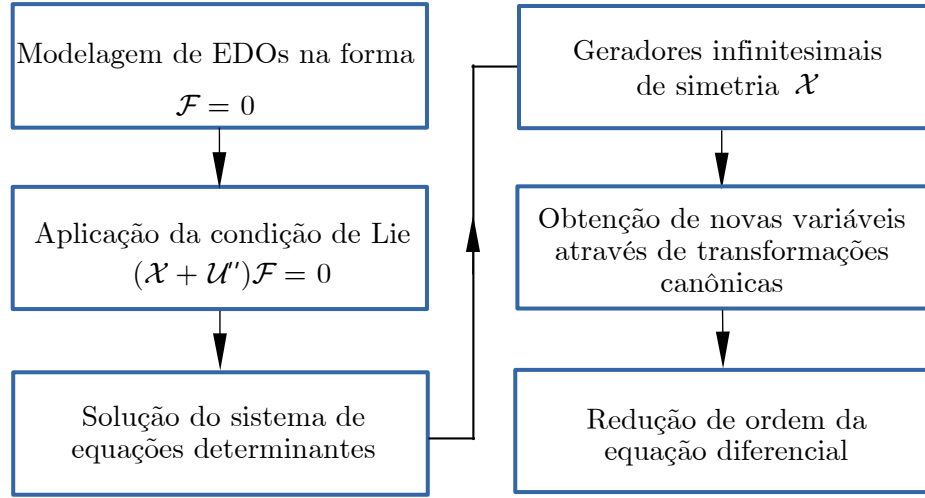
Uma das aplicações mais notórias da teoria de grupos de Lie é o problema de integrar equações diferenciais ordinárias. A observação fundamental de Lie é que o conhecimento de um grupo de simetrias de um sistema de equações diferenciais ordinárias permite integrar o sistema por quadraturas e assim deduzir a solução geral (OLVER, 1992). Seja uma EDO de segunda ordem, $\mathcal{F}(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$, pode-se mostrar que esta equação é invariante sobre um grupo de transformações, e com isso, pode ser integrada por uma quadratura. Uma vez encontrado o grupo de simetrias, existem vários métodos que podem ser aplicados para integrar a equação diferencial (OLVER, 1986).

Pode-se introduzir novas coordenadas na forma $\{\bar{q}(t, q), \bar{t}(t, q)\}$ supondo que $\mathcal{X}$ é um campo vetorial e não-nulo na origem. A mudança de variáveis é feita através dos métodos para encontrar simetrias de grupo, apresentados anteriormente. Isto implica que $\mathcal{X}$ pode ser transformado a partir da forma $\partial/\partial\bar{t}$ fornecendo, assim, $\bar{q}$ e $\bar{t}$ satisfazendo as seguintes equações parciais lineares (OLVER, 1986):

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_i(\bar{q}) &= \xi \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} = 0 \\ \mathcal{X}_i(\bar{t}) &= \xi \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \bar{t}}{\partial q} = 1\end{aligned}\tag{16}$$

Para facilitar o entendimento, os passos para o cálculo dos geradores infinitesimais podem ser descritos na forma de um fluxograma, como visto na fig. (1).

Figura 1 – Fluxograma representativo de como obter os geradores infinitesimais de forma geral para uma EDO.



Fonte: Elaboração própria do autor.

3.6 Exemplo de aplicação em uma equação diferencial ordinária

Esta seção apresenta um exemplo de aplicação do teorema de Lie para determinar os geradores infinitesimais de simetria de uma equação diferencial ordinária. Para isso, utiliza-se um exemplo bem simples envolvendo um oscilador harmônico sem amortecimento. Este sistema pode ser descrito por uma equação diferencial ordinária dada por (GORDON, 1986; MOSHINSKY; SMIRNOV, 1996):

$$\mathcal{F}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (17)$$

sendo $q = q(t)$ o deslocamento, t o tempo, o ponto acima representa derivada temporal, $\omega^2 = k/m$ a frequência natural não amortecida sendo k a rigidez e m a massa.

Uma solução simples para a equação de movimento deste sistema já é amplamente conhecida. No entanto, algumas transformações podem ser aplicadas para manter este sistema invariante e facilitar a integração como mostrado nas seções seguintes.

3.6.1 Geradores infinitesimais do oscilador harmônico

Substituindo a eq. (17) na eq. (15), pode-se obter as seguintes equações:

$$(\mathcal{U}'' + \mathcal{X})(\ddot{q} + \omega^2 q) = 0 \quad (18)$$

aplicando o operador de simetria:

$$\eta \frac{\partial}{\partial q}(\ddot{q} + \omega^2 q) + \xi \frac{\partial}{\partial t}(\ddot{q} + \omega^2 q) + \beta^{(1)} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}(\ddot{q} + \omega^2 q) + \beta^{(2)} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}}(\ddot{q} + \omega^2 q) = 0 \quad (19)$$

sendo $\beta^{(1)}$ descrito pela eq. (9) e $\beta^{(2)}$ dado pela eq. (11). Com isso, a eq. (19) se torna:

$$\eta\omega^2 + \{\xi\ddot{q} + \xi\omega^2\dot{q}\} + \beta^{(2)} = 0 \quad (20)$$

lembrando que: $\ddot{q} = -\omega^2 q \rightarrow \ddot{q} = -\omega^2\dot{q}$ então $-\xi\omega^2\dot{q} + \xi\omega^2\dot{q} = 0$. Substituindo $\beta^{(2)}$:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2\xi}{\partial q^2}(\dot{q})^3 + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial q}\right)(\dot{q})^2 + \left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial q} - \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 3\frac{\partial\xi}{\partial q}\omega^2 q\right)\dot{q} \\ & + \left(-\frac{\partial\eta}{\partial q} + 2\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\omega^2 q + \eta\omega^2 + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

e igualando a zero seus coeficientes, pode-se obter o seguinte sistema de equações determinantes:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial q^2} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial q} = 0 \quad (23)$$

$$2\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial q} - \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + 3\frac{\partial\xi}{\partial q}\omega^2 q = 0 \quad (24)$$

$$-\frac{\partial\eta}{\partial q}\omega^2 q + 2\frac{\partial\xi}{\partial t}\omega^2 q + \eta\omega^2 + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

Resolvendo as eqs. (22)-(25), pode-se obter ao todo os oito geradores de simetria de Lie admitidos pelo oscilador harmônico descrito pela eq. (17), como visto na tab. (1).

Tabela 1 – Geradores infinitesimais do oscilador harmônico.

	ξ	η
$\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$	1	0
$\mathcal{X}_2 = q \frac{\partial}{\partial q}$	0	q
$\mathcal{X}_3 = \sin(\omega t) \frac{\partial}{\partial q}$	0	$\sin(\omega t)$
$\mathcal{X}_4 = \cos(\omega t) \frac{\partial}{\partial q}$	0	$\cos(\omega t)$
$\mathcal{X}_5 = q \sin(\omega t) \frac{\partial}{\partial t} + q^2 \omega \cos(\omega t) \frac{\partial}{\partial q}$	$q \sin(\omega t)$	$q^2 \omega \cos(\omega t)$
$\mathcal{X}_6 = q \cos(\omega t) \frac{\partial}{\partial t} - q^2 \omega \sin(\omega t) \frac{\partial}{\partial q}$	$q \cos(\omega t)$	$-q^2 \omega \sin(\omega t)$
$\mathcal{X}_7 = -\frac{\cos(2\omega t)}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{q \sin(2\omega t)}{\omega} \frac{\partial}{\partial q}$	$-\frac{\cos(2\omega t)}{\omega^2}$	$\frac{q \sin(2\omega t)}{\omega}$
$\mathcal{X}_8 = -\frac{\sin(2\omega t)}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q \cos(2\omega t)}{\omega} \frac{\partial}{\partial q}$	$-\frac{\sin(2\omega t)}{\omega^2}$	$-\frac{q \cos(2\omega t)}{\omega}$

Fonte: Elaboração própria do autor.

3.6.2 Redução de ordem

Considerando o gerador infinitesimal $\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, sendo que $\xi = 1$ e $\eta = 0$. Para se reduzir a ordem da equação de movimento, eq. (17), deve-se escolher novas variáveis que satisfaçam a eq. (16). Com isso, as novas variáveis devem ser $\bar{q} = q$ e $\bar{t} = t$. Estendendo para as derivadas, tem-se:

$$\dot{\bar{t}} = \frac{\mathcal{D}_t \bar{t}}{\mathcal{D}_t \bar{q}} = \frac{1}{\dot{\bar{q}}} \Rightarrow \ddot{\bar{t}} = \frac{\mathcal{D}_t \dot{\bar{t}}}{\mathcal{D}_t \bar{q}} = -\frac{\ddot{q}}{\dot{q}^3} \quad (26)$$

Com isto, as novas coordenadas são utilizadas para reescrever a eq. (17):

$$-\frac{\ddot{\bar{t}}}{\bar{t}^3} + \omega^2 \bar{q} = 0 \quad (27)$$

Uma nova projeção pode ser feita, então $\Upsilon = \dot{\bar{t}}$ e $\dot{\Upsilon} = \ddot{\bar{t}}$, fazendo com que a eq. (27) fique sendo descrita como:

$$-\frac{\dot{\Upsilon}}{\Upsilon^3} + \omega^2 \bar{q} = 0 \quad (28)$$

Resolvendo equação anterior obtém-se:

$$\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{-\omega^2 \bar{q}^2 + \mathcal{C}}} \quad (29)$$

sendo $\mathcal{C}$ uma constante de integração. Retornando às coordenadas anteriores a partir da eq. (26):

$$\dot{\bar{t}} = \frac{d\bar{t}}{d\bar{q}} = \frac{1}{\sqrt{-\omega^2 \bar{q}^2 + \mathcal{C}}} \quad (30)$$

então:

$$\bar{t} = \int \frac{d\bar{q}}{\sqrt{-\omega^2 \bar{q}^2 + \mathcal{C}}} \quad (31)$$

Resolvendo a quadratura da eq. (31), tem-se:

$$\bar{t} = \frac{\arctan \left(\frac{\sqrt{\omega^2 \bar{q}}}{\sqrt{-\omega^2 \bar{q}^2 + \mathcal{C}_1}} \right)}{\sqrt{\omega^2}} \quad (32)$$

Retornando às coordenadas originais:

$$t = \frac{\arctan \left(\frac{\sqrt{\omega^2 q}}{\sqrt{-\omega^2 q^2 + \mathcal{C}}} \right)}{\sqrt{\omega^2}} \quad (33)$$

Isolando a variável q na eq. (33), obtém-se a solução da eq. (17):

$$q(t) = \frac{\sqrt{\left(\tan \left(t\sqrt{\omega^2} \right)^2 + 1 \right) \mathcal{C} \tan \left(t\sqrt{\omega^2} \right)}}{\left(\tan \left(t\sqrt{\omega^2} \right)^2 + 1 \right) \omega} \quad (34)$$

Como pode-se observar, através da utilização das simetrias de Lie, pode-se reduzir a ordem da equação de movimento a uma quadratura. A solução para a equação do oscilador harmônico não é única, pois é uma equação diferencial linear e atende o axioma da superposição, além de não ter particularizado nenhum valor inicial. Além do gerador infinitesimal $\mathcal{X}_1$, há mais sete opções para se realizar a redução de ordem da equação diferencial. A solução para esta quadratura foi feita através da utilização de funções circulares. No entanto, existem algumas quadraturas que não podem ser resolvidas por estas funções. Com isto, se faz necessário o uso das funções elípticas, como por exemplo, as funções elípticas de Jacobi. O Apêndice B apresenta uma introdução sobre funções circulares e funções elípticas. Deve-se destacar que nesta situação o gerador escolhido forneceu uma solução bem mais complexa do que a solução obtida de forma clássica em cursos introdutórios de equações diferenciais, matemática aplicada ou vibrações. No entanto, destaca-se que uma das grandes aplicações das simetrias de Lie envolve resolver equações diferenciais não lineares através de métodos analíticos.

3.7 Considerações finais

Os tópicos abordados neste capítulo revisam os conceitos básicos relacionados à teoria de grupos e a aplicação do teorema de Lie para a determinação de geradores infinitesimais de equações diferenciais. Esse teorema pode ser aplicado sistematicamente para unificar e estender técnicas, com finalidades bem conhecidas, para determinação de soluções explícitas de equações diferenciais em sistemas integráveis, especialmente para equações diferenciais não-lineares. Foi apresentado o conceito de simetria a parâmetro contínuo e como determinar os geradores infinitesimais que realizam transformações nas EDOs que as mantenham invariantes. Para ilustrar a utilização das simetrias de Lie, um exemplo clássico foi resolvido. As simetrias de Lie foram calculadas para a equação de movimento do oscilador harmônico. Através de um dos 8 geradores de simetrias, a ordem da equação foi reduzida a uma quadratura, e obteve-se a solução para o oscilador harmônico.

4 As simetrias de Lie em Problemas da Dinâmica

Este capítulo tem como meta apresentar a aplicação das simetrias de Lie em problemas clássicos encontrados em dinâmica de sistemas mecânicos. O primeiro exemplo apresenta um pêndulo oscilando em um aro rotativo. Inicialmente são calculadas as simetrias de Lie e posteriormente faz-se a redução de ordem para a obtenção da solução analítica da equação diferencial através das funções elípticas de Jacobi. Já o segundo exemplo, busca determinar as simetrias de Lie associadas com as equações diferenciais ordinárias que descrevem o movimento de um pião axisimétrico em movimento de precessão estacionária e aplicá-las ao teorema de Noether para obtenção das constantes de movimento. Neste exemplo, mostra-se que as simetrias de Lie também são simetrias de Noether. Provada a origem da conservação de energia e dos momentos angulares, através das leis de conservação extraídas da aplicação do Teorema de Noether com as Simetrias de Lie, pôde-se determinar a solução analítica das equações do movimento através da solução por quadraturas usando funções elípticas de Jacobi. Os problemas aqui apresentados, foram publicados em Basquerotto, Righetto e Silva (2018b) e Basquerotto, Righetto e Silva (2018a), respectivamente.

4.1 Pêndulo oscilando em um aro rotativo

A fig. 2 apresenta uma massa pontual m deslizando livremente sem atrito em um aro de raio ℓ , que por sua vez, gira com velocidade angular constante ω em um campo gravitacional também constante, com aceleração g . Com isto, este pêndulo se move em uma superfície de uma esfera de raio ℓ . A base referencial usada é descrita pelos eixos $\{x, y, z\}$ solidário ao giro do aro circular. A coordenada generalizada usada para caracterizar o movimento é dada por θ que é medida a partir do eixo z negativo.

Para estas condições, a energia cinética, $\mathcal{T}$, do pêndulo é dada por:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right) \quad (35)$$

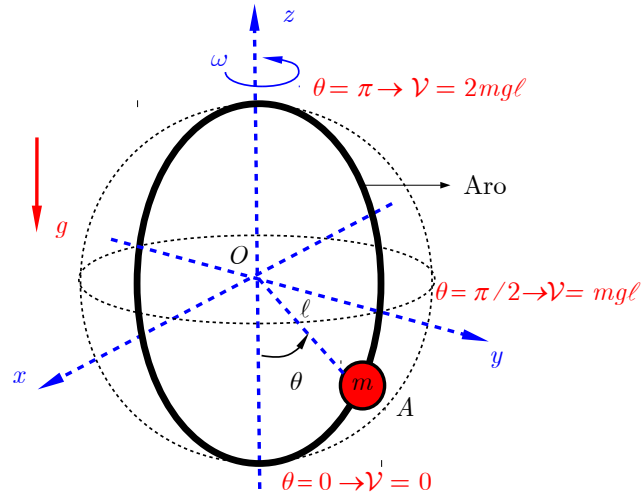
e a energia potencial, $\mathcal{V}$, é descrita como:

$$\mathcal{V} = mg\ell (1 - \cos \theta) \quad (36)$$

sendo que foi escolhido o ponto de energia potencial de referência nula em $\theta = 0$ (ver fig. (2)). Com isto, a lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ é definida por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right) + mg\ell \cos \theta - mg\ell \quad (37)$$

Figura 2 – Pêndulo oscilando em um aro rotativo.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange para a coordenada generalizada θ (GOLDSTEIN, 1965; LEMOS, 2007):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \quad (38)$$

obtém-se a equação de movimento:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0 \quad (39)$$

sendo $\theta(t)$ o ângulo de posição variando no tempo t , o ponto superior representando derivada temporal, ω é a velocidade angular constante do aro, g é a aceleração da gravidade e ℓ é o raio do aro.

A solução analítica desta equação de movimento já é conhecida, através da utilização de outros métodos, tais como pela solução geral das equações de Euler-Lagrange (BAKER; BILL, 2012). No entanto, várias outras transformações podem ser aplicadas para manter a equação invariante e com isso, resolvê-la de outra maneira, se ela for integrável. O procedimento proposto por Lie é um procedimento poderoso para integrar equações diferenciais. Primeiramente, como verificado no capítulo anterior, é necessário encontrar um gerador infinitesimal para todas as variáveis da equação diferencial. Após isso, os prolongamentos são calculados para descrever os termos das derivadas de ordem superior. Ao aplicar o teorema de Lie, pode-se obter as equações determinantes e ao resolvê-las pode-se encontrar os geradores de simetrias (LUTZKY, 1979; OLIVER, 1986; BLUMAN; KUMEI, 1989; BAUMANN, 2000; BAGDERINA, 2014).

4.1.1 As simetrias de Lie de um pêndulo oscilando em um aro rotativo

Reescrevendo a eq. (39), na seguinte forma:

$$\mathcal{F}(t, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \equiv \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0 \quad (40)$$

e aplicando na condição de Lie dada pela eq. (15) obtém-se:

$$(\mathcal{U}'' + \mathcal{X}) \mathcal{F} = \xi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} + \beta^{(1)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} + \beta^{(2)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \ddot{\theta}} = 0 \quad (41)$$

O critério de invariância infinitesimal, descrito pela eq. (41), envolve t e θ , e as derivadas de θ com respeito a t , assim como ξ e η e suas derivadas parciais com respeito a t e θ . Após eliminar todas as dependências das derivadas envolvendo θ , pode-se equacionar os coeficientes remanescentes das derivadas parciais de θ , a zero. Isto gera um grande número de equações diferenciais parciais que são utilizadas para a determinação das funções ξ e η , desconhecidas a priori, formando as já definidas equações determinantes (OLVER, 1986).

Após aplicar a condição de Lie, eq. (41), na eq. (39) pode-se obter as seguintes equações determinantes:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta \partial t} = 0 \quad (43)$$

$$3 \sin \theta \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta \partial t} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & 2 \sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial t} \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) - \sin \theta \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \\ & \eta \left(-\omega^2 \sin^2 \theta - \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \theta \right) \cos \theta \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

As equações de (42) até (45) podem ser simplificadas e pode-se obter as seguintes expressões:

$$\eta = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0 \quad (48)$$

Por fim, resolvendo as equações de (46) até (48) obtém-se o seguinte gerador infinitesimal de simetria:

$$\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

Então, as funções infinitesimais são dadas simplesmente por:

$$\xi = 1 \quad \text{e} \quad \eta = 0$$

que corresponde a uma operação de translação temporal, que é o invariante clássico que mostra a conservação de energia, desde que não se assume dissipação neste modelo (OLVER, 1990). Deve-se notar que neste exemplo apenas um gerador é obtido e, portanto, uma única integral primeira. Como o sistema possui apenas um grau de liberdade, $\theta(t)$, isto indica que o sistema é completamente integrável. Nota-se que em algumas equações de movimento é possível ter mais de um gerador de simetria, por exemplo, no oscilador harmônico mostrado no Capítulo 3 (WULFMAN; WYBOURNE, 1976; GORDON, 1986).

