

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**GUSTAVO OLIVEIRA MADEIRA**

**Estudo da evolução orbital de partículas em ressonância de corrotação e Lindblad e sob  
influência de satélites coorbitais : aplicação aos arcos planetários**

Guaratinguetá

2019

**Gustavo Oliveira Madeira**

**Estudo da evolução orbital de partículas em ressonância de corrotação e Lindblad e sob influência de satélites coorbitais : aplicação aos arcos planetários**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

Guaratinguetá  
2019

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| M181e | <p>Madeira, Gustavo Oliveira</p> <p>Estudo da evolução orbital de partículas em ressonância de corotação e Lindblad e sob influência de satélites coorbitais: aplicação aos arcos planetários / Gustavo Oliveira Madeira– Guaratinguetá, 2019.</p> <p>108 f : il.</p> <p>Bibliografia: f. 106-108</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019.</p> <p>Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Silvia Maria Giuliatti Winter</p> <p>1. Satélites 2. Órbitas 3. Perturbação (Astronomia) I. Título.</p> <p>CDU 629.783(043)</p> |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

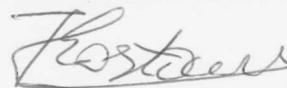
Ana Cristina Figueiredo Loureiro  
Bibliotecária CRB-8/7094

**GUSTAVO OLIVEIRA MADEIRA**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”**

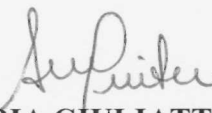
**PROGRAMA: FÍSICA**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**



**Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov**  
Coordenador

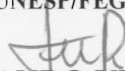
**BANCA EXAMINADORA:**



**Prof.ª. Dr.ª. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER**  
Orientadora / UNESP/FEG



**Prof. Dr. ANDRÉ IZIDORO FERREIRA DA COSTA**  
UNESP/FEG



**Prof. Dr. FERNANDO VIRGILIO ROIG**  
Observatório Nacional

*Fevereiro de 2019*

## **DADOS CURRICULARES**

### **GUSTAVO OLIVEIRA MADEIRA**

**NASCIMENTO** 03/12/1994 - Cachoeira Paulista / SP

**FILIAÇÃO** José Márcio Madeira  
Liliam Aparecida de Souza Oliveira

**2012 / 2016** Bacharelado em Física  
UNESP Guaratinguetá

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que contribuíram para a elaboração deste trabalho, que não é mérito solitário mas de diversas pessoas. Agradeço meus pais pela minha formação moral e ética. Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro. Agradeço meus amigos pelas horas de lazer, em especial Luana Liberato, Victor Lattari e Tiago Francisco, que estiveram ao meu lado durante toda Graduação e Mestrado. Agradeço aos Profs. André Izidoro e Fernando Roig por suas críticas construtivas e se disponibilizarem a avaliar minha dissertação, ao Prof. Othon Winter, que como membro da minha banca de Qualificação fez diversas sugestões ao meu trabalho, e ao Prof. Rafael Sfair por me ajudar em diversos momentos. Agradeço aos professores e professoras que me ensinaram o que sei e influenciaram minha forma de ver o mundo. Por último agradeço minha orientadora, Professora Silvia Giuliatti Winter, por ser minha mentora há tantos anos e ter me feito o profissional que sou hoje.

Este trabalho contou com o apoio das seguintes entidades:

Processo 2016/24488-0, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES) - código de financiamento 001.

*“Se vais entrar dentro de ti arma-te até aos dentes”  
(Antônio Callado)*

## RESUMO

Orbitando Saturno encontram-se Anthe, Methone e Aegaeon, três pequenos satélites coorbitais a arcos planetários e em ressonância de corrotação excêntrica com o satélite Mimas, do tipo 10:11 para o arco de Anthe, 14:15 para o arco de Methone e do tipo 7:6 para o arco do anel G (arco coorbital ao satélite Aegaeon). Neste trabalho é estudada a dinâmica de partículas micrométricas em ressonância de corrotação excêntrica, sob o efeito de forças perturbadoras (força de radiação solar e arrasto do plasma) e da influência gravitacional de pequenos satélites. A ressonância de corrotação excêntrica  $m + 1:m$  é responsável por criar  $m$  sítios nos quais as partículas permanecem azimutalmente confinadas. Quando incluídos satélites hipotéticos nos sítios, as partículas rapidamente colidem como estes, de modo que os sítios ficam vazios em algumas centenas de anos. Ainda foi constatado que existe uma correlação entre o tempo de vida das partículas com o tamanho físico do satélite, sendo verificado um aumento do tempo de vida dos sítios com o raio do satélite, para satélites com raios da ordem de metros, passando a decrescer para satélites com raios da ordem de quilômetros. Tal resultado se deve ao fato dos satélites pequenos tenderem a apenas perturbar a órbita das partículas, as quais realizam maiores excursões em relação ao centro do sítio, enquanto satélites maiores confinam as partículas azimutalmente, de modo que estas permanecem em ressonância de corrotação com Mimas e com o satélite. Efeitos gerados no semi-eixo maior pela força de radiação solar e arrasto do plasma levam as partículas a saírem do confinamento e os efeitos na excentricidade promovem cruzamentos da trajetória das partículas com a órbita dos satélites, facilitando colisões. Supondo serem formados por partículas menores que  $10\ \mu m$ , os sítios das ressonâncias de corrotação 7:6, 14:15 e 10:11 têm tempos de vida máximos menores que 140, 25 e 15 anos, respectivamente. O tempo para estes reporem o material por meio do processo de colisões com projéteis interplanetários é, no mínimo, uma ordem de grandeza maior que os tempos de vida obtidos. Logo, os arcos devem ser estruturas transientes. Analisando o arco do anel G, vê-se que partículas menores que  $10\ \mu m$  saem do arco ou colidem com Aegaeon em menos de 30 anos, enquanto as ejetadas da superfície deste satélite possuem tempos de vida máximos de 300 anos, de modo que o satélite não corresponde a fonte de material para o arco e para o anel. A dinâmica dos arcos do anel Adams de Netuno também foi analisada, supondo que estes são confinados azimutalmente por quatro satélites coorbitais. Verifica-se que dois dos arcos se encontram em ressonância de Lindblad excêntrica 42:43 com Galatea e dois não, de modo que as partículas fora da ressonância sofrem encontros próximos com os satélites e saem do confinamento. Incluindo a força de radiação solar, todas as partículas tendem a sair dos arcos, entretanto as provenientes dos dois primeiros arcos permanecem na região próxima.

**PALAVRAS-CHAVE:** Arcos planetários. Anéis planetários. Ressonâncias orbitais. Forças dissipativas. Satélites.

## ABSTRACT

Anthe, Methone and Aegaeon are three tiny saturnian moons. They are coorbital to planetary arcs and are trapped in corotation eccentric resonances with Mimas: 10:11 Anthe's arc, 14:15 Methone's arc and 7:6 G ring arc (Aegaeon's arc). In this work we studied the dynamics of the particles trapped in the corotation eccentric resonances under the effects of dissipative forces (solar radiation force and plasma drag) and coorbitals moonlets. The  $m + 1:m$  corotation eccentric resonance creates  $m$  sites where the particles will be azimuthally confined for more than 100 thousand years. When satellites are located in the sites, the particles quickly collide with them and these sites are cleaned in a few hundred years. We verified an increase in the lifetime of the sites with the satellites' radii, for moons with radius of the order of meters, and a decrease in the lifetime with an increase of the satellites' radii, for kilometer-sized satellites. Satellites with radii of the order of meters only disturb the particles' orbits, so the particles perform large excursions in relation to the site's center. Satellites with kilometric radii azimuthally confine the particles, which remain in resonance with Mimas and with the coorbital satellite. The solar radiation force and plasma drag effects on the semimajor axis remove particles from the azimuthal confinement and the effects on the eccentricity favor collisions with the satellites. The sites of the 7:6, 14:15 and 10:11 corotation resonance, if composed by particles smaller than  $10\ \mu m$ , have lifetimes of less than 140, 25 and 15 years, respectively. The time to the satellites replenish the site due the interplanetary projectiles collisions process are, at least, an order of magnitude greater than the sites' lifetimes. Thus, the arcs are transient structures. For the G ring arc, we obtain that particles smaller than  $10\ \mu m$  leave the arc or collide in less than 30 years and those ejected by Aegaeon collide in less than 300 years. So, Aegaeon is not the arc and ring source. We also analyzed the Neptune's ring arcs, assuming that they are azimuthally confined by coorbital moons. We verified that the Fraternité and Egalité arcs are in 42:43 Lindblad eccentric resonance with Galatea and the Liberté and Courage arcs do not. Due to this, the particles of the both last ones pass through close encounters with the satellites and leave the arcs. If we include the solar radiation force, all the particles leave the arcs, however the particles initially at Fraternité and Egalité remain in the close region. So we explain the dispersion of the arcs of Neptune.

**KEYWORDS:** Planetary arcs. Planetary rings. Orbital resonances. Dissipative forces. Satellites.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1  | Movimento de seis partículas em RCE 7:6 (em preto) e do satélite perturbador (em vermelho), no sistema girante com a frequência angular central da ressonância ( $n_c$ ). . . . .                                                                                                                                            | 37 |
| Figura 2  | Variação do semi-eixo maior ( $a$ ) e ângulo ressonante ( $\phi$ ) do satélite Aegaeon. . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 38 |
| Figura 3  | Movimento de duas partículas (em preto) com excentricidade inicial de $10^{-2}$ presas em RLE 14:15 com Mimas (em vermelho), no sistema girante com o movimento orbital de Mimas. . . . .                                                                                                                                    | 41 |
| Figura 4  | Sítios formados pela RCE 7:6, 14:15, 10:11 com Mimas, de cima para baixo. Em preto, estão as partículas que se encontram em RCE, enquanto as partículas em cinza estão fora do confinamento. Os pontos em vermelho, azul e verde se referem às partículas da Figura 6. . . . .                                               | 46 |
| Figura 5  | Confinamento azimuthal para as RCE 7:6, 14:15, 10:11 com Mimas, de cima para baixo. Em vermelho é apresentado o movimento de Mimas no sistema girante com a frequência da ressonância e em preto, o das partículas. . . . .                                                                                                  | 47 |
| Figura 6  | Variação temporal do semi-eixo maior de 7 partículas presas à RCE 7:6, 14:15, 10:11 com Mimas, de cima para baixo. Em azul e vermelho encontram-se as partículas inicialmente internas e externas, respectivamente, ao centro dos sítios, enquanto as partículas em verde foram iniciadas na posição central destes. . . . . | 48 |
| Figura 7  | Variação temporal do ângulo ressonante de corotação e de Lindblad, e excentricidade para uma partícula iniciada na RCE 14:15 com Mimas. O semi-eixo maior inicial da partícula é $a = 194226$ km e a defasagem na longitude média em relação ao centro do sítio é $\Delta\lambda = 0^\circ$ . . . . .                        | 49 |
| Figura 8  | Variação temporal do ângulo ressonante de corotação e de Lindblad, e excentricidade para uma partícula iniciada na RCE 14:15 com Mimas. O semi-eixo maior inicial da partícula é $a = 194240$ km e a defasagem na longitude média em relação ao centro do sítio é $\Delta\lambda = 2^\circ$ . . . . .                        | 50 |
| Figura 9  | Variação temporal do ângulo ressonante de corotação e de Lindblad, e excentricidade para uma partícula iniciada na RCE 10:11 com Mimas. O semi-eixo maior inicial da partícula é $a = 197646$ km e a defasagem na longitude média em relação ao centro do sítio é $\Delta\lambda = 0^\circ$ . . . . .                        | 51 |
| Figura 10 | Variação temporal do ângulo ressonante de corotação e de Lindblad, e excentricidade para uma partícula iniciada na RCE 7:6 com Mimas. O semi-eixo maior inicial da partícula é $a = 167477$ km e a defasagem na longitude média em relação ao centro do sítio é $\Delta\lambda = 0^\circ$ . . . . .                          | 52 |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 11 | Trajetoária de uma partícula inicialmente a $\Delta\lambda = 2^\circ$ do centro de um sítio da RCE 7:6, considerando um s t lite (ponto em magenta) com razão de massa em relação a Mimas ( $\alpha$ ) de $10^{-8}$ , $10^{-5}$ e $10^{-2}$ , de cima para baixo. As unidades estão normalizadas pelo semi-eixo maior central da ressonância ( $a_c = 167493.5$ km). Em preto e em azul encontram-se as trajetórias da partícula para os casos em que são incluídos apenas Mimas e apenas o s t lite, respectivamente. Já as linhas em vermelho representam as trajetórias da partícula para os casos incluindo ambos os corpos. . . . . | 53 |
| Figura 12 | Variação temporal do ângulo azimutal de uma partícula inicialmente a $\Delta\lambda = 2^\circ$ do centro de um sítio da RCE 7:6. A linha tracejada corresponde a posição do ponto de equilíbrio do sítio, enquanto as diferentes cores representam os valores de $\alpha$ assumidos. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 54 |
| Figura 13 | Tempo de vida dos sítios das RCE 7:6, 14:15 e 10:11, em função do raio do s t lite. Na paleta de cores é dada a porcentagem de partículas que permanecem em RCE. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 56 |
| Figura 14 | Acelerações devido ao achatamento planetário (vermelho), Mimas (roxo), pressão de radiação solar (verde) e arrasto do plasma (azul) para partículas nas RCE 7:6, 14:15 e 10:11. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 58 |
| Figura 15 | Variação temporal do semi-eixo maior, ângulo da ressonância de corotação e excentricidade para uma partícula de $1\ \mu m$ . As cores vermelho e azul correspondem ao efeito gerado pela componente da Poynting-Robertson e da pressão de radiação, respectivamente, enquanto a cor preta corresponde ao caso com a força de radiação solar completa. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                            | 60 |
| Figura 16 | Variação temporal do $a$ , $\phi^{(c)}$ e $e$ para uma partícula de $10\ \mu m$ . As cores vermelho e azul correspondem ao efeito gerado pela componente da Poynting-Robertson e da pressão de radiação, respectivamente, enquanto a cor preta corresponde ao caso com a força de radiação solar completa. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 61 |
| Figura 17 | Variação temporal do semi-eixo maior e ângulo ressonante da corotação para uma partícula de $1\ \mu m$ devido à componente de Poynting-Robertson. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 62 |
| Figura 18 | Ilustração do movimento de uma partícula em ressonância de corotação no sistema girante com (linha tracejada) e sem (linha cheia) o efeito do arrasto do plasma. Imagem modificada de Sun et al. (2017) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 64 |
| Figura 19 | Variação temporal do $\phi$ , $\Delta a$ e $e$ de uma partícula de $10\ \mu m$ com defasagem inicial de $\Delta a = 10$ km e $\Delta\lambda = -5^\circ$ em relação ao centro de um sítio da RCE 14:15. A cor preta e vermelha correspondem ao caso sem e com o arrasto do plasma, respectivamente. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 65 |
| Figura 20 | Variação temporal do $\phi$ , $\Delta a$ e $e$ de uma partícula de $10\ \mu m$ com defasagem inicial de $\Delta a = -30$ km e $\Delta\lambda = 0^\circ$ em relação ao centro de um sítio da RCE 14:15. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 66 |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 21 | Variação temporal de $\phi$ , $\Delta a$ e $e$ de uma partícula de $10 \mu m$ com defasagem inicial de $\Delta a = -10$ km e $\Delta \lambda = 6^\circ$ em relação ao centro de um sítio da RCE 10:11. As cores vermelho, azul e preta correspondem aos casos com apenas o AP, FRS e com ambas perturbações, respectivamente. . . . .                                                                   | 67 |
| Figura 22 | Tempo de vida dos sítios ressonantes, quando incluído um satélite no sistema. O primeiro sítio corresponde ao que se encontra imerso o satélite enquanto os demais não possuem corpos maiores. As partículas de $1 \mu m$ estão em azul e as de $10 \mu m$ estão em roxo. Os casos não apresentados na figura correspondem àqueles em que os sítios possuem tempo de vida superior a 1000 anos. . . . . | 68 |
| Figura 23 | Tempo de vida do sítio ressonante para os raios de satélite considerados, com as perturbações não gravitacionais. A coluna da esquerda corresponde às partículas de $1 \mu m$ , enquanto a da direita às de $10 \mu m$ . Na paleta de cores é dada a porcentagem de partículas que permanecem em RCE. . . . .                                                                                           | 69 |
| Figura 24 | Tempo para produção de material (em preto) e para sua remoção, para os casos sem (em vermelho) e com perturbações. Para os casos perturbados, são consideradas partículas de $1 \mu m$ (em azul) e $10 \mu m$ (em roxo). . . . .                                                                                                                                                                        | 74 |
| Figura 25 | Semi-eixo maior e longitude média das partículas em RCE 14:15 nos tempos 0, 1, 3, 5, 10, 25, 50 e 75 anos. As partículas possuem raio de $10 \mu m$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 76 |
| Figura 26 | Taxa de partículas confinadas azimutalmente nos sítios da RCE 7:6, 14:15 e 10:11 para diversos tempos de integração. Todas as partículas foram iniciadas no sítio “3”, estando as de raio de $1 \mu m$ na coluna da esquerda e as de $10 \mu m$ na coluna da direita. . . . .                                                                                                                           | 77 |
| Figura 27 | Ângulo azimutal $\theta$ no sistema girante e ângulo ressonante $\phi$ de uma partícula iniciada com $\Delta a = -30$ km e $\Delta \lambda = 2^\circ$ em relação ao centro de um sítio da RCE 10:11. A partícula possui raio de $10 \mu m$ . . . . .                                                                                                                                                    | 77 |
| Figura 28 | Ângulo azimutal $\theta$ no sistema girante e ângulo ressonante $\phi$ de uma partícula de $1 \mu m$ iniciada com $\Delta a = 16$ km e $\Delta \lambda = -2^\circ$ em relação ao centro de um sítio da RCE 7:6. A linha pontilhada representa a posição angular do satélite com raio de Aegaeon imerso no sítio “4” (caso 3). . . . .                                                                   | 78 |
| Figura 29 | Ângulo azimutal $\theta$ no sistema girante e ângulo ressonante $\phi$ de uma partícula de $10 \mu m$ iniciada com $\Delta a = -26$ km e $\Delta \lambda = 5^\circ$ em relação ao centro de um sítio da RCE 14:15. A linha pontilhada representa a posição angular do satélite com raio de Methone imerso no sítio “2” (caso 2). . . . .                                                                | 79 |
| Figura 30 | Taxa de partículas de $1 \mu m$ em trânsito para os casos 1, 2 e 3. No painel esquerdo são apresentados os resultados com a inclusão do satélite com o raio de Aegaeon, enquanto no direito é incluído um satélite com o raio de Methone. As partículas estão inicialmente no sítio “3” da RCE 14:15. . . . .                                                                                           | 79 |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 31 | Taxa de partículas de $10 \mu m$ em trânsito para os casos 1, 2 e 3. No painel esquerdo são apresentados os resultados com a inclusão do satélite com o raio de Aegaeon, enquanto no direito é incluído um satélite com o raio de Methone. As partículas estão inicialmente no sítio “3” da RCE 14:15. . . . . | 80 |
| Figura 32 | Variação temporal de $\phi^{(c)}$ e $\phi^{(l)}$ de Aegaeon, para os casos com e sem o satélite Tétis. . . . .                                                                                                                                                                                                 | 82 |
| Figura 33 | Variação temporal do ângulo característico ( $\phi^{(t)}$ ) da ressonância Mimas-Tétis, dado por $\phi^{(t)} = 4\lambda_T - 2\lambda_M - \Omega_T - \Omega_M$ , no qual $T$ e $M$ se refere a Tétis e Mimas, respectivamente. . . . .                                                                          | 83 |
| Figura 34 | Variação temporal do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação de Aegaeon. . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 83 |
| Figura 35 | Movimento no sistema girante, para 10 anos de simulação, de Aegaeon e uma partícula com defasagem de $\Delta\lambda = -10^\circ$ do centro do arco. . . . .                                                                                                                                                    | 84 |
| Figura 36 | Variação temporal da excentricidade devido a FRS para uma partícula iniciada a 10 km do centro da RCE 7:6 com Mimas. . . . .                                                                                                                                                                                   | 85 |
| Figura 37 | Variação temporal do semi-eixo maior em relação ao centro da ressonância e ângulo ressonante para uma partícula de $10 \mu m$ , inicialmente a $\Delta a = -5$ km e $\Delta\lambda = 0^\circ$ do centro do arco. . . . .                                                                                       | 86 |
| Figura 38 | Variação temporal de $\Delta a$ e $\phi$ para uma partícula de $10 \mu m$ , inicialmente defasada de 25 km do centro do arco. . . . .                                                                                                                                                                          | 86 |
| Figura 39 | Movimento dos coorbitais e das partículas em torno dos pontos de equilíbrio do sistema. Os pontos vermelhos e pretos correspondem aos satélites e às partículas, respectivamente, enquanto os pontos de equilíbrios são as cruzes. . . . .                                                                     | 91 |
| Figura 40 | Variação azimutal no sistema girante dos satélites coorbitais e de um conjunto de partículas representativas. . . . .                                                                                                                                                                                          | 92 |
| Figura 41 | Variação temporal de $\phi_{RLE}$ para os coorbitais. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 93 |
| Figura 42 | Variação temporal de $\phi_{RCI}$ para os coorbitais. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 94 |
| Figura 43 | Variação da excentricidade para o coorbital $S_1$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 95 |
| Figura 44 | Variação temporal de $\phi_{RLE}$ para uma partícula de cada arco: Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem, a partir do topo. . . . .                                                                                                                                                                     | 96 |
| Figura 45 | Variação do ângulo ressonante, excentricidade e ângulo azimutal no sistema girante de uma partícula iniciada no arco Liberdade. . . . .                                                                                                                                                                        | 97 |
| Figura 46 | Evolução temporal de $\phi$ , $e$ e $\theta$ de uma partícula iniciada no arco Liberdade, a qual colide com o satélite $S_3$ após 550 anos de simulação. . . . .                                                                                                                                               | 98 |
| Figura 47 | Evolução temporal do ângulo azimutal de uma partícula iniciada no arco Liberdade e no arco Igualdade. O movimento das partículas se encontra em preto, enquanto dos coorbitais são dados pelas linhas em vermelho. . . . .                                                                                     | 98 |
| Figura 48 | Evolução temporal de $\phi$ e $\theta$ para uma partícula no caso nominal (em preto) e para o caso com $\varpi$ dado aleatoriamente (em vermelho). As variações azimutais dos satélites coorbitais são dadas pelas linhas em azul. . . . .                                                                     | 99 |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 49 | Evolução temporal do ângulo azimutal de três partículas: uma classificada como “arco”, como “trânsito” e como “anel”. . . . .                                                                                                                                                                                                      | 100 |
| Figura 50 | Taxa de partículas confinadas no arcos (em preto), em trânsito (em verde) e que migram para o anel Adams (em azul). Cada coluna representa um arco (Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem), enquanto cada tamanho está representado por uma linha (1 $\mu m$ , 5 $\mu m$ , 10 $\mu m$ , 50 $\mu m$ e 100 $\mu m$ ). . . . . | 101 |
| Figura 51 | Taxa total de partículas confinadas no arcos (em preto), em trânsito (em verde) e que migram para o anel Adams (em azul) para os arcos Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem. . . . .                                                                                                                                       | 103 |

## LISTA DE TABELAS

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1  | – Ângulos das RCE ( $\phi^{(c)}$ ) e RLE ( $\phi^{(l)}$ ). . . . .                                                                                                                                                                                                                   | 44 |
| Tabela 2  | – Dados calculados para as ressonâncias 7:6, 14:15 e 10:11 e semi-eixo maior geométrico ( $a_s$ ) de Aegaeon (7:6), Anthe (10:11) e Methone (14:15). . . . .                                                                                                                         | 44 |
| Tabela 3  | – Raios considerados para os satélites no centro dos sítios. A tabela também apresenta o rótulo com que cada tamanho de satélite será mencionado no texto. . . . .                                                                                                                   | 55 |
| Tabela 4  | – Tempo em anos para a saída de 90% das partículas da ressonância devido a PRob, PRad e a FRS. . . . .                                                                                                                                                                               | 60 |
| Tabela 5  | – Tempo em anos para a saída de 90% das partículas da ressonância para os casos com a FRS e com a FRS+AP. . . . .                                                                                                                                                                    | 64 |
| Tabela 6  | – Taxa de produção de massa (kg/s) devido a colisões com grãos de poeira interplanetária. . . . .                                                                                                                                                                                    | 72 |
| Tabela 7  | – Massa, densidade e elementos osculadores dos satélites Aegaeon, Mimas e Tétis, no tempo 2454700.5 JD. . . . .                                                                                                                                                                      | 81 |
| Tabela 8  | – Porcentagem de partículas que saem da ressonância e tempo para 90% das partículas do arco saírem da RCE 7:6 com Mimas ou colidirem com Aegaeon. . . . .                                                                                                                            | 85 |
| Tabela 9  | – Sumário dos resultados obtidos para diferentes tamanhos de partículas e velocidades de ejeção. A tabela apresenta a porcentagem de partículas que permanecem em ressonância (arco) e as que saem desta (anel), assim o tempo de vida ( $t_{90}$ ) em anos de cada sistema. . . . . | 87 |
| Tabela 10 | – Semi-eixo maior central e largura das ressonâncias propostas em Porco (1991). . . . .                                                                                                                                                                                              | 89 |
| Tabela 11 | – Massa e separação angular dos satélites coorbitais. . . . .                                                                                                                                                                                                                        | 90 |
| Tabela 12 | – Porcentagem de partículas confinadas em cada arco e em ressonância de Lindblad. . . . .                                                                                                                                                                                            | 93 |

## SUMÁRIO

|          |                                                                                   |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>                                                       | <b>17</b> |
| <b>2</b> | <b>PERTURBAÇÕES EM ANÉIS E ARCOS PLANETÁRIOS . . . . .</b>                        | <b>19</b> |
| 2.1      | NÃO-ESFERICIDADE E DISTRIBUIÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA DE MASSA DO CORPO CENTRAL . . . . . | 19        |
| 2.1.1    | De vetor posição para elementos geométricos . . . . .                             | 21        |
| 2.1.2    | De elementos geométricos para vetor posição . . . . .                             | 23        |
| 2.2      | FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR . . . . .                                                 | 24        |
| 2.2.1    | Efeito das componentes no semi-eixo maior e excentricidade . . . . .              | 25        |
| 2.3      | ARRASTO DO PLASMA . . . . .                                                       | 27        |
| 2.3.1    | Efeito no semi-eixo maior e excentricidade . . . . .                              | 28        |
| <b>3</b> | <b>RESSONÂNCIAS DE CORROTAÇÃO E LINDBLAD . . . . .</b>                            | <b>30</b> |
| 3.1      | RESSONÂNCIAS EM ANÉIS E ARCOS PLANETÁRIOS . . . . .                               | 31        |
| 3.1.1    | Localização das ressonâncias . . . . .                                            | 32        |
| 3.2      | RESSONÂNCIA DE CORROTAÇÃO EXCÊNTRICA . . . . .                                    | 33        |
| 3.2.1    | Modelo do pêndulo . . . . .                                                       | 34        |
| 3.2.2    | Aproximação de Huygens . . . . .                                                  | 36        |
| 3.3      | RESSONÂNCIA DE LINDBLAD EXCÊNTRICA . . . . .                                      | 38        |
| 3.4      | EFEITO ACOPLADO DAS RESSONÂNCIAS DE CORROTAÇÃO E LINDBLAD . . . . .               | 42        |
| <b>4</b> | <b>EFEITO DE PERTURBAÇÕES NAS PARTÍCULAS EM RESSONÂNCIA . . . . .</b>             | <b>44</b> |
| 4.1      | EFEITO DE PEQUENOS SATÉLITES IMERSOS NOS SÍTIOS . . . . .                         | 49        |
| 4.1.1    | Efeito de um satélite imerso no sítio . . . . .                                   | 49        |
| 4.1.2    | Sítio com pequenas luas imersas . . . . .                                         | 55        |
| 4.2      | EFEITO DAS PERTURBAÇÕES NAS PARTÍCULAS EM RESSONÂNCIA . . . . .                   | 57        |
| 4.2.1    | Força de radiação solar . . . . .                                                 | 59        |
| 4.2.2    | Arrasto do plasma . . . . .                                                       | 61        |
| 4.2.3    | Sistema de sítios com um satélite . . . . .                                       | 66        |
| 4.2.4    | Sítio com pequenas luas imersas . . . . .                                         | 68        |
| 4.3      | PRODUÇÃO DE POEIRA DEVIDO AOS PEQUENOS SATÉLITES . . . . .                        | 70        |
| 4.4      | TRÂNSITO DE PARTÍCULAS ENTRE OS SÍTIOS RESSONANTES . . . . .                      | 73        |
| <b>5</b> | <b>DESTINO DAS PARTÍCULAS DO ARCO DO ANEL G . . . . .</b>                         | <b>81</b> |
| 5.1      | EVOLUÇÃO ORBITAL DAS PARTÍCULAS DO ARCO . . . . .                                 | 82        |
| 5.2      | EVOLUÇÃO ORBITAL DAS PARTÍCULAS EJETADAS DA SUPERFÍCIE DE AEGAEON . . . . .       | 85        |

|          |                                                          |            |
|----------|----------------------------------------------------------|------------|
| <b>6</b> | <b>ARCOS DOS ANEL ADAMS DE NETUNO . . . . .</b>          | <b>89</b>  |
| 6.1      | DINÂMICA DOS SATÉLITES COORBITAIS . . . . .              | 90         |
| 6.2      | RESSONÂNCIA DE LINDBLAD EXCÊNTRICA COM GALATEA . . . . . | 92         |
| 6.3      | FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR . . . . .                        | 100        |
| <b>7</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>                    | <b>104</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                             | <b>106</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Apesar de observados pela primeira vez em 1984 por meio de uma ocultação estelar, a existência dos arcos planetários só foi confirmada em 1989, quando a sonda espacial Voyager 2 detectou quatro dessas estruturas no anel Adams de Netuno, as quais receberam o nome de Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem. Tais estruturas, correspondentes a segmentos de anéis com maior brilho e densidade de partículas, deveriam ser desfeitas em poucos meses quando só considerado o movimento kepleriano das partículas que as constituem, de modo que se faz necessária a presença de mecanismos de confinamento para explicar a estabilidade desses sistemas (RENNER et al., 2014).

Em Porco (1991) é apresentada a hipótese de que os arcos de Netuno seriam confinados pelo satélite Galatea por meio de ressonâncias de corrotação e de Lindblad, dos tipos 84:86 e 42:43, respectivamente. A ressonância de corrotação ocorre quando a órbita da partícula no sistema girante com a frequência ressonante é fechada, de modo que o corpo é confinado azimutalmente, enquanto a ressonância de Lindblad ocorre quando sua órbita é fechada no sistema girante com o satélite perturbador, confinando-a radialmente (SICARDY, 1991). O modelo apresentado em Porco (1991) foi tomado por uma década como o que melhor reproduzia a dinâmica observada nos arcos, até que observações recentes mostraram que estes não estão na ressonância de corrotação proposta. Deste então, novos modelos vêm sendo sugeridos como, por exemplo, o modelo de satélites coorbitais apresentado em Renner et al. (2014).

No início do século XXI, a sonda espacial Cassini observou a existência de arcos planetários também em Saturno, estando um destes localizado no anel G, levando o nome de arco do anel G (HEDMAN et al., 2007). Outros dois se localizam no anel E, chamados de arco de Methone e de Anthe (HEDMAN et al., 2009). Conforme proposto na literatura, o arco de Methone se encontra confinado por uma ressonância de corrotação excêntrica e por uma ressonância de Lindblad excêntrica, ambas do tipo 14:15 com o satélite Mimas, enquanto os arcos do anel G e de Anthe estão confinados, devido a Mimas, pela ressonância de corrotação excêntrica 7:6 e 10:11, respectivamente, estando também próximos à ressonâncias de Lindblad. Observa-se, ademais, a existência de pequenos satélites confinados nessas estruturas, de modo que as luas Anthe ( $r = 0.5$  km), Methone ( $r = 1.45$  km) e Aegaeon ( $r = 0.25$  km) se encontram imersas nos arcos de Anthe, de Methone e do anel G, respectivamente.

Uma vez que os arcos saturnianos são formados principalmente por partículas micrométricas, propõe-se em Hedman et al. (2010) que as luas imersas nos arcos agiriam como fontes desse material, o qual permaneceria confinado devido às ressonâncias citadas. Entretanto, trabalhos recentes como Sun et al. (2017) e Madeira et al. (2018) mostram que os arcos não permanecem estáveis quando considerados os efeitos das forças perturbadoras.

Em Madeira et al. (2018) é encontrado que o arco do anel G tem seu tempo de vida reduzido para menos de 40 anos quando considerados os efeitos da força de radiação solar, de modo que o satélite Aegaeon não possui o papel de fonte de partículas, mas de sumidouro destas. Visto isto, nesse trabalho será investigada a dinâmica das partículas confinadas pela ressonância de corrotação excêntrica e sob efeito da ressonância de Lindblad excêntrica, nas regiões em que se encontram os arcos saturnianos,

considerando a força de radiação solar, arrasto do plasma e a presença de pequenos satélites confinados nos sítios das ressonâncias de corrotação. Também é analisada a dinâmica do arco do anel G e dinâmica dos arcos de Netuno, seguindo o modelo de coorbitais proposto em Renner et al. (2014).

No capítulo 2, os efeitos gerados pela não-esfericidade do corpo central, força de radiação solar e arrasto do plasma são apresentados teoricamente.

No capítulo 3, as ressonâncias de corrotação e Lindblad são estudadas analiticamente, desenvolvendo-se a teoria necessária para seu tratamento.

No capítulo 4, a dinâmica das partículas confinadas por ressonâncias de corrotação em Saturno é estudada, verificando como esta é afetada pela presença de satélites imersos nos sítios, força de radiação solar e arrasto do plasma.

No capítulo 5, é estudada a dinâmica do arco do anel G de Saturno e os efeitos que Aegaeon exerce nas partículas confinadas pela ressonância 7:6 com Mimas.

No capítulo 6, o modelo de satélite coorbitais apresentado em Renner et al. (2014) para o caso dos arcos de Netuno é estudado, sendo analisado como o sistema é alterado com a inclusão da força de radiação solar.

No capítulo 7, são apresentadas as considerações finais do trabalho.

## 2 PERTURBAÇÕES EM ANÉIS E ARCOS PLANETÁRIOS

### 2.1 NÃO-ESFERICIDADE E DISTRIBUIÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA DE MASSA DO CORPO CENTRAL

Utilizando a Lei Gravitacional de Newton é possível determinar, de maneira analítica, a interação gravitacional de duas massas puntiformes (adimensionais) e isoladas. Da solução deste problema, chamado Problema de Dois Corpos (P2C), são encontrados os elementos orbitais, responsáveis por caracterizar e localizar a órbita do corpo menor em relação ao maior.

São os elementos orbitais: o semi-eixo maior  $a_0$ , responsável por definir o tamanho da órbita, a excentricidade  $e_0$ , cuja medida define o formato da órbita, a inclinação  $I_0$  entre a órbita e um plano de referência, a longitude do nodo ascendente  $\Omega_0$ , correspondente ao ângulo em relação a um eixo de referência em que a órbita e o plano de referência se cruzam, a longitude do pericentro  $\varpi_0$ , equivalente ao ângulo que o ponto de maior aproximação entre os corpos faz com o eixo de referência e o tempo de passagem pelo pericentro  $\tau_0$ , igual ao tempo em que ocorre a maior aproximação.

Para o problema ideal de dois corpos, os elementos orbitais são constantes, de modo que o corpo menor permanece indefinidamente ao redor do corpo central em uma órbita congelada. Entretanto, para casos reais é verificado que estes elementos variam temporalmente devido a perturbações que levam os corpos a terem a forma e o posicionamento de suas órbitas modificados. Uma destas perturbações ocorre quando o corpo central é considerado dimensional e com um formato não esférico e/ou com densidade não-homogênea de massa.

Para estes casos, o potencial gravitacional gerado pelo corpo central será dado por (BROUWER; CLEMENCE, 1967):

$$V = -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i \left( \frac{R}{r} \right)^i P_i(\sin \alpha) \right] \quad (1)$$

em que  $M$  é a massa do planeta e  $R$  seu raio;  $J_i$  corresponde ao coeficiente de gravidade, responsável por modelar o formato do corpo,  $P_i(\sin \alpha)$  ao polinômio de Legendre e  $\alpha$  a latitude do vetor radial que liga o centro dos corpos ( $\vec{r}$ ). O primeiro termo da série foi destacado do restante para evidenciar que este corresponde ao potencial de uma esfera perfeita com distribuição uniforme de massa, de modo que os demais representarão perturbações.

Como mostrado, por exemplo, em Brouwer e Clemence (1967), tal perturbação será responsável por levar à precessão da órbita de uma partícula, significando que os argumentos do pericentro e do nodo ascendente desta apresentam um acréscimo e decréscimo, respectivamente, com o tempo. Tal precessão dificulta a utilização dos elementos orbitais encontrados na resolução do P2C ( $a_0, e_0, I_0, \varpi_0, \Omega_0, \tau_0$ ), chamados de elementos orbitais osculadores, sendo conveniente deduzir um novo conjunto de elementos, os elementos orbitais geométricos ( $a, e, I, \varpi, \Omega, \tau$ ), que incorpore os efeitos dinâmicos gerados pela não-esfericidade e/ou não homogeneidade do corpo.

A dedução dos elementos geométricos pode ser encontrada em Borderies e Longaretti (1987), sendo

o problema de uma partícula orbitando um corpo não-esférico resolvido em coordenadas cilíndricas, considerando o problema com simetria azimutal. Como resultado, é obtido que a solução de tal problema pode ser expressa por meio de uma expansão epicíclica, ou seja, uma expansão em torno de órbitas circulares e equatoriais, de modo que os elementos geométricos, apresentados a seguir, são válidos apenas para órbitas em baixas excentricidades e inclinações, como o caso dos sistemas que serão considerados neste trabalho.

As componentes dos vetores posição, velocidade e aceleração são encontradas a partir das equações a seguir (RENNER; SICARDY, 2006):

$$x = r \cos L \quad (2)$$

$$y = r \sin L \quad (3)$$

$$z = z \quad (4)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos L - r \dot{L} \sin L \quad (5)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin L + r \dot{L} \cos L \quad (6)$$

$$\dot{z} = \dot{z} \quad (7)$$

$$0 = \ddot{r} - r \dot{L}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} \quad (8)$$

$$0 = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{L}) + \frac{\partial V}{\partial L} \quad (9)$$

$$0 = \ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} \quad (10)$$

sendo  $L$  o ângulo azimutal relativo a um sistema de referência inercial.

Enquanto a resolução do P2C dá origem a apenas uma frequência de movimento, a frequência de movimento médio, encontra-se para o problema não-esférico a existência de três frequências de movimento (BORDERIES; LONGARETTI, 1987): frequência epicíclica horizontal ( $\kappa$ ), responsável por caracterizar oscilações radiais, a frequência epicíclica vertical ( $\nu$ ), caracterizando oscilações verticais, e a frequência epicíclica angular ( $n$ ), caracterizando o movimento angular do corpo.

Matematicamente,  $\kappa$ ,  $\nu$  e  $n$  são dados por (RENNER; SICARDY, 2006):

$$\begin{aligned} \kappa = & \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 + \frac{45}{16} \left( \frac{R}{a} \right)^4 J_4 - \frac{175}{32} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_6 - \frac{9}{32} \left( \frac{R}{a} \right)^4 J_2^2 \right] + \\ & + \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[ \frac{135}{64} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_2 J_4 - \frac{27}{128} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_2^3 - 9 \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \nu = & \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[ 1 + \frac{9}{4} \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 - \frac{75}{16} \left( \frac{R}{a} \right)^4 J_4 + \frac{245}{32} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_6 - \frac{81}{32} \left( \frac{R}{a} \right)^4 J_2^2 \right] + \\ & + \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[ \frac{675}{64} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_2 J_4 + \frac{729}{128} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_2^3 + 6 \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 e^2 - \frac{51}{4} \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[ 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 - \frac{15}{16} \left( \frac{R}{a} \right)^4 J_4 + \frac{35}{32} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_6 - \frac{9}{32} \left( \frac{R}{a} \right)^4 J_2^2 \right] + \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[ \frac{45}{64} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_2 J_4 + \frac{27}{128} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_2^3 + 3 \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 e^2 - 12 \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 I^2 \right] \quad (13)$$

É válido citar que, se os coeficientes de gravidade forem nulos, todas as frequências se reduzirão à frequência de movimento médio kepleriano:

$$n = \kappa = \nu = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (14)$$

Em Renner e Sicardy (2006) é apresentado o algoritmo de como relacionar elementos orbitais geométricos e vetor-posição, utilizando três componentes da expansão do potencial ( $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ ), até termos quadráticos na excentricidade e inclinação. As equações que relacionam esses elementos são apresentadas nas subseções a seguir.

### 2.1.1 De vetor posição para elementos geométricos

Para se obter os elementos orbitais geométricos à partir do vetor posição, primeiramente se faz necessária a conversão deste de coordenadas cartesianas para cilíndricas (RENNER; SICARDY, 2006):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (15)$$

$$L = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (16)$$

$$\dot{r} = \dot{x} \cos L + \dot{y} \sin L \quad (17)$$

$$\dot{L} = \frac{-\dot{x} \sin L + \dot{y} \cos L}{r} \quad (18)$$

sendo a longitude  $L$  definida no intervalo  $[0, 2\pi]$  e  $\tan^{-1}(y/x)$  pertencente ao intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Uma vez que  $L$  e  $\tan^{-1}(y/x)$  são definidos em intervalos distintos, a equação 16 não será válida para todos os valores de  $x$  e  $y$ , fazendo-se necessária a definição das relações a seguir (RENNER; SICARDY, 2006):

$$L = \tan^{-1}(y/x) + \pi \quad x < 0 \quad (19)$$

$$L = \tan^{-1}(y/x) + 2\pi \quad \tan^{-1}(y/x) < 0 \quad (20)$$

$$L = \pi/2, \quad x = 0, y > 0 \quad (21)$$

$$L = 3\pi/2, \quad x = 0, y < 0 \quad (22)$$

Define-se, também, parâmetros auxiliares que facilitarão cálculos posteriores (RENNER; SICARDY, 2006):

$$\eta^2 = \frac{GM}{a^3} \left[ 1 - 2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 + \frac{75}{8} \left( \frac{R}{a} \right)^4 J_4 - \frac{175}{8} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_6 \right] \quad (23)$$

$$\chi^2 = \frac{GM}{a^3} \left[ 1 + \frac{15}{2} \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 - \frac{175}{8} \left( \frac{R}{a} \right)^4 J_4 + \frac{735}{16} \left( \frac{R}{a} \right)^6 J_6 \right] \quad (24)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\nu + \kappa) \quad (25)$$

$$\alpha_2 = 2\nu - \kappa \quad (26)$$

$$\alpha^2 = \alpha_1 \alpha_2 \quad (27)$$

Incluindo os efeitos dos coeficientes de gravidade, encontra-se as coordenadas  $r_c$ ,  $L_c$  e  $z_c$ , dadas por (RENNER; SICARDY, 2006):

$$r_c = ae^2 \left[ \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \cos 2(\lambda - \varpi) \right] + aI^2 \left[ \frac{3}{4} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - 1 + \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right] \quad (28)$$

$$L_c = e^2 \left( \frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \right) \frac{n}{\kappa} \sin 2(\lambda - \varpi) - I^2 \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \frac{n}{\nu} \sin 2(\lambda - \Omega) \quad (29)$$

$$z_c = aIe \left[ \frac{\chi^2}{2\kappa\alpha_1} \sin(2\lambda - \varpi - \Omega) - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa\alpha_2} \sin(\varpi - \Omega) \right] \quad (30)$$

$$\dot{r}_c = ae^2 \frac{\eta^2}{\kappa} \sin 2(\lambda - \kappa) - aI^2 \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \nu \sin 2(\lambda - \Omega) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_c = e^2 n \left[ \frac{7}{2} - 3 \frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\kappa^2}{2n^2} + \left( \frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) \cos 2(\lambda - \varpi) \right] + \\ + I^2 n \left[ 2 - \frac{\kappa^2}{2n^2} - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\dot{z}_c = aIe \left[ \frac{\chi^2(\kappa + \nu)}{2\kappa\alpha_1} \cos(2\lambda - \varpi - \Omega) + \frac{3}{2} \frac{\chi^2(\kappa - \nu)}{\kappa\alpha_2} \cos(\varpi - \Omega) \right] \quad (33)$$

onde  $\lambda$  é a longitude média.

