



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Samuel Paulino dos Santos

Sobre a geometria diferencial de certas frontais
no 3-espaço Euclidiano

São José do Rio Preto
2022

Samuel Paulino dos Santos

**Sobre a geometria diferencial de certas frontais
no 3-espaço Euclidiano**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Luciana de Fátima Martins
Coorientador: Prof^º Dr^º Kentaro Saji

Financiadora: FAPESP – Proc. 2018/17712-7
FAPESP – Proc. 2019/10156-4
CAPES

São José do Rio Preto
2022

S237a

Santos, Samuel Paulino dos

Sobre a geometria diferencial de certas frontais no 3-espço Euclidiano / Samuel Paulino dos Santos. -- São José do Rio Preto, 2022
97 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Luciana Martins

Coorientador: Kentaro Saji

1. Geometria Diferencial. 2. Superfícies singulares. 3. Frontais. 4. Frentes de onda. I. Título.

Samuel Paulino dos Santos

Sobre a geometria diferencial de certas frontais no 3-espaço Euclidiano

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP – Proc. 2018/17712-7
FAPESP – Proc. 2019/10156-4
CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Farid Tari
USP – Câmpus de São Carlos

Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
IME – UFG

Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva
UFSC – Câmpus de Blumenau

Profa. Dra. Nguyen Thi Bich Thuy
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
31 de agosto de 2022

Dedico este trabalho à minha esposa Deusiane, cuja presença foi essencial para a conclusão deste trabalho. Grato pela sua compreensão com as minhas horas de ausência. Te amo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me sustentou até aqui, me fortalecendo em todas as horas, e me deu capacidade para fazer tal trabalho.

À professora Luciana de Fátima Martins, mais que uma orientadora, uma amiga, que com muito talento e maestria me adotou durante a graduação e me orientou durante esses anos, me propiciando um excelente amadurecimento matemático. Agradeço pelos elogios, também pelos puxões de orelha, pelo maravilhoso trabalho que fizemos juntos e por sua amizade que levarei para sempre.

Ao Prof. Dr. Kentaro Saji por sua supervisão e hospitalidade, no período em que estive em Kobe - Japão.

Ao Prof. Dr. Keisuke Teramoto, por toda a parceria que desenvolvemos durante esse período.

À minha família, pelo imenso amor que recebo todos os dias, pelo apoio, o incentivo, o carinho e por me fazer sentir querido por pessoas tão especiais.

A todos os meus amigos da graduação e pós graduação de diversos anos, que me apoiaram, me ajudaram e me incentivaram a prosseguir e que tive o prazer de conhecer, os quais não listo aqui por se tratar de muitos nomes, mas agradeço a amizade de cada um que fez parte dessa história.

Ao Ibilce, que me acolheu e me deu suporte todos esses anos.

Aos professores Farid Tari, Jorge Deolindo, Nguyen Thuy e Ronaldo Garcia, por aceitarem fazer parte da banca e pelas correções e sugestões que contribuíram para a melhoria deste trabalho.

O presente trabalho (primeiro ano) foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

Agradeço à Fapesp pela concessão da bolsa de pesquisa, sob o processo nº 2018/17712-7, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e também pela concessão da BEPE, sob o processo nº 2019/10156-4.

“Aceitai antes a minha correção, e não a prata; e o conhecimento, antes do que o ouro escolhido. Porque melhor é a sabedoria do que as joias; e de tudo o que se deseja nada se pode comparar com ela”

(BÍBLIA, Provérbios, 8, 10-11).

RESUMO

Este trabalho busca estudar a geometria diferencial de algumas classes de superfícies com singularidades que não são necessariamente não degeneradas ou frentes. Dentre elas, estudamos a superfície singular $D_4^\pm$, que é uma frente com singularidade degenerada, determinada por um conjunto bifurcação de uma certa deformação. Estudamos também uma classe de frontais chamadas de σ -edges, que podem ser não frentes ou apresentar singularidades não degeneradas apenas em casos específicos. Por fim, estudamos a geometria do conjunto focal de frontais puras, que são superfícies singulares que não são frentes em todos os seus pontos singulares.

Palavras-chave: Geometria Diferencial. Superfícies singulares. Frontais. Frentes de onda.

ABSTRACT

This work seeks to study the geometry of some specific classes of singular surfaces which are not necessarily fronts or non-degenerated singularities. We study the singular surfaces $D_4^\pm$, when it is given as a bifurcation set of a deformation; this surface is a front which has a degenerated singular point. We also study a class of singular surfaces called σ -edges, which are frontals, but are fronts or non-degenerated singular points in very specific cases. At last, we study the geometry of the focal set of singular surface which are frontal but not front in every singular point; such surfaces are called pure frontals.

Keywords: Differential Geometry. Singular Surfaces. Frontals. fronts.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Da esquerda pra direita: cuspidal edge, rabo de andorinha e cuspidal cross cap, dadas na Definição 2.2.12	19
2.2	Exemplo de uma cuspidal edge com curvatura normal nula (esquerda) e não nula (direita).	21
2.3	Exemplo de uma cuspidal edge com curvatura singular positiva (esquerda) e negativa (direita).	21
2.4	Exemplo de uma cuspidal edge com curvatura cuspidal menor (esquerda) e maior (direita).	22
2.5	Aresta cuspidal com torção cuspidal não nula.	23
2.6	Curva singular σ com $b(\sigma) = 0$ (esquerda) e $b(\sigma) \neq 0$ (direita). A linha tracejada denota a tangente limitante de α em seu ponto singular.	24
3.1	Superfícies D_4^- (esquerda) e D_4^+ (direita).	27
3.2	Curvas singulares da singularidade pirâmide no domínio de b	31
3.3	Curvas singulares da singularidade bolsa no domínio de b	32
3.4	Faces no domínio da singularidade D_4^-	41
3.5	Configuração das curvas parabólicas para o caso da primeira linha da Tabela 3.1. À direita está uma representação "aberta" da configuração.	42
3.6	Configurações (112), (222), (1) (da esquerda para a direita) das curvas parabólicas sobre uma face de D_4^-	43
3.7	Faces no domínio da singularidade D_4^+	44
3.8	Configuração das curvas parabólicas para o caso da primeira linha da Tabela 3.2. À direita está uma representação "aberta" da configuração.	44
4.1	Um exemplo de σ -edge, onde $\sigma(t) = (t^3, t^4)$	53
4.2	Esquerda: Superfície de rotação do Exemplo 4.1.4. Direita: Superfície helicoidal do Exemplo 4.1.5.	54
4.3	Comportamento assintótico (gráficos próximo à origem) das funções κ_g, κ_ν e τ_g (da esquerda para a direita) de f_1 , dada no Exemplo 4.3.6.	60
4.4	Comportamento assintótico das funções κ_g, κ_ν e τ_g (da esquerda para a direita) de f_2 , dada no Exemplo 4.3.6.	61
4.5	Resumo dos ordens dos invariantes κ_g, κ_n e τ_g , onde l varia sobre a reta dos possíveis m	67

4.6	Superfície f a curva $\hat{\alpha} = f(t^2, t)$ do Exemplo 4.3.11. A curva em vermelho é a curva geratriz de f .	68
5.1	Cuspidal cross cap (esquerda) e uma frontal pura na forma (5.1), com $c_5(0, v)$ uma função ímpar (direita).	74
5.2	A superfície do Exemplo 5.4.15	80
5.3	A superfície do Exemplo 5.4.15	83
5.4	A superfície f do Exemplo 5.4.21 (superfície inferior) e suas superfícies focais.	86

1	Introdução	12
2	Preliminares	15
Preliminares		15
2.1	Germes de aplicações diferenciáveis	15
2.2	Frontais e frentes de onda	16
2.2.1	Invariantes geométricos de frontais	19
2.2.2	Curvatura cuspidal secundária e bias	23
2.3	Desdobramentos	23
3	Geometria de superfícies $D_4^\pm$ como conjunto bifurcação	26
3.1	Simplificando uma família de Morse pela $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -isometria	27
3.2	Parametrização e campo normal	28
3.2.1	Singularidade D_4^-	29
3.2.2	D_4^+ singularidade	31
3.3	Comportamento assintótico	33
3.3.1	Primeira e segunda formas fundamentais	33
3.3.2	Curvaturas e direções principais	35
3.3.3	Curvas parabólicas	40
3.4	Curvatura singular e curvatura normal limitante	45
3.5	Singularidades A_3 e A_4	46
3.5.1	Conjunto bifurcação de uma singularidade A_3	47
3.6	Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4	50
4	Geometria de σ-edges	52
4.1	Definições, exemplos e propriedades	53
4.2	Forma normal de uma σ -edge	55
4.3	Invariantes geométricos	57
4.3.1	Curvaturas singular, normal e cuspidal, e torção cuspidal	57
4.3.2	Comportamento assintótico	58
5	Geometria de frontais puras	70
5.1	Definição, exemplos e forma normal	71
5.2	Invariantes geométricos de uma frontal pura	72

5.3	Curvaturas e direções principais de uma frontal pura	75
5.4	Congruência normal de uma frontal pura	77
5.4.1	Singularidades de $\mathcal{R}$	77
5.4.2	Singularidades de FC_i	83
5.4.3	Curvaturas de FC para 5/2-cuspidal edges	92
	Referências	95

A geometria diferencial de superfícies singulares vem sendo objeto de inúmeros trabalhos nas últimas décadas, principalmente germes de superfícies singulares $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ que admitem um campo unitário suave de vetores normais, chamadas de **frontais**. Como exemplos de frontais mais frequentes na literatura temos a cuspidal edge, o rabo de andorinha e a cuspidal cross cap (suas definições se encontram no Capítulo 2). Se ν é um campo unitário de vetores normais a uma frontal f e a aplicação (f, ν) é uma imersão, dizemos que f é uma **frente de onda**, ou apenas **frente**. Cuspidal edges e rabos de andorinha, assim como singularidades $D_4^\pm$ são exemplos de frentes. Os pontos singulares de uma frontal podem ser divididos em *degenerados* e *não degenerados*. Entre os não degenerados, existem pontos *do primeiro* e *segundo tipo*. Para os pontos não degenerados, o conjunto singular de f é uma curva regular em uma vizinhança desse ponto, sendo que os pontos do primeiro tipo têm como imagem por f uma curva também regular, e os do segundo tipo uma curva singular.

Frontais que são frentes ou que possuem singularidades não degeneradas tem tido grande destaque nos estudos dentro de superfícies singulares ([1, 15, 17, 22, 24, 28, 29, 34], por exemplo). Para superfícies com singularidades degeneradas, porém, não existem tantos resultados. Uma das possíveis razões para isso é que não conseguimos garantir um bom comportamento dos pontos singulares em uma vizinhança desses pontos (como ocorre para os pontos não degenerados, onde garantimos que é uma curva regular). Tendo isso em vista, este trabalho busca encontrar resultados sobre a geometria de algumas classes de superfícies singulares que não são necessariamente frentes ou que não apresentam necessariamente singularidades não degeneradas, e está organizado da seguinte maneira.

No Capítulo 2, apresentamos as preliminares deste trabalho, ou seja, definições e resultados que são usados durante o trabalho ou que apresentam técnicas úteis para o mesmo. Dentre eles, destacamos o estudo de frontais e frentes de onda, frontais com pontos singulares do primeiro tipo, as definições de alguns invariantes geométricos e suas interpretações geométricas.

Singularidades do tipo $D_4^\pm$, chamadas de pirâmide ($-$) ou bolsa ($+$), são exemplos de singularidades degeneradas (por um ponto de pirâmide, por exemplo, passam três curvas singulares). Essas singularidades surgem no conjunto focal de superfícies regulares em pontos relativos aos pontos umbílicos da superfície original. Isto ocorre pois o conjunto focal é o conjunto bifurcação da família distância ao quadrado, uma família de Morse versal de uma certa aplicação. De uma maneira mais geral, superfícies com singularidades

$D_4^\pm$ são o conjunto bifurcação de uma deformação versal a três parâmetros de um germe de função $D_4^\pm f : \mathbb{R}^n, \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{0}$. No Capítulo 3, estudamos a relação entre os termos de uma deformação versal de uma singularidade $D_4^\pm$ e as informações geométricas das superfícies $D_4^\pm$. Mostramos que, assim como para frentes de onda ([34, Teorema 3.1]), uma de suas curvaturas principais pode ser estendida sobre seu conjunto singular, enquanto a outra é não limitada perto desse (Teorema 3.3.3). Além das curvaturas principais, estudamos também o comportamento assintótico das curvaturas Gaussiana e média de superfícies $D_4^\pm$. Sobre as curvas parabólicas, curvas de ridge e sub-parabólicas, estudamos o número máximo dessas curvas que podem emanar da singularidade $D_4^\pm$, com certas condições (Teorema 3.3.9). Provamos que o número de curvas parabólicas é no máximo três e suas configurações sobre as faces da superfície $D_4^\pm$ dependem apenas dos termos da deformação versal inicial. Ao final desse capítulo, fazemos um estudo quando o conjunto bifurcação é uma cuspidal edge e um rabo de andorinha, relacionando os coeficientes de uma deformação versal dada com alguns invariantes geométricos. Todo este capítulo foi desenvolvido no projeto BEPE no Japão supervisionado pelo professor Kentaro Saji, e parte dele está publicado em [27].

No Capítulo 4 estudamos a geometria de um conjunto especial de frontais em $\mathbb{R}^3$, chamadas σ -edges, onde σ é uma curva parametrizada plana com singularidade de multiplicidade finita. As σ -edges aparecem naturalmente em superfícies invariantes sob uma ação de grupo em $\mathbb{R}^3$, como rotações em torno de um eixo ou movimentos helicoidais. Tais frontais são superfícies $\mathcal{A}$ -equivalentes a uma superfície que pode ser considerada como uma suspensão de σ (ver Seção 4.1 para definições e exemplos). Cuspidal edges e 5/2-cuspidal edges são exemplos de σ -edges.

Superfícies que são σ -edges não necessariamente são frentes de onda ou apresentam singularidades não degeneradas. Porém, quando σ tem singularidade isolada de multiplicidade finita m , o conjunto singular de uma σ -edge $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular (chamada *curva singular*). Suas singularidades são não degeneradas se, e somente se, $m = 2$ (Proposição 4.1.7). Além disso, as singularidades de f são de posto 1 e a direção nula (direção dada pelo núcleo da diferencial de f no ponto singular) é transversal à direção tangente da curva singular no correspondente ponto singular. Assim, os pontos singulares de f possuem propriedades similares aos dos pontos singulares não degenerados do primeiro tipo de frontais, que são superfícies para as quais as usuais definições dos invariantes geométricos (curvatura singular, curvatura normal limitante, curvatura cuspidal e torção cuspidal) são válidas. Porém, quando $m > 2$, as singularidades de f são degeneradas e, assim, as definições não se aplicam.

Com o objetivo de estudar a geometria de σ -edges, apresentamos na Seção 4.2 uma reparametrização para σ -edges que facilita os cálculos e que não altera sua geometria. Chamamos essa parametrização de *forma normal* (Proposição 4.2.3). Na Seção 4.3, inspirados nas definições usuais de curvatura singular, curvatura normal limitante, curvatura cuspidal e torção cuspidal para frontais com pontos singulares do primeiro tipo, definimos similares invariantes geométricos para σ -edges com m qualquer, com as definições coincidindo com as usuais quando $m = 2$. Em [24] é mostrado que uma frontal com singularidade não degenerada do primeiro tipo é uma frente de onda se, e somente se, a curvatura cuspidal não se anula. Mostramos na Proposição 4.3.1 que uma propriedade análoga é válida para a curvatura cuspidal de σ -edges, ou seja, elas são frentes de onda se, e somente se, a curvatura cuspidal não se anula. Ainda mais, provamos que, para uma σ -edge dada na forma normal, os invariantes que definimos estão relacionados com os coeficientes da forma normal (Proposição 4.3.3). Ainda nessa seção, dada uma σ -edge f ,

estudamos o comportamento assintótico das curvaturas Gaussiana e média na vizinhança de um ponto singular de f (Teorema 4.3.5). Além disso, considerando uma curva plana α , consideramos os comportamentos assintóticos da curvatura normal, da curvatura geodésica e da torção geodésica de $\hat{\alpha}(t) = f \circ \alpha(t)$, quando essa curva passa por um ponto singular de f , que podem divergir, caso esse ponto também seja uma singularidade de $\hat{\alpha}$. Nesse caso, apresentamos no Teorema 4.3.8 condições para que tais invariantes sejam limitados, dependendo apenas da multiplicidade de σ e da ordem de contato de α com a reta paralela à direção nula de f .

Superfícies que são frontais e possuem pontos singulares do primeiro tipo, mas não são frentes em todos os seus pontos singulares são chamadas de **frontais puras**. Singularidades 5/2-cuspidal edges, ou qualquer σ -edge com σ não frente, são exemplos de frontais puras. Esta classe de superfícies singulares foi estudada recentemente em [29]. No Capítulo 5, continuamos este estudo, analisando as singularidades de seu conjunto focal.

A imagem do conjunto singular da função forma de congruência normal de uma aplicação $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, dada por $\mathcal{F}(u, v, w) = f(u, v) + w\nu(u, v)$, no caso em que f é uma frente de onda resulta em seu conjunto focal. Se f é uma frontal pura, entretanto, uma nova superfície surge quando tomamos a mesma abordagem, a **superfície regrada normal**, dada pela superfície regrada tendo como curva base a imagem do conjunto singular de f e como vetores associados em cada ponto dessa curva os vetores normais a f .

Como resultados principais deste capítulo, damos caracterizações geométricas que indicam quando o conjunto focal de uma frontal pura é também singular (Proposição 5.4.20). Quando isso ocorrer, damos condições para que este ponto seja do primeiro ou do segundo tipo (Proposição 5.4.25), condições essas que dependem apenas da superfície inicial. Quando a singularidade é do primeiro tipo, damos condições para que o conjunto focal seja uma singularidade cuspidal cross cap (Teorema 5.4.26). Além disso, mostramos que o conjunto focal de uma frontal pura é também uma frontal pura, sob certas circunstâncias (Teorema 5.4.28). Por fim, investigamos as curvaturas Gaussiana e média do conjunto focal, quando este é regular (Subseção 5.4.3). Grande parte dos resultados mostrados nesse capítulo foram submetidos recentemente para publicação no artigo ([30]).

Apresentamos neste capítulo definições e resultados que são usados posteriormente ou que apresentam técnicas úteis para o nosso trabalho. Não há resultados originais neste capítulo e as referências utilizadas são citadas em suas seções. Em todo este trabalho, estudamos a geometria local de curvas e superfícies. Por essa razão, trabalhamos, na maioria das vezes, com germes de conjuntos e germes de aplicações. Além disso, todas as aplicações e germes de aplicação estudadas são supostas suaves.

Os vetores nulos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são denotados por $\mathbf{0}$ quando não houver ambiguidade, por simplificação. Além disso, denotamos a derivada parcial de uma aplicação f em relação à variável u por f_u e a derivada direcional de f na direção de um vetor V por Vf .

Assumimos neste trabalho conhecimento prévio sobre geometria diferencial de superfícies regulares.

2.1 Germes de aplicações diferenciáveis

Sejam X e Y dois subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto em comum $q \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é equivalente a Y se existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo q tal que $X \cap U = Y \cap U$. Essa equivalência é uma relação de equivalência entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo q . A classe de equivalência de um subconjunto X é chamada de **germe** de X em q e é denotada por (X, q) .

Sejam U e V dois abertos de $\mathbb{R}^n$ contendo $q \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ duas aplicações suaves. Dizemos que $f \sim g$ se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo q tal que $f = g$ em W , isto é $f|_W = g|_W$. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência e um **germe de aplicação em q** é por definição uma classe de equivalência dela. Um germe de aplicação f em p é denotado por $[f] : (\mathbb{R}^m, q) \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um representante do germe $[f]$ em uma vizinhança de q . Porém, neste trabalho, vamos omitir os colchetes, por simplificação, quando não houver ambiguidade. Por vezes, exigimos que um germe de aplicação f assumo um certo valor em q , digamos p . Para isso, denotamos $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q)$.

Seja $\mathcal{E}_n$ o conjunto de germes de funções suaves na origem de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, isto é $\mathcal{E}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é um germe de função suave}\}$. Com a adição e multiplicação usual de funções, $\mathcal{E}_n$ é uma $\mathbb{R}$ -álgebra comutativa com unidade e possui um único ideal maximal, denotado por $\mathcal{M}_n$ e composto por todos os germes g de $\mathcal{E}_n$ tal que $g(\mathbf{0}) = 0$. Se $(x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas locais de $(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$, então $\mathcal{M}_n$ é gerado pelos germes de funções

$x_i, i = 1, \dots, n$, isto é

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1, \dots, x_n\}.$$

O produto de i ideais maximais $\mathcal{M}_n$ é denotado por $\mathcal{M}_n^i$ e definido por

$$\mathcal{M}_n^i = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} : i_1 + \cdots + i_n = i\},$$

ou seja, $\mathcal{M}_n^i$ é o conjunto dos germes de funções $f \in \mathcal{M}_n$ tais que suas derivadas parciais de até ordem $i - 1$ se anulam na origem.

Eventualmente, por simplicidade, citamos uma aplicação que representa este germe, porém sempre mantendo a notação. Uma aplicação definida em uma vizinhança de um ponto $q \in A$ e tendo como contradomínio o conjunto B é denotada por $f : A, q \rightarrow B$ e $f : A, q \rightarrow B, p$ significa que $f(q) = p$.

2.2 Frontais e frentes de onda

Expomos nesta seção o conteúdo necessário sobre frontais e frentes de onda, que são os principais objeto de estudo deste trabalho. As principais referências são [1], [18], [17], [22], [24] e [28].

Definição 2.2.1. *Uma superfície parametrizada por $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada **frontal** se admite um campo unitário de vetores normais, isto é, existe $\nu : U \rightarrow S^2$ suave tal que $\langle f_u(u, v), \nu(u, v) \rangle = \langle f_v(u, v), \nu(u, v) \rangle = 0, \forall (u, v) \in U$, onde S^2 é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Além disso, dizemos que uma frontal f é uma **frente de onda** (ou apenas **frente**) se a aplicação $(f, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ é uma imersão.*

Exemplo 2.2.2. *Toda superfície parametrizada regular é uma frente de onda. De fato toda superfície regular f admite $\frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$ como campo unitário de vetores normais e, como f é imersão, (f, N) também o é.*

Exemplo 2.2.3. *O germe $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ dado por $f(u, v) = (uv, u^2 \pm 3v^2, u^2v \pm v^3)$ é uma frente. De fato, $f_u(u, v) = (v, 2u, 2uv)$, $f_v(u, v) = (u, \pm 6v, u^2 \pm 3v^2)$ e $f_u \times f_v(u, v) = (u^2 \mp 3v^2)(2u, v, -2)$. Logo, podemos tomar como campo unitário de vetores normais à f o campo $\nu = \frac{\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}$, com $\bar{\nu} = (2u, v, -2)$. Como ν é imersão na origem, então temos a afirmação.*

Outros dois exemplos mais usuais de frentes são a cuspidal edge e o rabo de andorinha (Definição 2.2.12 e Figura 2.1).

Definição 2.2.4. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frontal, ν seu campo unitário de vetores normais e $q \in U$. O plano passando por $p = f(q)$ e perpendicular a $\nu(q)$ é chamado de **plano tangente limitante** de f em p .*

Apesar desta definição ser dada a priori para os pontos singulares, sua definição coincide com o plano tangente para os pontos regulares de uma superfície.

Definição 2.2.5. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frontal e $q \in U$ um ponto singular de f . Dizemos que q é um ponto singular **não degenerado** de f se a derivada exterior de λ não se anula em q , em que $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$. Tal função λ é chamada **identificador de singularidades**.*

O **conjunto singular** de uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dado pelo conjunto

$$S(f) = \{x \in U \mid df \text{ não é uma imersão em } x\}.$$

Seja f como na definição acima, como $\{\lambda = 0\}$ é o conjunto singular de f , pelo Teorema da Função Implícita, vale que, em torno de um ponto singular não degenerado q , o conjunto singular $S(f)$ é uma curva suave, que pode ser parametrizada por $\gamma : I \rightarrow U$, numa vizinhança do ponto singular q (este é o principal motivo de singularidades não degeneradas serem o foco de muitos estudos sobre frontais e frentes de onda). Além disso, numa vizinhança de q , cada ponto na imagem de γ é um ponto singular de f de posto 1. Logo existe um campo de vetores $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ao longo de γ tal que ηf se anula sobre $S(f)$. Nesse caso, η é chamado de **campo anulador** de vetores.

Definição 2.2.6. *Com as notações acima, um ponto singular q não degenerado de uma frontal $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dito do **primeiro tipo** se $\gamma'(t_0)$ não é paralelo a $\eta(t_0)$, onde $\gamma(t_0) = q$. Caso contrário, q é dito do **segundo tipo**.*

Pela definição acima, sempre que citado um ponto singular do primeiro tipo, está implícito que este é um ponto singular não degenerado.

Os seguintes resultados são úteis no decorrer deste trabalho.

Teorema 2.2.7. (Lema de Hadamard) ([4], p. 50) *Sejam $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ função suave e $k \geq 0$. Se $f^{(i)}(t_0) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, k$, então existe uma função suave $f_1 : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1}f_1(t)$, para todo t próximo de t_0 . Além disso, se $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$, então $f_1(t_0) \neq 0$.*

O seguinte resultado apresenta uma versão análoga ao Lema de Hadamard para o caso de duas variáveis.

Teorema 2.2.8. ([4], p. 86) *Seja $f : \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave.*

- (i) *Se $f(\mathbf{0}) = 0$, então $f(u, v) = uf_1(u, v) + vf_2(u, v)$ para funções suaves f_1, f_2 definidas em uma vizinhança de $\mathbf{0}$.*
- (ii) *Se $f(u, 0) = 0$, para todo u suficientemente próximo de 0, então $f(u, v) = vf_1(u, v)$, para uma função suave f_1 definida em uma vizinhança de $\mathbf{0}$.*

Dada f uma frontal, é útil encontrar um sistema de coordenadas que simplifique o estudo de sua geometria. Para isso, considere a seguinte definição.

Definição 2.2.9. *Seja $f : \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frontal e q um ponto singular de f do primeiro tipo. Um sistema de coordenadas (u, v) é dito **adaptado** se é compatível com a orientação de $\mathbb{R}^2$ e valem as seguintes condições:*

- (a) *O eixo- u é a curva singular de f ;*
- (b) *$\eta = \frac{\partial}{\partial v}$ é um campo vetorial anulador de f ao longo do eixo- u e*
- (c) *não há outros pontos singulares além do eixo- u .*

Se, além disso, $\{f_u, f_v, \nu\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ sobre o eixo- u , dizemos que (u, v) é um **sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado**.

A existência dos sistemas de coordenadas definidos acima é provada em [13].

Observação 2.2.10. *Uma consequência de um sistema de coordenadas adaptado em torno de um ponto singular não degenerado q é que, como $f_v(u, 0) = 0$, para u suficientemente pequeno, então, pelo Teorema 2.2.8, existe uma função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

$$f_v(u, v) = vh(u, v) \quad (2.1)$$

em uma vizinhança da origem. Por outro lado, como $\mathbf{0}$ é um ponto singular não degenerado, então $\lambda_v(\mathbf{0}) = \det(f_u, f_{vv}, \nu)(\mathbf{0}) = \det(f_u, h, \nu)(\mathbf{0}) \neq 0$. Logo, $h \neq 0$ sobre uma vizinhança da origem e f_u e h são linearmente independentes. Com isso, podemos tomar $\{f_u, h, \nu\}$ como uma base de $\mathbb{R}^3$ para todo ponto de f em uma vizinhança da origem. Caso f esteja em um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado, então esta base é ortonormal sobre o eixo- u .

Dizemos que dois germes de aplicações $f_1 : (\mathbb{R}^2, q_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, p_1)$ e $f_2 : (\mathbb{R}^2, q_2) \rightarrow (\mathbb{R}^3, p_2)$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes se existem germes de difeomorfismos $\varphi : (\mathbb{R}^2, q_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, q_2)$ e $\psi : (\mathbb{R}^3, p_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, p_2)$ tais que $\psi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$. Além disso, f_1 e f_2 são $\mathcal{R}$ -equivalentes se existe φ como acima tal que $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Também podemos definir $\mathcal{A}$ -equivalência e $\mathcal{R}$ -equivalência entre aplicações apenas trocando os germes de difeomorfismos por difeomorfismos locais.

Sejam $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal tal que a origem é um ponto singular do primeiro tipo, γ sua curva singular passando pela origem, η seu campo anulador sobre γ e ν um campo unitário de vetores normais. Defina a função $\psi_{ccr} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi_{ccr}(t) = \det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\nu}(t), \eta\nu(t)), \quad (2.2)$$

onde $\hat{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$, $\hat{\nu}(t) = \nu(\gamma(t))$ e $\eta\nu$ é a derivada direcional de ν na direção η . A função ψ_{ccr} é útil para identificar frentes de onda e também aparece no critério para identificarmos cuspidal cross cap (Teorema 2.2.13). Os próximos dois resultados mostram esses critérios.

Lema 2.2.11 ([24], Lema 2.5). *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal e $\mathbf{0}$ uma singularidade do primeiro tipo de f . Então f é frente de onda na origem se, e somente se, $\psi_{ccr}(0) \neq 0$, onde ψ_{ccr} é dado em (2.2).*

Definição 2.2.12. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, q) \rightarrow (\mathbb{R}^3, p)$ um germe de aplicação suave. O ponto q é dito uma **cuspidal edge** se f é $\mathcal{A}$ -equivalente à $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$. O ponto q é dito um **rabo de andorinha** se f é $\mathcal{A}$ -equivalente à $(u, v) \mapsto (u, 4v^2 + 2uv, 3v^4 + uv^2)$. O ponto q é dito uma **cuspidal cross cap** se f é $\mathcal{A}$ -equivalente à $(u, v) \mapsto (u, uv^3, v^2)$.*

Para identificar um ponto cuspidal edge, um rabo de andorinha, ou uma cuspidal cross cap de uma aplicação, muitas vezes é difícil encontrar difeomorfismos que satisfaçam a definição acima. Porém, existem critérios que podemos aplicar para identificar se uma aplicação possuem uma dessas singularidades, tais critérios são dados no seguinte resultado.

Teorema 2.2.13 ([24], Fato 2.4). *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ um germe de frontal e q um ponto singular de f não degenerado. Seja γ a parametrização da curva singular passando por q tal que $\gamma(0) = q$ e η um campo vetorial anulador de f sobre γ . Então*

(1) *q é uma cuspidal edge se, e somente se, f é uma frente de onda e q é um ponto singular do primeiro tipo.*

(2) *q é rabo de andorinha se, e somente se, f é uma frente de onda, q é um ponto singular do segundo tipo e $\det(\gamma'(t), \eta(t))' \neq 0$ em $t = 0$.*

(3) q é uma cuspidal cross cap se, e somente se, f não é uma frente em q ($\psi_{ccr}(0) = 0$) e $\psi'_{ccr}(0) \neq 0$.

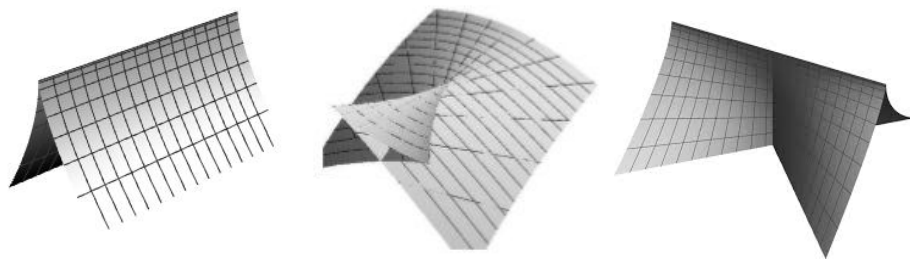


Figura 2.1: Da esquerda pra direita: cuspidal edge, rabo de andorinha e cuspidal cross cap, dadas na Definição 2.2.12

Pontos de ridge e sub-parabólicos são importantes para o estudo da geometria diferencial de superfícies. Suas definições estão dadas a seguir.

Definição 2.2.14. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um ponto regular $q \in U$ é dito um ponto de **ridge de n -ésima ordem** relacionado à curvatura principal $\kappa_i, i = 1, 2$, se $V_i^{(k)} \kappa_i = 0, k = 1, \dots, n$ e $V_i^{(n+1)} \kappa_i \neq 0$, onde V_i é a direção principal de f em relação à κ_i e $V_i^{(n)} \kappa_i$ é a n -ésima derivada direcional de κ_i na direção V_i . Um ponto $q \in U$ é um ponto **sub-parabólico** de f relacionado à curvatura principal κ_i se $V_j \kappa_i = 0, j \neq i$.*

Observação 2.2.15. *Note que, a priori, pontos de ridge e sub-parabólicos estão definidos somente em pontos regulares de f . Porém, se κ_i e V_i podem ser estendidos suavemente sobre os pontos singulares de f , então estas definições também se estendem para tais pontos.*

2.2.1 Invariantes geométricos de frontais

Exporemos aqui funções conhecidas na literatura que são definidas sobre o conjunto singular de uma frontal $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, possuem um significado geométrico e não se alteram em uma reparametrização de f ou uma isometria em $\mathbb{R}^3$ (por isso são chamadas invariantes). Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal, ν seu campo unitário de vetores normais, q um ponto singular não degenerado do primeiro tipo de f , γ uma parametrização para a curva singular e $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$. Em [28], a **curvatura normal limitante** de $\hat{\gamma}$ é definida por

$$\kappa_\nu(t) = \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t) \rangle}{|\hat{\gamma}'(t)|^2} \quad (2.3)$$

e a **curvatura singular** (ou **curvatura geodésica limitante**) de $\hat{\gamma}$ por

$$\kappa_s(t) = \text{sgn}(\eta\lambda) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}, \quad (2.4)$$

onde $\hat{\nu}(t) = \nu(\gamma(t))$.

Se tomarmos f em um sistema de coordenadas adaptado centrado em q (Definição 2.2.9), então a curvatura normal limitante e a curvatura singular de $\hat{\gamma}(u) = f(u, 0)$ são dadas, respectivamente, por

$$\kappa_\nu(u) = \frac{\langle f_{uu}, \nu \rangle}{|f_u|^2}(u, 0) \quad \text{e} \quad \kappa_s(u) = \text{sgn}(d\lambda) \frac{\det(f_u, f_{uu}, \nu)}{|f_u|^3}(u, 0).$$

Existem também outros invariantes definidos para a curva singular de uma frontal com singularidades não degeneradas ([24], [28]) e estão dados a seguir. Seja $\xi = \gamma'(t)$ e defina as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \kappa_c(t) &= \frac{|f|^{3/2} \det(\xi f, \eta \eta f, \eta \eta \eta f)}{|f \times \eta \eta f|}(\gamma(t)), \\ \kappa_t(t) &= \frac{\det(\xi f, \eta \eta f, \xi \eta \eta f)}{|f \times \eta \eta f|^2}(\gamma(t)) - \frac{\det(\xi f, \eta \eta f, \xi \xi \eta f) \langle \xi f, \eta \eta f \rangle}{|f|^2 |f \times \eta \eta f|^2}(\gamma(t)), \quad \text{e} \\ \kappa_i(t) &= \frac{\det(\xi f, \eta \eta f, \xi \xi \xi f)}{|f|^3 |f \times \eta \eta f|}(\gamma(t)) - 3 \frac{\langle \xi f, \xi \xi f \rangle \det(\xi f, \eta \eta f, \xi \xi f)}{|f|^5 |f \times \eta \eta f|}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Estes invariantes são chamados, respectivamente, de **curvatura cuspidal**, **torção cuspidal** e **curvatura inflexional**.

Com as mesmas notações acima, podemos reescrever as fórmulas para as curvaturas singular e normal limitante da seguinte maneira:

$$\kappa_\nu(t) = \frac{\langle \xi \xi f, \nu \rangle}{|\xi f|^2} \quad \text{e} \quad \kappa_s = \text{sgn}(\eta \lambda) \frac{\det(\xi f, \xi \xi f, \nu)}{|f|^3}. \quad (2.5)$$

Se supormos f em um sistema de coordenadas adaptado, então os invariantes geométricos dados acima se tornam

$$\begin{aligned} \kappa_c(u) &= \frac{|f_u|^{3/2} \det(f_u, h, f_{vvv})}{|f_u \times h|}(u, 0), \\ \kappa_t(u) &= \left(\frac{\det(f_u, h, f_{uvv})}{|f_u \times h|^2} - \frac{\det(f_u, h, f_{uu}) \langle f_u, h \rangle}{|f_u|^2 |f_u \times h|^2} \right)(u, 0), \quad \text{e} \\ \kappa_i(u) &= \frac{\det(f_u, h, f_{uuu})}{|f_u|^3 |f_u \times h|}(u, 0) - 3 \frac{\langle f_u, f_{uu} \rangle \det(f_u, h, f_{uu})}{|f_u|^5 |f_u \times h|}(u, 0), \end{aligned}$$

onde h é a aplicação dada em (2.1).

Vamos agora expor, de maneira sucinta, as interpretações geométricas de quatro dos invariantes geométricos definidos anteriormente ([24], [28]). No que segue, $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ é uma frontal e $\mathbf{0}$ uma singularidade não degenerada do primeiro tipo de f .

Curvatura normal

Geometricamente, κ_ν se anula em $p = \hat{\gamma}(0)$ se, e somente se, o plano osculador da curva $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ em p coincide com o plano tangente limitante de f em p (ver Figura 2.2). Caso κ_ν não se anule, então o sinal de κ_ν indica o semiplano definido pelo plano osculador de $\hat{\gamma}$ a qual a imagem de $\hat{\gamma}$ pertence.

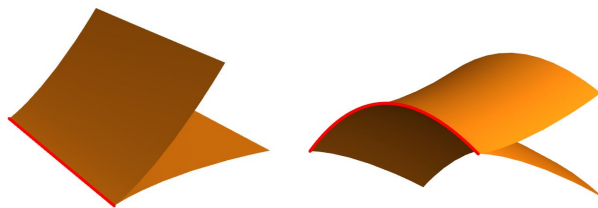


Figura 2.2: Exemplo de uma cuspidal edge com curvatura normal nula (esquerda) e não nula (direita).

Curvatura singular

A interpretação geométrica da curvatura singular κ_s está dada no seguinte resultado.

Corolário 2.2.16 ([28], Corolário 1.18). *Seja $f : \mathbb{R}^2, q \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frente, q um ponto singular do primeiro tipo e γ a curva singular, com $\gamma(0) = q$. Seja também T o plano retificante de $\hat{\gamma}$ em $\hat{\gamma}(0)$, isto é, o plano por $\hat{\gamma}(0)$ perpendicular a $\hat{\gamma}''(0)$. Se $\kappa_s > 0$, então a imagem de f pertence à mesma região delimitada por T , a qual pertence o vetor normal principal de $\hat{\gamma}$. Se $\kappa_s < 0$, a imagem de f contém pontos em ambos os semiespaços delimitados por T (ver Figura 2.3).*

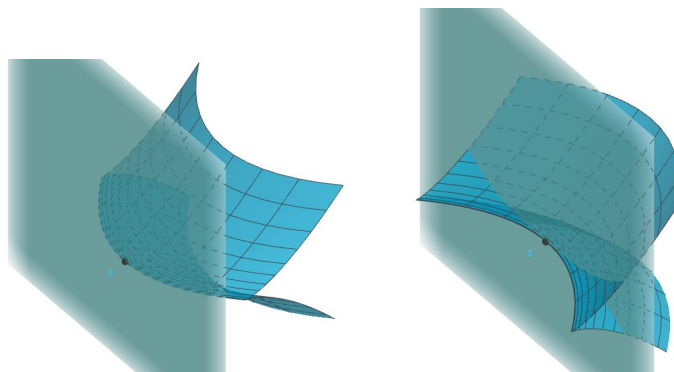


Figura 2.3: Exemplo de uma cuspidal edge com curvatura singular positiva (esquerda) e negativa (direita).

Curvatura cuspidal

Para a curvatura cuspidal κ_c , apresentamos aqui sua interpretação geométrica apenas para cuspidal edges, uma vez que, se f é não frente, então κ_c se anula ([24, Proposição 3.11]). Porém, neste trabalho, quando definirmos invariantes análogos (para não frentes ou frontais puras), sua interpretação geométrica será a mesma.

Uma **cúspide ordinária** é uma curva parametrizada $\sigma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\sigma'(0) = \mathbf{0}$ e $\det(\sigma''(0), \sigma'''(0)) \neq 0$. A **curvatura cuspidal** de uma cúspide ordinária σ é definida por

$$\omega = \frac{\det(\sigma''(0), \sigma'''(0))}{|\sigma''(0)|^{\frac{5}{2}}}.$$

Geometricamente, ω mede a abertura da cúspide ordinária σ . Temos então o seguinte resultado:

Proposição 2.2.17 ([24], Proposição 3.1). *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frente, q uma cuspidal edge e γ a curva singular com $\gamma(0) = q$. Então a intersecção da imagem de f e o plano P passando por $\hat{\gamma}(0)$ e perpendicular à $\hat{\gamma}'(0)$ é uma cúspide ordinária em P . Além disso, se σ é uma parametrização desta cúspide, com $\sigma(0) = f(q)$, então $\kappa_c(0)$ coincide com a curvatura cuspidal da curva plana σ .*

Com o resultado acima, podemos afirmar que a curvatura cuspidal mede o grau de abertura de uma cuspidal edge (ver Figura 2.4).

