UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO",
***Campus* de Bauru**

Faculdade de Ciências

MATEMÁTICA - LICENCIATURA

Joás Matheus Rodrigues dos Santos

Aprendendo matrizes e grafos a partir de problemas de otimização: atividades propostas para o ensino médio

Bauru
2025

Joás Matheus Rodrigues dos Santos

Aprendendo matrizes e grafos a partir de problemas de otimização: atividades propostas para o ensino médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Bauru, como um dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Sônia Cristina Poltroniere

Bauru

2025

S237a

Santos, Joás Matheus Rodrigues dos

Aprendendo matrizes e grafos a partir de problemas de otimização : atividades propostas para o ensino médio / Joás Matheus Rodrigues dos Santos. -- Bauru, 2025

65 p. : il., tabs., mapas

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura - Matemática) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, Bauru

Orientadora: Sônia Cristina Poltroniere

1. Ensino. 2. Aprendizagem. 3. Matrizes. 4. Teoria dos grafos. 5. Otimização matemática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

Dedico este Trabalho de Conclusão de Curso primeiramente ao Senhor Meu Deus. Estendo minha gratidão aos meus queridos familiares e amigos, que me auxiliaram incondicionalmente, oferecendo suporte nos momentos de prosperidade e adversidade, e tornando possível o desenvolvimento e o sucesso desta jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao Senhor Meu Deus por abençoar toda a minha trajetória e me guiar ao longo da graduação.

À minha querida Mãe, Carla Maisa Paccola Tavares, e ao meu querido Padrasto, Sérgio Tavares, por me darem condições adequadas, pelo apoio incondicional e por me incentivarem a encarar os desafios que a vida me propôs.

Aos meus amigos que tive durante a graduação, em especial, Ana Beatriz Silva Barbaroto, Diego Toshio Rodrigues Takarabe, Fernando da Luz Gaspar, Gabriel Henrique Ricarelli de Souza, José Antonio Coppe, Larissa Aguiar Santos e Lucas Martins Barbosa, por uma amizade que levarei para o resto da minha vida.

Aos meus colegas de turma, pela convivência e pelas contribuições inestimáveis para a minha formação, tanto pessoal quanto acadêmica.

Aos docentes do Departamento de Matemática, que, com excelência, contribuíram para a minha formação.

Por fim, à minha orientadora, Professora Sônia Cristina Poltronieri, pela confiança em meu potencial, por sua dedicação e pelo imprescindível apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

"Este é um pequeno passo para o homem, mas um gigantesco salto para a humanidade."
— Neil Armstrong

RESUMO

A implementação das novas diretrizes trazidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no Brasil provocou uma mudança de paradigma acerca da abordagem dos conteúdos de matemática em sala de aula, trazendo habilidades e competências a serem trabalhadas no ambiente escolar além dos conteúdos. De modo a cumprir as exigências do currículo, o presente trabalho usufruiu da sequência didática de Fedathi para propor atividades voltadas para alunos do ensino médio, visando abordar os conteúdos de matrizes e grafos, aliados a problemas de otimização. Com isso, busca-se proporcionar uma nova perspectiva de aprendizagem, explorando conteúdos não usualmente vistos no ensino básico.

Palavras-chave: Ensino. Matrizes. Grafos. Otimização.

ABSTRACT

The implementation of the new guidelines brought about by the National Common Curricular Base (BNCC) in Brazil has provoked a paradigm shift regarding the approach to mathematics content in the classroom, bringing skills and competencies to be worked on in the school environment beyond the content itself. In order to meet curricular requirements, this work used Fedathi's didactic sequence to propose activities aimed at high school students, focusing on matrices and graphs combined with optimization problems. The goal is to provide a new learning perspective, exploring content not usually seen in basic education.

Keywords: Teaching. Matrices. Graphs. Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Procedimento para o cálculo dos elementos da matriz produto 19
Figura 2: As Sete Pontes de Königsberg. 21
Figura 3: As Sete Pontes de Königsberg – Grafos. 22
Figura 4: Exemplos de representações de um grafo $G(V, A)$. 23
Figura 5: Matriz de adjacência do grafo G. 23
Figura 6: Matriz de incidência do grafo G. 24
Figura 7: Matriz de incidência de um grafo orientado. 25
Figura 8: Algoritmo de Dijkstra. 26
Figura 9: Relação professor-aluno-saber na Sequência de Fedathi. 29
Figura 10: Desenvolvimento da Sequência Fedathi. 30
Figura 11: Etapas de desenvolvimento do Ensino Tradicional. 32
Figura 12: Etapas de desenvolvimento da sequência de Fedathi. 33
Figura 13: Cidade origem (São José do Rio Preto) e as cidades destinos da rota de entrega. . 35
Figura 14: Esquema conectando as oito cidades consideradas na entrega dos materiais. 38
Figura 15: Grafo não orientado contendo as cidades como nós e os trajetos permitidos entre elas representados por arestas contendo as distâncias (km). 38
Figura 16: Desigualdade triangular considerando as distâncias entre três cidades da rota. 42
Figura 17: Grafo cujos nós representam as cidades e os comprimentos das arestas representam as distâncias entre elas. 43
Figura 18: Nós rotulados 1 e 6. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 6. 45
Figura 19: Nós rotulados 1, 6 e 3. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 3. 46
Figura 20: Nós rotulados 1, 6, 3 e 2. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 2. 47
Figura 21: Nós rotulados 1, 6, 3, 2 e 7. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 7. 48
Figura 22: Nós rotulados 1, 6, 3, 2, 7 e 4. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 4. 49
Figura 23: Nós rotulados 1, 6, 3, 2, 7, 4 e 5. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 5. 50
Figura 24: Nós rotulados 1, 6, 3, 2, 7, 4, 5 e 8. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 8. 51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Distâncias (em km) dos trajetos entre as cidades, utilizados pela distribuidora. 35
Tabela 2: Fração (porcentagem) de cada nutriente em cada ingrediente. 54

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

1.1 Objetivos 13

1.2 Metodologia de pesquisa 13

2 MATRIZES 15

2.1 Representação/notação de matrizes 16

2.2 Tipos de matrizes 16

2.3 Operação com matrizes 18

2.4 Propriedade das operações com matrizes 19

3 GRAFOS 21

3.1 Problema do caminho mínimo 25

4 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS 28

4.1 A Sequência Didática de Fedathi 28

4.2 Aspectos que diferenciam o ensino tradicional da sequência didática de Fedathi 32

5 PROPOSTAS PARA O ENSINO DE MATRIZES 34

5.1 Distribuição de materiais hospitalares (problema de caminho mínimo) 34

5.2 Problema da ração 53

6 DISCUSSÃO DE DADOS 58

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 61

REFERÊNCIAS 63

ANEXO 1 65

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conforme Brasil (2018), implementou, em 2019, diretrizes que impactaram significativamente na grade curricular das disciplinas do ensino médio que, tradicionalmente, seguiam as exigências dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), estabelecidas pelo Brasil (1998). Dentre as mudanças, pode-se mencionar a ênfase no desenvolvimento de habilidades e competências visando a contribuição para a aprendizagem do aluno. Com isso, Branco e Zanatta (2021) fazem algumas reflexões sobre as principais mudanças significativas, trazendo indagações sobre os impactos gerados na educação brasileira com as alterações curriculares.

Na disciplina de matemática, os conteúdos que antes eram abordados mediante conceitos técnicos e aplicações deixaram de ser tratados de maneira isolada. Essa transformação ocorreu graças à Lei nº 13.415/2017 (Brasil, 2017), que instituiu o Novo Ensino Médio ao alterar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (Brasil, 1996). Essa lei, ao permitir a integração e a flexibilidade curricular, alinha o ensino a abordagens integradas ao objeto de aprendizagem, conforme propõe a BNCC. Sendo assim, observa-se que as habilidades exigidas contemporaneamente nas salas de aula envolvem uma matemática que contribui para que o aluno exerça um papel ativo na construção do seu conhecimento, promovendo autonomia e o pensamento crítico no seu processo (Brasil, 2018).

Nesse sentido, os conteúdos de matrizes não são abordados explicitamente nas habilidades e competências específicas da área de matemática e suas tecnologias para o ensino médio, embora possam ser contemplados e integrados a outros conteúdos matemáticos.

Logo, visando promover o papel ativo do aluno em sala de aula e, consequentemente, impulsionar sua aprendizagem, a Competência Geral 2 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que o estudante deve:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (Brasil, 2018, p. 9).

Isso significa que a organização do currículo não restringe as possibilidades de ensino-aprendizagem. Muito pelo contrário, ela preza por uma aprendizagem significativa ao aluno e pela flexibilidade curricular, incentivando o desenvolvimento de outras aprendizagens relacionadas à matemática.

Diante disso, este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) visa colaborar para o ensino-aprendizagem de matrizes, desenvolvendo aplicações práticas de situações-problema através das noções da teoria de grafos e aplicações na área da otimização matemática.

Os grafos podem ser compreendidos como estruturas matemáticas que representam relações entre nós, permitindo ter uma análise que auxilia na compreensão, concretização e solução de um determinado problema. O seu uso prático envolve esquematizar situações complexas para criar representações que possam orientar a alcançar um objetivo como problemas de transporte, logística, rede de computadores, entre outros.

A área da otimização matemática contempla uma variedade de situações em que o objetivo principal é encontrar as soluções otimizadas para resolver o problema. Dentre os problemas existentes, o foco desse trabalho é abordar situações-problema, envolvendo o problema do caminho mínimo e o prolema de mistura.

O problema do caminho mínimo consiste em determinar o menor caminho entre um par de nós de um grafo que representa o sistema. Por exemplo, considere a entrega de uma mercadoria do depósito de uma fábrica até o endereço do cliente. Qual o menor caminho a percorrer? (Arenales *et al*., 2015). Sendo assim, para a aplicação desse problema clássico de otimização, a teoria de grafos desempenhou um papel fundamental neste trabalho. O seu desenvolvimento fundamentou-se em trabalhar com as noções de grafos para a representação e classificação matricial. Consequentemente, propor perguntas norteadoras para registrar as conclusões mediante as análises da matriz.

Enquanto o problema de mistura, apesar de não usar noções de grafos, aparece comumente em problemas de otimização que envolve combinar diferentes materiais para a geração de um novo, onde focou na identificação de um problema cuja resolução implica em utilizar a operação de matrizes.

Ademais, a sequência didática de Fedathi, conforme apresentada em Sousa *et al.* (2013), foi essencial para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula, composto por etapas. Essa sequência abre possibilidades de o professor mediar o processo de construção do conhecimento que o aluno se envolve.

Em suma, o presente trabalho pretende apresentar aos professores e alunos do ensino médio situações-problema de contextos reais, envolvendo noções de grafos e problemas de otimização, de modo a utilizá-las para compreender e realizar análises da estrutura de representação matricial além de sua classificação, bem como realização de operações entre matrizes, seguindo a sequência didática de Fedathi e respeitando o currículo da BNCC.

1.1 Objetivos

Propor, desenvolver teoricamente e analisar potencialidades de atividades didáticas para o ensino de matrizes no ensino médio, utilizando problemas de otimização e noções introdutórias de grafos, organizadas segundo a sequência didática de Fedathi e alinhadas às competências da BNCC. Buscou-se, especificamente, explorar matrizes como ferramenta de representação e leitura de dados; introduzir representações matriciais de grafos; desenvolver situações-problema envolvendo o problema de caminho mínimo e o problema da mistura; promover investigação, formulação de modelos e formalização matemática conforme as etapas da sequência Fedathi; estimular habilidades previstas na BNCC relacionadas à resolução de problemas e análise crítica; e fornecer ao professor um conjunto estruturado de orientações e possibilidades para a mediação pedagógica dessas propostas.

1.2 Metodologia de pesquisa

Segundo Severino (2013), a construção do conhecimento é uma ferramenta fundamental para o ensino e a aprendizagem, uma vez que o aprofundamento epistemológico gera consequências benéficas na absorção e assimilação do componente estudado, assim como a ampliação do domínio pelo processo que o envolve. Sendo assim, a aprendizagem se torna significativa, deixando de se limitar à representação dos objetos para focar em sua construção. As noções apresentadas pelo autor acerca do momento experimental e momento matemático, na qual explicita a fase indutiva e dedutiva dos momentos, respetivamente, remete uma reflexão quanto ao tipo de raciocínio que é exercida mediante ao contexto estabelecido.

Goldenberg (2004, p. 11) ressalta que a Metodologia Científica é muito mais do que algumas regras de como fazer uma pesquisa. Ela auxilia a refletir e propicia um "novo" olhar sobre o mundo: um olhar científico, curioso, indagador e criativo. A metodologia de pesquisa, inicialmente, depende do problema a ser considerado. Sendo assim, pôde-se observar que o desenvolvimento da pesquisa tratou primariamente de considerar um objeto de estudo a ser pesquisado, determinando as estratégias na abordagem de metodologias que desempenharam uma melhor eficiência para a realização deste trabalho.

Tendo isso em vista, as noções de adaptação de metodologias de pesquisas podem seguir perspectivas distintas. A pesquisa qualitativa pode ser entendida como aquela que possui uma abordagem aprofundada e minuciosa de um determinado objeto de estudo, compreendendo, analisando e interpretando as minuciosidades presentes, aspetos de ciências sociais. Por outro lado, a pesquisa quantitativa tem uma abordagem na representação de dados numéricos para fins como mensurabilidade, relacionado às ciências naturais. Logo, elas impactam no rumo como as pesquisas se desenvolverão, adotando vertentes e posicionamentos conforme as suas pretensões e objetivos, incorporando as características de uma e/ou de outra.

Apesar de propostas diferentes, ambas as pesquisas são de caráter colaborativo, entregando resultados mediante ao critério e objetivo estabelecido. Além do mais, a adoção de uma abordagem de caráter qualitativa permite que ela seja explorada ao analisar o trabalho na dimensão pedagógica, visto que as singularidades e subjetividades que permeiam a educação demandam metodologias que explorem a qualidade e significados por trás dos fenômenos que ocorrem no processo de ensino-aprendizagem, caso que não seria possível se fosse utilizada somente a abordagem quantitativa. Entretanto, o tratamento de abordagens quantitativa tem suas vantagens ao coletar e reunir os dados para a possibilidade de fazer generalizações no âmbito de ensino.

Portanto, por meio da revisão bibliográfica na metodologia de pesquisa qualitativa, realizou-se uma análise aprofundada para o desenvolvimento deste trabalho.

2 MATRIZES

Neste capítulo, apresenta-se a formalização do conteúdo de matrizes, organizado em introdução, definições, propriedades, operação de soma, multiplicação por um escalar e multiplicação de matrizes. As matrizes são estruturas matemáticas essenciais para organizar e analisar dados por meio de tabelas, comumente utilizadas na teoria de grafos para a aplicação na área de otimização. Sua relevância se baseia na capacidade de oferecer representações visuais e algébricas eficientes de diferentes contextos.