Os elementos orbitais geométricos são (RENNER; SICARDY, 2006):

$$a = \frac{r - r_c}{1 - \frac{\dot{L} - \dot{L}_c - n}{2n}} \quad (34)$$

$$e = \sqrt{\left( \frac{\dot{L} - \dot{L}_c - n}{2n} \right)^2 + \left( \frac{\dot{r} - \dot{r}_c}{a\kappa} \right)^2} \quad (35)$$

$$I = \sqrt{\left( \frac{z - z_c}{a} \right)^2 + \left( \frac{\dot{z} - \dot{z}_c}{a\nu} \right)^2} \quad (36)$$

$$\lambda = L - L_c - 2 \frac{n}{\kappa} \frac{\dot{r} - \dot{r}_c}{a\kappa} \quad (37)$$

$$\tan(\lambda - \varpi) = \frac{\dot{r} - \dot{r}_c}{a\kappa \left(1 - \frac{r-r_c}{a}\right)} \quad (38)$$

$$\tan(\lambda - \Omega) = \nu \frac{z - z_c}{\dot{z} - \dot{z}_c} \quad (39)$$

### 2.1.2 De elementos geométricos para vetor posição

Conhecendo os elementos orbitais geométricos ( $a, e, I, \varpi, \Omega, \lambda$ ), é possível calcular o vetor-posição em coordenadas cilíndricas ( $r, L, z$ ) por meio das relações (RENNER; SICARDY, 2006):

$$r = a \left[ 1 - e \cos(\lambda - \varpi) + e^2 \left( \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \cos 2(\lambda - \varpi) \right) \right] + I^2 a \left[ \frac{3}{4} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - 1 + \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right] \quad (40)$$

$$L = \lambda + 2e \frac{n}{\kappa} \sin(\lambda - \varpi) + e^2 \left( \frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2} \right) \frac{n}{\kappa} \sin 2(\lambda - \kappa) - I^2 \frac{\chi^2}{4\alpha^2} \frac{n}{\nu} \sin 2(\lambda - \Omega) \quad (41)$$

$$z = aI \left[ \sin(\lambda - \Omega) + e \frac{\chi^2}{2\kappa\alpha_1} \sin(2\lambda - \varpi - \Omega) - e \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa\alpha_2} \sin(\varpi - \Omega) \right] \quad (42)$$

$$\dot{r} = a\kappa \left[ e \sin(\lambda - \Omega) + e^2 \frac{\eta^2}{\kappa^2} \sin 2(\lambda - \varpi) - I^2 \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \frac{\nu}{\kappa} \sin 2(\lambda - \Omega) \right] \quad (43)$$

$$\dot{L} = n \left[ 1 + 2e \cos(\lambda - \varpi) + I^2 \left( 2 - \frac{\kappa^2}{2n^2} - \frac{3}{2} \frac{\chi^2}{\kappa^2} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} \cos 2(\lambda - \Omega) \right) \right] + ne^2 \left[ \frac{7}{2} - 3 \frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\kappa^2}{2n^2} + \left( \frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2} \right) \cos 2(\lambda - \varpi) \right] \quad (44)$$

$$\dot{z} = aI\nu \left[ \cos(\lambda - \Omega) + e \frac{\chi^2(\kappa + \nu)}{2\kappa\alpha_1\nu} \cos(2\lambda - \varpi - \Omega) + e \frac{3}{2} \frac{\chi^2(\kappa - \nu)}{\kappa\alpha_2\nu} \cos(\varpi - \Omega) \right] \quad (45)$$

Por fim, o vetor-posição pode ser convertido para coordenadas cartesianas utilizando as equações 2-7.

Analisando as transformações apresentadas, vê-se que para obter os elementos geométricos utiliza-se as frequências  $\kappa, \nu$  e  $n$ , as quais são dependentes dos próprios elementos geométricos. Computacionalmente, tal dependência pode ser resolvida por meio de iterações sucessivas, sendo apresentados em Renner e Sicardy (2006) os passos a serem seguidos:

1. Assumir:  $a = r, e = I = 0, r_c = L_c = z_c = \dot{r}_c = \dot{L}_c = \dot{z}_c = 0$ .
2. Calcular  $\kappa, \nu, n$  com os valores assumidos acima.
3. Determinar  $a, e, I, \varpi, \Omega, \lambda$  utilizando as frequências encontradas no segundo passo.
4. Recalcular  $\kappa, \nu, n$  por meio dos elementos geométricos encontrados.
5. Repetir o terceiro e o quarto passo até a condição  $|a_{i+1} - a_i| < \epsilon$  ser atendida, sendo  $\epsilon$  o fator de erro, adotado como  $\epsilon = 10^{-12}$ .

As simulações numéricas realizadas neste trabalho utilizam as transformações desta seção, assim como os procedimentos descritos acima.

## 2.2 FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR

Tratando de anéis e arcos planetários constituídos principalmente de partículas micrométricas tem-se que uma das perturbações não gravitacional que mais intensamente afetará esses sistemas será a força de radiação solar, gerada a partir de trocas de momento angular entre a radiação emitida pelo Sol e os grãos planetários.

Abordando esse efeito classicamente, para uma partícula com área de seção transversal  $A$ , a energia por unidade de tempo interceptada por esta corresponderá ao produto  $\Phi A$ , sendo  $\Phi$  a densidade de fluxo de energia da radiação solar. Utilizando o teorema trabalho-energia, obtém-se que a força exercida sob o grão será (MIGNARD, 1984):

$$\vec{F} = \frac{\Phi A}{c} Q_{pr} \hat{u}_r \quad (46)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz,  $\hat{u}_r$  é o versor Sol-partícula e  $Q_{pr}$  corresponde a um parâmetro adimensional responsável por avaliar a capacidade de absorção de radiação pela partícula, no qual  $Q_{pr} = 1$  se refere a um absorvedor perfeito. Este foi o valor utilizado em todas as simulações realizadas neste trabalho.

Apesar de corresponder ao termo dominante na interação entre a radiação solar e uma partícula, a equação 46 não se mostra fidedigna em muitos casos, sendo necessária a inclusão da correção de Poynting-Robertson. Tal correção surge do fato da contínua absorção e reemissão de radiação pela partícula levar ao aparecimento de uma força tangencial ao movimento do grão, conforme discutido em Mignard (1984).

A força de radiação solar com a correção de Poynting-Robertson é dada por (MIGNARD, 1984):

$$\vec{F} = \frac{\Phi A}{c} Q_{pr} \left[ \left( 1 - \frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \right) \hat{u}_r - \frac{\vec{V}'}{c} \right] \quad (47)$$

sendo  $\vec{V}'$  o vetor velocidade da partícula. O termo independente da velocidade é usualmente chamado de componente da pressão de radiação solar (PRad) enquanto o restante corresponde à componente de Poynting-Robertson (PRob).

Uma vez que a dinâmica das partículas é estudada no sistema de referência do planeta, é conveniente reescrever a equação 47 neste mesmo sistema. Para isto, será suposto que o planeta se encontra em uma órbita circular ao redor do Sol e que o fluxo solar é constante, obtendo-se (MIGNARD, 1984):

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}} \quad (48)$$

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{V}_p \quad (49)$$

$$\frac{dr}{dt} = \vec{V}' \cdot \hat{u}_r \quad (50)$$

no qual  $\vec{V}$  corresponde ao vetor velocidade da partícula em relação ao planeta,  $\vec{V}_p$  à velocidade orbital do planeta e  $\vec{r}_{sp}$  ao vetor Sol-planeta.

A força de radiação solar no sistema de referência planetocêntrico será (MIGNARD, 1984):

$$\vec{F} = \frac{\Phi A}{c} Q_{pr} \left[ \left( 1 - \left( \frac{\vec{V}_p + \vec{V}}{c} \right) \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}} \right) \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}} - \frac{\vec{V}_p + \vec{V}}{c} \right] \quad (51)$$

### 2.2.1 Efeito das componentes no semi-eixo maior e excentricidade

Para determinar como cada componente da força de radiação solar altera o semi-eixo maior e excentricidade de uma partícula, será suposto que o sistema de referência planetocêntrico rotaciona com o movimento médio do Sol, de modo que a estrela sempre permanece sobre o eixo  $x$ . Desta forma, as componentes da força de radiação solar serão dadas por:

$$\vec{F}_{PRad} = - \frac{mc}{3t_{pr}} \hat{x} \quad (52)$$

$$\vec{F}_{PRob} = - \frac{m}{3t_{pr}} (2\dot{x}\hat{x} + (V_p + \dot{y})\hat{y} + \dot{z}\hat{z}) \quad (53)$$

no qual  $m$  é a massa da partícula e  $t_{pr}$  um tempo característico do sistema (MIGNARD, 1984):

$$t_{pr} = \frac{mc^2}{3\Phi A Q_{pr}} \quad (54)$$

A variação temporal do semi-eixo maior e da excentricidade pode ser obtida tomando a derivada temporal da energia ( $E$ ) e momento angular orbital ( $H$ ) por unidade de massa da partícula, respectivamente. Essas grandezas, conforme encontrado na resolução do P2C são (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$E = - \frac{n^2 a^2}{2} \quad (55)$$

$$H = na^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (56)$$

Tomando a derivada temporal, obtém-se:

$$\dot{a} = \frac{2\dot{E}}{n^2 a} \quad (57)$$

$$\dot{e} = \frac{1 - e^2}{2e} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{H\dot{H}}{n^2 a^4 e} \quad (58)$$

Analisando, primeiramente, o caso da pressão de radiação solar:

$$\dot{E} = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot \vec{r}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{V}}{m} \quad (59)$$

$$\dot{E} = - \frac{c\dot{x}}{3t_{pr}} \Rightarrow \dot{a} = - \frac{2c}{3t_{pr} n^2 a} \dot{x} \quad (60)$$

Como pode-se ver, a pressão de radiação solar é responsável, a princípio, por gerar uma variação temporal no semi-eixo maior da partícula. Tomando a média desta variação em um período orbital, encontra-se (MIGNARD, 1984):

$$\langle \dot{a} \rangle_{PRad} = -\frac{2c}{3t_{pr}n^2a} \langle \dot{x} \rangle = 0 \quad (61)$$

tendo-se utilizado para a realização desta média, assim como das que serão realizadas adiante, a transformação de elementos orbitais para cartesianos (MURRAY; DERMOTT, 1999) e a expansão da anomalia verdadeira ( $f$ ) em relação a anomalia média ( $M$ ) até a primeira ordem na excentricidade (BROUWER; CLEMENCE, 1967):

$$x = r[\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I] \quad (62)$$

$$y = r[\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I] \quad (63)$$

$$z = r \sin(\omega + f) \sin I \quad (64)$$

$$\vec{H} = na^2 \sqrt{1 - e^2} (\sin I \sin \Omega \hat{x} + \sin I \cos \Omega \hat{y} + \cos I \hat{z}) \quad (65)$$

$$r = a(1 - e \cos M) \quad (66)$$

$$\cos f = \cos M + e(\cos 2M - 1) \quad (67)$$

$$\sin f = \sin M + e \sin 2M \quad (68)$$

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(M) dM \quad (69)$$

sendo  $\chi$  um elemento orbital qualquer.

Calculando a variação média da excentricidade (MIGNARD, 1984):

$$\frac{1}{2} \frac{dH^2}{dt} = H \dot{H} = \frac{(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{H}}{m} \quad (70)$$

$$H \dot{H} = -\frac{c}{3t_{pr}} (H_y z - H_z y) \quad (71)$$

$$\langle \dot{e} \rangle_{PRad} = \frac{c}{na} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2t_{pr}} (\cos \Omega \sin \omega + \cos \omega \sin \Omega \cos I) \quad (72)$$

Logo, conclui-se que a PRad é responsável por excitar a órbita dos grãos em um pequeno intervalo de tempo, de modo que esta componente possuirá uma ação de curto período.

Realizando o mesmo tratamento para a componente de Poynting-Robertson:

$$\dot{E} = -\frac{1}{3t_{pr}} (\dot{x}^2 + V_p \dot{y} + V^2) \quad (73)$$

$$H \dot{H} = -\frac{1}{3t_{pr}} [n^2 a^4 (1 - e^2) + V_p (x H_z - z H_x) + \dot{x} (z H_y - y H_z)] \quad (74)$$

Como será obtido adiante, esta componente possui uma ação de longo período, de modo que a média deve ser realizada também na longitude do nodo ascendente e no argumento do pericentro, os

quais sofrerão precessão devido à não-esfericidade do planeta, encontrando-se (MIGNARD, 1984):

$$\langle \dot{E} \rangle = - \frac{1}{3t_{pr}} \left( \frac{n^2 a^2}{4} (1 + \cos^2 I) + n^2 a^2 \right) \quad (75)$$

$$\langle H \dot{H} \rangle = - \frac{1}{3t_{pr}} n^2 a^4 (1 - e^2) \frac{5 + \cos^2 I}{4} \quad (76)$$

$$\langle \dot{a} \rangle_{PRob} = - \frac{a}{t_{pr}} \frac{5 + \cos^2 I}{6} \quad (77)$$

$$\langle \dot{e} \rangle_{PRob} = 0 \quad (78)$$

Assim, a PRob gera o decaimento do semi-eixo maior da partícula. Supondo que a órbita do grão se encontra no plano equatorial do planeta, tem-se (MIGNARD, 1984):

$$\langle \dot{a} \rangle_{PRob} = - \frac{a}{t_{pr}} \Rightarrow \langle a \rangle_{PRob} = a_0 e^{-\frac{t}{t_{pr}}} \quad (79)$$

Deste modo,  $t_{pr}$  corresponde ao tempo necessário para o semi-eixo maior da partícula reduzir para aproximadamente 37% do seu valor inicial, explicando o fato desta grandeza ser também chamada de tempo de decaimento devido a Poynting-Robertson, possuindo um valor da ordem de  $10^5$  anos para Saturno (MIGNARD, 1984).

### 2.3 ARRASTO DO PLASMA

Outra perturbação sentida por uma partícula micrométrica localizada em um anel planetário é a resultante da interação com o plasma presente na magnetosfera do planeta. Devido a ação do campo magnético planetário, partículas carregadas (íons) ejetadas por satélites ou de origem solar são confinadas na magnetosfera do planeta na forma de plasma, passando a interagir com partículas de anéis e arcos principalmente por meio de colisões, sendo este chamado de efeito direto do arrasto do plasma (AP). O plasma planetário pode também interagir de modo indireto com uma partícula por meio de forças coulombianas, uma vez que gera campos elétricos que afetam o movimento desta. Para a região de interesse deste trabalho, o efeito indireto do plasma é duas ordens de grandeza menor que o direto (SUN; SCHMIDT; SPAHN, 2015; SUN et al., 2017), de modo que apenas este último será considerado.

O momento transferido para a partícula por meio de uma colisão com um íon é (BANASZKI-EWICZ; FAHR; SCHERER, 1994):

$$\vec{p} = \xi m_i \vec{v}_{rel} \quad (80)$$

onde  $m_i$  corresponde à massa do íon,  $\vec{v}_{rel}$  à velocidade relativa entre os corpos e  $\xi$  ao coeficiente de adsorção, responsável por descrever o tipo de colisão.

Supondo que a distribuição de íons é dada por uma função  $f(\vec{v}_{rel}, \vec{r})$ , a força sentida pela partícula

será (BANASZKIEWICZ; FAHR; SCHERER, 1994):

$$\vec{F}_{AP} = \int_{R^3} f(\vec{v}_{rel}, \vec{r}) \xi m_i \vec{v}_{rel} d^3v \quad (81)$$

Tal integral foi desenvolvida em Banaszkiewicz, Fahr e Scherer (1994) supondo uma distribuição bi-Maxwelliana para as partículas de plasma. Um íon positivamente carregado produz um campo elétrico radial que ao interagir com o campo magnético planetário (direção vertical) resulta em uma velocidade no sentido orbital do íon. Logo, as partículas de plasma apresentam uma direção preferencial de movimento, sendo a distribuição bi-Maxwelliana responsável por descrever esse perfil.

Deste modo, é possível encontrar que a força sobre uma partícula é dada por (BANASZKIEWICZ; FAHR; SCHERER, 1994):

$$\vec{F}_{AP} = \pi n_i m_i u_i^2 s^2 \left[ \left( M_i + \frac{1}{2M_i} \right) \frac{e^{-M_i^2}}{\sqrt{\pi}} + \left( M_i^2 + 1 - \frac{1}{4M_i^2} \right) \text{erf}(M_i) \right] \hat{u}_t \quad (82)$$

onde  $n_i$  e  $u_i$  são densidade numérica e velocidade térmica dos íons, respectivamente, e  $M_i$  é o número de Mach dado por  $M_i = v/u_i$ , em que  $v$  é a velocidade da partícula em relação ao plasma. O versor  $\hat{u}_t$  aponta na direção tangencial ao movimento.

### 2.3.1 Efeito no semi-eixo maior e excentricidade

De modo análogo ao realizado para a força de radiação solar, será analisada a variação gerada pelo arrasto do plasma no semi-eixo maior e excentricidade da partícula.

Sabendo que a velocidade orbital da partícula é (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\vec{V} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{f}\hat{u}_t = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(e \sin f \hat{u}_r + (1 + e \cos f)\hat{u}_t) \quad (83)$$

Encontra-se:

$$\dot{E} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{V}}{m} = \frac{F_{AP}}{m} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1 + e \cos f) \quad (84)$$

$$\langle \dot{E} \rangle = \frac{na}{m} \sqrt{1-e^2} F_{AP} \quad (85)$$

$$\langle \dot{a} \rangle_{AP} = \frac{2F_{AP}}{mn} \sqrt{1-e^2} \quad (86)$$

A variação do momento angular da partícula será:

$$H\dot{H} = \frac{(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{H}}{m} = \frac{rF_{AP}\hat{u}_N \cdot na^2\sqrt{1-e^2}\hat{u}_N}{m} \quad (87)$$

em que  $\hat{u}_N$  é o versor na direção normal à órbita.

Realizando a média em um período orbital:

$$\langle H \dot{H} \rangle = \frac{na^3 F_{AP}}{m} \sqrt{1 - e^2} \quad (88)$$

$$\langle \dot{e} \rangle_{AP} = \frac{1 - e^2}{2ae} \frac{2F_{AP}}{mn} \sqrt{1 - e^2} - \frac{1}{n^2 a^4 e} \frac{na^3 F_{AP}}{m} \sqrt{1 - e^2} = -\frac{e F_{AP}}{mna} \sqrt{1 - e^2} \quad (89)$$

A perturbação do arrasto do plasma é responsável por gerar um aumento do semi-eixo maior da partícula, assim como uma variação na excentricidade (SUN et al., 2017).

No próximo capítulo, as três frequências de movimento dadas na seção 2.1 serão utilizadas para definir as ressonâncias vertical, de corotação e de Lindblad, de modo que os efeitos causados nos elementos orbitais por estas duas últimas serão analisados por meio de um modelo analítico chamado de modelo do pêndulo.

### 3 RESSONÂNCIAS DE CORROTAÇÃO E LINDBLAD

Um dos fenômenos de grande importância em sistemas oscilantes é o da ressonância, existente quando duas frequências fundamentais do sistema são relacionadas por números inteiros (comensuráveis). No contexto das ciências planetárias, esse fenômeno ocorre quando a combinação das frequências angulares de dois corpos são comensuráveis, ou ainda em um mesmo corpo se a comensurabilidade existe entre seu movimento orbital e rotacional.

Tomando como foco ressonâncias envolvendo dois corpos, tem-se que a comensurabilidade entre as frequências angulares maximizam ou minimizam o número de encontros próximos entre os corpos, de modo que o sistema pode ser tanto estabilizado quanto desestabilizado, dependendo de sua configuração inicial (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Supondo dois satélites em órbitas circulares e coplanares, tem-se que estes estarão em ressonância de movimento médio  $p + q:p$  quando suas velocidades angulares médias forem relacionadas por meio da razão (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\frac{n'}{n} = \frac{p}{p+q} \quad (1)$$

$$0 = (p+q)n' - pn \quad (2)$$

onde  $n$  é a velocidade angular e o sobrescrito ' se refere ao corpo externo, enquanto  $p$  e  $q$  são números inteiros. A equação 2 é chamada de condição de ressonância e sua integral corresponde ao ângulo ressonante ( $\phi$ ) do sistema.

O ângulo ressonante para o caso circular e coplanar será, aproximadamente (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\phi \approx (p+q)\lambda' - p\lambda \quad (3)$$

Para casos mais gerais, em que existe perturbação da não-esfericidade do planeta e/ou os corpos envolvidos possuem excentricidade e inclinação não nulas, deve-se considerar as variações da longitude do pericentro ( $\varpi$ ) e do nodo ascendente ( $\Omega$ ) dos corpos. Deste modo, a equação geral da condição de ressonância e do ângulo ressonante serão (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$0 = j_1 n' + j_2 n + j_3 \dot{\varpi}' + j_4 \dot{\varpi} + j_5 \dot{\Omega}' + j_6 \dot{\Omega} \quad (4)$$

$$\phi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \varpi' + j_4 \varpi + j_5 \Omega' + j_6 \Omega \quad (5)$$

onde  $j_i$  são coeficientes inteiros que satisfazem a condição de d'Alembert (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0 \quad (6)$$

Dois corpos são ditos em ressonância quando o ângulo ressonante  $\phi$  do sistema librar em torno de um valor constante com amplitude menor que  $180^\circ$ , enquanto a ordem da ressonância será dada pela relação  $|j_1 + j_2|$ , para ressonâncias não-seculares, de modo que quanto menor a ordem da ressonância, mais significativo será seu efeito.

### 3.1 RESSONÂNCIAS EM ANÉIS E ARCOS PLANETÁRIOS

No contexto de anéis e arcos planetários, nos quais as partículas são influenciadas pela não-esfericidade do corpo central, é necessária a introdução de uma nova grandeza, a velocidade padrão ( $\Omega_p$ ). Conforme discutido na seção 2.1, devido à não-esfericidade, os corpos apresentarão além da frequência angular, uma frequência horizontal ( $\kappa$ ) e vertical ( $\nu$ ), de modo que  $\Omega_p$  corresponderá a uma combinação linear destas grandezas (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$m\Omega_p = mn' + k\kappa' + p\nu' \quad (7)$$

Utilizando o fato de  $\kappa = n - \dot{\varpi}$  e  $\nu = n - \dot{\Omega}$  (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$m\Omega_p = (m + k + p)n' - k\dot{\varpi}' - p\dot{\Omega}' \quad (8)$$

onde  $m$ ,  $k$  e  $p$  são inteiros.

Assim, a ressonância de corotação entre um satélite e uma partícula ocorrerá quando um múltiplo inteiro e não-nulo da diferença entre  $n$  e  $\Omega_p$  for igual a zero, enquanto as ressonâncias de Lindblad e vertical ocorrerão quando um múltiplo inteiro e não-nulo da diferença entre  $n$  e  $\Omega_p$  corresponder a frequência radial e vertical do perturbado, respectivamente.

Matematicamente, as condições de ressonância para as ressonâncias de corotação, de Lindblad e vertical, são (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$m^{(c)}(n - \Omega_p) = 0 \Rightarrow 0 = (m^{(c)} + k^{(c)} + p^{(c)})n' - m^{(c)}n - k^{(c)}\dot{\varpi}' - p^{(c)}\dot{\Omega}' \quad (9)$$

$$m^{(l)}(n - \Omega_p) = \kappa \Rightarrow 0 = (m^{(l)} + k^{(l)} + p^{(l)})n' - (m^{(l)} - 1)n - k^{(l)}\dot{\varpi}' - \dot{\varpi} - p^{(l)}\dot{\Omega}' \quad (10)$$

$$m^{(v)}(n - \Omega_p) = \nu \Rightarrow 0 = (m^{(v)} + k^{(v)} + p^{(v)})n' - (m^{(v)} - 1)n - k^{(v)}\dot{\varpi}' - \dot{\Omega} - p^{(v)}\dot{\Omega}' \quad (11)$$

Enquanto os ângulos ressonantes serão:

$$\phi^{(c)} = (m^{(c)} + k^{(c)} + p^{(c)})\lambda' - m^{(c)}\lambda - k^{(c)}\varpi' - p^{(c)}\Omega' \quad (12)$$

$$\phi^{(l)} = (m^{(l)} + k^{(l)} + p^{(l)})\lambda' - (m^{(l)} - 1)\lambda - k^{(l)}\varpi' - \varpi - p^{(l)}\Omega' \quad (13)$$

$$\phi^{(v)} = (m^{(v)} + k^{(v)} + p^{(v)})\lambda' - (m^{(v)} - 1)\lambda - k^{(v)}\varpi' - \Omega - p^{(v)}\Omega' \quad (14)$$

de modo que os sobrescritos  $^{(c)}$ ,  $^{(l)}$  e  $^{(v)}$  se referem às ressonâncias de corotação, de Lindblad e vertical, respectivamente.

Para o caso dos arcos planetários de Saturno, tem-se que estes são influenciados por ressonâncias excêntricas de corotação e de Lindblad de primeira ordem. Ressonâncias excêntricas ocorrem quando os corpos envolvidos possuem excentricidade não-nula e suas órbitas podem ser consideradas como

coplanares, de modo que  $p^{(c)} = p^{(l)} = 0$ , enquanto o fato de serem de primeira ordem implicará em:

$$(m^{(c)} + k^{(c)} + p^{(c)}) - m^{(c)} = 1 \Rightarrow k^{(c)} = 1 \quad (15)$$

$$(m^{(l)} + k^{(l)} + p^{(l)}) - (m^{(l)} - 1) = 1 \Rightarrow k^{(l)} = 0 \quad (16)$$

Logo, a condição de ressonância e o ângulo ressonante das ressonâncias de corrotação excêntrica que serão utilizadas nesse trabalho terão como equação geral:

$$0 = (m + 1)n' - mn - \dot{\varpi}' \quad (17)$$

$$\phi^{(c)} = (m + 1)\lambda' - m\lambda - \varpi' \quad (18)$$

Enquanto para as ressonâncias de Lindblad tem-se:

$$0 = (m + 1)n' - mn - \dot{\varpi} \quad (19)$$

$$\phi^{(l)} = (m + 1)\lambda' - m\lambda - \varpi \quad (20)$$

havendo-se tomado  $m^{(c)} = m$  e  $m^{(l)} = m + 1$ .

As equações 17-20, assim como as equações que serão encontradas nas seções posteriores, foram obtidas supondo que o satélite perturbador é exterior à partícula, ou seja, são para ressonâncias internas. Entretanto, estas podem ser facilmente adaptadas para ressonâncias externas tomando-se o inteiro  $m$  como um valor negativo, da mesma forma como utilizado em Sicardy (1991).

### 3.1.1 Localização das ressonâncias

As ressonâncias de corrotação e de Lindblad ocorrem, respectivamente, quando as condições dadas nas equações 17 e 19 são atendidas. Deste modo, fixando os elementos orbitais do corpo perturbador é possível encontrar o semi-eixo maior para o qual cada uma destas equações serão atendidas. Como pode ser visto nas equações 13 e 11 do capítulo 2, as frequências  $n$  e  $\kappa$  não possuem uma dependência linear do semi-eixo maior ( $a$ ), de modo que este precisa ser determinado por um método numérico, tendo-se utilizado nesse trabalho o método de Newton-Raphson.

O método de Newton-Raphson é utilizado para encontrar raízes de uma dada função  $f(x)$ , por meio da fórmula de recorrência (FRANCO, 2006):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (21)$$

sendo a diferença  $|x_{n+1} - x_n|$  correspondente ao erro no valor da raiz que está sendo calculada.

Para o cálculo da posição aproximada da ressonância, a função  $f(x)$  corresponderá à condição de ressonância  $\dot{\phi}$  enquanto sua raiz será o semi-eixo maior. Logo:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{\dot{\phi}}{\frac{d\dot{\phi}(a_n)}{da}} \quad (22)$$

Utilizando a equação 22 iterativamente foi possível determinar a posição das ressonâncias que serão utilizadas neste trabalho, tendo-se assumido um erro de  $10^{-3}$  km e como condição inicial de iteração, o semi-eixo maior  $a_0$  da ressonância de movimento médio (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$a_0 = \left( \frac{m}{m+1} \right)^{\frac{2}{3}} a' \quad (23)$$

### 3.2 RESSONÂNCIA DE CORROTAÇÃO EXCÊNTRICA

Nessa seção será analisado como o movimento de uma partícula é influenciado pela ressonância de corrotação excêntrica (RCE) enquanto na seção posterior estudo análogo será realizado para a ressonância de Lindblad excêntrica (RLE).

Para tal fim, é necessário conhecer a função perturbadora associada à ressonância de corrotação. Tomando o ângulo ressonante como dado na equação 18 e assumindo que a partícula possui excentricidade e inclinação inicial pequenas é possível encontrar, por meio da expansão da função perturbadora apresentada em Ellis e Murray (2000):

$$\langle R^{(c)} \rangle = \frac{G\mu'}{a'} e' f_d^{(c)} \cos \phi^{(c)} \quad (24)$$

sendo  $\mu'$  a massa do corpo perturbador e  $f_d^{(c)}$  uma função da razão entre o semi-eixo maior da partícula e do perturbador ( $\alpha = a/a'$ ), dada por (ELLIS; MURRAY, 2000):

$$f_d^{(c)} = \frac{1}{2} [2m + 1 + \alpha D] b_{1/2}^{(m)} \quad (25)$$

onde  $b_{1/2}^{(m)}$  corresponde ao coeficiente de Laplace e  $Db_{1/2}^{(m)}$  à sua derivada em relação ao semi-eixo maior da partícula, cujas fórmulas gerais são dadas por (ELLIS; MURRAY, 2000):

$$b_s^{(j)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s} \quad (26)$$

$$Db_s^{(j)} = s(b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)}) \quad (27)$$

Tais relações são válidas apenas para  $\alpha < 1$ .

Utilizando as equações planetárias de Lagrange é possível encontrar como os elementos orbitais são alterados devido à uma perturbação. Tais equações são deduzidas em Brouwer e Clemence (1967) assumindo pequenas inclinações e excentricidades iniciais, sendo dadas por (BROUWER; CLEMENCE, 1967):

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (28)$$

$$\dot{e} = - \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \quad (29)$$

$$\dot{I} = - \frac{1}{na^2 \sin I} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (30)$$

$$\dot{\varpi} = \frac{1}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\sin \frac{1}{2}I}{na^2} \frac{\partial R}{\partial I} \quad (31)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2 \sin I} \frac{\partial R}{\partial I} \quad (32)$$

Aplicando a equação 24 nas equações 28-32:

$$\dot{a} = 2e' \frac{G\mu'}{naa'} f_d^{(c)} m \sin \phi^{(c)} \quad (33)$$

$$\dot{e} = \dot{I} = \dot{\varpi} = \dot{\Omega} = 0 \quad (34)$$

Definindo (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$C^{(c)} \equiv \frac{G\mu'}{na^2a'} f_d^{(c)} = \frac{G\mu'}{n^2a^3a'} na f_d = \frac{\mu'}{M} n \alpha f_d^{(c)} \quad (35)$$

Encontra-se:

$$\dot{a} = 2mae' C^{(c)} \sin \phi^{(c)} \quad (36)$$

Logo, tem-se que o semi-eixo maior será, em primeira aproximação para excentricidade e inclinação, o único elemento a ser influenciado pela RCE. Por meio da terceira lei de Kepler, pode-se também encontrar como a ressonância afetará a frequência angular da partícula:

$$\dot{n} = -3me' n C^{(c)} \sin \phi^{(c)} \quad (37)$$

Uma vez que  $\dot{a}$  é proporcional a  $\sin \phi^{(c)}$ , é necessário conhecer como o ângulo ressonante varia com o tempo para se determinar a variação do semi-eixo maior. Com este intuito, será estudada a variação de  $\phi^{(c)}$  para uma partícula próxima à posição central da ressonância.

### 3.2.1 Modelo do pêndulo

Devido a condição de ressonância (equação 17), é sabido que na posição central da ressonância ( $a_c$ ), a partícula possuirá um ângulo ressonante de valor constante. Apesar disto, para um estudo mais completo dos efeitos da RCE, será analisado como  $\phi^{(c)}$  se comporta para partículas próximas a posição central da ressonância, seguindo a mesma metodologia apresentada em Murray e Dermott (1999). Tomando a derivada segunda do ângulo ressonante:

$$\phi^{(c)} = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi' \quad (38)$$

$$\dot{\phi}^{(c)} = (m+1)n' - mn - \dot{\varpi}' \quad (39)$$

$$\ddot{\phi}^{(c)} = (m+1)\dot{n}' - m\dot{n} - \ddot{\varpi}' \quad (40)$$

A partícula, por ser considerada como sem massa, não exerce influência gravitacional sobre o perturbador. Logo, os elementos orbitais deste serão constantes, levando a encontrar:

$$\ddot{\phi}^{(c)} = -m\dot{n} = -3m^2 e' n |C^{(c)}| \sin \phi \quad (41)$$

Definindo:

$$\omega_c^2 \equiv 3m^2 e' n |C^{(c)}| \quad (42)$$

Obtém-se:

$$\ddot{\phi}^{(c)} + \omega_c^2 \sin \phi^{(c)} = 0 \quad (43)$$

A equação 43 corresponde à equação de um pêndulo clássico, levando a concluir que próximo à posição central da ressonância, assim como em um pêndulo, o ângulo ressonante oscilará em torno de um valor constante. Por este motivo, quando a variação do ângulo ressonante apresentar uma variação total menor que  $360^\circ$ , diz-se que o ângulo ressonante libra e a partícula permanece em ressonância, enquanto que se esta for maior que  $360^\circ$ ,  $\phi^{(c)}$  circula e a partícula se encontra fora da ressonância.

Devido a proporcionalidade entre  $a$  e  $\phi^{(c)}$ , o semi-eixo maior também apresentará uma oscilação a período constante, como ficará evidente adiante.

Já a energia do sistema será análoga à do pêndulo clássico (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$E = \frac{1}{2} \dot{\phi}^{(c)2} + 2\omega_c^2 \sin^2 \frac{1}{2} \phi^{(c)} \quad (44)$$

Com o intuito de determinar até qual distância de  $a_c$  uma partícula permanecerá em RCE, será estudado como esta se comporta quando iniciada na iminência de sair da ressonância, correspondendo tal condição a  $\phi = \pi$  e  $\dot{\phi} = 0$  (MURRAY; DERMOTT, 1999). Para esse caso, a energia será:

$$E = 2\omega_c^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^{(c)2} + 2\omega_c^2 \sin^2 \frac{\phi^{(c)}}{2} \Rightarrow \dot{\phi}^{(c)} = \pm 2\omega_c \cos \frac{\phi^{(c)}}{2} \quad (45)$$

Analisando a variação do semi-eixo maior da partícula (equação 36):

$$da = 2mae' C^{(c)} \sin \phi^{(c)} dt = 2mae' C^{(c)} \frac{\sin \phi^{(c)}}{\dot{\phi}^{(c)}} d\phi^{(c)} = \pm \frac{2mae' C^{(c)}}{\omega_c} \sin \frac{\phi^{(c)}}{2} d\phi^{(c)} \quad (46)$$

Supondo que a variação no semi-eixo maior é desprezível em relação ao valor inicial ( $da/a_0 \ll 1$ ), o que é válido para os casos que serão estudados nesse trabalho, pode-se integrar a equação 46 tomando  $a$  como constante:

$$a = a_c \pm \frac{4ma_c e' |C^{(c)}|}{\omega_c} \cos \frac{\phi^{(c)}}{2} = a_c \pm \delta a \cos \frac{\phi^{(c)}}{2} \quad (47)$$

Logo, a variação total máxima no semi-eixo maior será  $2\delta a$ , correspondendo a largura da ressonância ( $W_c$ ) (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$W_c = \frac{8ma_c e' |C^{(c)}|}{\omega_c} = 8a_c \sqrt{\frac{e' |C^{(c)}|}{3n}} = 8a_c \sqrt{\frac{e' G \mu' f_d^{(c)}}{3n^2 a^2 a'}} = 8a_c \sqrt{\frac{a' |R^{(c)}|}{3GM}} \quad (48)$$

Diferenciando a terceira lei de Kepler e substituindo  $da$  (equação 46), encontra-se

$$dn = \pm \frac{\omega_c}{m} \sin \frac{\phi^{(c)}}{2} d\phi^{(c)} \quad (49)$$

Integrando:

$$n = n_c \pm 2 \frac{\omega_c}{m} \cos \frac{\phi^{(c)}}{2} d\phi^{(c)} = n_c + \frac{1}{m} \dot{\phi}^{(c)} \quad (50)$$

de modo que  $n_c$  corresponde à frequência angular de uma partícula iniciada no centro da ressonância.

Calculando a variação azimutal da partícula durante um período, em um sistema de referência rotacionando com a frequência angular  $n_c$ :

$$d\theta = (n - n_c)dt = \frac{1}{m} \dot{\phi}^{(c)} \frac{d\phi^{(c)}}{\dot{\phi}^{(c)}} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\pi}{m} \quad (51)$$

Assim, obtém-se uma importante propriedade da ressonância de corotação que é confinar as partículas azimutalmente, uma vez que a variação angular máxima apresentada por uma partícula presa a uma RCE  $m + 1:m$ , no sistema girante, será  $2\pi/m$ . Deste modo, ocorrerá a formação de  $m$  sítios nos quais as partículas permanecerão confinadas.

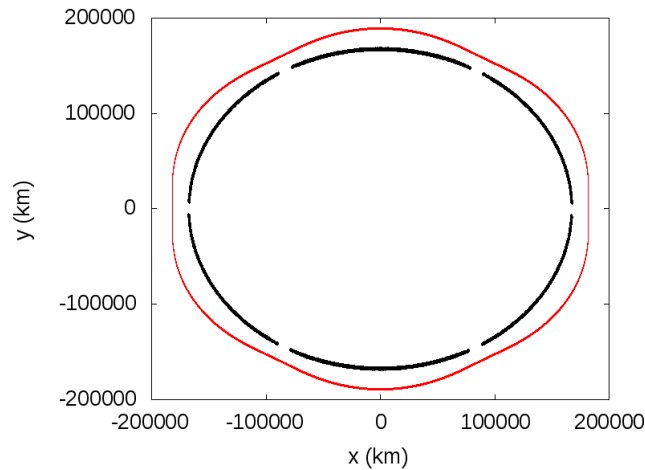
A variação encontrada na equação 51 corresponde à de uma partícula na iminência de sair da ressonância, ou seja, com maior variação possível do ângulo ressonante. Já partículas com menor variação deste ângulo também apresentarão uma menor variação de  $\Delta\theta$ . Logo, conclui-se que quanto menor a variação de  $\phi^{(c)}$ , menor será a variação do semi-eixo maior e do ângulo azimutal da partícula.

Um exemplo da formação dos sítios ressonantes e do confinamento azimutal é mostrado na Figura 1, que apresenta o movimento de seis partículas na RCE 7:6 com o satélite Mimas, uma em cada sítio. Como pode visto, as partículas permanecem confinadas em um segmento de elipse com amplitude azimutal menor que  $60^\circ$  ( $360^\circ/6$ ), cujos pontos de retorno correspondem as posições de maior aproximação entre o satélite e as partículas, se devendo isto ao fato destes corresponderem aos pontos em que ocorrerá maior troca de energia entre os corpos. Também pode ser visto que os pontos de equilíbrio do sistema correspondem aos seis pontos com maior distância do perturbador, ou seja, correspondem aos pontos com menor troca de energia.

### 3.2.2 Aproximação de Huygens

De modo análogo ao realizado para o pêndulo clássico, será analisado o caso em que o ângulo ressonante varia com pequena amplitude, considerando  $\sin \phi^{(c)} \approx \phi^{(c)}$ . Tal aproximação é chamada de aproximação de Huygens e para o caso do pêndulo clássico é válida para ângulos menores que  $23^\circ$

Figura 1 – Movimento de seis partículas em RCE 7:6 (em preto) e do satélite perturbador (em vermelho), no sistema girante com a frequência angular central da ressonância ( $n_c$ ).



fonte: Autor.

(CLAUDIO; SUPPES et al., 2009), de forma que será tomado esse mesmo limite para o caso da RCE.

Considerando o limite de pequenas variações na equação 43:

$$\ddot{\phi}^{(c)} + \omega_c^2 \phi^{(c)} = 0 \Rightarrow \phi^{(c)} = \phi^M \sin(\omega_c t + \psi) \quad (52)$$

onde  $\phi^M$  é a amplitude de variação do ângulo ressonante e  $\psi$  uma fase.

Substituindo a equação 52 na equação 36 e integrando:

$$a = a_c + \Delta a \cos(\omega_c t + \psi) \quad (53)$$

$$\Delta a = \frac{2ma_c e' C^{(c)} \phi^M}{\omega_c} = \sqrt{\frac{4e' C^{(c)}}{3n}} \phi^M a_c \quad (54)$$

Manipulando a equação para esta depender de  $W_c$ , encontra-se:

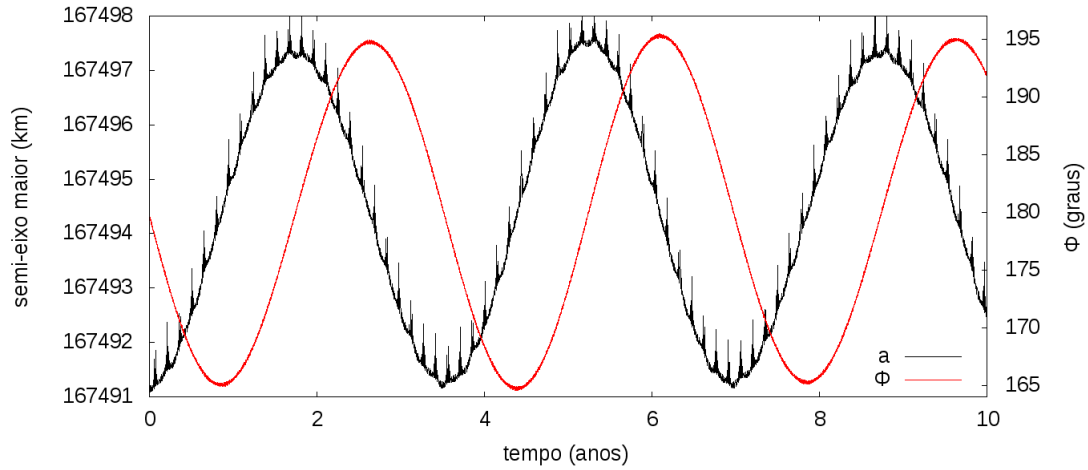
$$4\Delta a = W_c \phi^M \quad (55)$$

Como já discutido anteriormente, a variação do ângulo ressonante é acompanhada por uma variação do semi-eixo maior, sendo isto evidenciado na equação 53, por meio da qual também é possível ver que a variação do semi-eixo maior e do ângulo ressonante são defasados em  $90^\circ$ . Já a relação entre as amplitudes de variação desses dois elementos é dada na equação 55, a qual foi amplamente utilizada neste trabalho para verificar a coerência das simulações numéricas.