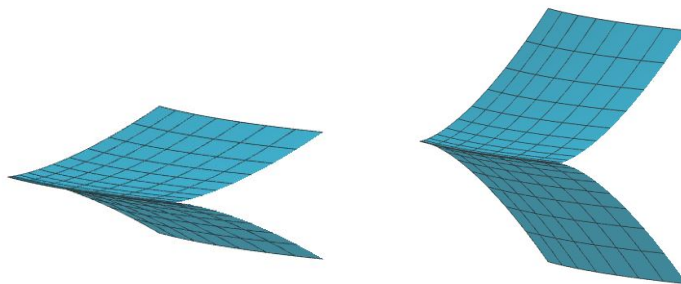


Figura 2.4: Exemplo de uma cuspidal edge com curvatura cuspidal menor (esquerda) e maior (direita).

Torção cuspidal

Seja Π um plano em $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores unitários e ortogonais entre si u_1 e u_2 . A **projeção ortogonal** em Π é definida por

$$\begin{aligned} \perp : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \Pi \\ w &\mapsto w^\perp, \end{aligned}$$

onde $w^\perp = \langle w, u_1 \rangle u_1 + \langle w, u_2 \rangle u_2$.

Proposição 2.2.18 ([22], Proposição 5.3). *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal e $\mathbf{0}$ um ponto de cuspidal edge de f . Seja também ν um campo unitário de vetores normais à f , $\gamma(t)$ uma parametrização da curva singular de f com $\gamma(0) = \mathbf{0}$ e $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$. Se $pr_\Pi \circ f$ é uma bijeção local, então κ_t se anula sobre o conjunto singular de f em uma vizinhança de $\mathbf{0}$. Aqui, pr_Π é a projeção ortogonal sobre Π , onde Π é gerado por $\hat{\gamma}'(0)$ e $\nu(\mathbf{0})$.*

Pela Proposição 2.2.17, se f é uma cuspidal edge, a curva β gerada pela intersecção da imagem de f com o plano M ortogonal a $\hat{\gamma}'(0)$ é uma cúspide ordinária. Se f está em um sistema de coordenadas adaptado, então $f_{vv} \in M$ é um vetor tangente limitante de β . Chamamos essa direção de **direção cuspidal**. A Proposição 2.2.18 implica que a torção cuspidal de f mede a rotação da direção cuspidal sobre $\hat{\gamma}$ (para mais detalhes, ver [22]). A Figura 2.5 mostra uma cuspidal edge com torção cuspidal não nula.

É importante reforçar que, apesar da Proposição 2.2.18 ser provada para cuspidal edges, sua prova utiliza apenas o fato de f ser uma frontal com singularidade não degenerada.



Figura 2.5: Aresta cuspidal com torção cuspidal não nula.

2.2.2 Curvatura cuspidal secundária e bias

Seja $\sigma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ um germe de curva suave com $\sigma'(0) = 0$ e $\sigma''(0) \neq 0$ e $\det(\sigma''(0), \sigma'''(0)) = 0$. Então a curvatura cuspidal ω de σ se anula e existe um número real l tal que $\sigma'''(0) = l\sigma''(0)$. A **curvatura cuspidal secundária** de σ nessas condições é definida em [15] por

$$\omega_r(\sigma) = \frac{\det(\sigma''(0), 3\sigma^{(5)}(0) - 10l\sigma^{(4)}(0))}{|\sigma''(0)|^{7/2}}$$

e é provado que ω_r não depende do parâmetro da curva σ . Geometricamente, $\omega_r(\alpha)$ mede a abertura da cúspide, ou seja, sua interpretação geométrica substitui a de ω , quando esse se anula.

Além disso, no mesmo trabalho, também é definido o **bias** de uma cúspide σ com $\sigma''(0) \neq 0$ e $\omega = 0$, dado por

$$b(\sigma) = \frac{\det(\sigma''(0), \sigma^{(4)}(0))}{|\sigma''(0)|^3}.$$

Neste caso, se, no ponto singular de σ , $b(\sigma) \neq 0$, então o traço de σ está localmente contido em um dos semiplanos determinados pela reta tangente limitante de σ no seu ponto singular, caso contrário, para toda vizinhança da origem, existem pontos de σ em ambos os semiplanos delimitados pela reta tangente limitante de σ na origem (ver Figura 2.6 e [15] para mais detalhes).

Estes invariantes (ω e $b(\sigma)$) inspirarão invariantes geométricos sobre frontais, que serão definidos e explorados com mais detalhes durante este trabalho.

2.3 Desdobramentos

O conceito de deformação será usado com mais ênfase no Capítulo 3. As definições e resultados envolvendo esse conceito necessários para o nosso estudo estão a seguir e são baseadas em [18], Seções 3.8 e 5.1.

Definição 2.3.1. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ um germe de aplicação. Um **desdobramento a r parâmetros** de f é um germe*

$$\bar{f} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (\mathbf{0}, \mathbf{0})) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, (\mathbf{0}, \mathbf{0}))$$

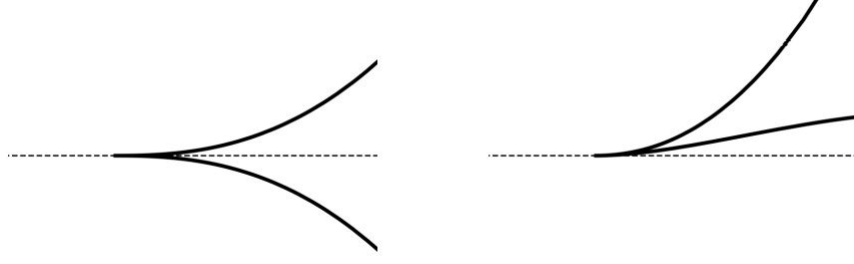


Figura 2.6: Curva singular σ com $b(\sigma) = 0$ (esquerda) e $b(\sigma) \neq 0$ (direita). A linha tracejada denota a tangente limitante de α em seu ponto singular.

da forma $\bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = (F(\mathbf{u}, \mathbf{x}), \mathbf{x})$, com $F(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = f(\mathbf{u})$. A família

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (\mathbf{0}, \mathbf{0})) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$$

é chamada de uma **deformação de f a r parâmetros** no ponto $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Uma deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ de $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **família de Morse** de f se

$$\text{posto} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_n \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial u_n^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial u_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial u_n \partial x_r} \end{pmatrix} = n \quad (2.6)$$

em $\mathbf{0}$, onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$.

Definição 2.3.2. Seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação a r parâmetros de $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{0})$. O **conjunto bifurcação** de F é um subconjunto do espaço de parâmetros definido por

$$B_F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r \mid \exists (\mathbf{u}, \mathbf{x}) \in C_F \text{ tal que } \text{posto} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \right) < n \right\},$$

onde C_F é chamado conjunto **catástrofe** de f e é definido por

$$C_F = \{(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \mid F_{q_1}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \dots = F_{q_n}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0\},$$

com $\mathbf{u} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$.

É possível definir uma relação de equivalência no conjunto das famílias de Morse de uma aplicação f de forma que duas deformações na mesma classe de equivalência tem seus conjuntos bifurcação difeomorfos. Tal relação é chamada de $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -equivalência e está definida a seguir.

Definição 2.3.3. ([18, Definição 3.4]) Sejam $F_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ famílias de Morse de $f_i : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$). As famílias F_1 e F_2 são **$P\text{-}\mathcal{R}^+$ -equivalentes** se existe uma tripla $(g(\mathbf{u}, \mathbf{x}), G(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$, onde $g : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (\mathbf{0}, \mathbf{0})) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$, $G : (\mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^r, \mathbf{0})$ é um germe de difeomorfismo, $h : (\mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e

$$F_2(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = F_1(g(\mathbf{u}, \mathbf{x}), G(\mathbf{x})) + h(\mathbf{x}). \quad (2.7)$$

Na definição acima, a letra P vem da palavra “parametrizado”, já que a família de germes de difeomorfismos $g(-, \mathbf{x})$ em $\mathbb{R}^n$, vista como deformação de $g(-, \mathbf{0})$ é parametrizada por $\mathbf{x}$. O sinal “+” por sua vez significa a adição da função $h(\mathbf{x})$.

Proposição 2.3.4. ([18], Proposição 3.1) *Sejam $F_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ famílias de Morse de $f_i : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$). Se F_1, F_2 são P - $\mathcal{R}^+$ -equivalentes como em (2.7), então os conjuntos bifurcações $\mathcal{B}_{F_1}, \mathcal{B}_{F_2}$ satisfazem*

$$G(\mathcal{B}_{F_1}) = \mathcal{B}_{F_2} \quad (2.8)$$

como germes de conjuntos em $\mathbf{0}$.

Definição 2.3.5. *Sejam $F_1 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r_1}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ e $F_2 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r_2}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ duas famílias de Morse de $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$. Um $\mathcal{R}^+$ - f -morfismo de F_2 em F_1 é uma tripla $(g(\mathbf{u}, \mathbf{x}), G(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$, onde $g : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r_2}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$, $G : (\mathbb{R}^{r_2}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^{r_1}, \mathbf{0})$, $h : (\mathbb{R}^{r_2}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{0})$ com $g(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \mathbf{u}$ e*

$$F_2(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = F_1(g(\mathbf{u}, \mathbf{x}), G(\mathbf{x})) + h(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

Definição 2.3.6. *Uma família de Morse $F_1 : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ de $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita $\mathcal{R}^+$ -versal se, para qualquer outro desdobramento $F_2 : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\bar{r}}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ de f , existir um $\mathcal{R}^+$ - f -morfismo de F_2 em F_1 .*

Teorema 2.3.7. ([18], Teorema 3.13) *A função $\pm u^4 + x_1 u + x_2 \frac{u^2}{2}$ é uma família de Morse $\mathcal{R}^+$ -versal de $\pm u^4$ e a função $u^5 + x_1 u + x_2 \frac{u^2}{2} + x_3 \frac{u^3}{3!}$ é uma família de Morse $\mathcal{R}^+$ -versal de u^5 . A função $F_0(u, v, x, y, z) = \frac{u^3}{3!} + \varepsilon_1 \frac{uv^2}{2} + xu + yv + z(\frac{u^2 - \varepsilon_1 v^2}{2})$ é uma família de Morse $\mathcal{R}^+$ -versal de $\frac{u^3}{3!} + \varepsilon_1 \frac{uv^2}{2}$, onde $\varepsilon_1 = \pm 1$.*

Definição 2.3.8. *Chamamos de D_4^+ (ou **bolsa**) a superfície $\mathcal{R}$ -equivalente à aplicação $(u, v) \rightarrow (uv, u^2 + 3v^2, u^2 v + v^3)$ na origem e de D_4^- (ou **pirâmide**) a $\mathcal{R}$ -equivalente à $(u, v) \rightarrow (uv, u^2 - 3v^2, u^2 v - v^3)$ na origem (ver Figura 3.1).*

Fato 2.3.9 ([18], Cap. 5). *O conjunto bifurcação de uma família de Morse $\mathcal{R}^+$ -versal de uma função $\mathcal{R}^+$ -equivalente a $\pm u^4$ é uma cuspidal edge, o conjunto bifurcação de uma família de Morse $\mathcal{R}^+$ -versal de uma função $\mathcal{R}^+$ -equivalente a u^5 é um rabo de andorinha. O conjunto bifurcação de uma família de Morse $\mathcal{R}^+$ -versal de uma função $\mathcal{R}^+$ -equivalente a $\frac{u^3}{3!} \pm \frac{uv^2}{2}$ é uma superfície singular $D_4^\pm$.*

CAPÍTULO 3

GEOMETRIA DE SUPERFÍCIES $D_4^\pm$ COMO CONJUNTO BIFURCAÇÃO

Apesar de existirem vários trabalhos sobre frentes de onda ([11, 15, 17, 22, 24, 28, 29, 34], por exemplo), há poucos resultados sobre superfícies singulares $D_4^\pm$ (ver Definição 2.3.8 e Exemplo 2.2.3). Um fato que explica essa ausência de resultados é que essas singularidades são degeneradas (por um ponto de pirâmide, por exemplo, passam três curvas singulares). Superfícies $D_4^\pm$ aparecem como o conjunto bifurcação de uma família de Morse versal de uma aplicação singular $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que seja $\mathcal{R}$ -equivalente a $(u, v) \rightarrow \frac{u^3}{3!} \pm \frac{uv^2}{2}$, que também é chamada de $D_4^\pm$ (Fato 2.3.9). Neste capítulo, obtemos resultados para tais superfícies singulares nessas circunstâncias e, assim, além de obter novas propriedades geométricas, também obtemos relações entre algumas propriedades da superfície e da família de Morse inicial. Além disso, estudamos o comportamento assintótico das curvaturas principais, Gaussiana e média, assim como o comportamento de curvas parabólicas, sub-parabólicas e ridges emanando das singularidades $D_4^\pm$. Os resultados deste capítulo foram publicados no artigo [27].

Ao final do capítulo, fazemos um estudo similar para os casos onde os conjuntos bifurcações são cuspidal edges e rabos de andorinha, calculando seus invariantes geométricos mais conhecidos na literatura em função da família de Morse inicial.

Um caso particular de conjunto bifurcação é o conjunto focal de uma superfície regular, que possui interpretações geométricas interessantes e seu estudo vem ganhando destaque nas últimas décadas. No caso das superfícies $D_4^\pm$, elas surgem nos pontos relativos aos pontos umbílicos da superfície original. Sendo assim, esse estudo tem um potencial de conseguir, num futuro, aplicações no conjunto focal. As superfícies D_4^- e D_4^+ estão representadas na Figura 3.1 e estão definidas no Exemplo 2.2.3.

Devido ao Fato 2.3.9, tomamos neste capítulo F uma família de Morse a 3 parâmetros de uma função $\mathcal{R}$ -equivalente à função $f(u, v) = \frac{u^3}{3!} \pm \frac{uv^2}{2}$ e estudamos a geometria de seu conjunto bifurcação, dependendo apenas dos parâmetros de F .

Considerando o Lema 2.3.4, como queremos estudar a geometria do conjunto bifurcação e essa não se altera quando aplicamos uma isometria a esse conjunto, consideramos a seguinte equivalência entre famílias de Morse:

Definição 3.0.1. *Sejam $F_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ famílias de Morse de $f_i : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Tais famílias são $P\text{-}\mathcal{R}^+\text{-isométricas}$ se elas são $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -equivalentes e o germe de difeomorfismo $G : (\mathbb{R}^r, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^r, \mathbf{0})$ dado na Definição 2.3.3 é um germe de isometria.*

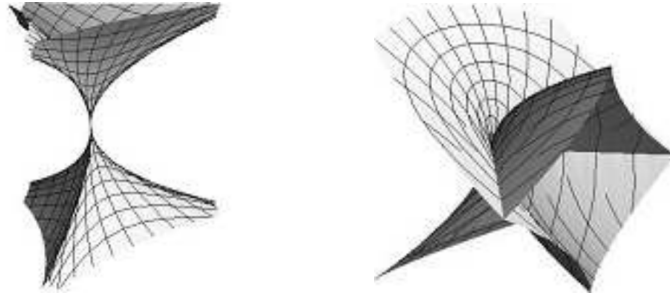


Figura 3.1: Superfícies D_4^- (esquerda) e D_4^+ (direita).

3.1 Simplificando uma família de Morse pela $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -isometria

Desejamos estudar a geometria de superfícies singulares $D_4^\pm$ dadas como conjunto bifurcação de uma família de Morse $F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de uma função $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ que é $\mathcal{R}$ -equivalente à função $\frac{u^3}{3!} \pm \frac{uv^2}{2}$. Para isso, nosso primeiro passo será, tomando a família de Morse como acima, encontrar uma outra família de Morse que seja $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -isométrica à primeira e a mais simples possível e, assim, facilitarmos o estudo da geometria do seu conjunto bifurcação, uma vez que serão isométricos. Vamos, nesta seção, trabalhar a simplificação da família de Morse.

Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{R}$ -equivalente a $\frac{u^3}{3!} \pm \frac{uv^2}{2}$, $\phi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ o difeomorfismo tal que $f \circ \phi = \frac{u^3}{3!} \pm \frac{uv^2}{2}$ e $F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma família de Morse de f . Então, tomando o difeomorfismo $\phi(\mathbf{u})$, a isometria $G(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e $h(\mathbf{x}) = 0$, podemos concluir da Definição 2.3.3 que F é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -isométrico à família $F(\phi(\mathbf{u}), \mathbf{x})$. Pelo Lema 2.3.4, isso significa que, ao tomarmos uma família de Morse de uma singularidade $\mathcal{R}$ -equivalente a $\frac{u^3}{3!} \pm \frac{uv^2}{2}$, podemos supor, sem alterar a geometria do conjunto bifurcação, que esta seja uma família de Morse da função $\frac{u^3}{3!} \pm \frac{uv^2}{2}$.

Proposição 3.1.1. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ o germe dado por $f(u, v) = \frac{u^3}{3!} + \varepsilon_1 \frac{uv^2}{2}$ e $\tilde{F} : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma família de Morse $\mathcal{R}^+$ -versal de f . Então $\tilde{F}$ é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -isométrica a*

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \frac{u^3}{3!} + \varepsilon_1 \frac{uv^2}{2} + P(\mathbf{x})u + Q(\mathbf{x})v + R(\mathbf{x}) \frac{u^2 - \varepsilon_1 v^2}{2}, \quad (3.1)$$

com $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e as seguintes condições:

$$P(\mathbf{0}) = Q(\mathbf{0}) = R(\mathbf{0}) = P_y(\mathbf{0}) = P_z(\mathbf{0}) = Q_z(\mathbf{0}) = 0 \quad e \quad P_x(\mathbf{0}), Q_y(\mathbf{0}), R_z(\mathbf{0}) > 0, \quad (3.2)$$

onde $P_x(\mathbf{0})$ significa a derivada de P em relação a variável x na origem (análogo para as demais notações).

Demonstração: Pelo Teorema 2.3.7 e pela Definição 2.3.5, existem aplicações $g : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$, $G : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, e $h : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{0})$ que satisfazem $g(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \mathbf{u}$ e $\tilde{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = F_0(g(\mathbf{u}, \mathbf{x}), G(\mathbf{x})) + h(\mathbf{x})$, com $F_0(u, v, x, y, z) = \frac{u^3}{3!} + \varepsilon_1 \frac{uv^2}{2} + xu + yv + z(\frac{u^2 - \varepsilon_1 v^2}{2})$. Como $g(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \mathbf{u}$, então $(g(\mathbf{u}, \mathbf{x}), \mathbf{x})$ é um difeomorfismo e, portanto, $\tilde{F}$ é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -isométrico a $F_0(u, G(\mathbf{x})) = F(\mathbf{u}, \mathbf{x})$, como em (3.1). Por $G(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, temos

$P(\mathbf{0}) = Q(\mathbf{0}) = R(\mathbf{0}) = 0$. Para provar as demais condições em (3.2), defina os vetores

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} P_x(\mathbf{0}) \\ P_y(\mathbf{0}) \\ P_z(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} Q_x(\mathbf{0}) \\ Q_y(\mathbf{0}) \\ Q_z(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} R_x(\mathbf{0}) \\ R_y(\mathbf{0}) \\ R_z(\mathbf{0}) \end{pmatrix},$$

e considere $\overline{\mathbf{g}}_1, \overline{\mathbf{g}}_2, \overline{\mathbf{g}}_3$ como sendo os vetores ortonormalizados por Gram-Schmidt, ou seja,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{g}}_1 &= \frac{\mathbf{g}_1}{|\mathbf{g}_1|}, \\ \widetilde{\mathbf{g}}_2 &= \mathbf{g}_2 - \langle \overline{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_2 \rangle \overline{\mathbf{g}}_1, \quad \overline{\mathbf{g}}_2 = \frac{\widetilde{\mathbf{g}}_2}{|\widetilde{\mathbf{g}}_2|}, \\ \widetilde{\mathbf{g}}_3 &= \mathbf{g}_3 - \left(\langle \overline{\mathbf{g}}_1, \mathbf{g}_3 \rangle \overline{\mathbf{g}}_1 + \langle \overline{\mathbf{g}}_2, \mathbf{g}_3 \rangle \overline{\mathbf{g}}_2 \right), \quad \overline{\mathbf{g}}_3 = \frac{\widetilde{\mathbf{g}}_3}{|\widetilde{\mathbf{g}}_3|}. \end{aligned}$$

Defina também

$$M = \begin{pmatrix} {}^t\overline{\mathbf{g}}_1 \\ {}^t\overline{\mathbf{g}}_2 \\ {}^t\overline{\mathbf{g}}_3 \end{pmatrix},$$

onde ${}^t(\cdot)$ significa a matriz transposta. Então M é uma matriz ortonormal e, portanto, pode ser identificada com uma aplicação linear $M(\mathbf{x})$, que é uma isometria. Assim, F é P - $\mathcal{R}^+$ -isométrico a $F_0(\mathbf{u}, M(G(\mathbf{x})))$ e, portanto, podemos supor que a primeira condição de (3.2) é satisfeita. Além disso, como F é família de Morse, segue direto da Definição 2.3.1 que $P_x(\mathbf{0})Q_y(\mathbf{0})R_z(\mathbf{0}) \neq 0$. A segunda condição de (3.2) pode ser satisfeita por uma aplicação linear definida pela matriz ortonormal

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

□

Significados geométricos das funções P, Q e R serão apresentados na Seção 3.4

3.2 Parametrização e campo normal

Pela seção anterior, vamos supor daqui em diante F uma família de Morse dado por (3.1) e estudar a geometria de seu conjunto bifurcação, que sabemos ser uma singularidade $D_4^\pm$ (Fato 2.3.9). Pela Definição 2.3.2, o conjunto catástrofe C_F de F é dado pela imagem inversa de 0 da aplicação $(u, v, \mathbf{x}) \rightarrow (F_u, F_v)(u, v, \mathbf{x})$. Note que a matriz da aplicação linear $d(F_u, F_v)$ na origem é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & P_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_x & Q_y & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto, tem posto máximo. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existem duas funções $x(u, v, z), y(u, v, z)$, tais que

$$F_u(u, v, x(u, v, z), y(u, v, z), z) = F_v(u, v, x(u, v, z), y(u, v, z), z) = 0$$

e C_F pode ser parametrizada por $(u, v, z) \mapsto (u, v, x(u, v, z), y(u, v, z), z)$. Além disso, o conjunto bifurcação de F pode ser descrito por

$$\mathcal{B}_F = \{(x, y, z) \mid \text{existe } (u, v, \mathbf{x}) \in C_F \text{ tal que } \varepsilon_1 u^2 - v^2 + R(\mathbf{x})^2 = 0\}.$$

3.2.1 Singularidade D_4^-

Nesta seção, fazemos o estudo das singularidades D_4^- e D_4^+ separadamente. Começaremos com D_4^- , ou seja, a superfície singular denominada pirâmide. Para isso, suponha que $\varepsilon_1 = -1$ em (3.1). Para encontrarmos o conjunto bifurcação B_F , é necessário resolver a equação $\det(H_F) = -u^2 - v^2 + R(\mathbf{x})^2 = 0$. Com este objetivo, definimos a seguinte mudança de coordenadas em uma vizinhança da origem:

$$u = r \cos 2\theta, \quad v = r \sin 2\theta. \quad (3.3)$$

Assim, nesse novo sistema de coordenadas, temos $\det(H_F) = -r^2 + R^2(\mathbf{x})$ e $\det(H_F) = 0$ pode ser resolvido por $r = \varepsilon_2 R(\mathbf{x})$, onde $\varepsilon_2 = \pm 1$. Logo, o conjunto bifurcação de F é dado pela solução do sistema de equação

$$F_u(2\theta, r, \mathbf{x}) = 0, \quad F_v(2\theta, r, \mathbf{x}) = 0, \quad r = \varepsilon_2 R(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

que é equivalente a $X(\theta, \mathbf{x}) = Y(\theta, \mathbf{x}) = 0$, onde

$$\begin{aligned} X(\theta, \mathbf{x}) &= F_u(\varepsilon_2 R(\mathbf{x}), 2\theta, \mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})^2 \alpha_1(\theta), \\ Y(\theta, \mathbf{x}) &= F_v(\varepsilon_2 R(\mathbf{x}), 2\theta, \mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})^2 \alpha_2(\theta), \end{aligned} \quad (3.5)$$

com

$$\alpha_1(\theta) = \frac{\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta}{2} + \varepsilon_2 \cos 2\theta \text{ e } \alpha_2(\theta) = -\cos 2\theta \sin 2\theta + \varepsilon_2 \sin 2\theta. \quad (3.6)$$

Note que, ao tomar $\varepsilon_2 = 1$ ou $\varepsilon_2 = -1$, obtemos dois conjuntos soluções. De fato, o conjunto bifurcação é a união de ambos. Pela Figura 3.1, podemos observar que, de fato, a superfície pirâmide é composta, na verdade, por dois conjuntos em formato de pirâmide unidos por um ponto: o ponto de singularidade D_4^- .

Note que, na origem, temos $X_x = P_x$, $X_y = 0$ e $Y_y = Q_y$. Logo, por (3.2) e pelo Teorema da Função Implícita, existem funções $x = x(\theta, z)$ e $y = y(\theta, z)$ tais que $X(\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) = 0$ e $Y(\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) = 0$ e o conjunto bifurcação de F pode ser parametrizado por

$$b(\theta, z) = (x(\theta, z), y(\theta, z), z). \quad (3.7)$$

Com isso, temos uma parametrização para o conjunto bifurcação. Apesar do Teorema da Função implícita não revelar explicitamente a forma dessa parametrização, ele revela suas derivadas, o que é suficiente para estudar a geometria desse conjunto.

Observação 3.2.1. Como na mudança de coordenadas (3.3), tomamos 2θ ao invés de θ , esse novo sistema de coordenadas cobre a superfície 2 vezes. Logo, para o estudo de B_F , podemos considerar o domínio de b com θ variando no intervalo $[0, \pi)$ para o lado direito e $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para o lado esquerdo. O motivo de termos tomado tal mudança de coordenadas é que, assim, conseguimos um campo unitário de vetores normais suave bem definido. Se tomássemos a mudança para coordenadas polares usual ($u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$), isso não seria possível.

Considere o seguinte lema, que será de grande utilidade para o decorrer do estudo.

Lema 3.2.2. Com os dados acima, temos

$$x(\theta, 0) = y(\theta, 0) = 0 \text{ e } R(x(\theta, 0), y(\theta, 0), 0) = 0.$$

Demonstração: Considere as equações $X(\theta, x, y, 0) = Y(\theta, x, y, 0) = 0$, onde X e Y estão dadas em (3.5). Então por (3.2) e pelo Teorema da Função Implícita, existem funções $\bar{x}(\theta), \bar{y}(\theta)$ tais que

$$X(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{y}(\theta), 0) = Y(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{y}(\theta), 0) = 0$$

e essas são únicas. Por outro lado, como $P(\mathbf{0}) = Q(\mathbf{0}) = 0$, a igualdade $X(\theta, \mathbf{0}) = Y(\theta, \mathbf{0}) = 0$ é satisfeita. Logo, $\bar{x}(\theta) = \bar{y}(\theta) = 0$ é uma solução de $X(\theta, x, y, 0) = Y(\theta, x, y, 0) = 0$. Pela unicidade de solução, temos $\bar{x}(\theta) = \bar{y}(\theta) = 0$. Pela definição de $\bar{x}(\theta), \bar{y}(\theta)$, vale que $\bar{x}(\theta) = x(\theta, 0), \bar{y}(\theta) = y(\theta, 0)$. Isso mostra a primeira equação. A segunda equação resulta direto da primeira. $\square$

Vamos agora determinar o conjunto singular da aplicação $b(\theta, z) = (x(\theta, z), y(\theta, z), z)$ que parametriza o conjunto bifurcação de F . Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\begin{pmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

e, por cálculos diretos,

$$(X_\theta, Y_\theta, 0) = 4 \sin(3\theta) R(\mathbf{x})^2 (-\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (3.9)$$

quando $\varepsilon_2 = 1$, e

$$(X_\theta, Y_\theta, 0) = -4 \cos(3\theta) R(\mathbf{x})^2 (\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

no caso $\varepsilon_2 = -1$.

Logo, para $\varepsilon_2 = 1$, o conjunto singular é a união das retas $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$ e $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$, enquanto para $\varepsilon_2 = -1$, é a união das retas $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pm \frac{5\pi}{6}$ e $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$. Portanto, o conjunto singular $S(b)$ é dado por

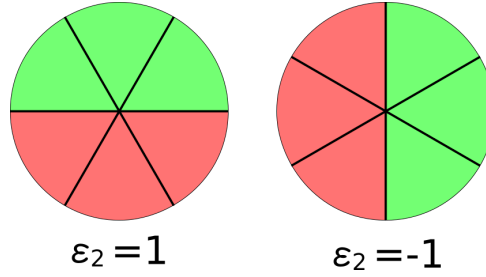
$$\begin{aligned} S(b) &= \{(1 + 2 \cos 2\theta) \sin \theta = 0\} \\ &= \{(0, z), (\pi/3, z), (2\pi/3, z), (\pi, z), (4\pi/3, z), (5\pi/3, z)\} \quad (\varepsilon_2 = 1), \text{ e} \\ S(b) &= \{(-1 + 2 \cos 2\theta) \cos \theta = 0\} \\ &= \{(\pi/6, z), (\pi/2, z), (5\pi/6, z), (7\pi/6, z), (3\pi/2, z), (11\pi/6, z)\} \quad (\varepsilon_2 = -1). \end{aligned}$$

Da Observação 3.2.1 que, se considerarmos θ no intervalo $[0, 2\pi)$, a parametrização cobre a superfície duas vezes. Esse é o motivo de aparecerem 6 curvas singulares, ao invés de 3. As curvas $(0, z)$ e (π, z) são por exemplo, as mesmas curvas sobre a superfície. Na Figura 3.2, cada reta simboliza uma curva singular no domínio de b , que está dividido em duas cores simbolizando que cada cor cobre a superfície uma vez. Portanto, temos três curvas singulares.

Usando os fatos acima, podemos obter um campo de vetores normais unitários à b da seguinte maneira: como

$$M \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_z \\ -Y_z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} X_x & X_y & 0 \\ Y_x & Y_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

e vale, como regra geral que, para uma matriz $M \in GL(3)$ e vetores V_1 e $V_2 \in \mathbb{R}^3$, $MV_1 \times MV_2 = (\det M)^t M^{-1}(V_1 \times V_2)$, então $b_\theta \times b_z = (x_\theta, y_\theta, 0) \times (x_z, y_z, 1)$ é proporcional


 Figura 3.2: Curvas singulares da singularidade pirâmide no domínio de b .

ao vetor

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{+1}(\theta, z) &= {}^tM \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -X_z \\ -Y_z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \\ Y_z \end{pmatrix} (\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) + \sin \theta \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix} (\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z), \quad (3.11)\end{aligned}$$

se $\varepsilon_2 = 1$, ou proporcional ao vetor

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{-1}(\theta, z) &= {}^tM \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -X_z \\ -Y_z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix} (\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) - \sin \theta \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \\ Y_z \end{pmatrix} (\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z), \quad (3.12)\end{aligned}$$

se $\varepsilon_2 = -1$. Como $\tilde{\nu}_{\varepsilon_2}(0, 0) \neq 0$, podemos tomar o campo $\nu_{\varepsilon_2} = \frac{\tilde{\nu}_{\varepsilon_2}}{|\tilde{\nu}_{\varepsilon_2}|}$ como o campo unitário de vetores normais a b . Além disso, como $(\tilde{\nu}_{\varepsilon_2})_\theta(0, 0) \neq \mathbf{0}$, $b_\theta(0, 0) = \mathbf{0}$ e $b_z(0, 0) \neq \mathbf{0}$, então (b, ν) é uma imersão e, portanto, b é uma frente.

3.2.2 D_4^+ singularidade

Faremos agora a mesma análise para a superfície singular bolsa (singularidade D_4^+). Suponha que $\varepsilon_1 = 1$ em (3.1). Então $\det(H_F) = u^2 - v^2 + R(x, y, z)^2$. Para conseguirmos resolver $\det(H_F) = 0$, definimos a seguinte mudança de coordenadas em uma vizinhança da origem:

$$u = r \cosh 2\theta, \quad v = r \sinh 2\theta.$$

Assim, $\det(H_F) = r^2 + R^2 = 0$ pode ser resolvido por $r = \varepsilon_2 R$, onde $\varepsilon_2 = \pm 1$. Como no caso $\varepsilon_1 = 1$, definimos

$$\begin{aligned}X(\theta, \mathbf{x}) &= F_u(\theta, \mathbf{x}) = R^2(\mathbf{x})\alpha_1(\theta) + P(\mathbf{x}) \text{ e} \\ Y(\theta, \mathbf{x}) &= F_v(\theta, \mathbf{x}) = R^2(\mathbf{x})\alpha_2(\theta) + Q(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

com $\alpha_1(\theta) = \varepsilon_2 \cosh(2\theta) + \frac{\cosh^2(2\theta) + \sinh^2(2\theta)}{2}$ e $\alpha_2 = \sinh(2\theta) \cosh(2\theta) - \varepsilon_2 \sinh(2\theta)$ e o conjunto bifurcação de F é dado pela solução do sistema $X(\theta, x, y, z) = Y(\theta, x, y, z) = 0$.

Note novamente que, ao tomar $\varepsilon_2 = 1$ ou $\varepsilon_2 = -1$, temos duas parametrizações para a singularidade D_4^+ , onde cada uma delas parametriza uma parte dela.

Igualmente ao caso D_4^- , podemos pelo Teorema da Função implícita concluir que existem funções suaves $x = x(\theta, z)$ e $y = y(\theta, z)$ tais que

$$X(\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) = Y(\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) = 0$$

e o conjunto bifurcação pode ser parametrizado por

$$b(\theta, z) = (x(\theta, z), y(\theta, z), z). \quad (3.13)$$

De maneira análoga à demonstração do Lema 3.2.2, podemos concluir que $x(\theta, 0) = y(\theta, 0) = 0$ e $R(x(\theta, 0), y(\theta, 0), 0) = 0$. Além disso, cálculos diretos mostram que

$$\begin{aligned} (X_\theta, Y_\theta, 0) &= 4(1 + 2 \cosh 2\theta) \sinh \theta R(\mathbf{x})^2 (\cosh \theta, \sinh \theta, 0) \quad (\varepsilon_2 = 1), \\ (X_\theta, Y_\theta, 0) &= 4(-1 + 2 \cosh 2\theta) \cosh \theta R(\mathbf{x})^2 (\sinh \theta, \cosh \theta, 0) \quad (\varepsilon_2 = -1) \end{aligned}$$

e, como neste caso continua valendo (3.8), o conjunto singular de b é dado por

$$\begin{aligned} S(b) &= \{(1 + 2 \cosh 2\theta) \sinh \theta = 0\} = \{(0, z), z > 0\} \quad (\varepsilon_2 = 1), \\ S(b) &= \{(-1 + 2 \cosh 2\theta) \cosh \theta = 0\} = \{(0, z), z < 0\} \quad (\varepsilon_2 = -1). \end{aligned}$$

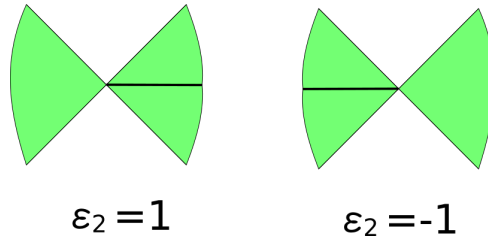


Figura 3.3: Curvas singulares da singularidade bolsa no domínio de b .

Note que, pelo modo que construímos a parametrização b (por coordenadas hiperbólicas), o domínio de b é a região do plano onde $u^2 > v^2$. A única curva singular neste domínio está ilustrado na Figura 3.3

Para encontrar um campo de vetores normais à b , nesse caso, podemos fazer o mesmo raciocínio que para o caso da singularidade D_4^- ou podemos notar que os vetores

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{+1}(\theta, z) &= {}^t A \begin{pmatrix} \cosh \theta \\ \sinh \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -X_z \\ -Y_z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\cosh \theta \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \\ Y_z \end{pmatrix} (\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) + \sinh \theta \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix} (\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) \end{aligned}$$

caso $\varepsilon_2 = 1$, e

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{-1}(\theta, z) &= {}^t A \begin{pmatrix} \sinh \theta \\ \cosh \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -X_z \\ -Y_z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \cosh \theta \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix} (\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) - \sinh \theta \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \\ Y_z \end{pmatrix} (\theta, x(\theta, z), y(\theta, z), z) \end{aligned}$$

caso $\varepsilon_2 = -1$ são não nulos e normais a b . Logo, $\nu_{\varepsilon_2} = \tilde{\nu}_{\varepsilon_2}/|\tilde{\nu}_{\varepsilon_2}|$ é um campo unitário de vetores normais a b . Além disso, como $(\tilde{\nu}_{\varepsilon_2})_{\theta}(0,0) \neq \mathbf{0}$, $b_{\theta}(0,0) = \mathbf{0}$ e $b_z(0,0) \neq \mathbf{0}$, então (b, ν) é uma imersão e, portanto, b é uma frente.

Com as análises feitas nessa seção, podemos concluir o seguinte resultado:

Proposição 3.2.3. *Seja $F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma família de Morse de um germe de função $D_4^{\pm}$. Então seu conjunto bifurcação pode ser localmente parametrizado por duas aplicações da forma $(\theta, z) \mapsto (x(\theta, z), y(\theta, z), z)$. Além disso, estas aplicações são frentes.*

3.3 Comportamento assintótico

Consideramos no que segue as aplicações b como em (3.7) ou (3.13), que parametrizam as superfícies $D_4^{\pm}$, dadas pelos conjuntos bifurcações de famílias de Morse $F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ de funções $D_4^{\pm}$. Vamos estudar nesta seção o comportamento das curvaturas Gaussiana e média, assim como das curvaturas principais perto da singularidade $D_4^{\pm}$, que corresponde à origem das parametrizações b . Além disso, estudaremos o número de curvas parabólicas, sub-parabólicas e ridges que emanam deste ponto singular. Analisaremos, em particular, algumas condições sobre a família de Morse F que influenciam a maneira como as curvas parabólicas emanam para as diferentes faces das superfícies.

Hasegawa apresenta, em [12], um estudo parecido para superfícies dadas pela imagem inversa de um valor não regular de uma função $f : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, tendo uma singularidade de Morse na origem. O estudo feito aqui foi inspirado nesse trabalho.

3.3.1 Primeira e segunda formas fundamentais

Invariantes geométricos de uma superfície regular, como as curvaturas Gaussiana e média, podem ser dados em função dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental. Tais coeficientes, relativos à aplicação b da seção anterior, são definidos nos pontos regulares por

$$\begin{aligned} E &= \langle b_{\theta}, b_{\theta} \rangle, & F &= \langle b_{\theta}, b_z \rangle, & G &= \langle b_z, b_z \rangle, \\ L &= -\langle b_{\theta}, \nu_{\theta} \rangle, & M &= -\langle b_{\theta}, \nu_z \rangle, & N &= -\langle b_z, \nu_z \rangle, \end{aligned}$$

onde ν é o campo unitário de vetores normais à b . Vamos, no que segue, calcular cada coeficiente separadamente. Vamos aqui fazer todos os cálculos para $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = 1$, isto é, para o lado $\varepsilon_2 = 1$ da singularidade D_4^- . Para os demais casos ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$ e $\varepsilon_2 = -1$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$), todas as contas são feitas de modo análogo e os resultados obtidos daqui em diante coincidem.

Recorde que as variáveis de b são θ e z . Além disso, denotamos $R(x(\theta, z), y(\theta, z), z)$ apenas por $R(\theta, z)$. O mesmo vale para as aplicações P, Q, X e Y . No que segue, quando não houver ambiguidade, omitiremos as variáveis.

Primeiramente, note que, pelas equações (3.9) e (3.10), temos

$$b_{\theta}(\theta, z) = \frac{4 \sin(3\theta) R^2}{X_x Y_y - X_y Y_x}(\theta, z) \tilde{b}(\theta, z), \quad (3.14)$$

com

$$\tilde{b}(\theta, z) = (\cos \theta Y_y + \sin \theta X_y, -\cos \theta Y_x - \sin \theta X_x, 0).$$

Além disso, pelo Lema 3.2.2, $R(\theta, 0) = 0$ e, portanto

$$R(\theta, z) = z \tilde{R}(\theta, 0). \quad (3.15)$$

Por (3.2) e (3.10), temos $x_z(\theta, 0) = y_z(\theta, 0) = 0$ e, portanto, $R_z(\theta, 0) = R_z(0, 0, 0) = \tilde{R}(\theta, 0)$. Logo, segue que $\tilde{R}(\theta, 0) \neq 0$, por (3.2).

Agora, por (3.14) e (3.15), o coeficiente E da primeira forma fundamental é dado por

$$E(\theta, z) = z^4 \Lambda^2(\theta) A^2(\theta, z) \langle \tilde{b}, \tilde{b} \rangle(\theta, z),$$

com

$$A(\theta, z) = \frac{4\tilde{R}^2}{X_x Y_y - X_y Y_x}(\theta, z) \text{ e } \Lambda = \sin(3\theta). \quad (3.16)$$

Note que $\tilde{b}(\theta, 0) = (-\cos \theta Q_y, \cos \theta Q_x + \sin \theta P_x, 0) \neq 0$. Logo, usando expansão de Taylor até ordem um na variável z , podemos descrever E como

$$E = z^4 \Lambda^2 A^2(E_0(\theta) + zE_1(\theta, z)), \quad (3.17)$$

com

$$E_0(\theta) = \langle \tilde{b}, \tilde{b} \rangle(\theta, 0) = \cos^2 \theta (Q_x + Q_y) + \sin^2 \theta Q_x + P_x Q_x \sin(2\theta).$$

É útil em nosso estudo descrever todos os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais de b da mesma forma que em (3.17). No que segue, exporemos o raciocínio para obtê-los.