4.1.2 Redução de ordem

Para satisfazer a condição da eq. (16), deve-se escolher $\bar{\theta} = \theta$ e $\bar{t} = t$. Expandindo esta condição para as derivadas $\dot{\bar{t}}$ e $\ddot{\bar{t}}$, obtém-se:

$$\dot{\bar{t}} = \frac{d\bar{t}}{d\bar{\theta}} = \frac{1}{\dot{\theta}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\bar{t}} = \frac{d\dot{\bar{t}}}{d\bar{\theta}} = -\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}^3} \quad (49)$$

Com isto, as novas coordenadas são utilizadas para reescrever a equação de movimento, eq. (39):

$$-\frac{\ddot{\bar{t}}}{\dot{\bar{t}}^3} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \bar{\theta} \right) \sin \bar{\theta} = 0 \quad (50)$$

Uma nova projeção pode ser feita, então $\Upsilon = \dot{\bar{t}}$ e $\dot{\Upsilon} = \ddot{\bar{t}}$ e a eq. (50) fica:

$$-\frac{\dot{\Upsilon}}{\Upsilon^3} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \bar{\theta} \right) \sin \bar{\theta} = 0 \quad (51)$$

Resolvendo a eq. (51):

$$\Upsilon = \frac{\sqrt{\omega^2 \ell^2 \sin^2 \bar{\theta} + 2g\ell \cos \bar{\theta} + \mathcal{C}\ell^2}}{\omega^2 \ell \sin^2 \bar{\theta} + 2g \cos \bar{\theta} + \mathcal{C}\ell} \quad (52)$$

sendo $\mathcal{C}$ uma constante de integração. Retornando às coordenadas anteriores a partir da eq. (49):

$$\dot{\bar{t}} = \frac{d\bar{t}}{d\bar{\theta}} = \frac{\sqrt{\omega^2 \ell^2 \sin^2 \bar{\theta} + 2g\ell \cos \bar{\theta} + \mathcal{C}\ell^2}}{\omega^2 \ell \sin^2 \bar{\theta} + 2g \cos \bar{\theta} + \mathcal{C}\ell} \quad (53)$$

então:

$$\bar{t} = \int \frac{d\bar{\theta}}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \bar{\theta} + 2\frac{g}{\ell} \cos \bar{\theta} + \mathcal{C}}} \quad (54)$$

A eq. (54) não pode ser resolvida através da utilização de funções trigonométricas, pois não é possível achar a primitiva. Para resolver esta integral é necessário a utilização de integrais elípticas de Jacobi (BAKER; BILL, 2012; LEMOS, 2017). O Apêndice B apresenta uma discussão sucinta sobre as funções elípticas de Jacobi e sua utilização. A solução da eq. (54) é feita através da utilização de um programa de manipulação simbólica. O Apêndice C, apresenta os comandos e alguns pacotes utilizados para resolver a mesma.

Sendo assim, a eq. (54) pode ser resolvida, utilizando, com a devida atenção, o argumento (u, k) na transformação, com isto:

$$\theta(t) = 2 \arctan \left\{ \sqrt{a} \operatorname{dn} \left[\frac{1}{2} \omega t \sqrt{|p| a}, \sqrt{\frac{a-b}{a}} \right] \right\} \quad (55)$$

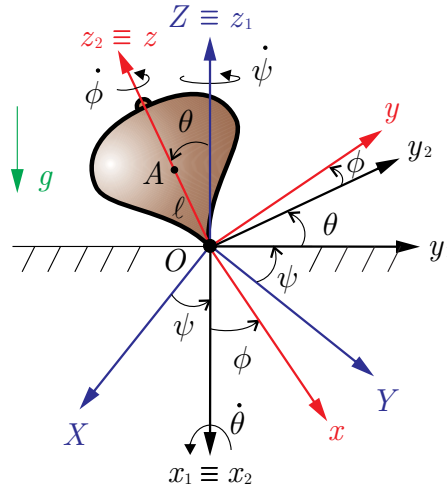
sendo $a \equiv \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$, $b \equiv \frac{1 + \cos \theta - 2 \cos \theta}{1 - \cos \theta + 2 \cos \theta}$ e $p \equiv \mathcal{C} - 1 \pm 2 \cos \theta$.

A equação (55) representa a solução analítica do ângulo de deslocamento do pêndulo em um aro rotativo com velocidade angular constante ω e é a mesma solução obtida no trabalho de Baker e Bill (2012). Este problema específico é similar ao exemplo apresentado nesta tese, no entanto em Baker e Bill (2012) não foram utilizadas as simetrias de Lie para tal fim.

4.2 Pião Axisimétrico com um ponto fixo

A fig. (3) mostra um pião axisimétrico com massa m que está fixo em O com ação de um campo gravitacional constante g . Para se parametrizar o movimento do pião no espaço utiliza-se uma sequência de três rotações consecutivas em torno de três eixos diferentes, utilizando os ângulos de Euler. Primeiramente, toma-se como referência o sistema inercial, $\mathcal{I}$, o eixo (X, Y, Z) e base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ fixa em O . A primeira rotação é em torno do eixo $Z \equiv z_1$ com velocidade angular $\dot{\psi}$ com um ângulo ψ no sistema móvel com (x_1, y_1, z_1) e base $\{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1\}$. O segundo giro é feito em torno de $x_1 \equiv x_2$ no sentido positivo, com velocidade angular $\dot{\theta}$ e com um ângulo θ no sistema móvel com (x_2, y_2, z_2) e base $\{\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k}_2\}$. Por fim, é feita a última rotação em torno de $z_2 \equiv z$ com uma velocidade angular $\dot{\phi}$ e um ângulo ϕ no sistema móvel com (x, y, z) e base $\{\hat{i}_3, \hat{j}_3, \hat{k}_3\}$. O centro de massa do pião é representado pelo ponto A e a distância do ponto O até este ponto ao longo do eixo z é ℓ (LEMOS, 2007; GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2011).

Figura 3 – Pião axisimétrico com um ponto fixo.



Fonte: Elaboração própria do autor.

A partir da fig. (3) é possível descrever a velocidade angular do pião, $_{B_2}\omega$, no sistema $\mathcal{B}_2$ coincidente com os eixos de simetria (SANTOS, 2001):

$${}_{B_2}\boldsymbol{\omega} = {}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\Psi}} + {}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\Theta}} + {}_{B_2}\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \dot{\theta}\hat{i}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\hat{j}_2 + \left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\hat{k}_2 \quad (56)$$

sendo ${}_{\mathcal{B}_2}\dot{\Psi}$ o vetor velocidade angular de precessão, ${}_{\mathcal{B}_2}\dot{\Theta}$ o vetor velocidade angular de nutação e ${}_{\mathcal{B}_2}\dot{\Phi}$ o vetor velocidade angular de rotação própria do pião, todos representados na base $\mathcal{B}_2$. A lagrangiana é dada por (LEMOS, 2007):

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} \tag{57}$$

sendo $\mathcal{T}$ a energia cinética:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \cdot \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\omega} \quad (58)$$

e $\mathbb{I}_O$ o tensor de inércia do pião de massa m calculado com relação ao ponto O :

$$\mathbb{I}_O = \begin{vmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{vmatrix}$$

sendo I_{x_2} , I_{y_2} e I_{z_2} os momentos de inércia de massa com relação aos eixos x_2 , y_2 e z_2 , respectivamente. Considerando que o pião é simétrico tem-se que $I_{x_2} \equiv I_{y_2} = I$, e então:

$$\mathbb{I}_O = \begin{vmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{vmatrix}$$

Uma vez calculada a velocidade angular do pião, a energia cinética, $\mathcal{T}$, fica descrita como:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}I_{z_2} \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right)^2 \quad (59)$$

e a energia potencial, $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = mgl \cos \theta \quad (60)$$

Com isto:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}I_{z_2} \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right)^2 - mgl \cos \theta \quad (61)$$

Assim, com o uso das equações de Euler-Lagrange, são obtidas as equações de movimento do pião:

$$\begin{aligned} I \left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) + I_{z_2} \left(\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \right) - mgl \sin \theta &= 0 \\ I \left(\ddot{\psi} \sin \theta + 2\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \right) - I_{z_2} \dot{\theta} \left(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \right) &= 0 \\ I_{z_2} \left(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \right) &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Assumindo que as velocidades angulares $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ são constantes, pode-se modificar a eq. (62) e obter as equações de movimento para o pião para a condição particular considerada:

$$\begin{aligned} I \left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) + I_{z_2} \left(\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \right) - mgl \sin \theta &= 0 \\ I \left(2\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \right) - I_{z_2} \dot{\theta} \left(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \right) &= 0 \\ I_{z_2} \left(\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \right) &= 0 \end{aligned} \quad (63)$$

As equações de movimento obtidas são equações diferenciais ordinárias não-lineares (LAWDEN, 2013). Para facilitar o cálculo das simetrias de Lie, é interessante escrever essas equações na forma $\mathcal{F}_i(t, \theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \ddot{\theta}) = 0$, com $i = 1, 2, 3$. Com isso, as equações de movimento ficam:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &\equiv I \left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) + I_{z_2} \left(\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \right) - mgl \sin \theta = 0 \\ \mathcal{F}_2 &\equiv I \left(2\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \right) - I_{z_2} \dot{\theta} \left(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \right) = 0 \\ \mathcal{F}_3 &\equiv I_{z_2} \left(\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

É importante salientar que é possível obter as simetrias de Lie considerando que o pião não possui velocidades angulares constantes. Nota-se também que as variáveis ψ e ϕ não aparecem explicitamente na lagrangiana sendo, portanto, variáveis cíclicas. A existência de uma variável cíclica indica que os momentos generalizados correspondentes são constantes (MONTEIRO, 2006). Ao se determinar as simetrias de Lie, encontram-se exatamente geradores infinitesimais correspondentes à essas mesmas variáveis que quando aplicados ao teorema de Noether revelam também os mesmos invariantes, como será mostrado a seguir.

4.2.1 Aplicação das simetrias de Lie nas equações do pião

Aplicando a condição de Lie, dada pela eq. (15), no sistema de eqs. (64), é possível obter as seguintes equações determinantes: $\frac{\partial \eta_\psi}{\partial \psi} = 0$, $\frac{\partial \eta_\psi}{\partial \phi} = 0$, $\frac{\partial \eta_\psi}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \eta_\psi}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \eta_\phi}{\partial \psi} = 0$, $\frac{\partial \eta_\phi}{\partial \phi} = 0$, $\frac{\partial \eta_\phi}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \eta_\phi}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \xi}{\partial \psi} = 0$, $\frac{\partial \xi}{\partial \phi} = 0$, $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$ e $\eta_\theta = 0$. Resolvendo estas equações é possível encontrar os seguintes geradores infinitesimais para a equação (64) listados na tabela (2).

Tabela 2 – Geradores infinitesimais do pião.

	ξ	η_q
$\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$	1	0
$\mathcal{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \psi}$	0	1
$\mathcal{X}_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$	0	1

Fonte: Elaboração própria do autor.

O gerador infinitesimal $\mathcal{X}_1$ está correlacionado com a translação temporal e corresponde ao invariante associado a conservação de energia, desde que não haja dissipação. O segundo e o terceiro gerador infinitesimal correspondem à rotação nos eixos onde se medem os ângulos ψ e ϕ que estão diretamente ligados à conservação dos momentos angulares associados às variáveis ψ e ϕ . Para demonstrar e verificar essas constantes, os geradores infinitesimais determinados pelas simetrias de Lie, podem ser aplicados ao teorema de Noether.

4.3 Teorema de Noether

O teorema que mostra a correspondência entre as simetrias variacionais comuns e as leis de conservação dos sistemas de equações de Euler-Lagrange, foi enunciado por Emmy Noether no início do século XX. Uma vez que admitimos simetrias de um sistema, o teorema de Noether fornece uma correspondência um-para-um entre simetrias variadas e leis de conservação (OLVER, 1986; MARTINS, 1999). Ou seja, para cada simetria encontrada em um sistema de equações diferenciais há uma quantidade se conservando. A busca por existência de simetrias na natureza tem como principal resultado a obtenção de invariantes. Nos casos onde se conhece a lagrangiana $\mathcal{L}$ e as funções da transformação ξ e η_q , a aplicação do teorema de Noether é como se fosse um revelador de quantidades $\mathcal{A}$ se conservando (MEI, 2000; BRIZARD, 2009).

A quantidade se conservando a partir de uma transformação de simetria pode ser determinada pelo teorema de Noether a partir de (MARTINS, 1999)¹:

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} (\dot{q}\xi - \eta_q) - \mathcal{L}\xi = \text{Constante} \quad (65)$$

de forma generalizada com n coordenadas como é o caso do pião, implica no seguinte invariante (NOETHER, 1918; LEMOS, 1993):

$$\mathcal{A}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \xi_i - \eta_{q_i}) - \mathcal{L}\xi_i \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mathcal{A}_i) = 0 \quad (66)$$

O resultado generaliza e unifica de uma forma que é possível ter a visualização geométrica dos princípios de conservação de energia, momento linear e momento angular. Com isso, aplicando os geradores infinitesimais encontrados pelas simetrias de Lie no teorema de Noether, descrito pela eq. (66), pode-se encontrar as constantes de movimento associadas. Para o primeiro gerador infinitesimal $\mathcal{X}_1$, sendo $\xi = 1$ e $\eta_\theta = 0$ tem-se:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} (\dot{\theta}\xi - \eta_\theta) - \mathcal{L}\xi \Rightarrow \mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}I_{z_2} \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right)^2 + mgl \cos \theta \quad (67)$$

que é uma constante de movimento que está relacionada diretamente com a energia total do sistema, que neste caso fica sendo a energia cinética $\mathcal{T}$ mais a energia potencial $\mathcal{V}$, não havendo dissipação de energia.

Considerando agora os geradores infinitesimais $\mathcal{X}_2$ sendo $\xi = 0$ e $\eta_\psi = 1$ e $\mathcal{X}_3$ sendo $\xi = 0$ e $\eta_\phi = 1$, tem-se, respectivamente:

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} (\dot{\psi}\xi - \eta_\psi) - \mathcal{L}\xi \Rightarrow \mathcal{A}_2 = I\dot{\psi} \sin^2 \theta + I_{z_2} \cos \theta \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right) \quad (68)$$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} (\dot{\phi}\xi - \eta_\phi) - \mathcal{L}\xi \Rightarrow \mathcal{A}_3 = I_{z_2} \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right) \quad (69)$$

mostrando assim que as quantidades $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ estão diretamente relacionadas com os momentos angulares se conservando para a coordenada associada a ψ e com o momento também se conservando para a coordenada associada a ϕ , respectivamente.

4.4 Redução de ordem e solução analítica da equação do movimento do pião

A partir das simetrias de Lie encontradas, pode-se reduzir a ordem do sistema de equações de movimento. Por já estarem na forma canônica, serão utilizados primeiramente

¹ Alguns livros de mecânica clássica tem demonstrações deste resultado tais como Goldstein (1965) e/ou Arnold (2013).

os geradores infinitesimais $\mathcal{X}_2$ e $\mathcal{X}_3$. Com isso, pode-se transformar a partir de uma mudança de variável, sendo $\dot{\psi} = \lambda$ e $\dot{\phi} = \zeta$ que para precessão estacionária, são constantes. Assim, a equação (64) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} I \left(\ddot{\theta} - \lambda^2 \sin \theta \cos \theta \right) + I_{z_2} \left(\lambda^2 \sin \theta \cos \theta + \zeta \lambda \sin \theta \right) - mg\ell \sin \theta &= 0 \\ I \left(2\lambda \dot{\theta} \cos \theta \right) - I_{z_2} \dot{\theta} (\lambda \cos \theta + \zeta) &= 0 \\ I_{z_2} \left(\lambda \dot{\theta} \sin \theta \right) &= 0 \end{aligned} \quad (70)$$

Para a redução de ordem de $\ddot{\theta}$, deve-se utilizar o gerador infinitesimal $\mathcal{X}_1$ exigindo algumas manipulações que podem ser facilitadas por programas de manipulação simbólica, como o *Maple*, *Mathematica* ou *wxMaxima*. No apêndice C se detalham estas manipulações.

Supondo que $\mathcal{X}$ é um campo vetorial que não se anula nos pontos de origem, pode-se introduzir novas coordenadas $\{\bar{t}(t, \theta, \zeta, \lambda), \bar{\theta}_1(t, \theta, \zeta, \lambda), \bar{\theta}_2(t, \theta, \zeta, \lambda), \bar{\theta}_3(t, \theta, \zeta, \lambda)\}$. A mudança de variáveis é feita usando os métodos para encontrar invariantes de grupo. Isto implica que $\mathcal{X}$ pode ser transformada na seguinte forma $\partial/\partial \bar{t}$ fornecendo assim $\bar{t}$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ e $\bar{\theta}_3$ que satisfaçam as seguintes condições (OLVER, 1986):

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1(\bar{t}) &= \xi \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \eta_\theta \frac{\partial \bar{t}}{\partial \theta} + \eta_\psi \frac{\partial \bar{t}}{\partial \lambda} + \eta_\phi \frac{\partial \bar{t}}{\partial \zeta} = 0 \\ \mathcal{X}_1(\bar{\theta}_1) &= \xi \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial t} + \eta_\theta \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta} + \eta_\psi \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \lambda} + \eta_\phi \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \zeta} = 0 \\ \mathcal{X}_1(\bar{\theta}_2) &= \xi \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial t} + \eta_\theta \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta} + \eta_\psi \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \lambda} + \eta_\phi \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \zeta} = 0 \\ \mathcal{X}_1(\bar{\theta}_3) &= \xi \frac{\partial \bar{\theta}_3}{\partial t} + \eta_\theta \frac{\partial \bar{\theta}_3}{\partial \theta} + \eta_\psi \frac{\partial \bar{\theta}_3}{\partial \lambda} + \eta_\phi \frac{\partial \bar{\theta}_3}{\partial \zeta} = 1 \end{aligned} \quad (71)$$

a partir dessa condição, pode-se dizer que $\bar{t} = \theta$, $\bar{\theta}_1 = \lambda$, $\bar{\theta}_2 = \zeta$ e $\bar{\theta}_3 = t$. Deve-se estender as mudanças de coordenadas para as derivadas de primeira ordem, então: $\dot{\bar{\theta}}_1 = \frac{\dot{\lambda}}{\theta}$, $\dot{\bar{\theta}}_2 = \frac{\dot{\zeta}}{\theta}$ e $\dot{\bar{\theta}}_3 = \frac{1}{\theta}$. Para as derivadas de segunda ordem: $\ddot{\bar{\theta}}_3 = -\frac{\ddot{\theta}}{\theta^3}$. Reescrevendo a equação (70) nas novas coordenadas e já realizando os cálculos e simplificações necessários chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I \left(\dot{\bar{\theta}}_3^2 + \dot{\bar{\theta}}_1^2 \sin^2 \bar{t} \right) + \frac{1}{2} I_{z_2} \left(\dot{\bar{\theta}}_2 + \dot{\bar{\theta}}_1 \cos \bar{t} \right)^2 + mg\ell \cos \bar{t} &= \mathcal{C}_1 \\ I \dot{\bar{\theta}}_1 \sin^2 \bar{t} + I_{z_2} \cos \bar{t} (\dot{\bar{\theta}}_2 + \dot{\bar{\theta}}_1 \cos \bar{t}) &= \mathcal{C}_2 \\ I_{z_2} \left(\dot{\bar{\theta}}_2 + \dot{\bar{\theta}}_1 \cos \bar{t} \right) &= \mathcal{C}_3 \end{aligned} \quad (72)$$

sendo $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ constantes. Pode-se observar que estas equações são constantes e também são iguais às constantes de movimento obtidas anteriormente pelo teorema de Noether para este pião. Isso mostra que as simetrias de Lie também são simetrias de Noether neste exemplo, como já era esperado, pois o pião é um sistema lagrangiano com equações de movimento extraídas a partir de um princípio variacional. Por fim, pode-se determinar

as expressões para θ , ψ e ϕ . Para não perder a generalidade, utiliza-se aqui para estes cálculos, os invariantes obtidos pelo teorema de Noether.

