

ROBERTO AUGUSTO CARRÉ

GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DE
PROCESSOS MULTIVARIADOS AUTOCORRELACIONADOS

Monografia apresentada ao
Conselho de Curso de Graduação
em Engenharia de Produção
Mecânica da Faculdade de
Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista como parte dos
requisitos para obtenção do
diploma de Graduação em
Engenharia de Produção
Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Marcela Aparecida Guerreiro Machado

Guaratinguetá

2012

C31
1g

Carré, Roberto Augusto

Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados / Roberto Augusto Carré – Guaratinguetá : [s.n], 2012.

50 f : il.

Bibliografia: f. 47-50

Trabalho de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012.

Orientadora: Prof^a Dr^a Marcela A. Guerreiro Machado de Freitas

1. Controle de qualidade – Métodos estatísticos 2. Autocorrelação (Estatística) I. Título

CDU 658.56

**GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS
MULTIVARIADOS AUTOCORRELACIONADOS**

Roberto Augusto Carré

**ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO
COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
GRADUADO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO MECÂNICA**

**APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO
DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO MECÂNICA**



Prof. Dr. Francisco Alexandre de Oliveira
Coordenador

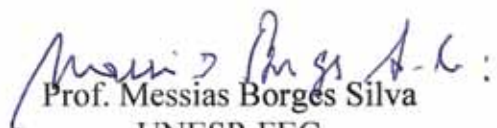
Banca examinadora:



Prof. Dra. Marcela Aparecida Guerreiro Machado
Orientador/UNESP-FEG



Prof. Antônio Fernando Branco Costa
UNESP-FEG



Prof. Messias Borges Silva
UNESP-FEG

Dezembro de 2012

DADOS CURRICULARES

ROBERTO AUGUSTO CARRÉ

NASCIMENTO	09.07.1989 SANTOS/SP
FILIAÇÃO	Roberto Carlos Carré Olívia Ramos Carré
2008/2012	Curso de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.

DEDICATÓRIA

de modo especial, aos meus pais e irmãos, que sempre me incentivaram em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte de vida e esperança. Agradeço pela minha vida, minha família e meus amigos,

à minha orientadora, *Prof. Dra. Marcela Aparecida Guerreiro Machado* e ao *Prof. Dr. Antônio Fernando Branco Costa* que jamais deixaram de me incentivar. Sem a orientação, dedicação e auxílio deles, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível.

aos meus pais *Roberto Carlos Carré* e *Olívia Ramos Carré* que sempre incentivaram meus estudos.

CARRÉ, R. A. **Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados**. 2012. 52 f. Monografia de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

RESUMO

O avanço tecnológico e a disponibilidade de recursos computacionais vêm facilitando a obtenção e o tratamento dos dados. Assim sendo, a tendência natural no monitoramento de processos é o controle simultâneo de várias características de qualidade. Em processos automatizados, as observações são, em geral, autocorrelacionadas. Estudos com o gráfico de $\bar{X}$, para processos univariados têm mostrado que a autocorrelação reduz a capacidade deste em sinalizar alterações no processo. Neste trabalho, estuda-se os processos multivariados autocorrelacionados. Por meio de simulações são obtidas as propriedades dos gráficos de $\bar{X}$, no monitoramento do vetor de médias; as propriedades dos gráficos de VMAX, no monitoramento da matriz de covariâncias; e as propriedades dos gráficos de MCMAX, no monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias. O que se conclui é que o aumento da autocorrelação e do número de variáveis sob monitoramento reduz o poder dos gráficos em sinalizar uma causa especial.

PALAVRAS-CHAVE: Gráfico de T^2 de Hotelling, variância amostral generalizada $|S|$, processos multivariados, vetor de médias, matriz de covariâncias e autocorrelação

CARRÉ, R. A. **Control charts for monitoring multivariate autocorrelated processes**. 2012. 52 p. Graduation Work (Industrial Engineering), Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

ABSTRACT

Technological advances and the availability of computational resources have been facilitating the collection and processing of data. Thus, the natural tendency of the monitoring processes is the simultaneous control of various quality characteristics. In automated processes, observations are generally autocorrelated. Studies with univariate graph for processes have shown that the autocorrelation reduces the ability of this signal changes in the process. In this paper, we study the multivariate autocorrelated processes. Through simulations are obtained properties of graphs, monitoring the mean vector, the properties of graphs VMAX, in monitoring the covariance matrix, and the properties of graphs MCMAX, the simultaneous monitoring of mean vector and covariance matrix. Conclude that increasing the autocorrelation and the number of variables being monitored, reduces the power of the graphics in signal of a special cause.

KEYWORDS: Hotelling's T^2 control chart, generalized variance $|S|$ chart, multivariate processes, mean vector, covariance matrix and autocorrelation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de gráficos de controle de $\bar{X}$, sendo: (I) processo fora de controle; (II) processo sobre controle.....	17
Figura 2 – Gráfico de $\bar{X}$ - ocorrência de um alarme falso.....	18
Figura 3 – Gráfico de $\bar{X}$ - ocorrência de um alarme verdadeiro.....	19
Figura 4 – Gráficos de $\bar{X}$ ($p=2$; $n = 4$ e 5).....	31
Figura 5 – Gráficos de $\bar{X}$ ($p=3$; $n = 5$; $\delta = 0,5$ em todas as variáveis).....	35
Figura 6 – Gráficos de $\bar{X}$ ($n = 5$; $\delta = 0,5$ nas três primeiras variáveis).....	35
Figura 7 – Gráficos de $\bar{X}$ ($n = 5$; $\delta = 0,5$ em todas as variáveis).....	36
Figura 8 – Gráficos de VMAX ($p=2$; $n=5$; $\rho = 0$; $a_1^2=a_2^2=1,5$ e $\Phi_1= \Phi_2=0,5$).....	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=2$; $n = 4$ e 5).....	30
Tabela 2 – Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=3$; $n = 5$).....	31
Tabela 3 – Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=4$; $n = 5$).....	32
Tabela 4 – Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=5$; $n = 5$).....	32
Tabela 5 – Limites de controle para os gráficos SU $\bar{X}$	32
Tabela 6 – Valores de NMA_S para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=2$; $n = 5$).....	33
Tabela 7 – Valores de NMA_S para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=3$; $n = 5$).....	33
Tabela 8 – Valores de NMA_S para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=4$; $n = 5$).....	34
Tabela 9 – Valores de NMA_S para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=5$; $n = 5$).....	34
Tabela 10 – Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para o gráfico de VMAX ($p=2$; $n = 5$; caso I).....	37
Tabela 11 – Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para o gráfico de VMAX com regra especial de decisão ($p=2$; $n = 5$; caso I).....	38
Tabela 12 – Valores de NMA_S para os gráficos VMAX ($p=2$; $n = 5$; $\rho = 0$).....	39
Tabela 13 – Influência da autocorrelação no desempenho do gráfico MCMAX($\rho = 0$, $n=5$, $L=5$).....	40
Tabela 14 – Influência da autocorrelação no desempenho do gráfico MCMAX($\rho = 0$, $n=5$, $L=5$, $p=4$).....	42
Tabela 15 – Influência da autocorrelação no desempenho do gráfico MCMAX($\rho = 0$, $n=5$, $L=5$, $p=5$).....	43

LISTA DE SÍMBOLOS

X_i	- Variável de interesse i
μ_i	- Média da variável X_i
μ_{0i}	- Média da variável X_i em controle
μ	- Vetor de médias do processo
μ_0	- Vetor de médias com o processo em controle
μ_1	- Vetor de médias do processo após a ocorrência da causa especial
σ_i	- Desvio-padrão da variável X_i
$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$	- Covariância entre X_i e X_j
σ_i^2	- Variância de X_i
ρ	- Coeficiente de correlação
Σ_0	- Matriz de covariâncias com o processo em controle
T^2	- Estatística de Hotelling com distribuição de Qui-Quadrado
δ_i	- Deslocamento da média da variável X_i em relação ao seu valor-alvo
p	- Número de variáveis do processo
LC	- Limite de controle
α	- Probabilidade de alarme falso – erro do tipo I
β	- Probabilidade de não-detecção – erro do tipo II
d	- Raiz quadrada da soma dos quadrados dos deslocamentos das médias das variáveis X_i
λ_d	- Parâmetro de não-centralidade do gráfico de controle de T^2
$\bar{X}$	- Média amostral
α'	- Erro total do tipo I
$f(z_1, z_2)$	- Função densidade conjunta de uma distribuição normal bivariada com correlação ρ

λ	- Autovalor
LSC	- Limite superior de controle
LIC	- Limite inferior de controle
$ S $	- Variância amostral generalizada
Σ	- Matriz de covariâncias após a ocorrência da causa especial
Σ_1	- Matriz de covariâncias após a ocorrência da causa especial
Σ_2	- Matriz de covariâncias após a ocorrência da causa especial e com alteração de ρ
a_i	- Aumento do desvio-padrão
γ	- Magnitude da perturbação
ρ'	- Coeficiente de correlação após a ocorrência da causa especial
S_i^2	- Variância de X_i
p_d	- Probabilidade de alarme verdadeiro
NMA	- Número médio de amostras até o sinal
NMA_0	- Número médio de amostras até o sinal durante o período em controle
NMA_{ss}	- NMA que mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que ocorre após um longo e indeterminado período de operação em controle
NA	- Número de amostras conformes entre ocorrências de amostras não-conformes
L	- Número máximo de amostras entre amostras não-conformes para que se tenha um alarme no gráfico de controle de VMAX com regra especial de decisão
k	- Fator de abertura dos limites de controle
k_1	- Fator de abertura do limite de controle LC_1
k_2	- Fator de abertura do limite de controle LC_2
ϕ	- Coeficiente autoregressivo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	14
1.2	JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA.....	16
1.3	OBJETIVOS.....	17
1.4	METODOLOGIA.....	17
2	GRÁFICOS DE CONTROLE.....	18
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	18
2.2	ALARMES NO GRÁFICO DE $\bar{x}$	19
2.3	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE.....	21
2.4	GRÁFICOS DE CONTROLE USUAIS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS.....	21
2.5	AUTOCORRELAÇÃO.....	23
2.5.1	MODELO DO PROCESSO.....	25
3	GRÁFICOS UTILIZADOS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS AUTOCORRELACIONADOS.....	26
3.1	GRÁFICOS DE $\bar{x}$ UNIVARIADOS.....	26
3.2	GRÁFICO DE CONTROLE VMAX – CASO MULTIVARIADO.....	27
3.2.1	GRÁFICO DE VMAX COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO.....	28
3.3	GRÁFICO DE CONTROLE MCMAX.....	29
4	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS.....	30
4.1	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE $\bar{x}$ UNIVARIADOS.....	30
4.2	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE VMAX.....	37
4.2.1	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE VMAX COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO.....	38
4.2.2	GRÁFICO DE VMAX COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO PARA DADOS AUTOCORRELACIONADOS.....	40
4.3	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE MCMAX PARA DADOS AUTOCORRELACIONADOS.....	40

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS.....	45
5.1 CONCLUSÕES.....	45
5.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS.....	46
REFERÊNCIAS.....	47

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Sabe-se que os fatores históricos, quase sempre, norteiam o homem no desenvolvimento de mudanças. Além disso, há uma necessidade natural de aprimoramento, que se evidencia em todas as escalas do conhecimento. Essas considerações se validam também acerca do estudo de processos de produção, que teve início na década de 20 quando o Dr. Walter A. Shewhart dos Laboratórios *Bell* criou as cartas de controle univariadas. Esse modelo, conhecido como cartas de controle de Shewhart, surgiu pela necessidade do monitoramento de processos. O método se consolidou nas décadas seguintes, principalmente após a 2ª Guerra mundial, onde a utilização dessa ferramenta foi bastante intensificada. O sistema teve sua popularização evidenciada durante a implantação do Programa da Qualidade Total, no Japão, pelas mãos de Deming e Juran.