Ainda por (3.14), (3.15) e pelas definições de L e M , obtemos

$$L = z^2 \Lambda A(L_0(\theta) + zL_1(\theta, z)),$$

com $L_0(\theta) = -\langle \tilde{b}, \nu_\theta \rangle(\theta, 0) = P_x Q_y(\mathbf{0})$, e

$$M = z^2 \Lambda A(M_0(\theta) + zM_1(\theta, z)),$$

com $M_0(\theta) = -\langle \tilde{b}, \nu_z \rangle(\theta, 0)$.

Novamente, por (3.14) e (3.15), segue que $F = z^2 \Lambda A \langle \tilde{b}, b_z \rangle$, mas como $\langle \tilde{b}, b_z \rangle(\theta, 0) = 0$, podemos descrever F por

$$F = z^3 \Lambda A(F_0(\theta) + zF_1(\theta, z)).$$

Por definição, $G = \langle b_z, b_z \rangle$. Como $b_z(\theta, 0) = (1, 0, 0)$, então $G(\theta, 0) = 1$. Por outro lado, como $b_{zz} = (x_{zz}, y_{zz}, 0)$, segue que $\langle b_z, b_{zz} \rangle(\theta, 0) = 0$. Dessa maneira, podemos descrever G por

$$G(\theta, z) = 1 + z^2 G_0(\theta, z).$$

Por fim, temos por definição que N pode ser escrito por

$$N = N_0(\theta) + zN_1(\theta, 0),$$

com $N_0(\theta) = -\langle b_z, \nu_z \rangle(\theta, 0) = Q_{zz}(\mathbf{0}) \cos \theta + P_{zz}(\mathbf{0}) \sin \theta + Q_z^2 \sin(3\theta)$.

Notando que

$$\nu_\theta = \frac{\tilde{\nu}_\theta}{|\tilde{\nu}|} - \frac{\tilde{\nu} \langle \tilde{\nu}, \tilde{\nu}_\theta \rangle}{|\tilde{\nu}|^3}, \quad \nu_z = \frac{\tilde{\nu}_z}{|\tilde{\nu}|} - \frac{\tilde{\nu} \langle \tilde{\nu}, \tilde{\nu}_z \rangle}{|\tilde{\nu}|^3},$$

podemos resumir o descrito acima no lema a seguir.

Lema 3.3.1. *Os coeficiente da primeira e segunda formas fundamental da parametrização b do conjunto bifurcação satisfazem*

$$\begin{aligned} E(\theta, z) &= z^4 \Lambda^2(\theta) A^2(\theta, z) (E_0(\theta) + zE_1(\theta) + z^2E_2(\theta, z)), \\ F(\theta, z) &= z^3 \Lambda(\theta) A(\theta, z) (F_0(\theta) + zF_1(\theta, z)), \\ G(\theta, z) &= 1 + z^2G_0(\theta) + z^3G_1(\theta) + z^4G_2(\theta, z), \\ L(\theta, z) &= \frac{z^2 \Lambda(\theta) A(\theta, z)}{|\tilde{\nu}(\theta, z)|} (L_0(\theta) + zL_1(\theta) + z^2L_2(\theta) + z^3L_3(\theta) + z^4L_4(\theta, z)), \\ M(\theta, z) &= \frac{z^2 \Lambda(\theta) A(\theta, z)}{|\tilde{\nu}(\theta, z)|} (M_0(\theta) + zM_1(\theta, z)), \\ N(\theta, z) &= \frac{1}{|\tilde{\nu}(\theta, z)|} (N_0(\theta) + zN_1(\theta) + z^2N_2(\theta, z)), \end{aligned}$$

onde E_i, F_i, G_i, L_i, M_i e N_i , $i = 1, 2, 3$ e 4 , são funções suaves nas variáveis θ ou (θ, z) , como indicado, Λ e A são definidos em (3.16) e $\tilde{\nu}$ é dado em (3.11). Além disso, $E_0(\theta) = \langle \tilde{b}, \tilde{b} \rangle(\theta, 0) > 0$, $L_0(\theta) = -\langle \tilde{b}, \nu_\theta \rangle(\theta, 0) = P_x(\mathbf{0})Q_y(\mathbf{0}) > 0$, $M_0(\theta) = -\langle \tilde{b}, \nu_z \rangle(\theta, 0)$ e $N_0(\theta) = -\langle b_z, \nu_z \rangle(\theta, 0)$.

3.3.2 Curvaturas e direções principais

Uma vez dados os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais na seção anterior, é possível calcular as curvaturas Gaussiana e média nos pontos regulares de uma singularidade $D_4^\pm$.

As curvaturas Gaussiana K e média H de uma superfície parametrizada regular são dadas em termos dos coeficientes das formas fundamentais da seguinte maneira:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \text{ e } H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

No que segue, iremos ocultar algumas vezes as variáveis das funções definidas no Lema 3.3.1. Usando esse lema e as fórmulas das curvaturas Gaussiana e média, obtemos

$$K = \frac{1}{|\nu|^2 \Lambda A z^2} \left(\frac{(L_0 + zL_1)(N_0 + zN_1) - z^2(M_0 + zM_1)^2}{(E_0 + zE_1)(1 + z^2G_0) - (F_0 + zF_1)^2} \right)$$

e

$$H = \frac{1}{2|\nu| A \Lambda z^2} \left(\frac{B}{(E_0 + zE_1)(1 + z^2G_0) - (F_0 + zF_1)^2} \right),$$

onde $B = z^2 A (E_0 + zE_1)(N_0 + zN_1) - 2z^3 (F_0 + zF_1)(M_0 + zM_1) + (L_0 + zL_1)(1 + z^2G_0)$. Com isso, usando a expansão de Taylor em z nos numeradores dos termos em parênteses acima, podemos escrever K e H da seguinte forma:

$$K = \frac{\tilde{K}}{z^2 A \Lambda I |\tilde{\nu}|^2} \quad (3.18)$$

e

$$H = \frac{\tilde{H}}{2z^2 A \Lambda I |\tilde{\nu}|}, \quad (3.19)$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= L_0 N_0 + (L_1 N_0 + L_0 N_1)z + z^2 O(0), \\
\tilde{H} &= L_0 + L_1 z + (G_0 L_0 + L_2 + 2\Lambda A E_0 N_0)z^2 + H_3 z^3 + z^4 O(0), \\
H_3 &= G_0 L_1 + L_0 G_1 + L_3 + 6\Lambda(-2AF_0 M_0 + AE_1 N_0 + AE_0 N_1 + A_z E_0 N_0), \\
I &= E_0(\theta) + zE_1(\theta) + z^2 O(0),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

e $z^i O(0)$ é uma função suave da forma $z^i h(\theta, z)$.

Observação 3.3.2. Por (3.20) e $L_0(0) > 0$ (ver Lema 3.3.1), $\tilde{H}$ não se anula em uma vizinhança da origem e, portanto, por (3.19), segue que H é não limitada perto da origem. Não podemos garantir o mesmo para a curvatura Gaussiana K , uma vez que $\tilde{K}$ pode ser da forma $z^2 O(0)$. Porém, o Teorema 3.3.9 garante que existem curvas emanando da origem com a curvatura Gaussiana de b nula sobre a curva.

Passaremos agora para as curvaturas principais, que sabemos serem dadas nos pontos regulares por $\kappa_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$, $i = 1, 2$. Primeiramente, por (3.18) e (3.19), temos

$$\sqrt{H^2 - K} = \frac{1}{2z^2 |\nu| |\Lambda A I|} \sqrt{\tilde{H}^2 - 4z^2 \Lambda A I \tilde{K}}.$$

Uma função g da forma $g(x) = \sqrt{b_1(\theta, z)^2 - 4xb_2(\theta, z)}$, onde $b_1 \neq 0$, satisfaz $g(0) = |b_1(\theta, z)|$. Logo, existe uma função $\tilde{g}(\theta, z, x)$ tal que

$$g(x) = |b_1(\theta, z)| - x\tilde{g}(\theta, z, x). \tag{3.21}$$

Substituindo $x = z^2 \Lambda(\theta)$ em (3.21), segue que existe uma função $\tilde{h}(\theta, z)$ tal que

$$\sqrt{\tilde{H}^2 - 4z^2 \Lambda A I \tilde{K}} = |\tilde{H}| - z^2 \Lambda \tilde{h}.$$

Assim,

$$H \pm \sqrt{H^2 - K} = \begin{cases} \frac{\tilde{H}}{z^2 \Lambda A |\tilde{\nu}| \tilde{I}} + \varepsilon_3 \operatorname{sgn} \Lambda \frac{\tilde{h}}{2|A| |\tilde{\nu}| \tilde{I}} \\ + \varepsilon_3 \operatorname{sgn} \Lambda \frac{\tilde{h}}{2|A| |\tilde{\nu}| \tilde{I}} \end{cases},$$

com $\varepsilon_3 = 1$ ou -1 . Ou seja, as duas linhas do lado direito acima correspondem às duas curvaturas principais de b .

Pela Observação 3.3.2 $\tilde{H}$ não se anula em uma vizinhança da origem. Além disso, por (3.16), $\tilde{R}(\theta, 0) \neq 0$ e $E_0(\theta) > 0$ (Lema 3.3.1), temos que $|A| |\tilde{\nu}| \tilde{I}$ também não se anula em uma vizinhança da origem. Com isso, uma das curvaturas principais $(\pm \operatorname{sgn}(\Lambda) \frac{\tilde{h}}{2|A| |\tilde{\nu}| \tilde{I}})$ de f é limitada perto de $\{z = 0\}$ e $S(b)$, enquanto a outra é não limitada.

Como $\tilde{H}$ não se anula em uma vizinhança da origem, então por (3.19), não existem pontos em uma vizinhança da origem onde a curvatura média se anula. Ainda por $\tilde{H} \neq 0$ concluímos também que não há pontos onde a curvatura principal não limitada $(\frac{\tilde{H}}{z^2 \Lambda A |\tilde{\nu}| \tilde{I}} \pm \operatorname{sgn} \Lambda \frac{\tilde{h}}{2|A| |\tilde{\nu}| \tilde{I}})$ se anula perto da singularidade $D_4^\pm$.

Buscaremos a seguir fórmulas explícitas para as curvaturas principais. Se uma função é dada por $b_0^2 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3(z) z^3$ ($b_0 \neq 0$), então sua raiz quadrada pode ser expandida

em Taylor por

$$\begin{aligned} & \sqrt{b_0^2 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3(z) z^3} \\ &= |b_0| + z \frac{b_1}{2|b_0|} + z^2 \frac{-b_1^2 + 4b_0^2 b_2}{8|b_0|^3} + z^3 \frac{b_1^3 - 4b_0^2 b_1 b_2 + 8b_0^4 b_3(0)}{16|b_0|^5} + z^4 O(0). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{H}^2 - 4z^2 \Lambda A \tilde{I} \tilde{K}} &= L_0 + L_1 z + (G_0 L_0 + L_2 - \Lambda A E_0 N_0) z^2 \\ &\quad + (G_0 L_1 + G_1 L_0 + L_3 - 2\Lambda A F_0 M_0 - \Lambda A E_0 N_1 \\ &\quad - A E_1 \Lambda N_0 - N_0 E_0 \lambda(a)_z) z^3 + z^4 O(0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{h}(\theta, z) = 2A E_0 N_0 + 2(A E_0 N_1 + A E_1 N_0 + E_0 N_0 A_z) z + z^2 O(0)$$

e, por cálculos diretos, as curvaturas principais são dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{z^2 \Lambda A |\tilde{\nu}| \tilde{I}} (L_0 + L_1 z + z^2 O(0)), \quad \text{para a curvatura principal não limitada e} \\ \kappa_2 &= \frac{1}{A |\tilde{\nu}| \tilde{I}} (a E_0 N_0 + (A E_1 N_0 + A E_0 N_1 + A_z E_0 N_0) z + z^2 O(0)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

para a curvatura principal limitada.

Agora passaremos para as direções principais. As direções principais nos pontos regulares de uma frontal podem ser dadas pelos coeficientes da primeira e segunda forma fundamentais por: $V_i = (-M + \kappa_i F, L - \kappa_i E)$ ou $V_i = (-N + \kappa_i G, M - \kappa_i F)$. Sendo assim, com cálculos diretos, podemos verificar que as direções principais relativas a κ_1 e κ_2 são dadas por

$$\begin{aligned} V_1 &= z^2 \Lambda A |\tilde{\nu}| (-N - \kappa_1 G, M - \kappa_1 F) = (L_0 + z O(0), z^2 O(0)) \quad \text{e} \\ V_2 &= \frac{|\tilde{\nu}|}{z^2 \Lambda A} (-M + \kappa_2 F, L - \kappa_2 E) = (-M_0 + z O(0), L_0 + z O(0)), \end{aligned} \quad (3.23)$$

respectivamente, onde identificamos $\partial\theta = (1, 0)$ e $\partial z = (0, 1)$.

De (3.22) e (3.23), concluímos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.3. *Seja $b : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma parametrização de uma superfície dada pelo conjunto bifurcação de uma deformação versal de uma singularidade $D_4^\pm$. Então uma de suas curvaturas principais pode ser estendida suavemente sobre o seu conjunto singular, enquanto a outra é não limitada perto do conjunto singular. Além disso, os vetores principais de b podem ser estendidos suavemente sobre o seu conjunto singular.*

Dadas as curvaturas e direções principais, vamos encontrar quais são as condições para que uma curva ridge, sub-parabólica ou parabólica emane da singularidade $D_4^\pm$.

Apesar de todo o raciocínio feito até agora para a superfície singular D_4^- ser análogo para o caso D_4^+ , funções hiperbólica-trigonométricas aparecem no lugar das trigonométricas para o caso D_4^+ na demonstração da Proposição 3.3.7, o que exige um cuidado a mais. No que segue, apresentamos alguns resultados essenciais para o entendimento desta abordagem. Considere a seguinte definição:

Definição 3.3.4. Um par de polinômios hiperbólico-trigonométricos

$$g_n(s) = \sum_{1 \leq i+j \leq n} a_{i,j} \cosh^i s \sinh^j s \text{ e } h_n(s) = \sum_{1 \leq i+j \leq n} b_{i,j} \cosh^i s \sinh^j s,$$

satisfazendo $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ para todo ímpar $i + j$ ou $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ para todo par $i + j$ é dito adaptado se, definindo $\cosh s = 1/(1 - t^2)^{1/2}$, $\sinh s = t/(1 - t^2)^{1/2}$, ($t = \tanh s$), o polinômio $(1 - t^2)^{n/2} g_n(s)$, com variável t , e o polinômio $(1 - t^2)^{n/2} h_n(s)/t^n$ com variável $1/t$ são os mesmos.

Exemplo 3.3.5. O par de polinômios $\cosh 3s$ e $\sinh 3s$ é adaptado, uma vez que $\sinh 3s = (1 - t^2)^{-3/2} t^3 (1 + 3t^2)$ e $\cosh 3s = (1 - t^2)^{-3/2} (1 + 3t^2)$.

Lema 3.3.6. (1) O número de raízes de $f_n(s) = \sum_{i+j=1}^n a_{i,j} \cos^i s \sin^j s$ é no máximo n , para $s \in [0, \pi)$ se $f'_n(s) \neq 0$, para todo s tal que $f_n(s) = 0$.

(2) Suponha que o par de polinômios hiperbólico-trigonométricos $g_n(s)$ e $h_n(s)$ seja adaptado. Então, a soma do número de raízes $s \in \mathbb{R}$ de $g_n(s) = 0$ (resp. $h_n(s) = 0$) é no máximo n quando $g'_n(s) \neq 0$ (respectivamente, $h'_n(s) \neq 0$) para todo s com $g_n(s) = 0$ (respectivamente, $h_n(s) = 0$).

Demonstração: Definindo $\cos s = \pm 1/(1 + \tanh^2 s)^{1/2}$ e $\sin s = \pm \tanh s/(1 + \tanh^2 s)^{1/2}$, a equação $f_n(s) = 0$ pode ser reduzida a um polinômio com variável $\tanh s$ de grau $2n$. Isso prova (1) (ver [12, Lema 2] para mais detalhes dessa prova).

Para a prova de (2), defina $\cosh s = 1/(1 - t^2)^{1/2}$, $\sinh s = t/(1 - t^2)^{1/2}$, e $t = \tanh s$. Como g_n e h_n possuem somente termos com $i + j$ par ou ímpar, as equações $g_n(s) = 0$, $h_n(s) = 0$ são reduzidas ao mesmo polinômio, apenas com variável diferente (t e $1/t$, respectivamente) com grau n . Como $\tanh s$ assume valores em $(-1, 1)$, concluímos a afirmação. $\square$

O número de raízes n de um polinômio trigonométrico (ou trigonométrico hiperbólico) f_n é dito o **grau** deste polinômio e denotado por $\deg(f_n)$.

Proposição 3.3.7. Com as notações acima, temos, em $z = 0$:

$$\deg(L_0) = \deg(A) = \deg(A_\theta) = 0; \quad \deg(E_0) = \deg(E'_0) = 2;$$

$$\deg(\Lambda) = \deg(\Lambda') = \deg(N_0) = \deg(N'_0) = 3; \quad \deg(M_0) = 4 \quad \text{e} \quad \deg(N_1) = 7.$$

Demonstração: Pelo Lema 3.3.1, temos

$$E_0(\theta) = -\langle \tilde{b}, \tilde{b} \rangle(\theta, 0) = \cos^2 \theta (Q_x^2 + Q_y^2) + \sin^2 \theta P_x^2 + 2 \sin \theta \cos \theta P_x Q_x$$

e, portanto, $\deg(E_0) = 2$. Os demais cálculos são feitos de modo análogo, onde, para N_0 e N_1 , usamos a seguinte simplificação trigonométrica:

$$\begin{aligned} \sin(3\theta) = & \sin \theta (2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta + \cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) + \\ & \cos \theta (2 \cos \theta \sin \theta - 2 \cos \theta^3 \sin \theta + 2 \cos \theta \sin^3 \theta). \end{aligned}$$

$\square$

Se uma função $F(\theta, z)$ tem a forma $z^l f(\theta, z)$, $l \in \mathbb{Z}$, então para cada θ que satisfaz $f(\theta, 0) = 0$ e $f_\theta(\theta, 0) \neq 0$, existe uma curva satisfazendo $F = 0$, partindo da origem da superfície com singularidade $D_4^\pm$. Assim, usando o Lema 3.3.6 e a Proposição 3.3.7, podemos calcular um limitante superior para o número de curvas ridge, sub-parabólicas e parabólicas que partem das singularidades $D_4^\pm$. Tais cálculos estão mostrados a seguir:

- Ridges:

Como a segunda coordenada de V_1 se anula em $\{z = 0\}$ e a primeira nunca se anula ($L_0 > 0$), então $\kappa_1 V_1(\theta, 0)$ se anula se, e somente se, $(\kappa_1)_\theta(\theta, 0)$ se anula. Por cálculos diretos, $(\kappa_1)_\theta$ se anula se, e somente se, C_1 se anula, em que

$$C_1 = A(2\Lambda'E_0 + 3\Lambda E'_0) + 2\Lambda E_0 A_\theta$$

e A e A_θ estão aplicados em $(\theta, 0)$.

Note que o grau da soma de dois polinômios é igual ao maior grau entre eles e o grau do produto de dois polinômios é a soma de seus graus.

Agora, como o número máximo de ridges relativo a κ_1 é o grau do polinômio C_1 , então, pela Proposição 3.3.7, este número é 5. De fato,

$$\deg(C_1) = \max\{0 + \max\{3 + 2, 3 + 2\}, 3 + 2 + 0\} = 5,$$

onde $\max\{Z\}$ significa o maior elemento do conjunto Z .

Por outro lado $V_2 \kappa_2(\theta, 0) = 0$ se, e somente se, $C_2(\theta) = 0$, em que

$$C_2 = 2E_0(N_1 L_0 - N'_0 M_0) + E'_0 M_0 N_0 - E_1 L_0 N_0.$$

Logo, pelo mesmo raciocínio acima, o número máximo de ridges relacionadas curvatura principal limitada é 9.

- Curvas sub-parabólicas:

Seguindo o mesmo raciocínio, temos que $V_1 \kappa_2(\theta, 0)$ se anula se, e somente se, $C_3(\theta) = 0$, em que

$$C_3 = 2E_0 N'_0 - E'_0 N_0 = 0.$$

Logo, concluímos que existem no máximo 5 curvas sub-parabólicas relativas a curvatura principal limitada.

Por outro lado, $V_2 \kappa_1(\theta, 0) = 0$ se, e somente se, $L_0(\theta) = 0$ e, como L_0 nunca se anula, concluímos que não existem curvas sub-parabólicas relativa a curvatura principal ilimitada.

- Curvas parabólicas:

Por (3.18), (3.20) e $L(0) > 0$, o número de curvas parabólicas é no máximo $\deg(N_0) = 3$.

Observação 3.3.8. Como citado no início da Seção 3.3.1, o raciocínio descrito acima é o mesmo para os casos diferente de $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = 1$. Porém, ao fazermos esse mesmo raciocínio para a singularidade D_4^+ , obteremos que os pares de funções C_i ($i = 1, 2$ e 3), para $\varepsilon_2 = \pm 1$, são adaptados e, assim, pelo Lema 3.3.6, todos esses limitantes superiores também vale para a singularidade D_4^+ .

Com isso, recordando que as superfícies $D_4^\pm$ são cobertas por duas parametrizações ($\varepsilon_2 = 1$ e $\varepsilon_2 = -1$), podemos concluir portanto o seguinte teorema:

Teorema 3.3.9. *Seja M o conjunto bifurcação de uma família de Morse versal com uma singularidade $D_4^\pm$. Suponha que o fecho do conjunto dos pontos de ridge e sub-parabólicos de b sejam curvas. Então existem, emanando da singularidade $D_4^\pm$, no domínio, no máximo*

- (i) 18 curvas ridge com relação à curvatura principal não limitada;
- (ii) 10 curvas ridge com relação à curvatura principal limitada;
- (iii) 10 curvas sub-parabólicas com relação à curvatura principal limitada;
- (iv) 6 curvas parabólicas.

Além disso, não existem curvas sub-parabólicas relacionadas à curvatura principal não limitada emanando da singularidade $D_4^\pm$.

3.3.3 Curvas parabólicas

Como ilustrado nas Figuras 3.2 e 3.3, em cada uma das superfícies singulares $D_4^\pm$, existem 3 regiões regulares, separadas por curvas singulares (D_4^-) ou por uma curva singular e as fronteiras dos domínios de suas parametrizações (D_4^+). Chamaremos tais regiões de **faces** das superfícies $D_4^\pm$. Uma vez que também temos no máximo 6 curvas parabólicas emanando dessas singularidades (3 para $\varepsilon_2 = 1$ e 3 para $\varepsilon_2 = -1$), podemos perguntar quais faces essas curvas pertencem ou o que é necessário ocorrer nos coeficientes da família de Morse F para que um certo padrão ocorra. Por exemplo, quais as condições sobre F para que ocorra de ter uma curva parabólica em cada face da superfície?

Esta subseção trás a resposta para estas perguntas. Mais precisamente, vamos estudar o comportamento das curvas parabólicas que partem da origem da singularidade em ambos os lados da superfície. Aqui, diferentemente de antes, vamos considerar os quatro casos ($\varepsilon_1 = \pm 1$ e $\varepsilon_2 = \pm 1$) separadamente. Começamos com $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = 1$.

Recorde que $K(\theta, 0) = L_0(\theta)N_0(\theta)$ e, como L_0 nunca se anula, vale que $K(\theta, 0) = 0$ se, e somente se,

$$N_0(\theta) = -Q_{zz} \cos \theta - P_{zz} \sin \theta - R_z^2 \sin(3\theta) = 0, \quad (3.24)$$

onde Q_{zz} , P_{zz} e R_z são aplicados em $\mathbf{0}$. Assim, para cada θ raiz de $N_0(\theta)$, existe uma curva parabólica emanando da origem com sua reta tangente limitante na origem na direção θ . Estamos interessados em encontrar as curvas parabólicas que não tem sua direção tangente coincidente com uma direção singular da pirâmide, uma vez que nestes casos não é possível garantir a qual face tal curva pertence. Assim, vamos supor no que segue que as raízes de N_0 são diferentes de $0, \pi/3$ e $2\pi/3$, o que, de fato, ocorre genericamente.

Note que $\theta = 0$ é raiz de N_0 se, e somente se, $Q_{zz} = 0$. Logo, $Q_{zz} \neq 0$. De modo similar à demonstração do Lema 3.3.6, podemos fazer na equação (3.24) as seguintes mudanças:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cotg \theta}{\sqrt{1 + \cotg^2 \theta}}; \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Assim, definindo $T = \cotg(\theta)$, resolver $N_0 = 0$ é o mesmo que resolver a seguinte equação cúbica:

$$p(T) = P_{zz} - R_z^2 + Q_{zz}T + (P_{zz} + 3R_z^2)T^2 + Q_{zz}T^3. \quad (3.25)$$

Recorde que a pirâmide (singularidade D_4^-) possui 3 faces regulares, divididas por 3 cuspidal edges, parametrizadas por $b(0, z)$, $b(\frac{\pi}{3}, z)$ e $b(\frac{2\pi}{3}, z)$. Queremos não somente

encontrar as soluções de (3.25), mas também estudar como os coeficientes P_{zz} , Q_{zz} e R_z influenciam em quais das 3 faces regulares da pirâmide as curvas parabólicas estão.

A primeira etapa que faremos é analisar qual o sinal de $p(T)$ nas direções singulares. Como $T = \cotg(\theta)$ e as direções singulares são $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{2}$, então, para tais direções, $T = \infty, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\pm\infty$, respectivamente. Calculando então $p(T)$ nos pontos não infinitos, temos:

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{4}{9}(3P_{zz} + \sqrt{3}Q_{zz}) \text{ e} \\ p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{4}{9}(3P_{zz} - \sqrt{3}Q_{zz}). \end{aligned}$$

Note que duas curvas parabólicas relativas a duas raízes T_0 e T_1 de p pertencem à faces diferentes se não estão ambas em um dos intervalos $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}}), (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ou $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. Dizemos que a curva relacionada à raiz T_0 de $p(T)$ pertence à (ver Figura 3.4).

$$\begin{aligned} \text{face 1} &\Leftrightarrow T_0 < \frac{-1}{\sqrt{3}}; \\ \text{face 2} &\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} < T_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \text{face 3} &\Leftrightarrow T_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

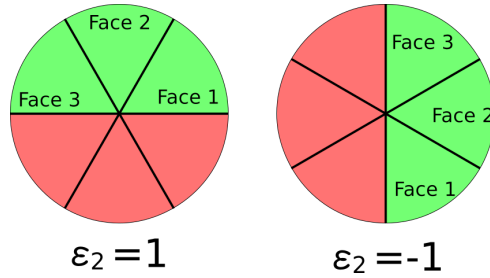


Figura 3.4: Faces no domínio da singularidade D_4^- .

Para a próxima etapa, usaremos a Regra de sinal de Descartes que diz que, dado um polinômio $q(t)$ com coeficientes reais, se os termos do polinômio $q(t+t_0)$ são colocados em ordem decrescente de grau, então o número de raízes maiores que t_0 do polinômio $q(t)$ é ou igual ao número de permutações de sinal ou menor por uma diferença par. Denotaremos este número por $\#q(t_0)$. Por exemplo, se $q(t) = t^2 - t - 2$, então $q(t+1) = t^2 + t - 1$ e, como temos apenas uma mudança de sinal nos coeficiente de $q(t+1)$, então $\#q(1) = 1$, ou seja, há apenas uma raiz de $q(t)$ maior que 1.

Para usar essa regra, será necessário calcular os coeficientes dos polinômios $p(T+T_0)$, com $T_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, uma vez que, em alguns casos, será necessário calcular o número de raízes de p maiores que $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou menores que $\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Calculando-os, temos

$$\begin{aligned} 9p\left(T + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 4(3P_{zz} + \sqrt{3}Q_{zz}) + 6(\sqrt{3}P_{zz} + 3Q_{zz} + 3\sqrt{3}R_z^2)T \\ &\quad + 9(P_{zz} + \sqrt{3}Q_{zz} + 3R_z^2)T^2 + 9Q_{zz}T^3, \text{ e} \\ 9p\left(T - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 4(3P_{zz} - \sqrt{3}Q_{zz}) + 6(-\sqrt{3}P_{zz} + 3Q_{zz} - 3\sqrt{3}R_z^2)T \\ &\quad + 9(P_{zz} - \sqrt{3}Q_{zz} + 3R_z^2)T^2 + 9Q_{zz}T^3; \end{aligned}$$

Por último, além dos coeficientes dos polinômios acima, a constante Q_{zz} também será útil, uma vez que é o coeficiente de T^3 em $p(T)$ e, por isso, define o comportamento assintótico de $p(T)$ nos infinitos.

Portanto, as constantes que serão necessárias analisar para o estudo do comportamento das curvas parabólicas são as 5 seguintes:

$$Q_{zz}, \sqrt{3}P_{zz} \pm Q_{zz} \text{ e } P_{zz} + 3R_z^2 \pm \sqrt{3}Q_{zz}.$$

Note que fizemos algumas simplificações nos termos acima, porém o sinal de tais termos não se alteraram. Suporemos também, por questões de simplificação, que os dois últimos coeficientes dados acima também não se anulam. A configuração das curvas parabólicas dependem então destes cinco coeficientes juntamente com o discriminante do polinômio dado em (3.25), que daqui em diante o denotaremos por D .

Vamos agora elaborar uma tabela que indica quais são as faces que contém as curvas parabólicas dependendo apenas dos sinais dessas 6 constantes. Para não estender muito o texto, faremos apenas a demonstração para uma única linha da tabela. As demais podem ser preenchidas com o mesmo raciocínio.

Suponha que $Q_{zz} > 0$, $\sqrt{3}P_{zz} - Q_{zz} < 0$, e $\sqrt{3}P_{zz} + Q_{zz} > 0$, $P_{zz} + 3R_z^2 + \sqrt{3}Q_{zz} > 0$ e $P_{zz} + 3R_z^2 - \sqrt{3}Q_{zz} < 0$. Como $Q_{zz} > 0$ é o coeficiente de T^3 em $p(T)$, vale que $\lim_{T \rightarrow -\infty} (p(T)) = -\infty$ e $\lim_{T \rightarrow \infty} (p(T)) = \infty$. Por outro lado, pelas hipóteses, vale que $p(-\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ e $p(\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, uma das raízes de $p(T)$ pertence ao intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Além disso, $\#(p(T + \frac{1}{\sqrt{3}})) = 0$ e, portanto, não há raízes no intervalo $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. Por fim, se o discriminante de $p(T)$ é positivo, então existem mais duas raízes, e elas estão no intervalo $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, se o discriminante é negativo, então só há uma raiz, a no intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Com o raciocínio acima, temos que, se o discriminante D de $p(T)$ é positivo, ou seja, se todas as raízes forem reais, então, neste caso em particular, existem duas curvas na face 1 e uma curva na face 2 do conjunto bifurcação de F (ver Figura 3.5). No caso onde $D < 0$, existe apenas uma curva parabólica e ela está na face 2.

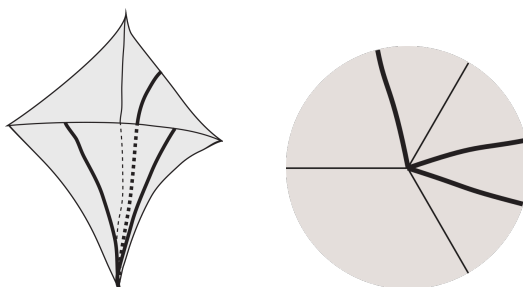


Figura 3.5: Configuração das curvas parabólicas para o caso da primeira linha da Tabela 3.1. À direita está uma representação "aberta" da configuração.

Usaremos $(ijk|lmn)^+$ para denotar que existem 3 curvas parabólicas partindo da origem para cada lado da superfície e elas pertencerem às face i, j e k no lado $\varepsilon_2 = 1$ e às faces l, m e n no lado $\varepsilon_2 = -1$, respectivamente. No caso onde exista apenas uma única curva, denotaremos por $(i|l)$ quando tal curva pertence à face i no lado $\varepsilon_2 = 1$ e à face l no lado $\varepsilon_2 = -1$. Por exemplo, depois de fazer o mesmo raciocínio para o caso $\varepsilon_2 = -1$ com as mesmas hipóteses do caso acima, denotamos a configuração das curvas parabólicas por $(112|233)$, caso $D > 0$ ou $(2|2)$, no caso $D < 0$ (ver Figura 3.6).

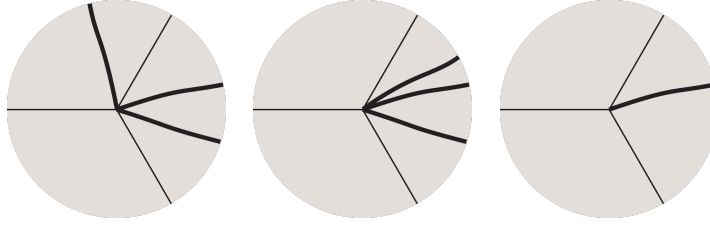


Figura 3.6: Configurações (112), (222), (1) (da esquerda para a direita) das curvas parabólicas sobre uma face de D_4^- .

Todos os casos possíveis estão descritos na Tabela 3.1, onde $c_1 = \sqrt{3}Q_{zz} + P_{zz} + 3R_z^2$ e $c_2 = \sqrt{3}Q_{zz} - P_{zz} - 3R_z^2$. As lacunas preenchidas por “qualquer” indicam que tal hipótese não interfere no resultado final.

Q_{zz}	$-Q_{zz} + \sqrt{3}P_{zz}$	$Q_{zz} + \sqrt{3}P_{zz}$	c_1	c_2	configuração	
					$D_{-1} > 0$	$D_{-1} < 0$
+	+	+	+	qualquer	(223 122)	(3 1)
+	-	+	+	+	(222 222)	(2 2)
+	-	+	+	-	(233 112)	(2 2)
+	-	-	qualquer	+	(122 223)	(1 3)
+	-	-	+	-	(133 113)	(1 3)
-	+	+	qualquer	-	(122 223)	(1 3)
-	+	-	+	-	(112 233)	(2 2)
-	+	-	-	-	(222 222)	(2 2)
-	-	-	+	-	(113 133)	(3 1)
-	-	-	-	qualquer	(223 122)	(3 1)

Tabela 3.1: Configuração das curvas parabólicas na singularidade pirâmide.

Logo, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.10. *As configurações das curvas parabólicas que emanam da singularidade D_4^- (pirâmide) em direção às suas faces (como definidas em (3.26)) estão descritas na Tabela 3.1.*

Todos os cálculos feitos até agora foram para o caso $\varepsilon_2 = 1$. Apesar de o caso $\varepsilon_2 = -1$ ser similar, ele apresenta algumas diferenças. São elas:

- 1: A aplicação Λ , dada em (3.16), agora é dada por

$$\Lambda(\theta) = \cos(3\theta)$$

e, portanto, o conjunto singular de b é dado pelas retas $\theta = c$, onde $c = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{6}$ e $\pm\frac{5\pi}{6}$.

- 2: Consideramos θ no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ao invés de $(0, \pi)$.

- 3: N_0 é dado por

$$N_0 = -Q_{zz} \cos(\theta) + P_{zz} \sin(\theta) + R_z^2 \cos(3\theta). \quad (3.27)$$

4: Ao fazermos as mudanças

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)}},$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\operatorname{tg}(\theta)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)}}$$

em N_0 , resolver $N_0 = 0$ é equivalente a resolver $p(T) = 0$, onde

$$p(T) = R_z^2 - P_{zz} + tQ_{zz} + t^2(-P_{zz} - 3R_z^2) + t^3Q_{zz},$$

que é similar ao caso anterior, mudando apenas o sinal dos coeficiente de T^0 e T^2 .

Os resultados para este caso estão contidos na Tabela 3.2

Prosseguimos agora para a singularidade bolsa (D_4^+), onde o raciocínio também é similar, com ligeiras peculiaridades, das quais citaremos aqui.

Suponha que $\varepsilon_1 = 1$. Definindo $T = \coth \theta$, no caso $\varepsilon_2 = 1$ ou $T = \operatorname{tgh} \theta$, no caso $\varepsilon_2 = -1$, então resolver $N_0 = 0$ nestes casos é equivalente a resolver $q(T) = 0$, onde

$$q(T) = -Q_{zz}T^3 + (P_{zz} + 3R_z^2)T^2 + Q_{zz}T - P_{zz} + R_z^2.$$

O demais segue com o mesmo raciocínio para o caso da singularidade pirâmide, os resultados obtidos estão na Tabela 3.2, onde $c_3 = P_{zz} + 3R_z^2$ e $c_4 = -P_{zz} + R_z^2$, e a enumeração das faces está dada na Figura 3.7. A configuração das curvas parabólicas dadas na primeira linha da Tabela 3.2 está representada na Figura 3.8, onde “qualquer” significa que o sinal da constante não interfere no resultado e “não ocorre” significa que $D_1 < 0$ não ocorre neste caso.

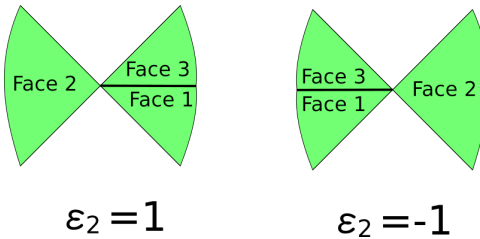


Figura 3.7: Faces no domínio da singularidade D_4^+ .

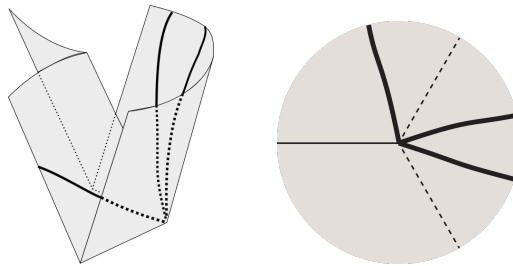


Figura 3.8: Configuração das curvas parabólicas para o caso da primeira linha da Tabela 3.2. À direita está uma representação “aberta” da configuração.

Temos assim o seguinte resultado:

Teorema 3.3.11. *As configurações das curvas parabólicas que emanam da singularidade D_4^+ (bolsa) em direção às suas faces (como definidas na Figura (3.7)) estão descritas na Tabela 3.3.3.*

Q_{zz}	c_3	$3Q_{zz} + c_3$	$3Q_{zz} - c_3$	$Q_{zz} + c_3$	$Q_{zz} - c_3$	c_4	configuração	
							$D_1 > 0$	$D_1 < 0$
+	+	+	+	+	any	+	(122 223)	(1 3)
+	+	+	+	+	any	-	(122 223)	não ocorre
+	+	+	-	+	-	+	(122 223)	(1 3)
+	+	+	-	+	-	-	(122 223)	não ocorre
-	+	+	-	+	-	+	(223 122)	(3 1)
-	+	-	-	+	-	+	(223 122)	(3 1)
-	+	-	-	-	-	+	(223 122)	(3 1)
-	+	+	-	+	-	-	(223 122)	não ocorre
-	+	-	-	qualquer	-	-	(223 122)	(3 1)
-	-	-	-	-	-	+	(223 122)	(3 1)
-	-	-	qualquer	-	+	+	(113 133)	(3 1)
+	-	qualquer	+	-	+	+	(133 133)	(1 3)
+	-	+	+	+	+	+	(122 223)	(1 3)

Tabela 3.2: Configuração das curvas parabólicas na singularidade bolsa.

3.4 Curvatura singular e curvatura normal limitante

Como o conjunto singular em uma vizinhança de uma singularidade $D_4^\pm$, a menos da própria singularidade, é composto por cuspidal edges, podemos considerar os invariantes κ_ν (2.3) e κ_s (2.4) sobre essas singularidades. Vamos aqui mostrar condições para que o limite de κ_s e κ_ν se anule quando as curvas singulares se aproxima da singularidade $D_4^\pm$. Neste contexto, diremos apenas que κ_s (ou κ_ν) tende a 0.

Para isso, tomaremos as parametrizações b para cada superfície como explicitado durante este capítulo (equações (3.7) e (3.13)). Para $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = 1$, denotamos as curvas singulares de D_4^- por $\gamma_{1,i}$, para $i = 0, 1$ e 2 , que sabemos serem dadas por $\gamma_{1,i}(z) = (\theta_i, z)$, com $\theta_i = \frac{i\pi}{3}$ e $z > 0$. Por outro lado, se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, denotamos as curvas singulares de D_4^- por $\gamma_{-1,i}$, para $i = 0, 1$ e 2 , que sabemos serem dadas por $\gamma_{-1,i}(z) = (\theta_i, z)$, com $\theta_i = \frac{2i-3}{6}\pi$ e $z > 0$. Para o caso $\varepsilon_1 = 1$, denotamos a curva singular de b por $\beta_{\varepsilon_2}(z)$, que sabemos ser dada por $\beta_{\varepsilon_2}(z) = (0, \varepsilon_2 z)$, com $z > 0$. Para todas essas curvas, elas se aproximam da singularidade $D_4^\pm$ quando z se aproxima de 0.