A partir da constante de movimento $\mathcal{A}_3$, pode-se obter:

$$\dot{\phi} = \frac{\mathcal{A}_3}{I_{z_2}} - \dot{\psi} \cos \theta \quad (73)$$

Utilizando a constante $\mathcal{A}_2$, obtém-se:

$$I\dot{\psi} \sin^2 \theta + I_{z_2} \cos \theta \left(\frac{\mathcal{A}_3}{I_{z_2}} \right) = \mathcal{A}_2 \quad (74)$$

então:

$$\dot{\psi} = \frac{\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 \cos \theta}{I \sin^2 \theta} \quad (75)$$

Introduzindo novas constantes, pode-se reescrever a constante $\mathcal{A}_1$ na seguinte forma:

$$\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}_1 - \frac{\mathcal{A}_3^2}{2I_{z_2}} \quad (76)$$

de onde pode-se deduzir:

$$\mathcal{A}'_1 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \mathcal{S}(\theta) \quad (77)$$

sendo:

$$\mathcal{S}(\theta) = \frac{(\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + mg\ell \cos \theta$$

o potencial efetivo. Realizando uma separação de variáveis na equação (77), pode-se obter:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I} (\mathcal{A}'_1 - \mathcal{S}(\theta)) \quad (78)$$

assim:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I}} \sqrt{(\mathcal{A}'_1 - \mathcal{S}(\theta))} \quad (79)$$

levando por fim à seguinte expressão:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{(\mathcal{A}'_1 - \mathcal{S}(\theta))}} = \sqrt{\frac{2}{I}} t \quad (80)$$

Não é possível expressar a solução desta integral em termos de funções elementares. Para a solução destas quadraturas podem ser usadas as integrais elípticas de Jacobi. Em um artigo recente publicado, Lemos (2017) apresentou a importância de se utilizar as funções elípticas de Jacobi na representação deste tipo de quadratura. Muitos trabalhos

e livros deixaram de abordar o uso das funções elípticas, no entanto, existem muitos problemas interessantes de mecânica que podem ser resolvidos em termos destas funções (LE MOS, 2017). O passo a passo de como se calcular uma integral utilizando as funções elípticas de Jacobi podem ser encontrados em trabalhos como o de Piña (2017) e Lemos (2017). Com θ determinado, pode-se encontrar os outros ângulos de Euler associados ao movimento do pião.

Com a consideração do argumento (u, k) na transformação obtém-se finalmente a solução analítica para as equações de movimento do pião axisimétrico, descritas por:

$$\theta(t) = \text{sgn}(a + b) \left[\sqrt{1 - c^2} \text{dn}(u, k) \sin(\Omega) + (d - c) \text{cn}(u, k) \text{sn}(u, k) \cos(\Omega) \right] \quad (81)$$

$$\psi(t) = -\sqrt{1 - c^2} \text{dn}(u, k) \cos(\Omega) + (d - c) \text{cn}(u, k) \text{sn}(u, k) \sin(\Omega) \quad (82)$$

$$\phi(t) = c + (d - c) \text{sn}^2(u, k) \quad (83)$$

sendo $a = \frac{\mathcal{A}_3}{I}$, $b = \frac{\mathcal{A}_2}{I}$, $c = \frac{\cos \theta}{\text{sn}^2(u, k)}$, $d = \frac{b}{a}$, $\Omega = \frac{\text{cn}(u, k)}{\text{sn}(u, k) \text{dn}(u, k)}$ e sgn a função sign:

$$\text{sgn}(a + b) = \begin{cases} -1 & \text{se } a + b < 0 \\ 0 & \text{se } a + b = 0 \\ 1 & \text{se } a + b > 0 \end{cases}$$

Como visto anteriormente, para se parametrizar a velocidade angular instantânea de um corpo rígido foram utilizados os ângulos de Euler. No entanto, problemas como singularidade podem aparecer quando se faz o uso de métodos numéricos para integração das equações de movimento. Com a utilização das simetrias de Lie obteve-se a solução analítica das equações que descrevem o movimento do pião.

4.5 Considerações finais

O presente capítulo apresentou exemplos práticos de como usar as simetrias de Lie para obtenção de invariantes e solução de equações de movimento de interesse na dinâmica de sistemas mecânicos. O primeiro exemplo envolveu um pêndulo oscilando em um aro rotativo. Foram propostas formas alternativas para reduzir a ordem da equação de movimento original para simplificar a integração das novas equações usando o teorema de Lie. As simetrias de Lie obtidas foram usadas de forma efetiva para execução desta parte. Os grupos de simetria de equações diferenciais ou problemas variacionais formam grupos de transformação locais que atuam de maneira geométrica no espaço da variável independente e dependente. Através das simetrias de Lie, sendo que a ordem foi facilmente reduzida e foi possível obter as primeiras integrais que foram resolvidas usando algumas

classes de funções especiais, como as funções elípticas de Jacobi. O método apresentado aqui pode ser estendido a diferentes tipos de equações de movimento para descrição de sistemas dinâmicos.

Já o segundo exemplo apresentou a aplicação da teoria de Lie para a descrição do movimento de um pião em ponto fixo. A partir das simetrias de Lie extraídas das equações determinantes foi possível relacioná-las diretamente com os teoremas clássicos de conservação. Uma comparação com as constantes de movimento extraídas pelo Teorema de Noether também é feita neste sentido. A partir disto, utilizou-se as simetrias de Lie para gerar as transformações visando a solução analítica completa das equações de movimento do pião em precessão estacionária, empregando para isto as funções elípticas de Jacobi.

5 As Simetrias de Lie na Teoria de Referencial Móvel

Este capítulo mostra como combinar e aplicar as simetrias de Lie para obtenção dos correspondentes referencial móvel de cada ação de um grupo de simetria em problemas da dinâmica de sistemas mecânicos.

Dado um grupo de transformações de Lie com dimensão finita atuando em uma variedade, sempre existirá uma ação conhecida como *ação prolongada de grupo* (OLVER, 2003). Esta ação representa a base fundamental da teoria de Lie envolvendo grupos de simetria em equações diferenciais. Estes invariantes diferenciais aparecem como constantes da ação do prolongamento de um grupo (OLVER, 2007). Élie Cartan estendeu isto no século XX envolvendo a geometria da ação deste grupo, fundamentando a chamada teoria de referencial móvel. Com esta teoria, diversas aplicações são possíveis e relatadas na literatura, como simetrias de problemas variacionais (GONÇALVES; MANSFIELD, 2012), problemas de bifurcação equivalentes (GOLUBITSKY; STEWART; SCHAEFFER, 1988), leis de conservação e formas diferenciais invariantes (OLVER, 1995), soluções invariantes em grupo (OLVER, 1986; OLVER; POHJANPELTO, 2009), etc.

5.1 Aspectos básicos na teoria de referencial móvel

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie r -dimensional agindo diferenciavelmente em uma variedade, M , m -dimensional. Na teoria clássica de Cartan, $\mathcal{G}$ é um grupo de natureza geométrica, por exemplo, um grupo euclidiano. No entanto, um grupo de Lie no cenário de referencial móvel é um grupo de ação de Lie. Um referencial móvel é definido como uma transformação $\mathcal{G}$ -equivariante $\rho: M \rightarrow \mathcal{G}$. Há dois tipos principais de equivariância¹ (OLVER, 2000; OLVER, 2012):

$$\rho(g \cdot z) = \begin{cases} g \cdot \rho(z) & \text{referencial móvel à direita} \\ \rho \cdot g^{-1} & \text{referencial móvel à esquerda} \end{cases} \quad (84)$$

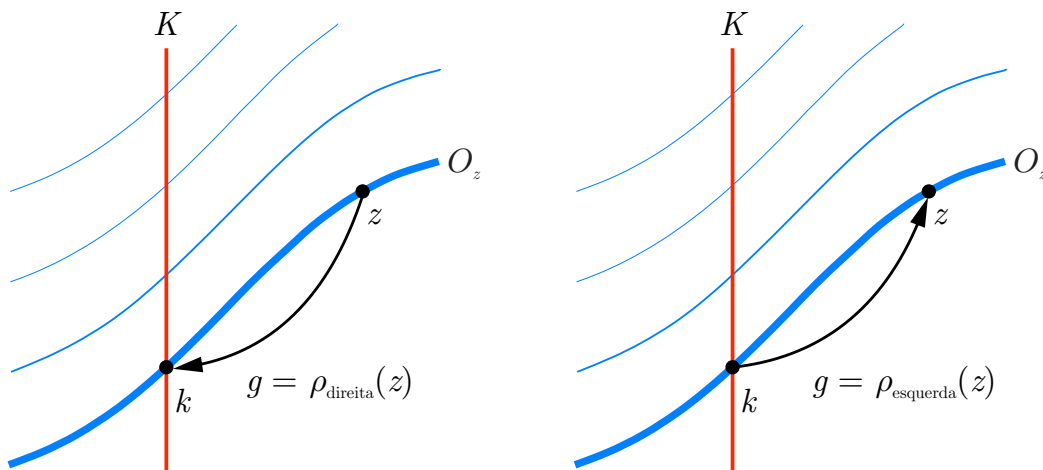
sendo g um elemento do grupo e $z \in M$. Todos os referenciais móveis clássicos são equivariantes à esquerda, mas, em muitos casos, as versões à direita podem ser bem mais fáceis de se calcular. Do ponto de vista formal, a diferença envolve o fato de que há várias maneiras de definir um mapa (transformação) equivariante. Do ponto de vista da construção, o motivo pelo qual um referencial móvel à direita é mais fácil de construir é

¹ Em matemática, a equivariância é uma forma de simetria para funções de um espaço simétrico para outro. Uma função é dita ser uma transformação equivariante quando seu domínio e contradomínio são atuados pelo mesmo grupo de simetria e quando a função se desloca com a ação do grupo. Ou seja, aplicar uma transformação de simetria e, em seguida, calcular a função produz o mesmo resultado que o cálculo da função e depois a aplicação da transformação (MARGULIS, 1991).

porque resolver as equações de normalização para os parâmetros do grupo leva diretamente a um referencial móvel à direita. A partir daí, pode-se inverter as equações para obter um referencial móvel à esquerda (OLVER, 2015).

Segundo Mansfield (2010), um referencial móvel existe em uma vizinhança de um ponto $z \in M$ se e somente se $\mathcal{G}$ age livremente² e regularmente³ perto de z . A construção prática de um referencial móvel baseia-se no método de normalização de Cartan que exige a escolha de uma seção transversal (local) para as órbitas do grupo. A fig. (4) ilustra, geometricamente, a construção de um referencial móvel (OLVER, 2003).

Figura 4 – Construção geométrica do referencial móvel.



(a) Referencial móvel à direita.

(b) Referencial móvel à esquerda.

Fonte: Adaptado de Olver (2012).

Seja $\mathcal{G}$ agindo regularmente na variedade M , m -dimensional e com órbitas de dimensão s . Com isto tem-se que uma seção transversal é uma subvariedade $(m - s)$ -dimensional de uma subvariedade $K \subset M$ de modo que K intersecta cada órbita transversalmente, no máximo uma vez. As mais importantes são as seções transversais de coordenadas:

$$K = \{z_1 = c_1, \dots, z_s = c_s\}$$

obtidas ao se igualar as s primeiras coordenadas à constantes (MANSFIELD, 2010; OLVER, 2012). Qualquer seção transversal pode ser localmente convertida em uma seção transversal de coordenadas por uma escolha adequada de coordenadas locais. Os elementos $k \in K$ da seção transversal podem ser vistos como *formas canônicas* para pontos arbitrários de $z \in M$, e suas coordenadas fornecem os *moduli* invariantes para a ação em grupo. Como K

² O único elemento de grupo $g \in \mathcal{G}$ que redireciona um ponto $z \in M$ é a identidade (OLVER, 2000).

³ A ação de um grupo é regular se todas as órbitas têm a mesma dimensão e cruzam gráficos de coordenadas suficientemente pequenas apenas uma vez (OLVER, 2000).

tem dimensão $m - s$, precisamente $m - s$ dessas funções invariantes serão funcionalmente independentes e, portanto, fornecerão um sistema gerador de invariantes.

5.2 Ação

Dado um grupo local de Lie é necessário que se entenda o que é a ação de um grupo, isto é, suas apresentações como um grupo de transformações de algum espaço dado (OLVER, 1986). As ações mais simples são ações lineares, e a teoria dessas ações é a mesma que a teoria das representações do grupo. Se M for um espaço vetorial, uma representação do grupo $\mathcal{G}$ é um mapa $R : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{GL}(M)$ tal que (OLVER, 1986)

$$R(gh) = R(g)R(h) \quad (85)$$

Diz-se que um grupo $\mathcal{G}$ age no espaço M se há um mapa

$$\alpha : \mathcal{G} \times M \rightarrow M \quad (86)$$

satisfazendo

$$\alpha(g_2, \alpha(g_1, z)) = \alpha(g_2 g_1, z) \quad (87)$$

ou

$$\alpha(g_2, \alpha(g_1, z)) = \alpha(g_1 g_2, z) \quad (88)$$

Ações obedecendo a eq. (87) são conhecidas como ações à esquerda enquanto as ações que obedecem a eq. (88) são conhecidas como ações à direita, como visto na seção anterior. As ações de um grupo de Lie, podem ser determinadas através da aplicação dos geradores infinitesimais de simetria obtidos pelas equações utilizadas para se determinar os geradores infinitesimais, conforme a eq. (13).

Nem todas as ações de grupo são de interesse. Para definir um referencial móvel é preciso que a ação seja livre e regular, pelo menos na vizinhança do espaço onde se quer obter o referencial. Infelizmente, a maioria das ações não é livre e regular, mas muitas vezes podem ser estendidas de várias formas para que elas se tornem livres e regulares, pelo menos para partes interessantes do espaço estendido. Em particular, isso é verdade para ações de prolongamento, desde que a ação inicial seja localmente efetiva em subconjuntos (OLVER, 1986; MANSFIELD, 2010).

Deixando $\mathcal{G}$ agir livremente e regularmente em M , e deixando $K \subset M$ ser uma seção transversal regular, pode-se pegar um ponto $z \in M$, dizendo que $g = \rho(z)$ pode ser o elemento de grupo exclusivo que mapeie z para a seção transversal, isto quer dizer que:

$$g \cdot z = \rho(z) \cdot z \in K \quad (89)$$

Então, $\rho : M \rightarrow \mathcal{G}$ será um referencial móvel para a ação do grupo.

Dadas as coordenadas locais $z = (z_1, \dots, z_m)$ em M , tomando $w(g, z) = g \cdot z$ como sendo as fórmulas explícitas para as transformações do grupo. O referencial móvel à direita $g = \rho(z)$ associado com a seção transversal K é obtido através da solução das equações de normalização (OLVER, 1986):

$$w_i(g, z) = \mathcal{C}_i \quad (90)$$

sendo $\mathcal{C}_i$ uma constante e $w(g, z)$ funções a valores reais.

Um exemplo envolve, a seguinte ação padrão:

$$y = x \cos \theta - u \sin \theta, \quad v = x \sin \theta + u \cos \theta$$

do grupo de rotação $\mathcal{G} = SO(2)$ em $M = \mathcal{R}^2$. As órbitas são os círculos centrados na origem e na própria origem. Escolhendo a seção transversal como sendo:

$$K = \{u = 0, x > 0\}$$

e resolvendo a equação de normalização:

$$v = x \sin \theta + u \cos \theta = 0$$

leva à obtenção do seguinte referencial móvel:

$$\theta = -\arctan\left(\frac{u}{x}\right)$$

5.3 Ação de um grupo infinitesimal

Seja $\mathcal{G}$ um grupo local de transformações agindo em uma variedade M via $g \cdot x = \Xi(g, x)$. Há uma ação infinitesimal correspondente da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de M em $\mathcal{G}$. Se o gerador de simetria $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$, pode-se definir $\Delta(\mathcal{X})$ como sendo o campo vetorial em M no qual o fluxo coincide com a ação do subgrupo $\exp(\varepsilon \mathcal{X})$ de G em M , $\exp$ é definido como o mapa exponencial $\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ e pode ser obtido através de $\varepsilon = 1$ no subgrupo gerado por $\mathcal{X}$ (BECK, 1994). Isto quer dizer que para $x \in M$:

$$\Delta(\mathcal{X}) \Big|_x = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Xi(\exp(\varepsilon \mathcal{X}), x) \quad (91)$$

Lie mostrou que existem precisamente três álgebras de Lie de dimensões finitas de campos vetoriais na linha real $M = \mathcal{R}$. São estas:

- a) A álgebra gerada por $\frac{\partial}{\partial x}$:** Esta gera uma ação de $\mathcal{R}$ em M como um grupo a um parâmetro de translação $x \mapsto x + \varepsilon$.

- b) **A álgebra gerada por $\frac{\partial}{\partial x}$ e $x\frac{\partial}{\partial x}$:** O segundo campo vetorial gera o grupo de dilatação $x \mapsto \lambda x$. A ação correspondente em $\mathcal{R}$ é o grupo $x \mapsto \alpha x + \beta$.
- c) **A álgebra gerada por $\frac{\partial}{\partial x}$, $x\frac{\partial}{\partial x}$ e $x^2\frac{\partial}{\partial x}$:** O terceiro campo vetorial gera o grupo de inversão $x \mapsto \frac{x}{1 - \varepsilon x}$, $|\varepsilon| < \frac{1}{x}$. A ação correspondente é o grupo de $x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$.

5.4 Invariância

Se ρ é um referencial móvel à direita, então há uma quantidade $l(z) = \rho(z) \cdot z$ que é chamada de um invariante da ação de um grupo (MANSFIELD, 2010). Para a ação à esquerda tem-se que:

$$l(g \cdot z) = \rho(g \cdot z) \cdot (g \cdot z) = (\rho(g \cdot z)g) \cdot z = (\rho(z)g^{-1}g) \cdot z = \rho(z) \cdot z = l(z)$$

já para a ação à direita:

$$\rho(g \cdot z) \cdot (g \cdot z) = (g\rho(g \cdot z)) \cdot z = (gg^{-1}\rho(z)) \cdot z = \rho(z) \cdot z$$

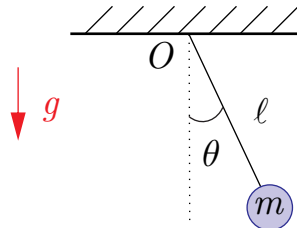
O mapa $z \mapsto l(z) = \rho(z) \cdot z$ é chamado de mapa de invariantização (STROGATZ, 2018).

Nas próximas seções apresentam-se alguns problemas ilustrativos do uso das simetrias de Lie para o cálculo de referencial móvel.

5.5 Referencial móvel de um pêndulo simples

A fig. (5) mostra um pêndulo simples com massa m que está fixo em O com a ação de um campo gravitacional g . O comprimento da haste do pêndulo é ℓ . A coordenada generalizada usada para caracterizar o movimento é dada por θ .

Figura 5 – Pêndulo simples.



Fonte: Elaboração própria do autor.