Elas podem auxiliar na realização de análises de dados referentes a dois elementos, permitindo estabelecer relações entre grandezas mensuráveis, tais como custos, distâncias ou até mesmo ao tempo. Enquanto na teoria de grafos as matrizes são vistas através da representação das relações de conexões entre um par de nós, na otimização elas podem aparecer para compor um modelo matemático para a resolução e realização de testes computacionais.

Tendo isso em vista, as diversas definições de matrizes podem ser atribuídas quanto à sua generalização, de forma que mantenha a sua essencialidade. A fundamentação teórica deste capítulo de matrizes utilizou como base as obras de Steinbruch e Winterle (1987) e Callioli, Domingues e Costa (2013).

Definição 1: Considere m e n pertencente ao conjunto dos naturais não nulos. A matriz $M_{m\times n}$ é uma tabela formada por m linhas e n colunas em que mxn é a ordem da matriz. Além disso, a_{ij} é o elemento que está na linha i e na coluna j dessa matriz.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1: $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ em que $m = 2$ (linhas) e $n = 3$ (colunas).

Definição 2: Seja $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \text{ tal que } a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$ o conjunto de todas as matrizes de números reais de ordem $m \times n$.

Definição 3: Dado $m = n$, $A = \left(a_{ij}\right)_n$ é chamada matriz quadrada de ordem n, também representada por A_n. Logo, conforme a Definiçâo 2, $M_n(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes quadradas de números reais de ordem n.

Exemplo 2: $B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1/2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

2.1 Representação/notação de matrizes

Para a representação de matrizes, a notação pode ser escrita da seguinte forma:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}, i = 1,\ 2, \dots, m \text{ e } j = 1,\ 2, \dots, n.$$

sendo a_{ij} o elemento localizado na linha i e na coluna j da matriz.

2.2 Tipos de matrizes

Uma matriz pode ser classificada de acordo com alguns critérios estabelecidos, como a regularidade que os valores de seus elementos aparecem, a quantidade de linhas e colunas, a simetria, entre outros. Sendo assim, abaixo estão algumas classificações de matrizes, acompanhadas de exemplos.

Matriz nula: Quando se tem $a_{ij} = 0, \forall i,\ j$.

Exemplo 3: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times2}(\mathbb{R})$.

Matriz coluna: Quando a matriz possui uma única coluna, ou seja, $n = 1$.

Exemplo 4: $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$.

Matriz linha: Quando a matriz possui uma única linha, ou seja, $m = 1$.

Exemplo 5: $L = (2 \quad -2 \quad 3) \in M_{1\times3}(\mathbb{R})$.

Matriz quadrada: Quando a quantidade de linhas é igual a quantidade de colunas, ou seja, quando $m = n$. A diagonal principal é formada pelos elementos que têm $i = j$ e a diagonal secundária é formada pelos elementos que têm $i + j = n + 1$.

Exemplo 6: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Matriz diagonal: Quando temos a matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$ em que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exemplo 7: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Matriz identidade: Quando temos a matriz diagonal em que $a_{ij} = 1$ se $i = j$.

Exemplo 8: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Matriz triangular superior: Quando temos a matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$ em que $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Exemplo 9: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Matriz triangular inferior: Quando temos a matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$ em que $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

Exemplo 10: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Defnição 4: Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se a matriz transposta de A^t, de modo que $A^t = (b_{ij})_{n\times m}$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

Exemplo 11: Se $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ \sqrt{3} & 5 & 7 \end{pmatrix}$, então a transposta de A é dada por:

$$A^t_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Definição 5: Uma matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_n$ é dita simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, se $A = A^t$.

Exemplo 12: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Definição 6: Uma matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_n$ é dita anti-simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$, ou seja, se $A = -A^t$.

Exemplo 13: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Definição 7: Duas matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ são iguais, ou seja, de mesmo tipo, se temos que $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$.

2.3 Operação com matrizes

Adição: Dadas duas matrizes de mesma dimensão (ordem) $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, a matriz soma é dada por $A + B = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ou seja, $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$, $\forall i, j$.

Exemplo 14: Sejam $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1/5 \end{pmatrix}$, então $A + B$ é dada por:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 11-2 \\ 3/5 - 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matriz por escalar: Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, o produto entre eles resulta em uma nova matriz dada por $\lambda A = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, ou seja, $\lambda A = \left(\lambda \cdot a_{ij}\right)_{m\times n}$, $\forall i, j$.

Exemplo 15: Se $\lambda = -2$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, então $-2A$ é dada por:

$$-2A = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 0 & -2\cdot 3 \\ -2\cdot 2 & -2\cdot(-1) & -2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes: Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, o produto $A \cdot B$ é a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$ sendo c_{ik}o elemento da linha i da coluna k (Figura 1).

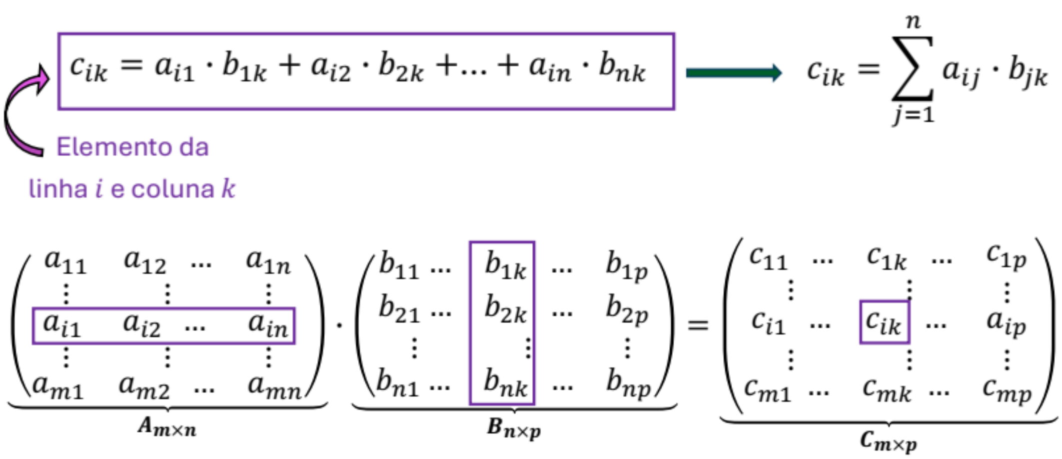


Figura 1: Procedimento para o cálculo dos elementos da matriz produto.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Observe que para a multiplicação fica definida somente se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

Exemplo 16: Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -4 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$. Então, $A \cdot B$ é dada por:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 50 & -11 \\ 122 & -26 \end{pmatrix} \text{ e } B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -8 & 4 & 0 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

2.4 Propriedade das operações com matrizes

1) Propriedades da adição: Sejam $A, B, C \in M_{m\times n}$.

a) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

b) Comutativa: $A + B = B + A$.

c) Elemento neutro: Existe a matriz nula $O_{m\times n}$ tal que $A + O = A$.

d) Elemento oposto: Dada uma matriz A, existe a matriz oposta $-A = -1 \cdot A$ tal que $A + (-A) = O$. Logo, a operação diferença $A - B$ é definida como a soma de A com a oposta de B, ou seja, $A - B = A + (-B)$.

2) Propriedades da multiplicação por escalar: Sejam $A, B \in M_{m\times n}$ e $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Associativa: $\lambda(\alpha A) = (\lambda\alpha)A = \alpha(\lambda A)$.

b) Distributiva: $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$ e $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

c) Elemento neutro: existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \cdot A = A$.

3) Propriedades da multiplicação de matrizes: Sejam A, B e C matrizes e λ um número real, desde que as operações entre $A, B,\ C$ e I estejam em definidas.

a) Associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

b) Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

c) Elemento neutro: Dada $A_{m\times n}$ existe a matriz identidade I_n tal que $A \cdot I = A$ ou I_m tal que $I \cdot A = A$.

d) Produto por escalar: $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$.

4) Propriedades da matriz transposta:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$, para $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$.

b) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, para $A_{m\times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, para $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$.

d) $(A^t)^t = A$, para $A_{m\times n}$.

e) Se A é matriz quadrada de ordem n, então $X = A + A^t$ é simétrica.

f) Se A e B são matrizes simétricas, então $A + B$ é simétrica.

Assim, compreendida a estrutura formal das matrizes que inclui suas definições, classificações, operações e propriedades elementares, o próximo passo consiste em explorar os cenários existentes para a sua aplicação. Esta ferramenta algébrica é fundamental para a representar sistemas complexos de relações, servindo como uma linguagem matemática essencial para a teoria de grafos e a resolução de problemas de otimização.

3 GRAFOS

Inicialmente, vale mencionar que os grafos não são conteúdos que integram formalmente o currículo do ensino médio. Apesar disso, sua contribuição com setores da matemática possibilita incorporação nas aulas. Essa inclusão é importante para promover a significação do conhecimento, expandindo a visão tradicional e superando o paradigma de que a matemática se resume apenas à realização de cálculos. Dito isso, a própria modelagem matemática é fundamental. Como a máquina não consegue lidar com o grafo em sua forma visual, ela precisa de uma representação que possa ser lida. O modelo pega a estrutura do grafo e a transforma em uma linguagem matemática organizada em códigos, o que permite ao computador processar os dados e encontrar a solução para o problema.

A justificativa de abordagem desse tipo de teoria se caracteriza pelo fato de trazer uma ferramenta prática e real aos alunos do ensino médio para que possam desfrutar de sua autonomia e do pensamento crítico para solucionar problemas logísticos.

Além do mais, significando ainda mais esse trabalho, ressalto que os conteúdos matemáticos não foram desconsiderados, muito pelo contrário, tiveram seus respectivos envolvimentos, acrescidos dos conteúdos que estão disponíveis na teoria de grafos para problemas de otimização em redes.

Um dos problemas clássicos mais conhecidos resolvido pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783) em 1736 é o das Pontes de Königsberg. Conforme descrito em Fonte (2014), é apresentada que a cidade de Königsberg, atual Kaliningrado, na Rússia, enfrentava um grande enigma a ser desvendado. Em um rio conhecido como rio Pregel, junto à cidade, havia duas ilhas interligadas entre si por uma ponte. As outras seis pontes realizavam a ligação das ilhas com as duas margens do rio (Figura 2).

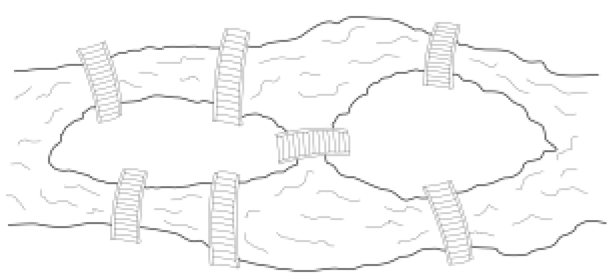


Figura 2: As Sete Pontes de Königsberg.

Fonte: Fonte (2014, p. 3).

Dessa forma, a ideia envolve determinar se há a possibilidade de passear pela cidade, considerando que passe exatamente pelas sete pontes uma única vez e retornar ao início.

A maneira brilhante como Euler propôs a interpretação dessa charada, envolve a utilização de noções de grafos para que por meio dela fosse possível imaginar se o enigma poderia ter ou não a possibilidade de ser desvendado (Figura 3).

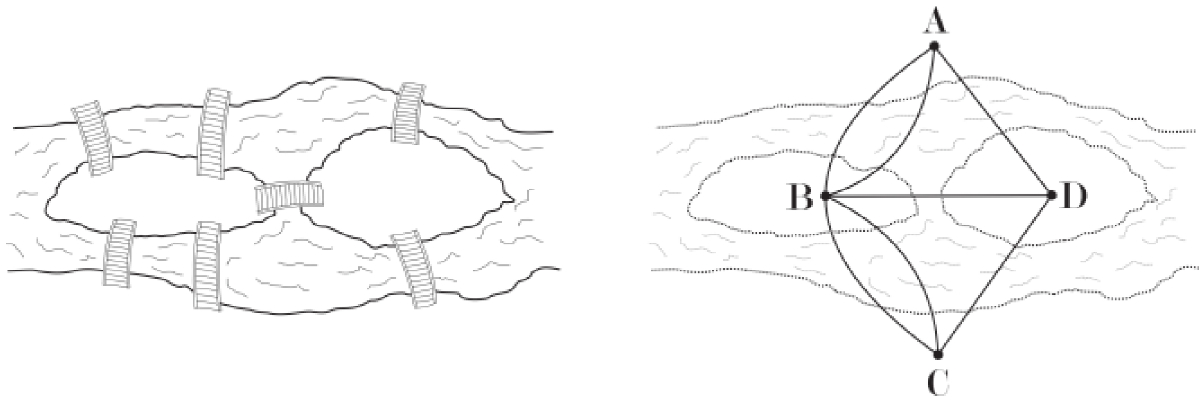


Figura 3: As Sete Pontes de Königsberg – Grafos.
Fonte: Fonte (2014, p. 4).

Nesse sentido, a ideia desse trabalho se baseia em interpretar uma situação-problema que trabalhe esse viés de interpretação para que possam pensar em resolver o problema.

Dentro da área de otimização em redes, muitos problemas envolvendo ideias de logística utilizam as noções de grafos para resolvê-las.

> Um **grafo** $G(V, A)$ é uma estrutura, composta por dois conjuntos V e A tal que V é um conjunto finito não-vazio e A é um conjunto de pares não-ordenados de elementos de V. Os elementos de V são chamados de vértices e $|V| = n$ é a ordem do grafo com n vértices. Os elementos de A são chamados de arestas (Lozano, 2007, p. 3-4).

Os grafos podem ser compreendidos como estruturas matemáticas que representam relações ou ligações (arestas) entre nós (vértices) (Figura 4). Essa modelagem permite atribuir sentidos específicos ao objeto de análise, auxiliando na compreensão, concretização e solução de um determinado problema.

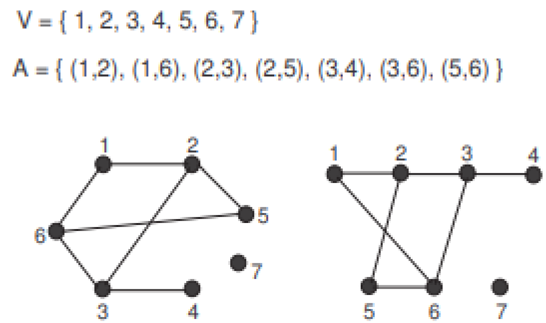


Figura 4: Exemplos de representações de um grafo $G(V, A)$.
Fonte: Lozano (2007, p. 4).