Começaremos com κ_ν . Como as curvas singulares de b têm θ constante, então, definindo $\hat{\gamma}_{\varepsilon_2,i} = b \circ \gamma_{\varepsilon_2,i}$, temos $\hat{\gamma}_{\varepsilon_2,i}''(z) = b_{zz}(\theta_i, z)$. Agora, pela definição de κ_ν , temos

$$\kappa_\nu(\theta_i, z) = \frac{N(\theta_i, z)}{G(\theta_i, z)}$$

e, portanto, κ_ν tende a 0 se, e somente se, $N_0(\theta_i) = 0$. Portanto, para $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = 1$, segue de (3.24) que, sobre $\gamma_{1,i}$, κ_ν tende a 0, se, e somente se,

$$\begin{cases} Q_{zz}(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 0 \\ Q_{zz}(\mathbf{0}) + \sqrt{3}P_{zz}(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 1 \\ Q_{zz}(\mathbf{0}) - \sqrt{3}P_{zz}(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 2. \end{cases}$$

Para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, segue de (3.27) que, sobre $\gamma_{-1,i}$, κ_ν tende a 0 se, e somente se,

$$\begin{cases} P_{zz}(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 0 \\ Q_{zz}(\mathbf{0}) + \sqrt{3}P_{zz}(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 1 \\ Q_{zz}(\mathbf{0}) - \sqrt{3}P_{zz}(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 2. \end{cases}$$

Para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, temos que $N_0(\theta) = -\cosh(\theta)Q_{zz} + \sinh(\theta)P_{zz} + R_z^2 \sinh(3\theta)$. Logo, sobre β_1 , κ_ν tende a 0 se, e somente se, $Q_{zz}(\mathbf{0}) = 0$. Para $\varepsilon_1 = 1$ e $\varepsilon_2 = -1$, temos $N_0(\theta) = \cosh(\theta)P_{zz} - \sinh(\theta)Q_{zz} + 3\cosh(3\theta)R_z^2$ e, portanto, sobre β_{-1} , κ_ν tende a 0 se, e somente se, $P_{zz}(\mathbf{0}) + 3R_z^2(\mathbf{0}) = 0$.

Passaremos agora para a curvatura singular κ_s . Por definição κ_s tende a 0 na origem se, e somente se, $\det(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}'', \tilde{\nu}(\gamma))(t)$ tende a 0. Recorde que $x_z(0,0) = y_z(0,0) = 0$ e $(x_{zz}, y_{zz})(\mathbf{0}) = -\frac{1}{X_x Y_y - X_y Y_x}(X_{zz}, Y_{zz})(\mathbf{0})$. Suponha $\varepsilon_1 = 1$, se $\varepsilon_2 = 1$, então $\tilde{\nu}(\mathbf{0}) = (-Y_x, -Y_y, 0)$ e, portanto, sobre β_1 , κ_s tende a 0 se, e somente se,

$$(X_{zz}Y_y - Y_{zz}Y_x)(\mathbf{0}) = (Q_y(P_{zz} + 3R_z^2) - Q_x Q_{zz})(\mathbf{0}) = 0.$$

Por outro lado se $\varepsilon_2 = -1$, então $\tilde{\nu}(\mathbf{0}) = (P_x, 0, 0)$ e, portanto, sobre β_{-1} , κ_s tende a 0 se, e somente se,

$$Q_{zz}(\mathbf{0}) = 0.$$

Para $\varepsilon_1 = -1$, o raciocínio é exatamente o mesmo, observando que $X_{zz} = P_{zz} + 2R_z^2\alpha_1(\theta)$ e $Y_{zz} = Q_{zz} + 2R_z^2\alpha_2(\theta)$, onde α_1 e α_2 são dados em (3.6) e os vetores normais $\tilde{\nu}$ são dados em (3.11) e (3.12). Com isso, podemos concluir que, para as curvas $\gamma_{1,i}(z)$, $i = 0, 1$ e 2 , a curvatura singular κ_s tende a zero se, e somente se,

$$\begin{cases} (-Q_x Q_{zz} + Q_y(P_{zz} + 3R_z^2))(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 0 \\ (2P_{zz}Q_y - 2(\sqrt{3}P_x + Q_x)Q_{zz} - 3(3P_x + \sqrt{3}Q_x + Q_y)R_z^2)(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 1 \\ (-2P_{zz}Q_y - 2\sqrt{3}P_x Q_{zz} + 2Q_x Q_{zz} + 9P_x R_z^2 - 3\sqrt{3}Q_x R_z^2 + 3Q_y R_z^2)(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 2. \end{cases}$$

Para as curvas $\gamma_{-1,i}$, $i = 0, 1$ e 2 , a curvatura singular κ_s tende a zero se, e somente se,

$$\begin{cases} (P_{zz}Q_y - Q_x Q_{zz} - Q_y R_z^2)(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 0 \\ (2P_{zz}Q_y - 2(\sqrt{3}P_x + Q_x)Q_{zz} + (3P_x + \sqrt{3}Q_x + Q_y)R_z^2)(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 1 \\ (-2P_{zz}Q_y + 2(-\sqrt{3}P_x + Q_x)Q_{zz} - (3P_x - \sqrt{3}Q_x + Q_y)R_z^2)(\mathbf{0}) = 0, & \text{para } i = 2. \end{cases}$$

3.5 Singularidades A_3 e A_4

Pelo Fato 2.3.9, se tomarmos F uma família de Morse $\mathcal{R}^+$ -versal a 3 parâmetros da função $f_1(t) = t^3$ ou $f_2(t) = t^4$, então o conjunto bifurcação de F é uma singularidade cuspidal edge ou rabo de andorinha. As funções f_1 e f_2 são singulares na origem e são chamadas de singularidades A_3 e A_4 , respectivamente. Sendo assim, tomamos nesta seção tais deformações versais e explicitamos fórmulas para invariantes geométricos de seu conjunto bifurcação dependendo apenas dos parâmetros do desdobramento inicial.

De maneira análoga à Proposição 3.1.1, dada uma família de Morse F a 3 parâmetros $\mathcal{R}^+$ -versal de uma função f com singularidade A_k na origem ($k = 2$ ou 3), então F é P - $\mathcal{R}^+$ -isométrica a

$$F(t, \mathbf{x}) = \frac{t^4}{4!} + P(\mathbf{x})t + Q(\mathbf{x})\frac{t^2}{2}, \quad (3.28)$$

para o caso $k = 2$, e a

$$F(t, \mathbf{x}) = \frac{t^5}{5!} + P(\mathbf{x})t + Q(\mathbf{x})\frac{t^2}{2} + R(\mathbf{x})\frac{t^3}{3!}, \quad (3.29)$$

para o caso $k = 3$, onde as condições de (3.2) continuam valendo.

No que segue, continuaremos denotando (x, y, z) por $\mathbf{x}$. Além disso, as derivadas das funções P, Q e R , quando explicitadas, estarão sempre aplicadas na origem, a não ser que dito o contrário.

3.5.1 Conjunto bifurcação de uma singularidade A_3

Existem pelo menos cinco invariantes geométricos de uma cuspidal edge calculados sobre sua curva singular que dependem das derivadas de até ordem 3 de sua parametrização. São eles: a curvatura singular, a curvatura normal limitante, a torção cuspidal, a curvatura cuspidal e a curvatura inflexional (ver Subseção 2.2.1).

Estudaremos esses invariantes geométricos, calculando-os em função dos coeficientes de F . Em outras palavras, vamos encontrar as fórmulas de tais invariantes aplicados na origem, dependendo apenas dos coeficientes de Taylor das funções P e Q em (3.28)

Pela Definição 2.3.2, o conjunto bifurcação de F é dado pelos zeros da aplicação (F_t, F_{tt}) . Como a derivada da aplicação (F_t, F_{tt}) é identificada, na origem, pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & P_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_x & Q_y & 0 \end{pmatrix},$$

que tem posto 2 (por (3.2)), então, pelo Teorema da Função Implícita, existem funções $x(t, z)$ e $y(t, z)$ tais que $F_t(t, x(t, z), y(t, z), z) = F_{tt}(t, x(t, z), y(t, z), z) = 0$ e o conjunto bifurcação pode ser parametrizado por $b(t, z) = (x(t, z), y(t, z), z)$.

Vamos agora analisar o conjunto singular da aplicação b . A matriz Jacobiana de b é

$$Jb = \begin{pmatrix} x_t & y_t & 0 \\ x_z & y_z & 1 \end{pmatrix}$$

que tem posto 1 se, e somente se, $x_t = y_t = 0$. Derivando as igualdades $F_t(t, \mathbf{x}) = 0$ e $F_{tt}(t, \mathbf{x}) = 0$ em relação a variável t , temos

$$\begin{cases} F_{tt} + F_{tx}x_t + F_{ty}y_t = 0, \\ F_{ttt} + F_{ttx}x_t + F_{tty}y_t = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Logo, obtemos que $x_t = y_t = 0$ se, e somente se, $F_{tt} = F_{ttt} = 0$. De fato, se $F_{tt} = F_{ttt} = 0$, então, considerando o sistema (3.30) com variáveis x_t e y_t , sua matriz dos coeficientes é dada por $\begin{bmatrix} P_x & 0 \\ Q_x & Q_y \end{bmatrix}$ na origem, e tem posto 2. Logo, a única solução para o sistema é $x_t = y_t = 0$. A condição suficiente é direta. Portanto, um ponto (t, z) no domínio de b é singular se, e somente se, $F_t = F_{tt} = F_{ttt} = 0$ neste ponto, ou seja

$$\begin{aligned} S(b) &= \{F_t = F_{tt} = F_{ttt} = 0\} \\ &= \left\{ \frac{t^3}{3!} + P + Qt = \frac{t^2}{2} + Q = t = 0 \right\} \end{aligned}$$

Logo, a curva singular do conjunto bifurcação de F pode ser parametrizada por $\gamma(z) = (0, z)$ e o conjunto singular da cuspidal edge por $\hat{\gamma}(z) = (x(0, z), y(0, z), z)$. Além disso, como $b_t = 0$ em todo ponto singular, vale que o campo vetorial anulador de b é o campo ∂t .

Afirmamos que o campo $\nu_2 = (F_{tx}, F_{ty}, F_{tz})$ é um campo de vetores normais à aplicação b . De fato, derivando a igualdade $F_t(t, x(t, z), y(t, z), z) = 0$ em relação a z , temos

$$F_{tx}x_z + F_{ty}y_z + F_{tz} = 0.$$

Como $b_z = (x_z, y_z, 1)$, então b_z é ortogonal à ν_2 . Por outro lado, derivando $F_t(t, x(t, z), y(t, z), z) = 0$ em relação a t , temos

$$F_{tt} + F_{tx}x_t + F_{ty}y_t = 0$$

e, como $F_{tt} = 0$, para todo ponto do conjunto bifurcação, vale que $F_{tx}x_t + F_{ty}y_t = 0$. Por fim, como $b_t = (x_t, y_t, 0)$, então b_t é ortogonal a ν_2 .

Como $\nu_2(\mathbf{0}) = (P_x(\mathbf{0}), 0, 0)$ e $P_x(\mathbf{0}) \neq 0$, ν_2 não se anula em uma vizinhança da origem e, portanto, podemos tomar $\nu = \frac{\nu_2}{|\nu_2|}$ como um campo de vetores unitários normais à b .

Como $b_z \neq \mathbf{0}$, então o campo anulador η de b pode ser tomado por ∂t . Além disso, uma vez que a curva singular é o eixo- z , o campo tangente a essa curva pode ser dado por $\xi = \partial z$. Com isso, estamos aptos a calcular os invariantes geométricos da cuspidal edge como conjunto bifurcação. Por questão de organização, iremos, antes de fazer os cálculos dos invariantes geométricos separadamente, calcular as derivadas de até terceira ordem das funções $x(t, z)$ e $y(t, z)$ na origem, que serão necessárias para tal. Faremos aqui um resumo de como obter os resultados, todas as contas são diretas e não serão mostradas aqui.

Encontramos as derivadas das funções $x(t, z)$ e $y(t, z)$ na origem partindo das igualdades: $F_t(t, x(t, z), y(t, z), z) = 0$ e $F_{tt}(t, x(t, z), y(t, z), z) = 0$, que denotamos por $A(t, z) = 0$ e $B(t, z) = 0$, respectivamente. Note que as funções P, Q e R possuem características especiais dadas em (3.2) e, pelo Teorema da Função Implícita, temos $x_t = x_z = y_t = y_z = 0$ em $\mathbf{0}$.

Como exemplificação do esquema a seguir, $A_{tt} = 0 \Rightarrow x_{tt} = 0$ significa que, se derivamos $A(t, z)$ duas vezes em relação a t e calculamos em $\mathbf{0}$, então podemos concluir que x_{tt} se anula em $\mathbf{0}$. Temos então os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
A_{tt} = 0 &\Rightarrow x_{tt} = 0; \\
B_{tt} = 0 &\Rightarrow y_{tt} = \frac{-1}{Q_y}; \\
A_{ttt} = 0 &\Rightarrow x_{ttt} = \frac{2}{P_x}; \\
B_{ttt} = 0 &\Rightarrow y_{ttt} = \frac{-2Q_x}{P_x Q_y}; \\
A_{tz} = 0 &\Rightarrow x_{tz} = 0; \\
B_{tz} = 0 &\Rightarrow y_{tz} = 0; \\
A_{zz} = 0 &\Rightarrow x_{zz} = \frac{-P_{zz}}{P_x}; \\
B_{zz} = 0 &\Rightarrow y_{zz} = \frac{P_{zz}Q_x - Q_{zz}P_x}{P_x Q_y}; \\
A_{ttz} = 0 &\Rightarrow x_{ttz} = \frac{P_{yz}}{P_x Q_y}; \\
B_{ttz} = 0 &\Rightarrow y_{ttz} = \frac{P_x Q_{yz} - P_{yz} Q_x}{P_x Q_y^2}; \\
A_{zzz} = 0 &\Rightarrow x_{zzz} = \frac{3(P_{xz}P_{zz}Q_y + P_x P_{yz}Q_{zz} - P_{yz}P_{zz}Q_x) - P_{zzz}P_x Q_y}{P_x^2 Q_y}; \\
B_{zzz} = 0 &\Rightarrow y_{zzz} = \frac{-3P_{xz}P_{zz}Q_x Q_y + P_x C_1 + 3P_{yz}Q_x(P_{zz}Q_x - P_x Q_{zz}) + P_x^2 C_2}{P_x^2 Q_y^2},
\end{aligned}$$

com $C_1 = P_{zzz}Q_y^2 + 3P_{zz}Q_{xz}Q_y - 3P_{zz}Q_x Q_{yz}$ e $C_2 = 3Q_{yz}Q_{zz} - Q_{zzz}Q_y$, e onde as funções são avaliadas em $\mathbf{0}$.

Com isso, temos, na origem,

$$\begin{aligned}
\xi b &= (0, 0, 1); \\
\xi \xi b &= \left(\frac{-P_{zz}}{P_x}, \frac{P_{zz}Q_x - Q_{zz}P_x}{P_x Q_y}, 0 \right); \\
\eta \eta b &= \left(0, \frac{-1}{Q_y}, 0 \right); \\
\xi \xi \xi b &= (x_{zzz}, y_{zzz}, 0); \\
\xi \eta \eta b &= \left(\frac{P_{yz}}{P_x Q_y}, \frac{P_x Q_{yz} - P_{yz} Q_x}{P_x Q_y^2}, 0 \right); \\
\eta \eta \eta b &= \left(\frac{2}{P_x}, \frac{-2Q_x}{P_x Q_y}, 0 \right).
\end{aligned}$$

Curvatura singular

Sabemos por (2.5) que $\kappa_s = \text{sgn}(\eta\lambda) \frac{\det(\xi b, \xi\xi b, \nu)}{|\xi b|^3}$, onde $\lambda = \det(b_t, b_z, \nu)$. Agora, como $\det(\xi b, \xi\xi b, \nu) = \frac{P_x Q_{zz} - Q_x P_{zz}}{P_x Q_y}$, $|\xi b| = 1$ e $\eta\lambda = -\frac{1}{Q_y} < 0$, obtemos que a curvatura singular da cuspidal edge é dada por

$$\kappa_s = \frac{Q_x P_{zz} - P_x Q_{zz}}{P_x Q_y} = y_{zz}$$

na origem.

Curvatura normal limitante

Sabemos por (2.5) que a curvatura normal limitante é dada por $\kappa_\nu = \frac{\langle \xi\xi b, \nu \rangle}{|\xi b|^2}$. Assim, por cálculos diretos, no caso onde a cuspidal edge é o conjunto bifurcação de um desdobramento dado por (3.28), sua curvatura normal limitante na origem é dada por

$$\kappa_\nu = -\frac{P_{zz}}{P_x}. \quad (3.31)$$

Curvatura cuspidal

Temos, por definição que a curvatura cuspidal κ_c é dada por $\kappa_c = \frac{|\xi b|^{\frac{3}{2}} \det(\xi b, \eta\eta b, \eta\eta\eta b)}{|\xi b \times \eta\eta b|^{\frac{5}{2}}}$. Como $\det(\xi b, \eta\eta b, \eta\eta\eta b) = \frac{2}{P_x Q_y}$ e $|\xi b \times \eta\eta b| = \frac{1}{Q_y}$, então, para cuspidal edges como conjunto bifurcação, em nosso contexto, vale

$$\kappa_c = \frac{2Q_y^{\frac{3}{2}}}{P_x}$$

na origem.

Note que, por (3.2), κ_c não se anula. Isso já era esperado, já que a curvatura cuspidal nunca se anula em cuspidal edges ([24, Teorema 3.1]).

Torção cuspidal

Temos, por definição, que a torção cuspidal é dada por $\kappa_t = \frac{\det(\xi b, \eta\eta b, \xi\eta\eta b)}{|\xi b \times \eta\eta b|^2} - \frac{\det(\xi b, \eta\eta b, \xi\xi b) \langle \xi b, \eta\eta b \rangle}{|\xi b|^2 |\xi b \times \eta\eta b|^2}$. Como $\det(\xi b, \eta\eta b, \xi\eta\eta b) = \frac{P_{yz}}{P_x Q_y^2}$, $|\xi b \times \eta\eta b| = \frac{1}{Q_y}$ e $\langle \xi b, \eta\eta b \rangle = 0$ na origem, segue que

$$\kappa_t = \frac{P_{yz}}{P_x}$$

na origem.

Curvatura inflexional

Temos, por definição, que a curvatura inflexional é dada por $\kappa_t = \frac{\det(\xi b, \eta \eta b, \xi \xi \xi b)}{|\xi b|^3 |\xi b \times \eta \eta b|} - 3 \frac{\det(\xi b, \eta \eta b, \xi \xi b) \langle \xi b, \xi \xi b \rangle}{|\xi b|^5 |\xi b \times \eta \eta b|}$. Já sabemos que $|\xi b \times \eta \eta b| = \frac{1}{Q_y}$. Por outro lado, $\langle \xi b, \eta \eta b \rangle = 0$ na origem. Portanto, por um cálculo direto, obtemos

$$\kappa_i = \frac{-3P_{yz}P_{zz}P_1 + P_{zzz}P_xP_y - 3P_{xz}P_{zz}P_y - 3P_xP_{yz}P_{zz}}{P_x^2P_y}$$

na origem.

3.6 Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4

Vamos agora supor F uma família de Morse a 3 parâmetros de uma função singular A_4 na origem. O conjunto bifurcação de F é uma superfície singular rabo de andorinha. Sendo assim, vamos calcular alguns invariantes geométricos conhecidos para essa singularidade. São eles: curvatura cuspidal normalizada, curvatura produto normalizada, curvatura singular limitante, e curvatura cuspidal limitante (ver [24] para mais detalhes).

Podemos supor F como em (3.29). Pelo mesmo raciocínio para desdobramentos de uma singularidade A_3 , existem funções $x(t, z)$ e $y(t, z)$ tais que

$$F_t(t, x(t, z), y(t, z), z) = F_{tt}(t, x(t, z), y(t, z), z) = 0 \quad (3.32)$$

e uma parametrização do conjunto bifurcação pode ser tomada pela aplicação $b(t, z) = (x(t, z), y(t, z), z)$. Ainda pelas mesmas razões, podemos tomar o campo de vetores unitários normais como sendo o campo $\nu = \frac{\nu_2}{|\nu_2|}$, onde ν_2 é dado por $\nu_2 = (F_{tx}, F_{ty}, F_{tz})(t, x(t, z), y(t, z), z)$ e o campo anulador sobre a curva singular é dado por $\eta = \partial t$.

O conjunto singular de b é dado pela projeção das coordenadas t e z da imagem inversa do valor regular zero da aplicação $(F_t, F_{tt}, F_{ttt})(t, x, y, z)$. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existem funções $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ e $\tilde{z}(t)$, tais que $F_t(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = F_{tt}(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = F_{ttt}(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = 0$ e, portanto, a curva singular de b pode ser parametrizada por $(t, \tilde{z}(t))$. Derivando as igualdades

$$F_t(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = F_{tt}(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = F_{ttt}(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = 0$$

até ordem dois, obtemos que $\tilde{z}' = 0$ e $\tilde{z}'' = -\frac{1}{R_z}$ na origem. Por outro lado, derivando a equação (3.32), obtemos que, na origem, vale

$$\begin{aligned} b_t &= (0, 0, 0); \\ b_z &= (0, 0, 1); \\ b_{tt} &= (0, 0, 0); \\ b_{tz} &= (0, \frac{-R_z}{Q_y}, 0); \\ b_{zz} &= (\frac{-P_{zz}}{P_x}, \frac{P_{zz}Q_x - Q_{zz}P_x}{P_xQ_y}, 0); \\ b_{ttt} &= (0, \frac{-1}{Q_y}, 0); \\ b_{ttz} &= (\frac{R_z}{P_x}, \frac{-Q_xQ_yR_z + 2P_xR_yR_z}{P_xQ_y^2}, 0); \\ b_{tzz} &= (\frac{2P_{yz}R_z}{P_xQ_y}, \frac{P_{zz}Q_yR_x - P_{zz}Q_xR_y + P_xQ_{zz}R_y - 2P_{yz}Q_xR_z + 2P_xQ_{yz}R_z - P_xQ_yR_{zz}}{P_xQ_y^2}, 0); \\ b_{zzz} &= (\frac{-P_{zzz}P_xQ_y + 3C_1}{P_x^2Q_y}, \frac{-P_x^2Q_{zzz}Q_y + 3P_xP_{zz}Q_{xz}Q_y - 3P_xQ_{yz}(P_{zz}Q_x - P_xQ_{zz}) - Q_xC_2}{P_x^2Q_y^2}, 0), \end{aligned}$$

com $C_1 = -P_{yz}P_{zz}Q_x + P_{xz}P_{zz}Q_y + P_xP_{yz}Q_{zz}$ e $C_2 = -P_{zzz}P_xQ_y + 3(-P_{yz}P_{zz}Q_x + P_{xz}P_{zz}Q_y + P_xP_{yz}Q_{zz})$.

Com isso, estamos aptos a calcular os invariantes geométricos de um rabo de andorinha quando este é o conjunto bifurcação de uma família de Morse F .

Curvatura cuspidal normalizada

Por definição, a curvatura cuspidal normalizada de b na origem é dada por

$$\mu_c = \frac{-|b_z|^3 \langle b_{tz}, \nu_z \rangle}{|b_{tz} \times b_z|^2}.$$

Aplicando, portanto a fórmula acima, temos

$$\mu_c = \frac{Q_y^2}{P_x R_z}.$$

Curvatura normal limitante e curvatura produto normalizada

A curvatura produto normalizada está relacionada diretamente com o comportamento da curvatura Gaussiana perto dos pontos singulares e é definida por $\mu_\Pi = \kappa_\nu \mu_c$. Como, por (3.31), $\kappa_\nu(t) = \frac{-P_{zz}}{P_x}$, então

$$\mu_\Pi = \frac{-P_{zz}Q_y^2}{P_x^2 R_z}.$$

Curvatura singular limitante

A curvatura singular limitante é definida por $\tau_s := 2\sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{|t|} |\kappa_s(\gamma(t))|$. Porém em [24] é provado que isso é equivalente à

$$\tau_s = \frac{|\det(\hat{\gamma}''(0), \hat{\gamma}'''(0), \nu)|}{|\hat{\gamma}''(0)|^{\frac{5}{2}}}.$$

Logo, aplicando a fórmula acima, obtemos

$$\tau_s = \frac{2R_z^{\frac{3}{2}}}{Q_y}.$$

Curvatura cuspidal limitante

A curvatura singular limitante é definida por

$$\tau_c := \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2} \lim_{t \rightarrow 0} |t^{\frac{1}{4}} \kappa_c(\gamma(t))|,$$

porém em [24] é provado que isso é equivalente à

$$\tau_c = \sqrt{|\tau_s|} |\mu_c(p)|.$$

Logo concluímos que a curvatura cuspidal limitante é dada por

$$\tau_c = \frac{2Q_y^{\frac{3}{2}}}{P_x R_z^{\frac{1}{4}}}.$$

Neste capítulo, estudamos a geometria de um conjunto especial de frontais em $\mathbb{R}^3$, chamadas σ -edges. Uma σ -edge pode ser considerada como uma suspensão de uma curva plana parametrizada $\sigma(v) = (c_1(v), c_2(v))$, ou seja, um desdobramento de σ a um parâmetro dado por $(u, v) \mapsto (u, c_1(v), c_2(v))$. Cuspidal edges e $5/2$ -cuspidal edges são exemplos de σ -edges. Além disso, σ -edges aparecem naturalmente em superfícies invariantes sob uma ação de grupo em $\mathbb{R}^3$, como rotações em torno de um eixo ou movimentos helicoidais.

Com o objetivo de estudar a geometria de uma superfície singular, é natural buscar por uma parametrização especial (de modo a buscar simplificações) dessa superfície através de mudanças de coordenadas na fonte e isometrias na meta, preservando portanto sua geometria. Apresentamos na Seção 4.2, uma parametrização para σ -edges com essa propriedade, que chamamos de *forma normal* (Proposição 4.2.3).

Quando σ tem singularidade isolada de multiplicidade finita m , o conjunto singular de uma σ -edge $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular (chamada *curva singular*) e suas singularidades são não degeneradas se, e somente se, $m = 2$ (Proposição 4.1.7). Além disso, se as singularidades forem degeneradas, a σ -edge possui propriedades similares as de uma frontal com pontos singulares não degenerados do primeiro tipo possuem (o conjunto singular e sua imagem são curvas regulares), sendo essas últimas superfícies para as quais as usuais definições dos invariantes geométricos curvatura singular, curvatura normal limitante, curvatura cuspidal e torção cuspidal são válidas. Considerando essas propriedades, definimos na Seção 4.3 similares invariantes geométricos para σ -edges com m qualquer, com as definições coincidindo com as usuais quando $m = 2$.

Em [24] é mostrado que uma frontal com singularidade não degenerada do primeiro tipo é uma frente de onda se, e somente se, a curvatura cuspidal não se anula. Mostramos na Proposição 4.3.1 que uma propriedade análoga é válida para a curvatura cuspidal que definimos para σ -edges. Ainda mais, provamos que, para uma σ -edge dada na forma normal, os invariantes que definimos estão relacionados com os coeficientes da forma normal (Proposição 4.3.3). Ainda nessa seção, dada uma σ -edge f , estudamos o comportamento assintótico das curvaturas Gaussiana e média na vizinhança de um ponto singular de f (Teorema 4.3.5). Além disso, considerando uma curva plana α , consideramos os comportamentos assintóticos da curvatura normal, da curvatura geodésica e da torção geodésica de $\hat{\alpha}(t) = f \circ \alpha(t)$ quando essa curva passa por um ponto singular de f , que podem divergir, caso esse ponto também seja uma singularidade de $\hat{\alpha}$. Nesse caso, apresentaremos no Teorema 4.3.8 condições para que tais funções sejam limitadas, dependendo apenas da

multiplicidade de σ e da ordem de contato de α com a reta paralela à direção nula de f .

A maioria dos resultados que obtivemos para σ -edges foram estendidos em um trabalho em conjunto com L. Martins, K. Saji e K. Teramoto para um conjunto de superfícies que contém σ -edges, chamadas *m-type edges*. Definições e resultados relativos a elas, estão em [23].

4.1 Definições, exemplos e propriedades

Seja $\sigma : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave singular em $t = 0$. Seja $m \geq 2$ um inteiro tal que $\sigma^{(i)}(0) = \mathbf{0}, i = 1, \dots, m-1$, e $\sigma^{(m)}(0) \neq \mathbf{0}$. Pelo Teorema 2.2.7 (Hadamard), podemos escrever $\sigma(t) = \sigma(0) + t^m \rho(t)$, onde $\rho(0) \neq \mathbf{0}$. Portanto, $\sigma'(t) = t^{m-1} \bar{\rho}(t)$, onde $\bar{\rho}(t) = m\rho(t) + t\rho'(t)$, sendo $\bar{\rho}(0) \neq \mathbf{0}$. Nessas condições, dizemos que σ tem *multiplicidade* (ou *ordem*) *finita* m em $t = 0$. A mesma definição vale para germes de curva.

Definição 4.1.1. *Seja $\sigma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \sigma(0))$ um germe de curva singular na origem. Um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(\mathbf{0}))$ é chamado σ -edge se f é $\mathcal{A}$ -equivalente à $(u, v) \mapsto (u, c_1(v), c_2(v))$, onde $(c_1(v), c_2(v))$ é um representante de σ . Se σ tem multiplicidade finita (digamos m), dizemos que f é um (germe de) σ -edge de multiplicidade finita (m).*

Observação 4.1.2. *No que segue, se σ tem multiplicidade finita em $t = 0$, iremos supor que a singularidade é isolada e, além disso, que $\sigma(0) = (0, 0)$. Segue da definição que σ -edges são germes de aplicações singulares de posto 1 e, se $t = 0$ é uma singularidade isolada de σ , então o conjunto singular $S(f)$ de uma σ -edge f é uma curva regular γ , que chamamos de curva singular de f . De fato, suponha que f é $\mathcal{A}$ -equivalente à $\bar{f}(u, v) = (u, c_1(v), c_2(v))$. Então basta notar que $S(\bar{f}) = \{(u, v); \bar{f}_v(u, v) = \mathbf{0}\} = \{(u, 0); u \in (\mathbb{R}, 0)\}$. Além disso, como o campo de vetores $\bar{\eta} = \partial v$ satisfaz $\bar{\eta} \bar{f}(u, 0) = d\bar{f}_{(u, 0)} \bar{\eta}(u, 0) = 0$, concluímos que, tomando um campo não nulo de vetores η ao longo de γ satisfazendo $\eta f = 0$, esse campo é transversal à curva singular γ .*

Também nos referimos a σ -edge ao germe de superfície (imagem de f). Geometricamente, podemos dizer que uma σ -edge é uma suspensão da curva plana σ em um espaço tridimensional. Por exemplo, se $\sigma(t) = (t^3, t^4)$, a Figura 4.1 é a imagem da superfície parametrizada por $f(u, v) = (u, v^3, v^4)$, que é uma σ -edge.

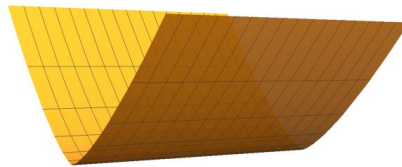


Figura 4.1: Um exemplo de σ -edge, onde $\sigma(t) = (t^3, t^4)$.

Exemplo 4.1.3. *Claramente, cuspidal edges e 5/2-cuspidal edges são exemplos de σ -edges, onde σ são 3/2-cúspides e 5/2-cúspides, respectivamente.*

Exemplo 4.1.4. *Consideremos a superfície de revolução parametrizada por $f(u, v) = (x(v), z(v) \cos u, z(v) \sin u)$, com (u, v) em uma vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ e $z(v) > 0$. Como $f(u, v) = \Psi \circ \bar{f}(u, v)$, onde $\bar{f}(u, v) = (u, x(v), z(v))$ e $\Psi(x, y, z) = (y, z \cos x, z \sin x)$ é*

um difeomorfismo local em $f(\mathbf{0})$, então f é uma σ -edge, onde $\sigma(v) = (x(v), z(v))$. Se tomarmos, por exemplo, a cúspide ordinária $\sigma(t) = (t^3, 0, t^2 + 1)$ e rotacionarmos sobre o eixo- x , obtemos a superfície de revolução dada na Figura 4.2, esquerda, que é uma σ -edge (cuspidal edge, nesse caso).

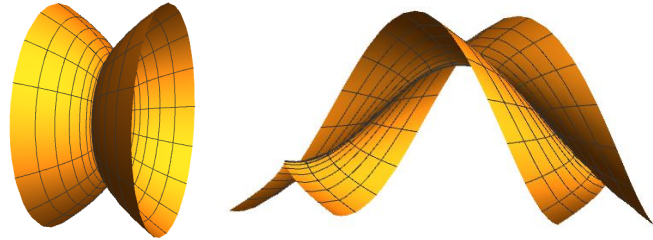


Figura 4.2: Esquerda: Superfície de rotação do Exemplo 4.1.4. Direita: Superfície helicoidal do Exemplo 4.1.5.

Exemplo 4.1.5. De maneira análoga e mais geral que no exemplo anterior, superfícies helicoidais geradas por uma curva $\sigma(t) = (x(t), 0, z(t))$ em torno do eixo- x e que não intersecta o eixo de rotação também são σ -edges. De fato, basta tomar $f(u, v) = (cu + x(v), z(v) \cos u, z(v) \sin u)$, onde c é uma constante positiva, e $\Psi(x, y, z) = (cx + y, z \cos x, z \sin x)$. A Figura 4.2, direita, apresenta a superfície helicoidal gerada pela mesma curva do exemplo anterior, com $c = 1$.

O seguinte resultado mostra que σ -edges são frontais, permitindo portanto usar toda a teoria já conhecida para essas aplicações.

Proposição 4.1.6. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(\mathbf{0}))$ uma σ -edge de multiplicidade finita. Então f é uma frontal.

Demonstração: Seja m a multiplicidade de σ . Então, podemos escrever $\sigma(t) = t^m \rho(t)$, com $\rho(0) = (\rho_1(0), \rho_2(0)) \neq (0, 0)$. Como a propriedade de ser frontal é invariante por difeomorfismos, basta provar o resultado para a σ -edge $f(u, v) = (u, v^m \rho_1(v), v^m \rho_2(v))$. Com isso, $f_u(u, v) = (1, 0, 0)$ e $f_v(u, v) = v^{m-1}(0, m\rho_1(v) + v\rho_1'(v), m\rho_2(v) + v\rho_2'(v))$, onde $\rho_i' = d\rho_i/dv$. Sejam $\bar{\rho}_1(v) = m\rho_1(v) + v\rho_1'(v)$ e $\bar{\rho}_2(v) = m\rho_2(v) + v\rho_2'(v)$, as quais são funções que não se anulam numa vizinhança da origem. Assim, $\nu(u, v) = (0, -\bar{\rho}_2(v), \bar{\rho}_1(v))$ é um campo não nulo de vetores normais à f , de onde concluímos que f é frontal. $\square$

Veremos nas próximas seções uma condição necessária e suficiente para uma σ -edge ser uma frente.

Nas condições da proposição acima, segue da Observação 4.1.2 que um campo anulador de vetores de f é transversal à curva singular γ . Isso é o que ocorre com frontais tendo pontos singulares não degenerados do primeiro tipo, que são aplicações em que há bem definidos invariantes geométricos para a curva $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$. Assim, é importante verificar ou obter condições que garantam que as singularidades de uma σ -edge sejam não degeneradas.

Proposição 4.1.7. Uma σ -edge $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(\mathbf{0}))$ de multiplicidade finita m tem uma singularidade não degenerada na origem se e somente $m = 2$.

Demonstração: Como a propriedade de ser singularidade não degenerada é invariante por difeomorfismos, podemos supor $f(u, v) = (u, v^m \rho_1(v), v^m \rho_2(v))$, com $(\rho_1(0), \rho_2(0)) \neq (0, 0)$. Sendo assim, por cálculos diretos, obtemos que a função identificador de singularidades é dada por $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu) = v^{m-1}(\bar{\rho}_1^2(v) + \bar{\rho}_2^2(v))^{\frac{1}{2}}$ e, portanto, $d\lambda(0, 0) \neq 0$ se, e somente se, $m = 2$, como queríamos. $\square$

Observação 4.1.8. No artigo [23] definimos duas classes de germes de aplicações singulares, chamados *edges* do tipo m e do tipo (m, n) , sendo que as do tipo m são frontais que incluem as do tipo (m, n) e σ -edges de multiplicidade finita m . Mais precisamente, uma *edge* do tipo m (resp., uma *edge* do tipo (m, n) , $n > m$) é um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ $\mathcal{A}$ -equivalente à $(u, v) \mapsto (u, v^m, v^{m+1}a(u, v))$, onde $a(u, v)$ é um germe de função suave (resp., $\mathcal{A}$ -equivalente à $(u, v) \mapsto (u, v^m, v^n h(u, v))$, onde $h(u, v)$ é um germe de função suave com $h(0, 0) = 1$).

4.2 Forma normal de uma σ -edge

Nesta seção, apresentamos uma forma normal para σ -edges obtida apenas com mudanças de coordenadas na fonte e isometrias na meta. O seguinte resultado será importante para o que segue nesta seção.

Lema 4.2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frontal de posto 1 tal que seu conjunto singular é uma curva regular γ , η é um campo anulador de vetores e ξ um campo não nulo de vetores tangentes à γ . Se ξ não é paralelo a η e existe um inteiro k tal que $\eta^i f = 0$, para $i = 2, \dots, k-1$, e $\text{posto}(\xi f, \eta^k f) = 2$ sobre γ , então essas mesmas condições são válidas para qualquer aplicação que seja $\mathcal{A}$ -equivalente a f , considerando seus correspondentes campos tangente e anulador e sua curva singular.*

Demonstração: Sejam $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ e $g = \Phi \circ f \circ \phi^{-1}$ um aplicação $\mathcal{A}$ -equivalente à f , onde Φ e ϕ são difeomorfismos locais. Notemos que $\hat{\gamma}$ é singular se, e somente se, ξ é paralelo a η . Tomando $\bar{f} = f \circ \phi^{-1}$, claramente, as três condições são válidas para $\bar{f}$. Tomando $\tilde{f} = \Phi \circ f$, como $\eta \tilde{f} = d\Phi(f)\eta f$, então, por cálculos diretos, temos:

$$\eta^i \tilde{f} = \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij} \eta^j (d\Phi(f)) \eta^{i-j} f \quad (c_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}). \quad (4.1)$$

Pela hipótese e de (4.1), segue que $\eta^i \tilde{f} = 0$, para $i = 2, \dots, k-1$, e $\eta^k \tilde{f} = d\Phi(f)\eta^k f$ sobre γ , de onde segue o resultado. $\square$

Observação 4.2.2. *Se $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(\mathbf{0}))$ é uma σ -edge de multiplicidade finita m , sabemos que f é uma frontal e seu conjunto singular é uma curva regular γ . Assim, se ξ é um campo não nulo de vetores tangentes à γ , segue da Observação 4.1.2 que ξ não é paralelo ao campo anulador de vetores η de f . Além disso, segue do Lema 4.2.1 que, sobre seu conjunto singular, temos $\eta^i f = 0$, para $i = 1, \dots, m-1$, e $\eta^m f \neq 0$, já que o mesmo ocorre para $\bar{f}(u, v) = (u, c_1(v), c_2(v))$, uma vez que $(c_1(v), c_2(v)) = v^m(\rho_1(v), \rho_2(v))$, com $(\rho_1(0), \rho_2(0)) \neq 0$, e ∂v é um campo anulador de vetores de $\bar{f}$.*

Com isso, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 4.2.3. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma σ -edge de multiplicidade m . Então, usando mudanças de coordenadas na fonte e isometrias na meta, podemos reduzir f à forma:*

$$(u, v) \mapsto \left(u, \frac{u^2}{2}a(u) + \frac{v^m}{m!}, \frac{u^2}{2}b(u) + \frac{v^m}{m!}b_m(u, v) \right), \quad (4.2)$$

onde $a, b : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $b_m : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são suaves.

Demonstração: Seja $f = (f_1, f_2, f_3)$. Como f tem posto 1 na origem, podemos supor que $f_u(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$. Além disso, com uma rotação na meta, se necessário, podemos supor que $f_u(\mathbf{0}) = ((f_1)_u(\mathbf{0}), 0, 0) \neq \mathbf{0}$. Aplicando agora a mudança de coordenadas na fonte dada por $(u, v) \mapsto (f_1(u, v), v)$, podemos reescrever $f(u, v) = (u, f_2(u, v), f_3(u, v))$, para funções f_2, f_3 tais que $(f_2)_u(\mathbf{0}) = (f_3)_u(\mathbf{0}) = (f_2)_v(\mathbf{0}) = (f_3)_v(\mathbf{0}) = 0$. Como $S(f) = \{(u, v); f_v(u, v) = 0\}$, então $\eta = \partial v$ é um campo anulador de f . Além disso, $S(f)$ é uma curva não paralela à η na origem (Observação 4.1.2). Logo, $S(f)$ pode ser parametrizada por $\gamma(u) = (u, g(u))$. Considerando a mudança de coordenadas na fonte dada por $(u, v) \mapsto (u, v - g(u))$, podemos assumir também que $S(f)$ é o eixo- u .