A equação de movimento que descreve a dinâmica do pêndulo simples é dada por:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (92)$$

O primeiro passo é determinar as simetrias de Lie para a eq. (92) através da aplicação do teorema de Lie, eq. (15). Com isso, obtém-se o seguinte gerador infinitesimal de simetria: $\frac{\partial}{\partial t}$, sendo que $\xi = 1$ e $\eta = 0$. Consequentemente, a ação deste grupo de Lie é dada por:

$$\bar{t} = t + \varepsilon, \quad \bar{\theta} = \theta \quad (93)$$

Considerando a seguinte ação transversal:

$$K = \{\bar{t} = 0, t > 0\}$$

e resolvendo a equação de normalização:

$$\bar{t} = t + \varepsilon = 0$$

pode-se obter o seguinte referencial móvel à direita:

$$t = -\varepsilon$$

Como a ação que deu origem a este referencial móvel é proveniente de um gerador infinitesimal de translação temporal, o referencial móvel obtido nada mais é que uma relação com o tempo.

5.6 Utilização de referencial móvel para redução da ordem da equação do pêndulo oscilando em um aro rotativo

Pode-se ver que uma ação de grupo em um espaço M induz uma ação em curvas em M e uma ação prolongada em suas tangentes e derivadas de ordem superior. Considerando agora o conjunto de curvas solução para uma EDO, $\mathcal{F}(t, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots) = 0$, se $\mathcal{G}$ é um grupo de simetrias de $\mathcal{F}$, então há uma ação no conjunto de curvas solução. O grupo de simetrias de uma EDO leva a obtenção de soluções por quadraturas (MANSFIELD, 2010).

Tomando como exemplo o problema do pêndulo oscilando em um aro rotativo, abordado no Capítulo 4, que possui uma simetria de translação temporal $\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial t}$, a ação de grupo determinada pela simetria de translação temporal é o grupo de um parâmetro dada por:

$$\bar{t} = t + \varepsilon, \quad \bar{\theta} = \theta$$

Seguindo com o processo de invariabilização, os invariantes diferenciais para o primeiro prolongamento, eq. (9), e segundo prolongamento, eq. (11), da ação de $\mathcal{G}$ são, respectivamente, θ e $\dot{\theta}$. Segundo o corolário 2.54 de Olver (1986) supondo que $\mathcal{G}$ é um

grupo de transformações agindo em M , pode-se considerar que $\mathfrak{y} = \eta(t, \theta)$ e $\mathfrak{w} = \xi(t, \theta, \dot{\theta})$ são um grupo completo de invariantes da primeira prolongação de $\mathcal{G}$. Então as derivadas:

$$\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{w}, \quad d\mathfrak{w}/d\mathfrak{y}, \dots$$

forneem um grupo completo de invariantes independentes. A partir disso pode-se dizer que $\mathfrak{y} = \theta$, $\mathfrak{w} = \dot{\theta}$ e $d\mathfrak{w}/d\mathfrak{y} = \ddot{\theta}/\dot{\theta}$. Substituindo isto na eq. (39), pode-se obter:

$$\mathfrak{w} \frac{d\mathfrak{w}}{d\mathfrak{y}} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos \mathfrak{y} \right) \sin \mathfrak{y} = 0 \quad (94)$$

resolvendo a eq. (94), obtém-se:

$$\mathfrak{w} = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \mathfrak{y} + 2 \frac{g}{\ell} \cos \mathfrak{y} + \mathcal{C}} \quad (95)$$

como $\mathfrak{w} = \dot{\theta}$ e $\mathfrak{y} = \theta$, pode-se reescrever a eq. (95) como:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \theta + 2 \frac{g}{\ell} \cos \theta + \mathcal{C}} \quad (96)$$

obtendo-se a seguinte quadratura:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \theta + 2 \frac{g}{\ell} \cos \theta + \mathcal{C}}} \quad (97)$$

A integração desta quadratura pode ser realizada com os mesmos procedimentos realizados no Capítulo 4. Com isto, pode-se obter:

$$\theta(t) = 2 \arctan \left\{ \sqrt{a} \operatorname{dn} \left[\frac{1}{2} \omega t \sqrt{|p| a}, \sqrt{\frac{a-b}{a}} \right] \right\} \quad (98)$$

sendo $a \equiv \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$, $b \equiv \frac{1 + \cos \theta - 2 \cos \theta}{1 - \cos \theta + 2 \cos \theta}$ e $p \equiv \mathcal{C} - 1 \pm 2 \cos \theta$.

Pode-se observar que através da aplicação das simetrias de Lie na teoria de referencial móvel para redução de ordem, obtém-se a mesma quadratura que foi obtida apenas utilizando as simetrias de Lie.

5.7 Utilização de referencial móvel para redução da ordem da equação do pião axisimétrico

Tomando como exemplo agora o problema do pião simétrico, abordado no Capítulo 4, o qual possui uma simetria de translação temporal $\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ e duas de rotação $\mathcal{X}_2 = \frac{\partial}{\partial \psi}$ e $\mathcal{X}_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$. A ação de grupo determinada pela simetria de translação temporal é o grupo de um parâmetro dada por:

$$\bar{t} = t + \varepsilon, \quad \bar{\theta} = \theta$$

já para as simetrias de rotação:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t, & \bar{\psi} &= \psi + \varepsilon \\ \bar{t} &= t, & \bar{\phi} &= \phi + \varepsilon\end{aligned}$$

Considerando a seguinte ação transversal:

$$K = \{\bar{t} = 0, \bar{\psi} = 0, \bar{\phi} = 0, t > 0, \theta > 0, \psi > 0, \phi > 0\}$$

e resolvendo a equação de normalização pode-se obter os seguintes referencial móvel:

$$t = -\varepsilon \quad \phi = -\varepsilon \quad \psi = -\varepsilon$$

A partir do processo de invariantização, pode-se dizer que $\mathfrak{x} = \theta$, $\mathfrak{y} = \lambda$, $\mathfrak{z} = \zeta$ e $\mathfrak{w} = t$. Deve-se estender as mudanças de coordenadas para as derivadas de primeira ordem, então: $\dot{\mathfrak{y}} = \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\theta}}$, $\dot{\mathfrak{z}} = \frac{\dot{\zeta}}{\dot{\theta}}$ e $\dot{\mathfrak{w}} = \frac{1}{\dot{\theta}}$. Para as derivadas de segunda ordem: $\ddot{\mathfrak{w}} = -\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}^3}$. Reescrevendo a equação (70) nas novas coordenadas e já realizando os cálculos e simplificações necessários chega-se a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I(\dot{\mathfrak{w}}^2 + \dot{\mathfrak{y}}^2 \sin^2 \mathfrak{x}) + \frac{1}{2}I_{z_2}(\dot{\mathfrak{z}} + \dot{\mathfrak{y}} \cos \mathfrak{x})^2 + mgl \cos \mathfrak{x} &= \mathcal{C}_1 \\ I\dot{\mathfrak{y}} \sin^2 \mathfrak{x} + I_{z_2} \cos \mathfrak{x}(\dot{\mathfrak{z}} + \dot{\mathfrak{y}} \cos \mathfrak{x}) &= \mathcal{C}_2 \\ I_{z_2}(\dot{\mathfrak{z}} + \dot{\mathfrak{y}} \cos \mathfrak{x}) &= \mathcal{C}_3\end{aligned}\tag{99}$$

sendo $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ constantes.

Interessante ressaltar e avaliar que até mesmo por meio do método de referencial móvel as equações reduzidas também são simetrias de Noether, conforme mostrado no Capítulo 4. A partir da constante de movimento $\mathcal{C}_3$, pode-se obter:

$$\dot{\mathfrak{z}} = \frac{\mathcal{C}_3}{I_{z_2}} - \dot{\mathfrak{y}} \cos \mathfrak{x}\tag{100}$$

Utilizando a constante $\mathcal{C}_2$, obtém-se:

$$I\dot{\mathfrak{y}} \sin^2 \mathfrak{x} + I_{z_2} \cos \mathfrak{x} \left(\frac{\mathcal{C}_3}{I_{z_2}} \right) = \mathcal{C}_2\tag{101}$$

então:

$$\dot{\mathfrak{y}} = \frac{\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_3 \cos \mathfrak{x}}{I \sin^2 \mathfrak{x}}\tag{102}$$

Seguindo os mesmos passos realizados no Capítulo 4, chega-se por fim à seguinte expressão:

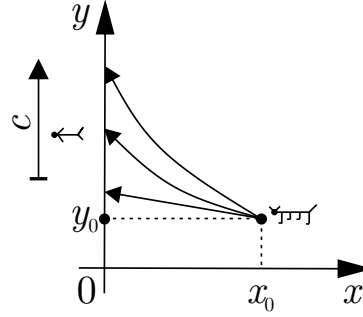
$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\mathcal{C}_1' - \mathcal{S}(\mathfrak{x}))}} = \sqrt{\frac{2}{I}} \mathfrak{w}\tag{103}$$

Como pode-se observar, a integral é a mesma que foi obtida no capítulo anterior. A partir daqui, utiliza-se das mesmas ferramentas apresentadas anteriormente para a solução da mesma.

5.8 Utilização de referencial móvel em um problema de vínculos não-holônomos

O exemplo aqui ilustrado é o mesmo considerado no trabalho de Swaczyna (2011), no entanto neste trabalho não foram consideradas as simetrias de Lie e nem o método de referencial móvel. Considera-se um cachorro perseguindo um homem se movendo no plano. O homem inicia o movimento na origem 0 de um sistema de coordenadas (x, y) e se move ao longo do eixo y com velocidade constante c . O cachorro inicia no mesmo momento a partir do ponto (x_0, y_0) , $x_0 \geq 0$, $y_0 \neq 0$ e corre de tal maneira, que sua velocidade em cada momento é dada pela linha que liga sua posição instantânea e a posição instantânea do homem. A fig. (6) apresenta como é dada esta relação.

Figura 6 – Trajetória do homem e do cachorro



Fonte: Swaczyna (2011).

A 1-forma laringiana deste problema é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt \quad (104)$$

e define um sistema mecânico de primeira ordem dado por α no sistema $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ representado em 2-forma:

$$\alpha = d\theta_{\mathcal{L}} + F = -m\omega^1 \wedge d\dot{x} - m\omega^2 \wedge d\dot{y} + F \quad (105)$$

sendo m a massa do cachorro, $\omega^1 = dx - \dot{x}dt$, $\omega^2 = dy - \dot{y}dt$ são as 1-formas de contato e F é qualquer 2-contato 2-forma. Este sistema mecânico está relacionado à forma dinâmica:

$$\mathcal{E} = -m\ddot{x}dx \wedge dt - m\ddot{y}dy \wedge dt \quad (106)$$

A restrição é dada pelo requisito de que em cada momento seja conhecida a direção do movimento do cão. O coeficiente angular da trajetória do cachorro pode ser descrito por:

$$\frac{dy}{dx} = G(t, x, y) \quad (107)$$

ou então pode ser dado na seguinte forma:

$$G(t, x, y) \dot{x} - \dot{y} = 0 \quad (108)$$

que é uma restrição não-holônoma nas componentes de velocidade. O coeficiente angular da trajetória em um tempo t e em um ponto (x, y) pode ser reescrito ainda na seguinte forma:

$$G(t, x, y) = \frac{y - ct}{x} \quad x \neq 0 \quad (109)$$

Consequentemente, a restrição não-holônoma, eq. (108), pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\dot{y} = \frac{y - ct}{x} \dot{x} \quad (110)$$

O sistema de restrição, α_Q relacionado com o sistema mecânico, α e com a restrição dada pela eq. (110) é a classe de equivalência 2-forma dado por:

$$\alpha_Q = A'_1 \omega^1 \wedge dt + B'_{11} \omega^1 \wedge d\dot{x} + \bar{F} + \varphi_{(2)} \quad (111)$$

sendo:

$$A'_1 = \frac{mc\dot{x}(y - ct)}{x^2}$$

e

$$B'_{11} = -m \left(1 + \frac{(y - ct)^2}{x^2} \right)$$

e $\bar{F}$ uma força do tipo 2-contato 2-forma e $\varphi_{(2)}$ é uma restrição 2-forma definida em uma subvariedade Q .

A equação do movimento reduzida do sistema de restrição é dada por:

$$\left[\frac{mc(y - ct)}{x^2} \dot{x} - m \left(\frac{x^2 + (y - ct)^2}{x^2} \right) \ddot{x} \right] = 0 \quad (112)$$

A equação que descreve esta dinâmica é obtida através da solução das equações Chetaev do movimento, as quais possuem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \mu^* G(x, y, t) \\ \ddot{y} &= -\mu^* \end{aligned} \quad (113)$$

sendo que o símbolo $\mu^* = \mu/m$ denota um multiplicador de Lagrange reduzido e G é uma função dada pela eq. (109). Agora, multiplicando a primeira equação por $\dot{x}$ e a segunda por $\dot{y}$ e somando estas equações, pode-se obter:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] = \mu^* [G(x, y, t) \dot{x} - \dot{y}] \quad (114)$$

Desde que a equação de restrição, eq. (108), seja válida, é possível obter a seguinte equação:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 = \text{constante} \quad (115)$$

que é a equação que descreve a velocidade do cachorro e que é constante. A eq. (107), permite determinar a trajetória do cachorro em uma forma explícita. Sabe-se que:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} y' \quad (116)$$

e substituindo a eq. (109) na eq. (107) pode-se obter:

$$\frac{dy}{dx} \equiv y' = \frac{y - ct}{x} \quad \rightarrow \quad xy' = y - ct$$

Derivando esta equação com relação a x :

$$xy'' = -c \frac{dt}{dx} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{c}{xy''} \quad (117)$$

Levando em consideração que o movimento acontece no primeiro quadrante, pode-se ter as seguintes relações: $x > 0$, $\dot{x} < 0$ e $y'' > 0$. Substituindo a identidade, eq. (116), na eq. (115), obtém-se:

$$\dot{x}^2 \left(1 + (y')^2 \right) = v^2 \quad \rightarrow \quad -\dot{x} = \frac{v}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (118)$$

Finalmente, comparando esta equação com a eq. (117), pode-se obter a equação diferencial para a curva que descreve a relação do cachorro com o homem:

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{c}{v} \frac{1}{x} \quad (119)$$

Reescrevendo a eq. (119), na seguinte forma:

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'') \equiv \frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{c}{v} \frac{1}{x} = 0 \quad (120)$$

e aplicando na condição de Lie dada pela eq. (15) obtém-se:

$$(\mathcal{U}'' + \mathcal{X}) \mathcal{F} = \xi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + \beta^{(1)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} + \beta^{(2)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y''} = 0 \quad (121)$$

Após aplicar a condição de Lie, eq. (121), na eq. (120) pode-se obter as seguintes equações determinantes:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (122)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\xi}{x} = 0 \quad (123)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\xi}{x} = 0 \quad (124)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad (125)$$

Resolvendo as equações de (122) até (125) obtém-se os seguintes geradores infinitesimais de simetria listados na tab. (3).

Tabela 3 – Geradores infinitesimais do cachorro.

	ξ	η
$\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	0	1
$\mathcal{X}_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	x	y

Fonte: Elaboração própria do autor.

Tomando o gerador infinitesimal $\mathcal{X}_1$, a ação para este grupo de simetria é dada por:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + \varepsilon \quad (126)$$

Considerando a seguinte ação transversal:

$$K = \{\bar{y} = 0, y > 0\}$$

e resolvendo a equação de normalização:

$$\bar{y} = y + \varepsilon = 0$$

pode-se obter o seguinte referencial móvel:

$$y = -\varepsilon$$

Seguindo com o processo de invariatisação pode-se considerar que $\mathfrak{y} = x$, $\mathfrak{w} = y$, $\mathfrak{w}' = y'$ e $\mathfrak{w}'' = y''$. Substituindo isto na eq. (119), pode-se obter:

$$\frac{\mathfrak{w}''}{\sqrt{1 + (\mathfrak{w}')^2}} = \frac{c}{v} \frac{1}{\mathfrak{y}} \quad (127)$$

Uma nova projeção pode ser feita, então $\Upsilon = \mathfrak{w}'$ e $\Upsilon' = \mathfrak{w}''$, fazendo com que a eq. (127) fique sendo descrita como:

$$\Upsilon' = \frac{c\sqrt{1 + (\Upsilon)^2}}{v\mathfrak{y}} \quad (128)$$

Resolvendo a equação anterior obtém-se:

$$\Upsilon = \sinh\left(\frac{\ln(\mathfrak{y})c + \mathcal{C}c}{v}\right) \quad (129)$$

sendo $\mathcal{C}$ uma constante de integração. Retornando às coordenadas originais:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{\ln(x)c + \mathcal{C}c}{v}\right) \quad (130)$$

então:

$$y = \int \sinh\left(\frac{\ln(x)c + \mathcal{C}c}{v}\right) dx \quad (131)$$

Resolvendo a quadratura da eq. (131), tem-se:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{vxx^{\frac{1}{v}}e^{\frac{c}{v}}}{v+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{vx}{(v-1)x^{\frac{1}{v}}e^{\frac{c}{v}}} \right) \quad (132)$$

que é a forma explícita final da curva de busca desejada entre o cachorro e o homem.

5.9 Considerações finais

O presente capítulo apresentou a aplicação das simetrias de Lie na teoria de referencial móvel, revisando os conceitos básicos relacionados à esta teoria e a aplicação desta para redução da ordem de equações diferenciais. Foram apresentados conceitos de ação, ação de um grupo infinitesimal e invariância para a construção do referencial móvel. Como se viu na revisão da literatura há vários tipos de aplicações desta teoria. Através do contexto geral desta tese utilizou-se a teoria de referencial móvel para redução da ordem da equação que descreve o movimento do pêndulo oscilando em um aro rotativo e o pião simétrico. O resultado obtido foi o mesmo que o obtido no Capítulo 4, mostrando-se assim, uma aplicação das simetrias de Lie na teoria de referencial móvel. Outro exemplo considerando vínculos não-holonomos foi considerado e a equação que descreve o gráfico da curva de movimento de um cachorro com relação ao homem foi determinada.

Pode-se listar algumas considerações do que são referencial móvel:

- Um referencial móvel clássico é um conjunto de vetores que formam uma base ortogonal para o espaço tangente de uma variedade que contém o seu conjunto de interesse. Por exemplo, uma curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ tem três vetores anexados a cada ponto na curva que formam uma base para o espaço tangente de $\mathbb{R}^3$.

- A versão de Olver do referencial móvel não é a mesma que o conceito acima. A razão pela qual a versão de Olver é mais abstrata é porque sua definição original permite que o método seja aplicado em mais situações e seus algoritmos dão uma maneira muito direta de determinar invariantes diferenciais.
- A definição de Olver permite calcular os invariantes diferenciais de uma maneira muito mais direta. Isto gira em torno da observação de que um invariante é constante ao longo de órbitas e, portanto, qualquer invariante é completamente determinado por seus valores em órbitas distintas. Uma seção transversal é uma subvariedade de dimensão adequada que intercepta as órbitas transversalmente. Isto significa que um invariante diferencial é determinado pelo seu valor em uma seção transversal.

6 Considerações Finais

As principais conclusões alcançadas neste trabalho são apresentadas neste capítulo, assim como algumas sugestões de possíveis trabalhos futuros.

6.1 Conclusões

Neste trabalho foram apresentados como as simetrias de Lie podem ser usadas para a solução de equações de movimento de interesse na análise de sistemas mecânicos. A formulação para o cálculo das simetrias de Lie e a aplicação em problemas de dinâmica de sistemas mecânicos foram apresentadas nos capítulos 3 e 4 respectivamente. Por sua vez a aplicação da teoria de invariantes via o método de referencial móvel foi exemplificado no capítulo 5 incluindo como as simetrias de Lie podem ser generalizadas e aplicadas em diferentes problemas.