O objetivo da carta de controle de Shewhart (1926) era criar limites de controle que facilitassem o monitoramento da qualidade de um processo verificando se este era estável em relação a parâmetros estabelecidos previamente. Além disso, havia um interesse em averiguar se existiam causas especiais que atuavam sobre ele. Quando causas especiais eram detectadas nas ditas cartas (pontos fora dos limites de controle) o processo deveria sofrer correções, a fim de que retornasse à condição de controle estatístico. Na maioria das vezes, as cartas de controle de Shewhart tinham como suposição a distribuição normal da característica de qualidade.

Embora tenha representado grande avanço, um dos problemas dessas cartas é que elas eram apropriadas somente para a análise de uma variável do processo. Portanto, quando neste existia mais de uma variável (processo multivariado), várias cartas de controle deveriam ser utilizadas simultaneamente e de forma independente para que fosse feito o monitoramento do processo. Dessa forma,

quando as variáveis eram correlacionadas entre si, as cartas de controle não incorporavam essa correlação o que podia gerar conclusões incorretas sobre a estabilidade do processo.

Outro fator de influência negativa sobre a análise de processos multivariados, utilizando várias cartas de controle de forma independente, era que essa análise promovia um aumento do nível de significância global do processo. Por consequência, era gerado um aumento no número de alarmes. Alguns autores, utilizando a metodologia proposta por Bonferroni (1930), tentaram fazer uma correção nesse nível de significância, fazendo com que o processo tivesse um nível de significância global fixo. Porém, tal ideia logo foi abandonada, uma vez que, as cartas de controle com os limites corrigidos apresentavam limites de controle maiores do que os obtidos sem a correção do nível de significância, fazendo com que os gráficos perdessem o poder.

Na tentativa de solucionar o problema da incorporação da correlação na análise do processo multivariado, alguns autores desenvolveram técnicas estatísticas que incorporavam a correlação das variáveis do processo às cartas de controle. Um dos primeiros trabalhos desenvolvidos na literatura, que aborda essa incorporação, foi o trabalho de Harold Hotelling, que em 1947 propôs a criação da estatística T^2 .

O gráfico de controle T^2 (HOTELLING (1947)), desde o momento de sua criação, se tornou o dispositivo estatístico de maior aplicação no monitoramento do vetor de médias de duas ou mais características de qualidade correlacionadas ou não. Lowry e Montgomery (1995) fazem uma revisão dos gráficos de controle multivariados. Mason e Young (2002) discutem exaustivamente as aplicações do gráfico de controle T^2 .

O gráfico de controle T^2 de *Hotelling* é análogo ao gráfico $\bar{X}$ de *Shewhart*, sendo ambos pouco sensíveis a pequenas alterações no processo. Desta forma, métodos estatísticos tais como o esquema CUSUM e o gráfico de EWMA, ver Costa et al (2005); Epprecht e Carpinetti (2005) têm sido utilizados para o caso multivariado em que o vetor de médias está sujeito a pequenas alterações (ver Woodal e Ncube (1985); Crosier (1988); Pignatiello e Runger (1990); Lowry et

al. (1992); Lowry e Montgomery (1995); Prabhu e Runger (1997); Qiu e Hawkins (2001)).

Machado (2006) e Costa e Machado (2007) obtiveram as propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem dupla e com regra especial de decisão.

Assim como é imprescindível monitorar o vetor de médias de um processo, é igualmente importante monitorar a sua matriz de covariâncias Σ (YEH *et al.*, 2003, 2004, 2005; SURTIHADI *et al.*, 2004; GRIGORYAN e HE, 2005).

1.2 JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA

Os gráficos de controle são, em geral, planejados assumindo que observações consecutivas do processo são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Entretanto, com o aumento da complexidade e dos níveis de automação dos processos industriais, esta hipótese é frequentemente violada na prática. Afinal, a maioria dos processos apresenta autocorrelação. Se a autocorrelação na variável sobre monitoramento é uma causa especial, deve-se tentar eliminá-la. Por outro lado, se ela é parte inerente da variabilidade resultante de causas comuns e não pode ser removida, deve-se levá-la em consideração no planejamento das cartas de controle. Evitando-se, por conseguinte, estimativas incorretas de seus parâmetros, que refletem em aumento na taxa de alarmes falsos ou no número de amostras necessárias para detecção de deslocamentos na média do processo (VANDER WIEL, 1996; REYNOLDS; LU, 1997; VAN BRACKLE, III; REYNOLDS, 1997; LU; REYNOLDS, 1999).

Os processos multivariados são inúmeros e o seu monitoramento tem recebido grande enfoque de pesquisas (BERNARD (2001) e SKINNER (2002)).

Portanto, esse estudo se mostra de grande importância ao se propor estudar o desempenho dos gráficos multivariados e autocorrelacionados. A autocorrelação e o monitoramento de várias características de qualidade são questões atuais e que têm despertado o interesse de muitos pesquisadores. Esse interesse resulta da necessidade de alcançar um avanço cada vez maior na área. (THOMAS (2002), KONRATH (2002), GRIGORYAN (2003) e TESTIK (2003)).

1.3 OBJETIVOS

- Objetivo Geral

Estudar as propriedades dos gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados, a fim de atingir uma melhoria para os processos.

- Objetivos Específicos

- i. Obter, por meio de simulações, as propriedades dos gráficos de controle de $\bar{X}$;
- ii. Obter, por meio de simulações, as propriedades dos gráficos de controle de VMAX;
- iii. Obter, por meio de simulações, as propriedades dos gráficos de controle de MCMAX;
- iv. Comparar a eficiência dos gráficos de controle estudados nos itens acima.

1.4 METODOLOGIA

A etapa inicial do trabalho consistiu na elaboração de programas e a geração dos dados e tabelas para os gráficos de controle de $\bar{X}$.

A etapa seguinte consistiu na elaboração de programas e geração dos dados e tabelas para os gráficos de controle de VMAX.

Na terceira etapa, foram elaborados programas e gerados dados e tabelas para o gráfico de controle de MCMAX.

E, por fim, analisaram-se todos os dados e tabelas das etapas anteriores.

2. GRÁFICOS DE CONTROLE

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O principal objetivo do gráfico de controle é visualizar mudanças do processo. Além do monitoramento, o uso dos gráficos de controle proporciona outras vantagens indiretas. Estas são: verificações periódicas do desempenho no setor produtivo; comparações da qualidade e de produtos provenientes de outros setores e, o que talvez seja o mais importante, a motivação para a qualidade no pessoal envolvido com a produção (BRAVO, 1995).

Pode-se dizer que os gráficos de controle são registros gráficos dos dados mensurados em um ponto crítico do processo, construídos num sistema de coordenadas cartesianas. O eixo vertical do gráfico é representado pelas medidas feitas de uma determinada característica do produto, ou seja, é a variável que está sendo controlada. O eixo horizontal é representado pelo número do subgrupo. Um modelo de gráfico de controle pode ser observado na Figura 1.

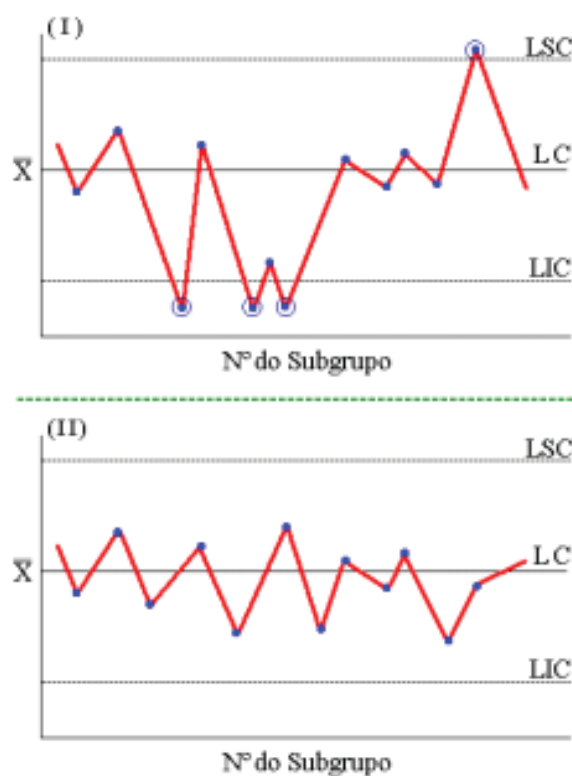


Figura 1 – Exemplo de gráficos de controle de $\bar{X}$, sendo: (I) processo fora de controle; (II) processo sobre controle.

Na Figura 1 existem três linhas paralelas ao eixo das abscissas. A linha cheia no centro do gráfico é identificada como uma linha central (LC) pode ser a média dos dados plotados ou a média das médias ($\bar{\bar{X}}$). Também pode ser um valor de referência X_0 , baseado em dados históricos como por exemplo, valores econômicos de custo de produção em necessidade de serviço. E ainda, pode ser a média da população μ . As duas linhas pontilhadas são chamadas de limites de controle, ou seja, limite inferior de controle (LIC) e limite superior de controle (LSC), sendo estes limites de controle usados para avaliar as variações da qualidade entre os subgrupos, ou seja, para detectar as causas especiais. De acordo com Rotondaro (2002, p. 297), “*A causa especial costuma ser chamada de causa esporádica em virtude de sua natureza, diferencia-se da causa comum pelo fato de produzir resultados discrepantes em relação aos demais valores*”.

2.2. ALARMES NO GRÁFICO DE CONTROLE

Quando um gráfico sinaliza, a causa especial em ação, ela não necessariamente existe. Existem dois tipos de erros que, possivelmente, podem ocorrer no uso do gráfico de controle. O erro do tipo I acontece quando o processo está em um estado de controle estatístico, mas, tem-se o risco α de um ponto cair fora dos limites de controle. Em outras palavras, há a sinalização errônea de uma causa especial (“*alarme falso*”). A Figura 2 retrata um alarme falso no gráfico de $\bar{\bar{X}}$. O erro do tipo II acontece quando o processo está fora de controle, portanto sob a influência de uma causa especial, porém tem-se o risco β de um valor de ponto cair dentro dos limites de controle, não sinalizando assim a existência da causa especial. A Figura 3 retrata a ocorrência de um alarme verdadeiro no gráfico de $\bar{\bar{X}}$.