Podemos escrever $f_i(u, v) = a_i(u) + vb_i(u, v)$, para funções suaves a_i, b_i , $i = 2, 3$. Da Observação 4.2.2 e do fato que $\eta = \partial v$ é um campo anulador de f , temos $f_{v^{m-1}} = \mathbf{0}$ sobre o eixo- u e $f_{v^m}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$. Ainda mais, como $f_i(\mathbf{0}) = (f_i)_u(\mathbf{0}) = 0$, então $a_i(0) = a'_i(0) = 0$, para $i = 1, 2$, onde $a'_i = da_i/du$. Logo, pelo Teorema 2.2.7 e pela Proposição 2.2.8, podemos reduzir f a forma:

$$(u, v) \mapsto \left(u, \frac{u^2}{2}a(u) + \frac{v^m}{m!}a_m(u, v), \frac{u^2}{2}b(u) + \frac{v^m}{m!}b_m(u, v) \right),$$

para funções a, a_m, b, b_m suaves com $(a_m, b_m)(\mathbf{0}) \neq (0, 0)$.

Com uma rotação na meta, se necessário, podemos supor que $a_m(\mathbf{0}) > 0$ e $b_m(\mathbf{0}) = 0$ (a demonstração do Teorema 3.1 em [22] ilustra com detalhes a rotação).

Agora, aplicando a mudança de coordenadas $(u, v) \mapsto (u, v a_m^{1/m}(u, v))$, podemos assumir

$$f(u, v) = (u, \frac{u^2}{2}a(u) + \frac{v^m}{m!}, \frac{u^2}{2}b(u) + \frac{v^m}{m!}b_m(u, v)),$$

com $b_m(\mathbf{0}) = 0$, o que conclui a demonstração. $\square$

Note que a expressão de f dada em (4.2) está em um sistema de coordenadas adaptado, conforme Definição 2.2.9. Chamamos essa aplicação de **forma normal** de uma σ -edge. Afirmamos que o sistema de coordenadas de f em sua forma normal é unicamente determinado, a menos do difeomorfismo $(u, v) \mapsto (u, -v)$, se m é par. De fato, seja $(\bar{u}, \bar{v})$ um outro sistema de coordenadas tal que $f(\bar{u}, \bar{v})$ está também na forma normal dada em (4.2). Observando as primeiras coordenadas de $f(u, v)$ e $f(\bar{u}, \bar{v})$, concluímos que $u = \bar{u}$. Observando as segundas coordenadas, vemos que os termos que dependem de v são $v^m/m!$ e $\bar{v}^m/m!$, respectivamente, de onde segue a afirmação. Podemos concluir portanto que as funções $a(u)$ e $b(u)$ são unicamente determinadas e b_m é unicamente determinada a menos da mudança $v \rightarrow \pm v$, se m é par. Veremos na próxima seção que tais coeficientes estão relacionados com invariantes geométricos de f .

4.3 Invariantes geométricos

4.3.1 Curvaturas singular, normal e cuspidal, e torção cuspidal

Na Seção 2.2.1, recordamos as definições de alguns invariantes geométricos para frontais com singularidades não degeneradas do primeiro tipo. Como σ -edges de multiplicidade finita se comportam de maneira análoga a essas frontais, inspirados nas usuais definições, definimos análogos invariantes para elas.

Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma σ -edge de multiplicidade finita m com (u, v) um sistema de coordenadas orientado, γ uma parametrização para a curva singular e $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$. Como f é frontal, tomemos ν um campo de vetores unitários normal à f , $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ a função identificador de singularidades, ξ um campo não nulo de vetores tangentes à curva γ e η um campo anulador de vetores tal que o par (ξ, η) seja positivamente orientado. Com isso, definimos as funções

$$\kappa_s(t) = \operatorname{sgn}(\eta^{m-1}\lambda(\gamma(t))) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \nu(\gamma(t)))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}, \quad \kappa_\nu(t) = \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \nu(\gamma(t)) \rangle}{|\hat{\gamma}'(t)|^2}$$

e

$$\kappa_t(t) = \frac{\det(\xi f, \eta^m f, \xi \eta^m f)}{|\xi f \times \eta^m f|^2}(\gamma(t)) - \frac{\det(\xi f, \eta^m f, \xi^2 f) \langle \xi f, \eta^m f \rangle}{|\xi f|^2 |\xi f \times \eta^m f|^2}(\gamma(t))$$

e as chamamos de **curvatura singular**, **curvatura normal limitante** e **torção cuspidal** da σ -edge f , respectivamente. Analogamente ao que ocorre às curvaturas singular e normal limitante no caso de frentes, essas funções independem da escolha do parâmetro t . Para a torção cuspidal, é possível mostrar que ela independe da escolha do par de campos (ξ, η) positivamente orientado com η satisfazendo $\eta^l f = 0$, para $2 \leq l \leq m-1$ sobre γ (Lema 2.15 de [23], devido à K. Teramoto).

Observe que ainda não definimos um invariante que seja análogo à curvatura cuspidal. Para isso, com as mesmas condições dadas acima, definimos a função:

$$\kappa_c(t) = \frac{|\xi f|^{(m+1)/m} \det(\xi f, \eta^m f, \eta^{m+1} f)}{|\xi f \times \eta^m f|^{(2m+1)/m}}(\hat{\gamma}(t)), \quad (4.3)$$

que chamamos de **curvatura cuspidal**. Também pode-se provar que κ_c não depende da escolha do par (ξ, η) que satisfaz $\eta^l f = 0$, para $2 \leq l \leq m-1$ ([23], Lema 2.10).

Como era de se esperar, quando $m = 2$, os invariantes geométricos definidos acima coincidem com os usuais para frontais com singularidades não degeneradas do primeiro tipo.

Sabemos que uma frontal com singularidade não degenerada do primeiro tipo é uma frente de onda se, e somente se, a curvatura cuspidal não se anula sobre a curva singular ([24]). O seguinte resultado é o análogo a esse fato para σ -edges.

Proposição 4.3.1. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma σ -edge de multiplicidade finita m , então f é uma frente de onda se, e somente se, $\kappa_c(\mathbf{0}) \neq 0$.*

Demonstração: Como ser frente de onda é invariante por difeomorfismos, podemos supor que $f(u, v) = (u, c_1(v), c_2(v))$, onde $c(v) = (c_1(v), c_2(v))$ é um representante de σ . Pela demonstração da Proposição 4.1.6, $\nu = \bar{\nu}/|\bar{\nu}|$ é um campo não nulo unitário de vetores normais à f , onde $\bar{\nu} = (0, -m\rho_2 - v\rho'_2, m\rho_1 + v\rho'_1)$ e $\rho(0) = (\rho_1(0), \rho_2(0)) \neq \mathbf{0}$, onde ρ é dado por $c(v) = v^m(\rho_1(v), \rho_2(v))$. Como $\eta = \partial v$ é um campo anulador de vetores, então $f_v(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e, como $f_u(\mathbf{0}) \neq 0$, f é frente de onda na origem se, e somente

se, $\nu_v(\mathbf{0}) \neq 0$. Agora, como $\bar{\nu}(u, 0) = m(0, -\rho_2, \rho_1)$, $\bar{\nu}_v(u, 0) = (m+1)(0, -\rho'_2, \rho'_1)$ e $\nu_v = \frac{1}{|\bar{\nu}|^3} (|\bar{\nu}|^2 \bar{\nu}_v - \bar{\nu} \langle \bar{\nu}, \bar{\nu}_v \rangle)$, segue que

$$\bar{\nu}_v(\mathbf{0}) = -\frac{(m+1) \det(\rho(0), \rho'(0))}{m|\bar{\nu}|^3} (0, \rho_1(0), \rho_2(0)),$$

que se anula na origem se, e somente se, $\det(\rho(0), \rho'(0)) = 0$. Por outro lado, por (4.3), $\kappa_c(0) = 0$ se, e somente se, $\det(\xi f, \eta^m f, \eta^{m+1} f)(\mathbf{0}) = 0$. Como $\xi f = f_u = (1, 0, 0)$, $\eta^m f(\mathbf{0}) = f_{v^m}(\mathbf{0}) = m! \rho(\mathbf{0})$ e $\eta^{m+1} f(\mathbf{0}) = f_{v^{m+1}}(\mathbf{0}) = (m+1)! \rho'(\mathbf{0})$, segue que $\det(\xi f, \eta^m f, \eta^{m+1} f)(\mathbf{0}) = m!(m+1)! \det(\rho, \rho')(\mathbf{0})$, de onde segue o resultado. $\square$

Observação 4.3.2. *O equivalente à curvatura cuspidal para m -type edges no artigo [23] é chamada de $(m, m+1)$ -curvatura cuspidal e denotada por $\omega_{m,m+1}(t)$. Se f é uma σ -edge, com σ sendo $\mathcal{A}$ -equivalente a $v \mapsto (v^m, v^{m+1})$, é mostrado no Corolário 2.12 de [23] que a curvatura cuspidal em 0 coincide com a curvatura cuspidal da curva obtida da interseção de f com o plano perpendicular a $\hat{\gamma}'(t)$. A definição de curvatura cuspidal para germes de curvas é dada no apêndice de [23]. Observamos ainda que a Proposição 4.3.1 vale para m -type edges (Proposição 2.11 de [23]).*

Os invariantes geométricos que definimos estão relacionados com os coeficientes da forma normal da σ -edge como segue:

Proposição 4.3.3. *Seja $f(u, v)$ uma σ -edge na forma normal dada em (4.2). Então, obtemos:*

$$\kappa_s(0) = a(0), \quad \kappa_\nu(0) = b(0), \quad \kappa_t(0) = (b_m)_u(0, 0) \quad e \quad \kappa_c(0) = (m+1)(b_m)_v(0, 0).$$

Além disso, a curvatura de $\hat{\gamma}$ é dada na origem por $\kappa = \sqrt{a^2(0) + b^2(0)}$ e a torção de $\hat{\gamma}$ por $\tau = \frac{a(0)b'(0) - a'(0)b(0)}{a^2(0) + b^2(0)}$.

Demonstração: De (4.2), temos $f_u(\mathbf{0}) = (1, 0, 0)$ e $f_{v^m}(\mathbf{0}) = (0, 1, 0)$, onde f_{v^m} é a m -ésima derivada de f em relação à variável v . Logo $\lambda_{v^m}(0) = 1$ e $\nu(\mathbf{0}) = (0, 0, 1)$. Com isso e $f_{uu}(\mathbf{0}) = (0, a(0), 0)$, seguem as fórmulas acima para κ_s e κ_ν . Como f_u e f_{v^m} são ortogonais na origem e $f_{uv^m}(\mathbf{0}) = (0, 0, (b_m)_u(\mathbf{0}))$, segue a fórmula para κ_t . Por fim, de $f_{v^{m+1}}(\mathbf{0}) = (b_m)_v(\mathbf{0})$, segue a fórmula para κ_c . As fórmulas para κ e τ são calculadas de forma direta pela teoria de curvas espaciais. $\square$

Pela proposição acima, podemos concluir que $\kappa_s^2 + \kappa_\nu^2 = \kappa^2$, a mesma fórmula dada em [22] para cuspidal edges, isto é, para singularidades não degeneradas do primeiro tipo.

4.3.2 Comportamento assintótico

Nesta seção, $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ denotará uma σ -edge de multiplicidade finita m e $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ um germe de curva tal que $\hat{\alpha} = f \circ \alpha$ é singular na origem. Estudaremos o comportamento assintótico da curvatura geodésica, curvatura normal e da torção geodésica de $\hat{\alpha}$ na origem. Também estudaremos o comportamento das curvaturas Gaussiana e média na vizinhança de um ponto singular da σ -edge. Este estudo é possível

uma vez que f é uma frontal e, portanto, possui um campo de vetores normais unitários bem definido.

Seja (u, v) um sistema de coordenadas adaptado de f . Então, pelo Lema 4.2.1, f_{v^i} se anula sobre o eixo- u , para $i = 1, \dots, m-1$, e $f_{v^m}(\mathbf{0}) \neq 0$. Logo, pela Proposição 2.2.8, existe uma função ψ satisfazendo $f_v = v^{m-1}\psi$ e $\psi(\mathbf{0}) \neq 0$. Como f_u e ψ são linearmente independentes, então o campo de vetores $\nu = \bar{\nu}/|\bar{\nu}|$, com $\bar{\nu} = f_u \times \psi$, é unitário e normal à f . Defina as seguintes funções:

$$\begin{aligned}\hat{E} &= \langle f_u, f_u \rangle, & \hat{F} &= \langle f_u, \psi \rangle, & \hat{G} &= \langle \psi, \psi \rangle, \\ \hat{L} &= -\langle f_u, \bar{\nu}_u \rangle, & \hat{M} &= -\langle \psi, \bar{\nu}_u \rangle, & \hat{N} &= -\langle \psi, \bar{\nu}_v \rangle.\end{aligned}$$

Essas funções estão relacionadas com os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}E &= \hat{E}, & F &= v^{m-1}\hat{F}, & G &= (v^{m-1})^2 \hat{G}, \\ L &= \frac{\hat{L}}{|\bar{\nu}|}, & M &= \frac{v^{m-1}}{|\bar{\nu}|} \hat{M}, & N &= \frac{v^{m-1}}{|\bar{\nu}|} \hat{N}.\end{aligned}$$

Seja $g : (\mathbb{R}^i, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função, $i = 1, 2$. Se existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $g \in \mathcal{M}_i^n$ e $g \notin \mathcal{M}_i^{n+1}$, então g é dito ser de **ordem** (finita) n e denotamos por $\text{ord}(g) = n$. Se $g \notin \mathcal{M}_i$, então $\text{ord}(g) = 0$. Dados dois germes de funções com ordens finitas $g_1, g_2 : (\mathbb{R}^i, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $i = 1, 2$, a **ordem racional** $\text{ord}(f)$ do germe de função $f = g_1/g_2 : (\mathbb{R}^i \setminus Z, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, com $Z = g_2^{-1}(0)$ é definida por

$$\text{ord}(f) = \text{ord}(g_1) - \text{ord}(g_2).$$

Se $g \in \mathcal{M}_i^\infty$, $i = 1, 2$, dizemos que $\text{ord}(g) = \infty$.

Note que as definições de ordem e de ordem racional não dependem da escolha do sistema de coordenadas, uma vez que a propriedade $g \in \mathcal{M}_i^n$ não depende de tal escolha. Além disso, como $\mathcal{M}_i^n$ é gerado pelos monômios de grau n e variáveis $x_1, \dots, x_i$, então $g \in \mathcal{M}_i^n$ implica que $g^{(k)}(\mathbf{0}) = 0$, $k = 1, \dots, n-1$ e $g \notin \mathcal{M}_i^{n+1}$ implica que $g^{(n)}(\mathbf{0}) \neq 0$.

Observação 4.3.4. Se a ordem racional de uma função $f = g_1/g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva (resp. negativa), então pela regra de L'Hôpital, f é limitada (resp. não limitada) perto da origem. Se a ordem de f é zero, ou seja, as ordens de g_1 e g_2 coincidem (digamos k), então, pelo Lema de Hadamard, podemos escrever $g_i(t) = t^k \bar{g}_i(t)$, para $i = 1, 2$, com $\bar{g}_i(0) \neq 0$. Logo, $f(t) = \bar{g}_1/\bar{g}_2$ e, portanto, f é limitada.

Teorema 4.3.5. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma σ -edge de multiplicidade m , $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ sua curva singular e H e K suas curvaturas média e Gaussiana, respectivamente. Então valem as seguintes afirmações:*

- (1) *Se f é frente, então H é não limitada perto da origem.*
- (2) *Se f é frente e a curvatura normal limitante κ_ν de $f \circ \gamma$ não se anula em 0, então K é não limitada perto da origem.*

Demonstração: Suponha que f esteja em sistema de coordenadas adaptado. Usando as fórmulas $H = \frac{EN-2FM+LG}{2(EG-F^2)}$ e $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$, obtemos

$$H = \frac{\hat{E}\hat{N} - 2v^{m-1}\hat{F}\hat{M} + v^{m-1}\hat{G}\hat{L}}{2v^{m-1}|\bar{\nu}|(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)} \quad \text{e} \quad K = \frac{\hat{L}\hat{N} - v^{m-1}\hat{M}^2}{v^{m-1}|\bar{\nu}|^2(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)}. \quad (4.4)$$

Além disso, pelo Lema 2.1 de [35], temos

$$\nu_v = \frac{\hat{N}}{(\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2)|\bar{\nu}|}(\hat{F}f_u - \hat{E}\psi)$$

sobre o eixo- u . Logo, f é uma frente de onda se, e somente se, $\hat{N}$ não se anula. Assim, se f é uma frente de onda, então por (4.4) e $\hat{E} \neq 0$, podemos concluir que $\text{ord}(H) = 1 - m < 0$ e, portanto, segue a primeira afirmação. Pela definição de κ_ν , temos que $\kappa_\nu(u) = \frac{\hat{L}}{\hat{E}}(u, 0)$. Logo, se $\kappa_\nu \neq 0$ e f é uma frente de onda ($\hat{N} \neq 0$), então $\text{ord}(K) = 1 - m < 0$ e segue a segunda afirmação. $\square$

Recordemos que, nos pontos regulares de $\hat{\alpha}$, a curvatura geodésica, curvatura normal e a torção geodésica são respectivamente dadas por

$$\kappa_g = \frac{\det(\hat{\alpha}', \hat{\alpha}'', \nu)}{|\hat{\alpha}'|^3}, \quad \kappa_n = \frac{\langle \hat{\alpha}'', \nu \rangle}{|\hat{\alpha}'|^2}, \quad \tau_g = \frac{\det(\hat{\alpha}, \nu, \nu')}{|\hat{\alpha}'|^2} \quad (4.5)$$

em que ν é um campo unitário de vetores normais à f .

Exemplo 4.3.6. *Seja $f_1(u, v) = (u, v^2/2, v^3)$ uma cuspidal edge (σ -edge de multiplicidade 2) e $\alpha(t) = (t^4, t)$. Ao calcularmos os invariantes κ_g , κ_n e τ_g nos pontos regulares de $f_1(\alpha(t))$, obtemos*

$$\kappa_g(t) = -\text{sgn}(t) \frac{4(2 + 9t^2)}{\sqrt{1 + 9t^2}(1 + 9t^2 + 16t^4)^{\frac{3}{2}}}, \quad \kappa_n(t) = \frac{3}{t\sqrt{1 + 9t^2}(1 + 9t^2 + 16t^4)}$$

e

$$\tau_g(t) = \frac{12t}{(4 + 9t^2)(4 + 9t^2 + 16t^4)}.$$

Nesse caso, temos que $\text{ord}(\kappa_g) = 0$, $\text{ord}(\kappa_n) = -1$ e $\text{ord}(\tau_g) = 1$, ou seja, κ_g e τ_g são limitadas e κ_n é não limitada em uma vizinhança da singularidade (origem, no caso).

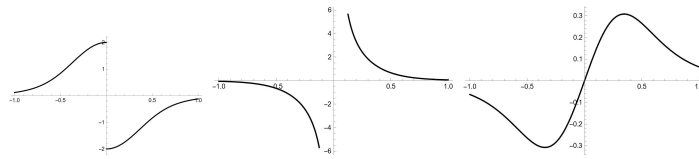


Figura 4.3: Comportamento assintótico (gráficos próximo à origem) das funções κ_g , κ_n e τ_g (da esquerda para a direita) de f_1 , dada no Exemplo 4.3.6.

Por outro lado, se tomarmos a cuspidal ramphoide $f_2 = (u, v^2/2, v^5)$, que também é uma σ -edge com multiplicidade $m = 2$ e a mesma curva α , teremos

$$\kappa_g(t) = \text{sgn}(t) \frac{4(-2 + 25t^6)}{\sqrt{1 + 25t^6}(1 + 16t^4 + 25t^6)^{\frac{3}{2}}}, \quad \kappa_n(t) = \frac{15t}{\sqrt{1 + 25t^6}(1 + 16t^4 + 25t^6)}$$

e

$$\tau_g(t) = \frac{60t^3}{(1 + 25t^6)(1 + 16t^4 + 25t^6)}.$$

Ou seja, $\text{ord}(\kappa_g) = 0$, $\text{ord}(\kappa_n) = 1$, $\text{ord}(\tau_g) = 3$ e, conseqüentemente, os 3 invariantes são limitados perto da singularidade.

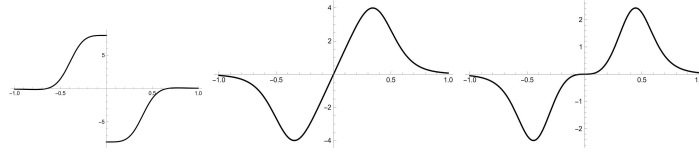


Figura 4.4: Comportamento assintótico das funções κ_g , κ_ν e τ_g (da esquerda para a direita) de f_2 , dada no Exemplo 4.3.6

Pelo exemplo acima, a curvatura normal limitante κ_n de uma curva singular $\hat{\alpha} = f \circ \alpha$ sobre uma σ -edge pode ou não ser limitada em uma vizinhança de sua singularidade. Mais do que isso, se supormos $\hat{\alpha}$ singular em $t = 0$ e de multiplicidade k , então $\hat{\alpha}'(t) = t^{k-1}\rho(t)$, onde $\rho(0) \neq \mathbf{0}$, e

$$\kappa_g = \frac{1}{|t|^{k-1}} \frac{\det(\rho, \rho', \nu)}{|\rho|^3}, \quad \kappa_n = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\langle \rho', \nu \rangle}{|\rho|^2} \quad \text{e} \quad \tau_g = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\det(\rho, \nu, \nu')}{|\rho|^2}. \quad (4.6)$$

Com isso, podemos notar que as três funções podem ou não ser limitadas em 0.

Baseado nesse fato, suporemos que $\hat{\alpha}(0) = \mathbf{0}$ e $\hat{\alpha}'(0) = \mathbf{0}$ e estudaremos o comportamento dessas funções. Mais especificamente, buscaremos pela ordem desses invariantes (considerando-os como funções racionais). Quando necessário, denotaremos por $O(t)$ uma função real suave na origem, na variável t .

Seja $\beta : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{0}$ uma curva parametrizada e δ uma curva dada pela imagem inversa do valor regular q de uma função $g : \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}, q$. O **contato entre as curvas β e δ em q** é definido como a ordem da função suave $g \circ \beta$ em 0. Como $\hat{\alpha}'(0) = \mathbf{0}$, então $\alpha'(0)$ é paralelo ao eixo- v (direção nula de f) e, portanto, tem contato de ordem pelo menos 2 com o mesmo. Por abuso de linguagem, o contato de uma curva com uma direção em um ponto p é o contato desta curva com a reta passando pelo p e tendo sua tangente nesta direção.

Observação 4.3.7. Sabemos que o sistema de coordenadas de uma σ -edge f na forma normal (4.2) é único a menos do difeomorfismo $A(u, v) = (u, -v)$, se m é par (ver parágrafo abaixo da Proposição 4.2.3). Se m é par e (u, v) é o sistema de coordenadas para f dado em (4.2), então $(u, -v)$ também está é um sistema de coordenadas para f que resulta em (4.2). Nesse caso, fazendo a mudança de coordenadas A e escrevendo $b_m(u, v) = ub_{m1}(u) + vb_{m2}(u, v)$, então os coeficientes $a(0), b(0)$ e $b_{m1}(0)$ não se alteram e o coeficiente $b_{m2}(0)$ altera seu sinal (pois com essa mudança, obtemos $(u, u^2a(u)/2 + v^m/m!, u^2b(u)/2 + v^m/m!(ub_{m1}(u) + v(-b_{m2}(u, -v))))$). Portanto, como $(b_m)_u(0) = b_{m1}(0)$ e $(b_m)_v(0) = b_{m2}(0)$ e as curvaturas de α e $A \circ \alpha$ coincidem em módulo e têm sinais opostos, concluímos da Proposição 4.3.3 que os invariantes que trocam de sinal em $t = 0$ com a mudança de coordenadas A são a curvatura κ de α e κ_c , sendo que κ_ν , κ_t e κ_s não alteram o sinal. Além disso, como a ordem de contato de $A \circ \alpha$ com a curva $v \mapsto (0, v)$ é igual à de α com essa curva, o contato de α com a curva $v \mapsto (0, v)$ está bem definido, independentemente da multiplicidade m de f ser par ou ímpar.

Obtemos assim o seguinte resultado que dá uma estimativa para as ordens de κ_g, κ_n e τ_g de $\hat{\alpha} = f \circ \alpha$, relacionando-as com os invariantes $\kappa_\nu, \kappa_s, \kappa_t$ e κ_c . Note que, uma vez que $\hat{\alpha} = f \circ \alpha$ é singular em $t = 0$, então $\alpha'(0)$ é paralelo à direção nula de f , isto é, ao núcleo de df_0 .

Teorema 4.3.8. Sejam $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma σ -edge de multiplicidade finita $m \geq 2$ e $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ uma curva regular tal que $\hat{\alpha} = f \circ \alpha$ é singular em $t = 0$. Sejam

$2 \leq l \in \mathbb{Z}$ a ordem de contato de α com a direção nula de f na origem e κ a função curvatura de α .

(1) Em relação à curvatura geodésica κ_g de $\hat{\alpha}$, temos:

- Se $l > 2m$, então $\text{ord}(\kappa_g) \geq 1$, valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa_t(0) \kappa_c(0) \neq 0$ (caso $l > 2m + 1$) e $(l-1)!\kappa_t(0) \kappa_c(0) - m!(m+1)!\kappa^{(l-2)}(0) \neq 0$ (caso $l = 2m + 1$).
- Se $m < l \leq 2m$, então $\text{ord}(\kappa_g) = l - 2m$.
- Se $m = l$, então $\text{ord}(\kappa_g) \geq 1 - m$, valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa^{(l-1)}(0) \neq 0$.
- Se $m/2 < l < m$, então $\text{ord}(\kappa_g) = m - 2l$.
- Se $l \leq m/2$, então $\text{ord}(\kappa_g) \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa_s(0) \neq 0$ (caso $l < m/2$) e $m!(\kappa^{(l-2)})^2(0)\kappa_s(0) + 2l!^2 \neq 0$ (caso $l = m/2$).

(2) Em relação à curvatura normal limitante κ_n de $\hat{\alpha}$, temos:

- Se $l \geq m$, então $\text{ord}(\kappa_n) \geq 1 - m$, valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa_c(0) \neq 0$.
- Se $m/2 < l < m$, então $\text{ord}(\kappa_n) \geq m - 2l + 1$, valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa_c(0) \neq 0$ (caso $l > (m+1)/2$), e $l(m+1)!(\kappa^{(l-2)})^2(0)\kappa_\nu(0) + 2l!^2\kappa_c(0) \neq 0$ (caso $l = (m+1)/2$).
- Se $l \leq m/2$, então $\text{ord}(\kappa_n) \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa_\nu(0) \neq 0$.

(3) Em relação à torção geodésica τ_g de $\hat{\alpha}$, temos:

- Se $l \geq 2m - 1$, então $\text{ord}(\tau_g) \geq 0$ valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa_t(0) \neq 0$ (caso $l > 2m - 1$), e $l(m-1)!^2\kappa^{(l-2)}\kappa_c + m!l\kappa_t \neq 0$ em 0 (caso $l = 2m - 1$).
- Se $m \leq l < 2m - 1$, então $\text{ord}(\tau_g) \geq l - 2m + 1$, valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa_c(0) \neq 0$.
- Se $l < m$, então $\text{ord}(\tau_g) \geq 1 - l$, valendo a igualdade se, e somente se, $\kappa_c(0) \neq 0$.

Demonstração: Seja (u, v) um sistema de coordenadas que dá a forma normal (4.2). Sabemos que esse sistema de coordenadas é adaptado para f e, portanto, ∂v é direção nula na origem. Seja $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ parametrização para α nessas coordenadas, com orientação na origem no sentido da direção nula $\eta(t) = \partial v$, isto é, $v'(0) > 0$. Pelas hipóteses e pelo Lema 2.2.8, Podemos escrever $f_v = \frac{v^{m-1}}{(m-1)!}\psi$, para uma aplicação suave ψ tal que $\psi(0) \neq 0$. Portanto, $\tilde{v} = f_u \times \psi$ é um campo não nulo de vetores normais à f . Recorde que, pela Proposição 4.3.3 e Observação 4.3.7, escrevendo $b_m(u, v) = ub_{m1}(u) + vb_{m2}(u, v)$, podemos relacionar os coeficientes de f com os invariantes κ_s , κ_ν e κ_t e κ_c na origem por

$$\kappa_s = a, \quad \kappa_\nu = b, \quad \kappa_t = b_{m1} \text{ e } \kappa_c = (m+1)b_{m2}. \quad (4.7)$$

Como $\alpha'(0)$ é paralelo à ∂v , segue do Teorema da Função Implícita que podemos escrever $\alpha(t) = (u(t), t)$, para alguma função suave $u(t)$. Como o eixo- v (direção nula na origem) é dado pela imagem inversa do valor regular 0 da função $(u, v) \mapsto u$, temos que a ordem de contato de α com o eixo- v coincide com a ordem da função $u(t)$. Logo, pelo Lema 2.2.7 (Hadamard), podemos escrever α como $\alpha(t) = (t^l c(t), t)$, com $c(0) \neq 0$.

Assim, como a curvatura da α é dada por $\kappa(t) = \det(\alpha'(t), \alpha''(t))/|\alpha'(t)|^3$, então cálculos diretos mostram que

$$\kappa^{(l-2)}(0) = -l!c(0) \text{ e } \kappa^{(l-1)}(0) = -(l+1)!c'(0). \quad (4.8)$$

Dividiremos a demonstração em 3 partes, considerando os casos (i) $l \geq m$, (ii) $m/2 < l < m$ e (iii) $l \leq m/2$. Para os cálculos das ordens dos invariantes, vamos usar as fórmulas dadas em (4.6), de onde obtemos:

$$\begin{aligned} \text{ord}(\kappa_g) &= \text{ord}(\det(\rho, \rho', \nu)) - \text{ord}(|t|^{k-1}) = \text{ord}(\det(\rho, \rho', \nu)) - k + 1 \\ \text{ord}(\kappa_n) &= \text{ord}(\langle \rho', \nu \rangle) - \text{ord}(t^{k-1}) = \text{ord}(\langle \rho', \nu \rangle) - k + 1 \\ \text{ord}(\tau_g) &= \text{ord}(\det(\rho, \nu, \nu')) - \text{ord}(t^{k-1}) = \det(\rho, \nu, \nu') - k + 1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde k é a multiplicidade de $\hat{\alpha} = f \circ \alpha$ e ρ satisfaz $\hat{\alpha}'(t) = t^{k-1}\rho(t)$, com $\rho(0) \neq \mathbf{0}$. Além disso, redefinindo $\tilde{\nu}(\alpha(t))$ por $\tilde{\nu}(t)$, quando não houver ambiguidade, podemos substituir ν por $\tilde{\nu}$ nas fórmulas acima. Isso é possível, uma vez que $\nu = \tilde{\nu}/|\tilde{\nu}|$, $|\tilde{\nu}|$ é uma função de ordem 0 ($\tilde{\nu}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$) e além disso, $\nu' = \frac{\tilde{\nu}'}{|\tilde{\nu}|} - \tilde{\nu}O(t)$ e, na fórmula para τ_g , o termo $\tilde{\nu}O(t)$ não interfere no determinante, uma vez que seu segundo vetor é o próprio $\tilde{\nu}$.

(i) Caso $l \geq m$: Cálculos diretos mostram que, neste caso, $\hat{\alpha} = t^m \tilde{\rho}$, com $\tilde{\rho}(t) = (t^{l-m}c(t), g_2(t), tg_3(t))$ e

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{m!t^{2l-m}ac^2 + 2}{2m!}, \\ g_3 &= \frac{m!t^{2l-m-1}bc^2 + 2b_{m2} + 2t^{l-1}b_{m1}c}{2m!}. \end{aligned}$$

Nas fórmulas acima, assim como no que segue, omitimos a variável sempre que não houver ambiguidade (isto é, $a = a(t), b = b(t), c = c(t), b_{m1} = b_{m1}(\alpha(t)), b_{m2} = b_{m2}(\alpha(t))$, etc). Também denotaremos $\frac{\partial b_{m2}}{\partial v}$ apenas por $b_{m2,v}$.

Logo, obtemos que a multiplicidade de $\hat{\alpha}$ é m e $\hat{\alpha}' = t^{m-1}\rho$, onde $\rho = m\tilde{\rho} + t\tilde{\rho}'$.

Por cálculos diretos, obtemos $\tilde{\nu}(t) = (t^m d(t), t e(t), 1)$, onde

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2mm!} \left(-2mb_{m1} + 2mm!t^{2l-m}ab_{m1}c^2 - 2mm!t^{l-m}bc! \right. \\ &\quad + 2m!t^{1+l-m}ab_{m2}c + 2mm!t^{1+l-m}ab_{m2}c + mm!t^{3l-m}b_{m1}c^3a' \\ &\quad + t^{1+2l-m}b_{m2}c^2m!a' + mt^{1+2l-m}b_{m2}c^2m!a' - mt^{2l-m}c^2m!b' \\ &\quad \left. + 2m!t^{2+l-m}acb_{m2,v} + m!t^{2+2l-m}c^2a'b_{m2,v} - 2mt^lcb'_{m1} - 2mtb_{m2,u} \right) e \\ e &= \frac{-1}{m} \left(mt^{l-1}b_{m1}c + b_{m2}(1+m) + tb_{m2,v} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Com as fórmulas obtidas até agora, obtemos

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{1}{m!}, \quad g'_2 = 0, \quad g_3 = \frac{b_{m2}}{m!}, \quad d = -\frac{b_{m1}}{m!} \quad (\text{se } l > m), \\ d &= -\frac{m!bc + b_{m1}}{m!} \quad (\text{se } m = l), \quad e = -\frac{(m+1)b_{m2}}{m}. \end{aligned}$$

em $t = 0$. Note que, uma vez que $g'_2(0) = 0$, podemos escrever $g'_2(t) = t\tilde{g}_2$. Assim, com cálculos diretos, obtemos que

$$\rho = (lt^{l-m}c + t^{l-m+1}c', mg_2 + t^2\tilde{g}_2, t((m+1)g_3 + tg'_3)), \quad e \quad (4.11)$$

$$\rho' = \begin{cases} \left(l(l-m)t^{l-m-1}c + t^{l-m}O(t), tO(t), (m+1)g_3 + tO(t) \right) & (l > m) \\ \left((m+1)c' + tO(t), tO(t), (m+1)g_3 + tO(t) \right) & (m = l). \end{cases} \quad (4.12)$$

Supondo $m = l$ e denotando $\det(\cdot)$ por $|\cdot|$, temos

$$|\rho, \rho', \tilde{\nu}|(0) = \begin{vmatrix} lt^{l-m}c + t^{l-m+1}O(t) & (m+1)c' + tO(t) & t^m d \\ mg_2 + tO(t) & tO(t) & te \\ (m+1)tg_3 + t^2O(t) & (m+1)g_3 + tO(t) & 1 \end{vmatrix} (0) = -\frac{m(m+1)c'}{(m-1)!}, \quad (4.13)$$

de onde obtemos que $\text{ord}(|\rho, \rho', \tilde{\nu}|) \geq 0$ e $\text{ord}(|\rho, \rho', \tilde{\nu}|) = 0$ se, e somente se, $c'(0) \neq 0$. Logo, por (4.8) e (4.9), obtemos que $\text{ord}(\kappa_g) \geq 1 - m$ e $\text{ord}(\kappa_g) = 1 - m$ se, e somente se, $\kappa^{(l-1)}(0) \neq 0$, concluindo assim o terceiro item de (1).

Para os demais casos e invariantes, os resultados seguem com mesmo raciocínio, juntamente com (4.7), se necessário, e, por isso, não os explicitaremos.

Seguiremos agora estudando κ_g para o caso $l > m$. Nesse caso,

$$|\rho, \rho', \tilde{\nu}| = \begin{vmatrix} lt^{l-m}c + t^{l-m+1}O(t) & t^{l-m-1}cl(l-m) + t^{l-m}O(t) & t^m d \\ mg_2 + tO(t) & tO(t) & te \\ (m+1)tg_3 + t^2O(t) & (m+1)g_3 + tO(t) & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.14)$$

Agora, se $2m - l + 1 > 0$, então (4.14) é igual a $t^{l-m-1}A_1(t)$, com

$$A_1(0) = \begin{vmatrix} 0 & l(l-m)c & 0 \\ mg_2 & 0 & 0 \\ 0 & (m+1)g_3 & 1 \end{vmatrix} (0) = -l(l-m)c(0)mg_2(0) = -\frac{l(l-m)c(0)}{(m-1)!}.$$

Por outro lado, se $2m - l + 1 = 0$, então (4.14) é igual a $t^m A_2(t)$, com

$$\begin{aligned} A_2(0) &= \begin{vmatrix} 0 & l(m+1)c & d \\ mg_2 & 0 & 0 \\ 0 & (m+1)g_3 & 1 \end{vmatrix} (0) = -m(m+1)g_2(0)(lc - dg_3)(0) \\ &= -\frac{m+1}{(m-1)!} \left(\frac{b_{m1}b_{m2}}{(m!)^2} + lc \right) (0). \end{aligned}$$

e, se $2m - l + 1 < 0$, então $l > m$ e (4.14) é igual a $t^m A_3(t)$, com

$$\begin{aligned} A_3(0) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & d \\ mg_2 & 0 & 0 \\ 0 & (m+1)g_3 & 1 \end{vmatrix} (0) = m(m+1)d(0)g_2(0)g_3(0) \\ &= -\frac{m(m+1)b_{m1}b_{m2}}{(m!)^3} (0). \end{aligned}$$

Com isso, provamos os três primeiros itens da parte (1).

Para κ_n (ainda com $l \geq m$), como $\langle \rho', \tilde{\nu} \rangle = (m+1)b_{m2}/m! + tO(t)$, então $\text{ord}(\langle \rho', \tilde{\nu} \rangle) \geq 0$ e $\text{ord}(\langle \rho', \tilde{\nu} \rangle) = 0$ se, e somente se, $b_{m2}(\mathbf{0}) \neq 0$. Com isso, provamos o primeiro item da parte (2).

Para o cálculo da ordem de τ_g , temos

$$|\rho, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}'| = \begin{vmatrix} t^{l-m}lc + t^{l-m+1}O(t) & t^m d & mt^{m-1}d + t^m O(t) \\ mg_2 + tO(t) & te & e + tO(t) \\ (m+1)tg_3 + t^2O(t) & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Se $2m - l - 1 > 0$, então (4.15) pode ser escrito por $t^{l-m}B_1(t)$, com

$$B_1(0) = \begin{vmatrix} lc & 0 & 0 \\ mg_2 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} (0) = -lce(0) = \frac{l(m+1)b_{m2}c}{m}(0),$$

se $2m - l - 1 = 0$, então (4.15) pode ser escrito por $t^{m-1}B_2(t)$, com

$$\begin{aligned} B_2(0) &= \begin{vmatrix} lc & 0 & md \\ mg_2 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}(0) = (-elc + m^2dg_2)(0) \\ &= -\frac{b_{m1}}{(m-1)!^2}(0) + \frac{l(m+1)cb_{m2}}{m}(0) \end{aligned}$$

e, por fim, se $2m - l - 1 < 0$, então $m < l$ e (4.15) é igual a $t^{m-1}B_3(t)$, com

$$B_3(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & md \\ mg_2 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}(0) = m^2d(0)g_2(0) = -\frac{b_{m1}(0)}{(m-1)!^2}.$$

Temos, portanto, os dois primeiros itens da parte (3) provados.

(ii) Vamos agora considerar o caso $l \leq m/2$.

Com as mesmas notações do caso anterior, temos $\tilde{v}(t) = (t^l d(t), t e(t), 1)$, onde

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2mm!} \left(-2mt^{m-l}b_{m1} + 2mt^l ab_{m1}c^2m! - 2mbcm! \right. \\ &\quad + 2tab_{m2}cm! + 2mtab_{m2}cm! + mt^{2l}b_{m1}c^3m!a' \\ &\quad + t^{l+1}b_{m2}c^2m!a' + mt^{l+1}b_{m2}c^2m!a' - mt^l c^2m!b' \\ &\quad \left. + 2t^2acm!b_{m2,v} + t^{l+2}c^2m!a'b_{m2,v} - 2mt^m c b'_{m1} - 2mt^{m-l+1}b_{m2,u} \right) \end{aligned}$$

e e coincide com (4.10). Além disso, por cálculos diretos, obtemos $\hat{\alpha} = t^l \tilde{\rho}$, com $\tilde{\rho}(t) = (c(t), t^l g_2(t), t^l g_3(t))$ e

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{2t^{m-2l} + ac^2m!}{2m!}, \\ g_3 &= \frac{2t^{m-l}b_{m1}c + 2t^{m-2l+1}b_{m2} + bc^2m!}{2m!}. \end{aligned}$$

Note que, diferente do primeiro caso ($l \geq m$), a multiplicidade de $\hat{\alpha}$ agora é l , uma vez que $c(0) \neq 0$.

