

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

ANA LYDIA SANT’ANNA PERRONE

**DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS
FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL I: CONTRIBUIÇÕES
ACADÊMICAS E REFLEXÕES TEÓRICO-PRÁTICAS**

BAURU

2019

ANA LYDIA SANT`ANNA PERRONE

**DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS
FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL I: CONTRIBUIÇÕES
ACADÊMICAS E REFLEXÕES TEÓRICO-PRÁTICAS**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre a
Universidade Júlio de Mesquita Filho –
Faculdade de Ciências, Campus de Bauru -
Programa de Pós-Graduação em Docência na
Educação Básica, sob orientação da Prof. Dr^a.
Marisa da Silva Dias.

BAURU

2019

P459d	Perrone, Ana Lydia Sant'Anna Desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do ensino fundamental I: contribuições acadêmicas e reflexões teórico-práticas / Ana Lydia Sant'Anna Perrone. -- Bauru, 2019 183 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru Orientadora: Marisa da Silva Dias 1. Pensamento Algébrico. 2. Ensino Fundamental. 3. Histórico Cultural. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ANA LYDIA SANT ANNA PERRONE, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 26 dias do mês de junho do ano de 2019, às 14:00 horas, no(a) Sala de Videoconferência do CENEPP, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. MARISA DA SILVA DIAS - Orientador(a) do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Prof. Dr. IRINEU ALIPRANDO TUIM VIOTTO FILHO do(a) Departamento de Educação / Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente, Profa. Dra. MARIA DO CARMO DE SOUSA do(a) Departamento de Metodologia de Ensino / Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ANA LYDIA SANT ANNA PERRONE, intitulada **"DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: CONTRIBUIÇÕES ACADÊMICAS E REFLEXÕES TEÓRICO-PRÁTICAS" E PRODUTO EDUCACIONAL "PENSAMENTO ALGÉBRICO EM QUADRINHOS"**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Profa. Dra. MARISA DA SILVA DIAS

Prof. Dr. IRINEU ALIPRANDO TUIM VIOTTO FILHO

Profa. Dra. MARIA DO CARMO DE SOUSA



PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DO TÍTULO

A COMISSÃO EXAMINADORA PROPÕE A ALTERAÇÃO DO TÍTULO DO TRABALHO DO ALUNO:

Ana Ly dia Sant'Anna Furione

DE: "Desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do ensino fundamental: contribuições acadêmicas e reflexões teórico-práticas"

PARA:

Desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do ensino fundamental I: contribuições acadêmicas e reflexões teórico-práticas

Bauru, 26 de junho de 2019.



Orientador

MARISA DA SILVA DIAS

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação de mestrado não poderia chegar aonde chegou, sem o precioso apoio de várias pessoas. Em primeiro lugar a minha orientadora, Professora Doutora Marisa da Silva Dias, por toda a paciência, empenho e sentido com que sempre me orientou neste trabalho. Muito obrigada por ter-me corrigido quando necessário, sem nunca me desmotivar.

Aos meus filhos, pela compreensão e paciência durante minhas constantes ausências durante este caminho.

Ao meu marido, Fernando. Por sua força e dedicação, pela espera paciente nos momentos de ausência, por toda sua capacidade de compreensão e confiança em mim; enfim, pela sua presença em minha vida.

À minha família, meu porto seguro e de incentivo incessante, em especial à minha prima Janaina: pela leitura, correção e “palpites” no trabalho.

Aos professores que participaram desta jornada, por suas valiosas contribuições para que este trabalho se concretizasse em especial ao Professor Irineu Aliprando Tuim Viotto Filho pelo seu compromisso e colaboração durante o processo de construção de minha pesquisa, e à Professora Maria do Carmo Sousa por toda sua referência e incentivo de busca.

À Sarah Van Ingen, pela recepção repleta de carinho, mas principalmente de aprendizado, na USF (*University of South Florida*), pela iniciativa firme de colocar-me nas salas de aula e desbravar novas práticas e conhecimentos.

À Pro Reitoria de Pós Graduação da UNESP por possibilitar o estágio na Flórida.

Desejo igualmente agradecer a todos os meus colegas do Mestrado em Docência na Educação Básica, especialmente a Luciane, Letícia, Talita, Patrícia, Renata e Lilian cujo apoio e amizade estiveram presentes em todos os momentos.

Aos meus colegas do Grupo de Pesquisa, em especial à Cybelle, Suzana, Ellen, Nathália pelo companheirismo e apoio em todos os momentos, principalmente nos desequilíbrios.

Um agradecimento especial a minha companheira de jornada, que logo no primeiro dia de ingresso ao Mestrado tornou-se amiga, Ana Paula Minhano, com que troquei muitas alegrias, angústias e aprendizados com muita parceria e carinho.

Às minhas colegas professoras e aos diretores das instituições onde passei nesta jornada de ser professora, por todo aprendizado construído junto.

Finalizo, com minhas amigas de uma vida toda, que se fizeram presentes durante todo o processo de construção desta pesquisa e que acalentaram minhas angústias, mas principalmente, festejam comigo cada conquista.

“Só se pode viver perto de outro, e conhecer outra pessoa, sem perigo de ódio, se a gente tem amor. Qualquer amor já é um pouquinho de saúde, um descanso na loucura.”

(Guimarães Rosa, 2006).

RESUMO

O objetivo da pesquisa é investigar as contribuições que as produções acadêmicas publicadas desde 2014 podem oferecer para subsidiar a construção de um currículo para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. A pesquisa está baseada na metodologia de Análise de Conteúdo cuja coleta foi realizada nos bancos de dados *SciELO (Scientific Eletronic Library Online)*, *BDTD (Biblioteca Digital de Teses e Dissertações)*, *Web of Science* e *Google Acadêmico*, guiada pela pergunta: quais contribuições acadêmicas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental foram publicadas desde 2014? A metodologia resultou em um *corpus* constituído de dez documentos, que geraram a grelha com as categorias: generalização, variável, linguagem e situações de aprendizagem. Frente a cada uma das categorias, a análise sob a base da Teoria Histórico-Cultural, se direcionou às características do pensamento algébrico – com enfoque na variável, generalização e linguagem nas situações de aprendizagem de cada documento a fim de contribuir com maior proximidade ao conteúdo curricular. Foram incluídos também apontamentos e reflexões sobre o ensino de álgebra em documentos norteadores para o ensino fundamental: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e os *Principles and Standards for School Mathematics*, elaborado pelo NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*), o Currículo Comum de Bauru e o *Common Core Standard*. Pudemos verificar que a maioria das contribuições acadêmicas analisadas, exploram situações de aprendizagem centradas na lógica formal, não priorizando o movimento do pensamento algébrico dos estudantes, e sim a reprodução e sistematização deste conteúdo. O produto da pesquisa é uma história em quadrinhos construída com pressupostos da Teoria Histórico-Cultural como complemento à contribuição para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Ensino Fundamental, Histórico-Cultural.

ABSTRACT

The objective of the research is to investigate the contributions that the published academic productions since 2014 can offer to subsidize the construction of a curriculum for the development of algebraic thought in the 4th and 5th years of Elementary School. The research is based on the methodology of Content Analysis whose collection was carried out in the SciELO (Scientific Electronic Library Online), BDTD (Digital Library of Theses and Dissertations), Web of Science and Google Scholar databases, guided by the question: which academic contributions on the development of algebraic thinking of students in grades 4 and 5 have been published since 2014? The methodology resulted in a corpus consisting of ten documents, which generated the grid with the categories: generalization, variable, language and situations of learning. Facing each of the categories, the analysis based on the Historical-Cultural Theory, focused on the characteristics of algebraic thinking - focusing on the variable, generalization and language in the learning situations of each document in order to contribute with greater proximity to the content curricular. We also included notes and reflections on the teaching of algebra in guiding documents for elementary school: the National Curricular Common Base (BNCC), the National Curriculum Parameters (PCN) and the Principles and Standards for School Mathematics, developed by the NCTM (We can verify that most of the analyzed academic contributions explore learning situations centered on the formal logic, not prioritizing the students' algebraic thinking movement, but rather the reproduction and systematization of this content. The product of the research is a comic book constructed with assumptions of the Historical-Cultural Theory as a complement to the contribution to the development of the algebraic thought in Elementary School.

Keywords: Algebraic thinking, Elementary education, Cultural-History.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1-1 – Modo I.....	30
Figura 2.1-2 – Modo II	34
Figura 3.3-1 - Fases de desenvolvimento da linguagem algébrica	34
Figura 4.1-1 – O currículo como processo	40
Figura 5.1-1 – Quadro de Conteúdos a serem trabalhados no 4o ano do Ensino Fundamental	55
Figura 6.1-2 – Quadro de Conteúdos a serem trabalhados no 5o ano do Ensino Fundamental.	56
Figura 7 - Quadro de Conteúdos a serem trabalhados no 7o ano do Ensino Fundamental.	57
Figura 8. Exemplo de material manipulável utilizado para o ensino de Matemática	64
Figura 9- Diagrama do foco de análise das contribuições acadêmicas:	104
Figura 10 - O tamanho do calçado.....	106
Figura 11 - Desenho do pé:.....	107
Figura 12 - Tabela de organização de medidas.....	107
Figura 13 - Representação do Estudante 8.....	108
Figura 14 - Tabela de relação de tamanhos.	109
Figura 15 - Compreensão da relação entre o número do calçado e o comprimento do pé:	110
Figura 16 - Compreensão da relação entre o número do calçado e o comprimento do pé:	110
Figura 17 - Exemplo de validação do modelo obtido.....	111
Figura 18 - Situações-problemas correspondente em três práticas de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental.....	113
Figura 19 - Estratégia escolhida diante da situação-problema na segunda prática de Modelagem Matemática desenvolvida pelos estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental.	114
Figura 20 - Tabela e transcrição do processo de resolução	114

Figura 21 - Transcrição do diálogo de mediação.....	115
Figura 22 - Indício de linguagem pré-simbólica pelo estudante.....	115
Figura 23 - “Calcular usando o dobro”	118
Figura 24 - Exemplo de Estratégia apresentada por uma dupla	119
Figura 25 - Resolução de uma dupla que apresenta maior elaboração na generalização	120
Figura 26 - Resolução apresentada após a discussão coletiva	120
Figura 27 - Transcrição da mediação para elaboração de uma forma de cálculo mais geral	121
Figura 28- Registro apresentado para representação de uma generalização através de um cálculo	121
Figura 29 - Transcrição da mediação para elaboração de uma forma de cálculo mais geral	122
Figura 30 - Expressão da generalização em linguagem matemática	122
Figura 31 - Mediação para a construção de uma expressão simbólica.....	123
Figura 32 - Generalização feita coletivamente	123
Figura 33 – Tarefa João e Maria.....	124
Figura 34 - Registro de alunos aluno participante referente à tarefa João e Maria	126
Figura 35 - Situação Problema	128
Figura 36 - Resposta do estudante 1	128
Figura 37 - Resposta do Estudante de melhor nível	129
Figura 38 - Situação de Aprendizagem: “Agora você cria a regra”	130
Figura 39 - Situação de aprendizagem realizada anteriormente – Tarefa 5	131
Figura 40 - Apresentação das resoluções dos estudantes	132
Figura 41 - Apresentação das resoluções dos estudantes	133
Figura 42 - Exemplo de resolução apresentada pelos estudantes	134
Figura 43 - Quanto custa cada peixe? Atividade de cálculo potencialmente algébrica	136
Figura 44 - Descrição de áudio do momento em que os estudantes realizam tarefa. .	137
Figura 45 - Trecho de descrição do áudio quando os estudantes operam sobre a 4ª linha e sobre as 3 colunas da tarefa, conferindo os resultados encontrados:.....	137
Figura 46 - Transcrição relacionada ao cálculo automático	138
Figura 47 - Manifestações do pensamento algébrico em resolução dos estudantes ...	140
Figura 48 - Representação Semiótica da conversão entre registros.....	140

Figura 49 - Sequência das tarefas	141
Figura 50 - Registro do Estudante 1	142
Figura 51 - Segundo Registro do Estudante 1	142
Figura 52 - Representação do estudante	143
Figura 53 - Transcrição da mediação.....	143
Figura 54 - Expressão que representa a indicação da estudante acerca dos quadros brancos.....	143
Figura 55 - Transcrição de mediação.....	144
Figura 56 - Resolução do estudante para encontrar o termo distante	144
Figura 57 -Transcrição de mediação sobre a resolução do termo distante.	145
Figura 58 - Registro apresentado pelo estudante	146
Figura 59 – Transcrição	147
Figura 60 -Estratégia de resolução	147
Figura 61 - Transcrição da mediação sobre a hipótese do estudante.....	148
Figura 62 - – Situação de Aprendizagem Luzes de Natal	150
Figura 63 - Tabela para organização dos dados.....	150
Figura 64 - Preenchimento da tabela realizado por um estudante.	151
Figura 65 - Regularidades na tarefa “Luzes de Natal”	152
Figura 66- Resposta de estudante	153
Figura 67 - Justificativa do estudante	153
Figura 68 - Justificativa do estudante	154
Figura 69 - Tabela de organização.....	154
Figura 70 - Transcrição de mediação.....	155
Figura 71- Transcrição da mediação.....	155
Figura 72 - Situação de Aprendizagem: Ábaco	158
Figura 73 - Resposta elaborada por um estudante	159
Figura 74 - Resposta incorreta de um aluno.	160
Figura 75 - Resolução do Estudante 21	160
Figura 76 - Resolução do Estudante 34	161
Figura 77 - Resolução do Estudante 14	162

LISTA DE QUADRO

Quadro 1- Exemplo de Linguagem.....	31
Quadro 2 - Recurso ao símbolo	31
Quadro 3 - Problema Exemplificado	Erro! Indicador não definido.
Quadro 4 - Linguagem Simbólica.....	33
Quadro 5 - Sistema de Equações	Erro! Indicador não definido.
Quadro 6 - Resultados da pesquisa SciELO	72
Quadro 7 - Artigos levantados na busca por: Pensamento Algébrico.	73
Quadro 8 - Artigos levantados pela busca por: <i>Algebraic Thinking</i>	73
Quadro 9 - Resultados da pesquisa Web of Science.....	75
Quadro 10 - Web of Science: artigos levantados pela busca por “Algebraic thinking”.	76
Quadro 11 - Web of Science: artigos levantados pela busca por “Algebraic Thinking”and.....	79
Quadro 12 - Resultados da pesquisa Google Acadêmico	80
Quadro 13 - Google Acadêmico: artigos levantados pela busca por “Pensamento Algébrico”.	81
Quadro 14 - BDTD- Artigos levantados pela busca por Pensamento Algébrico	85
Quadro 15 - Refinamento para definição do corpus	89
Quadro 16 - Grelha de análise: Categorias elencadas do corpus	102

LISTA DE SIGLAS

USF - University of South Florida

HEEMa - História e Epistemologia na Educação Matemática.

PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

NCTM - Normas pra a matemática escolar

LDB - Diretrizes e Bases da Educação Nacional

SME - Secretaria Municipal de Educação de Bauru

UNESP - Universidade Estadual Paulista

GT's - Grupos de trabalho

AOE - Atividade Orientadora de Ensino

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	18
1. TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL	22
1.1 O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM MOVIMENTO: A CONSTRUÇÃO LÓGICO- HISTÓRICA DOS CONCEITOS ALGÉBRICOS.....	29
1.2 A PERCEPÇÃO DO ENSINO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA ESCOLA ..	36
2 CURRÍCULOS E O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS NORTEADORES	38
2.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS.....	41
2.2 A PROPOSTA DA BASE COMUM CURRICULAR	44
2.3 PRINCÍPIOS E NORMAS PARA A MATEMÁTICA ESCOLAR – NCTM.....	48
3. O CURRÍCULO MUNICIPAL DE BAURU E O MATHEMATICS FLORIDA STANDARDS: DOCUMENTOS CONTEXTUALIZADORES	50
3.1 CURRÍCULO COMUM MUNICIPAL DE BAURU.....	50
3.2 2 COMMON CORE STATE STANDARDS.....	57
3.3 BREVE RELATO SOBRE O ESTÁGIO NA UNIVERSITY OF SOUTH FLORIDA.....	61
4 AS CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	67
4.1 PRÉ-ANÁLISE.....	68
4.2 EXPLORAÇÃO DO MATERIAL.....	69
4.3 TRATAMENTOS DOS RESULTADOS, INFERÊNCIA E INTERPRETAÇÃO	71
4.4 MAPEAMENTOS DAS CONTRIBUIÇÕES ACADÊMICAS.....	72
4.5 A PESQUISA NO SCIELO	72
4.6 A PESQUISA NA WEB OF SCIENCE.....	74
4.7 A PESQUISA NO GOOGLE ACADÊMICO	80
4.8 A PESQUISA NA BIBLIOTECA DIGITAL DE TESES E DISSERTAÇÕES	84
4.9 SÍNTESE DA CONSTITUIÇÃO DO CORPUS 1	88

5. ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES ACADÊMICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL I.....	104
5.1 O TAMANHO DO CALÇADO	105
5.3 CALCULANDO O DOBRO.....	117
5.4 JOÃO MARIA.....	124
5.5 QUADRADINHOS DE CHOCOLATE	127
5.6 CRIANDO REGRAS.....	129
5.7 QUANTO CUSTA CADA PEIXE?	135
5.8 SEQUÊNCIA PICTÓRICA	141
5.9 LUZES DE NATAL.....	148
5.10 ÁBACO.....	157
5.11 CONSIDERAÇÕES DA ANÁLISE.....	163
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	165
REFERÊNCIAS	169
ANEXO 1 – TABELA DO GOOGLE ACADÊMICO	176

INTRODUÇÃO

Esta introdução apresenta as motivações e reflexões que levaram a autora a estudar o que está descrito adiante. Desse modo, o texto é apresentado na primeira pessoa do singular.

Ser professora foi minha escolha de vida, atuando por 24 anos em escolas de Educação Infantil e Ensino Fundamental na rede particular e, recentemente na rede pública, sempre fui uma professora que gosta e experimenta a pesquisa.

Minha experiência como professora de Ensino Fundamental I, especificamente nos 4º e 5º anos, apresentou-me dúvidas e questionamentos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática em geral, visto que no decorrer da rotina escolar fui percebendo que minha formação inicial, como pedagoga, não era suficiente para ensinar essa disciplina em seus vários contextos.

Em busca de uma solução para minhas inquietações, compreendi que poderia encontrar caminhos e um melhor embasamento num programa de Mestrado Profissional, dado que essa modalidade de estudo e formação tem foco na articulação entre o aprofundamento teórico e a prática docente, pois não gostaria e nem tinha a intenção de afastar-me da prática pedagógica para realização de um projeto.