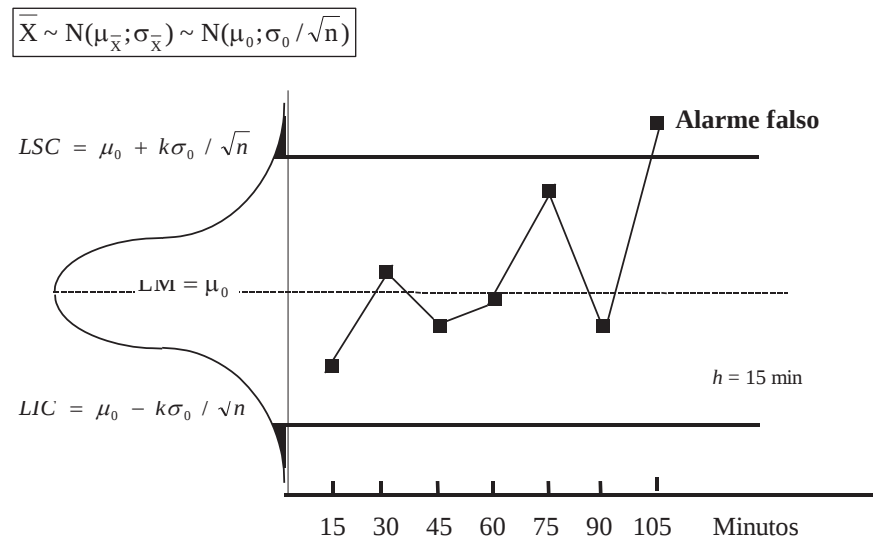


Figura 2: Gráfico de $\bar{X}$ - ocorrência de um alarme falso (Fonte: Costa et al., 2005)

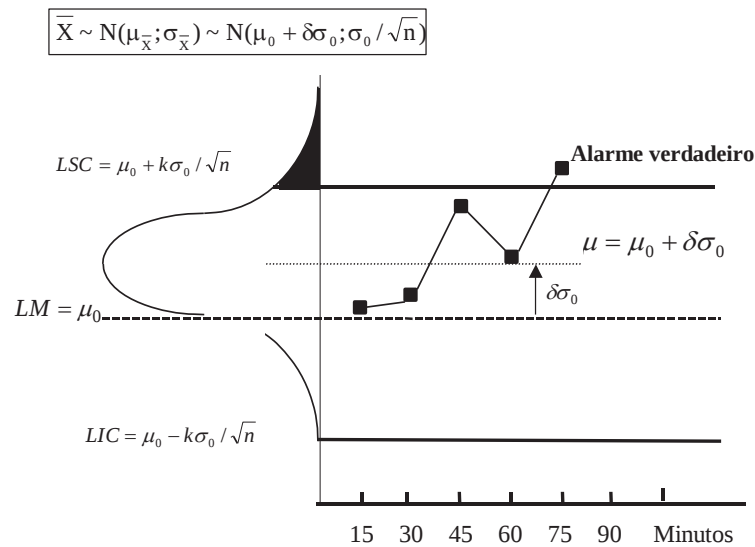


Figura 3: Gráfico de $\bar{X}$ - ocorrência de um alarme verdadeiro (Fonte: Costa et al., 2005)

O erro do tipo I causa uma pausa indevida na produção, pois o gráfico detecta uma causa especial que é inexistente. Outra consequência que o alarme falso pode trazer é a desconfiança no gráfico, caso esse ocorra com frequência.

Já o erro do tipo II traz como consequência o comprometimento da qualidade dos itens produzidos.

2.3. DESEMPENHOS DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

O desempenho dos gráficos de controle é medido pelo número médio de amostras até o sinal (NMA), para intervalo de tempo fixo entre amostras. Essa medida de desempenho, por sua vez, depende dos parâmetros de projeto do gráfico de controle o tamanho da amostra n , o intervalo de tempo h entre retirada de amostras e o fator k de abertura dos limites de controle. Os parâmetros de projeto afetam o desempenho dos gráficos de controle, os riscos α e β e o custo de inspeção (COSTA; MACHADO, 2003, 2003a).

Afim de que se alcance um bom desempenho do gráfico de controle, é necessário que, quando um processo esteja sobre controle, o número médio de amostras retiradas do processo desde o início do monitoramento até o sinal (NMA_0) seja grande, gerando assim poucos alarmes falsos. Já o número médio de amostras retiradas desde a ocorrência de uma causa especial até o sinal (NMA) deve ser pequeno, possibilitando uma rápida detecção da causa especial. Essas características são obtidas mantendo os riscos α e β pequenos, pois $NMA_0 = 1/\alpha$ e $NMA = 1/p_d$, sendo $p_d = 1 - \beta$ (poder de detecção).

2.4 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS

Desde que foi criado, o gráfico de controle baseado na estatística T^2 para o monitoramento de processos multivariados (HOTELLING, 1947) passou a ser o dispositivo estatístico mais usual no monitoramento do vetor de médias de duas ou mais características de qualidade (OLIVEIRA *et al.*, 2009).

O gráfico de controle T^2 é utilizado no monitoramento simultâneo de p variáveis de interesse. Quando o vetor das médias e a matriz de covariância, μ_0 e Σ_0 , de um processo p -variado distribuído normalmente são conhecidos, a estatística T^2 de Hotelling para a k -ésima amostra é dada por:

$$T_k^2 = n(\bar{X}_k - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\bar{X}_k - \mu_0) \quad [1]$$

onde n é o tamanho da amostra e $\bar{X}_k$ é o vetor das médias amostrais dos p parâmetros da amostra k . Quando o processo está sobre controle, T_k^2 segue uma distribuição de Qui-quadrado com p graus de liberdade.

Quando o vetor das médias é desconhecido, costuma-se utilizar o estimador $\hat{\mu}_0$ baseado em m amostras:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \quad [2]$$

onde $\bar{X}_i$ é o vetor das médias da amostra. Assim, a estatística utilizada no monitoramento do processo para o caso em que os parâmetros são estimados, é dada por:

$$T_k^2 = n(\bar{X}_k - \hat{\mu}_0)' \hat{\Sigma}_0^{-1} (\bar{X}_k - \hat{\mu}_0) \quad [3]$$

neste caso, T_k^2 segue uma distribuição F não central. Quando o processo está sendo monitorado por um gráfico convencional do tipo T^2 (i.e., com parâmetros constantes), uma amostra de tamanho n_0 é escolhida aleatoriamente a cada h_0 horas. Então, os valores da variável T^2 obtidos das amostras são plotados em um gráfico com limites de controle dados por LC , (também conhecidos como limites de ação). Um valor de T^2 além do limite de controle é uma indicação de que o processo necessita de ajustes. Quando o vetor de médias do processo está centrado no alvo ($\mu = \mu_0$) dificilmente um valor de T^2 é superior ao LC ; se isto acontecer, tem-se um alarme falso, pois o gráfico, indevidamente, sinaliza uma causa especial.

Além do vetor de médias é também importante monitorar a matriz de covariâncias Σ (YEH et al., 2003, 2004, 2005; SURTIHADI et al., 2004; GRIGORYAN e HE, 2005).

O primeiro gráfico de controle utilizado no monitoramento da matriz de covariâncias Σ se baseou na estatística obtida do teste da razão de máxima verossimilhança generalizada (ALT, 1985):

$$A_1 = -pn + pn \ln n - n \ln \left(\frac{|\mathbf{S}|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right) + \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \cdot \mathbf{S})$$

[4]

onde $\mathbf{S}$ é a matriz de covariâncias,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

sendo s_{ii} a variância amostral da i -ésima variável e s_{ij} a correlação amostral entre a i -ésima e a j -ésima variáveis. $|\mathbf{S}|$ é o determinante da matriz $\mathbf{S}$ e $\text{tr}(\mathbf{S})$ é o traço da matriz $\mathbf{S}$ (a soma dos elementos da diagonal).

Quando o processo está sobre controle, isto é $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$, A_1 é assintoticamente distribuído como uma qui-quadrado com $p(p+1)/2$ graus de liberdade.

Para o caso bivariado, Alt (1985) propôs o uso da variância amostral generalizada $|\mathbf{S}|$ para controlar a matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$. $\mathbf{S}$ é a matriz de covariâncias amostral

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Quando o processo está sobre controle, $\frac{2 \cdot (n-1) \cdot |\mathbf{S}|^{1/2}}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|^{1/2}}$ tem distribuição de qui-quadrado com $2n-4$ graus de liberdade (ALT (1985)).

Já para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias utiliza-se os gráficos de T^2 e $|\mathbf{S}|$, ver Chen et al (2005).

2.5 AUTOCORRELAÇÃO

Entende-se por autocorrelação um mecanismo existente no processo que torna os dados não independentes entre si, ao longo do tempo. Em quaisquer circunstâncias, durante um processo, o valor atual de uma variável não é totalmente aleatório, pois depende dos seus valores anteriores no tempo (RUSSO; CAMARGO, 2004).

A existência de autocorrelação nos dados induz ao crescimento do número de alarmes falsos. Alwan e Roberts (1988) demonstram que muitos alarmes falsos (sinais de causas especiais) possivelmente ocorrem na presença de níveis moderados de autocorrelação, sendo resultantes do sistema de mensuração, da dinâmica do processo ou ambos os aspectos. Além disso, se os gráficos de controle convencionais forem utilizados sem que se possua conhecimento sobre a existência ou não de correlação, a consequência é que muito esforço pode ser despendido inutilmente.

A autocorrelação tem se tornado assunto nas aplicações de CEP. Isso pôde ser percebido a partir de estudos que apontaram a incidência de alarmes falsos devido à autocorrelação, Machado (2005).

Nos últimos tempos, a obtenção dos dados passou a ser automatizada, o que gera um certo motivo de preocupação. Afinal, as amostras tornaram-se mais frequentes em alguns locais das indústrias, possibilitando a identificação de autocorrelação, que anteriormente não existia.

Conforme já apresentado anteriormente, para fazer-se uso de um gráfico de controle convencional (de *Shewhart*) é imprescindível que as observações acerca da característica de interesse sejam independentes e normalmente distribuídas com média μ e desvio padrão σ . Tanto μ quanto σ são considerados fixos e desconhecidos. Uma situação em que o processo esteja fora de controle é uma mudança ou um deslocamento de μ ou σ (ou ambos) para algum valor diferente dos valores nominais.

Por outro lado, quando o processo está em controle, a característica da qualidade no instante t , X_t , é representada pelo modelo:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots \quad [5]$$

Onde ε_t é distribuído normal e independentemente com média zero e desvio padrão σ . Isto é o que habitualmente, costuma-se denominar como modelo de *Shewhart* do processo (MONTGOMERY, 2004).

Se a hipótese de normalidade for ligeira ou moderadamente violada, ainda assim os gráficos convencionais funcionam de modo aceitável. Já a violação da

hipótese de independência das observações reduz a aplicabilidade dos gráficos convencionais.

2.5.1 MODELO DO PROCESSO

Neste estudo, considera-se que as observações das características de qualidade a serem monitoradas são representadas por um modelo autoregressivo de primeira ordem, comum em aplicações, ver Atienza et al. (1998). Para o caso univariado, as observações X_t para um processo autoregressivo de primeira ordem são dadas por (MORETTIN e TOLOI, 2004 – pg. 114):

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \mathcal{E}_t, \quad t=1, \quad 2, \quad 3, \dots, n$$

[6]

onde μ é a média do processo, ϕ é o coeficiente autoregressivo e $\mathcal{E}_t$ é o erro aleatório, i.i.d., $\mathcal{E}_t \sim N(0, \sigma_{\mathcal{E}})$. A variância do modelo AR(1) é expressa por (MORETTIN e TOLOI, 2004 – pg. 118/119):

$$\sigma_X^2 = \sigma_{\mathcal{E}}^2 / (1 - \phi^2)$$

[7]

Neste trabalho estende-se o modelo AR (1) para o caso multivariado, ou seja, $p \geq 2$. Considera-se que os parâmetros do modelo autoregressivo são conhecidos, que as p características de qualidade são independentes e que as autocorrelações entre as observações das p características de qualidade são positivas.

