



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.005/95

Álgebras q-Deformadas e Transições de Fase

José Tadeu Teles Lunardi



Orientador

Bruto Max Pimentel Escobar

Outubro 1995

*A minha mulher Luciana
e ao meu filho Cabo*

M

139

Agradecimentos

Agradeço às pessoas abaixo que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho:

- Ao Professor Manoel Pimentel, pela orientação e por ter sempre me prestado auxílio em diversas situações, muitas vezes de caráter pessoal.

- Aos Professores Diógenes Galeffi e Carlos Lima, com quem participei de discussões sobre o assunto desta dissertação.

- Aos funcionários do IPT, em especial ao Sr. Antonio, a Maria e ao Alexandre.

- Ao Professor Wagner Figueiredo, que me orientou na iniciação científica, pelo estímulo e pela apresentação ao Prof. Pimentel e ao IPT.

- Ao Kowuban, pela valiosa ajuda com o editor de textos.

- Aos meus pais, Cleodânio e Erondina, e aos meus irmãos Betão, Jau, Toto, Vovô e Babete, com quem sempre pude contar em todos os bons e maus momentos por que passei.

- Aos meus sogros, Eugênio e Rilda, pois eles foram fundamental para que eu prosseguisse neste trabalho.

- Aos meus amigos Roldo, Frederico, Cargamel, Jefferson, Rozane e Thelma, que tornaram agradável esse tempo de convivência.

- À Luciana, pela paciência e estímulos que demonstrou ao me esperar e me ajudar, assim como meu filho Caio, se transformou na principal razão para tudo o que fiz. A eles dedico este trabalho.

- Finalmente, à CAPES e às UNPs, pela excelente finança.

**À minha mulher Luciana
e ao meu filho Caio**

Agradecimentos

Agradeço às pessoas abaixo que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho:

-Ao Professor Bruto Pimentel, pela orientação e por ter sempre me prestado auxílio em diversas situações, muitas delas de caráter pessoal.

-Aos Professores Diógenes Galetti e Celso Lima, com quem participei de discussões sobre o assunto desta dissertação.

-Aos funcionários do IFT, em especial ao Sr. Antônio, à Marina e ao Alexandre.

-Ao Professor Wagner Figueiredo, que me orientou na Iniciação Científica, pelo estímulo e pela apresentação ao Prof. Pimentel e ao IFT.

-Ao Kokubun, pela valiosa ajuda com o editor de textos.

-Aos meus pais, Clodoaldo e Erondina, e aos meus irmãos Beth, Tau, Toto, Vovi e Rafaela, com quem sempre pude contar em todos os bons e maus momentos por que passei.

-Aos meus sogros, Eugênio e Hilda, cujo apoio foi fundamental para que eu prosseguisse neste trabalho.

-Aos meus amigos Boldo, Evelise, Gargamel, Jefferson, Rozane e Thelma, que tornaram agradáveis esses anos de convívio.

-À Luciana, pela paciência extrema que demonstrou ao me esperar e que, juntamente com meu filho Caio, se transformou na principal razão para tudo o que faço. A eles dedico este trabalho.

-Finalmente, à CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns aspectos importantes sobre álgebras q -deformadas, estados q -coerentes e a construção de Hamiltonianos que preservam a simetria $su(M)$ quando se deforma a álgebra bosônica ou fermiônica subjacente. Como exemplo de aplicação desses conceitos, estudamos as transições de fase em uma versão q -deformada do modelo de Lipkin-Meshkov-Glick usando o método variacional via estados q -coerentes.

Palavras-chaves: Álgebras q -Deformadas, Estados Coerentes Generalizados, Física de Muitos Corpos, Transições de Fase.

Áreas de conhecimento: 1.05.01.01-0; 1.05.01.04-5.

Índice

Introdução

Abstract

In this work we study some important aspects on q -deformed algebras, q -coherent states and the construction of Hamiltonians preserving $su(M)$ symmetry when we deform the underlying bosonic or fermionic algebras. By using these ideas, we study phase transitions in a q -deformed version of the Lipkin-Meshkov-Glick model through the variational method based on q -coherent states.

1.5 O Oscilador Fermiônico

Key words: q -Deformed Algebras, Generalized Coherent States, Many-body Physics, Phase Transitions.

2 Construção de Hamiltonianos q -Simétricos

2.1 Hamiltonianos com Simetria $su_2(2)$

2.2 Hamiltonianos com Simetria $su_3(2)$

3 Estados Coerentes e q -Coerentes

3.1 Estados Coerentes

3.2 Realização das Algebras su_2 e su_3 no Espaço de Fock

3.3 Estados q -Coerentes

4 O Modelo de Lipkin q -Deformado

4.1 O Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick

4.2 Cálculo Variacional de Estados Coerentes

4.3 Transições de Fase

4.3.1 Transições de Fase Termodinâmicas

4.3.2 Transições de Fase no Estado Fundamental

Índice

4.1	O Modelo LMG q -Deformado.	81
4.2	A Energia Livre Variacional do Modelo q -LMG.	83
4.3	Transições de Fase no Modelo q -LMG.	94
4.3.1	Transições Termodinâmicas.	94
4.3.2	Transições no Estado Fundamental.	96
5	Considerações Finais.	99
Apêndices		
Introdução. i		
1 Álgebras q -Deformadas. 1		
1.1	A Álgebra de Heisenberg-Weyl (h_4).	1
1.2	A Álgebra h_{4q} .	4
1.3	A Álgebra $su(2)$.	11
1.4	A Álgebra $su_q(2)$.	14
1.5	O Oscilador Fermiônico.	18
1.6	O q -Oscilador Fermiônico.	21
2 Construção de Hamiltonianos q -Simétricos 25		
2.1	Hamiltonianos com Simetria $su(2)$.	25
2.2	Hamiltonianos com Simetria $su_q(2)$.	30
3 Estados Coerentes e q -Coerentes. 35		
3.1	Estados Coerentes.	35
3.2	Realização das Álgebras h_4 e $su(2)$ no Espaço de Bargmann.	45
3.3	Estados q -Coerentes.	53
4 O Modelo de Lipkin q -Deformado. 65		
4.1	O Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick.	65
4.2	Cálculo Variacional da Energia Livre.	70
4.3	Transições de Fase.	79
4.3.1	Transições de Fase Termodinâmicas.	79
4.3.2	Transições de Fase no Estado Fundamental.	80

4.4	O Modelo LMG q-Deformado.	81
4.5	A Energia Livre Variacional do Modelo q-LMG.	85
4.6	Transições de Fase no Modelo q-LMG.	94
4.6.1	Transições Termodinâmicas.	94
4.6.2	Transições no Estado Fundamental.	96
5 Considerações Finais.		99

Apêndices

A	Conceitos de Grupos e Álgebras de Lie.	101
A.1	Definições.	101
A.2	Representações.	104
B	Os Parâmetros dos Estados Coerentes de $SU(2)$.	106
C	A q-Derivada e a q-Integral.	109
D	O Método Variacional.	113

Introdução.

O conceito de simetria desempenha um papel fundamental na Física Moderna. Em geral, quantidades conservadas estão associadas a algum tipo de simetria do sistema em consideração. A Teoria de Grupos e Álgebras de Lie é a ferramenta matemática adequada para se estudar sistemas que possuam simetrias com respeito às variações contínuas de certos parâmetros.

Um desenvolvimento importante nesse assunto foi o estabelecimento do Método do Espalhamento Inverso (ISM) [1], que permite a construção e solução de sistemas clássicos exatamente solúveis, usando a Teoria de Grupos e Álgebras de Lie e suas Representações.

A versão quantizada desse método (QISM), introduzida por Fadeev e colaboradores [2], permitiu a introdução de novos tipos de simetrias, não mais descritas em termos de grupos ou álgebras de Lie, mas em termos de novos objetos matemáticos, denominados *Grupos Quânticos*, *Álgebras Quânticas* ou *Álgebras q -Deformadas*. Essas álgebras são generalizações das álgebras de Lie através da introdução de um parâmetro q , que *deforma* as relações de comutação. Quando esse parâmetro tende à unidade essas novas álgebras se reduzem às álgebras de Lie usuais.

A mais comum das álgebras de Lie é a álgebra $su(2)$. Sklyanin [3], e independentemente Kulish e Reshetikhin [4], introduziram a generalização q -deformada dessa álgebra, $su_q(2)$, em conexão com as soluções da Equação de Yang-Baxter, que desempenha papel fundamental na solução de equações não lineares e modelos exatamente solúveis em Mecânica Estatística [2, 5].

A construção de Schwinger [19] permite a realização das álgebras $su(M)$ a partir das álgebras de M osciladores harmônicos independentes [19]. Biedenharn [9] e MacFarlane [10], independentemente, generalizaram essa construção para o caso

da álgebra $su_q(2)$ introduzida por Sklyanin, Kulish e Reshetikhin. Introduziram, assim, o conceito do oscilador harmônico q -deformado e q -bósons. A partir da álgebra de q -osciladores e da construção de Schwinger pode-se encontrar o análogo q -deformado de todas as álgebras de Lie que podem ser realizadas por meio das álgebras de osciladores. Mais tarde, foi introduzido por Hayashi [14] o análogo q -deformado da álgebra do oscilador fermiônico, a partir da qual foi possível, através da construção de Schwinger, encontrar os análogos q -deformados das álgebras de Lie chamadas excepcionais [14, 16]. A partir daí abriu-se um vasto campo de aplicações de álgebras q -deformadas em Física. Assim, modelos que fossem descritos por meio de operadores de criação e destruição bosônicos ou fermiônicos teriam especificada sua extensão q -deformada pela substituição desses operadores e respectivas álgebras pelos seus análogos q -deformados. Uma extensa (mas não completa) relação dessas aplicações se encontra nas referências [32, 33].

Recentemente, Floratos publicou um trabalho sobre sistemas de muitos corpos (bósons) com simetrias q -deformadas. Formulou o problema análogo ao de um sistema de M osciladores bosônicos independentes com simetria global $su(M)$. Assim, propôs uma maneira de “combinar” os Hamiltonianos de osciladores q -deformados de forma a construir um Hamiltoniano total com simetria global $su_q(M)$, com o objetivo de preservar todas as simetrias originais quando o parâmetro q tende à unidade. Uma das principais consequências dessa construção é o aparecimento de interações entre os osciladores, deformando o espectro de energia. Avancini *et al.* propuseram uma maneira de combinar os Hamiltonianos dos férmions em uma versão q -deformada do Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (que chamaremos modelo q -LMG) de forma que o Hamiltoniano “livre” apresentasse uma deformação no espectro semelhante àquela encontrada na construção de Floratos.

Nesta dissertação faremos um paralelo entre álgebras de Lie e álgebras q -deformadas com o objetivo de estudarmos transições de fase no modelo q -LMG. No Capítulo 1 revisaremos a álgebra de Lie do oscilador harmônico usual (álgebra de Heisenberg-Weyl, ou h_4) e a construção de Schwinger da álgebra $su(2)$. Paralelamente, apresentaremos o análogo q -deformado da álgebra do oscilador harmônico, segundo Biedenharn e MacFarlane (álgebra h_{4q}) e a construção de Schwinger para a álgebra $su_q(2)$. No Capítulo 2 apresentaremos a construção de Hamiltonianos q -

simétricos, baseados no trabalho de Floratos, onde estenderemos sua construção para o caso de sistemas de vários férmions idênticos. No Capítulo 3 faremos uma breve revisão sobre estados coerentes para apresentarmos a generalização q -deformada desses objetos e a realização das álgebras q -deformadas no espaço de Bargmann. No Capítulo 4 aplicaremos os conceitos introduzidos nos capítulos anteriores no estudo das transições de fase do modelo q -LMG. Ao final, faremos alguns comentários acerca dos nossos resultados e das perspectivas das álgebras q -deformadas.

Álgebras q -Deformadas.

Neste capítulo faremos uma revisão da álgebra associada ao problema do oscilador harmônico simples (Álgebra de Heisenberg-Weyl ou h_1) e, de acordo com o método de Schwinger, construiremos a álgebra $su(2)$ a partir da álgebra de dois osciladores desacoplados. Introduziremos o análogo q -deformado da álgebra de Heisenberg-Weyl e construiremos o análogo da álgebra de Schwinger de modo a obtermos a álgebra $su_q(2)$ a partir de dois osciladores desacoplados. Finalmente estudaremos o problema do análogo q -deformado da unidade geradora.

1.3 A Álgebra de Heisenberg-Weyl (h_1).

Em Mecânica Quântica o Hamiltoniano de oscilador harmônico simples é dado por

$$H = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2), \quad (1.1)$$

onde m e ω são, respectivamente, a massa e a frequência angular do oscilador, e \hat{x} e \hat{p} são os operadores posição e momento linear da partícula e satisfazem a relação canônica de comutação:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (1.2)$$

Definiremos agora os operadores:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \quad (1.3)$$

$$a^\dagger \doteq \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \quad (1.4)$$

$$N \doteq a^\dagger a = \frac{1}{2\hbar m} \left(p^2 + m\omega^2 x^2 - \hbar\omega \right) \quad (1.5)$$

Capítulo 1

Álgebras q-Deformadas.

Neste capítulo faremos uma revisão da álgebra associada ao problema do oscilador harmônico simples (álgebra de Heisenberg-Weyl ou h_4) e, de acordo com o método de Schwinger, construiremos a álgebra $su(2)$ a partir da álgebra de dois osciladores desacoplados. Introduziremos o análogo q-deformado da álgebra de Heisenberg-Weyl e estenderemos o método de Schwinger de modo a obtermos a álgebra $su_q(2)$ a partir de dois q-osciladores desacoplados. Finalmente estudaremos o problema do análogo q-deformado do oscilador fermiônico.

1.1 A Álgebra de Heisenberg-Weyl (h_4).

Em Mecânica Quântica o Hamiltoniano do oscilador harmônico simples é dado por [6]:

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2), \quad (1.1)$$

onde m e ω são, respectivamente, a massa e a frequência angular do oscilador, definidas de acordo com a Mecânica Clássica. x e p são os operadores posição e momento linear da partícula e satisfazem a relação canônica de comutação:

$$[x, p] = i\hbar. \quad (1.2)$$

Definiremos agora os operadores:

$$a \doteq \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad (1.3)$$

$$a^+ \doteq \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right), \quad (1.4)$$

$$N \doteq a^+a = \frac{1}{2\hbar\omega} \left(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 x^2 - \hbar\omega \right). \quad (1.5)$$

Podemos observar que, sendo x e p operadores auto-adjuntos, temos a seguinte relação entre os operadores a e a^+ :

$$a^+ = a^\dagger. \quad (1.6)$$

Usando essas definições escrevemos o Hamiltoniano como:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\{a, a^+\} = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (1.7)$$

Consideremos agora as relações de comutação entre os operadores definidos em 1.3, 1.4 e 1.5:

$$[a, a^+] = I, \quad (1.8)$$

$$[N, a^+] = a^+, \quad (1.9)$$

$$[N, a] = -a, \quad (1.10)$$

$$[a, I] = [a^+, I] = [N, I] = 0. \quad (1.11)$$

Os operadores a , a^+ , N e I geram, portanto, uma álgebra de Lie (Ver o apêndice A). Esta é a álgebra de Heisenberg-Weyl. Os elementos do Grupo de Heisenberg-Weyl (o qual simbolizaremos por H_4) são obtidos da álgebra \mathfrak{h}_4 por meio do mapeamento exponencial:

$$g(\alpha, b, c) = \exp\{i(\alpha a + \alpha^* a^+ + bN + cI)\}, \quad (1.12)$$

onde α é complexo e b e c são reais. O grupo H_4 possui, portanto, quatro parâmetros reais.

O espaço de Hilbert do oscilador harmônico simples é o espaço vetorial gerado pelos autoestados do operador Hamiltoniano. Da relação 1.7 podemos observar que um conjunto de autoestados do operador N será também um conjunto de autoestados do Hamiltoniano. Denotemos por $|n\rangle$ estes autoestados. Então

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle. \quad (1.13)$$

Dessa equação concluímos que o conjunto de autoestados $|n\rangle$ é não degenerado, pois a diferentes estados correspondem diferentes autovalores da energia.

Consideremos agora a ação dos operadores a e a^+ sobre os vetores $|n\rangle$. De 1.9 e 1.10 vemos que:

$$\begin{aligned} [N, a^+] |n\rangle &= a^+ |n\rangle, \\ Na^+ |n\rangle - a^+ N |n\rangle &= a^+ |n\rangle, \\ N(a^+ |n\rangle) &= (n+1)(a^+ |n\rangle). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Logo, $a^+ |n\rangle$ é um autoestado de N (e, conseqüentemente, de H) com autovalor $(n+1)$. Como os estados $|n\rangle$ são não degenerados, o vetor $a^+ |n\rangle$ deve ser proporcional ao vetor $|n+1\rangle$. Assim,

$$a^+ |n\rangle = c |n+1\rangle. \quad (1.15)$$

Da mesma forma, podemos concluir que

$$a |n\rangle = d |n-1\rangle. \quad (1.16)$$

Assim, o operador a^+ “cria” um *quantum* de energia $\hbar\omega$, enquanto o operador a “aniquila” um *quantum* de energia $\hbar\omega$. Como os operadores a e a^+ são adjuntos conjugados podemos escrever a norma do vetor $a |n\rangle$ como:

$$\begin{aligned} \langle n | a^+ a |n\rangle &= |d|^2 \langle n-1 | n-1\rangle \\ n \langle n | n\rangle &= |d|^2 \langle n-1 | n-1\rangle. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Normalizando os vetores $|n\rangle$ à unidade, temos:

$$n = |d|^2. \quad (1.18)$$

Assumindo que d é um número real, podemos escrever a 1.16 como:

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (1.19)$$

De forma semelhante, observando que $aa^+ = N + I$, encontramos que:

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (1.20)$$

A equação 1.18 impõe que n deve ser um número estritamente não negativo. Logo, para haver consistência entre essa condição e a equação 1.19, concluímos que n deve ser um número inteiro. De 1.19 vemos que:

$$a|0\rangle = 0. \quad (1.21)$$

O estado $|0\rangle$ é chamado de *vácuo*. É o estado fundamental do oscilador harmônico e possui energia $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

De 1.20 e 1.21 vemos que todos os autoestados do Hamiltoniano podem ser obtidos através da aplicação sucessiva do operador de criação sobre o estado de *vácuo*. Ou seja:

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.22)$$

Podemos visualizar o problema do Oscilador Harmônico de uma forma alternativa, apropriada para o estudo de partículas idênticas.

Até agora consideramos o problema de uma única partícula, cuja energia era dada em múltiplos do *quantum* de energia $\hbar\omega$. Podemos agora imaginar os *quanta* de energia como se fossem partículas idênticas não massivas e independentes, cada uma com a energia $\hbar\omega$. Estamos agora tratando de um problema de muitas partículas. O número n rotula um estado constituído por n partículas idênticas, todas com energia igual a $\hbar\omega$. Como n pode ser qualquer número inteiro não negativo isto nos leva a concluir que tais partículas são de fato *bósons*. Assim, está claro que os estados $|n\rangle$ devem ser totalmente simétricos com respeito às permutações de quaisquer pares de partículas. Os vetores $|n\rangle$ pertencem agora ao espaço de Fock \mathcal{F}^+ , definido como:

$$\mathcal{F}^+ \doteq \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^+, \quad (1.23)$$

onde \mathcal{H}_n^+ é um espaço de Hilbert, constituído por estados totalmente simétricos de n partículas idênticas (no caso, bósons). \mathcal{H}_0 é o espaço de Hilbert unidimensional constituído pelo vácuo.

1.2 A Álgebra h_{4q} .

Faremos agora uma generalização da álgebra de Heisenberg-Weyl (equações 1.8 a 1.11) através da introdução de um *parâmetro de deformação*, que é o número com-

plexo q . Os geradores da nova álgebra (álgebra h_{4q}) devem ser obtidos a partir dos operadores da álgebra de Heisenberg-Weyl por meio da variação deste parâmetro. Convencionamos que, quando $q \rightarrow 1$, essa álgebra *deformada* deve reduzir-se à álgebra de Heisenberg-Weyl não deformada. Assim, denotando por a_q , a_q^+ , N_q e I_q os operadores deformados de aniquilação, criação, número e identidade, respectivamente, *definimos* a álgebra q -deformada h_{4q} através das seguintes relações de comutação entre estes operadores [9], [10]:

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \quad (1.24)$$

$$[N_q, a_q] = -a_q, \quad (1.25)$$

$$[N_q, a_q^+] = a_q^+, \quad (1.26)$$

$$[I_q, \dots] = 0, \quad (1.27)$$

onde a última linha denota o comutador de qualquer operador com o operador identidade.

Mostraremos que é possível encontrar uma relação explícita entre os operadores deformados e os não deformados, de forma que as relações acima sejam satisfeitas. Dizemos que tais relações especificam uma realização *clássica* da álgebra deformada. Assumiremos que uma dessas possíveis realizações é a seguinte [12]:

$$I_q = I, \quad (1.28)$$

$$N_q = N, \quad (1.29)$$

$$a_q = F_-(q, N)a, \quad (1.30)$$

$$a_q^+ = F_+(q, N)a^+, \quad (1.31)$$

onde $F_-(q, N)$ e $F_+(q, N)$ são funções a se determinar.

Substituindo essas expressões na relação 1.24, temos:

$$\begin{aligned} F_-(q, N)aF_+(q, N)a^+ - qF_+(q, N)a^+F_-(q, N)a &= q^{-N} \\ F_-(q, N)F_+(q, N+I)aa^+ - qF_+(q, N)F_-(q, N-I)a^+a &= q^{-N} \\ F_-(q, N)F_+(q, N+I)(N+I) - qF_-(q, N-I)F_+(q, N)N &= q^{-N}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

onde fizemos uso das relações de comutação entre os operadores não deformados e do fato que $g(N+I)a = ag(N)$ e $g(N-I)a^+ = a^+g(N)$, para qualquer função $g(N)$.

Definindo

$$F_-(q, N-1)F_+(q, N)N \doteq f(q, N), \quad (1.33)$$

a equação 1.32 se torna:

$$f(q, N+1) - qf(q, N) = q^{-N}. \quad (1.34)$$

Para encontrarmos uma forma explícita para a função $f(q, N)$ consideraremos o espaço de Fock \mathcal{F}^+ , com a base dada pelo conjunto dos autovetores do operador N . Assim, considerando a equação 1.34 aplicada sobre um vetor $|n\rangle$ da base desse espaço, temos:

$$\begin{aligned} f(q, N+1)|n\rangle - qf(q, N)|n\rangle &= q^{-N}|n\rangle \\ f(q, n+1) - qf(q, n) &= q^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Como

$$f(q, 0)|0\rangle = F_-(q, N-1)F_+(q, N)N|0\rangle \quad (1.36)$$

e

$$N|0\rangle = 0, \quad (1.37)$$

então, se as funções F_+ e F_- devem ser não singulares, devemos ter

$$f(q, 0) = 0. \quad (1.38)$$

Podemos usar a equação 1.35 como uma fórmula recursiva que nos permite encontrar $f(q, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(q, 1) = q^0 = 1 &= \frac{q^1 - q^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ f(q, 2) = q^{-1} + qf(q, 1) = q^{-1} + q &= \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}}, \\ f(q, 3) = q^{-2} + qf(q, 2) = q^{-2} + 1 + q^2 &= \frac{q^3 - q^{-3}}{q - q^{-1}}, \\ f(q, 4) = q^{-3} + qf(q, 3) = q^{-3} + q^{-1} + q + q^3 &= \frac{q^4 - q^{-4}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Assim, podemos induzir a forma explícita da função $f(q, n)$ (com $n \in \mathbb{N}$):

$$f(q, n) = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \doteq [n]_q. \quad (1.39)$$

Dessa forma, a função-operador $f(q, N)$, quando atua no espaço de Fock \mathcal{F}^+ , pode ser escrita como:

$$f(q, N) = [N]_q. \quad (1.40)$$

Consideraremos agora que a relação acima seja válida em qualquer representação da álgebra não deformada h_4 , embora tenhamos usado explicitamente o espaço de Fock para deduzi-la. Podemos fazer essa hipótese de maneira consistente, pois a única condição que $f(q, N)$ deve satisfazer é a equação 1.34. Vemos então que poderíamos ter definido $f(q, N)$ de acordo com 1.40 que estaríamos respeitando a condição 1.34.

Portanto, teremos uma realização clássica de h_{4q} se as funções F_+ e F_- , definidas de acordo com as equações 1.28 a 1.31, satisfizerem a seguinte condição (equação 1.33):

$$F_-(q, N-I)F_+(q, N) = \frac{[N]_q}{N}. \quad (1.41)$$

As relações 1.30 e 1.31 tornam-se:

$$a_q = F_-(q, N)a, \quad (1.42)$$

$$a_q^\dagger = \frac{1}{F_-(q, N-I)} \frac{[N]_q}{N} a^+, \quad (1.43)$$

onde $F_-(q, N)$ é uma função arbitrária não singular de q e N .

Na álgebra não deformada h_4 tínhamos que os operadores de criação e aniquilação eram adjuntos conjugados ($a^+ = a^\dagger$). Analisaremos agora sob que condições os seus análogos q-deformados terão essa propriedade. Supondo que $a_q^\dagger = a_q^+$ e usando 1.42 e 1.43, além do fato que $a^\dagger = a^+$, devemos ter:

$$\begin{aligned} a^\dagger F_-^*(q, N) &= \frac{1}{F_-(q, N-I)} \frac{[N]_q}{N} a^+ \\ F_-^*(q, N-I) a^+ &= \frac{1}{F_-(q, N-I)} \frac{[N]_q}{N} a^+. \end{aligned}$$

Essa última equação nos diz que

$$|F_-(q, N-I)|^2 = \frac{[N]_q}{N}. \quad (1.44)$$

Logo, vemos que se $a_q^\dagger = a_q^+$, então o lado direito dessa última expressão deve ser um operador hermitiano não negativo definido, o que implica que é o operador $[N]_q$

quem deve satisfazer tais condições, visto que N já as satisfaz. Para que $[N]_q$ seja hermitiano devemos ter:

$$\begin{aligned} [N]_q^\dagger &= [N]_q \\ \frac{q^{*N} - q^{*-N}}{q^* - q^{*-1}} &= \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Essa última equação só será satisfeita se o parâmetro q for um número real ou uma fase complexa pura. De agora em diante consideraremos apenas estas possibilidades para esse parâmetro.

A condição de não negatividade do operador $[N]_q$, determina a forma da função F_- :

$$F_-(q, N-I) = \sqrt{\frac{[N]_q}{N}} e^{i\alpha}, \quad (1.45)$$

onde α é uma fase arbitrária. Escolhendo essa fase igual a zero, teremos as seguintes relações entre os operadores deformados e os não deformados:

$$a_q = \sqrt{\frac{[N+I]_q}{N+I}} a, \quad (1.46)$$

$$a_q^+ = \sqrt{\frac{[N]_q}{N}} a^+. \quad (1.47)$$

Pela construção que fizemos da álgebra h_{4q} vemos que uma representação da álgebra não deformada será também uma representação da álgebra deformada. A deformação, no entanto, pode provocar mudanças no *status* da representação no que diz respeito à unitariedade e à irredutibilidade [12].

A unitariedade é uma propriedade do Grupo de Lie associado, H_4 . Traduzida em termos das propriedades da álgebra, a unitariedade significa que os operadores de criação e aniquilação são adjuntos conjugados, conforme vemos em 1.12.

A álgebra deformada h_{4q} não é uma álgebra de Lie (Ver Apêndice A), portanto não podemos falar de um Grupo de Lie associado a esta (Na verdade, a deformação faz com que não seja mais possível expressarmos todos os comutadores entre os geradores deformados no âmbito da álgebra de Lie, pois o resultado das relações de comutação se encontram agora no âmbito da Álgebra Envoltória Universal da álgebra de Lie não deformada). Estenderemos para as álgebras deformadas o sentido que o

termo unitariedade possui no contexto das álgebras não deformadas. Assim, diremos que uma dada representação é unitária se os operadores de criação e destruição, nesta representação, são adjuntos conjugados.

Como vimos, os operadores deformados a_q e a_q^+ serão adjuntos conjugados numa dada representação se, e somente se, o operador $[N]_q$ for não negativo definido nessa representação (lembramos que estamos nos restringindo a valores de q reais ou fases complexas puras).

Analisemos a irredutibilidade da representação \mathcal{F}^+ da álgebra não deformada h_4 observando a ação sucessiva do operador de criação sobre o estado de vácuo. Como cada aplicação desse operador resultava em um estado que ainda não havia sido obtido por este procedimento, concluímos que não há nenhum subespaço invariante em \mathcal{F}^+ , o que significava que essa representação era irredutível com respeito a h_4 . Aplicando o mesmo raciocínio em relação à álgebra deformada h_{4q} diremos que uma dada representação desta álgebra é irredutível se aplicações sucessivas do operador de criação q-deformado sobre um estado qualquer da representação resultar em estados da representação que ainda não foram obtidos por esse procedimento. A representação será redutível se uma dessas aplicações sucessivas resultar no vetor nulo.

Como o espaço \mathcal{F}^+ é uma representação da álgebra não deformada também o será da álgebra q-deformada. Visualizaremos a ação dos operadores q-deformados sobre os vetores $|n\rangle$, fazendo uso das relações 1.46 e 1.47:

$$I_q |n\rangle = I |n\rangle = |n\rangle, \quad (1.48)$$

$$N_q |n\rangle = N |n\rangle = n |n\rangle, \quad (1.49)$$

$$a_q |0\rangle = \sqrt{\frac{[N+I]_q}{N+I}} a |0\rangle = 0, \quad (1.50)$$

$$a_q |n\rangle = \sqrt{\frac{[N+I]_q}{N+I}} a |n\rangle = \sqrt{\frac{[n]_q}{n}} \sqrt{n} |n-1\rangle = \sqrt{[n]_q} |n-1\rangle, \quad (1.51)$$

$$a_q^+ |n\rangle = \sqrt{\frac{[N]_q}{N}} a^+ |n\rangle = \sqrt{[n+1]_q} |n+1\rangle. \quad (1.52)$$

Analisaremos agora as propriedades da representação \mathcal{F}^+ da álgebra h_{4q} nos dois casos permissíveis para o parâmetro q :

i) q é um número real. Neste caso teremos duas possibilidades:

i.1) q é positivo. Nesta situação podemos escrever $q = e^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$[n]_q = \frac{\text{senh}(\gamma n)}{\text{senh}(\gamma)}. \quad (1.53)$$

Dessa expressão vemos que $[n]_q$ não contém zeros, exceto para $n = 0$. Observando 1.52 vemos que a aplicação sucessiva do operador de criação sobre o estado de vácuo gera uma base para todo o espaço \mathcal{F}^+ . Logo, esta representação é irreduzível. Observamos também que $[n]_q$ é real e não negativo para todo n . Assim, essa representação é unitária.

i.2) q é negativo. Agora escrevemos $q = -e^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}^*$ e

$$[n]_q = (-1)^{n-1} \frac{\text{senh}(\gamma n)}{\text{senh}(\gamma)}. \quad (1.54)$$

Identicamente ao caso anterior concluímos que a representação é irreduzível, com a diferença que, neste caso, $[n]$ não é mais não negativo definido. Logo, a representação é não unitária.

ii) q é uma fase pura. Escrevemos $q = e^{i\phi}$, $\phi \in \mathbb{R}$ e $\phi \neq \pi$. Logo,

$$[n]_q = \frac{\text{sen}(\phi n)}{\text{sen}(\phi)}. \quad (1.55)$$

Temos agora três situações a analisar:

ii.1) $\frac{\phi}{\pi} = \delta$, onde δ é um número irracional. Assim, temos:

$$[n]_q = \frac{\text{sen}(n\delta\pi)}{\text{sen}(\delta\pi)}. \quad (1.56)$$

Essa quantidade resulta em zero somente quando $n = 0$. Então, aplicando sucessivamente o operador de criação sobre o vácuo obtemos novamente uma base para todo o espaço \mathcal{F}^+ . Concluímos que a representação é irreduzível; por outro lado, não é unitária, pois $[n]_q$ não satisfaz a condição de ser não negativo definido.

ii.2) $\frac{\phi}{\pi} = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Neste caso, temos que:

$$[n]_q = \frac{\text{sen}(\pi \frac{n}{m})}{\text{sen}(\frac{\pi}{m})}. \quad (1.57)$$

ii.3) $\frac{\phi}{\pi} = \frac{k}{m}$, $k, m \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$ e k não é múltiplo de m . Então,

$$[n]_q = \frac{\text{sen}(\pi \frac{k}{m} n)}{\text{sen}(\frac{k\pi}{m})}. \quad (1.58)$$

Assim, recordando novamente 1.52 vemos que aplicando m vezes sucessivas o operador de criação sobre o vácuo obtemos novamente o vetor *nulo*. Logo, o subespaço $\mathcal{F}_m^+ \doteq \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |m-1\rangle\}$ é invariante sob a ação dos geradores da álgebra h_{4q} . Portanto, concluímos que \mathcal{F}^+ é uma representação *reduzível* de h_{4q} e o subespaço invariante \mathcal{F}_m^+ é uma representação irredutível de dimensão m .