Fui apresentada a um mundo novo: as visões de ensino da matemática e seus fundamentos. Dessa forma, percebi ainda mais a lacuna que havia sido marcada em minha formação na área da matemática; notei os reflexos quase que imediatos ao preparar minhas aulas, nas interferências e mediações que realizava com meus alunos, e nos diálogos com professores e direção.

Durante o curso tive a oportunidade de aproximar-me da Teoria Histórico-Cultural, não somente por meio das disciplinas “Teoria Histórico-Cultural, Educação escolar e Escola Comunidade” e “Atividade de Ensino e de aprendizagem na Perspectiva Histórico-Cultural”, como também participando do grupo de pesquisa HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática).

Essas oportunidades proporcionaram-me suporte teórico e apresentaram-me aos estudiosos da educação que a concebem como instrumento de transformação e humanização; mesmo sabendo que há um caminho árduo a minha frente, ele ainda se apresenta rico para trilhar neste sentido.

A Teoria Histórico-Cultural direcionou o foco da pesquisa, desafiando-me a interferir na realidade onde atuo, fomentando o desejo de aprimorar a minha prática pedagógica bem como de compartilhar meus novos conhecimentos com meus colegas de trabalho.

Além das disciplinas citadas, tive o privilégio de aproximar-me da “Análise de Políticas Públicas”, que deu suporte à pesquisa no âmbito da dimensão curricular e da implementação das políticas públicas.

Todas essas experiências me proporcionaram ricas reflexões sobre minha prática como professora, além de desafiarem-me a cada dia de vivência em sala de aula. Por todos os motivos apresentados aqui, entendo que minha pesquisa se incorporou à realidade intencionalmente.

O curso de mestrado fez-me ponderar acerca de algumas ações consolidadas no meio acadêmico, momento novo para mim, por exemplo, perceber que a elaboração do trabalho científico exigia o isolamento do pesquisador, o que não foi nada fácil para alguém que até então vivia muito mais intensamente a prática coletiva.

A realização de diversas atividades, nas quais pude compartilhar as ideias que vinha elaborando durante o processo de produção da dissertação, fez parte do turbilhão de acontecimentos vivenciados no período do curso de mestrado em educação.

A cada oportunidade de expor sobre o que estava pesquisando era possível me surpreender repensando aspectos relacionados com a dissertação ou com o campo de atuação enquanto professora-sujeito da contemporaneidade, escrevendo textos reflexivos e alterando minha forma de perceber o mundo a minha volta.

Atualmente reconheço as mudanças em minha postura profissional: na busca pelo conhecimento matemático, na preocupação da organização de ensino, nas mediações com os estudantes, no planejamento de minhas aulas, no olhar direto para a atribuição de sentido e significado na aprendizagem dos meus alunos.

Minha história representa como estamos distantes de uma formação matemática nos cursos de Pedagogia, mas também aponta o caminho da necessidade da busca pessoal, além do que vem sendo oferecido aos professores nos cursos de capacitação.

Quando fui desafiada pela proposta de pesquisa sobre o pensamento algébrico, minha primeira reação foi de desespero, logo veio à minha cabeça as equações e os Xs das questões. “Eu nem sei o que é álgebra” foi minha primeira resposta, que prontamente obtive como resposta: “Não se preocupe, você logo irá saber!”.

Este foi o ponto inicial que eu precisava para que a pesquisa fosse realmente vivida, construída, pensada, repensada num constante e incessante movimento, ora solitário, ora envolvido e permeado por trocas riquíssimas.

Tive oportunidade de participar de diversos eventos, compartilhar um pouco da pesquisa que construíra até então, e paulatinamente a pesquisa vai invadindo também a vida pessoal.

Das leituras iniciais realizadas, devo destacar *Principles and Standards for School Mathematics* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) que apresenta a álgebra como um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade matemática. Esse documento foi essencial para o entendimento da necessidade de continuidade para um ensino que construa uma base para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Os outros documentos que contribuíram para o enriquecimento da pesquisa foram os Parâmetros Curriculares Nacionais, *Common Core State Standards*, Currículo Municipal de Bauru, além de todas as contribuições científicas que foram selecionadas por meio da Análise de Conteúdo.

Valiosa e significativa a contribuição das pesquisas de: Sousa (2004, 2005), Panossian (2014, 2015), Lanner de Moura e Sousa (2004, 2005) e Moura (2015), que deram forma ao que tange a construção do pensamento algébrico na Teoria Histórico-Cultural e à compreensão do movimento lógico-histórico do pensamento algébrico e sua magnitude.

A pesquisa também proporcionou o estágio na USF (*University of South Florida*) que além de colaborar com o estudo do currículo e o desenvolvimento do pensamento algébrico, permitiu que tivesse acesso às salas de aula e analisasse não só como são feitas as mediações de ensino em matemática, mas também que pudesse entrar em contato com os materiais disponíveis nas escolas, os espaços físicos e conhecer os professores, bem como sua formação. Este certamente foi um período muito rico e repleto de reflexões e descobertas, e está apresentado no capítulo III.

Nosso anseio é de que essa pesquisa possa contribuir para o desenvolvimento do conhecimento no campo da Educação Matemática, sobretudo ao proporcionar uma maior ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico nos 4º e 5º anos de escolaridade.

Visando atingir o objetivo geral, e pautados na questão: “quais contribuições acadêmicas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental foram publicadas desde 2014?”, estruturamos o texto em seis capítulos.

O Capítulo I apresenta os referenciais teóricos norteadores deste estudo e suas contribuições dentro da Teoria Histórico-Cultural, bem como o movimento lógico-histórico dos conceitos da álgebra.

No Capítulo II contextualizamos o enfoque presente no desenvolvimento do pensamento algébrico nos documentos norteadores oficiais que se relacionam com a pesquisa, visto que nosso propósito é contribuir com a educação escolar.

O Capítulo III apresenta documentos curriculares locais: o Currículo Comum para o Ensino Fundamental de Bauru e o *Common Core State Standards* que norteia o *elementary school* nos Estados Unidos, que equivale ao ensino fundamental no Brasil. O propósito é conhecer com uma aproximação maior, além dos documentos nacionais, a maneira como a comunidade escolar pensa o desenvolvimento algébrico inserido em uma proposta de ensino. Este capítulo inclui um breve relato sobre a visita à *University of South Florida* e as experiências vividas neste período.

No Capítulo IV está contemplada a metodologia de pesquisa utilizada: a Análise de Conteúdo de Bardin (2009); em que os dados obtidos através desta compreendem as produções acadêmicas publicadas desde 2014, com a finalidade de identificar as contribuições para um currículo no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, assim como proposto pela questão norteadora deste trabalho.

O capítulo V refere-se à análise dos resultados da pesquisa obtidos pelas fases e critérios metodológicos, onde analisamos as situações de aprendizagem pesquisadas no que se refere a como elas apresentam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Por fim, apresentamos no capítulo VI a construção do produto educacional: uma história em quadrinhos voltada ao desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. Para isso, fazemos uma breve discussão sobre o uso das HQs no ensino, apresentamos a criação e desenvolvimento dos personagens e também do enredo, para que esta proposta estivesse em consonância com um trabalho baseado na Teoria Histórico-Cultural.

1. TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Neste capítulo, foi elaborada uma síntese reflexiva referente ao trabalho de alguns dos autores que fundamentam essa pesquisa: L. S. Vigotski (1896-1934), N. Leontiev (1903-1979) e Luria (1902-1977). Nosso intuito é de contribuir através deste aporte teórico para a construção de um ensino humanizado, reflexivo e crítico. Para isso, neste momento, apresentamos conceitos fundamentais da Teoria Histórico-Cultural.

Esta corrente psicológica está fundamentada no materialismo histórico dialético, método pensado por Karl Marx (1818-1883) e Friedrich Engels (1820-1895): surge de um esforço para a superação da dicotomia entre o sujeito e o objeto, baseada na ideia de que o homem é um ser histórico e social, que se desenvolve através de sua participação na coletividade e pela apropriação da cultura.

Pires (1997) esclarece que a dialética, oriunda da Grécia, era apontada como a arte do diálogo, da conversa. Sócrates e Platão utilizavam-se deste conceito para desenvolver sua filosofia.

Uma das correntes do desenvolvimento da dialética encontra-se no método materialista histórico-dialético caracterizado pelo movimento do pensamento, enfatizando as leis que fundamentam a vida do homem em sociedade, isto é, a forma de organização dos homens durante a história da humanidade e as relações que foram construídas durante sua existência.

Saviani (1991, p.11) ao discorrer sobre a lógica dialética afirma que:

Com efeito, a lógica dialética não é outra coisa senão o processo de construção do concreto de pensamento (ela é uma lógica concreta) ao passo que a lógica formal é o processo de construção da forma de pensamento (ela é, assim, uma lógica abstrata). Por aí, pode-se compreender o que significa dizer que a lógica dialética supera por inclusão/incorporação a lógica formal (incorporação, isto quer dizer que a lógica formal já não é tal e sim parte integrante da lógica dialética). Com efeito, o acesso ao concreto não se dá sem a mediação do abstrato (mediação da análise como escrevi em outro lugar ou *'detour'* de que fala Kosik). Assim, aquilo que é chamado lógica formal ganha um significado novo e deixa de ser a lógica para se converter num momento da lógica dialética. A construção do pensamento se daria, pois, da seguinte forma: parte-se do empírico, passa-se pelo abstrato e chega-se ao concreto.

Vigotski desenvolve uma teoria também com base materialista histórico dialética com o objetivo de corroborar com este pensamento: integrando o “homem enquanto corpo e mente ser biológico e social, membro da espécie humana e participante de um processo histórico”

(OLIVEIRA, 1993, p.23). Influenciado pelas ideias marxistas, principalmente de trabalho, afirma que o desenvolvimento das funções psicológicas tem relação intrínseca com as relações do meio social e cultural.

Marx (1996, p. 297) apresenta o conceito de trabalho como: processo entre homem e a natureza, que por meio da ação, regula e controla seu metabolismo com a natureza modificada. Nessa mesma direção a Psicologia Histórico-Cultural valoriza o trabalho no processo de construção do psiquismo humano, pois considera que as funções psíquicas estruturam-se na atividade social e pela apropriação da cultura oriunda do trabalho humano.

Vigotski (2007) indica que o homem, age conscientemente, isto é, tem a capacidade de planejar, elaborar, pensar, construir, refletir sobre o meio, e não o faz de forma imediata, mas sim mediata. Esta atividade do homem denominada trabalho é transformadora de sua realidade e gera desenvolvimento. Nela, o homem se relaciona com a natureza e a transforma para atender suas necessidades, constrói cultura e gera conhecimento. Mas esta transformação da natureza por meio da ação humana, só se concretiza em coletividade, pois o trabalho provém de uma necessidade coletiva de garantia da vida.

Segundo esta vertente, denomina-se trabalho as ações em que o ser humano, diante de suas necessidades, transforma, elabora, constrói e se apropria de cultura, criando novos instrumentos sociais.

Essa cultura acumulada através de gerações média a relação dialética entre a história do gênero humano (sociedade) e a formação do indivíduo (singular), que acontece a partir da apropriação desta cultura.

Leontiev afirma que a singularidade do ser humano, quando comparada aos outros seres da natureza, reside na sociabilidade, afirmando que tudo que há de humano nos homens “[...] provém da sua vida em sociedade, no seio da cultura criada pela humanidade.” (LEONTIEV, 1978, p. 261).

Assim, entendemos que segundo Leontiev (1978) o homem se constitui ser humanizado apropriando-se da cultura produzida pela humanidade e que este processo deve se dar por meio da atividade efetiva e mediada pela comunicação e que motor propulsor desta apropriação histórico-social e cultural é a educação

Rego (2001) afirma que o ponto de partida para que ocorra aprendizagem humana é sua natureza social, e nesta relação – desde o nascimento, e frente a essas trocas entre os sujeitos e sua vida social– os homens agem uns sobre os outros, interagindo com o meio

natural e social. Tudo o que é nos apresentado nos dias de hoje, é resultado das conquistas históricas da humanidade e da complexidade da vida humana.

Toda esta construção não se deu de forma individual, mas sim coletivamente, etapa após etapa e de maneira constante, isto é, num processo transformador, onde a cada nova necessidade gera-se uma transformação que possibilita um novo objeto cultural, que ao ser apropriado, gera nova necessidade, num movimento contínuo de construção humana e social.

Segundo Leontiev (1978, p.267):

As gerações humanas morrem e sucedem-se, mas aquilo que criaram passa às gerações seguintes que multiplicam e aperfeiçoam pelo trabalho e pela luta as riquezas que lhes foram transmitidas e ‘passam pelo testemunho’ do desenvolvimento da humanidade.

Porém, para que ocorra a transmissão desta cultura na sociedade, o homem necessita de duas funções fundamentais: a linguagem e o pensamento.

Sendo assim, a linguagem é condição essencial para a vida em sociedade pois é por meio dela que ocorre a transmissão das ações de uma geração para outra.

Para Luria (1985, p.25), a linguagem é:

“[...] um complexo sistema de códigos que designa objetos, características, ações ou relações; códigos que possuem a função de codificar e transmitir a informação introduzi-la em determinados sistemas [...]”.

É pela linguagem que o sujeito no início de sua vida social organiza o que experimenta e converte para pensamento (linguagem interna), possibilitando que um conhecimento prático (empírico), após as elaborações internas necessárias, transforme-se num conhecimento complexo (teórico).

A linguagem então possui duas funções fundamentais para a aquisição de conhecimento no âmbito escolar: a função social (que é explicitada na transmissão de conhecimentos) e a função particular e individual, que propicia a elevação do conhecimento através do pensamento como também o organiza.

Neste movimento dialético o pensamento se expressa pela linguagem, isto é, ao articular um conhecimento via linguagem do professor, por exemplo, me apropriando de um conceito matemático, pensando a partir desse processo. É o pensamento que se desenvolve na relação com o conhecimento veiculado pela linguagem, seja ela oral, escrita, matemática etc.

Pelas palavras de Luria (2005, p.110):

A função de generalização é a função principal da linguagem, sem a qual seria impossível adquirir a experiência das gerações anteriores. Mas seria errado julgar que esta é a única função fundamental da linguagem. A linguagem não é apenas um meio de generalização; é, ao mesmo tempo, a base do pensamento. Quando a criança assimila a linguagem, fica apta a organizar de nova maneira a percepção e a memória; assimila formas mais complexas de reflexão sobre os objetos do mundo exterior; adquire a capacidade de tirar conclusões das suas próprias observações, de fazer deduções, conquista todas as potencialidades do pensamento.

Linguagem e pensamento são essenciais para o desenvolvimento do ser humano num movimento dialético em que o pensamento se expressa pela linguagem.

Martins afirma que a linguagem é função central nas relações sociais e instrumentadora de outras funções, entre elas o pensamento, isto é, sua primeira função é realizar um intercâmbio através da comunicação e a segunda é servir ao pensamento, ordenando o real e agrupando-o em conjuntos com características gerais, isto é, generalizando.

Sobre desenvolvimento, Martins (2009, p.100) esclarece:

O desenvolvimento se produz por meio de aprendizagens, e esse é o pressuposto Vigotskiano, segundo o qual o bom ensino, presente em processos interpessoais deve se antecipar ao desenvolvimento para conduzi-lo. “Portanto não há que se esperar desenvolvimento para que se ensine; há que se ensinar para que haja desenvolvimento.”.

Neste sentido, o conhecimento não provém de uma experiência própria e individual, mas é adquirido pela assimilação da experiência histórico-social. Assim como as necessidades do homem vão se modificando, ele necessita de respostas cada vez mais complexas, o que o faz produzir conhecimento cada vez mais complexo.

Leontiev (1978) conclui que o desenvolvimento do homem e da cultura, juntamente com a atividade cognitiva, afetiva, motora, psicomotora e social das gerações precedentes é a base da formação do homem. Quando nos apropriamos de um conhecimento, técnica ou processo mobilizamos o pensamento e assim, construímos conhecimento que irão mediar às ações e dirigi-las para novas.

Este movimento de apropriação requer operações como pensar, elaborar e planejar. Materializando-se quando conseguimos reproduzir as propriedades e aptidões historicamente formadas na espécie humana.

Portanto, defendemos que o espaço escolar é o ambiente mais propício para aprender, mediado pelos professores e por todas as relações sociais ali envolvidas.

Para Mello (1999, p.19) se o indivíduo “não tiver uma relação com a cultura, o desenvolvimento tipicamente humano não ocorrerá. Isso significa que a relação entre desenvolvimento e aprendizagem ganha uma nova perspectiva” corroborando com Vigotski de que não é o desenvolvimento que antecede e possibilita a aprendizagem, mas, ao contrário, é a aprendizagem que antecede, possibilita e impulsiona o desenvolvimento.

Segundo Vigotski (2007), a escola é o local onde deve acontecer uma intervenção pedagógica intencional que propicie situações onde o processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos científicos, já construídos pela humanidade, sejam ampliados e compreendidos pelos estudantes, para que, por meio deste conhecimento adquirido, o estudante possa reconstruir e modificar, gradativamente, sua forma de agir e atuar na sociedade.

Sobre a importância da coletividade no processo de ensino e aprendizagem podemos destacar:

[...], portanto, se pergunta de onde nascem, como se formam, de que modo se desenvolvem os processos superiores do pensamento infantil, devemos responder que surgem no processo de desenvolvimento social da criança, por meio da translação a si mesma de formas de colaboração que a criança assimila durante a interação com o meio social que a rodeia. Vemos que as formas coletivas de colaboração precedem às formas individuais da conduta, que crescem sobre a base das mesmas e constituem suas progenitoras diretas e as fontes de sua origem. (VIGOTSKI, 1997, p. 219).

A criança traz em sua bagagem cultural os conhecimentos empíricos vividos e aprendidos no cotidiano, cabendo à escola desenvolver o conhecimento teórico. A escola é o lugar que deve destacar a essência de pensamento humano (compreensão teórica da realidade).

Sforni (2009) nos aponta que o processo educativo acontece na mediação intencional que garanta a relação mediada pelo conhecimento objetivado pelas gerações precedentes e pelos instrumentos físicos e simbólicos construídos pela humanidade. A mediação pode ser entendida como um meio e na prática docente deve ser essencialmente intencional, onde o estudante necessariamente precisa estar em atividade mental constante.

