



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Rio Claro

Tereza C. Ramponi

Dualidade Holográfica: contribuições da teoria Ads/CFT na descrição de supercondutores usuais



Rio Claro - SP
2018

Universidade Estadual Paulista

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

Tereza C. Ramponi

Dualidade Holográfica: contribuições da teoria Ads/CFT na descrição de supercondutores usuais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro - SP

2018

R177d Ramponi, Tereza C.
Dualidade Holográfica: contribuições da teoria
Ads/CFT na descrição de supercondutores usuais / Tereza
C. Ramponi. -- Rio Claro, 2018
55 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Luiz Antônio Barreiro

1. Ads/CFT. 2. Dualidade holográfica. 3.
Supercondutores. 4. Matéria condensada. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Tereza C. Ramponi

Dualidade Holográfica: contribuições da teoria Ads/CFT na descrição de supercondutores usuais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro (DF - UNESP - RC)

Prof. Dr. Alexandre Mesquita (DF - UNESP - RC)

Prof. Dr. Denis Eduardo Peixoto (PECIM-UNICAMP)

Conceito: Aprovada

Rio Claro - SP, 28 de setembro de 2018.

Dedico este trabalho aos meus pais: Rosana Aparecida Sobrinho e Pascoal Ramponi Junior.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela realização e conclusão deste trabalho, que por vários momentos parecia impossível. Em seguida a meu orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro pela paciência, inspiração, dedicação, respeito e compreensão; a todos os professores do Departamento da Física pelas lições valiosas; a minha família pelo amor e suporte, principalmente meus pais, tia Rita e tio “Salim” que foram anjos na minha vida e de meus irmãos; tia e madrinha Maristela Ramponi pelo apoio incondicional. A todos aqueles amigos pelas horas de descontração, em especial Ana Laura Cursio, André Ramalho, Laryssa Kimi, Francisco Bauquer, Bárbara Carneiro, Viviane Fernandes, Adriano A. Feitosa, Paulo Vinicius S. dos Santos, entre outros colegas que estudamos juntos. A todos aqueles que tornaram este trabalho possível, minha eterna gratidão! O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O objetivo desse trabalho concentra-se em estudar uma nova metodologia para resolução de problemas em matéria condensada, nos quais as partículas estão fortemente acopladas, não permitindo um tratamento perturbativo padrão. Esse método, originário da dualidade AdS/CFT (Anti-de Sitter/Conformal Field Theory), está sendo conhecido na comunidade de matéria condensada como Dualidade Holográfica. Como aplicação desta teoria, o comportamento de supercondutores foi escolhido. A metodologia da dualidade holográfica utiliza uma teoria de campos em um espaço-tempo curvo. Partindo da ação associada é possível obter as equações de movimento das partículas envolvidas. A seguir foi empregado o uso do software Mathematica-Wolfram, para a resolução das Equações Diferenciais através do Método de Frobenius. Os resultados obtidos expressam que os valores esperados de operadores, as chamadas funções de correlação, são bem similares à curva de intervalo de energia previsto pela teoria BCS em função da temperatura. Também infere-se a partir da fórmula de Kubo, que os resultados numéricos da condutividade elétrica, claramente indicam uma condutividade infinita abaixo de uma determinada temperatura crítica T_c , resultando em um supercondutor.

Palavras-chave

AdS/CFT , Dualidade Holográfica, Supercondutores

Abstract

The objective of this work is to study a new methodology for solving problems in condensed matter, in which the particles are strongly coupled, not allowing a standard perturbative treatment. This method, originating from the AdS / CFT (Anti-Sitter / Conformal Field Theory) duality, is being known in the condensed matter community as Holographic Duality. As an application of this theory, the behavior of superconductors was chosen. The holographic duality methodology uses a field theory in a curved space-time. From the associated action it is possible to obtain the equations of motion of the particles involved. Next, the use of the Mathematica-Wolfram software was used to solve the Differential Equations by the Frobenius Method. The obtained results express that the expected values of operators, so-called correlation functions, are very similar to the energy interval curve predicted by the BCS theory as a function of temperature. It is also inferred from the Kubo formula that the numerical results of electrical conductivity clearly indicate an infinite conductivity below a given critical temperature T_c , resulting in a superconductor.

Key-words

AdS/CFT , Holographic Duality, Superconductors

Lista de Figuras

2.1	Transformação conforme em duas dimensões.	7
4.1	Resultados numéricos do valor esperado para: a) o operador $\langle \mathcal{O}_1 \rangle$ e b) o operador $\langle \mathcal{O}_2 \rangle$. T_c é chamado de temperatura crítica e ao passar por essa temperatura, o sistema sofre uma transição de fase, de modo que os condensados assumem valores diferentes de zero abaixo dessa temperatura.	31
4.2	Resultados para: a) a parte real da condutividade e b) a parte imaginária da condutividade. Resultados obtidos para as condições de contorno que satisfazer a relação (4.18).	32
A.1	Um campo ϕ traçando uma região quadrimensional R em um espaço pentadimensional	38

Sumário

1	Introdução	1
2	Geometria do Espaço AdS e Simetria Conforme	7
2.1	Transformação Conforme	7
2.2	Espaço Anti-de Sitter	9
2.3	Graus de Liberdade no Espaço AdS	10
3	Dualidade AdS/CFT para o Campo Escalar Neutro	13
3.1	Equação de Movimento do Campo Escalar no espaço AdS_{d+1}	13
3.2	Soluções nas Fronteiras do espaço AdS_{d+1}	16
3.2.1	Comportamento para z' s pequenos.	16
3.2.2	Comportamento para z' s elevados.	17
3.3	Funções de Correlação	17
3.4	Função de um ponto para o campo escalar	19
3.5	Teoria da Resposta Linear e a Função de Correlação de dois pontos	22
3.6	Coefficientes de Transporte	23
4	Campo Escalar Carregado em Temperatura não nula	25
4.1	Temperatura e Métrica	25
4.2	Equações de Movimento	27
4.3	Resolução das Equações	30
4.4	Supercondutividade	31
5	Conclusões e Discussões	35
A	Princípio de Mínima Ação para Campos	37
B	Obtenção das equações de movimento	41
C	Planilha Mathematica-Wolfram para Resolução de Equações Diferenciais pelo Método de Frobenius	45
D	O funcional gerador	49

Capítulo 1

Introdução

Física da matéria condensada é o campo da física que trata das propriedades físicas da matéria. Em particular, é a que se ocupa com a fase "condensada" que aparece sempre que o número de constituintes de um sistema (átomos, elétrons, etc.) é extremamente grande e as interações entre os constituintes são fortes. A física da matéria condensada é uma área da física cujo objeto de investigação engloba o da física do estado sólido e inclui sólidos amorfos e líquidos[1]. Muitos problemas em física da matéria condensada atuais escapam ao tratamento ordinário que utiliza basicamente a consagrada teoria de perturbações em mecânica quântica.

Uma moderna metodologia para entender esses sistemas não perturbativo tem características tais que acabou ficando conhecida como dualidade holográfica. A holografia é um conceito muito fascinante, já explorado na antiga Grécia pelo filósofo pré-socrático Anaxágoras (500-428 A.C.)[2], cujas idéias sugerem que cada uma e toda substância do universo pode ser dividida infinitamente em partes cada vez menores, no entanto, por menor que seja essa parte, haverá fragmentos presentes contendo informações a respeito de todas as outras partes do universo. Essa noção de tudo em tudo é muito bem ilustrada pela holografia [3]. Mais do que isso, qualquer parte de um holograma contém toda a informação contida em todo o holograma. De fato, mesmo com uma pequena parte de um holograma consegue se reproduzir a imagem tridimensional armazenada.

Atualmente, esse conceito pode ser estendido considerando que todas as propriedades matemáticas presentes em um sistema contido em um volume de dimensão arbitrária d , podem ser descritas em termos dos graus de liberdade da superfície ou fronteira desse volume, a qual tem uma dimensão $d-1$. Um novo campo para uma moderna aplicação do conceito holográfico se encontra em fenômenos coletivos na matéria condensada.

De fato, existem sistemas importantes para os quais as interações entre as partículas não são fracas, e essas interações desempenham um papel importante na determinação das propriedades coletivas de tais sistemas. Alguns exemplos desses sistemas são apresentados a seguir:

1. *Supercondutores convencionais.* A interação de Coulomb entre elétrons e íons

nesses materiais, resulta em um novo estado fundamental, que pode suportar um fluxo de corrente elétrica sem dissipação. De fato, esse novo estado fundamental é representado por um par de elétrons acoplados se comportando como um bóson, o qual viaja pelo material sem sofrer dissipação de energia.

2. *Supercondutores de alta temperatura.* Nesse caso, a temperatura de transição é surpreendentemente alta. A origem da supercondutividade nesse caso ainda não está clara, mas provavelmente deve ter origem em algum mecanismo de interação Coulombiana entre os elétrons, ao invés das interações elétron-íon, que são importantes para os supercondutores convencionais.

3. *Sistemas magnéticos.* A interação de Coulomb entre os elétrons pode levar a uma variedade de padrões de ordenação de spin, incluindo ferromagnetismo (spins de todas as partículas são alinhados), antiferromagnetismo (spins das partículas vizinhas são anti-alinhados).

4. *Sistemas Hall Quânticos.* Na presença de um campo magnético perpendicular forte, elétrons confinados em uma ou várias camadas bidimensionais, formam um novo estado líquido quântico, que pode ter propriedades incomuns, como excitações fracamente carregadas, que dessa forma representam um novo grau de liberdade para o sistema.

Muitos outros exemplos aparecem no estudo de novos materiais em matéria condensada. Dessa forma, têm-se observado que é muito comum que quando um sistema de partículas é fortemente acoplado, esse sistema se reorganiza de modo que um novo grau de liberdade, fracamente acoplado, emerge dinamicamente, de modo que o novo estado possa ser descrito somente em termos dos campos emergentes.

Nessa dissertação nos concentraremos no fenômeno da supercondutividade que é um fenômeno físico que foi descoberto em 1911 pelo físico holandês Kamerlingh Onnes, o qual recebeu o prêmio Nobel dois anos mais tarde em virtude de seus trabalhos com baixas temperaturas. Ele verificou que certos tipos de substâncias quando em temperaturas muito baixas, muito próximas do zero absoluto, apresentavam resistência elétrica quase nula, ou seja, os elétrons livres que fazem a condução da corrente elétrica podiam transitar livremente na rede cristalina. Esse fenômeno, observado por Onnes, ficou conhecido como supercondutividade e o material que se encontra nesse estado é denominado de supercondutor.[4]

A Teoria BCS foi proposta por John Bardeen, Leon Cooper, e John Robert Schrieffer e explica o fenômeno da supercondutividade. Ela afirma principalmente que os elétrons em um material quando no estado supercondutor se agrupam em pares chamados pares de Cooper. Os pares de Cooper são elétrons condensados em estados de menor energia. Esta formação de pares de Cooper depende da microestrutura do material, da forma da rede cristalina, já que este par de elétrons se move de forma acoplada com a rede, formando um campo emergente.[5]

A grande e surpreendente novidade é que o campo emergente pode ser estudado em um espaço com uma dimensão extra, sendo que esse espaço apresenta características de uma

teoria gravitacional einsteniana. Em outras palavras, existe uma correspondência entre um sistema de muitos corpos fortemente correlacionados e a dinâmica clássica de uma teoria de gravitação de Einstein com uma dimensão extra. Essa correspondência ficou conhecida como dualidade holográfica. Esse moderno conceito de dualidade holográfica, que será o principal objeto de estudos dessa pesquisa, tem sua origem na conjectura de Maldacena [6].

Maldacena descobriu uma correspondência entre uma Teoria Quântica de Campos (QFT - Quantum Field Theory), invariante sob transformações que preservam ângulos, conhecida como Teoria de Campo Conforme (Conformal Field Theory - CFT) e um espaço constituído de uma variedade Lorentziana, simplesmente conexa e maximamente simétrico com curvatura negativa, o qual é conhecido como espaço Anti-de Sitter (AdS). Essas idéias serão descritas claramente mais à frente.

A conjectura de Maldacena nada mais é do que uma dualidade entre CFT e AdS. Nesse sentido, a dualidade AdS/CFT é uma realização moderna da holografia que relaciona uma teoria com gravidade em d dimensões e uma teoria quântica de campo em $d - 1$ dimensões. Na verdade, da forma como Maldacena conjecturou a dualidade AdS/CFT, é necessário que o espaço AdS seja governado por uma teoria que envolva não somente aspectos de relatividade geral, mas também aspectos quânticos. Essa teoria é conhecida como Teoria das Cordas. De fato, o interior (ou o corpo) do espaço AdS é governado pela teoria de cordas com supergravidade, enquanto que em sua superfície (ou fronteira) está localizada a CFT. A dualidade holográfica ou dualidade AdS/CFT tem aberto novas portas para se estudar fenômenos de muitos corpos fortemente acoplados, que quando comparada aos métodos tradicionais apresenta novas características marcantes, das quais podemos citar:

1. Questões a respeito de fenômenos complicados de muitos corpos podem ser mapeados em um sistema de um ou poucos corpos vivendo em um campo gravitacional de Einstein;
2. Colocar o problema em temperatura e densidade finitas no sistema de muitos corpos a ser estudado, o qual se localiza em um espaço de d dimensões (uma fronteira), corresponde a colocar uma deformação na geometria do espaço de $d + 1$ dimensões (volume interno ‘a fronteira’);
3. Para pequenas curvaturas e baixas energias, a geometria pode ser estudada pela gravitação clássica de Einstein com campos de matéria, que através da dualidade se liga a sistemas N corpos fortemente acoplados. Com isso se pode extrair propriedades físicas universais do sistema de N corpos. Essas são algumas das características básicas do método.