Observando 1.57 podemos concluir que no caso ii.2) o subespaço \mathcal{F}_m^+ é também uma representação unitária dessa álgebra, pois $[n]_q$ (com $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$) é não negativo definido. No caso ii.3) observamos que a representação irredutível \mathcal{F}_m^+ não é mais unitária, visto que a quantidade $[n]_q$ assume valores negativos para

$$1+2l < n \frac{k}{m} < 2+2l \quad ; \quad \frac{k}{2} - 1 < l < \frac{k}{2} - \frac{1}{2}. \quad (1.59)$$

1.3 A Álgebra $su(2)$.

A Álgebra de Lie $su(2)$ é a álgebra gerada pelos operadores de momento angular J_x , J_y e J_z , que satisfazem as seguintes relações de comutação ($\hbar = 1$) [6]:

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad (1.60)$$

$$[J_x, J_z] = -iJ_y, \quad (1.61)$$

$$[J_y, J_z] = iJ_x. \quad (1.62)$$

Definindo

$$J_{\pm} \doteq J_x \pm iJ_y, \quad (1.63)$$

temos a álgebra $su(2)$ expressa na base de Cartan:

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad (1.64)$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (1.65)$$

Obteremos agora uma realização dessa álgebra através de dois osciladores harmônicos independentes, segundo o procedimento introduzido por Schwinger [11]. Definimos os operadores J_z , J_+ e J_- em termos dos operadores de criação, aniquilação e número dos dois osciladores não deformados (os quais denotaremos pelos

índices 1 e 2) da seguinte maneira:

$$J_+ = a_1^+ a_2, \quad (1.66)$$

$$J_- = a_2^+ a_1, \quad (1.67)$$

$$J_z = \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \quad (1.68)$$

onde os operadores de cada um dos osciladores satisfazem a álgebra de Heisenberg-Weyl usual e a independência dos osciladores é caracterizada pelas seguintes relações:

$$[a_i^+, a_j^+] = [a_i, a_j] = [a_i, a_j^+] = 0, \quad (1.69)$$

$$[N_i, N_j] = [N_i, a_j] = [N_i, a_j^+] = 0, \quad (1.70)$$

com $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

Usando esses comutadores calcularemos as seguintes relações:

$$[J_+, J_-] = [a_1^+ a_2, a_2^+ a_1] \quad (1.75)$$

$$= a_1^+ [a_2, a_2^+ a_1] + [a_1^+, a_2^+ a_1] a_2 \quad (1.76)$$

$$= a_1^+ [a_2, a_2^+] a_1 + a_2^+ [a_1^+, a_1] a_2 \quad (1.77)$$

$$= a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2 \quad (1.78)$$

$$= N_1 - N_2$$

$$= 2J_z, \quad (1.71)$$

$$[J_z, J_+] = \left[\frac{1}{2}(N_1 - N_2), a_1^+ a_2 \right] \quad (1.80)$$

$$= \frac{1}{2}([N_1, a_1^+] a_2 - a_1^+ [N_2, a_2]) \quad (1.80)$$

$$= \frac{1}{2}(a_1^+ a_2 + a_1^+ a_2)$$

$$= \frac{1}{2}(J_+ + J_+) \quad (1.72)$$

$$= J_+,$$

$$[J_z, J_-] = \left[\frac{1}{2}(N_1 - N_2), a_2^+ a_1 \right] \quad (1.81)$$

$$= \frac{1}{2}(a_2^+ [N_1, a_1] - [N_2, a_2^+] a_1)$$

$$= \frac{1}{2}(-a_2^+ a_1 - a_2^+ a_1)$$

$$\begin{aligned} J_z |j, m\rangle &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) |j, m\rangle \\ &= -J_- |j, m\rangle \end{aligned} \quad (1.73)$$

Verificamos então que os operadores de momento angular, definidos em termos dos operadores de dois osciladores independentes de acordo com 1.66 - 1.68, satisfazem a álgebra $su(2)$.

Os autoestados do operador J_z serão dados por

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{(a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2}}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}} |0, 0\rangle, \quad (1.74)$$

onde o vácuo $|0, 0\rangle$ é definido como o produto direto dos estados de vácuo dos dois osciladores. Fazemos agora as seguintes associações:

$$n_1 = j + m, \quad (1.75)$$

$$n_2 = j - m, \quad (1.76)$$

$$n = n_1 + n_2, \quad (1.77)$$

$$|n_1, n_2\rangle = |j + m, j - m\rangle \doteq |j, m\rangle. \quad (1.78)$$

O operador Casimir (operador que comuta com todos os geradores) da álgebra $su(2)$ é dado por [8]:

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+). \quad (1.79)$$

Em termos dos operadores dos osciladores o Casimir é escrito como:

$$J^2 = \frac{1}{2}N \left(\frac{N}{2} + 1 \right), \quad (1.80)$$

onde definimos o operador $N \doteq N_1 + N_2$. Usando 1.78 e 1.80, podemos verificar que temos as relações usuais da álgebra $su(2)$ no espaço de estados $|j, m\rangle$:

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= \frac{1}{2}N \left(\frac{N}{2} + 1 \right) |n_1, n_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}(n_1 + n_2) \left(\frac{n_1 + n_2}{2} + 1 \right) |n_1, n_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}2j \left(\frac{2j}{2} + 1 \right) |j, m\rangle \\ &= j(j + 1) |j, m\rangle, \end{aligned} \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned}
 J_z |j, m\rangle &= \frac{1}{2}(N_1 - N_2) |n_1, n_2\rangle & (1.87) \\
 &= \frac{1}{2}(n_1 - n_2) |n_1, n_2\rangle & (1.88) \\
 &= \frac{1}{2}(2m) |j, m\rangle \\
 &= m |j, m\rangle. & (1.82)
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos:

$$\begin{aligned}
 J_+ |j, m\rangle &= a_1^+ a_2 |n_1, n_2\rangle \\
 &= \sqrt{n_2(n_1 + 1)} |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle \\
 &= \sqrt{(j - m)(j + m + 1)} |j + (m + 1), j - (m + 1)\rangle & (1.89) \\
 &= \sqrt{(j - m)(j + m + 1)} |j, m + 1\rangle, & (1.83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_- |j, m\rangle &= a_2^+ a_1 |n_1, n_2\rangle \\
 &= \sqrt{n_1(n_2 + 1)} |n_1 - 1, n_2 + 1\rangle & (1.90) \\
 &= \sqrt{(j + m)(j - m + 1)} |j + (m - 1), j - (m - 1)\rangle \\
 &= \sqrt{(j + m)(j - m + 1)} |j, m - 1\rangle. & (1.84)
 \end{aligned}$$

De 1.83 podemos deduzir a seguinte expressão:

$$|j, m\rangle = \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} \frac{J_+^{j+m}}{(j+m)!} |j, -j\rangle. \quad (1.85)$$

1.4 A Álgebra $su_q(2)$.

Como vimos na seção anterior, pela construção de Schwinger podemos construir as relações de comutação da álgebra $su(2)$ a partir das relações de comutação da álgebra h_4 . Faremos agora uma generalização desse método para o caso de álgebras deformadas, de modo a obtermos a álgebra deformada $su_q(2)$ [10, 9, 13].

Consideremos dois osciladores q-deformados independentes, os quais rotularemos com os índices 1 e 2, e a álgebra h_{4q} associada a cada um deles. Definimos, analogamente ao caso não deformado, os geradores de $su_q(2)$ como:

$$J_{q+} = a_{q1}^+ a_{q2}, \quad (1.86)$$

Assumindo, a Álgebra $su_q(2)$ é dada em relação de comutação: (1.87)

$$J_{q-} = a_{q_2}^+ a_{q_1},$$

$$J_{qz} = \frac{1}{2}(N_1 - N_2). \quad (1.88)$$

Assim, temos a seguinte relação de comutação:

O operador Casimir dessa álgebra não pode ser obtido simplesmente substituindo os geradores de $su_q(2)$ no operador Casimir usual quando $q \neq 1$. Como os geradores de A_q podem ser escritos em função dos geradores de $su_q(2)$, resulta em um operador que não comuta para todos os geradores de $su_q(2)$. Assim, o operador

$$[J_{qz}, J_{q+}] = \frac{1}{2}[N_1 - N_2, a_{q_1}^+ a_{q_2}]$$

$$= \frac{1}{2}([N_1, a_{q_1}^+] a_{q_2} - a_{q_1}^+ [N_2, a_{q_2}])$$

$$= \frac{1}{2}(a_{q_1}^+ a_{q_2} + a_{q_1}^+ a_{q_2}) \quad (1.89)$$

De maneira idêntica vemos que

$$[J_{qz}, J_{q-}] = -J_{q-}. \quad (1.90)$$

A diferença em relação à álgebra não deformada está no seguinte comutador:

Para obter as expressões que relacionam os geradores de $su_q(2)$ com os geradores de A_q , usamos as equações 1.86, 1.87 e 1.88:

$$[J_{q+}, J_{q-}] = [a_{q_1}^+ a_{q_2}, a_{q_2}^+ a_{q_1}]$$

$$= a_{q_1}^+ [a_{q_2}, a_{q_2}^+ a_{q_1}] + [a_{q_1}^+, a_{q_2}^+ a_{q_1}] a_{q_2}$$

$$= a_{q_1}^+ [a_{q_2}, a_{q_2}^+] a_{q_1} + a_{q_2}^+ [a_{q_1}^+, a_{q_1}] a_{q_2}$$

$$= a_{q_1}^+ ([N_2 + 1]_q - [N_2]_q) a_{q_1} + a_{q_2}^+ ([N_1]_q - [N_1 + 1]_q) a_{q_2}$$

$$= a_{q_1}^+ a_{q_1} ([N_2 + 1]_q - [N_2]_q) + a_{q_2}^+ a_{q_2} ([N_1]_q - [N_1 + 1]_q)$$

$$= [N_1]_q ([N_2 + 1]_q - [N_2]_q) + [N_2]_q ([N_1]_q - [N_1 + 1]_q) \quad (1.95)$$

$$= [N_1]_q [N_2 + 1]_q - [N_2]_q [N_1 + 1]_q$$

Da mesma forma, podemos escrever

$$= \left(\frac{q^{N_1} - q^{-N_1}}{q - q^{-1}} \right) \left(\frac{q^{N_2+1} - q^{-(N_2+1)}}{q - q^{-1}} \right) +$$

$$- \left(\frac{q^{N_2} - q^{-N_2}}{q - q^{-1}} \right) \left(\frac{q^{N_1+1} - q^{-(N_1+1)}}{q - q^{-1}} \right) \quad (1.97)$$

$$= \frac{q^{N_1-N_2} - q^{-(N_1-N_2)}}{q - q^{-1}}$$

onde N é o operador número de $su_q(2)$ escrito em termos do Casimir de $su_q(2)$ (ver 1.88). Então, finalmente,

$$= [2\frac{1}{2}(N_1 - N_2)]_q$$

$$= [2J_{qz}]_q. \quad (1.91)$$

Resumindo, a álgebra $su_q(2)$ é dada pelas seguintes relações de comutação: (1.98)

$$[J_{qz}, J_{q\pm}] = \pm J_{q\pm}, \quad (1.92)$$

$$[J_{q+}, J_{q-}] = [2J_{qz}]_q. \quad (1.93)$$

O operador Casimir dessa álgebra não pode ser obtido simplesmente substituindo os geradores de $su(2)$ pelos de $su_q(2)$ em 1.79, pois isso resulta em um operador que não comuta com todos os geradores de $su_q(2)$. Portanto, *definimos* o operador

$$C \doteq J_{q+}J_{q-} + [J_{qz} - \frac{1}{2}]_q^2 - \frac{1}{4} \quad (1.94)$$

$$= [\frac{N}{2} + J_z]_q [\frac{N}{2} - J_z + 1]_q + [J_z - \frac{1}{2}]_q^2 - \frac{1}{4}$$

$$= [\frac{N}{2} + \frac{1}{2}]_q^2, \quad (1.95)$$

que comuta com todos os geradores de $su_q(2)$ e se reduz ao Casimir usual quando $q \rightarrow 1$.

Como os geradores de h_{4q} podem ser escritos em função dos geradores de h_4 (o que chamamos de uma realização clássica da álgebra deformada), é possível encontrarmos expressões que relacionam os geradores de $su_q(2)$ com os geradores de $su(2)$.

Para isso, substituiremos as relações 1.46 e 1.47 em 1.86, 1.87 e 1.88:

$$\begin{aligned} J_{q+} &= a_{q1}^{\dagger} a_{q2} = \sqrt{\frac{[N_1]_q}{N_1}} a_1^{\dagger} \sqrt{\frac{[N_2 + 1]_q}{N_2 + 1}} a_2 \\ &= \sqrt{\frac{[N_1]_q [N_2 + 1]_q}{N_1 (N_2 + 1)}} a_1^{\dagger} a_2 \\ &= \sqrt{\frac{[\frac{N}{2} + J_z]_q [\frac{N}{2} - J_z + 1]_q}{(\frac{N}{2} + J_z)(\frac{N}{2} - J_z + 1)}} J_+. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Da mesma forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned} J_{q-} &= a_{q2}^{\dagger} a_{q1} \\ &= \sqrt{\frac{[\frac{N}{2} - J_z]_q [\frac{N}{2} + J_z + 1]_q}{(\frac{N}{2} - J_z)(\frac{N}{2} + J_z + 1)}} J_-, \end{aligned} \quad (1.97)$$

onde N é o operador em função do qual é escrito o Casimir de $su(2)$ (ver 1.80). E, finalmente,

$$J_{qz} = \frac{1}{2}(N_1 - N_2)$$

$$= J_z. \quad (1.98)$$

A ação do Casimir deformado sobre os estados $|j, m\rangle$ é diretamente obtida se olharmos para 1.95:

$$\begin{aligned} C|j, m\rangle &= \left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right]_q^2 |j, m\rangle \\ &= \left[j + \frac{1}{2}\right]_q^2 |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Em uma representação irredutível da álgebra não deformada $su(2)$ todos os vetores são autovetores do Casimir com o mesmo autovalor. O mesmo acontece com o operador N , como podemos ver de 1.80. Logo, tanto o autovalor do Casimir J^2 quanto o autovalor de N servem para rotular uma dada representação irredutível de $su(2)$. No método de Schwinger estas representações são caracterizadas pelo fato de todos os estados possuírem o mesmo número de partículas ($n = n_1 + n_2 = 2j$). No caso deformado temos essencialmente o mesmo. Ao observarmos 1.95 vemos que o Casimir deformado depende apenas do operador N . Em uma representação irredutível de $su_q(2)$ todos os estados possuem o mesmo número de partículas (mas nem todos os estados que possuem o mesmo número de partículas pertencem a uma mesma representação irredutível, pois, como veremos, uma representação irredutível de $su(2)$ pode ser redutível em $su_q(2)$ quando o parâmetro q é uma fase pura).

Usando as relações 1.96, 1.97 e 1.98 podemos explicitar a ação dos geradores de $su_q(2)$ sobre os estados $|j, m\rangle$:

$$\begin{aligned} J_{qz} |j, m\rangle &= J_z |j, m\rangle \\ &= m |j, m\rangle, \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$\begin{aligned} J_{q+} |j, m\rangle &= \sqrt{\frac{[\frac{N}{2} + J_z]_q [\frac{N}{2} - J_z + 1]_q}{(\frac{N}{2} + J_z)(\frac{N}{2} - J_z + 1)}} J_+ |j, m\rangle \\ &= \sqrt{[j + m + 1]_q [j - m]_q} |j, m + 1\rangle, \end{aligned} \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} J_{q-} |j, m\rangle &= \sqrt{\frac{[\frac{N}{2} - J_z]_q [\frac{N}{2} + J_z + 1]_q}{(\frac{N}{2} - J_z)(\frac{N}{2} + J_z + 1)}} J_- |j, m\rangle \\ &= \sqrt{[j + m]_q [j - m + 1]_q} |j, m - 1\rangle. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Como vimos anteriormente, uma representação unitária e irredutível da álgebra não deformada pode perder essas propriedades quando consideramos o análogo de-

formado. Isso acontece, no caso da álgebra de Heisenberg-Weyl, quando o parâmetro q assume valores que são fases puras. Como construímos $su_q(2)$ a partir de osciladores deformados, a situação se repete neste caso. Assim, toda a análise que fizemos para o caso do oscilador q -deformado é válida para $su_q(2)$. Vejamos, por exemplo, a propriedade da unitariedade. De 1.86 e 1.87 vemos que J_{q+} será adjunto conjugado de J_{q-} somente se a_q^+ for adjunto conjugado de a_q em cada um dos osciladores. Se a condição de unitariedade for violada para h_{4q} também o será para $su_q(2)$. Com respeito à redutibilidade, vimos que uma representação irredutível de $su(2)$ é formada por estados com o mesmo número n de partículas ($n = n_1 + n_2$). Ao aplicarmos os operadores J_+ e J_- sobre esses estados o que estamos fazendo é retirar um *quantum* de um oscilador e passar para o outro. Se todo o espaço de Fock \mathcal{F}^+ de cada um dos osciladores é uma representação irredutível da álgebra destes, então ao retirarmos ou adicionarmos qualquer número de *quanta* a estes osciladores estamos permutando estados dentro de uma mesma representação irredutível da álgebra dos osciladores e, portanto, o conjunto de estados $|n_1, n_2\rangle$, com $n_1 + n_2$ fixo, é também uma representação irredutível de $su(2)$. No caso deformado, vemos que assim se sucede quando o parâmetro q é um número real. Quando q é uma fase a representação \mathcal{F}^+ pode ser redutível. Suponhamos que as representações irredutíveis de h_{4q} possuam dimensão m . Então existem no máximo m estados pertencentes a uma mesma representação irredutível de h_{4q} . Isso faz com que a dimensão máxima de uma representação irredutível de $su_q(2)$ seja m . Logo, todas as representações de dimensão superior a m serão redutíveis em $su_q(2)$.

1.5 O Oscilador Fermiônico.

As relações de comutação do oscilador fermiônico são construídas tomando-se como modelo a álgebra do oscilador harmônico (bosônico), com a diferença que os *quanta* do oscilador fermiônico devem satisfazer o Princípio de Exclusão de Pauli. Lembremos as relações de comutação entre os operadores de criação e destruição do oscilador bosônico usual:

$$[a, a] = 0,$$

Podemos definir $[a^+, a^+] = 0$, $[a, a^+] = I$.

Com essas relações e adicionando os operadores Identidade e $N \doteq a^+a$ construímos a álgebra h_4 .

A maneira de se implementar o Princípio de Exclusão de Pauli nesse esquema é substituindo os comutadores acima por anticomutadores. Denotando por b^+ e b os operadores de criação e destruição fermiônicos, teremos então:

$$\{b, b\} = 0, \tag{1.103}$$

$$\{b^+, b^+\} = 0, \tag{1.104}$$

$$\{b, b^+\} = I. \tag{1.105}$$

Definindo o operador $N \doteq b^+b$ e adicionando o operador Identidade obtemos os comutadores abaixo que, juntamente com os anticomutadores acima, definem as relações de comutação do oscilador fermiônico:

$$[N, b^+] = b^+ \tag{1.106}$$

$$[N, b] = -b \tag{1.107}$$

$$[I, \dots] = 0. \tag{1.108}$$

Dos anticomutadores 1.104 concluímos que $b^{+2} = b^2 = 0$. De 1.105 temos que $bb^+ = I - N$. Assim, temos que

$$N(I - N) = b^+bb^+ \tag{1.109}$$

$$= b^+(b^2)b^+$$

$$= 0. \tag{1.109}$$

Logo, os autovalores do operador N podem assumir apenas os valores 0 e 1. Definimos a base (autoestados do operador N) do espaço de Fock do oscilador fermiônico da mesma forma como fizemos para o oscilador bosônico, com a diferença que o espaço de Fock agora é bidimensional:

$$b|0\rangle = 0, \tag{1.110}$$

$$|1\rangle = b^+|0\rangle. \tag{1.111}$$

Podemos utilizar dois osciladores fermiônicos independentes na construção de Schwinger da álgebra $su(2)$, onde as seguintes relações denotam a independência dos osciladores (fazemos analogia com o caso bosônico, substituindo os comutadores por anticomutadores):

$$\{b_1, b_2\} = \{b_1^+, b_2^+\} = \{b_1^+, b_2\} = \{b_1, b_2^+\} = 0. \quad (1.112)$$

Definimos os geradores de $su(2)$ em termos dos geradores da álgebra fermiônica, de maneira análoga à realizada no caso bosônico:

$$J_+ = b_1^+ b_2, \quad (1.113)$$

$$J_- = b_2^+ b_1, \quad (1.114)$$

$$J_z = \frac{1}{2}(N_1 - N_2). \quad (1.115)$$

Podemos verificar que estes geradores satisfazem a álgebra $su(2)$. Como exemplo, calcularemos o seguinte comutador:

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= [b_1^+ b_2, b_2^+ b_1] \\ &= -b_1^+ b_2^+ \{b_1, b_2\} + b_1^+ \{b_2^+, b_2\} b_1 - b_2^+ \{b_1, b_1^+\} b_2 + \{b_2^+, b_1^+\} b_1 b_2 \\ &= b_1^+ b_1 - b_2^+ b_2 \\ &= \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \end{aligned} \quad (1.116)$$

onde usamos a fórmula

$$[AB, CD] = -AC\{B, D\} + A\{C, B\}D - C\{A, D\}B + \{A, C\}DB. \quad (1.116)$$

Definindo o operador $N = N_1 + N_2$ (número total de férmions), o Casimir 1.79 será dado por:

$$\begin{aligned} J^2 &= \left(\frac{1}{2}(N_1 - N_2)\right)^2 + \frac{1}{2}\{N_1(I - N_2) + N_2(I - N_1)\} \\ &= \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right) - 2N_1N_2. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Para mantermos a interpretação da construção de Schwinger feita no caso bosônico (onde o rótulo j da representação está associado à metade do número total de partículas), devemos nos restringir às representações que possuem $N_1N_2 = 0$, de tal

forma que o Casimir assuma a forma 1.80. Como os autovalores de N_1 e N_2 são 0, 1, esta restrição somente será satisfeita quando o número total de partículas for 0 ou 1. Então, pela construção de Schwinger, e usando osciladores fermiônicos, podemos construir somente as representações $j = 0, \frac{1}{2}$ de $su(2)$.

Podemos realizar a álgebra $su(2)$ de uma maneira alternativa, usando agora um único oscilador fermiônico. Como pode ser visto diretamente, as seguintes associações reproduzem as relações de comutação dessa álgebra:

$$J_+ = b^+, \quad (1.118)$$

$$J_- = b, \quad (1.119)$$

$$J_z = N - \frac{1}{2}. \quad (1.120)$$

O Casimir se reduz a

$$\begin{aligned} J^2 &= \left(N - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(b^+b + bb^+) \\ &= N(N - 1) + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right), \end{aligned} \quad (1.121)$$

onde usamos o fato que $N(N - 1) = 0$. Observamos que, nessa realização, temos apenas a representação $j = \frac{1}{2}$ de $su(2)$.

1.6 O q-Oscilador Fermiônico.

Introduziremos agora o análogo q-deformado do oscilador fermiônico. Embora haja um certo consenso na literatura sobre como deformar o oscilador bosônico [9], [10, 13, 12], o mesmo não acontece com respeito ao oscilador fermiônico. Existem duas classes de q-deformação desse oscilador: as que preservam o Princípio de Exclusão de Pauli [14, 16] e as que o violam [15]. Neste trabalho usaremos uma deformação da primeira classe.

Definimos as relações de comutação do oscilador q-deformado como [14, 16]:

$$b_q b_q^+ + q b_q^+ b_q = q^{N_q}, \quad (1.122)$$

$$b_q b_q^+ + q^{-1} b_q^+ b_q = q^{-N_q}, \quad (1.123)$$

$$\{b_q^+, b_q^+\} = \{b_q, b_q\} = 0, \quad (1.124)$$

$$[N_q, b_q^+] = b_q^+, \quad (1.125)$$

$$[N_q, b_q] = -b_q, \quad (1.126)$$

$$[I_q, \dots] = 0. \quad (1.127)$$

As relações 1.122 e 1.123 explicitam a invariância das relações q-fermiônicas sob a transformação $q \rightarrow q^{-1}$. No caso bosônico esta invariância surgia naturalmente a partir da condição de serem os operadores de criação e destruição adjuntos conjugados (Ver 1.42 a 1.47).

Procuraremos também uma realização clássica dessa álgebra, da mesma forma como procedemos com o oscilador bosônico. Assim, procuraremos por relações da forma:

$$I_q = I, \quad (1.128)$$

$$N_q = N, \quad (1.129)$$

$$b_q = G_-(q, N)b, \quad (1.130)$$

$$b_q^+ = G_+(q, N)b^+, \quad (1.131)$$

onde G_{\pm} são funções a se determinar. Em adição imporemos a condição de que os operadores de criação e destruição sejam adjuntos conjugados:

$$(b_q)^{\dagger} = b_q^+. \quad (1.132)$$

Essa condição implica na seguinte relação entre as funções G_+ e G_- :

$$G_-(q, N-1) = G_+(q, N). \quad (1.133)$$

Substituindo essas relações em 1.122, temos:

$$\begin{aligned} G_-(q, N)bG_+(q, N)b^+ + qG_+(q, N)b^+G_-(q, N)b &= q^N \\ G_-(q, N)G_+(q, N+1)bb^+ + qG_+(q, N)G_-(q, N-1)b^+b &= q^N \\ |G_+(q, N+1)|^2(I-N) + qN|G_+(q, N)|^2 &= q^N. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Multiplicaremos agora ambos os lados dessa relação pelo operador N e usaremos o fato que $N^2 = N$. Assim,

$$qN^2|G_+(q, N)|^2 = Nq^N$$

$$q|G_+(q, N)|^2 = q^N. \quad (1.135)$$

Procedendo da mesma forma com a relação 1.123, temos:

$$q^{-1}|G_+(q, N)|^2 = q^{-N}. \quad (1.136)$$

Essas duas relações nos mostram que o parâmetro q pode assumir apenas valores reais e positivos. Subtraindo 1.136 de 1.135, temos:

$$|G_+(q, N)|^2 = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} = [N]_q. \quad (1.137)$$

Mas, substituindo esse resultado em 1.135, temos que:

$$\begin{aligned} q \frac{(q^N - q^{-N})}{q - q^{-1}} &= q^N \\ q^{N+1} - q^{-(N-1)} &= q^{N+1} - q^{N-1}, \end{aligned} \quad (1.138)$$

o que implica que

$$q^{-(N-1)} = q^{N-1}, \quad (1.138)$$

ou, o que é equivalente:

$$q = 1. \quad (1.139)$$

Esse resultado mostra que não podemos ter uma realização clássica (da forma definida em 1.128 - 1.131) para o oscilador fermiônico deformado definido pelas relações 1.122 - 1.127. Ao impormos a possibilidade da existência de tal realização somos levados imediatamente ao resultado $q = 1$, ou seja, ao oscilador fermiônico não deformado. Portanto, denotaremos os autoestados do operador N_q por $|n\rangle_q$, para simbolizar que não são os mesmos autoestados do operador não deformado N . Como a deformação escolhida preserva o Princípio de Exclusão o espaço de estados do q-oscilador fermiônico é constituído por dois estados: o vácuo ($|0\rangle_q$) e o estado de uma única partícula ($|1\rangle_q$), definidos da seguinte forma:

$$b_q |0\rangle_q = 0, \quad (1.140)$$

$$b_q^+ |0\rangle_q = |1\rangle_q, \quad (1.141)$$

$$b_q^+ |1\rangle_q = 0. \quad (1.142)$$

Da mesma forma como realizamos a álgebra $su(2)$ com dois osciladores fermiônicos independentes, também podemos realizar $su_q(2)$ usando dois q-osciladores

fermiônicos independentes:

$$J_{q+} = b_{q1}^+ b_{q2}, \tag{1.143}$$

$$J_{q-} = b_{q2}^+ b_{q1}, \tag{1.144}$$

$$J_{qz} = \frac{1}{2}(N_{q1} - N_{q2}). \tag{1.145}$$

Podemos verificar que podemos realizar $su_q(2)$ usando um único oscilador q-deformado, em completa analogia com o caso não deformado:

$$J_{q+} = b_q^+, \tag{1.146}$$

$$J_{q-} = b_q, \tag{1.147}$$

$$J_{qz} = N_q - \frac{1}{2}. \tag{1.148}$$

Devemos ter em mente que, usando essas realizações q-fermiônicas, não é possível encontrarmos realizações clássicas para $su_q(2)$ (em termos de produtos de estados de dois osciladores não deformados).

Neste ponto devemos observar que, embora apareça explicitamente o parâmetro q na definição da álgebra fermiônica, a sua teoria de representações é praticamente idêntica à da álgebra não deformada. Não são exatamente equivalentes, pois, como foi relatado por Wang *et al.* [18] o oscilador q-fermiônico possui uma estrutura mais rica que a usual, no sentido que engloba em uma mesma estrutura os osciladores fermiônicos próprio e impróprio. Como veremos mais adiante a q-deformação desempenha um papel mais fundamental quando combinamos os Hamiltonianos de osciladores livres de forma a preservar uma dada q-simetria. Observamos também que a representação “fermiônica” ($j = \frac{1}{2}$) de $su_q(2)$ é exatamente a mesma de $su(2)$. Novamente, os efeitos da deformação se tornam mais evidentes quando compusermos Hamiltonianos com estrutura de $su_q(2)$.

Consideremos um sistema de dois osciladores fermiônicos independentes, cada um deles sendo descrito por um Hamiltoniano de Heisenberg

$$H = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger) \tag{2.1}$$

Os geradores de $su(2)$, construídos a partir de dois osciladores foram escritos na

seção 1.2. Podemos escrever a simples soma dos Hamiltonianos dos dois osciladores,

$$H = H_1 + H_2 \tag{2.2}$$

$$= \frac{1}{2}(\{a_1, a_1^\dagger\} + \{a_2, a_2^\dagger\})$$

$$= N_1 + N_2 + 2 = h_1 + h_2. \tag{2.3}$$

Capítulo 2

Construção de Hamiltonianos

q-Simétricos

Em uma variedade de problemas de muitos corpos em Física podemos formular modelos cujos Hamiltonianos são descritos em termos de operadores de criação e destruição de bósons ou férmions [17]. No capítulo anterior vimos que, através do método de Schwinger, as álgebras dos osciladores bosônicos ou fermiônicos (deformados ou não) podem ser vistas como pedras fundamentais na construção das álgebras $su(2)$ e $su_q(2)$. Na verdade, com o mesmo método podemos construir outras álgebras, como $su(n)$ e $su_q(n)$, por exemplo [13]. Neste breve capítulo desenvolveremos a construção de Hamiltonianos de sistemas de dois osciladores $su(2)$ e $su_q(2)$ -simétricos e comentaremos como tal procedimento pode ser generalizado para sistemas de M osciladores com simetrias $su(M)$ e $su_q(M)$.

2.1 Hamiltonianos com Simetria $su(2)$.

Consideremos um sistema de dois osciladores *bosônicos* independentes, cada um deles sendo descrito por um Hamiltoniano da forma:

$$H = \frac{1}{2}\{a, a^\dagger\}, \tag{2.1}$$

Os geradores de $su(2)$, construídos a partir de dois osciladores foram descritos na

seção 1.3. Podemos ver que a simples soma dos Hamiltonianos dos dois osciladores,

$$H = H_1 + H_2 \tag{2.2}$$

$$= \frac{1}{2}(\{a_1, a_1^\dagger\} + \{a_2, a_2^\dagger\})$$

$$= N_1 + N_2 + 1 = h_1 + h_2, \tag{2.3}$$

possui simetria $su(2)$, isto é, o Hamiltoniano 2.2 comuta com todos os geradores de $su(2)$ (construídos a partir dos operadores de criação e destruição dos dois osciladores). Nas expressões acima definimos o operador $h_i \doteq N_i + \frac{1}{2}$.

Podemos visualizar esse problema de uma maneira diferente, mais apropriada às generalizações para o caso deformado.