Diferentes autores, tais como Arenales *et al.* (2015), utilizam notações diferentes para os grafos, todavia, todos mantém a essência apesar da diferença de representação. Ademais, dentro da teoria de grafos, Lozano (2007) menciona as representações matriciais que podem ser envolvidas nesse contexto, exercendo funções de aspecto computacional. Dentre as matrizes mencionadas, é mencionada a matriz de adjacência e matriz de incidência.

Ao supor um grafo $G(V, A)$ que tenha n vértices e m arestas, a matriz de adjacência pode ser interpretada como uma matriz quadrada nxn, onde seus elementos (a_{ij}) são determinados da seguinte forma: o elemento é 1 se houver uma aresta ligando o par de nós correspondente que pertence ao conjunto A, e é 0 caso contrário (figura 5).

Tem-se que $M_{adj} = (a_{ij})$ é uma matriz adjacente de ordem $n \times n$ em que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \ \exists\ (i,j) \in A \\ 0 & \Leftrightarrow \ \nexists\ (i,j) \in A \end{cases}$$

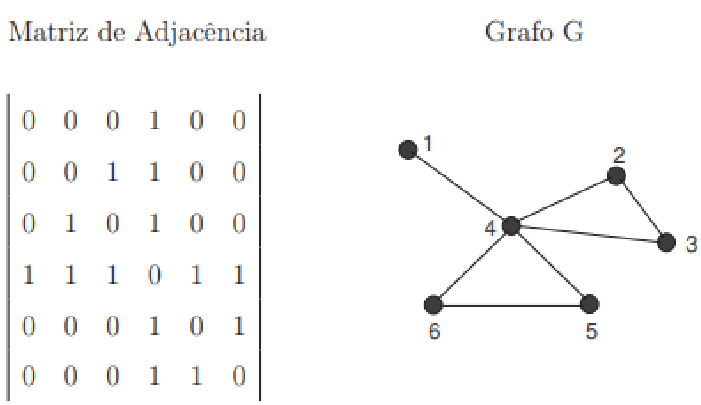


Figura 5: Matriz de adjacência do grafo G.
Fonte: Lozano (2007, p. 15).

Por outra perspectiva, tem-se a matriz de incidência, que pode ser interpretada como uma matriz de ordem nxm, onde seus elementos (b_{ij}) são determinados da seguinte forma: o elemento é 1 se a aresta j incide no vértice i, e é 0 caso contrário (Figura 6).

Tem-se que $M_{inc} = \left(b_{ij}\right)$ é uma matriz incidente de ordem nxm em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } j \text{ incide no vértice } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Matriz de Incidência

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Grafo G

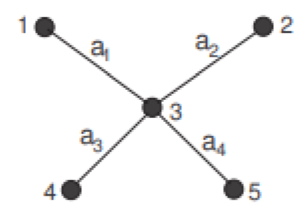


Figura 6: Matriz de incidência do grafo G.
Fonte: Lozano (2007, p. 16).

Note que na matriz, cada linha está associada a um nó do grafo e cada coluna a uma aresta. De maneira geral, as arestas orientadas (arcos) são aquelas que representam as vias únicas, ou seja, sentido único. Já as arestas não orientadas, representam uma via de mão dupla. Logo, um grafo pode ser considerado como orientado ou não orientado, dependendo do contexto que é inserido. Em situações em que os grafos são orientados, ou seja, dígrafos, deve ser distinguido quando uma aresta incide em um vértice (Figura 7). Tem-se que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } j \text{ diverge do vértice } i \\ -1, & \text{se a aresta } j \text{ converge para o vértice } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Matriz de Incidência

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Grafo G

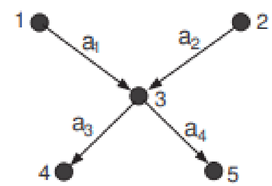


Figura 7: Matriz de incidência de um grafo orientado.
Fonte: Lozano (2007, p. 16).

Note novamente que na matriz, as linhas são representadas por vértices do grafo e cada uma das arestas incidentes ou divergentes são representadas por uma coluna.

Portanto, as abordagens referentes às matrizes serão de extrema importância para compreender o seu papel de visualização alinhada à interpretação dos dados que constitui em sua estrutura. Dessa forma, as noções dessa teoria, apesar de ir além dos conteúdos em sala de aula, predominam para as representações e operações matriciais serem trabalhadas.

3.1 Problema do caminho mínimo

O problema do caminho mínimo é um problema clássico da área de otimização que desempenha o papel de desenvolver estratégias, cujo objetivo está em minimizar o valor de uma determinada grandeza, seja a distância, o tempo ou os custos. Conforme afirma Arenales *et al.* (2015), trata-se de um dos problemas mais simples em grafos, consistindo em determinar o caminho mínimo entre dois dos seus nós. Este problema aparece com frequência em aplicações práticas, tanto diretamente quanto como em subproblemas de outros mais difíceis.

Diferentes algoritnos computacionais são propostos para resolver o problema do caminho mínimo. Dentre eles, destaca-se o algoritmo de Dijkstra, apresentado em Arenales *et al.* (2015), que permite calcular o menor caminho no grafo, a partir de um nó origem para os demais nós. Neste contexto, o conteúdo de matrizes desempenha um papel fundamental na organização dos dados do problema.

Para detalhar o algoritmo de Dijkstra, considere um grafo com n vértices. Sem perda de generalidade, suponha que se deseja encontrar o caminho mínimo do vértice 1 ao vértice n. Tal algoritmo utiliza um procedimento iterativo, determinando, na iteração 1, o nó mais próximo do nó 1; na segunda iteração, o segundo nó mais próximo do nó 1, e assim sucessivamente, até que em alguma iteração o nó n seja atingido (Figura 8).

Algoritmo de Dijkstra

Dados:

$G(N, E)$: grafo em que $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

1 : nó inicial do caminho

n : nó final do caminho

$c(i, j)$: comprimento do arco $(i, j) \in E$ (hipótese: $c(i, j) \geq 0$)

Saída:

$d(n)$: menor distância do nó 1 ao nó n

C : caminho mínimo entre o nó 1 e o nó n

Passo 1: Início

$R = \{1\}$: inicialmente o nó 1 é rotulado

$NR = \{2, \ldots, n\}$: os demais nós não são rotulados

$d(1) = 0$: a distância do nó 1 ao nó 1 é zero

$p(1) = 0$: o nó 1 é o nó inicial

Para $i \in NR$,

$d(i) = +\infty$: a distância do nó 1 aos nós não rotulados é $+\infty$

$p(i) = n + 1$: o nó i não tem predecessor (observe que não existe nó $n + 1$ no grafo)

$a = 1$: último nó incluído em R

Passo 2: Para todo $i \in NR$, determine $d(i) = \text{mínimo } \{d(i), d(a) + c(a, i)\}$ e faça $p(i) = a$, caso $d(i) = d(a) + c(a, i)$.

Se $d(i) = +\infty$ para todo $i \in NR$, então pare {não existe caminho de 1 a qualquer um dos nós em NR}.

Se não, determine $k \in NR$ tal que $d(k) = \text{mínimo } \{d(i), i \in NR\}$. Exclua o nó k de NR (isto é, $NR \leftarrow NR - \{k\}$) e inclua-o em R (isto é, $R \leftarrow R \bigcup \{k\}$) e faça $a = k$.

Passo 3: Se $a = n$, então recupere o caminho mínimo C a partir dos valores armazenados em $p(.)$, iniciando por $k_1 = p(n)$, em seguida, $k_2 = p(k_1)$, até que o nó 1 seja atingido. Se não (isto é, $a \neq n$), retorne ao *Passo 2*.

Figura 8: Algoritmo de Dijkstra.

Fonte: Arenales *et al.* (2015, p. 308-309).

Vale ressaltar que, mesmo se tratando de problemas que necessitam ser resolvidos com o auxílio computacional, isso não impede que o aluno desenvolva as atividades propostas. Davis (1997) reforça o potencial de se utilizar de tal artifício para poder se adaptar a situações práticas, uma vez que o fator determinante está na tomada de decisão do usuário a ter de lidar com as escolhas certas que o encaminham para a solução.

No Capítulo 5, uma das atividades propostas trata-se do problema do caminho mínimo. Como fechamento desta atividade, propõe-se que o algoritmo de Dijkstra seja aplicacado com os alunos, visualizando passo a passo no grafo, seja em sala de aula ou como uma atividade extracurricular.

4 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Uma sequência didática pode ser entendida como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tenha um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos (Zabala, 1998, p. 18). Nesse sentido, a adoção de uma sequência didática é uma alternativa válida para os professores que pretendem realizar uma prática pedagógica eficiente em sala de aula, dispondo de uma metodologia previamente organizada.

Segundo Vertuan, Borssoi e Almeida (2013), a intencionalidade é uma condição importante para a aprendizagem, não sendo influenciada apenas por aspectos cognitivos, mas também por fatores motivacionais e por características do ambiente de ensino e aprendizagem.

Cada etapa que compõe uma sequência didática deve estar clara, uma vez que, o desvio de orientações estabelecidas pode implicar em desestruturação e confusões na aprendizagem significativa do aluno. Uma boa estruturação possibilita o envolvimento de diferentes áreas do conhecimento, ou seja, uma maior integração das disciplinas. Segundo Brito *et al.* (2024), entende-se a interdisciplinaridade como uma estratégia pedagógica que articula várias disciplinas, promovendo a integração para que se atinja o objetivo de novos conhecimentos.

O presente trabalho optou por adotar a sequência didática de Fedathi, apresentada em Sousa *et al.* (2013), já que é uma sequência voltado ao ensino-aprendizagem de matemática, elaborada pelo professor Herminio Borges Neto, seu principal objetivo é guiar os professores a colocar os alunos na posição de um matemático, incentivando a investigação e a resolução de problemas. Desse modo, a aprendizagem está diretamente relacionada à construção do próprio conhecimento, sujeita à mediação apenas quando necessária.

4.1 A Sequência Didática de Fedathi

De acordo com Sousa *et al.* (2013), a proposta da sequência didática de Fedathi é colaborar para o desenvolvimento do processo de aprendizagem de matemática do aluno, de forma que o ensino de matemática possa gerar autonomia através do trabalho de investigação.

> […] a Sequência Fedathi propõe que ao deparar um problema novo, o aluno deve reproduzir os passos que um matemático realiza quando se debruça sobre seus ensaios: aborda os dados da questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimentos para constituir a solução, testa os resultados para saber se errou e onde errou, corrige-se e monta um modelo (Sousa *et al.*, 2013, p. 18).

Logo, para o desenvolvimento dessa sequência didática, a importância do professor se faz presente, cuja finalidade é proporcionar condições suficientes para que o aluno se aproprie do conhecimento desenvolvido para solucionar o problema, bem como fazer o papel de mediador. A participação ativa do aluno deve ser incentivada, já que durante a busca pela solução, irá se deparar com momentos desafiadores que exigirá do seu potencial.

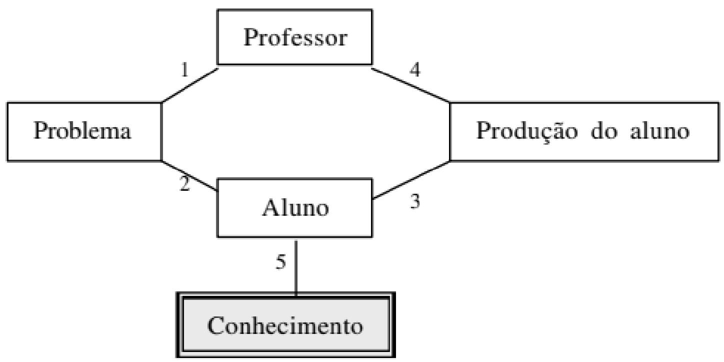


Figura 9: Relação professor-aluno-saber na Sequência de Fedathi.
Fonte: Borges Neto *et al.* (2001, p. 6).

A estrutura de interação entre professor e aluno na sequência didática de Fedathi é detalhada por Sousa *et al.* (2013), que apresenta o esquema e as fases que constituem o sistema (Figura 9).

> […] o ensino é iniciado pelo professor que deverá selecionar um problema relacionado ao conhecimento que pretende ensinar, podendo também ser começado por uma situação proposta pelo aluno (1); a seguir o professor deverá apresentar o problema aos alunos por intermédio de uma linguagem adequada (2); com o problema apresentado, os alunos irão explorá-lo na busca de uma solução (3); a solução encontrada deverá ser analisada pelo professor junto ao grupo (4). Os passos 3 e 4 acontecerão correspondem ao debate acerca da solução, visando à formulação do saber pelo aluno (5). Esse momento corresponde à mediação entre o professor-saber-aluno (Sousa *et al.*, 2013, p.19).

O desenvolvimento da sequência didática de Fedathi passa por quatro etapas: tomada de posição, maturação, solução e prova. Cada etapa possui sua respectiva função e colaboração para para o processo de ensino-aprendizagem de matemática (Figura 10).

1) Tomada de posição: Apresentação do problema

Nesta etapa, o professor será responsável pela apresentação do problema aos alunos, utilizando uma linguagem adequada e de maneira que a situação-problema antecipe o objetivo de aprendizagem. Nesse momento, cabe ao professor certificar que os seus alunos compreenderam a dinâmica do problema proposto, além de verificar se possuem repertório matemático suficiente para iniciar a resolução do problema.

O professor assume, então, a função de orientador, oferecendo o suporte necessário e buscando compreender os processos desenvolvidos pelos alunos, propondo o que Sousa *et al.* (2013) vai indicar como "interação multilateral", abordado em Bordanave (1983), devendo refletir, ouvir, indagar e até levantar hipóteses entre os alunos.

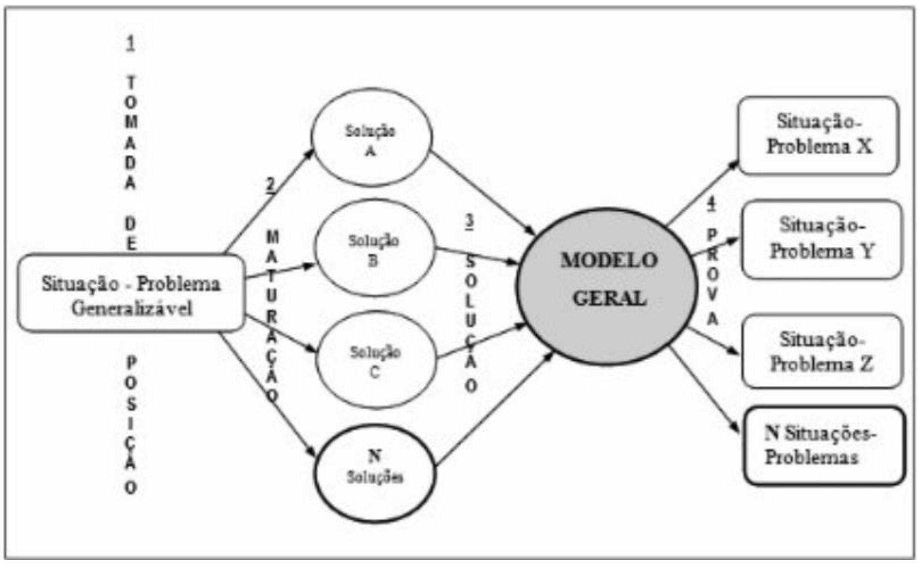


Figura 10: Desenvolvimento da Sequência Fedathi.
Fonte: Sousa *et al.* (2013, p. 34).