3 GRÁFICOS UTILIZADOS PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS AUTOCORRELACIONADOS

3.1 GRÁFICOS DE $\bar{X}$ UNIVARIADOS

Uma dificuldade encontrada ao se lidar com qualquer gráfico de controle multivariado é a interpretação de um sinal de fora de controle (CARRÉ; MACHADO, 2009). Especificamente, não se sabe ao certo qual das p variáveis (ou qual subconjunto delas) é responsável pelo sinal. A prática padrão consiste em plotar gráficos $\bar{X}$ univariados para as variáveis $X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$.

Como um exemplo de como controlar diferentes variáveis com gráficos de $\bar{X}$, considere duas características de qualidade, representadas pelas variáveis normalmente distribuídas X_1 e X_2 , onde com o processo em controle o vetor de médias é dado por $\mu'_0 = (\mu_{01}; \mu_{02})$ e a matriz de covariâncias é dada por $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$, sendo ρ o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 .

Primeiramente, considere o caso em que as duas características são independentes e monitoradas separadamente por dois gráficos de $\bar{X}$, univariados com limites de controle de 3 desvios-padrão. Cada ponto amostral tem uma probabilidade do erro do tipo I igual a 0,0027 (ou seja, $\alpha = 0,0027$) de exceder os limites de controle de 3 desvios-padrão. A probabilidade de que as médias amostrais estejam dentro dos limites quando o processo está em controle é igual a $(1-0,0027)(1-0,0027)$. Então a probabilidade do erro total do tipo I (denotada por α') para este caso é dada por $\alpha' = 1 - (1-0,0027)(1-0,0027) = 1 - 0,994607 = 0,005393$. No caso de p características de qualidade estatisticamente independentes a probabilidade do erro total do tipo I será dada por,

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p.$$

(8)

Caso se deseje manter controlada a probabilidade do erro do tipo I para um processo p -variado com variáveis aleatórias independentes, a equação (8) pode ser utilizada para calcular a probabilidade do erro do tipo I de cada gráfico.

Consequentemente, obtém-se k , o coeficiente de abertura dos limites de controle de cada gráfico. Para o caso bivariado, os limites de controle são dados por $\mu_{01} \pm k \sigma_1 / \sqrt{n}$ para $\bar{X}_1$ e $\mu_{02} \pm k \sigma_2 / \sqrt{n}$ para $\bar{X}_2$, onde n é o tamanho da amostra.

Se as variáveis são dependentes, que é o caso mais comum, a obtenção dos limites de controle de cada gráfico deixa de ser trivial, ver Montgomery (2004) para detalhes.

3.2 GRÁFICO DE CONTROLE VMAX – CASO MULTIVARIADO

Nesta seção apresenta-se o gráfico de VMAX para o monitoramento da matriz de covariâncias Σ de um processo bivariado proposto por Machado e Costa (2008).

A estatística de monitoramento corresponde ao maior valor das variâncias amostrais padronizadas. Para o caso bivariado tem-se que: $S_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2}{n}$ e

$S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}^2}{n}$, onde $x_{1j} = (X_{1j} - \mu_1) / \sigma_1$ e $x_{2j} = (X_{2j} - \mu_2) / \sigma_2$, sendo X_1 e X_2 duas características de qualidade que seguem uma distribuição normal, ou seja, $VMAX = \max\{S_1^2, S_2^2\}$. Faz-se uso das variâncias amostrais padronizadas devido ao fato de, na prática, as variáveis possuírem variâncias diferentes.

Supõe-se que, com o processo em controle, a matriz de covariâncias é dada por $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, sendo σ_{11} e σ_{22} as variâncias de X_1 e X_2 e $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, as covariâncias entre X_1 e X_2 .

Conforme a literatura, assume-se duas possíveis maneiras de uma causa especial alterar a matriz de covariâncias, resultando na matriz

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} \end{pmatrix}, \text{ sendo } \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

A primeira possibilidade (caso I) supõe que a causa especial afeta somente a variância da variável aleatória X_1 , isto é, $a_1 = \gamma$ e $a_2 = 1$, ou somente a variância da variável aleatória X_2 , neste caso $a_2 = \gamma$ e $a_1 = 1$. A segunda possibilidade (caso II)

supõe que a causa especial altera tanto a variância de X_1 quanto a de X_2 , isto é, $a_1 = a_2 = \sqrt{\gamma}$, sendo $\gamma > 1$ a magnitude da perturbação. Em ambos os casos, a correlação $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ entre X_1 e X_2 não é afetada pela causa especial. Se $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, então $\rho = \sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Quando o gráfico de VMAX está em uso, amostras de tamanho n são retiradas do processo em intervalos de tempo regulares. As duas características de qualidade X_1 e X_2 das n unidades da amostra são medidas e a estatística VMAX é calculada. Se a estatística VMAX for maior do que o limite de controle LC , o gráfico sinaliza um desajuste do processo. Após a ocorrência do sinal, o usuário pode imediatamente examinar as variâncias amostrais de X_1 e X_2 para descobrir quais variáveis foram afetadas pela causa especial, ou seja, aquelas cujas variâncias amostrais são maiores que LC . A expressão para obtenção do limite de controle LC do gráfico de VMAX é dada em Machado e Costa (2008).

3.2.1 GRÁFICO DE VMAX COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO

O gráfico de VMAX com regra especial de decisão é empregado no monitoramento da matriz de covariâncias de duas características de qualidade X_1 e X_2 , descritas por uma distribuição normal bivariada.

Quando o gráfico de controle com regra especial de decisão está em uso, a decisão sobre o estado do processo é baseada no número de amostras conformes entre ocorrências de amostras não conformes, NA . Uma amostra será não conforme quando seu valor amostral gerar um ponto fora dos limites de controle. No início do monitoramento, o primeiro NA corresponde ao número de amostras retiradas do processo antes da ocorrência da primeira amostra não conforme. Se o NA for menor ou igual a L , onde L é um número inteiro positivo especificado, o processo é considerado fora de controle e um sinal é gerado.

Quando o intervalo de amostragem é fixo, o NMA mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que esteja presente desde o início do monitoramento ou desde a ocorrência da causa especial. No primeiro caso o NMA é obtido com o processo em regime transiente (NMA zero-state ou

NMAZS), enquanto que no segundo caso o *NMA* é obtido após o processo alcançar o regime permanente (*NMA steady-state* ou *NMAss*). Entretanto, é mais provável que a causa especial ocorra após um longo e indeterminado período em operação, alterando a matriz de covariâncias. Assim, a causa especial ocorre entre duas amostras não conformes.

3.3 GRÁFICO DE CONTROLE MCMAX

O gráfico de MCMAX é utilizado para o monitoramento conjunto do vetor de médias e da matriz de covariâncias do processo. Para ilustrar, considere o caso bivariado, a ocorrência da causa especial altera o vetor de médias de μ_0 (vetor de médias em controle) para $\mu'_1 = (\mu_1 + \delta_1 \sigma_1; \mu_2 + \delta_2 \sigma_2)$ e/ou a matriz de covariâncias de Σ_0 para Σ_1 .

Quando o gráfico de MCMAX está em uso, amostras de tamanho n são retiradas do processo em intervalos regulares de tempo h e as duas características de qualidade X_1 e X_2 das unidades que compõe a amostra são medidas.

Com os dados da amostra, são calculadas as médias amostrais padronizadas, $Z_1 = \sqrt{n}(\bar{X}_1 - \mu_{01})/\sigma_1$, $Z_2 = \sqrt{n}(\bar{X}_2 - \mu_{02})/\sigma_2$, e as variâncias amostrais ponderadas e padronizadas, $W_1 = kS_1^2/\sigma_1^2$ e $W_2 = kS_2^2/\sigma_2^2$. O ponto no gráfico MCMAX corresponde ao maior valor, em módulo, das quatro medidas amostrais, isto é, $MCMAX = \max(|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2)$. A constante de ponderação k é determinada de tal sorte que, durante o período em controle, as quatro estatísticas $(|Z_1|, |Z_2|, W_1, W_2)$ tenham todas a mesma probabilidade de assumirem valores maiores que LC , isto é, de excederem o limite de controle do gráfico MCMAX, ver MACHADO (2009) para detalhes. Neste trabalho, estuda-se o desempenho do gráfico de MCMAX quando a regra especial de decisão está em uso e os dados são autocorrelacionados.

4 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS

O desempenho dos gráficos é relativo à média de amostras até o sinal (NMA). Qualquer sinal dado pelo gráfico é um alarme falso se o processo estiver em controle. Portanto, neste caso, o NMA deve ser grande o bastante para que a taxa de alarmes falsos seja pequena. No processo em controle, o NMA é dado pelo NMA_0 . No caso de um desajuste na matriz de covariâncias e/ou média do processo o NMA deve ser pequeno, para que se possa detectá-lo com agilidade.

4.1 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE $\bar{X}$ UNIVARIADOS

O primeiro código computacional elaborado na linguagem FORTRAN foi utilizado para avaliar o desempenho de dois gráficos de $\bar{X}$ univariados em uso simultâneo (gráficos $SU \bar{X}$) destinados ao monitoramento do vetor de médias de processos bivariados.

Neste estudo, adota-se $NMA_0 = 200,0$ e $n = 4$ e 5 . Assume-se que as variáveis originais têm uma distribuição normal bivariada com o vetor de médias e a matriz de covariâncias dados respectivamente por $\mu' = \mu'_0 = (0; 0)$ e $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Após a ocorrência da causa especial, o vetor de médias μ do processo se altera de $\mu'_0 = (0,0)$ para $\mu'_1 = (\mu_{01} + \delta_1; \mu_{02} + \delta_2)$.

Para o cálculo do erro entre os resultados obtidos com as simulações e os resultados teóricos existentes utilizou-se a seguinte expressão:

$$Erro = 100\% \frac{NMA_T - NMA_S}{NMA_T}$$

(9)

onde NMA_T é o número médio de amostras até o sinal teórico e NMA_S é o número médio de amostras até o sinal obtido por meio das simulações.

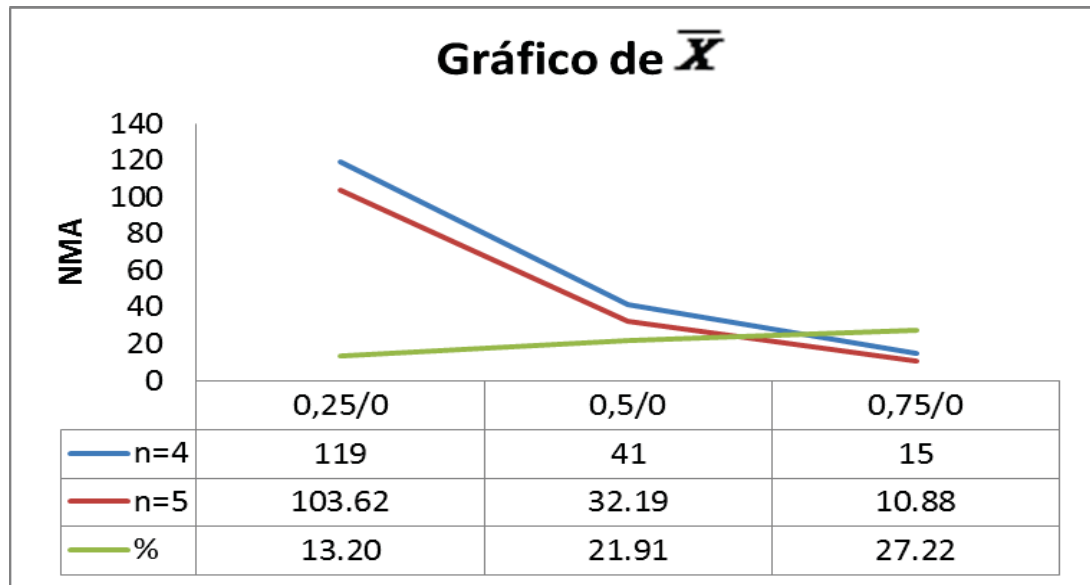
Da Tabela 1 observa-se que quanto maior a perturbação no vetor de médias, ou seja, quanto maior o valor de δ_1 e/ou δ_2 , mais rápido se detecta o desajuste do processo, isto é, menor o NMA . Quando o n aumenta, o poder de detecção do

gráfico também aumenta. Por exemplo, quando $\delta_1 = 0,5$ e $\delta_2 = 0$, o NMA_S diminui de 41,22 para 32,19 quando n aumenta de 4 para 5. Verifica-se também que os resultados obtidos com as simulações foram bem próximos dos resultados teóricos, apresentando uma margem de erro inferior a 2%. É importante ressaltar que a validação do código computacional elaborado depende dos erros. Quanto menor o erro inerente ao código, mais confiável este será. Considera-se razoável para este estudo um erro de no máximo 5%.