A Teoria de Campos Conforme ganhou grande destaque nos últimos anos devido a quantidade de aplicações nas mais diversas áreas da física. A física da matéria condensada é uma das áreas em que as CFTs tem demonstrado sua capacidade de tratar uma ampla gama de problemas. De forma geral, pode-se dizer que as CFTs são teorias de campos (clássicas ou quânticas) que descrevem sistemas que possuem simetria conforme, ou seja,

são invariantes por uma transformação conforme. É um fato bem conhecido [7] que sistemas bidimensionais exibindo invariância de escala em pontos próximos às transições de fase possuem simetria conforme. As quantidades físicas relevantes são dadas pelo que podemos chamar de campos de escala. Exemplos de campos de escala são a densidade de spin e a densidade de energia no modelo de Ising bidimensional.

O campo da ciência que aplica a correspondência AdS/CFT em física da matéria condensada é chamado de AdS/CMP (condensed matter physics). Assim, como dito anteriormente, algo que podemos esperar deste modelo são os supercondutores, e mais precisamente aqueles de alta temperatura crítica (T_c). A principal razão é que desde a sua descoberta em 1986, supercondutores de alta T_c tem resistido a descrição teórica microscópica. A teoria BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer)[5] que descreve os supercondutores “usuais” parece ser inadequada para descrever esses sistemas e a esperança é de que a AdS/CMP irá de alguma forma prover uma nova aproximação teórica neste problema. Há indicadores que esse é o caso, mas a acurância da correspondência AdS/CFT no presente momento torna isso ainda difícil.

Algumas das possíveis aplicações da correspondência holográfica ainda estão em andamento. De acordo com Horowitz e Polchinski [8] considera-se difícil acreditar a natureza não fazer uso dessa correspondência, mas a maneira exata em que ela o faz permanece sem ser descoberta. Além dos supercondutores holográficos, a abordagem holográfica tem sido usada para entender alguns outros aspectos da física da matéria condensada, incluindo líquidos não-de-Fermi [9, 10], efeito Hall quântico [11, 12], metais estranhos [13, 14], isolantes topológicos [15, 16, 17], modelo de Hubbard [18] e assim por diante. Uma aplicação importante usando a dualidade holográfica é descrever a cromodinâmica quântica (QCD), especialmente o plasma de quarks e glúons produzido em aceleradores de partículas. É referida como AdS/QCD ou QCD holográfica, que tem sido amplamente estudada [19, 20, 21, 22, 23]. Outro assunto emergente é a correspondência fluido/gravidade, que traduz problemas em dinâmica de fluidos em problemas na relatividade geral [24, 25]. Esse número enorme de aplicações dentre outras explica por que alguns pesquisadores consideram o buraco-negro para a física do século XXI o que foi o oscilador harmônico para a física do século XX.

O objetivo geral dessa dissertação é estudar a dualidade holográfica como um novo método para resolução de problemas em matéria condensada, nos quais as partículas estão fortemente acopladas. Dentre os objetivos específicos estão:

- Apresentar a Teoria do Campo Conforme e a Geometria Anti-de Sitter;
- Analisar a aplicação da dualidade holográfica para Campo Escalar neutro e carregado;
- Aplicar todos os conceitos numa teoria para a supercondutividade;
- Obter resultados, através do uso do software Wolfram-Mathematica, similares à teoria BCS (supercondutores).

Assim, nessa dissertação procura-se explorar quais os limites e contribuições da teoria

AdS/CMP na descrição de supercondutores “usuais”, e como a teoria AdS/CMP pode servir de apoio teórico/metodológico para uma melhor descrição de supercondutores “usuais”, descritos pela teoria BCS.

No capítulo 2 estão descritos com maiores detalhes a geometria do espaço AdS e a invariância conforme, que caracterizam a dualidade holográfica.

No capítulo 3 é apresentado o método básico da dualidade AdS/CFT, descrita para um campo escalar neutro que representa uma partícula bosônica¹. Será demonstrado o método de renormalização holográfica, necessário para eliminação dos termos divergentes. Finalmente serão obtidas as funções de correlação de um e dois pontos, essenciais para se obter quantidades físicas de um sistema, como as condutividades térmica e elétrica.

No capítulo 4, utilizando-se de toda a teoria apresentada nos capítulos anteriores, é obtida uma relação de dependência entre a métrica de Schwarzschild-AdS (buraco negro) e a temperatura da região do espaço-tempo. Então a dualidade AdS/CFT será estendida para o campo escalar carregado. As equações de movimento obtidas são então resolvidas através do software Wolfram-Mathematica, de modo que as funções de correlação possam ser obtidas. Dessa forma, será determinado o fluxo do campo escalar carregado o qual representa o comportamento de uma corrente elétrica perante uma diferença de potencial. Pode-se então determinar a condutividade do sistema em função da temperatura. Fechando o capítulo 4, será discutido o problema prático da supercondutividade, revisando os principais resultados do modelo tradicional (teoria BCS - Bardeen-Cooper-Schrieffer) e comparando com resultados produzidos pela dualidade holográfica.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões gerais e discussões acerca dos resultados obtidos neste trabalho. Para finalizar a dissertação são apresentadas as referências utilizadas nesse trabalho.

¹Na natureza, as partículas se classificam em dois tipos: bósons e férmions. Os férmions obedecem o princípio exclusão de Pauli, enquanto que os bósons não. Os pares de Cooper que aparecem na supercondutividade, são construídos com dois férmions acoplados (dois elétrons) formando um bóson. Por isso, essa dissertação será focada no estudo de campos escalares.

Capítulo 2

Geometria do Espaço AdS e Simetria Conforme

2.1 Transformação Conforme

Para entendermos a transformação conforme, consideremos primeiramente um espaço plano em d dimensões e transformações nesse espaço que, localmente, conserve ângulos entre duas linhas quaisquer, como mostrado na Figura 2.1. Na figura abaixo, ocorre o mapeamento de uma função complexa com coordenadas x e y , plotadas no plano z , para uma função com coordenadas planares u e v , presentes no plano w . A transformação conforme é feita com o objetivo de facilitar o cálculo de determinado processo.

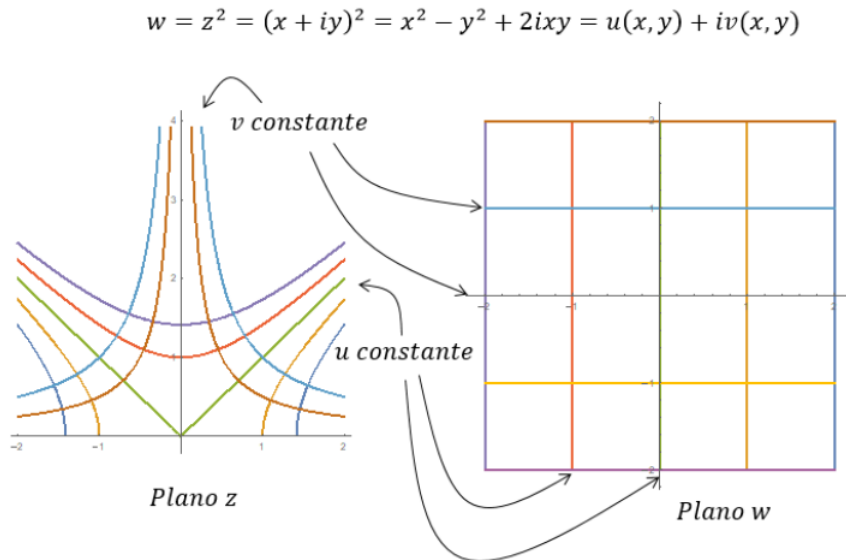


Figure 2.1: Transformação conforme em duas dimensões.

De um ponto de vista formal, uma transformação geral de coordenadas, $x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu}$, que representa um mapeamento ϕ entre dois espaços, tal que $x' = f(x)$, é dita conforme se o mapeamento leva ao seguinte efeito na métrica :

$$g'_{\rho\sigma}(x') \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (2.1)$$

onde $g'_{\rho\sigma}(x')$ e $g_{\mu\nu}(x)$ são os tensores métricos de cada plano de coordenadas, $\Omega(x)$ é o fator de escala e levamos em conta o critério de Einstein de soma em índices repetidos para tensores. Considere agora uma TQC (Teoria Quântica de Campos) que descreve algum problema físico em um espaço-tempo de d -dimensões $(t, \vec{x})$, com $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^{d-1})$. Considere que esse problema está imerso em um espaço com $d+1$ dimensões $(t, \vec{x}, z)$. Nesse caso, se o problema apresentar invariância conforme, podemos escrever a distância entre pontos como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Omega(z) g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &= \Omega(z) (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \end{aligned}$$

onde $\Omega(z)$ é uma função a ser determinada para satisfazer a invariância conforme.

Como comentado no capítulo anterior, muitos problemas em matéria condensada apresentam invariância de escala, que é um tipo particular de invariância conforme. Nesse caso, o termo ds^2 deve ser invariante pela seguinte transformação:

$$(t, \vec{x}, z) \longrightarrow \lambda (t, \vec{x}, z)$$

onde λ é um fator de invariância conforme.

Portanto, para que ds^2 seja invariante, a função $\Omega(z)$ deve se transformar como

$$\Omega(z) \longrightarrow \lambda^{-1} \Omega(z).$$

Consequentemente, uma forma apropriada é

$$\Omega(z) = \frac{L^2}{z^2},$$

onde L é uma constante específica da curvatura do espaço. Com isso, pode-se escrever

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2), \quad (2.2)$$

que é um elemento de linha de um espaço AdS em $(d+1)$ -dimensões. Note que a TQC de interesse fica na fronteira do espaço AdS com $z = 0$. Entretanto, a métrica é divergente em $z = 0$, de modo que deve-se tratar com cuidado as soluções nessa fronteira. A partir

dessa métrica, o tensor métrico fica escrito como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -L^2/z^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L^2/z^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & L^2/z^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L^2/z^2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

2.2 Espaço Anti-de Sitter

Pode-se mostrar que a métrica (2.2) é solução da equação de movimento obtida por meio da seguinte ação gravitacional

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[-2\Lambda + \sum c_i R^i \right].$$

Nessa expressão G_N é a constante de gravitação de Newton, Λ é a constante cosmológica, $g = \det[g_{\mu\nu}]$, c_i s são constantes a serem determinadas e R é o escalar de curvatura do espaço-tempo, que pode ser obtido por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

sendo $R_{\mu\nu}$ conhecido como tensor de Ricci.

Escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = c_3 = \cdots = 0$ temos a ação de Einstein-Hilbert. Aplicando o princípio variacional e tomando a métrica como variável dinâmica, obtem-se a seguinte equação de movimento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Contraindo com a métrica inversa, ou seja, tomando o traço dessa equação, obtemos

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2\frac{d+1}{d-1}\Lambda.$$

Por outro lado, o tensor de Ricci é definido por

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\gamma\lambda\nu}.$$

onde $R^\lambda_{\gamma\lambda\nu}$ é conhecido como tensor de curvatura de Riemann,

$$R^\alpha_{\gamma\lambda\beta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\kappa} \Gamma^\kappa_{\lambda\gamma} - \Gamma^\alpha_{\lambda\kappa} \Gamma^\kappa_{\beta\gamma}.$$

em que Γ é o símbolo de Christoffel, expresso por:

$$\Gamma_{\mu\nu\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} \right).$$

Com as expressões até aqui apresentadas, é possível encontrar a curvatura característica do espaço descrito pela métrica encontrada em (2.2). Essa curvatura é dada por

$$R = -\frac{d(d+1)}{L^2}$$

que claramente é negativa, caracterizando o espaço anti-de Sitter. Além disso, esse espaço-tempo possui uma constante cosmológica, dada por:

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2L^2}.$$

Assim, a equação de movimento (2.4) se estabeleceu como:

$$R_{\mu\nu} + \frac{d}{L^2} g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Caracterizando a equação de movimento para o espaço Anti de Sitter.

2.3 Graus de Liberdade no Espaço AdS

Como é bem conhecido, em teoria quântica de campos, normalmente são produzidos termos divergentes. Assim, para regularizar uma teoria de campos, é preciso eliminar esses termos, uma vez que o resultado final deve ser comparado a um resultado físico finito. Dessa forma, foi desenvolvida a teoria do grupo de renormalização, que é um procedimento matematicamente preciso no qual os infinitos podem ser eliminados de forma consistente. De fato, muitas vezes pode ser necessário regularizar a teoria tanto no limite de baixas energias (limite infravermelho) e no limite de altas energias (limite ultravioletas).

Primeiramente o sistema pode ser colocado em uma caixa de tamanho R , que serve de limite infravermelho e também pode-se introduzir uma célula de espaçamento mínimo ϵ que servirá de regulador ultravioleta. Em um espaço-tempo de d dimensões, o sistema fica com $(R/\epsilon)^{d-1}$ células. Se c_{TQC} é o número de graus de liberdade por célula, que também é conhecido como carga central, então o número total de graus de liberdade é dado por

$$N_{TQC} = \left(\frac{R}{\epsilon} \right)^{d-1} c_{TQC}.$$

Por outro lado, de acordo com a fórmula de Bekenstein-Hawking, o número de graus de liberdade contidos em uma região do espaço AdS é igual à sua entropia total, que é

proporcional à superfície dessa região:

$$N_{AdS} = \left(\frac{A_{\partial}}{4G_N} \right),$$

com A_{∂} sendo a área da fronteira do espaço AdS_{d+1} com $z \rightarrow 0$. A área pode ser obtida integrando o elemento de volume correspondente à métrica (2.2) na fatia $z = \epsilon \rightarrow 0$

$$A_{\partial} = \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x \sqrt{g} = \left(\frac{L}{\epsilon} \right)^{d-1} \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x.$$

Se o sistema é colocado em uma caixa, então

$$\int_{z=\epsilon} d^{d-1}x = R^{d-1} \implies A_{\partial} = \left(\frac{RL}{\epsilon} \right)^{d-1} \implies N_{AdS} = \frac{1}{4G_N} \left(\frac{RL}{\epsilon} \right)^{d-1}.$$

Finalmente, pode-se comparar os graus de liberdade

$$\frac{1}{4G_N} \left(\frac{RL}{\epsilon} \right)^{d-1} = \left(\frac{R}{\epsilon} \right)^{d-1} c_{TQC} \implies \boxed{\frac{L^{d-1}}{4G_N} = c_{TQC}}.$$

Devido ao fato de a curvatura escalar aumenta com $1/L^2$, implica que quanto maior o número de graus de liberdade da TQC, menor é a curvatura. Assim, para a resolução de problemas na área da matéria condensada, com muitos graus de liberdade, podemos utilizar a **gravitação clássica de Einstein com baixas curvaturas**, para facilitarmos os cálculos através da teoria holográfica.