Considerando os resultados obtidos podem ser ponderados os seguintes aspectos:

- Através do método desenvolvido por Lie diversos métodos de integração para a resolução de classes especiais de equações diferenciais foram unificados. A contribuição de Lie foi avançar a compreensão da natureza da simetria e, assim, ele ajudou a preparar o cenário para os avanços fundamentais da física e da matemática obtidos atualmente.
- A aplicação das simetrias de Lie em problemas da dinâmica de sistemas mecânicos se mostra de grande importância. A partir da aplicação do teorema de Lie nas equações de movimento testadas no presente trabalho foram obtidos geradores infinitesimais com propriedades geométricas importantes que caracterizam várias informações dos modelos em estudo. Através da análise geométrica dos geradores infinitesimais verificou-se que existiam geradores de simetrias correspondentes a translação temporal, translação espacial e rotação.
- A partir dos geradores de simetria foi possível reduzir a ordem das equações diferenciais para quadraturas. A partir da solução destas quadraturas pelas funções elípticas de Jacobi, chegou-se as soluções analíticas das equações.
- A correspondência entre simetrias de Lie e leis de conservação foi exemplificada a partir do teorema de Noether. Como se viu no problema do pêndulo simétrico, o gerador de simetria correspondente à translação temporal estava associado à conservação de energia e os geradores de simetria correspondentes à rotação estavam associados à conservação de momento angular.

- A aplicação das simetrias de Lie na teoria de referencial móvel pode ser realizada para diversas aplicações. A redução de ordem e a obtenção da solução analítica para os problemas do pêndulo oscilando em um aro rotativo, pião simétrico e vínculo não-holonomo foi feita através de referencial móvel e obteve-se a mesma solução que foi obtida através da aplicação das simetrias de Lie.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Analisando este trabalho, é possível definir alguns tópicos de pesquisa futuras para melhorar os resultados atuais e também explorar novas aplicações:

- Análise de problemas descritos por equações diferenciais parciais encontrados na área da dinâmica de sistemas dinâmicos.
- Combinação da teoria de referencial móvel com a teoria de controle para aplicações. Atualmente, os métodos de controle em sistemas contínuos partem primeiro da discretização das equações diferenciais parciais usando métodos de aproximação, como a formulação de elementos finitos. Após isto, controladores são projetados. A ideia de referencial móvel combinado com simetrias de Lie pode ser aplicada para propor controladores diretamente no modelo contínuo descrito por EDPs, sem necessidade de discretização a priori.
- Outras aplicações significativas da teoria de referencial móvel incluem o cálculo de grupos de simetria e classificação de EDPs (MANSFIELD, 2001; MOROZOV, 2002); geometria e dinâmica de curvas e superfícies em espaços homogêneos, com aplicações para sistemas integráveis (BEFFA, 2003; BEFFA, 2006; BEFFA, 2008; MOROZOV, 2002); construção de métodos para reconhecimento de objetos em imagens 2D e 3D (FENG; KOGAN; KRIM, 2008); solução de problemas de correspondência objeto-imagem para curvas sob projeções (BURDIS; KOGAN, 2012; BURDIS, 2013; KOGAN; OLIVER, 2015); recuperação de estrutura de objetos tridimensionais de movimento (BAZIN; BOUTIN, 2002), reconhecimento de estrutura de DNA (SHAKIBAN; LLOYD et al., 2004); distinção de tumores malignos e benignos no combate ao câncer de mama, assim como melanomas e não melanomas (GRIM; SHAKIBAN, 2015), etc.
- A propagação de ondas em estruturas descontínuas ou com padrão que se repete (periódicas) tem tido bastante aplicações em redução de vibrações (KAPANIA; RACITI, 1989; THOMPSON, 2008; SPADONI; RUZZENE; CUNEFARE, 2009). No geral a estrutura periódica com simetrias, em especial do tipo radial, tem permitido aplicar uma infinidade de métodos para redução de ordem de modelos numéricos usados para aproximação. Deve se destacar que isto é muito bem vindo, pois no

geral estes modelos tem matrizes de rigidez e inércia bem dispersas e grandes para se atingir faixas altas de frequências. Um ponto observado na literatura é que existe uma carência de se propor a redução da ordem das equações diferenciais que descrevem a propagação de ondas das estruturas antes de realizar a aproximação numérica por, por exemplo, método dos elementos espectrais ou método dos elementos finitos; ou seja; realizar uma redução da ordem das equações com simetrias de Lie. A proposta seria obter geradores de simetria mais generalizados, não apenas os de caráter geométrico, e obter a redução da ordem para extração das integrais primeira, para somente depois disto realizar a discretização para solução numérica. Acredita-se que a capacidade de redução da ordem dos modelos pode ser bem mais acentuada por generalizar o conceito de simetria das próprias equações de propagação das ondas. Os testes iniciais usando a equação da onda em estruturas unidimensionais já estão em estudo no grupo de pesquisa na FEIS/UNESP e deverá ser tema de uma futura tese de doutorado.

Referências

- ABRAHAM-SHRAUNER, B. Hidden symmetries, first integrals and reduction of order of nonlinear ordinary differential equations. **Journal of Nonlinear Mathematical Physics**, Taylor & Francis, New York, v. 9, p. 1–9, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.2991/jnmp.2002.9.s2.1>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table**. New York: Dover New York, 1965. v. 2172.
- AKBULUT, A.; TASCAN, F. Application of conservation theorem and modified extended tanh-function method to (1+1)-dimensional nonlinear coupled Klein–Gordon–Zakharov equation. **Chaos, Solitons and Fractals**, Oxford, v. 104, n. Supplement C, p. 33 – 40, 2017.
- AL-OMARI, S.; ZAMAN, F.; AZAD, H. Lie symmetries, optimal system and invariant reductions to a nonlinear Timoshenko system. **Mathematics**, Basel, v. 5, n. 2, p. 34, 2017.
- ANDERSON, R. L.; DAVISON, S. M. A generalization of Lie’s “counting” theorem for second-order ordinary differential equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 48, n. 1, p. 301 – 315, 1974. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X74902364>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.
- ARNOLD, V. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l’hydrodynamique des fluides parfaits. **Annales de l’institut Fourier**, Grenoble, v. 16, n. 1, p. 319–361, 1966.
- ARNOLD, V. I. **Mathematical methods of classical mechanics**. New York: Springer Science & Business Media, 2013.
- ARRIGO, D. J. **Symmetry analysis of differential equations: an introduction**. Conway: John Wiley & Sons, 2015.
- BAGDERINA, Y. Y. Symmetries and invariants of the systems of two linear second-order ordinary differential equations. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 19, n. 10, p. 3513 – 3522, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.02.023>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.
- BAKER, T. E.; BILL, A. Jacobi elliptic functions and the complete solution to the bead on the hoop problem. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, New York, v. 80, n. 6, p. 506–514, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1119/1.3682321>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.
- BALEANU, D. et al. Lie symmetry analysis, exact solutions and conservation laws for the time fractional Caudrey–Dodd–Gibbon–Sawada–Kotera equation. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 59, p. 222 – 234, 2018. Disponível

em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570417304033>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

BASQUEROTTO, C. H. C. C.; RIGHETTO, E.; SILVA, S. d. As simetrias de Lie de um pião. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Scielo, v. 40, n. 2, p. e2315, 2018. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172018000200415&nrm=iso>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

BASQUEROTTO, C. H. C. C.; RIGHETTO, E.; SILVA, S. da. Applications of the Lie symmetries to complete solution of a bead on a rotating wire hoop. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer Berlin Heidelberg, v. 40, n. 2, p. 48, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-018-0995-x>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. **Teoria de Grupos**. São Paulo: Livraria da física, 2008.

BAUMANN, G. **Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica**. New York: Springer, 2000.

BAZIN, P.-L.; BOUTIN, M. Structure from motion: Theoretical foundations of a novel approach using custom built invariants. **Computer Vision and Pattern Recognition**, 2002.

BECK, J. Braid group action and quantum affine algebras. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, New York, v. 165, n. 3, p. 555–568, 1994.

BEFFA, G. Relative and absolute differential invariants for conformal curves. v. 13, p. 213–245, 01 2003.

BEFFA, G. M. Poisson geometry of differential invariants of curves in some nonsemisimple homogeneous spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society (AMS), v. 134, n. 03, p. 779–792, mar 2006.

BEFFA, G. M. Projective-type differential invariants and geometric curve evolutions of KdV-type in flat homogeneous manifolds. **Annales de l'institut Fourier**, Grenoble, v. 58, n. 4, p. 1295–1335, 2008.

BLUMAN, G. Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 145, n. 1, p. 52 – 62, 1990. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X9090431E>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

BLUMAN, G.; ANCO, S. **Symmetry and integration methods for differential equations**. New York: Springer Science & Business Media, 2008. v. 154.

BLUMAN, G. W.; KUMEI, S. **Symmetries and Differential Equations**. New York: Springer, 1989. (Applied Mathematical Sciences 81).

BOCHAROV, A.; SHCHIK, I. K.; VINOGRADOV, A. M. **Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics**. Providence: American Mathematical Society, RI, 1999.

BOCKO, J.; NOHAJOVÁ, V.; HARČARIK, T. Symmetries of differential equations describing beams and plates on elastic foundations. **Procedia Engineering**, v. 48, p. 40 – 45, 2012. Modelling of Mechanical and Mechatronics Systems. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812045468>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

BOYKO, V. M.; POPOVYCH, R. O.; SHAPOVAL, N. M. Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 397, n. 1, p. 434 – 440, 2013.

BRIZARD, A. J. A primer on elliptic functions with applications in classical mechanics. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, London, v. 30, n. 4, p. 729, 2009.

BUDD, C.; COLLINS, G. An invariant moving mesh scheme for the nonlinear diffusion equation. **Applied Numerical Mathematics**, v. 26, n. 1, p. 23 – 39, 1998. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927497000792>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

BURDIS, J. M. Object-image correspondence for algebraic curves under projections. **Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications**, SIGMA (Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Application), mar 2013.

BURDIS, J. M.; KOGAN, I. A. Object-image correspondence for curves under central and parallel projections. In: **Proceedings of the 2012 Symposium on Computational Geometry**. Chapel Hill: [s.n.], 2012.

BYRD, P. F.; FRIEDMAN, M. D. **Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists**. Berlin: Springer, 2013. v. 67.

CAI, P.-P.; FU, J.-L.; GUO, Y.-X. Lie symmetries and conserved quantities of the constraint mechanical systems on time scales. **Reports on Mathematical Physics**, Warsaw, v. 79, n. 3, p. 279 – 298, 2017. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0034487717300459>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

CAMPOAMOR-STURBERG, R. An alternative approach to systems of second-order ordinary differential equations with maximal symmetry. realizations of by special functions. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, p. 200–211, 2016.

CAMPOAMOR-STURBERG, R. Generating functions and existence of contact symmetries of third order scalar ordinary differential equations. **Applied Mathematics and Computation**, v. 273, p. 1179 – 1189, 2016.

CANDOTTI, E.; PALMIERI, C.; VITALE, B. On the inversion of Noether's theorem in classical dynamical systems. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, New York, v. 40, n. 3, p. 424–429, 1972.

CANTWELL, B. J. **Introduction to symmetry analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

CARUSO, F. Estudo da simetria de translação e de suas conseqüências: uma proposta para o ensino médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Scielo, v. 30, p. 3309.1 – 3309.9, 09 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000300009&nrm=iso>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

CASEY, J. **Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Circle and Conic Section. Revised and enlarged**. London: Longmans, Green, and Co, 1893.

CHHAY, M.; HAMDOUNI, A. A new construction for invariant numerical schemes using moving frames. **Comptes Rendus Mécanique**, v. 338, n. 2, p. 97 – 101, 2010. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072110000161>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

CIMPOIASU, R.; CONSTANTINESCU, R. Lie symmetries and invariants for a 2D nonlinear heat equation. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 68, n. 8, p. 2261 – 2268, 2008. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X07001046>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

CLARKSON, P. A.; MANSFIELD, E. L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 70, n. 3, p. 250 – 288, 1994. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278994900175>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

DIMAS, S.; TSOUBELIS, D. Sym: A new symmetry-finding package for Mathematica. In: **Proceedings of the 10th international conference in modern group analysis**. Lanarca: [s.n.], 2004. p. 64–70.

DINGLE, R. B. **Asymptotic expansions: their derivation and interpretation**. London: Academic Press London, 1973. v. 48.

DORODNITSYN, V.; KOZLOV, R. A heat transfer with a source: the complete set of invariant difference schemes. **Journal of Nonlinear Mathematical Physics**, Taylor & Francis, Lulea, v. 10, n. 1, p. 16–50, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.2991/jnmp.2003.10.1.3>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

DUMONT, D. Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de jacobi. **Advances in Mathematics**, Elsevier, San Diego, v. 41, n. 1, p. 1–39, 1981.

ERDMANN, K.; WILDON, M. J. **Introduction to Lie Algebras**. 1. ed. London: Springer-Verlag, 2006. (1615-2085, 1).

ESTEVEZ, P. et al. Lie symmetries for Lie systems: Applications to systems of odes and pdes. **Applied Mathematics and Computation**, New York, v. 273, p. 435 – 452, 2016. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300315013168>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

FENG, L.-L. et al. Lie symmetries, conservation laws and analytical solutions for two-component integrable equations. **Chinese Journal of Physics**, Taiwan, v. 55, n. 3, p. 996 – 1010, 2017. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0577907317300862>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

FENG, S.; KOGAN, I.; KRIM, H. Classification of curves in 2D and 3D via affine integral signatures. **Acta Applicandae Mathematicae**, Springer Nature, Dordrecht, v. 109, n. 3, p. 903–937, nov 2008.

FRANCO, J. A. Globalization of the actions of the lie symmetries of nonlinear wave equations with dissipation. **European Journal of Mathematics**, v. 1, n. 2, p. 329–336, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40879-015-0043-7>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

FREIRE, I. L.; SILVA, P. L. da. Sobre uma classe de equações diferenciais ordinárias admitindo propriedades especiais. In: **Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional**. Bauru: [s.n.], 2013. p. 622–625.

FREIRE, I. L.; SILVA, P. L. da; TORRISI, M. Lie and Noether symmetries for a class of fourth-order Emden-Fowler equations. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 46, n. 24, p. 245206, 2013.

FU, J.-L.; CHEN, L.-Q. Non-Noether symmetries and conserved quantities of nonconservative dynamical systems. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 317, n. 3, p. 255 – 259, 2003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960103012751>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

FU, J.-L.; CHEN, L.-Q. Form invariance, Noether symmetry and Lie symmetry of hamiltonian systems in phase space. **Mechanics Research Communications**, Elmsford, v. 31, n. 1, p. 9 – 19, 2004.

GAGNON, L. et al. Lie symmetries of a generalised non-linear schrodinger equation. iii. reductions to third-order ordinary differential equations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 22, n. 5, p. 499, 1989. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/22/i=5/a=014>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**. Edburgh: Pearson Education India, 1965.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 9. ed. New York: Pearson, 2011.

GOLUBITSKY, M.; STEWART, I.; SCHAEFFER, D. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory**. New York: Springer, 1988. v. 2.

GONÇALVES, T. M. N.; MANSFIELD, E. L. On moving frames and Noether’s conservation laws. **Studies in Applied Mathematics**, Blackwell Publishing Inc, Cambridge, v. 128, n. 1, p. 1–29, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9590.2011.00522.x>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

GORDON, T. J. On the symmetries and invariants of the harmonic oscillator. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 19, n. 2, p. 183, 1986. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/19/i=2/a=014>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. San Diego: Academic press, 2014.

GRIM, A.; SHAKIBAN, C. Applications of signatures in diagnosing breast cancer. **Minnesota Journal of Undergraduate Mathematics**, Minnesota, v. 1, n. 1, 2015. Disponível em: <<https://mjum.math.umn.edu/index.php/mjum/article/view/001>>. Acesso em: 19 Mar. 2018.

GÜNGÖR, F.; TORRES, P. Lie point symmetry analysis of a second order differential equation with singularity. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 451, n. 2, p. 976 – 989, 2017. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X1730183X>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

HAMERMESH, M. **Group Theory and Its Application to Physical Problems**. Palo Alto: Dover Publications, 1962.

HE, Y. Lie symmetry analysis and new exact solutions for a higher-dimensional shallow water wave equation. **Mathematical Problems in Engineering**, London, v. 2015, p. 10, 2015.

HILLGARTER, E. Lie symmetry analysis of a pipe flow energy equation. **Appl. Math. Sci**, v. 2, p. 1979–1988, 2008.

HOLM, D. D. **Symmetry breaking in fluid dynamics: Lie group reducible motions for real fluids**. [S.l.], 1976.

HOSKINS, J.; BLUMAN, G. Higher order symmetries and integrating factors for ordinary differential equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 435, n. 1, p. 133 – 161, 2016.

JACOBI, C. **Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum**. Sumtibus Fratrum Borntraeger, 1829. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=WZ1NAAAAMAAJ>>. Acesso em: 19 Mar. 2018.

JIA, Q.; WU, H.; MEI, F. Noether symmetries and conserved quantities for fractional forced Birkhoffian systems. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 442, n. 2, p. 782 – 795, 2016. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X16301214>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

JING-LI, F. et al. Lie symmetries and conserved quantities of controllable nonholonomic dynamical systems. **Chinese Physics**, New York, v. 12, n. 7, p. 695, 2003. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1009-1963/12/i=7/a=301>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

KAPANIA, R. K.; RACITI, S. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part II: Vibrations and wave propagation. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), New York, v. 27, n. 7, p. 935–946, jul 1989.

KOGAN, I. A.; OLVER, P. J. Invariants of objects and their images under surjective maps. **Lobachevskii Journal of Mathematics**, Pleiades Publishing Ltd, Moscow, v. 36, n. 3, p. 260–285, jul 2015.

KOSMANN-SCHWARZBACH, Y. **The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century**. New York: Springer-Verlag, 2011.

LAWDEN, D. F. **Elliptic functions and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 80.

LEMOS, N. A. Symmetries, Noether's theorem and inequivalent Lagrangians applied to nonconservative systems. **Revista Mexicana de Física**, v. 39, p. 304, 1993.

LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

LEMOS, N. A. Oscilador quártico e funções elípticas de Jacobi. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 39, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0175>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

LIE, S. Über die integration durch bestimmte integrale von einer classe linearer partieller differentialgleichungen. **Arch. Math.**, v. 3, n. 6, p. 328–368, 1881.

LIE, S.; SCHEFFERS, G. **Vorlesungen Über differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen transformationen**. Deutschland: Leipzig : B.G. Teubner, 1891.

LIVIO, M. **A equação que ninguém conseguia resolver: Como um gênio da matemática descobriu a linguagem da Simetria**. São Paulo: Record, 2006.

LOCKWOOD, E. H. **A book of curves**. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

LUTZKY, M. Symmetry groups and conserved quantities for the harmonic oscillator. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 11, n. 2, p. 249, 1978. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/11/i=2/a=005>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

LUTZKY, M. Dynamical symmetries and conserved quantities. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 12, n. 7, p. 973, 1979. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0305-4470/12/7/012>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

MAHOMED, F.; LEACH, P. Symmetry Lie algebras of nth order ordinary differential equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 151, n. 1, p. 80 – 107, 1990. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X9090244A>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

MANSFIELD, E. L. Algorithms for symmetric differential systems. **Foundations of Computational Mathematics**, Springer, v. 1, n. 4, p. 335–383, 2001.

MANSFIELD, E. L. **A practical guide to the invariant calculus**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. v. 26.

MARGULIS, G. A. **Discrete subgroups of semisimple Lie groups**. Berlin: Springer Science & Business Media, 1991. v. 17.

MARSDEN, J. E.; RATIU, T. S. **Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems**. New York: Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.

MARTINS, A. de S. Simetrias e leis de conservação na mecânica clássica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 33–39, Março 1999.