Tabela 1: Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=2$; $n = 4$ e 5)

		n					
		4			5		
δ_1	δ_2	NMA_T	NMA_S	erro (%)	NMA_T	NMA_S	erro (%)
0	0	200,00	202,39	1,19	200,00	199,90	0,05
0,25	0	117,38	119,38	1,70	104,98	103,62	1,30
0,50	0	41,64	41,22	1,01	32,43	32,19	0,74
0,75	0	15,10	14,95	0,99	10,94	10,88	0,55
0,25	0,25	83,15	84,47	1,59	71,27	71,18	0,13
0,50	0,5	23,44	23,51	0,30	17,85	17,76	0,50
0,75	0,75	8,09	8,10	0,12	5,87	5,86	0,17

Além disso, é possível observar que quanto maior a perturbação, a influência do n , ou seja, quanto maior o valor de δ_1 e/ou δ_2 , mais relevante será o tamanho da amostra. Isso pode ser notado facilmente por meio da Figura 1, onde a diferença proporcional entre os desempenhos $n=4$ e $n=5$, representada pela linha verde %, aumenta linearmente conforme o aumento do valor de δ_1 .



*O eixo da abscissa é representado por δ_1/δ_2

Figura 4: Gráficos de $\bar{X}$ ($p=2$; $n=4$ e 5)

Estendeu-se o código elaborado para o caso multivariado, ou seja, para $p>2$, ver Tabelas 2, 3 e 4, para $p=3, 4$ e 5 , respectivamente. Só foi possível comparar o erro entre os resultados obtidos com as simulações e os resultados teóricos existentes para o caso em que $p=3$. Da Tabela 2, é possível observar que os erros permaneceram inferiores a 2%. Para valores de $p>3$, os valores de NMA_T não foram obtidos até o momento.

Tabela 2: Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=3$; $n=5$)

δ_1	δ_2	δ_3	NMA_T	NMA_S	erro (%)
0	0	0	200,00	200,08	0,04
0,25	0	0	120,63	120,16	0,39
0,5	0	0	40,56	40,54	0,05
0,75	0	0	13,46	13,47	0,07
0,25	0,25	0	86,38	85,94	0,51
0,5	0,5	0	22,77	22,56	0,94
0,75	0,75	0	7,21	7,26	0,75
0,25	0,25	0,25	67,33	67,58	0,37
0,5	0,5	0,5	15,92	16,21	1,83
0,75	0,75	0,75	5,03	5,04	0,28

Tabela 3: Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=4$; $n=5$)

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	NMA_S
0	0	0	0	199,88
0,5	0	0	0	46,66
0,5	0,5	0	0	27,15
0,5	0,5	0,5	0	19,20
0,5	0,5	0,5	0,5	14,71

Tabela 4: Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=5$; $n=5$)

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	NMA_S
0	0	0	0	0	199,41
0,5	0	0	0	0	53,66
0,5	0,5	0	0	0	30,43
0,5	0,5	0,5	0	0	21,77
0,5	0,5	0,5	0,5	0	16,85
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	13,77

O primeiro código computacional, que se mostrou bastante confiável, serviu como base para a elaboração do segundo código, desenvolvido nesta segunda etapa do projeto e destinado à obtenção das propriedades dos gráficos de $\bar{X}$ em uso simultâneo para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados.

Na Tabela 5 estão o limite de controle superior (LSC) e o limite de controle inferior (LIC) para diferentes valores de autocorrelação e p .

Tabela 5: Limites de controle para os gráficos SU $\bar{X}$

Φ_i	p							
	2		3		4		5	
	LSC	LIC	LSC	LIC	LSC	LIC	LSC	LIC
0	1,351	-1,351	1,406	-1,406	1,443	-1,443	1,471	-1,471
0,2	1,619	-1,619	1,681	-1,681	-	-	-	-
0,5	2,333	-2,333	2,421	-2,421	2,486	-2,486	2,535	-2,535
0,7	3,330	-3,330	3,457	-3,457	-	-	-	-

As Tabelas 6, 7, 8 e 9 contém os valores de NMA , obtidos via simulação, para os gráficos de $\bar{X}$ em uso simultâneo considerando $n=5$ e $p=2, 3, 4$ e 5 , respectivamente. Observa-se que, com a autocorrelação, os gráficos de $\bar{X}$ em uso simultâneo ficam mais lentos na sinalização de mudanças no processo (maior

o valor do NMA_s). Um bom exemplo é o presente na Tabela 2, para $\delta_1 = 0,75$ e $\delta_2 = 0$, o NMA_s é igual a 10,88, considerando o caso em que o processo é não autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, e aumenta para 82,90 quando o processo é altamente autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1 = \Phi_2 = 0,7$. Na Figura 5 nota-se que, tanto com o aumento da autocorrelação, quanto com o aumento de variáveis com autocorrelação, há um explícito crescimento da dificuldade de sinalização das mudanças do processo (maior o valor do NMA).

Tabela 6: Valores de NMA_s para os gráficos $SU \bar{X}$ ($p=2; n=5$)

Φ_1	0	0	0,2	0,2	0	0,5	0,5	0	0,7	0,7	
Φ_2	0	0,2	0	0,2	0,5	0	0,5	0,7	0	0,7	
δ_1	δ_2										
0	0	199,90	199,88	201,96	199,53	199,11	202,88	201,11	200,55	199,97	198,37
0,25	0	103,62	103,01	124,45	124,79	104,51	159,05	156,49	102,95	182,16	177,23
0,50	0	32,19	32,57	48,42	48,10	32,53	88,92	89,68	32,25	130,02	126,76
0,75	0	10,88	10,72	18,12	18,29	10,86	44,82	44,30	10,85	82,14	82,90
0,25	0,25	71,18	79,96	80,70	92,26	92,35	92,04	131,61	98,25	97,49	161,67
0,50	0,5	17,76	21,49	21,47	27,35	27,02	26,82	58,18	29,98	29,96	93,98
0,75	0,75	5,86	7,33	7,33	9,66	9,27	9,42	25,04	10,37	10,20	51,72

Tabela 7: Valores de NMA_s para os gráficos $SU \bar{X}$ ($p=3; n=5$)

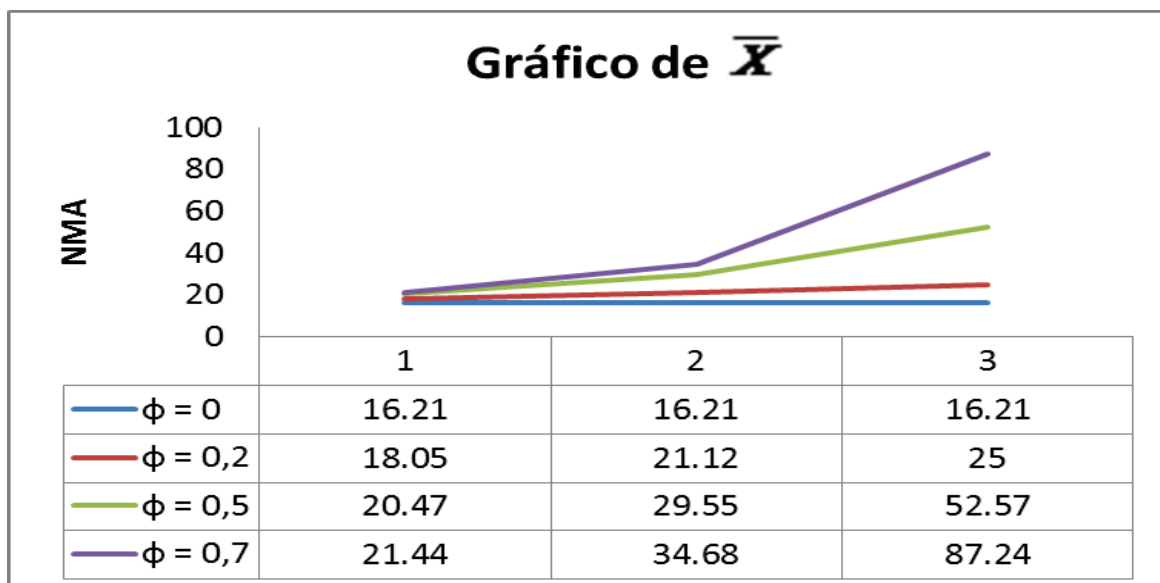
			Φ_1	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0,5	0,7
			Φ_2	0	0	0	0	0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7
			Φ_3	0	0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7	0,2	0,5	0,7
δ_1	δ_2	δ_3											
0	0	0	200,08	200,28	199,17	201,99	200,35	200,19	200,63	200,21	200,89	200,12	
0,25	0	0	120,16	120,72	118,96	118,46	121,21	120,77	121,59	136,82	165,82	179,34	
0,5	0	0	40,54	40,29	40,49	41,36	40,41	40,29	41,43	58,00	102,67	140,99	
0,75	0	0	13,47	13,60	13,64	13,66	13,39	13,35	13,45	22,71	54,53	98,14	
0,25	0,25	0	85,94	86,05	85,72	85,62	96,09	107,25	114,39	106,06	143,45	163,75	
0,5	0,5	0	22,56	22,77	22,50	22,70	27,46	33,86	36,81	34,97	68,76	109,19	
0,75	0,75	0	7,26	7,28	7,29	7,26	9,00	11,44	12,79	12,27	31,98	63,71	
0,25	0,25	0,25	67,58	73,05	79,38	83,01	78,86	96,69	108,28	86,22	127,35	155,75	
0,5	0,5	0,5	16,21	18,05	20,47	21,44	21,12	29,55	34,68	25,00	52,57	87,24	
0,75	0,75	0,75	5,04	5,85	6,65	7,04	6,89	10,20	11,98	8,54	22,19	47,67	

Tabela 8: Valores de NMA_5 para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=4; n=5$)

	Φ_1	0	0,5	0,5	0,5	0,5		
	Φ_2	0	0	0,5	0,5	0,5		
	Φ_3	0	0	0	0,5	0,5		
	Φ_4	0	0	0	0	0,5		
δ_1	δ_2	δ_3	δ_4					
0	0	0	0	199,88	201,97	200,76	200,75	200,64
0,5	0	0	0	46,66	113,61	114,14	113,37	112,92
0,5	0,5	0	0	27,15	39,69	79,91	79,28	80,90
0,5	0,5	0,5	0	19,20	24,33	35,60	62,92	61,01
0,5	0,5	0,5	0,5	14,71	17,95	22,34	31,06	49,66