Capítulo 3

Dualidade AdS/CFT para o Campo Escalar Neutro

3.1 Equação de Movimento do Campo Escalar no espaço AdS_{d+1}

O exemplo mais simples no qual se pode aplicar as técnicas da dualidade AdS/CFT é o campo escalar. Consideraremos o espaço AdS_{d+1} na forma euclidiana

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} [dz^2 + \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu]. \quad (3.1)$$

Por outro lado, a densidade lagrangeana para o campo escalar ϕ no espaço AdS_{d+1} é descrita por

$$\mathcal{L} = -\frac{\eta}{2} [g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + m^2 \phi^2] \quad (3.2)$$

onde η representa uma constante de normalização, que será útil mais a frente, e onde utilizamos a notação compacta

$$\partial_M \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^M}.$$

Dessa forma, a ação do campo escalar ϕ é descrita por

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{g} \mathcal{L}. \quad (3.3)$$

onde a g representa o determinante da métrica do espaço AdS_{d+1} .

Com o princípio de mínima ação, chegamos à equação de Euler-Lagrange para o campo ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_M \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_M \phi)} \right) = 0.$$

Usando a densidade Lagrangeana (3.2), a equação do movimento em função do campo escalar obtida é

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_M(\sqrt{g}g^{MN}\partial_N\phi) - m^2\phi = 0. \quad (3.4)$$

De maneira mais explícita, usando a métrica (2.3), esta equação se torna:

$$z^{d+1}\partial z(z^{1-d}\partial z\phi) + z^2\delta_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - m^2L^2\phi = 0 \quad (3.5)$$

Um método para a resolução dessa equação diferencial consiste em fazer a transformada de Fourier de ϕ nas coordenadas x^μ . Dessa forma, encontra-se

$$\phi(z, x^\mu) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} f_k(z). \quad (3.6)$$

Logo, a equação do movimento torna-se

$$\boxed{z^{d+1}\partial z(z^{1-d}\partial z f_k) - k^2 z^2 f_k - m^2 L^2 f_k = 0}. \quad (3.7)$$

Para resolver a equação (3.7) próxima da borda $z = 0$, faz-se a seguinte tentativa com $f_k \sim z^\beta$ para algum expoente β , em que β deva satisfazer a expressão quadrática

$$\beta(\beta - d) - m^2 L^2 = 0, \quad (3.8)$$

cujas soluções são dadas por:

$$\beta = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}. \quad (3.9)$$

Assim sendo, próximo a $z \sim 0$ a função $f_k(z)$ se comporta como:

$$f_k(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} A(k)z^{d-\Delta} + B(k)z^\Delta \quad (3.10)$$

onde Δ é dado por:

$$\Delta = \frac{d}{2} + \nu, \text{ com } \nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}. \quad (3.11)$$

Usando a transformada inversa de Fourier pode-se escrever a expansão próxima da borda no espaço das posições da seguinte maneira:

$$\phi(z, x) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} A(x)z^{d-\Delta} + B(x)z^\Delta. \quad (3.12)$$

Nota-se que Δ é real se $\nu \in \mathbb{R}$, o que ocorre quando a massa m satisfaz a desigualdade

$$m^2 \geq -\left(\frac{d}{2L}\right)^2. \quad (3.13)$$

O que implica que m^2 pode ser negativo e ao mesmo tempo satisfazer (3.13). Desta forma, e considerando $\nu \geq 0$, temos

$$\nu = \Delta - \frac{d}{2} \geq 0 \iff d - \Delta \leq \Delta \quad (3.14)$$

que é satisfeito próximo à borda, tornando o termo proporcional a $z^{d-\Delta}$ em (3.12) dominante quando $z \rightarrow 0$. Assim, negligenciando o termo $B(x)$ da solução independente do campo (3.12), teremos

$$\phi(z = \epsilon, x) \approx \epsilon^{d-\Delta} A(x). \quad (3.15)$$

Devido ao fato do termo $d - \Delta$ tornar-se negativo quando $m^2 \geq 0$, o termo relativo a $A(x)$ da Equação (3.15) normalmente diverge, tendendo ao infinito assim que aproximamos da borda em $z \approx \epsilon \rightarrow 0$. Com o intuito de remover a divergência posteriormente, definimos uma nova função $\varphi(x)$, cuja função é de anular os fatores das potências que seriam divergentes (3.15),

$$\varphi(x) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} \phi(z, x). \quad (3.16)$$

Da forma como está definida, podemos identificar

$$\varphi(x) = A(x). \quad (3.17)$$

Notadamente, essa definição de $\varphi(x)$ é sempre tida como finita.

De acordo com a metodologia AdS/CFT, se $\mathcal{O}$ é o operador dual a ϕ , a ação é dada por:

$$S_{bdy} \sim \int d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} \phi(\epsilon, x) \mathcal{O}(\epsilon, x) \quad (3.18)$$

onde $\gamma_\epsilon = (\frac{L}{\epsilon})^{2d}$ é o determinante da métrica induzida no contorno $z = \epsilon$. Então, com a substituição $\phi(\epsilon, x) = \epsilon^{d-\Delta} \varphi(x)$ na ação S_{bdy} , obtem-se:

$$S_{bdy} \sim \int d^d x \varphi(x) \epsilon^{-\Delta} \mathcal{O}(\epsilon, x)$$

Para fazer S_{bdy} finito e independente de ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$, devemos exigir:

$$\mathcal{O}(\epsilon, x) = \epsilon^\Delta \mathcal{O}(x) \quad (3.19)$$

Essa relação mostra que Δ deve ser interpretado como a dimensão de escala do operador dual $\mathcal{O}$. Da mesma forma, da relação de $\phi(\epsilon, x) = \epsilon^{d-\Delta} \varphi(x)$ segue que $d - \Delta$ deve ser interpretado como a dimensão de escala da fonte φ . Retomando de (3.11) onde

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m^2 L^2},$$

se $m^2 \geq -(\frac{d}{2L})^2$, a dimensão de escala correspondente é real. Assim, existem três diferentes situações, dependendo do valor de massa m .

O primeiro caso é aquele em que $m^2 > 0$. Neste caso, $\Delta > d$ e dessa forma, está sendo acessado as distâncias curtas ou seja, a região do ultravioleta da teoria. Quando $m^2 = 0$ nós temos que $\Delta = d$. Finalmente, se m^2 é negativo e toma valores no intervalo $-(\frac{d}{2L})^2 > m^2 > 0$, obtem-se $\Delta < d$ momento em que é acessado a região do infravermelho da teoria.

3.2 Soluções nas Fronteiras do espaço AdS_{d+1}

Começamos definindo a função $g_k(z)$ como:

$$f_k(z) = z^{d/2} g_k(z). \quad (3.20)$$

substituindo em (3.7), é fácil verificar que g_k satisfaz a equação:

$$z^2 \partial_z^2 g_k + z \partial_z g_k - (\nu^2 + k^2 z^2) g_k = 0, \quad (3.21)$$

que é justamente a equação modificada de Bessel, para a qual existem duas soluções independentes entre si, de modo que

$$g_k = a_+ I_\nu(kz) + a_- I_{-\nu}(kz),$$

onde $I_{\pm\nu}$ são as funções modificadas de Bessel.

3.2.1 Comportamento para z 's pequenos.

Note que para $z \rightarrow 0$, a função modificada de Bessel comporta-se como:

$$I_{\pm\nu}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{\Gamma(1 \pm \nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu}.$$

Assim, $f_k(z)$ fica escrito como

$$f_k(z) = z^{d/2} (a_+ I_\nu(kz) + a_- I_{-\nu}(kz)) \quad (3.22)$$

Portanto, quando $z \rightarrow 0$, temos

$$f_k(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} a_+ z^\Delta \frac{1}{\Gamma(1 + \nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{\Delta - \frac{d}{2}} + a_- z^{d-\Delta} \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{-\Delta + \frac{d}{2}}$$

e comparando com (3.10), obtem-se

$$a_+ = B(k)\Gamma(1+\nu) \left(\frac{k}{2}\right)^{-\Delta+\frac{d}{2}}$$

e

$$a_- = A(k)\Gamma(1-\nu) \left(\frac{k}{2}\right)^{\Delta-\frac{d}{2}}.$$

Voltando em (3.22)

$$f_k(z) = z^{d/2} \left[A(k)\Gamma(1-\nu) \left(\frac{k}{2}\right)^\nu I_{-\nu}(kz) + B(k)\Gamma(1+\nu) \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu} I_\nu(kz) \right] \quad (3.23)$$

3.2.2 Comportamento para z 's elevados.

Vamos considerar agora o comportamento quando $z \rightarrow \infty$. Para z 's muito grandes, a função $I_{\pm\nu}(z)$ se comporta como

$$I_{\pm\nu}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}},$$

Então, depois de mudar $z \rightarrow kz$, nós temos para grandes z 's

$$f_k(z) \approx \frac{z^{\frac{d}{2}} e^{kz}}{\sqrt{2\pi kz}} \left[A(k)\Gamma(1-\nu) \left(\frac{k}{2}\right)^\nu + B(k)\Gamma(1+\nu) \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu} \right],$$

o qual diverge quando $z \rightarrow \infty$ a menos que o coeficiente no colchete desapareça. Então, deve-se exigir que:

$$\frac{B(k)}{A(k)} = -\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu} = \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu}. \quad (3.24)$$

Esse resultado mostra que $A(k)$ e $B(k)$ não são independentes.

3.3 Funções de Correlação

Muitas quantidades físicas importantes como a condutividade térmica ou elétrica podem ser obtidas através das funções de correlação. Vejamos agora como calcular funções de correlação a partir da dualidade holográfica, cujo objetivo seja obter uma função de correlação do tipo

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle.$$

Na teoria de campos essas funções de correlação podem ser calculadas a partir da função geratriz, a qual é obtida perturbando-se a função lagrangeana através de um termo

de fonte (interação)

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + J(x)\mathcal{O}(x) \equiv \mathcal{L} + \mathcal{L}_J. \quad (3.25)$$

O funcional gerador é dado por

$$Z_{QFT}[J] = \left\langle \exp\left[\int \mathcal{L}_J\right] \right\rangle_{QFT} \quad (3.26)$$

e as funções de correlação conectadas são obtidas das derivadas funcionais de Z

$$\left\langle \prod_i \mathcal{O}(x_i) \right\rangle = \prod_i \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \log Z_{QFT}[J] \Big|_{J=0}$$

Vamos considerar agora um campo qualquer $\phi(z, x)$ imerso no espaço AdS. Se $\phi_0(x)$ for o valor no contorno $z = 0$, então denota-se

$$\phi_0(x) = \phi(z = 0, x) = \phi|_{\partial AdS}(x) \quad (3.27)$$

O campo ϕ_0 é descrito como uma fonte do operador dual $\mathcal{O}$ na QFT¹. Conforme foi visto, a fonte real não deve ser o valor de ϕ em $z = 0$, pois ϕ é tipicamente divergente nesse limite. Dessa forma, pode-se definir uma nova fonte que seja finita nesse limite da seguinte forma

$$\varphi(x) \equiv \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} \phi(z, x). \quad (3.28)$$

A prescrição da correspondência Ads/CFT para o funcional gerador é [7, 26]:

$$Z_{QFT}[\phi_0] = \left\langle \exp\left[\int \phi_0 \mathcal{O}\right] \right\rangle_{QFT} = Z_{gravidade}[\phi \rightarrow \phi_0]$$

onde $Z_{gravidade}[\phi \rightarrow \phi_0]$ é a função de partição da teoria gravitacional que pode ser obtida como uma soma da exponencial da ação avaliada em todas funções que tem o valor ϕ_0 no contorno do espaço AdS. Entretanto, no limite em que a gravidade clássica domina, ou seja em baixas energias, pode-se substituir a soma pelo termo correspondente a solução clássica. Assim, o funcional gerador pode ser escrito como

$$Z_{gravidade}[\phi \rightarrow \phi_0] = \sum_{\{\phi \rightarrow \phi_0\}} e^{S_{gravidade}} \approx \exp\left(S_{gravidade}^{(clássica)}\right)$$

Por outro lado, o valor da ação da gravidade clássica é tipicamente divergente e tem de ser renormalizada seguindo os processos de renormalização holográfica [27, 28] o qual será visto mais adiante. Dessa forma, a ação clássica passa a ser substituída pela versão

¹ ϕ_0 exerce o papel de J (fonte/interação) na QFT usual

renormalizada, a qual será denotado por S_{grav}^{ren} , de modo que

$$\log Z_{QFT} = S_{grav}^{ren}[\phi \rightarrow \phi_0].$$

Além disso, a função de correlação de N-pontos poderá ser obtida computando as derivadas com respeito à função finita $\varphi = z^{\Delta-d}\phi$ (Apêndice D)

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n S_{grav}^{ren}[\phi]}{\delta \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)} \Big|_{\varphi=0}. \quad (3.29)$$

Para entendermos melhor esse processo, vamos considerar alguns exemplos importantes: as funções de correlação de um e dois pontos.