2) Maturação: Compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema

Com o problema apresentado, os alunos irão explorá-lo na busca de uma solução. Trata-se de um momento de exploração e problematização em que as intervenções do professor são essenciais para orientar o avanço da investigação pelo conhecimento, por parte dos alunos. Os questionamentos e indagações incitam a utilização do raciocínio lógico dos alunos para prosseguir com suas hipóteses e tentativas por um caminho que os levem a solução.

Cabe ao professor observar as nuances diante dos aspectos que estão envolvendo os alunos, como suas interações, formulações de conjecturas, uso do raciocínio lógico e os seus respectivos progressos.

3) Solução: Representação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do

problema

Este momento é destinado ao aluno para apresentar modelos que indicam o avanço de suas hipóteses, seja através da linguagem matemática ou por meio de desenhos e gráficos. As interações entre os alunos é mais que válida para o processo de confeccionar os caminhos que cada um desenvolveu, buscando validar seus modelos para o problema. O professor interage estimulando os alunos a refletirem, discutirem e avaliarem os acertos, bem como os erros, como discutido em Sousa *et al.* (2013), denominada "interação bilateral".

Em seguida, os alunos irão identificar o modelo correto para a ocasião, juntamente ao professor, que vai auxiliar no esclarecimento do novo conhecimento. Além disso, a verificação e a discussão dos resultados são importantes para validar o modelo proposto, contribuindo para a consolidação da situação-problema desenvolvida pelos alunos ao significar um novo conhecimento.

4) Prova: Apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado

A solução encontrada deverá ser analisada pelo professor junto ao grupo. Esta etapa consiste no fechamento do debate acerca da solução, visando à formulação do saber pelo aluno. Aqui, o professor deve debater com os alunos sobre o que foi realizado até o momento e apresentar a solução correta, dando ênfase ao conteúdo programático planejado, a partir do novo conteúdo abordado.

> Após as discussões realizadas a respeito das soluções dos alunos, o professor deverá apresentar o novo conhecimento como meio prático e otimizado para conduzir a resposta do problema. Nessa fase, a didática do professor será determinante para aquisição do conhecimento por parte dos alunos, pois, além de ter que manter a atenção e motivação do grupo, o professor precisará fazer uma conexão entre os modelos apresentados e o modelo matemático científico a ser apreendido; deverá introduzir o novo saber mediante sua notação simbólica em linguagem matemática, juntamente com as novas regras inerentes a esse conhecimento. É nessa etapa final que o novo saber deverá ser compreendido e assimilado pelo aluno, levando-o a perceber que, com base neste, será possível deduzir outros modelos simples e específicos. É importante que o aluno perceba a importância de se trabalhar com modelos gerais, pois estes irão instrumentar-lhe para a resolução de outros problemas e situações, contribuindo também para o desenvolvimento de seu raciocínio lógico-dedutivo, tipo de pensamento desejado e necessário para resolver, de maneira eficiente e lógica, problemas matemáticos do dia a dia, além de ser o tipo de raciocínio relevante para o desenvolvimento científico (Sousa *et al.*, 2013, p.33).

Para finalizar, sugere-se que os alunos realizem uma avaliação para confirmar a aprendizagem dos conhecimentos transmitidos, por meio de outras situações-problema. A avaliação é determinada pelo professor que deve analisar se a aprendizagem dos alunos correspondeu aos objetivos de construção do conhecimento e autonomia previstos pela sequência didática.

4.2 Aspectos que diferenciam o ensino tradicional da sequência didática de Fedathi

As propostas trazidas tendem a estarem alinhadas à uma proposta de competências estipuladas na BNCC (Brasil, 2018) e não nos PCNs (Brasil, 1998), devendo se atentar aos riscos existentes que podem desviar do eixo principal da metodologia abordada. Assim, a sequência didática de Fedathi desafia e gera uma reação ao ensino tradicional, estimulando uma prática pedagógica que valoriza o processo de descoberta e o pensamento matemático em sua essência, ao invés de somente apresentar de forma expositiva os conhecimentos matemáticos. Em outras palavras, uma postura mediadora do professor e de construção do conhecimento pelos alunos.

De acordo com Sousa *et al.* (2013), o ensino tradicional constitui-se por um ensino limitado e que não abrange a todos os alunos, sendo estabelecido a partir de uma comunicação unilateral, onde os alunos são passivos (Figura 11).

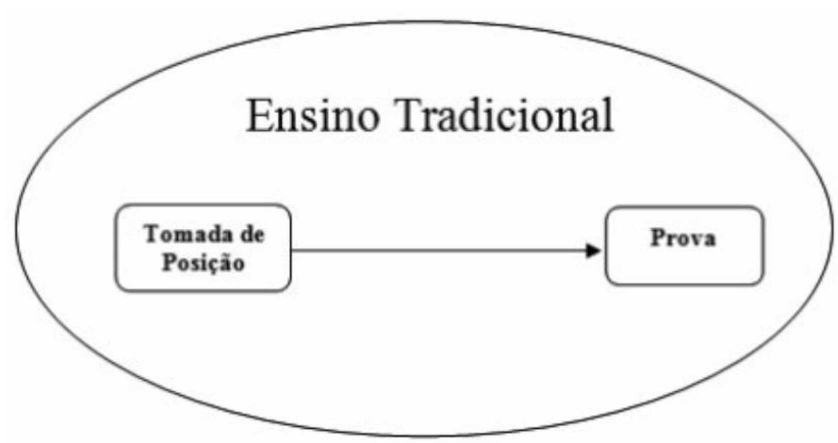


Figura 11: Etapas de desenvolvimento do Ensino Tradicional.

Fonte: Sousa *et al* (2013, p. 36).

Em decorrência disso, os alunos não possuem contribuições e participações reais em seu desenvolvimento de aprendizagem. Isso implica que todos os processos de aprendizagem que envolvem o aluno na sequência de Fedathi são desconsiderados, tais como formulação de conjecturas e o caráter investigativo que rege todo o desenvolvimento da abordagem (Figura 12).

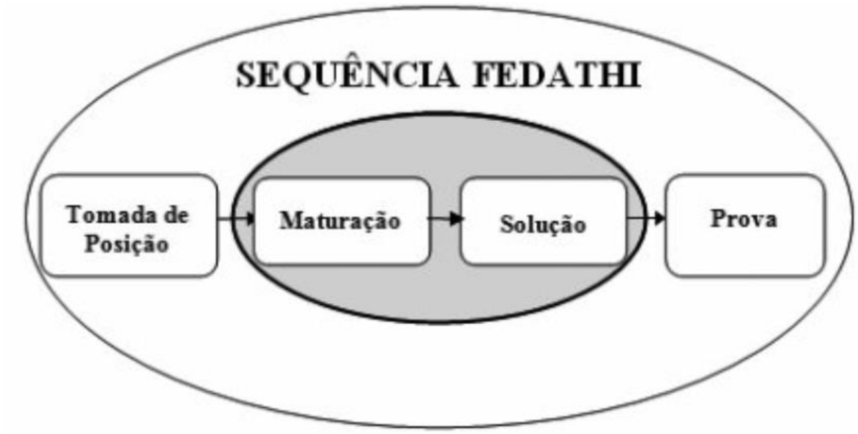


Figura 12: Etapas de desenvolvimento da sequência de Fedathi.

Fonte: Sousa *et al.* (2013, p. 40).

Nesse contexto, Almeida e Silva (2010) destacam a perspectiva socio-crítica para a análise da relação entre os modelos matemáticos e a sociedade, investigando o papel dos modelos para a interpretação das situações cotidianas, como elas podem afetar a realidade e quais vieses a sociedade pode ter no momento de se desenvolver tais modelos, ou seja, analisando de maneira crítica a própria natureza dos modelos matemáticos.

Em Castro *et al.* (2020), a análise das novas competências e habilidades da BNCC (Brasil, 2018) para matemática gera grandes desafios aos professores. É importante mencionar que o currículo até parece possuir boas intenções para o ambiente escolar em trazer uma visão critica e propositiva, mas alguns aspectos entram em conflito com a formação docente, que necessita realizar uma modificação de suas práticas pedagógicas para se adaptar ao currículo, dificultando sua implementação adequada e demandando mais do que é possível de realizar em gestão. A prática docente, quando bem planejada e executada, tem o potencial de superar essas exigências, visto que o trabalho com práticas pedagógicas demandadas pela BNCC (Brasil, 2018) pode amenizar as dificuldades e lacunas do processo de ensino-aprendizagem. Entretanto, vale considerar os desafios existentes que dificultam a implementação. Sendo assim, apesar de uma ideia até promissora, a realidade não deve ser desprezada quanto a possibilidade de realização.

O Capítulo 5 propõe sugestões de atividades para serem trabalhadas em sala de aula, visando abordar o conteúdo de matrizes, a partir da sequência didática de Fedathi.

5 PROPOSTAS PARA O ENSINO DE MATRIZES

As propostas trazidas neste capítulo consistem em duas situações-problema que podem ser desenvolvidas com alunos do ensino médio, através da sequência didática de Fedathi. São considerados dois problemas clássicos de otimização: o problema de caminho mínimo e o problema da mistura. O problema de caminho mínimo envolve a aprendizagem do conceito de grafos, além de possibilitar a introdução de matrizes a partir de uma situação real. A multiplicação de matrizes é considerada na abordagem de um problema da mistura. Ressalta-se que tais objetivos têm relação com as competências trazidas da BNCC.

Sendo assim, os alunos serão convidados a ficarem imersos nas situações-problema para gradativamente conseguirem executar as etapas sequenciais do problema. Os alunos terão a liberdade para realizar questionamentos com o professor e com os colegas a fim de desenvolver e encontrar uma solução para o problema.

As propostas envolvidas sugerem conteúdo não usualmente vistos em sala de aula, como é o caso de grafos e a área de otimização, permitindo ter uma experiência ainda mais aprofundada para o conhecimento de outros conteúdos existentes para além dos já conhecidos no currículo. Essa oportunidade pretende, em outras palavras, servir para ampliar o saber matemático do aluno, não restringindo apenas a um conhecimento único e isolado, mas integrado, graças à interdisciplinaridade, possibilitando a criação de novos conhecimentos.

5.1 Distribuição de materiais hospitalares (problema de caminho mínimo)

Para a realização desta atividade, inicialmente, sugere-se que os alunos se organizem em grupos de, por exemplo, quatro pessoas. Cada grupo ao redor de uma mesa com espaço suficiente para um computador ou notebook, papel, lápis, borracha e régua.

Situação-problema:

Uma distribuidora de materiais hospitalares, instalada em São José do Rio Preto (SJRP), realiza entregas em diversas cidades do Estado de São Paulo. No mapa, está em destaque a cidade de SJRP, origem da rota de entrega, e as cidades destinos, sendo elas: Bauru (BA), Marília (MA), Ourinhos (OU), Piracicaba (PIRA), Ribeirão Preto (RP), São Carlos (SC) e Sorocaba (SO) (Figura 13).

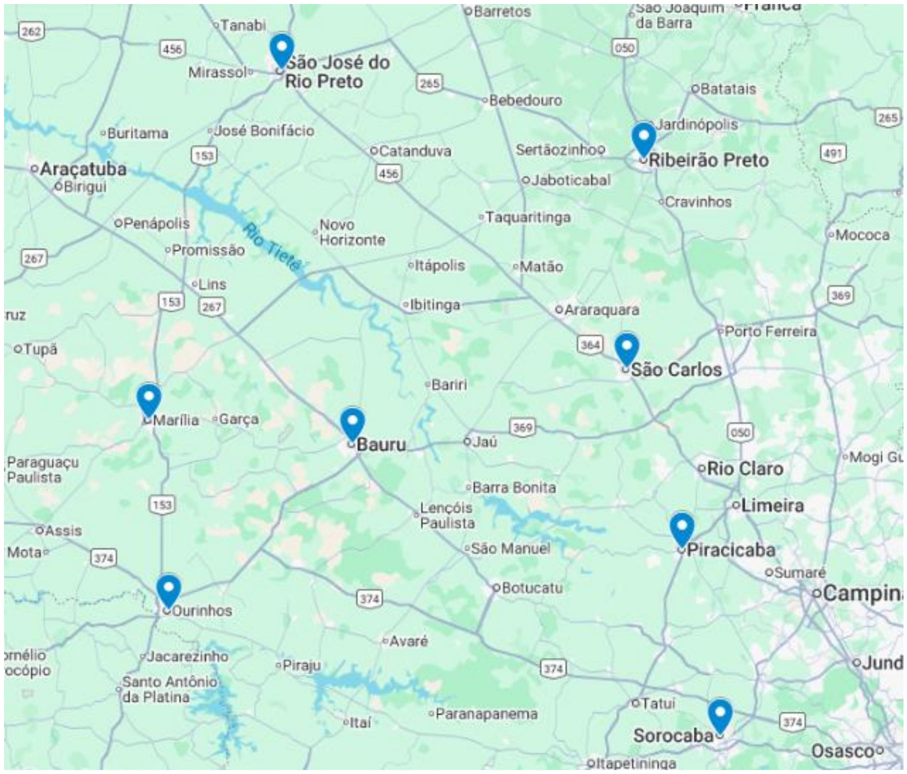


Figura 13: Cidade origem (São José do Rio Preto) e as cidades destinos da rota de entrega.
Fonte: Elaborada pelo autor a partir do Google My Maps (2025).

A Tabela 1 apresenta as distâncias entre as cidades destacadas no mapa (Figura 13), considerando os trajetos que usualmente são utilizados pela distribuidora. Como sugestão, o levantamento de tais distâncias pode ser realizado pelos próprios alunos em uma aula anterior, propiciando a interdisciplinaridade.

Tabela 1: Distâncias (em km) dos trajetos entre as cidades, utilizados pela distribuidora.