O espaço dos estados do sistema composto pelos dois osciladores é simplesmente o produto direto dos espaços dos estados de cada um dos osciladores:

$$|n_1, n_2\rangle = |n\rangle \otimes |n\rangle, \tag{2.4}$$

onde suprimimos os índices 1 e 2 no segundo membro, pois de ora em diante assumiremos que o que está à esquerda do sinal “ \otimes ” se refere ao oscilador 1 e o que está à direita se refere ao oscilador 2. Os geradores de $su(2)$, nesta notação, serão dados por:

$$J_+ = a^+ \otimes a, \tag{2.5}$$

$$J_- = a \otimes a^+, \tag{2.6}$$

$$J_z = \frac{1}{2}(N \otimes I - I \otimes N). \tag{2.7}$$

Definimos agora o seguinte mapeamento do operador h , agindo no espaço de um oscilador, para o operador $\Delta(h)$, que realiza o mesmo papel no espaço produto direto:

$$\Delta(h) = h \otimes I + I \otimes h. \tag{2.8}$$

Esse último operador comuta com todos os geradores de $su(2)$ e é identificado como sendo o número total de bósons mais um. O símbolo “ Δ ” representa a “forma correta” de combinarmos o operador entre parênteses dos dois osciladores para construirmos o operador análogo que atua no espaço produto direto.

Aplicando Δ formalmente a todos os operadores da expressão 2.1, temos:

$$\Delta(H) = \frac{1}{2}\{\Delta(a), \Delta(a^+)\} = \Delta(h). \quad (2.9)$$

Como $\Delta(h)$ comuta com todos os geradores de $su(2)$, vemos que essa expressão nos fornece um Hamiltoniano $su(2)$ -simétrico. Então, para obtermos um Hamiltoniano $su(2)$ invariante, devemos apenas substituir nessa equação a expressão adequada para $\Delta(a)$ e $\Delta(a^+)$. Para reproduzir o que já conhecemos (que o Hamiltoniano invariante deve ser a simples soma dos Hamiltonianos individuais), os mapeamentos para a e a^+ devem ser:

$$\Delta(a) = a \otimes I + I \otimes a, \quad (2.10)$$

$$\Delta(a^+) = a^+ \otimes I + I \otimes a^+. \quad (2.11)$$

Para que a segunda igualdade em 2.9 seja satisfeita, devemos *definir* o produto tensorial $(x \otimes y)(z \otimes t)$ como:

$$(x \otimes y)(z \otimes t) = (-1)^{\delta(y)\delta(z)}(xz \otimes yt), \quad (2.12)$$

onde

$$\delta(I) = \delta(h) = 0, \quad \delta(a) = \delta(a^+) = 1. \quad (2.13)$$

Observamos que o mapeamento Δ , juntamente com o produto tensorial 2.12 é um homomorfismo da seguinte álgebra:

$$[h, a] = -a, \quad (2.14)$$

$$[h, a^+] = a^+, \quad (2.15)$$

$$\{a, a^+\} = 2h. \quad (2.16)$$

Sem entrar em maiores detalhes, observamos que a álgebra 2.14 - 2.16 é uma subálgebra da superálgebra $osp(1|2)$. Esta superálgebra possui um setor par e outro ímpar. As relações de comutação entre os geradores dessa superálgebra são especificadas da seguinte forma:

$$[A, B]_{\pm} = AB - (-1)^{\delta(A)\delta(B)}BA, \quad (2.17)$$

onde $\delta(X) = 0$ para X pertencente ao setor par e $\delta(X) = 1$ para X no setor ímpar. Existe uma realização bosônica dessa superálgebra [13], onde os operadores a e a^+ fazem o papel dos geradores ímpares e a^2, a^{+2} fazem o papel dos geradores pares. O mapeamento Δ , junto com o produto tensorial 2.12 define um homomorfismo nessa álgebra. Assim, vemos que, apesar de serem bosônicos, nessa realização os operadores de criação e destruição se comportam como férmions no que diz respeito à comutação de dois operadores associados a partículas distintas.

Podemos generalizar o procedimento acima para a construção do Hamiltoniano de um sistema de M bósons e com simetria $su(M)$. Os geradores de $su(M)$, construídos com os operadores bosônicos, são dados por:

$$E_{ij} = I \otimes \dots I \otimes a^{\dagger} \otimes \dots I \otimes a \otimes \dots I \otimes I, \quad (2.18)$$

$$d_i = I \otimes \dots I \otimes h \otimes \dots I \otimes I - I \otimes \dots I \otimes h \otimes \dots I \otimes I, \quad (2.19)$$

onde em 2.18 o operador de criação está no i -ésimo fator e o de destruição no j -ésimo fator ($i \neq j = 1, \dots, M$). Em 2.19 o operador h está no i -ésimo fator no primeiro termo e no $(i + 1)$ -ésimo no segundo termo ($i = 1, \dots, M - 1$).

O operador número total de bósons (adicionado a $\frac{M}{2}$), nesse espaço produto de M osciladores, é dado por:

$$\Delta^{(M)}(h) = \sum_{i=1}^M I \otimes \dots I \otimes h \otimes \dots I, \quad (2.20)$$

onde o operador h está no i -ésimo fator.

Esse operador comuta com todos os geradores de $su(M)$. Assim, o homomorfismo agora é definido como:

$$\Delta^{(M)}(a) = \sum_{i=1}^M I \otimes \dots I \otimes a \otimes \dots I, \quad (2.21)$$

$$\Delta^{(M)}(a^+) = \sum_{i=1}^M I \otimes \dots I \otimes a^+ \otimes \dots I, \quad (2.22)$$

onde os operadores a e a^+ ocupam a i -ésima posição nos produtos em 2.21 e 2.22, respectivamente.

O Hamiltoniano $su(M)$ -simétrico é então dado por:

$$\Delta^{(M)}(H) = \frac{1}{2} \{ \Delta^{(M)}(a), \Delta^{(M)}(a^+) \} = \Delta^{(M)}(h). \quad (2.23)$$

Consideremos agora um sistema constituído por dois osciladores *fermiônicos* independentes, rotulados por 1 e 2, cada qual descrito pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}[b^+, b]. \quad (2.24)$$

Como no caso bosônico, o espaço de estados do sistema é dado por:

$$|n_1, n_2\rangle = |n\rangle \otimes |n\rangle. \quad (2.25)$$

Os geradores de $su(2)$, em termos dos operadores fermiônicos, são dados por expressões formalmente idênticas às expressões 2.5 - 2.7, onde devemos substituir os operadores bosônicos pelos fermiônicos. Lembramos que o operador h agora é definido como $N - \frac{1}{2}$.

Já vimos anteriormente que os operadores fermiônicos h , b e b^+ podem gerar a álgebra $su(2)$, e que esta contém o Hamiltoniano definido em 2.24:

$$[h, b] = -b, \quad (2.26)$$

$$[h, b^+] = b^+, \quad (2.27)$$

$$[b^+, b] = 2h. \quad (2.28)$$

Da mesma forma como no caso bosônico, o Hamiltoniano de dois férmions será $su(2)$ simétrico se for uma função do operador $\Delta(h)$, dado pela expressão 2.7. Ora, isso será satisfeito se pudermos definir um homomorfismo Δ sobre a álgebra acima, de tal forma que $\Delta(h)$ coincida com a definição previamente estabelecida. Podemos ver que o mapeamento abaixo satisfaz esses critérios:

$$\Delta(b) = b \otimes I + I \otimes b, \quad (2.29)$$

$$\Delta(b^+) = b^+ \otimes I + I \otimes b^+, \quad (2.30)$$

$$\Delta(h) = h \otimes I + I \otimes h. \quad (2.31)$$

Logo, o Hamiltoniano $su(2)$ -simétrico é dado por:

$$\Delta(H) = \frac{1}{2}[\Delta(b^+), \Delta(b)] = \Delta(h). \quad (2.32)$$

A generalização para um sistema de M férmions com simetria $su(M)$ é análoga à feita para o caso de bósons. Os geradores de $su(M)$, escritos em termos de operadores fermiônicos, são formalmente idênticos aos expressos em 2.18 - 2.20, onde

novamente devemos substituir os operadores bosônicos pelos fermiônicos. Assim, o Hamiltoniano de M osciladores fermiônicos e com simetria $su(M)$ é dado por:

$$\Delta^{(M)}(H) = \frac{1}{2}[\Delta^{(M)}(b^+), \Delta^{(M)}(b)] = \Delta^{(M)}(h). \quad (2.33)$$

2.2 Hamiltonianos com Simetria $su_q(2)$.

Consideraremos agora um sistema de dois q-osciladores bosônicos independentes. Construiremos um Hamiltoniano com simetria $su_q(2)$ para este sistema estendendo o procedimento realizado para os sistemas não deformados. Assim, procuraremos por uma álgebra que contenha o Hamiltoniano de um q-oscilador (essa álgebra será, naturalmente, a q-deformação da álgebra 2.14 - 2.16). Este Hamiltoniano será uma função do operador número de bósons do q-oscilador. Definiremos o operador número de bósons do sistema de *dois* q-osciladores, que atua no espaço produto direto, através de um mapeamento Δ . Analogamente ao caso não deformado, este operador possuirá simetria $su_q(2)$. Assim, especificando o mapeamento Δ para os demais operadores de forma que tenhamos um homomorfismo sobre a álgebra que contém H , temos especificada a regra de composição de Hamiltonianos bosônicos individuais para gerar um Hamiltoniano coletivo $su_q(2)$ -simétrico. Procederemos de maneira semelhante com respeito ao sistema de dois q-fermions.

Consideremos então o sistema de dois q-osciladores bosônicos, cujos Hamiltonianos individuais são dados por:

$$H = \frac{1}{2}\{a_q^+, a_q\} \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{2}([N]_q + [N + 1]_q) \quad (2.35)$$

$$= \frac{\text{senh}(\gamma h)}{2\text{senh}(\frac{\gamma}{2})}. \quad (2.36)$$

Os geradores da álgebra $su_q(2)$, formados com os operadores q-bosônicos são formalmente os mesmos das expressões 2.5 - 2.7. O operador $\Delta(h)$, que comuta com todos os geradores, também é definido da mesma forma que 2.8.

Observamos então que os operadores h , a_q e a_q^+ geram a seguinte álgebra (que é

uma deformação da álgebra 2.14 - 2.16):

$$[h, a_q] = -a_q, \quad (2.37)$$

$$[h, a_q^+] = a_q^+, \quad (2.38)$$

$$\{a_q, a_q^+\} = \frac{\sinh(\gamma h)}{\sinh(\frac{\gamma}{2})}, \quad (2.39)$$

onde fizemos $q = e^\gamma$. Então, se for possível encontrarmos um mapeamento Δ para os operadores a_q e a_q^+ de forma que se preservem as relações 2.37 - 2.39, temos definida a regra de composição de dois Hamiltonianos bosônicos de forma que se tenha simetria $su_q(2)$. Procuraremos por um mapeamento do tipo:

$$\Delta(a_q) = a_q \otimes f(h) + g(h) \otimes a_q, \quad (2.40)$$

$$\Delta(a_q^+) = a_q^+ \otimes f(h) + g(h) \otimes a_q^+, \quad (2.41)$$

$$\Delta(h) = h \otimes I + I \otimes h, \quad (2.42)$$

onde f e g são funções a se determinar. Substituindo as expressões acima em 2.37 e 2.38 temos que:

$$\begin{aligned} [\Delta(h), \Delta(a_q)] &= -(a_q \otimes f(h) + g(h) \otimes a_q) + [h, g] \otimes a_q + a_q \otimes [h, f] \\ &= -\Delta(a_q), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} [\Delta(h), \Delta(a_q^+)] &= -(a_q^+ \otimes f(h) + g(h) \otimes a_q^+) + [h, g] \otimes a_q^+ + a_q^+ \otimes [h, f] \\ &= -\Delta(a_q^+), \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde nos utilizamos do fato que $[h, g(h)] = [h, f(h)] = 0$. Assim, quaisquer funções $f(h)$ e $g(h)$ satisfazem os comutadores 2.37 e 2.38. Analisaremos agora o anticomutador 2.39:

$$\begin{aligned} \{\Delta(a_q), \Delta(a_q^+)\} &= \{a_q, a_q^+\} \otimes f^2(h) + g^2(h) \otimes \{a_q, a_q^+\} + \\ &+ g(h+1)a_q \otimes a_q^+ f(h+1) + (-1)g(h)a_q \otimes a_q^+ f(h) + \\ &+ g(h-1)a_q^+ \otimes a_q f(h-1) + (-1)g(h)a_q^+ \otimes a_q f(h), \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde usamos a definição de produto graduado 2.12. Para termos um homomorfismo o segundo membro dessa expressão deve ser igual a

$$\frac{\sinh(\gamma \Delta(h))}{\sinh(\frac{\gamma}{2})} = \frac{1}{2\sinh(\frac{\gamma}{2})} (q^{\Delta(h)} - q^{-\Delta(h)}). \quad (2.46)$$

Observando que $q^{\Delta(h)} = q^{h \otimes I + I \otimes h} = q^h \otimes q^h$, temos que a expressão anterior se torna:

$$\frac{1}{2\sinh(\frac{\gamma}{2})}(q^h \otimes q^h - q^{-h} \otimes q^{-h}). \quad (2.47)$$

Podemos reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sinh(\frac{\gamma}{2})}((q^h - q^{-h}) \otimes q^h - q^{-h} \otimes (q^{-h} - q^h)) = \\ & \frac{1}{2\sinh(\frac{\gamma}{2})}((q^h - q^{-h}) \otimes q^h + q^{-h} \otimes (q^h - q^{-h})) = \\ & \frac{1}{\sinh(\frac{\gamma}{2})}(\sinh(\gamma h) \otimes q^h + q^{-h} \otimes \sinh(\gamma h)) = \\ & \{a_q, a_q^+\} \otimes q^h + q^{-h} \otimes \{a_q, a_q^+\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Comparando essa expressão com 2.45 concluímos que:

$$f(h) = q^{\frac{h}{2}}, \quad (2.49)$$

$$g(h) = q^{-\frac{h}{2}}. \quad (2.50)$$

Assim, encontramos que o homomorfismo Δ é dado por:

$$\Delta(a_q) = a_q \otimes q^{\frac{h}{2}} + q^{-\frac{h}{2}} \otimes a_q, \quad (2.51)$$

$$\Delta(a_q^+) = a_q^+ \otimes q^{\frac{h}{2}} + q^{-\frac{h}{2}} \otimes a_q^+, \quad (2.52)$$

$$\Delta(h) = h \otimes I + I \otimes h. \quad (2.53)$$

Por sua vez, o Hamiltoniano $su_q(2)$ invariante é dado por:

$$\Delta(H) = \frac{1}{2}\{\Delta(a_q), \Delta(a_q^+)\} \quad (2.54)$$

$$= \frac{1}{2}(\{a_q, a_q^+\} \otimes q^h + q^{-h} \otimes \{a_q, a_q^+\}) \quad (2.55)$$

$$= H \otimes q^h + q^{-h} \otimes H. \quad (2.55)$$

Podemos generalizar diretamente esses resultados para o caso de M osciladores, da mesma maneira como fizemos para o caso não deformado. Assim, o mapeamento homomórfico que nos fornece a regra de combinação de M q-osciladores bosônicos com simetria coletiva $su_q(M)$ é dado por:

$$\Delta^{(M)}(h) = \sum_{i=1}^M I \otimes I \dots I \otimes h \otimes I \dots I \otimes I, \quad (2.56)$$

$$\Delta^{(M)}(a_q) = \sum_{i=1}^M q^{-\frac{h}{2}} \otimes q^{-\frac{h}{2}} \dots q^{-\frac{h}{2}} \otimes a_q \otimes q^{\frac{h}{2}} \otimes \dots q^{\frac{h}{2}} \otimes q^{\frac{h}{2}}, \quad (2.57)$$

$$\Delta^{(M)}(a_q^+) = \sum_{i=1}^M q^{-\frac{h}{2}} \otimes q^{-\frac{h}{2}} \dots q^{-\frac{h}{2}} \otimes a_q^+ \otimes q^{\frac{h}{2}} \otimes \dots q^{\frac{h}{2}} \otimes q^{\frac{h}{2}}. \quad (2.58)$$

O Hamiltoniano $su_q(M)$ -simétrico é dado por:

$$\Delta^{(M)}(H) = \sum_{i=1}^M q^{-h} \otimes q^{-h} \dots q^{-h} \otimes H \otimes q^h \dots q^h \otimes q^h. \quad (2.59)$$

Consideraremos agora o problema de dois q-osciladores fermiônicos, descritos cada qual pelo Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}[b_q, b_q^+] = \frac{\text{senh}(\gamma h)}{\text{senh}(\frac{\gamma}{2})}. \quad (2.60)$$

As expressões para os geradores de $su_q(2)$, descritos em termos dos operadores q-fermiônicos, são formalmente idênticas às expressões do caso não deformado. O operador associado ao número total de férmions, $\Delta(h)$, possui simetria $su_q(2)$, como usual até agora. A álgebra que contém o Hamiltoniano do sistema é a própria $su_q(2)$, analogamente ao que se sucedia no caso não deformado. O mapeamento homomórfico Δ é obtido exatamente da mesma forma como foi obtido no caso deformado bosônico anterior (expressões 2.51 a 2.53). Coincidentemente, o mapeamento é formalmente o mesmo do caso bosônico, com a diferença que no caso fermiônico o produto tensorial $(a \otimes b)(c \otimes d)$ não é graduado. Por conseguinte a generalização para $su_q(M)$ é exatamente da mesma forma que a obtida no caso q-bosônico anterior (expressões 2.56 a 2.58). Para dois férmions, temos:

$$\Delta(b_q) = b_q \otimes q^{\frac{h}{2}} + q^{-\frac{h}{2}} \otimes b_q, \quad (2.61)$$

$$\Delta(b_q^+) = b_q^+ \otimes q^{\frac{h}{2}} + q^{-\frac{h}{2}} \otimes b_q^+, \quad (2.62)$$

$$\Delta(h) = h \otimes I + I \otimes h, \quad (2.63)$$

com $h = N - \frac{1}{2}$. No capítulo 1, vimos que $su_q(2)$ era realizada por meio da álgebra de um férmion da seguinte maneira:

$$J_{q+} \rightarrow b_q, \quad (2.64)$$

$$J_{q-} \rightarrow b_q^+, \quad (2.65)$$

$$J_{qz} \rightarrow N - \frac{1}{2} = h. \quad (2.66)$$

Logo, o mapeamento Δ acima induz o seguinte mapeamento em $su(2)$:

$$\Delta(J_{q-}) = J_{q-} \otimes q^{\frac{J_{qz}}{2}} + q^{-\frac{J_{qz}}{2}} \otimes J_{q-}, \quad (2.67)$$

$$\Delta(J_{q+}) = J_{q+} \otimes q^{\frac{J_{qz}}{2}} + q^{-\frac{J_{qz}}{2}} \otimes J_{q+}, \quad (2.68)$$

$$\Delta(J_{qz}) = J_{qz} \otimes I + I \otimes J_{qz}. \quad (2.69)$$

As relações de comutação entre os operadores J_{q+} , J_{q-} e J_{qz} são determinadas pelas relações de comutação entre os operadores fermiônicos através das relações 2.64 - 2.66:

$$[J_{q+}, J_{q-}] = \frac{\sinh(\gamma J_{qz})}{\sinh(\frac{\gamma}{2})} = [2J_{qz}]_{q^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.70)$$

$$[J_{qz}, J_{q\pm}] = \pm J_{q\pm}. \quad (2.71)$$

Notamos que a nossa definição usual envolve a função $[2J_{qz}]_q$. Assim, para recuperarmos a nossa definição substituiremos $q^{\frac{1}{2}} \rightarrow q$ no mapeamento homomórfico acima. Assim, temos que

$$\Delta(J_{q-}) = J_{q-} \otimes q^{J_{qz}} + q^{-J_{qz}} \otimes J_{q-}, \quad (2.72)$$

$$\Delta(J_{q+}) = J_{q+} \otimes q^{J_{qz}} + q^{-J_{qz}} \otimes J_{q+}, \quad (2.73)$$

$$\Delta(J_{qz}) = J_{qz} \otimes I + I \otimes J_{qz}, \quad (2.74)$$

é um homomorfismo da álgebra

$$[J_{q+}, J_{q-}] = [2J_{qz}]_q, \quad (2.75)$$

$$[J_{qz}, J_{\pm}] = J_{\pm}. \quad (2.76)$$

Esse resultado pode ser generalizado diretamente para o caso de um produto de M fatores. Basta que façamos a substituição $q^{\frac{1}{2}} \rightarrow q$ no mapeamento homomórfico para férmions (expressões 2.61 a 2.63).

Capítulo 3

Estados Coerentes e q-Coerentes.

Neste capítulo introduziremos o conceito de estados coerentes associados às álgebras h_4 e su_2 e suas generalizações q-deformadas.

Na seção 3.1 definiremos estados coerentes de um oscilador harmônico simples (álgebra h_4) de forma que fique transparente sua interpretação física. Logo após, apresentaremos uma definição do ponto de vista de Teoria de Grupos. Esta última é útil para se generalizar o conceito para outros grupos de Lie, além de H_4 . Consideraremos, em particular, a generalização para estados coerentes associados à álgebra $su(2)$.

Na seção 3.2 veremos como os estados coerentes nos permitem construir realizações das álgebras h_4 e $su(2)$ no espaço de Bargmann.

Na seção 3.3 definiremos os estados q-coerentes e generalizaremos o conteúdo das duas seções anteriores para esses estados. O análogo q-deformado da realização das álgebras h_{4q} e $su_q(2)$ no espaço de Bargmann introduz os conceitos de q-derivada e q-integral, que são brevemente tratados em um apêndice separado.

3.1 Estados Coerentes.

A noção de estados coerentes foi introduzida por Schrödinger logo após o nascimento da Mecânica Quântica [19]. Seu objetivo era encontrar as soluções do oscilador harmônico quântico que mais se aproximassem das soluções do oscilador clássico. Assim, construiu uma solução que consistia em uma superposição gaussiana das

autofunções do oscilador. As dispersões em torno dos valores médios da posição e do momento linear não variavam no decorrer do tempo e eram as mesmas do estado fundamental. Depois do estabelecimento do Princípio de Incerteza de Heisenberg pode-se verificar que estas soluções possuem mínima incerteza [25] em todos os instantes de tempo. O estudo destes estados foi retomado somente nos anos 60 por Glauber [22] e Sudarshan [23]. É a Glauber que se deve o termo *coerente* para especificar estes estados, que foram utilizados originalmente em problemas de Ótica Quântica.

Seguindo a idéia original de Schrödinger, definiremos estados coerentes do oscilador harmônico como os estados que possuem mínima incerteza em todos os instantes de tempo.

Por simplicidade, consideremos o oscilador de massa e frequência unitárias. Trabalhando no sistema de unidades naturais temos então que $\hbar = m = \omega = 1$. O Hamiltoniano 1.1 se torna:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2). \quad (3.1)$$

Lembrando das definições dos operadores de criação, aniquilação e número (Capítulo 1, seção 1.1), temos:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip) \quad (3.2)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip) \quad (3.3)$$

$$N = a^+ a = \frac{1}{2}(x^2 + p^2 - 1) \quad (3.4)$$

$$H = N + \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

O Princípio de Incerteza de Heisenberg estabelece um valor mínimo para o produto

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle (\Delta p)^2 \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6)$$

onde $\langle O \rangle$ indica o valor esperado do operador O e definimos

$$\Delta O = O - \langle O \rangle. \quad (3.7)$$

Usando a desigualdade de Schwarz podemos escrever:

$$\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle} \geq |\langle \Delta x \Delta p \rangle|. \quad (3.8)$$

Desenvolvendo o lado direito dessa desigualdade temos que:

$$|\langle \Delta x \Delta p \rangle| = \left| \frac{1}{2} (\langle [\Delta x, \Delta p] \rangle + \langle \{ \Delta x, \Delta p \} \rangle) \right| \quad (3.16)$$

$$= \left| \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \langle \{ \Delta x, \Delta p \} \rangle \right| \quad (3.17)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \langle \{ \Delta x, \Delta p \} \rangle^2} \quad (3.9)$$

$$\geq \frac{1}{2}, \quad (3.10)$$

onde, na penúltima linha, usamos o fato que o valor esperado do anticomutador é puramente real, pois $\{x, p\}$ é hermiteano. Na última linha usamos a desigualdade triangular. Deduzimos o Princípio de Incerteza de Heisenberg:

$$\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.11)$$

Para que tenhamos a condição de mínima incerteza o sistema deve estar em um estado $|\psi\rangle$ tal que as desigualdades de Schwarz 3.8 e triangular 3.10 se tornem igualdades. Para que isso ocorra com a desigualdade de Schwarz devemos ter:

$$\Delta p |\psi\rangle = c \Delta x |\psi\rangle, \quad (3.12)$$

onde c é um número complexo arbitrário. Para transformarmos a desigualdade triangular em uma igualdade devemos ter que

$$\langle \{ \Delta x, \Delta p \} \rangle = 0. \quad (3.13)$$

Usando 3.12 e 3.13, a constante c deve satisfazer a condição:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \Delta x \Delta p | \psi \rangle + \langle \psi | \Delta p \Delta x | \psi \rangle &= 0 \\ c \langle (\Delta x)^2 \rangle + c^* \langle (\Delta x)^2 \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Essa condição será satisfeita se a constante c for puramente imaginária. Denotaremos c por i/r , por conveniência, onde r é real. Lembrando que $[x, p] = i$, e usando novamente 3.12, podemos calcular o seguinte valor esperado:

$$\begin{aligned} \langle \psi | [\Delta x, \Delta p] | \psi \rangle &= i \\ 2 \langle (\Delta x)^2 \rangle &= r. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Logo, r é um número positivo. As dispersões na posição e no momento ficam:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{r}{2} \quad (3.16)$$

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{1}{2r}. \quad (3.17)$$

A equação 3.12 se torna:

$$\begin{aligned} \Delta x |\psi\rangle &= -ir \Delta p |\psi\rangle \\ (x - \langle x \rangle) |\psi\rangle &= -ir (p - \langle p \rangle) |\psi\rangle \\ (x + irp) |\psi\rangle &= (\langle x \rangle + ir \langle p \rangle) |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Vemos que os estados de mínima incerteza devem satisfazer essa última equação. A constante positiva r ainda não está completamente especificada. Aplicando o operador de evolução temporal nesses estados pode-se mostrar que estes evoluem continuamente em outros estados de mínima incerteza somente se $r = 1$. Observando as equações 3.16 e 3.17 vemos que isto significa que as dispersões da coordenada e do momento são iguais. Logo, estados coerentes são definidos a partir da seguinte equação de autovalores:

$$(x + ip) |\psi\rangle = (\langle x \rangle + i \langle p \rangle) |\psi\rangle. \quad (3.19)$$

Ou, lembrando da definição do operador de aniquilação,

$$a |\psi\rangle = \langle a \rangle |\psi\rangle. \quad (3.20)$$

Dessa equação vemos que estados coerentes podem ser definidos de forma equivalente como autoestados do operador de aniquilação, cujos autovalores são dados por:

$$\langle a \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x \rangle + i \langle p \rangle).$$

Consideremos o caso $r \neq 1$ em 3.18. Assim, para os estados de mínima incerteza definidos por essa equação, as dispersões na posição e momento não são iguais, de acordo com 3.16 e 3.17. Aplicando-se o operador de evolução temporal sobre estes estados pode-se mostrar que estes não apresentam continuamente a propriedade de mínima incerteza, mas apenas periodicamente. As dispersões na posição e no momento oscilam no tempo e uma dada configuração dessas dispersões se repete com frequência 2ω , ou seja, com o dobro da frequência das oscilações clássicas. Estes

estados foram denominados *squeezed* por Hollenhorst [25]. A razão da denominação pode ser compreendida quando analisamos o caso $r < 1$. Neste caso a dispersão da posição, no instante inicial, são “comprimadas” em relação à dispersão da posição no estado fundamental. Observando 3.17 vemos que o oposto ocorre com a dispersão do momento. Quando $r > 1$ é a dispersão do momento que é “comprimada”, ao passo que a dispersão da posição é “dilatada”.

Retornando aos estados coerentes, vemos que o mais simples dos estados que satisfazem a equação 3.20 é o vácuo (estado fundamental do oscilador), pois a equação

$$a |0\rangle = 0 \quad (3.21)$$

pode ser considerada como uma equação de autovalores, com autovalor nulo correspondente ao autovetor $|0\rangle$. Logo, de 3.19 e 3.20 vemos que o vácuo possui

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0. \quad (3.22)$$

Procuraremos por uma transformação unitária que gere outros estados coerentes a partir do vácuo. Representaremos o operador desta transformação por $U(\bar{x}, \bar{p})$, onde introduzimos a notação: $\bar{x} \doteq \langle x \rangle$ e $\bar{p} \doteq \langle p \rangle$. Então

$$U(\bar{x}, \bar{p}) |0\rangle = |\bar{x}, \bar{p}\rangle, \quad (3.23)$$

onde $|\bar{x}, \bar{p}\rangle$ é o estado coerente associado ao autovalor $\bar{x} + i\bar{p}$. Usando 3.21 e 3.23, podemos escrever:

$$\begin{aligned} UaU^\dagger U |0\rangle &= 0 \\ UaU^\dagger |\bar{x}, \bar{p}\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dessa equação e de 3.20 podemos concluir que

$$U(\bar{x}, \bar{p})aU^\dagger(\bar{x}, \bar{p}) = a - (\bar{x} + i\bar{p}). \quad (3.25)$$

Vemos que o operador $U(\bar{x}, \bar{p})$ produz o efeito de deslocar a coordenada de uma quantidade \bar{x} e o momento de uma quantidade \bar{p} . Em Mecânica Quântica o operador momento linear é o gerador das translações no espaço das coordenadas, enquanto o operador posição é o gerador das translações no espaço dos momentos [6]. Tais

operadores, juntamente com a identidade e o operador número, formam a álgebra de Heisenberg (mais convenientemente descrita através dos operadores a e a^\dagger). Assim, o operador $U(\bar{x}, \bar{p})$ pertence ao grupo de Heisenberg e pode ser descrito através do mapeamento exponencial (equação 1.12, com $b = c = 0$):

$$U(\bar{x}, \bar{p}) = \exp\{i(\bar{x}p - \bar{p}x)\}. \quad (3.26)$$

Introduzindo a notação:

$$z \doteq \frac{1}{2}(\bar{x} + i\bar{p}), \quad (3.27)$$

escrevemos 3.26 como:

$$U(z) = e^{za^\dagger - z^*a}. \quad (3.28)$$

Podemos verificar 3.25 usando 3.28:

$$U(z)aU^\dagger(z) = e^{za^\dagger - z^*a} a e^{-za^\dagger + z^*a}. \quad (3.29)$$

Consideremos a seguinte fórmula [24]

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X], \quad (3.30)$$

válida sempre que $[X, Y]$ comuta com Y . Podemos usá-la em 3.29. Assim,

$$U(z)aU^\dagger(z) = a + [(za^\dagger - z^*a), a] \quad (3.31)$$

$$= a - z \quad (3.32)$$

e verificamos 3.25.

Usando a forma explícita para $U(z)$ em 3.23, podemos obter uma forma explícita dos estados coerentes $|\bar{x}, \bar{p}\rangle \doteq |z\rangle$:

$$\begin{aligned} |z\rangle &= U(z)|0\rangle \\ &= e^{za^\dagger - z^*a}|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Usaremos a fórmula abaixo [24], válida sempre que $[X, Y]$ comuta com X e Y :

$$e^{X+Y} = e^{-\frac{1}{2}[X, Y]} e^X e^Y. \quad (3.34)$$

Logo, 3.33 se torna:

$$\begin{aligned} |z\rangle &= e^{\frac{1}{2}[za^+, z^*a]} e^{za^+} e^{-z^*a} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^+} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde usamos o fato que $e^{-z^*a} |0\rangle = |0\rangle$, como pode ser visto expandindo-se a exponencial em série de potências. Expandindo o operador e^{za^+} em série temos a seguinte expressão para os estados coerentes:

$$\begin{aligned} |z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^+} |0\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a^+)^n |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde usamos a expressão 1.22 do capítulo 1.

Usaremos as propriedades do grupo de Heisenberg e definiremos estados coerentes de uma maneira alternativa (equivalente à anterior), apropriada à generalização do conceito para outros grupos de Lie. Esta generalização foi feita independentemente por Gilmore [8] e Perelomov [26].

Consideremos o seguinte subgrupo H_0 do grupo H_4 , definido através de seus elementos h :

$$h(\alpha = 0, b, c) = e^{i(bN+cl)}. \quad (3.37)$$

Aplicando os operadores desse subgrupo sobre o estado fundamental obteremos o mesmo estado, multiplicado por uma fase:

$$h(\alpha = 0, b, c) |0\rangle = e^{i(bN+cl)} |0\rangle = e^{ic} |0\rangle. \quad (3.38)$$

Dizemos que este subgrupo constitui-se no Máximo Subgrupo de Estabilidade em relação ao estado $|0\rangle$, pois esse subgrupo é o máximo subgrupo que deixa invariante esse estado. Por outro lado, pode-se mostrar que todos os elementos g do grupo de Heisenberg podem ser decompostos da seguinte forma:

$$g = Uh. \quad (3.39)$$

onde $g \in H_4$, $h \in H_0$ e U é o operador deslocamento definido previamente. Em linguagem de Teoria de Grupos dizemos que U pertence ao espaço *coset* do grupo H_4 em relação ao subgrupo H_0 , denotado por H_4/H_0 .