3.4 Função de um ponto para o campo escalar

Nessa seção será apresentada com detalhes, a técnica de renormalização holográfica. Esta técnica é necessária para se obter a função de correlação de um ponto. Voltemos à ação para o campo escalar imerso no espaço AdS, que foi apresentada em (3.3)

$$S_{grav} = -\frac{\eta}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} [g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + m^2 \phi^2].$$

Essa ação pode ser reescrita como

$$S_{grav} = -\frac{\eta}{2} \int d^{d+1}x \partial_M [\sqrt{g} g^{MN} \phi \partial_N \phi] + \frac{\eta}{2} \int d^{d+1}x \phi [\partial_M (\sqrt{g} g^{MN} \partial_N \phi) - \sqrt{g} m^2 \phi].$$

Usando a equação de movimento (3.4) verifica-se que o segundo termo deve se anular. Fazendo com que a ação passe a ser descrita como

$$S_{grav} = -\frac{\eta}{2} \int dz \int d^d x \partial_M [\sqrt{g} g^{MN} \phi \partial_N \phi],$$

onde explicitamos a coordenada extra z . Expandindo a derivada, encontra-se

$$\begin{aligned} S_{grav} &= -\frac{\eta}{2} \int dz \int d^d x [\partial_z (\sqrt{g} g^{zz} \phi \partial_z \phi) + \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \phi \partial_\nu \phi)] \\ &= -\frac{\eta}{2} \int d^d x \left[\int_\epsilon^\infty dz \partial_z (\sqrt{g} g^{zz} \phi \partial_z \phi) \right] - \frac{\eta}{2} \int_\epsilon^\infty dz \left[\int d^d x \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \phi \partial_\nu \phi) \right]. \end{aligned}$$

A integração é feita em todo o volume do espaço AdS , sendo as fronteiras da coordenada z em ϵ e no ∞ . Assim, levando em conta que os campos se anulam no infinito, o segundo termo deve se anular, e a integral em z no primeiro termo também pode ser

resolvida de modo que resta

$$S_{grav} = \frac{\eta}{2} \int d^d x (\sqrt{g} g^{zz} \phi \partial_z \phi)|_{z=\epsilon}.$$

Essa ação também pode ser reescrita como

$$S_{grav} = \frac{1}{2} \int d^d x [\Pi(z, x) \phi(z, x)]|_{z=\epsilon},$$

onde foi definido o momentum canonicamente conjugado como

$$\Pi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_z \phi)} = \eta \sqrt{g} g^{zz} \partial_z \phi. \quad (3.30)$$

Trabalhando com a transformada de Fourier do campo e de seu momentum canonicamente conjugado,

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} f_k(z) \quad \Pi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \Pi_k(z) \quad (3.31)$$

obtemos

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \int d^d x e^{i(k+k')x} [f_k(z) \Pi_{k'}(z)]|_{z=\epsilon} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [f_k(\epsilon) \Pi_{-k}(\epsilon)].$$

De acordo com a equação (3.10), próximo de zero temos o seguinte comportamento $f_k(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} A(k) z^{d-\Delta} + B(k) z^\Delta$. Usando a definição do momentum canonicamente conjugado (3.30) encontra-se

$$\begin{aligned} \Pi_k(z) &\underset{z \rightarrow \epsilon}{\approx} \eta \sqrt{g} g^{zz} \partial_z (A(k) z^{d-\Delta} + B(k) z^\Delta)|_{z=\epsilon} \\ &= \eta \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-1} [(d-\Delta) A(k) \epsilon^{d-\Delta-1} + \Delta B(k) \epsilon^{\Delta-1}] \\ &= \eta L^{d-1} [(d-\Delta) A(k) \epsilon^{-\Delta} + \Delta B(k) \epsilon^{\Delta-d}]. \end{aligned}$$

Dessa forma, chegamos a seguinte ação

$$\begin{aligned} S_{grav} &= \frac{\eta L^{d-1}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \{ (A(k) \epsilon^{d-\Delta} + B(k) \epsilon^\Delta) [(d-\Delta) A(-k) \epsilon^{-\Delta} + \Delta B(-k) \epsilon^{\Delta-d}] \} \\ &= \frac{\eta L^{d-1}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \{ \Delta A(k) B(-k) + (d-\Delta) A(-k) B(k) + \\ &\quad + (d-\Delta) A(k) A(-k) \epsilon^{d-2\Delta} + \Delta B(k) B(-k) \epsilon^{2\Delta-d} \} \end{aligned}$$

trocando o sinal dos momenta em alguns termos e utilizando o fato que na região que estamos tratando, $d-\Delta < \Delta$ (3.14), para conservar somente termos que não se anulam

com $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos finalmente

$$S_{grav} = \frac{\eta L^{d-1}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \{d A(k)B(-k) + (d - \Delta) A(k)A(-k)\epsilon^{d-2\Delta}\}.$$

Uma vez que $d < 2\Delta$ o segundo termo é divergente. Dessa forma, para obter uma função de correlação com sentido físico, deve-se acrescentar o que é chamado de **contratermo** na Lagrangeana, de modo que o termo divergente seja cancelado, o que é conhecido como procedimento de **renormalização** em teoria quântica de campos.

Para darmos andamento ao procedimento, primeiramente notamos que o termo divergente envolve o produto $A(k)A(-k)$. Dessa forma, para que o termo divergente seja eliminado, sem que o resultado físico seja alterado, um candidato a ser inserido na ação e, que possivelmente consiga removê-lo, deve ser proporcional ao quadrado do campo, de forma que a ação dos contratermos possa ser escrita como

$$S_{CT} = \mathcal{N} \int_{Fronteira} d^d x \sqrt{\kappa} \phi^2(\epsilon, x)$$

onde $\mathcal{N}$ é um fator a ser determinado e κ é a métrica induzida na fronteira dada por

$$ds_{z=\epsilon}^2 = \kappa_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{L^2}{\epsilon^2} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Levando em conta (3.31), chega-se em

$$\begin{aligned} S_{CT} &= \mathcal{N} \int_{Fronteira} d^d x \sqrt{\kappa} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{i(k+k')x} (A(k)\epsilon^{d-\Delta} + B(k)\epsilon^\Delta) \\ &\quad \times (A(k')\epsilon^{d-\Delta} + B(k')\epsilon^\Delta) \\ &= \mathcal{N} L^d \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [A(k)A(-k)\epsilon^{d-2\Delta} + 2A(-k)B(k)]. \end{aligned}$$

Então se escolhermos

$$\mathcal{N} = -\frac{\eta}{2L} (d - \Delta),$$

a ação

$$\begin{aligned} S_{CT} &= -\frac{\eta}{2L} (d - \Delta) \int_{Fronteira} d^d x \sqrt{\kappa} \phi^2(\epsilon, x) \\ &= -\frac{\eta}{2} (d - \Delta) L^{d-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [A(k)A(-k)\epsilon^{d-2\Delta} + 2A(-k)B(k)] \end{aligned}$$

quando somada à ação original produz uma ação sem divergências. Dessa forma, a ação **renormalizada** fica escrita como

$$S_{grav}^{ren} = -\frac{\eta}{2} \int d^{d+1} x \sqrt{g} \left[g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + \left(m^2 + \frac{\epsilon}{L^2} (d - \Delta) \delta(z - \epsilon) \right) \phi^2 \right].$$

O termo entre parenteses atua como uma massa renormalizada, cujo fator de renormalização é proporcional a ϵ , configurando-se na massa física medida experimentalmente em laboratório.

No espaço dos momenta, a ação renormalizada passa a ser escrita como

$$S_{grav}^{ren} = \frac{\eta}{2} L^{d-1} (2\Delta - d) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} A(-k) B(k).$$

Levando em conta (3.17), $\varphi(x) = A(x)$ e que existe uma relação funcional entre A e B , Eq. (3.24), podemos reescrever a S_{grav}^{ren} como

$$S_{grav}^{ren} = \frac{\eta}{2} L^{d-1} (2\Delta - d) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \varphi(-k) \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu} \varphi(k).$$

De acordo com a seção anterior, especificamente na equação (3.29), a função de correlação do operador $\mathcal{O}$ na presença da fonte envolve derivadas funcionais $\delta/\delta\varphi(x)$ que no espaço dos momenta fica escrita da seguinte forma:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \longrightarrow (2\pi)^d \frac{\delta}{\delta\varphi(-k)}.$$

Para o caso de 1 ponto obtém-se

$$\langle \mathcal{O}(k) \rangle_\varphi = (2\pi)^d \frac{\delta S_{grav}^{ren}[\phi]}{\delta\varphi(-k)} = \eta L^{d-1} (2\Delta - d) \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu} \varphi(k).$$

Utilizando novamente (3.17) e (3.24), obtém-se

$$\boxed{\langle \mathcal{O}(k) \rangle_\varphi = \eta L^{d-1} (2\Delta - d) B(k)}. \quad (3.32)$$

Sendo que $B(k)$ está diretamente relacionada à função de correlação de um ponto e de acordo com

3.5 Teoria da Resposta Linear e a Função de Correlação de dois pontos

Na representação de integrais de caminho de Feynman, a função de um-ponto com uma fonte é escrita como

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\varphi = \int [D\psi] \mathcal{O} e^{S_E[\psi] + \int d^d y \varphi(y) \mathcal{O}(y)},$$

onde ψ representa os campos e φ representa a fonte. Expandindo o expoente dessa expressão numa série de potências da fonte φ , obtém-se

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\varphi = \langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\varphi=0} + \int d^d y \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle_\varphi \varphi(y) + \dots$$

Considerando observáveis ordenados normalmente (operadores de destruição à direita) de modo que no vácuo teremos $\langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\varphi=0} = 0$. Note que isso sempre pode ser obtido se for subtraído de $\mathcal{O}$ seu valor esperado no vácuo (VEV) sem fonte. Então, $\langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\varphi}$ mede a flutuação do observável em torno de valores esperados, ou seja, temos a resposta linear do sistema para a perturbação externa pela fonte. Assim, definindo a função de dois-pontos no espaço euclidiano como

$$G_E(x - y) = \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle_{\varphi}$$

podemos escrever:

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\varphi} = \int d^d y G_E(x - y) \varphi(y). \quad (3.33)$$

Dessa forma, no espaço dos momenta, a função de correlação de dois pontos fica escrita como

$$G_E(k) = \frac{\langle \mathcal{O}(k) \rangle_{\varphi}}{\varphi(k)} = \eta L^{d-1} \underbrace{(2\Delta - d)}_{2\nu} \frac{B(k)}{A(k)} = 2\nu \eta L^{d-1} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k}{2} \right)^{2\nu}. \quad (3.34)$$

onde foram utilizados os resultados (3.32) e (3.24), além do fato que $\varphi(k) = A(k)$.

3.6 Coeficientes de Transporte

Neste ítem, vamos estabelecer a importância das funções de correlação de um ponto, que no limite de baixos momenta e baixas frequências, auxilia-nos a obter o coeficiente de transporte de um sistema que reage à uma fonte variável no tempo. Esta interpretação física nos dá a parte experimental das equações abordadas até aqui, próprias da dualidade holográfica. Considere uma TQC na qual é incluída uma fonte $\varphi(x)$ (interação) acoplada a um operador de campo $\mathcal{O}(x)$ da seguinte forma

$$S = S_0 + \int d^d x \mathcal{O}(x) \varphi(x)$$

Como vimos em (3.32) a função de correlação de um ponto é dada por

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\varphi} = - \int d^d y G_R(x - y) \varphi(y). \quad (3.35)$$

A causalidade leva a seguinte dependência temporal

$$iG_R(x - y) = \Theta(x_0 - y_0) \langle [\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)] \rangle.$$

No espaço dos momenta, a função de correlação fica escrita como

$$\langle \mathcal{O}(\omega, \vec{k}) \rangle_{\varphi} = -G_R(\omega, \vec{k}) \varphi(\omega, \vec{k}). \quad (3.36)$$

No limite de baixos momenta e baixas frequências, a resposta do sistema a um fonte variável no tempo, pode-se fazer a seguinte aproximação

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\varphi \approx -\chi \partial_t \varphi$$

onde χ é uma constante de proporcionalidade chamada de **coeficiente de transporte**. No espaço de frequências, considerando $\omega \rightarrow 0$, tem-se

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\varphi \approx i\omega \chi \varphi(\omega).$$

Comparando com (3.36), quando $\vec{k} \rightarrow 0$, obtêm-se

$$\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} G_R(\omega, \vec{k}) = -i\omega \chi, \quad (3.37)$$

ou seja, o coeficiente de transporte pode ser calculado por

$$\chi = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \left[G_R(\omega, \vec{k}) \right] \right). \quad (3.38)$$

Como a função G_R deve obedecer a causalidade, então sua parte imaginária deve ser analítica. Esse resultado é muitas vezes denominado fórmula de Kubo.

Capítulo 4

Campo Escalar Carregado em Temperatura não nula

4.1 Temperatura e Métrica

Vamos descobrir agora, uma relação de dependência entre a métrica de Schwarzschild-AdS e a temperatura desta região do espaço-tempo. Através do raio do horizonte de eventos de um buraco negro, seremos capazes de achar sua temperatura local, e consequentemente estabelecer a densidade de cargas no horizonte de eventos.