Um exemplo da validade das relações obtidas nessa seção pode ser visto na Figura 2, que apresenta a variação do semi-eixo maior (em preto) e ângulo ressonante (em vermelho) do satélite Aegaeon o qual se encontra na RCE 7:6 com Mimas.

Segundo discutido em Hedman et al. (2010), este satélite apresenta uma variação no semi-eixo maior de  $\pm 4$  km em torno do valor médio 167494 km, de modo que a amplitude do ângulo ressonante calculado por meio da equação 55 será de, aproximadamente,  $15^\circ$  (os valores utilizados para o cálculo serão apresentados no capítulo 4), o que pode ser verificado na Figura 2 e concorda com o apresentado

Figura 2 – Variação do semi-eixo maior ( $a$ ) e ângulo ressonante ( $\phi$ ) do satélite Aegaeon.



fonte: Autor.

em Araujo (2017). Nesta mesma figura vê-se que o semi-eixo maior e o ângulo ressonante oscilam com mesmo período e fase de  $90^\circ$ .

### 3.3 RESSONÂNCIA DE LINDBLAD EXCÊNTRICA

Utilizando a mesma metodologia apresentada na seção anterior, obtém-se como função perturbadora da ressonância de Lindblad excêntrica (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\langle R^{(l)} \rangle = \frac{G\mu'}{a'} e f_d^{(l)} \cos \phi^{(l)} \quad (56)$$

$$f_d^{(l)} = \frac{1}{2} [-2(m+1) - \alpha D] b_{1/2}^{(m)} \quad (57)$$

tendo-se assumido o ângulo ressonante da equação 20 e que a excentricidade inicial da partícula é pequena.

Substituindo a equação 56 nas equações 28-32, obtém-se:

$$\dot{a} = 2maeC^{(l)} \sin \phi^{(l)} \quad (58)$$

$$\dot{e} = -C^{(l)} \sin \phi^{(l)} \quad (59)$$

$$\dot{\omega} = \frac{C^{(l)}}{e} \cos \phi^{(l)} \quad (60)$$

$$\dot{I} = \dot{\Omega} = 0 \quad (61)$$

$$C^{(l)} = \frac{\mu'}{M} n \alpha f_d^{(l)} \quad (62)$$

Comparando as equações 58 e 59, encontra-se

$$\frac{da}{a} = -2me^2 \frac{de}{e} \quad (63)$$

Logo, a RLE será responsável por excitar as órbitas das partículas, assim como variar o argumento do pericentro destas. Uma vez que as variações do semi-eixo maior são duas ordens de grandeza menor que da excentricidade, estas podem ser negligenciadas ( $\dot{a} \approx 0$ ) para pequenas excentricidades iniciais (MOUTAMID; SICARDY; RENNER, 2013).

Tomando a derivada segunda do ângulo ressonante:

$$\phi^{(l)} = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi \quad (64)$$

$$\dot{\phi}^{(l)} = (m+1)n' - mn - \dot{\varpi} \quad (65)$$

$$\ddot{\phi}^{(l)} = -\ddot{\varpi} \quad (66)$$

$$\ddot{\phi}^{(l)} = - \left[ -\frac{C^{(l)}}{e^2} \dot{e} \cos \phi^{(l)} - \frac{C^{(l)}}{e} \sin \phi^{(l)} \dot{\phi}^{(l)} \right] \quad (67)$$

Substituindo as equações 59 e 65 na equação 67 e definindo  $\xi \equiv (m+1)n' - mn$ :

$$0 = \ddot{\phi}^{(l)} + \omega_l^2 \sin \phi^{(l)} \quad (68)$$

$$\omega_l^2 = \frac{C^{(l)}}{e} \xi \quad (69)$$

Assim, o ângulo ressonante da RLE também oscilará da mesma forma que um pêndulo, o que causará alterações na excentricidade da partícula. No caso da RCE, tinha-se uma relação direta entre semi-eixo maior e o ângulo ressonante, com ambos oscilando com mesmo período e amplitudes proporcionais, entretanto o mesmo não pode ser afirmado a respeito da excentricidade e ângulo ressonante no caso da RLE. Isto se deve ao fato de, diferente da corotação em que a aproximação  $\Delta a/a_0 \ll 1$  era válida, para a Lindblad não é possível afirmar que  $\Delta e/e_0 \ll 1$ , uma vez que foi tomada uma excentricidade muito pequena.

Apesar disto, com algumas aproximações é possível avaliar a intensidade e o alcance da ressonância por meio do cálculo da excentricidade forçada e largura da ressonância.

Sabendo que a energia do sistema possuirá fórmula análoga à apresentada na equação 44, pode-se calcular a energia máxima permitida ao sistema ( $\dot{\phi}^{(l)} = 0$  e  $\phi^{(l)} = \pi$ ):

$$E_m = 2\omega_l^2 \Rightarrow \dot{\phi}^{(l)2} = 4\omega_l^2 \cos^2 \frac{\phi^{(l)}}{2} \quad (70)$$

Assim, a variação da excentricidade pode ser escrita como:

$$de = -C^{(l)} \sin \phi^{(l)} \frac{d\phi^{(l)}}{\dot{\phi}^{(l)}} = -\sqrt{\frac{eC^{(l)}}{\xi}} \sin \frac{\phi^{(l)}}{2} d\phi^{(l)} \quad (71)$$

Integrando, obtém-se:

$$\sqrt{e} \Big|_{e=e_0}^{e=e} = \sqrt{\frac{C^{(l)}}{\xi}} \cos \frac{\phi^{(l)}}{2} \quad (72)$$

Logo, a variação máxima da excentricidade, ou excentricidade forçada  $e_f$ , devido à ressonância de RLE será (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$e_f = \left| \frac{C^{(l)}}{\xi} \right| = \left| \frac{n\alpha(\mu'/M)f_d^{(l)}}{(m+1)n' - mn} \right| \quad (73)$$

Analisando a equação 72, vê-se que devido ao termo quadrático contendo o ângulo ressonante, a ressonância apenas aumenta a excentricidade em relação ao seu valor inicial, de modo que este aumento é inversamente proporcional à distância da partícula a posição central da ressonância. Isto pode ser visto analisando o termo  $\xi$  presente no denominador das equações 72 e 73, o qual corresponde a condição de ressonância somado a variação do argumento do pericentro da partícula. Uma vez que  $\varpi$  também apresenta uma variação análoga à do pêndulo (equação 66), quanto mais próxima está a partícula da posição central da ressonância, menor será a variação de  $\xi$ , levando a uma maior excentricidade.

Pela órbita da partícula ser excitada devido a RLE, tem-se que o seu raio orbital também será alterado. Seja a equação da órbita expandida em primeira ordem na excentricidade e escrita em função da longitude média (PORCO; NICHOLSON, 1987):

$$r = a(1 - e \cos(\lambda - \varpi)) \quad (74)$$

Manipulando a condição de ressonância (equação 19):

$$n - \dot{\varpi} = (m+1)(n - n') \Rightarrow \lambda - \varpi = (m+1)(\lambda - \lambda') + \theta_0 \quad (75)$$

onde  $\theta_0$  é uma constante.

Escrevendo o raio da partícula no sistema girante com o corpo perturbador ( $\theta = \lambda - \lambda'$ ), obtém-se:

$$r = a(1 - e \cos((m+1)\theta + \theta_0)) \quad (76)$$

Deste modo, as partículas em ressonância de Lindblad apresentarão um movimento de “*stream-line*” (PORCO; NICHOLSON, 1987). Algumas propriedades deste tipo de movimento podem ser encontradas determinando os pontos de máximo e mínimo do raio orbital:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = ae(m+1) \sin((m+1)\theta + \theta_0) = 0 \Rightarrow (m+1)\theta + \theta_0 = v\pi \quad (77)$$

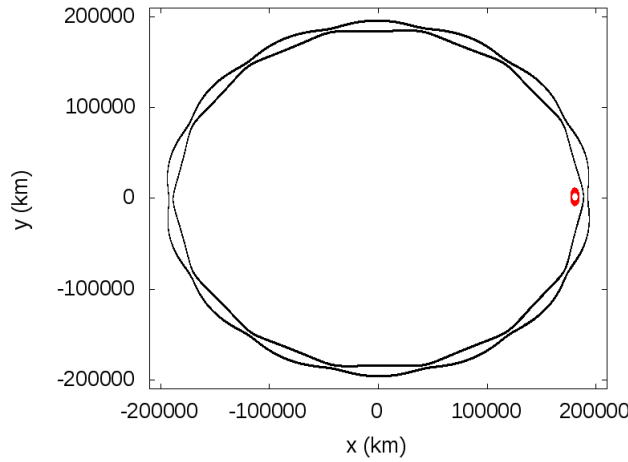
sendo  $v$  um valor inteiro.

Assim, encontra-se dentro do intervalo  $[0 : 2\pi]$  a existência de  $2(m+1)$  pontos de inflexão do raio orbital. Analisando suas concavidades:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} = ae(m+1)^2 \cos(v\pi) = (-1)^v ae(m+1)^2 \quad (78)$$

Logo, o movimento dessas partículas apresentará máximos e mínimos intercalados. Esse padrão pode ser visto na Figura 3, que apresenta o movimento de duas partículas (em preto) iniciadas com

Figura 3 – Movimento de duas partículas (em preto) com excentricidade inicial de  $10^{-2}$  presas em RLE 14:15 com Mimas (em vermelho), no sistema girante com o movimento orbital de Mimas.



fonte: Autor.

$\Delta a = \pm 5$  km do centro da RLE 14:15 ( $m = -15$ ) com Mimas (em vermelho).

O movimento das partículas apresenta 14 pontos de máxima e mínima aproximação com Mimas, sendo estes opostos para a partícula interior e exterior ao centro da ressonância, estando tal fato relacionado às fases  $\theta_0$ , que possuem uma diferença de  $180^\circ$ .

Uma vez que a excentricidade forçada é inversamente proporcional à distância ao centro da ressonância, ao passo que a partícula é afastada da posição central da Lindblad, a diferença radial entre os pontos de máximo e de mínimo se torna menor, de modo que a densidade de *streamlines* se torna maior. Logo, as partículas são confinadas radialmente.

Um modo de determinar a largura deste confinamento corresponde a encontrar o semi-eixo maior ( $a_l + \delta a$ ) para o qual sua distância em relação ao centro da ressonância é igual a amplitude ( $((a_l + \delta a)(1 + e_f))$ ) da “*streamline*” (PORCO; NICHOLSON, 1987). Utilizando a lei dos cossenos e desprezando termos quadráticos, encontra-se:

$$W_l = 4\sqrt{a_l e_f \delta a} \quad (79)$$

O produto  $ae_f$  pode ser encontrado manipulando a equação 73:

$$ae_f = \left| \alpha(\mu'/M) f_d^{(l)} \frac{(n_l + \delta n)(a_l + \delta a)}{(m+1)n' - mn_l(1 - \delta n/n_l)} \right| \quad (80)$$

Utilizando o fato que  $\delta a/a_l \ll 1$ , tem-se que  $\delta n/n_l$  será um valor grande, de modo que será o dominante no denominador. Assim:

$$ae_f \approx \left| \alpha(\mu'/M) f_d^{(l)} a_l \frac{(1 + \delta n/n_l)(1 + \delta a/a_l)}{m\delta n/n_l} \right| \quad (81)$$

Substituindo a relação  $\delta n/n_l = -3\delta a/2a_l$  e mantendo apenas o termo dominante, encontra-se (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$ae_f \approx \left| \frac{2\alpha(\mu'/M)f_d^{(l)}a_l^2}{3m\delta a} \right| \quad (82)$$

$$W_l = 4a_l \sqrt{\frac{2\alpha}{3m} \left( \frac{\mu'}{M} \right) f_d^{(l)}} \quad (83)$$

que corresponde a largura da RLE.

### 3.4 EFEITO ACOPLADO DAS RESSONÂNCIAS DE CORROTAÇÃO E LINDBLAD

Nas seções anteriores foi analisado isoladamente os efeitos das ressonâncias de corrotação e de Lindblad. Entretanto, para os arcos planetários tem-se que a distância entre os centros dessas ressonâncias é pequena, de modo que as partículas além de confinadas pela RCE, se encontram sob efeito da RLE. Visto isto, nessa seção serão discutidos qualitativamente os efeitos acoplados destas duas ressonâncias. Uma análise mais formal desse problema é realizada em Moutamid, Sicardy e Renner (2013) que apresenta o modelo CoraLin (*Corotation and Lindblad*).

Segundo apresentado em Moutamid, Sicardy e Renner (2013), partículas em corrotação e sob efeito da ressonância de Lindblad podem apresentar movimento caótico, devido ao acoplamento da excitação das órbitas causada pela Lindblad e pela alteração do semi-eixo maior promovido pela corrotação. Deste modo, é conveniente encontrar uma grandeza adimensional  $D$ , interpretada como o nível de caoticidade do sistema.

Sejam as condições de ressonância dadas nas equações 17 e 19:

$$0 = (m+1)n' - mn_c - \dot{\varpi}' \quad (84)$$

$$0 = (m+1)n' - mn_l - \dot{\varpi} \quad (85)$$

Subtraindo-as é possível encontrar a diferença entre a frequência angular das ressonâncias:

$$n_l - n_c = \frac{\dot{\varpi}' - \dot{\varpi}}{m} \quad (86)$$

Se esta for maior à variação da frequência angular de uma partícula na iminência de sair da RCE é esperado que o movimento desta seja regular, uma vez que não sentirá o efeito da Lindblad. Assim, utilizando a variação máxima de  $n_c$ , encontrada a partir da equação 49, obtém-se (MOUTAMID; SICARDY; RENNER, 2013):

$$\frac{|\dot{\varpi}' - \dot{\varpi}|}{m} \geq 2\frac{\omega_c}{m} \Rightarrow D \equiv \frac{\dot{\varpi}' - \dot{\varpi}}{\omega_c} \geq |2| \quad (87)$$

Deste modo, sistemas com parâmetro  $D$ , em módulo, maior que 2 serão regulares, pois não existirá sobreposição de ressonâncias, enquanto para valores menores, o sistema apresentará caoticidade onde ocorrer acoplamento das RCE e RLE.

Tal acoplamento pode ser percebido nas variações de semi-eixo maior e excentricidade causadas por ambas ressonâncias:

$$\dot{a} = 2mae'C^{(c)} \sin \phi^{(c)} + 2maeC^{(l)} \sin \phi^{(l)} \quad (88)$$

$$\dot{e} = -C^{(l)} \sin \phi^{(l)} \quad (89)$$

Supondo que a partícula se encontra próxima ao centro da ressonância de corrotação, será tomada a aproximação de Huygens:

$$\dot{a} - 2ma_c e' C^{(c)} \phi^{(c)} = 2ma_c e C^{(l)} \sin \phi^{(l)} \quad (90)$$

A solução homogênea dessa equação foi obtida na subseção 3.2.2, enquanto a particular pode ser expressa como uma série de Fourier:

$$a = a_c + \Delta a \cos(\omega_c t + \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e) \cos(\omega_l t + \psi') \quad (91)$$

$$a_n(e) = \frac{2ma_c C^{(l)} \omega_l}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_l} e(t) \cos(\omega_l t + \psi') dt \quad (92)$$

As equações 91 e 92 evidenciam a relação existente entre a excentricidade e o semi-eixo maior das partículas, correspondente ao efeito da Lindblad na corrotação desses corpos.

Quanto menor o módulo do parâmetro  $D$ , maior será a perturbação gerada pela ressonância de Lindblad nas partículas, o que pode ser percebido por meio da evolução orbital do semi-eixo maior destas, a qual apresentará variações secundárias de amplitude e período dependentes da distância ao centro da ressonância de Lindblad ( $a_n \propto e$ ;  $\omega_c \propto 1/e$ ). Estas variações secundárias podem ser vistas na Figura 2.

Pela relação existente entre o semi-eixo maior e o ângulo ressonante, as partículas possuirão seu confinamento azimutal perturbado devido à RLE, de modo que estas podem, inclusive, apresentar um movimento muito diferente do esperado apenas quando sobre o efeito da corrotação.

#### 4 EFEITO DE PERTURBAÇÕES NAS PARTÍCULAS EM RESSONÂNCIA

Conforme descrito no capítulo 1, os arcos de Saturno se encontram em ressonância de corrotação excêntrica com o satélite Mimas, sendo esta do tipo 7:6, 14:15 e 10:11 para o arco do anel G, de Methone e de Anthe, respectivamente. Com o objetivo de obter sistemas que reproduzam os arcos saturnianos, utilizou-se a linguagem de programação *c++* para calcular a posição das ressonâncias excêntricas de corrotação (RCE) e Lindblad (RLE) associadas aos sistemas por meio do algoritmo descrito na subseção 3.1.1, suas larguras (capítulo 3, equações 48 e 83), a excentricidade forçada pela Lindblad ( $e_f$ ; capítulo 3, equação 73) e o valor do parâmetro adimensional D (capítulo 3, equação 87).

Como dados de entrada do programa responsável por realizar os cálculos, foram utilizados o semi-eixo maior, excentricidade e inclinação osculadores de Mimas, em relação ao centro de Saturno, extraídos do banco de dados JPL ( $a = 185539$  km;  $e = 0.0196$ ;  $I = 1.574^\circ$ ), enquanto os elementos angulares foram tomados como nulos. Os coeficientes de não-esfericidade de Saturno  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$  foram retirados de Hedman et al. (2010) e a excentricidade geométrica inicial das partículas foi tomada como  $10^{-5}$ , enquanto os elementos orbitais angulares e inclinação foram considerados nulos.

Os ângulos ressonantes utilizados são apresentados na tabela 1, de modo que o subscrito  $M$  se refere ao satélite Mimas; a tabela 2 apresenta os dados calculados, sendo estes consistentes com os encontrados na literatura (COOPER et al., 2008; HEDMAN et al., 2009; HEDMAN et al., 2010; MOUTAMID; SICARDY; RENNER, 2013; ARAUJO; NETO; FORYTA, 2016).

Como forma de comparação, a tabela 2 apresenta, também, o semi-eixo maior geométrico  $a_s$  dos satélites Aegaeon, Methone e Anthe, podendo ser visto que estes se encontram dentro das regiões delimitadas pelas RCE 7:6, 14:15 e 10:11, respectivamente. Tais valores foram encontrados igualando a equação da frequência angular  $n$  (capítulo 2, equação 13) ao seu valor numérico retirado do banco de dados JPL e resolvendo-a pelo método de Newton-Raphson.

Utilizando o pacote de integração de N-corpos *Mercury* (CHAMBERS, 1999), as partículas iniciadas nas regiões delimitadas pelas ressonâncias de corrotação foram simuladas numericamente

Tabela 1 – Ângulos das RCE ( $\phi^{(c)}$ ) e RLE ( $\phi^{(l)}$ ).

|       | $\phi^{(c)}$                         | $\phi^{(l)}$                       |
|-------|--------------------------------------|------------------------------------|
| 7:6   | $7\lambda_M - 6\lambda - \varpi_M$   | $7\lambda_M - 6\lambda - \varpi$   |
| 14:15 | $15\lambda - 14\lambda_M - \varpi_M$ | $15\lambda - 14\lambda_M - \varpi$ |
| 10:11 | $11\lambda - 10\lambda_M - \varpi_M$ | $11\lambda - 10\lambda_M - \varpi$ |

fonte: Autor.

Tabela 2 – Dados calculados para as ressonâncias 7:6, 14:15 e 10:11 e semi-eixo maior geométrico ( $a_s$ ) de Aegaeon (7:6), Anthe (10:11) e Methone (14:15).

|       | $a_c$ (km) | $W_c$ (km) | $a_l$ (km) | $W_l$ (km) | $e_f$ ( $10^{-3}$ ) | D     | $a_s$ (km) |
|-------|------------|------------|------------|------------|---------------------|-------|------------|
| 7:6   | 167493.5   | 64.0       | 167511.7   | 127.1      | 1.2                 | -1.14 | 167470.1   |
| 14:15 | 194232.9   | 111.4      | 194236.5   | 143.9      | 2.0                 | +0.14 | 194205.7   |
| 10:11 | 197655.5   | 96.3       | 197662.4   | 144.7      | 1.4                 | +0.31 | 197627.9   |

fonte: Autor.

utilizando o algoritmo de Bulirsch-Stöer, juntamente com Mimas e os efeitos dos coeficientes de gravidade de Saturno ( $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ ), por 20 anos. O sistema para cada ressonância foi formado distribuindo partículas no intervalo de semi-eixo maior geométrico [ $a_c - W_c/2 : a_c + W_c/2$ ], mantendo-se uma separação entre partículas de 1 km e no intervalo de longitude média [ $0^\circ : 360^\circ$ ], com separação de  $1^\circ$ .

Os dados dos arquivos de saída gerados pelo integrador, contendo os vetores posição e velocidade das partículas, foram convertidos para elementos geométricos utilizando as relações apresentadas na seção 2.1, e o ângulo de corotação calculado verificando quais partículas permanecem em ressonância de corotação excêntrica ( $\Delta\phi^{(c)} < 360^\circ$ ).

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4, estando em preto as partículas em ressonância de corotação excêntrica com Mimas enquanto em cinza estão as fora desta. Os pontos em vermelho, azul e verde correspondem às partículas apresentadas na Figura 6. Como pode ser visto, a RCE 7:6, 14:15 e 10:11 dá origem a 6, 15 e 11 sítios, respectivamente, nos quais as partículas permanecem confinadas azimutalmente.

Na Figura 5 é apresentado o movimento de uma partícula representativa em cada sítio das RCE 7:6, 14:15 e 10:11 com Mimas. O movimento de Mimas (em vermelho) e das partículas (em preto) se encontram no sistema girante com a frequência da ressonância, de modo que o confinamento azimutal sofrido por estas pode ser visto. Já na Figura 6 é mostrada a variação do semi-eixo maior de 7 partículas presas às ressonâncias consideradas, na qual a cor verde corresponde àquelas iniciadas ao centro das ressonâncias, a cor azul às internas e a cor vermelha às externas aos centros. As condições iniciais destas partículas são apresentadas na Figura 4.

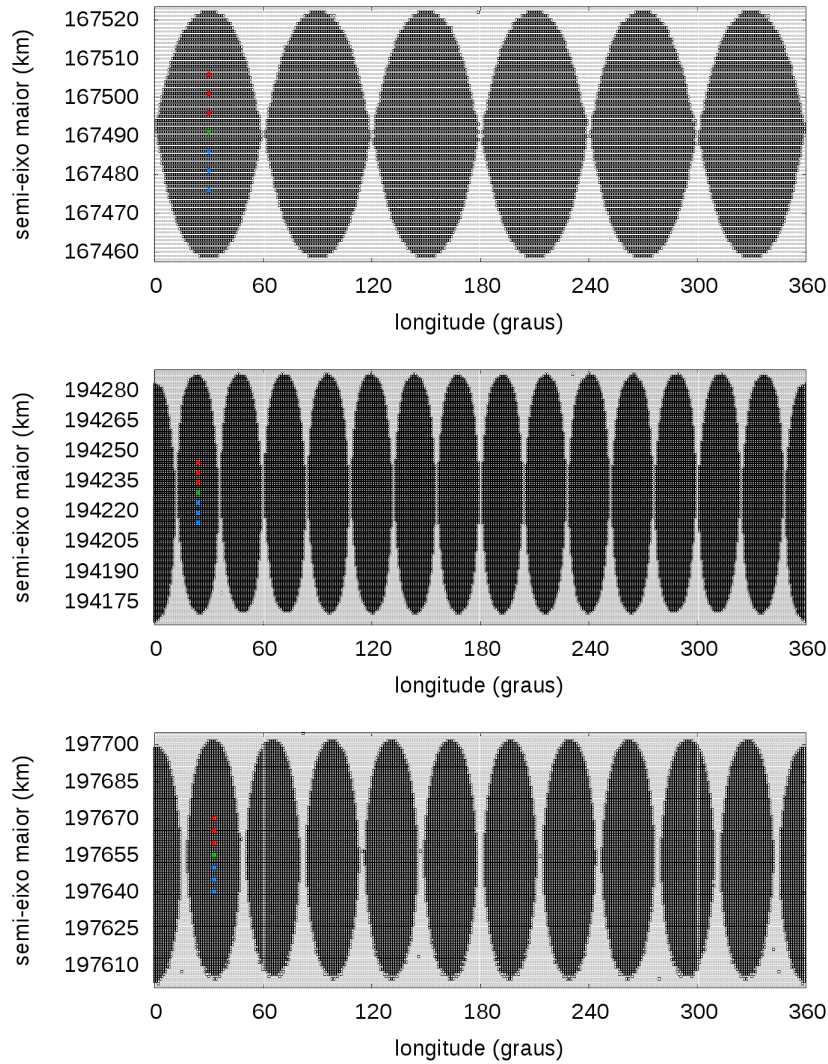
Como pode ser visto, além da oscilação principal de amplitude dependente da defasagem em relação ao centro do sítio, esperada teoricamente, o semi-eixo maior das partículas apresenta variações secundárias, as quais se devem à RLE. Por meio de uma análise da distância entre as ressonâncias excêntricas de corotação e Lindblad (tabela 2), vê-se que esta é menor para a região da ressonância 14:15 (Figura 6 - painel do meio), de modo que suas partículas são as que apresentam maiores perturbações no semi-eixo maior.

Pelo fato da distância entre as RCE e RLE ser maior para a região da ressonância 7:6 (Figura 6 - painel de cima), tem-se que as partículas iniciadas na ressonância de corotação excêntrica deste tipo são as que apresentam variações mais regulares no semi-eixo maior. Tal região corresponde a menos caótica entre as consideradas, segundo a classificação apresentada em Moutamid, Sicardy e Renner (2013).

Buscando analisar como a proximidade com a ressonância de Lindblad influencia a região dos arcos, estudou-se a excentricidade das partículas. Focando, primeiramente, na ressonância 14:15, tem-se que devido ao fato do centro das RCE e RLE possuírem uma distância radial de 3.6 km, as partículas em RCE também se encontram confinadas pela RLE e por isso apresentam variações na excentricidade.

Exemplos são mostrados na Figura 7 e na Figura 8, nas quais podem ser vistas as variações dos ângulos ressonantes e da excentricidade. A partícula apresentada na Figura 7 foi iniciada em  $a = 194226$  km ( $\Delta a_c = 6$  km e  $\Delta a_l = 10$  km) e com defasagem nula na longitude média ( $\Delta\lambda = 0^\circ$ ),

Figura 4 – Sítios formados pela RCE 7:6, 14:15, 10:11 com Mimas, de cima para baixo. Em preto, estão as partículas que se encontram em RCE, enquanto as partículas em cinza estão fora do confinamento. Os pontos em vermelho, azul e verde se referem às partículas da Figura 6.



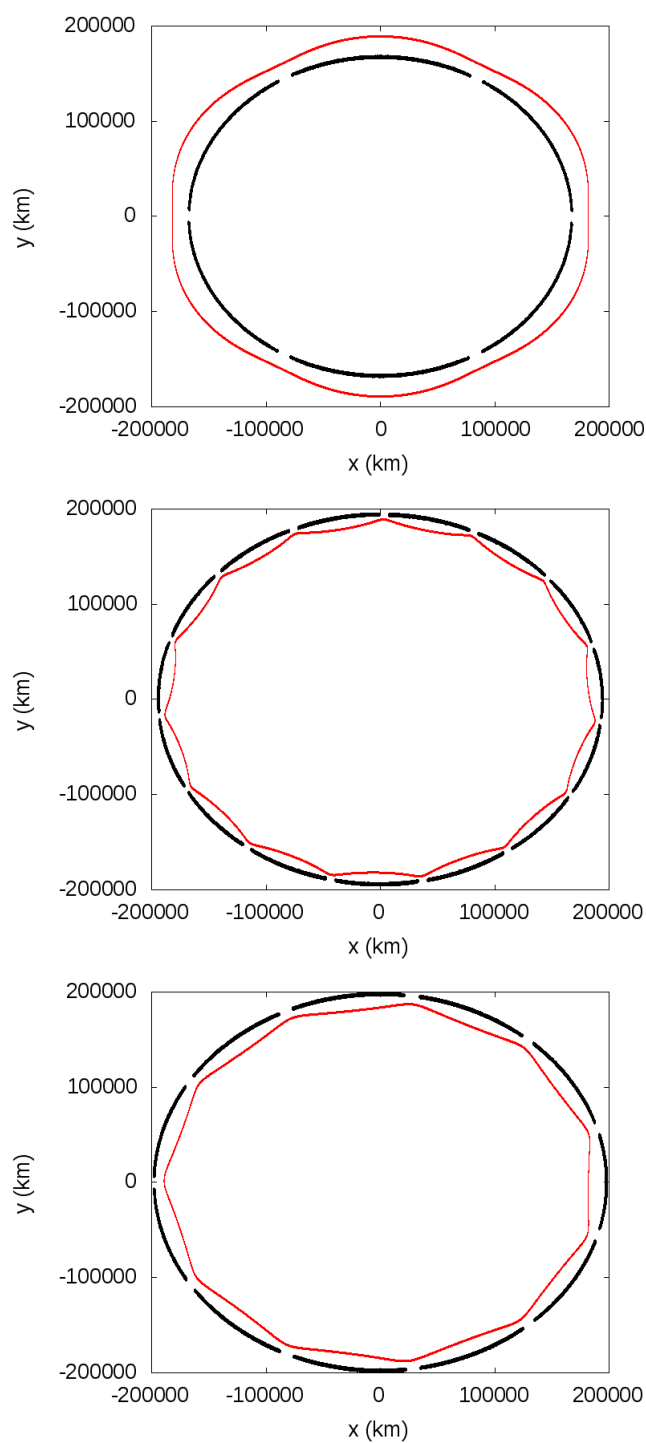
fonte: Autor.

medida em relação ao centro do sítio ressonante. Já a partícula da Figura 8 foi iniciada em  $a = 194240$  km ( $\Delta a_c = 8$  km e  $\Delta a_l = 4$  km) e com  $\Delta \lambda = 2^\circ$ , respectivamente.

Como pode ser notado, ambas partículas se encontram confinadas pelas RCE e RLE, sendo a última responsável por gerar variações na excentricidade. Isso fica evidente no tempo 6.5 anos, quando a queda na oscilação do ângulo  $\phi^{(l)}$  é acompanhada por um ponto de mínimo local na excentricidade. Devido ao fato das partículas possuírem pequenos  $\Delta a_l$  (distância ao centro da RLE), estas têm suas órbitas excitadas para valores próximos a  $2 \times 10^{-3}$ , se aproximando, deste modo, à excentricidade forçada máxima gerada pela RLE (tabela 2). Partículas com maiores valores de  $\Delta a_l$  apresentam menores variações na excentricidade, entretanto é observado que todas as partículas confinadas pela RCE 14:15 alcançam valores na excentricidade da ordem de  $10^{-3}$ , explicando o fato desta região ser menos regular que as demais.

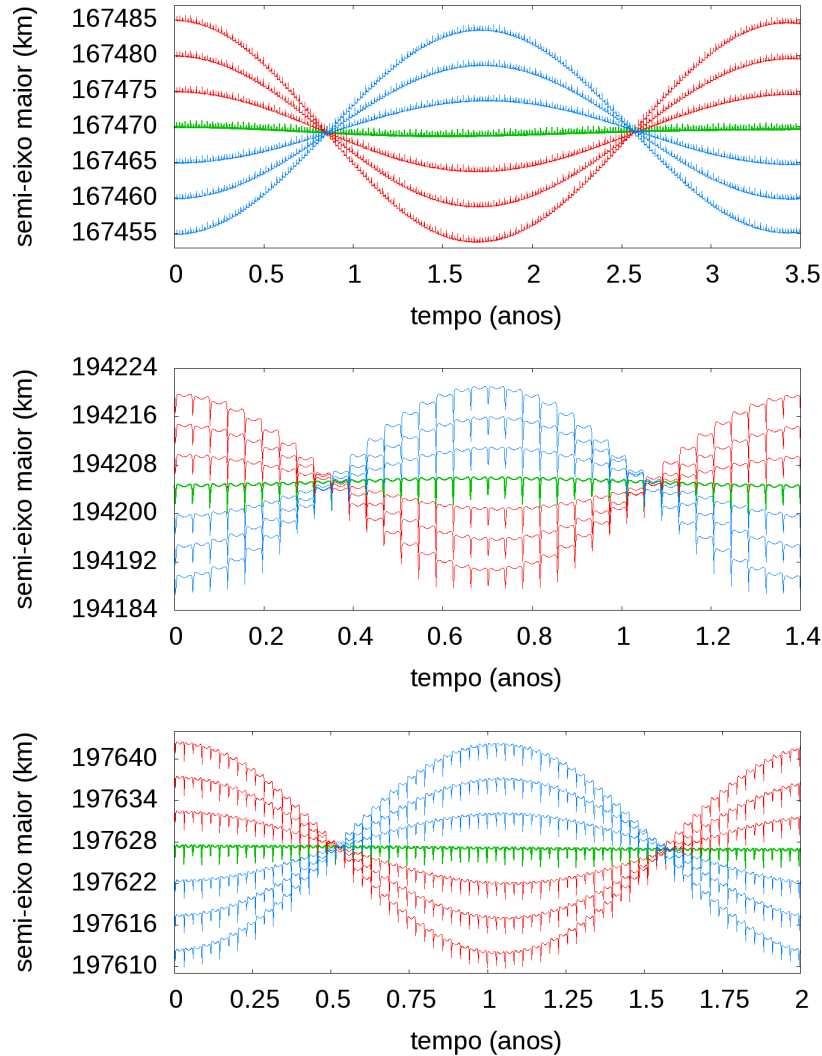
De modo geral, a região da ressonância 10:11 apresenta características semelhantes à 14:15, com as partículas em RCE também presas à RLE durante grande parte de suas evoluções orbitais. Entretanto,

Figura 5 – Confinamento azimuthal para as RCE 7:6, 14:15, 10:11 com Mimas, de cima para baixo. Em vermelho é apresentado o movimento de Mimas no sistema girante com a frequência da ressonância e em preto, o das partículas.



fonte: Autor.

Figura 6 – Variação temporal do semi-eixo maior de 7 partículas presas à RCE 7:6, 14:15, 10:11 com Mimas, de cima para baixo. Em azul e vermelho encontram-se as partículas inicialmente internas e externas, respectivamente, ao centro dos sítios, enquanto as partículas em verde foram iniciadas na posição central destes.

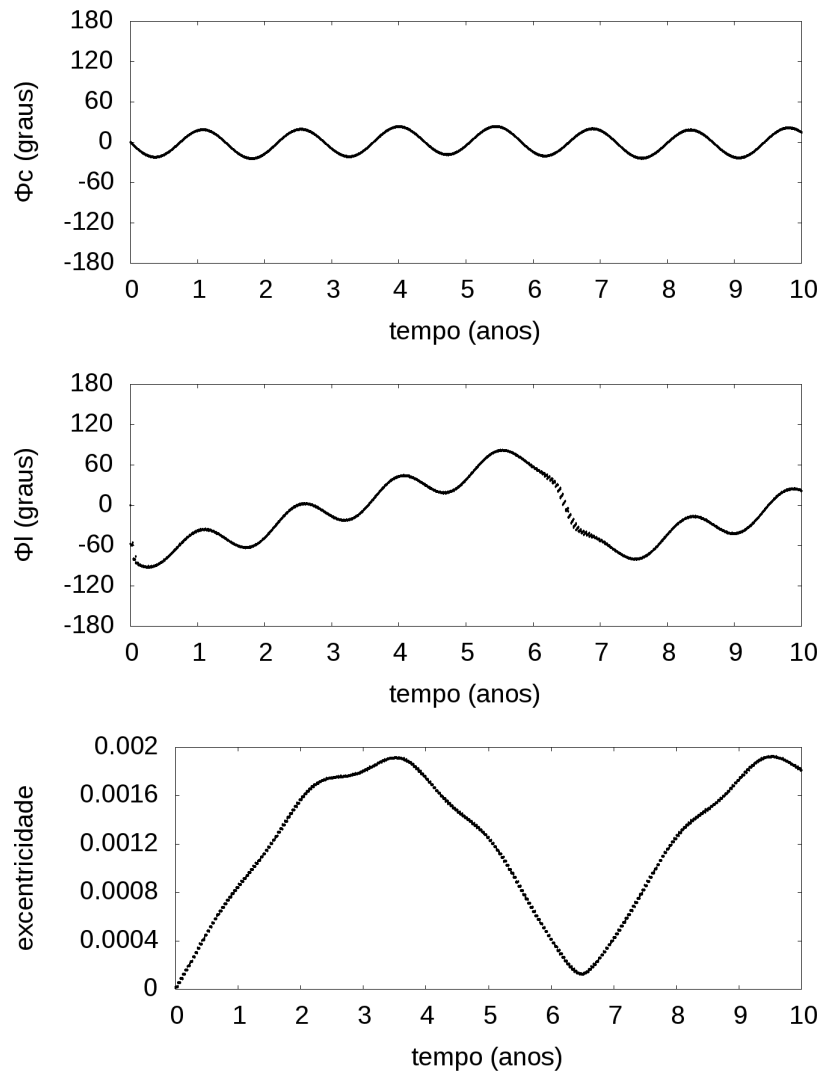


fonte: Autor.

apesar de serem verificadas partículas com excentricidade máxima próxima a  $e_f$ , tem-se que parte destas apresentam variações na excentricidade da ordem de  $10^{-4}$ . Na Figura 9 são apresentadas as variações, em função do tempo, dos ângulos ressonantes e da excentricidade para uma partícula que alcança valor máximo de  $e$  igual a  $1.2 \times 10^{-3}$ , iniciada em  $a = 197646$  km ( $\Delta a_c = 9$  km e  $\Delta a_l = 16$  km) e com  $\Delta \lambda = 0^\circ$ .

Já para a ressonância 7:6, nenhuma partícula em RCE está também confinada pela RLE. Apesar disto, é verificado que o ângulo ressonante  $\phi^{(l)}$  destas partículas apresenta intervalos em libração. Tal efeito pode ser visto na Figura 10, que mostra  $\phi^{(c)}$ ,  $\phi^{(l)}$  e  $e$  para uma partícula iniciada com defasagem nula na longitude média e  $a = 167477$  km ( $\Delta a_c = 16$  km e  $\Delta a_l = 34$  km). Enquanto  $\phi^{(l)}$  permanece em libração, é possível ver que a excentricidade apresenta variação conforme esperado para uma partícula em RLE, entretanto quando este circula, o que ocorre em, aproximadamente, 7 anos, a excentricidade decresce alcançando um valor mínimo igual ao inicial ( $10^{-5}$ ).

Figura 7 – Variação temporal do ângulo ressonante de corrotação e de Lindblad, e excentricidade para uma partícula iniciada na RCE 14:15 com Mimas. O semi-eixo maior inicial da partícula é  $a = 194226$  km e a defasagem na longitude média em relação ao centro do sítio é  $\Delta\lambda = 0^\circ$ .



fonte: Autor.

Para utilização posterior, as partículas em RCE apresentadas na Figura 4 foram destacadas das demais e separadas de acordo com o sítio ressonante no qual se encontram confinadas, formando os sistemas que foram utilizados nas simulações descritas nas seções posteriores.

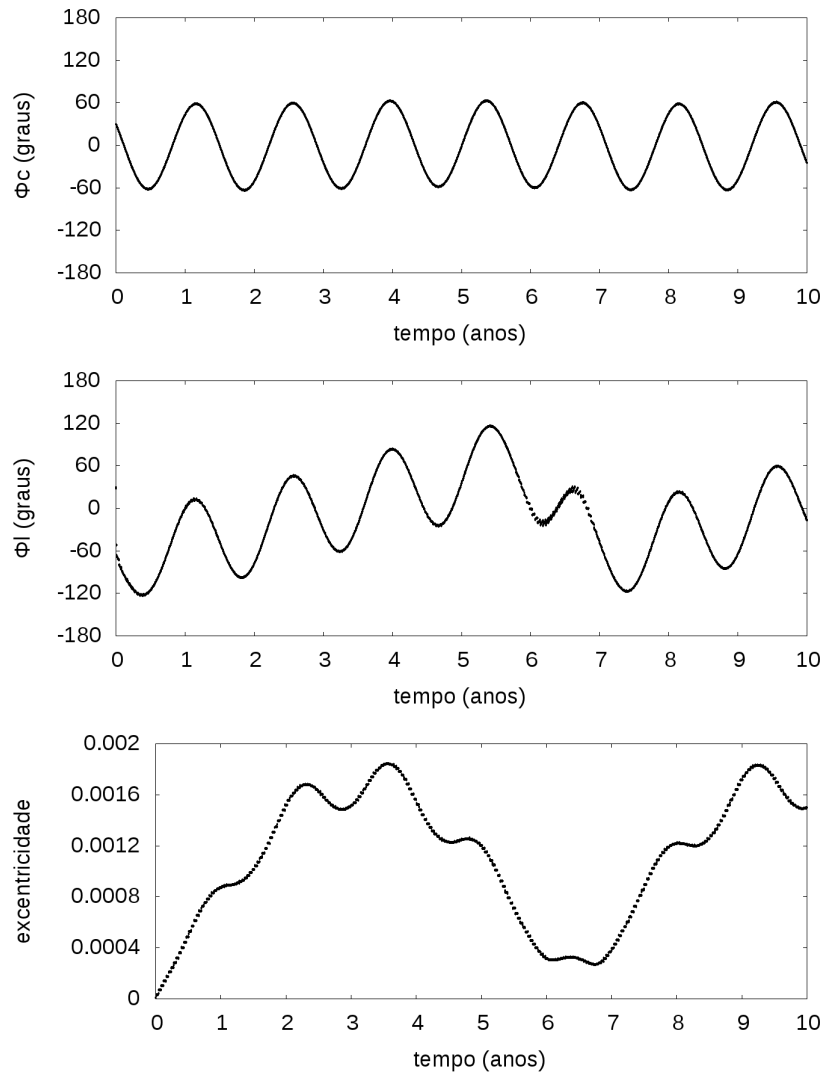
Simulações incluindo um sítio de cada ressonância mostraram que apesar da sobreposição da ressonância de corrotação e Lindblad, as partículas permanecem confinadas azimutalmente por mais de 100 mil anos quando considerados apenas Mimas e a não-esfericidade de Saturno.

#### 4.1 EFEITO DE PEQUENOS SATÉLITES IMERSOS NOS SÍTIOS

##### 4.1.1 Efeito de um satélite imerso no sítio

Com o intuito de investigar como um satélite afeta a dinâmica de partículas em ressonância de corrotação excêntrica, um sítio da RCE 7:6 foi simulado juntamente com um satélite localizado em seu centro. Este foi tomado como perfeitamente esférico, com densidade de  $1 \text{ g/cm}^3$  e razão de massa em

Figura 8 – Variação temporal do ângulo ressonante de corotação e de Lindblad, e excentricidade para uma partícula iniciada na RCE 14:15 com Mimas. O semi-eixo maior inicial da partícula é  $a = 194240$  km e a defasagem na longitude média em relação ao centro do sítio é  $\Delta\lambda = 2^\circ$ .



fonte: Autor.