Tabela 9: Valores de NMA_5 para os gráficos SU $\bar{X}$ ($p=5; n=5$)

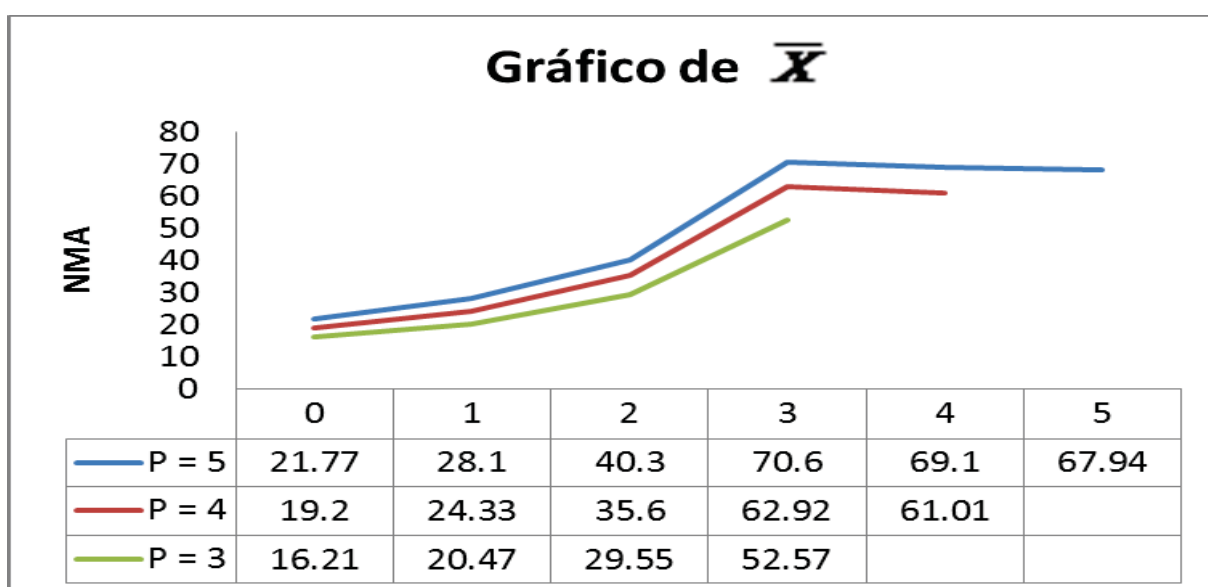
					Φ_1	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
					Φ_2	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5
					Φ_3	0	0	0	0,5	0,5	0,5
					Φ_4	0	0	0	0	0,5	0,5
					Φ_5	0	0	0	0	0	0,5
δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5							
0	0	0	0	0	199,41	198,35	200,64	200,78	201,36	200,18	
0,5	0	0	0	0	53,66	122,95	121,53	122,36	122,17	122,76	
0,5	0,5	0	0	0	30,43	45,12	89,00	88,36	88,44	89,14	
0,5	0,5	0,5	0	0	21,77	28,10	40,30	70,60	69,10	67,94	
0,5	0,5	0,5	0,5	0	16,85	20,59	25,76	35,53	57,28	57,00	
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	13,77	16,03	19,03	23,48	31,77	49,28	



*O eixo da abscissa representa o números de variáveis com autocorrelação Φ .

Figura 5: Gráficos de $\bar{X}$ ($p=3$; $n = 5$; $\delta = 0,5$ em todas as variáveis)

Através da Figura 6, é possível analisar que, o controle de três variáveis fora de controle (não estáveis) torna-se mais eficaz conforme se dá a diminuição do número de variáveis estáveis sendo monitorada. Isto é, o controle de variáveis que não necessitam ser monitoradas, que são aquelas que são estáveis, torna o gráfico de controle mais lento. Esse aumento no NMA se deve ao fato dos limites de controle sofrerem um alargamento quando se monitora um número maior de variáveis.

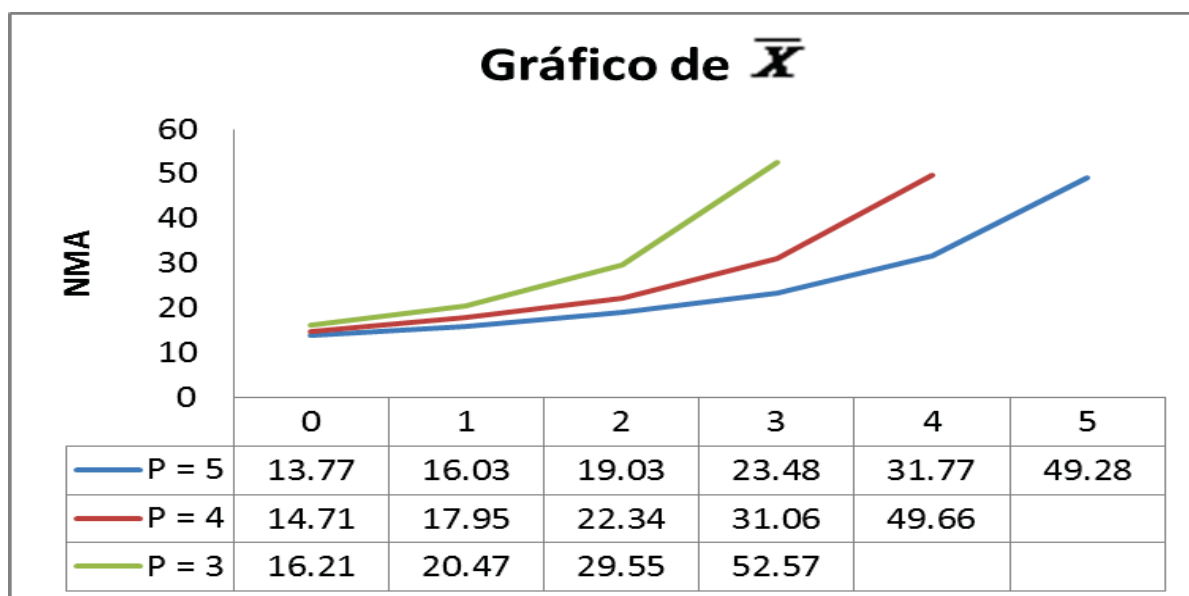


*O eixo da abscissa representa o números de variáveis com autocorrelação Φ .

Figura 6: Gráficos de $\bar{X}$ ($n = 5$; $\delta = 0,5$ nas três primeiras variáveis)

Por outro lado, nota-se na Figura 7 que o monitoramento de um número maior de variáveis não estáveis aumenta o poder do gráfico.

Portanto, a partir das Figuras 6 e 7 pode-se afirmar que o poder do gráfico de controle é influenciado, positiva ou negativamente, de acordo com o aumento das variáveis sendo monitoradas. A influência positiva ocorre quando as variáveis acrescidas no monitoramento são instáveis. Já a negativa ocorre quando essas são estáveis.



*O eixo da abscissa representa o número de variáveis com autocorrelação Φ .

Figura 7: Gráficos de $\bar{X}$ ($n = 5$; $\delta = 0,5$ em todas as variáveis)

4.2 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE VMAX

O primeiro código computacional elaborado na linguagem FORTRAN foi utilizado para avaliar o desempenho do gráfico de VMAX destinado ao monitoramento de processos bivariados. Foi adotado o valor de $NMA_0 = 200,0$, $n = 5$, $p=2$ e o Caso I.

Para o cálculo do erro entre os resultados obtidos com as simulações e os resultados teóricos existentes utilizou-se a expressão (9).

De acordo com a Tabela 10 o coeficiente de correlação tem certa influência nas propriedades do gráfico de VMAX.

Ainda da Tabela 10, verifica-se que os resultados obtidos por meio das simulações foram bem próximos dos resultados teóricos, apresentando uma margem de erro inferior a 2%. As comparações foram estendidas para o Caso II e outros valores de correlação e os erros não ultrapassaram o valor de 2,4%.

Tabela 10: Valores de NMA_T , NMA_S e os erros para o gráfico de VMAX ($p=2$; $n=5$; caso I)

ρ						
γ^2	0,0			0,5		
	NMA_T	NMA_S	erro (%)	NMA_T	NMA_S	erro (%)
1,0	200,0	200,4	0,20	200,0	200,0	0,00
1,1	132,1	132,2	0,08	132,5	131,3	0,91
1,2	86,5	86,3	0,23	86,8	87,5	0,81
1,3	58,1	58,6	0,86	58,3	57,4	1,54
1,4	40,6	40,6	0,00	40,7	40,3	0,98
1,5	29,5	29,8	1,02	29,6	29,2	1,35
2,0	9,62	9,69	0,73	9,62	9,64	0,21
3,0	3,38	3,40	0,59	3,38	3,36	0,59

Estendeu-se o código elaborado também para o caso multivariado, ou seja, para $p>2$ e os erros permaneceram inferiores a 2%.

4.2.1 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE VMAX COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO

A Tabela 11 mostra o efeito de L na velocidade com que o gráfico de VMAX com regra especial de decisão sinaliza o desajuste do processo. Da Tabela 11 observa-se que à medida que L aumenta de 3 para 5, todos os valores de NMA_{ss} diminuem. Por exemplo, se $\gamma^2 = 1,3$, o NMA_{ss} diminui de 53,6 para 51,0. A Tabela 11 apresenta também os erros obtidos através da expressão (9). Observa-se que para grandes alterações na matriz de covariâncias a margem de erro é superior a 10%. Isso se deve à seguinte descoberta: o procedimento proposto por Davis e Woodall (2002) e utilizado para obtenção dos valores de NMA_T consideram que a causa especial ocorre desde o início do monitoramento e não após um longo e indeterminado período em operação, conforme se acreditava.

Como o segundo caso é o mais provável, os valores de NMA_s foram obtidos sob essa hipótese.

4.2.2 GRÁFICO DE VMAX COM REGRA ESPECIAL DE DECISÃO PARA DADOS AUTOCORRELACIONADOS

Assim como no caso dos gráficos de $\bar{X}$, neste gráfico considera-se que as observações das características de qualidade a serem monitoradas são representadas de acordo com o modelo do processo definido na seção 2.5.1 deste trabalho.

A Tabela 12 e Figura 8 contêm os valores de NMA , obtidos via simulação do gráfico de VMAX com regra especial de decisão para dados autocorrelacionados, considerando $n=5$ e $p=2$. Observa-se que, com a autocorrelação, o gráfico de VMAX fica mais lento na sinalização de mudanças no processo (maior o valor do NMA_s). Por exemplo, da Tabela 12, para $a_1^2=a_2^2=1,1$ NMA_s é igual a 91,74 considerando o caso em que o processo é não autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1=\Phi_2=0$, e aumenta para 109,0 quando o processo é altamente autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1=\Phi_2=0,5$.