Para Vigotski, mediação é uma interposição que provoca transformações na instituição da imagem subjetiva da realidade objetiva ao disponibilizar os conteúdos simbólicos que lhe

correspondem, enfim, uma condição externa, intersíquica, que, internalizada, potencializa o ato de trabalho, seja ele prático ou teórico.

A mediação deve culminar numa transformação, mediada pelo elemento (signo), que converte a imagem até então sensorial numa imagem dotada de significação. Na escola, esta mediação acontece através da utilização da linguagem e dos signos.

Sobre os signos Martins (2012) esclarece que signo (do latim *signum*) é o elemento que designa ou indica outro; objeto que representa outro; sinal dotado de significação (ex.: as letras ocupando o lugar de sons); elemento sensível de expressão cultural organizativo do comportamento humano. Segundo Vigotsky (1997), o ato instrumental é um ato mediado por signos. O signo, então, opera como um estímulo de segunda ordem que, retroagindo sobre as funções psíquicas, transforma suas expressões espontâneas em expressões volitivas.

Para Martins (2012, p.56), com isso Vigotski afirmou que o real significado do papel do signo na conduta dos indivíduos só pode ser encontrado na função instrumental que assume, ou seja, à medida que os significados se instituem como guias e como possibilidades para a ação à vista de suas finalidades.

Através da linguagem os seres humanos foram muito além dessa forma de representação, e com o uso da palavra como uma representação material do objeto, isto é, a possibilidade de que a palavra “ocupar mentalmente o lugar físico do mesmo, e como conceito, como ideia geral identitária que o caracteriza” (MARTINS, 2012, p.57).

Por isso, Vigotski afirmou a palavra como ‘signo dos signos’ e a linguagem como um sistema de signos apto a operar tanto na comunicação entre os homens quanto na construção do conhecimento acerca do real.

Martins também afirma que os signos são “produtos do trabalho intelectual dos homens que se tornam ‘ferramentas’ ou ‘instrumentos’ pelos quais o próprio psiquismo se desenvolve e opera” (MARTINS, 2012, p.57).

Oliveira (1997, p.33), acrescenta que:

[...] o processo de mediação, por meio de instrumentos e signos, é fundamental para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, distinguindo o homem dos outros animais. A mediação é um processo essencial para tornar possível atividades psicológicas voluntárias, intencionais, controladas pelo próprio indivíduo.

Assim, “[...] a mediação do professor é imprescindível, pois o sujeito não se apropria do significado apenas por estar inserido em ambientes propícios, sejam eles alfabetizadores letrados ou científicos.” (GALUCH; SFORNI, 2009, p.123).

Davídov (1982) defende que o tipo de pensamento desenvolvido nos estudantes está relacionado com a função da escola e sua concepção didática, e faz uma crítica à escola tradicional onde os conhecimentos e habilidades estão baseadas numa dimensão utilitária e empírica, própria da prática cotidiana das pessoas.

Desse modo, o pensamento desenvolvido nesse tipo de escola:

[...] tem um caráter classificador, catalisador e assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade. Tal orientação é indispensável para fazeres cotidianos, durante o cumprimento de ações laborais rotineiras, porém é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo face à realidade. (DAVÍDOV, 1982, p.144).

Considerando esta perspectiva, a escola tem a função social de transmitir o conhecimento historicamente acumulado, e o que se tem visto, corroborando com Davídov (1982), é um ensino baseado no pensamento empírico ou na acumulação de conteúdo, que limita o desenvolvimento do pensamento do estudante. Trata-se de um ensino que fica no campo da superficialidade.

Para que o desenvolvimento do pensamento teórico ocorra é necessário que a criança tenha na escola a oportunidade de ter contato com a apropriação teórica da realidade, oportunizando assim uma atividade de estudo que privilegie uma aprendizagem intencional, organizada e que objetive a transformação qualitativa do sujeito envolvido.

Leontiev (1978) afirma que a principal atividade da criança na idade escolar é a atividade de estudo, aquela que compreende processos de generalização e de apreensão de conhecimento científicos geradores de desenvolvimento do indivíduo.

No tocante à aprendizagem, para que os estudantes possam desenvolver seu pensamento de forma qualitativa, faz-se necessário e imprescindível que haja uma organização de ensino e adequação das atividades que serão desenvolvidas às do pensamento dos estudantes que estarão nelas envolvidos.

Esta é a principal atividade de um educador, fazer a articulação da teoria com a prática que promova ao estudante a atividade de estudo, isto é, ao educador cabe a aproximação cada vez maior dos estudantes aos conceitos de maneira intencional e sistematizada com o objetivo principal de conectar o conteúdo trabalhado com as suas necessidades de aprendizagem e desenvolvimento.

1.1 O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM MOVIMENTO: A CONSTRUÇÃO LÓGICA- HISTÓRICA DOS CONCEITOS ALGÉBRICOS

Neste momento faremos uma síntese sobre o movimento lógico histórico dos conceitos algébricos, no que tange às suas linguagens, que são objeto de estudo da pesquisa. Para isso baseamo-nos nas pesquisas realizadas por Sousa (2004), Lanner de Moura e Sousa (2005), Panossian (2014) e Panossian e Moura (2015) que abordaram a fundo as formas de pensamento, linguagem e a formação de conceitos registrados ao longo da história da álgebra.

Isto se torna relevante no sentido que nos indica Panossian e Moura (2015, p.2):

O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos revela fundamentos para constituição do objeto de ensino da álgebra possibilitando a análise de forma crítica de situações e ações de ensino de álgebra, visando a formação do pensamento teórico dos estudantes.

Kopnin (1978) esclarece-nos que:

O histórico consiste no processo de mudança do objeto, nas etapas têm de seu surgimento e desenvolvimento. O lógico é o meio pelo qual o pensamento realiza esta tarefa no processo de reflexão sobre o histórico, de forma que o lógico reflete os principais períodos da história do objeto. Pensar o conceito de determinados objetos envolve pensar “a confluência, a síntese das mais diversas idéias, o resultado de um longo processo de conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 191)

O movimento lógico-histórico nos permite entender que as abstrações dos conhecimentos e conceitos matemáticos se processam a todo instante em nosso pensamento e estão em constante transformação não linear, e este entendimento é fundamental para que o professor não faça de seu plano de trabalho uma linearidade fragmentada, mas sim uma constante de movimentos, sem uma única verdade.

Ressaltamos neste caso que os autores citados revelam a importância da história e da filosofia da matemática para a fundamentação da análise do ensino de álgebra, e não como objeto de ensino a ser utilizado em sala de aula, diretamente aos estudantes.

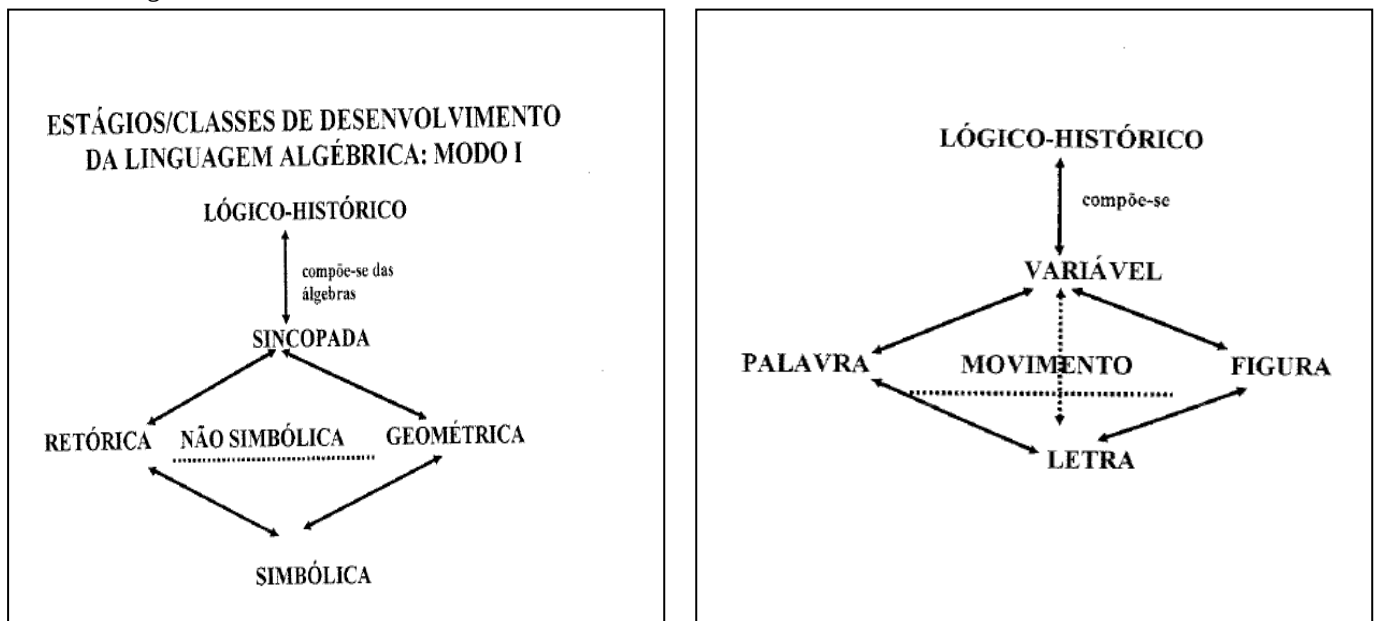
Portanto, está breve síntese justifica-se no sentido de fornecer subsídios para uma fundamentação teórica para os professores que constituirão as situações de ensino e aprendizagem para um desenvolvimento do pensamento algébrico de seus estudantes.

Com base nos autores referenciados, citamos dois modos diferentes de apresentar o processo lógico-histórico do pensamento algébrico: a) Modo I – constituído pela contribuição das civilizações no que se refere à criação da álgebra; b) Modo II – caracteriza o pensamento

algébrico a partir do aspecto formal dos conceitos algébricos elaborados a partir do século XIX.

- a) Modo I: a figura 1.1-1, elaborada por Sousa (2004) apresenta o Modo I que sintetiza o lógico- histórico da linguagem algébrica composta das álgebras não simbólica e simbólica.

Figura 1.1-1 – Modo I



Fonte: Sousa (2004, p.115)

As linguagens algébricas são consideradas um fenômeno particular que constituem a álgebra, isto é, a forma como se “faz” o pensamento algébrico. As diferentes linguagens alcançadas pela experiência humana são: a retórica, sincopada, geométrica e simbólica. Esta divisão da linguagem foi elaborada no século XIX por Nesselman (1811-1891).

Na linguagem retórica, no ponto de vista temporal apresenta-se anteriormente a Diofanto e utiliza-se de números e palavras que eram suficientes para representar as expressões em problemas específicos, bem como resolvê-los; são exemplos a área e o perímetro, era muito utilizada pelos sumérios, babilônicos e gregos (Baungart, 1992, apud Panossian, 2014).

Segundo Sousa (2004, p. 104) a retórica simbolizou a primeira “representação do desconhecido de quantidades”. Nessa fase, segundo Eves (1997, p.206) “os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos” (apud Sousa, 2004, p.106).

Para darmos uma ideia do que seria a linguagem retórica, criamos o exemplo que segue:

Quadro 1- Exemplo de Linguagem

Vou gastar 30 reais na festa junina da escola, <i>lala</i> é o gasto que vou ter para brincar nas argolas e <i>pepe</i>, para gastar na pescaria. Quantas vezes brincarei em cada jogo dada a tabela de preços:	
PRODUTO	VALOR
PESCARIA	5.00
ARGOLA	3,00
CAIXA SURPRESA	2,00
MILHO VERDE	1,50
BOLO	2,00

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

A solução poderia ser assim representada:

Quadro 2 - Solução

Lala é 15 reais e *Pepe* também, assim, iria 3 vezes na pescaria e 5 na argola.

Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Aqui as variáveis são as palavras *lala* e *pepe*, porém, com a necessidade requerida pelo aumento de complexidade das questões a serem resolvidas, apresentadas no cotidiano, foram necessárias formas cada vez mais generalizadas para resoluções algébricas.

É Diofanto (nasceu e viveu entre 150 e 300) que promove essas mudanças na forma da álgebra e gera avanços no sentido de utilizar simbolismos e abreviaturas de palavras que iriam representar os objetos; introduzindo assim a notação sincopada, possibilitando a geração de expressões e assim, alguns métodos de resolução.

Para Fraile (1998, p.12), sobre linguagem sincopada podemos entender: “o passo intermediário entre a resolução retórica, com língua ordinária, dos problemas e a utilização de símbolos precisos e de aceitação universal”.

É pensar os conceitos algébricos em conexão ao objeto número, enquanto unidade. Lanner de Moura e Sousa (2005, p.15) corroboram afirmando que:

Através de uma palavra, aritmo, Diofanto resolve problemas que envolvem incógnita. A palavra escolhida por Diofanto está associada ao número, representa o próprio número, aritmo. Diofanto reconhece, na incógnita, o pensamento numérico. Ao solucionar problemas, desprende-se do numeral físico, porém, ao criar uma palavra que represente o desconhecido, a incógnita, faz questão de nos avisar que a incógnita, o desconhecido, representa um número. Assim como o zero, a palavra aritmo guarda o valor de uma quantidade desconhecida.

Com necessidades mais complexas se apresentando, já que a álgebra não somente estava sendo utilizada nas questões cotidianas, mas também, em questões mais profundas relacionadas à ciência matemática, houve a necessidade de gerar um método geral que dê conta de resolver a maior parte dos problemas, o que avulta ainda mais as fragilidades da sincopação, que apesar de representar grande avanço, só consegue representar grandezas numéricas por meio de abreviaturas, mas não consegue constituir um método geral na resolução dos problemas.

A linguagem geométrica foi elaborada pelos gregos em um contexto onde predominava a “degradação do número, o horror ao infinito e o horror ao movimento” (CARAÇA, 1998, p. 78, apud SOUSA, 2004, p.108). Nesta linguagem as formas geométricas eram a sustentação da representação.

Sousa (2004, p.109) exemplifica que a álgebra geométrica utiliza-se do segmento de reta para realizar as operações de cálculo (adição, subtração, multiplicação, divisão) isto denota a primazia dos objetos geométricos perante as representações matemáticas.

Nas palavras de Lanner de Moura e Sousa (2005, p.17):

A geometria estava descolada da aritmética. Nesse tempo, as verdades eram representadas a partir das formas. Há o primado da figura em relação ao número. A geometria se distingue pelo esforço em criar, a partir das necessidades científicas, “uma teoria matemática geral adequada tanto para os números racionais como para as grandezas irracionais”. Acreditava-se que as grandezas geométricas eram muito mais completas do que o conjunto dos números racionais.

A linguagem simbólica apresenta a possibilidade de um sistema de sinais que represente todas as formas de operações através do uso de símbolos, sem a necessidade de referenciar-se aos objetos concretos ou explicar com as palavras.

Assim, a álgebra simbólica representa a síntese de um longo processo histórico humano. Segundo Lanner de Moura e Sousa (2005), considera-se a álgebra simbólica como terceiro e último estágio, onde há o uso da letra para significar o que era dado, como também para a quantidade incógnita (KIERAN, 1994 apud LANNER de MOURA e SOUSA, 2005). Através dos símbolos, a álgebra pode manejar toda classe de problemas em um só episódio de raciocínio (KLINE, 1998 apud LANNER de MOURA e SOUSA, 2005).

Retomando o problema apresentado numa linguagem simbólica, seria elaborado e resolvido da seguinte forma:

Quadro 3 - Linguagem Simbólica

Considerando x e y , respectivamente, *lala* e *pepe* a equação ficaria assim:

$$x + y = 30$$

Os valores possíveis para x e y dada a tabela de preços apresentada só pode ser

$$x=y=15$$

Embora haja infinitas soluções no conjunto dos números reais.

Fonte: Elaboração da autora

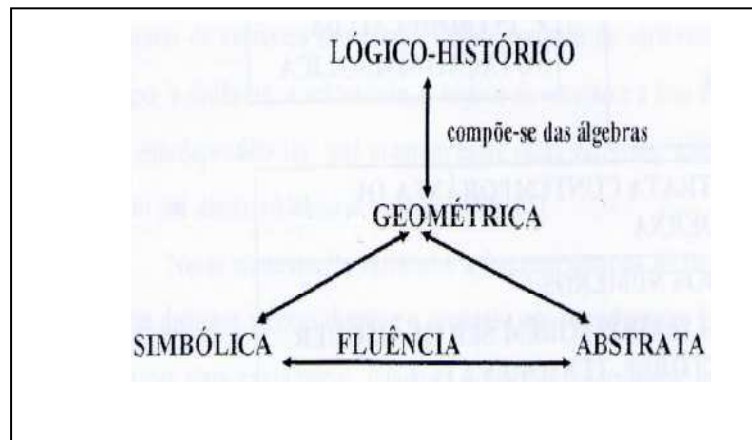
A álgebra simbólica representou uma mudança decisiva no pensamento conceitual da época do Renascimento, segundo Sousa (2004). A partir da álgebra simbólica, foi introduzida a elaboração de fórmulas para solucionar questões inerentes às necessidades humanas.

b) Modo II

Este modo caracteriza a organização do contexto histórico do pensamento algébrico que segundo Socas *et al.* (Socas *et al.*, 1996 apud Sousa, 2004) desenvolveu-se por meio de três fases: álgebra geométrica, simbólica e a álgebra abstrata, contemporânea ou moderna.

A figura a seguir, apresenta o Modo II retratando o aspecto formal dos conceitos algébricos elaborados a partir do século XIX. (Figura 2.1-2)

Figura 2.1-2 – Modo II



Fonte: Sousa (2004, p.123)

Segundo Sousa (2004, p. 124) “[...] a criação de uma matemática abstrata coincide com a criação da álgebra abstrata. O concreto do conteúdo da álgebra abstrata é o formal dos conteúdos da álgebra geométrica e da álgebra simbólica.” Ainda, de acordo com a autora, não há preocupações com a palavra e o desenho, mas sim com a geometria de Euclides e com a variável-letra de Viète.

Figura 3.3-1 - Fases de desenvolvimento da linguagem algébrica

FASES DE DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA: MODO II

(Socas et al, 1996)

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA > INVENÇÃO GRADUAL DOS SÍMBOLOS > RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES	ÁLGEBRA SIMBÓLICA > VIÈTE (1540-1603) > INTRODUÇÃO DA NOTAÇÃO SIMBÓLICA
ÁLGEBRA ABSTRATA CONTEMPORÂNEA OU ÁLGEBRA MODERNA > PRESCINDE DOS NÚMEROS; > OBJETOS UTILIZADOS PODEM SER QUALQUER (MATRIZES, VETORES, TENSORES ETC.)	