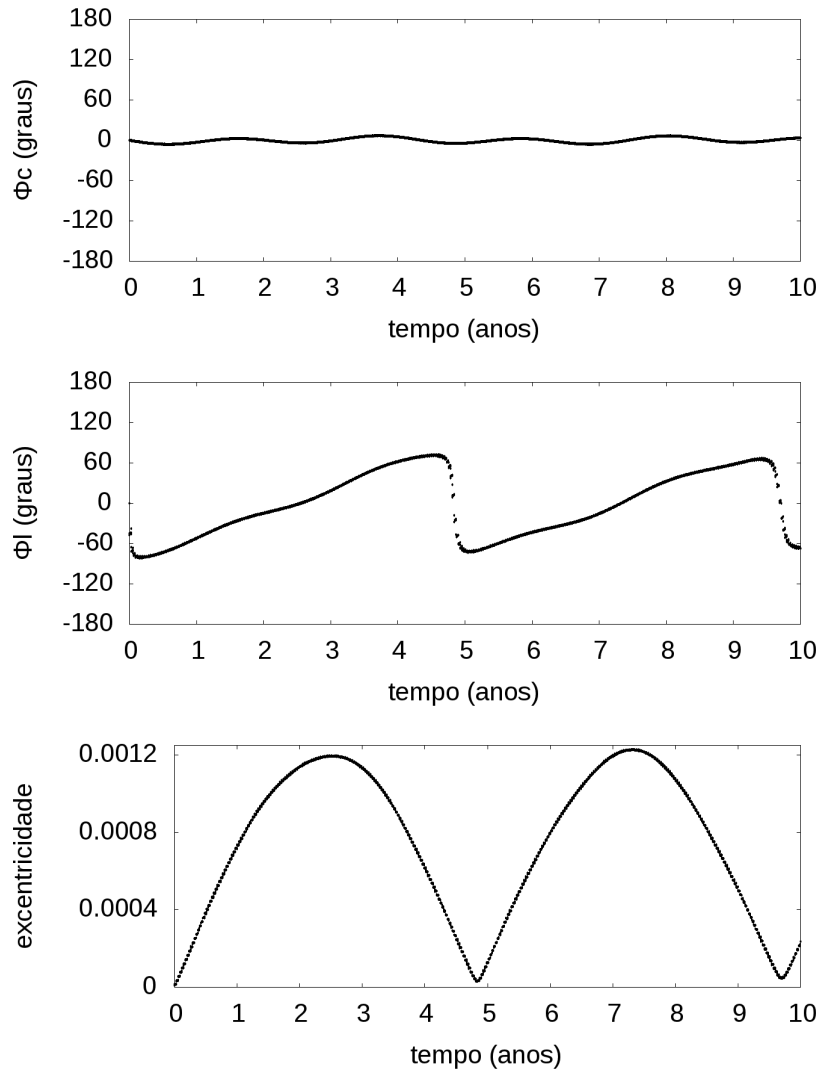
relação a Mimas ( $\alpha$ ) variando de  $10^{-10}$  a  $10^0$ .

De modo geral, encontra-se que trocas de momento angular entre partícula e satélite durante um encontro próximo geram um incremento na variação do semi-eixo maior das partículas, sendo este proporcional à massa do satélite. Como já discutido no capítulo 3, semi-eixo maior e ângulo azimutal no sistema girante são grandezas relacionadas, de modo que o satélite afetará a forma como a partícula se movimenta no sistema girante, sendo possível definir três regimes de movimento.

Devido ao confinamento com Mimas, uma partícula em ressonância se movimenta ao redor de um dos pontos de equilíbrio do sistema (centro do sítio), no sistema girante. Satélites com  $\alpha$  na faixa de  $10^{-10}$  ( $R \approx 100$  m) a  $10^{-7}$  ( $R \approx 1$  km) perturbam as partículas gerando um aumento da amplitude de seus movimentos angulares. Assim, as partículas realizam maiores excursões em torno do ponto de equilíbrio do sistema (primeiro regime).

Já satélites com  $\alpha$  na faixa de  $10^{-6}$  ( $R \approx 2$  km) a  $10^{-3}$  ( $R \approx 20$  km) exercem nas partículas uma força comparável a gerada por Mimas, de modo que também as confinam azimutalmente, ou seja,

Figura 9 – Variação temporal do ângulo ressonante de corotação e de Lindblad, e excentricidade para uma partícula iniciada na RCE 10:11 com Mimas. O semi-eixo maior inicial da partícula é  $a = 197646$  km e a defasagem na longitude média em relação ao centro do sítio é  $\Delta\lambda = 0^\circ$ .



fonte: Autor.

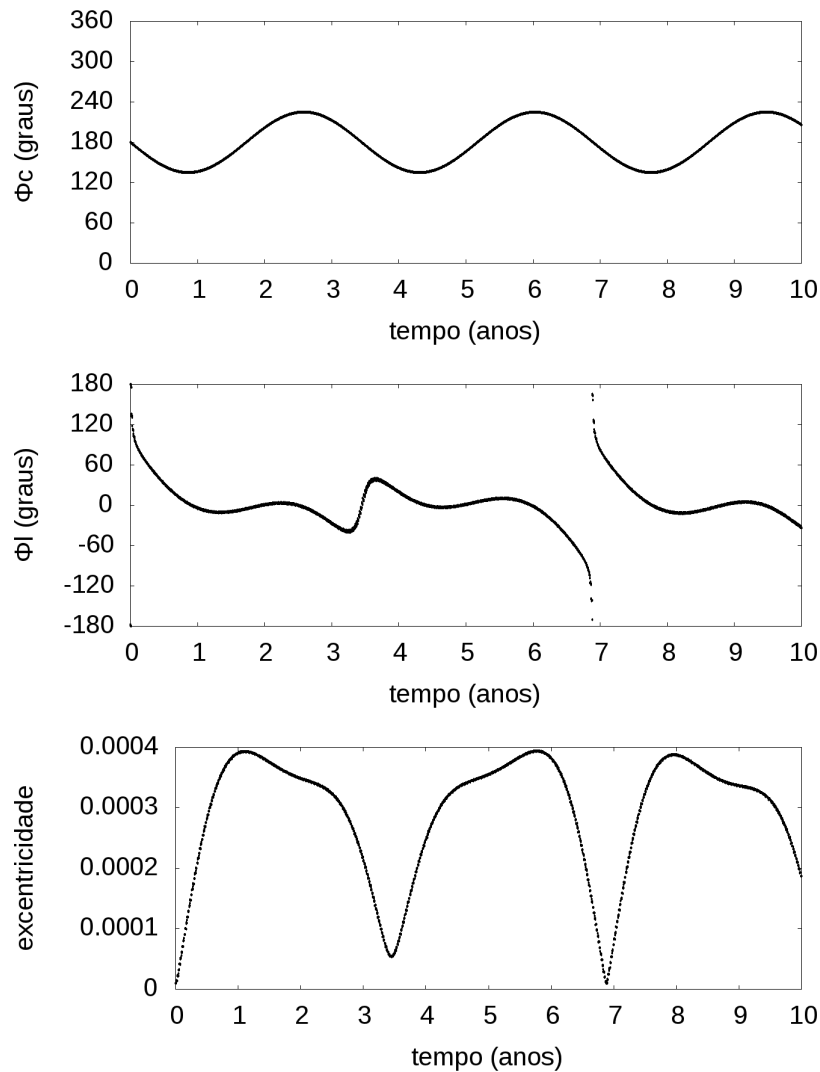
estas permanecem em ressonância de corotação com Mimas e com o satélite. Logo, o movimento das partículas fica restrito entre o satélite e a borda do sítio (segundo regime).

Pra satélites com maiores massas, Mimas atua apenas como uma perturbação, de modo que as partículas permanecem em ressonância de corotação 1:1 com o satélite hipotético em órbitas do tipo ferradura (terceiro regime). Simulações para sítios da RCE 14:15 e 10:11 apresentaram resultados análogos aos obtidos para a RCE 7:6.

As trajetórias realizadas por uma partícula em cada um dos três regimes são apresentadas na Figura 11, para os casos com  $\alpha = 10^{-8}$  ( $R \approx 500$  m),  $\alpha = 10^{-5}$  ( $R \approx 5$  km) e  $\alpha = 10^{-2}$  ( $R \approx 50$  km). A partícula foi iniciada a  $\Delta\lambda = 2^\circ$  do centro de um sítio da RCE 7:6, onde se encontra o satélite (ponto em roxo). Em preto está a trajetória da partícula quando apenas Mimas está presente no sistema e em azul a trajetória para quando apenas o satélite é incluído. Em vermelho encontra-se a trajetória quando os dois corpos estão no sistema.

Como pode ser visto na Figura 11, no primeiro regime, a partícula se inicia no caso com satélite

Figura 10 – Variação temporal do ângulo ressonante de corotação e de Lindblad, e excentricidade para uma partícula iniciada na RCE 7:6 com Mimas. O semi-eixo maior inicial da partícula é  $a = 167477$  km e a defasagem na longitude média em relação ao centro do sítio é  $\Delta\lambda = 0^\circ$



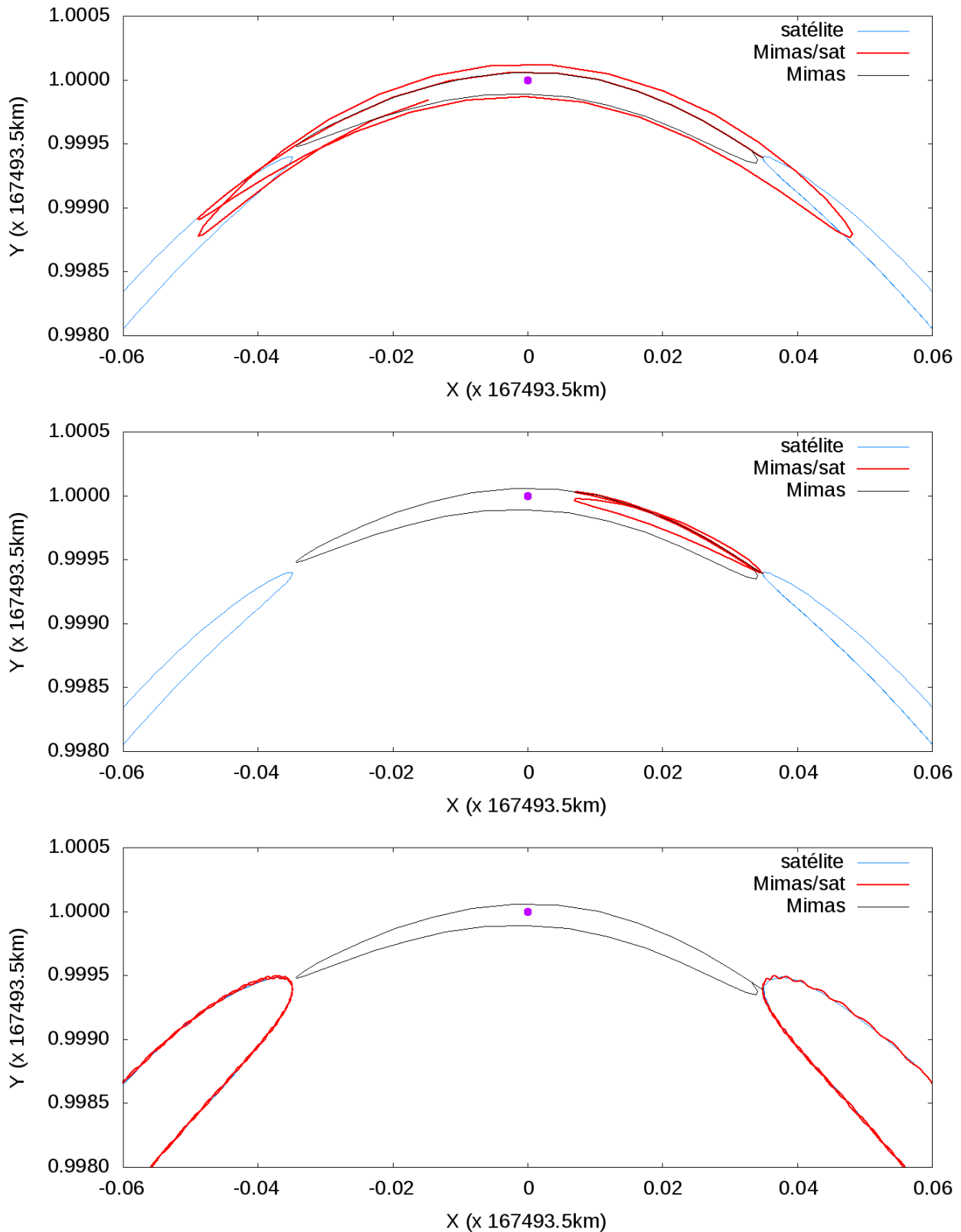
fonte: Autor.

na mesma trajetória que o caso com apenas Mimas, passando a diferir apenas quando esta alcança a posição angular do centro do sítio. Ao acontecer isto, a partícula tem sua máxima aproximação com o corpo hipotético, ocorrendo trocas de momento angular. Isso a permite realizar uma maior excursão em relação ao centro do sítio, de modo que apresentará maior variação angular e radial em relação ao caso sem satélite.

No segundo regime, a partícula, ao se aproximar do satélite, ganha energia suficiente para trocar de sentido de movimento no sistema girante. Ao retornar a posição angular em que foi iniciada, a partícula passa por um encontro próximo com Mimas, levando-a a perder energia e trocar mais uma vez o sentido de movimento, permanecendo em trajetória entre sua posição angular inicial e o centro do sítio.

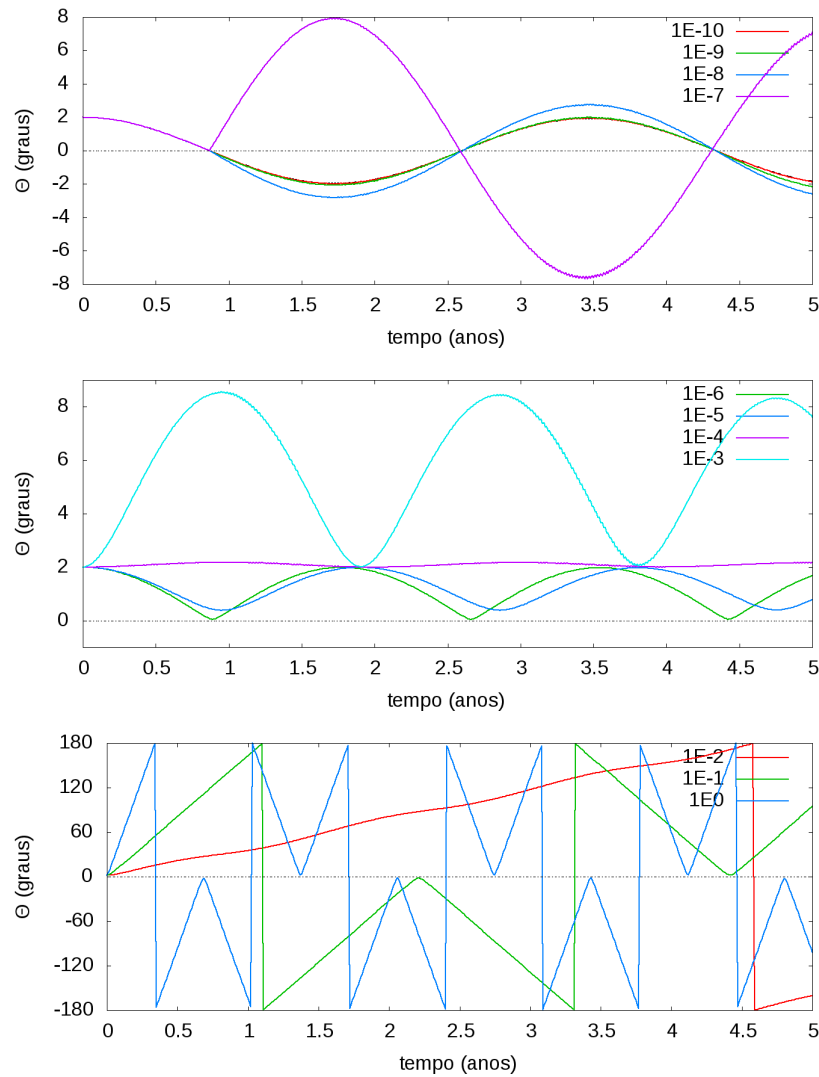
Para o último caso, já no início da integração as trocas de momento angular entre satélite e partícula são suficientes para que esta retorne no sistema girante, realizando uma trajetória próxima a observada para o caso em que Mimas não é incluído no sistema.

Figura 11 – Trajetória de uma partícula inicialmente a  $\Delta\lambda = 2^\circ$  do centro de um sítio da RCE 7:6, considerando um satélite (ponto em magenta) com razão de massa em relação a Mimas ( $\alpha$ ) de  $10^{-8}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-2}$ , de cima para baixo. As unidades estão normalizadas pelo semi-eixo maior central da ressonância ( $a_c = 167493.5$  km). Em preto e em azul encontram-se as trajetórias da partícula para os casos em que são incluídos apenas Mimas e apenas o satélite, respectivamente. Já as linhas em vermelho representam as trajetórias da partícula para os casos incluindo ambos os corpos.



fonte: Autor.

Figura 12 – Variação temporal do ângulo azimutal de uma partícula inicialmente a  $\Delta\lambda = 2^\circ$  do centro de um sítio da RCE 7:6. A linha tracejada corresponde a posição do ponto de equilíbrio do sítio, enquanto as diferentes cores representam os valores de  $\alpha$  assumidos.



fonte: Autor.

Na Figura 12 é apresentada a variação do ângulo azimutal em função de  $\alpha$ , para a mesma partícula da Figura 11. Para satélites com  $\alpha \leq 10^{-8}$ , vê-se que a partícula se movimenta em torno do ponto de equilíbrio da RCE 7:6 (linha tracejada), apresentando um aumento na amplitude do ângulo azimutal após passar por um encontro próximo com o satélite, em menos de 1 ano de simulação. Tal aumento é proporcional a  $\alpha$ .

Já para satélites com  $\alpha \geq 10^{-6}$ , tem-se que as trocas de momento angular entre partícula e satélite promovem o retorno da partícula no sistema girante, de modo que para satélites com  $\alpha \leq 10^{-3}$ , esta permanece em movimento entre o corpo hipotético e a borda do sítio. Para massas maiores, o momento angular trocado é suficiente para que a partícula ultrapasse a borda do sítio e saia da RCE, permanecendo em órbita do tipo ferradura com o satélite. Para a partícula apresentada, o caso com  $\alpha = 10^{-7}$  corresponde a um caso de transição entre os dois primeiros regimes.

Tabela 3 – Raios considerados para os satélites no centro dos sítios. A tabela também apresenta o rótulo com que cada tamanho de satélite será mencionado no texto.

|       | satélite        | raio (km) | rótulo |
|-------|-----------------|-----------|--------|
| 50 %  | raio de Aegaeon | 0.13      | 0.5x   |
| 100 % |                 | 0.25      | 1.0x   |
| 150 % |                 | 0.38      | 1.5x   |
| 100 % | raio de Anthe   | 0.50      | 1.0y   |
| 150 % |                 | 0.75      | 1.5y   |
| 100 % | raio de Methone | 1.40      | 1.0z   |
| 150 % |                 | 2.18      | 1.5z   |
| 200 % |                 | 2.90      | 2.0z   |
| 250 % |                 | 3.63      | 2.5z   |

fonte: Autor.

#### 4.1.2 Sítio com pequenas luas imersas

Uma vez conhecido como um satélite imerso no sítio altera a dinâmica das partículas, simulou-se um sítio de cada ressonância por 1000 anos juntamente com uma pequena lua localizada em seu centro. Tal corpo foi tomado como perfeitamente esférico e constituído de gelo, tendo-se optado por simulá-lo com raios similares ao das luas existentes nos arcos. Na tabela 3 são apresentados os raios considerados, juntamente com o rótulo com que cada tamanho será mencionado no texto.

A Figura 13 apresenta os tempos de vida dos sítios em função do raio da lua para as RCE 7:6, 14:15 e 10:11. Na paleta de cores é dada a porcentagem de partículas que permanecem em RCE durante suas evoluções orbitais. Neste trabalho será definido como tempo de vida o tempo para 90% das partículas do sítio saírem da ressonância de corotação excêntrica ou colidirem com a lua.

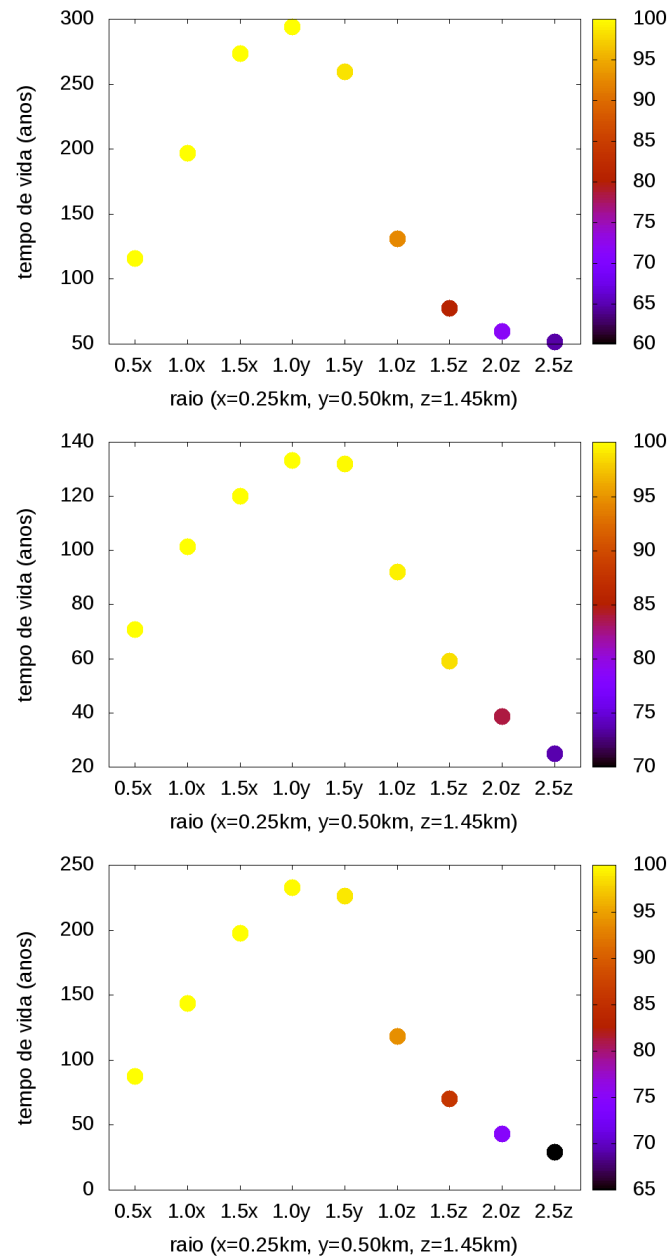
Sabe-se que os satélites imersos no sítio geram um aumento da variação do semi-eixo maior das partículas. Deste modo, tem-se que partículas iniciadas próximas às bordas do sítio são removidas da ressonância pelo efeito gravitacional deste satélite, explicando o fato da porcentagem de partículas em RCE decair com o aumento do raio.

Este mesmo aumento da variação do semi-eixo maior é responsável pelo aumento do tempo de vida dos sítios, até o caso com satélite de raio 1.0y. Isso se deve às partículas estarem no primeiro regime, de modo que, com o aumento do raio do satélite, estas executam maiores excursões em relação ao centro do sítio, aumentando seus tempos de vida.

Para satélites com raios maiores que 1.5y, as partículas estão no segundo regime de movimento e o satélite as confinam azimutalmente. Sendo assim, o aumento do raio do corpo, além de facilitar a saída das partículas da ressonância, aumenta a probabilidade de colisão com a lua, resultando em menores tempos de vida para o sítio.

Também é observada uma diferença nos tempos de vida dos sítios para as diferentes ressonâncias, na qual a RCE 14:15 apresenta os menores tempos, enquanto a 7:6 apresenta os maiores. Como já discutido, o sistema da RCE 14:15 corresponde ao mais caótico entre os três abordados pois apresenta sobreposição com uma ressonância de Lindblad, a qual excita as órbitas das partículas em corotação. Variações na excentricidade facilitam cruzamentos com a órbita da lua, de modo que as partículas colidem mais rapidamente. Uma vez que a RCE 7:6 não é sobreposta por ressonâncias de Lindblad, os

Figura 13 – Tempo de vida dos sítios das RCE 7:6, 14:15 e 10:11, em função do raio do satélite. Na paleta de cores é dada a porcentagem de partículas que permanecem em RCE.



fonte: Autor.

tempos de vida obtidos para os sítios são maiores.

De modo geral, obtém-se que luas imersas nos sítios removem partículas por colisão ou as levam à sair da ressonância, sendo que para luas com raios da ordem de metros o aumento do raio gera incremento do tempo de vida do sítio enquanto para raios da ordem de quilômetros, tal aumento gera uma redução do tempo de vida do sítio.

#### 4.2 EFEITO DAS PERTURBAÇÕES NAS PARTÍCULAS EM RESSONÂNCIA

De modo a determinar a intensidade das perturbações nas partículas em ressonância, calculou-se a aceleração gerada pelo achatamento planetário (termo do  $J_2$ ), pela força de radiação solar (FRS, termo da pressão de radiação), pelo arrasto do plasma e pelo efeito gravitacional de Mimas, em função do raio da partícula. Tais cálculos foram realizados utilizando as equações a seguir (SUN et al., 2017; MURRAY; DERMOTT, 1999; MIGNARD, 1984):

$$a_{J_2} = \frac{3GMJ_2R_S^2}{a^4} \quad (1)$$

$$a_{FRS} = \frac{3\Phi Q_{pr}}{4c\rho s} \quad (2)$$

$$a_{AP} = \frac{3n_i m_i u_i^2}{4\rho s} \left[ \left( M_i + \frac{1}{2M_i} \right) \frac{e^{-M_i^2}}{\sqrt{\pi}} + \left( M_i^2 + 1 - \frac{1}{4M_i^2} \right) \text{erf}(M_i) \right] \quad (3)$$

$$a_M = \frac{GM_M}{(a_c - a_M)^2} \quad (4)$$

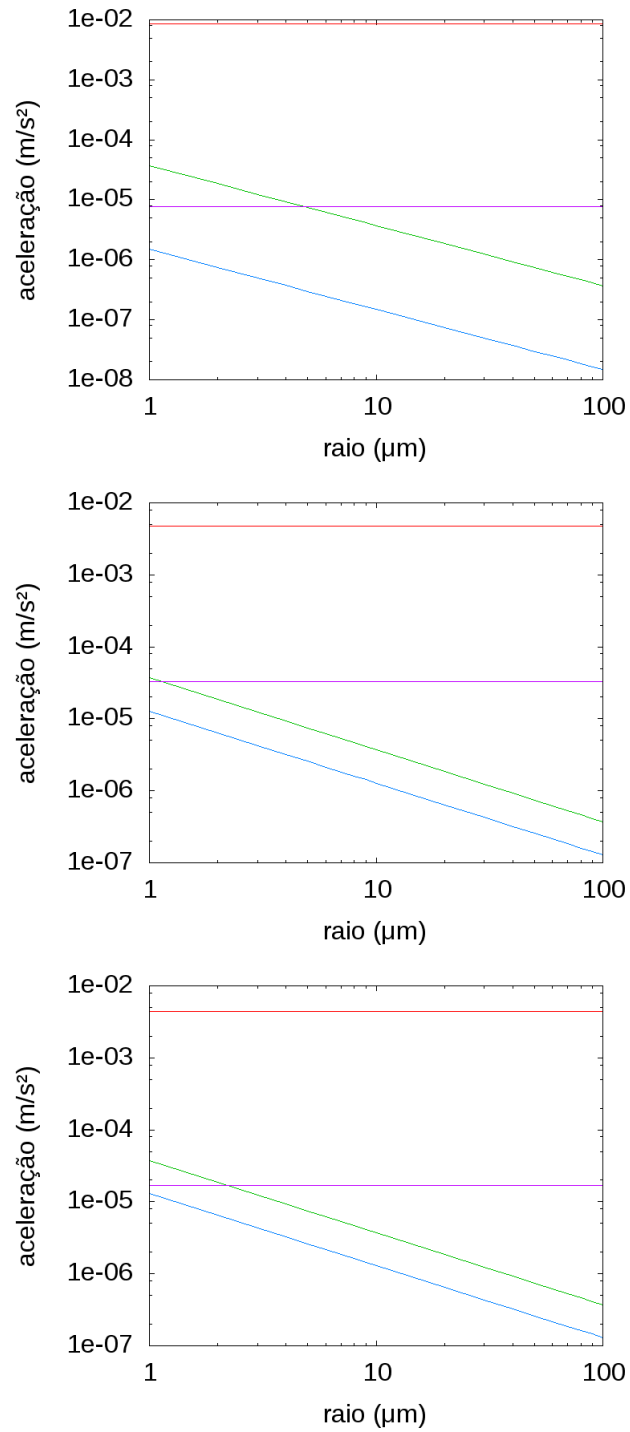
A partícula foi considerada como perfeitamente esférica e feita de gelo ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ), enquanto o plasma planetário foi tomado como composto por íons de  $\text{O}^+$ , aproximação válida para regiões próximas ao satélite Encélado, com  $M_i = 1.2$  e densidade numérica  $n_i$  de  $5.0 \text{ cm}^3$  (SUN; SCHMIDT; SPAHN, 2015),  $43.2 \text{ cm}^3$  e  $44.0 \text{ cm}^3$  (SUN et al., 2017) para as RCE 7:6, 14:15 e 10:11, respectivamente.

As acelerações calculadas são apresentadas na Figura 14, na qual as cores vermelha, roxa, verde e azul correspondem às acelerações devido ao achatamento planetário, ao efeito gravitacional de Mimas, à pressão de radiação solar e ao arrasto do plasma, respectivamente. Conforme esperado, o efeito gravitacional de Saturno é dominante em relação aos demais, enquanto a pressão de radiação solar perturba significativamente as partículas, sendo sua aceleração superior a gravitacional de Mimas para partículas com raios em torno de  $1 \mu\text{m}$ .

Com relação à aceleração do arrasto do plasma, tem-se que esta é uma ordem de grandeza menor que a pressão de radiação solar para as RCE 14:15 e 10:11, enquanto é duas ordens de grandeza menor para a 7:6, se devendo esta diferença à proximidade das posições das ressonâncias 14:15 e 10:11 com o satélite Encélado.

De acordo com dados obtidos pela sonda espacial Cassini, Encélado ejeta vapor de água por meio de gêiseres localizados próximo a seu polo sul, sendo este material dissociado e ionizado devido ao campo magnético saturniano, de modo que o satélite corresponde à maior fonte de íons do grupo da água ( $\text{O}^+$ ,  $\text{OH}^+$ ,  $\text{H}_2\text{O}^+$  e  $\text{H}_3\text{O}^+$ ) para magnetosfera do planeta; destes, o íon  $\text{O}^+$  é o

Figura 14 – Acelerações devido ao achatamento planetário (vermelho), Mimas (roxo), pressão de radiação solar (verde) e arrasto do plasma (azul) para partículas nas RCE 7:6, 14:15 e 10:11.



fonte: Autor.

encontrado em maior concentração (MAUK et al., 2009). Assim, os efeitos da força de radiação solar serão adicionados em todos os sistemas enquanto optou-se por não incluir os efeitos do arrasto do plasma para a RCE 7:6 devido sua menor intensidade em relação às demais forças.

#### 4.2.1 Força de radiação solar

Para estudar de que forma a força de radiação solar influencia esses sistemas, simulou-se um sítio da RCE 7:6, 14:15 e 10:11 com partículas de  $1 \mu m$  e  $10 \mu m$ , por 1000 anos, em três casos: considerando apenas a componente de Poynting-Robertson, apenas a componente da pressão de radiação e considerando a força de radiação solar completa. Estas simulações foram realizadas utilizando a versão do pacote de integração *Mercury* incrementado com a força de radiação solar, conforme descrito em Sfair e Giulatti-Winter (2009).

Para exemplificar como a evolução orbital das partículas é afetada, na Figura 15 e na Figura 16 são apresentados o semi-eixo maior, ângulo ressonante e excentricidade para uma partícula iniciada a 27 km do centro da RCE 7:6 (próxima à borda externa do sítio) quando considerada com  $1 \mu m$  e com  $10 \mu m$ , respectivamente.

Conforme discutido na seção 2.2, a componente da pressão de radiação solar é responsável por excitar as órbitas ao mesmo tempo que a componente de Poynting-Robertson causa o decréscimo do semi-eixo maior das partículas. Enquanto na Figura 15 e na Figura 16 o aumento da amplitude da excentricidade devido à pressão de radiação solar pode ser facilmente notado, no qual o elemento alcança valores muito maiores aos forçados pela Lindblad, o mesmo não pode ser dito a respeito do efeito no semi-eixo maior causado pela componente da Poynting-Robertson.

Verifica-se que Mimas repõe parte do momento angular perdido pela partícula devido ao efeito da PRob, de modo que esta não apresentará o decréscimo do semi-eixo maior quando em RCE. Ao sair da ressonância, encontros próximos entre a partícula e Mimas deixam de ocorrer a um intervalo de tempo constante, e como consequência, o decréscimo do semi-eixo maior deixa de ser evitado. Tal comportamento pode ser visto na Figura 17, a qual apresenta o  $a$  e  $\phi^{(c)}$  para uma partícula de  $1 \mu m$  iniciada a 29 km do centro de um sítio da RCE 7:6 sob o efeito apenas da PRob.

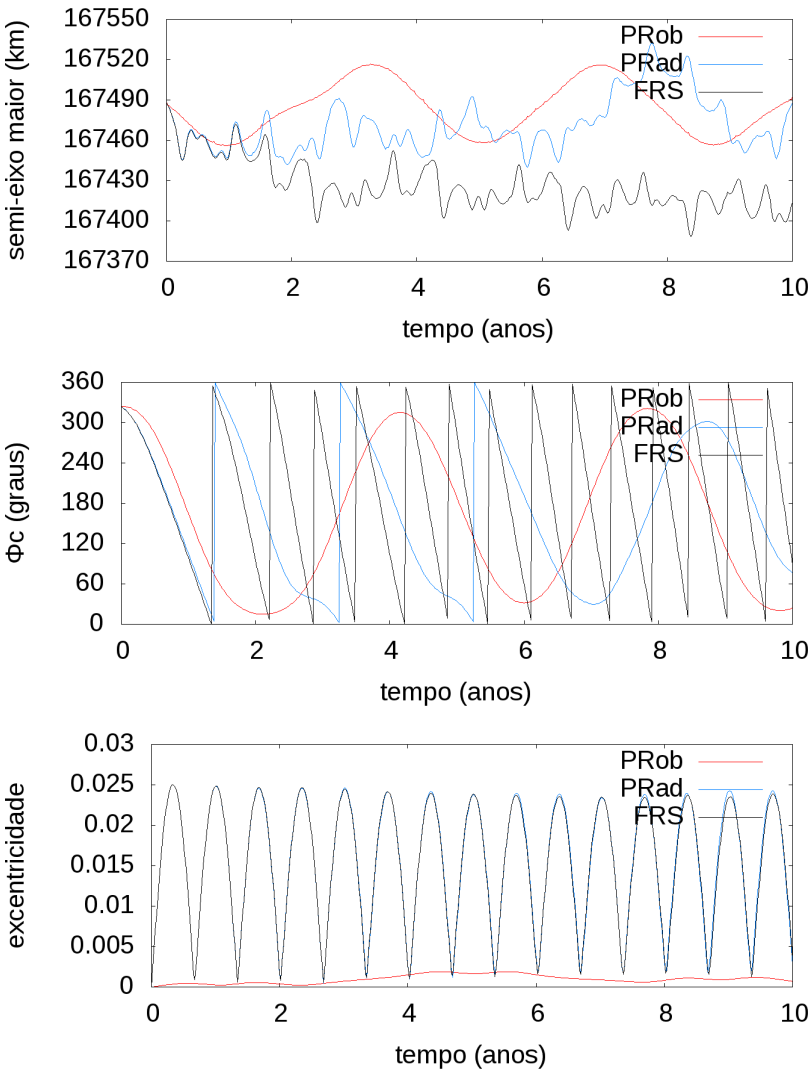
Apesar de ser obtido que a PRad é responsável por causar uma variação nula no semi-eixo maior (capítulo 2, equação 61), é válido lembrar que este resultado é encontrado realizando uma média no período orbital, na qual os efeitos de curto período são cancelados. Entretanto, verifica-se que estes retiram partículas da RCE, como visto na Figura 15, de modo que não podem ser ignorados.

O tempo de vida dos sítios das regiões estudadas é apresentado na tabela 4, tendo-se que aquele devido a PRob é muito maior que o verificado para a PRad, uma vez que a componente possui uma ação de longo período.

Vê-se também, uma diferença dos tempos obtidos para a cada ressonância, sendo os sítios da RCE 10:11 correspondentes aos mais distantes de Saturno, de modo que são esvaziados mais rapidamente, enquanto que para a 7:6 são obtidos  $t_{90}$  muito maiores que os demais; esta ressonância corresponde à mais próxima de Saturno e com menor grau de caoticidade, segundo classificação de Moutamid, Sicardy e Renner (2013).

Assim, tem-se que a componente da PRad, para a escala de tempo que está sendo considerada, é

Figura 15 – Variação temporal do semi-eixo maior, ângulo da ressonância de corrotação e excentricidade para uma partícula de  $1\ \mu m$ . As cores vermelho e azul correspondem ao efeito gerado pela componente de Poynting-Robertson e da pressão de radiação, respectivamente, enquanto a cor preta corresponde ao caso com a força de radiação solar completa.



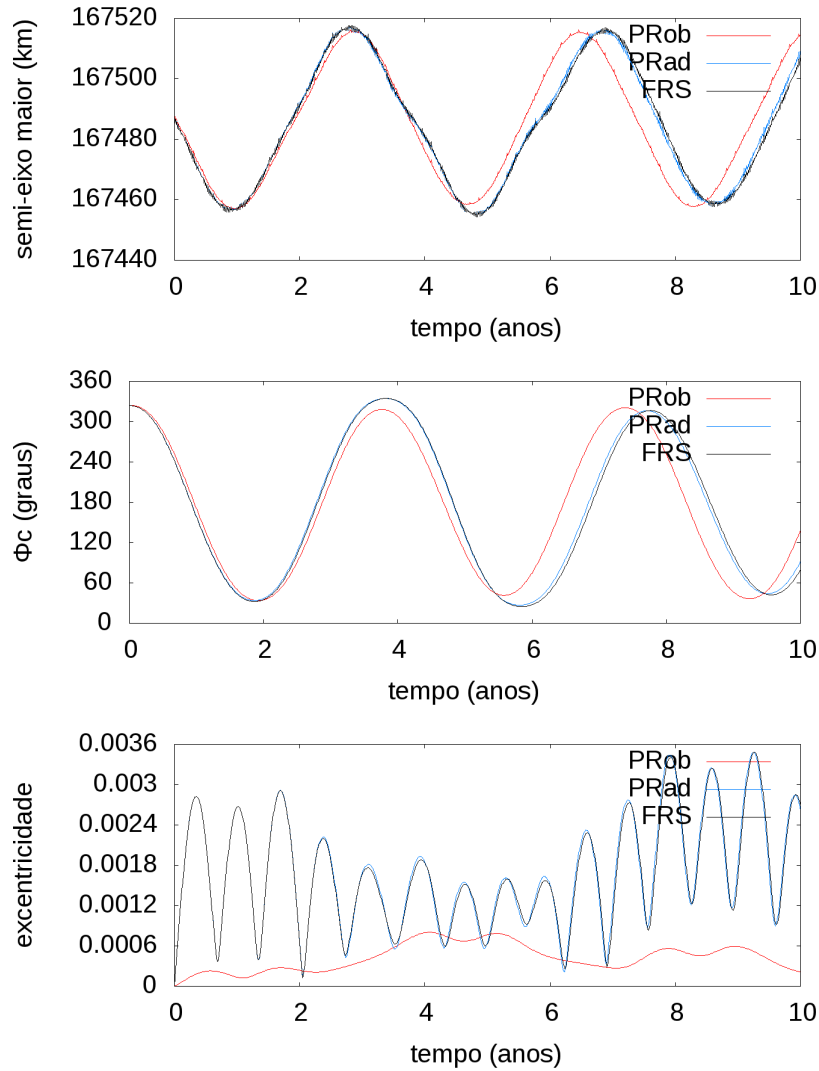
fonte: Autor.

Tabela 4 – Tempo em anos para a saída de 90% das partículas da ressonância devido a PRob, PRad e a FRS.

|      | 7:6        |             | 14:15      |             | 10:11      |             |
|------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|
|      | $1\ \mu m$ | $10\ \mu m$ | $1\ \mu m$ | $10\ \mu m$ | $1\ \mu m$ | $10\ \mu m$ |
| PRob | > 1000     | > 1000      | > 1000     | > 1000      | > 1000     | > 1000      |
| PRad | 185        | > 1000      | 11         | 91          | 6          | 40          |
| FRS  | 153        | > 1000      | 10         | 88          | 6          | 38          |

fonte: Autor.

Figura 16 – Variação temporal do  $a$ ,  $\phi^{(c)}$  e  $e$  para uma partícula de  $10 \mu m$ . As cores vermelho e azul correspondem ao efeito gerado pela componente da Poynting-Robertson e da pressão de radiação, respectivamente, enquanto a cor preta corresponde ao caso com a força de radiação solar completa.



fonte: Autor.

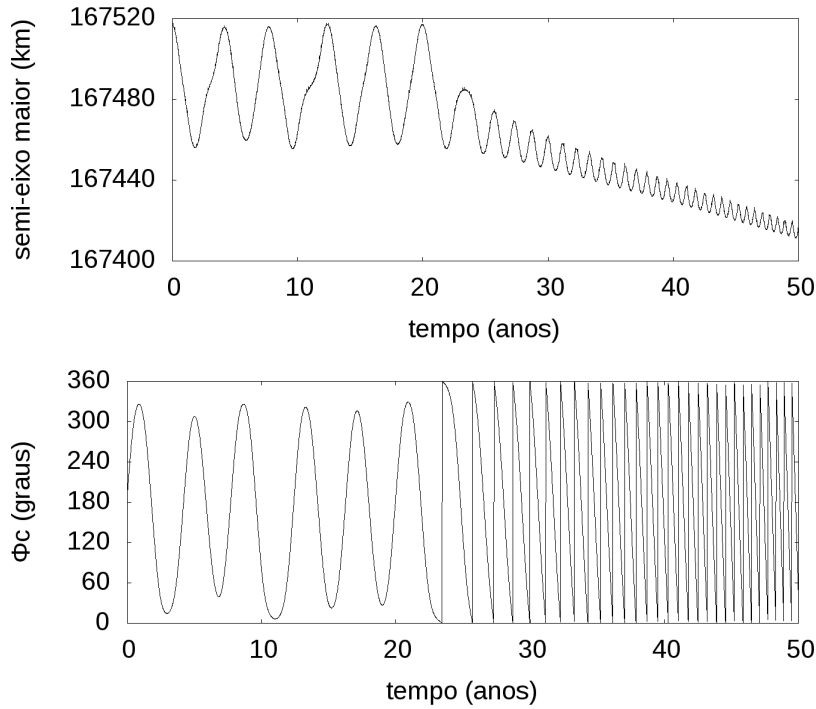
dominante na FRS. Entretanto, devido ao fato da componente da PRob também contribuir para a saída de partículas da ressonância, o que pode ser visto comparando as taxas nos casos “PRad” e “FRS”, optou-se por incluir esta nas simulações subsequentes, apesar do aumento do tempo computacional.

#### 4.2.2 Arrasto do plasma

Como apresentado anteriormente, o arrasto do plasma é uma força tangencial ao movimento da partícula, cuja equação é dada por (BANASZKIEWICZ; FAHR; SCHERER, 1994):

$$\vec{F}_{AP} = \pi n_i m_i u_i^2 s^2 \left[ \left( M_i + \frac{1}{2M_i} \right) \frac{e^{-M_i^2}}{\sqrt{\pi}} + \left( M_i^2 + 1 - \frac{1}{4M_i^2} \right) \text{erf}(M_i) \right] \hat{u}_t \quad (5)$$

Figura 17 – Variação temporal do semi-eixo maior e ângulo ressonante da corrotação para uma partícula de  $1 \mu m$  devido à componente de Poynting-Robertson.



fonte: Autor.

Uma vez que o pacote de integração *Mercury* não inclui o efeito do arrasto do plasma, foi necessário adaptá-lo por meio da implementação da aceleração dada pela equação 3 à sub-rotina *mfo\_user*. Esta sub-rotina é destinada à adição de acelerações definidas pelo usuário, tendo sido a força de radiação solar adicionada anteriormente neste mesmo local.