Assim, o problema de se encontrar os estados coerentes associados ao grupo (ou álgebra) H_4 equivale ao seguinte problema:

i) Encontrar o Máximo Subgrupo de Estabilidade (que abreviaremos de agora em diante por MSE) de H_4 em relação ao estado fundamental (chamado de estado de referência) $|0\rangle$.

ii) Identificar o espaço *coset*, que é determinado pelo MSE através de 3.39.

iii) Finalmente, aplicando-se os operadores do espaço *coset* sobre o estado de referência, obter os estados coerentes.

Essa construção de estados coerentes pode ser generalizada para definirmos estados coerentes associados a grupos (ou álgebras) de Lie em geral [8, 20, 26]. Consideraremos aqui o problema de se encontrar estados coerentes associados ao grupo $SU(2)$.

Consideremos um conjunto $V = \{|j, m\rangle, \text{ com } -j \leq m \leq j\}$ que se constitui em uma representação irredutível deste grupo (ou álgebra), identificada pelo rótulo j . Analogamente ao caso do oscilador, consideremos o estado de referência como sendo o estado "fundamental" $|j, -j\rangle$.

Um elemento genérico do grupo $SU(2)$ é dado através do mapeamento exponencial:

$$g(\alpha, b) = e^{\alpha J_+ + \alpha^* J_- + ib J_z}, \quad (3.40)$$

com α complexo e b real.

Procederemos de acordo com as etapas i) a iii) descritas no caso do oscilador:

i) Identificação do MSE. O único gerador da álgebra $su(2)$ que deixa invariante o estado de referência é J_z . Logo, o MSE constitui-se no seguinte conjunto de elementos:

$$h(\alpha = 0, b) = e^{ib J_z}, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (3.41)$$

ii) Identificação do espaço *coset*. Podemos obter uma decomposição de qualquer elemento g do grupo $SU(2)$ da seguinte forma:

$$g = \Omega h, \quad (3.42)$$

com o operador Ω escrito como:

$$\Omega(\xi) = e^{\xi J_+ - \xi^* J_-}, \quad (3.43)$$

onde $\xi = \frac{\theta}{2}e^{-i\phi}$, com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (ver Apêndice B).

iii) Obtemos os estados coerentes aplicando o operador Ω sobre o estado de referência $|j, -j\rangle$:

$$|j, \theta, \phi\rangle = e^{\xi J_+ - \xi^* J_-} |j, -j\rangle. \quad (3.44)$$

Podemos obter uma forma explícita desses estados usando a seguinte fórmula [20, 27]:

$$e^{\xi J_+ - \xi^* J_-} = e^{z J_+} e^{\ln(1+|z|^2) J_z} e^{-z^* J_-}. \quad (3.45)$$

onde $z = \left(tg \frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}$. Substituindo essa fórmula em 3.44 e usando o fato que

$$J_- |j, -j\rangle = 0, \quad (3.46)$$

temos:

$$\begin{aligned} |j, \theta, \phi\rangle &= e^{z J_+} e^{\ln(1+|z|^2) J_z} e^{-z^* J_-} |j, -j\rangle \\ &= e^{z J_+} e^{\ln(1+|z|^2) J_z} |j, -j\rangle \\ &= (1 + |z|^2)^{-j} e^{z J_+} |j, -j\rangle \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} &= (1 + |z|^2)^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z J_+)^n}{n!} |j, -j\rangle \\ &= (1 + |z|^2)^{-j} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} z^{j+m} |j, m\rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$= \sum_{m=-j}^j |j, m\rangle \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^{j-m} \left(e^{-i\phi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right)^{j+m}. \quad (3.49)$$

Na passagem para a 3.48 fizemos a substituição $n = j + m$ e usamos o fato que $J_+ |j, j\rangle = 0$. Na última linha usamos o fato que $(1 + |z|^2) = \sec^2 \frac{\theta}{2}$.

Faremos algumas considerações a respeito de algumas propriedades dos estados coerentes vistos até aqui. O conjunto de estados coerentes de uma álgebra está intimamente associado ao espaço de parâmetros do *coset* a que nos referimos acima. Podemos mapear os estados coerentes no conjunto de pontos do *coset*. De maneira geral, podemos dizer que o conjunto de estados coerentes possui as mesmas propriedades geométricas que o espaço de parâmetros do *coset*. Em particular, como esse espaço é contínuo, o conjunto de estados coerentes também o será.

Das expressões 3.36 e 3.49 podemos verificar o seguinte:

$$|\langle z|z'\rangle| = e^{-\frac{1}{2}|z-z'|^2}, \quad (3.50)$$

$$|\langle j, \theta', \phi' | j, \theta, \phi \rangle|^2 = \left(\cos \frac{\Theta}{2} \right)^{4j}, \quad (3.51)$$

onde Θ é o ângulo entre os vetores unitários ao longo das direções (θ, ϕ) e (θ', ϕ') , dado por:

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'). \quad (3.52)$$

Logo, concluímos que os estados coerentes não são ortogonais. No entanto, podemos verificar que

$$\langle z|z\rangle = 1, \quad (3.53)$$

$$\langle j, \theta, \phi | j, \theta, \phi \rangle = 1, \quad (3.54)$$

ou seja, os estados coerentes possuem norma igual à unidade.

O conjunto de estados coerentes do oscilador constitui-se em uma base do espaço de Hilbert. Para visualizarmos isso, mostraremos que a seguinte resolução à unidade se verifica:

$$I = \frac{1}{\pi} \int d^2z |z\rangle \langle z|, \quad (3.55)$$

onde $z = x + iy$ e $d^2z = dx dy$. Assim, se 3.55 for verificada, devemos ter, para quaisquer estados $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ desse espaço:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \frac{1}{\pi} \int \langle \Psi | z \rangle \langle z | \Phi \rangle d^2z. \quad (3.56)$$

Substituindo 3.36 nessa expressão e usando coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Phi \rangle &= \sum_{m,n} \frac{1}{\pi \sqrt{n!m!}} \int \langle \Psi | n \rangle \langle m | \Phi \rangle z^n z^{*m} e^{-|z|^2} d^2z \\ &= \sum_{m,n} \frac{\langle \Psi | n \rangle \langle m | \Phi \rangle}{\pi \sqrt{n!m!}} \int_0^\infty r^{n+m+1} e^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi \\ &= 2 \sum_n \frac{\langle \Psi | n \rangle \langle n | \Phi \rangle}{n!} \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-r^2} dr. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Como $2 \int_0^\infty r^{2n} e^{-r^2} dr^2 = n!$, temos

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \sum_n \langle \Psi | n \rangle \langle n | \Phi \rangle. \quad (3.57)$$

Essa expressão é uma identidade, visto que $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$. Logo, a resolução à identidade 3.55 está verificada. Poranto, o conjunto de estados coerentes de h_4 forma uma base. Usando a resolução à unidade 3.55, podemos escrever:

$$|z'\rangle = \frac{1}{\pi} \int |z\rangle \langle z|z'\rangle d^2z. \quad (3.58)$$

Como $\langle z|z'\rangle$ é sempre diferente de zero, concluímos que cada vetor da base de estados coerentes é uma combinação linear de todos os demais vetores da base. Isso significa que a base é supercompleta. Da mesma forma, podemos demonstrar que os estados coerentes de $su(2)$ também se constituem em bases supercompletas para as representações irredutíveis de $su(2)$. A resolução à unidade, neste caso, é dada por:

$$I_j = \frac{2j+1}{4\pi} \int |j, \theta, \phi\rangle \langle j, \theta, \phi| \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.59)$$

onde o índice j denota que o conjunto $|j, \theta, \phi\rangle$ é uma base para o subespaço caracterizado por “momento angular total” igual a j . A dependência linear dos vetores da base de estados coerentes de $su(2)$ é escrita como:

$$|j, \theta, \phi\rangle = \frac{2j+1}{4\pi} \int |j, \theta', \phi'\rangle \langle j, \theta', \phi'|j, \theta, \phi\rangle \sin\theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.60)$$

3.2 Realização das Álgebras h_4 e $su(2)$ no Espaço de Bargmann.

Os estados coerentes definidos acima definem realizações das respectivas álgebras no espaço das funções analíticas. Por serem mais adequados à construção dessas realizações, trabalharemos com os estados não normalizados. Consideremos inicialmente os estados coerentes associados à álgebra h_4 . Por conveniência, para evitarmos trabalhar no espaço de funções analíticas de argumento z^* , redefiniremos os estados 3.36 da seguinte forma:

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.61)$$

Devido à essa redefinição, a equação de autovalores para o operador de destruição se torna:

$$a|z\rangle = z^*|z\rangle. \quad (3.62)$$

Consideremos um vetor qualquer $|\psi\rangle$ do espaço de Hilbert do oscilador. Podere-
mos então definir as seguintes funções no domínio dos complexos:

$$\psi(z) \doteq \langle z|\psi\rangle. \quad (3.63)$$

Assim, temos que as funções associadas aos autoestados $|n\rangle$ serão dadas por:

$$f_n(z) = \langle z|n\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}. \quad (3.64)$$

As funções acima são uma base para o espaço das funções analíticas de uma variável
complexa.

Antes de prosseguirmos, calcularemos as ações dos operadores de criação e nú-
mero sobre os estados coerentes 3.61.

$$\begin{aligned} a^+ |z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} a^+ |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*(n+1)}}{\sqrt{(n+1)!}} (n+1) |n+1\rangle \\ &= \partial_z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*(n+1)}}{\sqrt{(n+1)!}} |n+1\rangle \\ &= \partial_z \cdot |z\rangle, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} N |z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} N |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} n |n\rangle \\ &= z^* \partial_z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= z^* \partial_z \cdot |z\rangle. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Realizaremos os operadores a , a^+ e N por meio de operadores sobre o espaço
das funções analíticas. Usando os resultados acima, temos que:

$$\langle z|a^+|\psi\rangle = z \langle z|\psi\rangle = z\psi(z), \quad (3.67)$$

$$\langle z|a|\psi\rangle = \partial_z \langle z|\psi\rangle = \partial_z \psi(z), \quad (3.68)$$

$$\langle z|N|\psi\rangle = z \partial_z \langle z|\psi\rangle = z \partial_z \psi(z), \quad (3.69)$$

onde usamos o fato que $a^+ = a^\dagger$. Logo, podemos fazer as seguintes associações:

$$a^+ \rightarrow z, \tag{3.70}$$

$$a \rightarrow \partial_z, \tag{3.71}$$

$$N \rightarrow z\partial_z. \tag{3.72}$$

Podemos verificar que esse mapeamento satisfaz as relações de comutação de \hbar_4 :

$$[\partial_z, z] = 1, \tag{3.73}$$

$$[z\partial_z, z] = z, \tag{3.74}$$

$$[z\partial_z, \partial_z] = -\partial_z, \tag{3.75}$$

onde convencionamos que as equações acima somente têm significado quando aplicadas sobre quaisquer funções analíticas da variável z .

Devemos ainda definir um produto interno (f, g) neste espaço de maneira que os operadores associados aos de criação e destruição sejam adjuntos conjugados. Desejamos ainda que, com relação a esse produto interno, as autofunções $f_n(z)$ sejam ortonormais. Lembremos das propriedades que um produto interno deve satisfazer:

$$(f, g) = (g, f)^*, \tag{3.76}$$

$$(f, \lambda g) = \lambda(f, g), \quad c \in \mathbb{C}, \tag{3.77}$$

$$(f, f) \geq 0. \tag{3.78}$$

Em vista das propriedades acima, basta que definamos um produto interno que satisfaça:

$$(f, \partial_z g) = (\partial_z f, g), \tag{3.79}$$

$$(f_n, f_m) = \delta_{nm}. \tag{3.80}$$

Assim, tentaremos a seguinte definição:

$$(f, g) = \int f^*(z)g(z)\rho(z)dx dy, \tag{3.81}$$

onde $z = x + iy$ e $\rho(z)$ é uma função real da variável complexa z . A integração se estende sobre todo o plano xy . Inserindo no produto interno acima duas autofunções

dadas pela expressão 3.64, temos que

$$(f_n, f_m) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int z^{*n} z^m \rho(z) dx dy. \quad (3.82)$$

Usando coordenadas polares,

$$(f_n, f_m) = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{2\pi} e^{i\phi(m-n)} d\phi \int r^{n+m} \rho(r, \phi) r dr. \quad (3.83)$$

Logo, para que tenhamos ortogonalidade basta que a função ρ dependa apenas de r . Assim,

$$(f_n, f_m) = \delta_{mn} \frac{2\pi}{n!} \int r^{2n} \rho(r) r dr. \quad (3.84)$$

Para que a condição 3.80 seja satisfeita, devemos ter

$$\int r^{2n} \rho(r) r dr = \frac{n!}{2\pi} \quad (3.85)$$

$$\int r^{2n} \pi \rho(r) dr^2 = n!. \quad (3.85)$$

Então, escolhendo

$$\rho(r) = \frac{e^{-r^2}}{\pi} \quad (3.86)$$

o lado esquerdo de 3.85 é identificado com a função $\Gamma(n + 1) = n!$. Verificaremos se essa escolha é consistente com a condição 3.79. Como as autofunções f_n formam uma base para o espaço das funções analíticas, podemos escrever:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z), \quad (3.87)$$

$$g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l f_l(z), \quad (3.88)$$

onde a_k e b_l são coeficientes que não dependem de z . Podemos escrever o lado esquerdo de 3.79 como:

$$\begin{aligned} (f, \partial_z g) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \frac{a_m^* b_n}{\sqrt{n!m!}} \int z^{*m} (\partial_z z^n) e^{-|z|^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{n a_m^* b_n}{\sqrt{n!m!}} \int e^{i\phi(n-m-1)} d\phi \int r^{m+n-1} e^{-r^2} d(r^2) \\ &= \sum_n \frac{n a_{n-1}^* b_n}{\sqrt{n!(n-1)!}} \int r^{2(n-1)} e^{-r^2} d(r^2) \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_n \frac{\sqrt{n} a_{n-1}^* b_n}{(n-1)!} \int r^{2(n-1)} e^{-r^2} d(r^2) \\
 &= \sum_n \sqrt{n} a_{n-1}^* b_n.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

O lado direito de 3.79 é escrito como:

$$\begin{aligned}
 (zf, g) &= \frac{1}{\pi} \int z^* f^*(z) g(z) e^{-|z|^2} dx dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{a_m^* b_m}{\sqrt{m!n!}} \int z^{*(m+1)} z^n e^{-|z|^2} dx dy \\
 &= \sum_n \frac{a_{n-1}^* b_n}{\sqrt{(n-1)!n!}} \int r^{n+m+1} e^{-r^2} dr^2 \\
 &= \sum_n \sqrt{n} a_{n-1}^* b_n.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Vemos que essa expressão é idêntica a 3.89. Logo, a forma escolhida para a função ρ é consistente com a condição 3.79.

A realização da álgebra do oscilador harmônico no espaço de funções analíticas, equipado com o produto interno definido acima, é chamada de Realização de Bargmann-Fock [28].

Consideraremos os estados coerentes de $su(2)$ não normalizados dados por 3.47, onde substituiremos z por z^* , onde $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}$:

$$|j, z\rangle = e^{z^* J_+} |j, -j\rangle \tag{3.91}$$

$$= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} |j, m\rangle. \tag{3.92}$$

onde redefinimos a variável z por z^* . Definimos as seguintes funções sobre o plano complexo:

$$\psi^j(z) \doteq \langle j, z | \psi^j \rangle, \tag{3.93}$$

onde o vetor $|\psi^j\rangle$ pertence a uma representação irredutível de $su(2)$ caracterizada pelo rótulo j . Os autoestados $|j, m\rangle$ do operador J_z serão representados pelas seguintes funções:

$$\psi_m^j(z) = \langle j, z | j, m \rangle = \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)}, \tag{3.94}$$

com $-j \leq m \leq j$.

Analisaremos as ações dos operadores J_+ , J_- e J_z sobre os estados coerentes.

$$\begin{aligned}
 J_+ |j, z\rangle &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} J_+ |j, m\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m+1)!(j-m-1)!}} (j+m+1) z^{*(j+m)} |j, m+1\rangle \\
 &= \partial_{z^*} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+(m+1)}^{\frac{1}{2}} z^{*(j+(m+1))} |j, m+1\rangle \\
 &= \partial_{z^*} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= \partial_{z^*} |j, z\rangle, \tag{3.95}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_z |j, z\rangle &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} J_z |j, m\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} m z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} (z^* \partial_{z^*} - j) z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= (z^* \partial_{z^*} - j) |j, z\rangle, \tag{3.96}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_- |j, z\rangle &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} J_- |j, m\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} z^{*(j+m)} |j, m-1\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m-1)!(j-m+1)!}} (j-m+1) z^{*(j+m)} |j, m-1\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} z^*(2j-(j+m)) z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= z^*(2j - z^* \partial_{z^*}) \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} z^{*(j+m)} |j, m\rangle
 \end{aligned}$$

$$= z^*(2j - z^*\partial_z) |j, z\rangle. \quad (3.97)$$

Com esses resultados obtemos:

$$\langle j, z | J_- | \psi^j \rangle = \partial_z \langle j, z | \psi^j \rangle = \partial_z \psi^j(z), \quad (3.98)$$

$$\langle j, z | J_+ | \psi^j \rangle = z(2j - z\partial_z) \langle j, z | \psi^j \rangle = z(2j - z\partial_z) \psi^j(z), \quad (3.99)$$

$$\langle j, z | J_z | \psi^j \rangle = (z\partial_z - j) \langle j, z | \psi^j \rangle = (z\partial_z - j) \psi^j(z). \quad (3.100)$$

Podemos fazer as associações entre os geradores de $su(2)$ e os operadores que agem no espaço de funções sobre o plano complexo:

$$J_- \rightarrow \partial_z, \quad (3.101)$$

$$J_+ \rightarrow z(2j - z\partial_z), \quad (3.102)$$

$$J_z \rightarrow z\partial_z - j. \quad (3.103)$$

Essas associações, por construção, preservam a álgebra $su(2)$:

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &\rightarrow [z(2j - z\partial_z), \partial_z] = \\ &= 2(z\partial_z - j) \rightarrow 2J_z, \end{aligned} \quad (3.104)$$

e assim por diante para os demais comutadores.

Observamos que as autofunções 3.94 formam uma base para uma representação irreduzível de $su(2)$, quando seus geradores são realizados da forma acima. Como essas autofunções são analíticas, as combinações lineares destas também o serão. Assim, qualquer função $\psi^j(z)$ no subespaço correspondente a essa representação pode ser expandida em termos dessas autofunções:

$$\psi^j(z) = \sum_{m=-j}^j c_m \psi_m^j, \quad (3.104)$$

onde c_m são coeficientes que não dependem de z .

Procuraremos por um produto interno nesse espaço que possua as mesmas características daquele encontrado para o caso do oscilador. Assim, quaisquer duas autofunções 3.94 devem ser ortonormais com respeito ao produto interno e este

deve ser especificado de tal maneira que os operadores associados a J_+ e J_- sejam adjuntos conjugados. Novamente, procuraremos por um produto interno da forma:

$$(f, g) = \int f^*(z)g(z)\sigma(z)dx dy. \quad (3.105)$$

Inserindo duas funções 3.94 nessa expressão e procedendo de maneira idêntica à do caso h_4 , temos:

$$\begin{aligned} (\psi_m^j, \psi_n^j) &= \frac{1}{2} \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+n}^{\frac{1}{2}} \int e^{i(m-n)\phi} d\phi \int r^{2j+m+n} \sigma(r) dr^2 \\ &= \delta_{mn} \pi \binom{2j}{j+n} \int r^{2(j+n)} \sigma(r) dr^2. \end{aligned}$$

Para haver normalização, devemos ter:

$$\begin{aligned} \int r^{2(j+n)} \sigma(r) dr^2 &= \frac{1}{\pi} \frac{(j+n)!(j-n)!}{(2j)!} \quad (3.110) \\ &= \frac{(2j+1)\Gamma(j+n+1)\Gamma(j-n+1)}{\pi \Gamma(2j+2)} \quad (3.111) \\ &= \frac{(2j+1)}{\pi} B(j+n+1, j-n+1), \quad (3.106) \end{aligned}$$

onde B é a função Beta. Uma das possíveis representações integrais dessa função é a seguinte:

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}} dt. \quad (3.107)$$

Logo, 3.106 especifica a forma da função $\sigma(r)$:

$$\sigma(r) = \frac{(2j+1)}{\pi} \frac{1}{(1+r^2)^{2j+2}}. \quad (3.108)$$

Podemos verificar que o produto interno definido com σ expresso por 3.108 satisfaz o requerimento de tornar os operadores associados a J_+ e J_- adjuntos conjugados. A verificação se dá nos mesmos moldes como fizemos para o caso da álgebra do oscilador. Assim, temos:

$$((2jz - z^2 \partial_z) \psi^j, \phi^j) = (\psi^j, \partial_z \phi^j). \quad (3.109)$$

Essa realização, equipada com o produto interno definido acima, é o análogo da realização de Bargmann para $su(2)$.

3.3 Estados q-Coerentes.

Como vimos anteriormente, o ponto de vista da Teoria de Grupos foi muito importante para definirmos os estados coerentes associados a outros grupos ou álgebras de Lie. Como ainda não dispomos de uma Teoria de Grupos associados às álgebras q-deformadas, não podemos mais nos utilizar deste método. A despeito disso, foram propostas algumas definições de estados q-coerentes que preservam algumas das propriedades dos estados não deformados [9, 29, 30]. Segundo Klauder [31] existem duas condições a serem satisfeitas para que estados $|l\rangle$ sejam denominados coerentes. Estas condições são :

i) *Continuidade*. Os vetores $|l\rangle$ devem ser funções fortemente contínuas do parâmetro l . Isso significa que devemos ter

$$\| |l'\rangle - |l\rangle \| \rightarrow 0 \quad (3.110)$$

sempre que

$$|l' - l| \rightarrow 0. \quad (3.111)$$

ii) *Completeza*. Deve existir uma medida positiva δl sobre o espaço dos parâmetros tal que o operador identidade admita a seguinte *resolução à unidade*:

$$I = \int |l\rangle \langle l| \delta l, \quad (3.112)$$

onde a integração deve se dar sobre todo o espaço dos parâmetros.

Jurčo definiu os estados q-coerentes generalizados como aqueles que satisfazem estas duas condições e, no limite não deformado, se reduzem aos estados generalizados usuais [30]. Biedenharn [9], ao introduzir o oscilador q-deformado, já havia proposto uma definição de estados q-coerentes para este sistema. Veremos que essa definição possui as duas propriedades acima. A definição de estados coerentes associados a $su_q(2)$ se deve a Quesne e Jurčo [29, 30]. Jurčo os definiu ao mesmo tempo em que propôs a definição de estados q-coerentes generalizados. Consideraremos primeiramente os estados q-coerentes de Biedenharn, que os definiu como sendo os autoestados do operador de aniquilação do q-oscilador bosônico :

$$a_q |z\rangle_q = z |z\rangle_q, \quad (3.113)$$

com

$$|z\rangle_q = e_q^{-\frac{1}{2}|z|^2} e_q^{za_q^\dagger} |0\rangle, \quad (3.114)$$

onde a q-exponencial é definida como:

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}. \quad (3.115)$$

Assim,

$$|z\rangle_q = e_q^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!} |n\rangle. \quad (3.116)$$

Podemos ver claramente que o conceito de continuidade é satisfeito por essa definição. Também observamos que no limite $q \rightarrow 1$ estes estados se reduzem aos não deformados. Resta-nos analisar a existência de uma resolução à unidade. Faremos isso ao mesmo tempo em que procuraremos o análogo q-deformado da realização de Bargmann da álgebra h_{4q} .

Como fizemos anteriormente, redefinimos os estados q-coerentes (não normalizados) como:

$$|z\rangle_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle. \quad (3.117)$$

Dessa expressão podemos concluir que, assim como nos estados não deformados, tais estados não são ortogonais, pois temos

$${}_q\langle z' | z \rangle_{qq} = e_q^{z'z^*}. \quad (3.118)$$

As autofunções associadas aos autoestados $|n\rangle$ (que serão uma base para o espaço das funções analíticas) serão dadas por:

$$f_{nq}(z) = {}_q\langle z | n \rangle = \frac{z^n}{\sqrt{[n]_q!}}. \quad (3.119)$$

E uma função qualquer nesse espaço será dada por:

$${}_q\langle z | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_{nq}(z). \quad (3.120)$$

Calculando a ação dos operadores a_q^\dagger , a_q e N sobre os estados q-coerentes, temos:

$$a_q^\dagger |z\rangle_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{[n]_q!}} a_q^\dagger |n\rangle \quad (3.121)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{[n]_q!}} \sqrt{[n+1]_q} |n+1\rangle \tag{3.127}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{[n+1]_q!}} [n+1]_q |n+1\rangle \tag{3.128}$$

$$= D_z^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*(n+1)}}{\sqrt{[n+1]_q!}} |n+1\rangle \tag{3.129}$$

$$= D_z^q |z\rangle_q, \tag{3.121}$$

$$a_q |z\rangle_q = z^* |z\rangle_q \tag{3.122}$$

$$N |z\rangle_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{[n]_q!}} N |n\rangle \tag{3.131}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{[n]_q!}} n |n\rangle \tag{3.123}$$

$$= z^* \partial_{z^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{[n]_q!}} |n\rangle$$

$$= z^* \partial_{z^*} |z\rangle_q. \tag{3.124}$$

Em 3.121 definimos a q-derivação

$$D_z^q z^n = [n]_q z^{n-1}. \tag{3.125}$$

Usando 3.120 podemos determinar a ação desse operador sobre uma função genérica $g(z)$ desse espaço:

$$D_z^q g(z) = D_z^q \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_{nq}(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{[n]_q!}} D_z^q z^n \tag{3.136}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{[n]_q!} [n]_q z^{n-1} \tag{3.137}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{[n]_q!} \frac{(q^n - q^{-n})}{z(q - q^{-1})} z^n \tag{3.138}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{[n]_q!} \left(\frac{(qz)^n}{z(q - q^{-1})} - \frac{(q^{-1}z)^n}{z(q - q^{-1})} \right)$$

$$= \frac{g(qz) - g(q^{-1}z)}{z(q - q^{-1})}. \tag{3.126}$$

De posse dos resultados acima, podemos escrever:

$${}_q \langle z | a_q^+ | \psi \rangle = z {}_q \langle z | \psi \rangle, \quad (3.127)$$

$${}_q \langle z | a_q | \psi \rangle = D_z^q {}_q \langle z | \psi \rangle, \quad (3.128)$$

$${}_q \langle z | N | \psi \rangle = z \partial_z {}_q \langle z | \psi \rangle. \quad (3.129)$$

Fazemos as associações:

$$a_q^+ \rightarrow z, \quad (3.130)$$

$$a_q \rightarrow D_z^q, \quad (3.131)$$

$$N \rightarrow z \partial_z. \quad (3.132)$$

No espaço das funções analíticas o mapeamento acima satisfaz, por construção, a álgebra h_{4q} :

$$D_z^q z - qz D_z^q = q^{-z \partial_z}, \quad (3.133)$$

$$[z \partial_z, z] = z, \quad (3.134)$$

$$[z \partial_z, D_z^q] = -D_z^q. \quad (3.135)$$

Analogamente ao caso não deformado, procuraremos por um produto interno $(f, g)_q$ que satisfaça a condição de ortonormalidade das autofunções 3.119. Como qualquer outro produto interno, também deve satisfazer as condições 3.76 a 3.78. Também exigiremos que os operadores z e D_z^q sejam adjuntos conjugados com relação a esse produto. Logo, devemos ter:

$$(f, D_z^q g)_q = (z f, g)_q, \quad (3.136)$$

$$(f_{nq}, f_{mq})_q = \delta_{nm}. \quad (3.137)$$

Como sempre, procuraremos por uma expressão da forma:

$$(f, g)_q = \int f^*(z) g(z) \rho(r, q) dA_q, \quad (3.138)$$

onde dA_q é um elemento de área q-deformado. No limite $q \rightarrow 1$ esse elemento deve se reduzir a $dx dy$ e $\rho(r, q)$ deve se reduzir a $\rho(r)$. A função ρ deve ser real e pode

depender do parâmetro q . Inserindo duas autofunções em 3.138, temos:

$$\begin{aligned} (f_{nq}, f_{mq})_q &= \frac{1}{\sqrt{[n]_q! [m]_q!}} \int z^{*n} z^m \rho(r, q) dA_q \\ &= \frac{1}{\sqrt{[n]_q! [m]_q!}} \int e^{i\phi(m-n)} r^{n+m} \rho(r, q) dA_q. \end{aligned}$$

Para que tenhamos ortogonalidade basta que a integração com respeito a ϕ seja a usual não deformada. Denotaremos o elemento q -deformado análogo a rdr como $\frac{1}{2}d_q r^2$. A integração com respeito a esse elemento ainda não tem nenhum significado. Neste instante *definimos* essa operação como sendo a inversa da q -derivação 3.126 (a forma geral da q -integral está resolvida no Apêndice C, assim como as fórmulas de q -integral utilizadas abaixo). Assim, temos que:

$$(f_{nq}, f_{mq})_q = \delta_{mn} \frac{2\pi}{[n]_q!} \int_0^\infty r^{2n} \rho(r, q) \frac{1}{2} d_q r^2. \quad (3.139)$$

Para que a condição 3.137 seja satisfeita, devemos ter

$$\int r^{2n} \rho(r, q) d_q r^2 = \frac{[n]_q!}{\pi} \quad (3.140)$$

$$\int r^{2n} \pi \rho(r, q) d_q r^2 = [n]_q!. \quad (3.140)$$

Observando a fórmula da função q -gamma no Apêndice C, vemos que a escolha

$$\rho(r, q) = \frac{e_q^{-r^2}}{\pi} \quad (3.141)$$

satisfaz essa condição. Verificaremos a condição 3.136. Observando 3.120 podemos escrever o lado esquerdo de 3.136 como:

$$\begin{aligned} (f, D_z^q g)_q &= \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \frac{a_m^* b_n}{\sqrt{[n]_q! [m]_q!}} \int z^{*m} (D_z^q z^n) e_q^{-|z|^2} dA_q \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{[n]_q a_m^* b_n}{\sqrt{[n]_q! [m]_q!}} \int e^{i\phi(n-m-1)} d\phi \int r^{m+n-1} e_q^{-r^2} d_q r^2 \\ &= \sum_n \frac{[n]_q a_{n-1}^* b_n}{\sqrt{[n]_q! [n-1]_q!}} \int r^{2(n-1)} e_q^{-r^2} d_q r^2 \\ &= \sum_n \frac{\sqrt{[n]_q} a_{n-1}^* b_n}{[n-1]_q!} \int r^{2(n-1)} e_q^{-r^2} d_q r^2 \\ &= \sum_n \sqrt{[n]_q} a_{n-1}^* b_n. \end{aligned} \quad (3.142)$$

O lado direito de 3.136 fica:

$$\begin{aligned}
 (zf, g)_q &= \frac{1}{\pi} \int z^* f^*(z) g(z) e_q^{-|z|^2} dA_q \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{a_m^* b_m}{\sqrt{[m]_q! [n]_q!}} \int z^{*(m+1)} z^n e_q^{-|z|^2} dA_q \\
 &= \sum_n \frac{a_{n-1}^* b_n}{\sqrt{[n-1]_q! [n]_q!}} \int r^{n+m+1} e_q^{-r^2} d_q r^2 \\
 &= \sum_n \sqrt{[n]_q} a_{n-1}^* b_n. \tag{3.143}
 \end{aligned}$$

Assim, a condição 3.136 está satisfeita pelo produto interno 3.138, com ρ dada por 3.141.