Cidades	**SJRP**	**BA**	**MA**	**OU**	**PIRA**	**RP**	**SC**	**SO**
SJRP	---	198	189	---	---	186	207	---
BA	198	---	106	125	193	215	151	245
MA	189	106	---	94	---	---	---	359
OU	---	125	94	---	---	---	---	283
PIRA	---	193	---	---	---	---	100	100
RP	186	215	---	---	---	---	102	---
SC	207	151	---	---	100	102	---	---

SO	---	245	359	283	100	---	---	---

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Após a exposição da situação-problema, o professor pode apresentar aos alunos os questionamentos a seguir, solicitando que desenvolvam discussões e conjecturas em seus grupos, de forma que possam adotar perspectivas e possíveis estratégias para a elaboração de uma possível solução.

a) *Inicialmente, destacar as oito cidades no mapa da Figura 13, bem como os caminhos permitidos entre elas, considerando as informações da Tabela 1, gerando uma figura/esquema. Em seguida, reproduzir a figura/esquema em uma página limpa, anotando os nomes das cidades e as distâncias entre elas.*
b) *Qual a menor distância percorrida, saindo de São José do Rio Preto, para realizar uma entrega em Piracicaba? E para realizar uma entrega em Ourinhos?*
c) *Enumere os trajetos e suas respectivas distâncias, saindo de São José do Rio Preto, para realizar uma entrega em Sorocaba. A seguir, apresente o trajeto de distância mínima.*
d) *Determine o trajeto de menor distância de São José do Rio Preto até cada uma das sete cidades destacadas.*
e) *Partindo de São José do Rio Preto, apresente rotas de entrega nas sete cidades consideradas, passando por cada cidade uma única vez e retornando a cidade de origem. A seguir, verifique qual a rota de menor distância.*

O caráter de investigação matemática deve aparecer neste momento, de modo que exerça o ato do exercício da curiosidade intelectual, investigação, elaboração e teste de hipóteses, análise crítica e criação de soluções. Para os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), as atividades como formular perguntas, conceber, testar e aperfeiçoar conjecturas, demonstrar resultados, revisar provas e comunicar descobertas aos pares, ou seja, o conjunto de procedimentos que os matemáticos empregam para construir novos conhecimentos, está ao alcance dos estudantes em sala de aula. Ainda mais, Allevato e Onuchic (2009), Dante (2011) e Polya (1995) reforçam que, após a apresentação do problema, é importante que os alunos possam analisar, elaborar planos e tentar resolver o problema proposto.

Solução do problema proposto:

a) *Inicialmente, destacar as oito cidades no mapa da Figura 13, bem como os caminhos permitidos entre elas, considerando as informações da Tabela 1, gerando uma figura/esquema. Em seguida, reproduzir a figura/esquema em uma página limpa, anotando os nomes das cidades e as distâncias entre elas.*

Para isso, os alunos devem ter acesso ao mapa do estado de SP, impresso e/ou no computador. Espera-se que os alunos construam, intuitivamente, a figura/esquema por meio de grafos, sem conhecer ainda tal conceito, se aproximando do que está apresentado (Figuras 14 e 15). O professor deve auxiliar os grupos somente quando necessário. No entanto, garantir que os alunos estejam caminhando de acordo com o planejado é crucial para um bom desenvolvimento da sequência didática, visto que o professor deve dar condições para as discussões e os encaminhamentos.

Após cada grupo apresentar a sua figura/esquema, discussões devem ser realizadas acerca das diferenças ou similaridades obtidas nesta etapa do processo de solução do problema. Em seguida, o professor pode fazer o fechamento, introduzindo o conceito de grafo: o esquema ilustrado é denominado *grafo* (Figura 15), formado por um conjunto N de vértices (ou nós), que representam as cidades, e um conjunto E de arestas, que são os segmentos que conectam cada par de cidades.

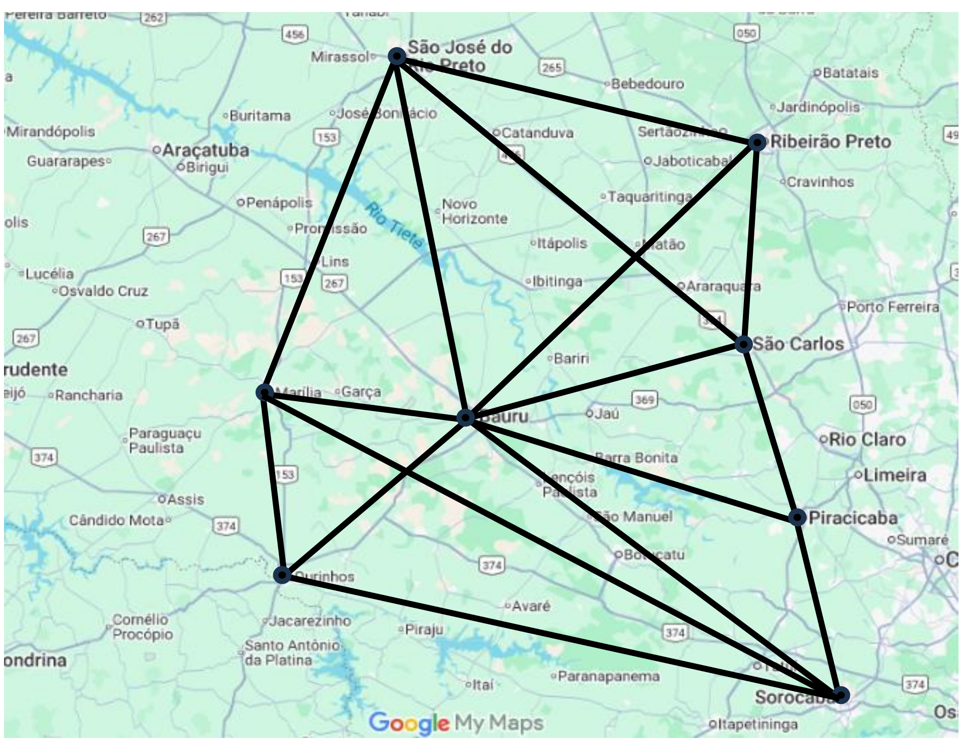


Figura 14: Esquema conectando as oito cidades consideradas na entrega dos materiais.

Fonte: Elaborada pelo autor a partir do Google My Maps (2025).

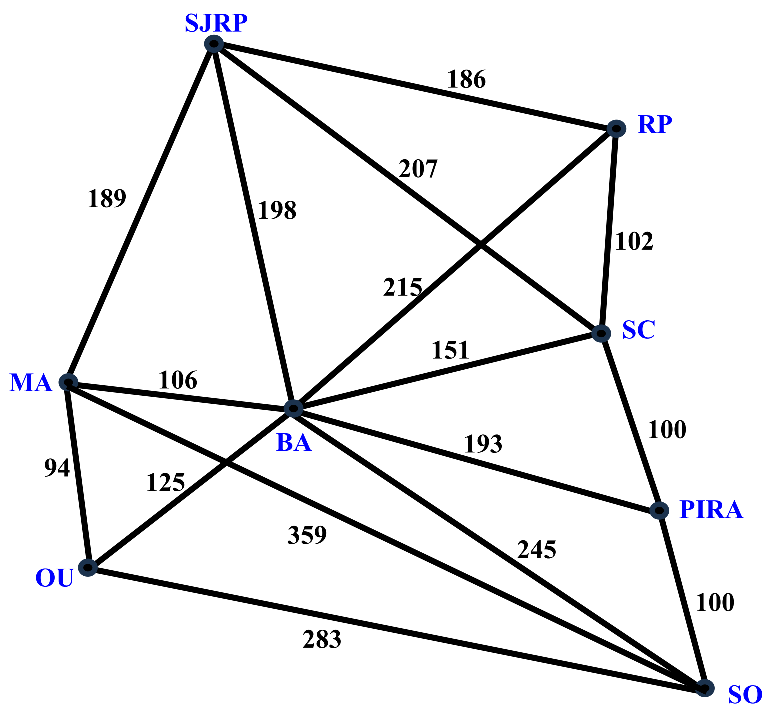


Figura 15: Grafo não orientado contendo as cidades como nós e os trajetos permitidos entre elas representados por arestas contendo as distâncias (km).

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Sugere-se que o professor discuta com os alunos sobre diferentes situações reais que podem ser representadas por meio de grafos. Destacar que o esquema para representar esta situação-problema consiste em um grafo não orientado, pois as rodovias que conectam as cidades são de mão dupla. Além disso, a cada aresta está associado um valor, que representa a distância entre cada par de cidades.

Em seguida, sugere-se que o professor inicie a abordagem de matrizes a partir da Tabela 1. Uma matriz consiste em uma maneira organizada de armazenar informações, por exemplo, as distâncias entre os pares de cidades. Cada linha e cada coluna está associada a uma cidade, formando uma matriz quadrada, em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Considere um número associado a cada cidade, da seguinte forma: São José do Rio Preto (1), Bauru (2), Marília (3), Ourinhos (4), Piracicaba (5), Ribeirão Preto (6), São Carlos (7), e Sorocaba (8).

A matriz C armazena as distâncias (em km) entre cada par de cidades, desde que exista um caminho direto entre as cidades, que seja utilizado pela distribuidora.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 198 & 189 & \infty & \infty & 186 & 207 & \infty \\ 198 & 0 & 106 & 125 & 193 & 215 & 151 & 245 \\ 189 & 106 & 0 & 94 & \infty & \infty & \infty & 359 \\ \infty & 125 & 94 & 0 & \infty & \infty & \infty & 283 \\ \infty & 193 & \infty & \infty & 0 & \infty & 100 & 100 \\ 186 & 215 & \infty & \infty & \infty & 0 & 102 & \infty \\ 207 & 151 & \infty & \infty & 100 & 102 & 0 & \infty \\ \infty & 245 & 359 & 283 & 100 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Cada elemento da matriz *C* pode ser representado pelo termo geral c_{ij}, sendo *i* o índice que indica a linha e *j* o índice que indica a coluna em que ele está. Por exemplo, $c_{62} = 215$ representa a distância do caminho direto entre Ribeirão Preto e Bauru, sem passar em outra cidade que faz parte da rota de entrega da distribuidora. Observe que o termo c_{63} não recebeu um valor numérico. O símbolo ∞ indica que não há caminho direto entre Ribeirão Preto e Marília, sendo necessário passar por outra cidade da rota de entrega. Vale mencionar que, na área da matemática aplicada e computacional, esse símbolo (∞) representa um valor numérico arbitrariamente grande. Isso é necessário, pois o problema a ser resolvido envolve a minimização de distância e otimização. Logo, o professor deve deixar claro quanto ao seu uso, especificando que ele aparece para indicar quando não há um caminho direto entre uma cidade e outra.

Os elementos $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{88}$ compõem a *diagonal principal* da matriz. No caso, todos são iguais a zero pois indicam a distância de uma cidade a ela mesma. Além disso, essa matriz quadrada é *simétrica*, pois a distância de Ribeirão Preto a Bauru, por exemplo, é igual a distância de Bauru a Ribeirão Preto, ou seja, $c_{62} = c_{26}$. Outras definições e propriedades relacionadas a matrizes podem ser introduzidas pelo professor, desde que planejadas antecipadamente.

Importante destacar que, nesta situação-problema, a matriz poderia, também, armazenar o tempo de viagem entre cada par de cidades. Ou ainda, o custo de viagem, considerando os pedágios. Nesta atividade, as questões serão organizadas e respondidas, considerando as distâncias entre as cidades.

Matriz de adjacências de um grafo:

Uma maneira importante de representar um grafo, que pode ser utilizada em outras situações, é através da matriz de adjacências $A = (a_{ij})$, em que cada linha i e cada coluna j está associada a um nó do grafo, que representa uma cidade. O elemento a_{ij} recebe o valor 1 se existe aresta entre o nó i e o nó j, e recebe o valor 0, caso contrário.

Assim, a matriz de adjacências $A = (a_{ij})$ associado ao grafo (Figura 15) é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que, conhecendo a matriz de adjacências, é possível construir o grafo que representa a situação-problema, incluindo arestas entre cada par de cidades que tem o elemento na matriz igual a 1.

b) *Qual a menor distância percorrida, saindo de São José do Rio Preto, para realizar uma entrega em Piracicaba? E para realizar uma entrega em Ourinhos?*

Neste momento, o professor pode lançar alguns questionamentos em relação à distância percorrida entre duas cidades. Pedir para verificarem pelo mapa e, posteriormente, utilizando a matriz *C*, que contém as distâncias entre os pares de cidades.

São José do Rio Preto → São Carlos → Piracicaba

Distância: $c_{76} + c_{64} = c_{67} + c_{46} = 207 + 100 = 307km.$

São José do Rio Preto → Marília → Ourinhos

Distância: $c_{72} + c_{24} = c_{27} + c_{42} = 189 + 94 = 283km.$

c) *Enumere os trajetos e suas respectivas distâncias, saindo de São José do Rio Preto, para realizar uma entrega em Sorocaba. A seguir, apresente o trajeto de distância mínima.*

São José do Rio Preto → Marília → Ourinhos → Sorocaba

Distância: $189 + 94 + 283 = 566km$

São José do Rio Preto → Marília → Sorocaba

Distância: $189 + 359 = 548km$

São José do Rio Preto → Marília → Bauru → Sorocaba

Distância: $189 + 106 + 245 = 540km.$

São José do Rio Preto → São Carlos → Piracicaba → Sorocaba

Distância: $207 + 100 + 100 = 407km$.

São José do Rio Preto → Bauru → Sorocaba

Distância: $198 + 245 = 443$km.

Ao comparar as distâncias dos trajetos considerados, constata-se que o trajeto de distância mínima, de São José do Rio Preto até Sorocaba é dado por:

São José do Rio Preto → São Carlos → Piracicaba → Sorocaba

Distância: $207 + 100 + 100 = 407km.$

Outros trajetos podem ser considerados, mas possuem distâncias maiores que os anteriores, podendo ser descartados. Por exemplo:

São José do Rio Preto → Bauru → Piracicaba → Sorocaba

São José do Rio Preto → Ribeirão Preto → São Carlos → Piracicaba → Sorocaba

Neste momento, o professor pode introduzir o conceito de desigualdade triangular, utilizando os dois trajetos anteriores para exemplificar.

No trajeto "São José do Rio Preto → Bauru → Piracicaba → Sorocaba'', o caminho "Bauru → Piracicaba → Sorocaba'' tem distância maior do que ir de Bauru diretamente para Sorocaba (Figura 16 (a)). O mesmo ocorre no trajeto "São José do Rio Preto → Ribeirão Preto → São Carlos → Piracicaba → Sorocaba'' (Figura 16 (b)).