Fonte: Sousa (2004, p.124)

Esta figura nos apresenta a visão de que o pensamento algébrico passou pelas seguintes fases: geométrica, simbólica e abstrata contemporânea.

A fase geométrica envolve o período de 1700 a.C. à 1700 d.C., onde ocorrem gradualmente as invenções dos símbolos e equações; a álgebra desenvolvida pelos gregos (300 a.C.) é denominada de geométrica por ser embasada em métodos geométricos para resolução de equações.

Numa outra etapa, juntamente com Viète (1540-1603), introduz-se a notação simbólica; e com Descartes (1596-1650) onde a álgebra se converte na ciência dos cálculos simbólicos e das equações.

Até a metade do século XIX era considerada a ciência da equação e preocupava-se na resolução de equações algébricas.

Num terceiro momento, apresenta-se a álgebra abstrata contemporânea ou álgebra moderna. Sousa (2004) nos aponta que apesar de haver discordância entre teóricos e historiadores sobre a álgebra, todos concordam que o termo foi assimilado nas diversas civilizações.

Segundo Eves (1997) a partir da segunda metade do século XVII a álgebra simbólica começa a impor-se como um conhecimento científico alavancando a evolução do conhecimento matemático. (apud SOUSA, 2004, p.122), mesmo assim, a retórica e as figuras ainda estão presentes.

Este modo de entender o processo lógico-histórico baseia-se num aspecto formal dos conceitos que foram elaborados a partir do século XIX.

Sobre a álgebra abstrata, a autora afirma que surge no movimento da matemática abstrata onde não há ênfase na palavra nem no desenho, mas sim na geometria de Euclides e com variável de Viète.

Por tudo isso, podemos dizer que a necessidade humana, suas superações e avanços são presentes e enxergados no percurso lógico histórico da álgebra bem como todas as contribuições para as resoluções não só dos problemas cotidianos, mas também das dúvidas na ciência.

1.2 A PERCEPÇÃO DO ENSINO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA ESCOLA

Na Teoria Histórico-Cultural, e levando como referência a definição de Caraça, Sousa (2004) nos convida a pensar que pensar algebricamente é pensar o número sem o numeral, pensar as quantidades sem a representação e com isso deve-se basear na questão da variável.

Caraça faz esta distinção por entender que o número é uma ideia de quantidade e numeral é a representação, isto é, para o autor pensar algebricamente é pensar as quantidades sem a representação.

Ainda na perspectiva do autor, a variável: “[...] é afinal, o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela”. (1952, p. 127).

Além disso, Sousa (2004) aponta a importância dos nexos conceituais da álgebra (fluência, variável, campo de variação) como elementos necessários para uma melhor compreensão dos conceitos algébricos.

Esses nexos conceituais consideram o movimento do surgimento da álgebra e possibilitam que o estudante se aproprie do pensamento algébrico e dos conceitos nele inseridos

Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 121) esclarecem que:

Esses conceitos, aos quais estamos denominando de nexos conceituais da álgebra, constituem o substancial, o movimento do pensamento algébrico, tendo em vista a busca da verdade relativizada. Fundamentam as diversas álgebras, elaboradas estruturalmente pelos matemáticos das diversas civilizações, de tempos em tempos, no intuito de descrever, de formalizar os diversos movimentos presentes no mundo no qual estamos inseridos.

Sendo assim podemos dizer que o nexo conceitual faz uma intermediação de ligação entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens do conceito (SOUSA, 2004).

A fluência nos permite compreender as relações das constantes transformações da realidade, a percepção do movimento da realidade e dos conceitos (no caso, a álgebra) para compreensão da configuração de como este conceito se apresenta na atualidade.

A variação, segundo Panossian (2014), nos remete à criação de diversos campos numéricos, ou seja, o campo de variação, como uma necessidade das diferentes civilizações, possibilitando a garantia de fluência do movimento de controle de quantidades:

Consideramos que a qualidade desses campos numéricos se alterava em um movimento de evolução, no sentido em que sua essência não se modificava, mas se modificavam outras qualidades. É o que acontece, por exemplo, com a necessidade da criação de números que podem ser representados na forma de razão, os quais avançam de forma gradativa modificando a qualidade do número. Ou ainda com a organização de um campo de números inteiros, em que a quantidade negativa adquire significado (PANOSSIAN, 2014, p. 91).

Num ensino preocupado com o desenvolvimento do pensamento algébrico e pautado na Teoria Histórico-Cultural, a pesquisa de Sousa, Panossian e Cedro (2014) apontam que:

É necessário então estudar o movimento histórico do conhecimento algébrico e manter o equilíbrio com o seu movimento lógico, pois não se objetiva, aqui, apenas considerar a contribuição de forma aleatória destes elementos, histórico e lógico, para a formação psíquica dos sujeitos, mas sim para a formação de sujeitos sociais, a fim de se humanizar, por meio dos conhecimentos, incluindo-se aí os matemáticos. (SOUSA, PANOSSIAN, CEDRO, 2014, p.44).

Visto isso, o pensamento algébrico então não é único, mas está em constante busca do objeto da ciência de criar, gerar novas interpretações; além de não ser teoria pronta, mas moldável, propiciando o estudo, a aprendizagem e elaboração de novas leis.

Diante disso, podemos perceber quão complexa é a atividades do professor para o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus estudantes. Que precisa organizar a atividade de ensino de seus estudantes baseando-se nos dos nexos conceituais, numa total e complexa intencionalidade.

2 CURRÍCULOS E O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS NORTEADORES

Neste capítulo será abordado o currículo e suas concepções, discorreremos sobre o ensino do pensamento algébrico presente nos seguintes documentos norteadores da educação: Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular e os *Principles and standards for School Mathematics*.

Salientamos que não faremos uma análise aprofundada neste momento, por não ser nosso objeto principal de pesquisa, mas sim alguns apontamentos baseados nas leituras e investigação no processo de construção desta dissertação, pela proximidade pretendida do nosso produto final, mas também para destacarmos em um único texto como o pensamento algébrico está sendo requerido para o ensino, pelas políticas públicas, com vistas a contribuir para futuras análises.

Curriculum é uma expressão latina significando pista ou circuito, tinha ressonâncias similares com “ordem como sequência” e “ordem como estrutura” (HAMILTON, 1992, p.10).

Sacristán e Gómez (2000) afirmam que currículo vem da palavra latina *currere*, um percurso a ser atingido. Segundo o dicionário Houaiss (2001, p.) currículo é definido como “programação de um curso ou de matéria a ser examinada.”.

Podemos complementar também a definição de Veiga-Neto ao afirmar que:

Curriculo é uma construção social do conhecimento, pressupondo a sistematização dos meios para que esta construção se efetive; a transmissão dos conhecimentos historicamente produzidos e as formas de assimilá-los, portanto, produção, transmissão e assimilação são processos que compõem uma metodologia de construção coletiva do conhecimento escolar, ou seja, o currículo propriamente dito. (VEIGA-NETO, 2002, p.7).

Desta forma, “o currículo é uma determinação da ação e da prática, assim como o são as valorizações sobre o que é cultura apropriada.” (SACRISTÁN, 1998, p.48).

Segundo o autor:

O currículo é uma práxis antes que um objeto estático emanado de um modelo coerente de pensar a educação ou as aprendizagens necessárias das crianças e jovens, que tampouco se esgota na parte explícita do projeto de socialização cultural nas escolas. É uma prática de expressão, da função socializadora e cultural que determinada instituição tem, que reagrupa em torno dele uma série de subsistemas ou práticas diversas, entre as quais se encontra a prática pedagógica desenvolvida em instituições escolares que comumente chamamos ensino. (SACRISTÁN; GÓMEZ, 2000, p.15-16).

Currículo já foi entendido como uma lista de tudo aquilo que uma escola pretende ensinar, podendo ou não apresentar informações adicionais como procedimentos metodológicos e caminhos para a avaliação.

Estes autores apresentam três dimensões do currículo escolar: o real, o prescrito e o oculto.

Machado (2006, p.65) nos apresenta a concepção de currículo real, que é o que se concretiza em sala de aula; é o currículo prático do professor, é testado e refletido a partir das reações dos estudantes frente ao que aprendem, e o que é compreendido e retido pelos mesmos. A característica marcante deste currículo é a contextualização dos conteúdos e o que efetivamente se transmite em sala de aula.

Currículo prescrito, segundo Sacristán (1998), é um conjunto de decisões produzidas nos gabinetes das secretarias federais, estaduais e municipais de educação, portanto, é construído num distanciamento do real, atribuindo à escola uma função de reproduzir pela lógica, sem pensar nas diversidades.

Neste sentido, o professor tem papel fundamental através de sua mediação e prática, de compor alternativas curriculares, pois o currículo deve ser compreendido como um processo de construção no interior da escola.

Segundo Forquin (1993, p.23), currículo oculto designa as coisas que se adquirem na escola (saberes, competências, representações, papéis, valores) sem se apresentar claramente nos programas oficiais, porque elas realçam uma “programação ideológica”.

A figura apresentada a seguir (SACRISTÁN; GÓMES, 1998, p. 139) ilustra a riqueza desse processo, envolvendo desde a prescrição e regulamentação no âmbito de decisões políticas e administrativas, até o currículo avaliado como prática de controle, principalmente externo, como no caso das diferentes avaliações de desempenho realizadas nos âmbitos federal, estadual e municipal.

Figura 4.1-1 – O currículo como processo



Fonte: SACRISTÁN (1999, p. 139).

Estudar currículo é uma atividade complexa e não pretendemos aqui esgotar o assunto, mas sim compreender sua concepção na qual os documentos é uma das partes do processo.

Sacristán e Gómez (2000) frisam esta diversidade quando citam Grundy “O currículo não é um conceito, mas uma construção cultural. Isto é, não se trata de um conceito abstrato que tenha algum tipo de existência fora e previamente à experiência humana. É, antes, um modo de organizar uma série de práticas educativas.” (GRUNDY, 1987 apud SACRISTÁN; GÓMEZ, 2000, p.14).

Para Sacristán e Gómez (2000), o estudo acerca do currículo deve contemplar: os objetivos a atingir, o que ensinar, por que ensinar, para quem são os objetivos, de que forma entrelaçar os conteúdos, quais recursos/materiais metodológicos estarão disponibilizados, a organização do tempo e o espaço.

Tais elementos estão sempre presentes no cotidiano da escola e certamente como conteúdo complexo, tanto pelos conflitos que geram quanto pelos caminhos para o melhor resultado possível frente à diversidade que se apresenta na escola.

Por conta disso, podemos afirmar que o currículo não é estático, ele está em constante movimento e deve contemplar e modificar-se a partir das demandas observadas na realidade escolar.

Lorenzato e Vila (1993), em seu artigo sobre a matemática recomendável para o século XXI é incisivo em seu posicionamento, onde aponta o desenvolvimento do pensamento algébrico como uma “habilidade de base necessária para os estudantes que se tornarão adultos no próximo século”.

Para os autores com este conteúdo os estudantes devem aprender a resolver problemas práticos envolvendo razão, proporção, variação (direta e inversa) e serem capazes de lidar com números positivos e negativos, e com as notações científicas; validando a importância da presença e da ênfase que o pensamento algébrico deveria ter nos documentos que norteiam a educação.

O professor neste contexto é regente essencial para esta ressignificação curricular, pois é ele que está vivenciando esta prática: “é um agente ativo muito decisivo na concretização dos conteúdos e significados dos currículos, moldando a partir de sua cultura profissional qualquer proposta que lhe é feita [...]” (SACRISTÁN; GÓMEZ, 2000, p.105).

É nesse sentido, então que reconhecemos o currículo e sua relevância na escola, assim como o papel do professor diante desse instrumento para sua atuação em sala de aula.

A seguir apresentaremos uma síntese dos documentos tomados como referência nesta pesquisa.

2.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

O documento intitulado Parâmetros Curriculares Nacionais do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental (PCN) foi publicado em 1998 e está organizado em dez volumes: Introdução, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Arte e Educação Física e ainda três volumes abordando os Temas Transversais (ética, saúde, orientação sexual, meio ambiente e pluralidade cultural) em todas as disciplinas.

Na introdução apresenta os objetivos gerais do Ensino Fundamental e um mapa conceitual que demonstra como foi realizada a organização do documento.

As áreas de conhecimento estão organizadas por anos/séries do Ensino Fundamental contendo dois ciclos; os objetivos gerais das áreas do conhecimento e seus blocos de conhecimentos, e apresenta ainda sugestões de como trabalhar os conteúdos.

Este documento norteador não identifica um trabalho centralizado no conteúdo de álgebra, nem mesmo de um trabalho pedagógico centrado numa construção do pensamento algébrico no Ensino Fundamental I.

Este tema está abordado no bloco de Números e Operações, trazendo como conteúdos a utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em sequências numéricas, a compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas e a construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. Esses conteúdos aparecem a partir do 7º ano e não têm nenhuma construção anterior ou posterior das habilidades do pensamento algébrico.

Nos PCNs sugere-se aos professores à abordagem dos conceitos algébricos desde os primeiros anos (referenciando-se a *Early Algebra*) de maneira “informal” e articulada à aritmética, o que alguns autores como Lins & Gimenez (1997) discordam por entenderem que é necessário que os estudantes compreendam a necessidade da linguagem algébrica, sem privilegiar técnicas de cálculo, isto é, defendem que a álgebra e a aritmética caminham juntas e coexistem.

Sobre a *Early Algebra*

É um projeto que foi criado em 1998, a qual conta com uma equipe de psicólogos e educadores matemáticos, em que se destacam Analúcia D. Schliemann, Bárbara M. Brizuela e David W. Carraher, que trabalham com professores e estudantes colaborando com escolas de Boston. Neste projeto são desenvolvidos materiais sobre a álgebra do Ensino Fundamental que tratam de vários temas matemáticos, como por exemplo, números, símbolos, comparações, etc., focando na aprendizagem e raciocínio dos estudantes. Esta área de pesquisa expõe que introduzir a álgebra nas séries iniciais é altamente viável, uma vez que uma profunda compreensão da aritmética requer generalizações matemáticas e compreensão dos princípios algébricos. Assim, aritmética e álgebra elementar estão intimamente interligadas. (SILVA; SAVIOLI, 2012, p.208).

Nesta concepção, a álgebra inicial abrange muitos tópicos em matemática, incluindo as quatro operações, mas o faz de maneiras diferentes.

Por exemplo: Considere a operação de adição. No segundo ano, a maioria dos alunos está sendo ensinada a adicionar 3 a outro número. Eles provavelmente não foram solicitados a

considerar expressões como " $n + 3$ ", onde n pode se referir a qualquer número. Ao usar expressões para descrever relações entre números e quantidades, os jovens aprendizes vão além da fluência computacional e começam a desenvolver a habilidade de fazer generalizações matemáticas usando a notação algébrica.¹ (TUFTS UNIVERSITY, tradução nossa).

Para o grupo da *Tufts University*, constituído de psicólogos e professores de matemática que trabalhou na criação da *Early Algebra*:

“a álgebra inicial não visa aumentar a quantidade de matemática que os alunos precisam aprender. Em vez disso, trata-se de ensinar tópicos consagrados pelo tempo da matemática inicial de maneiras mais profundas e desafiadoras. A concepção desta ideia é que crianças que se familiarizam com conceitos e ferramentas algébricas desde tenra idade e em contextos significativos farão melhor em matemática, independentemente dos critérios usados” (retirado do site [Early Algebra.tufts.edu/education/earlyalgebra/about.asp](http://EarlyAlgebra.tufts.edu/education/earlyalgebra/about.asp), tradução nossa).

Apesar da referência, o documento não apresenta propostas nem embasamento teórico para que os professores pudessem subsidiar seu trabalho em sala de aula no desenvolvimento deste conteúdo.

Silva (2006) nos aponta que apesar dos PCN's indicarem que os estudantes “desenvolvem a habilidade de pensar ‘abstratamente’ se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal em um trabalho articulado com a Aritmética” (BRASIL, 1998, p.117); no documento não fica evidenciado como deve ser feito este trabalho, nem os conteúdos a serem trabalhados, tão pouco como ideias de procedimentos metodológicos, indicando a pouca profundidade relacionada ao conteúdo. Neste sentido, o documento a partir de suas propostas não propicia o movimento do pensamento do estudante.

Apesar dos PCN's serem uma referência de consulta e orientação ao professor, o mesmo apresenta limites, os quais precisam ser superados, com vistas à efetivação de um trabalho voltado ao desenvolvimento do pensamento dos estudantes na escola. Isto se justifica pelo foco metodológico do documento.

¹ Disponível em: <<http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/>>.

2.2 A PROPOSTA DA BASE COMUM CURRICULAR

A BNCC, em seu documento preliminar, de 2016, possui um único volume para os três níveis de escolaridade básica, na educação infantil, no ensino fundamental e médio, configurando e reunindo os direitos e objetivos de ensino-aprendizagem da educação básica, dos níveis de ensino, das áreas do conhecimento e das disciplinas obrigatórias.

O documento ressalta que a base não deverá constituir a totalidade dos currículos escolares e que, à parte comum, deve-se acrescentar uma parte diversificada, cujos conteúdos serão escolhidos pela comunidade escolar. No tocante às disciplinas, seus conteúdos estão segmentados e divididos em eixos especificados por ano escolar, o que mostra a necessidade de articulação entre os demais eixos disciplinares e as outras áreas do conhecimento, situação a ser possibilitada pelos temas integradores.

Segundo a BNCC, os objetivos de aprendizagem consideram o nível de desenvolvimento cognitivo, as experiências e os contextos brasileiros. Para esse marco, a ideia de atingir objetivos específicos das disciplinas não deve ser entendida como uma sequência para a progressão de anos escolares, uma vez que o professor deve observar, de forma global, o desenvolvimento dos estudantes, além disso, propõe uma desfragmentação não só dos conteúdos de mesma área de conhecimento, mas também dentro de uma mesma área:

Sobre a desfragmentação apresentada no documento, Marchelli (2017) aponta que:

Para realizar a desfragmentação dentro de uma mesma área de conhecimento e entre as diferentes áreas são evocados os temas integradores como uma noção que, segundo a BNCC, perpassa as experiências individuais dos sujeitos da aprendizagem e dizem respeito ao seu contexto de vida, sua identidade, modos de interação social, sua posição ética e compreensão crítica do mundo (MARCHELLI, 2017, p.56)

No documento da 1ª versão da BNCC, encontramos no item competências no eixo de Matemática para os anos iniciais, “desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza” (BRASIL, 2018, p.267), o que merece discussão em relação às competências matemáticas.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular a implementação da álgebra como um dos eixos temáticos de Matemática justifica-se por:

Desenvolver um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2016, p. 270)

Os conteúdos neste eixo se relacionam à percepção e ao estabelecimento de padrões e regularidade, às propriedades das operações e ao sinal de igualdade, às ideias de proporcionalidade e equivalência, entre outros.