Mostraremos que existe uma resolução à unidade na base de estados q-coerentes. Também mostraremos que essa base é supercompleta, verificando que seus vetores serão linearmente dependentes. Para encontrar a resolução à unidade faremos a seguinte associação:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = (\Phi(z), \Psi(z))_q. \tag{3.144}$$

Substituindo a expressão 3.138 para o produto interno, temos:

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi | \Psi \rangle &= \int \Phi^*(z) \Psi(z) \rho(r, q) dA_q \\
 &= \int \langle \Phi | z \rangle_q \langle z | \Psi \rangle \rho(r, q) dA_q. \tag{3.145}
 \end{aligned}$$

Logo, podemos fazer a associação

$$\begin{aligned}
 I &= \int |z\rangle_q \langle z| \rho(r, q) dA_q \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int |z\rangle_q \langle z| e_q^{-r^2} d_q r^2 d\phi, \quad z = r e^{i\phi}. \tag{3.146}
 \end{aligned}$$

Podemos verificar que essa expressão é realmente uma resolução à unidade usando 3.117:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2\pi} \int |z\rangle_q \langle z| e_q^{-r^2} d_q r^2 d\phi \\
 &= \sum_{n,m} \frac{|n\rangle \langle m|}{2\pi \sqrt{[n]_q! [m]_q!}} \int r^{n+m} e_q^{-r^2} d_q r^2 \int e^{i(n-m)\phi} d\phi \\
 &= \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{[n]_q!} \int r^{2n} e_q^{-r^2} d_q r^2 \\
 &= \sum_n |n\rangle \langle n| = 1.
 \end{aligned}$$

Podemos verificar que os vetores $|z\rangle_q$ são linearmente dependentes, usando a resolução à unidade que acabamos de estabelecer.

$$|z\rangle_q = \frac{1}{2\pi} \int |z'\rangle_q \langle z'|z\rangle_q e^{-r^2} d_q r^2 d\phi. \quad (3.147)$$

Dessa expressão e do fato que os estados q-coerentes não são ortogonais (3.118) podemos concluir que cada estado q-coerente é uma combinação linear dos demais estados q-coerentes. Logo, a base é linearmente dependente e, conseqüentemente, supercompleta.

Introduziremos os estados q-coerentes (não normalizados) de $su_q(2)$. Estes estados, como já dissemos, foram definidos independentemente por Quesne e Jurčo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |j, z\rangle_q &= e_q^{z^* J_+} |j, -j\rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (3.148)$$

(onde já redefinimos a variável complexa por sua conjugada). O coeficiente q-binomial é definido como segue:

$$\binom{n}{m}_q = \frac{[n]_q!}{[m]_q! [n-m]_q!}. \quad (3.149)$$

A condição de continuidade é evidentemente satisfeita por esses estados. Procuraremos verificar a condição de existência de uma resolução à unidade. Faremos isso dentro do contexto do análogo q-deformado da realização de Bargmann para $su_q(2)$.

Como nos casos anteriores, analisaremos a ação dos geradores de $su_q(2)$ sobre os estados q-coerentes:

$$\begin{aligned} J_{q+} |j, z\rangle_q &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} J_{q+} |j, m\rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} \sqrt{[j-m]_q [j+m+1]_q} |j, m+1\rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{[2j]_q!}{[j+m+1]_q! [j-m-1]_q!}} [j+m+1]_q z^{*(j+m)} |j, m+1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= D_{z^*}^q \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m+1}_q^{\frac{1}{2}} z^{*(j+(m+1))} |j, m+1\rangle \\
 &= D_{z^*}^q \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= D_{z^*}^q |j, z\rangle_q,
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

$$\begin{aligned}
 J_{qz} |j, z\rangle_q &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} J_{qz} |j, m\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} m z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} (z^* \partial_{z^*} - j) z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= (z^* \partial_{z^*} - j) |j, z\rangle_q,
 \end{aligned} \tag{3.151}$$

$$\begin{aligned}
 J_{q-} |j, z\rangle_q &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} z^{*(j+m)} J_{q-} |j, m\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{[2j]_q!}{[j+m]_q! [j-m]_q!}} \sqrt{[j+m]_q [j-m+1]_q} z^{*(j+m)} |j, m-1\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{[2j]_q!}{[j+m-1]_q! [j-m+1]_q!}} [j-m+1]_q z^{*(j+m)} |j, m-1\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{[2j]_q!}{[j+m]_q! [j-m]_q!}} z^* [2j - (j+m)]_q z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= z^* [2j - z^* \partial_{z^*}]_q \sum_{m=-j}^j \sqrt{\frac{[2j]_q!}{[j+m]_q! [j-m]_q!}} z^{*(j+m)} |j, m\rangle \\
 &= z^* [2j - z^* \partial_{z^*}]_q |j, z\rangle_q.
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

Assim,

$${}_q \langle z | J_{q-} | \psi^j \rangle = D_z^q \psi^j(z), \tag{3.153}$$

$${}_q \langle z | J_{q+} | \psi^j \rangle = z [2j - z \partial_z]_q \psi^j(z), \tag{3.154}$$

$${}_q \langle z | J_{qz} | \psi^j \rangle = (z \partial_z - j) \psi^j(z), \tag{3.155}$$

onde definimos $\psi^j(z) = \langle z | \psi^j \rangle$. Podemos então fazer as seguintes associações:

$$J_{q-} \rightarrow D_z^q, \tag{3.156}$$

$$J_{q+} \rightarrow z[2j - z\partial_z]_q, \quad (3.157)$$

$$J_{qz} \rightarrow z\partial_z - j, \quad (3.158)$$

que, por construção, preservam a álgebra $su_q(2)$:

$$\begin{aligned} [J_{q+}, J_{q-}] &\rightarrow [z[2j - z\partial_z]_q, D_z^q] = \\ &= 2[z\partial_z - j]_q \rightarrow [2J_{qz}]_q, \end{aligned}$$

e assim por diante para os demais comutadores.

Consideremos as autofunções do operador J_{qz} :

$$\psi_m^j(z) \doteq {}_q(z|j, m) = \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} z^{j+m}. \quad (3.159)$$

Essas funções geram um subespaço que é uma base para uma representação irreduzível de $su_q(2)$. Qualquer função nesse subespaço pode ser escrita como:

$$f^j(z) = \sum_{m=-j}^j c_m \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} z^{j+m}. \quad (3.160)$$

Definiremos o produto interno no espaço das funções $\psi^j(z)$ (que deve reduzir-se ao produto interno usual no limite $q \rightarrow 1$) como:

$$(f^j(z), g^j(z))_q \doteq \frac{1}{2} \int f^{*j}(z) g^j(z) \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi, \quad (3.161)$$

onde $z = re^{i\phi}$.

Sobre esse produto interno impomos as mesmas condições dos outros casos. Assim, quaisquer duas autofunções 3.159 devem ser ortogormais com respeito a esse produto:

$$\begin{aligned} (\psi_m^j, \psi_n^j)_q &= \frac{1}{2} \int \psi_m^{*j}(z) \psi_n^j(z) \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi \\ &= \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} \binom{2j}{j+n}_q^{\frac{1}{2}} \int e^{i\phi(n-m)} d\phi \int r^{2j+m+n} \sigma(r, q) d_q r^2 \\ &= \delta_{mn} \pi \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} \int r^{2(j+m)} \sigma(r, q) d_q r^2. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Logo, devemos ter

$$\begin{aligned} \pi \binom{2j}{j+m}_q^{\frac{1}{2}} \int r^{2(j+m)} \sigma(r, q) d_q r^2 &= 1 \\ \int r^{2(j+m)} \{ \pi \sigma(r, q) \} d_q r^2 &= \frac{[j+m]_q! [j-m]_q!}{[2j]_q!}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Podemos reescrever o lado direito dessa equação como:

$$[2j+1]_q \frac{[j+m]_q! [j-m]_q!}{[2j+1]_q!} = [2j+1]_q B_q(j+m+1, j-m+1), \quad (3.164)$$

onde definimos o análogo q-deformado da função Beta.

$$B_q(m, n) = \frac{[m-1]_q! [n-1]_q!}{[m+n-1]_q!}, \quad \text{com } m, n \in \mathbb{N}. \quad (3.165)$$

Existe uma representação q-integral dessa função [34]. Seguindo a nossa definição de q-integral (Apêndice C), essa função é dada por:

$$B_q(m, n) = \int t^{m-1} \prod_{k=0}^{m+n-1} (1 + t^{k - \frac{(m+n)}{2} + \frac{1}{2}})^{-1} d_q t. \quad (3.166)$$

Então 3.163 se torna:

$$\int r^{2(j+m)} \{ \pi \sigma(r, q) \} d_q r^2 = [2j+1]_q \int t^{j+m} \prod_{k=0}^{2j+1} (1 + t^{k-j-\frac{1}{2}})^{-1} d_q t. \quad (3.167)$$

Isso nos leva à seguinte identificação:

$$\sigma(r, q) = \frac{[2j+1]_q}{\pi} \prod_{k=0}^{2j+1} (1 + r^{2k-2j-1})^{-1}. \quad (3.168)$$

Mostraremos que os operadores associados a J_{q+} e J_{q-} são adjuntos conjugados com respeito ao produto interno 3.161, com $\sigma(r, q)$ dado pela expressão acima. Usaremos a seguinte notação para as expansões em autofunções:

$$f^j(z) = \sum_{m=-j}^j a_m z^{j+m}, \quad (3.169)$$

onde os coeficientes a_m já contêm os coeficientes q-binomiais. Assim, temos

$$(f, J_{q+}g)_q = (f, z[2j - z\partial_z]_q g)_q$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{nm} a_n^* b_m \int z^{*(j+n)} z [2j - z \partial_z]_q z^{j+m} \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi \quad (3.170)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{nm} a_n^* b_m \int z^{*(j+n)} z [2j - z \partial_z]_q z^{j+m} \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi \quad (3.171)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{nm} a_n^* b_m \int z^{*(j+n)} [2j - (j + m)]_q z^{j+m+1} \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{nm} a_n^* b_m [j - m]_q \int e^{i\phi(m+1-n)} d\phi \int r^{2j+n+m+1} \sigma(r, q) d_q r^2$$

$$= \pi \sum_m a_{m+1}^* b_m [j - m]_q \int r^{2(j+m+1)} \sigma(r, q) d_q r^2$$

$$= [2j + 1]_q \sum_m a_{m+1}^* b_m [j - m]_q B_q(j + m + 2, j - m), \quad (3.171)$$

$$(J_q - f, g)_q = (D_z^q f, g)_q$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{nm} a_n^* b_m \int (D_z^q z^{*(j+n)}) z^{j+m} \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi \quad (3.172)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{nm} a_n^* b_m \int [j + n]_q z^{*(j+n-1)} z^{j+m} \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi$$

$$= \pi \sum_m a_{m+1}^* b_m [j + m + 1]_q \int r^{2(j+m)} \sigma(r, q) d_q r^2$$

$$= [2j + 1]_q \sum_m a_{m+1}^* b_m [j - m]_q B_q(j + m + 2, j - m), \quad (3.173)$$

onde usamos a seguinte relação:

$$[j + m + 1]_q B_q(j + m + 1, j - m + 1) = [j - m]_q B_q(j + m + 2, j - m). \quad (3.174)$$

Logo, as expressões 3.171 e 3.173 são idênticas e assim verificamos que os operadores J_{q+} e J_{q-} são de fato adjuntos conjugados com respeito ao produto interno definido acima.

Procuraremos demonstrar que existe uma resolução à unidade na base de estados q-coerentes de $su_q(2)$. Para isso, nos valeremos da associação:

$$\langle \Phi^j | \Psi^j \rangle = (\Phi^j(z), \Phi^j(z))_q \quad (3.175)$$

$$= \frac{1}{2} \int \Phi^{*j}(z) \Psi^j(z) \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \int \langle \Phi^j | z \rangle_q \langle z | \Psi^j \rangle \sigma(r, q) d_q r^2 d\phi. \quad (3.176)$$

Como a expressão acima é válida para quaisquer vetores $|\Phi^j\rangle$ e $|\Psi^j\rangle$, podemos iden-

tificar a seguinte resolução à unidade:

$$I = \frac{1}{2} \int |j, z\rangle_q \langle z| \sigma(r, q) d\phi d_q r^2, \quad (3.177)$$

com σ dado por 3.168.

Assim, estabelecemos o análogo q-deformado da realização de Bargmann para $su_q(2)$, ao mesmo tempo em que demonstramos que os estados q-coerentes definidos em 3.148 satisfazem as duas condições de Klauder.

O Modelo de Lipkin q-Deformado.

Neste capítulo, como exemplo de aplicação dos conceitos introduzidos nos capítulos anteriores, estudaremos a generalização q-deformada de um modelo exatamente solúvel, o Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick. Começaremos com uma breve revisão desse modelo e estudaremos suas transições de fase usando um método variacional via estados coerentes. Após, introduziremos uma versão q-deformada desse modelo e estudaremos suas transições de fase utilizando o método variacional com estados q-coerentes.

4.1 O Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick.

O Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (que chamaremos simplesmente de LMG) é exatamente solúvel, ou seja, seu Hamiltoniano pode ser diagonalizado sem a necessidade de nenhum método de aproximações. Foi desenvolvido, originalmente, para servir como um "laboratório de testes" para as diversas técnicas de aproximações em problemas de muitos corpos. Apesar de sua relativa simplicidade, apresenta algumas características importantes em comum com modelos mais complexos (que não, em geral, são solúveis exatamente), como as transições de fase, por exemplo.

O LMG descreve um sistema de N spins $S=1/2$ distribuídos através de dois níveis de energia β -degenerados. Cada um destes níveis é rotulado por um número

estados σ , que pode assumir os valores -1 e $+1$. Os estados degenerados dentro de cada nível são rotulados pelo número quântico p , que assume valores entre 1 e N . Uma única fermion é associada a cada valor de p . São permitidas interações entre pares de férmions, sendo que estas não alteram o número quântico p de cada partícula.

Capítulo 4

O Modelo de Lipkin q-Deformado.

Neste capítulo, como exemplo de aplicação dos conceitos estudados nos capítulos anteriores, estudaremos a generalização q-deformada de um modelo exatamente solúvel, o Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick. Começaremos com uma breve revisão desse modelo e estudaremos suas transições de fase usando um método variacional via estados coerentes. Após, introduziremos uma versão q-deformada desse modelo e estudaremos suas transições de fase utilizando o método variacional com estados q-coerentes.

4.1 O Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick.

O Modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (que chamaremos simplesmente de LMG) é exatamente solúvel, ou seja, seu Hamiltoniano pode ser diagonalizado sem a necessidade de usarmos métodos de aproximações. Foi introduzido, a princípio, para servir como um “laboratório de testes” para os diversos métodos de aproximações em problemas de muitos corpos. Apesar de sua relativa simplicidade, apresenta algumas características importantes em comum com modelos mais realistas (que são, em geral, não solúveis exatamente), como as transições de fase, por exemplo.

O LMG descreve um sistema de vários férmions distribuídos através de dois níveis de energia N-degenerados. Cada um destes níveis é rotulado por um número

quântico σ , que pode assumir os valores -1 e $+1$. Os estados degenerados dentro de cada nível são rotulados pelo número quântico p , que assume valores entre 1 e N . Um único férmion é alocado a cada valor de p . São permitidas interações entre pares de férmions, sendo que estas não alteram o número quântico p de cada partícula.

O Hamiltoniano do Modelo é escrito em termos de produtos bilineares dos operadores de criação e destruição de férmions, como também de produtos bilineares desses produtos. Vimos nos capítulos anteriores que podemos escrever os geradores das álgebras de Lie $su(M)$ através de produtos bilineares dos operadores de criação e destruição de bósons ou férmions. Logo, podemos escrever o Hamiltoniano do LMG como sendo combinações lineares e bilineares dos geradores de uma álgebra de Lie, que no caso é a Álgebra $su(2)$. Como o Casimir da álgebra comuta com todos os geradores desta, o Hamiltoniano de LMG também comuta com o Casimir de $su(2)$. Logo, o Casimir corresponde a uma quantidade conservada e o problema de diagonalização da matriz do Hamiltoniano é simplificado, pois essa matriz será diagonal em blocos, cada bloco correspondendo a um autovalor do Casimir. As representações irredutíveis da álgebra $su(2)$ são uma base natural para o espaço de Hilbert do modelo.

O Hamiltoniano é definido por:

$$H \doteq \frac{1}{2}\epsilon \sum_{\sigma,p} \sigma a_{\sigma p}^+ a_{\sigma p} + \frac{V}{2N} \sum_{\sigma,p,p'} a_{\sigma p}^+ a_{\sigma p'}^+ a_{-\sigma p'} a_{-\sigma p} + \frac{W}{2N} \sum_{\sigma,p,p'} a_{\sigma p}^+ a_{-\sigma p'}^+ a_{\sigma p'} a_{-\sigma p}. \quad (4.1)$$

O primeiro termo simplesmente conta o número de partículas em cada um dos níveis de energia e representa a energia total do sistema sem interação entre as partículas. O segundo termo é a energia associada à interação entre um par de partículas no mesmo nível de energia, que espalha esse par para o outro nível, sem alterar o número quântico p de cada partícula. O terceiro termo corresponde à interação entre um par de partículas situadas em níveis de energia diferentes. Essa interação espalha as partículas para o outro nível, também sem alterar o número quântico p .

Em cada subsistema caracterizado por um dado valor de p (que chamaremos “célula”) identificaremos os geradores de uma álgebra $su(2)$, de acordo como vimos

quando estudamos o oscilador fermiônico:

$$s_z^p = \frac{1}{2} (a_{1p}^+ a_{1p} - a_{-1p}^+ a_{-1p}) = \frac{1}{2} (N_1^p - N_{-1}^p), \quad (4.2)$$

$$s_+^p = a_{1p}^+ a_{-1p}, \quad (4.3)$$

$$s_-^p = a_{-1p}^+ a_{1p}. \quad (4.4)$$

Definimos agora os seguintes operadores:

$$J_z = \sum_{p=1}^N s_z^p, \quad (4.5)$$

$$J_+ = \sum_{p=1}^N s_+^p, \quad (4.6)$$

$$J_- = \sum_{p=1}^N s_-^p. \quad (4.7)$$

Podemos verificar que estes também satisfazem a álgebra $su(2)$. Chamaremos tais operadores de operadores de *quasi-spin*. Estes são geradores de rotações em um espaço abstrato, que chamaremos de *espaço de quasi-spin*. Podemos agora reescrever o Hamiltoniano do modelo da seguinte maneira:

$$H = \epsilon J_z + \frac{V}{2N} (J_+^2 + J_-^2) + \frac{W}{2N} (J_+ J_- + J_- J_+). \quad (4.8)$$

Logo, o Hamiltoniano é completamente dado em termos dos geradores de $su(2)$. Assim, este comuta com o Casimir J^2 de $su(2)$ e a matriz correspondente será diagonal por blocos. Cada bloco possui um autovalor j bem definido e ordem $2j+1$.

O estado fundamental (estado de mais baixa energia) é aquele em que todos os férmions estão no nível inferior ($\sigma = -1$). Como as interações não alteram o valor de p de cada uma das partículas, há um total de 2^N estados possíveis.

Como podemos observar em 4.2, o operador J_z mede a metade da diferença entre o número de partículas nos níveis superior e inferior. Como temos um total de N partículas, o máximo autovalor de J_z é $\frac{N}{2}$. Conseqüentemente, o máximo valor do rótulo j será também $\frac{N}{2}$. Logo, o maior bloco da matriz do Hamiltoniano é de ordem $N+1$. Assim, ao invés de uma matriz de ordem 2^N , a maior matriz que devemos diagonalizar possui ordem $N+1$, o que já simplifica sobremaneira a solução do problema. O conjunto de estados correspondentes a um dado j é uma

representação irredutível de dimensão $2j+1$ de $su(2)$. Chamaremos de *multipletos* esses conjuntos. Na base $|j, m\rangle$ as matrizes associadas ao primeiro e terceiro termos do Hamiltoniano 4.8 já são diagonais, ao passo que a matriz associada ao segundo termo é não diagonal. Assim, dizemos que a perturbação proporcional a V “mistura” estados dentro de um mesmo multipletto. De agora em diante trataremos do caso em que $W=0$. Então, o Hamiltoniano sem interação é diagonal na base $|j, m\rangle$, ao passo que o Hamiltoniano com interação é não diagonal nessa representação. Esse caso torna mais simples a diagonalização da matriz do Hamiltoniano. Para visualizarmos isso, escreveremos o Hamiltoniano em termos dos operadores J_x , J_y e J_z :

$$H = \epsilon J_z + \frac{V}{2N} (J_+^2 + J_-^2) \quad (4.9)$$

$$= \epsilon J_z + \frac{V}{2N} (J_x^2 - J_y^2). \quad (4.10)$$

Esse Hamiltoniano possui a seguinte simetria adicional: uma rotação de 180° (no espaço de *quasi-spin*) ao redor do eixo que jaz no plano xy e faz 45° com ambos os semi-eixos positivos troca x por y e z por $-z$. Logo, troca J_x por J_y e J_z por $-J_z$. Conseqüentemente, transforma H em $-H$. Assim, para cada autoestado do Hamiltoniano com autovalor E existirá outro autoestado (obtido do primeiro através da transformação acima) com autovalor $-E$. Conseqüentemente, a equação secular para os autovalores da energia deve conter somente potências pares ou somente potências ímpares em E , de forma que tanto E quanto $-E$ possam ser soluções. Se a submatriz j a ser diagonalizada possuir ordem par todos os expoentes devem ser pares, ao passo que, se for de ordem ímpar todos os expoentes devem ser ímpares ($E=0$ será solução). Essas observações são úteis quando procuramos as soluções exatas do modelo.

O operador J_z pode ser escrito da seguinte forma:

$$J_z = n_{pb} - \frac{N}{2}, \quad (4.11)$$

onde o operador n_{pb} mede o número de pares “partícula-buraco” excitados, isto é, a partir do estado fundamental, o número de partículas que passaram do nível inferior para o superior, ou

$$n_{pb} = \sum_p a_{1p}^+ a_{1p}. \quad (4.12)$$

Estados com um número bem definido de pares “partícula-buraco” são autoestados do operador J_z .

Em um dado multipletto cada autovalor de J_z só ocorre uma única vez, de forma que cada multipletto terá apenas um único estado com um dado número de pares partícula-buraco excitados. O estado fundamental do Hamiltoniano não perturbado não possui pares excitados. Há somente um estado com essa característica. Logo, o estado fundamental não é degenerado. O autovalor de J_z para esse estado é $-\frac{N}{2}$. Portanto, o estado fundamental pertence ao multipletto de $j = \frac{N}{2}$. O primeiro estado excitado possui um único par excitado. Há N possibilidades de construirmos este estado a partir do vácuo, pois podemos excitar qualquer uma das N partículas do estado fundamental. Portanto, o primeiro estado excitado possui uma N -upla de degenerescência. Cada um desses estados degenerados possui autovalor de J_z igual a $-\frac{N}{2} + 1$ e são combinações lineares de autoestados do operador Casimir J^2 caracterizados por $j = \frac{N}{2}$ e $j = \frac{N}{2} - 1$. Pode-se mostrar que apenas uma dessas combinações é autoestado do Casimir com $j = \frac{N}{2}$. Este estado é obtido da seguinte forma:

$$\left| j = \frac{N}{2}, m = -\frac{N}{2} + 1 \right\rangle = J_+ \left| \frac{N}{2}, -\frac{N}{2} \right\rangle. \quad (4.13)$$

Todos os demais $N-1$ estados degenerados e ortogonais a esse pertencem ao multipletto $j = \frac{N}{2} - 1$. Assim, temos que o multipletto com $j = \frac{N}{2}$ é não degenerado, ao passo que o multipletto $j = \frac{N}{2} - 1$ possui uma degenerescência de ordem $N-1$. Sucessivamente, encontramos que a degenerescência do multipletto j é dada pela seguinte expressão:

$$Y(N, j) = \binom{N}{\frac{N}{2} - j} - \binom{N}{\frac{N}{2} - j - 1} \quad (4.14)$$

$$= \frac{N!(2j+1)}{\left(\frac{N}{2} + j + 1\right)! \left(\frac{N}{2} - j\right)!}. \quad (4.15)$$

Neste trabalho não estaremos interessados nas soluções exatas do modelo, pois o procedimento de diagonalização não permite uma caracterização muito clara das transições de fase, assunto em que estamos interessados. Usaremos então um método variacional para calcularmos a energia livre do sistema e descrevermos as transições de fase. Tal método foi introduzido por Gilmore *et al.* [21] e está descrito no

Apêndice D. As soluções exatas são úteis para a análise da precisão do método variacional no cálculo da energia livre.

4.2 Cálculo Variacional da Energia Livre.

Calcularemos a energia livre do modelo LMG usando o método variacional descrito no Apêndice D. Como vimos na seção anterior, o Hamiltoniano do modelo LMG é escrito em termos dos geradores da álgebra $su(2)$. De acordo com o exposto no Apêndice D, os estados coerentes são adequados como estados de teste. Escolhere-
mos o operador densidade, escrito na base de estados coerentes de $su(2)$, da seguinte forma:

$$\hat{\rho}_{tr} = d \sum_{i=1}^{Y(N,j)} \frac{|j, z\rangle_i \langle j, z|_i}{\langle j, z|j, z\rangle_i}, \quad (4.16)$$

onde d é uma constante a ser determinada pela condição de normalização e o índice i rotula os diferentes multipletos degenerados associados a um mesmo j . $Y(N, j)$ é dado por 4.15 e é a multiplicidade da degenerescência do multipletos j , no modelo com N partículas. Do apêndice D temos que:

$$F \leq Tr(\hat{\rho}\hat{H}) + \beta^{-1}Tr(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}). \quad (4.17)$$

Calcularemos a constante d . Pela normalização do operador densidade, temos:

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}_{tr}) &= d \sum_{i=1}^{Y(N,j)} \frac{Tr(|j, z\rangle_i \langle j, z|_i)}{\langle j, z|j, z\rangle_i} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sabemos que $Tr\{|\phi\rangle\langle\psi|\} = \langle\psi|\phi\rangle$. Logo,

$$d \sum_{i=1}^{Y(N,j)} 1 = dY(N, j) = 1 \quad (4.19)$$

e

$$d = Y^{-1}(N, j). \quad (4.20)$$

Para uso logo adiante, calcularemos o seguinte:

$$Tr(\hat{\rho}_{tr}^2) = Tr\left(d \sum_{i=1}^{Y(N,j)} \frac{|j, z\rangle_i \langle j, z|_i}{\langle j, z|j, z\rangle_i} d \sum_{l=1}^{Y(N,j)} \frac{|j, z\rangle_l \langle j, z|_l}{\langle j, z|j, z\rangle_l}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= d^2 \sum_{i,l} Tr \left(\frac{|j, z\rangle_i \langle j, z|_i \langle j, z|_l \langle j, z|_l}{i \langle j, z|_i \langle j, z|_i i \langle j, z|_l \langle j, z|_l} \right) \\
 &= d^2 \sum_{i,l} Tr \left(\frac{i \langle j, z|_i \langle j, z|_i i \langle j, z|_l \langle j, z|_l}{i \langle j, z|_i \langle j, z|_i i \langle j, z|_l \langle j, z|_l} \right). \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

Como estados pertencentes a multipletos distintos são ortogonais, temos que

$$i \langle j, z|_i \langle j, z|_l = \delta_{i,l} i \langle j, z|_i \langle j, z|_i. \tag{4.22}$$

Assim, a expressão 4.21 fica:

$$\begin{aligned}
 Tr(\hat{\rho}_{tr}^2) &= d^2 \sum_{i=1}^{Y(N,j)} \frac{i \langle j, z|_i \langle j, z|_i}{i \langle j, z|_i \langle j, z|_i} \\
 &= d^2 Y(N, j) \\
 &= Y^{-1}(N, j).
 \end{aligned}$$

Sucessivamente, temos:

$$Tr(\hat{\rho}_{tr}^{m+1}) = Y^{-m}(N, j). \tag{4.23}$$

Consideremos uma expansão convergente para $\ln x$:

$$\ln x = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l. \tag{4.24}$$

Calcularemos o segundo termo do lado direito de 4.17:

$$\begin{aligned}
 Tr(\hat{\rho}_{tr} \ln \hat{\rho}_{tr}) &= Tr \left(\hat{\rho}_{tr} \sum_l c_l \hat{\rho}_{tr}^l \right) \\
 &= \sum_l c_l Tr(\hat{\rho}_{tr}^l).
 \end{aligned}$$

Usando 4.23, temos:

$$\begin{aligned}
 Tr(\hat{\rho}_{tr} \ln \hat{\rho}_{tr}) &= \sum_l c_l Y^{-l}(N, j) \\
 &= -\ln Y(N, j). \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Consideremos o primeiro termo do lado direito de 4.17:

$$\begin{aligned}
 Tr(\hat{\rho}_{tr} \hat{H}) &= d \sum_i Tr \left(\frac{|j, z\rangle_i \langle j, z|_i}{i \langle j, z|_i \langle j, z|_i} \right) \hat{H} \\
 &= d \sum_i \frac{i \langle j, z|_i \hat{H} |j, z\rangle_i}{i \langle j, z|_i \langle j, z|_i}
 \end{aligned}$$

Como os termos na somatória acima não dependem do rótulo i , temos que:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_{tr}\hat{H}) = \frac{\langle j, z | \hat{H} | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle}. \quad (4.26)$$

Logo, para um operador densidade da forma 4.16 temos que a desigualdade 4.17 assume a forma:

$$F \leq \frac{\langle j, z | \hat{H} | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} - \beta^{-1} \ln Y(N, j). \quad (4.27)$$

Assim, vemos que a energia livre, para uma dada temperatura, é uma função da variável complexa z e da variável j , que rotula os vários multipletos. O método variacional consistirá em variarmos os parâmetros j e z de forma a obtermos um mínimo da função F para cada temperatura. Lembrando que $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}$, temos então:

$$F \leq \min_{j, \theta, \phi} \left(\frac{\langle j, \theta, \phi | \hat{H} | j, \theta, \phi \rangle}{\langle j, \theta, \phi | j, \theta, \phi \rangle} - \beta^{-1} \ln Y(N, j) \right). \quad (4.28)$$

Da expressão para os estados coerentes (não normalizados) 3.92, temos que:

$$\langle j, z | j, z \rangle = \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} |z|^{2(j+m)} \quad (4.29)$$

$$= (1 + |z|^2)^{2j} \quad (4.29)$$

$$= \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)^{2j}$$

$$= \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (4.30)$$

O primeiro termo de 4.27 é escrito explicitamente como:

$$\frac{\langle j, z | \hat{H} | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} = \epsilon \frac{\langle j, z | J_z | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} + \frac{V}{2N} \left(\frac{\langle j, z | J_+^2 | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} + \frac{\langle j, z | J_-^2 | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} \right). \quad (4.31)$$

Trabalhando na realização de Bargmann para $su(2)$ podemos calcular o primeiro termo do lado direito dessa expressão. Antes calculamos:

$$\begin{aligned} \langle j, z | J_z | j, z \rangle &= (z\partial_z - j) \langle j, z | j, z \rangle \\ &= (z\partial_z - j)(1 + zz^*)^{2j} \\ &= 2jzz^*(1 + zz^*)^{2j-1} - j(1 + zz^*)^{2j}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle j, z | J_z | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} &= \frac{2jzz^*(1 + zz^*)^{2j-1} - j(1 + zz^*)^{2j}}{(1 + |z|^2)^{2j}} \\
 &= \frac{2j|z|^2}{1 + |z|^2} - j \\
 &= j \left(2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \\
 &= j \left(2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \\
 &= -j \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Calcularemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \langle j, z | J_-^2 | j, z \rangle &= \partial_z^2 (1 + zz^*)^{2j} \\
 &= 2j(2j-1) \frac{z^{*2}}{(1 + |z|^2)^2} (1 + |z|^2)^{2j}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

e o terceiro termo de 4.31 se torna:

$$\frac{\langle j, z | J_-^2 | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} = j \left(j - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta e^{i2\phi}, \tag{4.34}$$

onde usamos $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}$. Como $J_+ = J_-^\dagger$, a expressão 4.31 assume a forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle j, z | \hat{H} | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} &= -\epsilon j \cos \theta + \frac{V}{N} j \left(j - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{e^{-i2\phi} + e^{i2\phi}}{2} \right) \\
 &= -\epsilon j \cos \theta + \frac{V}{N} j \left(j - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta \cos(2\phi).
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Com esses resultados, a expressão para a energia livre se torna:

$$F \leq \min_{j, \theta, \phi} \left(-\epsilon j \cos \theta + \frac{V}{N} j \left(j - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta \cos(2\phi) - \beta^{-1} \ln Y(N, j) \right). \tag{4.36}$$

Minimizaremos primeiramente em relação aos parâmetros ϕ e θ . Isso equivale a minimizarmos a expressão 4.35, já que o último termo de 4.36 não depende dessas duas variáveis. Com relação à ϕ , a condição de mínimo é dada por:

$$V \cos(2\phi) = -|V|. \tag{4.37}$$

Isso nos leva às condições:

$$\phi = 0 \text{ ou } \pi \text{ se } V < 0, \quad (4.38)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \text{ se } V > 0. \quad (4.39)$$

Assim, resta-nos minimizar a seguinte função com respeito ao parâmetro θ :

$$f(\theta) = -\epsilon j \cos \theta - \frac{|V|}{N} j \left(j - \frac{1}{2} \right) \text{sen}^2 \theta. \quad (4.40)$$

Calculemos as derivadas primeira e segunda dessa função com respeito a θ :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \epsilon j \text{sen} \theta - \frac{|V|}{N} j \left(j - \frac{1}{2} \right) \text{sen} 2\theta, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \epsilon j \cos \theta - 2 \frac{|V|}{N} j \left(j - \frac{1}{2} \right) \cos 2\theta. \quad (4.42)$$

Observando a derivada primeira vemos que a função f possui um ponto crítico quando

$$\text{sen} \theta = 0, \quad (4.43)$$

o que implica que

$$\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi. \quad (4.44)$$

Substituindo $\theta = \pi$ na expressão da derivada segunda observamos que esse ponto corresponde sempre a um máximo relativo. Da mesma forma, o ponto $\theta = 0$ será um ponto de mínimo se a seguinte condição for satisfeita:

$$2 \frac{|V|}{N\epsilon} \left(j - \frac{1}{2} \right) < 1. \quad (4.45)$$

Também existem soluções de mínimo para $\text{sen} \theta \neq 0$. Dividindo a expressão 4.41 por $\text{sen} \theta$, obtemos:

$$\frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \epsilon j - 2 \frac{|V|}{N} j \left(j - \frac{1}{2} \right) \cos \theta. \quad (4.46)$$

Igualando a zero, obtemos a seguinte solução para o ponto crítico:

$$\cos \theta_m = \frac{\epsilon N}{2|V| \left(j - \frac{1}{2} \right)}. \quad (4.47)$$

Substituindo isso na expressão 4.42 da derivada segunda verificamos que esse ponto corresponde a um mínimo somente se a seguinte condição for satisfeita:

$$2 \frac{|V|}{N\epsilon} \left(j - \frac{1}{2} \right) > 1. \quad (4.48)$$

Temos então uma visão geral do comportamento da função $f(\theta)$. Um dado valor da quantidade $\frac{V}{\epsilon N}$ especifica um valor de j , que chamaremos de j_c , dado por:

$$j_c = \frac{\epsilon N}{2|V|} + \frac{1}{2}. \quad (4.49)$$

Para valores de j menores que j_c a função $f(\theta)$ terá um mínimo em $\theta = 0$, ao passo que, para $j > j_c$, o ponto de mínimo será dado pela expressão 4.47.