Os termos de f são dados, na origem, neste caso, por

$$g_2 = \frac{ac^2}{2} \text{ (se } m > 2l), \quad g_2 = \frac{ac^2}{2} + \frac{1}{m!} \text{ (se } m = 2l), \quad g_3 = \frac{bc^2}{2}, \text{ e } e = -(1+m)b_{m2}/m.$$

Como $\hat{\alpha}' = t^{l-1}\rho$, onde $\rho = l\tilde{\rho} + t\tilde{\rho}'$, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho &= \left(lc + tc', t^l(2lg_2 + tg'_2), t^l(2lg_3 + tg'_3) \right), \\ \rho' &= \left((l+1)c' + tO(t), t^{l-1}(2l^2g_2 + tO(t)), t^{l-1}(2l^2g_3 + tO(t)) \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Utilizando a fórmula

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ kx_{21} & x_{22} & x_{23} \\ kx_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & kx_{12} & kx_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

para $k = t^{l-1}$, segue que $|\rho, \rho', \tilde{\nu}|$ é dado por

$$\begin{vmatrix} lc + tO(t) & (l+1)c' + tO(t) & t^l d \\ t^l(2lg_2 + tO(t)) & t^{l-1}(2l^2g_2 + tO(t)) & te \\ t^l(2lg_3 + tO(t)) & t^{l-1}(2l^2g_3 + tO(t)) & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} lc + tO(t) & t^{l-1}(l+1)c' + tO(t) & t^{2l-1}d \\ t(2lg_2 + tO(t)) & t^{l-1}(2l^2g_2 + tO(t)) & te \\ t(2lg_3 + tO(t)) & t^{l-1}(2l^2g_3 + tO(t)) & 1 \end{vmatrix} = t^{l-1}C_1(t), \quad (4.18)$$

com $C_1(0) = 2l^3c(0)g_2(0)$. Temos, portanto, o quinto item da parte (1). Por (4.16), segue $\langle \rho', \tilde{\nu} \rangle = t^{l-1}C_2(t)$, com $C_2(0) = 2l^2g_3(0) = l^2b(0)c^2(0)$ e $|\rho, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}'|(0) = l(m+1)c(0)b_{m2}(\mathbf{0})/m$. Com isso, provamos o terceiro item de (2) e parcialmente o terceiro item de (3), respectivamente.

(iii) Para a última parte, suporemos $m/2 < l < m$. Nesse caso, as fórmulas para $\tilde{\nu}(t)$, assim como para $d(t)$ e $e(t)$ permanecem as mesma calculadas na parte (ii) da demonstração. Porém, $\hat{\alpha} = t^l\tilde{\rho}$, com $\tilde{\rho}(t) = (c(t), t^{m-l}g_2(t), t^{m-l+1}g_3(t))$ e

$$g_2 = \frac{2 + m!t^{2l-m}ac^2}{2m!}, \\ g_3 = \frac{2t^{l-1}b_{m1}c + 2b_{m2} + m!t^{2l-m-1}bc^2}{2m!}.$$

Logo, $\hat{\alpha}$ tem multiplicidade l e, na origem, temos:

$$g_2 = 1/m!, \quad e = -(1+m)b_{m2}/m, \quad g_3 = b_{m2}/m! \quad (\text{se } 2l - m - 1 > 0), \quad \text{e} \\ g_3 = bc^2/2 + b_{m2}/m! \quad (\text{se } m = 2l - 1).$$

Como $\hat{\alpha}' = t^{l-1}\rho$, onde $\rho = l\tilde{\rho} + t\tilde{\rho}'$, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho &= \left(lc + tc', t^{m-l}(mg_2 + tg_2'), t^{m-l+1}((m+1)g_3 + tg_3') \right), \\ \rho' &= \left((l+1)c' + tO(t), t^{m-l-1}(m(m-l)g_2 + tO(t)), \right. \\ &\quad \left. t^{m-l}((m+1)(m-l+1)g_3 + tO(t)) \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usando novamente a fórmula (4.17), obtemos que $|\rho, \rho', \tilde{\nu}|$ é dado por

$$\begin{vmatrix} lc + tO(t) & (1+l)c' + tO(t) & t^l d \\ t^{m-l}(mg_2 + tO(t)) & t^{m-l-1}(m(m-l)g_2 + tO(t)) & te \\ t^{m-l+1}((m+1)g_3 + tO(t)) & t^{m-l}((m+1)(m-l+1)g_3 + tO(t)) & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} lc + tO(t) & t^{m-l-1}((1+l)c' + tO(t)) & t^{m-1}d \\ t(mg_2 + tO(t)) & t^{m-l-1}(m(m-l)g_2 + tO(t)) & te \\ t^2((m+1)g_3 + tO(t)) & t^{m-l}((m+1)(m-l+1)g_3 + tO(t)) & 1 \end{vmatrix} \\ = t^{m-l-1}C_2(t),$$

com $C_2(0) = -l(l-m)mc(0)g_2(0) = \frac{-l(l-m)c(0)}{(m-1)!}$. Segue portanto o quarto item da parte (1). Por (4.19), segue que $\langle \rho', \tilde{\nu} \rangle = t^{m-l}C_3(t)$, com

$$C_3(0) = (m+1)(m-l+1)g_3(0) + m(m-l)e(0)g_2(0)$$

$$= \begin{cases} \frac{(m+1)b_{m2}(\mathbf{0})}{m!} & (m < 2l-1), \\ (m+1)\left(\frac{lb(0)c(0)^2}{2} + \frac{b_{m2}(\mathbf{0})}{m!}\right) & (m = 2l-1) \end{cases}$$

e $|\rho, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}'|(0) = -lc(0)e(0) = l(m+1)c(0)b_{m2}(\mathbf{0})/m$. Assim, concluímos o segundo item de (2) e o que restava mostrar do terceiro item de (3), respectivamente.

A prova é concluída observando que, quando m é par e (u, v) é um sistema de coordenadas que dá a forma normal (4.2) para f , as condições $(l-1)!\kappa_t(0)\kappa_c(0) - m!(m+1)!\kappa^{(l-2)}(0) \neq 0$ (primeiro item de (1)), $m!(\kappa^{(l-2)})^2(0)\kappa_s(0) + 2l!^2 \neq 0$ (quinto item de (1)) e $l(m+1)!^2\kappa^{(l-2)}(0)\kappa_c(0) + m!l\kappa_t(0) \neq 0$ (primeiro item de (3)) não se alteram com a mudança de coordenadas $(u, v) \mapsto (u, -v)$ (conforme a Observação 4.3.7). Para o segundo item de (2), não precisamos nos preocupar com a condição $l(m+1)!(\kappa^{(l-2)})^2(0)\kappa_\nu(0) + 2l!^2\kappa_c(0) \neq 0$, uma vez que, se m é par, não existe l tal que $l = \frac{m+1}{2}$. $\square$

Pela Observação 4.3.4 e teorema acima, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.3.9. *Nas condições do Teorema 4.3.8, temos:*

- (a) *Se $l \geq 2m$ ou $l \leq m/2$ então κ_g é limitada em 0. Se $m/2 < l < m$ ou $m < l < 2m$, então κ_g é não limitada em 0. Se $l = m$ e $\kappa^{(l-1)}(0) = 0$, então κ_g é não limitada em 0.*
- (b) *Se $l \leq (m+1)/2$ então κ_n é limitada em 0. Se $l > (m+1)/2$ e $\kappa_c(0) \neq 0$, então κ_n é não limitada em 0.*
- (c) *Se $l \geq 2m-1$, então τ_g é limitada em 0. Se $l < 2m-1$ e $\kappa_c(0) \neq 0$, então τ_g é não limitada em 0.*

Além disso, se $l > 2m$ (resp. $l = 2m$), então $\kappa_g(0) = 0$ (resp. $\kappa_g(0) \neq 0$).

As ordens dos invariantes obtidos acima, nos seus respectivos casos, podem ser resumidas na Figura 4.5, onde as linhas horizontais significam as possíveis constantes m e a constante l varia sobre ela. As ordens marcadas em vermelho (resp. verde) significam os intervalos de l que podemos garantir que os invariantes são limitados (resp. não limitados) (Corolário 4.3.9).

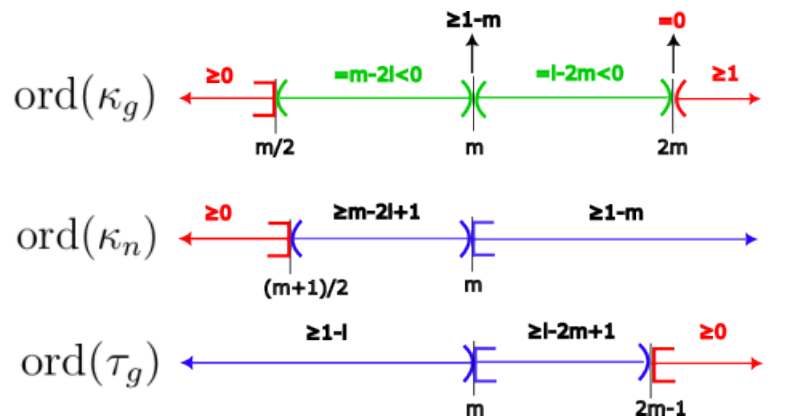


Figura 4.5: Resumo das ordens dos invariantes κ_g , κ_n e τ_g , onde l varia sobre a reta dos possíveis m .

Exemplo 4.3.10. *Considere as aplicações f_1 e f_2 e a curva α do Exemplo 4.3.6. Nesse caso $m = 2$ e $l = 4$, ou seja, $l = 2m$. Pelo Corolário 4.3.9, κ_g e τ_g são limitadas em uma*

vizinhança da origem. Além disso, pelo Teorema 4.3.8, $\text{ord}(\kappa_g) = 0$, $\text{ord}(\kappa_\nu) \geq 1 - m$ e $\text{ord}(\tau_g) \geq 0$. Ainda pelo Teorema 4.3.8, para f_1 , como $\kappa_c(0) = 6$ e $\kappa_t(0) = 0$, então $\text{ord}(\kappa_n) = -1$ e $\text{ord}(\tau_g) > 0$. Para f_2 , como $\kappa_c(0) = \kappa_t(0) = 0$, então $\text{ord}(\kappa_n) > -1$ e $\text{ord}(\tau_g) > 0$. Toda essa análise confere com a feita no Exemplo 4.3.6.

Exemplo 4.3.11. Seja $f(u, v) = (v^4, (v^5 + 1/2) \cos(u), (v^5 + 1/2) \sin(u))$ e $\alpha(t) = (t^2, t)$. Então, pelo Exemplo 4.1.4, f é uma superfície de revolução da curva $\alpha(t) = (t^4, t^5 + 1/2)$ (uma curva de multiplicidade 4 e que não passa pela origem) e, portanto, é uma σ -edge de multiplicidade $m = 4$. Além disso, como o conjunto singular de f é o eixo- u e ∂v é um campo anulador sobre este conjunto, então $\hat{\alpha} = f \circ \alpha$ é uma curva singular, $l = 2$ e, portanto, $m \geq 2l$. Temos

$$\kappa_g = -\text{sgn}(t) \frac{(1 + 2t^5)(-32 + t(10 + t(-75 + 2t^3(128 + 5t(4 + 35t + 4t^5))))}{\sqrt{(16 + 25t^2)(1 + 2t^5)^2(1 + t^4(16 + t(4 + 25t + 4t^5)))^{(3/2)}}},$$

$$\kappa_n = -\frac{4(1 + 2t^5)(2 - 5t + 4t^5)}{\sqrt{(16 + 25t^2)(1 + 2t^5)^2(1 + t^4(16 + t(4 + 25t + 4t^5)))}} e$$

$$\tau_g = \frac{4(5 + 32t^3 + 60t^5)}{t(16 + 25t^2)(1 + t^4(16 + t(4 + 25t + 4t^5)))}.$$

Note que, pelo Corolário 4.3.9, assim como pelas contas mostradas acima, κ_g e κ_n possuem ordem racional não negativa e, portanto, são limitadas em uma vizinhança da origem. Além disso, por cálculos diretos, temos $\kappa_s(0) = 0$, $\kappa_\nu(0) = -2$ e $\kappa_c(0) = \frac{5}{\sqrt[5]{24}}$. Então, pelo Teorema 4.3.8, $\text{ord}(\kappa_g) > 0$, $\text{ord}(\kappa_n) = 0$ e $\text{ord}(\tau_g) = -1$, o que condiz com as equações acima. A superfície f , a curva $\hat{\alpha}$ e a curva geratriz de f estão representadas na Figura 4.6

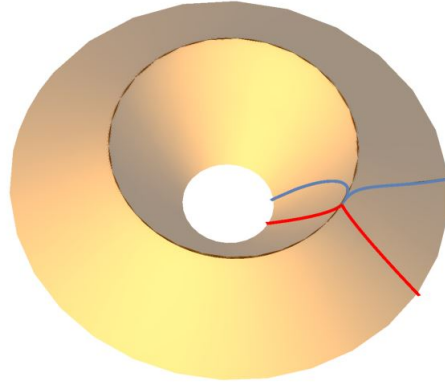


Figura 4.6: Superfície f a curva $\hat{\alpha} = f(t^2, t)$ do Exemplo 4.3.11. A curva em vermelho é a curva geratriz de f .

Notemos que o caso em que a ordem de contato da curva α com a reta paralela a $\eta(\mathbf{0})$ não é finita não está considerado no Teorema 4.3.8. Essa situação aparece, por exemplo, se quisermos estudar o comportamento das funções κ_s , κ_n e τ_g de um meridiano de uma superfície helicoidal. Por este motivo, segue o seguinte resultado:

Proposição 4.3.12. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma σ -edge de multiplicidade finita e $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ uma parametrização para a reta tangente à direção nula de f em $\mathbf{0}$ e passando por $\mathbf{0}$. Então, considerando as funções κ_g , κ_n e τ_g de $\hat{\alpha} = f \circ \alpha$, temos

- $\text{ord}(\kappa_g) \geq 1$. Em particular, $\text{ord}(\kappa_g) = 1$ se, e somente se, $\kappa_t(0)\kappa_c(0) \neq 0$.
- $\text{ord}(\kappa_n) \geq 1 - m$. Em particular, $\text{ord}(\kappa_n) = 1 - m$ se, e somente se, $\kappa_c(0) \neq 0$.
- $\text{ord}(\tau_g) \geq 1$. Em particular, $\text{ord}(\tau_g) = 1$ se, e somente se, $\kappa_t(0)\kappa_c(0) \neq 0$.

Demonstração: A prova é feita de maneira análoga à demonstração do Teorema 4.3.8, observando que $c(t) = 0$, α é dada por $\alpha(t) = (0, t)$ e que

$$\begin{aligned}\det(\rho, \rho', \tilde{\nu})(t) &= t^m \left(-\frac{m(m+1)}{m!^3} b_{m1}(0) b_{m2}(\mathbf{0}) + t O(t) \right), \\ \langle \rho', \tilde{\nu} \rangle(t) &= \frac{1+m}{m!} b_{m2}(\mathbf{0}) + t O(t), \text{ e} \\ \det(\rho, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}')(t) &= t^m \left(\frac{1+m-m^2-m^3}{mm!^2} b_{m1}(0) b_{m2}^2(0) + t O(t) \right).\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.3.13. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma superfície de revolução e β uma parametrização para um meridiano de f . Neste caso, pela Proposição 4.3.12, temos que κ_g e τ_g são limitados e $\text{ord}(\kappa_n) = 1 - m$ se e somente se f é uma frente de onda.

CAPÍTULO 5

GEOMETRIA DE FRONTAIS PURAS

Neste capítulo, recordamos alguns resultados sobre a geometria de frontais puras e seus invariantes geométricos, os quais vem sendo recentemente estudados ([29]), explicitamos uma forma normal para esse tipo de superfície singular (aplicando apenas difeomorfismos na fonte e isometrias na meta, o que não altera sua geometria) e associamos os coeficientes dessa forma normal com os seus invariantes geométricos. Além disso, como objetivo principal, estudamos o conjunto focal de frontais puras através da congruência normal, método que Teramoto usou em [34] para o estudo do conjunto focal de frentes de onda.

Superfícies focais são objetos clássicos na geometria diferencial de superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Mesmo que a superfície inicial não tenha pontos singulares, seu conjunto focal pode ser singular. Porteous ([25]) estudou superfícies focais de uma superfície regular usando técnicas da Teoria de Singularidades. Nesse estudo, Porteous mostrou relações entre os pontos de ridge da superfície inicial e pontos singulares na superfície focal. Pontos de ridge foram primeiramente estudados por Gullstrand e são pontos críticos das curvaturas principais quando restritas à sua linha de curvatura. Por outro lado, Bruce e Wilkinson ([6]) introduziram a noção de pontos sub-parabólicos de uma superfície, que são correspondentes aos pontos parabólicos de sua superfície focal.

Para uma superfície $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ regular, o conjunto focal é definido como a imagem das aplicações $\varphi_i(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{\kappa_i(u, v)}N(u, v)$, onde κ_i , $i = 1, 2$ são as curvaturas principais de f e N é um campo unitário de vetores normais a f . É conhecido ([36, Fato 2.4]) que, para frentes de ondas, uma das curvaturas principais é limitada e a outra não limitada perto das singularidades da frente e, portanto, não pode ser estendida continuamente sobre as singularidades. Com isso, ao definirmos o conjunto focal de uma frente do mesmo modo para superfícies regulares, uma das partes não está bem definida sobre o conjunto dos pontos singulares. Para uma frontal pura f , entretanto, ambas as curvaturas principais são limitadas perto dos pontos singulares e podem ser estendidas continuamente sobre eles. Portanto, as duas partes do conjunto focal estão bem definidas e coincidem com o caso de superfícies regulares.

Por outro lado, dado que frontais puras são, em particular, frontais, podemos considerar a forma de congruência normal de frontais ([34]). O conjunto focal para frentes de onda é definido em [34] como a imagem do conjunto singular da função forma de congruência normal. Faremos aqui uma abordagem similar para frontais puras. Porém, ao aplicar essa abordagem, uma nova superfície surge, a **superfície regradada normal**, dada pela superfície regradada tendo como curva base a imagem do conjunto singular de f e como

vetores associados em cada ponto dessa curva os vetores normais a f .

Como resultados principais deste capítulo, damos caracterizações geométricas que indicam quando o conjunto focal de uma frontal pura é também singular (Proposição 5.4.20). Quando isso ocorrer, damos condições para que este ponto seja do primeiro ou do segundo tipo (Proposição 5.4.25), condições essas que dependem apenas da superfície inicial. Quando a singularidade é do primeiro tipo, damos condições para que o conjunto focal seja uma singularidade cuspidal cross cap (Teorema 5.4.26). Além disso, mostramos que o conjunto focal de uma frontal pura é também uma frontal pura, sob certas condições (Teorema 5.4.28). Por fim, investigamos as curvaturas Gaussiana e média do conjunto focal, quando este é regular (Subseção 5.4.3). Os resultados deste capítulo se encontram, em sua maioria, em [30]. Nas primeiras duas seções deste capítulo, apresentamos definições e resultados em [29] que julgamos importantes para o nosso estudo.

5.1 Definição, exemplos e forma normal

Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal, $\mathbf{0}$ um ponto singular não degenerado do primeiro tipo de f e γ sua curva singular por $\mathbf{0}$. Dizemos que $\mathbf{0}$ é um **ponto de frontal pura** de f se f não é frente em nenhum ponto sobre a curva γ ([29]). Podemos também dizer neste caso que f é **uma frontal pura em $\mathbf{0}$** . Equivalentemente, pelo Lema 2.2.11, f é uma frontal pura na origem se, e somente se, ψ_{ccr} se anula sobre a curva singular de f , onde ψ_{ccr} é dado em (2.2).

No que segue, supomos f uma frontal pura na origem, ν um campo unitário de vetores normais a f , γ sua curva singular com $\gamma(0) = \mathbf{0}$ e ξ e η os campos tangente e anulador de f sobre γ , respectivamente. Além disso, suporemos que (u, v) é um sistema de coordenadas adaptado de f (Definição 2.2.9) e que a base $\{f_u, h, \nu\}$ é positiva sobre o eixo- u (ver Observação 2.2.10).

Exemplo 5.1.1. *Seja $\sigma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ uma curva singular na origem e de multiplicidade finita m (ver Seção 4.1). Considere a frontal dada por $g(u, v) = (u, v^m \sigma_1(v), v^m \sigma_2(v))$ e ν seu campo normal de vetores unitários. Por cálculos diretos, obtemos que g está em um sistema de coordenadas adaptado e ν_v se anula sobre o eixo- u se, e somente se, $\sigma'_1(0) = \sigma'_2(0) = 0$. Logo, se $\sigma'_1(0) = \sigma'_2(0) = 0$, então uma σ -edge de multiplicidade finita (Definição 4.1.1) é uma frontal pura em $\mathbf{0}$.*

Exemplo 5.1.2. *Pelo exemplo anterior, 5/2-cuspidal edges, isto é, superfícies que são $\mathcal{A}$ -equivalentes a $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^5)$, são exemplos de frontais puras. Superfícies de revolução geradas pela curva σ dada no exemplo acima são também frontais puras, uma vez que são σ -edges.*

Em [15], Proposição 3.9, os autores explicitam uma forma normal para uma 5/2-cuspidal edge na origem. Porém, em sua prova, utilizam apenas o fato de esta não ser uma frente de onda na origem. Com isso, podemos concluir que esta forma normal é a mesma para frontais que não são frentes e, conseqüentemente, para frontais puras. A seguir, daremos uma demonstração mais detalhada de tal resultado, escrevendo-a de maneira que facilitará os cálculos futuros.

Proposição 5.1.3 (Forma normal). *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem. Usando mudanças de coordenadas na fonte e isometrias na meta, podemos reduzir f a forma:*

$$(u, v) \mapsto \left(u, u^2 a_2(u) + v^2/2, u^2 a_3(u) + v^2 c_2(u) + v^4 c_4(u) + v^5 c_5(u, v) \right), \quad (5.1)$$

onde $a_2, a_3, c_2, c_4 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $c_5 : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves e $c_2(0) = 0$.

Demonstração: Como a origem é uma singularidade do primeiro tipo, então, pela prova da Proposição 4.2.3, podemos reduzir f a seguinte forma:

$$(u, v) \mapsto (u, u^2 a_2(u) + \frac{v^2}{2}, u^2 a_3(u) + v^2 b_3(u, v)),$$

onde $a_2, a_3 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $b_3 : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são suaves na origem. Reescrevendo $b_3(u, v)$ por $c_2(u) + v b_4(u, v)$, temos $c_2(0) = 0$, uma vez que $b_3(\mathbf{0}) = 0$. Além disso, é conhecido que (ver, por exemplo, [24], Proposição 3.11) f não é frente em um ponto se, e somente se, $\det(\xi f, \eta^2 f, \eta^3 f) = 0$. Como neste caso $\xi = \partial u$, $\eta = \partial v$ e f não é frente de onda ao longo da curva singular por $\mathbf{0}$, então $\det(f_u, f_{vv}, f_{v^3}) = 0$ em $\mathbf{0}$, de onde obtemos que $(b_3)_v(u, 0) = b_4(u, 0) = 0$ e, portanto, pelo Teorema 2.2.8, existe uma função $b_5(u, v)$ tal que $b_4(u, v) = v b_5(u, v)$. Novamente, podemos escrever $b_5(u, v) = c_4(u) + v c_5(u, v)$ e reduzir f a forma (5.1). $\square$

Note que a forma normal de f (5.1) está em um sistema de coordenadas adaptado.

5.2 Invariantes geométricos de uma frontal pura

Em [28], a curvatura singular κ_s e a curvatura normal limitante κ_ν são definidas para cuspidal edges, ou seja, para pontos singulares do primeiro tipo de frentes. Em [22] e [24], são definidas a curvatura cuspidal κ_c e a torção cuspidal κ_t para cuspidal edges. Esses quatro invariantes geométricos (ver Seção 2.2.1), apesar de serem definidos primeiramente para cuspidal edges, estão bem definidos para pontos singulares do primeiro tipo, ainda que não sejam frentes e, portanto, para frontais puras.

Em [15], os autores definem outros dois invariantes sobre a curva singular de uma 5/2-cuspidal edge, que podem ser estendidas para uma frontal pura na origem (conforme [29, equações 2.3]): o bias r_b e a curvatura cuspidal secundária r_c , definidos, respectivamente, por

$$r_b(t) = \frac{|\xi f|^2 \det(\xi f, \tilde{\eta}^2 f, \tilde{\eta}^4 f)}{|\xi f \times \tilde{\eta}^2 f|^3} \Big|_{(u,v)=\gamma(t)} \quad \text{e} \quad r_c(t) = \frac{|\xi f|^{5/2} \det(\xi f, \tilde{\eta}^2 f, 3\tilde{\eta}^5 f - 10l\tilde{\eta}^4 f)}{|\xi f \times \tilde{\eta}^2 f|^7/2} \Big|_{(u,v)=\gamma(t)},$$

onde $\tilde{\eta}$ é um campo vetorial anulador de f que satisfaz $\langle \xi f, \tilde{\eta}^2 f \rangle = \langle \xi f, \tilde{\eta}^3 f \rangle = 0$ sobre a curva singular e $l(t)$ uma função tal que $\tilde{\eta}^3 f(\gamma(t)) = l(t)\tilde{\eta}^2 f(\gamma(t))$.

As duas definições acima são inspiradas nas definições de bias ($b(\alpha)$) e curvatura cuspidal secundária ($\omega(\alpha)$) de uma curva singular plana α (Subseção 2.2.1). Geometricamente, se $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ é uma superfície tal que a origem é um ponto singular do primeiro tipo, as funções bias r_b e curvatura cuspidal secundária r_c coincidem com $b(\alpha)$ e $\omega(\alpha)$ na origem, onde α é dada pela interseção de f com o plano normal a $\hat{\gamma}'$ passando por $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ (ver [15], Seção 3.4, para mais detalhes).

Dada a forma normal (5.1) para uma frontal pura, buscamos no seguinte lema fórmulas para os invariantes citados até aqui (aplicados na origem) em função dos coeficientes de f . Todos os cálculos para sua demonstração se encontram em [15, Seção 3.5], de onde fizemos as devidas adaptações.

Lema 5.2.1. ([15, Seção 3.5]) *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem como em (5.1). Os invariantes geométricos e suas derivadas na origem são dados por*

$$(\kappa_\nu, \kappa'_\nu) = (2a_3, 6a'_3 - 4a_2c'_2), \quad (\kappa_s, \kappa'_s) = (2a_2, 6a'_2 + 4a_3c'_2), \quad \kappa_c = 0, \\ (\kappa_t, \kappa'_t) = (2c'_2, 2c''_2 - 4a_2a_3), \quad (r_b, r'_b) = (24c_4, 24(c'_4 - a_2c'_2)) \quad \text{e} \quad (r_c, r'_c) = \left(\frac{6!}{2}c_5, \frac{6!}{2}(c_5)_u\right).$$

Como $f_u \neq \mathbf{0}$, $f_v = \mathbf{0}$ sobre o eixo- u e f é uma frontal pura (ou seja, (f, ν) não é uma imersão sobre o eixo- u), temos $\nu_v = \mathbf{0}$ sobre o eixo- u . Logo, pelo Teorema 2.2.8, existe uma aplicação ν_1 tal que $\nu_v(u, v) = v\nu_1$.

Considerando a aplicação h dada por $f_v(u, v) = vh(u, v)$ (ver Observação 2.2.10), as seguintes funções com o mesmo domínio de f são definidas em [29]:

$$\tilde{E} = \langle f_u, f_u \rangle, \tilde{F} = \langle f_u, h \rangle, \tilde{G} = \langle h, h \rangle, \tilde{L} = -\langle f_u, \nu_u \rangle, \tilde{M} = -\langle h, \nu_u \rangle \quad \text{e} \quad \tilde{N} = -\langle h, \nu_v \rangle. \quad (5.2)$$

Note que $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = |f_u \times h|^2 \neq 0$ perto da origem. Além disso, nos pontos regulares de f , $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$, $G = \tilde{G}$, $L = \tilde{L}$, $M = \tilde{M}$ e $N = \tilde{N}$, onde E, F, G, L, M e N são os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais de f definidos em seus pontos regulares. Como $\tilde{N} = -\langle h, \nu_v \rangle = 0$ sobre o eixo singular, definimos $N_1 = -\langle h, \nu_1 \rangle$, ou seja, N_1 é tal que $\tilde{N} = vN_1$.

Vamos precisar das fórmulas dos invariantes sobre o eixo singular de f dado como em (5.1). Para isso, considere o seguinte resultado.

Lema 5.2.2. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem e (u, v) um sistema de coordenadas adaptado de f . Então temos:*

$$\kappa_\nu(u) = \frac{\tilde{L}}{\tilde{E}}(u, 0), \quad \kappa_t(u) = \pm \frac{\tilde{E}\tilde{M} - \tilde{F}\tilde{L}}{\tilde{E}\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}}(u, 0), \quad \kappa_c(u) = \frac{2\tilde{E}^{3/4}\tilde{N}}{(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)^{3/4}}(u, 0) (\equiv 0), \\ r_b(u) = \frac{3(\tilde{E}^2N_1 - 2\tilde{F}\tilde{M}\tilde{E} + \tilde{F}^2\tilde{L})}{\tilde{E}(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}(u, 0), \\ r_c(u) = \frac{12\tilde{E}^{5/4}\tilde{N}_{vv}}{(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)^{5/4}}(u, 0) = \frac{12\tilde{E}^{5/4}(\tilde{N}_1)_v}{(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)^{5/4}}(u, 0),$$

onde $\tilde{N} = vN_1$ e o sinal de κ_t depende da orientação da base $\{f_u, h, \nu\}$.

Demonstração: As três primeiras fórmulas foram obtidas em [36, Lemma 2.7]. Para os cálculos de $r_b(u)$ e $r_c(u)$, considere $\tilde{\eta} = -v\frac{\tilde{F}}{\tilde{E}}\partial u + \partial v$. Assim, $\langle f_u, \tilde{\eta}^2 f \rangle = \langle f_u, \tilde{\eta}^3 f \rangle$ se anula sobre o eixo- u e, além disso, $\tilde{\eta}^3 f = 0$ sobre o eixo- u . Logo, $l(t) = 0$ na definição de r_c .

Como $\tilde{\eta}^4 f = f_u(*) + 3h_{vv} - \frac{3\tilde{F}}{\tilde{E}}f_{uvv} - \frac{3\tilde{F}}{\tilde{E}}h_u + \frac{3\tilde{F}^2}{\tilde{E}^2}f_{uu}$, com $(*)$ sendo uma função suave, $\langle h_{vv}, \nu \rangle = \tilde{N}_v$, $\langle f_{uvv}, \nu \rangle = \langle h_u, \nu \rangle = \tilde{M}$ e $\langle f_{uu}, \nu \rangle = \tilde{L}$, a fórmula para r_b segue de cálculos diretos.

Para r_c , note por (5.1) que $f_{uv} = f_{uvv} = f_{uvvv} = h_{uv} = 0$ sobre o eixo- u . Logo, $\tilde{\eta}^5 f = f_u(*) + 4h_{vvv}$. Como $\langle h_{vvv}, \nu \rangle = \tilde{N}_{vv}$ sobre o eixo- u , o resultado segue por cálculos diretos. $\square$

Corolário 5.2.3. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem, (u, v) um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado de f e ν seu campo unitário de vetores normais*

tal que $\{f_u, h, \nu\}$ é uma base positiva sobre o eixo- u . Então os coeficientes $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ e N_1 na origem podem ser relacionados com os invariantes geométricos de f da seguinte maneira:

$$\tilde{L} = \kappa_\nu, \quad \tilde{M} = \kappa_t \quad e \quad N_1 = \frac{r_b}{3}. \quad (5.3)$$

Além disso, $\tilde{E} = \tilde{G} = 1$ e $\tilde{F} = 0$ na origem.

Demonstração: Basta observar que, em um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado, temos $\tilde{F}(\mathbf{0}) = \langle f_u, h \rangle = 0$, $\tilde{E}(\mathbf{0}) = \langle f_u, f_u \rangle = 1$ e $\tilde{G}(\mathbf{0}) = \langle h, h \rangle = 1$ e usar o Lema 5.2.2. $\square$

De acordo com o Lema 2.1 de [35], temos

$$\begin{aligned} \nu_u &= \frac{1}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \left((\tilde{F}\tilde{M} - \tilde{G}\tilde{L})f_u + (\tilde{F}\tilde{L} - \tilde{E}\tilde{M})h \right) e \\ \nu_v &= \frac{v}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \left((\tilde{F}N_1 - \tilde{G}\tilde{M})f_u + (\tilde{F}\tilde{M} - \tilde{E}N_1)h \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Com isso, de $\nu_v = v\nu_1$, segue que

$$\nu_1 = \frac{1}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \left((\tilde{F}N_1 - \tilde{G}\tilde{M})f_u + (\tilde{F}\tilde{M} - \tilde{E}N_1)h \right). \quad (5.5)$$

Observação 5.2.4. Uma vez que ψ_{ccr} se anula sobre o conjunto singular de f , a origem não pode ser uma singularidade cuspidal cross cap (Definição 2.2.12). Porém, se $c_5(0, v)$ é uma função ímpar, então f possui uma auto interseção próximo a origem ($f(0, v) = f(0, -v)$) e, assim, apresenta uma geometria semelhante a uma cuspidal cross cap (ver Figura 5.1). Além disso, se $c_5(u, v) = -c_5(u, -v)$, então $f(u, v) = f(u, -v)$.

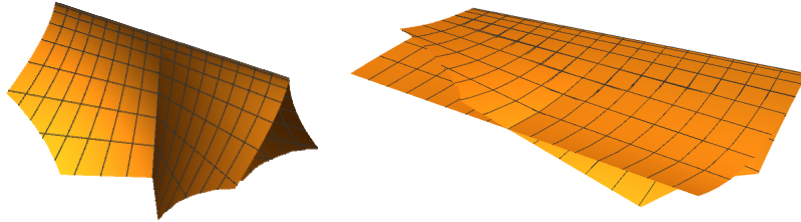


Figura 5.1: Cuspidal cross cap (esquerda) e uma frontal pura na forma (5.1), com $c_5(0, v)$ uma função ímpar (direita).

As curvaturas Gaussiana e média de uma 5/2-cuspidal edge em seu pontos regulares são dadas, respectivamente, por (ver [29], Seção 3.1)

$$K = \frac{\tilde{L}N_1 - \tilde{M}^2}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \quad e \quad H = \frac{\tilde{E}N_1 - 2\tilde{F}\tilde{M} + \tilde{L}\tilde{G}}{2(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}. \quad (5.6)$$

Logo, como $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 > 0$, as funções H e K podem ser estendidas suavemente para o domínio de f . Em [15], Lema 4.3, foi mostrado que, ao longo da curva singular de f , temos

$$K = \frac{\kappa_\nu r_b - 3\kappa_t^2}{3} \quad e \quad H = \frac{3\kappa_\nu + r_b}{6}. \quad (5.7)$$

Porém, as equações (5.6) e (5.7) valem também para frontais puras, uma vez que suas provas utilizam apenas o fato de f não ser uma frente de onda.

5.3 Curvaturas e direções principais de uma frontal pura

Conhecer as curvaturas e os vetores principais de uma aplicação suave $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ é muito importante se quisermos identificar pontos de ridge e sub-parabólicos (Definição 2.2.14). Explicitaremos nesta seção esses elementos para uma frontal pura na origem f no caso em que f não tem pontos umbílicos e damos aplicações para estes campos vetoriais.

Usando as equações em (5.6), defina as funções

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{e} \quad \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Como κ_1 e κ_2 satisfazem $\kappa_1 \kappa_2 = K$ e $\kappa_1 + \kappa_2 = 2H$, então κ_1 e κ_2 podem ser tratadas como as curvaturas principais de f nos pontos regulares e, como H e K podem ser estendidas continuamente sobre todo o domínio de f , o mesmo vale para as curvaturas principais.

Teorema 5.3.1. ([15, Seção 3.5]) *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem. Então as curvaturas principais κ_i , $i = 1, 2$, podem ser estendidas suavemente sobre o domínio de f se, e somente se, a origem não é um ponto umbílico de f ou, equivalentemente, se, e somente se,*

$$\left(\frac{1}{3}r_b - \kappa_\nu\right)^2 + 4\kappa_t^2 \neq 0.$$

Para os vetores principais V_i , $i = 1, 2$, de f , é mostrado em [29] que, se f é uma frontal pura em $\mathbf{0}$, sem pontos umbílicos, e em um sistema de coordenadas adaptado, então V_i pode ser tomado da forma

$$V_i = (-v(\tilde{M} - \kappa_i \tilde{F}), \tilde{L} - \kappa_i \tilde{E}) \quad (5.8)$$

nos pontos regulares de f .

Uma **linha de curvatura** de uma frontal pura é definida como uma curva α sobre o domínio de f tal que $\alpha'(t)$ é um vetor principal de f em $\alpha(t)$ para todo t sobre o domínio de α . Dado isso, é mostrado em [29] o seguinte resultado:

Proposição 5.3.2. ([29, Proposição 3.3]) *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem sem pontos umbílicos e γ a curva singular de f por $\mathbf{0}$. Então ambos os vetores principais V_i , $i = 1, 2$, podem ser suavemente estendidos sobre o domínio de f de modo que nunca se anulam. Além disso, valem as seguintes afirmações:*

- (1) *Suponha que $\kappa_t(0) \neq 0$. Então ambos os vetores são paralelos a η sobre γ .*
- (2) *Suponha que $\kappa_t = 0$ sobre γ . Então V_1 e V_2 são linearmente independentes e um desses é paralelo a η sobre γ .*
- (3) *Suponha que $r_b/3 - \kappa_\nu \neq 0$ sobre γ . Então γ é uma linha de curvatura se, e somente se, $\kappa_t = 0$ sobre γ .*

Lema 5.3.3. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem sem pontos umbílicos e V_i vetor principal relativo a κ_i . Então*

$$V_i \nu = -\kappa_i V_i f.$$

Demonstração: Por (5.8), temos $V_i f = v \mathbf{x}_i$, com $\mathbf{x}_i = -(\tilde{M} - \kappa_i \tilde{F})f_u + (\tilde{L} - \kappa_i \tilde{E})h$. Por outro lado, por (5.4) e cálculos diretos, temos

$$V_i \nu = v \kappa_i (\tilde{M} - \kappa \tilde{F})f_u - v \kappa_i (\tilde{L} - \kappa \tilde{E})h = -v \kappa_i \mathbf{x}_i,$$

de onde segue o resultado. $\square$

O lema acima pode ser considerado como uma generalização da fórmula de Olinde Rodrigues para frontais puras.

Quando as curvaturas e os vetores principais são suavemente estendidos sobre o conjunto singular de uma frontal, a definição de pontos de ridge e sub-parabólicos também se estendem.

O resultado a seguir revela uma condição necessária e suficiente para um ponto singular de uma frontal pura na origem ser um ponto de ridge e sub-parabólico.

Proposição 5.3.4. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem com $\kappa_t \neq 0$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *A origem é um ponto de ridge de f relativo a κ_1 ;*
- (b) *A origem é um ponto de ridge de f relativo a κ_2 ;*
- (c) *A origem é um ponto sub-parabólico de f relativo a κ_1 ;*
- (d) *A origem é um ponto sub-parabólico de f relativo a κ_2 ;*
- (e) *A curvatura cuspidal secundária r_c se anula na origem.*

Demonstração: Suponha f como em (5.1). Pela Proposição 5.3.2, ambos os vetores principais são paralelos a ∂v sobre o eixo singular. Isso significa que $(\kappa_i)_v(\mathbf{0}) = 0$ se, e somente se, $\mathbf{0}$ é um ponto de ridge relacionado a κ_i e ponto sub-parabólico relacionado a κ_j , $j \neq i$. Afirmamos que $(\kappa_i)_v$, $i = 1, 2$, se anula em um ponto do eixo singular se, e somente se, $\tilde{N}_{vv}$ também se anula. De fato, por uma análise direta de (5.1), temos $h(u, v) = (0, 1, 2c_2(u) + v^2(4c_4(u) + 5v(c_5)_v(u, v)) + v^4(c_5)_v(u, v))$. Logo, $h_v(u, 0) = 0$. Como f_v e ν_v se anulam sobre o eixo- u , então f_{uv} e ν_{uv} também se anulam e, portanto, concluímos que $\tilde{E}_v, \tilde{F}_v, \tilde{G}_v, \tilde{L}_v$ e $\tilde{M}_v$ se anulam sobre o eixo- u . Agora, como as curvaturas principais podem ser dadas por $\kappa_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$, podemos concluir que

$$(\kappa_i)_v = \pm \frac{\tilde{N}_{vv}}{48\sqrt{H^2 - K}(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}(\tilde{L} - \kappa \tilde{E}) \quad (5.9)$$

sobre o eixo- u . Em [29, p. 38], é provado a seguinte identidade na origem:

$$2(\tilde{L} - \kappa_j \tilde{E}) = \left(\left(\kappa_\nu - \frac{r_b}{3} \right) + (-1)^i \sqrt{\left(\frac{r_b}{3} - \kappa_\nu \right)^2 + 4\kappa_t^2} \right). \quad (5.10)$$

Assim, como $\kappa_t \neq 0$, $\tilde{L} - \tilde{E}\kappa$ não se anula na origem, de onde segue a afirmação.