MARTINS, N.; TORRES, D. F. Noether's symmetry theorem for nabla problems of the calculus of variations. **Applied Mathematics Letters**, Elmsford, v. 23, n. 12, p. 1432 – 1438, 2010. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965910002570>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

MCWEENY, R. **Symmetry: An Introduction to Group Theory and Its Applications**. [S.l.]: Dover, 2002.

MEI, F. X. Lie symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems. **Acta Mechanica**, New York, v. 141, n. 3, p. 135–148, 2000.

MIRMAN, R. **Group Theory: An Intuitive Approach**. [S.l.]: World Scientific, 1995.

MOITSHEKI, R. J.; HARLEY, C. Transient heat transfer in longitudinal fins of various profiles with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient. **Pramana**, Springer India, in co-publication with Indian Academy of Sciences, Bangalore, v. 77, n. 3, p. 519–532, 2011.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

MOROZOV, O. Moving coframes and symmetries of differential equations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 35, n. 12, p. 2965, 2002. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/35/i=12/a=317>>. Acesso em: 19 Mar. 2018.

MOSHINSKY, M.; SMIRNOV, Y. F. **The Harmonic Oscillator In Modern Physics**. Amsterdam: Harwood Academic Publishers, 1996. (Contemporary Concepts In Physics).

MOUCHET, A. Applications of Noether conservation theorem to Hamiltonian systems. **Annals of Physics**, New York, v. 372, n. Supplement C, p. 260 – 282, 2016. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491616300720>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

NAZ, R.; MAHOMED, F.; MASON, D. Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics. **Applied Mathematics and Computation**, New York, v. 205, n. 1, p. 212 – 230, 2008.

NOETHER, E. Invariante variations probleme. **Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys.**, New York, p. 235–257, 1918.

NUNES, A. W. et al. Uso das simetrias de lie no cálculo da deflexão de vigas. In: **Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM**. Salvador: [s.n.], 2018.

OLIVERI, F. Lie symmetries of differential equations: Classical results and recent contributions. **Symmetry**, v. 2, n. 2, p. 658–706, 2010.

OLVER, P. Equivalence, invariants, and symmetry. **Cambridge University Press**, Cambridge, 1995.

OLVER, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations**. 2nd. ed. New York: Springer US, 1986. (107).

- OLVER, P. J. Canonical forms and integrability of bi-hamiltonian systems. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 148, n. 3, p. 177 – 187, 1990.
- OLVER, P. J. Symmetry and explicit solutions of partial differential equations. **Applied Numerical Mathematics**, v. 10, n. 3, p. 307 – 324, 1992.
- OLVER, P. J. Moving frames and singularities of prolonged group actions. **Selecta Mathematica**, Basel, v. 6, n. 41, 2000.
- OLVER, P. J. Moving frames. **Journal of Symbolic Computation**, London, v. 36, n. 3, p. 501 – 512, 2003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717103000920>>. Acesso em: 19 Mar. 2018.
- OLVER, P. J. Generating differential invariants. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 333, n. 1, p. 450 – 471, 2007. Special issue dedicated to William Ames.
- OLVER, P. J. Lectures on moving frames. 2012. Disponível em: <http://www-users.math.umn.edu/~olver/mf_/mf_m.pdf>. Acesso em: 12 Fev. 2018.
- OLVER, P. J. Modern developments in the theory and applications of moving frames. **London Math. Soc. Impact150 Stories**, London, v. 1, p. 14–50, 2015.
- OLVER, P. J.; POHJANPELTO, J. Moving frames for lie pseudo-groups. **Canadian J. Math**, v. 60, n. 6, p. 1336–1386, 2008.
- OLVER, P. J.; POHJANPELTO, J. Differential invariant algebras of Lie pseudo-groups. **Advances in Mathematics**, San Diego, v. 222, n. 5, p. 1746 – 1792, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.06.016>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.
- ORON, A.; ROSENAU, P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 118, n. 4, p. 172 – 176, 1986.
- ÖZER, T. The solution of navier equations of classical elasticity using lie symmetry groups. **Mechanics Research Communications**, Elmsford, v. 30, n. 2, p. 193 – 201, 2003.
- PIÑA, E. Jacobi's approach to the Lagrange top. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, London, v. 38, n. 3, p. 035001, 2017.
- PLEITEZ, V. **Simetrias de Lie em Equações Diferenciais**. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física Teórica, São Paulo, 1979.
- QUISPEL, G. R. W.; SAHADEVAN, R. Lie symmetries and the integration of difference equations. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 184, n. 1, p. 64 – 70, 1993. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960193903473>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.
- RAZAFINDRALANDY, D.; HAMDOUNI, A.; SAYED, N. A. Lie-symmetry group and modeling in non-isothermal fluid mechanics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 391, n. 20, p. 4624 – 4636, 2012. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437112004529>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

ROSA, M.; BRUZÓN, M.; GANDARIAS, M. Symmetry analysis and exact solutions for a generalized Fisher equation in cylindrical coordinates. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 25, n. 1–3, p. 74 – 83, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.01.010>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

ROYCHOWDHURY, J. Analyzing circuits with widely separated time scales using numerical PDE methods. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, v. 48, n. 5, p. 578–594, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/81.922460>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

SANTOS, I. F. Dinâmica de sistemas mecânicos. **Ed. Makron Books**, São Paulo, 2001.

SCHUNCK, N. et al. Solution of the Skyrme Hartree Fock Bogolyubov equations in the cartesian deformed harmonic-oscillator basis. **Computer Physics Communications**, v. 183, n. 1, p. 166–192, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cpc.2011.08.013>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

SHAKIBAN, C.; LLOYD, P. et al. Signature curves statistics of dna supercoils. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON GEOMETRY, INTEGRABILITY AND QUANTIZATION. **Proceedings of the Fifth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization**. Sofia, 2004. p. 203–210.

SIMINOS, E.; CVITANOVIĆ, P. Continuous symmetry reduction and return maps for high-dimensional flows. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Amsterdam, v. 240, n. 2, p. 187 – 198, 2011. “Nonlinear Excursions” Symposium and Volume in Physica D to honor Louis N. Howard’s scientific career. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278910002204>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

SJÖBERG, A. On double reductions from symmetries and conservation laws. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, v. 10, n. 6, p. 3472 – 3477, 2009. Differential Equations, Continuum Mechanics and Applications. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1468121809001321>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

SOH, C. W. Euler–Bernoulli beams from a symmetry standpoint-characterization of equivalent equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 345, n. 1, p. 387 – 395, 2008.

SPADONI, A.; RUZZENE, M.; CUNEFARE, K. Vibration and wave propagation control of plates with periodic arrays of shunted piezoelectric patches. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Lancaster, v. 20, n. 8, p. 979–990, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1045389X08100041>>. Acesso em: 19 Mar. 2018.

SPANIER, J.; OLDHAM, K. The complete elliptic integrals $k(p)$ and $e(p)$ and the incomplete elliptic integrals $f(p; \phi)$ and $e(p; \phi)$. **Chs. 61-62 in An Atlas of Functions**. Washington, DC: Hemisphere, Washington, DC, p. 609–633, 1987.

STEPANOVA, I. V. Symmetry analysis of nonlinear heat and mass transfer equations under Soret effect. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 20, n. 3, p. 684 – 691, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.06.043>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. Boca Raton: CRC Press, 2018.

SWACZYNA, M. Several examples of nonholonomic mechanical systems. **Communications in Mathematics**, University of Ostrava, v. 19, n. 1, p. 27–56, 2011. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/196963>>. Acesso em: 18 Mar. 2018.

THOMPSON, D. A continuous damped vibration absorber to reduce broad-band wave propagation in beams. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, London, v. 311, n. 3-5, p. 824–842, 2008.

VASSILEV, V. M.; DJONDJOROV, P. A. Symmetry groups and conservation laws in structural mechanics. **eConf**, v. 990712, p. 223–231, 1999.

WACŁAWCZYK, M.; GREBENEV, V. N.; OBERLACK, M. Lie symmetry analysis of the Lundgren–Monin–Novikov equations for multi-point probability density functions of turbulent flow. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, Bristol, v. 50, n. 17, p. 175501, 2017. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/50/i=17/a=175501>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

WEBB, G. M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers-heat equation system. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 23, n. 17, p. 3885, 1990. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/23/i=17/a=018>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

WULFMAN, C. E.; WYBOURNE, B. G. The Lie group of Newton's and Lagrange's equations for the harmonic oscillator. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 9, n. 4, p. 507, 1976. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/9/i=4/a=007>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

YUEYU, Z. Conservative quantities and Lie's symmetries of nonconservative dynamical systems. **ACTA MECHANICA SINICA**, v. 26, p. 380, 1994.

YÜRÜSOY, M.; PAKDEMRL, M. Symmetry reductions of unsteady three-dimensional boundary layers of some non-newtonian fluids. **International Journal of Engineering Science**, Elmsford, v. 35, n. 8, p. 731 – 740, 1997.

ZHAI, X.-H.; ZHANG, Y. Noether theorem for non-conservative systems with time delay on time scales. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 52, n. Supplement C, p. 32 – 43, 2017. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570417301211>>. Acesso em: 25 Jan. 2018.

ZUCKER, R. Elementary transcendental functions: Logarithmic, exponential, circular and hyperbolic functions. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. New York: Dover, p. 65–94, 1965.

APÊNDICE A – Conceitos sobre grupos e álgebra de Lie

A.1 Definição de grupo

Seja um conjunto $\mathcal{G}$ consistindo dos elementos a, b e c para uma dada operação $*$, este pode ser chamado de grupo desde que satisfaça às seguintes propriedades (OLVER, 1986; BLUMAN; KUMEI, 1989; MIRMAN, 1995; BAUMANN, 2000; BASSALO; CATTANI, 2008; OLVER; POHJANPELTO, 2009):

1 **Fechamento:** $\forall a, b \in \mathcal{G}$, o resultado de $a * b$ também será um elemento de $\mathcal{G}$.

2 **Associatividade:** $\forall a, b, c \in \mathcal{G}$

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

3 **Elemento neutro:** Há um elemento e em $\mathcal{G}$ que para todo $a \in \mathcal{G}$

$$e * a = a * e = a$$

4 **Elemento inverso:** Correspondendo a cada $a \in \mathcal{G}$, há um elemento a' em $\mathcal{G}$, de tal modo que:

$$a * a' = a' * a = e$$

É importante notar que, em geral, os elementos de um grupo não comutam entre si. Um grupo para o qual todos os elementos comutam entre si é chamado de grupo abeliano. Para ilustração, considerando um grupo $\mathcal{G} = \{-1; 1\}$ e $*$ uma operação definida em $\mathcal{G}$, pode-se mostrar a verificação de cada axioma da definição apresentada anteriormente:

1 **Fechamento:**

$$1 * 1 = 1, \quad 1 * (-1) = -1, \quad (-1) * (-1) = 1$$

2 **Associatividade:**

$$\{1 * (-1)\} * 1 = 1 * \{(-1) * 1\} = -1$$

3 **Elemento neutro:**

$$1 * 1 = 1, \quad -1 * 1 = -1$$

4 Elemento inverso:

$$(1) * (1^{-1}) = e = 1$$

sendo assim, este conjunto $\mathcal{G}$ forma um grupo. Muitas vezes os grupos podem ser representados por tabelas de multiplicação como visto na tab. 4.

Tabela 4 – Tabela de multiplicação.

*	1	-1
1	e	-1
-1	-1	e

Fonte: Elaboração própria do autor.

Para uma ilustração geométrica, toma-se como exemplo o triângulo equilátero mostrado na fig. (7), onde pode-se observar que o mesmo também forma um grupo, pois, usando a seguinte notação:

e (123): representa a identidade;

R_A (321): representa a rotação em torno de A;

R_B (213): representa a rotação em torno de B;

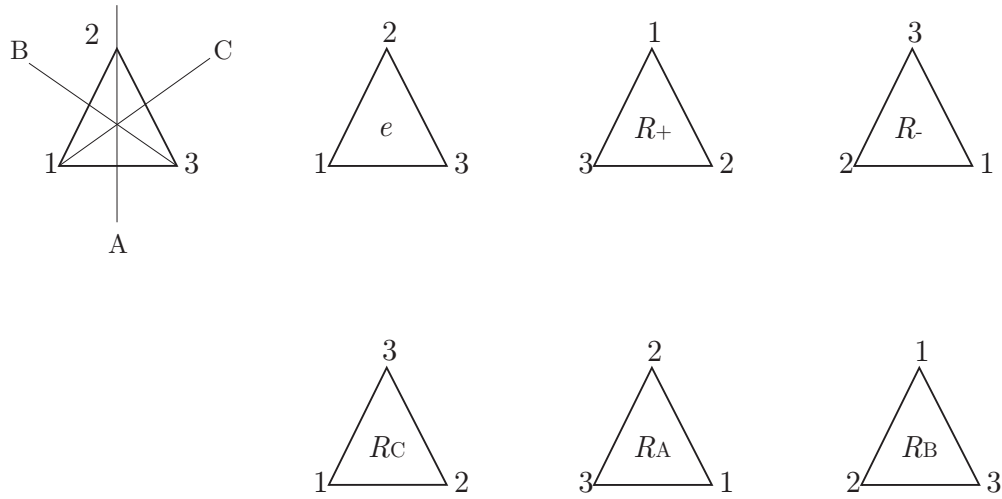
R_C (132): representa a rotação em torno de C;

R_+ (312): representa a rotação horária;

R_- (231): representa a rotação anti-horária.

observa-se que todos os axiomas anteriores também são atendidos.

Figura 7 – Simetrias no triângulo equilátero.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Através da tabela de multiplicação, tab. 5, é possível constatar que as operações de simetria formam um grupo.

Tabela 5 – Tabela de multiplicação para o triângulo equilátero.

	$e = (123)$	(312)	(231)	(132)	(321)	(213)
$e = (123)$	e	(312)	(231)	(132)	(321)	(213)
(312)	(312)	(231)	e	(321)	(213)	(132)
(231)	(213)	e	(312)	(213)	(132)	(321)
(132)	(132)	(213)	(321)	e	(231)	(312)
(321)	(321)	(132)	(213)	(312)	e	(231)
(213)	(213)	(321)	(132)	(231)	(312)	e

Fonte: Elaboração própria do autor.

As simetrias deste triângulo podem ser classificadas como um grupo discreto (ou finito) pois tem um número finito de elementos. Dependendo da operação, o triângulo deixa de ser simétrico (HAMERMESH, 1962; MCWEENY, 2002; BASSALO; CATTANI, 2008). Por exemplo, se o triângulo for rotacionado em 15° , ele não apresenta mais a propriedade de simetria no mesmo sistema de referência. Neste sentido, naturalmente tem-se a ideia de simetria de grupo discreto e de grupo contínuo, como será definido na seção seguinte.

A.2 Grupos a parâmetros contínuos

Os grupos que foram exemplificados até agora foram finitos e a maioria dos teoremas centrais para estes grupos e suas representações basearam-se na realização de somas envolvendo os elementos do grupo. Mas a noção de transformações de simetria que se baseiam em parâmetros contínuos também ocorre naturalmente em diversas aplicações

físicas. Assim, nesta seção apresenta-se a definição de grupo contínuo e alguns exemplos de aplicação.

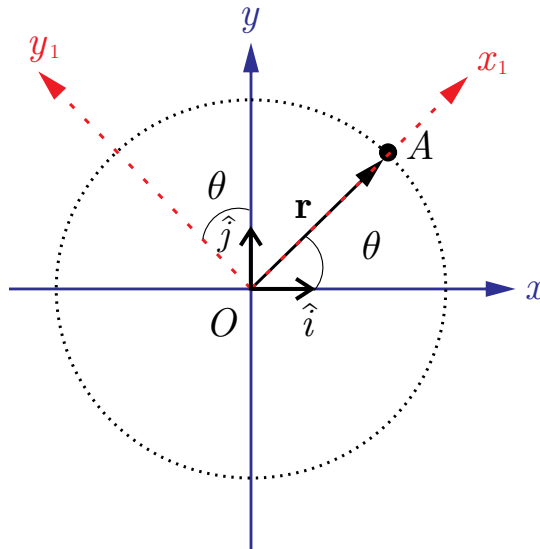
Um grupo cujos os elementos são caracterizados por um certo número de parâmetros contínuos chama-se de grupo contínuo. Por exemplo:

$$\mathcal{G}(a) = e^{ia}$$

sendo a um parâmetro real cujo intervalo de variação é $0 \leq a \leq 2\pi$, pois $e^{(2\pi ni)} = 1$, com n inteiro ou nulo, é um elemento de um grupo de um parâmetro.

Um exemplo simples para mostrar isto consiste de um aro de raio r conforme a fig. (8). Sabe-se que a distância da origem até o ponto A é dada pelo vetor posição $\mathbf{r}_{OA}$ e que $\mathbf{r}_{OA} = x\hat{i} + y\hat{j}$, sendo $x^2 + y^2 = r^2$. A rotação do aro é determinada por um parâmetro controlador, θ . A matriz de rotação ($\mathcal{T}_\theta$) neste caso forma um grupo contínuo.

Figura 8 – Rotação de um aro no espaço.



Fonte: Elaboração própria do autor.

O aro pode ser rotacionado para infinitos valores de θ que ele ainda continua sendo simétrico. As matrizes de rotação constituem uma representação muito importante de grupos contínuos e são usualmente utilizadas em problemas envolvendo a dinâmica de sistemas mecânicos. As operações de rotação do ponto $A(x, y)$ para um novo ponto (x_1, y_1) podem ser obtidas através de:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_\theta} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Para mostrar que a matriz de rotação, $\mathcal{T}_\theta$, forma um grupo, pode-se observar que:

Associatividade: $\mathcal{T}_{\theta_1} \cdot (\mathcal{T}_{\theta_2} \cdot \mathcal{T}_{\theta_3}) = (\mathcal{T}_{\theta_1} \cdot \mathcal{T}_{\theta_2}) \cdot \mathcal{T}_{\theta_3}$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ -\sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ -\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elemento neutro: $\mathcal{T}_{\theta} \cdot e = \mathcal{T}_{\theta}$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Elemento inverso: $\mathcal{T}_{\theta}^{-1} \cdot \mathcal{T}_{\theta}^T = \mathcal{I}$

sendo $\mathcal{I}$ a matriz identidade.

Pode-se entender simetria como um mapeamento de um objeto matemático em si mesmo ou em outro objeto preservando alguma propriedade ou métrica. As simetrias mais simples de se observar são as discretas de objetos geométricos, como visto anteriormente no exemplo do triângulo equilátero da fig. (7). Assim, pode-se observar que o aro é invariante para um grupo contínuo de simetrias (HAMERMESH, 1962; MCWEENY, 2002; BASSALO; CATTANI, 2008).

Os grupos de Lie são casos de grupos com parâmetros contínuos. Com eles, é possível determinar quantas transformações de simetria podem existir em uma equação diferencial, por exemplo. Um grupo de Lie de transformações admitidas por uma equação diferencial corresponde a um mapeamento de cada uma de suas soluções para outras soluções da mesma equação diferencial. Há um número infinito de maneiras de representar tal mapeamento, permitindo uma mudança arbitrária nas variáveis independentes e dependentes. Esse ponto de vista é essencial quando se estende o algoritmo de Lie para aplicações em cálculo numérico e ao uso de transformações locais de ordem superior admitidas por equações diferenciais, bem como quando se reduz os fatores de integração de EDOs de ordem superior para EDOs de primeira ordem (ARNOLD, 1966; ANDERSON; DAVISON, 1974; OLVER, 1986; BASSALO; CATTANI, 2008; BAGDERINA, 2014).