O pacote realiza integrações por meio do vetor posição e velocidade das partículas enquanto o arrasto do plasma gera uma força na direção tangencial ao movimento destas. Deste modo, deve-se encontrar uma relação entre o versor na direção tangencial ( $\hat{u}_t$ ) e os versores no sistema inercial do integrador ( $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ ).

A relação entre os versores das coordenadas esféricas ( $\hat{\rho}, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi}$ ) e os versores das coordenadas orbitais, e a relação entre as componentes do vetor posição e os elementos orbitais são (HAMILTON, 1993):

$$\hat{\vartheta} = -\frac{\cos I}{\sin \vartheta} \hat{u}_N - \frac{\sin(\omega + f) \sin I}{\sin \vartheta} \hat{u}_t \quad (6)$$

$$\hat{\varphi} = -\frac{\sin I \cos(\omega + f)}{\sin \vartheta} \hat{u}_N - \frac{\cos I}{\sin \vartheta} \hat{u}_t \quad (7)$$

$$x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi = \rho (\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \quad (8)$$

$$y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi = \rho (\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \quad (9)$$

$$z = \rho \cos \vartheta = \rho (\sin I \sin(\omega + f)) \quad (10)$$

sendo  $\rho$ ,  $\vartheta$  e  $\varphi$  os elementos das coordenadas esféricas, enquanto  $x$ ,  $y$  e  $z$  correspondem aos elementos das coordenadas cartesianas.

Utilizando as relações acima, é possível encontrar

$$\sin \vartheta \hat{u}_t = \cos I \hat{\varphi} - \sin I \cos(\omega + f) \hat{\vartheta} \quad (11)$$

Sabendo que os versores das coordenadas esféricas se relacionam com os das coordenadas cartesianas por meio das equações

$$\hat{\varphi} = \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (12)$$

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{\varrho \sqrt{x^2 + y^2}} (xz\hat{x} + yz\hat{y} - (x^2 + y^2)\hat{z}) \quad (13)$$

Obtém-se:

$$\hat{u}_t = -\frac{xz \sin I \cos(\omega + f) + y\varrho \cos I}{x^2 + y^2} \hat{x} + \frac{x\varrho \cos I - yz \sin I \cos(\omega + f)}{x^2 + y^2} \hat{y} - \sin I \cos(\omega + f) \hat{z} \quad (14)$$

Tal relação foi incluída no pacote de integração juntamente com as relações a seguir (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (15)$$

$$\vec{h} = h_x \hat{x} + h_y \hat{y} + h_z \hat{z} = (y\dot{z} - z\dot{y})\hat{x} + (z\dot{x} - x\dot{z})\hat{y} + (x\dot{y} - y\dot{x})\hat{z} \quad (16)$$

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \quad (17)$$

$$\cos I = \frac{h_z}{h} \quad (18)$$

$$\sin I = \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{h} \quad (19)$$

$$\cos(\omega + f) = \frac{h \sin I}{h_y} \left( \frac{x}{\varrho} + \frac{h_x z \cos I}{h \varrho \sin^2 I} \right) \quad (20)$$

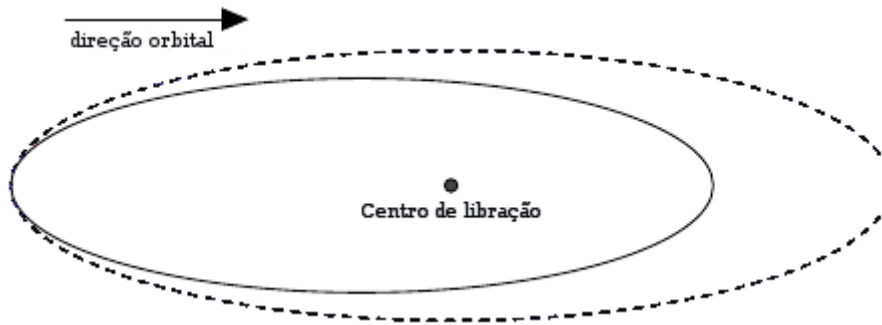
Assim, a aceleração devido ao arrasto do plasma será dada por:

$$\vec{a}_{AP} = a_{AP} \hat{u}_t \quad (21)$$

Primeiramente, foram simuladas partículas nas RCE 14:15 e 10:11 incluindo apenas a perturbação do arrasto do plasma, de modo a verificar quais são seus efeitos nos sistemas.

Como resultado, encontra-se que o AP é responsável por gerar um deslocamento azimutal das partículas em ressonância. Na ausência de perturbações, uma partícula em RCE permanece librando em torno do ponto de equilíbrio do sítio, entretanto quando o arrasto do plasma é incluído, verifica-se que esta tem seu centro de libração descolado na direção contrária ao movimento orbital, se devendo isto ao efeito que a perturbação gera no semi-eixo maior. Tal comportamento é discutido em Sun et al. (2017), no qual é apresentada a ilustração traduzida na Figura 18. As linhas tracejada e cheia correspondem ao movimento da partícula no sistema girante sem e com o arrasto do plasma, respectivamente.

Figura 18 – Ilustração do movimento de uma partícula em ressonância de corrotação no sistema girante com (linha tracejada) e sem (linha cheia) o efeito do arrasto do plasma. Imagem modificada de Sun et al. (2017)



fonte: Autor.

Tabela 5 – Tempo em anos para a saída de 90% das partículas da ressonância para os casos com a FRS e com a FRS+AP.

|        | 7:6       |            | 14:15     |            | 10:11     |            |
|--------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|
|        | 1 $\mu m$ | 10 $\mu m$ | 1 $\mu m$ | 10 $\mu m$ | 1 $\mu m$ | 10 $\mu m$ |
| FRS    | 153       | > 1000     | 10        | 88         | 6         | 38         |
| FRS+AP | —         | —          | 8         | 79         | 4         | 36         |

fonte: Autor.

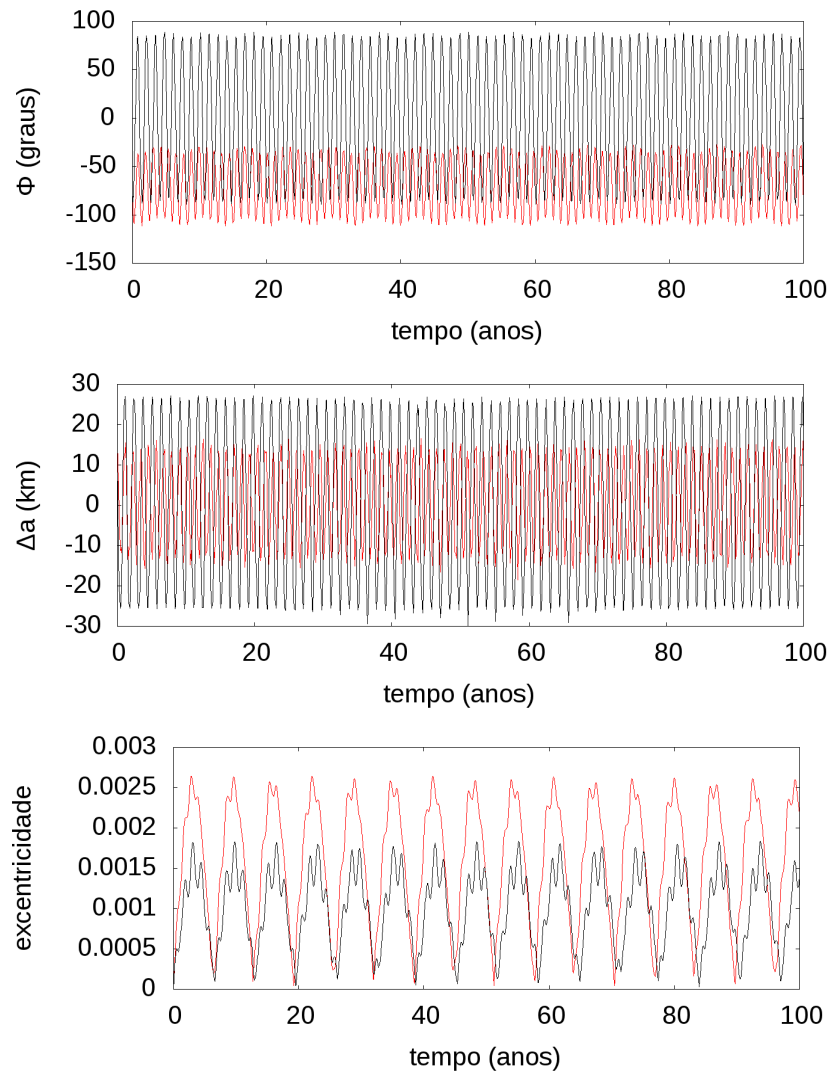
Para mostrar como a perturbação afeta os elementos orbitais, são apresentados na Figura 19 o ângulo ressonante, semi-eixo maior e excentricidade para um caso com (cor preta) e sem (cor vermelha) o AP. A partícula, com raio de 10  $\mu m$ , está inicialmente a 10 km e  $-5^\circ$  do centro de um sítio da RCE 14:15. Como pode ser visto, o deslocamento do centro de libração é também percebido no ângulo ressonante, que passa a librar em torno de aproximadamente  $-70^\circ$ , com uma amplitude menor que no caso sem a perturbação. Logo, a variação do semi-eixo maior também será menor. O arrasto do plasma ainda afeta a excentricidade da partícula, de modo que o elemento alcança valores maiores aos forçados pela RLE.

Análogo ao caso da componente de Poynting-Robertson, devido a trocas de momento angular entre as partículas em RCE e o satélite perturbador, o acréscimo do semi-eixo maior é freado. Na Figura 20 são apresentados  $\phi$ ,  $\Delta a$  e  $e$  de uma partícula de 10  $\mu m$  iniciada a  $\Delta a = -30$  km do centro de um sítio da RCE 14:15. Devido ao AP, a partícula deixa a corrotação após, aproximadamente, 45 anos, passando a apresentar o aumento do semi-eixo maior. Consoante Sun et al. (2017), para as regiões de Anthe e Methone, as partículas de 1  $\mu m$  e 10  $\mu m$  devem apresentar um acréscimo anual do semi-eixo maior de aproximadamente 600 km e 60 km, respectivamente.

Visto que foram obtidos resultados coerentes com os apresentados na literatura, um sítio da RCE 14:15 e da RCE 10:11 foi simulado incluindo a FRS e o AP, considerando partículas com raios de 1  $\mu m$  e 10  $\mu m$ , por 1000 anos. Com ambas perturbações, as partículas saem mais rapidamente da RCE que com apenas a FRS incluída, sendo verificada uma redução no tempo de vida dos sítios. Na tabela 5 é apresentado o tempo para 90% das partículas deixarem a RCE para os casos com apenas a força de radiação solar e com ambas perturbações.

Exemplificando o efeito conjunto das perturbações, na Figura 21 são dados  $\phi$ ,  $\Delta a$  e  $e$  de uma

Figura 19 – Variação temporal do  $\phi$ ,  $\Delta a$  e  $e$  de uma partícula de  $10 \mu m$  com defasagem inicial de  $\Delta a = 10 \text{ km}$  e  $\Delta \lambda = -5^\circ$  em relação ao centro de um sítio da RCE 14:15. A cor preta e vermelha correspondem ao caso sem e com o arrasto do plasma, respectivamente.



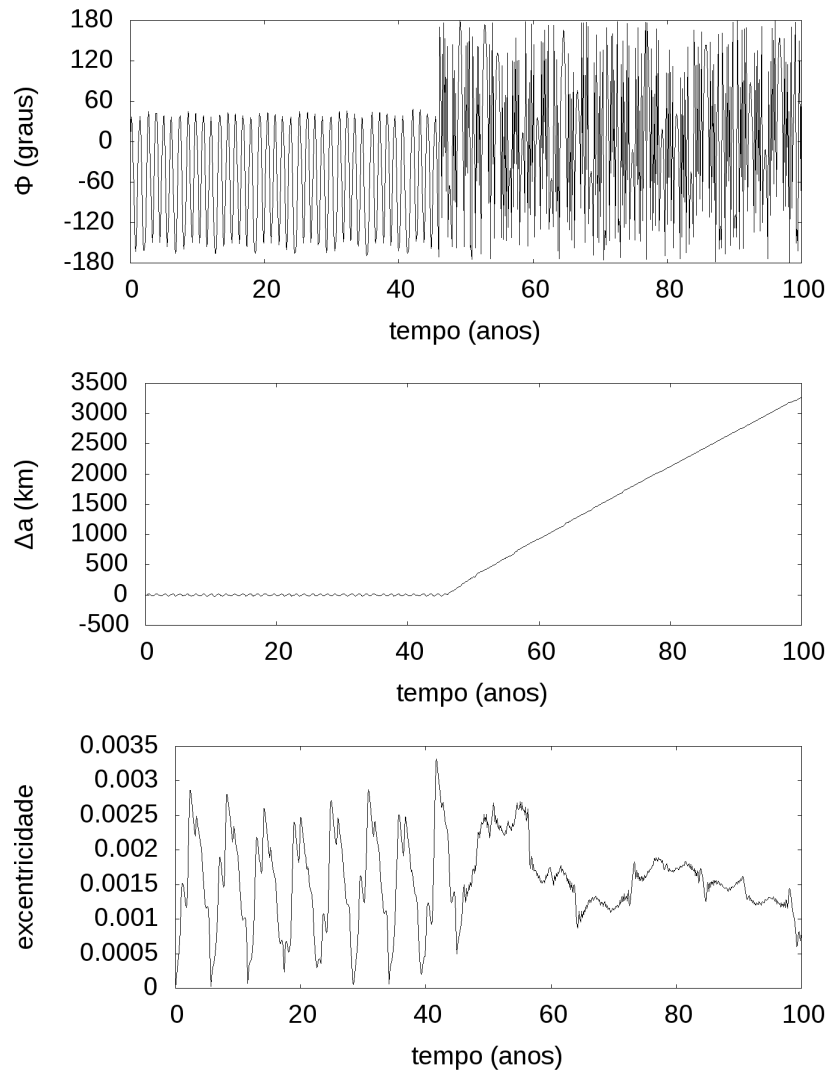
fonte: Autor.

partícula de  $10 \mu m$  inicialmente a  $\Delta a = -10 \text{ km}$  e  $\Delta \lambda = 6^\circ$  do centro de um sítio da RCE 10:11. As cores vermelho e azul correspondem aos casos incluindo apenas o AP e apenas a FRS, respectivamente, enquanto a preta corresponde ao caso com ambas perturbações.

Com ambas perturbações incluídas, obtém-se que a partícula apresentará o deslocamento do centro de libração assim como a variação da excentricidade, gerada devido ao efeito da componente de pressão de radiação. No caso apresentado na figura, a partícula permanece presa à RCE 10:11 quando incluídas cada uma das perturbações isoladamente; quando ambas são incluídas, a partícula sai da ressonância em 15 anos.

Pelos resultados encontrados, conclui-se que devido à força de radiação solar e ao arrasto do plasma, os sítios da RCE 14:15 e 10:11 são limpos de partículas menores que  $10 \mu m$  em menos de 80 e 40 anos, respectivamente. Já os sítios da RCE 7:6, localizados em uma região onde os efeitos do plasma podem ser desprezados, perdurariam por mais de 1000 anos, sendo que as partículas ao saírem desta ressonância migram para a borda interna do anel G. Já para a RCE 14:15 e 10:11, as partículas

Figura 20 – Variação temporal do  $\phi$ ,  $\Delta a$  e  $e$  de uma partícula de  $10 \mu m$  com defasagem inicial de  $\Delta a = -30$  km e  $\Delta \lambda = 0^\circ$  em relação ao centro de um sítio da RCE 14:15.



fonte: Autor.

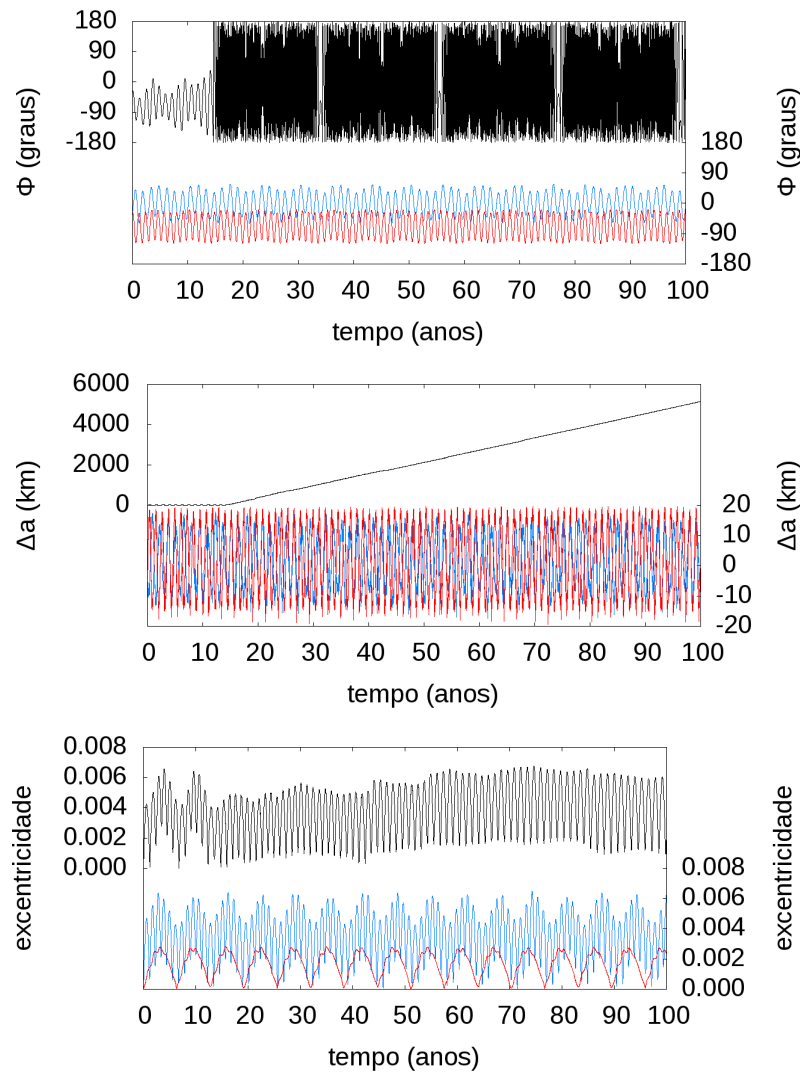
migram em direção à borda externa do anel E, uma vez que o acréscimo do semi-eixo maior devido ao arrasto do plasma é superior ao decréscimo causado pela componente de Poynting-Robertson.

#### 4.2.3 Sistema de sítios com um satélite

De acordo com o obtido anteriormente, as partículas micrométricas são removidas dos sítios devido à força de radiação solar e ao arrasto do plasma. Junto a isto, tem-se que pequenas luas imersas nos sítios, além de retirar partículas da ressonância, as removem por meio de colisões. Deste modo, supondo um cenário com todos os sítios preenchidos com partículas micrométricas e uma lua imersa em um destes, é de se esperar que este seja o primeiro a desaparecer.

Para evidenciar isto, os sistemas de sítios foram simulados incluindo um satélite ( $d = 1 \text{ g/cm}^3$ ) no centro de um destes, com raios tomados como 0.25 km (Aegaeon), 1.45 km (Methone) e 0.5 km (Anthe) para as RCE 7:6, 14:15 e 10:11, respectivamente (THOMAS et al., 2013). Já as partículas foram consideradas com raio de  $1 \mu m$  e  $10 \mu m$ .

Figura 21 – Variação temporal de  $\phi$ ,  $\Delta a$  e  $e$  de uma partícula de  $10 \mu m$  com defasagem inicial de  $\Delta a = -10 \text{ km}$  e  $\Delta \lambda = 6^\circ$  em relação ao centro de um sítio da RCE 10:11. As cores vermelho, azul e preta correspondem aos casos com apenas o AP, FRS e com ambas perturbações, respectivamente.



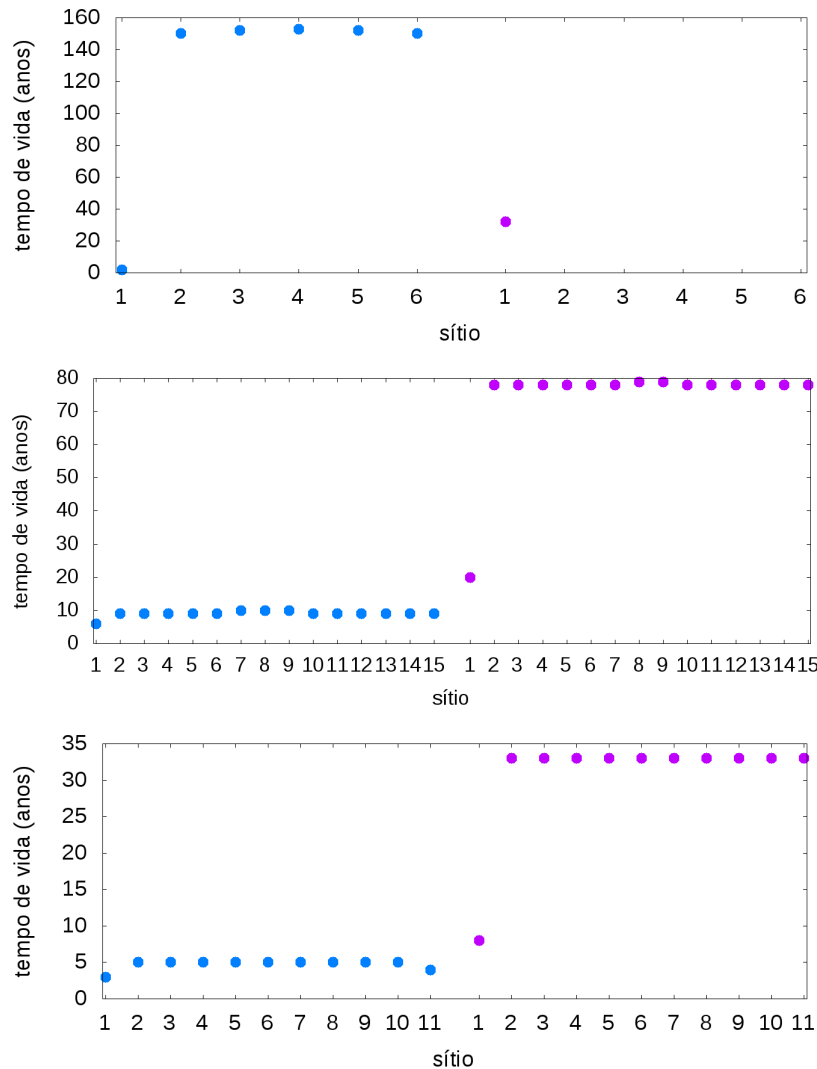
fonte: Autor.

Na Figura 22 é apresentado, para as RCE 7:6, 14:15 e 10:11, o tempo de vida de cada sítio, de modo que o sítio número 1 corresponde ao que se encontra o satélite. Em azul estão as partículas de  $1 \mu m$  e em roxo as de  $10 \mu m$ .

Para os sítios sem satélites foram obtidos tempos de vida próximos aos encontrados na subseção anterior, de modo que a FRS e AP correspondem ao principal mecanismo de remoção de partículas, sendo pequeno o efeito gravitacional gerado pela lua. Já no sítio em que o satélite se encontra imerso, este age como um obstáculo físico ao movimento das partículas. Devido à variação na excentricidade causada principalmente pela FRS, as partículas apresentam trajetórias com frequentes cruzamentos com a órbita do satélite, levando-as a rapidamente colidirem, explicando o fato do tempo de vida do primeiro sítio ser consideravelmente menor que dos demais.

Deste modo, seria esperado que houvesse nas regiões das RCE 7:6, 14:15 e 10:11 um sistema oposto ao real, com um sítio com poucas partículas, correspondendo àquele em que se encontra o

Figura 22 – Tempo de vida dos sítios ressonantes, quando incluído um satélite no sistema. O primeiro sítio corresponde ao que se encontra imerso o satélite enquanto os demais não possuem corpos maiores. As partículas de  $1\ \mu m$  estão em azul e as de  $10\ \mu m$  estão em roxo. Os casos não apresentados na figura correspondem àqueles em que os sítios possuem tempo de vida superior a 1000 anos.



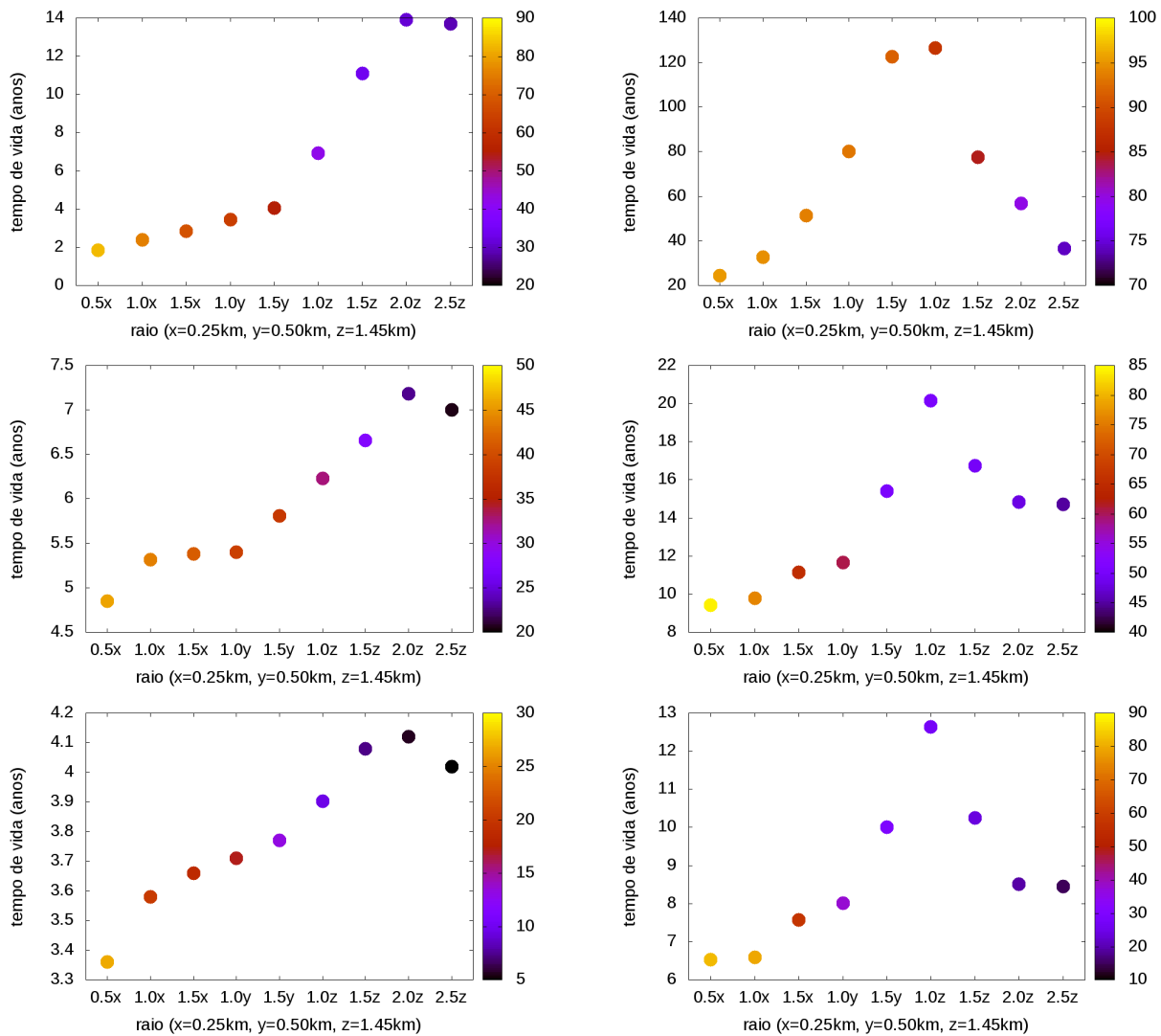
fonte: Autor.

satélite, enquanto os demais seriam preenchidos por arcos. Apesar de não ter sido considerada a produção de material pelos satélites, os resultados obtidos concordam com o apresentado em Sun et al. (2017), no qual mostra-se que partículas ejetadas das superfícies de Methone e Anthe sobrevivem nos arcos por, aproximadamente, 80 anos e 30 anos, respectivamente.

#### 4.2.4 Sítio com pequenas luas imersas

De modo a analisar como o tamanho da lua altera o tempo de vida do sítio, as simulações apresentadas na subseção 4.1.2 foram refeitas incluindo os efeitos da força de radiação solar e do arrasto do plasma para as RCE 14:15 e 10:11, sendo os resultados apresentados na Figura 23. Nesta, o tempo de vida dos sítios se encontra em função dos raios dos satélites considerados, de modo que a coluna da esquerda corresponde às partículas de  $1\ \mu m$ , enquanto as da direita às de  $10\ \mu m$ . Na paleta

Figura 23 – Tempo de vida do sítio ressonante para os raios de satélite considerados, com as perturbações não gravitacionais. A coluna da esquerda corresponde às partículas de  $1 \mu m$ , enquanto a da direita às de  $10 \mu m$ . Na paleta de cores é dada a porcentagem de partículas que permanecem em RCE.



fonte: Autor.

de cores é dada a porcentagem de partículas que permanecem em RCE durante suas evoluções orbitais.

Novamente, obtém-se a diminuição da porcentagem de partículas em ressonância quando aumenta-se o raio do satélite, assim como a presença dos dois regimes discutidos na subseção 4.1.2. Para o caso sem perturbações, o aumento do tempo de vida dos sítios se dá até satélites com raios de  $1.0y$ . Já para o caso com perturbações, o aumento se dá até satélites de  $1.0z$  e  $2.0z$ , considerando os sítios constituídos por partículas de  $10 \mu m$  e  $1 \mu m$ , respectivamente.

Isto se deve ao fato da aceleração gerada por estas perturbações ser superior, em um primeiro momento, ao efeito gravitacional da lua. Logo, são necessárias luas maiores para confinar as partículas (segundo regime) e, assim, gerar a diminuição do tempo de vida dos sítios. A diferença de tamanho em que ocorre a transição de regimes para partículas de  $1 \mu m$  e  $10 \mu m$  se deve ao fato das primeiras sentirem maiores perturbações da força de radiação solar e do arrasto do plasma.

Testes foram realizados para verificar como a presença de dois corpos maiores imersos em um sítio

afetaria sua evolução. Ambos foram considerados com mesma massa, distribuída de modo que a soma destas correspondam a massa dos satélites considerados anteriormente.

De modo geral, é observado que devido à soma vetorial das forças geradas por estes dois corpos ser menor do que a gerada por apenas um satélite com a massa total do sistema, as partículas sofrerão uma menor perturbação em relação ao caso anterior. Logo, um número maior destas permanecerão na ressonância. Apesar disto, tem-se que os dois corpos possuem uma área de contato maior que no caso com apenas um satélite, de modo que as colisões ocorrerão mais facilmente, encontrando-se uma redução em relação aos tempos de vida obtidos anteriormente de até 60%.

Diante dos resultados encontrados, conclui-se que para o caso de satélites com raios da ordem de metros, a diminuição destes reduz o tempo de vida dos sítios ressonantes. Este resultado poderia ser uma possível explicação para a existência de apenas um arco nas regiões das RCE 7:6, 14:15 e 10:11, pois apontam para o fato de que se os outros sítios possuírem um ou mais satélites menores (abaixo da resolução da sonda Cassini), estes desapareceriam mais rapidamente. Entretanto, entre os pontos negativos deste modelo estão: o fato dos tempos encontrados para uma mesma RCE possuírem a mesma ordem de grandeza e a dificuldade de explicar a existência destes satélites.

### 4.3 PRODUÇÃO DE POEIRA DEVIDO AOS PEQUENOS SATÉLITES

Conforme obtido nas seções anteriores, partículas em RCE rapidamente colidem com satélites imersos nos sítios, sendo tal processo intensificado pela inclusão de forças perturbadoras, obtendo-se que os sítios da RCE 7:6, 14:15 e 10:11 são esvaziados em poucas décadas. Além de corresponder a uma barreira física ao movimento das partículas, satélites também agem como fontes de material, sendo proposto em Hedman et al. (2007) que os satélites Aegaeon, Anthe e Methone seriam responsáveis pela manutenção de seus respectivos arcos. Visto isto, comparando a taxa de remoção de partículas com a taxa de produção devido ao satélite, é possível tirar conclusões a respeito da estabilidade desses sistemas.

O Sistema Solar é permeado por partículas micrométricas advindas dos cometas da família de Júpiter, para o Sistema Solar interno, e do cinturão de Kuiper, para o Sistema Solar externo (POPPE, 2016). Tais partículas, devido à influência gravitacional do Sol, viajam pelo meio interplanetário com velocidades da ordem de quilômetros por segundo, bombardeando satélites e planetas. As colisões destes impactores com um pequeno satélite produz poeira. Esta, por possuir velocidades acima da velocidade de escape do satélite, deixa sua superfície na forma de ejeção, de modo que tal processo corresponde ao mais eficiente em produção de partículas micrométricas por pequenos satélites.

A dinâmica dos grãos interplanetários é modelada em Poppe (2016), obtendo-se que o fluxo de impactores que entra na zona de influência gravitacional de Saturno ( $F_{imp}^{\infty}$ ) é da ordem de  $10^{-17}$  kg/(m<sup>2</sup>s), com velocidades médias de  $v_{imp}^{\infty} = 9.5$  km/s (SPAHN et al., 2006). Devido à atração gravitacional do planeta, os impactores têm sua velocidade aumentada, assim como o fluxo de material é incrementado devido a erosão causada por estes nos corpos presentes no sistema.

Desta forma, o fluxo e velocidade dos impactores ( $F_{imp}$  e  $v_{imp}$ , respectivamente), a uma distância

$a$  de Saturno, são dados por (KRIVOV et al., 2003):

$$\frac{v_{imp}}{v_{imp}^{\infty}} = \sqrt{1 + \frac{2GM_p}{a(v_{imp}^{\infty})^2}} \quad (22)$$

$$\frac{F_{imp}}{F_{imp}^{\infty}} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_{imp}}{v_{imp}^{\infty}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{v_{imp}}{v_{imp}^{\infty}} \left[ \left( \frac{v_{imp}}{v_{imp}^{\infty}} \right)^2 - \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 \left( 1 + \frac{2GM_p}{R_p(v_{imp}^{\infty})^2} \right) \right]^{1/2} \quad (23)$$

em que  $R_p$  e  $M_p$  correspondem a massa e raio do planeta, respectivamente.

Assim, a taxa de material  $M^+$  produzida por um pequeno satélite deve corresponder ao fluxo de impactores multiplicado pela área de seção transversal na qual estes irão colidir ( $\pi r^2$ , sendo  $r$  o raio do satélite) e pelo rendimento  $Y$  das colisões, ou seja (KRIVOV et al., 2003):

$$M^+ = \pi r^2 F_{imp} Y \quad (24)$$

O rendimento de colisão é definido como a proporção da massa ejetada pelo satélite em relação a do impactor e deve ser encontrada experimentalmente, uma vez que depende da composição dos corpos envolvidos. Koschny e Grün (2001), realizando experimentos com alvos compostos por uma mistura de gelo e silicato, encontraram que uma colisão com um projétil micrométrico possui o rendimento médio dado pela equação (KRIVOV et al., 2003):

$$Y = 2.85 \times 10^{-8} \times 0.0149^{G_{sil}/100} \left( \frac{1 - G_{sil}/100}{927} + \frac{G_{sil}/100}{2800} \right)^{-1} m_{imp}^{0.23} v_{imp}^{2.46} \quad (25)$$

de modo que  $G_{sil}$  corresponde a fração de silicato no material e  $m_{imp}$  a massa do impactor.

Supondo um satélite composto de gelo puro ( $G_{sil} = 0$ ), como o caso dos satélites considerados neste trabalho, a equação anterior se reduz a (SPAHN et al., 2006):

$$Y = 2.64 \times 10^{-5} m_{imp}^{0.23} v_{imp}^{2.46} \quad (26)$$

Na tabela 6 é apresentada a taxa de material produzido pelos satélites das seções anteriores, tendo-se considerado um típico impactor na região de Saturno, com massa de  $10^{-8}$  kg (SPAHN et al., 2006).

Apesar de um satélite maior produzir uma maior quantidade de material, tem-se que este possui uma maior velocidade de escape, de modo que a poeira gerada pode não possuir energia suficiente para deixar sua superfície. Entretanto, mesmo o maior satélite considerado possui velocidade de escape da ordem de metros por segundo, de modo que todo o material produzido pode ser considerado ejetado.

Vê-se na tabela 6 que satélites mais próximos a Saturno apresentam maior produção de material, uma vez que o fluxo e velocidade dos impactores serão maiores. Logo, satélites em RCE 7:6 correspondem aos com maior taxa de produção. Analisando as taxas de produção, tem-se que o material produzido por segundo pelos satélites, corresponde a um corpo de raio de centenas de micrômetros ou uma média de  $10^6$  partículas de  $1 \mu m$ , de modo que este processo se mostra eficiente na produção de material.

Uma vez conhecida a quantidade de material produzido pelos satélites, é possível estimar o tempo

Tabela 6 – Taxa de produção de massa (kg/s) devido a colisões com grãos de poeira interplanetária.

| satélite | 7:6                   | 14:15                 | 10:11                 |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0.5x     | $5.70 \times 10^{-8}$ | $4.41 \times 10^{-8}$ | $4.28 \times 10^{-8}$ |
| 1.0x     | $2.28 \times 10^{-7}$ | $1.77 \times 10^{-7}$ | $1.71 \times 10^{-7}$ |
| 1.5x     | $5.13 \times 10^{-7}$ | $3.97 \times 10^{-7}$ | $3.86 \times 10^{-7}$ |
| 1.0y     | $9.11 \times 10^{-7}$ | $7.06 \times 10^{-7}$ | $6.85 \times 10^{-7}$ |
| 1.5y     | $2.05 \times 10^{-6}$ | $1.59 \times 10^{-6}$ | $1.54 \times 10^{-6}$ |
| 1.0z     | $7.67 \times 10^{-6}$ | $5.94 \times 10^{-6}$ | $5.76 \times 10^{-6}$ |
| 1.5z     | $1.72 \times 10^{-5}$ | $1.34 \times 10^{-5}$ | $1.30 \times 10^{-5}$ |
| 2.0z     | $3.06 \times 10^{-5}$ | $2.38 \times 10^{-5}$ | $2.31 \times 10^{-5}$ |
| 2.5z     | $4.79 \times 10^{-5}$ | $3.71 \times 10^{-5}$ | $3.60 \times 10^{-5}$ |

fonte: Autor.

necessário para estes preencherem os sítios onde se encontram imersos. O cálculo da área superficial  $A_s$  de um sítio da RCE  $m + 1:m$  será realizado considerando este como um seguimento de anel com largura azimutal de  $360^\circ/m$  e cujas bordas interna e externa estão a  $(a_c - W_c/2)(1 - e)$  e  $(a_c + W_c/2)(1 + e)$  do centro do planeta, respectivamente:

$$A_s = \frac{\pi}{m} \left[ \left( a_c + \frac{W_c}{2} \right) (1 + e) \right]^2 - \frac{\pi}{m} \left[ \left( a_c - \frac{W_c}{2} \right) (1 - e) \right]^2 \quad (27)$$

$$A_s = \frac{\pi}{m} (2ea_c + W_c)(2a_c + eW_c) \quad (28)$$

Desprezando termos de segunda ordem na excentricidade, tem-se que a área do sítio será dada pela equação:

$$A_s = \frac{\pi}{m} (4ea_c^2 + eW_c^2 + 2a_cW_c) \quad (29)$$

O valor da excentricidade será tomado como o valor da excentricidade média das partículas forçada pela RLE, sendo este  $e = 5 \times 10^{-4}$  para a RCE 7:6 e  $e = 10^{-3}$  para a RCE 14:15 e 10:11. Os valores de largura radial encontrados para os sítios das RCE 7:6, 14:15 e 10:11, utilizando os parâmetros descritos anteriormente, são compatíveis com a largura radial dos arcos do anel G ( $\sim 250 \text{ km}$ ), de Methone e Anthe ( $\sim 500 \text{ km}$ ), respectivamente (HEDMAN et al., 2009; HEDMAN et al., 2010).

Já a massa  $m_s$  do sítio é dada por (SFAIR; GIULIATTI-WINTER, 2012):

$$m_s = A_s \left( \frac{4}{3} \pi \rho \right) \int_{1 \mu m}^{10 \mu m} \pi s^3 dN \quad (30)$$

onde  $dN$  corresponde ao número de partículas em função do raio  $s$  destas, considerado no intervalo  $1 - 10 \mu m$  neste trabalho.

Para os anéis do Sistema Solar,  $dN$  corresponde a (COLWELL; ESPOSITO, 1993):

$$dN = \zeta s^{-3.5} ds \quad (31)$$

sendo  $\zeta$  uma constante determinada por meio da profundidade ótica  $\tau$  da região.

A profundidade ótica corresponde ao grau de opacidade de um anel, dando a taxa de luz que atravessa uma seção transversal deste. Assim, esta pode ser interpretada como uma medida da quantidade de material existente na região, de modo que  $\tau = 0$  corresponderia a um anel vazio, enquanto  $\tau = 1$  corresponderia a um anel cuja área é completamente preenchida por material sólido. Matematicamente,  $\tau$  é descrito por (SFAIR; GIULIATTI-WINTER, 2012):

$$\tau = \int_{1 \mu m}^{10 \mu m} \pi s^2 dN \quad (32)$$

tendo-se considerado para os sítios da RCE 7:6, 14:15 e 10:11, a profundidade ótica dos arcos do anel G ( $\tau = 10^{-5}$ ), de Methone e Anthe ( $\tau = 10^{-7}$ ), respectivamente (HEDMAN et al., 2009; HEDMAN et al., 2010).

Assim, o tempo  $t_p$  necessário para o satélite preencher o sítio com partículas com raio de  $1 - 10 \mu m$  será dado por:

$$t_p = \frac{m_s}{M^+} \quad (33)$$

Na Figura 24 é apresentado, para as RCE 7:6, 14:15 e 10:11, o tempo necessário para o satélite produzir o material do sítio (em preto) e os tempos de vida do mesmo, obtidos anteriormente. Os casos sem forças perturbadoras encontram-se em vermelho enquanto os casos com estas estão em azul e roxo, para partículas de  $1 \mu m$  e  $10 \mu m$ , respectivamente. O tamanho 0.0x corresponde ao caso de um sítio na ausência de um satélite imerso.

Devido ao fato do arco do anel G possuir uma profundidade ótica duas ordens de grandeza maior que os demais, o tempo para os satélites na RCE 7:6 produzirem material necessário é significativamente maior que para as demais ressonâncias, ainda que a produção nesta região seja mais eficiente.