Como objetivos ao ensino de álgebra no 4º ano, a BNCC (BRASIL, 2016) cita: identificar grupos de números para os quais as divisões por um determinado número resultem em restos iguais para perceber que há regularidades nas divisões com restos, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade com cálculo mental; identificar as relações inversas entre as operações de adição e subtração, e de multiplicação e divisão para aplicá-las na resolução de problemas; determinar o elemento desconhecido que torna uma igualdade verdadeira utilizando a ideia de equivalência a partir de problemas.

Ainda no mesmo documento, para o 5º ano são indicados como objetivos: compreender que uma igualdade não se altera quando se adiciona ou se subtrai o mesmo número em ambos os lados da igualdade, para construir a noção de equivalência; resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido; resolver problemas que envolvem variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, ampliar ou reduzir ingredientes de receitas, escala em mapas, entre outros; resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma parte seja o dobro da outra, para desenvolver a ideia de relação entre as partes e delas com o todo.

Inferimos que a BNCC aponta a necessidade do desenvolvimento do pensamento algébrico, entretanto, de acordo com a pesquisa não identificamos uma proposta que propicie o movimento desse pensamento na perspectiva histórico-cultural, questão para posteriores aprofundamentos.

Ressaltamos que a falta de um posicionamento teórico na BNCC resulta numa amplitude, que implicará numa deficiência da efetivação real de um trabalho que contemple este conteúdo em sala de aula, já que os professores que estão inseridos nos ambientes

escolares nos anos iniciais, geralmente formados em Pedagogia, nem sempre têm formação voltada para um trabalho que desenvolva o pensamento algébrico, e o documento em si não o orienta. Seria necessário um grande e efetivo trabalho de formação.

Isto é, ainda que as diretrizes curriculares recentes apontem para a presença do Pensamento Algébrico existe uma diferença entre o que está prescrito nos currículos e o que verdadeiramente ocorre em sala de aula.

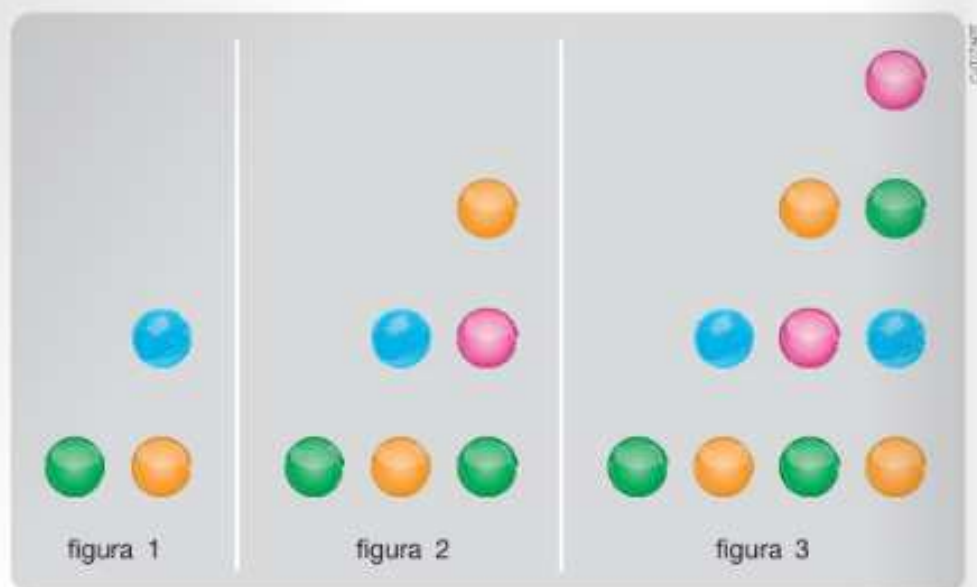
Abaixo apresentamos algumas situações de aprendizagem comumente aplicadas em sala de aula retiradas de livros didáticos para estudantes de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental I.

1. Encontre o termo desconhecido nas igualdades

+ 6 = 9 = <u>9 + 6</u> = <u>15</u>	+ 11 = 18 = <u>18 - 11</u> = <u>7</u>
+ 12 = 20 = <u>20 - 12</u> = <u>8</u>	+ 12 = 22 = <u>22 - 12</u> = <u>10</u>

Fonte: Neves, 2014, p.242

João Pedro viu os desenhos de Giovana e também criou uma sequência de figuras. Veja como ficou:



1. Como estão sendo construídas as figuras? Responda em seu caderno.
Considerando a figura anterior e acrescentando uma fila de bolinhas.
2. Como deve ser o desenho da figura 4? Em seu caderno desenhe a figura.

Fonte: Pires e Rodrigues, 2019, p. 198

2.3 PRINCÍPIOS E NORMAS PARA A MATEMÁTICA ESCOLAR – NCTM

Os *Principles and standards for School Mathematics* elaborado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* – traduzido em 2007 para o português por *Princípios e Normas para a Matemática escolar* – é um documento norteador para a educação matemática nos Estados Unidos. Este conselho é formado por professores especialistas na área de educação matemática neste país. Justificamos a presença deste documento nesta pesquisa pelo fato deste documento ser grande influenciador nos PCN's.

O documento contempla a educação matemática do Ensino Infantil ao Ensino Médio, contou com a participação de várias comunidades de especialistas (professores, matemáticos e pesquisadores em educação) de diversos países e pauta-se na abordagem de resolução de problemas para desenvolvimento do ensino.

Através desta abordagem apresenta três recomendações no documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989): (1) conceitos e habilidades matemáticas deveriam ser aprendidos em um contexto de resolução de problemas; (2) o desenvolvimento de processos de ensino de alto nível deveria estar repleto de experiências de resolução de problemas e (3) instruções matemáticas deveriam acontecer dentro de uma investigação orientada, em uma atmosfera de resolução de problemas.

Os Princípios e Normas para a Matemática escolar abordam uma concepção de currículo como “[...] muito mais do que uma coleção de atividades: ele deve ser coerente, enfocar as ideias matemáticas importantes e ser bem articulado ao longo das séries e ciclos.” (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000, p.14, tradução nossa).

O documento está organizado em cinco partes: uma visão para matemática escolar; princípios para a matemática; descrição global das normas para a Matemática Escolar da educação infantil ao Ensino Médio; as normas por níveis de ensino e uma discussão sobre como interferir no ensino de matemática em nossa realidade.

As normas propostas neste documento são descrições das habilidades que os estudantes devem adquirir durante seu processo de aprendizagem e contemplam considerações, orientações de ensino e exemplos de aprendizagem.

Apresenta também expectativas de aprendizagem num apêndice.

Destaca seis princípios para um ensino de matemática de excelência:

- Equidade (que garante esta excelência para todos);

- Currículo (coerência);
- Ensino (oportunidade de aprender uma matemática de elevada qualidade);
- Aprendizagem (garantia de compreensão para boa aplicação de seus conhecimentos);
- Avaliação (como fonte de informação para professores e estudantes);
- Tecnologia (ferramentas essenciais para se fazer matemática).

O documento opta por conteúdos e processos matemáticos em que os estudantes devem aprender e saber mobilizar durante o processo escolar, e a partir de *standards*, define que é essencial neste processo a construção da capacidade de pensar e raciocinar matematicamente.

No que se refere ao ensino de Álgebra, o documento descreve a importância do desenvolvimento das seguintes habilidades no decorrer do processo escolar:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos.

Essas habilidades não diferem das propostas nos documentos publicados posteriormente PCN's e BNCC mencionados nos itens anteriores.

Além disso, os Princípios e Normas do NCTM propõem o ensino de álgebra como processo contínuo e intermitente desde a educação infantil ao Ensino Médio, reafirmando a importância da solidificação deste tipo de pensamento para uma aprendizagem matemática.

3. O CURRÍCULO MUNICIPAL DE BAURU E O MATHEMATICS FLORIDA STANDARDS: DOCUMENTOS CONTEXTUALIZADORES

Neste capítulo serão apresentados os documentos que entrelaçam na pesquisa, objetivando identificar como e se eles descrevem o desenvolvimento do pensamento algébrico a fim de levantar suas contribuições para este ensino nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental I. Em termos oficiais, compreendemos que o currículo é o documento institucional mais próximo do professor na sua regionalidade. O currículo do município de Bauru foi escolhido por apresentar na fundamentação teórica a Psicologia Histórico-Cultural e o *Common Core State Standards* devido ao estágio realizado na Flórida.

A Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que em seu artigo 26 estabelece: os currículos do Ensino Fundamental e Médio devem ter uma base nacional comum, a ser completada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela (BRASIL, 1996). Diz também, que compete à União, em colaboração com os estados, o Distrito Federal e os municípios, estabelecer diretrizes para a educação básica, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar a formação básica comum. Tais diretrizes comportam uma base curricular de âmbito nacional, com força de lei, ainda que permita uma parte diversificada para abrigar as particularidades regionais e locais.

Desta forma, gestores estaduais e municipais têm elaborado seus próprios documentos norteadores para sistemas de ensino.

3.1 CURRÍCULO COMUM MUNICIPAL DE BAURU

Nas redes municipais a atuação dos gestores educacionais possui certo grau de independência e podem propor políticas próprias para regulação do trabalho pedagógico. Assim, o currículo é um instrumento para direção da prática pedagógica, define o ensino, aborda os fundamentos e conteúdos, sua sequência, os métodos a serem utilizados, os recursos para aprender e ensinar (por exemplo: livros didáticos e novas tecnologias), avaliação e formação de professores.

Segundo Oliveira (2017) a partir de 2010, a cidade de Bauru preocupou-se com a elaboração de uma proposta curricular pautada na melhoria da qualidade de ensino público

municipal. O currículo atual, publicado em 2016, é fruto de um processo de construção que remonta ao início dos anos 2000, quando a Secretaria Municipal de Educação de Bauru (SME) e o Departamento de Psicologia da UNESP se aproximam para trabalhar a formação do corpo docente do sistema e pensar a educação pública do município.

Segundo o documento (BAURU, 2016, p.23-26), o processo partiu de um estudo teórico e aproximação à Psicologia Histórico-Cultural e à Pedagogia Histórico-Crítica, que envolveu os docentes em estudos e debates.

Este processo fez com que se constatasse que o município necessitava de um Currículo Comum que desse coerência às ações e reflexões do Sistema Educacional de Bauru.

Em 2012, deu-se a construção da primeira edição do Currículo Comum do Ensino Fundamental de Bauru, como resultado da participação ativa de um grupo de docentes dos Departamentos de Educação e Psicologia da UNESP, da SME e do corpo docente do sistema.

Uma avaliação interna apontou questões a serem melhoradas em alguns aspectos tais como a falta de clareza nos objetivos, orientações didáticas, instrumentos metodológicos e avaliativos, a partir de 2015, formaram-se grupos de trabalho (GTs) de cada área do conhecimento visando à instrumentalização dos professores para a reescrita do documento. (BAURU, 2016, p.23).

O processo de construção do currículo, desde sua primeira versão até a atual, foi produzido em um movimento coletivo.

O projeto também contemplou a participação e articulação com a Faculdade de Ciências UNESP/Bauru como uma parceria, uma vez que o município não teria como arcar principalmente com a assessoria de profissionais da área para uma edificação do material teórico-metodológico do documento.

Junto a esta articulação, foram convidados docentes (1º ao 5º ano) de todas as escolas do sistema educacional, professores especialistas, coordenadores, diretores para garantir a conformidade com a realidade escolar.

O currículo foi construído paulatinamente, área por área, seguindo o viés do início, com a interação dos professores atuantes na rede ao embasamento teórico suportado pela universidade.

O currículo não é neutro, ele aponta a direção do processo de formação humana, orienta as ações pedagógicas e é permeado pela visão de mundo daqueles que o constroem. Optamos no processo de construção do currículo aqui apresentado por valorizar os aspectos históricos, culturais e sociais. Assim, imbuídos pela vertente

histórico-cultural e pela perspectiva democrática e participativa é que construímos esse documento. (BAURU, 2016, p. 30).

Foi então elaborado coletivamente, desde o primeiro documento que foi publicado em 2012, um “Currículo Comum para todas as áreas de conhecimento que se tornasse diretriz para todas as escolas do ensino fundamental, abarcando os anos iniciais e finais.” (BAURU, 2012, p. 9).

A introdução da Teoria Histórico-Cultural como embasamento teórico se deu de forma coletiva durante o processo de reelaboração do PPP (Projeto Político Pedagógico) das escolas municipais. Após levantarem que a maioria das escolas do município tinha adotado esta perspectiva como pressuposto teórico foi amparado e definido que ele subsidiaria também o Currículo Comum do Ensino Fundamental.

Iniciando a organização de conteúdos partindo do Currículo Infantil de Bauru, o eixo de Matemática está organizado da seguinte forma:

- Introdução;
- Fundamentos teórico-metodológicos;
- Objetivo Geral da área de Matemática;
- Quadro de Eixos.

Sobre esta organização, o documento nos indica que:

A intenção inicial de todo esse processo de reelaboração deste referencial é oferecer ao professor pertencente ao sistema de ensino, ingressante ou não, um suporte teórico que contribua à sua formação profissional e consequentemente à sua prática pedagógica, com uma linguagem acessível, didática e de fácil compreensão, sem perder sua essência teórica, permitindo-o refletir sobre a sua organização de ensino de maneira intencional, coerente a uma formação transformadora do sujeito. (BAURU, 2016, p. 834).

Os fundamentos teórico-metodológicos baseiam-se na Teoria Histórico-Cultural, compreendendo a visão crítica na produção de conhecimento. Este posicionamento fica claro na afirmativa:

Pautar-se em uma perspectiva Histórico-Cultural, requer entendimento de que o processo de produção do saber matemático foi elaborado pelo homem, na busca de transformar a natureza, resultado das necessidades do sujeito de compreender e atuar no seu mundo, constituindo-se como ser humano. (BAURU, 2016, p. 835).

Neste sentido, e pautados nessa teoria, o conhecimento é transmitido de geração para geração, e são advindos das necessidades humanas e gerados pela ação do homem através do trabalho, atividade dos indivíduos.

É papel da educação e por consequência da escola, que é o espaço privilegiado para que ela aconteça assegurar o acesso dos estudantes a estes conhecimentos elaborados: “o processo educativo é central à formação do homem em sua especificidade histórica, pois permite que não seja necessário reinventar o mundo a cada nova geração, permite que se conheça o estágio de desenvolvimento humano atual para que se possa superá-lo.” (MOURA, 2010, p. 27).

A partir dessa fundamentação também defende a matemática como linguagem que possui escrita simbólica própria, e que deve ser apropriada e utilizada pelos sujeitos. Esta forma de interação com a matemática pauta-se em dois aspectos segundo Silva (2008, p. 84): “[...] o de ser formativo do pensamento (pois é produto do pensamento), e o de ser operacional, produzir resultados imediatos e objetivos.”.

Uma das alternativas levantada neste eixo é a utilização de situações problematizadoras:

Resolução de um problema implica em sua compreensão, na criação de estratégias para solucioná-lo em sua execução e verificação de resultados. Além disso, para que seja efetivamente promotor de desenvolvimento psíquico, o problema deve ter natureza teórica, criando condições para a generalização de conceitos. Na perspectiva de V. Davidov, o problema deve refletir uma relação matemática geral a partir da qual a criança possa compreender relações e tarefas particulares, partindo do geral em direção ao particular. Isso significa que, ao elaborar e propor uma situação problema, o professor deve ter em vista a apropriação, pela criança, de um procedimento geral de ação, que será válido para situações particulares diversas. Também é importante garantir que a solução da situação problema permita diferenciar e destacar os aspectos essenciais do conteúdo dos aspectos secundários. O problema deve, assim, requerer da criança um processo de análise e ação investigativa por meio do qual ela possa se apropriar de um conceito teórico geral da matemática. (BAURU, 2016, p. 211).

O documento apresenta também a organização de ensino e aprendizagem com base na Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como caminho para aprendizagem dos estudantes, afirmando que este tipo de encaminhamento propicia o desenvolvimento do pensamento científico.

A AOE, baseada nos pressupostos de Leontiev, utiliza-se de elementos estruturantes e da intenção do professor para possibilitar a apropriação dos conhecimentos acumulados pela humanidade.

A AOE mantém a estrutura de atividade proposta por Leontiev, onde indica uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e propõem ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar. (MOURA, 2010, p. 96).

Deste modo, a AOE requer que tanto professores quanto estudantes estejam em atividade, o professor, de ensino e o estudante, de estudo, gerando assim desenvolvimento nos dois elementos. Esta proposta permite uma aprendizagem que não está pautada na memorização ou sistematização, e sim na construção de conceitos científicos.

[...] na AOE, as necessidades, os motivos, os objetivos, as ações e as operações do professor e do estudante se mobilizam inicialmente por meio da situação desencadeadora de aprendizagem. Esta é organizada pelo professor tomando-se por base os seus objetivos de ensino [...] que se traduzem em conteúdos a serem apropriados pelos estudantes no espaço da aprendizagem. As ações do professor serão organizadas inicialmente visando colocar em movimento a construção da solução da situação desencadeadora de aprendizagem. Essas ações, por sua vez, ao serem desencadeadoras, considerarão as condições objetivas para o desenvolvimento da atividade: as condições materiais que permitem a escolha dos recursos metodológicos, os sujeitos cognoscentes, a complexidade do conteúdo em estudo e o contexto cultural que emoldura os sujeitos e permite as interações sócio afetivas no desenvolvimento das ações que visam ao objetivo da atividade – a apropriação de um certo conteúdo e do modo geral de ação de aprendizagem. (BAURU, 2016, p. 102-103).

A divisão dos blocos de conteúdos no documento está justificada numa organização para facilitar a prática pedagógica e de forma contextualizada com as outras áreas do conhecimento.

O objetivo geral da área apresentado no currículo pretende que o estudante “[...] compreenda a construção histórica dos conceitos matemáticos a partir de uma necessidade humana, apropriando-se os seus significados, identificando os seus signos e formando os sentidos pessoais por meio da prática social.” (BAURU, 2016, p. 847).