A função de partição em mecânica estatística no ensemble canônico é dado por

$$Z = \text{Tr} \left[e^{-\frac{H}{k_B T}} \right], \quad (4.1)$$

onde H é o operador hamiltoniano, T é a temperatura e a constante de Boltzmann é tomada como sendo $k_B = 1$.¹ A média térmica de um operador $\mathcal{O}$ à temperatura T é

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\text{Tr}[\mathcal{O} e^{-\frac{H}{T}}]}{Z}$$

Como o traço é a soma dos elementos da diagonal, na aproximação da integral de caminho, a média $\langle \mathcal{O} \rangle_T$ pode ser escrita como

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T \sim \int [D\psi] \langle \psi(x), t | \mathcal{O} e^{-\frac{H}{T}} | \psi(x, t) \rangle, \quad (4.2)$$

onde o valor esperado é tomado entre o mesmo inicial e estado final $|\psi(x, t)\rangle$ (“elementos da diagonal”). Por outro lado, uma vez que o operador de evolução temporal é escrito como $U = e^{iHt}$ ($\hbar = 1$), pode-se reescrever (4.2) como

¹Nesse trabalho é adotado o sistema de Unidades Naturais nos quais $k_B = \hbar = c = 1$. A análise dimensional dos resultados permite que se retorne ao Sistema Internacional de Unidades

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T \sim \int [D\psi] \langle \psi(x), t | \mathcal{O} | \psi(x), t + \frac{i}{T} \rangle$$

Então, para realizar médias térmicas deve-se considerar evolução de tempo imaginária e nós temos que impor condições de fronteira periódicas no espaço de Hilbert (antiperiódica para férmions). Então, o tempo Euclidiano t_E deve ter uma periodicidade dada por

$$t_E \equiv t_E + \frac{1}{T} \quad (4.3)$$

Portanto, a compactação do tempo Euclidean é equivalente a ter $T \neq 0$. Vamos aplicar essa ideia na métrica de Schwarzschild-AdS.²

Partindo de um espaço tempo bastante geral cuja forma é dada por

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} (-f(r)dt^2 + g(r)d\vec{x}^2 + h(r)dr^2). \quad (4.4)$$

Para obter as funções $f(r)$, $g(r)$ e $h(r)$, retorna-se à equação de movimento (2.5) e então se obtém a solução de Schwarzschild-AdS

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} \left(-f(r)dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \right),$$

com

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r}{r_H} \right)^d$$

sendo r_H o raio do horizonte de eventos de um buraco negro.

Como deseja-se obter uma temperatura nessa fronteira, efetua-se a seguinte expansão

$$f(r) \approx -\frac{d}{r_H}(r - r_H) + \mathcal{O}((r - r_H)^2)$$

Trabalhando com o tempo Euclidiano, e considerando somente a primeira ordem na expansão, inicialmente pode-se definir uma nova coordenada radial ξ de tal modo que

$$-\frac{dr^2}{\frac{d}{r_H}(r - r_H)} = d\xi^2$$

a qual pode ser integrado para dar a seguinte relação entre ξ e r

$$\xi = -2r_H \sqrt{\frac{1}{d} \left(1 - \frac{r}{r_H} \right)}$$

²A métrica de Schwarzschild é uma solução das equações de campo gravitacional de Einstein que descreve o campo gravitacional externo a um corpo esférico, porém desprezando qualquer rotação de massa. Trata-se de uma boa aproximação para campos gravitacionais de corpos de lenta rotação e pode ser considerado uma descrição para os casos de uma estrela, um planeta ou um buraco negro.

Definindo também uma coordenada angular θ de tal modo que

$$-\frac{d}{r_H}(r - r_H)dt_E^2 = \xi^2 d\theta^2$$

então θ pode ser escrito como

$$\theta = \frac{d}{2r_H}t_E \quad (4.5)$$

Nas novas variáveis, a parte da métrica (t_E, r) toma a forma $d\xi^2 + \xi^2 d\theta^2$, que é parecida localmente com a métrica de um plano. Com o intuito de ter $\xi = 0$ (i.e. o horizonte) com um ponto regular sem nenhuma singularidade de curvatura, a variável θ deve ser uma variável periódica com período 2π . De acordo com (4.5), essa periodicidade em θ implica, em uma periodicidade no tempo Euclidiano, ou seja, uma compactação do tempo euclidiano, que é equivalente a ter uma temperatura T diferente de zero. Portanto, segue que podemos atribuir uma temperatura T a um buraco negro e já que a periodicidade $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ é equivalente a periodicidade sob $t_E \rightarrow t_E + \frac{1}{T}$, obtém-se a denominada temperatura de Hawking, dada por

$$2\pi = \frac{d}{2r_H} \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{d}{4\pi r_H} \quad (4.6)$$

Levando em conta (4.17), a temperatura, então, é calculada como

$$\boxed{T = \frac{3}{4\pi\sqrt{\rho}}} \quad (4.7)$$

Essa é uma relação entre a densidade de carga no horizonte de eventos e a temperatura do buraco-negro.

4.2 Equações de Movimento

Como foi visto no final da sessão anterior, se quisermos um sistema com dependência na temperatura precisamos de um espaço-tempo com curvatura variável, cujo exemplo mais simples de métrica é a de um buraco-negro. Além disso, é necessário que o espaço seja conforme somente na fronteira na qual está o problema. Iniciamos nossa discussão com a métrica de buraco negro de Schwarzschild (AdS) representada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2)$$

onde

$$f(r) = \frac{r^2}{L^2} - \frac{M}{r}$$

O objetivo aqui é descrever (efetivamente) um sistema 2+1 dimensional, então são necessárias 4 dimensões no corpo do espaço-tempo. Desde que se queira descrever um

supercondutor, espera-se que as partículas (campos) envolvidas interajam via campos elétrico e magnético. Isto significa que o espaço contenha um campo eletromagnético (EM) governado pelas equações de Maxwell e um campo escalar governado pela equação de Klein-Gordon (KG), cujas ações são representadas respectivamente por

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^d x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.8)$$

e

$$S_{KG} = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} (|\nabla\psi|^2 + m^2 |\psi|^2), \quad (4.9)$$

onde

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A^\rho.$$

é a derivada covariante no espaço-tempo. Para propriamente incluir a gravidade na ação principal, é necessário adicionar o chamado termo Einstein-Hilbert para a ação, que é da seguinte forma:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} (R + \frac{d(d-1)}{L^2}) \quad (4.10)$$

onde $\kappa = \sqrt{8\pi G}$, e o segundo termo é uma constante cosmológica negativa inerente a geometria AdS.

Agora, se somar as ações S_{EH} , S_{KG} e S_{EM} e incluir um termo de interação (mínimo) de Gauge,³ de modo que ∇_μ é passado a uma derivada covariante de Gauge $D_\mu = \nabla_\mu - iA_\mu$, obtêm-se a ação completa que passa a ser escrita como

$$S_{total} = \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(R + \frac{d(d-1)}{L^2} \right) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2 |\psi|^2 - |\nabla_\mu \psi - iA_\mu \psi|^2 \right]$$

Considerando o limite de baixa gravidade, ou seja, onde a métrica do espaço-tempo é fixada para ser a métrica de Schwarzschild (métrica de um sistema gravitacional esféricamente simétrico), e o campo gravitacional das partículas (campos) envolvidas são fracos o suficiente para não reagir na métrica, deixando inalterada a estrutura do espaço-tempo, obtêm-se a seguinte ação

$$S_{bulk} = \int d^d x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2 |\psi|^2 - |\nabla_\mu \psi - iA_\mu \psi|^2 \right] \quad (4.11)$$

³As Teorias de Gauge, também chamadas de Teorias de Calibre, representam uma classe de teorias físicas descritas por lagrangianas, que são invariantes sob determinados grupos de transformações de simetria. Quando tais grupos são invariantes sob uma transformação em cada ponto do espaço, esses grupos descrevem uma simetria global. Quando a lagrangiana possui uma simetria meramente local, pode ser visto como uma generalização do princípio de equivalência da Relatividade Geral, onde em cada ponto do espaço-tempo é permitida uma escolha de um referencial local. Quando o grupo de simetria é o grupo U(1), temos o eletromagnetismo. Quando o grupo é o SU(2) temos a teoria eletrofraca, e para o grupo SU(3) temos a descrição da interação forte.

Para simplificar os cálculos, são consideradas as soluções estáticas em um espaço-tempo com simetria esférica, ou seja, assume-se que os campos dependem somente da coordenada radial. Assim, nessas condições, se for utilizada a mesma técnica do capítulo anterior (princípio de mínima ação) obtém-se a seguinte equação de movimento (detalhes no Apêndice B)

$$\boxed{\psi'' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r}\right)\psi' + \frac{\phi^2}{f^2}\psi - \frac{m^2}{2L^2f}\psi = 0.} \quad (4.12)$$

Nesse resultado foi utilizada a seguinte notação

$$A_t = \phi$$

ou seja, a componente temporal do potencial vetor é o potencial elétrico, denotado por ϕ e $A_r = A_x = A_y = 0$.

Da mesma forma, o uso do princípio de mínima ação permite obter a equação de movimento para o potencial (detalhes no Apêndice B)

$$\boxed{\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{2\psi^2}{f}\phi = 0.} \quad (4.13)$$

As equações (4.12) e (4.13) são duas equações diferenciais não lineares acopladas que devem ser resolvidas numericamente. Algumas das sutilezas da resolução numérica são discutidas em mais detalhes no Apêndice C.

O comportamento assintótico na fronteira conforme ($r \rightarrow \infty$), levando em conta que $f(r) \sim \frac{r^2}{L^2} \rightarrow \infty$, é obtido para o campo escalar considerando uma solução do tipo

$$\psi \approx \psi_0 r^\alpha$$

que ao ser substituída na equação (4.12) resulta em

$$-\frac{\psi_0 r^{\alpha-2} (2\alpha^2 L^2 m + m^2 r^3 - 2\alpha(\alpha + 3)r^3)}{2(r^3 - L^2 m)} = 0,$$

cujas expansão em $r \rightarrow \infty$ fica escrita como

$$r^\alpha \left[\frac{2\alpha^2 \psi_0 - m^2 \psi_0 + 6\alpha \psi_0}{2r^2} + O\left(\left(\frac{1}{r}\right)^3\right) \right] = 0.$$

De modo que

$$\alpha = -\frac{3 \pm \sqrt{9 + 2m^2}}{2}.$$

Como desejamos que ψ seja bem comportada no infinito, podemos escolher o parâme-

tro $m^2 = -4$ de modo que a solução assintótica fique escrita como

$$\psi(r) \approx \frac{\psi_0^{(-)}}{r} + \frac{\psi_0^{(+)}}{r^2} \quad (4.14)$$

Para a equação (4.13) está claro que no limite para $r \rightarrow \infty$, a equação fica escrita como

$$\phi'' = 0 \implies \phi(r) = \mu + \frac{\rho}{r} \quad (4.15)$$

onde μ e ρ são duas constantes. Claramente ρ deve ser interpretado como a densidade de carga na superfície do horizonte do buraco-negro.

Por outro lado, a densidade de carga pode ser obtida pela componente temporal da quadricorrente (J_t) que é obtida pela derivada funcional (veja Apêndice B)

$$\rho \equiv \langle J_t \rangle = \frac{\delta S_{total}}{\delta A_t} = 2 \frac{r^2}{f(r)} \phi \psi^2.$$

Se as **condições de contorno** forem tais que, quando $r \rightarrow r_H$ (horizonte de eventos do buraco negro) ocorrer

$$r \rightarrow r_H \quad \begin{cases} \phi \sim 1 \\ \psi \sim \sqrt{f/2} \sim 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

então teremos

$$\rho = r_H^2. \quad (4.17)$$

Outras condições de contorno podem produzir a mesma relação entre a densidade de carga e o raio do horizonte, como $\phi \sim 1/2$ e $\psi \sim \sqrt{f} \sim 0$.

4.3 Resolução das Equações

A resolução das equações (4.12) e (4.13) deve ser feita numericamente. Nesse processo foi utilizado o software Mathematica e o método de resolução utilizado foi o de Frobenius. Os detalhes da planilha do Mathematica estão no Apêndice C. Como visto anteriormente, é possível ter uma variação nas condições de contorno na fronteira e manter a relação (??). Dessa forma, as condições de contorno no infinito podem ser impostas de modo que haja duas possibilidades de escolhas

$$\psi_0^{(-)} = 0 \implies \psi_0^{(+)} = \frac{\langle \mathcal{O}_2 \rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.18)$$

$$\psi_0^{(+)} = 0 \implies \psi_0^{(-)} = \frac{\langle \mathcal{O}_1 \rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.19)$$

onde os valores esperados $\langle \mathcal{O}_1 \rangle$ e $\langle \mathcal{O}_2 \rangle$ representam operadores de dimensão de escala 1 e 2 respectivamente⁴. O fator segue a normalização utilizada nas referências [29, 30]. Como os valores esperados desses operadores dependem das condições de contorno, que por sua vez estão relacionadas à temperatura, é possível fazer um gráfico do valor desses valores esperados em relação à temperatura. O resultado é apresentado na Figura 4.1

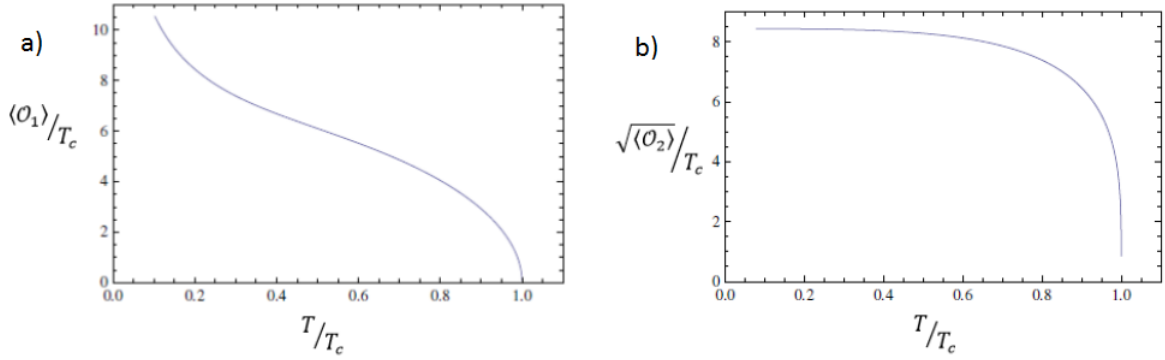


Figura 4.1: Resultados numéricos do valor esperado para: a) o operador $\langle \mathcal{O}_1 \rangle$ e b) o operador $\langle \mathcal{O}_2 \rangle$. T_c é chamado de temperatura crítica e ao passar por essa temperatura, o sistema sofre uma transição de fase, de modo que os condensados assumem valores diferentes de zero abaixo dessa temperatura.