Substituindo os resultados acima em 4.35 temos o seguinte:

$$A_j \doteq \min_{\theta, \phi} \left(\frac{\langle j, z | \hat{H} | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} \right) = -\epsilon j, \quad (4.50)$$

se $j < j_c$, ou

$$A_j = \min_{\theta, \phi} \left(\frac{\langle j, z | \hat{H} | j, z \rangle}{\langle j, z | j, z \rangle} \right) = -\frac{j}{2} \left(\frac{N\epsilon^2}{2|V|(j - \frac{1}{2})} + 2\frac{|V|}{N} \left(j - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (4.51)$$

se $j > j_c$.

Tendo encontrado as soluções para o mínimo em θ e ϕ passaremos a procurar o mínimo para o parâmetro j . Observando a expressão 4.28, vemos que temos uma função linear na temperatura para cada j dentro dos parênteses:

$$F \leq \min_j (A_j + B_j T), \quad (4.52)$$

onde A_j é o coeficiente linear da reta, dado pelas expressões 4.50 e 4.51. B_j é o coeficiente angular, definido em 4.27 e dado por

$$B_j = -k_B \ln Y(N, j). \quad (4.53)$$

Assim, o conjunto de todos os possíveis valores para j define uma família de retas. Desenhando essas retas no gráfico $F(T)$ versus T temos que a energia livre $F(T)$ será caracterizada pela envoltória inferior definida por essa família de retas.

Analisaremos a forma dessa envoltória. A reta associada ao valor máximo de j ($j_{\text{máx}} = \frac{N}{2}$) é horizontal (porque $Y(N, \frac{N}{2}) = 1$, o que implica que $B_{\frac{N}{2}} = 0$) e cruza o eixo das ordenadas no ponto $A_{\frac{N}{2}}$. À medida que j decresce a partir desse valor máximo, o coeficiente linear A_j cresce (tornando-se menos negativo), ao passo que

o coeficiente angular B_j decresce (tornando-se mais negativo), conforme vemos nos gráficos abaixo. O coeficiente angular não é monotonicamente decrescente. O ponto de mínimo dessa curva é calculado mais adiante.

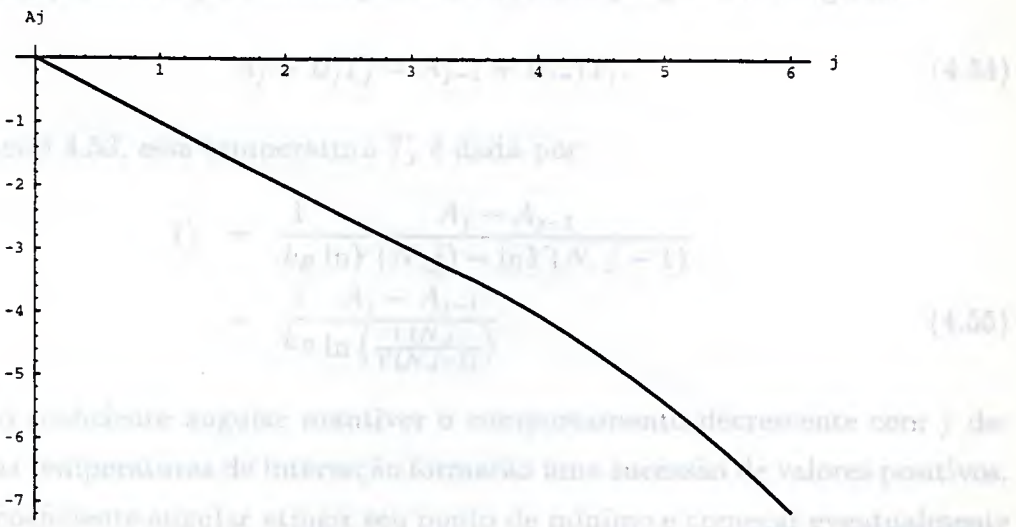


Fig. 1. Gráfico $A_j \times j$. $N = 12, V = 2, \epsilon = 1$.

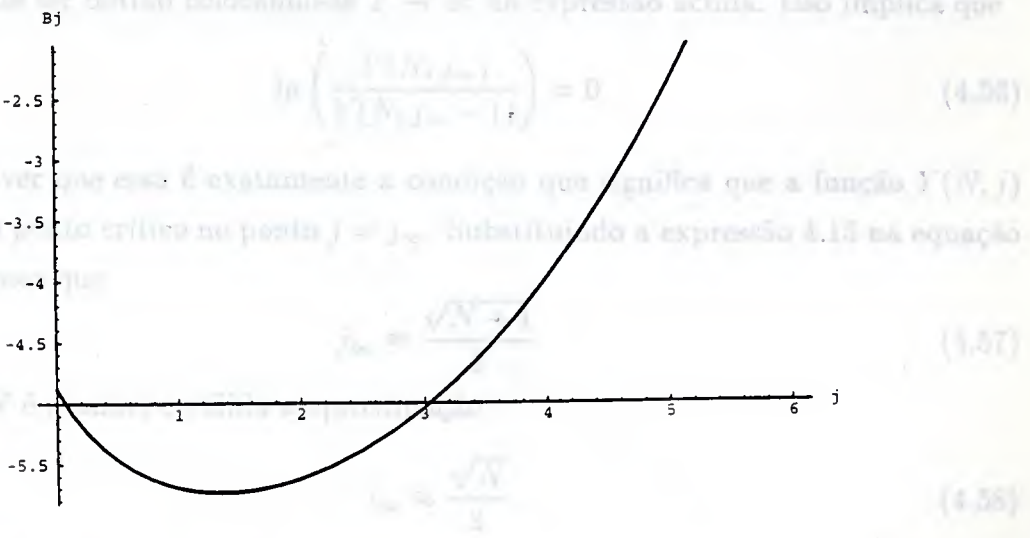


Fig. 2. Gráfico $B_j \times j$. $N = 12, V = 2, \epsilon = 1$.

As retas associadas a $j = \frac{N}{2}$ e $j = \frac{N}{2} - 1$ interceptam-se. Da mesma forma, a reta associada a $j = \frac{N}{2} - 1$ intercepta a reta $j = \frac{N}{2} - 2$ e assim por diante. A cada uma dessas intersecções existe uma temperatura associada. A condição que nos permite calcular a temperatura T_j de intersecção entre as retas j e $j - 1$ é a seguinte:

$$A_j + B_j T_j = A_{j-1} + B_{j-1} T_j. \quad (4.54)$$

Assim, usando 4.53, essa temperatura T_j é dada por:

$$\begin{aligned} T_j &= \frac{1}{k_B} \frac{A_j - A_{j-1}}{\ln Y(N, j) - \ln Y(N, j-1)} \\ &= \frac{1}{k_B} \frac{A_j - A_{j-1}}{\ln \left(\frac{Y(N, j)}{Y(N, j-1)} \right)}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Enquanto o coeficiente angular mantiver o comportamento decrescente com j decrescente, as temperaturas de intersecção formarão uma sucessão de valores positivos. Quando o coeficiente angular atingir seu ponto de mínimo e começar eventualmente a crescer, não haverá mais intersecções associadas a temperaturas positivas. O menor valor de j (que simbolizaremos por j_∞) para o qual há a última intersecção em $T > 0$ pode ser obtido colocando-se $T \rightarrow \infty$ na expressão acima. Isso implica que

$$\ln \left(\frac{Y(N, j_\infty)}{Y(N, j_\infty - 1)} \right) = 0. \quad (4.56)$$

Podemos ver que essa é exatamente a condição que significa que a função $Y(N, j)$ possui um ponto crítico no ponto $j = j_\infty$. Substituindo a expressão 4.15 na equação acima, temos que

$$j_\infty \approx \frac{\sqrt{N+1}}{2}. \quad (4.57)$$

Quando N é grande, é válida a aproximação

$$j_\infty \approx \frac{\sqrt{N}}{2}. \quad (4.58)$$

O valor de $j_{m\acute{a}x}$ será o valor inteiro (ou semi-inteiro) imediatamente superior aos valores calculados acima. Assim, quando a temperatura é suficientemente grande o sistema se “estabiliza” em $j \approx \frac{\sqrt{N}}{2}$. Denotaremos esse valor de j por $j_{m\acute{i}n}$. Nos gráficos da página seguinte desenhamos a família de retas para $N = 12$, $\epsilon = 1$ e

$V = 2$. Representamos em separado o gráfico variacional da energia livre em função da temperatura.

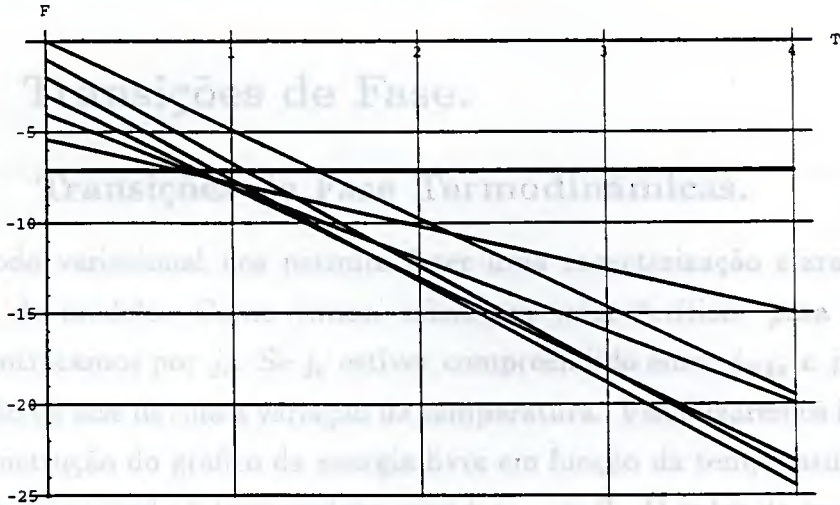


Fig. 3. A família de retas associadas aos valores de $j = 0$ a $j = 6$.

$$N = 12, V = 2, \epsilon = 1.$$

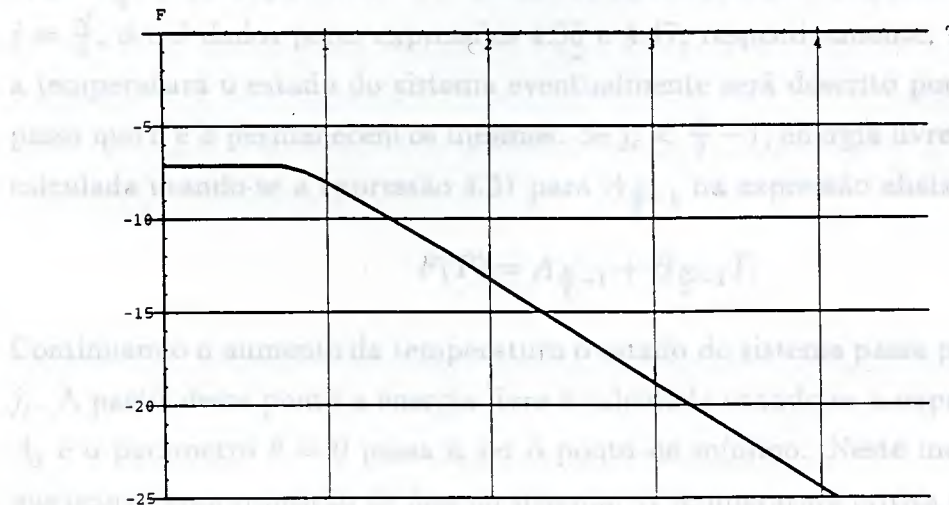


Fig. 4. Fronteira inferior do gráfico da Fig. 3. Essa fronteira representa a energia livre variacional em função da temperatura.

$$F_j = A_{j-1} + jg_{j-1}T \quad (4.51)$$

Observamos que o gráfico da energia livre variacional é linear por partes. A cada um dos segmentos de reta que o formam está associado um valor de j , que caracteriza a reta à qual pertencem o segmento.

4.3 Transições de Fase.

4.3.1 Transições de Fase Termodinâmicas.

O método variacional nos permite fazer uma caracterização clara das transições de fase do modelo. Como vimos, existe um valor "crítico" para o parâmetro j , que identificamos por j_c . Se j_c estiver compreendido entre $j_{máx}$ e $j_{mín}$ haverá uma transição de fase devida à variação da temperatura. Visualizaremos isso como segue. Pela construção do gráfico da energia livre em função da temperatura, vemos que o valor de j associado à temperatura zero é $j_{máx} = \frac{N}{2}$. O valor da energia livre nessa temperatura é dado por:

$$F(T = 0) = A_{\frac{N}{2}}, \quad (4.59)$$

onde $A_{\frac{N}{2}}$ é dado por 4.51. O estado do sistema nessa temperatura é dado por $j = \frac{N}{2}$, ϕ e θ dados pelas expressões 4.38 e 4.47, respectivamente. Aumentando-se a temperatura o estado do sistema eventualmente será descrito por $j = \frac{N}{2} - 1$, ao passo que θ e ϕ permanecem os mesmos. Se $j_c < \frac{N}{2} - 1$, energia livre continua sendo calculada usando-se a expressão 4.51 para $A_{\frac{N}{2}-1}$ na expressão abaixo:

$$F(T) = A_{\frac{N}{2}-1} + B_{\frac{N}{2}-1}T. \quad (4.60)$$

Continuando o aumento da temperatura o estado do sistema passa pelo valor crítico j_c . A partir desse ponto a energia livre é calculada usando-se a expressão 4.50 para A_j e o parâmetro $\theta = 0$ passa a ser o ponto de mínimo. Neste momento dizemos que ocorre uma transição de fase no sistema. A temperatura crítica associada a essa transição é calculada pela expressão 4.55 e usando 4.50 para A_{j_c} , visto que 4.50 e 4.51 fornecem o mesmo valor quando $j = j_c$:

$$T_c = \frac{1}{k_B} \frac{A_{j_c} - A_{j_c-1}}{\ln \left(\frac{Y(N, j_c)}{Y(N, j_c-1)} \right)} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \epsilon(j_c - (j_c - 1))}{k_B \ln \left(\frac{2j_c + 1}{2j_c - 1} \frac{\frac{N}{2} - j_c + 1}{\frac{N}{2} + j_c + 1} \right)} \\
&= \frac{\epsilon}{k_B \ln \left(\frac{2j_c - 1}{2j_c + 1} \frac{\frac{N}{2} + j_c + 1}{\frac{N}{2} - j_c + 1} \right)} \quad (4.62)
\end{aligned}$$

Em resumo, a transição de fase devido ao aumento da temperatura ocorre quando os estados caracterizados por $\theta = \theta_m$ perdem sua estabilidade (deixam de ser um ponto de mínimo para a energia livre). Isso ocorre quando j assume o valor crítico j_c . O efeito da temperatura sobre o sistema é promover a variação de j . Assim, a temperatura na qual j assume o valor crítico é identificada como a temperatura de transição de fase. Chamaremos essa transição de *Transição de Fase Termodinâmica*, para diferenciar da transição que estudaremos a seguir, que não é governada pela temperatura.

4.3.2 Transições de Fase no Estado Fundamental.

Por Transições de Fase no Estado Fundamental entenderemos aquelas que ocorrem a temperatura zero e governadas pela variação dos parâmetros do sistema. No nosso modelo, consideraremos a variação no parâmetro de interação V . Chamaremos de Energia do Estado Fundamental a energia expressa em 4.59. Já vimos anteriormente que o sistema se apresenta em um estado caracterizado por $j = j_{\text{máx}} = \frac{N}{2}$. A quantidade j_c é calculada por 4.49:

$$j_c = \frac{N\epsilon}{2|V|} + \frac{1}{2}. \quad (4.63)$$

Usando as expressões 4.50 e 4.51, podemos escrever essa energia como:

$$E_f = -\epsilon j_{\text{máx}} = -\frac{\epsilon N}{2}, \quad (4.64)$$

se $\frac{N}{2} < j_c$, ou

$$E_f = -\frac{N}{4} \left(\frac{|V|}{N}(N-1) + \frac{N\epsilon^2}{|V|(N-1)} \right), \quad (4.65)$$

se $\frac{N}{2} > j_c$.

Como vemos da expressão para j_c , este decresce à medida que o parâmetro $|V|$ cresce. Supomos que inicialmente j_c seja maior que $\frac{N}{2}$. A energia do estado fundamental será dada por 4.64 e o estado fundamental é caracterizado por $\theta = 0$. Aumentando-se $|V|$ o valor de j_c eventualmente se torna igual a $\frac{N}{2}$. Continuando a aumentar o valor do parâmetro teremos que $\frac{N}{2} > j_c$. A energia do estado fundamental será dada pela expressão 4.65 e o estado $\theta = 0$ não corresponde mais ao estado fundamental. Dizemos então que houve uma transição de fase quando o parâmetro $|V|$ assumiu o valor que fez com que $j_c = \frac{N}{2}$. Podemos calcular esse valor crítico do parâmetro de interação usando a equação de definição de j_c :

$$|V|_c = \frac{N\epsilon}{N-1}. \quad (4.66)$$

Definindo a seguinte quantidade:

$$\chi = \frac{|V|(N-1)}{N\epsilon}, \quad (4.67)$$

temos que a transição de fase pode ser caracterizada pelo valor crítico desse novo parâmetro:

$$\chi_c = \frac{|V|_c(N-1)}{N\epsilon} = 1, \quad (4.68)$$

como é comumente formulado esse problema.

4.4 O Modelo LMG q-Deformado.

O modelo LMG, estudado nas seções anteriores, é construído a partir dos operadores de criação e destruição de férmions. Tais operadores são combinados através de produtos bilineares e estes são identificados com os geradores de uma álgebra $su(2)$ em cada “célula” p (como vimos na seção 1.5, tal realização contém apenas as representações $j = 0$ e $j = \frac{1}{2}$ de $su(2)$). O Hamiltoniano (sem considerar a interação) em cada célula é definido em termos desses geradores e é dado por:

$$\begin{aligned} H_0(s_2^p) &\doteq \epsilon s_2^p \\ &= \frac{\epsilon}{2}(N_1^p - N_{-1}^p) \\ &= \frac{\epsilon}{2}(h_1^p - h_{-1}^p), \end{aligned} \quad (4.69)$$

onde $h_\sigma^p = \frac{1}{2}[a_\sigma^{p+}, a_\sigma^p]$. O Hamiltoniano total (sem interação) é uma combinação (uma soma simples sobre todas as células p) dos Hamiltonianos dados pela expressão anterior:

$$H_0 = \sum_{p=1}^N H_0(s_z^p). \quad (4.70)$$

O termo de interação é dado por

$$H_{int} = \frac{V}{2N} (J_+^2 + J_-^2), \quad (4.71)$$

onde os operadores J_+ e J_- são combinações (novamente somas simples sobre p) dos operadores s_+^p e s_-^p , respectivamente. Na linguagem do capítulo 2, dizemos que as combinações acima (as somas simples em p) definem um homomorfismo da álgebra $su(2)$ na álgebra $su(2) \otimes su(2) \otimes su(2) \otimes \dots \otimes su(2)$, onde temos N fatores nesse produto. Assim, esse produto também é uma álgebra $su(2)$. Em resumo, podemos dizer que a construção do Hamiltoniano do modelo LMG pode ser descrita pelos seguintes passos:

i) Construção de Schwinger da álgebra $su(2)$, em cada célula p , por meio dos operadores de criação e destruição fermiônicos. Os geradores dessa álgebra são denotados por s_z^p , s_-^p e s_+^p .

ii) Definição do Hamiltoniano em cada célula p em termos do operador s_z^p , que mede a diferença entre o número de férmions nos dois níveis de energia. Esse Hamiltoniano é simbolizado por $H_0(s_z^p)$.

iii) Definição de um homomorfismo entre a álgebra $su(2)$ definida em cada célula e a álgebra produto considerada acima. Os geradores da álgebra produto são indicados por J_z , J_+ e J_- .

iv) Construção do Hamiltoniano total do modelo, da seguinte forma:

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (4.72)$$

onde H_0 é obtido a partir de $H_0(s_z^p)$ pela substituição do gerador s_z^p pelo seu correspondente homomórfico J_z . O termo de interação H_{int} é definido em 4.71, onde os operadores J_+ e J_- são os análogos homomórficos de s_+ e s_- .

Seguindo os passos descritos acima apresentaremos a seguir uma versão q-deformada do modelo de LMG, introduzida por Avancini *et al.* [46]. Como vimos

no capítulo 2, o Hamiltoniano livre resultante da combinação de osciladores q-deformados independentes exibiu uma espécie de interação entre os níveis, deformando o espectro do Hamiltoniano sem interação. Em analogia com esse problema, os autores acima construíram uma versão q-deformada do modelo LMG, o qual exibe a mesma espécie de deformação no espectro do Hamiltoniano sem interação.

As diferenças entre o modelo usual e o modelo deformado são listadas abaixo:

a) Os operadores de criação e destruição fermiônicos são substituídos por seus análogos q-deformados. Assim, os antigos geradores de $su(2)$ em cada célula p serão substituídos pelos geradores de $su_q(2)$.

b) O Hamiltoniano livre em cada célula p é *definido* da seguinte forma (em analogia com a combinação de dois osciladores fermiônicos livres idênticos):

$$H(s_{qz}^p) \doteq \frac{\epsilon \sinh(\gamma 2s_{qz}^p)}{2 \, 2\sinh(\frac{\gamma}{2})} \quad (4.73)$$

$$= \frac{\epsilon}{2 \left[\frac{1}{2}\right]_q} \left[2 s_{qz}^p\right]_q$$

$$= \epsilon_q \frac{\left[2 s_{qz}^p\right]_q}{2}, \quad (4.74)$$

onde definimos

$$\epsilon_q \doteq \frac{\epsilon}{2 \left[\frac{1}{2}\right]_q}. \quad (4.75)$$

É importante notarmos que não poderíamos ter usado os resultados do capítulo 2 para combinarmos os Hamiltonianos dos dois osciladores fermiônicos na célula p , pois esses osciladores não são idênticos no que diz respeito às energias associadas aos seus *quanta*. Assim, a justificativa para se definir o Hamiltoniano em 4.73 reside na deformação do espectro do Hamiltoniano livre, que se deseja que tenha a mesma forma que no caso dos osciladores idênticos livres.

c) As regras de combinações dos operadores de $su_q(2)$, definidos em cada célula p , são os mapeamentos homomórficos de $su_q(2)$, descritos no capítulo 2 e dados por:

$$\Delta(s_{qz}^p) = \sum_{p=1}^N s_{qz}^p \doteq J_{qz}, \quad (4.76)$$

$$\Delta(s_{q\pm}^p) = \sum_{p=1}^N q^{-A\langle p \rangle} s_{q\pm}^p q^{A\langle p \rangle} \doteq J_{q\pm}, \quad (4.77)$$

onde definimos:

$$A_{<}(p) = \sum_{p'=1}^p s_{qz}^{p'}, \quad (4.78)$$

$$A_{>}(p) = \sum_{p'=p+1}^p s_{qz}^{p'}. \quad (4.79)$$

Nas expressões acima as somatórias devem ser entendidas como somatórias de produtos no mesmo sentido que as descritas no capítulo 2. Escrevemos como somatórias de termos simples apenas por economia de notação.

O Hamiltoniano total livre H_0 é dado então por:

$$\begin{aligned} H_0 &= H_0(\Delta(s_{qz}^p)) \\ &= H_0(J_{qz}) \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$= \frac{\epsilon \sinh(\gamma 2J_{qz})}{4 \sinh(\frac{\gamma}{2})} \quad (4.81)$$

$$= \epsilon_q \frac{[2J_{qz}]_q}{2} \quad (4.82)$$

O Hamiltoniano de interação, análogo ao da expressão 4.71, é definido como:

$$H_{int} = \frac{V}{2[N]_q} (J_{q+}^2 + J_{q-}^2), \quad (4.83)$$

com J_{q+} e J_{q-} dados pelas expressões 4.77. Assim, o Hamiltoniano total do modelo é dado pela expressão 4.72:

$$H = \frac{1}{4} \frac{\sinh(\gamma 2J_{qz})}{2\sinh(\frac{\gamma}{2})} + \frac{V}{2[N]_q} (J_{q+}^2 + J_{q-}^2). \quad (4.84)$$

Temos então um Hamiltoniano descrito em termos de operadores da álgebra $su_q(2)$. Nas próximas seções usaremos o método variacional para calcularmos a energia livre e estudarmos as transições de fase desse modelo, o qual chamaremos abreviadamente de q-LMG.

Em comum com o modelo usual, esse modelo possui o mesmo número de estados, pois a deformação não altera em nada a contagem e a caracterização destes. Assim, a matriz do Hamiltoniano será diagonal em blocos, cada bloco estando associado a um valor de j . O rótulo j pode assumir os valores dentro do intervalo que vai de 0 (ou $\frac{1}{2}$) até $\frac{N}{2}$. A multiplicidade $Y(N, j)$ de cada bloco j é dada pela mesma expressão 4.15 do caso não deformado.

4.5 A Energia Livre Variacional do Modelo q-LMG.

Usaremos como estados de teste os estados q-coerentes associados à álgebra $su_q(2)$.

Assim, temos:

$$\hat{\rho}_{tr} = d \sum_{i=1}^{Y(N,j)} \frac{|j, z\rangle_{qi} \langle j, z|}{iq \langle j, z | j, z \rangle_{qi}} \quad (4.85)$$

e

$$F \leq Tr(\hat{\rho}_{tr} \hat{H}) + \beta^{-1} Tr(\hat{\rho}_{tr} \ln \hat{\rho}_{tr}). \quad (4.86)$$

Procedendo exatamente da mesma maneira como no caso não deformado obtemos a seguinte expressão:

$$F \leq \min_{j, \theta, \phi} \left(\frac{{}_q \langle j, \theta, \phi | \hat{H} | j, \theta, \phi \rangle_q}{{}_q \langle j, \theta, \phi | j, \theta, \phi \rangle_q} - \beta^{-1} \ln Y(N, j) \right). \quad (4.87)$$

Até agora não temos nenhuma diferença *formal* em relação ao modelo LMG. A diferença fundamental entre os dois modelos está no cálculo do primeiro termo entre chaves na expressão acima. Substituindo a expressão do Hamiltoniano q-LMG, esse termo é escrito explicitamente como:

$$\frac{{}_q \langle j, \theta, \phi | \hat{H} | j, \theta, \phi \rangle_q}{{}_q \langle j, \theta, \phi | j, \theta, \phi \rangle_q} = \frac{\epsilon}{4 \sinh\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{{}_q \langle z | \sinh(\gamma 2 J_{qz}) | z \rangle_q}{{}_q \langle z | z \rangle_q} + \frac{V}{2[N]_q} \frac{{}_q \langle z | J_{q+}^2 + J_{q-}^2 | z \rangle_q}{{}_q \langle z | z \rangle_q}. \quad (4.88)$$

Calculamos a seguinte expressão:

$${}_q \langle z | \sinh(\gamma 2 J_{qz}) | z \rangle_q = \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q |z|^{2(j+m)} \sinh(\gamma 2m). \quad (4.89)$$

Escrevendo $\sinh(\gamma 2m)$ da forma

$$\sinh(\gamma 2m) = \frac{q^{-2j} q^{2(j+m)} - q^{2j} q^{-2(j+m)}}{2} \quad (4.90)$$

e substituindo em 4.89, temos:

$$\begin{aligned} {}_q \langle z | \sinh(\gamma 2 J_{qz}) | z \rangle_q &= \frac{q^{-2j}}{2} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q (q|z|)^{2(j+m)} + \\ &- \frac{q^{2j}}{2} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q (q^{-1}|z|)^{2(j+m)}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Lembrando que

$$\sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}_q x^{j+m} = \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} x), \quad (4.92)$$

escrevemos 4.91 como:

$$\begin{aligned} {}_q\langle z | \sinh(\gamma 2J_{qz}) | z \rangle_q &= \frac{q^{-2j}}{2} \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} q^2 |z|^2) + \\ &\quad - \frac{q^{2j}}{2} \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} q^{-2} |z|^2) \\ &= \frac{q^{-2j}}{2} \prod_{k'=0}^{2j} (1 + q^{2k'-2j+1} |z|^2) + \\ &\quad - \frac{q^{2j}}{2} \prod_{k'=-1}^{2j-2} (1 + q^{2k'-2j+1} |z|^2). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Dividindo essa expressão por ${}_q\langle z | z \rangle_q = \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} |z|^2)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{{}_q\langle z | \sinh(\gamma 2J_{qz}) | z \rangle_q}{{}_q\langle z | z \rangle_q} &= \frac{1}{2} \left(q^{-2j} \frac{1 + q^{2j+1} |z|^2}{1 + q^{-2j+1} |z|^2} - q^{2j} \frac{1 + q^{-2j-1} |z|^2}{1 + q^{2j-1} |z|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{q^{-2j} - q^{2j} + (q^{2j} - q^{-2j}) |z|^4}{1 + |z|^4 (q^{2j-1} + q^{-2j+1}) |z|^2} \right) \\ &= \sinh \gamma [2j]_q \left(\frac{|z|^4 - 1}{1 + |z|^4 + 2 \frac{q^{2j-1} + q^{-2j+1}}{2} |z|^2} \right) \\ &= \sinh \gamma [2j]_q \left(\frac{|z|^4 - 1}{1 + |z|^4 + 2 \cosh \gamma (2j - 1) |z|^2} \right). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Usando $\cosh \gamma (2j - 1) = 1 + 2 \sinh^2 \gamma (j - \frac{1}{2})$ e $|z| = \tan \frac{\theta}{2}$, a expressão anterior se torna:

$$\begin{aligned} \frac{{}_q\langle z | \sinh(\gamma 2J_{qz}) | z \rangle_q}{{}_q\langle z | z \rangle_q} &= \sinh \gamma [2j]_q \left(\frac{-\cos \theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2} + \cos^4 \frac{\theta}{2} + \frac{\sinh^2 \theta}{2} (1 + \sinh^2 \gamma (j - \frac{1}{2}))} \right) \\ &= \sinh \gamma [2j]_q \left(\frac{-\cos \theta}{1 + \sinh^2 \gamma (j - \frac{1}{2}) \sinh^2 \theta} \right). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Dividindo esse resultado por $4 \sinh \frac{\gamma}{2}$, o primeiro termo do lado direito de 4.88 torna-se:

$$\frac{\epsilon}{4 \sinh \left(\frac{\gamma}{2} \right)} \frac{{}_q\langle z | \sinh(\gamma 2J_{qz}) | z \rangle_q}{{}_q\langle z | z \rangle_q} = -\epsilon_q \frac{[2j]_q}{2} \frac{\cos \theta}{D(\gamma, \theta, j)}, \quad (4.95)$$

onde definimos

$$D(\gamma, \theta, j) = 1 + \sinh^2 \gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \text{sen}^2 \theta. \quad (4.96)$$