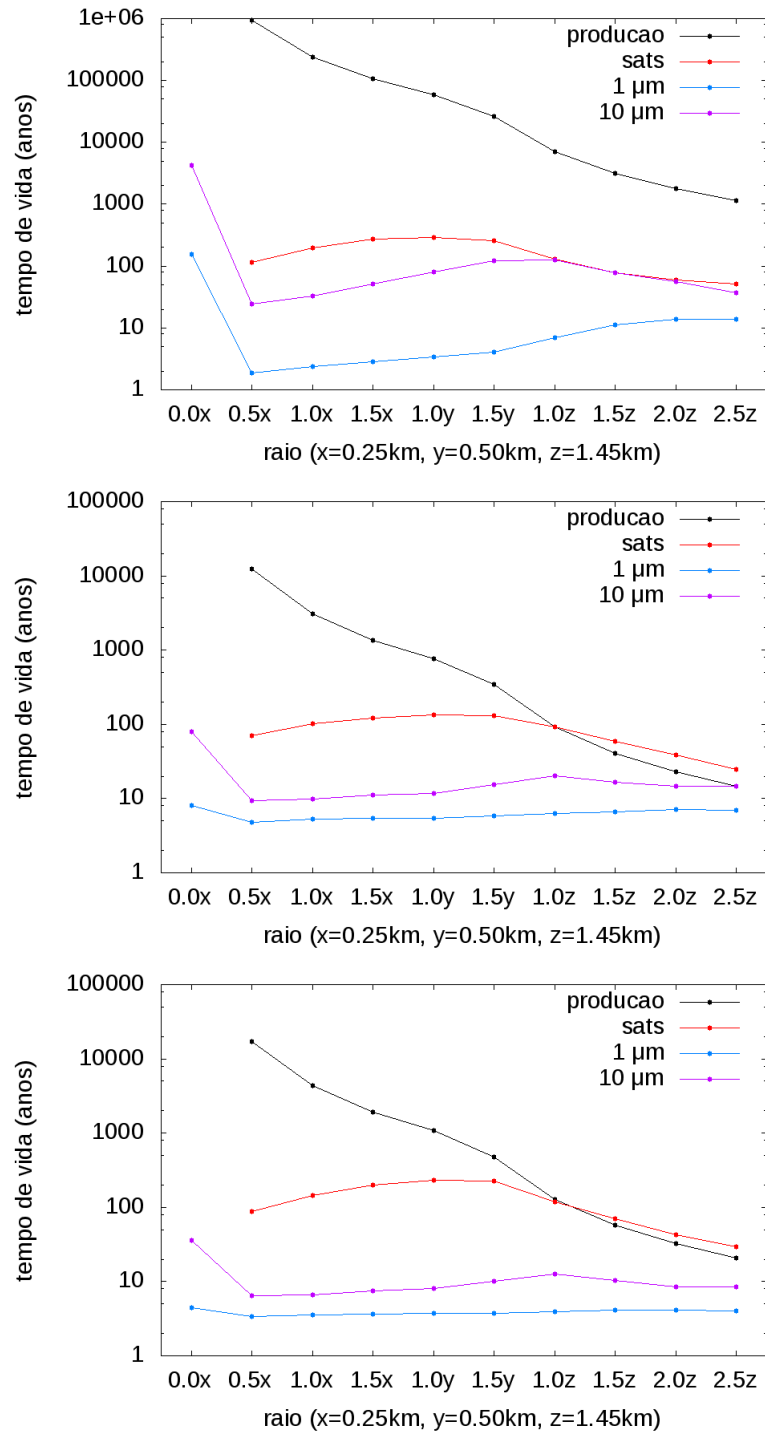
Comparando o tempo de produção com o de remoção por colisões com o satélite (caso sem perturbações) para a RCE 7:6, vê-se que estes possuem uma diferença de três ordens de grandeza, de modo que o sítio tende a desaparecer. Já para as RCE 14:15 e 10:11, são observadas diferenças iniciais de duas ordens de grandeza, as quais diminuem com o aumento do corpo, obtendo-se que um satélite do tamanho de Methone produz material na mesma taxa a que este é removido por meio de colisões. Satélites maiores (1.5z, 2.0z e 2.5z) tendem a produzir material a uma maior taxa do que removem.

Tomando a comparação dos tempos para os casos em que as forças perturbadoras são incluídas, obtém-se que nenhum satélite produz com uma taxa suficiente para balancear o material removido. Para isto, seriam necessários maiores satélites do que os considerados, os quais seriam incompatíveis com os sistemas estudados. Assim, conclui-se que satélites imersos nos sítios da RCE agem, principalmente, como sumidouro de material, não correspondendo a fontes eficientes de material.

#### 4.4 TRÂNSITO DE PARTÍCULAS ENTRE OS SÍTIOS RESSONANTES

Conforme mostrado anteriormente, variações no semi-eixo maior causadas por forças perturbadoras retiram partículas micrométricas do confinamento azimuthal, de modo que os sítios da RCE são

Figura 24 – Tempo para produção de material (em preto) e para sua remoção, para os casos sem (em vermelho) e com perturbações. Para os casos perturbados, são consideradas partículas de  $1\ \mu m$  (em azul) e  $10\ \mu m$  (em roxo).



fonte: Autor.

esvaziados de corpos destes tamanhos. Entretanto, obtém-se que a ressonância pode recapturar parte destas partículas, confinando-as no mesmo ou em outro sítio até serem retiradas do confinamento novamente. Assim, o trânsito de partículas micrométricas entre os sítios ressonantes foi analisado, buscando determinar se um sítio pode corresponder a fonte de material para outro.

Para isto, um sítio da RCE 7:6, 14:15 e 10:11 foi simulado por 100 anos, considerando partículas com raios de  $1 \mu m$  e  $10 \mu m$ . Para todos os sistemas foram incluídos os efeitos da FRS, enquanto o AP foi considerado apenas para as RCE 14:15 e 10:11. Analisando a evolução orbital das partículas após saírem do confinamento azimutal, observa-se uma tendência destas serem recapturadas por sítios adjacentes no sentido anti-horário do inicial. Tal sentido corresponde ao orbital das partículas no sistema inercial.

A Figura 25 apresenta  $a$  e  $\lambda$  das partículas com raio de  $10 \mu m$  que se encontram em RCE 14:15 nos tempos especificados na figura. Como pode ser visto, existe a formação de um fluxo de partículas no sentido decrescente da longitude média, uma vez que as partículas repetidamente saem e são capturadas pela RCE devido ao efeito das perturbações, até seus semi-eixo maiores serem incrementados (para a RCE 14:15 e 10:11) ou decrescerem (para a RCE 7:6) para valores fora da região de influência da ressonância.

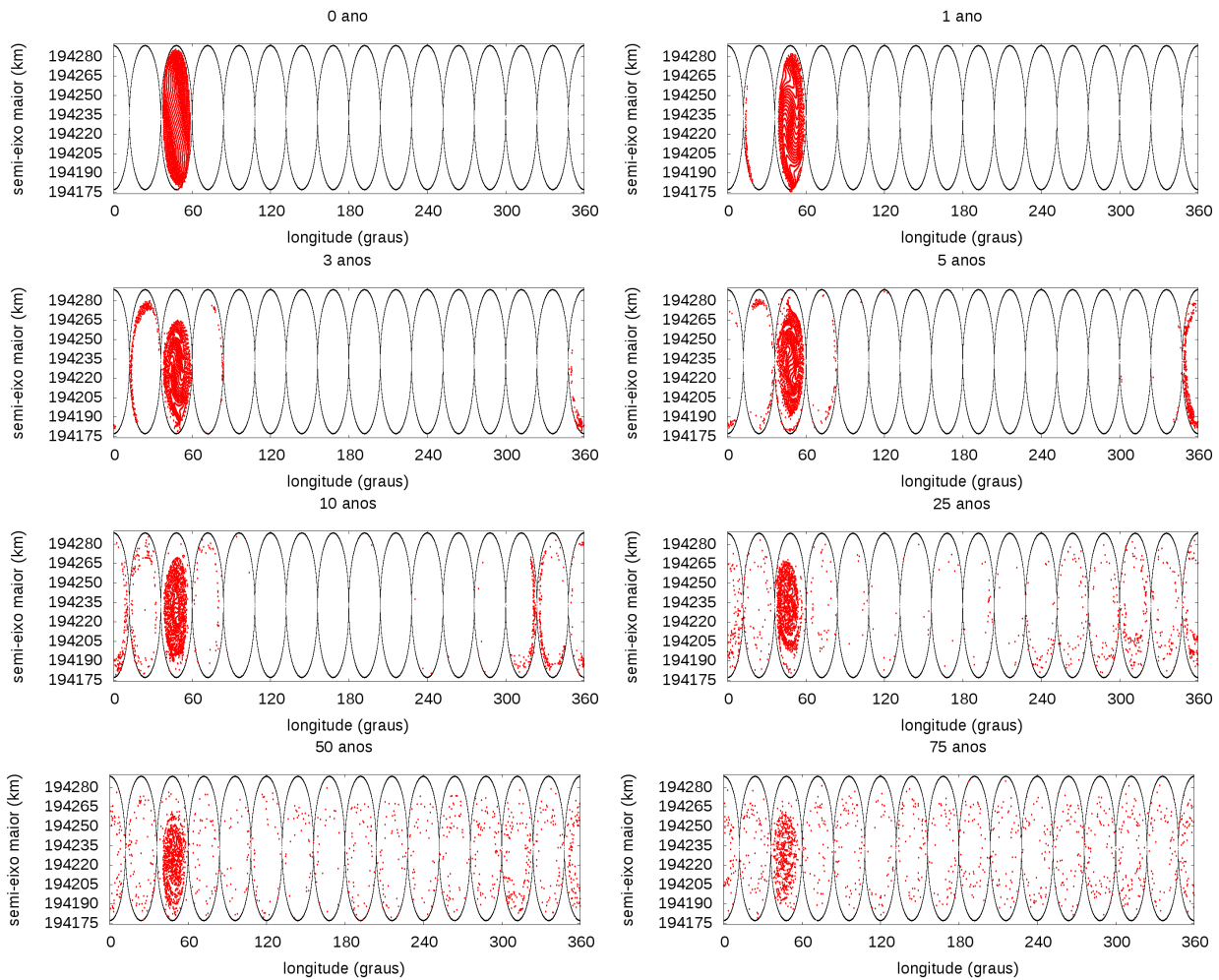
As taxas de partículas confinadas em cada sítio da RCE 7:6, 14:15 e 10:11 são dadas na Figura 26, na qual a coluna da esquerda se refere as partículas de  $1 \mu m$ , enquanto a da direita se refere as de  $10 \mu m$ . Apesar do fluxo de partículas no sentido anti-horário, encontra-se que estas tendem a se distribuir uniformemente entre os sítios. Para as RCE 14:15 e 10:11, obtém-se que após 30 anos, todas as partículas de  $1 \mu m$  saem da ressonância ao menos uma vez, de modo que cada sítio possui, em média, 0.5% e 4% das partículas iniciadas, respectivamente. Desta forma, após 30 anos, as partículas de  $1 \mu m$  em trânsito correspondem a 7.5% e 44% do sistema inicial, respectivamente.

Após 100 anos, as taxas para partículas de  $1 \mu m$  se aproximam de 0%, de modo que os sistemas não têm objetos deste tamanho, enquanto as de  $10 \mu m$  se distribuem uniformemente entre os sítios, obtendo-se para cada um destes uma taxa média de 1% e 2% das iniciadas, para as RCE 14:15 e 10:11, respectivamente.

Uma vez que a RCE 7:6 corresponde a região mais estável entre as consideradas, obtém-se que as partículas permanecem um maior tempo azimutalmente confinadas, seja no sítio em que foram iniciadas ou no que foram capturadas. Após 100 anos de simulação, encontra-se que o sítio no qual as partículas de  $1 \mu m$  foram iniciadas retém 18% do sistema inicial, enquanto os demais possuem 2% das iniciadas. Uma vez que um sítio da RCE 7:6 preenchido por partículas de  $10 \mu m$  possui um tempo de vida maior que 1000 anos, não é possível verificar o trânsito para o tempo simulado.

Na Figura 27 é apresentado no painel superior o ângulo azimutal  $\theta$  e no inferior o ângulo ressonante  $\phi$  de uma partícula de  $10 \mu m$ , iniciada com defasagem de  $\Delta a = -30 \text{ km}$  e  $\Delta \lambda = 2^\circ$  em relação ao centro do sítio, podendo ser visto que esta rapidamente sai da RCE 10:11 devido ao efeito da FRS e AP, deixando o sítio de número “3”. Em 3 anos de simulação, esta é novamente capturada pela ressonância, de modo que  $\phi$  retorna a librar, acompanhado do ângulo azimutal  $\theta$ , que oscila em torno de  $278.18^\circ$ , significando que a partícula se encontra confinada no sítio de número “11”. Após 20 anos, a partícula novamente sai da RCE, permanecendo em trânsito entre os demais sítios.

Figura 25 – Semi-eixo maior e longitude média das partículas em RCE 14:15 nos tempos 0, 1, 3, 5, 10, 25, 50 e 75 anos. As partículas possuem raio de  $10 \mu m$ .



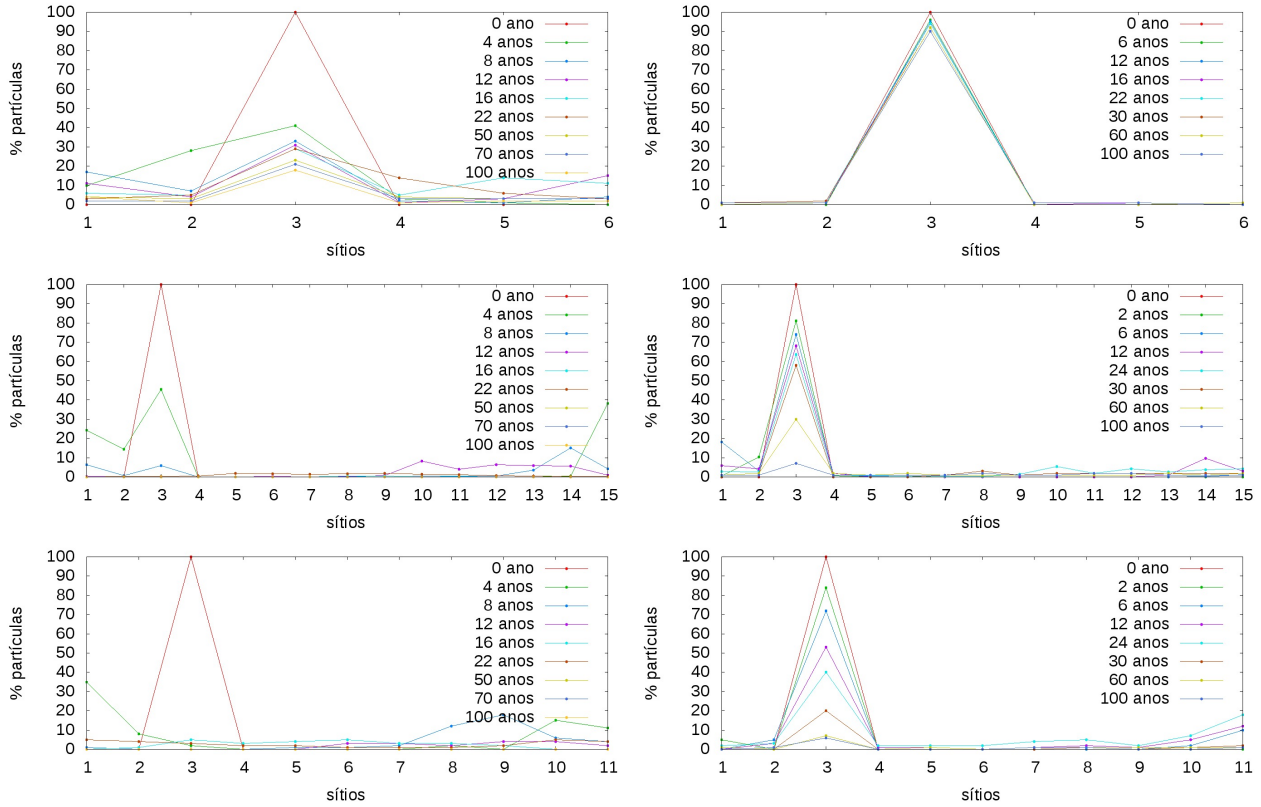
fonte: Autor.

O fato das partículas tenderem a se distribuir igualmente entre os sítios pode ser atribuído a simetria do sistema, uma vez que não existe diferenciação entre os sítios de uma mesma RCE. Desta forma, as simulações anteriores foram refeitas incluindo um satélite no sistema de modo a diferenciá-los dinamicamente. O sítio no qual as partículas são iniciadas foi simulado com um satélite imerso em seu centro (caso 1), assim como foram realizadas simulações com um satélite no centro do sítio adjacente no sentido anti-horário (caso 2) e no sentido horário (caso 3) àquele com partículas. Para todos os casos, foram considerados satélites com raio de Aegaeon, Anthe e Methone. As simulações sem a inclusão de satélites, realizadas anteriormente, serão referenciadas como “caso 0”.

Encontra-se para o primeiro caso que grande parte das partículas colidem com o satélite, de modo que um menor número de partículas entra em trânsito em relação ao caso 0. Uma vez que a taxa de partículas que permanecem em RCE decai com o aumento do raio do satélite (Figura 23), obtém-se que maiores satélites levam a um maior número de partículas em trânsito.

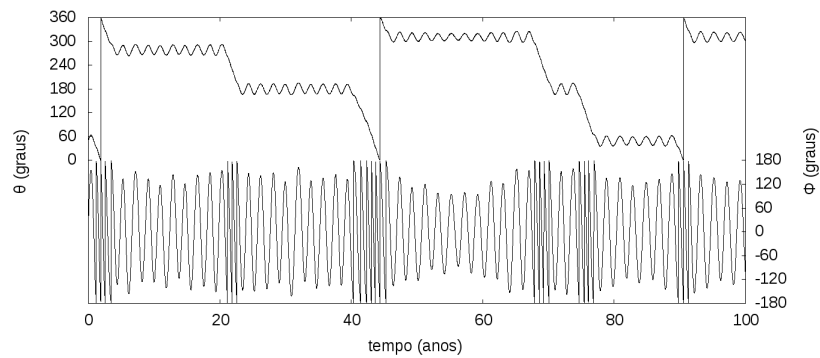
Já para o segundo e terceiro casos é observado que a evolução temporal do sistema ocorre de modo semelhante ao caso 0, diferindo deste quando o fluxo de partículas em trânsito passa pelo sítio no qual se encontra o satélite. Quando uma partícula é confinada em um sítio com satélite, existe a possibilidade de colisão, de modo que é observada uma diminuição da taxa de grãos em trânsito.

Figura 26 – Taxa de partículas confinadas azimuthalmente nos sítios da RCE 7:6, 14:15 e 10:11 para diversos tempos de integração. Todas as partículas foram iniciadas no sítio “3”, estando as de raio de  $1\ \mu m$  na coluna da esquerda e as de  $10\ \mu m$  na coluna da direita.



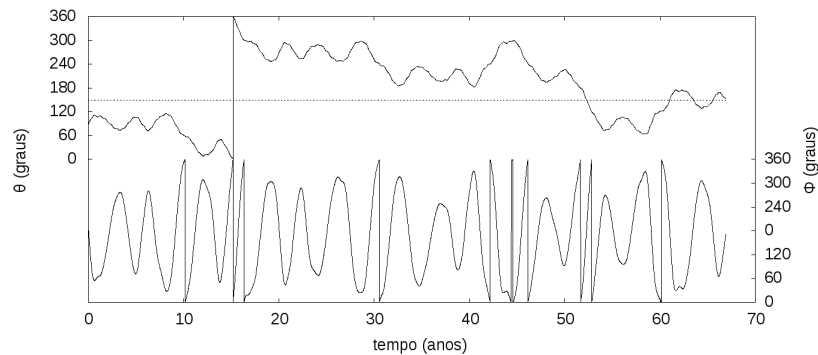
fonte: Autor.

Figura 27 – Ângulo azimuthal  $\theta$  no sistema girante e ângulo ressonante  $\phi$  de uma partícula iniciada com  $\Delta a = -30\ km$  e  $\Delta \lambda = 2^\circ$  em relação ao centro de um sítio da RCE 10:11. A partícula possui raio de  $10\ \mu m$ .



fonte: Autor.

Figura 28 – Ângulo azimutal  $\theta$  no sistema girante e ângulo ressonante  $\phi$  de uma partícula de  $1 \mu m$  iniciada com  $\Delta a = 16$  km e  $\Delta \lambda = -2^\circ$  em relação ao centro de um sítio da RCE 7:6. A linha pontilhada representa a posição angular do satélite com raio de Aegaeon imerso no sítio “4” (caso 3).



fonte: Autor.

Uma vez que maiores satélites geram maiores perturbações nas partículas, mais difícil será para estas serem capturadas pela ressonância. Deste modo, quanto maior o satélite considerado, menor o número de partículas que serão confinadas no sítio no qual este se encontra, ocorrendo um menor número de colisões. Logo, novamente obtém-se que maiores satélites são acompanhados por uma maior taxa de partículas em trânsito.

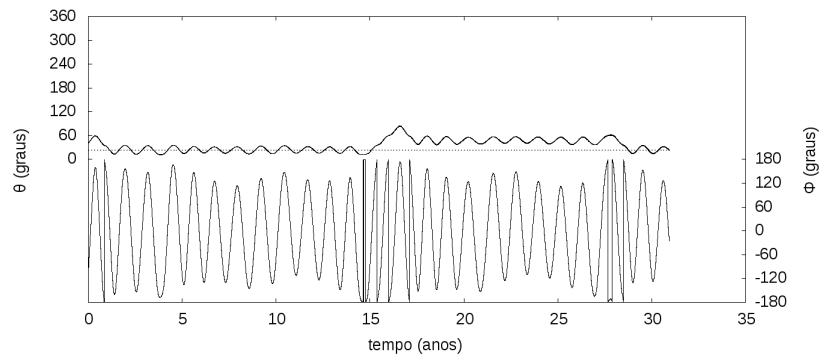
Na Figura 28 são apresentados  $\theta$  e  $\phi$  para uma partícula de  $1 \mu m$  inicialmente no sítio “3” da RCE 7:6, com defasagem inicial de  $\Delta a = 16$  km e  $\Delta \lambda = -2^\circ$  em relação ao seu centro. Como pode ser visto, a partícula permanece confinada por 10 anos, quando seu ângulo ressonante começa a circular e esta sai da RCE, sendo após confinada no sítio adjacente. Esta permanece em trânsito entre os sítios até 68 anos, quando colide com o satélite com raio de Aegaeon imerso no centro do sítio “4”.

Já na Figura 29, o ângulo azimutal e ressonante são dados para uma partícula de  $10 \mu m$  iniciada na RCE 14:15, para o caso 2. O satélite possui o raio de Methone, sendo iniciado em  $\theta = 32^\circ$  (sítio “2”), enquanto a partícula possui defasagem inicial de  $\Delta a = -26$  km e  $\Delta \lambda = 5^\circ$  em relação ao centro do sítio. Como pode ser visto, esta transita entre os dois sítios adjacentes ao qual foi iniciada até colidir com o satélite, em 30 anos.

As taxas de partículas de  $1 \mu m$  inicialmente na RCE 14:15 para os casos 1, 2 e 3 são apresentadas na Figura 30. No lado esquerdo de cada figura têm-se as taxas obtidas incluindo um satélite do tamanho de Aegaeon, enquanto no lado direito têm-se as obtidas para um corpo de raio igual ao de Methone, de modo que os casos com o satélite com o raio de Anthe correspondem a casos intermediários aos apresentados. Na Figura 31, as mesmas taxas são mostradas para partículas de  $10 \mu m$ .

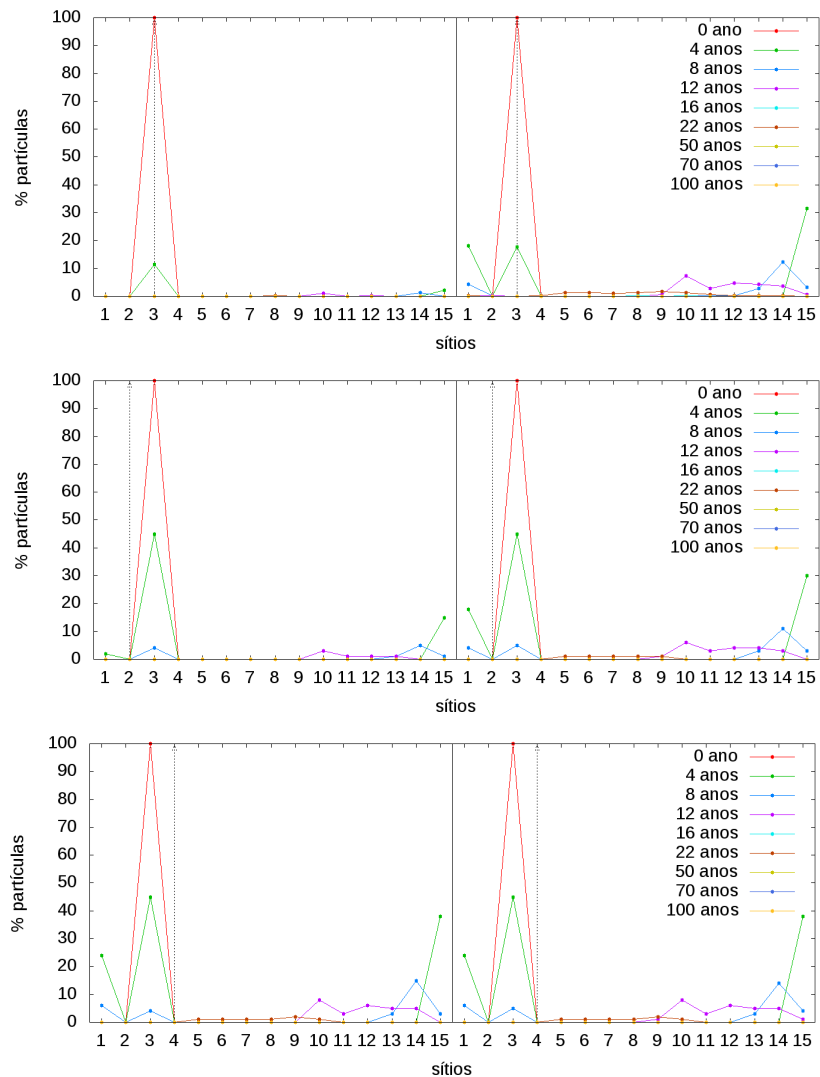
Como pode ser percebido comparando a Figura 26, Figura 30 e Figura 31, a evolução do fluxo de partículas se dá de maneira semelhante para todos os casos, diferindo apenas na quantidade de corpos em trânsito, os quais decaem devido a presença do satélite. Tal comportamento é também verificado para a RCE 10:11 e 7:6. Deste modo, verifica-se que o principal efeito dos satélites é remover partículas por colisões. Para a RCE 14:15 e 10:11, após 100 anos, as partículas se distribuem uniformemente entre os sítios, não sendo verificada uma diferença significativa no número das que permanecem confinadas nos sítios com e sem satélite. Já para a RCE 7:6, seria necessário um tempo maior que 1000 anos para

Figura 29 – Ângulo azimutal  $\theta$  no sistema girante e ângulo ressonante  $\phi$  de uma partícula de  $10 \mu m$  iniciada com  $\Delta a = -26 \text{ km}$  e  $\Delta \lambda = 5^\circ$  em relação ao centro de um sítio da RCE 14:15. A linha pontilhada representa a posição angular do satélite com raio de Methone imerso no sítio “2” (caso 2).



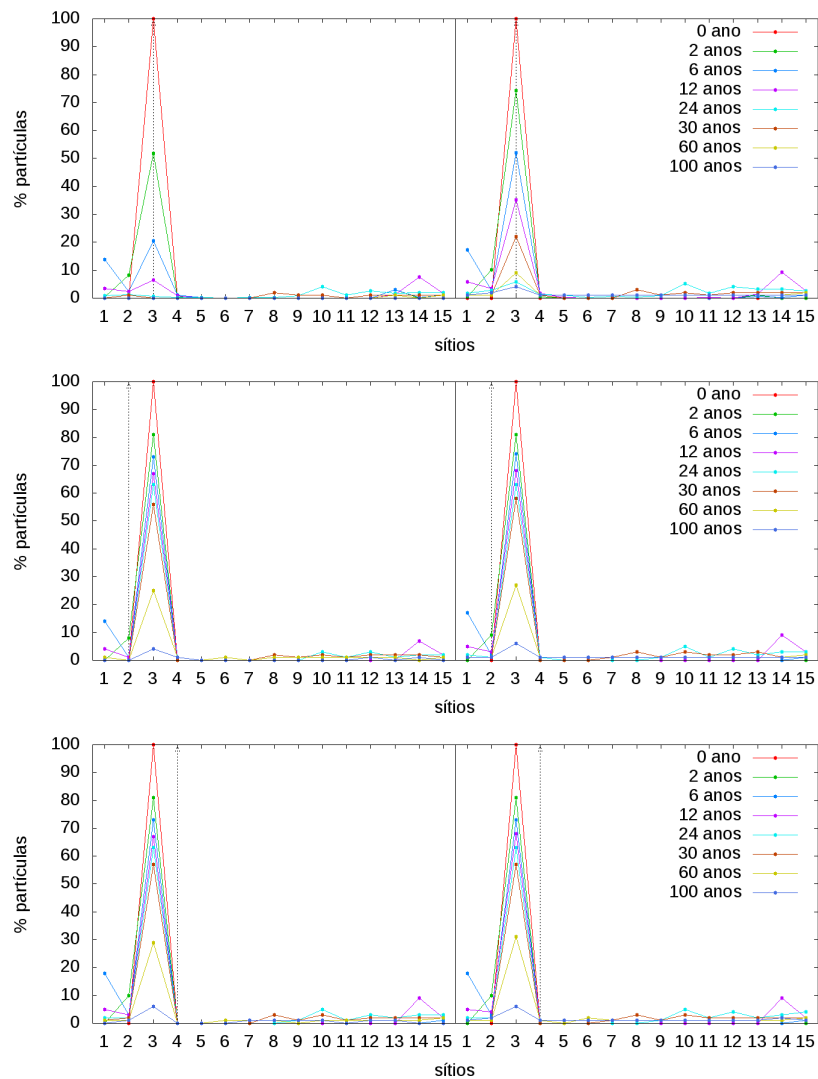
fonte: Autor.

Figura 30 – Taxa de partículas de  $1 \mu m$  em trânsito para os casos 1, 2 e 3. No painel esquerdo são apresentados os resultados com a inclusão do satélite com o raio de Aegaeon, enquanto no direito é incluído um satélite com o raio de Methone. As partículas estão inicialmente no sítio “3” da RCE 14:15.



fonte: Autor.

Figura 31 – Taxa de partículas de  $10\ \mu m$  em trânsito para os casos 1, 2 e 3. No painel esquerdo são apresentados os resultados com a inclusão do satélite com o raio de Aegaeon, enquanto no direito é incluído um satélite com o raio de Methone. As partículas estão inicialmente no sítio “3” da RCE 14:15.



fonte: Autor.

que as partículas sejam distribuídas uniformemente entre os 6 sítios formados por esta ressonância.

Apesar de verificado um fluxo de partículas em trânsito no sentido anti-horário nos primeiros anos de simulação, obtém-se que após poucas décadas uma pequena parte do sistema inicial permanece no sistema, se distribuindo uniformemente entre os sítios formados pelas RCE 14:15 e 10:11, mesmo com a presença de coorbitais. Já para a RCE 7:6, apesar de serem necessários tempos da ordem de centenas de anos para ser verificada a evolução do sistema, encontra-se que este segue a mesma tendência das demais ressonâncias. Logo, conclui-se que um sítio não pode corresponder a fonte de material para outro.

## 5 DESTINO DAS PARTÍCULAS DO ARCO DO ANEL G

O arco do anel G, descoberto por meio da análise de dados obtidos pela NAC (*Narrow-Angle Camera*) a bordo da sonda espacial Cassini (HEDMAN et al., 2007), está localizado próximo a borda interna do anel G, a 167500 km do centro de Saturno, possuindo uma largura radial e azimutal de 250 km e 60°, respectivamente. Segundo dados da mesma sonda a estrutura é populada, principalmente, por partículas micrométricas ( $1\ \mu m$ - $10\ \mu m$ ), existindo evidências de corpos com raios da ordem de centímetros e metros imersos nesta.

Contido no arco encontra-se Aegaeon, correspondente ao menor satélite de Saturno. Com densidade de  $0.5\text{ g/cm}^3$  e raio estimado de 250 m (HEDMAN et al., 2010), o corpo possui forma próxima a um elipsoide, segundo trabalhos recentes (THOMAS et al., 2013). Aegaeon, assim como os demais corpos do arco do anel G, se encontram em ressonância de corotação excêntrica 7:6 com Mimas.

Para analisar a dinâmica das partículas localizadas neste arco é necessário um sistema mais fidedigno ao utilizado no capítulo anterior, de modo que, primeiramente, buscou-se reproduzir os resultados apresentados em Hedman et al. (2010). Em tal artigo é dada a variação do ângulo ressonante e dos elementos geométricos de Aegaeon, obtidos por meio de simulações numéricas incluindo Saturno e seus termos de não-esfericidade ( $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ ), Aegaeon, Mimas e outros corpos maiores do Sistema Solar: Sol, Júpiter, Prometeu, Pandora, Jano, Epimeteu, Encélado, Tétis, Dione, Réia, Titã, Hiperião e Jápeto. Em Araujo (2013) mostra-se que apenas Tétis, entre os corpos maiores incluídos por Hedman et al. (2010), influencia significativamente o sistema.

Visto isto, os elementos orbitais osculadores ( $a$ ,  $e$ ,  $I$ ,  $\varpi$ ,  $\Omega$ ,  $\lambda$ ), massa ( $m$ ) e densidade ( $d$ ) dos satélites Aegaeon, Mimas e Tétis, no tempo 2454700.5 JD, foram extraídos do banco de dados JPL-Horizons. Tais dados, apresentados na tabela 7, foram os utilizados nas simulações posteriores, com exceção do semi-eixo maior de Aegaeon, o qual foi necessário ajustar em 4.6 km para que o satélite apresentasse a variação do ângulo ressonante dada na literatura (ARAUJO; NETO; FORYTA, 2016; HEDMAN et al., 2010).

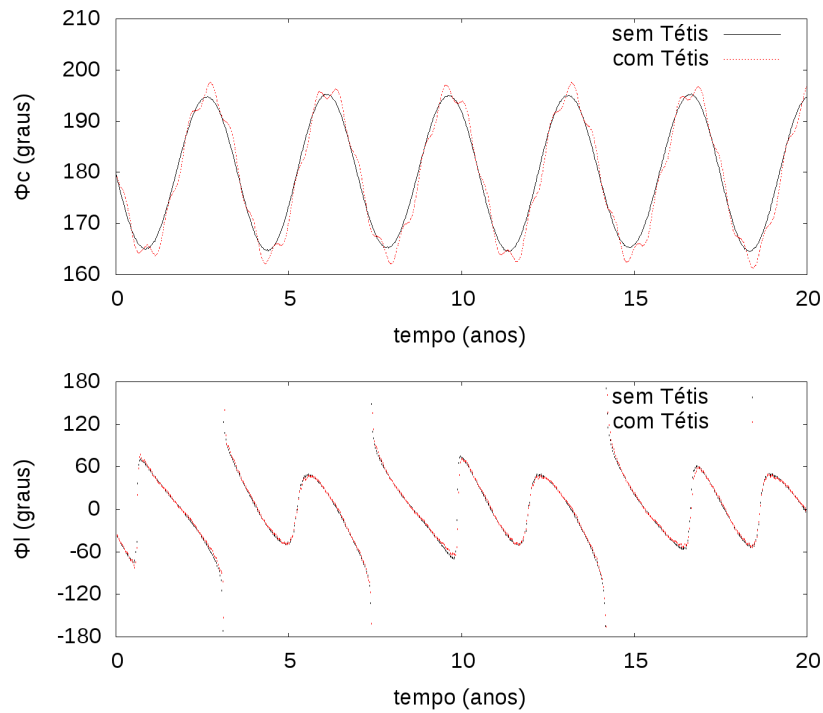
Na Figura 32 é mostrada a variação dos ângulos da RCE 7:6 e RLE 7:6 de Aegaeon, para os casos com e sem Tétis. Como pode ser visto,  $\phi^{(c)}$  libra em torno de 180°, com uma amplitude aproximada

Tabela 7 – Massa, densidade e elementos osculadores dos satélites Aegaeon, Mimas e Tétis, no tempo 2454700.5 JD.

|                          | Aegaeon                | Mimas                  | Tétis                   |
|--------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| $a$ ( $\times 10^5$ km)  | 1.6749309039           | 1.8600466879           | 2.9497426488            |
| $e$ ( $\times 10^{-2}$ ) | 0.3133178063           | 1.7245224226           | 0.0828116581            |
| $I$ (°)                  | 0.0017328550           | 1.5641747812           | 1.0915162973            |
| $\varpi$ (°)             | 142.49114788           | 163.18023984           | 15.906312542            |
| $\Omega$ (°)             | 236.30175623           | 259.15258436           | 355.42083194            |
| $\lambda$ (°)            | 5.3481201068           | 197.73278953           | 4.5221318570            |
| $m$ (kg)                 | $5.997 \times 10^{10}$ | $3.754 \times 10^{19}$ | $61.760 \times 10^{19}$ |
| $d$ (g/cm <sup>3</sup> ) | 0.500                  | 1.152                  | 0.956                   |

fonte: Madeira et al. (2018).

Figura 32 – Variação temporal de  $\phi^{(c)}$  e  $\phi^{(l)}$  de Aegaeon, para os casos com e sem o satélite Tétis.



fonte: Autor.

de  $15^\circ$ , enquanto  $\phi^{(l)}$  intercala entre os regimes de libração e circulação. Isso significa que, apesar de não se encontrar na ressonância de Lindblad, o satélite é influenciado por esta, devendo apresentar variações na excentricidade. O fato de  $\phi^{(c)}$  oscilar com uma amplitude diferente de zero significa que Aegaeon não se encontra no ponto de equilíbrio da RCE, sendo verificado que este se encontra defasado em  $\Delta a = -2$  km e  $\Delta \lambda = 2^\circ$  do centro do arco.

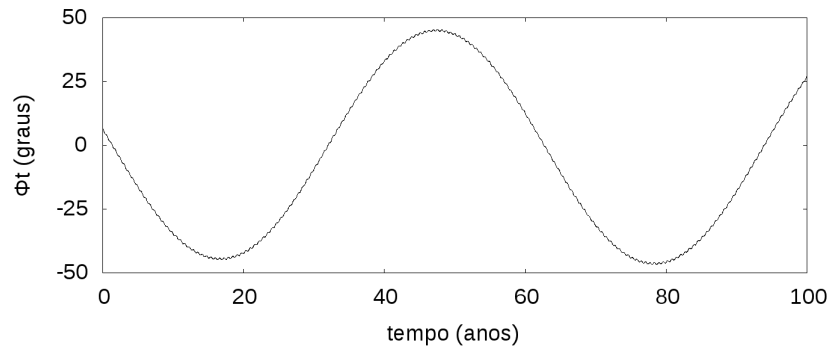
Mimas e Tétis se encontram em uma ressonância do tipo II' 4:2 (MURRAY; DERMOTT, 1999), sendo o ângulo característico desse sistema apresentado na Figura 33. Deste modo, devido a dependência do ângulo da RCE 7:6 com  $\varpi_M$ , tem-se que  $\phi^{(c)}$  apresenta uma oscilação secundária no caso com Tétis, uma vez que a ressonância Mimas-Tétis gera variações no argumento do pericentro de Mimas. Já o ângulo da RLE 7:6, por independe de  $\varpi_M$ , não sofre efeito direto devido a Tétis. Apesar da variação secundária observada em  $\phi^{(c)}$ , testes mostram que a presença de Tétis pouco altera a evolução temporal de Aegaeon e dos demais corpos localizados no arco do anel G.

Na Figura 34 são apresentados semi-eixo maior, excentricidade e inclinação de Aegaeon, os quais são coerentes com os apresentados em Hedman et al. (2010).

## 5.1 EVOLUÇÃO ORBITAL DAS PARTÍCULAS DO ARCO

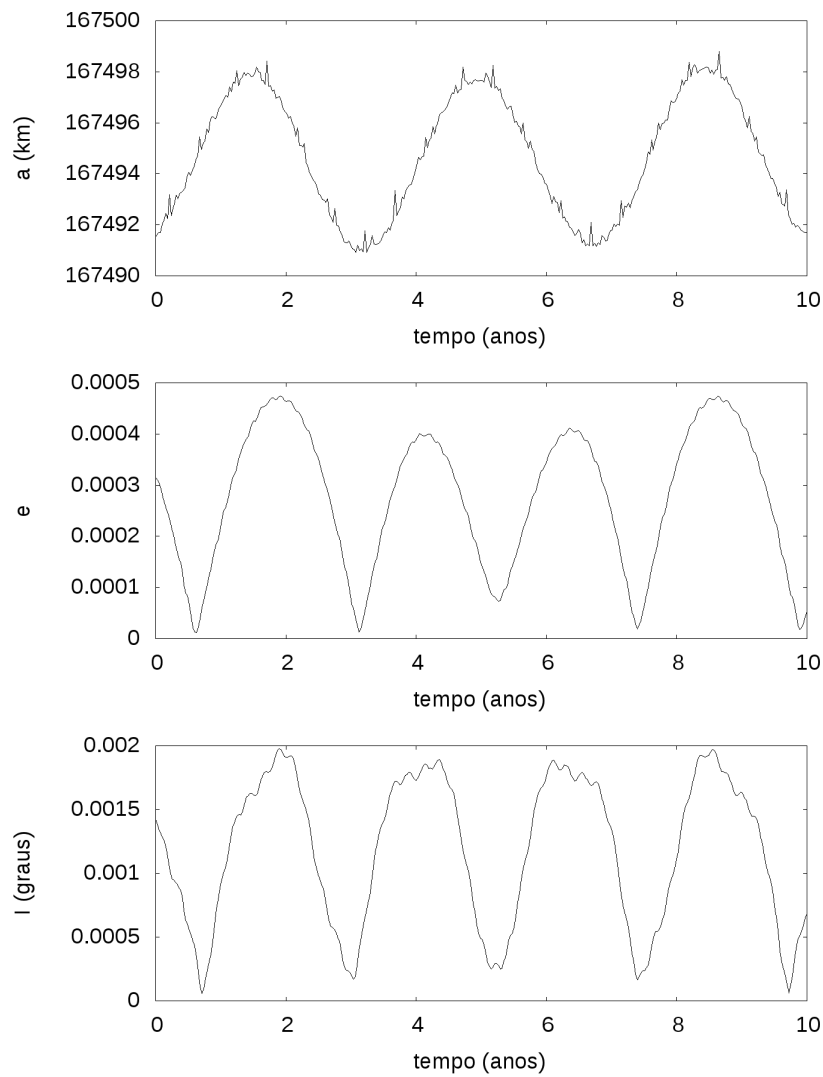
Buscando estudar a evolução do arco do anel G, o sítio da RCE 7:6 no qual Aegaeon se encontra imerso foi preenchido de partículas. Estas, no número de 10000, foram distribuídas aleatoriamente variando o semi-eixo maior e longitude média dentro dos limites radial de 64 km e azimuthal de  $60^\circ$  delimitados pela ressonância; os demais elementos foram tomados como iguais ao de Aegaeon. Após verificar quais permanecem em RCE por meio de uma simulação de 20 anos, obteve-se um sistema de

Figura 33 – Variação temporal do ângulo característico ( $\phi^{(t)}$ ) da ressonância Mimas-Tétis, dado por  $\phi^{(t)} = 4\lambda_T - 2\lambda_M - \Omega_T - \Omega_M$ , no qual  $T$  e  $M$  se refere a Tétis e Mimas, respectivamente.



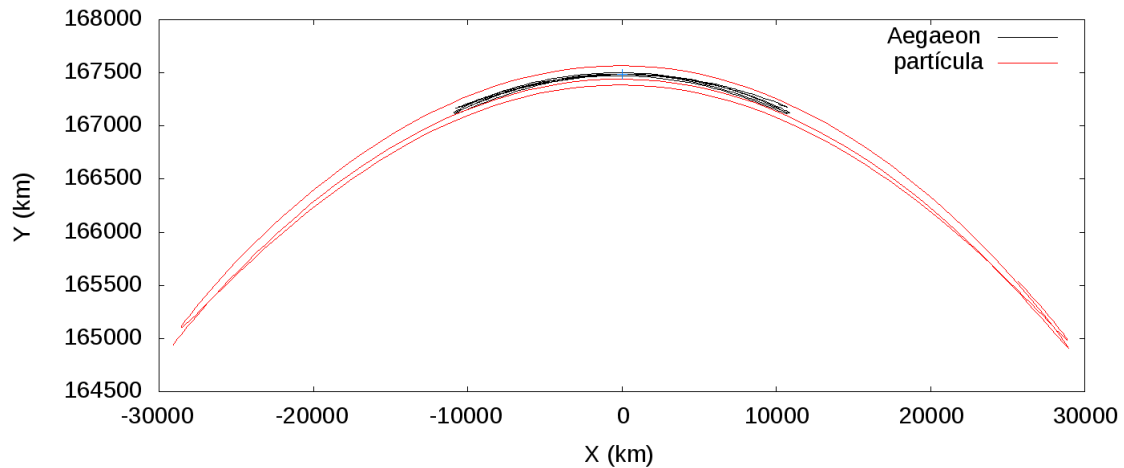
fonte: Autor.