O resultado apresentado na Figura 4.1 merece destaque pois é bem similar a curva de intervalo de energia previsto pela teoria BCS [5], que foi a primeira teoria microscópica a conseguir explicar satisfatoriamente as propriedades dos materiais supercondutores. Esse também é um resultado típico obtido pela teoria de Ginzburg-Landau para a qual

$$\langle \mathcal{O} \rangle \sim \sqrt{T_c - T}.$$

As figuras mostram que os condensados assumem valores diferentes de zero abaixo de uma determinada temperatura crítica denotada por T_c . Isso representa uma quebra espontânea da simetria de calibre do grupo $U(1)$ do eletromagnetismo.

4.4 Supercondutividade

Para realmente mostrar que foi construída uma teoria/modelo para a supercondutividade não é suficiente mostrar que a teoria apresenta um operador cujo condensado tem valor não nulo abaixo de uma temperatura crítica, é necessário mostrar que há uma condutividade infinita. Entretanto, para falar sobre condutividade deve-se levar em conta cargas em movimento, que podem ser apenas em uma única direção espacial, ou seja, podem ser formados campos magnéticos que por sua vez podem produzir campos elétricos. Assim, sem perder a generalidade (devido a invariância rotacional) assumimos perturbação na

⁴Aqui a determinação da dimensão de escala segue a definição dada em (3.19)

direção- x , além de assumir uma dependência do tempo na forma $e^{-i\omega t}$. Utilizando novamente o princípio de mínima ação em (4.11) obtém-se para a componente x do potencial vetor eletromagnético a equação

$$A_x'' + \frac{f''}{f} A_x' + \left(\frac{\omega^2}{f^2} - \frac{2\psi^2}{f} \right) A_x = 0. \quad (4.20)$$

A idéia por trás da resolução dessa equação é exatamente a mesma: cria-se uma expansão no horizonte, integramos saindo de uma fronteira, com algum valor para a condutividade e temperatura características à esta região do espaço. Perto desta borda assintótica conforme, o campo de Maxwell se comporta como

$$A_x = A_x^{(0)} + \frac{A_x^{(1)}}{r} + \dots \quad (4.21)$$

A fórmula de Kubo (3.37), permite-nos computar o componente do campo elétrico E_x e a corrente associada $\langle J_x \rangle$. Lembramos o que a lei de Ohm explicita

$$\chi(\omega) = \frac{i}{\omega} G(\omega, 0) = -\frac{i A_x^{(1)}}{\omega A_x^{(0)}} = -\frac{\langle J_x \rangle}{\dot{A}_x} = \frac{\langle J_x \rangle}{E_x} = \sigma(\omega) \quad (4.22)$$

onde $\sigma(\omega)$ é a condutividade elétrica. Na derivação dessa expressão foi utilizada a correspondência AdS/CFT no sentido do capítulo 3 onde $A_x^{(0)}$ deve ser a fonte e $A_x^{(1)}$ deve ser o operador dual. Na etapa intermediária foi utilizado que a dependência do tempo vem de $\exp[-i\omega t]$ e no último passo foi simplesmente utilizada a lei de Ohm. Os resultados numéricos para algumas escolhas de temperaturas (sempre abaixo da T_c) são apresentados na figura

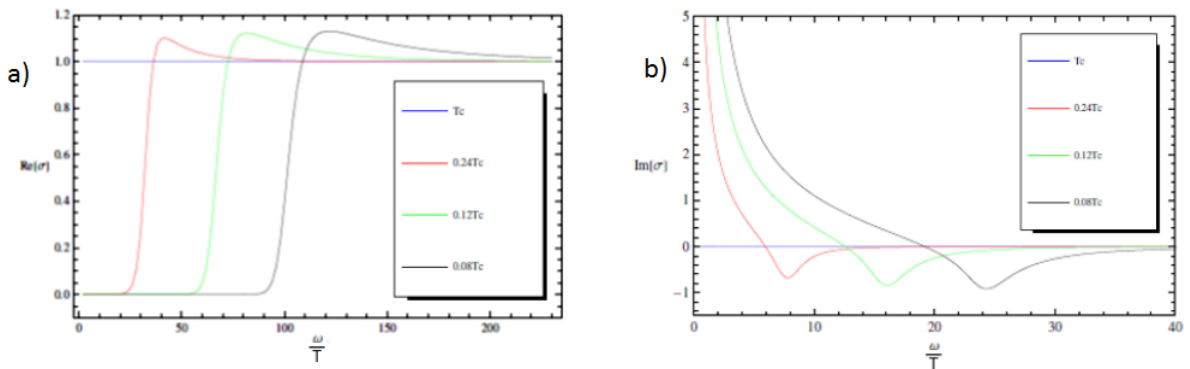


Figura 4.2: Resultados para: a) a parte real da condutividade e b) a parte imaginária da condutividade. Resultados obtidos para as condições de contorno que satisfazer a relação (4.18).

Considerando a relação de Kubo (3.38), destaca-se a componente imaginária da condutividade, Figura (4.2), gráfico b, que no limite para baixas frequências levará ao valor da condutividade física (medida). Os resultados indicam que abaixo da temperatura crítica

tica T_c , as curvas representando a condutividade elétrica (gráfico b) tendem ao infinito, resultando claramente em um supercondutor.

Capítulo 5

Conclusões e Discussões

A dualidade forte/fraca, característica da correspondência holográfica, nos fornece uma ferramenta poderosa para estudar as propriedades de sistemas fortemente interativos por uma teoria da gravidade fracamente acoplada com uma dimensão espacial extra. Embora as dinâmicas que governam a teoria do campo dual e a gravidade sejam aparentemente diferentes, no âmbito da holografia, os cálculos quânticos na teoria de campo dual (fortemente acoplada) podem ser traduzidos em cálculos onde se pode apenas resolver equações diferenciais com condições de contorno adequadas. Nesse contexto, a correspondência holográfica é considerada uma abordagem esperançosa para entender as propriedades de sistemas de elétrons fortemente correlacionados.

O modelo gravitacional analisado é fenomenológico e em tal abordagem os campos duais da gravidade foram construídos usando o conjunto mínimo de campos que capturaram a dinâmica essencial. Essas dinâmicas envolvem apenas a gravidade interagindo com um campo de calibre (gauge) efetivo $U(1)$ e um campo escalar carregado servindo como parâmetro de ordem. Temos muitos graus de liberdade para escolher a forma de interação, bem como o valor dos acoplamentos. Entretanto, apesar de se tratar de um modelo simples, há uma boa descrição das principais características de supercondutores.

Obviamente que o ingrediente chave na construção de um supercondutor dual gravitacional é determinar uma instabilidade de quebra de ao menos uma simetria $U(1)$. Pode-se perguntar se essas dualidades fenomenológicas dos supercondutores são apenas uma nova versão da descrição de Ginzburg-Landau. A resposta é não. De fato, vamos enfatizar duas diferenças fundamentais. Primeiro, a instabilidade no modelo de Ginzburg-Landau deve ser colocada à mão, enquanto que na configuração holográfica surge naturalmente, de forma espontânea. Em segundo lugar, o modelo de Ginzburg-Landau só é válido perto do ponto de transição, enquanto a descrição gravitacional pode caracterizar toda a dinâmica. Para uma determinada ação, a verificação dos valores dos parâmetros do modelo corresponde à análise de várias teorias de campo duais diferentes. Nesse sentido, um modelo holográfico simples tem uma espécie de universalidade, ou seja, os resultados podem ser verdadeiros para uma grande classe de teorias de campo dual, bastante insensíveis aos

detalhes de sua dinâmica.

Seria interessante discutir o efeito das correções quânticas no espaço-tempo, que correspondem às correções $1/N$ na teoria de campo dual [31], pois para a quebra espontânea de uma simetria contínua de calibre $U(1)$ em dimensões $2 + 1$ com temperatura finita, aparentemente há a contradição do teorema de Coleman-Mermin-Wagner.¹ Na verdade, o limite para grandes valores de N evita o teorema. Finalmente, embora o campo rompa a simetria $U(1)$ localmente, de acordo com o dicionário AdS/CFT, o sistema dual consiste em um condensado que quebra uma simetria global de $U(1)$.

Por outro lado, o início da supercondutividade é caracterizado pela condensação de um operador carregado quebrando espontaneamente a simetria de calibre $U(1)$. Assim, estritamente falando, o que se tem é uma teoria dual de superfluido [32, 33, 34, 35]. No entanto, no limite em que a simetria $U(1)$ é “avaliada fracamente”, ainda se pode ver a teoria dual que descreve um supercondutor.

¹Na teoria quântica de campos e mecânica estatística, o teorema de Coleman-Mermin-Wagner afirma que simetrias contínuas não podem ser quebradas espontaneamente a temperatura finita em sistemas com interações de curto alcance nas dimensões $d \leq 2$.

Apêndice A

Princípio de Mínima Ação para Campos

A passagem de uma partícula pontual na posição $x(t)$ para um campo $\phi(x^\mu) = \phi(x, y, z, t)$ pode ser visualizado como a mudança de x para ϕ , e de t para x^μ . O campo escalar obedece a denominada equação de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0.$$

Aqui deve ficar claro que ϕ é interpretado somente como um campo escalar, não como uma função de onda de uma partícula única. Neste caso, deve ser perguntado o que é m ? A resposta é que quando é feita a quantização do campo escalar clássico, chegamos a uma interpretação da partícula, e ela possui massa m .

No caso de campos, a ação pode ser escrita como

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangiana, uma vez que a Lagrangiana é dada por $L = \int \mathcal{L} d^3x$. Nessa expressão foi utilizada a seguinte notação $\partial_\mu \phi \equiv \partial \phi / \partial x^\mu$. Considere então a densidade Lagrangiana para o campo escalar como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}[(\partial_0 \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2] \quad (\text{A.2})$$

O campo ϕ traça uma região 4-dimensional R no espaço 5-dimensional que contem seu gráfico no espaço-tempo, como na figura A.1

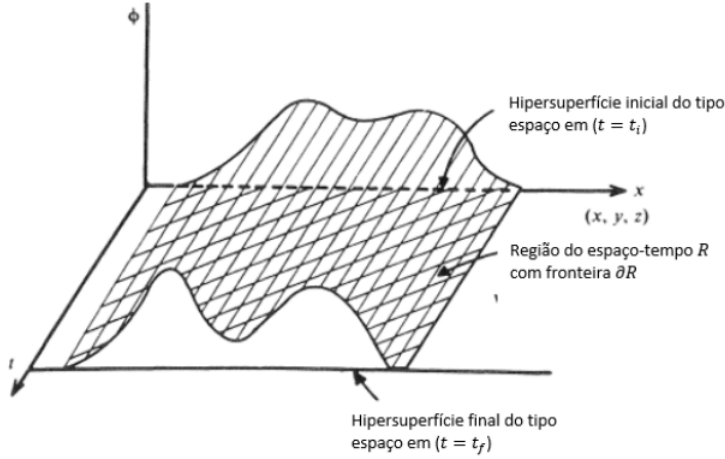


Figura A.1: Um campo ϕ traçando uma região quadridimensional R em um espaço pentadimensional

O início e o final das hypersuperfícies podem ser tomados com $t = t_i$ e $t = t_f$, o qual forma parte da borda ∂R da região R . Agora, sujeitando ambos o campo ϕ e a coordenada x a uma variação que se anula na fronteira, obtém-se

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (\text{A.3})$$

e

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi \quad (\text{A.4})$$

Será considerado o caso geral onde $\mathcal{L}$ pode até depender explicitamente de x^μ

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) \quad (\text{A.5})$$

É importante notar que $\delta\phi$ como definido em (A.4) é meramente a variação funcional em ϕ . ϕ' é comparado com ϕ no mesmo ponto do espaço-tempo x^μ . Pode-se em adição definir a variação total em ϕ , designada como $\Delta\phi$ por:

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x) \quad (\text{A.6})$$

e segue que, para a primeira ordem em δx ,

$$\Delta\phi = \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x) = \delta\phi + (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu \quad (\text{A.7})$$

A variação da ação é

$$\delta S = \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) d^4 x' - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4 x$$

onde $d^4 x' = J(x'|x) d^4 x$, sendo $J(x'|x)$ o Jacobiano da transformação $x \rightarrow x'$. De (A.3)

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta_\lambda^\mu + \partial_\lambda \delta x^\mu$$

então

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu);$$

e conseqüentemente

$$\delta S = \int (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu) d^4 x, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu. \quad (\text{A.9})$$

De (A.3) vemos que $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta \phi$, então (A.8) e (A.9) resultam em

$$\delta S = \int_R \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta \phi) + \partial_\mu(\mathcal{L} \delta x^\mu) \right] d^4 x, \quad (\text{A.10})$$

onde, conforme indicado, a integral é tomada ao longo da região R do espaço-tempo. O terceiro termo da equação acima é uma divergência total. O segundo termo pode ser reescrito para introduzir uma divergência total

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta \phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi,$$

e a integral resultante da divergência total ao longo de R pode ser escrita como uma integral ao longo de ∂R , usando a generalização 4-dimensional do teorema de Gauss ($\oint_{\partial V} A \cdot dS = \int_V \text{div} A dV$). Isto nos dá

$$\delta S = \int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \right\} \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] d\sigma_\mu. \quad (\text{A.11})$$

Já que não há variações de ϕ e x^μ na fronteira de R, então $\delta \phi = 0$ e $\delta x^\mu = 0$ em ∂R . Dessa forma, o segundo termo na equação (A.11) é identicamente nulo, e a condição para uma ação estacionária é que o primeiro termo também deva se anular no geral, independentemente de R

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0} \quad (\text{A.12})$$

Esta é conhecida como a equação de Euler-Lagrange para o campo ϕ .