Os eixos da área estão assim sequenciados: Números e Operações; Grandezas e Medidas; Espaço e Forma/Geometria e Tratamento da Informação, apresentando uma relação com os blocos de conhecimento dos PCNs.

A Álgebra está apresentada nos quadros de conteúdos em todos os anos do Ensino Fundamental I, porém as lacunas estão em branco, nos apontando que este eixo não foi

evidenciado como um eixo principal, mas aparece dispersa nos eixos apresentados, conforme as Figuras 5.1-1e 5.1-2.

Apesar desta apresentação, existe o conteúdo de álgebra nos anos do Ensino Fundamental I, mas eles estão sendo trabalhados no eixo de Números e Operações. (Figuras 5.1-1 e 5.1-2)

Figura 5.1-1 – Quadro de Conteúdos a serem trabalhados no 4º ano do Ensino Fundamental

4º ANO – 2º BIMESTRE	
Números e Operações	Números: Contagem Numérica: Escala Ascendente e Descendente a partir de número natural dado. Números Naturais: cálculos aproximados (situações problemas). Números Racionais: reconhecimento no uso diário significando parte-todo e quociente. Operações: Multiplicação e Divisão do número por 10, 100 e 1000: identificação e uso de regularidades. Divisão (situações problemas) – fatos básicos ao cálculo. Cálculo aproximado, exato e mental.
Álgebra	
Grandezas e Medidas	Unidades de Massa: grama, miligrama e quilograma (situações problemas). Unidades de Temperatura (situações problemas).
Tratamento de Informações	Tabelas (Simples e de Dupla Entrada) e Gráficos (Barras e Colunas) em situações problemas: solução por meio de dados organizados.
Espaço e Forma	Identificação da movimentação de uma pessoa ou objeto: desenho em malha quadriculada. Figuras Geométricas Tridimensionais (Cilindros, Cones, Cubos, Paralelepípedos, Pirâmides e Prismas): semelhanças e diferenças.

Fonte: Bauru (2016, p.893)

Figura5.1-2 – Quadro de Conteúdos a serem trabalhados no 5o ano do Ensino Fundamental.

5º ANO – 4º BIMESTRE	
Números e Operações	Números: Números Racionais (uso diário): escrita e localização e arredondamento na reta numérica (forma fracionária e decimal). Números Racionais (uso diário): comparação e ordenação (forma fracionária e decimal). Números Racionais: reconhecimento e leitura de uso diário (forma fracionária e decimal). Frações (situações problemas): parte-todo, quociente e razão. Fração Equivalente: identificação (observação de representações gráficas e regularidades na escrita numérica). Operações: Adição e Subtração envolvendo Números Racionais (situações problemas): leitura, interpretação, formulação e solução (forma decimal). Adição e Subtração envolvendo Números Racionais (solução): estratégias pessoais e algoritmos (forma decimal). Porcentagem (situações problemas): uso diário (10%, 20%, 25%, 50% e 100%).
Álgebra	
Grandezas e Medidas	Perímetro (cálculo) de figuras representadas em malhas quadriculadas. Medida de Superfície (Área): significado. Áreas de Retângulos e Quadrados (cálculo) representados em malhas quadriculadas. Unidades de Medida de Superfícies (situações problemas): m², cm², km². (Introdução) Sistema Monetário Brasileiro (situações problemas).
Tratamento de Informações	Gráfico de Setor: leitura dos dados apresentados.
Espaço e Forma	Composição e decomposição. Figuras Planas: composição a partir de figuras triangulares. Figuras Planas: ampliação e redução (malhas quadriculadas).

Fonte: Bauru (2016, p.893)

Este eixo será trabalhado sistematicamente a partir do 7º ano do Ensino do Ensino Fundamental II, de acordo com os conteúdos expressos no Currículo Municipal de Bauru. (Figura 7)

Figura 6 - Quadro de Conteúdos a serem trabalhados no 7º ano do Ensino Fundamental.

7º ANO – 3º BIMESTRE	
Números e Operações	Razão e Porcentagem; Proporcionalidade: Grandezas Direta e Inversamente Proporcionais.
Álgebra	Introdução à Álgebra; Regra de Três simples; Juros Simples; Letras como forma de representação de um valor desconhecido; Expressões Algébricas e Valor Numérico de uma Expressão Algébrica. Equação do 1º Grau: conceito e resolução.
Grandezas e Medidas	
Tratamento de Informações	Gráfico de Setor (Circular)
Geometria	Geometria Plana: Circunferência e Razão Constante da Geometria

Fonte: Bauru (2016, p.906)

Vale apontar que devido ao caráter recente deste documento, vem sendo reconstruído a partir das práticas e experiências dos professores e ainda não está em total consonância com as demandas do coletivo de professores e, em algumas áreas, com a Teoria Histórico-Cultural, necessitando para isso uma formação de professores frequente e concisa para que se consolide.

Notamos no currículo do município de Bauru os princípios da Teoria Histórico-Cultural não somente no documento, como também no processo que o constituiu. Uma vivência desse processo pode gerar novos sentidos para a comunidade de professores na valorização e defesa dos processos educativos.

3.2 2 COMMON CORE STATE STANDARDS

O *Common Core State Standards* é um documento norteador da educação em matemática escolar nos Estados Unidos. Vários estados utilizam-no, porém não é padrão em âmbito nacional, tendo em vista que nos Estados Unidos não é permitido este tipo de currículo, de modo que cada Estado deve determinar seus próprios padrões.

Justificamos a inclusão deste documento na pesquisa a partir da realização do estágio realizado na USF e em escolas de ensino que equivalem ao ensino fundamental no Brasil, por intermediação da *Phd Sarah van Ingen*. No item 3.3 apresentaremos um breve relato das atividades desse estágio.

Os padrões (*standards*) não são claramente atrelados a uma vertente teórica, mas no que diz respeito à Educação Matemática, eles apresentam uma referência a teoria sociocultural(Vigotski) e ao construtivismo.

O documento aponta a importância do ensino fundamental na preparação dos estudantes para o contato mais sistematizado com os conhecimentos científico.

O *Common Core State Standards* está disponível em plataforma virtual e apresenta referências não só para professores, mas também para pais.²

Este documento é resultado de uma pesquisa e aponta como os estudantes aprendem, e apresenta cinco vertentes para o estudante atingir boa proficiência em matemática

- Compreensão conceitual: que aponta as conexões e relações entre as ideias, interpretações e representações de conceitos matemáticos;
- Fluência processual: que é a habilidade de escolher a estratégia mais eficiente para um problema particular;
- Competência estratégica: ser capaz de compreender, representar e determinar soluções de problemas matemáticos;
- Raciocínio adaptativo: ser capaz de pensar sobre explicar e justificar uma ideia matematicamente;
- Disposição produtiva: ter uma consciência arraigada de que a matemática faz sentido, é útil e valorosa.

O *Common Core State Standards* também afirma que, segundo o NCTM (2014), o capítulo que compreende os princípios e ações para a educação matemática sugere o construtivismo e a teoria sociocultural como correntes que embora pareçam incompatíveis.

[...] nos fornecem conhecimentos específicos sobre a natureza ativa do processo de aprendizagem. Embora uma teoria se concentre na aprendizagem individual e a outra enfatize os aspectos sociais e culturais da sala de aula, essas teorias não

²COMMON CORE. Disponível em<<http://www.corestandards.org/>> Acessado em 09 de Jun de 2019, tradução nossa

competem e são realmente compatíveis. (NORTON; D' AMBRÓSIO, 2008, tradução nossa).

Sobre o construtivismo: designa como ponto central o entendimento de que o estudante não é um quadro em branco, mas sim criador de sua própria aprendizagem; cada coleção única de ideias dos estudantes se conecta de diferentes maneiras, algumas são bem compreendidas e bem formadas, enquanto outras são menos desenvolvidas à medida que elas evoluem. Os alunos experimentam e isso os ajuda a desenvolver conexões e ideias sobre o que estão aprendendo.

Sobre a Teoria Sociocultural, o documento afirma que assim como o construtivismo, a teoria sociocultural não apenas posiciona-se ativamente engajada na busca de sentido durante o processo de aprendizagem, mas também sugere que o aprendiz pode ser auxiliado por trabalhar com outros que estão mais desenvolvidos.

De acordo com a teoria sociocultural: cada estudante tem uma zona única de desenvolvimento proximal, com uma gama de conhecimento que pode estar fora do alcance de aprendizagem do indivíduo e torna-se mais acessível se o estudante tiver o apoio de colegas ou outros. Exemplifica que o professor deve saber que se, por exemplo, os estudantes explorarem a criação de diferentes retângulos que tenham o mesmo perímetro, os exemplos gerados por eles sugerirão essa relação entre o perímetro de um retângulo e a área.

O *Common Core State Standards* está dividido em 4 partes intituladas: operações e pensamento algébrico; números e operações com base 10; números e operações (frações); medidas e dados e geometria.

Nos *Standards* do 4º ano sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico estão descritas as capacidades de usar as quatro operações com números inteiros para resolver problemas; a familiarização com fatores e múltiplo, e a geração e análise de movimentos regulares. Sugere como boas práticas matemáticas: compreender os problemas e perseverar em resolvê-los; construir argumentos e críticas viáveis ao raciocínio dos outros; seguir modelos matemáticos; usar ferramentas apropriadas estrategicamente e apresentar precisão na utilização das estruturas matemáticas.³

Sugere também que especificamente para desenvolver o pensamento algébrico, o estudante precisa desenvolver atividades tais como:

³COMMON CORE. Disponível em <<http://www.corestandards.org/Math/Practice/>>, > Acessado em 9 out de 2018, tradução nossa

- Usar as quatro operações com números inteiros para resolver problemas;
- Interpretar uma equação de multiplicação como uma comparação, por exemplo, interpretar $35 = 5 \times 7$, como uma afirmação;
- Multiplicar ou dividir para resolver problemas de palavras envolvendo multiplicação e comparação, por exemplo, usando desenhos e equações com um símbolo para o número desconhecido para representar o problema, distinguindo a comparação multiplicativa da comparação aditiva;
- Resolver situações problemas de várias etapas colocados com números inteiros e ter respostas de números inteiros usando as quatro operações, incluindo problemas em que os restos devem ser interpretados. Representar esses problemas usando equações com uma letra representando a quantidade desconhecida;
- Avaliar a razoabilidade das respostas usando cálculo mental, estratégias de estimativa, incluindo arredondamento;
- Ter familiaridade com fatores e múltiplos;
- Encontrar todos os pares de fatores para um número inteiro no intervalo de 1 a 100;
- Reconhecer que um número inteiro é um múltiplo de cada um dos seus fatores;
- Gerar e analisar padrões;
- Gerar um número ou padrão de forma que segue uma determinada regra;
- Identificar características aparentes do padrão que não estavam explícitas na própria regra. Por exemplo, dada a regra "Adicionar 3" e o número inicial 1, gerar termos na sequência resultante e observar que os termos aparecem para alternar entre números ímpares e pares.⁴

Para o 5º ano, os padrões apresentam como as capacidades esperadas: que o estudante escreva e intérprete expressões numéricas e a capacidade de analisar padrões e relacionamentos.

Como boas práticas em matemática apresentam as atividades que façam sentido e que os estudantes perseverem em resolvê-los; que eles desenvolvam a razão abstrata e quantitativa; construa argumentos e críticas viáveis ao raciocínio dos outros; usem

⁴COMMON CORE. Disponível em <<http://www.corestandards.org/Math/Practice/>, > Acessado em 09 de Out de 2018, tradução nossa

ferramentas tecnológicas (*softwares, tablets*) apropriadas estrategicamente; procurem e façam uso de estruturas matemáticas; identifiquem e expressem regularidade em repetida em seu raciocínio.

Sugere também que, especificamente para desenvolver o pensamento algébrico, o estudante precisa desenvolver atividades tais como:

- Use parênteses, colchetes ou chaves em expressões numéricas e avalie expressões com estes símbolos;
- Escreva expressões simples que registrem cálculos com números e interpretem expressões numéricas sem avaliá-las. Por exemplo, exprima o cálculo "adicionar 8 e 7, depois multiplique por 2" como $2 \times (8 + 7)$;
- Reconhecer que $3 \times (18932 + 921)$ é três vezes maior que $18932 + 921$, sem ter que calcular a soma ou o produto indicado;
- Analisar padrões e relacionamentos;
- Gerar dois padrões numéricos usando duas regras dadas;⁵

Inferimos a partir desses itens que a proposta do documento está embasada em aspectos lógicos no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois como se pode observar, a proposta do documento explora os elementos essenciais no que se refere aos aspectos lógicos da Álgebra, sem a presença dos aspectos históricos que constituem o processo do desenvolvimento do pensamento algébrico do estudante.

3.3 BREVE RELATO SOBRE O ESTÁGIO NA UNIVERSITY OF SOUTH FLORIDA

O estágio na *University of South Florida* (USF) foi uma possibilidade que surgiu de uma visita em que a Professora Dra. Sarah Van Ingen fez à Faculdade de Ciências na Unesp de Bauru para um convenio que constituiu-se por meio de grupo de pesquisa internacional e sobre o ensino de Matemática para estudantes com deficiência e/ou dificuldades de aprendizagem..

Sabendo de sua formação, pesquisa em Educação Matemática e de sua relevante atuação na formação de professores na Flórida, minha orientadora provocou-me na sugestão de tentarmos este contato para uma visita à USF para troca de experiências e um novo olhar

⁵COMMON CORE. Disponível em <<http://www.corestandards.org/Math/Practice/>> Acessado em 09 de Out de 2018, tradução nossa

vivenciando aulas nas escolas públicas de Tampa-Flórida, além de ter contato com um currículo diferenciado.

Sarah van Ingen é professora assistente de educação matemática na Universidade do Sul da Flórida, onde co-dirige o inovador e reconhecido Programa de Parcerias para Residentes de Professores Urbanos. Nessa função, faz parceria com professores e administradores das Escolas Públicas de *Hillsborough County* de melhorar o aprendizado de futuros professores. Ministra cursos de educação matemática e preparação de professores nos níveis de graduação, mestrado e doutorado, enfatizando a interseção entre educação matemática equitativa e a preparação de professores.

Sua área de pesquisa abrange a inclusão da pesquisa no cotidiano dos professores que ensinam matemática, de modo a atender às necessidades de aprendizagem dessa área de ensino, dos estudantes que apresentam necessidades específicas.

Chegado o dia da visita de duas semanas que ocorreu em novembro de 2018, Sarah havia preparado um intenso calendário de visitas e atividades para que eu pudesse aproveitar ao máximo esta oportunidade.

Dentre as atividades tive a oportunidade de acompanhá-la nas escolas onde pessoalmente faz as observações e intervenções dos estudantes que estão em fase de estágio supervisionado em Educação Matemática e inseridos nas salas de aula das escolas públicas de Tampa.

Nas três diferentes escolas visitadas, as salas de aula tinham em média 20 -25 estudantes e sempre havia a presença de mais de um professor.

Sobre o sistema de ensino, a escola tem autonomia na administração escolar enquanto estiverem dentro da média nas avaliações, caso a escola permaneça dois anos abaixo da média, o Estado assume esta administração. Nas escolas visitadas, a Universidade dá suporte na formação de professores.

Visitávamos em média seis salas de aula ao dia onde a professora assistia à aula, anotava suas observações e sugestões e logo após saía de sala com os estudantes sugerindo intervenções e avaliando atividades, em alguns casos fazia esta troca também com o professor da sala.

Desta forma, pude observar a conexão dos estudantes envolvidos com os conteúdos que estavam sendo trabalhados em sala de aula além de uma construção de um alicerce para a identidade deste professor que estava se formando.

Ficou evidente para mim, enquanto observadora, a autonomia e liberdade dos estudantes na realização de suas atividades diárias, além do ambiente que propicia o movimento dos estudantes em sala, que não é organizada da forma clássica que estamos acostumados, mas em diferentes ambientes, para que os estudantes desloquem-se a fim de realizar as atividades a serem desenvolvidas naquele dia, pude observar também que nem sempre a sala toda trabalhava na mesma tarefa, mas sim como um circuito, trocando de tarefa a cada finalização.

O fato de a escola ser em período integral para todos é um diferencial importante a se considerar, bem como a estrutura escolar e as diversas atividades incluídas.

Observei forte engajamento com as famílias e a comunidade, o voluntariado é presente e vigoroso.

Neste contexto, observei diversos momentos em que os estudantes se dedicavam a atividades de matemática, e percebi que eles sempre partiam de desafios lançados pelo professor para a sala, aonde os estudantes iam à lousa e apresentavam suas estratégias, demonstrando a forte presença da resolução de problemas.

Os estudantes são encorajados em apresentar suas hipóteses e soluções.

Um exemplo numa sala de *First Grade* (1º ano):

$$\boxed{} + 5 = 17$$

$$16 - 9 = \boxed{}$$

Os estudantes além de apresentar suas formulações, são estimulados o tempo todo a refletir e argumentar sobre a construção de sua resposta.

Esta atividade corrobora com nossa afirmação que os documentos americanos que são baseados nos NCTM estão fundamentados na abordagem de resolução de problemas.

Presenciei outras atividades como: caça as formas geométricas, classificação e seriação, e algumas salas que resolviam problemas, sempre em grupos.

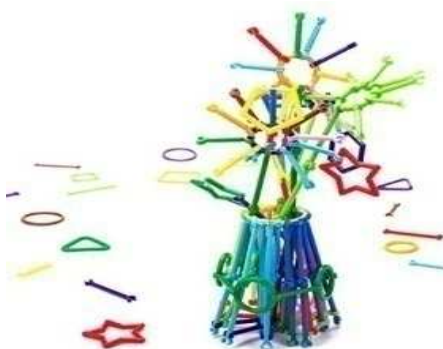
A presença de materiais concretos e manipuláveis é frequente e muito rica, eles possuem uma gama diversificada para trabalhar os conteúdos matemáticos.

Por exemplo, nas formas geométricas eles utilizam hastes coloridas e totalmente flexíveis para a construção das formas pelos estudantes (Figura 8)

Figura 7. Exemplo de material manipulável utilizado para o ensino de Matemática



Fonte: Arquivos da autora



Fonte: Arquivos da autora.

A presença do trabalho em equipe é explorada todo o tempo, em muitos momentos as professoras lembravam os estudantes de que estavam trabalhando em grupo e deveriam esperar a todos, algumas vezes eram incisivas, “não sou eu! Somos nós que separamos de tal forma”.