Figura 34 – Variação temporal do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação de Aegaeon.



fonte: Autor.

Figura 35 – Movimento no sistema girante, para 10 anos de simulação, de Aegaeon e uma partícula com defasagem de  $\Delta\lambda = -10^\circ$  do centro do arco.



fonte: Autor.

6120 partículas responsáveis por reproduzir o arco do anel G.

Deste modo, o sistema de partículas resultante foi simulado juntamente com Saturno e seus coeficientes de não-esfericidade ( $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ ), Mimas, Tétis e Aegaeon, por 1000 anos, obtendo-se que, aproximadamente, 1% das partículas deixam o confinamento com Mimas devido ao efeito de Aegaeon, enquanto, aproximadamente, 85% do sistema colide com o satélite no tempo considerado.

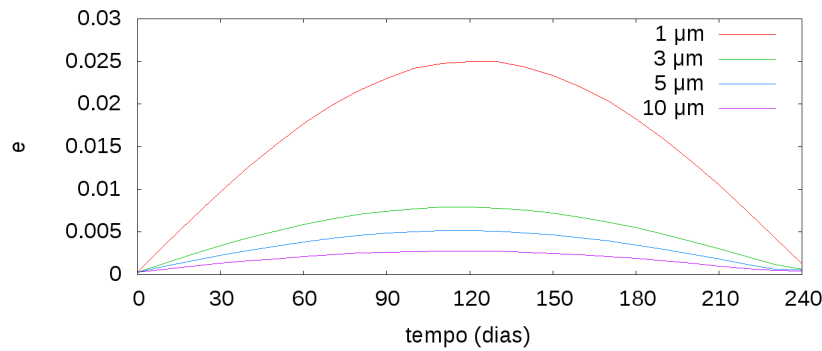
No capítulo 4, foram simuladas partículas em um sítio da RCE 7:6 juntamente com um satélite de raio igual ao de Aegaeon localizado no ponto de equilíbrio da ressonância com Mimas. Como resultado, encontrou-se que todas as partículas permanecem em ressonância e 90% colide com a lua em 197 anos de simulação. Como pode-se ver, tais resultados diferem dos encontrados nesta seção.

Diferenças entre os dois sistemas influenciam este resultado, como a presença de Tétis, as órbitas do satélite e das partículas possuem maiores excentricidades e inclinações e o fato de Aegaeon não estar no ponto de equilíbrio da ressonância. Diferente dos satélites considerados no capítulo 4, que permaneciam parados no sistema girante, Aegaeon oscila em torno do ponto de equilíbrio do arco assim como as demais partículas do sistema, como pode ser visto na Figura 35. Esta apresenta, para 10 anos de simulação, a trajetória de Aegaeon e uma partícula iniciada a  $\Delta\lambda = -10^\circ$  do centro do arco e que colide após 6 anos de simulação.

Incluindo os efeitos da força de radiação solar no sistema, considerando partículas com raios de  $1 \mu m$ ,  $3 \mu m$ ,  $5 \mu m$  e  $10 \mu m$ , encontra-se que a componente da pressão de radiação gera uma variação na excentricidade com amplitude dependente do raio do grão. Na Figura 36 é apresentada a variação da excentricidade de uma partícula iniciada com  $\Delta a = 10$  km em relação ao centro do sítio.

Conforme discutido no capítulo anterior, tal excitação incrementa o número de cruzamentos entre a trajetória das partículas e a órbita do satélite. Uma vez que a intensidade da força de radiação solar é inversamente proporcional ao tamanho do grãos, é esperado que quanto menor a partícula, maior a probabilidade desta deixar o confinamento e também de colidir com Aegaeon. Tais tendências podem ser observadas na tabela 8, a qual apresenta a porcentagem de partículas que permanecem em ressonância e o tempo de vida ( $t_{90}$ ) do arco.

Figura 36 – Variação temporal da excentricidade devido a FRS para uma partícula iniciada a 10 km do centro da RCE 7:6 com Mimas.



fonte: Autor.

Tabela 8 – Porcentagem de partículas que saem da ressonância e tempo para 90% das partículas do arco saírem da RCE 7:6 com Mimas ou colidirem com Aegaeon.

| $r (\mu m)$ | ressonância (%) | $t_{90}$ (anos) |
|-------------|-----------------|-----------------|
| 1           | 55              | 3               |
| 3           | 58              | 9               |
| 5           | 60              | 16              |
| 10          | 64              | 26              |

fonte: Autor.

Um exemplo do movimento de uma partícula do arco do anel G é apresentado na Figura 37, na qual pode ser vista a diferença do semi-eixo maior em relação ao centro da ressonância e ângulo ressonante de uma partícula iniciada com  $\Delta a = -5$  km em relação ao centro do arco e raio de  $10 \mu m$ . Esta permanece azimuthalmente confinada por quase 35 anos, até colidir com Aegaeon.

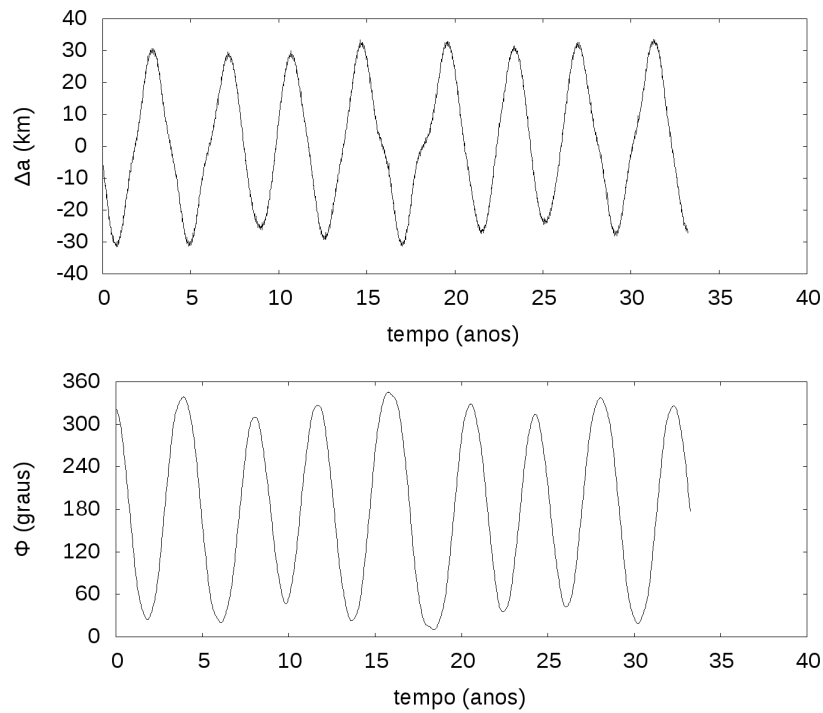
Já na Figura 38, os mesmos elementos são apresentados para uma partícula de  $10 \mu m$  inicialmente a  $\Delta a = 25$  km do centro do arco. Esta deixa o confinamento após, aproximadamente, 20 anos, passando a apresentar o decréscimo do semi-eixo maior devido a componente da Poynting-Robertson, se movendo em direção a borda interna do anel G.

## 5.2 EVOLUÇÃO ORBITAL DAS PARTÍCULAS EJETADAS DA SUPERFÍCIE DE AEGAEON

Conforme discutido no capítulo 4, colisões de poeira interplanetária com pequenos satélites levam a produção de material na forma de partículas micrométricas, as quais são ejetadas da superfície do corpo com velocidades superiores a velocidade de escape deste. Na seção 4.3 foi computado o tempo necessário para um satélite popular um sítio com partículas de  $1 \mu m$  a  $10 \mu m$ , obtendo-se para um satélite com o raio igual ao de Aegaeon na região do arco do anel G, um tempo da ordem de 300000 anos.

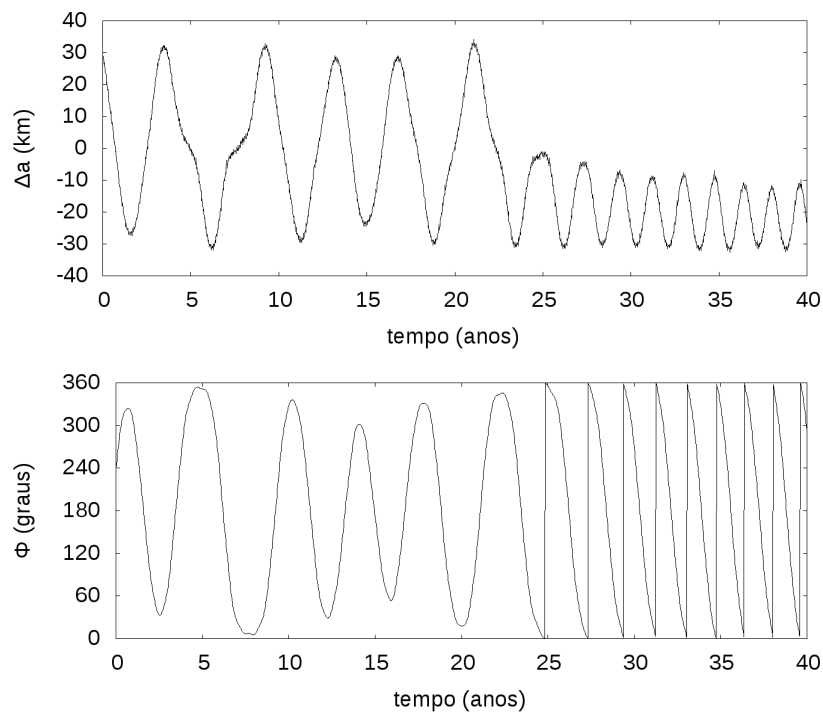
Visto isto, a dinâmica do material produzido será analisada por meio da simulação de 3 conjuntos com 1000 partículas ejetadas radialmente da superfície do satélite. A velocidade relativa a Aegaeon foi tomada, em cada conjunto, como  $1V_e$ ,  $5V_e$  e  $10V_e$ , sendo  $V_e$  a velocidade de escape. Nas simulações foram incluídos os coeficientes de não-esfericidade de Saturno, Mimas, Tétis, Aegaeon e a força de radiação solar, tendo-se considerado partículas de  $1 \mu m$ ,  $3 \mu m$ ,  $5 \mu m$  e  $10 \mu m$ . Tais parâmetros foram

Figura 37 – Variação temporal do semi-eixo maior em relação ao centro da ressonância e ângulo ressonante para uma partícula de  $10 \mu m$ , inicialmente a  $\Delta a = -5 \text{ km}$  e  $\Delta \lambda = 0^\circ$  do centro do arco.



fonte: Autor.

Figura 38 – Variação temporal de  $\Delta a$  e  $\phi$  para uma partícula de  $10 \mu m$ , inicialmente defasada de 25 km do centro do arco.



fonte: Autor.

Tabela 9 – Sumário dos resultados obtidos para diferentes tamanhos de partículas e velocidades de ejeção. A tabela apresenta a porcentagem de partículas que permanecem em ressonância (arco) e as que saem desta (anel), assim o tempo de vida ( $t_{90}$ ) em anos de cada sistema.

|             |          | 1 $\mu m$ | 3 $\mu m$ | 5 $\mu m$ | 10 $\mu m$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| $1v_{esc}$  | arco     | 100%      | 100%      | 100%      | 100%       |
|             | $t_{90}$ | 2.5       | 4.6       | 14.4      | 38.2       |
|             | anel     | 0%        | 0%        | 0%        | 0%         |
|             | $t_{90}$ | -         | -         | -         | -          |
| $5v_{esc}$  | arco     | 92%       | 100%      | 100%      | 100%       |
|             | $t_{90}$ | 3.0       | 12.6      | 20.6      | 36.7       |
|             | anel     | 8%        | 0%        | 0%        | 0%         |
|             | $t_{90}$ | 7.1       | -         | -         | -          |
| $10v_{esc}$ | arco     | 66.3%     | 68.7%     | 70.6%     | 71.3%      |
|             | $t_{90}$ | 3.4       | 13.9      | 22.5      | 41.9       |
|             | anel     | 33.7%     | 31.3%     | 29.4%     | 28.7%      |
|             | $t_{90}$ | 35.0      | 94.9      | 136.3     | 278.6      |

fonte: Autor.

escolhidos de modo a cobrir a distribuição de material produzido por meio do mecanismo discutido anteriormente (KRIVOV et al., 2003). Os sistemas foram simulados por 500 anos.

Os grãos foram ejetados radialmente tomando-se um eixo de coordenadas  $(\xi, \eta)$  centrado no centro do satélite, cujo eixo  $\xi$  coincide com o eixo  $X^S$  do sistema cartesiano saturnicêntrico  $(X^S, Y^S)$  considerado pelo pacote de integração *Mercury*. Desta forma, tendo-se um ângulo  $\theta$  dado aleatoriamente, posição e velocidade  $(\dot{X}^S, \dot{Y}^S)$  são encontradas por meio das relações:

$$\xi = r_A \cos \theta \quad (1)$$

$$\eta = r_A \sin \theta \quad (2)$$

$$(X^S, Y^S) = (X_A^S + \xi, Y_A^S + \eta) \quad (3)$$

$$\dot{\xi} = nV_e \cos \theta \quad (4)$$

$$\dot{\eta} = nV_e \sin \theta \quad (5)$$

$$(\dot{X}^S, \dot{Y}^S) = (\dot{X}_A^S + \dot{\xi}, \dot{Y}_A^S + \dot{\eta}) \quad (6)$$

sendo  $(X_A^S, Y_A^S)$  e  $(\dot{X}_A^S, \dot{Y}_A^S)$  posição e velocidade de Aegaeon, respectivamente,  $r_A$  seu raio e  $n$  o número de vezes a velocidade de escape ( $V_e = \sqrt{2Gm_A/r_A}$ ).

Os resultados obtidos são resumidos na tabela 9, na qual as partículas classificadas como “arco” correspondem as que permanecem em RCE durante suas evoluções orbitais, enquanto as classificadas como “anel” saem do confinamento azimutal com Mimas, tendo-se computado o tempo necessário para 90% das partículas de cada grupo serem removidas por meio de colisões com Aegaeon.

A quantidade de partículas que permanecem em RCE diminui com a redução do tamanho do grão e com o aumento da velocidade de ejeção, de forma que, partículas pequenas e ejetadas com maiores velocidades são as mais prováveis de deixar o arco. Observa-se também que, grãos classificados como “anel” por um maior tempo, se devendo isto ao fato de não se encontrarem azimutalmente confinados, reduzindo a probabilidade de cruzamentos com a órbita do satélite.

Verifica-se que praticamente todas as partículas ejetadas a baixas velocidades permanecem em ressonância, de modo que seus tempos de vida são menores pois permanecem se movimentando nas proximidades da órbita de Aegaeon. Mesmo para o conjunto com maior tempo de vida, correspondente àquele com os grãos maiores e mais rápidos, as partículas não sobrevivem mais de 300 anos, evidenciando o fato do material produzido pelo satélite não permanecer na região do arco por um tempo considerável.

Assim, tem-se que Aegaeon rapidamente remove, por meio de colisões, as partículas micrométricas localizadas no arco, assim como as ejetadas de sua superfície, enquanto o tempo necessário para o satélite popular o arco é algumas ordens de grandeza maior que o para esvaziá-lo. Deste modo, Aegaeon não corresponde a uma fonte para o arco ou para o anel G, de modo que o arco do anel G deve desaparecer em poucas décadas. Tais resultados são apresentados no artigo Madeira et al. (2018).

## 6 ARCOS DOS ANEL ADAMS DE NETUNO

Os arcos do anel Adams de Netuno (Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem) foram detectados pela primeira vez por meio de uma ocultação estelar em 1984, sendo redescobertos em 1989 através da análise de imagens obtidas pela sonda espacial Voyager 2 (SICARDY, 1991). Entre os modelos que buscam explicar a aparente estabilidade destes arcos, encontra-se Porco (1991), que propõe que os arcos estariam confinados azimutalmente por uma ressonância de corrotação inclinada (RCI) 84:86 com o satélite Galatea e radialmente por uma ressonância de Lindblad excêntrica 42:43 com o mesmo, explicando suas posições, assim como suas larguras radiais e azimutais.

Entretanto, resultados apresentados em Namouni e Porco (2002) mostram que o sistema não se encontra na ressonância de corrotação proposta anteriormente, sendo mostrado, no entanto, que o sistema pode se encontrar em RCE 42:43 com Galatea caso os arcos possuam 0.002 da massa de Galatea, correspondente a um satélite de gelo puro com 10 km de raio. Uma vez que a precisão de detecção da sonda espacial Voyager 2 é de 6 km, para se encontrarem em RCE, os arcos devem possuir uma grande quantidade de satélites quilométricos, de modo que é pouco provável que estes estejam em ressonância de corrotação com Galatea.

Em Pater et al. (2005) é apresentado que os arcos sofreram queda de brilho e alterações em suas longitudes. Resultados mais recentes apresentados em Showalter et al. (2013) apontam o desaparecimento dos arcos Igualdade e Coragem.

Buscando verificar se os arcos estão nas regiões delimitadas pelas ressonâncias propostas em Porco (1991), a posição central e largura destas (seção 3.1.1; capítulo 3, equações 48 e 83) foram calculadas, utilizando-se os elementos orbitais de Galatea e coeficientes de gravidade ( $J_2$  e  $J_4$ ) retirados de Owen, Vaughan e Synnott (1991). A excentricidade inicial das partículas é de  $3 \times 10^{-4}$ , enquanto a inclinação é nula (RENNER et al., 2014). Os ângulos de libração considerados foram (PORCO, 1991):

$$\phi_{RCI} = 86\lambda - 84\lambda_G - 2\Omega_G \quad (1)$$

$$\phi_{RLE} = 43\lambda - 42\lambda_G - \varpi \quad (2)$$

de modo que o subscrito  $_G$  se refere ao satélite Galatea.

Os resultados obtidos são dados na tabela 10. Uma vez que os arcos estão localizados a 62932.7 km do centro de Netuno (RENNER et al., 2014), verifica-se que estes se encontram dentro da região da RLE 42:43, porém defasados da borda externa da RCI 84:86.

Renner et al. (2014) propõem que o anel Adams seria formado por um conjunto de pequenos satélites coorbitais responsáveis por confinar azimutalmente os arcos. Segundo os autores, estes

Tabela 10 – Semi-eixo maior central e largura das ressonâncias propostas em Porco (1991).

|           | a (km)  | W (km) |
|-----------|---------|--------|
| RCI 84:86 | 62932.4 | 0.5    |
| RLE 42:43 | 62930.8 | 9.0    |

fonte: Autor.

Tabela 11 – Massa e separação angular dos satélites coorbitais.

|                       | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|
| $\theta_i$ (°)        | 0.00  | 48.31 | 59.38 | 72.19 |
| $m_i$ ( $10^{13}$ kg) | 60.0  | 0.54  | 1.17  | 0.66  |

fonte: Renner et al. (2014).

satélites seriam em número de 4, de modo que o mais massivo possuiria massa de  $m_1 = 6 \times 10^{14}$  kg, correspondente a um corpo de gelo puro de raio igual a  $R_1 = 5.2$  km, estando, assim, abaixo da precisão de detecção da sonda Voyager 2 (6 km). Os demais possuiriam raios da ordem de 1 km.

A configuração destes corpos, apresentada pelos autores, foi obtida utilizando o algoritmo descrito em Renner e Sicardy (2004), por meio do qual é possível encontrar configurações estacionárias de satélites coorbitais. Isto é realizado por meio da adição de um termo não-conservativo às equações de movimento do sistema. Devido ao efeito deste termo, os satélites perdem energia, sendo levados para posições de equilíbrio.

Assim, os autores encontraram separações angulares entre os satélites de  $\theta_{32} = 11 \pm 3^\circ$ ,  $\theta_{43} = 12.5 \pm 3^\circ$  e  $\theta_{42} = 23.5 \pm 3^\circ$ , as quais são compatíveis com a dos arcos de Netuno. Os valores encontrados por Renner et al. (2014) são apresentados na tabela 11, de modo que para reproduzir as posições observadas, os arcos Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem devem se encontrar nas faixas  $[40^\circ:48^\circ]$ ,  $[50^\circ:54^\circ]$ ,  $[66^\circ:70^\circ]$  e  $[80^\circ:84^\circ]$ , respectivamente.

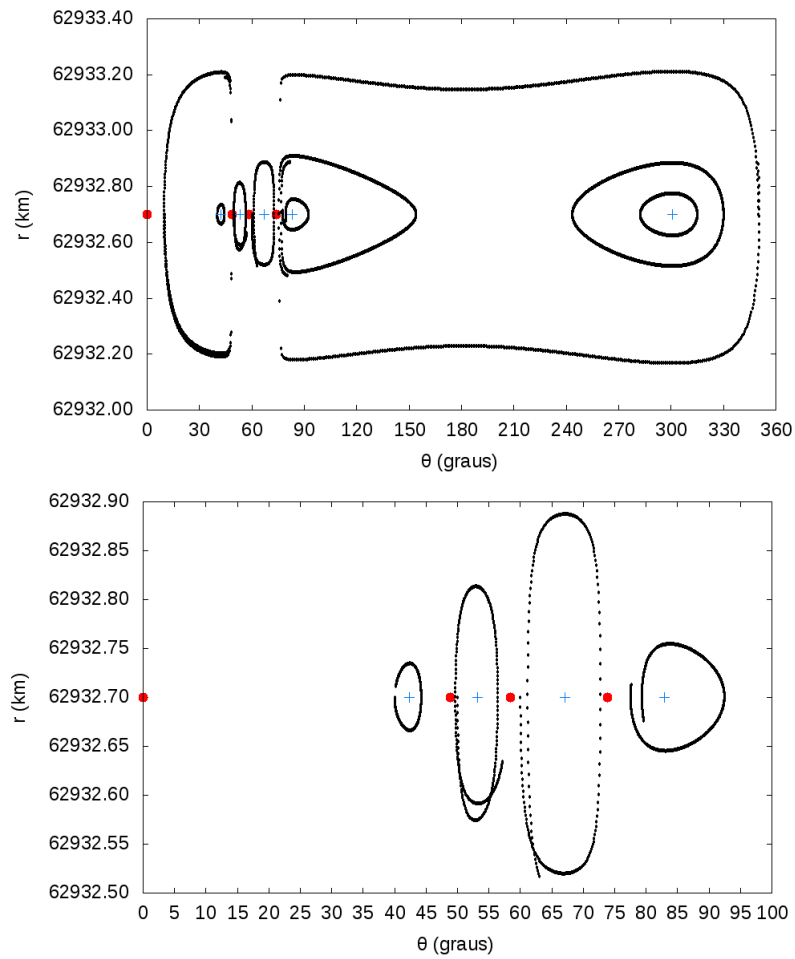
## 6.1 DINÂMICA DOS SATÉLITES COORBITAIS

Buscando verificar o confinamento azimutal gerado pelos satélites propostos em Renner et al. (2014), estes foram simulados em conjunto com Netuno e seus coeficientes de gravidade ( $J_2$  e  $J_4$ ), enquanto Galatea, a princípio, não foi incluído no sistema. De modo dos arcos apresentarem os mesmos elementos especificados em Porco (1991), considerou-se os coorbitais com  $\Omega = 102.20^\circ$  e  $\varpi = 50.82^\circ$ , enquanto o mais massivo foi iniciado com  $\lambda_1 = 207.5^\circ$ . A longitude média dos demais foram escolhidas de modo a manter as separações especificadas na tabela 11.

Com o intuito de determinar os pontos de equilíbrio do sistema, os satélites e um conjunto de partículas coorbitais foram simulados em uma órbita circular, de modo que as últimas foram distribuídas angularmente no intervalo  $[0^\circ:360^\circ]$ , com separação angular de  $5^\circ$ . O sistema foi simulado por 1000 anos.

Uma vez que a partícula apresenta sua máxima ou mínima variação no raio orbital ao passar por um ponto de equilíbrio do sistema (SILVA, 2003), foram verificadas, para todas as partículas, as posições angulares no sistema girante correspondentes aos picos do raio orbital, de modo que os pontos de equilíbrios foram calculados tomando-se a média dos valores obtidos. Como resultado, obtém-se que estes se encontram em  $\theta = 42.33^\circ$ ,  $53.17^\circ$ ,  $67.04^\circ$ ,  $82.93^\circ$  e  $300.69^\circ$ , como pode ser visto na Figura 39, a qual apresenta, no sistema girante, os pontos de equilíbrio do sistema por meio de cruzes e o movimento dos satélites (em vermelho) e de um conjunto de partículas (em preto). Na primeira figura são apresentadas as partículas iniciadas em  $\theta = 10^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $315^\circ$ ,  $330^\circ$  e  $350^\circ$ ,

Figura 39 – Movimento dos coorbitais e das partículas em torno dos pontos de equilíbrio do sistema. Os pontos vermelhos e pretos correspondem aos satélites e às partículas, respectivamente, enquanto os pontos de equilíbrios são as cruzes.



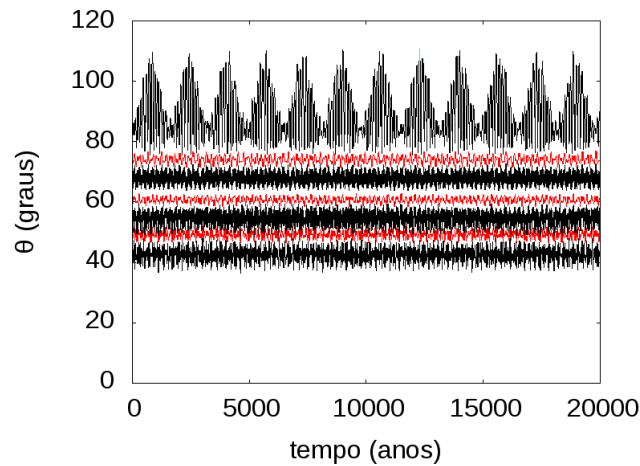
fonte: Autor.

enquanto na segunda estão as iniciadas em  $\theta = 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$  e  $80^\circ$ .

Logo, tem-se que as regiões delimitadas como arcos abrangem os pontos de equilíbrio  $42.33^\circ, 53.17^\circ, 67.04^\circ, 82.93^\circ$ , de modo que os coorbitais confinam partículas azimuthalmente dentro destas regiões. Como o sistema apresenta um quinto ponto de equilíbrio, próximo ao  $L_5$  do coorbital mais massivo, outras configurações para os arcos poderiam ser propostas, como por exemplo, uma no sentido contrário ao considerado ( $S_4$ , Fraternidade,  $S_3$ , Igualdade,  $S_2$ , Liberdade,  $S_1$ , Coragem), entretanto apenas a configuração inicialmente proposta em Renner et al. (2014) possui todos os arcos dentro de uma região azimutal menor que  $40^\circ$ , correspondente a um vínculo observacional.

Incluindo excentricidade ao sistema ( $3 \times 10^{-4}$ ), é esperado que os coorbitais não permaneçam estacionários no sistema girante, mas librando em torno de suas posições iniciais, o que leva os pontos de equilíbrio a apresentarem o mesmo padrão. Entretanto, observa-se que esta não é suficiente para alterar a ressonância das partículas, as quais são confinadas azimuthalmente em posições próximas aos pontos de equilíbrio obtidos anteriormente. Isto pode ser visto na Figura 40, a qual apresenta a variação azimutal dos coorbitais e de um conjunto de partículas representativas por 20000 anos. Devido a excentricidade do sistema, os satélites e partículas apresentam uma variação radial de 35 km,

Figura 40 – Variação azimutal no sistema girante dos satélites coorbitais e de um conjunto de partículas representativas.



fonte: Autor.

correspondente a uma variação menor a variação radial observada para os arcos, de 50 km (PATER et al., 2005).

## 6.2 RESSONÂNCIA DE LINDBLAD EXCÊNTRICA COM GALATEA

Uma vez que os arcos se encontram em RLE 42:43 com Galatea, este satélite foi adicionado ao sistema. Como condições iniciais, utilizou-se o semi-eixo maior, excentricidade e inclinação citados anteriormente, enquanto os elementos angulares foram considerados como  $\varpi_G = \Omega_G = 0^\circ$  e  $\lambda_G = 27.5^\circ$ . Tal valor de longitude média foi escolhido para que Galatea se iniciasse na direção oposta ao coorbital mais massivo, de modo que o sistema se inicie em uma configuração de menor perturbação.

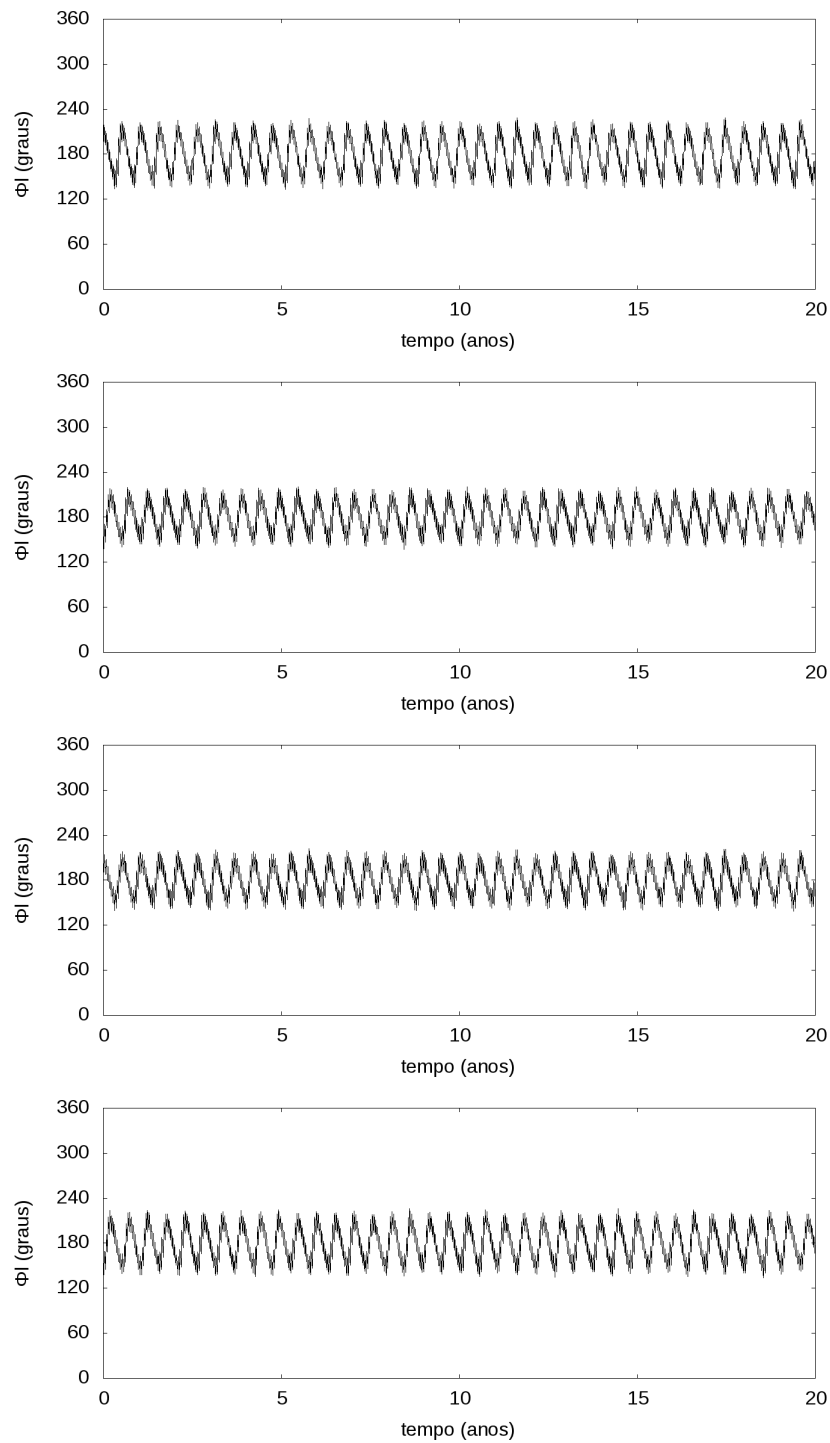
Os ângulos  $\phi_{RLE}$  dos coorbitais são apresentados na Figura 41 enquanto os ângulos  $\phi_{RCI}$  são dados na Figura 42. Conforme mostrado, os coorbitais se encontram em RLE mas não em RCI, uma vez que se encontram defasados em 100 metros da borda externa desta. Devido a ressonância excêntrica de Lindblad, as órbitas dos coorbitais serão excitadas, conforme visto na Figura 43, a qual apresenta a excentricidade do satélite mais massivo. Uma vez que  $\phi_{RLE}$  oscila com mesma amplitude para todos os coorbitais, os demais apresentam variação análoga do elemento.

Para reproduzir os arcos do anel Adams, empregou-se a mesma metodologia utilizada em Renner et al. (2014), consistindo esta em distribuir um grande número de partículas nos arredores das posições angulares  $\theta = 40^\circ, 50^\circ, 70^\circ$  e  $80^\circ$ . Isto foi realizado distribuindo 2000 partículas aleatoriamente dentro de uma faixa de  $1^\circ$  em torno das posições angulares citadas e de 1 km em torno do semi-eixo maior inicial dos coorbitais.

O sistema foi simulado numericamente, primeiramente por 100 anos, sendo após estendido para 1000 anos, verificando-se quantas partículas permanecem confinadas nas regiões delimitadas como arcos. As taxas encontradas são apresentados na tabela 12, juntamente com a porcentagem de partículas em RLE.

Analisando, primeiramente, os resultados encontrados para 100 anos de simulação, tem-se que

Figura 41 – Variação temporal de  $\phi_{RLE}$  para os coorbitais.



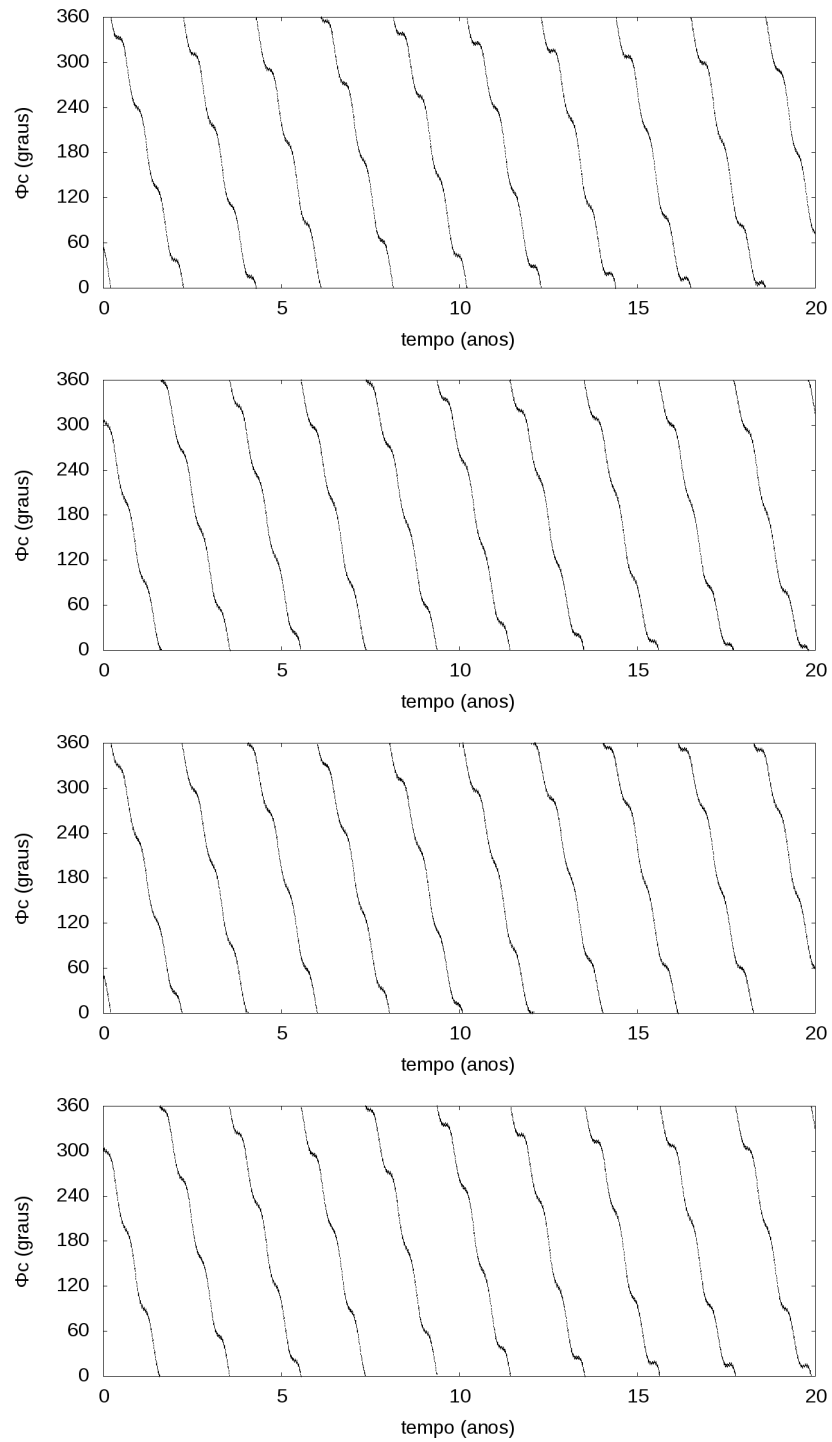
fonte: Autor.

Tabela 12 – Porcentagem de partículas confinadas em cada arco e em ressonância de Lindblad.

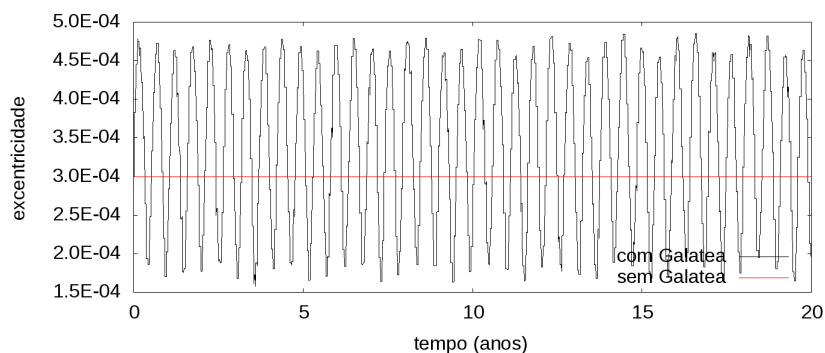
|           | Fraternidade | Igualdade | Liberdade | Coragem |
|-----------|--------------|-----------|-----------|---------|
| 100 anos  | 100%         | 84%       | 95%       | 22%     |
| 1000 anos | 73%          | 35%       | 0%        | 0%      |
| RLE 42:43 | 75%          | 40%       | 0%        | 0%      |

fonte: Autor.

Figura 42 – Variação temporal de  $\phi_{RCI}$  para os coorbitais.



fonte: Autor.

Figura 43 – Variação da excentricidade para o coorbital  $S_1$ .

fonte: Autor.

grande parte das partículas iniciadas nos três primeiros arcos se mantém confinadas, enquanto menos de um quarto se mantém na região delimitada como o arco Coragem. Uma vez que este se encontra na região delimitada pelos satélites  $S_4$  e  $S_1$ , de largura azimutal de aproximadamente  $275^\circ$ , tem-se que as partículas iniciadas neste apresentarão grandes variações azimutais, ultrapassando o limite de  $4^\circ$  do arco. Tal efeito pode ser percebido na Figura 40, na qual a partícula iniciada no arco Coragem apresenta uma variação de  $30^\circ$ , enquanto as demais possuem uma variação menor que  $10^\circ$ . Já para 1000 anos de simulação, vê-se que apenas os dois primeiros arcos se mantêm, enquanto os últimos desaparecem.

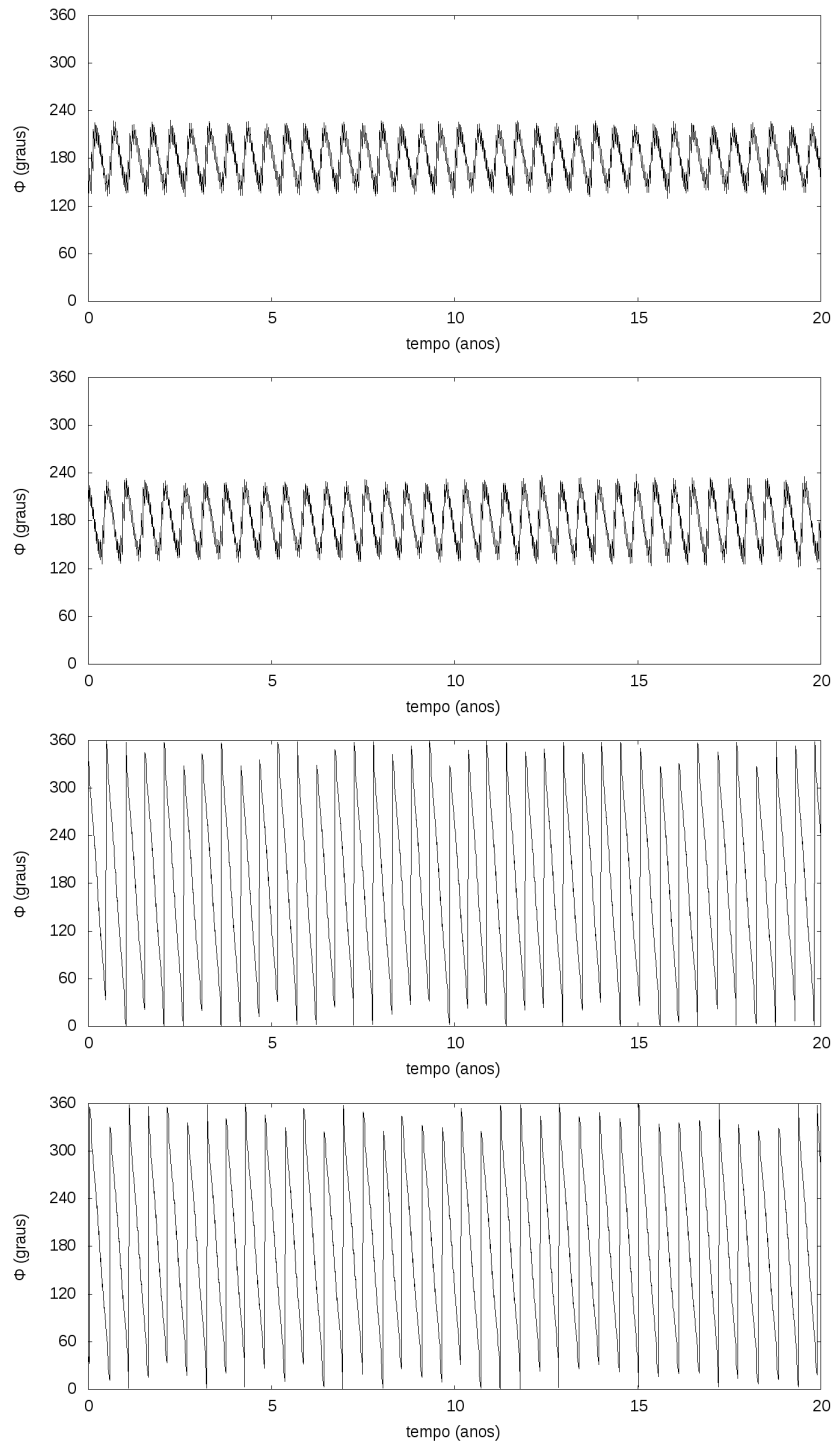
Para se entender tal resultado, na Figura 44 é apresentado  $\phi_{RLE}$  de uma partícula representativa de cada arco, podendo ser visto que as partículas localizadas nos arcos Fraternidade e Igualdade, assim como os coorbitais, têm seus ângulos ressonantes librando em torno de  $180^\circ$ , o que significa que tais corpos apresentarão conjunções com Galatea em seus apocentros, ocorridos em intervalos de tempo aproximadamente constantes. Logo, a órbita (“streamline”) de uma partícula nestes arcos possuirá uma fase aproximadamente constante em relação a dos satélites coorbitais de modo que encontros próximos com estes serão evitados e a partícula permanecerá confinada por um maior tempo.