Portanto, as afirmações (a), (b), (c) e (d) são todas equivalentes $\tilde{N}_{vv}(\mathbf{0}) = 0$. Pelo Lema 5.2.2, $\tilde{N}_{vv}$ se anula sobre o eixo- u se e somente se r_c também se anula, de onde segue o resultado. $\square$

Como a origem de f é uma 5/2-cuspidal edge se e somente se r_c não se anula ([15, Prop. 3.2]), temos o seguinte corolário:

Corolário 5.3.5. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem com $\kappa_t \neq 0$. Então f não é uma 5/2-cuspidal edge em $\mathbf{0}$ se, e somente se, $\mathbf{0}$ é um ponto de ridge e sub-parabólico de f relativo a ambas as curvaturas principais de f .*

5.4 Congruência normal de uma frontal pura

Vamos nesta seção estudar a função congruência normal de uma frontal pura, que veremos consistir de suas superfícies focais e de sua superfície regrada normal, buscando assim propriedades geométricas para essas. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem e suponhamos, de agora em diante, que as curvaturas principais de f não se anulam. O **conjunto focal** para frentes de onda f foi estudado em [34, Seção 3.2] e faremos aqui uma abordagem similar.

Considere a aplicação

$$\mathcal{F}(u, v, w) = f(u, v) + w\nu(u, v),$$

onde ν é um campo unitário de vetores normais a f . A aplicação $\mathcal{F}$ é chamada de função **congruência normal**.

Em [34, Seção 3.2], é calculado o determinante do Jacobiano de $\mathcal{F}$, que é dado por

$$|J_{\mathcal{F}}| = \det(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v, \mathcal{F}_w) = (1 - w\kappa_1)(1 - w\kappa_2)\lambda,$$

onde κ_i , $i = 1, 2$ são as curvaturas principais de f e λ a função densidade de área dada por $\lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)$. Logo, o conjunto dos pontos singulares de $\mathcal{F}$ é dado por $S(\mathcal{F}) = (S(f) \times \mathbb{R}) \cup S_1 \cup S_2$, onde

$$S_i = \{(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}); 1 - w\kappa_i(u, v) = 0\}, i = 1, 2.$$

Logo, a imagem do conjunto singular de $\mathcal{F}$ é dada por $\mathcal{F}(S(f) \times \mathbb{R}) \cup \mathcal{F}(S_1) \cup \mathcal{F}(S_2)$.

Defina as aplicações $\mathcal{R} : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ e $FC_i : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, FC_i(\mathbf{0})), i = 1, 2$, por

$$\mathcal{R}(u, w) = \hat{\gamma}(u) + w\hat{\nu}(u) \text{ e } FC_i(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{\kappa_i(u, v)}\nu(u, v), \quad (5.11)$$

com $\hat{\nu} = \nu \circ \gamma$. Então a imagem de $\mathcal{R}$ coincide com $\mathcal{F}(S(\mathcal{F}) \times \mathbb{R})$ e a imagem de FC_i coincide com $\mathcal{F}(S_i), i = 1, 2$. Chamamos $\mathcal{R}$ e FC_i de **superfície regrada normal ao longo de $\hat{\gamma}$** e **superfície focal** de f associada à $\kappa_i, i = 1, 2$, respectivamente.

A seguir, estudaremos as singularidades destas aplicações.

5.4.1 Singularidades de $\mathcal{R}$

Vamos primeiramente estudar as singularidades da aplicação $\mathcal{R}(u, w) = \hat{\gamma}(u) + w\hat{\nu}(u)$. Assumiremos aqui que f é uma frontal pura na origem e (u, v) é um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado (conforme Definição 2.2.9) e que $\{f_u, h, \nu\}$ é uma base positiva para f sobre o eixo- u . Em [19, Proposição 3.1], os autores apresentam fórmulas do tipo Frenet Serret ao longo da curva singular de uma cuspidal edge. Na demonstração dessas fórmulas, porém, usa-se apenas o fato dos pontos singulares serem não degenerados do primeiro tipo. Com isso, as mesmas valem para frontais puras e são dadas na representação matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}' \\ \hat{h} \\ \hat{\nu} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_s & \kappa_\nu \\ -\kappa_s & 0 & \kappa_t \\ -\kappa_\nu & -\kappa_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}' \\ \hat{h} \\ \hat{\nu} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

onde $\hat{h}(u) = h(u, 0)$. Assumiremos nesta seção que $(\kappa_\nu, \kappa_t)(0) \neq (0, 0)$ e, neste caso, dizemos que $\mathcal{R}$ é **não cilíndrica**.

Usando (5.12), obtemos

$$\mathcal{R}_u(u, w) = (1 - w\kappa_\nu(u))\hat{\gamma}'(u) - w\kappa_t(u)\hat{h}(u) \text{ e } \mathcal{R}_w(u, w) = \hat{\nu}(u). \quad (5.13)$$

Logo,

$$\mathcal{R}_u \times \mathcal{R}_w(u, w) = -(1 - w\kappa_\nu(u))\hat{h}(u) - w\kappa_t(u)\hat{\gamma}'(u) \quad (5.14)$$

e temos o seguinte resultado:

Lema 5.4.1. *Um ponto (u_0, w_0) no domínio de $\mathcal{R}$ é singular se, e somente se, $\kappa_t(u_0) = 0$ e $w_0 = \frac{1}{\kappa_\nu(u_0)}$.*

Note por (5.11) que $\mathcal{R}$ é uma superfície regrada gerada pela família $\{\hat{\gamma}(u), \hat{\nu}(u)\}$. A superfície regrada $\mathcal{R}$ é uma superfície desenvolvível se, e somente se, $\det(\hat{\gamma}'(u), \hat{\nu}(u), \hat{\nu}'(u)) = 0$, para todo u ([7]), o que implica que sua curvatura Gaussiana é identicamente nula sobre os pontos regulares. Com isso, considere a seguinte proposição:

Proposição 5.4.2. *A superfície regrada normal $\mathcal{R}$ ao longo de $\hat{\gamma}$ é uma superfície desenvolvível se, e somente se, κ_t se anula ao longo da curva singular de f .*

Demonstração: Tome um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado (u, v) de f . Então, por (5.12), como $\hat{\nu}' = -\kappa_\nu\hat{\gamma}' - \kappa_t\hat{h}$, obtemos

$$\det(\hat{\gamma}', \hat{\nu}, \hat{\nu}') = \det(\hat{\gamma}', \hat{\nu}, -\kappa_t\hat{h}) = \kappa_t \det(\hat{\gamma}', \hat{h}, \hat{\nu}) = \kappa_t$$

sobre o eixo- u , de onde segue o resultado. $\square$

Segundo a Proposição 5.3.2, se κ_t se anula sobre a curva singular de uma frontal pura na origem sem pontos umbílicos, então esta curva é uma linha de curvatura, desde que $r_b/3 - \kappa_\nu \neq 0$. Além disso, pela proposição acima, isso é equivalente a $\mathcal{R}$ ser uma superfície desenvolvível.

Como consequência do Lema 5.4.1 e da Proposição 5.4.2, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.4.3. *Se $\mathcal{R}$ é uma superfície desenvolvível, então o conjunto singular de $\mathcal{R}$ é dado pela curva $\beta(t) = (t, 1/\kappa_\nu(t))$ e sua imagem por $\mathcal{R}$ é dada por $\hat{\beta}(t) = \hat{\gamma}(t) + \frac{\hat{\nu}(t)}{\kappa_\nu(t)}$.*

Vamos supor, no que segue, que $\mathcal{R}$ é uma superfície desenvolvível não cilíndrica ($\kappa_t = 0, \forall t$, e $\kappa_\nu(0) \neq 0$). Assim, por (5.14), $\nu_{\mathcal{R}}(u, w) = \hat{h}(u)$ pode ser tomado como um campo de vetores unitários normal a $\mathcal{R}$ e, portanto, $\mathcal{R}$ é uma frontal.

Sendo $\lambda_{\mathcal{R}}(u, w) = \det(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_w, \nu_{\mathcal{R}})(u, w) = -(1 - w\kappa_\nu)$ a função identificador de singularidades de $\mathcal{R}$, segue que $(\lambda_{\mathcal{R}})_w(0, 1/\kappa_\nu(0)) = \kappa_\nu(0) \neq 0$. Ou seja, a singularidade $(0, 1/\kappa_\nu(0))$ de $\mathcal{R}$ é não degenerada (e, consequentemente, todos os pontos singulares de f em uma vizinhança de $(0, 1/\kappa_\nu(0))$ são não degenerados). Como consequência disto, o

conjunto singular de $\mathcal{R}$ é localmente uma curva regular. De fato, pelo Corolário 5.4.3, essa curva pode ser parametrizada por

$$\beta(t) = (t, 1/\kappa_\nu(t)). \quad (5.15)$$

Note que o campo anulador de $\mathcal{R}$, neste caso, é dado por $\eta_{\mathcal{R}} = \partial u$, uma vez que, nos pontos singulares, vale $\mathcal{R}_u(u, w) = 0$ e $\mathcal{R}_w(u, w) = \hat{\nu}(u) \neq \mathbf{0}$. Dessa maneira, $\mathcal{R}$ é uma frente em um ponto $(t, 1/\kappa_\nu(t))$ se e somente se $(\nu_{\mathcal{R}})_u(u, 1/\kappa_\nu(u)) = \hat{h}'(u) \neq 0$. Agora, por (5.12), temos $(\nu_{\mathcal{R}})_u(u, w) = \hat{h}'(u) = -\kappa_s(u)\hat{\gamma}'(u)$. Concluimos assim o seguinte resultado:

Proposição 5.4.4. *Se $\mathcal{R}$ é uma superfície desenvolvível não cilíndrica, então $\mathcal{R}$ é uma frontal. Além disso, $\mathcal{R}$ é uma frente em $(u, 1/\kappa_\nu(u))$ se, e somente se, $\kappa_s(u) \neq 0$.*

Exemplo 5.4.5. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ a superfície dada por $f(\theta, t) = (x(t), z(t) \cos \theta, z(t) \sin \theta)$, isto é, a superfície de revolução da curva $\alpha(t) = (x(t), z(t))$ e suponha $z(t) > 0, \forall t$. Suponha também que existam funções suaves l e φ tais que $x'(t) = l(t) \cos \varphi(t)$, $z'(t) = l(t) \sin \varphi(t)$, $\varphi'(0) = 0$, $l'(0) \neq 0$ e $l(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$, ou seja, a origem é uma singularidade isolada de α . Temos*

$$f_\theta(\theta, t) = (0, -z(t) \sin \theta, z(t) \cos \theta) \quad \text{e} \quad f_t(\theta, t) = l(t)(\cos \varphi, \sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta) \quad (5.16)$$

e, portanto, o campo de vetores $\nu = (\sin \varphi, -\cos \varphi \cos \theta, -\cos \varphi \sin \theta)$ pode ser tomado como campo unitário de vetores normais a f . Logo, f é uma frontal. Por (5.16) e cálculos diretos, obtemos $\lambda(\theta, t) = \det(f_\theta, f_t, \nu)(\theta, t) = z(t)l(t)$. Logo, o eixo- θ coincide com o conjunto singular de f e a origem é um ponto singular não degenerado de f , uma vez que $\lambda_t = z'l + l'z$. Por outro lado, de $\nu_t(\theta, 0) = -\varphi'(0)(\cos \varphi(0), \sin \varphi(0) \cos \theta, \sin \varphi(0) \sin \theta) = \mathbf{0}$, concluimos que f é uma frontal pura. É possível mostrar que todos os invariantes geométricos citados nesse capítulo são constantes sobre essa curva singular de f (ver [33] para detalhes sobre a geometria de superfícies de revolução de frontais). A curvatura normal limitante κ_ν , por exemplo, é dada por $\frac{\cos \varphi(0)}{z(0)}$. Suponha que $\kappa_\nu \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\theta, 1/\kappa_\nu(\theta)) &= f(\theta, 0) + \frac{1}{\kappa_\nu(0)}\nu(\theta, 0) \\ &= (x(0), z(0) \cos \theta, z(0) \sin \theta) + \frac{z(0)}{\cos \varphi(0)}(\sin \varphi(0), -\cos \varphi(0) \cos \theta, -\cos \varphi(0) \sin \theta) \\ &= (x(0) + \tan \varphi(0), 0, 0), \end{aligned}$$

ou seja, a imagem do conjunto singular de $\mathcal{R}$ é um ponto.

A seguir está um exemplo prático de uma superfície de revolução.

Exemplo 5.4.6. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ a superfície de revolução gerada por $\alpha(t) = (\frac{t^5-t^2+4}{\sqrt{2}}, \frac{-t^5-t^2+4}{\sqrt{2}})$. Neste caso, se tomarmos as funções $l(t) = t\sqrt{\frac{50t^6+8}{2}}$ e $\varphi = \arctg(\frac{-5t^3-2}{5t^3-2})$, então $\alpha'(t) = l(t)(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$. Além disso, $\varphi'(0) = 0$ e, portanto, pelo exemplo anterior, f é uma frontal pura. Por cálculos diretos, $\mathcal{R}(\theta, w) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4+w, (w-4) \cos \theta, (w-4) \sin \theta)$ e, portanto, sua imagem é um cone. As superfícies f e $\mathcal{R}$ estão dadas na Figura 5.2 (em laranja e azul, respectivamente).*

O próximo teorema dá condições necessárias e suficientes para a superfície $\mathcal{R}$ ser uma cuspidal edge, rabo de andorinha ou uma cuspidal cross cap.

Teorema 5.4.7. *Seja $\mathcal{R}$ a superfície regrada normal ao longo de $\hat{\gamma}$ de uma frontal pura na origem f com $\kappa_t(0) = 0$, ou seja, $q = (0, 1/\kappa_\nu(0))$ é um ponto singular de $\mathcal{R}$. Se $\mathcal{R}$ é desenvolvível não cilíndrica, então*

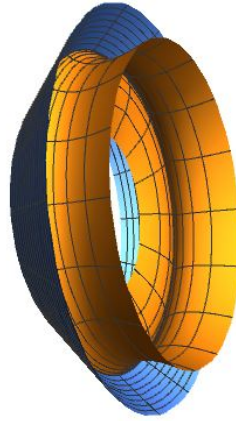


Figura 5.2: A superfície do Exemplo 5.4.15

- (1) $\mathcal{R}$ é uma cuspidal edge em q se, e somente se, $\kappa_s(0)\kappa'_\nu(0) \neq 0$;
- (2) $\mathcal{R}$ é um rabo de andorinha em q se, e somente se, $\kappa_s(0) \neq 0$, $\kappa'_\nu(0) = 0$ e $\kappa''_\nu(0) \neq 0$.
- (3) $\mathcal{R}$ é uma cuspidal cross cap em q se, e somente se, $\kappa_s(0) = 0$ e $\kappa'_s(0)\kappa'_\nu(0) \neq 0$.

Demonstração: Pela Proposição 5.4.4, $\mathcal{R}$ é uma frente em q se, e somente se, $\kappa_s(0) \neq 0$. Por outro lado, tomando a curva singular $\beta(t) = (t, 1/\kappa_\nu(t))$ de $\mathcal{R}$, temos $\beta(0) = q$ e $\beta'(t) = (1, -\frac{\kappa'_\nu(t)}{\kappa_\nu(t)^2})$. Além disso, $\eta_{\mathcal{R}}(u, v) = (1, 0)$ é um campo anulador de $\mathcal{R}$ ao longo de β . Com isso, segue que $\det(\beta', \eta_{\mathcal{R}})(t) = \frac{\kappa'_\nu(t)}{\kappa_\nu(t)^2}$ e, quando $\kappa'_\nu(0) = 0$, temos $\det(\beta', \eta_{\mathcal{R}})'(0) = \frac{\kappa''_\nu(0)}{\kappa_\nu^2(0)}$. Obtemos assim (1) e (2), pelos dois primeiros itens do Teorema 2.2.13.

Agora suponha que $\mathcal{R}$ não é uma frente em q , ou seja, $\kappa_s(0) = 0$ e seja $\psi_{ccr\mathcal{R}}(u) = \det(\hat{\beta}'(u), \nu_{\mathcal{R}}(u), \eta_{\mathcal{R}}\nu_{\mathcal{R}}(u))$, onde $\hat{\beta}(u) = \mathcal{R}(\beta(u))$. Por definição, $\hat{\beta}(u) = \hat{\gamma}(u) + \frac{1}{\kappa_\nu(u)}\hat{\nu}(u)$ e, por (5.12), $\hat{\beta}'(u) = -\frac{\kappa'_\nu(u)}{\kappa_\nu^2(u)}\hat{\nu}(u)$. Recorde que $\nu_{\mathcal{R}}(u, w) = \hat{h}(u)$ e, como $\eta_{\mathcal{R}}(u, w) = (1, 0)$, temos $\eta_{\mathcal{R}}\nu_{\mathcal{R}}(u, w) = \hat{h}'(u) = -\kappa_s(u)\hat{\gamma}'(u)$, por (5.12).

Com isso

$$\psi_{ccr\mathcal{R}}(u) = \det\left(-\frac{\kappa'_\nu(u)}{\kappa_\nu^2(u)}\hat{\nu}(u), \hat{h}(u), -\kappa_s(u)\hat{\gamma}'(u)\right) = -\frac{\kappa_s\kappa'_\nu}{\kappa_\nu^2}(u) = 0.$$

Logo, $\psi_{ccr\mathcal{R}}(0) = 0$ e $\psi'_{ccr\mathcal{R}}(0) = -\frac{\kappa'_s\kappa'_\nu}{\kappa_\nu^2}(0)$, uma vez que $\kappa_s(0) = 0$. Portanto, o resultado segue pelo critério para superfícies cuspidal cross cap (item (3) do Teorema 2.2.13). $\square$

Como consequência da demonstração do teorema acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.4.8. *Um ponto singular de $\mathcal{R}$, quando esta é não cilíndrica e desenvolvível é do segundo tipo em $q = (0, 1/\kappa_\nu(0))$ se, e somente se, $\kappa'_\nu(0) = 0$.*

Exemplo 5.4.9. *Na superfície de revolução do Exemplo 5.4.6, pode ser mostrado que $\kappa_s(0) \neq 0$ e $\kappa_\nu(0) \neq 0$, o que implica pela Proposição 5.4.4 que $\mathcal{R}$ é uma frente. Além disso, para toda superfície de revolução, a curvatura normal limitante $\kappa'_\nu(0) = 0$, uma vez que κ_ν é constante sobre sua curva singular. Logo, $\mathcal{R}$ é uma singularidade do segundo tipo de f . No caso em que $\kappa_s(0) = 0$ em uma superfície de revolução, então $\mathcal{R}$ é uma frontal*

pura e, pelo Corolário 5.4.13, $\mathcal{R}$ está contida em um plano. Este caso está contemplado indiretamente no Exemplo 5.4.14.

Vamos agora considerar o caso em que $\mathcal{R}$ é uma superfície não desenvolvível. É conhecido que tais superfícies apresentam genericamente singularidades cross cap [20], que sabemos não serem frontais.

Singularidades $S_1^\pm$ são frontais definidas por aplicações $\mathcal{A}$ -equivalentes a $(u, v) \mapsto (u, v^2, v(u^2 \pm v^2))$ na origem e são conhecidas por serem singularidades genéricas de famílias a um parâmetro de superfícies em $\mathbb{R}^3$ ([8]).

Daremos, no próximo teorema, caracterizações destas singularidades quando $\mathcal{R}$ é não cilíndrica em termos dos invariantes geométricos da frontal pura na origem inicial f , utilizando o seguinte critério:

Teorema 5.4.10 ([26], Teorema 2.2). *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ um germe de aplicação e $\mathbf{0}$ um ponto singular de posto 1, ξ um campo tangente e η um campo anulador sobre a curva singular de f . Seja $\varphi = \det(\xi f, \eta f, \eta \eta f)$. Então $\mathbf{0}$ é uma singularidade S_1^- de f se, e somente se, $\mathbf{0}$ é um ponto crítico de φ e $\det(\text{Hess}(\varphi(\mathbf{0}))) > 0$. Por outro lado, $\mathbf{0}$ é uma singularidade S_1^+ de f se, e somente se, $\mathbf{0}$ é um ponto crítico de φ , $\det(\text{Hess}(\varphi(\mathbf{0}))) < 0$ e os vetores ξf e $\eta \eta f$ são linearmente independentes.*

Observação 5.4.11 ([26], Observação 2.3). *Com as hipóteses do Teorema acima, $\mathbf{0}$ é uma singularidade cross cap se, e somente se, $\xi \varphi \neq 0$ em $\mathbf{0}$.*

Teorema 5.4.12. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem. Suponha que a superfície regrada normal $\mathcal{R}$ dada em (5.11) seja não cilíndrica e não desenvolvível e seja $q = (0, 1/\kappa_\nu(0)) \in S(\mathcal{R})$. Então, temos as seguintes caracterizações:*

- (1) $\mathcal{R}$ tem uma singularidade cross cap em q se, e somente se, $\kappa'_t(0) \neq 0$.
- (2) $\mathcal{R}$ tem uma singularidade S_1^- em q se, e somente se, $\kappa'_t(0) = 0$ e $\kappa''_t(0)(2\kappa_s(0)\kappa'_\nu(0) + \kappa''_t(0)) < 0$.
- (3) $\mathcal{R}$ tem uma singularidade S_1^+ em q se, e somente se, $\kappa'_t(0) = 0$, $\kappa'_\nu(0) \neq 0$ e $\kappa''_t(0)(2\kappa_s(0)\kappa'_\nu(0) + \kappa''_t(0)) > 0$.

Demonstração: Tomemos (u, v) um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado de f . Assim $S(f) = \{v = 0\}$. Definindo $\xi_{\mathcal{R}} = \partial w$ e $\eta_{\mathcal{R}} = \partial u$ em $S(f) \times \mathbb{R}$, o par $(\xi_{\mathcal{R}}, \eta_{\mathcal{R}})$ satisfaz $d\mathcal{R}(\eta_{\mathcal{R}}) = \eta_{\mathcal{R}}\mathcal{R} = 0$ e $\xi_{\mathcal{R}}, \eta_{\mathcal{R}}$ são linearmente independentes em $q \in S(\mathcal{R})$. Defina a função $\varphi : S(f) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi = \det(\xi_{\mathcal{R}}\mathcal{R}, \eta_{\mathcal{R}}\mathcal{R}, \eta_{\mathcal{R}}\eta_{\mathcal{R}}\mathcal{R}) = \det(\mathcal{R}_w, \mathcal{R}_u, \mathcal{R}_{uu})$. Por (5.12) e (5.14), temos

$$\mathcal{R}_w = \hat{v}, \quad \mathcal{R}_u = (1 - \kappa_\nu)$$

e

$$\mathcal{R}_{uu} = w(\kappa_s \kappa_t - \kappa'_\nu) + (\kappa_s(1 - w\kappa_\nu) - w\kappa'_t)\hat{h} + *\hat{v},$$

com $*$ sendo uma função suave de u e w . Logo,

$$\varphi = w^2 \left(\kappa_s^2 (\kappa_\nu^2 + \kappa_t^2) + \kappa_\nu \kappa'_t - \kappa'_\nu \kappa_t \right) - w (2\kappa_s \kappa_\nu + \kappa'_t) + \kappa_s.$$

Nesse caso, pela Observação 5.4.11, $\mathcal{R}$ é uma singularidade cross cap em q se, e somente se, $\xi_{\mathcal{R}}\varphi(q) = \varphi_w(q) = \kappa'_t(0) \neq 0$, uma vez que $\kappa_t(0) = 0$. Com isso, concluímos o item (1).

Vamos considerar agora o caso em que $\mathcal{R}$ não tem uma singularidade cross cap em q , ou seja, $\kappa'_t(0) = 0$. As derivadas de primeira ordem de φ satisfazem $\varphi_u(q) = 0$ and

$\varphi_w(q) = \kappa'_t(u_0) = 0$. Assim, q é um ponto crítico de φ . Para obtermos a matriz Hessiana de φ , precisamos das derivadas de segunda ordem de φ , que são obtidas por cálculos diretos e dadas por

$$\varphi_{uu} = \frac{\kappa'_\nu}{\kappa_\nu^2}(\kappa''_t + 2\kappa_s\kappa'_\nu), \quad \varphi_{uw} = \kappa''_t + 2\kappa_s\kappa'_\nu, \quad \varphi_{ww} = 2\kappa_s\kappa_\nu^2$$

em q . Logo,

$$\varphi_{uu}(q)\varphi_{ww}(q) - \varphi_{uw}(q)^2 = -\kappa''_t(0)(2\kappa_s(0)\kappa'_\nu(0) + \kappa''_t(0)).$$

Além disso, quando $\kappa'_t(0) = 0$, então $\mathcal{R}_{uu} = -(\kappa'_\nu(0)/\kappa_\nu(0))\hat{\gamma}'(0)$. Portanto $\mathcal{R}_w(q)$ e $\mathcal{R}_{uu}(q)$ são linearmente independentes se, e somente se, $\kappa'_\nu(u_0) \neq 0$ e, portanto, os itens (2) e (3) seguem do Teorema 5.4.10. $\square$

Corolário 5.4.13. *Se $\mathcal{R}$ é uma superfície desenvolvível não cilíndrica e uma frontal pura, então $\mathcal{R}$ está contida em um plano.*

Demonstração: Pela Proposição 5.4.4 e por (5.12), se $\mathcal{R}$ é uma superfície desenvolvível não cilíndrica e uma frontal pura, então $\hat{h}'(u) = -\kappa_s(u)\hat{\gamma}'(u) + \kappa_t(u)\hat{\nu}(u)$ se anula sobre o eixo- u . Isso implica que $(\nu_{\mathcal{R}})_u$ é identicamente nula. Como $\nu_{\mathcal{R}}$ não depende de w , então $\nu_{\mathcal{R}}$ é um campo de vetores constante e, portanto, segue o resultado. $\square$

Nas hipóteses do Corolário 5.4.13 podemos afirmar que $\mathcal{R}$ não é uma 5/2-cuspidal edge, uma vez que essas são frontais puras não planas.

Observando a Proposição 5.4.2, buscamos uma forma normal para f tal que a torção cuspidal se anule em todos os pontos singulares. Para tal, obtemos por cálculos diretos a torção cuspidal de uma frontal pura f na forma normal (5.1), dada por

$$\kappa_t = \frac{1}{|f_u|^2|\bar{\nu}^2|} \left(2c'_2|f_u|^2 - (A''_3 - 2c_2A''_2)(A'_2 + 2c_2A'_3) \right), \quad (5.17)$$

onde $A_i = u^2a_i$ e omitimos a variável u nas funções. Porém, encontrar uma fórmula para c_2 dependendo das funções a_2 e a_3 e, assim garantir uma forma normal para frontais puras tais que sua torção cuspidal se anule identicamente é muito difícil. Entretanto, observando (5.17), nos inspiramos a elaborar o seguinte exemplo:

Exemplo 5.4.14. *Um caso particular da forma normal (5.1) de uma frontal pura na origem, quando $c'_2(u) = 0, \forall u$, resulta em uma superfície normal regradada ao longo de $\hat{\gamma}$ contida em um plano e com uma propriedade interessante de seu conjunto singular, como veremos a seguir. Suponha que $c'_2(u) = 0, \forall u$. Logo, por $c_2(0) = 0$ e (5.17), temos $c_2(u) = 0, \forall u$, e*

$$\kappa_t(u) = -\frac{A'_2(u)A''_3(u)}{|f_u|^2|\bar{\nu}^2|}.$$

Assim, $\kappa_t(u) = 0, \forall u$, se e somente se, A'_2 ou A''_3 é identicamente nula e, como $A_2(0) = A_3(0) = A'_3(0) = 0$, então isso é equivalente a dizer que A_2 ou A_3 é identicamente nula. Pelo Lema 5.2.1, $\kappa_\nu(0) = 2a_3(0)$, o que implica que A_3 não pode ser identicamente nulo ($\mathcal{R}$ é não cilíndrica). Com isso, se supormos $\kappa_t(u) = 0, \forall u$, então $A_2(u) = 0, \forall u$ e

$$\kappa_\nu(u) = \frac{A''_3(u)}{(1 + A_3^2(u))^{3/2}} \quad e \quad \kappa_s(u) = 0, \forall u. \quad (5.18)$$

Logo, pelo Corolário 5.4.13, $\mathcal{R}$ está contida em um plano. Mais especificamente, neste caso, $\hat{\gamma}(u) = f(u, 0) = (u, 0, A_3(u))$ e $\hat{\nu}(u) = \nu(u, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+A_3'(u)}}(-A_3'(u), 0, 1)$. Assim, obtemos

$$\mathcal{R}(u, w) = (u, 0, A_3(u)) + \frac{w}{\sqrt{1+A_3'(u)}}(-A_3'(u), 0, 1), \quad (5.19)$$

ou seja, a superfície $\mathcal{R}$ está contida no plano- xz .

Observe que, por (5.19), $\mathcal{R}(u, w) = \hat{\gamma}(u) + w n(u)$, onde $n(u)$ é o vetor normal unitário de $\hat{\gamma}$, vista como uma curva plana. Isso significa que, para cada w_0 , a curva $\mathcal{R}(u, w_0)$ é uma curva paralela a $\hat{\gamma}$. Além disso, a curvatura $\kappa_{\hat{\gamma}}$ da curva plana $\hat{\gamma}(u) = (u, A_3(u))$ é dada por

$$\kappa_{\hat{\gamma}}(u) = \frac{A_3''}{(1+A_3'^2)^{3/2}}(u) = \kappa_{\nu}(u),$$

conforme (5.18). Isto significa que a imagem da curva singular de $\mathcal{R}$ é dada por

$$\mathcal{R}(u, 1/\kappa_{\nu}(u)) = \hat{\gamma}(u) + \frac{1}{\kappa_{\hat{\gamma}}(u)}n(u),$$

ou seja, coincide com a evoluta de $\hat{\gamma}$, como uma curva plana.

Exemplo 5.4.15. Como ilustração do exemplo anterior, seja $c_2(u) = 0$, $a_3(u) = u^2$, $c_4(u) = 0$ e $c_5(u) = 1$. A superfície f está representada na Figura 5.3 (esquerda, em azul), juntamente com a superfície regrada normal ao longo de $\hat{\gamma}$ (esquerda, em laranja e direita), onde a malha apresentada são as curvas paralelas a $\hat{\gamma}$ (dada em vermelho) e sua evoluta está em azul, representa a imagem dos pontos singulares de $\mathcal{R}$.

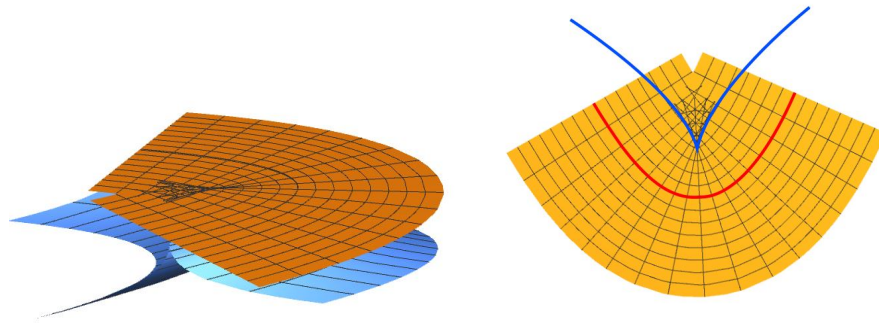


Figura 5.3: A superfície do Exemplo 5.4.15

5.4.2 Singularidades de FC_i

Sabemos que ambas as curvaturas principais de uma frontal pura são limitadas e possuem seus vetores principais paralelos entre si. Por esse motivo e pela Proposição 5.3.4, todos os resultados que mostraremos aqui valem simultaneamente para FC_1 e FC_2 . Denotaremos FC_1 , κ_1 e V_1 apenas por FC , κ e V , respectivamente.

A superfície FC é, sob uma certa condição, uma frontal, como segue no resultado abaixo:

Proposição 5.4.16. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ uma frontal pura na origem com $\kappa_t \neq 0$. Então a superfície focal FC é uma frontal.*

Demonstração: Suponha f em um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado. De (5.8) e $f_v = v h$, temos

$$Vf = v \left(-(\tilde{M} - \kappa \tilde{F})f_u + (\tilde{L} - \kappa \tilde{E})h \right).$$

Por $FC = f + \frac{\nu}{\kappa}$ e (5.4), temos

$$FC_u = \left(1 + \frac{\tilde{F}\tilde{M} - \tilde{L}\tilde{G}}{\kappa(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} \right) f_u + \frac{\tilde{F}\tilde{L} - \tilde{E}\tilde{M}}{\kappa(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} h - \frac{\kappa_u}{\kappa^2} \nu \quad \text{e} \quad (5.20)$$

e

$$FC_v = v \left(\frac{\tilde{F}N_1 - \tilde{G}\tilde{M}}{\kappa(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} \right) f_u + v \left(1 + \frac{(\tilde{F}\tilde{M} - \tilde{E}N_1)}{\kappa(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} \right) h - \frac{\kappa_v}{\kappa^2} \nu. \quad (5.21)$$

Seja $\mathbf{x} = (\kappa \tilde{F} - \tilde{M})f_u + (\tilde{L} - \kappa \tilde{E})h$. Cálculos diretos mostram que $\langle FC_u, \mathbf{x} \rangle = 0$ e $\langle FC_v, \mathbf{x} \rangle = 0$, onde na segunda igualdade, utilizamos a identidade $\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$, com K e H dados em (5.6). Por (5.3), $\tilde{F}(\mathbf{0}) = 0$, $\tilde{E}(\mathbf{0}) = 1$ e $\kappa_t \neq 0$, temos $\mathbf{x} = -\kappa_t f_u + (\kappa_v - \kappa)h \neq \mathbf{0}$ e, portanto, $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ é um campo vetorial unitário de vetores normais à FC . Logo, segue o resultado. $\square$

No que segue, suporemos que a torção cuspidal κ_t de f não se anula, uma vez que, com isso, conseguimos obter um campo de vetores principais não nulo (ver Seção 5.3) e também garantir que FC é uma frontal. Além disso, denotaremos o campo normal unitário de vetores por $\mathbf{e}$, isto é $\mathbf{e} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

Sabemos pela teoria clássica da geometria diferencial que os campos normais a uma superfície regular e à sua superfície focal são ortogonais entre si, o que implica que o plano tangente da superfície é perpendicular ao plano tangente limitante de sua superfície focal. O seguinte lema demonstra um resultado análogo para frontais puras e seu conjunto focal.

Lema 5.4.17. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem. O plano tangente limitante de f em $f(\mathbf{0})$ é perpendicular ao plano tangente limitante de FC em $FC(\mathbf{0})$.*

Demonstração: Basta observar que o campo normal $\mathbf{e}$ a FC é ortogonal a ν , uma vez que f_u e a h são vetores perpendiculares a ν . $\square$

Uma vez provado que FC é uma frontal, provaremos que FC não é uma frente de onda em $\mathbf{0}$. Para isso, considere o seguinte resultado:

Proposição 5.4.18. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem com $\kappa_t \neq 0$. Se $\mathbf{0}$ é um ponto singular de FC , então FC é uma frontal, mas não uma frente em $\mathbf{0}$.*

Demonstração: Suponhamos que f está em sua forma normal dada em (5.1). Pela Proposição 5.4.16, FC é uma frontal. Vamos mostrar que a aplicação $(FC, \mathbf{e})$ não é uma imersão. Para isso, mostraremos que $FC_v = \mathbf{e}_v = \mathbf{0}$ na origem.

Por (5.3) e (5.20), temos $FC_u(\mathbf{0}) = \left(\frac{\kappa - \kappa_v}{\kappa} f_u - \frac{\kappa_t}{\kappa} h - \frac{\kappa_u}{\kappa^2} \nu \right)(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ e, como a origem é um ponto singular de FC , então $FC_v(\mathbf{0}) = -\frac{\kappa_v}{\kappa^2}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Pela demonstração da Proposição 5.3.4, temos $\tilde{E}_v(\mathbf{0}) = \tilde{F}_v(\mathbf{0}) = \tilde{L}_v(\mathbf{0}) = \tilde{M}_v(\mathbf{0}) = 0$ e, consequentemente, $\mathbf{x}_v(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Logo, como $\mathbf{e} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, concluímos que $\mathbf{e}_v(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Logo, $(FC, \mathbf{e})$ não é imersão em $\mathbf{0}$ e, portanto, FC não é frente em $\mathbf{0}$. $\square$

Vamos agora estudar as singularidades de FC . Para isso, a partir de (5.4), definimos as funções X_i , Y_i pelas equações $\nu_u = X_1 f_u + X_2 h$ e $\nu_v = v(Y_1 f_u + Y_2 h)$. Seja $\frac{1}{\kappa} = \rho$. Assim, temos:

$$FC_u = (1 + \rho X_1) f_u + \rho X_2 h + \rho_u \nu = A_1 f_u + B_1 h + C_1 \nu \quad \text{e} \quad (5.22)$$

$$FC_v = v \rho Y_1 f_u + v(1 + \rho Y_2) h + \rho_v \nu = A_2 f_u + B_2 h + C_2 \nu. \quad (5.23)$$

Logo,

$$FC_u \times FC_v = (A_1 B_2 - A_2 B_1) f_u \times h + (A_1 C_2 - A_2 C_1) f_u \times \nu + (B_1 C_2 - B_2 C_1) h \times \nu.$$

Por $\mathbf{e} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ e $\mathbf{x} = (\kappa \tilde{F}_v - \tilde{M}) f_u + \tilde{L} - \kappa \tilde{E}$, temos $\det(f_u, h, \mathbf{e}) = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \det(FC_u, FC_v, \mathbf{e}) &= \langle FC_u \times FC_v, \mathbf{e} \rangle = \\ &= -\left((\tilde{L} - \kappa \tilde{E})(A_1 C_2 - A_2 C_1) + (\tilde{M} - \kappa \tilde{F})(B_1 C_2 - B_2 C_1)\right) \frac{\det(f_u, h, \nu)}{|\mathbf{x}|}. \end{aligned}$$

Por (5.4), obtemos

$$(\tilde{L} - \kappa \tilde{E})(A_1 C_2 - A_2 C_1) + (\tilde{M} - \kappa \tilde{F})(B_1 C_2 - B_2 C_1) = -(1 - \rho \kappa_2) V \rho.$$

Com isso,

$$\det(FC_u, FC_v, \mathbf{e}) = (1 - \rho \kappa_2) \det(f_u, h, \nu) V \rho. \quad (5.24)$$

Como $\kappa_t \neq 0$, pelo Teorema 5.3.1, f não contém pontos umbílicos e, portanto $\kappa_1 \neq \kappa_2$ na origem, o que implica que $(1 - \rho \kappa_2)(\mathbf{0}) \neq 0$. Logo, o conjunto singular de FC é dado pela imagem inversa do valor regular 0 da função $V \rho$.

Como $V \rho = -\frac{1}{\kappa^2} V \kappa$, o conjunto dos pontos singulares de FC coincide com os pontos de ridge de f , uma vez que V é o vetor principal de f em relação a κ em cada ponto.

Provamos assim o seguinte resultado, que é uma extensão do caso em que f é regular.

Proposição 5.4.19. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem com $\kappa_t \neq 0$ e FC sua superfície focal associada a κ . O conjunto dos pontos singulares de FC é dado por $\{p \in (\mathbb{R}^2, q); V \kappa(p) = 0\}$, onde V é o vetor principal relativo à κ , ou seja, um ponto é singular de FC se, e somente se, é ponto de ridge de f .*

O seguinte resultado é um compilado de resultados que identificam quando a origem é um ponto de ridge de f e, consequentemente, ponto singular de FC .

Proposição 5.4.20. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem dada na forma normal (5.1) com $\kappa_t \neq 0$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\mathbf{0}$ é um ponto de ridge relativo a curvatura principal κ , ou seja, $\kappa_v(u, 0) = 0$.
- (ii) $\mathbf{0}$ é um ponto singular de FC .
- (iii) $N_{vv}(\mathbf{0}) = 0$.
- (iv) $r_c(0) = 0$.
- (v) $c_5(\mathbf{0}) = 0$.
- (vi) f não é uma 5/2-cuspidal edge em $(\mathbf{0})$.

Demonstração: A equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii) está demonstrada na Proposição 5.4.19. A equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (iii) segue de (5.9). A equivalência (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) segue do Lema 5.2.2. A equivalência (iv) $\Leftrightarrow$ (v) segue do Lema 5.2.1. Por último, a equivalência (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) está mostrado em [15, Proposição 3.2]. $\square$

Exemplo 5.4.21. Seja $f(u, v) = (u, u^2 + v^2/2, u^2 + uv^2 + v^4 + v^5)$. Neste caso, $c_5(u, v) = 1$ e, pela Proposição 5.4.20, f é uma 5/2-cuspidal edge. Logo, f não contém pontos de ridge relativos a κ_1 ou a κ_2 . A Figura 5.4 mostra a superfície f (superfície mais abaixo) e suas superfícies focais. As linhas em azul são as curvas relativas ao conjunto singular de f , isto é, $FC_1(u, 0)$ e $FC_2(u, 0)$.

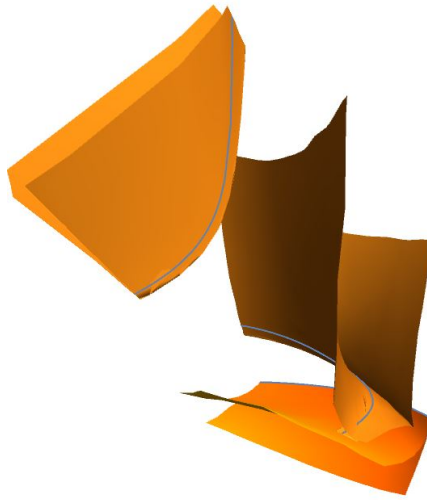


Figura 5.4: A superfície f do Exemplo 5.4.21 (superfície inferior) e suas superfícies focais.