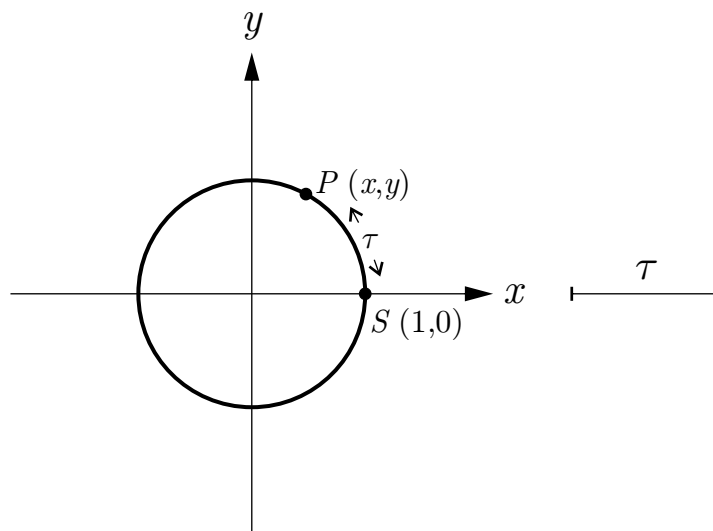
APÊNDICE B – Funções elípticas de Jacobi

Este apêndice apresenta uma introdução sobre as funções elípticas de Jacobi. Inicialmente conceitos e definições sobre funções circulares são recordados e na sequência apresenta-se um histórico e motivação na definição das funções elípticas, em especial as da classe de Jacobi que são as que se tem interesse neste trabalho. Este apêndice é uma compilação tendo como base as referências Jacobi (1829), Casey (1893), Zucker (1965), Lockwood (1967), Dumont (1981), Byrd e Friedman (2013)

B.1 Funções circulares

As funções circulares são o objeto fundamental da trigonometria circular e são importantes devido à sua periodicidade. Quando se diz funções circulares é natural se pensar em um círculo, sendo que o círculo unitário representa a chave para se compreender funções singulares (ZUCKER, 1965). Em termos de coordenada geométrica o círculo unitário se refere ao círculo centrado na origem com raio igual a 1, como apresentado na fig. (9). Em outras palavras, entende-se por círculo unitário o círculo cuja equação é dada por $x^2 + y^2 = 1$.

Figura 9 – Círculo unitário.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Seja τ um número qualquer pertencente ao grupo dos números reais, $\mathbb{R}$, e o considerando como comprimento de arco, iniciando em $S(1,0)$. Para τ positivo, o movimento é dado no sentido anti-horário e para τ negativo, o movimento é dado no sentido horário.

O ponto P é fixado para mostrar onde termina o comprimento de τ . Com isso, pode-se definir funções circulares comuns (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965; GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014):

$$\sin \tau = y, \quad \cos \tau = x, \quad \tan \tau = \frac{y}{x}, \quad \csc \tau = \frac{1}{y} \sec \tau = \frac{1}{x}, \quad \cot \tau = \frac{x}{y}$$

O comprimento de arco do círculo unitário pode ser definido através de (ZUCKER, 1965):

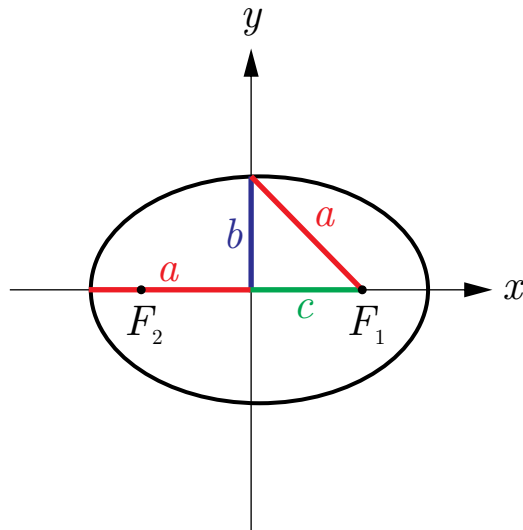
$$\begin{aligned} \int_0^\tau \sqrt{1+y'^2} dx &= \int_0^\tau \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} \right)^2} dx = \int_0^\tau \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{1}{2}(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2} dx \\ \int_0^\tau \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx &= \int_0^\tau \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin \tau \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Como pode-se observar, para funções circulares, é possível integrar a equação de forma direta utilizando as funções já conhecidas. A próxima seção apresenta alguns conceitos sobre elipses e comprimento de arco de elipses que foram a motivação de Jacobi para o estudo de funções elípticas.

B.2 Elipse

Uma elipse pode ser definida como sendo uma curva em um plano que envolve dois pontos focais, de modo que a soma das distâncias para os dois pontos focais é constante para cada ponto da curva, como mostrado na fig. (10). Os parâmetros de forma a e b são chamados de semi-eixo maior e semi-eixo menor, respectivamente e F o foco.

Figura 10 – Elipse.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Para um ponto arbitrário (x, y) a distância ao foco $(c, 0)$ é dada por $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ e a distância para o foco $(-c, 0)$ é dada por $\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$. Assim, o ponto (x, y) está na elipse se a seguinte condição for cumprida (LOCKWOOD, 1967; CASEY, 1893):

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \quad (\text{B.2})$$

levando o primeiro termo para o lado direito e elevando ao quadrado ambos os lados, obtém-se:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \quad (\text{B.3})$$

e isolando a raiz quadrada:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -\frac{1}{4a} (x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2) \quad (\text{B.4})$$

então:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x \quad (\text{B.5})$$

elevando mais uma vez ao quadrado os dois lados, para remover a raiz quadrada:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \quad (\text{B.6})$$

agrupando os termos que acompanham x :

$$x^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \quad (\text{B.7})$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (\text{B.8})$$

definindo uma nova constante:

$$b \equiv a^2 - c^2 \quad (\text{B.9})$$

portanto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.10})$$

sendo que x e y são considerados geralmente como variáveis e a e b parâmetros. A decisão sobre quais argumentos devem ser assumidos como variáveis e quais devem ser considerados como parâmetros pode ser baseada no tipo de aplicação a ser feito. No entanto, a natureza de uma função matemática pode mudar de acordo com a escolha feita. Por exemplo, a equação acima, dada pela eq. (B.10), é quadrática em x e y , mas se a e b são considerados como variáveis, a equação resultante fica:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

sendo quártica em a e b . Na teoria das integrais elípticas, o parâmetro é denotado m e é definido como sendo:

$$m \equiv k^2$$

sendo k o módulo elíptico (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965).

Considerando uma elipse de equação:

$$x^2 + k^2 y^2 = 1 \quad (\text{B.11})$$

o comprimento de arco de uma elipse no primeiro quadrante fica (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965):

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \sqrt{1 + y'^2} dx &= \int_0^\tau \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{-\frac{1}{2}(2x)}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2} dx = \int_0^\tau \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\tau \sqrt{\frac{k^2 - (k^2 - 1)x^2}{1-x^2}} dx \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Como pode-se observar, não há uma redução óbvia para integrais elementares. Isso leva a chamar essa integral de uma integral elíptica. Muitos matemáticos estudaram o efeito de mudanças de variáveis para transformar de uma forma para outra de forma a ser possível a integrar esta quadratura. Os problemas imediatos de calcular o comprimento do arco ou a avaliação de integrais foram iniciados por Abel e Jacobi em 1827, de forma independente. Assim, integrais deste tipo ficaram conhecidas como integrais elípticas de Jacobi (JACOBI, 1829).

B.3 Funções elípticas

As funções elípticas dependem de uma variável complexa u e de um parâmetro real k , como mostrado anteriormente, e que satisfaça a condição: $0 \leq k \leq 1$. O módulo complementar é dado por $k' = \sqrt{1 - k^2}$ satisfazendo neste caso a condição: $1 \leq k' \leq 0$. As funções elípticas $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$, $\text{dn}(u, k)$ ou simplesmente $\text{sn } u$, $\text{cn } u$, $\text{dn } u$, podem por fim serem definidas por (DUMONT, 1981; BYRD; FRIEDMAN, 2013)

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\text{sn } u} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = \int_{\text{cn } u}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(k'^2 + k^2\tau^2)}} = \\ &= \int_{\text{dn } u}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(\tau^2 - k'^2)}} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Os valores destas integrais dependem dos contornos de integração utilizados sendo que isto é refletido nas propriedades de periodicidade das funções elípticas (SPANIER; OLDHAM, 1987). Para $k \rightarrow 0$, tem-se:

$$\text{sn}(u, k) = \sin u, \quad \text{cn}(u, k) = \cos u, \quad \text{dn}(u, k) = 1$$

e para $k \rightarrow 1$, obtém-se:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \tanh u, \quad \operatorname{cn}(u, k) = \operatorname{sech} u, \quad \operatorname{dn}(u, k) = \operatorname{sech} u$$

A partir das definições trigonométricas, pode-se obter algumas identidades para as funções elípticas:

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1 \tag{B.14}$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 \tag{B.15}$$

$$\operatorname{cn}^2 u + (1 - k^2) \operatorname{sn}^2 u = \operatorname{dn}^2 u \tag{B.16}$$

As integrais elípticas obtidas no Capítulo 4 são integrais elípticas do primeiro tipo. Uma integral elíptica do primeiro tipo pode ser definida como (BYRD; FRIEDMAN, 2013; LAWDEN, 2013)

$$u = \mathbb{F}(\Gamma, k) = \int_0^{\sin \Gamma} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \tag{B.17}$$

sendo $\Gamma = \operatorname{am} u$. Levando em consideração que

$$t = \sin \theta$$

então

$$dt = \cos \theta d\theta$$

Considerando que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, então:

$$d\theta = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

A eq. (B.17) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{F}(\Gamma, k) = \int_0^{\sin \Gamma} \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}} \tag{B.18}$$

com isso, a solução desta integral, pode ser realizada através das funções elípticas de Jacobi, já definidas anteriormente.

APÊNDICE C – Códigos do Maple

Conforme relatado anteriormente, muitas manipulações exaustivas precisam ser feitas para solucionar as equações determinantes e realizar transformações de coordenadas para redução de ordem e solução das equações de movimento. Assim, neste apêndice se apresentam todos os códigos desenvolvidos no Maple usados nestas manipulações. Usou-se aqui o *software* oficial com a licença do Departamento de Matemática da *University of Minnesota* (USA).

C.1 Principais comandos

Para facilitar o entendimento do leitor, a seguir são listados, em forma de tabela, os principais comandos, bibliotecas e suas descrições utilizados nesta tese. Todas essas bibliotecas e comandos já são pertencentes ao Maple. Para uma maior descrição, recomenda-se consultar o web site do produto: [<https://www.maplesoft.com/support/help/>](https://www.maplesoft.com/support/help/>).

Tabela 6 – Bibliotecas e comandos do Maple.

Biblioteca	Comando	Descrição
DETools	1. <code>canoni</code>	1. O comando <code>canoni</code> tenta encontrar um conjunto de transformações das coordenadas originais às coordenadas canônicas conhecendo os coeficientes do gerador de simetria (infinitesimais) de um grupo de Lie.
	2. <code>gensys</code>	2. O comando <code>gensys</code> retorna o sistema EDPs determinantes relacionado às suas simetrias.
	3. <code>symgen</code>	3. O comando <code>symgen</code> procura os geradores infinitesimais ξ e η de um grupo de Lie.
DifferentialAlgebra	1. <code>FromJet</code>	1, 2. Os comandos <code>ToJet</code> e <code>FromJet</code> reescrevem as expressões matemáticas usando a notação de jato e função, respectivamente.
	2. <code>ToJet</code>	
JetCalculus	1. <code>TotalDiff</code>	1. O comando <code>TotalDiff</code> calcula a derivada total de uma expressão.
PDETools	1. <code>DeterminingPDE</code>	1. O comando <code>DeterminingPDE</code> calcula as EDPs determinantes de EDPs ou de um sistema de EDs.
	2. <code>Infinitesimals</code>	2. O comando <code>Infinitesimals</code> determina os geradores infinitesimais de EDPs ou de um sistema de EDs.

Fonte: Elaboração própria do autor.

C.2 Códigos do oscilador harmônico

1 - Definir as bibliotecas que serão utilizadas

```
with(DEtools, symgen, canoni)
[ symgen, canoni]
```

2 - Entrada da equação diferencial

```
eq := diff(q(t), t, t) + ω2 · q(t) = 0
```

$$\frac{d^2}{dt^2} q(t) + \omega^2 q(t) = 0$$

3 - Cálculo dos geradores infinitesimais

```
infinitesimals := symgen(eq, way = all)
[_ξ = 1, _η = 0], [_ξ = 0, _η = q], [_ξ = 0, _η = sin(ω t)], [_ξ = 0, _η
= cos(ω t)], [_ξ = 0, _η = ei√ω2 t], [_ξ = 1, _η = sin(ω t)], [_ξ = 1, _η
= cos(ω t)], [_ξ = 1, _η = q], [_ξ = sin(ω t) q, _η = ω q2 cos(ω t)], [_ξ
= sin(2 ω t), _η = cos(2 ω t) ω q], [_ξ = cos(ω t) q, _η = -ω q2 sin(ω t)],
[_ξ = cos(2 ω t), _η = -sin(2 ω t) ω q]
```

4 - Escolha do gerador infinitesimal 1

```
infinitesimal1 := [_ξ = 1, _η = 0]
[_ξ = 1, _η = 0]
```

5- Determinação das variáveis canônicas para redução de ordem

```
tr := factor(canoni(infinitesimal1, q(t), bar_t(bar_q)))
{bar_q = q(t), bar_t(bar_q) = t}
```

restart

#6 - Redução de ordem e solução da equação diferencial

```
with(DEtools) : with(DifferentialGeometry) : with(JetCalculus) :
with(DifferentialAlgebra :-Tools, ToJet, FromJet)
[ToJet, FromJet]
```

```
DGsetup([t], [q], E, 2)
```

frame name: E

```
ode := q[1, 1] + ω2 · q[ ] = 0
```

$$\omega^2 q_{[1]} + q_{1,1} = 0$$

```
eqoriginal := FromJet(ode, q(t))
```

$$\omega^2 q(t) + \frac{d^2}{dt^2} q(t) = 0$$

$\text{bar_q} := q[\];$ $\text{bar_t} := t;$

$$\text{dot_bar_t} := \text{simplify}\left(\frac{\frac{q[\]}{t} \text{TotalDiff}(\text{bar_t}, t)}{\text{TotalDiff}(\text{bar_q}, t)}\right)$$

$$\text{ddot_bar_t} := \text{simplify}\left(\frac{\text{TotalDiff}(\text{dot_bar_t}, t)}{\text{TotalDiff}(\text{bar_q}, t)}\right)$$

$$\text{sol} := \text{simplify}(\text{solve}([\text{bar_q0} = \text{bar_q}, \text{bar_t0} = \text{bar_t}, \text{dot_bar_t0} = \text{dot_bar_t}, \text{ddot_bar_t0} = \text{ddot_bar_t}], [t, q[\]], q[1], q[1, 1]))$$

$$\left[\left[t = \text{bar_t0}, q[\] = \text{bar_q0}, q_1 = \frac{1}{\text{dot_bar_t0}}, q_{1,1} = -\frac{\text{ddot_bar_t0}}{\text{dot_bar_t0}^3} \right] \right]$$

$\text{neweq} := \text{isolate}(\text{simplify}(\text{subs}(\text{sol}[1], \text{ode})), \text{ddot_bar_t0})$

$$\text{ddot_bar_t0} = \omega^2 \text{bar_q0} \text{dot_bar_t0}^3$$

$\text{redeg} := \text{subs}([\text{ddot_bar_t0} = \text{diff}(\text{Upsilon}(\text{bar_q0}), \text{bar_q0}), \text{dot_bar_t0} = \text{Upsilon}(\text{bar_q0})], \text{neweq})$

$$\frac{d}{d\text{bar_q0}} Y(\text{bar_q0}) = \omega^2 \text{bar_q0} Y(\text{bar_q0})^3$$

$\text{dsolve}(\text{redeg})$

$$Y(\text{bar_q0}) = \frac{1}{\sqrt{-\text{bar_q0}^2 \omega^2 + _C1}}, Y(\text{bar_q0}) = -\frac{1}{\sqrt{-\text{bar_q0}^2 \omega^2 + _C1}}$$

$$\text{neweq2} := Y(\text{bar_q0}) = \frac{1}{\sqrt{-\text{bar_q0}^2 \omega^2 + _C1}}$$

$$Y(\text{bar_q0}) = \frac{1}{\sqrt{-\text{bar_q0}^2 \omega^2 + _C1}}$$

$\text{eqant} := \text{subs}([Y(\text{bar_q0}) = t1, \text{bar_q0} = q1], \text{neweq2})$

$$t1 = \frac{1}{\sqrt{-\omega^2 q1^2 + _C1}}$$

$$\text{integrate}\left(\frac{1}{\sqrt{-\omega^2 q1^2 + _C1}}, q1\right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{\omega^2} q1}{\sqrt{-\omega^2 q1^2 + _C1}}\right)}{\sqrt{\omega^2}} \\
t1 &= \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{\omega^2} q1}{\sqrt{-\omega^2 q1^2 + _C1}}\right)}{\sqrt{\omega^2}} \\
t1 &= \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{\omega^2} q1}{\sqrt{-\omega^2 q1^2 + _C1}}\right)}{\sqrt{\omega^2}} \\
\text{eqfinal} &:= \text{isolate}\left(t1 = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{\omega^2} q1}{\sqrt{-\omega^2 q1^2 + _C1}}\right)}{\sqrt{\omega^2}}, q1\right) \\
q1 &= \frac{\sqrt{\left(\tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)^2 + 1\right) _C1 \tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)}}{\left(\tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)^2 + 1\right) \omega} \\
\text{eqfinal2} &:= q1 = \frac{\sqrt{\left(\tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)^2 + 1\right) _C1 \tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)}}{\left(\tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)^2 + 1\right) \omega} \\
q1 &= \frac{\sqrt{\left(\tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)^2 + 1\right) _C1 \tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)}}{\left(\tan\left(t1\sqrt{\omega^2}\right)^2 + 1\right) \omega} \\
\text{coord_orig} &:= \text{subs}([q1 = q(t), t1 = t], \text{eqfinal2}) \\
q(t) &= \frac{\sqrt{\left(\tan\left(t\sqrt{\omega^2}\right)^2 + 1\right) _C1 \tan\left(t\sqrt{\omega^2}\right)}}{\left(\tan\left(t\sqrt{\omega^2}\right)^2 + 1\right) \omega}
\end{aligned}$$

C.3 Códigos do pêndulo oscilando em um aro rotativo

#1 – Declarar as bibliotecas a serem utilizadas

with(DETools) : (DETools, symgen, canoni, odeadvisor) :

#2 – Determinar a equação diferencial de movimento

ode := diff(theta(t), t, t) + $\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cdot \cos(\text{theta}(t)) \right) \cdot \sin(\text{theta}(t)) = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos(\theta(t)) \right) \sin(\theta(t)) = 0$$

#3 – Determinar as equações determinantes

gensys(ode, [xi = xi(t, theta), eta = eta(t, theta)])

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \xi(t, \theta), \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \eta(t, \theta) - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial t} \xi(t, \theta) \right), 3 \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos(\theta) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \xi(t, \right. \\ & \left. \theta) \right) \sin(\theta) + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial t} \eta(t, \theta) \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi(t, \theta) \right), 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \xi(t, \theta) \right) \left(\frac{g}{\ell} \right. \\ & \left. - \omega^2 \cos(\theta) \right) \sin(\theta) - \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos(\theta) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \eta(t, \theta) \right) \sin(\theta) - \eta(t, \theta) \left(\right. \\ & \left. - \omega^2 \sin(\theta)^2 - \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos(\theta) \right) \cos(\theta) \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta(t, \theta) \end{aligned}$$