Já os arcos Liberdade e Coragem são iniciados fora da RLE, de modo que a órbita de uma partícula nestes arcos e dos coorbitais não possuirão uma fase constante e encontros próximos não serão evitados. Isto também pode ser entendido pelo fato das partículas fora da ressonância de Lindblad apresentarem uma menor variação na excentricidade em relação aos coorbitais, de modo que a órbita dos coorbitais e das partículas terão formatos diferentes. Ao ocorrer um encontro próximo, os corpos trocam momento angular e as partículas podem sair do confinamento azimutal, de modo que os arcos Fraternidade e Igualdade sobrevivem por mais de 1000 anos enquanto os arcos Liberdade e Coragem perduram por pouco mais de 200 anos.

Exemplos da evolução das partículas que se iniciam fora da RLE podem ser vistos na Figura 45 e na Figura 46, que apresentam o ângulo ressonante, excentricidade e ângulo azimutal de duas partículas iniciadas no arco Liberdade. Mesmo que iniciada fora da RLE, uma partícula pode ser capturada por esta, passando a apresentar uma excentricidade forçada, que somada a excentricidade livre no momento da captura, culmina em uma excentricidade final maior que quando fora da ressonância.

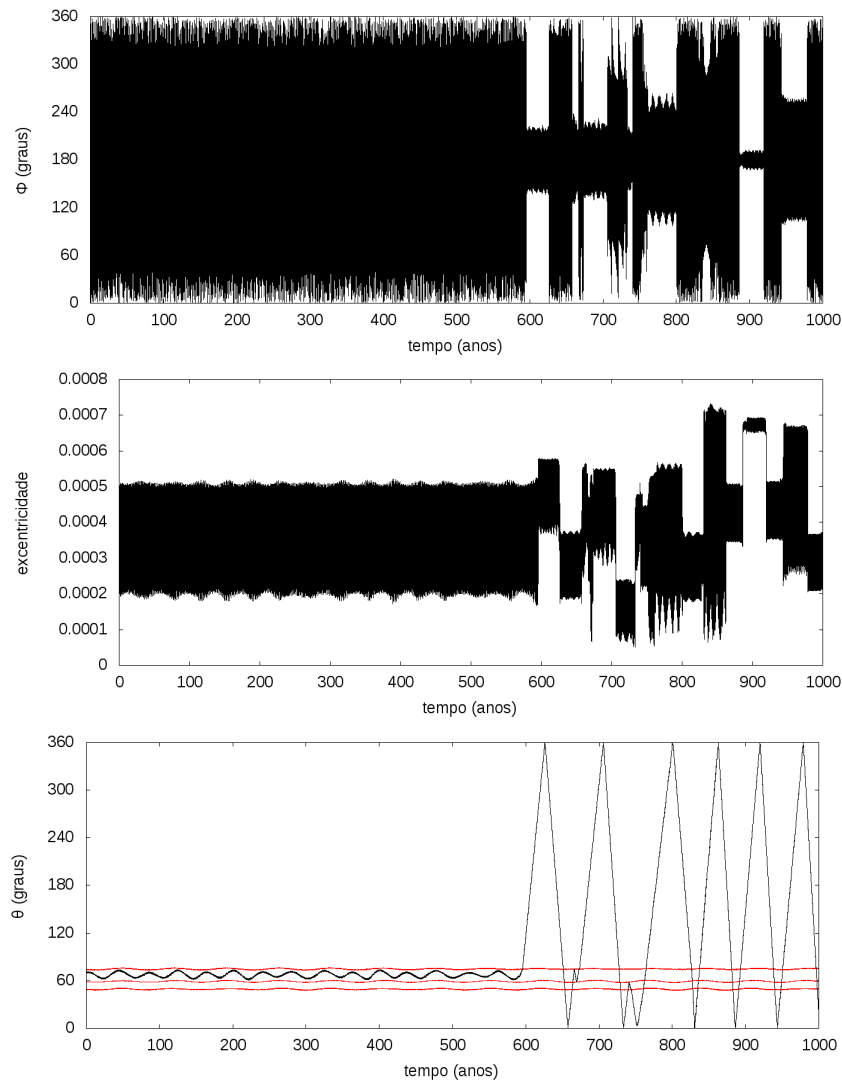
Analisando a evolução dos corpos ao saírem dos arcos, verifica-se que estes permanecem confinados entre os satélites, transitando nas regiões delimitadas por estes, como pode ser visto na

Figura 44 – Variação temporal de  $\phi_{RLE}$  para uma partícula de cada arco: Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem, a partir do topo.



fonte: Autor.

Figura 45 – Variação do ângulo ressonante, excentricidade e ângulo azimutal no sistema girante de uma partícula iniciada no arco Liberdade.



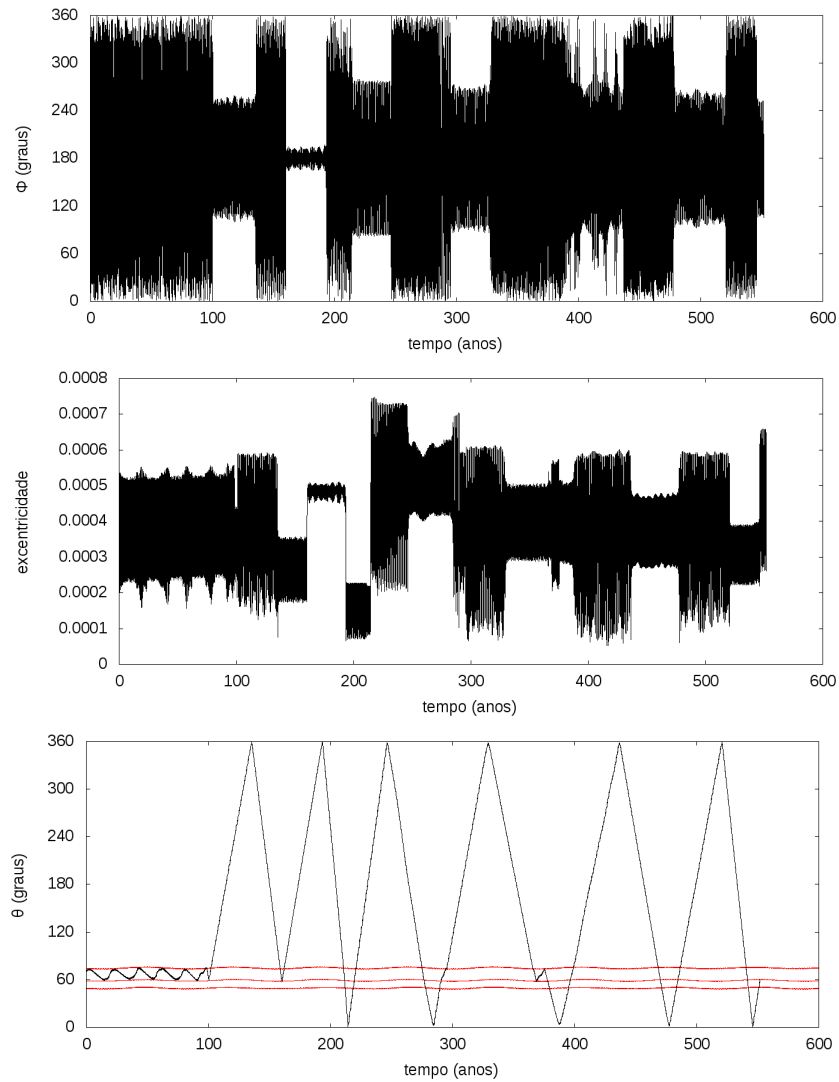
fonte: Autor.

Figura 47. Nesta, é apresentada a variação azimutal de uma partícula iniciada no arco Liberdade e no arco Igualdade, de modo que a primeira destas, ao passar por um encontro próximo com  $S_3$ , é confinada entre  $S_1$  e  $S_2$ , passando, após, por outros confinamentos entre os satélites  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , até colidir com  $S_2$ , enquanto a segunda sai do arco Igualdade ao passar por um encontro com  $S_3$ , sendo confinada por diversos pares dos coorbitais.

Com a intenção de verificar se outros fatores influenciam no maior tempo de sobrevivência dos arcos Fraternidade e Igualdade, foram realizados testes variando parâmetros do sistema. Primeiramente, foram realizadas simulações com partículas iniciadas no arco Fraternidade, porém com argumentos do pericentro dados aleatoriamente, de modo que estas não estejam necessariamente na RLE 42:43.

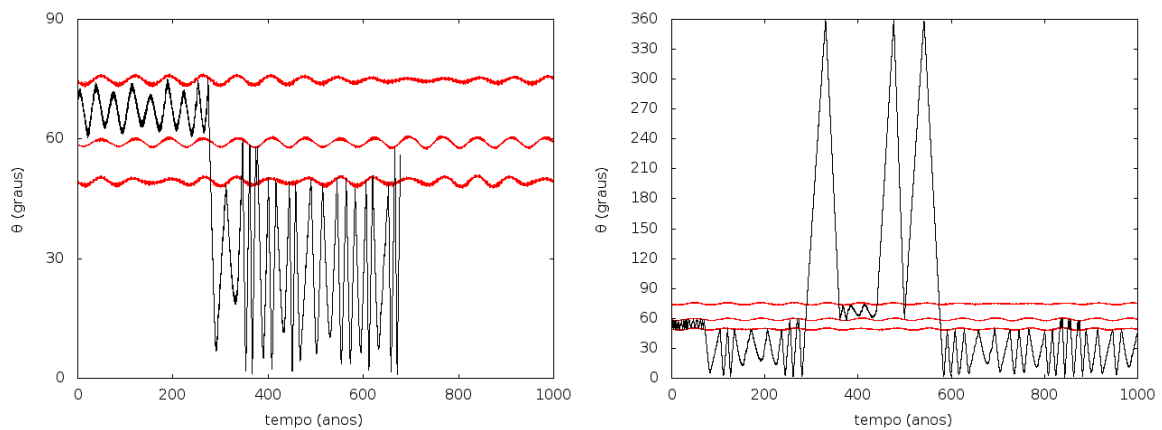
Como resultado obtém-se que as partículas, assim como nos casos dos arcos Liberdade e Coragem, saem do confinamento azimutal após sofrerem um encontro próximo com os coorbitais, possuindo menores tempos de vida no arco. Um exemplo disto é mostrado na Figura 48 a qual apresenta o ângulo ressonante e azimutal de uma partícula no arco Fraternidade, para o caso nominal (em preto), ou seja, com os mesmo elementos especificados em Renner et al. (2014), e para o caso com argumento do

Figura 46 – Evolução temporal de  $\phi$ ,  $e$  e  $\theta$  de uma partícula iniciada no arco Liberdade, a qual colide com o satélite  $S_3$  após 550 anos de simulação.



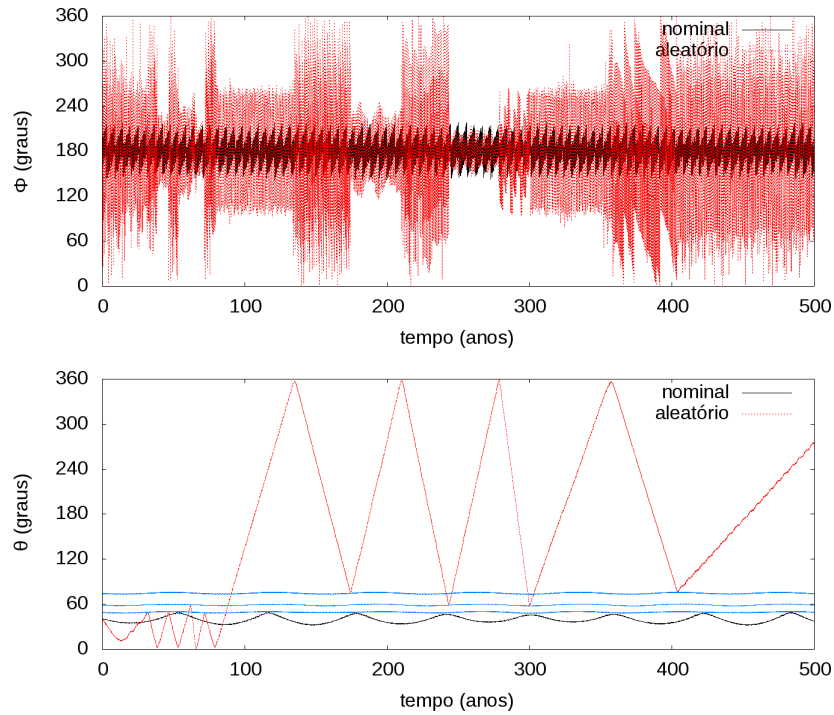
fonte: Autor.

Figura 47 – Evolução temporal do ângulo azimutal de uma partícula iniciada no arco Liberdade e no arco Igualdade. O movimento das partículas se encontra em preto, enquanto dos coorbitais são dados pelas linhas em vermelho.



fonte: Autor.

Figura 48 – Evolução temporal de  $\phi$  e  $\theta$  para uma partícula no caso nominal (em preto) e para o caso com  $\varpi$  dado aleatoriamente (em vermelho). As variações azimutais dos satélites coorbitais são dadas pelas linhas em azul.



fonte: Autor.

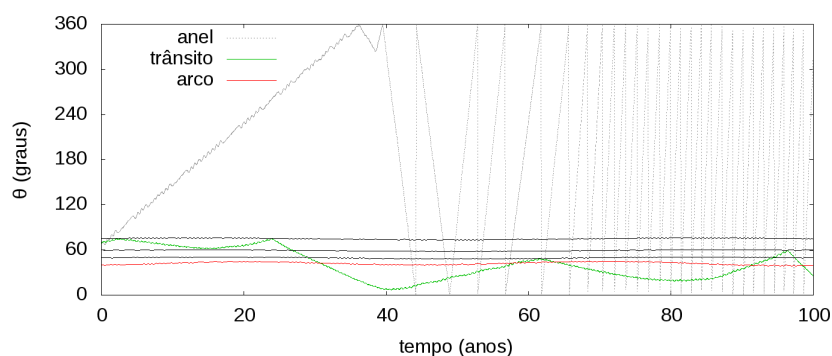
pericentro dado aleatoriamente (em vermelho).

Como pode ser visto, para o caso nominal, a partícula permanece em RLE 42:43 com Galatea e confinada em uma região azimutal de  $8^\circ$ , uma vez que não passa por encontros próximos. Já para o caso com  $\varpi$  aleatório, esta se inicia fora da RLE e se encontra inicialmente confinada pelos coorbitais  $S_1$  e  $S_2$ . Aos 60 anos, após um encontro próximo com  $S_1$  (anteriormente, esta passa por um encontro próximo com  $S_2$  em 30 anos), a partícula passa a ser confinada entre  $S_1$  e  $S_3$ , passando posteriormente por outros encontros, levando-a ao confinamento por outros pares de coorbitais.

Outro teste foi realizado incluindo os satélites coorbitais, um conjunto de partículas e Galatea em uma órbita com inclinação nula. Uma vez que a RCI existe apenas quando o perturbador se encontra em uma órbita inclinada, é possível avaliar por este método qual a influência nos arcos exercida pela proximidade da ressonância. Apesar das partículas e coorbitais apresentarem diferenças em suas evoluções temporais entre os casos inclinado e circular, obtém-se que estas não são significativas, de modo que a proximidade com a RCI não afeta significativamente o sistema. Tal resultado por ser entendido pelo fato do ângulo ressonante  $\phi_{RCI}$  circular rapidamente ( $\sim 2$  anos). Observa-se também que as taxas de partículas que se iniciam dentro e fora da RLE não são alteradas, uma vez que a condição da ressonância de Lindblad depende apenas da frequência angular de Galatea.

Deste modo, conclui-se que a RLE 42:43 é a principal responsável para o fato das partículas dos dois primeiros arcos permanecerem confinadas azimutalmente por um maior período, em comparação aos demais arcos.

Figura 49 – Evolução temporal do ângulo azimutal de três partículas: uma classificada como “arco”, como “trânsito” e como “anel”.



fonte: Autor.

### 6.3 FORÇA DE RADIAÇÃO SOLAR

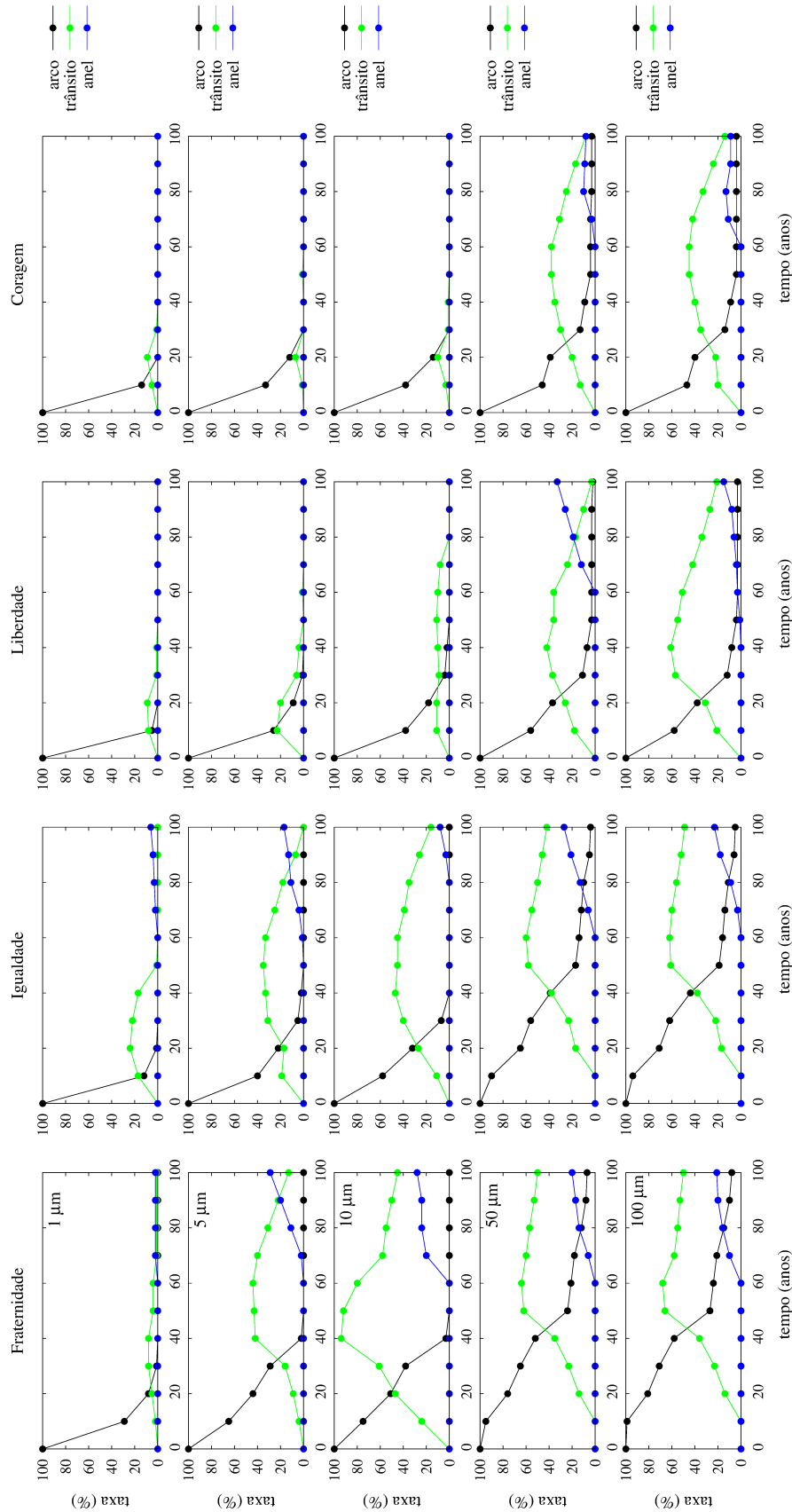
Conforme discutido em Pater e Lissauer (2015), os arcos do anel Adams possuem uma grande proporção de poeira, cujos tamanhos variam de  $1 \mu m$  a  $100 \mu m$ , sendo, desta forma, influenciados pelos efeitos da força de radiação solar. Visto isto, o conjunto de partículas considerado anteriormente foi simulado por 100 anos incluindo os efeitos de tal perturbação, os satélites coorbitais, Galatea, Netuno e seus coeficientes de gravidade ( $J_2$  e  $J_4$ ), tendo-se considerado partículas com raios de  $1 \mu m$ ,  $5 \mu m$ ,  $10 \mu m$ ,  $50 \mu m$  e  $100 \mu m$ . Devido a escassez de dados a respeito da ionosfera de Netuno, o efeito do arrasto do plasma não foi incluído.

O ângulo de libração da RLE 42:43 é dependente do argumento do pericentro das partículas, elemento este afetado pela componente da pressão de radiação. Assim,  $\phi_{RLE}$  rapidamente circula, de modo que estas saem da ressonância e como consequência apresentam maiores taxas de encontros próximos com os satélites coorbitais, impulsionadas pelo aumento da excentricidade devido a pressão de radiação.

Buscando analisar a evolução temporal do sistema, foram contabilizadas as taxas de partículas confinadas nos arcos (“arco”), as que transitam nas regiões próximas (“trânsito”), definidas neste trabalho como as confinadas azimutalmente entre os satélites  $S_1$ - $S_2$  (Fraternidade),  $S_2$ - $S_3$  (Igualdade),  $S_3$ - $S_4$  (Liberdade) e  $S_4$ - $S_1$  (Coragem) e a taxa das partículas que migram para o anel (“anel”), ou seja, correspondentes àquelas que não se encontram azimutalmente confinadas. A Figura 49 mostra um exemplo de cada classe de partícula. Os resultados encontrados são apresentados na Figura 50, na qual as taxas de cada conjunto de partículas são dadas para cada 10 anos de simulação.

Como pode-se ver, os sistemas apresentam, com o tempo, uma queda do número de partículas nos arcos, assim como um aumento das que permanecem em trânsito. Conforme discutido acima, este resultado se deve ao fato da FRS facilitar encontros próximos com os satélites coorbitais, de modo que as partículas saem das regiões delimitadas como arcos (com amplitude de  $8^\circ$  para o arco Fraternidade e de  $4^\circ$  para os demais), porém não do confinamento azimutal devido aos coorbitais, permanecendo em trânsito. É verificada a saída do confinamento azimutal após, principalmente, 60 anos de simulação, quando o número de partículas que vão para o anel aumenta, e consequentemente, o das que permanecem em trânsito diminui.

Figura 50 – Taxa de partículas confinadas no arco (em preto), em trânsito (em verde) e que migram para o anel Adams (em azul). Cada coluna representa um arco (Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem), enquanto cada tamanho está representado por uma linha ( $1\ \mu m$ ,  $5\ \mu m$ ,  $10\ \mu m$ ,  $50\ \mu m$  e  $100\ \mu m$ ).



fonte: Autor.

Uma vez que a intensidade da força de radiação solar é inversamente proporcional ao tamanho do grão, observa-se para menores raios, maiores quedas na taxa “arco”, obtendo-se que as partículas rapidamente colidem com os coorbitais. Para tamanhos maiores, devido a menor intensidade da FRS, a probabilidade de colisão com os satélites é menor, sendo observada uma maior taxa das que permanecem em trânsito. Comparando as taxas para os diferentes arcos, obtém-se que Fraternidade e Igualdade apresentam menores quedas no número de partículas nos arcos, assim como maiores taxas de corpos em trânsito, enquanto as partículas de Liberdade e Coragem rapidamente saem destes e colidem com os coorbitais. Tal resultado se deve ao fato dos dois primeiros destes se iniciarem em RLE 42:43.

Como forma de computar o tempo de vida dos arcos, foi realizada uma média ponderada nas taxas apresentadas na Figura 50. Tomando o perfil de distribuição de tamanhos considerado no capítulo 4 (equação 31), tem-se que o número de partículas em função do raio será (COLWELL; ESPOSITO, 1993):

$$dN = \zeta s^{-3.5} ds \quad (3)$$

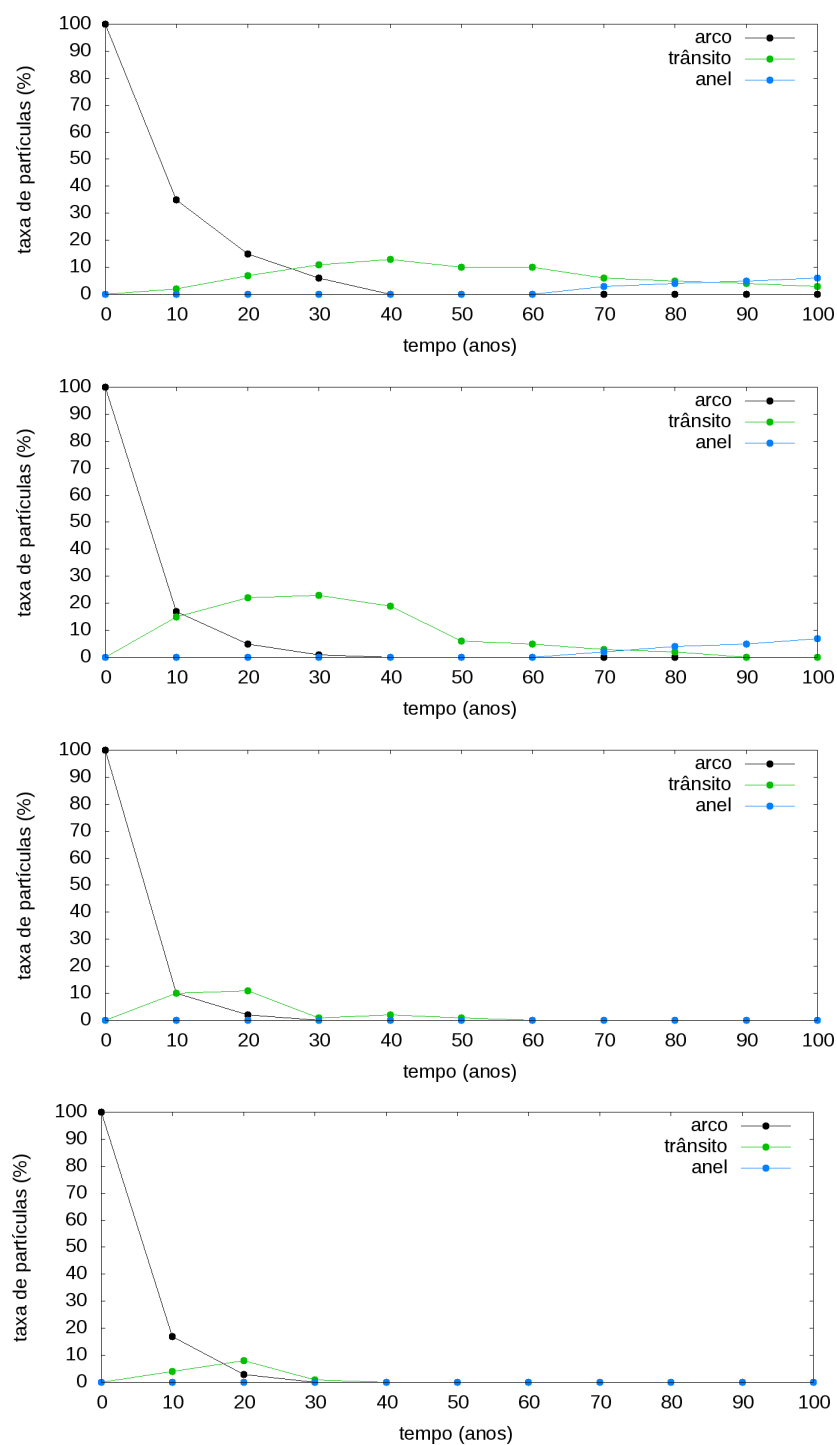
$$\%_T = \frac{\sum_s \%_0(s) N(s)}{\sum_s N(s)} = \frac{\sum_s \%_0(s) s(\mu m)^{-2.5}}{\sum_s s(\mu m)^{-2.5}} \quad (4)$$

Sendo  $\%_T$  a taxa total de partículas e  $\%(s)$  a taxa para cada raio  $s$ .

Os perfis obtidos para os arcos Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem são apresentados na Figura 51. Supondo que o sistema inicial corresponda ao observado pela sonda Voyager 2 em 1989, as taxas de 30 anos de simulação corresponderiam a configuração atual dos arcos. Após este tempo, os arcos Liberdade e Coragem desapareceram, uma vez que praticamente nenhuma partícula permanece nestes ou nas regiões próximas.

Para o arco Fraternidade observa-se que após 30 anos, aproximadamente 8% das partículas permanecem neste, enquanto 1% das partículas permanecem no arco Igualdade. Apesar destas quantidades não serem expressivas, é obtido que parte dos grãos permanecem em trânsito nas regiões próximas. Assim, ambos arcos apresentariam, desde suas descobertas, uma diminuição de brilho e dispersão, explicando a configuração atual dos arcos observada em Netuno (PATER et al., 2005; SHOWALTER et al., 2013). Analisando a evolução temporal das taxas apresentadas na Figura 51, pode-se inferir que assim como o ocorrido com Liberdade e Coragem, o arco Igualdade deve ser esvaziado de partículas micrométricas nas próximas três décadas, enquanto o arco Fraternidade, correspondente ao mais estável entre os observados, sofrerá um maior espalhamento e diminuição de brilho, de modo que nos próximos 50 anos deve ter praticamente desaparecido.

Figura 51 – Taxa total de partículas confinadas no arcos (em preto), em trânsito (em verde) e que migram para o anel Adams (em azul) para os arcos Fraternidade, Igualdade, Liberdade e Coragem.



fonte: Autor.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Arcos planetários são estruturas cuja existência depende de mecanismos que confinem os corpos nestas regiões. Para os arcos localizados em Saturno (arco do anel G, de Anthe e de Methone), verifica-se que estes estão localizados em regiões de ressonâncias de corrotação excêntrica com o satélite Mimas, sendo comum a estes o fato de possuírem uma população de partículas micrométricas e abrigarem uma pequena lua. O intuito deste trabalho foi analisar a dinâmica de partículas micrométricas confinadas por ressonâncias de corrotação excêntrica, verificando como esta é alterada devido a ação de forças perturbadoras e ao efeito gravitacional de pequenos satélites. Tal estudo visou melhor entender a evolução dos arcos planetários e determinar possíveis razões para a existência de apenas um arco em cada região de ressonância, enquanto a teoria permite um número maior destes.

No capítulo 2 os efeitos da não-esfericidade do corpo central foram abordados, sendo definidos os elementos orbitais geométricos, necessários para o entendimento das ressonâncias de corrotação e Lindblad. Também foram abordados teoricamente os efeitos no semi-eixo maior e excentricidade da força de radiação solar e arrasto do plasma, sendo estas perturbações relevantes para a dinâmica de corpos com raio da ordem de micrometros.

A teoria relacionada a ressonância de corrotação foi desenvolvida no capítulo 3, verificando que esta confina as partículas azimuthalmente. Estudo análogo foi realizado, também, para a ressonância de Lindblad, que devido a proximidade com a corrotação afeta a dinâmica dos arcos.

No capítulo 4 foi estudada a dinâmica das partículas localizadas nos sítios das ressonâncias de corrotação excêntrica 7:6 (arco do anel G), 14:15 (arco de Methone) e 10:11 (arco de Anthe) com o satélite Mimas. Foi analisada como a proximidade com ressonâncias de Lindblad afeta o movimento das partículas, encontrando-se que apesar desta excitar as órbitas dos corpos, as partículas permanecem confinadas por mais de 100 mil anos. Na seção 4.1, a influência de satélites localizados no centro dos sítios foi verificada, encontrando-se que as partículas apresentam três regimes distintos de movimento, dependendo do raio do satélite considerado.

Devido à trocas de momento angular com satélites com raios da ordem de metros, as partículas apresentam aumento na amplitude de movimento em torno do ponto de equilíbrio do sistema (primeiro regime), enquanto que para satélites quilométricos, o momento angular trocado é suficiente para que a partícula troque o sentido de movimento no sistema girante ao se aproximar do satélite. Na presença de satélites com raio da ordem de poucos quilômetros, as partículas permanecem se movimentando entre este e a borda do sítio, estando em ressonância de corrotação excêntrica com Mimas e em ressonância de corrotação 1:1 com o satélite (segundo regime). Para satélites com raio da ordem de dezenas de quilômetros, a aceleração gerada por este supera a gerada por Mimas e a partícula passa a ser confinada em uma órbita do tipo ferradura (terceiro regime).

Como consequência dos diferentes regimes de movimento, tem-se que o tempo de vida dos sítios aumenta com o raio do satélite para o primeiro regime, enquanto decresce com o aumento do corpo para o segundo. Com isto, encontra-se que os sítios das RCE 7:6, 14:15 e 10:11 possuem tempos de vida máximo de, aproximadamente, 300, 140 e 250 anos, devido a presença dos satélites imersos.

Na seção 4.2, os efeitos da força de radiação solar foram analisados, encontrando que as alterações no semi-eixo maior geradas por esta perturbação retiram as partículas da ressonância. Ao adicionar os efeitos do arrasto do plasma, o que foi feito apenas para as RCE 14:15 e 10:11, viu-se que as partículas saem ainda mais rapidamente do confinamento. Incluindo satélites imersos nos sítios, encontrou-se o mesmo padrão de aumento e depois queda do tempo de vida dos sítios, entretanto os tempos de vida para estes casos são menores, uma vez que o efeito das perturbações na excentricidade propicia colisões com os satélites.

Na seção 4.3, foram calculadas as taxas de produção de material pelos satélites imersos devido a colisões com projéteis interplanetários, sendo computado o tempo necessário para preencher os sítios de partículas. Como resultado, encontrou-se que estes são, ao menos, uma ordem de grandeza maiores que os tempos de vida obtidos. Foi verificada, na seção 4.4, a possibilidade de um sítio agir como fonte de material para outro. Obteve-se que as partículas, ao saírem de seus sítios de origem, tendem a serem capturadas pela ressonância de corotação em sítios adjacentes no sentido anti-horário. Apesar disto, em poucas décadas, os grãos se distribuem uniformemente entre todos os sítios do sistema.

Deste modo, concluiu-se que os arcos são estruturas transientes. Concluiu-se também que, se cada um dos sítios coorbitais aos arcos planetários possuir um ou mais satélites menores que as luas observadas nos arcos, estes seriam limpos mais rapidamente, supondo um cenário em que todos estivessem preenchidos. Isto poderia explicar a existência de apenas um arco em cada região, apesar desta ser uma hipótese pouco provável, uma vez que seria necessário um mecanismo que explicasse a existência destes satélites.

No capítulo 5 foi estudado o caso específico do arco do anel G, encontrando-se que devido ao efeito da força de radiação solar e do satélite imerso no arco, Aegaeon, as partículas menores que  $10\ \mu\text{m}$  são removidas do sistema em menos de 30 anos. Analisando a dinâmica das partículas ejetadas da superfície do satélite, tem-se que estas permanecem menos de 300 anos na região do arco, de modo que Aegaeon não corresponde a fonte de material para o arco e para o anel.

Já no capítulo 6 foi analisada a dinâmica dos arcos do anel Adams de Netuno, os quais se encontram na região delimitada pela ressonância de Lindblad excêntrica 42:43 com Galatea. Assumindo o modelo de satélites coorbitais apresentado em Renner et al. (2014), obteve-se que os arcos se encontram nos pontos de equilíbrio do sistema de coorbitais, de modo que podem ser confinados azimutalmente por estes.

Ao adicionar os efeitos gerados pela ressonância de Lindblad, obteve-se que os arcos Fraternidade e Igualdade se mantêm em ressonância, enquanto os demais não. Como consequência, as partículas dos arcos Liberdade e Coragem sofrem encontros próximos com os coorbitais, saindo destes. Incluindo a força de radiação solar, verifica-se a saída de partículas de todos os arcos, entretanto àquelas provenientes dos dois primeiros permanecem na região próxima a estes, enquanto as iniciadas nos dois últimos arcos vão para outras regiões. Deste modo, por este modelo, a dispersão observada nos arcos de Netuno pode ser explicada.

## REFERÊNCIAS

- ARAUJO, N.; NETO, E. V.; FORYTA, D. Formation of the g-ring arc. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 461, n. 2, p. 1868–1874, 2016.
- ARAUJO, N. C. S. **Um estudo da dinâmica de captura em ressonância de corrotação**. Dissertação (Mestrado em Física) — Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 66p, 2013.
- ARAUJO, N. C. S. **Um estudo de objetos perturbados e capturados pela ressonância de corrotação e Lindblad**. Tese (Doutorado em Física) — Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 127f, 2017.
- BANASZKIEWICZ, M.; FAHR, H. J.; SCHERER, K. Evolution of dust particle orbits under the influence of solar wind outflow asymmetries and the formation of the zodiacal dust cloud. **Icarus**, Elsevier, v. 107, n. 2, p. 358–374, 1994.
- BORDERIES, N.; LONGARETTI, P. Description and behavior of streamlines in planetary rings. **Icarus**, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 593–603, 1987.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. **Methods of celestial mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 1967.
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 304, n. 4, p. 793–799, 1999.
- CLAUDIO, G.; SUPPES, P. et al. The high-precision computation of the period of the simple pendulum. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 31, n. 2, p. 2701–1, 2009.
- COLWELL, J. E.; ESPOSITO, L. W. Origins of the rings of uranus and neptune: 2. initial conditions and ring moon populations. **Journal of Geophysical Research: Planets**, Wiley Online Library, v. 98, n. E4, p. 7387–7401, 1993.
- COOPER, N. et al. Astrometry and dynamics of anthe (s/2007 s 4), a new satellite of saturn. **Icarus**, Elsevier, v. 195, n. 2, p. 765–777, 2008.
- ELLIS, K. M.; MURRAY, C. D. The disturbing function in solar system dynamics. **Icarus**, Elsevier, v. 147, n. 1, p. 129–144, 2000.
- FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. [S.l.]: Pearson, 2006.
- HAMILTON, D. P. Motion of dust in a planetary magnetosphere: Orbit-averaged equations for oblateness, electromagnetic, and radiation forces with application to saturn's e ring. **Icarus**, Elsevier, v. 101, n. 2, p. 244–264, 1993.
- HEDMAN, M. et al. Aegaeon (saturn liii), a g-ring object. **Icarus**, Elsevier, v. 207, n. 1, p. 433–447, 2010.
- HEDMAN, M. et al. Three tenuous rings/arcs for three tiny moons. **Icarus**, Elsevier, v. 199, n. 2, p. 378–386, 2009.
- HEDMAN, M. M. et al. The source of saturn's g ring. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 317, n. 5838, p. 653–656, 2007.

- KOSCHNY, D.; GRÜN, E. Impacts into ice–silicate mixtures: Crater morphologies, volumes, depth-to-diameter ratios, and yield. **Icarus**, Elsevier, v. 154, n. 2, p. 391–401, 2001.
- KRIVOV, A. V. et al. Impact-generated dust clouds around planetary satellites: spherically symmetric case. **Planetary and Space Science**, Elsevier, v. 51, n. 3, p. 251–269, 2003.
- MADEIRA, G. et al. Production and fate of the g ring arc particles due to aegaeon (saturn liii). **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press on behalf of the Royal Astronomical Society, v. 475, n. 4, p. 5474, 2018.
- MAUK, B. et al. Fundamental plasma processes in saturn’s magnetosphere. In: **Saturn from Cassini-Huygens**. [S.l.]: Springer, 2009. p. 281–331.
- MIGNARD, F. Effects of radiation forces on dust particles in planetary rings. In: **IAU Colloq. 75: Planetary Rings**. [S.l.: s.n.], 1984. p. 333–366.
- MOUTAMID, M. E.; SICARDY, B.; RENNER, S. Coupling between corotation and lindblad resonances in the elliptic planar three-body problem. **arXiv preprint arXiv:1312.5961**, 2013.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999.
- NAMOUNI, F.; PORCO, C. The confinement of neptune’s ring arcs by the moon galatea. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 417, n. 6884, p. 45–47, 2002.
- OWEN, W.; VAUGHAN, R.; SYNNOTT, S. Orbits of the six new satellites of neptune. **The Astronomical Journal**, v. 101, p. 1511–1515, 1991.
- PATER, I. D.; LISSAUER, J. J. **Planetary sciences**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- PATER, I. de et al. The dynamic neptunian ring arcs: evidence for a gradual disappearance of liberté and resonant jump of courage. **Icarus**, Elsevier, v. 174, n. 1, p. 263–272, 2005.
- POPPE, A. R. An improved model for interplanetary dust fluxes in the outer solar system. **Icarus**, Elsevier, v. 264, p. 369–386, 2016.
- PORCO, C. C. An explanation for neptune’s ring arcs. **Science**, The American Association for the Advancement of Science, v. 253, n. 5023, p. 995, 1991.
- PORCO, C. C.; NICHOLSON, P. D. Eccentric features in saturn’s outer c ring. **Icarus**, Elsevier, v. 72, n. 2, p. 437–467, 1987.
- RENNER, S.; SICARDY, B. Stationary configurations for co-orbital satellites with small arbitrary masses. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 88, n. 4, p. 397–414, 2004.
- RENNER, S.; SICARDY, B. Use of the geometric elements in numerical simulations. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 94, n. 2, p. 237–248, 2006.
- RENNER, S. et al. Neptune’s ring arcs: Vlt/naco near-infrared observations and a model to explain their stability. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 563, p. A133, 2014.
- SFAIR, R.; GIULIATTI-WINTER, S. Orbital evolution of the  $\mu$  and  $\nu$  dust ring particles of uranus. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 505, n. 2, p. 845–852, 2009.
- SFAIR, R.; GIULIATTI-WINTER, S. The role of mab as a source for the  $\mu$  ring of uranus. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 543, p. A17, 2012.

SHOWALTER, M. R. et al. The neptune system revisited: New results on moons and rings from the hubble space telescope. In: **AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts**. [S.l.: s.n.], 2013. v. 45.

SICARDY, B. Numerical exploration of planetary arc dynamics. **Icarus**, Elsevier, v. 89, n. 2, p. 197–219, 1991.

SILVA, P. A. d. **Dinâmica de uma partícula coorbital a um sistema de satélites**. Dissertação (Mestrado em Física) — Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 167f, 2003.

SPAHN, F. et al. E ring dust sources: Implications from cassini's dust measurements. **Planetary and Space Science**, Elsevier, v. 54, n. 9-10, p. 1024–1032, 2006.

SUN, K.-L.; SCHMIDT, J.; SPAHN, F. Particle dynamics in the central ringlet of saturn's encke gap. **arXiv preprint arXiv:1510.07730**, 2015.

SUN, K.-L. et al. Dust in the arcs of methone and anthe. **Icarus**, Elsevier, v. 284, p. 206–215, 2017.

THOMAS, P. et al. The inner small satellites of saturn: A variety of worlds. **Icarus**, Elsevier, v. 226, n. 1, p. 999–1019, 2013.