Note que as superfícies focais deste exemplo, apesar de possuírem pontos singulares, são regulares em uma vizinhança de $FC_i(u, 0)$, $i = 1, 2$. O surgimento destes pontos singulares é resultado da existência de pontos de ridge na parte regular de f (teoria clássica).

No caso em que FC é singular, é importante encontrar um campo de vetores tal que sua restrição aos pontos singulares pertença ao núcleo da diferencial de FC . Assim, se a singularidade é não degenerada, então este campo é um campo vetorial anulador. O seguinte lema nos dá uma resposta para esta questão.

Lema 5.4.22. Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem com $\kappa_t \neq 0$ e $\mathbf{0}$ um ponto singular de FC . Então FC tem posto 1 na origem e o campo V de vetores principais a f é tal que sua restrição aos pontos singulares de FC pertence ao núcleo da diferencial de FC .

Demonstração: Note que, pelo Lema 5.3.3, temos $V\nu = -\kappa Vf$. Logo

$$V(FC) = Vf + \rho V\nu + (V\rho)\nu = (V\rho)\nu.$$

Como $V\rho = -\frac{1}{\kappa^2}V\kappa$, então pela Proposição 5.4.19 $V(FC)$ se anula nos pontos singulares de FC . $\square$

Pela Proposição 5.4.20, se f está na forma (5.1), a origem é um ponto de ridge se, e somente se, $\kappa_v(\mathbf{0})$ se anula. Veremos agora quais são as condições para que a origem seja um ponto de ridge de pelo menos segunda ordem, o que será útil no que segue.

Lema 5.4.23. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem na forma normal dada por (5.1) e a origem um ponto de ridge de f . Então a origem é um ponto de ridge de pelo menos ordem 2 de f se, e somente se, $(\kappa_\nu - \kappa)\kappa_{vv} - \kappa_t\kappa_u = 0$ ou, equivalentemente, $\kappa_t\kappa_{vv} - \left(\frac{r_b}{3} - \kappa\right)\kappa_u = 0$ na origem.*

Demonstração: Como a origem é um ponto de ridge, então $\kappa_v(\mathbf{0}) = 0$. Com isso e cálculos diretos, segue que

$$VV\kappa = (\tilde{L} - \kappa)((\tilde{L} - \kappa)\kappa_{vv} - \tilde{M}\kappa_u)$$

na origem. Por (5.10) e $\kappa_t \neq 0$, temos $(\tilde{L} - \kappa)(\mathbf{0}) \neq 0$ e, portanto, a origem é um ponto de ridge de ordem pelo menos 2 se, e somente se,

$$-(\tilde{L} - \kappa)\kappa_{vv} + \tilde{M}\kappa_u = 0. \quad (5.25)$$

Por (5.3), temos a primeira afirmação. Utilizando a identidade $\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$, onde K e H são dados em (5.6), é fácil mostrar que (5.25) é equivalente a

$$\tilde{M}\kappa_{vv} + (\kappa\tilde{G} - N_1)\kappa_u = 0, \quad (5.26)$$

de onde segue o resultado. A condição (5.26) também pode ser obtida pela identidade $\bar{V}\bar{V}\kappa = \kappa_t\left(\left(\kappa - \frac{r_b}{3}\right)\kappa_u + \kappa_t\kappa_{vv}\right)$ na origem, onde $\bar{V} = (-v(N_1 - \kappa\tilde{G}), \tilde{M} - \kappa\tilde{F})$ é também um campo de vetores principais de f não nulo na origem (basta notar que $\bar{V}(\mathbf{0}) \neq 0$ e $\det(V, \bar{V}) = 0, \forall(u, v)$). $\square$

Vamos agora encontrar condições para que a origem seja um ponto singular não degenerado de FC . Para isso, denotaremos a função densidade de área de FC por $\lambda_{FC} = \det(FC_u, FC_v, \mathbf{e})$. Suponha que a origem seja uma singularidade de f . Como $V\rho$ é um múltiplo não nulo de λ_{FC} ((5.24)), a origem é um ponto não degenerado de f se, e somente se, $((V\rho)_u, (V\rho)_v) \neq (0, 0)$. Assim, denotando $V = (V_1, V_2)$, temos $V(V\rho)(\mathbf{0}) = V_2(V\rho)_v(\mathbf{0})$, uma vez que $V_1(\mathbf{0}) = 0$. Além disso, como $Vk(\mathbf{0}) = 0$, obtemos $VV\rho = -\frac{VV\kappa}{\kappa^2}$. Logo, como $V_2(\mathbf{0}) = (\kappa_\nu - \kappa)(\mathbf{0}) \neq 0$ ((5.3)), então $(V\rho)_v$ se anula na origem se, e somente se, a origem é um ponto de ridge de ordem pelo menos 2.

Por outro lado, $(V\rho)_u$ é dada por

$$(V\rho)_u = -\frac{\kappa_\nu - \kappa}{\kappa^2}\kappa_{uv} \quad (5.27)$$

na origem, ou seja, $(V\rho)_u$ se anula se, e somente se, $\kappa_{uv}(\mathbf{0}) = 0$. De (5.9) e $\tilde{N}_{vv}(\mathbf{0}) = 0$, segue que $\kappa_{uv}(\mathbf{0})$ se, e somente se, $\tilde{N}_{uvv}(\mathbf{0}) = 0$. Agora, pelo Lema 5.2.2, segue que $r'_c(0) = 0$ se anula se, e somente se, $\tilde{N}_{uvv}(\mathbf{0}) = 0$. Logo, segue que $\kappa_{uv}(\mathbf{0}) = 0$ se, e somente se, $r'_c(0) = 0$. Com isso, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.4.24. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem. Suponha que $\mathbf{0}$ é um ponto de ridge de f . Então $\mathbf{0}$ é uma singularidade não degenerada de FC se, e somente se, $r'_c(0) \neq 0$ ou $\mathbf{0}$ é um ponto de ridge de ordem um de f .*

Utilizando os dois resultados anteriores, podemos mostrar que, se a origem de f é uma ridge de ordem pelo menos dois, então a singularidade da superfície focal, se for não degenerada, não pode ser do primeiro tipo. Mais especificamente, mostramos o seguinte resultado.

Proposição 5.4.25. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem com $\kappa_t \neq 0$, onde $\mathbf{0}$ é um ponto singular não degenerado de FC . Então $\mathbf{0}$ é um ponto de ridge de ordem 2 ou mais de f se, e somente se, é uma singularidade do segundo tipo de FC .*

Demonstração: Suponha f na forma (5.1) e que a origem é uma ridge de ordem 2 de f . Assim, de $V(V\rho)(\mathbf{0}) = V_2(V\rho)_v(\mathbf{0})$, temos que $(V\rho)_v(\mathbf{0}) = (\lambda_{FC})_v(\mathbf{0}) = 0$ e, como a origem é uma singularidade não degenerada de FC , então $(V\rho)_u \neq 0$ na origem. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, podemos parametrizar a curva singular de FC (dada pela imagem inversa de $V\rho$) por uma aplicação da forma $(g(t), t)$ e tal que $g'(t) = -\frac{(V\rho)_v}{(V\rho)_u}(g(t), t)$. Agora, como $(V\rho)_v = 0$ na origem, então $g'(0) = 0$ e o vetor tangente à curva singular de FC é o vetor $(0, 1)$, que é paralelo ao campo vetorial anulador de FC na origem (ver Lema 5.4.22)), ou seja, a origem é uma singularidade do segundo tipo.

Por outro lado, se a origem é ridge de ordem um, então $(\lambda_{FC})_v \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, podemos parametrizar o conjunto singular de FC por $(t, g(t))$, com $g(t)$ uma função suave. Logo, como $\eta_{FC} = \partial v$ e $(t, g(t))'$ não pode ser paralelo a $(0, 1)$ na origem, então a origem é uma singularidade do primeiro tipo de FC . $\square$

Pela proposição acima, se a origem é um ponto de ridge de ordem dois de f , a superfície focal de f não pode ser uma 5/2-cuspidal edge ou uma cuspidal cross cap na origem, uma vez que esses são exemplos de singularidades não degeneradas do primeiro tipo. O próximo resultado revela condições para que FC seja uma singularidade cuspidal cross cap.

Teorema 5.4.26. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem e suponha que $\mathbf{0}$ seja um ponto de ridge de ordem um de f e um ponto singular do primeiro tipo de FC . Então FC tem uma singularidade cuspidal cross cap em $\mathbf{0}$ se, e somente se, $r'_c(0) \neq 0$ e*

$$\hat{\rho}' \left(\kappa_t^2 \kappa'_\nu + 2\kappa_t \kappa'_t (\kappa - \kappa_\nu) + 2r'_b (\kappa - \kappa_\nu)^2 \right) \neq (\kappa_t^2 + (\kappa - \kappa_\nu)^2) (\kappa - \kappa_2) (\kappa_\nu - \kappa),$$

em 0, onde $\hat{\rho} = \rho_j \circ \beta$ e β é a curva singular de FC .

Demonstração: Suporemos f na forma normal (5.1). Como 0 é uma singularidade do primeiro tipo de FC , então $\beta(t)$ pode ser representada por $\beta(t) = (t, g(t))$, com $g(0) = 0$. Com as notações usadas até agora, pelo Teorema 2.2.13, FC é uma cuspidal cross cap se, e somente se, $\psi_{FC}(0) = 0$ and $\psi'_{FC}(0) \neq 0$, onde

$$\psi_{FC}(t) = \det(\hat{\beta}'(t), \hat{\mathbf{e}}(t), d\mathbf{e}_{\beta(t)}(V(\beta(t)))),$$

$\hat{\beta}(t) = FC(\beta(t))$, $\hat{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{e}(\beta(t))$ e V é um campo vetorial anulador de FC . Como $d\mathbf{e}_0(V)(\mathbf{0}) = 0$, segue direto que $\psi_{FC}(0) = 0$ e $\psi'_{FC}(0) = \det(\hat{\beta}'(0), \hat{\mathbf{e}}(0), \alpha'(0))$, com $\alpha(t) = d\mathbf{e}_{\beta(t)}(V(\beta(t)))$. Vamos agora calcular $\psi'_{FC}(0)$. Consideremos primeiramente o termo $\hat{\beta}' \times \hat{\mathbf{e}}$ na origem. Sabemos que

$$\hat{\beta}' = FC_u + FC_v g'(t)$$

e, portanto, $\hat{\beta}'(0) = FC_u(\mathbf{0})$, já que $FC_v = 0$ na origem. Por (5.4) e (5.3), temos

$$FC_u = (1 - \kappa_\nu \rho) f_u - \rho \kappa_t h + \rho_u \nu = \rho ((\kappa - \kappa_\nu) f_u - \kappa_t h) + \rho_u \nu$$

na origem. Além disso, $\hat{\mathbf{e}}$ pode ser descrito na origem por

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{-\kappa_t f_u + (\kappa_\nu - \kappa) h}{\Delta},$$

onde $\Delta = \sqrt{\kappa_t^2 + (\kappa - \kappa_\nu)^2}$. Logo, temos

$$\hat{\beta}' \times \hat{\mathbf{e}} = -\frac{1}{\Delta} \left(\rho_u ((\kappa_\nu - \kappa) f_u + \kappa_t h) + \rho \Delta^2 \nu \right)$$

na origem.

Só resta agora encontrar $\alpha'(0)$. Como $\alpha(t)$ pode ser escrita por

$$\alpha(t) = V_1(\beta(t)) \mathbf{e}_u(\beta(t)) + V_2(\beta(t)) \mathbf{e}_v(\beta(t)),$$

onde denotamos $V = (V_1, V_2)$, temos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) = & ((V_1)_u + (V_1)_v g'(t)) \mathbf{e}_u(\beta(t)) + V_1(\mathbf{e}_{uu}(\beta(t)) + \mathbf{e}_{uv}(\beta(t)) g'(t)) \\ & + ((V_2)_u + (V_2)_v g'(t)) \mathbf{e}_v(\beta(t)) + V_2(\beta(t)) (\mathbf{e}_{uv}(\beta(t)) + \mathbf{e}_{vv} g'(t)). \end{aligned}$$

Agora, como $V_1, (V_1)_u$ e $\mathbf{e}_v$ se anulam na origem, segue que

$$\alpha' = g' ((V_1)_v (\mathbf{e}_3)_u + V_2(\mathbf{e}_1)_{vv}) + V_2(\mathbf{e}_1)_{uv} \quad (5.28)$$

na origem.

De $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ e $\mathbf{x}_v(\mathbf{0}) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u &= \frac{\mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}|} - \mathbf{e} \frac{(|\mathbf{x}|)_u}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{e}_v = 0, \\ \mathbf{e}_{uv} &= \mathbf{e}_{vu} = \frac{\mathbf{x}_{vu}}{|\mathbf{x}|} - \mathbf{e} \left(\frac{(|\mathbf{x}|)_v}{|\mathbf{x}|} \right)_u \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_{vv} &= \frac{\mathbf{x}_{vv}}{|\mathbf{x}|} - \mathbf{e} \left(\frac{(|\mathbf{x}|)_v}{|\mathbf{x}|} \right)_v \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.2.1, temos $2c_2'' = \kappa_t' + \kappa_s \kappa_\nu$ e $\kappa_\nu' = 6a_3' - \kappa_s \kappa_t$ na origem. Por cálculos diretos, usando a forma normal (5.1), temos $\tilde{M}_u = 2c_2''$ e $\tilde{L}_u = 6a_3'$ na origem. Logo, $\tilde{M}_u = \kappa_t' + \kappa_s \kappa_\nu$ e $\tilde{L}_u = 6a_3' - \kappa_s \kappa_t$ na origem. Além disso, por (5.1), temos $f_{uu} = \kappa_s h + \kappa_t \nu$ e $h_u = \kappa_t \nu$ na origem. Logo,

$$\mathbf{x}_u = -(\kappa_t' + \kappa_s(\kappa_\nu - \kappa)) f_u + ((\kappa_\nu' - \kappa_u) - \kappa_s \kappa_t) h - \kappa \kappa_t \nu$$

na origem. Logo, na origem,

$$\det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_u) = \frac{1}{\Delta^2} \left(\rho_u \left(\kappa_s \Delta^2 + \kappa_t' (\kappa_\nu - \kappa) + \kappa_t (\kappa_u - \kappa_\nu') \right) + \kappa_t \Delta^2 \right). \quad (5.29)$$

Prosseguindo, como $\tilde{E}_v, \tilde{F}_v, \tilde{G}_v, \tilde{L}_v$ e $\tilde{M}_v$ se anulam sobre o eixo- u (ver demonstração da Proposição 5.3.4), então $\tilde{E}_{uv}, \tilde{F}_{uv}, \tilde{G}_{uv}, \tilde{L}_{uv}$ e $\tilde{M}_{uv}$ também se anulam sobre o eixo- u . Com isso e $f_{uv}(\mathbf{0}) = 0$, obtemos que

$$\mathbf{x}_{uv} = -\kappa_{uv} h$$

na origem e, portanto,

$$\det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{x}_{uv}) = \frac{\rho_u \kappa_t \kappa_{uv}}{\Delta}$$

na origem. Logo, por (5.9) e pelo Lema 5.2.2, temos

$$\kappa_v(u, 0) = \frac{(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)^{1/4} r_c (\tilde{L} - \kappa \tilde{E})}{48\sqrt{\Gamma}}(u, 0).$$

Assim, como $r_c(0) = 0$, segue que $\kappa_{uv} = \frac{r'_c(\kappa_\nu - \kappa)}{48\sqrt{\Gamma}}$ na origem.

Com isso, temos

$$\det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{uv}) = \frac{\rho_u \kappa_t r'_c(\kappa - \kappa_\nu)}{48\Delta^2\sqrt{\Gamma}} \quad (5.30)$$

na origem.

Consideraremos agora o vetor $\mathbf{x}_{vv}$. Usando $\tilde{F} = \tilde{F}_v = \tilde{L}_v = \tilde{E}_v = \kappa_v = h_v = h_{vv} = f_{uv} = 0$, e $\tilde{G} = \tilde{E} = 1$ na origem, obtemos que

$$\mathbf{x}_{vv} = -(\tilde{M}_{vv} - \kappa\tilde{F}_{vv})f_u - \tilde{M}f_{uvv} + (\tilde{L}_{vv} - \kappa_{vv} - \kappa\tilde{E}_{vv})h + (\kappa_\nu - \kappa)h_{vv}. \quad (5.31)$$

na origem. Por $f_v = vh$, (5.1) e o Lema 5.2.1, segue que $f_{uvv} = h_u = \kappa_t\nu$ na origem e $h_{vv} = \frac{r_b}{3}\nu$. Logo, $\tilde{F}_{vv} = \tilde{E}_{vv} = 0$ na origem. Para o que segue, precisaremos do seguinte lema:

Lema 5.4.27. *Sob o contexto acima, as seguintes identidades são válidas na origem:*

$$\tilde{L}_{vv} = \kappa'_t - \kappa_s \left(-\kappa_\nu + \frac{r_b}{3} \right), \quad \tilde{M}_{vv} = 2\kappa_s\kappa_t + \frac{r'_b}{3}.$$

Demonstração: Pelas definições de $\tilde{L}$ e $\tilde{M}$ e como $f_{uv} = \nu_{uv} = h_v = h_{vv} = 0$ na origem, temos

$$\tilde{L}_{vv} = -\langle f_{uvv}, \nu_u \rangle - \langle f_u, \nu_{uvv} \rangle \quad \text{e} \quad \tilde{M}_{vv} = -\langle h, \nu_{uvv} \rangle$$

na origem. Por (5.1) e o Lema 5.2.1, $f_{uvv} = \kappa_t\nu$, que é ortogonal a ν_u . Logo, $\tilde{L}_{vv} = -\langle f_u, \nu_{uvv} \rangle$. Por outro lado, como $\nu = \frac{\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}$ com $\bar{\nu} = f_u \times h$ e $\bar{\nu}(\mathbf{0}) = 0$, segue que

$$\nu_{uvv} = \frac{\bar{\nu}_{uvv}}{|\bar{\nu}|} - \frac{\bar{\nu} \langle \bar{\nu}, \bar{\nu}_{vvv} \rangle}{|\bar{\nu}|^3}.$$

Agora, por (5.1) e cálculos diretos, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nu} = & (-2ua_3(u) + 4ua_2c_2 + 8uv^2a_2c_4 + 10uv^3a_2c_5 + 2uv^4(c_5)_v - v^2c'_2 - v^4c'_4 - v^5(c_5)_u, \\ & -2c_2(u) - v^2(4c_4 + v(5c_5 + v(c_5)_v), 1). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Isso implica que

$$\bar{\nu}_{uvv} = \left(-\kappa_\nu\kappa_s - \kappa'_t + \frac{\kappa_sr_b}{6}, -2\kappa_s\kappa_t - \frac{r'_b}{3}, 0 \right) \quad \text{e} \quad \bar{\nu}_{vvv} = 0$$

na origem, onde usamos as identidades $2c''_2 = \kappa_s\kappa_\nu + \kappa'_t$, $2a_2(0) = \kappa_s$ e $24c_4 = r_b$ (ver Lema 5.2.1). Por fim, notando que $f_u(\mathbf{0}) = (1, 0, 0)$, $h(\mathbf{0}) = (0, 1, 0)$, e $\nu(\mathbf{0}) = (0, 0, 1)$, o resultado segue. $\square$

Continuando os cálculos, pelo Lema 5.4.27, o vetor $\mathbf{x}_{vv}$ descrito em (5.31) é dado na origem por

$$\mathbf{x}_{vv} = \left(-\frac{r'_b}{3} - 2\kappa_s\kappa_t \right) f_u + \left(\kappa'_t - \kappa_s \left(\frac{r_b}{3} - \kappa_\nu \right) - \kappa_{vv} \right) h + \left(\frac{r_b}{3}(\kappa_\nu - \kappa) - \kappa_t^2 \right) \nu.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} -\Delta \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{x}_{vv}) &= -\Delta \langle \hat{\beta}' \times \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{x}_{vv} \rangle \\ &= \rho_u \left(\kappa \left(2\kappa_s \kappa_t + \frac{r'_b}{3} \right) - \frac{\kappa_\nu r'_b}{3} - \kappa_t \left(-\kappa'_t + \kappa_s \left(\kappa_\nu + \frac{r_b}{3} + \kappa_{vv} \right) \right) \right) \\ &\quad + \rho \Delta^2 \left(\frac{r_b}{3} (\kappa_\nu - \kappa) - \kappa_t^2 \right) \end{aligned}$$

na origem e, portanto,

$$\begin{aligned} -\Delta^2 \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{vv}) &= \rho_u \left(\kappa \left(2\kappa_s \kappa_t + \frac{r'_b}{3} \right) - \frac{\kappa_\nu r'_b}{3} - \kappa_t \left(-\kappa'_t + \kappa_s \left(\kappa_\nu + \frac{r_b}{3} + \kappa_{vv} \right) \right) \right) \\ &\quad + \rho \Delta^2 \left(\frac{r_b}{3} (\kappa_\nu - \kappa) - \kappa_t^2 \right) \end{aligned}$$

na origem. Por essa equação e (5.29), temos

$$\begin{aligned} g' \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, (V_1)_v \mathbf{e}_u + V_2 \mathbf{e}_{vv}) &= g'((V_1)_v \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_u) + V_2 \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{vv})) \\ &= g'(-\kappa_t \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_u) + (\kappa_\nu - \kappa) \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{vv})) \\ &= \frac{g'}{\Delta^2} (\rho_u A_1 + \rho \Delta^2 A_2) \end{aligned} \tag{5.33}$$

na origem, onde

$$\begin{aligned} A_1 &= -\kappa_t (V\rho)_v \kappa^2 + \kappa_s \kappa_t A_3 + \frac{r'_b}{3} (\kappa - \kappa_\nu)^2 + \kappa_t^2 \kappa'_\nu + 2\kappa_t \kappa'_t (\kappa - \kappa_\nu), \\ A_2 &= \kappa_t^2 (\kappa_\nu - 2\kappa) - (\kappa - \kappa_\nu)^2 \frac{r_b}{3} \quad \text{e} \quad A_3 = -\Delta^2 - (\kappa_\nu - \kappa) \left(2\kappa - \kappa_\nu - \frac{r_b}{3} \right), \end{aligned}$$

onde usamos a identidade $(V\rho)_v \kappa_1^2 = (\kappa_{vv}(\kappa - \kappa_\nu) + \kappa_t \kappa_u)$ na origem. Note que podemos reescrever A_2 e A_3 por

$$A_2 = \left(\frac{\kappa_\nu r_b}{3} - \kappa_t^2 \right) (2\kappa - \kappa_\nu) - \frac{\kappa^2 r_b}{3} \quad \text{e} \quad A_3 = \kappa \left((\kappa - \kappa_\nu) - \frac{r_b}{3} \right) - \kappa_t^2 + \frac{r_b \kappa_\nu}{3}.$$

Agora, usando as identidades $\kappa_\nu + \frac{r_b}{3} = 2H = \kappa + \kappa_2$ e $-\kappa_t^2 + \frac{r_b \kappa_\nu}{3} = K = \kappa \kappa_2$ na origem, dadas em (5.7), podemos concluir que $A_3 = 0$ e $A_2 = \kappa(\kappa - \kappa_2)(\kappa_\nu - \kappa)$ na origem.

Por outro lado, como $\mathbf{x}_{uv} = -\kappa_{uv} h$ na origem, temos que

$$V_{12} \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{uv}) = -\frac{\rho_u \kappa_t r'_c (\kappa - \kappa_\nu)^2}{48 \Delta^2 \sqrt{\Gamma}}$$

na origem. De

$$(V\rho)_u = \frac{r'_c (\kappa - \kappa_\nu)^2}{48 \kappa^2 \sqrt{\Gamma}}$$

na origem e $g'(0) = -\frac{(V\rho)_u}{(V\rho)_v}(\mathbf{0})$, segue que

$$-\frac{g' \rho_u \kappa_t (V\rho)_v \kappa^2}{\Delta^2} = \frac{(V\rho)_u (\rho_1)_u \kappa_t \kappa^2}{\Delta^2} = -V_2 \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{uv})$$

na origem. Logo,

$$\begin{aligned}\psi'_{FC} &= \det(\hat{\beta}', \hat{\mathbf{e}}, \alpha') \\ &= \frac{g'(0)}{\Delta^2} \left(\rho_u \left(\kappa_t^2 \kappa'_\nu + 2\kappa_t \kappa'_t (\kappa - \kappa_\nu) + \frac{r'_b}{3} (\kappa - \kappa_\nu)^2 \right) + \Delta^2 (\kappa - \kappa_2) (\kappa_\nu - \kappa) \right)\end{aligned}$$

na origem, por (5.28), (5.30) and (5.33). Por fim, note que $\hat{\rho}' = \rho_u + \rho_v g'$, ou seja, $\hat{\rho} = \rho_u$ em 0. Por fim, por construção, $g'(0) = 0$ se, e somente se, $(V\rho)_u(\mathbf{0}) = 0$. De (5.27) e as afirmações abaixo desta equação, $(V\rho)_u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ se, e somente se, $r'_c(0) = 0$. Logo o resultado segue do Teorema 2.2.13. $\square$

O próximo teorema mostra condições para que FC seja também uma frontal pura.

Teorema 5.4.28. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma frontal pura na origem. Suponha que r_c se anule identicamente sobre a curva singular γ de f e que $\mathbf{0}$ seja um ponto de ridge de primeira ordem de f . Então FC é uma frontal pura na origem.*

Demonstração: Suponha f em sua forma normal (5.1). Por $r_c(u, 0) = 0$ e pela Proposição 5.4.20 $\kappa_v(u, 0) = 0, \forall u$. Com isso, por (5.21), o eixo- u é também a curva singular de FC . Como $\tilde{E}_v, \tilde{F}_v, \tilde{G}_v, \tilde{L}_v$ e $\tilde{M}_v$ se anulam sobre o eixo- u , podemos concluir que $\mathbf{x}_v$ também se anula. Assim, como $\mathbf{e} = \mathbf{e}/|\mathbf{e}|$, $\mathbf{e}_v$ se anula sobre o eixo- u . Logo $V\mathbf{e}$ se anula sobre o eixo- u , e consequentemente, ψ_{FC} também se anula. Portanto, FC é uma frontal pura. $\square$

5.4.3 Curvaturas de FC para 5/2-cuspidal edges

Pela Proposição 5.4.20, quando uma frontal pura tem uma 5/2-cuspidal edge na origem, suas superfícies focais FC_j ($j = 1, 2$) são regulares na origem. Logo, podemos considerar suas curvaturas Gaussiana K^{FC} e média H^{FC} . Para a curvatura Gaussiana, considere o seguinte resultado.

Teorema 5.4.29. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma 5/2-cuspidal edge com $\kappa_t \neq 0$. Então a curvatura Gaussiana K^{FC} de FC é estritamente negativa e dada por*

$$K^{FC} = -\frac{\kappa_t^2 \kappa^4}{(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2)^2},$$

onde κ é a curvatura principal de f .

Demonstração: Supomos que f esteja em um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado. Assim, por (5.3) e (5.20), temos,

$$FC_u = \rho(\kappa - \kappa_\nu)f_u - \rho\kappa_t h + \rho_u \nu \text{ e } FC_v = \rho_v \nu \quad (5.34)$$

na origem e, portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental de FC são dados por

$$E^{FC} = \rho_j^2((\kappa_\nu - \kappa)^2 + \kappa_t^2) + \rho_u^2, \quad F^{FC} = \rho_u \rho_v, \quad G^{FC} = \rho_v^2$$

na origem. Com isso, obtemos

$$E^{FC}G^{FC} - (F^{FC})^2 = \rho_v^2 \rho^2((\kappa_\nu - \kappa)^2 + \kappa_t^2) \quad (5.35)$$

na origem. Vamos agora investigar os coeficientes da segunda forma fundamental de FC . De $\mathbf{x} = -(\tilde{M} - \kappa_i \tilde{F})f_u + (\tilde{L} - \kappa \tilde{E})h$, $f_{uv}(\mathbf{0}) = \tilde{L}_v(\mathbf{0}) = \tilde{E}_v(\mathbf{0}) = 0$, temos $\mathbf{x}_v(\mathbf{0}) = (\kappa_\nu \tilde{F}_v - \tilde{M}_v)f_u + ((\kappa_\nu - \kappa)\tilde{G}_v/2 - \kappa_\nu)h$. Agora, como $\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}|} - \frac{\mathbf{x}\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}_v\rangle}{|\mathbf{x}|^3}$, $FC_v(\mathbf{0}) = \rho_v(\mathbf{0})\nu(\mathbf{0})$ e $\mathbf{x}$ é normal a FC , segue que $\langle FC_v, \mathbf{e}_v \rangle = 0$ na origem. Logo, $N^{C_j} = -\langle FC_v, \mathbf{e}_v \rangle$ se anula na origem. Isso implica que a curvatura Gaussiana $K^{FC} = \frac{L^{FC}N^{FC} - (M^{FC})^2}{E^{FC}G^{FC} - (F^{FC})^2}$ é não positiva na origem. Para obtermos uma representação explícita para K^{FC} , precisamos calcular $M^{FC} = -\langle FC_v, \mathbf{e}_u \rangle$. Como $\mathbf{e} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ e $\mathbf{x} \perp FC_v$, temos $\langle FC_v, \mathbf{e}_u \rangle = \langle FC_v, \mathbf{x}_u \rangle |\mathbf{x}|^{-1}$. Note que, como f está em um sistema de coordenadas adaptado, $\tilde{E}$ e $\tilde{F}$ são constantes sobre o eixo- u e, portanto, suas derivadas em relação a u se anulam sobre o eixo- u . Além disso, pelo Lema 5.2.2, temos $\kappa'_\nu(u) = \tilde{L}_u(u, 0)$ e $\kappa'_t(u) = \tilde{M}_u(u, 0)$. Assim,

$$\mathbf{x}_u = -\kappa'_t f_u - \kappa_t f_{uu} + (\kappa'_\nu - \kappa_u)h + (\kappa_\nu - \kappa)h_u,$$

sobre o eixo- u . Por (5.12), podemos escrever $f_{uu} = \kappa_s h + \kappa_\nu \nu$ e $h_u = -\kappa_s f_u + \kappa_t \nu$ sobre o eixo- u . Portanto,

$$\mathbf{x}_u = -(\kappa'_t + \kappa_s(\kappa_\nu - \kappa))f_u + (\kappa'_\nu - \kappa_u - \kappa_s \kappa_t)h - \kappa_t \kappa \nu$$

na origem. Com isso, temos

$$M^{FC} = -\langle FC_v, \mathbf{e}_u \rangle = \frac{\rho_v \kappa_t \kappa}{\sqrt{\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2}} (\neq 0) \quad (5.36)$$

na origem. A curvatura Gaussiana é dada então por

$$K^{FC} = -\frac{(M^{FC})^2}{E^{FC}G^{FC} - (F^{FC})^2} = -\frac{\kappa_t^2 \kappa^2}{\rho^2(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2)^2} = -\frac{\kappa_t^2 \kappa^4}{(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2)^2}$$

na origem. □

O teorema acima implica que, localmente, a superfície focal de uma 5/2-cuspidal edge é formada por pontos hiperbólicos quando κ_t não se anula na superfície inicial.

Para a curvatura média da superfície focal de uma 5/2-cuspidal edge, considere a seguinte proposição:

Proposição 5.4.30. *A curvatura média H^{FC} da superfície focal FC de uma 5/2-cuspidal edge na origem pode ser representada por*

$$H^{FCj} = -\frac{\kappa(\kappa_s(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2) - \kappa'_t(\kappa_\nu - \kappa) - \kappa_t \kappa'_\nu)}{2(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2)^{3/2}}$$

na origem.

Demonstração: Seja (u, v) um sistema de coordenadas ortogonalmente adaptado de f . Pela prova do Teorema 5.4.29, temos

$$\begin{aligned} L^{FC}|\mathbf{x}| &= -\langle FC_u, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= -\rho \left(\kappa_s(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2) + \kappa'_t(\kappa - \kappa_\nu) - \kappa_t(\kappa'_\nu - \kappa_u) \right) + \kappa_t \kappa \rho_u \end{aligned} \quad (5.37)$$

na origem. Como $N^{FC} = 0$ na origem, temos

$$\begin{aligned} & E^{FC} N^{FC} - 2F^{FC} M^{FC} + G^{FC} L^{FC} \\ &= -2F^{FC} M^{FC} + G^{FC} L^{FC} \\ &= -\frac{\rho_v^2 (\rho(\kappa_s(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2) - \kappa'_t(\kappa_\nu - \kappa) - \kappa_t(\kappa'_\nu - \kappa_u) - \rho_u \kappa \kappa_t))}{\sqrt{\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2}} \\ &= -\frac{\rho_v^2 (\rho(\kappa_s(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2) - \kappa'_t(\kappa_\nu - \kappa) - \kappa_t \kappa'_\nu))}{\sqrt{\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa)^2}} \end{aligned}$$

na origem, onde usamos a identidade $\rho_u \kappa = -\kappa_u \rho$. Por (5.35) e a expressão acima, segue o resultado. $\square$

Exemplo 5.4.31. *Seja $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ o germe de aplicação dado por*

$$f(u, v) = \left(u, u^2 + \frac{v^2}{2}, uv^2 + \frac{v^5}{5} \right).$$

A curva singular de f é dada por $S(f) = \{v = 0\}$ e f tem uma singularidade $5/2$ -cuspidal edge em $\mathbf{0}$, basta notar que f está na forma normal (5.1), com $c_5(u, v) = 1/5$. Podemos tomar o campo unitário ν de vetores normais a f como

$$\nu(u, v) = \frac{(2u(2u + v^3) - v^2, -2u - v^3, 1)}{\sqrt{1 + (2u + v^3)^2 + (v^2 - 2u(2u + v^3))^2}}.$$

Pelo Lema 5.2.1, temos $\kappa_s = 2$, $\kappa_\nu = 0$, $\kappa_t = 2 \neq 0$, $r_b = 0$ e $r_c = 72$ em $\mathbf{0}$. Logo, pela Proposição 5.3.2 e $\kappa_t \neq 0$, as curvaturas principais κ_1, κ_2 assumem diferentes valores em $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ não é ponto umbílico). Mais precisamente, $\kappa_1 = 2$ e $\kappa_2 = -2$ em $\mathbf{0}$. Consideremos as curvaturas Gaussiana e média de FC_1 e FC_2 . Por cálculos diretos, temos

$$K^{FC_1} = K^{FC_2} = -1 < 0$$

em $\mathbf{0}$. Por outro lado,

$$-\frac{\kappa_t^2 \kappa_j^4}{(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa_j)^2)^2} = -1$$

em $\mathbf{0}$, para $j = 1, 2$. Esse raciocínio confere com o Teorema 5.4.29. Além disso,

$$H^{FC_1} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad H^{FC_2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

em $\mathbf{0}$ e, como $\kappa'_t = 0$ e $\kappa'_\nu = -4$ em $\mathbf{0}$, obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa_1(\kappa_s(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa_1)^2) - \kappa'_t(\kappa_\nu - \kappa_1) - \kappa_t \kappa'_\nu)}{2(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa_1)^2)^{3/2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}, \\ & -\frac{\kappa_2(\kappa_s(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa_2)^2) - \kappa'_t(\kappa_\nu - \kappa_2) - \kappa_t \kappa'_\nu)}{2(\kappa_t^2 + (\kappa_\nu - \kappa_2)^2)^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

em $\mathbf{0}$, o que confere com o dado na Proposição 5.4.30.

- [1] ARNOLD, V. I. *Singularities of caustic and wave fronts*, Springer, 1991.
- [2] ABBENA, E.; SALAMON, S. *Modern differential geometry of curves and surfaces*, 3. ed. CRC Press, 2006.
- [3] BÍBLIA. Bíblia Sagrada. Almeida Revista e Atualizada, 2^a Ed. Barueri: Sociedade bíblica do Brasil, 1993.
- [4] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. *Generic curves and surfaces*, J. London Math Soc, 1981.
- [5] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J.; TARI, F. Families of surfaces: height functions, Gauss maps and duals. *Pitman Research Notes in Mathematics*, v.333, p. 148–178, 1995.
- [6] BRUCE, J. W.; WILKINSON, T. C. Folding maps and focal sets, *Springer, Berlin*, v.1462, p. 63–72, 1991.
- [7] CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [8] CHEN, X. Y.; MATUMOTO, T. On generic 1-parameter families of C^∞ -maps of an n -manifold into a $(2n - 1)$ -manifold, *Hiroshima Mathematical Journal*, v. 14-3, p. 547–550, 1985.
- [9] FUJIMORI, S.; SAJI, K.; UMEHARA M.; YAMADA, K. Singularities of maximal surfaces, *Mathematische Zeitschrift*, v. 259, p. 827–848, 2008.
- [10] FUKUI, T. Local differential geometry of singular curves with finite multiplicities, *Saitama Mathematical Journal*, v. 31, p. 79–88, 2017.
- [11] GULLSTRAND, A. Zur kenntnis der kreispunkte. *Acta Mathematica*, v. 29, p. 59–100, 1904.
- [12] HASEGAWA, M. Parabolic, ridge and sub-parabolic curves on implicit surfaces with singularities, *Osaka Journal of Mathematics*, v. 54-4, p. 707–721, 2017.
- [13] HASEGAWA, M.; HONDA, A.; NAOKAWA, K.; SAJI, K.; MASAOKI, U.; YAMADA, K. Intrinsic properties of surfaces with singularities, *International Journal of Mathematics*, v. 26, 2014.

-
- [14] HONDA, A.; KOISO, M.; SAJI, K. Fold singularities on spacelike CMC surfaces in Lorentz-Minkowski space, *Hokkaido Mathematical Journal*, v. 47.
 - [15] HONDA, A.; SAJI, K. Geometric invariants of $5/2$ -cuspidal edges, *Kodai Mathematical Journal*, v. 42, p. 496–525, 2017.
 - [16] ISHIKAWA, G. Determinacy of the envelope of the osculating hyperplanes to a curve, *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 25-6, p. 603–610, 1993.
 - [17] ISHIKAWA, G. Singularities of frontals, *Adv. Stud. Pure Math.*, v. 78, p. 55–106, 2018.
 - [18] IZUMIYA, S.; ROMERO FUSTER, M. C; RUAS M. A. S.; TARI, F. *Differential geometry from a singularity theory viewpoint*. 1. ed. Singapura: World Scientific, 2016.
 - [19] IZUMIYA, S.; SAKI, K.; TAKEUCHI, N. Flat surfaces along cuspidal edges, *Journal of singularities*, v.16 p. 73–100, 2017.
 - [20] IZUMIYA, S.; TAKEUCHI, N. Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 130-1, p. 1–11, 2001.
 - [21] KOKUBU, M.; ROSSMAN, W; SAJI, K; UMEHARA, M; YAMADA, K. Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific Journal of Mathematics*, v. 221, p. 303–351, 2005.
 - [22] MARTINS, L. F.; SAJI, K. Geometric invariants of cuspidal edges, *Canadian Journal of Mathematics*, v. 68-2, p. 445–462, 2016.
 - [23] MARTINS, L. F.; SAJI, K.; TERAMOTO, K.; SANTOS S. Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve. Pre-print: arXiv:2206.11487.
 - [24] MARTINS, L. F.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts, *Geometry and Topology of Manifold, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, v. 154, p. 247–282, 2016.
 - [25] PORTEOUS, I. R. *Geometric differentiation: For the intelligence of curves and surfaces*, 2. ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
 - [26] SAJI, K. Criteria for cuspidal S_k singularities and their applications, *Journal of Gokova Geometry Topology*, v. 4, p. 67–81, 2010.
 - [27] SAJI, K.; SANTOS, S.P. Geometry of bifurcation sets of generic unfoldings of corank two functions, *Monatsh Math.*, v. 196, p. 553–575, 2021.
 - [28] SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts, *Annals of Mathematics*, v. 169, p. 491–529, 2009.
 - [29] SAJI, K.; TERAMOTO, K. Behavior of principal curvatures of frontals near non-front singular points and their application, *Journal of Geometry*, v. 112, p. 39, 2021.
 - [30] SANTOS S.; TERAMOTO, K. On surfaces obtained as singular loci of normal congruence of frontals with pure-frontal singular points. Pre-print: arXiv:2207.07009.

-
- [31] SHIBA, S; UMEHARA, M. The behavior of curvature functions at cusps and inflection points, *Differential Geometry and its Applications*, v. 30-3, p. 285–299, 2012.
 - [32] SHOICHI, F.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Singularities of maximal surfaces, *Mathematische Zeitschrift*, v. 259, p. 827, 2008.
 - [33] TAKAHASHI, M.; TERAMOTO, K. Surfaces of Revolution of Frontals in the Euclidean Space, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, v. 51-2, p. 887–914, 2020.
 - [34] TERAMOTO, K. Focal surfaces of wave fronts in the euclidean 3-space, *Glasgow Mathematical Journal*, v. 61–2, p. 425-440, 2018.
 - [35] TERAMOTO, K. Parallel and dual surfaces of cuspidal edges, *Differential Geometry and its Applications*, v. 44, p. 52–62, 2016.
 - [36] TERAMOTO, K. Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts. *Advances in Geometry*, v. 19-4, p. 541–554, 2016.
 - [37] WHITNEY, H, The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space, *Annals of Mathematics*, v. 45-2, p. 247-293, 1944.