#4 - Reduzir e simplificar as equações determinantes

casesplit([gensys(ode, [xi = xi(t, theta), eta = eta(t, theta)])])

$$\left[\eta(t, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} \xi(t, \theta) = 0 \right] \&\text{where} []$$

#5 – Determinar os geradores infinitesimais

symgen(ode, theta(t), way = 2)

$$[_\xi = 1, _\eta = 0]$$

infinitesimal2 := [_xi = 0, _eta = 1]

$$[_\xi = 0, _\eta = 1]$$

tr := factor(canoni(infinitesimal2, theta(t), bar_t(bar_theta)))

$$\{ \text{bar_theta} = t, \text{bar_t}(\text{bar_theta}) = \theta(t) \}$$

restart

#6 – Redução de ordem e integração das equações

with(DEtools) : with(DifferentialGeometry) : with(JetCalculus) :

with(DifferentialAlgebra :- Tools, ToJet, FromJet)

$$[\text{ToJet}, \text{FromJet}]$$

DGsetup([t], [theta], E, 2)

frame name: E

$$ode := \text{theta}[1, 1] + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cdot \cos(\text{theta}[\]) \right) \cdot \sin(\text{theta}[\]) = 0$$

$$\theta_{1,1} + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos(\theta[\]) \right) \sin(\theta[\]) = 0$$

$$\text{eqoriginal} := \text{FromJet}(\text{ode}, \text{theta}(t))$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \cos(\theta(t)) \right) \sin(\theta(t)) = 0$$

$$\text{bar_theta} := t; \text{bar_t} := \text{theta}[\];$$

t

$\theta[\]$

$$\text{dot_bar_t} := \text{simplify} \left(\frac{\text{TotalDiff}(\text{bar_t}, t)}{\text{TotalDiff}(\text{bar_theta}, t)} \right)$$

θ_1

$$\text{ddot_bar_t} := \text{simplify} \left(\frac{\text{TotalDiff}(\text{dot_bar_t}, t)}{\text{TotalDiff}(\text{bar_theta}, t)} \right)$$

$\theta_{1,1}$

$$\begin{aligned} \text{sol} := & \text{simplify}(\text{solve}([\text{bar_theta0} = \text{bar_theta}, \text{bar_t0} = \text{bar_t}, \text{bar_t10} \\ & = \text{dot_bar_t}, \text{bar_t20} = \text{ddot_bar_t}], [t, \text{theta}[\], \text{theta}[1], \text{theta}[1, 1]])) \\ & \left[\left[t = \text{bar_t0}, \theta[\] = \text{bar_theta0}, \theta_1 = \frac{1}{\text{bar_t10}}, \theta_{1,1} = -\frac{\text{bar_t20}}{\text{bar_t10}^3} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\text{neweq} := \text{isolate}(\text{simplify}(\text{subs}(\text{sol}[1], \text{ode})), \text{bar_t20})$$

$$\text{bar_t20} = \frac{\text{bar_t10}^3 \left(-\ell \omega^2 \cos(\text{bar_theta0}) + g \right) \sin(\text{bar_theta0})}{\ell}$$

$$\text{redeg} := \text{subs}([\text{bar_t20} = \text{diff}(\text{Upsilon}(\text{bar_theta0}), \text{bar_theta0}), \text{bar_t10} \\ = \text{Upsilon}(\text{bar_theta0})], \text{neweq})$$

$$\frac{d}{d\text{bar_theta0}} \text{Y}(\text{bar_theta0})$$

$$= \frac{\text{Y}(\text{bar_theta0})^3 \left(-\ell \omega^2 \cos(\text{bar_theta0}) + g \right) \sin(\text{bar_theta0})}{\ell}$$

$$\text{dsolve}(\text{redeg})$$

$$\text{Y}(\text{bar_theta0}) = \frac{\sqrt{\left(\sin(\text{bar_theta0})^2 \omega^2 \ell + 2 \cos(\text{bar_theta0}) g + \ell _C1 \right) \ell}}{\sin(\text{bar_theta0})^2 \omega^2 \ell + 2 \cos(\text{bar_theta0}) g + \ell _C1},$$

$$\text{Y}(\text{bar_theta0}) =$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{\left(\sin(\text{bar_theta0})^2 \omega^2 \ell + 2 \cos(\text{bar_theta0}) g + \ell _C1\right) \ell}}{\sin(\text{bar_theta0})^2 \omega^2 \ell + 2 \cos(\text{bar_theta0}) g + \ell _C1} \\
\text{neweq} &:= Y(\text{bar_theta0}) \\
&= \frac{1}{\sin(\text{bar_theta0})^2 \omega^2 + \frac{2 \cos(\text{bar_theta0}) g}{\ell} + _C1} \\
Y(\text{bar_theta0}) &= \frac{1}{\sin(\text{bar_theta0})^2 \omega^2 + \frac{2 \cos(\text{bar_theta0}) g}{\ell} + _C1} \\
\text{neweq2} &:= \text{subs}([Y(\text{bar_theta0}) = \text{bart}, \text{bar_theta0} = \text{bartheta}], \text{neweq}) \\
\text{bart} &= \frac{1}{\sin(\text{bartheta})^2 \omega^2 + \frac{2 \cos(\text{bartheta}) g}{\ell} + _C1} \\
\text{neweq3} &:= \text{integrate}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2 \sin(\text{bartheta})^2 + \frac{2 \cos(\text{bartheta}) g}{\ell} + _C1}}, \right. \\
&\quad \left. \text{bartheta} \right) \\
&\left(2 \right. \\
&\quad \left(\frac{1}{\ell} \left(\left(\ell \cos(\text{bartheta})^2 \omega^2 - \ell \omega^2 - \ell _C1 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - 2 \cos(\text{bartheta}) g \right) \left(\cos(\text{bartheta})^2 - 1 \right) \right) \right)^{1/2} \left(\ell \omega^2 \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g \right) \\
&\quad \sqrt{- \frac{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g \right) (\cos(\text{bartheta}) - 1)}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g \right) (\cos(\text{bartheta}) + 1)}}
\end{aligned}$$

$$(\cos(\text{bartheta}))$$

$$+ 1)$$

$$2 \sqrt{\frac{\cos(\text{bartheta}) \ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g}{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\text{bartheta}) + 1)}} \sqrt{\frac{\cos(\text{bartheta}) \ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\text{bartheta}) + 1)}} \text{EllipticF} \left(\sqrt{-\frac{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g\right) (\cos(\text{bartheta}) - 1)}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\text{bartheta}) + 1)}}, \right.$$

$$\left(\left(\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g \right) \left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g \right) \right) / \left(\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g \right) \left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g \right) \right)^{1/2} \right) \Bigg) \Bigg/ \left(\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g \right) \right) \Bigg) \Bigg/ \left(\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g \right) \right)$$

$$\left(\frac{1}{\omega^2 \ell^2} \left((\cos(\text{bartheta}) - 1) (\cos(\text{bartheta}) \right.$$

$$+ 1) \left(\cos(\text{bartheta}) \ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} \right.$$

$$\left. \left. - g \right) \left(\cos(\text{bartheta}) \ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g \right) \right) \Bigg)$$

1/2

 $\sin(\text{bartheta})$

$$\sqrt{-\omega^2 \cos(\text{bartheta})^2 + \frac{2 \cos(\text{bartheta}) g}{\ell} + \frac{\ell \omega^2 + \ell_C1}{\ell}}$$

 $\text{neweq4} := \text{bart} = \text{neweq3}$
 bart

$$= \left(2 \right.$$

$$\left(\frac{1}{\ell} \left(\left(\ell \cos(\text{bartheta})^2 \omega^2 - \ell \omega^2 - \ell_C1 \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2 \cos(\text{bartheta}) g \right) \left(\cos(\text{bartheta})^2 - 1 \right) \right)^{1/2} \left(\ell \omega^2 \right.$$

$$\left. + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2_C1 \omega^2 + g^2} - g \right)$$

$$\sqrt{-\frac{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2_C1 \omega^2 + g^2} + g \right) \left(\cos(\text{bartheta}) - 1 \right)}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2_C1 \omega^2 + g^2} - g \right) \left(\cos(\text{bartheta}) + 1 \right)}}$$

 $(\cos(\text{bartheta})$
 $+ 1)$

$$2 \sqrt{\frac{\cos(\text{bartheta}) \ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2_C1 \omega^2 + g^2} - g}{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2_C1 \omega^2 + g^2} - g \right) \left(\cos(\text{bartheta}) + 1 \right)}}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{\cos(\text{bartheta}) \ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\text{bartheta}) + 1)}} \text{EllipticF} \left(\right. \\
& \left. \sqrt{-\frac{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g\right) (\cos(\text{bartheta}) - 1)}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\text{bartheta}) + 1)}}, \right. \\
& \left(\left(\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g \right) \left(\ell \omega^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g \right) \right) \right) / \left(\left(\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - g \right) \left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g \right) \right) \right)^{1/2} \left. \right) \left. \right) / \left(\left(\ell \omega^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} + g \right) \right) \right. \\
& \left(\frac{1}{\omega^2 \ell^2} \left((\cos(\text{bartheta}) - 1) (\cos(\text{bartheta}) \right. \right. \\
& \left. \left. + 1) \left(\cos(\text{bartheta}) \ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - g \right) \left(\cos(\text{bartheta}) \ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 _C1 \omega^2 + g^2} - g \right) \right) \right) \\
& ^{1/2} \\
& \sin(\text{bartheta}) \\
& \sqrt{-\omega^2 \cos(\text{bartheta})^2 + \frac{2 \cos(\text{bartheta}) g}{\ell} + \frac{\ell \omega^2 + \ell _C1}{\ell}} \Big) \\
& \text{redeg} := \text{subs}([\text{bart} = \text{t}, \text{bartheta} = \text{theta}], \text{neweq4}) \\
& \text{t} = \left(2 \sqrt{\frac{\left(\ell \cos(\theta)^2 \omega^2 - \ell \omega^2 - \ell _C1 - 2 \cos(\theta) g \right) \left(\cos(\theta)^2 - 1 \right)}{\ell}} \left(\ell \omega^2 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2 - g}) \\
& \sqrt{-\frac{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} + g\right) (\cos(\theta) - 1)}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\theta) + 1)}} (\cos(\theta) \\
& + 1) \\
& {}^2 \sqrt{\frac{\cos(\theta) \ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} - g}{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\theta) + 1)}}} \\
& \sqrt{\frac{\cos(\theta) \ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} - g}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\theta) + 1)}} \text{EllipticF} \left(\right. \\
& \left. \sqrt{-\frac{\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} + g\right) (\cos(\theta) - 1)}{\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} - g\right) (\cos(\theta) + 1)}}}, \right. \\
& \left(\left(\left(\ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} + g \right) \left(\ell \omega^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} - g \right) \right) / \left(\left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - g \right) \left(\ell \omega^2 - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} + g \right) \right) \left. \right)^{1/2} \left. \right) \left/ \left(\left(\ell \omega^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2 {}_-\text{C1} \omega^2 + g^2} + g \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\omega^2 \ell^2} \left((\cos(\theta) - 1) (\cos(\theta) + 1) \left(\cos(\theta) \ell \omega^2 \right. \right. \right.$$

$$-\sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2_{-C1} \omega^2 + g^2} - g) \left(\cos(\theta) \ell \omega^2 + \sqrt{\ell^2 \omega^4 + \ell^2_{-C1} \omega^2 + g^2} \right. \\ \left. - g \right) \Big)^{1/2} \sin(\theta) \sqrt{-\omega^2 \cos(\theta)^2 + \frac{2 \cos(\theta) g}{\ell} + \frac{\ell \omega^2 + \ell_{-C1}}{\ell}}$$

#7 – Isolar a variável theta(t).

isolate(redeq, theta)

$$\theta(t) = 2 \cdot \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}} \right) \cdot \operatorname{dn} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t \cdot \sqrt{\left(\operatorname{module}(C - 1 + \right. \right.$$

$$\left. - 2 \cos(\theta) \right) \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}} \Big),$$

$$\sqrt{\left(\frac{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)} - \frac{1 + \cos(\theta) - 2 \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta) + 2 \cos(\theta)}}{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}} \right) \Big)}$$

C.4 Códigos do pião simétrico

with(PDEtools, DeterminingPDE, declare, diff_table, casesplit,

InfinitesimalGenerator, Infinitesimals, SymmetryTest), with(DETools) :
with(DETools, odeadvisor)

[odeadvisor]

$$\begin{aligned}
eq := & \left\{ I \cdot \left(\text{diff}(\text{theta}(t), t, t) - \text{diff}(\text{psi}(t), t)^2 \cdot \sin(\text{theta}(t)) \cdot \cos(\text{theta}(t)) \right) \right. \\
& + I z2 \cdot \left(\text{diff}(\text{psi}(t), t)^2 \cdot \sin(\text{theta}(t)) \cdot \cos(\text{theta}(t)) + \text{diff}(\text{phi}(t), t) \right. \\
& \cdot \text{diff}(\text{psi}(t), t) \cdot \sin(\text{theta}(t)) \left. \right) - m \cdot g \cdot \text{ell} \cdot \sin(\text{theta}(t)) = 0, I \cdot (2 \\
& \cdot \text{diff}(\text{psi}(t), t) \cdot \text{diff}(\text{theta}(t), t) \cdot \cos(\text{theta}(t))) - I z2 \cdot \text{diff}(\text{theta}(t), t) \\
& \cdot (\text{diff}(\text{psi}(t), t) \cdot \cos(\text{theta}(t)) + \text{diff}(\text{phi}(t), t)) = 0, I z2 \cdot (\text{diff}(\text{psi}(t), t) \\
& \cdot \text{diff}(\text{theta}(t), t) \cdot \sin(\text{theta}(t))) = 0 \left. \right\} \\
& \left\{ I z2 \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \sin(\theta(t)) = 0, 2 I \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \cos(\theta(t)) \right. \\
& - I z2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \left(\left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) + \frac{d}{dt} \phi(t) \right) = 0, I \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right. \\
& \left. - \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \right) \\
& + I z2 \left(\left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \right. \\
& \left. + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \sin(\theta(t)) \right) - m g \ell \sin(\theta(t)) = 0 \left. \right\}
\end{aligned}$$

DeterminingPDE(eq)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} _ \eta_{\phi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial \psi} _ \eta_{\phi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial t} _ \eta_{\phi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \right. \\
& \frac{\partial}{\partial \theta} _ \eta_{\phi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial \phi} _ \eta_{\psi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial \psi} _ \eta_{\psi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial t} _ \eta_{\psi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} _ \eta_{\psi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial \phi} _ \xi_t(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial \psi} _ \xi_t(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial t} _ \xi_t(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} _ \xi_t(t, \phi, \psi, \theta) = 0, _ \eta_{\theta}(t, \\
& \left. \phi, \psi, \theta) = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Infinitesimals(eq)

$$\begin{aligned}
& \left[_ \xi_t(t, \phi, \psi, \theta) = 1, _ \eta_{\phi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, _ \eta_{\psi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, _ \eta_{\theta}(t, \phi, \psi, \theta) \right. \\
& \left. = 0 \right], \left[_ \xi_t(t, \phi, \psi, \theta) = 0, _ \eta_{\phi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, _ \eta_{\psi}(t, \phi, \psi, \theta) = 1, _ \eta_{\theta}(t, \phi, \right. \\
& \left. \psi, \theta) = 0 \right], \left[_ \xi_t(t, \phi, \psi, \theta) = 0, _ \eta_{\phi}(t, \phi, \psi, \theta) = 1, _ \eta_{\psi}(t, \phi, \psi, \theta) = 0, \right. \\
& \left. _ \eta_{\theta}(t, \phi, \psi, \theta) = 0 \right]
\end{aligned}$$

$$A1 := \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left(\text{diff}(\theta(t), t)^2 + \text{diff}(\psi(t), t)^2 \cdot \sin(\theta(t))^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot I_{z2} \cdot \left(\text{diff}(\phi(t), t) + \text{diff}(\psi(t), t) \cdot \cos(\theta(t)) \right)^2 + m \cdot g \cdot \ell \cdot \cos(\theta(t))$$

$$\frac{1}{2} I \left(\left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t))^2 \right) + \frac{1}{2} I_{z2} \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right)^2 + m g \ell \cos(\theta(t))$$

$$A2 := I \cdot \text{diff}(\psi(t), t)^2 \cdot \sin(\theta(t))^2 + I_{z2} \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \left(\text{diff}(\phi(t), t) + \text{diff}(\psi(t), t) \cdot \cos(\theta(t)) \right)$$

$$I \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t))^2 + I_{z2} \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right)$$

$$A3 := I_{z2} \cdot \left(\text{diff}(\phi(t), t) + \text{diff}(\psi(t), t) \cdot \cos(\theta(t)) \right) \cdot I_{z2} \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right)$$

$$S := \left(\frac{A2 - A3 \cdot \cos(\theta(t))^2}{2 \cdot I \cdot \sin(\theta(t))^2} \right) + m \cdot g \cdot \ell \cdot \cos(\theta(t))$$

$$- \frac{1}{\sin(\theta(t))^2} \left(\frac{1}{2} I \left(\left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t))^2 + I_{z2} \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right) \right) - I_{z2} \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right) \cos(\theta(t))^2 \right) + m g \ell \cos(\theta(t))$$

$$A11 := A1 - \frac{A3^2}{2 \cdot I_{z2}}$$

$$\frac{1}{2} I \left(\left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t))^2 \right) + m g \ell \cos(\theta(t))$$

$$\text{simplify} \left(\text{isolate} \left(\text{int} \left(\frac{1}{\sqrt{A11 - S}} - \sqrt{\frac{2}{I}} \cdot t, \theta(t) \right), \theta(t) \right) \right)$$

$$\theta(t) = - \sqrt{1 - \frac{\cos(\theta(t))^2}{\text{sn}^4}} \text{dn} \sin \left(\frac{\text{cn}}{\text{sn} \text{dn}} \right)$$

$$- \left(\frac{1}{I_{z2} \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right)} \left(\left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t))^2 \right) \right)$$

$$+ \text{Iz2} \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right) \right) - \frac{\cos(\theta(t))}{\text{sn}^2} \right)$$

$$\text{cn sn} \cos\left(\frac{\text{cn}}{\text{sn dn}}\right)$$

$$\text{EQ} := \text{diff}(\psi(t), t) = \frac{\text{A2} - \text{A3} \cdot \cos(\theta(t))}{\text{I} \cdot \sin(\theta(t))^2}$$

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2$$

dsolve(EQ)

$$\begin{aligned} \psi(t) = & - \sqrt{1 - \frac{\cos(\theta(t))^2}{\text{sn}^4}} \text{dn} \cos\left(\frac{\text{cn}}{\text{sn dn}}\right) \\ & + \left(\frac{1}{\text{Iz2} \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right)} \left(\text{I} \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t))^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{Iz2} \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right) \right) - \frac{\cos(\theta(t))}{\text{sn}^2} \right) \\ & \text{cn sn} \sin\left(\frac{\text{cn}}{\text{sn dn}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{EQ2} := \text{diff}(\phi(t), t) = \frac{\text{A3}}{\text{Iz2}} - \text{diff}(\psi(t), t) \cdot \cos(\theta(t))$$

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) - \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta)$$

dsolve(EQ2)

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \frac{\cos(\theta(t))}{\text{sn}^2} \\ & + \left(\frac{1}{\text{Iz2} \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right)} \left(\text{I} \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right)^2 \sin(\theta(t))^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{Iz2} \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cos(\theta(t)) \right) \right) - \frac{\cos(\theta(t))}{\text{sn}^2} \right) \text{sn}^2 \end{aligned}$$