Em outra escola, desta vez na Educação Infantil, os estudantes são incentivados em fazer contagem de 5 em 5, depois exploram os números com utilização da base 10 (com material dourado), realizam as trocas (de unidade para dezena por exemplo)

No painel de Matemática na sala, a Matemática aparece representada em painéis intitulados: O que é matemática? Números, Padrões, Formas e Ordem. A cada dia é trabalhado um desses conteúdos com os estudantes.

Na Universidade tive a oportunidade de me reunir para conhecer o trabalho de outros professores, em especial com a Prof.^a Dra. Katie Tricarico, responsável pela disciplina *Urban Schools: how poverty and politics marginalize the young* (Escolas Urbanas: como a pobreza e a política marginalizam os jovens) que tem uma proposta diferenciada de trabalho na disciplina que culmina na produção de vídeos sobre os estudantes que advêm da marginalização dos imigrantes, já que quase 40% dos estudantes na Flórida são imigrantes hispânicos.

Pude participar também de uma aula da disciplina *Math Methods* (Métodos Matemáticos), ministrada pelo Prof Joseph Ratasky. A turma era composta por 12 estudantes compondo 6 duplas, e o tempo de duração é de 2 horas e 45 minutos.

No primeiro momento ocorreu uma aula prática sobre triângulos. O professor entregou uma folha com os diversos tipos de triângulos para que recortassem outra folha com diferentes figuras geométricas e um pacote de círculos de diferentes tamanhos. Em duplas, os estudantes constroem microaulas (10 minutos) e interagem com sua dupla ora desempenhando papel do professor, ora sendo estudante, que vão sendo observadas e intermediadas pelo professor da disciplina. Importante ressaltar que os estudantes previamente haviam lido os textos teóricos preparatórios para o conteúdo.

Em seguida, o professor com um carrinho apresenta os diferentes materiais que podem ser explorados no trabalho deste conteúdo com os estudantes na escola. Neste momento, são explorados todos os materiais, garrotes, hastes, massinha, palitos flexíveis para a construção das formas geométricas culminando numa rápida discussão sobre a experiência.

No segundo período da aula, o professor abre para as questões da semana vividas pelos estudantes na escola (estes estudantes já estão inseridos nas salas de aula de Ensino Fundamental para atuação e observação em educação matemática). Uma estudante questiona sobre a utilização da reta numérica com estratégia para o ensino das operações (adição e subtração), prontamente o professor demonstra na lousa algumas retas e intervenções que devem ser feitas com os estudantes do 5ºano do Ensino Fundamental. Os estudantes juntamente com o professor, debatem sobre o procedimento e discutem situações práticas experimentadas.

Além disso, assisti à Qualificação de Doutorado de Alta Joy Broughton, que vêm realizando assistência na Mort Elementary School sobre as intervenções de leitura e escrita para os estudantes hispânicos. Nesta instituição, atendem-se estudantes de baixo poder

aquisitivo, que em sua maioria falam somente espanhol fora da escola, o que vem dificultando a aprendizagem do inglês.

Sua pesquisa pauta-se em intervenções para que esta aprendizagem seja facilitada.

Participando destas atividades durante os quinze dias na USF, pude confrontar ideias, experiências e visualizar outra realidade escolar, este movimento propiciou muitas reflexões, construções e reconstruções que certamente permearão minha atuação profissional, não no sentido de que tudo por lá tenha sido melhor, mas sim, na transposição do que efetivamente contribui para a realidade escolar onde atuo.

4 AS CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS EM RELAÇÃO AO ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Neste capítulo serão descritos os caminhos percorridos na busca de direcionamentos que visam à contribuição para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental I, no que diz respeito à pesquisa bibliográfica de produção acadêmica na área de ensino de álgebra.

Nossa busca pautou-se na seguinte questão de pesquisa: quais contribuições acadêmicas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental foram publicadas desde 2014?

A delimitação do período foi determinada ao longo das explorações prévias após fixarmos os bancos de dados que seriam as fontes de busca. Uma aproximação dos últimos 5 anos (2014-2018) foi o que nos pareceu razoável para uma pesquisa de mestrado devido ao volume de produções acadêmicas.

Uma das intenções da escolha metodológica da Análise do Conteúdo foi realizar uma aproximação de complementaridade a pesquisa de Oliveira (2017), cujo levantamento das contribuições acadêmicas também se direcionaram ao currículo dos anos iniciais. Segundo Bardin (2009, p. 44), a Análise do Conteúdo é:

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando a obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Este tipo de pesquisa é baseado na exaustão de leituras, na interpretação e inferências do pesquisador, num movimento de ir e vir constante, “[...] análise de conteúdo se faz pela prática [...]” (BARDIN, 2009, p.51).

Como o enfoque é sobre o entendimento e a interpretação dos conteúdos analisados, consideramos que a natureza da pesquisa é qualitativa. A pesquisa também pode ser considerada bibliográfica por estar amparada na análise de toda uma produção selecionada em base de dados de trabalhos já publicados.

Segundo Gil (2008), a pesquisa bibliográfica é baseada em materiais já construídos e publicados. A principal vantagem da pesquisa bibliográfica é oferecer ao pesquisador um amplo material que não conseguiria buscar nem construir individualmente.

O material pesquisado está composto por produções acadêmicas disponibilizadas nos seguintes bancos de dados: *SciELO (Scientific Electronic Library Online)*, *BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações)*, *Web Of Science e Google Acadêmico*. Os dois primeiros bancos coincidem com as fontes da pesquisa de Oliveira (2017). A escolha de uma fonte internacional tem a intenção de observar como o tema é tratado internacionalmente, bem como buscar hipóteses, mesmo que para reflexões mais profundas posteriores, sobre a relação da produção acadêmica internacional com currículos em outros países, uma vez que trouxemos para a pesquisa o *State Standards* da Flórida. A pesquisa no *Google Acadêmico* teve a intenção de ampliar o escopo do levantamento, uma vez que muitas revistas acadêmicas ficam fora do SciELO.

Seguindo as orientações metodológicas, a organização se divide em: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, que serão descritos a seguir.

4.1 PRÉ-ANÁLISE

A pré-análise constitui-se na organização do material no momento de sua sistematização, onde é possível elencar as ideias iniciais. É a fase em que se organiza o material a ser analisado com o objetivo de torná-lo funcional para a pesquisa, (a) sistematizando as ideias iniciais; (b) na escolha dos documentos, que consiste na demarcação do que será analisado; (c) formulação das hipóteses e dos objetivos; (d) referências dos índices e elaboração de indicadores, que envolve a determinação de indicadores por meio de recortes de texto nos documentos de análise (BARDIN, 2009).

Sendo assim, a partir do objetivo geral projetado, o pesquisador escolhe os tipos de produção e a forma de coletar esse material. No caso desta pesquisa, optamos pela utilização de bancos de dados eletrônicos em bibliotecas virtuais, utilizando palavras-chave.

Durante a pesquisa, as hipóteses e direcionamentos vão ficando mais claros e delineados, isso faz parte da própria metodologia. Após alguns ensaios e testes com diferentes palavras-chave e tipos de busca, considerando as ferramentas disponíveis, buscamos os melhores resultados no sentido de estar cada vez mais próximo do objetivo geral, qual seja, investigar as contribuições acadêmicas para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos anos finais do ensino fundamental I desde 2014.

Este movimento possibilita um *corpus* mais lapidado. Nossa opção foi pela busca das palavras-chave “Pensamento Algébrico” e “Ensino Fundamental” presentes no título dos

trabalhos. Nas buscas realizadas em língua inglesa, utilizamos os termos “*Algebraic Thinking*” e “*Elementary School*”.

A leitura flutuante é realizada diversas vezes até estabelecer-se uma sistemática da pesquisa, num primeiro momento feito através da leitura de títulos e resumos. A escolha dos documentos é a definição dos textos que farão parte do *corpus* da pesquisa. Segundo Bardin (2009, p.122), “O *corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos.”.

Esta etapa exige que o pesquisador faça escolhas e determine as regras para delimitação do conteúdo, baseadas nos seguintes princípios: de exaustividade (de modo que não exclua nenhum material sem justificativa); representatividade (definição de uma amostra inicial com rigor); e homogeneidade, (que se caracteriza pelo critério da escolha e pertinência) (BARDIN, 2009).

A hipótese geral da pesquisa é de que existem produções acadêmicas que podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental; no que se refere ao ensino de álgebra.

As palavras-chave escolhidas destinaram a formação do *corpus* seguindo os seguintes critérios de pertinência: todas as produções se referem ao ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico e todas se destinam a estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

Nesta fase inicial Bardin (2009) reafirma a importância do papel do pesquisador nas escolhas da seleção do material: “o analista é como um arqueólogo, uma vez que trabalha com vestígios que se manifestam na superfície”. É com base nessa ideia que as informações coletadas serão analisadas (BARDIN, 2009, p.41).

Para finalização desta fase, realizou-se a preparação do material que será analisado através da leitura do título e resumo.

4.2 EXPLORAÇÃO DO MATERIAL

Esta fase consiste na categorização e codificação, sistematizando a pré-análise. A codificação acontece quando há o tratamento do material levantado, neste caso, a organização das produções que atendem o objetivo, isto é, a organização do conteúdo segundo Bardin (2009).

No que se refere à organização, a análise categorial é realizada em três momentos: (a) recorte: que é a escolha das unidades de registro; (b) enumeração: forma que será apresentada a quantificação, (c) classificação: a escolha das categorias nas quais irá se compor a grelha.

A grelha nos apresenta a organização do *corpus* da pesquisa que será delineada de acordo com as categorias. Entendemos, portanto que a grelha propicia a organização dos dados levantados a partir dos objetivos da pesquisa.

Neste momento ocorre também a quantificação do conteúdo, que por meio da escolha das unidades de registro e de contexto obtemos: a enumeração.

A unidade de registro selecionada para a pesquisa foi a palavra, que de acordo com Bardin (2009, p. 130),

Todas as palavras do texto podem ser levadas em consideração, ou pode-se reter unicamente as palavras-chave ou as palavras-tema (*symbols* em inglês); pode igualmente fazer-se a distinção entre palavras plenas e palavras vazias; pode ainda efetuar-se a análise de uma categoria de palavras: substantivos, adjetivos, verbos, advérbios (...) a fim de se estabelecer quocientes.

As palavras-chave foram a unidade de registro utilizada para a seleção das contribuições acadêmicas. Nossas buscas iniciaram-se com a palavra-chave “Ensino de álgebra” que gerou um número vasto de resultados, mas que prontamente verificamos não estarem em consonância com o que era relevante para a pesquisa, uma vez que em sua maioria, apresentavam indícios de conteúdos de Ensino Médio. Num segundo momento, pautamo-nos no “Pensamento Algébrico”, que já nos ofereceu uma gama de contribuições mais voltadas para o Ensino Fundamental, mesmo assim ainda compondo de muitos trabalhos fora de nosso contexto.

Sendo assim, acrescentamos a palavra-chave “Ensino Fundamental” a inclusão deste termo, propiciou um resultado mais direcionado à esta pesquisa.

A pesquisa é pautada em contribuições acadêmicas e se debruçou, ora no título ora na leitura de resumos, de acordo com a necessidade de cada fase da análise do conteúdo.

Após esta etapa, passamos para a fase da enumeração, que pode ser focada pela presença, isto é, na ausência ou frequência em que as unidades de registro se repetem.

4.3 TRATAMENTOS DOS RESULTADOS, INFERÊNCIA E INTERPRETAÇÃO

Essa fase é uma lapidação mais profunda, organizando e interpretando o material selecionado.

O pesquisador “[...] pode fazer operações estatísticas, simples ou até complexas, que possibilitem condensar e pôr em destaque as informações fornecidas pela análise [...]” (BARDIN, 2009, p.127), isto é, o pesquisador pode inferir através das percepções e resultados obtidos.

Para tanto se faz necessária uma releitura mais atenta e precisa dos materiais, provocando assim, não só hipóteses, mas também uma maleabilidade nas interpretações que possibilitarão a construção do *corpus* para a realização da categorização.

Bardin (2009, p. 146) explica que “[...] a categorização é um processo que comporta duas etapas [...]”. Estas etapas são o inventário que isola os elementos e a classificação, que organiza os materiais a partir da segmentação dos elementos.

Sendo assim, a autora aponta que “[...] classificar elementos em categorias, impõe a investigação do que cada um deles tem em comum com os outros [...]”, isto é, o que vai permitir o agrupamento é a parte comum existente entre eles (BARDIN, 2009, p.146).

A categorização é uma representação simplificada dos dados ainda não depurados totalmente, e permite a compreensão dos elementos de análise, pois os agrupa em categorias análogas. Esta fase, também pode ser entendida como uma classificação determinada por critérios, para a viabilização das análises, mas deve ter grande seriedade na definição do foco dos objetivos da análise.

Bardin (2009, p.117) define categorização como uma “[...] operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia, com os critérios previamente definidos) [...]”.

Nesta pesquisa a categorização foi construída no decorrer das fases anteriores, baseada na repetição dos assuntos abordados nos trabalhos acadêmicos selecionados.

No próximo item apresentamos as fases desenvolvidas durante a análise de conteúdo, respeitando as fases da metodologia.

4.4 MAPEAMENTOS DAS CONTRIBUIÇÕES ACADÊMICAS

Neste item apresentamos os resultados obtidos conforme orientação metodológica. A seguir apresentamos os resultados organizados por banco de dados indicando como foram constituídas as unidades de registro para cada forma de buscas.

4.5 A PESQUISA NO SCIELO

Na base de dados do *SciELO* estão inseridas produções de periódicos brasileiros e estrangeiros apoiados pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo). A base tem como objetivo a disseminação da pesquisa por meio de formato eletrônico.

O quadro 6 apresenta a quantidade de produções com a unidade de registro: “Pensamento Algébrico” e *Algebraic Thinking*.

Quadro 4 - Resultados da pesquisa SciELO

Expressão	Resultados
Pensamento Algébrico	2
<i>Algebraic thinking</i>	7

Fonte: SciELO.(Acesso em 30 de junho de 2018).

Nos quadros 7 e 8 apresentamos as nove produções encontradas e os motivos da exclusão, por meio da leitura flutuante, o motivo destina-se ao segmento de ensino incompatível com os objetivos da pesquisa. Em 8 produções os segmentos estão claramente declarados e em uma, da área de Medicina, indicou não se tratar de ensino.

Quadro 5 - Artigos levantados na busca por: Pensamento Algébrico.

Ano	Título	Autores	Motivo de exclusão
2017	Modelagem nos anos iniciais da educação básica: como os estudantes modelam situações-problema?	SCHELLER, M. et al	
2016	A emergência do pensamento algébrico nas atividades de aprendizes surdos	FERNANDES, S.H.A.A.A.; HEALY, L.	Educação Especial

Fonte: SciELO. (Acesso em 30 de junho de 2018).

Quadro 6 - Artigos levantados pela busca por: *AlgebraicThinking*

Ano	Título	Autores	Motivo de exclusão
2017	<i>Solving a Classical Optimization Problem Using GAMS Optimizer Package: Economic Dispatch Problem Implementation</i>	MONTOYA, G.; OSCAR, D.	Ensino Superior
2017	<i>Teoría de los números em La escuela secundaria: algunas posibilidades menos convencionales</i>	PASTORE, J.L.M.	Ensino Médio
2016	<i>El concepto de variable: una análise com estudantes de bachillerato</i>	LÓPEZ, H.H.; BORGES, A.C.; VEGA, J.E.E.	Ensino Médio
2016	<i>Pensamiento Aritmético-Algebraico através de um Espaço de Trabajo</i>	CORTÉS, J.C.; HITT, F.; SABOYA, M.	Ensino Médio

	<i>Matemático e nun Ambiente de Papel, Lápis y Tecnología em La Escuela Secundaria</i>		
2016	<i>A emergência do pensamento algébrico nas atividades de aprendizes surdos</i>	FERNANDES, S.H.A.A.A.; HEALY, L.	Educação Especial
2016	<i>Non-hierarchical clustering as a method to analyse an open-ended questionnaire on algebraic thinking</i>	DI PAOLA, B.; ONOFRIO, R. B.; FAZIO, C.	Ensino Médio
2014	<i>Visual optics under the wavefront perspective</i>	FARIA E SOUSA, S. J; VICTOR, G.; ALVES, M. R.	Medicina

Fonte: SciELO. (Acesso em 30 de junho de 2018)

Verificou-se que nesse banco de dados foi encontrado um único trabalho, de autoria de Scheller, et al.(2017), que completou os requisitos de pertinência, ou seja, com abordagem nos anos finais do Ensino Fundamental I, por esse motivo foi selecionado inicialmente para compor o *corpus*.

No entanto, como levantado anteriormente, a metodologia faz com que alguns direcionamentos sejam necessários no decorrer das fases para a escolha de documentos. Neste momento, fez-se a opção de não abordar textos destinados à educação especial que ficará para uma próxima oportunidade.

4.6 A PESQUISA NA WEB OF SCIENCE

A base de dados *Web of Science* se define com uma plataforma referencial de citações científicas, projetada para apoiar pesquisas científicas e acadêmicas com cobertura nas áreas de ciências, ciências sociais, artes e humanidades.

A *Web of Science Core Collection*⁶ inclui mais de 20.000 revistas acadêmicas de alta qualidade, revisadas por pares e publicadas em todo o mundo (incluindo periódicos de acesso aberto), e mais de 190.000 processos de conferências.

A coleção é composta por dez índices contendo informações coletadas de milhares de periódicos, livros, séries de livros, relatórios, conferências e outros materiais acadêmicos e oferece totalmente mais de 12.000 periódicos de grande impacto acadêmico. Por ser uma base essencialmente internacional optamos em realizar a pesquisa somente em inglês, mas a base disponibiliza buscas em outros idiomas.

Apresentamos no quadro 9 a quantidade de textos encontrados com as palavras-chaves (unidades de registro) que refletem a pertinência desta pesquisa. O quadro 10 apresenta os títulos dos textos e o motivo de exclusão para os 30 resultados com a expressão “*Algebraic thinking*”.

Ao associarmos à palavra-chave “*Algebraic thinking*” com “*Elementary school*”, encontramos 2 textos, que apresentamos no quadro 11, que por sua vez, já estão inseridos nos 30 da busca anterior. Ao apresentarmos e compararmos os resultados, uma hipótese metodológica foi observar além dos 2 que explicitam o nível de ensino, nos 28 restantes quais características indicativas de pertencimento seriam explicitadas.

Quadro 7 - Resultados da pesquisa Web of Science.