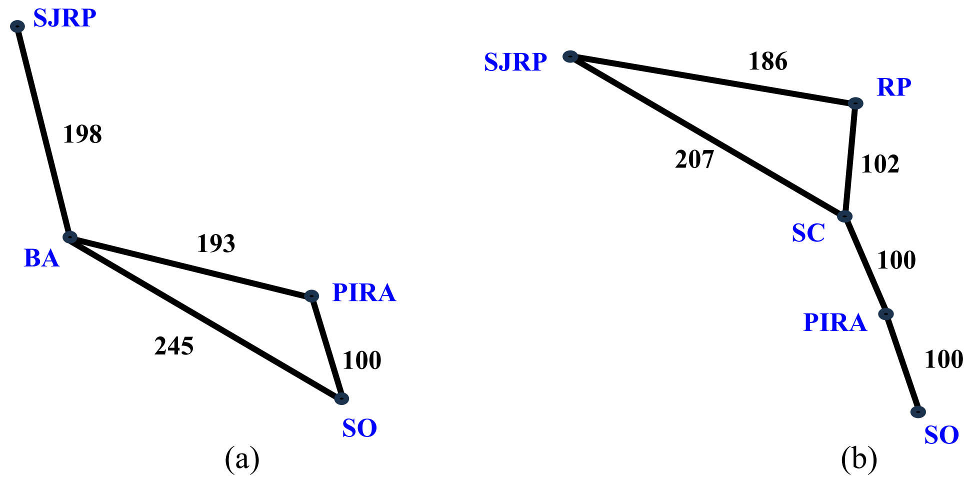


Figura 16: Desigualdade triangular considerando as distâncias entre três cidades da rota.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Aplicação do algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de distância mínima do vértice 1 (São José do Rio Preto) até o vértice 8 (Sorocaba):

A proposta a seguir consiste em aplicar o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de distância mínima entre as cidades de São José do Rio Preto e Sorocaba, confirmando a solução obtida anteriormente, por inspeção no grafo e na matriz de distâncias associadas ao problema.

Considere a seguinte numeração para os nós do grafo (Figura 15), gerando um grafo equivalente (Figura 17): São José do Rio Preto (1), Bauru (2), Marília (3), Ourinhos (4), Piracicaba (5), Ribeirão Preto (6), São Carlos (7), e Sorocaba (8). A matriz C é apresentada novamente, substituindo-se os valores da diagonal principal, que são iguais a zero, pelo símbolo ∞, que representa um valor alto, bem maior que todos os valores da matriz. Isso é necessário pois o problema a ser resolvido é um problema de minimização da distância percorrida. Neste momento, importante explicar aos alunos que isso evita do algoritmo escolher ir, por exemplo, de Bauru para Bauru, cuja distância é igual a zero. Lembrando que outras posições da matriz que também receberam o ∞, significando que não há caminho direto entre as duas respectivas cidades. Por exemplo, no grafo (Figura 17), não há aresta entre os nós 4 e 5 significando que a rota não vai diretamente de Ourinhos para Piracibaba, sendo necessário passar por outra cidade da lista. Então, ao atribuir um valor alto para a aresta (4, 5), evita-se que ela seja escolhida na solução.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 198 & 189 & \infty & \infty & 186 & 207 & \infty \\ 198 & 0 & 106 & 125 & 193 & 215 & 151 & 245 \\ 189 & 106 & 0 & 94 & \infty & \infty & \infty & 359 \\ \infty & 125 & 94 & 0 & \infty & \infty & \infty & 283 \\ \infty & 193 & \infty & \infty & 0 & \infty & 100 & 100 \\ 186 & 215 & \infty & \infty & \infty & 0 & 102 & \infty \\ 207 & 151 & \infty & \infty & 100 & 102 & 0 & \infty \\ \infty & 245 & 359 & 283 & 100 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

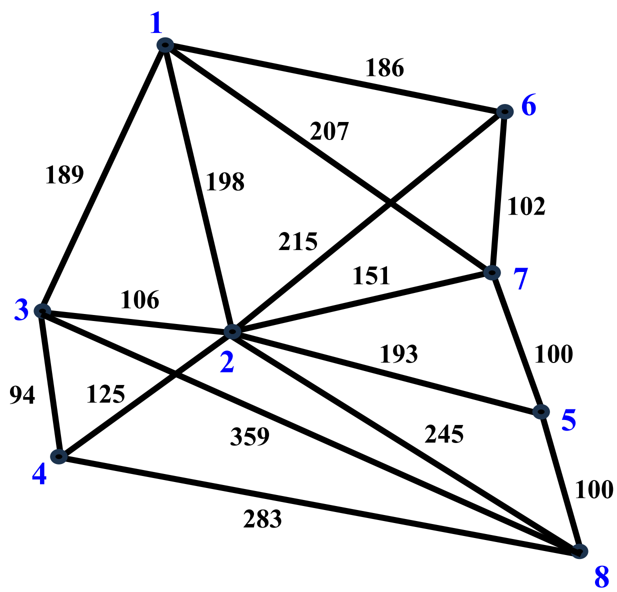


Figura 17: Grafo cujos nós representam as cidades e os comprimentos das arestas representam as distâncias entre elas.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

No algoritmo de Dijkstra, R é o conjunto dos nós rotulados que representa o caminho mínimo definitivo que foi determinado a partir do nó de origem. Diferentemente do NR, que é o conjunto dos nós não rotulados, em que esses nós estão sob análise a cada iteração, buscando-se determinar os menores caminhos mínimos a partir da origem para que, em seguida, sejam classificados como rotulados e passem a pertencerem a R.

Sejam:

$N = \{1,2,\ldots,8\}$ o conjunto de vértices do grafo;

R o conjunto dos vértices rotulados e NR o conjunto dos vértices não rotulados;

1 o vértice inicial e 8 o vértice final do caminho;

c_{ij} a distância entre os vértices i e j, ou seja, o comprimento da aresta (i,j) do grafo;

$d(n)$ a menor distância do nó 1 ao nó n;

$p(k)$ o vértice anterior ao vértice k no caminho, utilizado para recuperar o caminho mais curto até o vértice k;

CM é o conjunto de arestas que define o caminho mínimo entre o vértice 1 e o vértice 8.

Passo 1:

$R = \{1\}$: inicialmente, o nó 1 é rotulado.

$NR = \{2,\ldots,8\}$: os demais nós não são rotulados.

$d(1) = 0$: a distância do nó 1 ao nó 1 é zero.

$p(1) = 0$: pois 1 é o nó inicial.

A distância do nó inicial 1 até os nó não rotulados será considerada $+\infty$:

$d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = d(7) = d(8) = +\infty$.

Nós não rotulados não possuem predecessor. Então definimos como predecessor um nó que não pertence ao grafo, ou seja, o nó $8 + 1 = 9$:

$p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = p(8) = 9$.

$a = 1$: último nó incluído no conjunto dos rotulados R.

Passo 2: Calcular para os nós não rotulados:

$d(2) = mín\,\{d(2), d(1) + c_{12}\} = mín\{+\infty, 0 + 198\} = 198$ e $p(2) = 1$.

$d(3) = mín\,\{d(3), d(1) + c_{13}\} = mín\{+\infty, 0 + 189\} = 189$ e $p(3) = 1$.

$d(4) = mín\,\{d(4), d(1) + c_{14}\} = mín\{+\infty, 0 + \infty\} = +\infty$ e $p(4) = 9$.

$d(5) = mín\,\{d(5), d(1) + c_{15}\} = mín\{+\infty, 0 + \infty\} = +\infty$ e $p(5) = 9$.

$d(6) = mín\,\{d(6), d(1) + c_{16}\} = mín\{+\infty, 0 + 186\} = 186$ e $p(6) = 1$.

$d(7) = mín\,\{d(7), d(1) + c_{17}\} = mín\{+\infty, 0 + 207\} = 207$ e $p(7) = 1$.

$d(8) = mín\,\{d(8), d(1) + c_{18}\} = mín\{+\infty, 0 + \infty\} = mín\{+\infty, +\infty\} = +\infty$ e $p(8) = 9$.

Observe que $d(6) = 186$ é a menor distância entre as calculadas para os nós não rotulados (Figura 18). Então, o nó 6 entra para o conjunto dos nós rotulados.

$R = \{1{,}6\}$, $NR = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ e $a = 6$.

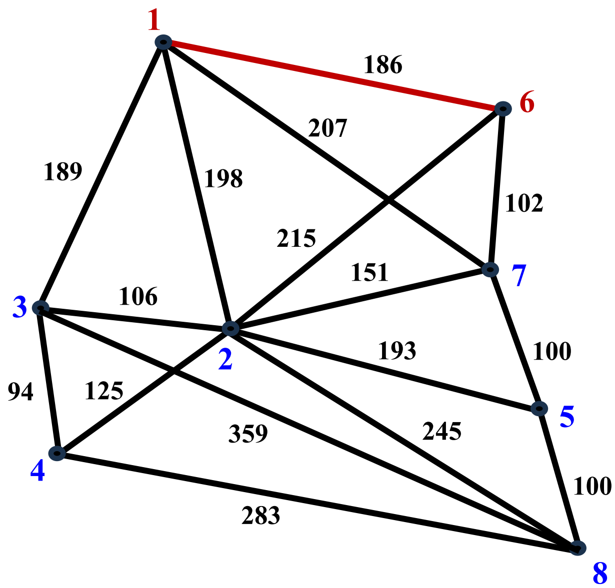


Figura 18: Nós rotulados 1 e 6. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 6.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

<u>Passo 3</u>: O nó 8 não foi rotulado. Então, voltar para o passo 2.

<u>Passo 2</u>: Calcular para os nós não rotulados:

$d(2) = mín\,\{d(2), d(6) + c_{62}\} = mín\{198, 186 + 215\} = 198$ e $p(2) = 1$.

$d(3) = mín\,\{d(3), d(6) + c_{63}\} = mín\{189, 186 + \infty\} = 189$ e $p(3) = 1$.

$d(4) = mín\,\{d(4), d(6) + c_{64}\} = mín\{+\infty, 186 + \infty\} = +\infty$ e $p(4) = 9$.

$d(5) = mín\,\{d(5), d(6) + c_{65}\} = mín\{+\infty, 186 + \infty\} = +\infty$ e $p(5) = 9$.

$d(7) = mín\,\{d(7), d(6) + c_{67}\} = mín\{207, 186 + 102\} = 207$ e $p(7) = 1$.

$d(8) = mín\,\{d(8), d(6) + c_{68}\} = mín\{+\infty, 186 + \infty\} = +\infty$ e $p(8) = 9$.

Observe que $d(3) = 189$ é a menor distância entre as calculadas para os nós não rotulados (Figura 19). Então, o nó 3 entra para o conjunto dos nós rotulados.

$R = \{1{,}6{,}3\}$, $NR = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ e $a = 3$.

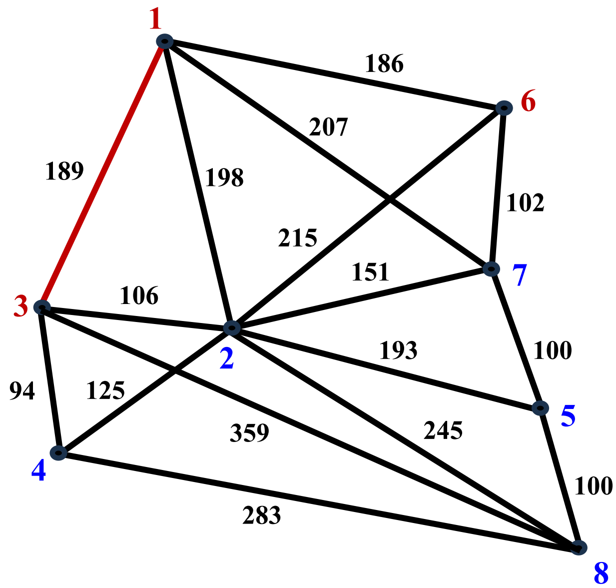


Figura 19: Nós rotulados 1, 6 e 3. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 3.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Passo 3: O nó 8 não foi rotulado. Então, voltar para o passo 2.

Passo 2:

$d(2) = mín\,\{d(2), d(3) + c_{32}\} = mín\{198, 189 + 106\} = 198$ e $p(2) = 1.$

$d(4) = mín\,\{d(4), d(3) + c_{34}\} = mín\{+\infty, 189 + 94\} = 283$ e $p(4) = 3$

$d(5) = mín\,\{d(5), d(3) + c_{35}\} = mín\{+\infty, 189 + \infty\} = +\infty$ e $p(5) = 9.$

$d(7) = mín\,\{d(7), d(3) + c_{37}\} = mín\{207, 189 + \infty\} = 207$ e $p(7) = 1.$

$d(8) = mín\,\{d(8), d(3) + c_{38}\} = mín\{+\infty, 189 + 359\} = 548$ e $p(8) = 3.$

Observe que $d(2) = 198$ é a menor distância entre as calculadas para os nós não rotulados (Figura 20). O nó 2 entra para o grupo dos nós rotulados. Assim, $R = \{1{,}6{,}3{,}2\}$, $NR = \{4, 5, 7, 8\}$ e $a = 2$.

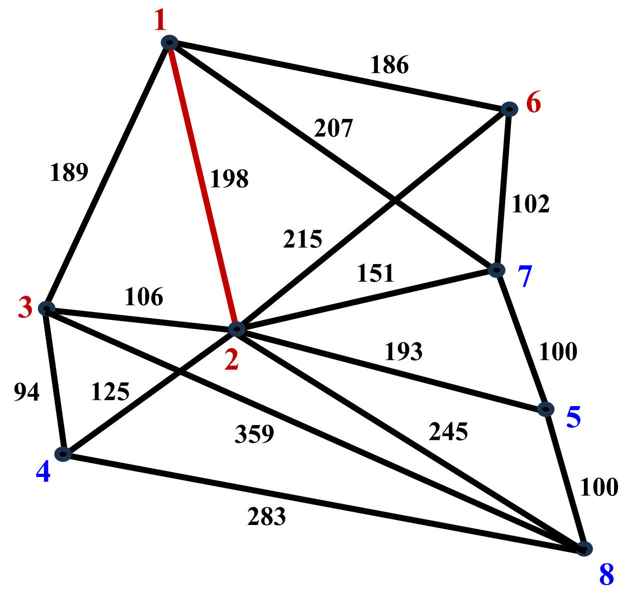


Figura 20: Nós rotulados 1, 6, 3 e 2. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 2.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Passo 3: O nó 8 não foi rotulado. Então, voltar para o passo 2.

Passo 2:

$d(4) = mín\,\{d(4), d(2) + c_{24}\} = mín\{283, 198 + 125\} = 283$ e $p(4) = 3$

$d(5) = mín\,\{d(5), d(2) + c_{25}\} = mín\{+\infty, 198 + 193\} = 391$ e $p(5) = 2$.

$d(7) = mín\,\{d(7), d(2) + c_{27}\} = mín\{207, 198 + 151\} = 207$ e $p(7) = 1$.

$d(8) = mín\,\{d(8), d(2) + c_{28}\} = mín\{548, 198 + 245\} = 443$ e $p(8) = 2$.

Observe que $d(7) = 207$ é a menor distância entre as calculadas para os nós não rotulados (Figura 21). O nó 7 entra para o grupo dos nós rotulados. Assim, $R = \{1{,}6{,}3{,}2{,}7\}$, $NR = \{4, 5, 8\}$ e $a = 7$.