Apêndice B

Obtenção das equações de movimento

A métrica do espaço anti de Sitter (tempo Euclidiano)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2)$$

Nesse caso o tensor métrico será dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/f(r) \end{pmatrix} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(r) \end{pmatrix}$$

onde, para a solução de Schwarzschild

$$f(r) = r^2 \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right)$$

sendo r_0 conhecido como raio de Schwarzschild.

O determinante da métrica é dado por

$$g = \text{Det}[g_{\mu\nu}] = -r^4$$

e a ação é dada por

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} F_{\alpha\beta} F_{\alpha'\beta'} - m^2 \psi \psi^* - (\nabla_\alpha \psi - ie A_\alpha \psi)^* g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \psi - ie A_\beta \psi) \right]$$

ou

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} F_{\alpha\beta} F_{\alpha'\beta'} - m^2 \psi \psi^* - [(\nabla_\alpha \psi)^* + ie A_\alpha \psi^*] g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \psi - ie A_\beta \psi) \right\}$$

onde

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A^\rho.$$

Continuando com os cálculos, se forem utilizadas as equações de Euler-Lagrange (A.12), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= \sqrt{-g} [-m^2 \psi + ie A_\alpha g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \psi - ie A_\beta \psi)] \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right) &= \partial_\mu \left\{ \sqrt{-g} [\delta_\alpha^\mu g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \psi - ie A_\beta \psi)] \right\}\end{aligned}$$

Considere agora que os campos só dependem de r (não dependem do tempo) ($\partial_\mu \rightarrow \partial_r$) e que $A_x = A_y = A_r = 0$ e $A_0 = \phi$ (potencial elétrico). Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= r^2 [-m^2 \psi - ie A_0 g^{0\beta} (\nabla_\beta \psi - ie A_\beta \psi)] \\ &= r^2 [-m^2 \psi - ie A_0 g^{00} (\nabla_0 \psi - ie A_0 \psi)] \\ &= r^2 \left[-m^2 \psi - ie \phi \left(-\frac{1}{f(r)} \right) (-ie \phi \psi) \right] \\ &= -r^2 \left(m^2 \psi - e^2 \frac{\phi^2 \psi}{f(r)} \right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right) &= -\partial_r \left\{ r^2 [\delta_\alpha^r g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \psi - ie A_\beta \psi)] \right\} \\ &= -\partial_r \left\{ r^2 [g^{r\beta} (\nabla_\beta \psi - ie A_\beta \psi)] \right\} \\ &= -\partial_r \left\{ r^2 [g^{rr} (\nabla_r \psi - ie A_r \psi)] \right\} \\ &= -\partial_r \left\{ r^2 [f \partial_r \psi] \right\} \\ &= -(2rf \partial_r \psi + r^2 (\partial_r f) (\partial_r \psi) + r^2 f \partial_r^2 \psi) \\ &= -(2rf \psi' + r^2 f' \psi' + r^2 f \psi'')\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right) = (r^2 f \psi'' + r^2 f' \psi' + 2rf \psi') - r^2 \left(m^2 \psi - e^2 \frac{\phi^2 \psi}{f} \right) = 0$$

Dividindo por $-r^2 f$, temos

$$\boxed{\psi'' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) \psi' + \left(e^2 \frac{\phi^2}{f^2} - \frac{m^2}{f} \right) \psi = 0} \quad (\text{B.1})$$

Aplicando novamente Euler-Lagrange (A.12) para o campo de calibre, obtem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= \sqrt{-g} [-ie \delta_\alpha^\mu \psi^* g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \psi + i A_\beta \psi) + [(\nabla_\alpha \psi)^* - ie A_\alpha \psi^*] g^{\alpha\beta} (ie \delta_\beta^\mu \psi)] \\ &= r^2 [-ie \psi^* g^{\mu\beta} (\nabla_\beta \psi + i A_\beta \psi) + ie [(\nabla_\alpha \psi)^* - ie A_\alpha \psi^*] g^{\alpha\mu} \psi]\end{aligned}$$

Levando em conta as restrições que os campos só dependem de r e que $A_x = A_y =$

$A_r = 0$ e $A_0 = \phi$ (potencial elétrico), então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} &= r^2 [-ie\psi^* g^{00} (\nabla_0 \psi + iA_0 \psi) + ie [(\nabla_0 \psi)^* - ieA_0 \psi^*] g^{00} \psi] \\
&= r^2 \left[-ie\psi^* \left(-\frac{1}{f(r)} \right) (iA_0 \psi) + ie (-iA_0 \psi^*) \left(-\frac{1}{f(r)} \right) \psi \right] \\
&= -\frac{r^2}{f(r)} [-ie\psi^* (ie\phi \psi) + ie (-ie\phi \psi^*) \psi] \\
&= -2e^2 \frac{r^2}{f(r)} \phi \psi^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu A_0} \right) &= \partial_\mu \frac{\partial}{\partial_\mu A_0} \left\{ \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} F_{\alpha\beta} F_{\alpha'\beta'} \right) \right\} \\
&= \partial_\mu \frac{\partial}{\partial_\mu A_0} \left\{ \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \right) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial_{\alpha'} A_{\beta'} - \partial_{\beta'} A_{\alpha'}) \right] \right\} \\
&= \partial_r \left\{ r^2 \left(-\frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \right) [(\delta_\alpha^r \delta_\beta^0 - \delta_\beta^r \delta_\alpha^0) (\partial_{\alpha'} A_{\beta'} - \partial_{\beta'} A_{\alpha'}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\delta_{\alpha'}^r \delta_{\beta'}^0 - \delta_{\beta'}^r \delta_{\alpha'}^0) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \partial_r \left\{ r^2 \left[(g^{r\alpha'} g^{0\beta'} - g^{0\alpha'} g^{r\beta'}) (\partial_{\alpha'} A_{\beta'} - \partial_{\beta'} A_{\alpha'}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (g^{\alpha r} g^{\beta 0} - g^{\alpha 0} g^{\beta r}) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \partial_r \left\{ r^2 [((-1)(\partial_r A_0) - (-1)(-\partial_r A_0)) + ((-1)(\partial_r A_0) - (-1)(-\partial_r A_0))] \right\} \\
&= \partial_r \{ r^2 (\partial_r \phi) \} \\
&= 2r \partial_r \phi + r^2 \partial_r^2 \phi
\end{aligned}$$

onde foi utilizado o fato que $g^{rr} g^{00} = f \times (-1/f) = -1$. Então, Euler-Lagrange produz

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_0)} \right) = -2e^2 \frac{r^2}{f} \phi \psi^2 + 2r \partial_r \phi + r^2 \partial_r^2 \phi = 0$$

Dividindo por r^2

$$\boxed{\phi'' + \frac{2}{r} \phi' - 2 \frac{e^2 \psi^2}{f} \phi = 0} \tag{B.2}$$

Apêndice C

Planilha Mathematica-Wolfram para Resolução de Equações Diferenciais pelo Método de Frobenius

Programa

A resolução das equações diferenciais obtidas nessa dissertação são obtidas com a utilização do software Mathematica 11¹. Os comentários explicando cada etapa da planilha foram acrescentadas com uso de parenteses e asteriscos (* comentário *) . Os comandos da linguagem utilizada no Mathematica estão em itálico.

- *ClearAll[f,M,L,psieqmororiginal,phieqmororiginal,psieqmZ,fSchwarzschild];*
- *ParallelEvaluate[\$HistoryLength=0];* (* Esse comando faz com que os cálculos sejam executados em paralelo, usando memória mínima *)
- *M=1;L=1;* (* aqui os parâmetros L e M são fixados *)
- (* Definição da equação na função "psieqmororiginal" *)
- *psieqmororiginal=ψ''[r]+(f'[r]/f[r]+2/r) ψ'[r]+(φ[r])^2/(f[r])^2 ψ[r]+2/(L^2 f[r]) ψ[r];*
- (* Definição de *) *fSchwarzschild[r_]=r^2/L^2-M/r;*
- (* Definição da equação *) *phieqmororiginal=φ''[r]+(2/r) φ'[r]+(2(ψ[r])^2/f[r]) φ[r];*
- (* Mudança de Variável $r \rightarrow L/z$ resultado em ψ como função de z *) *psieqmZ=(z^3-1)^2/z^2*(psieqmororiginal/.{ψ→ Function[r,psi[1/r]],φ→ Function[r,phi[1/r]],f→ Function[r,fSchwarzschild[r]]}/.r→ L/z)//FullSimplify;*

¹Wolfram: <http://www.wolfram.com/>

- (* ϕ como função de z *) $phieqmZ=(1/z^2-z)(phieqmorignal/.{\psi\rightarrow Function[r,psi[1/r]],\phi\rightarrow Function[r,phi[1/r]],f\rightarrow Function[r,fSchwarzschild[r]]}/.r\rightarrow L/z)//FullSimplify$
- (*Resolução do sistema de equações diferenciais para ψ e ϕ (Essa parte utiliza o comando NDSolve que resolve equações diferenciais numericamente - Veja no Help do Mathematica mais detalhes)*)
- (*Decide quantos termos serão utilizados na expansão*) Num=6;
- (*Cria um ansatz para ψ e ϕ , cujos parametros ψ_p e ϕ_p são inseridos para abilitar o ajuste das soluções para encontrar os operadores com dimensões 1 e 2 para diferentes temperaturas *)
- $psiAnsatz[z_]=(\psi_p+Sum[a[k]*(1-z)^k,\{k,1,Num\}]);$
- $phiAnsatz[z_]=(1-z)*(\phi_p+Sum[b[p]*(1-z)^p,\{p,1,Num\}]);$
- (*Em primeiro lugar, após os ansatz de Frobenius em torno do horizonte ($z=1$), todos os coeficientes da série de ψ são extraídos com os seguinte comandos*)
- $SetAttributes[a,NHoldAll];$
- $SetAttributes[b,NHoldAll];$
- $exp1=psieqmZ/.{\psi\rightarrow psiAnsatz,phi\rightarrow phiAnsatz}//Simplify;$
- $eq1=ParallelTable[SeriesCoefficient[exp1,\{z,1,i\}],\{i,1,Num\}];$
- (*Em segundo lugar após os ansatz de Frobenius em torno do horizonte ($z=1$), todos os coeficientes da série de ϕ são extraídos com os seguinte comandos*)
- $exp2=phieqmZ/.{\psi\rightarrow psiAnsatz,phi\rightarrow phiAnsatz}//Simplify;$
- $eq2=ParallelTable[SeriesCoefficient[exp2,\{z,1,i\}],\{i,1,Num\}];$
- (*Usando as tabelas acima é possível encontrar os coeficientes em termos de ψ_p e ϕ_p *)
- $sol=First[Solve[\{eq1==0,eq2==0\},Join[Table[a[i],\{i,Num\}],Table[b[i],\{i,Num\}]]];$
- (*Obtem as soluções resolvendo as equações diferenciais com o comando NDSolve.*)
- $Clear[psisol,phisol];$
- $psisol[\psi_{prep_},\phi_{prep_}][z_]=psiAnsatz[z]/.sol/.{\psi_p\rightarrow\psi_{prep},\phi_p\rightarrow\phi_{prep}};$
- $phisol[\psi_{prep_},\phi_{prep_}][z_]=phiAnsatz[z]/.sol/.{\psi_p\rightarrow\psi_{prep},\phi_p\rightarrow\phi_{prep}};$

- (*Usa a expansão de Frobenius como condição inicial em uma distância deltado horizonte*)
- $\text{delta}=1/100000;$
- $\text{deltaHorizon}=1/100000000;$
- $\text{Clear}[\text{diffSol}];$
- $\text{diffSol}[\psi_{\text{prep_?NumberQ}}, \phi_{\text{prep_?NumberQ}}] := \text{NDSolve}[\{\text{phieqmZ} = 0, \quad \text{psi-}$
 $\text{eqmZ} = 0, \quad \text{phi}[1-\text{delta}] == \text{phisol}[\psi_{\text{prep}}, \phi_{\text{prep}}][1-\text{delta}], \text{phi}'[1-\text{delta}] ==$
 $\text{phisol}[\psi_{\text{prep}}, \phi_{\text{prep}}]'[1-\text{delta}], \text{psi}[1-\text{delta}] == \text{psisol}[\psi_{\text{prep}}, \phi_{\text{prep}}][1-\text{delta}], \text{psi}'[1-$
 $\text{delta}] == \text{psisol}[\psi_{\text{prep}}, \phi_{\text{prep}}]'[1-\text{delta}]\}, \{\text{psi}, \text{phi}\}, \{z, 1-\text{deltaHorizon}, \text{delta}\},$
 $\text{WorkingPrecision} \rightarrow 30, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 30, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 20, \text{MaxSteps} \rightarrow 100000,$
 $\text{InterpolationOrder} \rightarrow \text{All}][[1]];$

Esse é o programa básico para se obter as soluções das equações. Essas são soluções que dependem dos parâmetros ψ_p e ϕ_p que podem ser utilizados para ajustar à solução no horizonte de modo que se possa obter, para cada temperatura, uma solução diferente.