Usaremos a realização de Bargmann para calcular o valor esperado abaixo:

$${}_q \langle z | J_q^2 | z \rangle_q = (D_z^q)^2 {}_q \langle z | z \rangle_q \quad (4.97)$$

$$= D_z^q \left(D_z^q \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z z^*) \right). \quad (4.98)$$

Calcularemos o termo entre parênteses nessa expressão:

$$\begin{aligned} D_z^q \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z z^*) &= \frac{1}{z(q - q^{-1})} \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2(k+1)-2j} z z^*) + \\ &- \frac{1}{z(q - q^{-1})} \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j} z z^*) \\ &= \frac{1}{z(q - q^{-1})} \prod_{k=1}^{2j} (1 + q^{2k-2j} z z^*) + \\ &- \frac{1}{z(q - q^{-1})} \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j} z z^*) \\ &= \frac{1}{z(q - q^{-1})} \prod_{k=1}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j} z z^*) (q^{2j} - q^{-2j}) |z|^2 \\ &= z^* [2j]_q \prod_{k=1}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j} z z^*). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Dessa expressão, podemos escrever o resultado geral:

$$D_z^q \prod_{k=0}^{m-1} (1 + q^{2k-m+1} z z^*) = z^* [m]_q \prod_{k=0}^{(m-1)-1} (1 + q^{2k-(m-1)+1} z z^*). \quad (4.99)$$

Usando esse resultado em 4.98, vem:

$$\begin{aligned} D_z^q \left(D_z^q \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z z^*) \right) &= z^{*2} [2j]_q [2j - 1]_q \prod_{k=0}^{(2j-2)-1} (1 + q^{2k-(2j-2)+1} z z^*) \\ &= z z^* [2j]_q [2j - 1]_q \prod_{k'=1}^{2j-2} (1 + q^{2k'-2j+1} z z^*) \quad (4.100) \end{aligned}$$

Dividindo essa expressão por ${}_q \langle z | z \rangle_q = \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z z^*)$, temos:

$$\frac{{}_q \langle z | J_q^2 | z \rangle_q}{{}_q \langle z | z \rangle_q} = z^{*2} [2j]_q [2j - 1]_q \frac{\prod_{k=1}^{2j-2} (1 + q^{2k-2j+1} z z^*)}{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z z^*)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z^{*2}[2j]_q[2j-1]_q}{(1+q^{-2j+1}|z|^2)(1+q^{2j-1}|z|^2)} \\
 &= \frac{z^{*2}[2j]_q[2j-1]_q}{1+|z|^4+(q^{2j-1}+q^{-2j+1})|z|^2}.
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Sabendo que $J_{q+} = J_{q-}^\dagger$, podemos calcular o seguinte fator do segundo termo do lado direito de 4.88:

$$\begin{aligned}
 \frac{{}_q\langle z|J_+^2 + J_-^2|z\rangle_q}{{}_q\langle z|z\rangle_q} &= (z^2 + z^{*2}) \frac{[2j]_q[2j-1]_q}{1+|z|^4+2\left(1+2\sinh^2\left(\gamma\left(j-\frac{1}{2}\right)\right)\right)|z|^2} \\
 &= \frac{[2j]_q[2j-1]_q \sin^2\theta \cos 2\phi}{2D(\gamma, \theta, j)}.
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

Finalmente, de 4.95 e 4.102, podemos escrever 4.88 como:

$$\frac{{}_q\langle j, \theta, \phi | \hat{H} | j, \theta, \phi \rangle_q}{{}_q\langle j, \theta, \phi | j, \theta, \phi \rangle_q} = \epsilon_q \frac{[2j]_q}{2} \left(\frac{-\cos\theta}{D(\gamma, \theta, j)} + \frac{\chi^q(j)}{2} \frac{\sin^2\theta \cos 2\phi}{D(\gamma, \theta, j)} \right) \tag{4.103}$$

$$\doteq \epsilon_q E_q(j, \theta, \phi), \tag{4.104}$$

onde definimos

$$\chi^q(j) \doteq \frac{|V|}{\epsilon_q [N]_q} [2j-1]_q \tag{4.105}$$

$$= \frac{|V| \sinh(\gamma(2j-1))}{\epsilon \sinh(\gamma N) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{4.106}$$

Definindo a função $G(\gamma)$,

$$G(\gamma) \doteq \frac{\epsilon \sinh(\gamma N) \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{|V|}, \tag{4.107}$$

podemos escrever

$$\chi^q(j) = \frac{\sinh(\gamma(2j-1))}{G(\gamma)}. \tag{4.108}$$

De 4.104, escrevemos a expressão 4.87 da seguinte forma:

$$F \leq \min_{j, \theta, \phi} \left(\epsilon_q E_q(j, \theta, \phi) - \beta^{-1} \ln Y(N, j) \right). \tag{4.109}$$

De acordo com o procedimento do caso não deformado, minimizaremos a função $E_q(j, \theta, \phi)$ com respeito aos parâmetros θ e ϕ (o segundo termo entre parênteses não

depende desses parâmetros). Como a dependência em ϕ é exatamente a mesma do caso não deformado temos as mesmas soluções 4.38 para esse parâmetro:

$$V \cos(2\phi) = -|V| \quad (4.110)$$

e

$$\phi = 0 \text{ ou } \pi \text{ se } V < 0, \quad (4.111)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \text{ se } V > 0. \quad (4.112)$$

Logo, resta-nos minimizar a seguinte função com respeito a θ :

$$f(\theta) = \frac{-\cos \theta}{D(\gamma, \theta, j)} - \frac{\chi^q(j)}{2} \frac{\text{sen}^2 \theta}{D(\gamma, \theta, j)}. \quad (4.113)$$

As derivadas primeira e segunda dessa função são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\text{sen} \theta}{D^2(j, \theta, \gamma)} (S \cos^2 \theta - \chi^q(j) \cos \theta + S + 1) \quad (4.114)$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\text{sen}^2 \theta}{D^2(\theta, j, \gamma)} (-2S \cos \theta + \chi^q(j)) + \quad (4.115)$$

$$+ \cos \theta (S \cos^2 \theta - \chi^q(j) \cos \theta + S + 1) \left(\frac{D(\gamma, \theta, j) - 4S \text{sen}^2 \theta}{D^3(\theta, j, \gamma)} \right), \quad (4.116)$$

onde definimos

$$S \doteq \sinh^2 \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (4.117)$$

Analisando a derivada primeira vemos que temos pontos críticos em:

$$\text{sen} \theta = 0 \quad (4.118)$$

e

$$S \cos^2 \theta - \chi^q(j) \cos \theta + S + 1 = 0. \quad (4.119)$$

A primeira dessas condições fornece as soluções $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Substituindo $\theta = \pi$ na derivada segunda concluimos que essa solução corresponde sempre a um ponto de máximo relativo. A solução $\theta = 0$ corresponderá a um ponto de mínimo sempre que a seguinte condição for satisfeita:

$$2S - \chi^q(j) + 1 > 0; \quad (4.120)$$

caso contrário, será um ponto de máximo.

A equação 4.119 possui as seguintes soluções:

$$\cos \theta = \frac{\chi^q(j)}{2S} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4S(S+1)}{\chi^q(j)^2}} \right). \quad (4.121)$$

Essas soluções podem ser reescritas como:

$$\cos \theta = \frac{\coth \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right)}{G(\gamma)} \left(1 \pm \sqrt{1 - G^2(\gamma)} \right). \quad (4.122)$$

Como veremos a seguir, a solução com o sinal positivo nos leva a inconsistências devido à faixa de variação da função $\cos \theta$. Para que as soluções da expressão acima sejam viáveis, devem ser consistentes com as seguintes condições:

$$G(\gamma) \leq 1, \quad (4.123)$$

$$0 \leq |\cos \theta| \leq 1. \quad (4.124)$$

Substituindo $G(\gamma)$ pela sua definição 4.107, a condição 4.123 nos leva a um limite superior para o parâmetro de deformação γ , expresso pela seguinte desigualdade:

$$\epsilon \sinh(\gamma N) \cosh \left(\frac{\gamma}{2} \right) - |V| \leq 0. \quad (4.125)$$

Assim, para cada conjunto de valores N , $|V|$ e ϵ , teremos definido $\gamma_{máx}$, que é o máximo valor que γ pode assumir de forma que a solução 4.122 seja possível. Essa é uma condição necessária, mas não suficiente para a existência dessa solução. A figura na página seguinte mostra o gráfico de $\epsilon \sinh(\gamma N) \cosh \left(\frac{\gamma}{2} \right) - |V|$ em função de γ , para $N = 12$, $V = 2$ e $\epsilon = 1$. O valor de $\gamma_{máx}$ é dado pelo cruzamento daquela curva com o eixo das abscissas.

Passemos à condição 4.124. De 4.122 vemos que $\cos \theta$ dado por essa expressão é uma quantidade positiva. Logo, podemos escrever 4.124 como:

$$\cos \theta \leq 1, \quad (4.126)$$

o que nos leva à seguinte desigualdade:

$$\coth \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) \leq \frac{G(\gamma)}{1 \pm \sqrt{1 - G^2(\gamma)}}. \quad (4.127)$$

Para argumentos positivos a função cotangente hiperbólica deve ser sempre maior que a unidade. Logo, devemos ter:

$$\frac{G(\gamma)}{1 \pm \sqrt{1 - G^2(\gamma)}} > 1, \tag{4.128}$$

o que resulta em

$$G(\gamma) - 1 > \pm \sqrt{1 - G^2(\gamma)}. \tag{4.129}$$

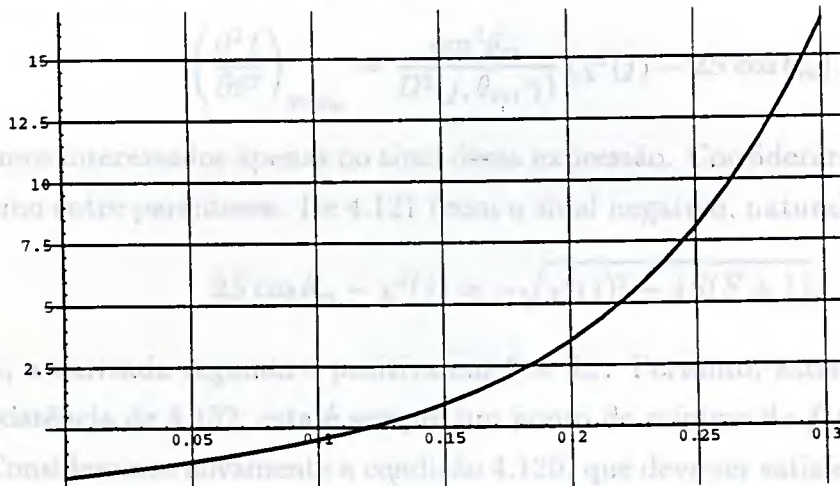


Fig. 5. Gráfico da função $\epsilon \sinh(\gamma N) \cosh(\frac{\gamma}{2}) - |V|$.

O cruzamento com o eixo das abscissas fornece $\gamma_{m\acute{a}x}$.

$$N = 12, V = 2, \epsilon = 1.$$

Claramente o sinal positivo na desigualdade 4.129 nos leva a inconsistências, ao passo que o sinal negativo satisfaz trivialmente a expressão acima, pois essa se transforma na desigualdade triangular. Dessa forma, isolando j na expressão 4.127, temos:

$$j > \frac{1}{2} + \gamma^{-1} \operatorname{arccoth} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - G^2(\gamma)}}{G(\gamma)} \right) \tag{4.130}$$

$$\doteq j_c^q. \tag{4.131}$$

Veremos mais adiante que a quantidade j_c^q definida acima é a mesma que vai caracterizar as transições de fase nesse modelo. Em resumo, as condições $\gamma < \gamma_{máx}$ e $j > j_c^q$ formam um conjunto de condições necessárias e suficientes para que a solução abaixo exista:

$$\cos \theta_m = \frac{\coth \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right)}{G(\gamma)} \left(1 - \sqrt{1 - G^2(\gamma)} \right). \quad (4.132)$$

Satisfeitas as condições acima, analisaremos em quais circunstâncias essa solução constitui-se em um ponto de mínimo da função $f(\theta)$. Substituindo a expressão anterior na derivada segunda 4.116, temos:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_m} = \frac{\text{sen}^2 \theta_m}{D^2(j, \theta_m, \gamma)} (\chi^q(j) - 2S \cos \theta_m). \quad (4.133)$$

Estamos interessados apenas no sinal dessa expressão. Consideraremos então apenas o termo entre parênteses. De 4.121 (com o sinal negativo, naturalmente) temos que

$$2S \cos \theta_m - \chi^q(j) = -\sqrt{\chi^q(j)^2 - 4S(S+1)}. \quad (4.134)$$

Logo, a derivada segunda é positiva em $\theta = \theta_m$. Portanto, satisfeitas as condições de existência de 4.132, esta é sempre um ponto de mínimo de $f(\theta)$.

Consideremos novamente a condição 4.120, que deve ser satisfeita para que $\theta = 0$ seja um ponto de mínimo de $f(\theta)$:

$$2S - \chi^q(j) + 1 > 0. \quad (4.135)$$

Fazendo as substituições $S = \sinh^2 \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right)$ e $\chi^q(j) = \frac{\text{senh}(\gamma(2j-1))}{G(\gamma)}$, essa expressão transforma-se na seguinte inequação:

$$\coth^2 \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{2}{G(\gamma)} \coth \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) + 1 > 0, \quad (4.136)$$

cujas soluções são dadas por:

$$\coth \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) < \frac{G(\gamma)}{1 + \sqrt{1 - G^2(\gamma)}} \quad (4.137)$$

e

$$\coth \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) > \frac{1 + \sqrt{1 - G^2(\gamma)}}{G(\gamma)}. \quad (4.138)$$

A primeira dessas soluções é inconsistente, pois é maior que a unidade. Isolando j na segunda solução, temos que $j < j_c^q$. Vemos então que $\theta = 0$ é um ponto de mínimo desde que $j < j_c^q$. Se $j > j_c^q$ o mínimo será dado por $\theta = \theta_m$, com θ_m dado por 4.132.

Os valores mínimos de $\epsilon_q E_q(j, \theta, \phi)$, com respeito a θ e ϕ , são dados pelas expressões abaixo:

$$\min_{\theta, \phi} (\epsilon_q E_q(j, \theta, \phi)) = -\epsilon_q \frac{[2j]_q}{2}, \tag{4.139}$$

se $j < j_c$ (correspondendo a $\theta = 0$), e

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \phi} (\epsilon_q E_q(j, \theta, \phi)) &= -\epsilon_q \frac{[2j]_q}{4} \left(2G^{-1}(\gamma) \tanh \left(\gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \left(1 - \sqrt{1 - G^2(\gamma)} \right) G^{-2}(\gamma)}{G^{-1}(\gamma) \sinh(\gamma(2j - 1))} \right). \end{aligned} \tag{4.140}$$

Da mesma forma como no caso não deformado, introduziremos a notação:

$$A_j^q \doteq \min_{\theta, \phi} (\epsilon_q E_q(j, \theta, \phi)). \tag{4.141}$$

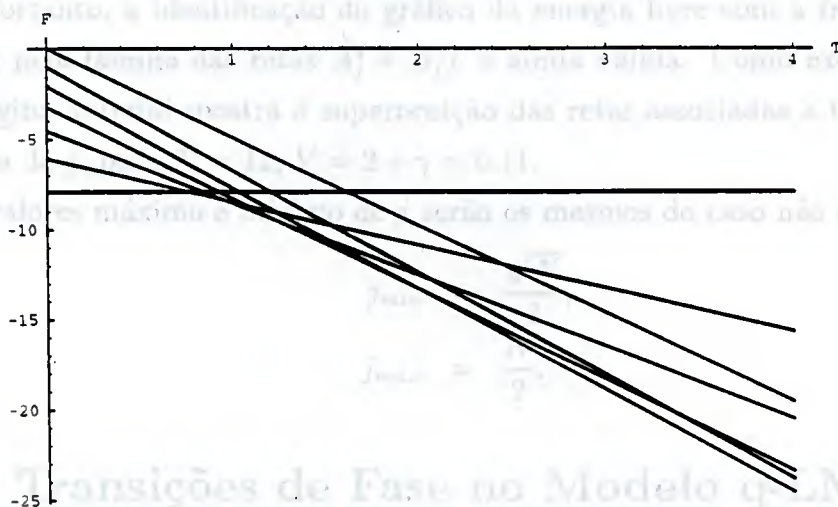


Fig. 6. A família de retas associadas aos valores de $j = 0$ a $j = 6$.

A caracter $N = 12, V = 2, \epsilon = 1, \gamma = 0.11$. A energia livre variacional é dada pela fronteira inferior dessa figura.

Podemos verificar que, no limite $\gamma \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 1$), temos o seguinte:

$$2G^{-1}(\gamma) \tanh\left(\gamma\left(j - \frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow \frac{2|V|(j - \frac{1}{2})}{\epsilon N}, \quad (4.142)$$

$$2(1 - \sqrt{1 - G^2(\gamma)})G^{-2}(\gamma) \rightarrow 1, \quad (4.143)$$

$$\cosh\left(\gamma\left(j - \frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow 1, \quad (4.144)$$

$$[2j]_q \rightarrow 2j. \quad (4.145)$$

Portanto, todos os resultados do modelo q-LMG se reduzem aos do modelo não deformado nesse limite, como esperado.

A energia livre é dada pela expressão:

$$F(\beta) \leq \min_j (A_j^q + B_j T), \quad (4.146)$$

com os coeficientes A_j^q dados pelas expressões 4.139 e 4.140. Os coeficientes B_j , definidos como

$$B_j \doteq -k_B \ln Y(N, j), \quad (4.147)$$

são exatamente os mesmos do caso não deformado, pois a quantidade $Y(N, j)$ é a mesma nos dois modelos. Os coeficientes A_j^q também são crescentes com o decréscimo de j . Portanto, a identificação do gráfico da energia livre com a fronteira inferior definida pela família das retas $A_j^q + B_j T$ é ainda válida. Como exemplo, a figura 6 da página anterior mostra a superposição das retas associadas a todos os valores possíveis de j , para $N = 12$, $V = 2$ e $\gamma = 0.11$.

Os valores máximo e mínimo de j serão os mesmos do caso não deformado:

$$j_{\min} = \frac{\sqrt{N}}{2}, \quad (4.148)$$

$$j_{\max} = \frac{N}{2}. \quad (4.149)$$

4.6 Transições de Fase no Modelo q-LMG.

4.6.1 Transições Termodinâmicas.

A caracterização das transições de fase no modelo q-LMG é qualitativamente a mesma do modelo não deformado. Todo o procedimento realizado para o modelo

não deformado continua válido neste caso. Como no caso não deformado, existe um valor crítico j_c^q do parâmetro j . Além da dependência nos parâmetros usuais do sistema, como ϵ , V e N , esse valor depende também do valor do parâmetro de deformação q . O valor de j é determinado pela temperatura, de acordo com a construção do gráfico da energia livre. À temperatura zero $j = \frac{N}{2}$. À medida que a temperatura cresce o valor de j diminui, até que se estabiliza em $j = j_{máx} = \frac{\sqrt{N}}{2}$. Se o valor de j_c^q estiver entre os valores máximo e mínimo, então haverá uma transição de fase quando a temperatura vai de zero a infinito.

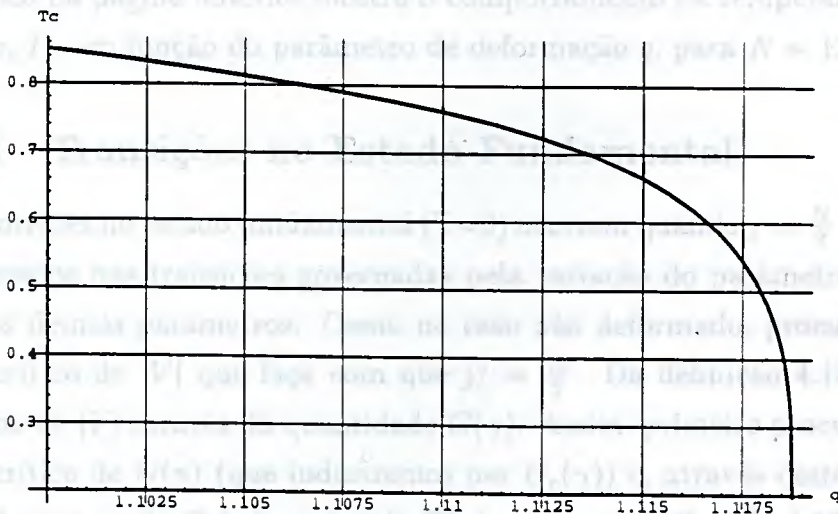


Fig. 7. Temperatura crítica em função da deformação.

$$N = 12, V = 2, \epsilon = 1.$$

A temperatura de transição de fase é definida como sendo a temperatura de cruzamento entre as retas associadas a $j = j_c^q$ e $j_c - 1$:

$$T_c = \frac{\epsilon}{k_B} \frac{A_{j_c^q}^q - A_{j_c^q-1}^q}{\ln \left(\frac{Y(N, j_c^q)}{Y(N, j_c^q-1)} \right)}. \quad (4.150)$$

Quando $j = j_c^q$, 4.139 e 4.140 dão o mesmo resultado para A_j^q . Assim, o numerador

da expressão acima é dado por:

$$\begin{aligned} A_{j_c^q}^q - A_{j_c^q-1}^q &= -\epsilon_q \left(\frac{[2j_c^q]_q}{2} - \frac{[2(j_c^q - 1)]_q}{2} \right) \\ &= -\epsilon_q \cosh(\gamma(2j_c^q - 1)). \end{aligned} \quad (4.151)$$

Logo, a temperatura de transição de fase é dada pela seguinte expressão:

$$T_c = \frac{1}{k_B} \frac{\epsilon_q \cosh(\gamma(2j_c^q - 1))}{\ln \left(\frac{Y(N, j_c^q - 1)}{Y(N, j_c^q)} \right)}. \quad (4.152)$$

O gráfico na página anterior mostra o comportamento da temperatura de transição de fase, T_c , em função do parâmetro de deformação q , para $N = 12$, $V = 2$ e $\epsilon = 1$.

4.6.2 Transições no Estado Fundamental.

As transições no estado fundamental ($T=0$) ocorrem quando $j = \frac{N}{2} = j_c^q$. Estaremos interessados nas transições governadas pela variação do parâmetro $|V|$, mantendo fixos os demais parâmetros. Como no caso não deformado, procuraremos por um valor crítico de $|V|$ que faça com que $j_c^q = \frac{N}{2}$. Da definição 4.130 vemos que j_c^q depende de $|V|$ através da quantidade $G(\gamma)$. Assim, primeiro procuraremos por um valor crítico de $G(\gamma)$ (que indicaremos por $G_c(\gamma)$) e, através deste, encontraremos $|V|_c$. Assim, sendo $G_c(\gamma)$ o valor de $G(\gamma)$ para o qual $j_c^q = \frac{N}{2}$, 4.130 resulta em:

$$\frac{N}{2} = \gamma^{-1} \operatorname{arccoth} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - G_c^2(\gamma)}}{G_c(\gamma)} \right) + \frac{1}{2}, \quad (4.153)$$

ou

$$\coth \left(\frac{\gamma}{2} (N - 1) \right) = \frac{1 + \sqrt{1 - G_c^2(\gamma)}}{G_c(\gamma)}. \quad (4.154)$$

Usando a expressão 4.108 podemos escrever:

$$\chi^q \left(\frac{N}{2} \right) = \frac{\sinh(\gamma(N - 1))}{G(\gamma)} \quad (4.155)$$

e

$$G(\gamma) = \frac{\sinh \gamma(N - 1)}{\chi^q \left(\frac{N}{2} \right)}. \quad (4.156)$$

Logo,

$$G_c(\gamma) = \frac{\sinh(\gamma(N-1))}{\chi_c^q}, \quad (4.157)$$

onde introduzimos a notação abreviada

$$\chi_c^q \doteq \chi_c^q \left(\frac{N}{2} \right). \quad (4.158)$$

Substituindo 4.157 em 4.154, temos:

$$\coth \left(\frac{\gamma}{2}(N-1) \right) = \frac{\chi_c^q + \sqrt{(\chi_c^q)^2 - \sinh^2(\gamma(N-1))}}{\sinh(\gamma(N-1))}. \quad (4.159)$$

Resolvendo essa equação para χ_c^q , obtemos

$$\chi_c^q = 1 + 2\sinh^2 \left(\frac{\gamma}{2}(N-1) \right) \quad (4.160)$$

$$= \cosh(\gamma(N-1)). \quad (4.161)$$

Comparando essa expressão com 4.68 vemos que o parâmetro que governa a transição de fase no estado fundamental possui um caráter universal no caso não deformado, no sentido que não depende dos parâmetros do sistema. No caso deformado esse parâmetro depende de γ e N através do produto $\gamma(N-1)$.

Supondo que o parâmetro de deformação γ possa variar, podemos estudar as transições de fase no estado fundamental governadas pela variação desse parâmetro, mantidos fixos os demais. Consideremos a expressão 4.106:

$$\chi^q(j) = \frac{|V|\sinh(\gamma(2j-1))}{\epsilon \sinh(\gamma N) \cosh \left(\frac{\gamma}{2} \right)}. \quad (4.162)$$

Pelo exposto acima, haverá uma transição de fase quando a seguinte condição ocorrer:

$$\chi^q \left(j = \frac{N}{2} \right) = \chi_c^q. \quad (4.163)$$

Substituindo 4.161 e 4.162 nessa expressão obtemos uma equação para o valor crítico de γ , que indicaremos por γ_c :

$$\frac{\tanh(\gamma_c(N-1))}{\sinh(\gamma_c N) \cosh \left(\frac{\gamma_c}{2} \right)} = \frac{\epsilon}{|V|}. \quad (4.164)$$

Esse valor crítico de γ é sempre menor que o valor $\gamma_{máx}$, conforme concluiremos abaixo a partir da comparação entre as equações 4.125 e 4.164. Primeiramente observamos que o lado direito da expressão acima é uma função decrescente de γ . Consideremos a seguinte razão:

$$\frac{\left(\frac{tgh(\gamma_c(N-1))}{\sinh(\gamma_c N) \cosh\left(\frac{\gamma_c}{2}\right)}\right)}{\left(\frac{tgh(\gamma_{máx}(N-1))}{\sinh(\gamma_{máx} N) \cosh\left(\frac{\gamma_{máx}}{2}\right)}\right)} = \frac{1}{tgh(\gamma_{máx}(N-1))} > 1, \quad (4.165)$$

onde usamos as equações 4.125 e 4.164, além do fato que a tangente hiperbólica é sempre menor que a unidade. Assim, concluímos que o numerador é maior que o denominador e, conseqüentemente, $\gamma_c < \gamma_{máx}$.

Uma consequência da fundamental importância surgem nas aplicações de álgebras q -deformadas de Física. Uma delas diz respeito à possibilidade de um certo tipo de para se definir um modelo. Existem várias maneiras possíveis e não equivalentes de se fazer isso. Como exemplo, pode-se "deformar" o modelo de Lipkin simplesmente substituindo-se as operações de para as do modelo usual pelas suas análogas q -deformadas. Outros desse modo podem ser encontrados nas referências [44, 45]. Ainda com respeito a essa falta de unicidade, mesmo as álgebras das oscilações (osciladores e osciladores) q -deformadas não são únicas. Mencionamos no Capítulo 1 que existem deformações que não preservam o Princípio de Pauli para a oscilação fermiônica. No caso hamiltoniano existe uma infinidade de deformações possíveis dadas nos objetos chamados q -bósons (veja-se a referência [32]).

A outra questão diz respeito à não existência de uma interpretação física bem estabelecida para o parâmetro de deformação. Na maioria dos casos, esse parâmetro é simplesmente interpretado de significado físico. Dentre as aplicações em que é possível estabelecer uma interpretação física para o parâmetro q , podemos citar o modelo XXZ em Mecânica Estatística [35], e estudo das famílias rotacionais em mecânica quântica das deformadas, descritos através do Hamiltoniano de um rotor q -deformado [47, 48], e o oscilador harmônico não linear [49], onde o parâmetro de deformação é interpretado como uma medida da não linearidade do oscilador.

A despeito dessas dificuldades, é crescente o número de trabalhos sobre aplicações de álgebras q -deformadas nas mais diversas áreas da Física e da Matemática, como

Capítulo 5

Considerações Finais.

Duas questões de fundamental importância surgem nas aplicações de álgebras q -deformadas na Física. Uma delas diz respeito à inexistência de um caminho único para se deformar um modelo. Existem várias maneiras consistentes e não equivalentes de se fazer isso. Como exemplo, pode-se “deformar” o modelo de Lipkin simplesmente substituindo-se os operadores de *quasi spin* do modelo usual pelos seus análogos q -deformados. Estudos desse modelo podem ser encontrados nas referências [44, 45]. Ainda com respeito a essa falta de unicidade, mesmo as álgebras dos osciladores (bosônicos e fermiônicos) q -deformados não são únicas. Mencionamos no Capítulo 1 que existem deformações que não preservam o Princípio de Pauli para o oscilador fermiônico. No caso bosônico existe uma infinidade de deformações possíveis contidas nos objetos chamados qp -bósons (veja-se a referência [32]).

A outra questão diz respeito à não existência de uma interpretação física bem estabelecida para o parâmetro de deformação. Na maioria dos casos, esse parâmetro é completamente desprovido de significado físico. Dentre as aplicações em que é possível atribuir-se uma interpretação física para o parâmetro q , podemos citar o modelo XXZ em Mecânica Estatística [35], o estudo das bandas rotacionais em núcleos e moléculas deformadas, descritos através do Hamiltoniano de um rotor q -deformado [37, 38], e o oscilador harmônico não linear [36], onde o parâmetro de deformação é interpretado como uma medida da não linearidade do oscilador.

A despeito dessas dificuldades, é crescente o número de trabalhos sobre aplicações de álgebras q -deformadas nas mais diversas áreas da Física e da Matemática, como

em Mecânica Estatística [39], Ótica Quântica [40], Física de Partículas [41], Teoria de Nós [42], Geometria Não Comutativa [43], etc.

Dentro do contexto do parágrafo acima, estudamos a influência da q -deformação nas transições de fase do modelo q -LMG. Também aqui não temos uma interpretação física clara para o parâmetro de deformação q . Observamos, especulativamente, que este se comporta como se introduzisse uma espécie nova de interação entre as partículas. Com o aumento da deformação, as transições de fase termodinâmicas são “aceleradas”, no sentido que a temperatura crítica diminui. Em uma dada temperatura fixa ($T = 0$, por exemplo) a variação da deformação pode induzir uma transição, da mesma forma como acontece quando variamos o parâmetro de interação V , mantendo fixos os demais. À temperatura zero, o parâmetro crítico χ_c^q apresenta uma dependência da deformação e do número de partículas, através do produto $\gamma(N - 1)$, ao contrário do caso não deformado, onde esse parâmetro tinha um caráter universal, ou seja, não dependia dos demais parâmetros do sistema.

Um Grupo é um conjunto de objetos $G = \{a, b, c, \dots\}$, que possui uma lei de composição (que se chama lei de multiplicação) associada a cada par desses objetos, que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\forall a, b \in G \quad ab \in G, \quad c \in G. \quad (A.1)$$

$$\exists e \in G \text{ tal que } ae = ea = a \quad \forall a \in G. \quad (A.2)$$

$$\forall a \in G \text{ existe } a^{-1} \in G \text{ tal que } aa^{-1} = a^{-1}a = e. \quad (A.3)$$

$$(abc) = a(bc), \quad \forall a, b, c \in G. \quad (A.4)$$

O número de elementos de um grupo pode ser finito ou infinito. Os grupos infinitos podem ser contínuos ou discretos. Nos grupos contínuos podemos definir os conceitos de simetria, de limite, etc. Assim, dizemos que grupos contínuos possuem uma estrutura topológica. Isto permite parametrizarmos os elementos do grupo por meio de um conjunto de parâmetros contínuos em um espaço topológico (espaço dos parâmetros do grupo). Assim, dizemos que dois elementos do grupo estão próximos entre si se, e somente se, os parâmetros que os caracterizam também estão próximos entre si no espaço dos parâmetros. O número de parâmetros varia

Apêndice A

Conceitos de Grupos e Álgebras de Lie.

A.1 Definições.