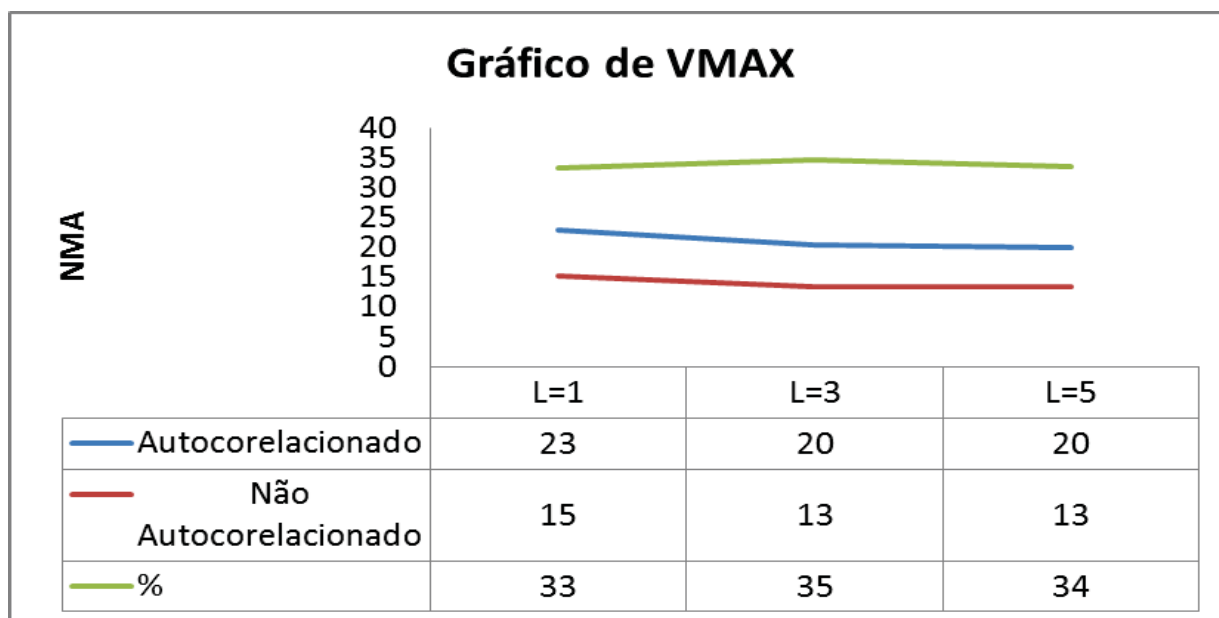
Do gráfico, ainda pode-se notar que, a diferença proporcional entre os gráficos autocorrelacionados e não autocorrelacionados matem-se constante com o aumento de L .

Tabela 11: Valores de NMA_r , NMA_s e os erros para o gráfico de VMAX com regra especial de decisão ($p=2$; $n=5$; caso I).

γ^2	L					
	3			5		
	NMA_r	NMA_s	erro (%)	NMA_r	NMA_s	erro (%)
1,0	200,0	202,7	1,3	200,0	198,7	0,7
1,1	124,3	124,1	0,2	122,2	122,9	0,6
1,2	78,7	78,4	0,4	76,1	79,1	3,9
1,3	51,9	53,6	3,3	49,5	51,0	2,9
1,4	35,8	37,3	4,1	33,8	35,9	6,1
1,5	25,9	27,6	6,7	24,2	26,3	8,7
2,0	8,5	10,4	22,5	7,9	10,0	27,2
3,0	3,2	5,0	53,4	3,0	5,0	63,5

Tabela 12: Valores de NMA_s para os gráficos VMAX ($p=2$; $n = 5$; $\rho = 0$)

Φ_1	0	0,2	0,5	0	0,2	0,5	0	0,2	0,5	
Φ_2	0	0,2	0,5	0	0,2	0,5	0	0,2	0,5	
L	1			3			5			
LC	2,366	2,52	3,637	2,626	2,811	4,161	2,737	2,937	4,4	
a_1^2	a_2^2									
1,0	1,0	201,94	199,62	199,91	200,59	200,1	200,83	199,14	199,09	199,3
1,1	1,1	91,74	95,54	109	85,2	90,45	103,37	83,78	87,2	102,22
1,2	1,2	49,65	52,72	67,14	45	48,14	61,33	43,78	45,59	59,17
1,3	1,3	30,84	33,1	43,95	27,19	29,38	39,58	26,73	28,25	37,83
1,4	1,4	20,61	22,38	30,98	18,29	19,8	27,31	17,3	19,3	26,66
1,5	1,5	15,27	16,47	22,84	13,36	14,39	20,44	13,31	14,12	20,03
2	2	6,26	6,66	9,15	5,7	6,08	8,25	5,74	6,05	8,25
3	3	3,68	3,81	4,57	3,55	3,64	4,3	3,56	3,66	4,37

Figura 8: Gráficos de VMAX ($p=2$; $n=5$; $\rho = 0$; $a_1^2 = a_2^2 = 1,5$ e $\Phi_1 = \Phi_2 = 0,5$)

4.3 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE MCMAX PARA DADOS AUTOCORRELACIONADOS

A Tabela 13 contém os valores de NMA , obtidos via simulação, para o gráfico de MCMAX considerando $n=5$ e $p=2$. Observa-se que, assim como observado na sessão 4.2.2, quando da análise do gráfico de VMAX para dados autocorrelacionados, o gráfico de MCMAX fica mais lento na sinalização de mudanças no processo (maior o valor do NMA_s). Por exemplo, da Tabela 13, para $a_1=a_2=1,25$ e $\delta_2=\delta_1=0$ NMA_s é igual a 11,33 considerando o caso em que o processo é não autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1=\Phi_2=0$, e aumenta para 18,15 quando o processo é altamente autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1=\Phi_2=0,5$.

Tabela 13: Influência da autocorrelação no desempenho do gráfico MCMAX($\rho = 0$, $n=5$, $L=5$)

				Φ_1	0	0,2	0,5
				Φ_2	0	0,2	0,5
a_1	a_2	δ_1	δ_2				
1,0	1,0	0	0		198,03	200,75	199,89
		0	0,5		62,95	61,32	79,17
		0,5	0,5		32,64	31,30	44,65
1,25	1,25	0	0		11,33	12,64	18,15
		0	0,5		8,28	9,04	13,66
		0,5	0,5		6,45	7,09	10,82
1,5	1,0	0	0		7,79	8,4	12,15
		0	0,5		6,82	7,24	10,57
		0,5	0		6,04	6,54	9,91
		0,5	0,5		5,47	5,84	8,79

As tabelas 14 e 15 contêm os valores de NMA , obtidos via simulação, para o gráfico de MCMAX considerando $n=5$ e $p=3$, $p=4$ e $p=5$ respectivamente. Observa-se que, assim como no gráfico de MCMAX considerando $n=5$ e $p=2$, a autocorrelação dificulta a sinalização de mudanças no processo. Por exemplo, da Tabela 14, para $a_1=a_2=a_3=a_4=1,25$ e $\delta_4=\delta_3=\delta_2=\delta_1=0$ NMA_s é igual a 8,56 considerando o caso em que o processo é não autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=\Phi_4=0$. Além disso, aumenta para 13,86 quando o processo é altamente autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=\Phi_4=0,5$.

O gráfico de MCMAX, considerando $n=5$ e $p=2$, possui outra característica que se manteve nos gráficos MCMAX considerando $n=5$ e $p=3$, $p=4$ e $p=5$. Essa peculiaridade é a sinalização mais rápida do processo (menor o valor do NMA_s) quando o δ está sincronizado com o a , isto é, quando o δ maior está na mesma posição de matriz do a maior. Por exemplo, da Tabela 14, para $a_1=1,5$, $a_2=a_3=a_4=1$, $\delta_4=\delta_3=\delta_2=0$, $\delta_1=0,5$ e $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=\Phi_4=0$, NMA_s é igual a 7,44 considerando o caso em que o δ está sincronizado com o a , e aumenta para 8,81 quando o processo não está sincronizado com o a , ou seja, $a_1=1,5$, $a_2=a_3=a_4=1$, $\delta_4=1,5$, $\delta_3=\delta_2=\delta_1=0$.

Por outro lado, verifica-se também que o gráfico de MCMAX é mais rápido na sinalização quando há a ocorrência de baixa autocorrelação, do que sem autocorrelação no caso de $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=1$. Por exemplo, da Tabela 15, para $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=1$, $\delta_5=0,5$ e $\delta_4=\delta_3=\delta_2=\delta_1=0$, NMA_s é igual a 97,71 considerando o caso em que o processo é não autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=\Phi_4=\Phi_5=0$ diminui para 90,39 quando o processo é levemente autocorrelacionado, ou seja, $\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=\Phi_4=\Phi_5=0,2$.

Tabela 14: Influência da autocorrelação no desempenho do gráfico MCMAX($\rho = 0$, $n=5$,

								Φ_1	0	0,2	0,5
								Φ_2	0	0,2	0,5
								Φ_3	0	0,2	0,5
								Φ_4	0	0,2	0,5
a_1	a_2	a_3	a_4	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4				
1,0	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	197,09		202,31	203,3
				0	0	0	0,5	92,99		84,54	106,06
				0	0	0,5	0,5	51,26		48,1	65,64
				0	0,5	0,5	0,5	36,44		29,96	47,79
				0,5	0,5	0,5	0,5	26,41		22,53	37,60
1,25	1,25	1,25	1,25	0	0	0	0	8,56		9,51	13,86
				0	0	0	0,5	7,53		7,97	11,80
				0	0	0,5	0,5	6,04		6,58	9,92
				0	0,5	0,5	0,5	5,70		5,84	8,99
				0,5	0,5	0,5	0,5	4,94		5,17	7,83
1,5	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	9,44		11,44	17,09
				0	0	0	0,5	8,81		9,54	14,94
				0	0	0,5	0	8,90		9,31	14,91
				0	0,5	0	0	8,78		9,36	14,77
				0,5	0	0	0	7,44		8,45	13,60
				0	0	0,5	0,5	8,30		8,05	13,64
				0,5	0,5	0	0	7,05		7,41	11,76
				0	0,5	0,5	0,5	7,25		7,77	12,19
				0,5	0,5	0,5	0	6,47		6,94	10,94
				0,5	0,5	0,5	0,5	5,89		6,26	9,99
1,5	1,5	1,0	1,0	0	0	0	0	5,45		6,23	9,01
				0	0	0	0,5	5,31		5,50	8,27
				0	0	0,5	0,5	5,07		5,24	7,53
				0	0,5	0,5	0,5	4,53		4,85	6,87
				0,5	0,5	0,5	0,5	4,04		4,27	6,34
1,5	1,5	1,5	1,5	0	0	0	0	3,75		4,02	5,30
				0	0	0	0,5	3,65		3,72	4,87
				0	0	0,5	0,5	3,52		3,52	4,66
				0	0,5	0,5	0,5	3,27		3,32	4,52
				0,5	0,5	0,5	0,5	3,05		3,19	4,18

 $L=5, p=4$).

Tabela 15: Influência da autocorrelação no desempenho do gráfico MCMAX($\rho = 0$, $n=5$, $L=5, p=5$).