Apêndice D

O funcional gerador

A amplitude de transição de $q_i t_i$ para $q_f t_f$ é dada pela integral de caminho de Feynman

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = N \int Dq \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int dt L(q, \dot{q})\right]$$

no caso em que $H = (p^2/2m) + V(q)$, o qual é suficientemente geral para o presente propósito, e as condições de contorno do problema são

$$q(t_f) = q_f \text{ e } q(t_i) = q_i.$$

Esse tipo de condição de contorno será apropriado no movimento de partículas clássicas, mas isso não é o que encontramos na teoria de campos. É análogo se fosse, por exemplo, $\psi(t_i) = \psi_i, \psi(t_f) = \psi_f$. Mas o que realmente acontece é essas partículas são criada (por exemplo, por colisão), elas interagem, e são destruídas por observação (i.e. por detecção). Por exemplo, medindo a seção diferencial cruzada $d\sigma/d\Omega$ para o espalhamento πN , o pión é criado por uma colisão NN, e depois é destruído quando é detectado.

O ato da criação pode ser representado por uma fonte, e a destruição por um vertedouro, isso é, na forma de falar da teoria de campos. As condições de contorno do problema podem ser representados pela o vácuo em $t = -\infty$ ocorre uma evolução com a criação da partícula e termina-se no vácuo a $t \rightarrow \infty$, via criação, interação e destruição de uma partícula, através da ação de uma fonte. Deseja-se saber a amplitude de transição vácuo-a-vácuo na presença de uma fonte.

Esta formulação, usando a linguagem das fontes, é devido a Schwinger(1969). A fonte $J(t)$ é representada através da mudança na Lagrangiana:

$$L \rightarrow L + \hbar J(t)q(t). \quad (\text{D.1})$$

Se $|0, t >^J$ é o vetor estado fundamental (vácuo) na presença da fonte, então a amplitude transição é

$$Z[J] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \quad (D.2)$$

onde um fator de proporcionalidade foi omitido (normalização). Isso é conhecido como amplitude vácuo-à-vácuo. A fonte $J(t)$ faz um análogo ao de uma corrente eletromagnética, a qual age como uma “fonte” do campo eletromagnético. O campo escalar carregado ϕ , por exemplo, tem a lagrangeana e sua interação com o campo eletromagnético A^μ dado pela Lagrangeana na forma $J_\mu A^\mu$. A corrente J_μ age como uma fonte do campo eletromagnético, e essa idéia foi generalizada por Schwinger na seguinte formulação: qualquer campo ϕ pode ser “criado” por uma fonte apropriada J e $Z[J]$ é um funcional de J . A fonte $J(t)$ é não nula somente entre os tempos t e t' ($t < t'$). Considerando T como um tempo antes de t , e T' um tempo depois de t' , (no final faz-se $T \rightarrow -\infty$ e $T' \rightarrow \infty$ e recupera-se a amplitude vácuo-à-vácuo) então a amplitude de transição é

$$\langle Q'T'|QT \rangle^J = N \int Dq \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} dt (L + \hbar Jq)\right].$$

Pode-se escrever

$$\langle Q'T|QT \rangle^J = \int dq' dq \langle Q'T'|q't' \rangle \langle q't'|qt \rangle^J \langle qt|QT \rangle \quad (D.3)$$

Levando em conta que

$$\langle Q'T'|q't' \rangle = \langle Q'| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} HT'\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} Ht'\right) |q' \rangle = \sum_m \phi_m(Q') \phi_n^*(Q) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n(t - T)\right] \quad (D.4)$$

onde $\phi_m(q)$ são um conjunto completo de autoestados de energia, similarmente,

$$\langle qt|QT \rangle = \sum_n \phi_n(q) \phi_n^*(Q) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n(t - T)\right]$$

Substituindo em (D.3) e utilizando um pequeno “truque” para isolar o estado fundamental, que consiste em utilizar os limites $T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}$ e $T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$, com um δ um angulo arbitrário $\leq \pi/2$, obtem-se que a parte imaginária de T é $i|T| \sin\delta$, de modo que o termo $(i/\hbar)E_n T$ contem a parte real $-i|T| \sin\delta$ que dá um fator de amortecimento $\exp\{(-1/\hbar)E_n |T| \sin\delta\}$. Na somatória (D.4), então, todos os termos sofrem amortecimento, mas quanto maior é o E_n mais ele é amortecido. Consequentemente o termo que sofre menos amortecimento é o com menor E_n , ou seja, é o E_0 , o menor estado de energia, ou vácuo. Então na somatória somente a contribuição do estado fundamental (vácuo) sobrevive. Esta é a característica desejável. Então,

$$T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}, T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$$

$$\lim_{\substack{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \langle Q'T'|QT \rangle^J = \phi_0^*(Q)\phi_0(Q') \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_0(t-T)\right] \int dq' dq \phi_0^*(q', t') \langle q't'/qt \rangle^J \phi_0(q, t)$$

ou

$$\int dq' dq \phi_0^*(q', t') \langle q't'/qt \rangle^J \phi_0(q, t) = \lim_{\substack{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \frac{\langle Q'T'|QT \rangle^J}{\phi_0^*(Q)\phi_0(Q') \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_0(t-T)\right]}.$$

O lado esquerdo é o valor esperado para o estado fundamental da transição de amplitude. O tempo t' e $-t$ podem ser tomados tão grande quanto quiser, então o lado esquerdo torna-se $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$. O denominador no lado direito é simplesmente um fator numérico, então temos

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \propto \lim_{\substack{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} N \int \mathcal{D}Q \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} dt [L(Q, Q') + \hbar J Q]\right\}.$$

Finalmente, ao invés de rodar o eixo do tempo (acrecetar a fase δ) como foi feito, a contribuição do estado fundamental pode ser isolada adicionando uma pequena parte negativa imaginária na Hamiltoniana (energia) o que resulta em

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + \hbar J q + \frac{1}{2} i \varepsilon q^2)\right] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J. \quad (\text{D.5})$$

Dessa definição de $Z[J]$ está claro que

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)} = i \int \mathcal{D}q q(t_1) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + \hbar J q + \frac{1}{2} i \varepsilon q^2)\right].$$

Consequentemente,

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} = i^n \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + \hbar J q + \frac{1}{2} i \varepsilon q^2)\right], \quad (\text{D.6})$$

o que dá , colocando $J=0$:

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \right|_{J=0} = i^n \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + \frac{1}{2} i \varepsilon q^2)\right]. \quad (\text{D.7})$$

Entretanto, com as técnicas das integrais de caminho de Feynman (veja por exemplo a referência [36]), pode-se obter

$$< q_f t_f | T[q(t_1)q(t_2)...q(t_n)] | q_i t_i > = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} q(t_1)q(t_2)...q(t_n) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [pq' - H(p, q)] dt \right\},$$

onde $T[q(t_1)q(t_2)...q(t_n)]$ representa o produto ordenado no tempo, preservando causalidade. No caso em que $H = p^2/2m + V(q)$ isso se torna

$$< q_f t_f | T[q(t_1)q(t_2)...q(t_n)] | q_i t_i > = N \int \mathcal{D}q q(t_1)q(t_2)...q(t_n) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L dt \right\}.$$

Portanto, o valor esperado no vácuo do produto ordenado no tempo (vácuo-a-vácuo) é a derivada funcional em relação à fonte,

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)} \Big|_{J=0} \propto i^n < 0, \infty | T[q(t_1)...q(t_n)] | 0, -\infty >. \quad (D.8)$$

Referências Bibliográficas

- [1] Roditi, Itzhak., Dicionário Houaiss de Física. Instituto Antonio Houaiss; 2005, 95.
- [2] Anaxágoras y la Idea de Holograma. Disponível em: <https://filosofia.laguia2000.com/filosofos-pre-socraticos/anaxagoras-y-la-idea-de-holograma> Acesso em : 12 de novembro de 2018.
- [3] Prof. J.J. Lunazzi. Introdução à holografia. Disponível em: https://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/prof_lunazzi/ensino_de_holografia/introducao_a_holografia_2008.pdf Acesso em: 12 de novembro de 2018.
- [4] Marco Aurélio da Silva Santos. Supercondutividade, o que é isso?. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/supercondutividade-que-isso.htm> Acesso em: 12 de novembro de 2018.
- [5] J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schieffer. Phys. Rev.108, 1175 (1957).
- [6] J. M. Maldacena, The Large N limit of superconformal eld theories and supergravity, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231 [hep-th/9711200].
- [7] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Gauge theory correlators from noncritical string theory, Phys. Lett. B 428, 105 (1998) [hep-th/9802109].
- [8] Horowitz G T, Polchinski J. Gauge/Gravity Duality. In: Oriti D, ed. Approaches to Quantum Gravity. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 169–186. [arXiv: 0602037 [gr-qc]]
- [9] Lee S S. A Non-Fermi Liquid from a Charged Black Hole: A Critical Fermi Ball. Phys Rev D, 2009, 79: 086006. [arXiv: 0809.3402 [hep-th]]
- [10] Liu H, McGreevy J, Vegh D. Non-Fermi liquids from holography. Phys Rev D, 2011, 83: 065029. [arXiv: 0903.2477 [hep-th]]
- [11] Fujita M, LiW, Ryu S, et al. Fractional quantum hall effect via holography: Chernsimons, edge states, and hierarchy. J High Energy Phys, 2009, 0906: 066. [arXiv: 0901.0924 [hep-th]]

- [12] Bergman O, Jokela N, Lifschytz G, et al. Quantum hall effect in a holographic model. *J High Energy Phys*, 2010, 1010: 063. [arXiv: 1003.4965 [hep-th]]
- [13] Hartnoll S A, Polchinski J, Silverstein E, et al. Towards strange metallic holography. *J High Energy Phys*, 2010, 1004: 120. [arXiv: 0912.1061 [hep-th]]
- [14] Kim B S, Kiritsis E, Panagopoulos C. Holographic quantum criticality and strange metal transport. *New J Phys*, 2012, 14: 043045. [arXiv: 1012.3464 [cond-mat.str-el]]
- [15] Hoyos-Badajoz C, Jensen K, Karch A. A holographic fractional topological insulator. *Phys Rev D*, 2010, 82: 086001. [arXiv: 1007.3253 [hep-th]]
- [16] Ryu S, Takayanagi T. Topological insulators and superconductors from string theory. *Phys Rev D*, 2010, 82: 086014. [arXiv: 1007.4234 [hep-th]]
- [17] Karch A, Maciejko J, Takayanagi T. Holographic fractional topological insulators in 2+1 and 1+1 dimensions. *Phys Rev D*, 2010, 82: 126003. [arXiv: 1009.2991 [hep-th]]
- [18] Fujita M, Harrison S, Karch A, et al. Towards a holographic bosehubbard model. [arXiv: 1411.7899 [hep-th]]
- [19] Herzog C P. A holographic prediction of the deconfinement temperature. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 091601. [arXiv: 0608151 [hep-th]]
- [20] Colangelo P, Giannuzzi F, Nicotri S. Holography, heavy-quark free energy, and the QCD phase diagram. *Phys Rev D*, 2011, 83: 035015. [arXiv: 1008.3116 [hep-ph]]
- [21] Chen H -Y, Hashimoto K, Matsuura S. Towards a holographic model of color-flavor locking phase. *J High Energy Phys*, 2010, 1002: 104. [arXiv: 0909.1296 [hep-th]]
- [22] Huang M, He S, Yan Q S, et al. Confront holographic QCD with regge trajectories. *Eur Phys J C*, 2010, 66: 187–196. [arXiv: 0710.0988 [hep-ph]]
- [23] van der Schee W. Gravitational collisions and the quark-gluon plasma. [arXiv: 1407.1849 [hep-th]]
- [24] Rangamani M. Gravity and hydrodynamics: Lectures on the fluidgravity correspondence. *Class Quant Grav*, 2009, 26: 224003. [arXiv: 0905.4352 [hep-th]]
- [25] Bredberg I, Keeler C, Lysov V, et al. From navier-stokes to einstein. *J High Energy Phys*, 2012, 1207: 146. [arXiv: 1101.2451 [hep-th]]
- [26] E. Witten, Anti-de Sitter space and holography, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, 253 (1998) [hep-th/9802150].
- [27] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, \Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions, arXiv:1101.0618 [hep-th].

- [28] Y. Kim, I. J. Shin and T. Tsukioka, Holographic QCD: Past, Present, and Future, Prog. Part. Nucl. Phys. 68 (2013) 55 [arXiv:1205.4852 [hep-ph]].
- [29] S.A. Hartnoll, C.P. Herzog and G.T. Horowitz, Building a holographic superconductor, Phys. Rev. Lett. 101 (2008) 031601 .
- [30] S.A. Hartnoll, C.P. Herzog and G.T. Horowitz, Holographic superconductors, JHEP12(2008)015.
- [31] Anninos D, Hartnoll S A, Iqbal N. Holography and the Coleman-Mermin-Wagner theorem. Phys Rev D, 2010, 82: 066008. [arXiv: 1005.1973 [hep-th]]
- [32] Herzog C P, Kovtun P K, Son D T. Holographic model of superfluidity. Phys Rev D, 2009, 79: 066002. [arXiv: 0809.4870 [hep-th]]
- [33] Brihaye Y, Hartmann B. Holographic superfluid/fluid/insulator phase transitions in 2+1 dimensions. Phys Rev D, 2011, 83: 126008. [arXiv: 1101.5708 [hep-th]]
- [34] Arean D, Bertolini M, Krishnan C, et al. Type IIB holographic superfluid flows. J High Energy Phys, 2011, 1103: 008. [arXiv: 1010.5777 [hep-th]]
- [35] Wu Y B, Lu J W, Zhang W X, et al. Holographic p-wave superfluid. Phys Rev D, 2014, 90: 126006. [arXiv: 1410.5243 [hep-th]]
- [36] Ryder, L.H., Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 1996.