Um Grupo é um conjunto de objetos $G = \{a, b, c, \dots\}$, que possui uma lei de composição (que chamaremos de multiplicação) associada a cada par desses objetos, que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\forall a, b \in G \quad ab = c, \quad c \in G. \tag{A.1}$$

$$\text{Existe } e \in G \text{ tal que } ae = ea = a \quad \forall a \in G. \tag{A.2}$$

$$\forall a \in G \text{ existe } a^{-1} \in G \text{ tal que } aa^{-1} = a^{-1}a = e. \tag{A.3}$$

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in G. \tag{A.4}$$

O número de elementos de um grupo pode ser finito ou infinito. Os grupos infinitos podem ser contínuos ou discretos. Nos grupos contínuos podemos definir os conceitos de vizinhança, de limite, etc. Assim, dizemos que grupos contínuos possuem uma estrutura topológica. Isto permite parametrizarmos os elementos do grupo por meio de um conjunto de parâmetros contínuos em um espaço topológico (espaço dos parâmetros do grupo). Assim, dizemos que dois elementos do grupo estão próximos entre si se, e somente se, os parâmetros que os caracterizam também estão próximos entre si no espaço dos parâmetros. O número de parâmetros reais

necessários para caracterizar cada elemento do grupo é chamado de dimensão do grupo.

Se, nas vizinhanças de um elemento qualquer de um grupo contínuo, pudermos escolher um espaço euclidiano n -dimensional como o espaço dos parâmetros, esse grupo é chamado de Grupo de Lie n -dimensional. Em particular, em um grupo de Lie n -dimensional qualquer elemento próximo à identidade pode ser parametrizado através de um vetor n -dimensional em um espaço euclidiano. A maioria dos grupos contínuos que aparecem em Física são grupos de Lie.

Dado um grupo de Lie, consideremos um elemento $g(a_1, a_2, a_3, \dots)$ próximo à identidade e caracterizado pelos parâmetros a_1, a_2, a_3 , etc. Sem perda de generalidade, podemos considerar que o elemento identidade é parametrizado pelo vetor nulo. Assim, podemos escrever:

$$g(a_1, a_2, a_3, \dots) = e + \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{\partial g(a)}{\partial a_k} \right)_{a=0} \quad (\text{A.5})$$

$$= e + i \sum_{k=1}^n a_k X_k, \quad (\text{A.6})$$

onde definimos

$$X_k \doteq \frac{1}{i} \left(\frac{\partial g(a)}{\partial a_k} \right)_{a=0}, \quad (\text{A.7})$$

onde a indica o vetor de componentes a_j , com $j = 1, \dots, n$, onde n é a dimensão do grupo de Lie.

Denotaremos agora por $g(a_k)$ o elemento do grupo de Lie que possui todos os parâmetros nulos, exceto o parâmetro particular a_k . Tomemos agora a diferença seguinte:

$$\begin{aligned} g(a_k)g(a_l) - g(a_l)g(a_k) &= (e + ia_k X_k)(e + ia_l X_l) - (e + ia_l X_l)(e + ia_k X_k) \\ &= e + i(a_k X_k + a_l X_l) - a_k a_l X_k X_l + \\ &\quad - e - i(a_k X_k + a_l X_l) + a_k a_l X_l X_k \\ &= a_k a_l [X_l, X_k]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Pela propriedade de fechamento no grupo (propriedade A.1), temos que:

$$g(a_k)g(a_l) = g(a') = e + i \sum_{j=1}^n a'_j X_j \quad (\text{A.9})$$

$$g(a_l)g(a_k) = g(a'') = e + i \sum_{j=1}^n a''_j X_j \quad (\text{A.10})$$

e

$$\begin{aligned} g(a_k)g(a_l) - g(a_l)g(a_k) &= i \sum_{j=1}^n (a'_j - a''_j) X_j \\ &= i \sum_{j=1}^n c_j X_j, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde definimos $c_j = a'_j - a''_j$. Assim, comparando A.8 e A.11, podemos escrever:

$$[X_l, X_k] = i \sum_{j=1}^n f_{lk}^j X_j, \quad (\text{A.12})$$

onde definimos

$$f_{lk}^j \doteq \frac{c_j}{a_l a_k}. \quad (\text{A.13})$$

As constantes f_{lk}^j são chamadas de *constantes de estrutura* do grupo de Lie. Essas constantes determinam todas as propriedades locais do grupo nas vizinhanças da identidade.

Usando a propriedade associativa do grupo de Lie podemos demonstrar a seguinte identidade (Identidade de Jacobi):

$$[X_k, [X_l, X_m]] + [X_l, [X_m, X_k]] + [X_m, [X_k, X_l]] = 0. \quad (\text{A.14})$$

O conjunto de operadores infinitesimais $\{X_i\}$, com $i = 1, \dots, n$, do grupo de Lie gera um espaço vetorial fechado com respeito à operação de comutação entre dois vetores desse espaço. Essas propriedades, mais a Identidade de Jacobi, definem o que chamamos uma *Álgebra de Lie*. Assim, a todo grupo de Lie podemos associar uma álgebra de Lie.

Geralmente, todos os elementos de um grupo de Lie podem ser obtidos a partir de uma sequência de transformações infinitesimais sucessivas a partir da identidade. Assim podemos escrever o elemento genérico $g(\alpha)$, onde α é um vetor de módulo finito, como:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(e + i \sum_{j=1}^n a_j X_j \right)^M \\ &= \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde α_j são as componentes do vetor finito α e os a_j são componentes do vetor infinitesimal a , paralelo a α .

Dessa última expressão vemos que há uma relação explícita entre os operadores do grupo de Lie e os geradores da álgebra de Lie associada ao grupo. Essa relação é chamada de *mapeamento exponencial*.

A.2 Representações.

Embora tenhamos usado algumas vezes o termo *transformações* para nos referir aos elementos do grupo de Lie, até agora trabalhamos com o conceito abstrato de grupo. Em Física os grupos frequentemente aparecem como grupos de transformações em algum espaço (espaço de configuração, espaço de Hilbert, etc.). Essas transformações em geral são transformações lineares. Transformações lineares podem ser representadas através de matrizes. Se for possível associar a cada elemento de um dado grupo de Lie uma matriz quadrada de ordem M (que atua como um operador linear em um espaço vetorial M -dimensional), de tal forma que as leis de composição do grupo sejam mapeadas nas leis de composição de matrizes (consideradas geralmente como as leis de multiplicação ordinária de matrizes), então temos definida uma *Representação Linear* de dimensão M do grupo de Lie considerado. Ressaltamos que a dimensão da representação não tem que ser necessariamente igual à dimensão do grupo de Lie. O espaço vetorial onde atuam as matrizes é chamado espaço de representação, ou simplesmente *representação*.

Definimos de forma semelhante as representações das álgebras de Lie. Um conjunto de matrizes quadradas é uma representação de uma álgebra de Lie se as matrizes desse conjunto satisfazem as regras de comutação da álgebra. Dada uma certa representação de uma álgebra de Lie, fica determinada a representação do grupo de Lie associado através do mapeamento exponencial A.15. A exponencial de matrizes é definida como o desenvolvimento em série de potências de matrizes.

Uma representação é dita *irredutível* se não contém nenhum subespaço invariante, isto é, se não contém nenhum subespaço que seja transformado nele próprio pela ação dos operadores da álgebra (ou do grupo).

Uma representação é dita unitária se as matrizes associadas aos elementos do

Grupo forem unitárias.

Finalmente, definiremos a *Álgebra Envolvória Universal* como a álgebra formada por todos os possíveis produtos de geradores de uma álgebra de Lie, em todas as ordens possíveis. Obviamente essa álgebra possui dimensão (número de vetores base) infinita. A álgebra de Lie original é um subespaço dessa álgebra.

Os Parâmetros dos Estados Coerentes de $SU(2)$.

Como vimos na equação 3.13 do Capítulo 3, o operador \hat{N} que gera os estados coerentes a partir do vácuo, é dado por:

$$\hat{N}(\xi) = e^{\xi \hat{a}^\dagger - \xi^* \hat{a}} \quad (B.1)$$

Procuraremos agora simplificar a forma do estado dos parâmetros ξ . Em Mecânica Quântica as operações de rotação no espaço vetorial são descritas através dos operadores do grupo $SU(2)$, quando seus geradores são identificados com as operações de momento angular [6]. Como os parâmetros ξ que especificam uma rotação adimensional assumem valores dentro de um intervalo fechado (o ângulo de rotação em torno de um eixo pode assumir valores de 0 a 2π somente), dizemos que o grupo das rotações é um grupo compacto. Logo, esperamos obter restrições sobre os possíveis valores do parâmetro ξ .

Trabalharemos na representação de dimensão linear (também chamada de representação fundamental) de $SU(2)$, que possui dimensão 2. Nessa representação os geradores da álgebra $su(2)$ são representados pelas matrizes de Pauli:

$$J_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (B.2)$$

Apêndice B

Os Parâmetros dos Estados Coerentes de $SU(2)$.

Como vimos na equação 3.43 do Capítulo 3, o operador Ω , que gera os estados coerentes a partir do vácuo, é dado por:

$$\Omega(\xi) = e^{\xi J_+ - \xi^* J_-}. \quad (\text{B.1})$$

Procuraremos agora visualizar a forma do espaço dos parâmetros ξ . Em Mecânica Quântica as operações de rotação no espaço ordinário são descritas através dos operadores do grupo $SU(2)$, quando seus geradores são identificados com os operadores de momento angular [6]. Como os parâmetros que especificam uma rotação arbitrária assumem valores dentro de um intervalo fechado (o ângulo de rotação em torno de um eixo pode assumir valores de 0 a 2π somente), dizemos que o grupo das rotações é um grupo *compacto*. Logo, esperamos obter restrições sobre os possíveis valores do parâmetro ξ .

Trabalharemos na representação de mais baixa dimensão (também chamada de Representação Fundamental) de $SU(2)$, que possui dimensão 2. Nessa representação os geradores da álgebra $su(2)$ são representados pelas matrizes de Pauli:

$$J_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

APÊNDICE B. OS PARÂMETROS DOS ESTADOS COERENTES DE SU(2).107

e os operadores *escada* são dados por:

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\text{B.3})$$

Expandindo B.1 em série temos que, nessa representação, $\Omega(\xi)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \Omega(\xi) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi^* & 0 \end{pmatrix} = I \cos|\xi| + \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\xi^* & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\xi} \text{sen}|\xi| \\ &= \begin{pmatrix} \cos|\xi| & \frac{\xi}{|\xi|} \text{sen}|\xi| \\ -\frac{\xi^*}{|\xi|} \text{sen}|\xi| & \cos|\xi| \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

O operador Ω especifica uma rotação em torno de um eixo que reside no plano xy , pois J_+ e J_- são combinações lineares de J_x e J_y apenas. Nessa representação o operador que denota uma rotação de um ângulo genérico θ (anti-horário) em torno de um eixo cuja direção é dada pelo vetor unitário $\hat{n} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y}$ é dado por [6]:

$$\mathcal{D}(\theta, \hat{n}) = \exp \left(-i \vec{J} \cdot \hat{n} \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & (-in_x - n_y) \text{sen} \frac{\theta}{2} \\ (-in_x + n_y) \text{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

onde o ângulo θ assume valores dentro do intervalo $[0, \pi]$. Parametrizando a direção do vetor unitário pelo ângulo ϕ' ($0 \leq \phi' \leq 2\pi$) que este faz com o eixo das abcissas, podemos escrever o operador \mathcal{D} como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\theta, \hat{n}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -ie^{-i\phi'} \text{sen} \frac{\theta}{2} \\ -ie^{i\phi'} \text{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \text{sen} \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \text{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde definimos $\phi = \phi' + \frac{\pi}{2}$. Comparando B.7 com B.4, encontramos as seguintes associações:

$$|\xi| = \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\xi}{|\xi|} = e^{-i\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (\text{B.9})$$

Assim,

$$\xi = \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}. \quad (\text{B.10})$$

APÊNDICE B. OS PARÂMETROS DOS ESTADOS COERENTES DE $SU(2)$.108

Podemos visualizar o espaço dos parâmetros ξ como sendo a superfície de uma esfera de raio unitário. Cada valor de ξ é associado a um ponto sobre essa superfície. O raio vetor que une um dado ponto à origem define um ângulo em relação ao eixo z , medido a partir do pólo sul. Pela nossa definição, este é o ângulo θ . A projeção do raio vetor sobre o plano xy define um ângulo em relação ao eixo x (medido em relação ao sentido dos x positivos). Esse último é o ângulo ϕ . Assim, o espaço dos parâmetros associados aos estados coerentes de $SU(2)$ possui a geometria de uma superfície esférica.

Consideremos agora a expressão 3.47:

$$|j, \theta, \phi\rangle = (1 + |\tau|^2)^{-j} e^{\tau J_+} |j, -j\rangle. \quad (B.11)$$

Vemos que os estados coerentes podem ser equivalentemente rotulados pelo parâmetro $\tau = tg \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}$. Podemos visualizar o espaço dos parâmetros τ como sendo o plano complexo tangente ao pólo sul da esfera definida acima. O eixo x é o eixo real e o eixo y é o imaginário. Os pontos sobre a superfície da esfera são mapeados sobre os números complexos $z = re^{i\phi}$ da seguinte forma:

$$r = tg \frac{\theta}{2}, \quad \phi = \phi. \quad (B.12)$$

Esse espaço de parâmetros ainda é compacto se consideramos que o infinito faz parte dele.

Apêndice C

A q-Derivada e a q-Integral.

Definimos a operação de q-derivada no Capítulo 3 através da expressão:

$$D_z^q f(z) = \frac{f(qz) - f(q^{-1}z)}{z(q - q^{-1})}. \quad (\text{C.1})$$

Usando essa definição podemos demonstrar as seguintes propriedades [32]:

$$D_z^q(f(z)g(z)) = (D_z^q f(z))g(q^{-1}z) + f(qz)(D_z^q g(z)), \quad (\text{C.2})$$

$$D_z^q f(\lambda z) = \lambda D_{\lambda z}^q f(\lambda z). \quad (\text{C.3})$$

A ação da q-derivada sobre a função q-exponencial é dada por:

$$\begin{aligned} D_z^q e_q^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} D_z^q z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_q}{[n]_q!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n-1]_q!} z^{n-1} = e_q^z. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Logo, a função q-exponencial é invariante com respeito à q-derivada.

Definiremos a operação de q-integração como sendo a operação inversa da q-derivada. Nos restringiremos ao caso de argumentos reais. Assim, definimos:

$$\int (D_x^q f(x)) d_q x \doteq f(x) + C. \quad (\text{C.5})$$

Imediatamente podemos ver que

$$\int e_q^x d_q x = e_q^x + C. \quad (\text{C.6})$$

e a função $y = -1$ esse integral se reduz à função Q-gama usual. Observe-se que, nesse caso, a q-derivada coincide com a derivada usual. Assim, usando a definição usual, temos a q-derivada como $\int e_q^{-x} d_q x = -e_q^{-x} + C$, (C.7)

onde C é uma constante arbitrária. Introduzimos também a q-integral definida da maneira usual:

$$\int_a^b (D_x^q f(x)) d_q x \doteq f(b) - f(a). \tag{C.8}$$

Usando a regra do produto C.2 temos:

$$\int_a^b D_x^q (f(x)g(x)) d_q x = \int_a^b (D_x^q f(x)) g(q^{-1}x) d_q x + \int_a^b f(qx) (D_x^q g(x)) d_q x. \tag{C.9}$$

Assim, podemos escrever uma regra para a q-integração por partes:

$$\int_a^b f(x) (D_x^q g(x)) d_q x = f\left(\frac{x}{q}\right) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b \left(D_x^q f\left(\frac{x}{q}\right) \right) g(q^{-1}x) d_q x. \tag{C.10}$$

Podemos agora calcular a seguinte integral:

$$I_0 \doteq \int_0^\infty e_q^{-x} d_q x = -e_q^{-x} \Big|_0^\infty \tag{C.11}$$

$$= 1, \tag{C.12}$$

onde usamos o fato que $\lim_{x \rightarrow \infty} e_q^{-x} = 0$. Usando o resultado acima e a fórmula C.10 temos que:

$$I_n \doteq \int_0^\infty x^n e_q^{-x} d_q x \tag{C.13}$$

$$= \int_0^\infty \frac{[n]_q}{q^n} x^{n-1} e_q^{-q^{-1}x} d_q x$$

$$= \frac{[n]_q}{q} \int_0^\infty (q^{-1}x)^{n-1} e_q^{-q^{-1}x} d_q (q^{-1}x) \tag{C.14}$$

$$= [n]_q \int_0^\infty x^{n-1} e_q^{-x} d_q x.$$

Assim sucessivamente, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n e_q^{-x} d_q x &= [n]_q [n-1]_q [n-2]_q \dots [1]_q i_0 \\ &= [n]_q!. \end{aligned} \tag{C.13}$$

Definimos então a função q-Gama por meio da seguinte q-integral:

$$\Gamma_q(n+1) \doteq \int_0^\infty x^n e_q^{-x} d_q x = [n]_q!. \tag{C.14}$$

No limite $q \rightarrow 1$ essa integral se reduz à função Gama usual. Observamos que, nesse limite, tanto a q-derivada como a q-integral se reduzem às expressões usuais.

Obteremos agora uma expressão explícita para a q-integral de uma função $f(x)$ expandível em série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (\text{C.15})$$

Determinaremos antes a q-integral das potências x^n , usando a definição de q-integral como a inversa da q-derivada. Assim, temos que:

$$D_x^q x^{n+1} = [n+1]_q x^n. \quad (\text{C.16})$$

Logo, podemos escrever:

$$\int [n+1]_q x^n d_q x = \int (D_x^q x^{n+1}) d_q x + C \quad (\text{C.17})$$

ou

$$\int x^n d_q x = \frac{1}{[n+1]_q} x^{n+1} + C. \quad (\text{C.18})$$

Então

$$\begin{aligned} \int f(x) d_q x &= \sum_n c_n \int x^n d_q x + C \\ &= \sum_n c_n \frac{x^{n+1}}{[n+1]_q} + C \\ &= (q - q^{-1})x \sum_n c_n \frac{x^n}{q^{n+1} - q^{-(n+1)}} + C. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $q > 1$. Assim, escrevemos a expressão anterior na forma:

$$\int f(x) d_q x = (q - q^{-1})x \sum_n c_n \frac{x^n}{q^{n+1}} \frac{1}{1 - q^{-2(n+1)}} + C. \quad (\text{C.19})$$

Identificamos o segundo fator da somatória com a soma da progressão geométrica decrescente infinita cujo primeiro termo é 1 e a razão é $q^{-2(n+1)}$. A expressão anterior pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int f(x) d_q x &= (q - q^{-1})x \sum_n c_n \frac{x^n}{q^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-2(n+1)k} + C \\ &= (q - q^{-1})x \sum_k q^{-2k} \sum_n c_n q^{-2nk} \frac{x^n}{q^{n+1}} + C \\ &= (q - q^{-1})x \sum_k q^{-2k-1} \sum_n c_n (q^{-2k-1} x)^n + C. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos estabelecer a expressão geral da q-integral como:

$$\int f(x)d_q x = (q - q^{-1})x \sum_k q^{-2k-1} f(q^{-2k-1}x) + C. \quad (C.20)$$

Apêndice D

O Método Variacional.

A definição da energia livre de um sistema é dada pela seguinte relação:

$$e^{-\beta F} = \text{Tr} \{ e^{-\beta H} \} = Z, \quad (D.1)$$

Onde H é o operador Hamiltoniano do sistema, F é a função energia livre (isto é um escalar), Z é a função de partição e $\beta = \frac{1}{k_B T}$. k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta.

Também temos a definição do operador densidade:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta H}}{Z}. \quad (D.2)$$

Utilizando o logaritmo natural de ambos os lados de (D.1) e usando o fato que $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$, temos que

$$\beta F = (\text{Tr} \hat{\rho}) \{ -\ln \text{Tr} (e^{-\beta H}) \}. \quad (D.3)$$

Somando a equação de $\text{Tr}(\hat{\rho} H)$ em ambas as partes, temos:

$$\begin{aligned} \beta F &= (\text{Tr} \hat{\rho}) \{ -\ln \text{Tr} (e^{-\beta H}) \} - \text{Tr}(\hat{\rho} H) + \text{Tr}(\hat{\rho} H) \\ &= \text{Tr} \{ \beta H - \ln \text{Tr} (e^{-\beta H}) \} + \text{Tr}(\hat{\rho} H) \\ &= \text{Tr} \{ \beta H e^{-\beta H} - \ln \text{Tr} (e^{-\beta H}) \} + \text{Tr}(\hat{\rho} H) \\ &= \text{Tr}(\beta H \hat{\rho}) + \text{Tr}(\hat{\rho} H). \end{aligned}$$

Logo,

$$F = \text{Tr} \{ \hat{\rho} H \} + \beta^{-1} \text{Tr}(\beta H \hat{\rho}). \quad (D.4)$$

Essas expressões para o ponto de partição (10) e também termodinâmica da energia livre (21). Sabemos da Termodinâmica que o estado de equilíbrio de um sistema é, entre todos os estados possíveis que o sistema pode se encontrar, aquele que minimiza o valor da energia livre. O estado termodinâmico de um sistema é completamente determinado pela temperatura. Dado o Hamiltoniano que descreve o sistema, podemos encontrar o estado de equilíbrio apenas da temperatura. Trabalhando em uma base qualquer de vetores $\{\alpha\}$ do espaço de Hilbert do sistema, podemos escrever o operador

Apêndice D

O Método Variacional.

onde os coeficientes $\rho_{\alpha}(\beta)$ são os pesos de cada estado $\{\alpha\}$ de base no estado termodinâmico à temperatura T . Esses pesos devem satisfazer a relação de normalização, que vem da condição $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$.

A definição da energia livre de um sistema é dada pela seguinte relação:

$$e^{-\beta F} \doteq \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}}) = Z, \tag{D.1}$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano do sistema, F é a função energia livre (não é um operador), Z é a *função de partição* e $\beta = \frac{1}{k_B T}$. k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta.

Lembremos também da definição do operador densidade:

$$\hat{\rho} \doteq \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z}. \tag{D.2}$$

Extraindo o logaritmo natural de ambos os lados de D.1 e usando o fato que $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$, temos que

$$\beta F = (\text{Tr} \hat{\rho}) (-\ln \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}})). \tag{D.3}$$

Somando e subtraindo $\text{Tr}(\rho\beta\hat{H})$ no segundo membro, temos:

$$\begin{aligned} \beta F &= (\text{Tr} \hat{\rho}) (-\ln \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}})) - \text{Tr}(\rho\beta\hat{H}) + \text{Tr}(\rho\beta\hat{H}) \\ &= \text{Tr} (\hat{\rho}(-\beta\hat{H} - \ln \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}}))) + \text{Tr}(\hat{\rho}\beta\hat{H}) \\ &= \text{Tr} (\hat{\rho}(\ln e^{-\beta \hat{H}} - \ln \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}}))) + \text{Tr}(\rho\beta\hat{H}) \\ &= \text{Tr} (\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) + \text{Tr}(\rho\beta\hat{H}). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto de estados de base for um conjunto contínuo, ou seja, se estes possuíam um infinitésimo contínuo, teremos, portanto, a seguinte relação:

$$F = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{H}) + \beta^{-1} \text{Tr} (\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \tag{D.4}$$

Essa expressão será o ponto de partida para o cálculo variacional da energia livre [21]. Sabemos da Termodinâmica que o estado de equilíbrio de um sistema é, dentre todos os estados possíveis que o sistema pode se encontrar, aquele que minimiza o valor da energia livre. O estado termodinâmico de um sistema é completamente especificado pelo operador densidade. Dado o Hamiltoniano que descreve o sistema, o operador densidade é função apenas da temperatura. Trabalhando em uma base qualquer de vetores $|\alpha\rangle$ do espaço de Hilbert do sistema, podemos escrever o operador densidade como:

$$\hat{\rho}(\beta) = \sum_{\alpha} w_{\alpha}(\beta) |\alpha\rangle \langle\alpha|. \quad (\text{D.5})$$

onde os coeficientes $w_{\alpha}(\beta)$ são os pesos de cada estado $|\alpha\rangle$ da base no estado termodinâmico $\hat{\rho}(\beta)$ à temperatura T . Esses pesos devem satisfazer a relação de normalização (que sai da condição $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$):

$$\sum_{\alpha} w_{\alpha}(\beta) = 1. \quad (\text{D.6})$$

O operador densidade, calculado pela definição D.2, especifica o estado de equilíbrio do sistema na temperatura T . Assim, a energia livre em D.4 é a energia livre no equilíbrio. Substituindo em D.4 qualquer outro estado diferente do estado de equilíbrio, teremos uma energia livre maior do que a calculada com aquele estado. Assim, sendo $\hat{\rho}_{tr}$ um operador densidade que especifica um estado termodinâmico qualquer, temos que:

$$F \leq \text{Tr}(\hat{\rho}_{tr}\hat{H}) + \beta^{-1}\text{Tr}(\hat{\rho}_{tr}\ln\hat{\rho}_{tr}). \quad (\text{D.7})$$

A igualdade corresponde a $\hat{\rho}_{tr}$ igual ao operador densidade no equilíbrio (dado por D.2).

A expressão acima sugere um método de estimar a energia livre de um sistema a uma dada temperatura T . Podemos, por tentativas, substituir vários estados "candidatos ao equilíbrio" nessa expressão. Obteremos vários valores da energia livre, cada um associado a um desses estados. Ao menor valor desse conjunto de valores está associado um dado estado. Este será o melhor candidato ao estado de equilíbrio e será usado como aproximação deste.

Se o conjunto de estados de teste for um conjunto contínuo, ou seja, se estes puderem ser identificados por um conjunto de parâmetros contínuos, teremos então

um método variacional de aproximação. Dentre esses estados, podemos encontrar o que mais se aproxima do estado de equilíbrio variando continuamente o parâmetro que rotula os estados do conjunto. Se no espaço desses parâmetros (o conjunto de valores que estes podem assumir) pudermos definir os conceitos de limites e derivadas, então poderemos usar os métodos do Cálculo Diferencial para encontrarmos o mínimo da energia livre a uma dada temperatura, que será uma função analítica dos parâmetros que caracterizam os estados do conjunto de teste. Vimos no capítulo 3 que os estados coerentes possuem essa propriedade.

[1] M. Gardias, J. Grosse, M. Szymanski, R. Mitter, *Phys. Rev. Lett.* **53**(1987)1095.

[2] L. D. Faddeev, *Integrable Models in (1+1)-Dimensional Field Theory*, em: *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, Les Houches, 1982, *Journal Nucleon*, 1982, editado por J. B. Zuber e R. Stora, Amsterdam, North Holland 1984.

[3] S. Papanicolaou, A. Incegu e V. Korenchuk, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, 1991.

[4] E. B. Shyama, *Funct. Appl.* **19**(1982)202.

[5] B. P. Kalishy e R. Y. Kozlov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **23**(1984)2135.

[6] H. J. Brascamp, *Exactly Solvable Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.

[7] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin/Cummings Publ. (1985).

[8] M. Gellman, *Group Theory and Its Applications to Physical Problems*, Dover Publ. New York, 1969, Wempersson.

[9] R. Gilman, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, Wiley-Interscience Publ. (1974).

[10] L. V. Ginzburg, *J. Phys. & Math. Gen.* **25**(1994)573.

[11] A. J. MacFarlane, *J. Phys. & Math. Gen.* **32**(1999)4581.

Referências

- [1] M. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura. Phys. Rev. Lett. 19(1967)1095.
- [2] L. D. Fadeev. Integrable Models in (1+1)-Dimensional Field Theory. em: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, Les Houches, seção XXXIX, 1982. editado por J. B. Zuber e R. Stora. Amsterdam. North Holland 1984.
- [3] E. K. Sklyanin. Funct. Anal. Appl. 16(1982)262.
- [4] P. P. Kulish e N. Y. Reshetikhin. J. Sov. Math. 23(1983)2435.
- [5] R. J. Baxter. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press. London. 1982.
- [6] J. J. Sakurai. Modern Quantum Mechanics. Benjamin/Cummings Publ. (1985).
- [7] M. Hamermesh. Group Theory and its Applications to Physical Problems. Dover Publ. New York. 1989. Reimpressão.
- [8] R. Gilmore. Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications. Wiley-Interscience Publ. (1974).
- [9] L. C. Biedenharn. J. Phys. A: Math. Gen. 22(1989)L873.
- [10] A. J. MacFarlane. J. Phys. A: Math. Gen. 22(1989)4581.

- [11] Quantum Theory of Angular Momentum, editado por L. C. Biedenharn e H. Van Dam. Academic Press (1965) pág. 229.
- [12] A. P. Polychronakos. Mod. Phys. Lett. A 5(1990)2325.
- [13] E. G. Floratos. J. Phys. A: Math. Gen. 24(1991)4739.
- [14] T. Hayashi. Comm. Math. Phys. 127(1990)129.
- [15] K. S. Viswanathan, R. Parthasarathy, R. Jagannathan. J. Phys. A: Math. Gen. 25(1992)L335.
- [16] L. Frappat, P. Sorba, a. Sciarrino. J. Phys. A: Math. Gen. 24(1991)L179.
- [17] H. J. Lipkin, N. Meshkov, A. J. Glick. Nucl. Phys. 62(1965)188.
- [18] An-Min Wang, Si-Cong Jing, Tu-Nam Ruan. Il Nuovo Cim. 107 A(1994)1433.
- [19] E. Schrödinger. Die Naturwissenschaften, 14(1926)664 (em alemão). Tradução em inglês em: Collected Papers on Wave Mechanics. Blackie and Son Limited. London and Glasgow 1928.
- [20] W. M. Zhang, D. H. Feng e R. Gilmore. Rev. Mod. Phys. 62(1990)867.
- [21] D. H. Feng, R. Gilmore e M. Narducci. Phys. Rev. C 19(1979)1119.
- [22] R. J. Glauber. Phys, Rev. Lett. 10(1963)277; Phys. Rev. 130(1963)2529; Phys. Rev. 131(1963)2766.
- [23] E. C. G. Sudarshan. Phys. Rev. Lett. 10(1963)277.
- [24] Y. S. Kim e M. E. Noz. Phase Space Picture of Quantum Mechanics. Group Theoretical Approach. Lecture Notes in Physics Series, Vol 40. World Scientific. 1991.
- [25] M. M. Nieto. Preprint LA-UR-84-2773.
- [26] A. M. Perelomov. Comm. Math. Phys. 26(1972)222.
- [27] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore e H. Thomas. Phys. Rev. A 6(1972)2211.

- [28] V. Bargmann. *Comm. Pure Appl. Math* **14**(1961)187 e **20**(1967)1.
- [29] C. Quesne. *Phys. Lett. A* **153**(1991)303.
- [30] B. Jurčo. *Lett. Math. Phys.* **21**(1991)51.
- [31] J. R. Klauder e B. Skagerstam. *Coherent States. Applications in Physics and Mathematical Physics*. World Scientific. Singapore. 1985.
- [32] M. Kibler. em: *Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter*. editado por W. Florek, D. Lipiński e T. Lulek. World Scientific. Singapore. 1993. p. 445.
- [33] M. Kibler. *Miscellaneous Physical Applications of Quantum Álgebras. Proceedings of International Symposium "Generalized Symmetries in Physics"*. World Scientific. Singapore. 1993.
- [34] G. E. Andrews. *q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra*. Conference Board of the Mathematical Sciences 66 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1986).
- [35] V. Pasquier e H. Saleur. *Nucl. Phys. B* **330**(1990)523.
- [36] V. Man'ko, G. Marmo, F. Zacharia. *Int. J. Mod. Phys. A* **20**(1993)3577.
- [37] S. Iwao. *Prog. Theor. Phys.* **83**(1990)363.
- [38] R. Capps. Preprint Purdue University. PURD-TH-94-02 (1994).
- [39] P. V. Nešković e B. V. Urošević. *Int. J. Mod. Phys. A* **14**(1992)3379.
C. R. Lee e J. Yu. *Phys. Lett. A* **164**(1992)164 e *Phys. Lett. A* **150**(1990)63.
- [40] M. Chaichian, D. Ellinas e P. Kulish. *Phys. Rev. Lett.* **65**(1990)980.
- [41] F. Iachello. Preprint Yale University. YCTP-N22-91 (1991).
- [42] L. Kauffman. *Int. J. Mod. Phys. A* **5**(1990)93.

- [43] Y. Manin. *Quantum Groups and Non-Commutative Geometry*. Montreal University Press. Montreal. 1988.
- [44] S. S. Avancini e J. C. Brunelli. *Phys. Lett. A* **174**(1993)358.
- [45] D. Galetti e B. M. Pimentel. *An. Acad. Bras. Ciên.* **67**(1995)1.
- [46] S. S. Avancini, A. Eiras, D. Galetti, B. M. Pimentel e C. L. Lima. *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**(1995)4915.