										Φ_1	0	0,2	0,5
										Φ_2	0	0,2	0,5
										Φ_3	0	0,2	0,5
										Φ_4	0	0,2	0,5
										Φ_5	0	0,2	0,5
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5				
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	0	200,41		196,65	197,38
					0	0	0	0	0,5	97,71		90,39	112,97
					0	0	0	0,5	0,5	62,00		52,37	73,55
					0	0	0,5	0,5	0,5	43,37		36,56	65,64
					0	0,5	0,5	0,5	0,5	32,45		26,37	54,14
					0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	25,44		20,40	32,34
1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	0	0	0	0	0	8,10		9,05	13,74
					0	0	0	0	0,5	7,04		7,62	11,87
					0	0	0	0,5	0,5	6,20		6,65	10,41
					0	0	0,5	0,5	0,5	5,51		5,89	9,26
					0	0,5	0,5	0,5	0,5	5,06		5,25	8,32
					0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,60		4,79	7,59
1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	0	10,83		12,00	20,66
					0	0	0	0	0,5	10,03		10,82	18,04
					0	0	0	0,5	0	10,03		10,75	18,06
					0	0	0,5	0	0	9,97		10,61	18,35
					0	0,5	0	0	0	9,94		10,78	17,96
					0,5	0	0	0	0	8,34		9,13	15,87
					0	0	0	0,5	0,5	9,15		9,67	16,25
					0	0	0,5	0,5	0	9,11		9,67	16,08
					0	0,5	0,5	0	0	9,11		9,58	16,19
					0,5	0,5	0	0	0	7,70		8,25	14,30
					0	0	0,5	0,5	0,5	8,26		8,63	14,29
					0	0,5	0,5	0,5	0	8,35		8,76	14,41
					0,5	0,5	0,5	0	0	7,11		7,54	12,81
					0	0,5	0,5	0,5	0,5	7,68		7,89	13,17
					0,5	0,5	0,5	0,5	0	6,62		6,97	11,75
					0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	6,27		6,50	10,80
1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	0	0	0	0	0	3,75		3,86	5,19
					0	0	0	0	0,5	3,51		3,64	4,87
					0	0	0	0,5	0,5	3,35		3,42	4,67
					0	0	0,5	0,5	0,5	3,21		3,25	4,38
					0	0,5	0,5	0,5	0,5	3,06		3,11	4,22
					0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2,92		2,96	4,01

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

5.1 CONCLUSÕES

Todo e qualquer estudo de caráter científico possuiu como objetivo principal desenvolver uma ideia inovadora acerca de determinado assunto. A relevância do estudo de gráficos de controle está contida na melhoria que a correta utilização deste pode trazer. Um gráfico de controle, quando utilizado de maneira coerente ao método de produção, pode ser responsável pela diminuição de custos em um processo produtivo, além de viabilizar um maior controle sobre este. Por outro lado, ao fazer uso de um método incorreto, provavelmente se terá um prejuízo por consequência.

Para a realização desse estudo, foram considerados novos gráficos para o monitoramento de processos multivariados autocorrelacionados. Tratou-se do monitoramento do vetor de médias, do monitoramento da matriz de covariâncias e do monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias.

Para tal estudo, foi realizada, inicialmente, uma revisão sobre gráficos de controle, autocorrelação, gráficos de controle $\bar{X}$, VMAX e MCMAX, abordando as pesquisas mais recentes sobre o assunto. Além disso, estudou-se as propriedades dos gráficos de controle e a medida usual de desempenho utilizada, o número médio de amostras até o sinal (*NMA*).

As principais contribuições conclusões deste estudo são:

a) Para que se tenha êxito no uso de gráficos de controle, o usuário deve conhecer a fundo seu tipo de processo e a forma de comportamento dos gráficos em relação a este. Afinal, não existe um modelo de gráfico de controle que se comporte sempre de maneira mais eficiente, ou então que seja sempre viável.

b) Esse estudo viabilizou a obtenção de um conhecimento amplo acerca do comportamento dos gráficos de controle com autocorrelação, permitindo ao usuário analisar a viabilidade dos tais.

c) Tal pesquisa gerou a possibilidade de tomarem-se decisões mais assertivas acerca da decisão em relação à quais variáveis devem ser monitoradas, qual o tamanho da amostra e qual tamanho da regra de decisão L deve se utilizar.

d) Deve-se ressaltar que os gráficos propostos são de utilização muito mais simples se comparado com os gráficos de T^2 e $|S|$, pois requerem apenas o cálculo de estatísticas conhecidas do usuário, isto é, médias e variâncias amostrais.

e) Por fim, acredita-se que o usuário que conhecer profundamente o seu processo terá subsídios para utilizar, com mais propriedade e certeza, os gráficos de controle a fim de reduzir custos e prejuízos.

5.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Uma possível extensão deste trabalho é a ampliação dos estudos para o caso em que as variáveis do processo são correlacionadas, pois neste trabalho assume-se que as variáveis são independentes. Seria interessante aplicar os resultados obtidos neste trabalho no monitoramento de um processo real.

Finalmente, destaca-se que ainda há na literatura um espaço em aberto quando o assunto é a autocorrelação em processos multivariados. Pode-se estender este trabalho adotando estratégias para reduzir o efeito da autocorrelação, ver Costa e Castagliola (2011). Também se sugere como futura pesquisa, que se adote outro modelo de processo autocorrelacionado, ver Costa e Machado (2011).

REFERÊNCIAS

ALT, F. B. **Multivariate control charts**. Encyclopedia of Statistical Sciences. Kotz, S., Johnson, N. L., Eds.; Wiley, 1985.

ATIENZA, O. O.; TANG, L. C.; ANG, B. W.; A SPC procedure for detecting level shifts of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v.30, p.340-350, 1998.

BERNARD, S. A. **A multivariate EWMA approach to monitor process dispersion**.

2001. 125 f. Thesis (PhD) - Department of Decision and Information Technology of the University of Maryland, 2001.

BRAVO, P. C. **Controle estatístico da qualidade**. São Paulo, 1995.

CARRÉ, R. A.; MACHADO, M. A. G. Gráficos de $\bar{X}$ univariados para o monitoramento do vetor de médias de processos bivariados autocorrelacionados. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 21, 2009, São José do Rio Preto. **Publicação dos trabalhos apresentados no XXI CIC**. São José do Rio Preto: Universidade Estadual Paulista, 2009, 4p.

CHEN, G.; CHENG, S. W.; XIE, H. A new multivariate control chart for monitoring both location and dispersion. **Communications in Statistics-Simulation and Computation**, v. 34, p. 203-217, 2005.

COSTA, A.F.B. CASTAGLIOLA, P. Effect of Measurement Error and Autocorrelation on the Xbar Chart. **Journal of Applied Statistics**, v. 38, p. 661–673, 2011.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI; L. C. R. Controle Estatístico de Qualidade. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 334 p., 2005.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Variable parameter and double sampling charts in the presence of correlation: The Markov chain approach. **International Journal of Production Economics**, v. 130, p. 224-229, 2011.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Estudo das propriedades dos gráficos de controle por meio de simulações. In: JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E DE PÓS-GRADUAÇÃO, 5, 2003, Guaratinguetá. **CD ROM**. Guaratinguetá: Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2003, 5p.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. M. Estudo das propriedades dos gráficos de controle por meio de simulações. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO

CIENTÍFICA, 15, 2003a, Marília. **CD ROM**. Marília: Universidade Estadual Paulista, 2003a, 1p.

CROSIER, R.B. Multivariate generalizations of cumulative sum quality control schemes. **Technometrics**, v. 30; n. 3, p.291-303, 1988.

DAVIS, R.B.; WOODALL, W.H. Evaluating and improving the synthetic control chart. **Journal of Quality Technology**, v. 34, p. 200-208, 2002.

GRANT, E. L.; LEAVENWORTH, R. S. **Statistical quality control**. 5 ed. New York: McGraw Hill, 1980.

GRIGORYAN, A.; HE, D. Multivariate double sampling $|S|$ charts for controlling process variability. **International Journal of Production Research**, v. 43, p. 715-730, 2005.

HOTELLING, H. Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights. **Techniques of Statistical Analysis**, p. 111-184, New York, McGraw Hill, 1947.

KONRATH, A. C. **Decomposição da estatística do gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling por meio de um algoritmo computacional**. 2002. 90f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

LOWRY, C. A.; MONTGOMERY, D. C. A review of multivariate control charts. **IIE Transactions**, v. 27, p. 800-810, 1995.

LOWRY, C.A. et al. A multivariate exponentially weighted moving average control chart. **Technometrics**, v. 32; n. 1, p. 46-53, 1992.

LU, C.-W.; REYNOLDS, M. R. Jr.; EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v. 31, p. 166-188, 1999.

MACHADO, M. A. G.; De MAGALHÃES, M.S; COSTA, A. F. B. Gráfico de controle de VMAX para o monitoramento da matriz de covariâncias, **Revista Produção**, v. 18, p. 222-239, 2008.

MACHADO, M. A. G. **Gráficos de controle para o monitoramento de processos multivariados**. 2009. 159f. Dissertação (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. John Wiley & Sons, Inc., New York, New York, 2004.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C. **Análise de Séries Temporais**. 1ª. Ed., São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2004, 535 p.

OLIVEIRA, D. S.; CARRÉ, R. A.; UGLIARA, B. H.; MACHADO, M. A G.; COSTA, A. F. B. Gráficos de controle para o monitoramento do vetor de médias de processos multivariados autocorrelacionados. In: JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E DE PÓS-GRADUAÇÃO, 11, 2009, Guaratinguetá.

PIGNATIELLO, J.; RUNGER, G. Comparisons of Multivariate CUSUM Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 22, p.173-186, 1990.

PRABHU, S.S.; RUNGER, G.C. Designing a multivariate EWMA control chart. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 8-15, 1997.

QIU, P.; HAWKINS, D. A rank-based multivariate CUSUM procedure. **Technometrics**, v. 43, n. 2, p. 120-132, 2001.

ROTANDARO, R. G. **Seis Sigma: estratégia gerencial para a melhoria de processos, produtos e serviços**. São Paulo: Atlas, 2002.

RUSSO, S.; CAMARGO, M. E Controle estatístico de processo: solução de um estudo de caso usando procedimentos estatísticos. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS, 24, 2004, Florianópolis. **CD ROM**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004, 6p.

SHEWHART, W. A. Economic control of quality of manufactured product. D. Van Nostrand Company, NY-EUA, 501 p., 1ª ed., 1931.

SKINNER, K. R. **Multivariate process control for discrete data**. 2002. 117f. Thesis (PhD) - Arizona State University, 2002.

SURTIHADI, J.; RAGHAVACHARI, M.; RUNGER, G. Multivariate control charts for process dispersion. **International Journal of Production Research**, v. 42, p. 2993-3009, 2004.

TESTIK, M. C. **Univariate and multivariate statistical process control: a generalized likelihood ratio approach**. 2003. 135f. Tese (PhD) - Arizona State University, 2003.

THOMAS, J. B. **Interpretation of multivariate control chart signals**. 2002. 128f. Thesis (PhD in the Program of Applied Statistics) – Graduate School of The University of Alabama, Tuscaloosa, 2002.

VAN BRACKLE, III, L. N., REYNOLDS, M. R. Jr. EWMA and CUSUM control charts in the presence of correlation, **Communication in Statistics - Simulation and computation**, v. 26, p. 979-1008, 1997.

VANDER WIEL, S. A. Monitoring processes that wander using integrated moving average models. **Technometrics**, v. 38, p. 139-151, 1996.

WOODALL, W. H.; NCUBE, M.M. Multivariate CUSUM quality control procedures. **Technometrics**, v. 27; n. 3, p. 285-292, 1985.

YEH, A. B.; LIN, D. K. J.; ZHOU, H.; VENKATARAMANI, C. A multivariate exponentially weighted moving average control chart for monitoring process variability. **Journal of Applied Statistics**, v. 30, p. 507-536, 2003.

YEH, A. B.; HUWANG, L.; WU, Y. F. A likelihood-ratio-based EWMA control chart for monitoring variability of multivariate normal processes. **IIE Transactions**, v. 36, p. 865-879, 2004.

YEH, A. B.; HUWANG, L.; WU, C. W. A multivariate EWMA control chart for monitoring process variability with individual observations. **IIE Transactions**, v. 37, p. 1023-1035, 2005.

YEH, A. B.; LIN, D. K. J.; MCGRATH, R. N. Multivariate control charts for monitoring covariance matrix: a review. **Quality Technology and Quantitative Management**, v. 3, p. 415-436, 2006.