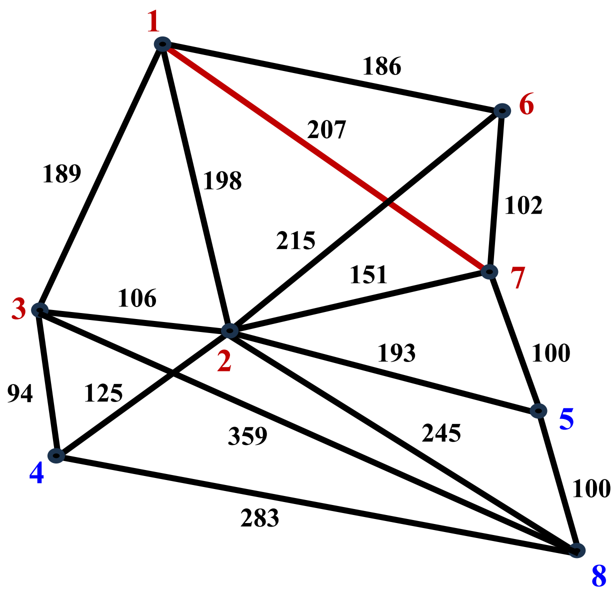


Figura 21: Nós rotulados 1, 6, 3, 2 e 7. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 7.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Passo 3: O nó 8 não foi rotulado. Então, voltar para o passo 2.

Passo 2:

$d(4) = mín\,\{d(4), d(7) + c_{74}\} = mín\{283, 207 + \infty\} = 283$ e $p(4) = 3$

$d(5) = mín\,\{d(5), d(7) + c_{75}\} = mín\{391, 207 + 100\} = 307$ e $p(5) = 7$.

$d(8) = mín\,\{d(8), d(7) + c_{78}\} = mín\{443, 207 + \infty\} = 443$ e $p(8) = 2$.

Observe que $d(4) = 283$ é a menor distância entre as calculadas para os nós não rotulados (Figura 22). O nó 4 enta para o conjunto dos nós rotulados. $R = \{1,6,3,2,7,4\}$, $NR = \{\,5,8\}$ e $a = 4$.

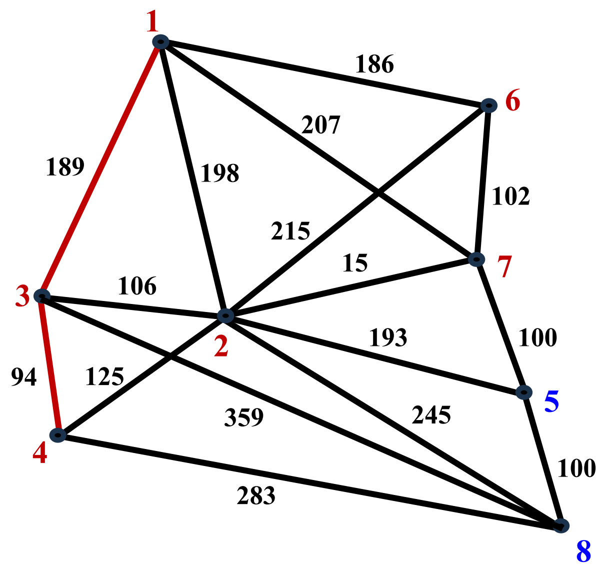


Figura 22: Nós rotulados 1, 6, 3, 2, 7 e 4. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 4.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Passo 3: O nó 8 não foi rotulado. Então, voltar para o passo 2.

Passo 2:

$d(5) = mín\,\{d(5), d(4) + c_{45}\} = mín\{307, 283 + \infty\} = 307$ e $p(5) = 7$.

$d(8) = mín\,\{d(8), d(4) + c_{48}\} = mín\{443, 283 + 283\} = 443$ e $p(8) = 2$.

Observe que $d(5) = 307$ é a menor distância entre as calculadas para os nós não rotulados (Figura 23). O nó 5 entra para o conjunto dos nós rotulados. $R = \{1,6,3,2,7,4,5\}$, $NR = \{\,8\}$ e $a = 5$.

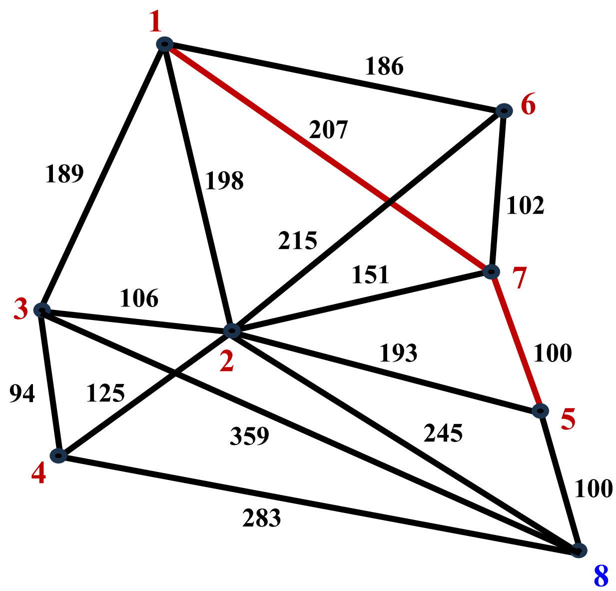


Figura 23: Nós rotulados 1, 6, 3, 2, 7, 4 e 5. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 5.

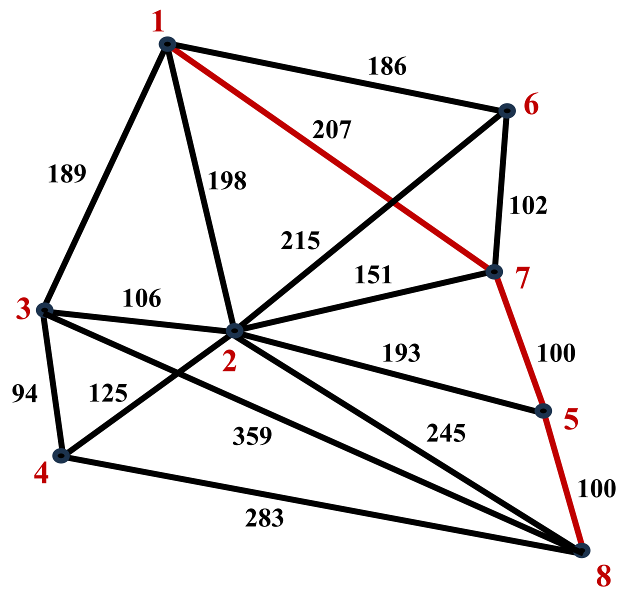
Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Passo 3: O nó 8 não foi rotulado. Então, voltar para o passo 2.

Passo 2:

$d(8) = mín\,\{d(8), d(5) + c_{58}\} = mín\{443, 307 + 100\} = 407$ e $p(8) = 5.$

Observe que $d(8) = 407$ é a menor distância entre as calculadas para os nós não rotulados (Figura 24). O nó 8 entra para o conjunto dos nós rotulados. $R = \{1,6,3,2,7,4,5,8\}$, $NR = \{\,\}$ e $a = 8$.



.

Figura 24: Nós rotulados 1, 6, 3, 2, 7, 4, 5 e 8. Caminho mínimo do nó 1 ao nó 8.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Passo 3: O nó 8 foi rotulado. Então, recuperamos o caminho mínimo fazendo:

$$p(8) = 5,\ p(5) = 7,\ p(7) = 1.$$

O caminho mínimo do nó 1 ao nó 8 é dado por: $C = \{(1,7), (7,5), (5,8)\}$.

Isso significa que, saindo de São José do Rio Preto, para fazer uma entrega em Sorocaba de modo que a distância percorrida seja mínima, a melhor rota é:

São José do Rio Preto → São Carlos → Piracicaba → Sorocaba

Distância: $\mathbf{207 + 100 + 100 = 407}\boldsymbol{km}$.

Aqui, finalizamos a aplicação do algoritmo de Dijkstra, confirmando o caminho mínimo e a distância mínima obtidos por inspeção no grafo e na matriz associada ao problema.

d) *Determine o caminho de menor distância de São José do Rio Preto até cada uma das sete cidades destacadas.*

O professor solicita que os alunos façam o levantamento por inspeção, analisando o grafo e a matriz de distâncias associados ao problema. Espera-se que os grupos apresentem os seguintes caminhos:

São José do Rio Preto → São Carlos→ Piracicaba

Distância: $207 + 100 = 307km$

São José do Rio Preto → Marília → Ourinhos

Distância: $189 + 94 = 283km$

São José do Rio Preto → São Carlos → Piracicaba → Sorocaba

Distância: $207 + 100 + 100 = 407km$

São José do Rio Preto → Marília

Distância: $189km$

São José do Rio Preto → Bauru

Distância: $198km$

São José do Rio Preto → Ribeirão Preto

Distância: $186km$

São José do Rio Preto → São Carlos

Distância: $207km$

Observe que determinar o menor caminho de São José do Rio Preto até as demais cidades consiste em aplicar o algoritmo de Dijkstra sete vezes, um vez para cada caminho mínimo solicitado.

e) *Partindo de São José do Rio Preto, apresente rotas de entrega nas sete cidades consideradas, passando por cada cidade uma única vez e retornando a cidade de origem. A seguir, verifique qual a rota de menor distância.*

Diferentes rotas podem ser construídas por inspeção, descartando aquelas que apresentam distância percorrida maiores que as anteriores. Algumas delas estão detalhadas a seguir.

Rota 1:

SJRP → Bauru → Marília → Ourinhos → Sorocaba → Piracicaba → São Carlos → R. Preto → SJRP

Distância percorrida: $198 + 106 + 94 + 283 + 100 + 100 + 102 + 186 = 1169km$

Rota 2:

SJRP → Marília → Ourinhos → Bauru → Sorocaba → Piracicaba → S. Carlos → R. Preto → SJRP

Distância percorrida: $189 + 94 + 125 + 245 + 100 + 100 + 102 + 186 = 1141km$

Rota 3:

SJRP → R. Preto → Bauru → Marília → Ourinhos → Sorocaba → Piracicaba → São Carlos → SJRP

Distância percorrida: $186 + 215 + 106 + 94 + 283 + 100 + 100 + 207 = 1169km$

Rota 4:

SJRP → R. Preto → São Carlos → Piracicaba → Sorocaba → Bauru → Ourinhos → Marília → SJRP

Distância percorrida: $186 + 102 + 100 + 100 + 245 + 125 + 94 + 189 = 1141km$

Rota 5:

SJRP → Bauru → R. Preto → São Carlos → Piracicaba → Sorocaba → Ourinhos → Marília → SJRP

Distância percorrida: $198 + 215 + 102 + 100 + 100 + 283 + 94 + 189 = 1281km$

Espera-se que os alunos percebam que determinar a melhor rota, nas condições colocadas, pode não ser uma tarefa simples, consistindo em um problema mais difícil quando comparado ao problema determinar o caminho mínimo entre duas cidades. Para a solução de problemas reais, de grande porte, algoritmos computacionais estão disponíveis para o cálculo, no entanto, o tempo e esforço computacional pode ser elevado, o que sugere métodos para obter uma solução aproximada.

Comparando as cinco rotas contruídas, percebe-se que as rotas 2 e 4 apresentam a menor distância percorrida, sendo igual a 1141km em ambos os casos. Tais rotas são denominadas soluções simétricas. A escolha entre elas pode ser feita considerando outros fatores, por exemplo, custos com pedágios.

5.2 Problema da ração

Adaptada de Arenales *et al.* (2015), esta atividade foi pensada com o objetivo de trabalhar com os alunos a operação de multiplicação de matrizes, buscando dar significado ao processo de cálculo envolvido. O problema da ração é um caso particular um de problema de otimização clássico, conhecido como problema da mistura, com aplicações em diferentes contextos.

Situação-problema:

Uma indústria de rações deve produzir um tipo de ração para um determinado animal. Essa ração é produzida a partir da mistura de farinhas de três ingredientes básicos: osso, soja e resto de peixe. Cada um desses três ingredientes contém diferentes quantidades de dois nutrientes necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. A Tabela 2 indica a fração (porcentagem) de cada nutriente em cada ingrediente. Por exemplo, a farinha de osso é constituída por 20% de proteína e 60% de cálcio. Os ingredientes são constituídos por outros nutrientes, mas que não são importantes para o problema em questão.

O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 10kg de ração. A ração deve ser composta de pelo menos 30% de proteína e 50% de cálcio. O custo por 1kg de osso, soja e restos de peixe é R$1,20, R$2,30 e R$1,50, respectivamente.

Tabela 2: Fração (porcentagem) de cada nutriente em cada ingrediente.

	Osso	Soja	Peixe
Proteína	20	50	40
Cálcio	60	40	40

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Pede-se:

a) *Utilizando 4kg de osso, 3kg de soja e 3kg de restos de peixe, qual a quantidade de proteína e cálcio em 10kg da ração obtida?*
b) *Em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça as condições nutricionais?*
c) *Em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça as condições nutricionais com o mínimo custo?*

Solução do problema proposto:

As informações da Tabela 2 podem ser organizadas em uma matriz A, relacionando uma linha a cada nutriente e uma coluna a cada ingrediente:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

O professor pode retomar o conceito de porcentagem com os alunos, apresentando a matriz A com seus elementos na forma decimal. Por exemplo, $20\% = 20/100 = 0,2$.

De maneira semelhante, os custos dos ingredientes podem ser organizados em uma matriz linha:

$$C = (1,20 \quad 2,30 \quad 1,50).$$

a) *Utilizando 4kg de osso, 3kg de soja e 3kg de restos de peixe, qual a quantidade de proteína e cálcio em 10kg da ração obtida?*

As quantidades utilizadas dos ingredientes podem ser organizadas em uma matriz coluna:

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Assim, a quantidade de cada nutriente na ração pode ser obtida a partir dos seguintes cálculos:

Proteína: $0,2 \times 4 + 0,5 \times 3 + 0,4 \times 3 = 0,8 + 1,5 + 1,2 = 3,5.$

Cálcio: $0,6 \times 4 + 0,4 \times 3 + 0,4 \times 3 = 2,4 + 1,2 + 1,2 = 4,8.$

Considerando que os alunos já conhecem os conceitos iniciais sobre matrizes, o professor pode conduzi-los a perceber que os cálculos anteriores envolvem os elementos das matrizes A e B. Assim, é possível apresentar o processo para a multiplicação de tais matrizes, de acordo com o apresentado no Capítulo 2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 4 + 0,5 \times 3 + 0,4 \times 3 \\ 0,6 \times 4 + 0,4 \times 3 + 0,4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 1,5 + 1,2 \\ 2,4 + 1,2 + 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 4,8 \end{pmatrix}$$

Quantidade de proteína (produto dos elementos da primeira linha de A pelos elementos da primeira coluna de B):

$$0,8 + 1,5 + 1,2 = 3,5.$$

Quantidade de cálcio (produto dos elementos da segunda linha de A pelos elementos da primeira coluna de B):

$$2{,}4 + 1{,}2 + 1{,}2 = 4{,}8.$$

Ou seja, a mistura dos ingredientes gerou 10kg de ração que contém 3,5kg de proteína e 4,8kg de cálcio. Este resultado atende a necessidade mínima de 3kg de proteína, mas não atende a necessidade mínima de 5kg de cálcio. Portanto, não é uma solução aceitável para o problema.

b) Em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça as condições nutricionais?

A partir do item (a), podemos fazer uma alteração na quantidade de cada ingrediente, obtendo a matriz $B' = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Assim, para o cálculo das quantidades de proteína e cálcio, fazemos a multiplicação de matrizes:

$$A \cdot B' = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1{,}5 + 0{,}8 \\ 3 + 1{,}2 + 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}3 \\ 5{,}0 \end{pmatrix}$$

Quantidade de proteína (produto da primeira linha de A pela coluna de B):

$$1 + 1{,}5 + 0{,}8 = 3{,}3.$$

Quantidade de cálcio (produto da segunda linha de A pela coluna de B):

$$3 + 1{,}2 + 0{,}8 = 5.$$

Ou seja, a mistura dos ingredientes gerou 10kg de ração que contém 3,3kg de proteína e 5kg de cálcio, atendendo as necessidades mínimas dos nutrientes.

Portanto, uma solução aceitável para o problema é utilizar 5kg de osso, 3kg de soja e 2kg de peixe. O custo total dos 10kg de ração pode ser obtido pela multiplicação de matrizes:

$$C \cdot B' = \begin{pmatrix} 1{,}20 & 2{,}30 & 1{,}50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 6{,}00 + 6{,}90 + 3{,}00 = 15{,}90\,.$$

Observe que outras soluções aceitáveis (na verdade, infinitas) podem ser apresentadas.

c) Em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça as condições nutricionais com o mínimo custo?

Neste caso, busca-se por uma solução aceitável (que atenda as necessidades mínimas de nutrientes) e que, além disso, tenha o menor custo possível, o que não consiste em uma tarefa fácil. Na verdade, o objetivo deste item é fazer com que os alunos percebam a dificuldade em encontrar esta solução, que é denominada “solução ótima” do problema. Algumas tentativas podem ser realizadas pelos alunos, que podem enumerar algumas soluções aceitáveis, calcular o custo de cada uma e fazer uma comparação.

A solução ótima para este problema consiste em utilizar 5kg de osso e 5kg de peixe, com custo total igual a R$13,50.

A título de curiosidade, a modelagem matemática do problema da mistura é composta por expressões matemáticas lineares. Como uma extensão desta atividade, a modelagem matemática pode ser trabalhada, por exemplo, de forma extracurricular, dependendo do interesse dos alunos e da realidade da escola. O modelo matemático para o problema da ração proposto nesta seção está apresentado no Anexo 1.

6 DISCUSSÃO DE DADOS

A análise das atividades propostas evidencia que a abordagem de matrizes e grafos, quando articulada a problemas de otimização, cria um ambiente fecundo para a construção de significados matemáticos pelos estudantes do ensino médio. Embora o conteúdo de matrizes não conste formalmente na BNCC, mas é parte dos currículos escolares no campo da álgebra indicada na BNCC, sua introdução mediada por situações-problema como logística de distribuição, caminhos mínimos e mistura de nutrientes, permite aproximar os alunos de práticas contemporâneas da matemática aplicada, favorecendo a compreensão de relações, estruturas e tomadas de decisão.

Do ponto de vista conceitual, os dados construídos ao longo das atividades, como as matrizes de distâncias, as matrizes de adjacência, o esquema das cidades, o grafo (Figura 15) e os cálculos relacionados às rotas, mostram que os estudantes podem mobilizar, de forma integrada, conhecimentos de cálculo, organização tabular, leitura de diagramas e análise combinatória simples. Isso reforça a ideia de Zabala (1998) de que as sequências didáticas permitem a articulação de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais dentro de um mesmo eixo de investigação.

A implementação da sequência didática de Fedathi é projetada para ocorrer ao longo de três a quatro aulas, com o objetivo de ser introduzida em um momento anterior à apresentação formal do conteúdo de matrizes aos alunos. Essa estratégia justifica o estudo posterior do conteúdo, mostrando, a partir das noções intuitivas de grafos em um problema de otimização, a construção de esquemas ao inspecionar tabelas cujos valores são essenciais para resolver o problema. Enquanto para o problema da mistura, a ideia é que, após a consolidação do conteúdo introdutório de matrizes, o tema possa ser avançado para tratar a operação de multiplicação com matrizes. O formato de trabalho ideal é a atividade em grupo, essencial para fomentar discussões, conjecturas e o compartilhamento de estratégias entre os alunos.

Nesse cenário, o foco está no papel ativo dos alunos, que são desafiados a construir o seu próprio conhecimento. O professor, por sua vez, assume o papel de mediador, intervindo apenas para orientar o aluno a atingir o objetivo quando necessário, seguindo rigorosamente as etapas da sequência de Fedathi para a aprendizagem de matrizes, grafos e otimização.

Dentre os ganhos pedagógicos, a interdisciplinaridade se estabelece com a geografia, pois o aluno precisa entender as conexões entre as cidades no mapa para identificar os caminhos diretos no contexto em questão para análise. Além disso, a conexão com o mundo do trabalho é direta, pois a matemática se torna fundamental para otimizar processos, como é o caso específico da distribuição de materiais hospitalares e o problema da ração, que aparecem como situações-problemas.

Outro ganho fundamental é a ampliação das possibilidades de representação simbólica de dados contextuais, que auxilia diretamente na operação e análise do problema. Essa abordagem integrada articula, de forma prática, o aporte de Zabala (1998) quanto à organização, a Sequência Fedathi que estrutura a ação e as bases da investigação matemática e resolução de problemas com um fundamento investigativo.

No contexto da sequência de Fedathi, cada etapa oferece pistas importantes para a discussão. Na fase de tomada de posição, os dados iniciais, mapa, tabela de distâncias e situação-problema, funcionam como elementos de mobilização cognitiva, permitindo que o aluno leia o cenário e formule suas primeiras conjecturas.

A fase de maturação aparece como central, pois é nela que as produções dos estudantes (esquemas, rascunhos de trajetos, primeiras tentativas de matriz) revelam não apenas compreensão dos dados, mas também estratégias de exploração do problema, em consonância com autores da investigação matemática e resolução de problemas.

A fase de solução, em que os alunos sistematizam a matriz, discutem sua simetria e interpretam o papel da diagonal principal, já mostra uma aprendizagem que transcende a manipulação algorítmica e se aproxima da reflexão em matemática. A elaboração do grafo e sua relação com as matrizes apresentadas destaca um entendimento mais sofisticado de modelagem e representação.

A etapa de avaliação, organizada pelo professor, permite consolidar os dados obtidos: validar trajetos mínimos, discutir alternativas, comparar estratégias dos grupos e formalizar a interpretação dos elementos matriciais. Vê-se aí como a Fedathi promove deslocamento do ensino tradicional, dando ao aluno lugar de investigador e ao professor o papel de mediador, como enfatizado por Sousa *et al.* (2013).

No conjunto, os dados analisados apontam que o trabalho com problemas de otimização se mostra adequado para: conectar matemática e realidade, permitindo que o aluno compreenda decisões logísticas reais; favorecer o desenvolvimento de competências da BNCC, como investigação, formulação de hipóteses, análise crítica e tomada de decisão; ampliar o repertório matemático, introduzindo conceitos pouco explorados no currículo regular; fortalecer a autonomia intelectual, uma vez que os alunos precisam justificar trajetórias, validar resultados e comparar alternativas; estimular o raciocínio lógico-dedutivo, especialmente ao relacionar representações gráficas, tabelas e matrizes.

Desse modo, a discussão dos dados mostra que o uso articulado dos conceitos de grafos e matrizes, no contexto da otimização e dentro de uma sequência didática investigativa, tem potencial para transformar a experiência de aprendizagem matemática, aproximando-a da natureza viva, aplicada e estrutural da disciplina.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a conclusão desta pesquisa, foi possível perceber as diferentes perspectivas de aplicações de um contexto real e prático, que pretende proporcionar uma aprendizagem significativa ao aluno para o conteúdo de matrizes e grafos, aliado à área de otimização matemática. Diante disso, a expansão do ensino de matemática prevendo aspectos não usualmente integrados ao currículo permite que atividades desse viés sejam elaborados, garantindo a coerência com o objetivo que o professor almeja e espera alcançar de seus alunos em sala de aula, contemplando o ensino-aprendizagem eficaz.

Os desafios envolvendo o ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula trazem consigo a responsabilidade para concretizar uma mudança de postura dos professores e alunos, na execução concreta de uma condução de aula focada nos objetivos necessários e uma aprendizagem focada no autodesenvolvimento do conhecimento significativo, respectivamente.

Ao dispor da proposta trazida, a partir de uma situação-problema envolvente, por exemplo, ela possibilita uma utilização de diferentes abordagens de ensino de matemática trabalhadas de forma integrada, promovendo o despertar de um conjunto de competências importantes para os alunos. Uma aplicação bem-sucedida de propostas metodológicas que possuem intencionalidade pedagógica permite instigar o aluno a desenvolver disciplina, independentemente da motivação, para solucionar problemas complexos.

Ademais, a sequência didática de Fedathi foi fundamental para o processo de mediação por parte do professor e o aluno como construtor do próprio conhecimento. A sua colaboração interferiu diretamente em como a proposta foi pensada em uma aplicação para o contexto em sala de aula, guiando e conduzindo a aula, de forma que o professor pudesse cumprir, além das competências exigidas pela BNCC, a integração de conteúdos matemáticos com situações existentes da realidade.

É totalmente possível e coerente articular os referenciais de Zabala (1998), a sequência didática de Fedathi em Sousa *et al.* (2013), a investigação matemática em Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) e a resolução de problemas em Allevato e Onuchic (2009), Dante (2011) e Polya (1995), pois todos convergem no objetivo de colocar o estudante no centro do processo investigativo.

As sequências didáticas em Zabala (1998) oferecem uma organização para a progressão das tarefas pedagógicas e a Sequência Fedathi de Sousa *et al.* (2013) é a estrutura que coloca em prática o processo, enfatizando a mediação intencional, o tempo pedagógico e a construção independente do conhecimento, enquanto a investigação matemática e a resolução de problemas sustentam o princípio epistemológico de que a aprendizagem ocorre por meio de situações desafiadoras.

Sendo assim, trazer propostas e abordagens conhecendo o problema ou a carência que deseja sanar é fundamental para que possa envolver a participação ativa do aluno no desenvolvimento e construção do seu próprio conhecimento, proporcionando com maior clareza o objetivo para uma determinada aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p. 133–154, jul./dez. 2009.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. Por uma educação matemática crítica: a modelagem matemática como alternativa. **Educação Matemática Pesquisa** Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 12, n. 2, 2010.

ARENALES, M. N., ARMENTANO, V., MORABITO, R., YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2015.

BORDANAVE, I. **Estratégias de aprendizagem.** São Paulo: Vozes, 1983.

NETO, H. B. *et al*. A Sequência de Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORDESTE, 15., 2001, São Luís. **Anais...** São Luís, 2001.

BRANCO, E. P; ZANATTA, S. C. BNCC e Reforma do Ensino Médio: implicações no ensino de Ciências e na formação do professor. **Revista Insignare Scientia - RIS**, v. 4, n. 3, p. 58-77, mar. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)**. DOU, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

BRASIL. Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. **Institui o Novo Ensino Médio**. DOU, Brasília, DF, 17 fev. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, A. R. dos S. *et al.* Interdisciplinaridade e BNCC: limites e perspectivas. **Revista Científica de Alto Impacto**, v. 29, n. 141, dez. 2024.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra linear e aplicações**. 6. ed. reform. São Paulo: Atual, 2013.

CASTRO, G. A. M. *et al.* Desafios para o professor de ciências e matemática revelados pelo estudo da BNCC do ensino médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 15, n. 2, p. 1-32, 2020.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.

DAVIS JR., C. A. **Aumentando a eficiência da solução de problemas de caminho mínimo em SIG**. Belo Horizonte: Empresa de Informática e Informação do Município de Belo Horizonte S.A. – PRODABEL, 1997.

FONTE, C. C. **Introdução aos Grafos no Ensino Médio**. 2014. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

LOZANO, D. **Modelagem matemática e aplicações do problema de coloração em grafos**. 2007. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2007.

PONTE, J. P. de; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 160 p.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** 2.ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SOUSA, F. E. E. de *et al*. **Sequência Fedathi:** uma proposta para o ensino de matemática e ciências. Fortaleza: Edições UFC, 2013. 184 p.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Algebra Linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

VERTUAN, R. E.; BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. de. O papel da mediação e da intencionalidade em atividades de modelagem matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 7, n. 3, p. 63–80, 2013.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ANEXO 1

Modelagem matemática do problema da ração proposto na Seção 5.2

Sejam:

x: quantidade (em kg) de farinha de osso utilizada na ração;

y: quantidade (em kg) de farinha de soja utilizada na ração;

z: quantidade (em kg) de farinha de peixe utilizada na ração.

O custo total para a produção de 10kg da ração pode ser expresso por uma função que depende de x, y e z:

$$f(x,y,z) = 1{,}2x + 2{,}3y + 1{,}5z.$$

Inequações para garantir as necessidades mínimas de proteína e cálcio na ração:

$$0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}4z \geq 3,$$

$$0{,}6x + 0{,}4y + 0{,}4z \geq 5.$$

A soma dos ingredientes deve resultar em 10kg da ração (mistura):

$$x + y + z = 10.$$

A quantidade de cada ingrediente (em kg) deve ser um número real não negativo:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

Modelo matemático:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} \quad f(x,y,z) = 1{,}2x + 2{,}3y + 1{,}5z.\\
&\text{sujeito a:}\\
&\qquad 0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}4z \geq 3\\
&\qquad 0{,}6x + 0{,}4y + 0{,}4z \geq 5\\
&\qquad x + y + z = 10\\
&\qquad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}$$

Modelo matemático na forma padrão:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} \quad f(x,y,z) = 1{,}2x + 2{,}3y + 1{,}5z.\\
&\text{sujeito a:}\\
&\qquad 0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}4z - t = 3\\
&\qquad 0{,}6x + 0{,}4y + 0{,}4z - w = 5\\
&\qquad x + xy + z = 10
\end{aligned}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0, w \geq 0$$

sendo t e w variáveis de excesso, que representam a quantidade além das necessidades mínimas de proteína e cálcio, respectivamente, contidas na ração preparada.

Forma matricial para o modelo matemático na forma padrão:

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,4 & -1 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0,4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Maiores detalhes sobre o problema da mistura, bem com diferentes aplicações, podem ser encontrados em Arenales *et al.* (2015).