Expressão	Resultados
<i>Algebraic thinking</i>	30
<i>Algebraic thinking and Elementary School</i>	2

Fonte: *Web of Science*. (Acesso em 21 de maio 2018)

⁶Esta base tem acesso restrito e pode ser acessada através do Portal da CAPES. Disponível em: <<http://www.periodicos.capes.gov.br/>>, no espaço de busca, clique em “base” e depois digite *Web of Science*.

Quadro 8 - Web of Science: artigos levantados pela busca por “*Algebraic thinking*”.

Ano	Título	Autores	Motivo de Exclusão
2018	<i>Examining Early Algebraic thinking: insights from empirical data</i>	CHIMONI, M.; PITTA-PANTAZZI, D.; CHRISTOU C.	Comparação 4º e 7º anos do Ensino Fundamental I e II.
2018	<i>Algebraic Thinking in Solving Linier Program at High School Level: Female Student's Field Independent Cognitive Style</i>	HARDIANI, N; BUDAYASA, I; JUNIATI, D.	Ensino Médio
2017	<i>An Analysis of Middle School Mathematics Textbooks from the Perspective of Fostering Algebraic Thinking through Generalization</i>	AYBER, G.; TANISLI, D.	Ensino Médio
2017	<i>Think locally, fit globally: Robust and fast 3D shape matching via adaptive algebraic fitting</i>	YYOU, S.; ZHANG, D.	Projeto Computacional
2017	<i>Effects of using problem of the week in teaching on teacher learning and change in algebraic thinking and algebra</i>	WU, Z.	Formação de Professores
2017	<i>A Review on the Development of Algebraic Thinking Through Technology</i>	MUSTAFA, N.; ISMAIL, Z. B.; SAID, M.N. ET AL.	Programas Tecnológicos em Álgebra
2017	<i>Algebraic procedures and creative thinking</i>	TABACH; M.; FRIEDLANDER, A.	Ensino Fundamental II
2017	<i>Shifting paradigm in problem solving algebraic versus arithmetic</i>	ELLIS, MARK	Genérico(Davidov)
2017	<i>Upper elementary grades students</i>	PRATWI, V.	Genérico

	<i>algebraic thinking ability in Indonesia</i>	HERMAN, T.; LIDMILLAH, D. A.	
2017	<i>Structured manipulable material versus applet in the development of algebraic thinking at the 1st cycle of basic education</i>	SANTOS, N.; AFONSO, P.; GIL, H.	3º ano do Ensino Fundamental I
2017	<i>Student Obstacles in Solving Algebraic Thinking Problems</i>	ANDINI, W.; SURYADI, D.	3º ano do Ensino Fundamental I
2017	<i>Analysis of Students' Error in Algebraic Thinking Test</i>	MUTHMAINNAH, M; PRIATNA, B.A.	Ensino Fundamental II
2017	<i>Analysis of Secondary School Students' Algebraic Thinking and Math-Talk Learning Community to Help Students Learn</i>	NURHAYATI, D.M.; HERMAN,T.; SUHENDRA, S.	Ensino Médio
2017	<i>Students' Algebraic Thinking Process in Context of Point and Line Properties</i>	NURRAHHMI, H.; SURYADII, D; FATIMAH, S.	Ensino Médio
2017	<i>Development and evaluation of form three mathematics i-Think module (Mi-T3) on algebraic formula topic</i>	SAM, S.; ABDULLAH, MOHD F.	Ensino Médio
2017	<i>Parsing the Notion of Algebraic Thinking within a Cognitive Perspective</i>	CHIMONI, M.; PITTA- PANTAZI, D.	Ensino Médio
2017	<i>Call for manuscripts: Early Algebraic thinking/Convocatoria de presentación de manuscritos: Pensamiento algebraic otemprano</i>	CANADAS, M. C.; BLANTON, M.; BRIZUELA, B.M.	Chamada de trabalhos
2017	<i>Reorganizing Algebraic Thinking: An Introduction to Dynamic System Modeling</i>	FISHER, D.	Ensino Médio

2017	<i>Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment</i>	HITT, F.; SABOYA, M.; ZAVALA, C. C.	Números poligonais para Ensino Médio
2016	<i>Early Algebraic thinking of primary school pupils (6-12 years) related to linear patterns generalizing problems</i>	LUZ, C., GARCIA-RECHE, A.; FERNANDEZ, C.	Faz uma análise geral desde a Educação Infantil
2016	<i>An arithmetic-algebraic workspace for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers</i>	HITT, F; SABOYA, M.; ZAVALA, CARLOS CORTES	Ensino Fundamental II
2016	<i>Non-hierarchical clustering as a method to analyse an open-ended questionnaire on algebraic thinking</i>	PAOLA, B.; BATAGLIA, O. R. FAZIO, C.	Ensino Médio
2015	<i>Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club</i>	WALKOE, J.	Análise de aulas de álgebra por professores
2015	<i>A Review on the Developing Algebraic Thinking</i>	MUSTAFFA, N.; ISMAIL Z. B.; SAID, M.N. ET AL.	Ensino Médio
2015	<i>Developing Concepts and Generalizations to Build Algebraic Thinking: The Reversibility, Flexibility, and Generalization Approach</i>	DOUGHERTY, B.; BRYANT, D., BRYANT, B.; ET AL	Ensino de álgebra geral
2015	<i>Mathematical knowledge and higher order thinking for teaching algebraic problem solving</i>	TAJUDIN, N.	Formação de Professores
2014	<i>The Development of Children's</i>	BLANTON, M.;	3º ano do Ensino

	<i>Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade</i>	STEPHENS, A.; KNUTH, E.; ET AL.	Fundamental
2014	<i>Numerical and Algebraic Thinking and History of Mathematics and Mathematics Education</i>	CARRAHER, D.W.	Educação Matemática
2014	<i>Research on numerical and algebraic thinking</i>	BEDNARZ, N.	Sem acesso digital
2014	<i>Examples of tasks from different cognitive thinking level for the theme algebraic rational expressions</i>	GOGOVKA, V.	Ensino Médio

Fonte: Web of Science. (Acesso em 21 de maio de 2018)

Quadro 9 - Web of Science: artigos levantados pela busca por “*Algebraic Thinking*”

Ano	Título	Autores
2017	<i>Structured manipulable material versus applet in the development of algebraic thinking at the 1st cycle of basic education (artigo)</i>	SANTOS, N.; AFONSO, P.; GIL, H.
2017	<i>Student Obstacles in Solving Algebraic Thinking Problems (artigo)</i>	ANDINI, W.; SURYADI, D.

Fonte: Web of Science. (Acesso em 21 de maio de 2018)

Para o critério de exclusão, vale mencionar que tivemos o cuidado de observar a equivalência dos anos escolares nos países de origem da pesquisa abordados nos documentos.

Após a análise, verificou-se que nesse banco de dados não foram encontradas pesquisas que preenchessem todos os requisitos de pertinência, ou seja, com abordagem nos anos finais do Ensino Fundamental.

Neste momento, não há nenhuma produção a ser incorporada ao *corpus*, pois não foram lançadas hipóteses que relacionem as produções acadêmicas ao currículo.

Justificamos a eliminação das contribuições que tem caráter genérico e de formação de professores, pela intenção da aproximação que estas contribuições poderiam ter com a prática do professor e com a construção do produto educacional.

A hipótese metodológica levantada não pode ser avaliada com esses dados, por isso ela permaneceu para o levantamento no próximo banco de dados.

4.7 A PESQUISA NO GOOGLE ACADÊMICO

O *Google Acadêmico* ou *Google Scholar* possui uma ampla rede de banco de dados. O site utiliza-se de bibliografias de arquivos inseridos tais como teses, dissertações, artigos, entre outras produções. O site iniciou seu funcionamento em 2004, e já em 2006, a plataforma começou a realizar pesquisas também em língua portuguesa. Além da utilização das palavras-chaves, é possível fazer uma pesquisa mais detalhada especificando data, autor e até mesmo local seja ela feita no Brasil ou não, por meio da busca avançada.

Como já relatado nas bases anteriores, para o propósito deste trabalho foi utilizada a pesquisa avançada, delimitando as palavras-chave e o período determinado.

Sendo assim, a primeira busca pautou-se no termo “Pensamento Algébrico” que apresentou 70 resultados. A busca seguinte foi realizada com o termo “Pensamento Algébrico” e adicionado o campo “Ensino Fundamental” que nos apresentou 7 resultados (Quadro 12).

Quadro 10 - Resultados da pesquisa Google Acadêmico

Expressão	Resultados
Pensamento Algébrico	70
Pensamento Algébrico e Ensino Fundamental	7

Fonte: Google Acadêmico. (Acesso em 11 de julho de 2018)

Na leitura flutuante realizada nos resumos, eliminamos os trabalhos que não estavam centrados em práticas escolares, outro refinamento que aproxima o trabalho do pedagogo ao tema e ao outro produto da pesquisa para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

As 7 produções encontradas quando incluímos o termo ensino fundamental estão contabilizadas nas 70. Dessas 70, ao realizar a leitura flutuante, separamos em duas partes, uma primeira que identifica o não pertencimento ao segmento de ensino 4º e 5º anos do Ensino Fundamental que apresentamos no anexo1, os quais compreendem 51 produções.

Um aspecto metodológico a destacar é que a hipótese de que haveria 7 ou menos produções possíveis de compor o corpus, pela delimitação realizada, foi banida, uma vez que foram encontradas nesta fase mais de 7 produções que se enquadram na regra de pertencimento pela leitura flutuante dos títulos e resumos.

No quadro 13 a seguir, apresentamos as produções, seus autores e ano de publicação, bem como o motivo de sua exclusão, quando houve que não foi o segmento de ensino.

Quadro 11 - Google Acadêmico: artigos levantados pela busca por “Pensamento Algébrico”.

Ano	Nome do trabalho	Autores	Motivo da Exclusão
2017	Pensamento algébrico: em busca de uma definição	ALMEIDA, J.R.; SANTOS M.C.	Formação de Professores
2016	Processos de negociação de significados sobre pensamento algébrico em uma comunidade de formação inicial de professores de matemática	CYRINO, M.C.C.T.; CALDEIRA, J.S.	Formação de Professores
2016	Desenvolvimento do pensamento algébrico e os softwares de matemática dinâmica: metanálise de produções brasileiras	TEIXEIRA SOBRINHO, A.S.	Desenvolvimento de <i>software</i>
2016	Características do	FERNANDES, R.K.;	

	pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental	SAVIOLI, A.M.P	
2016	O desenvolvimento do pensamento algébrico através de padrões pictóricos de crescimento	NUNES, S.I.G.	
2016	A análise de sequências pictóricas por alunos do 4º ano de escolaridade na promoção do pensamento algébrico	CORREIA, F.; BRANCO N	
2016	A construção do conhecimento no desenvolvimento do pensamento algébrico	PIMENTA, C.M.S.	
2016	Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais por meio da Modelagem Matemática na Educação: possibilidade de utilização de linguagem simbólica	SCHELLER, M.; BANOTTO, D.L; VIALI,L.	
2015	O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico	RODRIGUES, P. F. P.	
2015	O Estado da Arte das Pesquisas sobre o Pensamento Algébrico com Crianças	BECK, V.C.; SILVA, J.A.	Discussão teórica

2015	Desenvolvendo o pensamento algébrico no 2.º ciclo do ensino básico: o sentido dos símbolos e da generalização	INFANTE, M.L.C.V.	Formação de Professores
2015	Manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental	SILVA, D.P; A.M.P.D SAVIOLI	
2015	Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da <i>Early Algebra</i>	SILVA, D.P.; SAVIOLI, A.M.P.D.	
2015	Contribuições para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico	SAVIOLI, A.M.P.D; BONI, K.D.	
2014	Pensamento algébrico de professores do pensamento algébrico de professores do 1º ciclo: algebrização da aritmética	REZIO, S.	Pesquisa com Professores
2014	Conceitos e habilidades do pensamento algébrico para professores do 1º ciclo	REZIO, S.	Formação de Professores
2014	Pensamento algébrico e formação inicial de professores de matemática	ALMEIDA, J.R; CÂMARA, M.	Formação de Professores
2014	Algumas reflexões sobre o pensamento algébrico nos anos iniciais	SILVA, J.P.	Teórico

2014	Pensamento algébrico: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria	OLIVEIRA, S.A.; LAUDARES, J.B.	Formação de Professores
2014	O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade: uma experiência de ensino	MESTRE, C.	
2014	Características de pensamento algébrico evidenciadas por estudantes do Ensino Fundamental em questões não rotineiras	FERNANDES, R.K.; ALVES, E.M.V.; GERALDO, M.L.	
2014	Desenvolvimento do pensamento algébrico através de tarefas de investigação matemática com padrões de crescimento	NUNES, C.I.G	

Fonte: Google Acadêmico. (Acesso em 11 de julho de 2018).

Nesta etapa, eliminamos as produções centradas na Formação de Professores ou ainda que apresentassem somente aporte teórico.

Verificou-se que nesse banco de dados foram encontradas 12 pesquisas que preenchessem todos os requisitos de pertinência, ou seja, com abordagem nos anos finais do Ensino Fundamental.

4.8 A PESQUISA NA BIBLIOTECA DIGITAL DE TESES E DISSERTAÇÕES

Outro banco de dados utilizado na pré-análise foi a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações⁷, que tem como objetivo “integrar, em um único portal, os sistemas de

⁷ Disponível em: <<http://bdtd.ibict.br/vufind/>>. Acesso em: 13 nov. 2018.

informação de teses e dissertações existentes no país disponibilizar para os usuários um catálogo nacional de teses e dissertações em texto integral, possibilitando uma forma única de busca e acesso a esses documentos.” (IBICIT, s.d.)⁸.

Esta rede foi desenvolvida pelo IBCT (Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia) que, com esta iniciativa, pretende:

[...] integrar os sistemas de informação de teses e dissertações existentes nas instituições de ensino e pesquisa do Brasil, e também estimular o registro e a publicação de teses e dissertações em meio eletrônico. A BDTD, em parceria com as instituições brasileiras de ensino e pesquisa, possibilita que a comunidade brasileira publique e difunda suas teses e dissertações produzidas no País e no exterior, dando maior visibilidade à produção científica nacional. (BDTD, s.d.).

Este banco de dados foi criado em 2002 e atualmente é visto como grande iniciativa para a divulgação das pesquisas e trabalhos produzidos com idoneidade e transparência.

Além disso, a rede através de seu sistema de informação distribui e organiza as teses e dissertações num sistema de Arquivos Abertos (OAI), um modelo que se utiliza de padrões de interoperabilidade, isto é, um sistema que se comunica com outros sistemas de forma transparente.

A busca foi realizada na plataforma no modo avançado, dentro do período delimitado (2014-2018) e utilizando a palavra-chave “Pensamento Algébrico”, que resultou em 11 produções. O quadro 14 apresenta esses resultados, já com a coluna de motivo de exclusão.

Quadro 12 - BDTD- Artigos levantados pela busca por Pensamento Algébrico

Ano	Título	Autor	Motivo da Exclusão
2018	Pensamento algébrico no currículo do ciclo de alfabetização: estudo comparativo de duas propostas	LIMA, J. R. DE C.	Enfoque no professor
2018	Pensamento algébrico: quais elementos são	SOARES, R. M.	Ensino Fundamental

⁸ Disponível em: <<http://sitehistorico.ibict.br/informacao-para-ciencia-tecnologia-e-inovacao%20/biblioteca-digital-Brasileira-de-teses-e-dissertacoes-bdtd>>. Acesso em: 13 nov. 2018.

	identificados por professores de Matemática em atividades com este foco?		II
2018	O ensino de álgebra e a crença de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico	PINHEIRO, A. C.	Enfoque no professor
2017	Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do pensamento algébrico	FERREIRA, M. C. N.	Sem acesso digital
2016	Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade	ALMEIDA, J. R. DE	Ensino Fundamental II
2016	O desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos: Uma compreensão à luz da Teoria das Situações Didáticas	SILVA JUNIOR, L. M. DA	Ensino Fundamental II
2016	Pensamento algébrico: indícios de um currículo enculturador	SILVA JÚNIOR, F. DE M.	Discussão acerca de Currículo para

			professores
2016	Pensamento algébrico e os significados do sinal de igualdade: o uso da oralidade e da narrativa nas aulas de matemática	CRUZ, P. S. F. DA	Ensino Fundamental II
2014	Álgebra e aspectos do pensamento algébrico: um estudo com resolução de problemas na licenciatura em Ciências Naturais e Matemática - UFMT/Sinop	LAIER, S. S. S.	Ensino Superior
2014	O percurso da didatização do pensamento algébrico no ensino fundamental: uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático	AGUIAR, M.	Ensino Fundamental II
2014	Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I	FERNANDES, R.K.	

Fonte: IBCT. (Acesso em 30 de setembro de 2018)

Após a análise, verificou-se que nesse banco de dados foi encontrada 1 pesquisa que preenchesse todos os requisitos de pertinência, ou seja, com abordagem nos anos finais do Ensino Fundamental I. A exclusão do trabalho por ser uma discussão acerca do currículo justifica-se pelo fato de que apesar de entendermos a relevância desta discussão, neste momento este não é o foco da pesquisa.

4.9 SÍNTESE DA CONSTITUIÇÃO DO *CORPUS* 1

A seleção dos trabalhos realizada por meio das buscas nas bases de dados: *SciELO*, *Web of Science*, *Google Acadêmico* e *BDTD*, o *corpus* inicial desta pesquisa foi formado por: 9 artigos, 4 dissertações e 1 tese.

No Quadro 15, organizado por ordem de ano de publicação, foi incluída a coluna contendo as palavras-chaves das produções, pois este item permite melhor compreensão do trabalho analisado. Outra inclusão foi coluna que descreve os objetivos, uma a fim decompor outro elemento para leitura e refinamento na pertinência para o *corpus* definitivo.

Quadro 13 - Refinamento para definição do *corpus*

Ano de Publicação	Local de Partida	Modalidade	Autores	Título	Objetivos	Palavras-Chave	Motivo da exclusão
2017	Scielo	Artigo	SCHELLER, M. BONOTTO, D. de L.; MADRUGA, E.F.; BIEMBENGUT, M.S.; SÁNCHEZ, J. M. C.	Modelagem nos anos iniciais da educação básica: como os estudantes modelam situações-problema?	Compreender e analisar como estudantes dos Anos Iniciais da Educação Básica, em atividade de modelagem, resolvem situações-problema que podem requerer domínio algébrico simbólico.	Educação básica; Modelagem na educação; Ensino e pesquisa; Álgebra.	
2016	Google Acadêmico	Artigo	FERNANDES, R.K.; SAVIOLI, A. M. P. das D.	Características do pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental	Este artigo apresenta parte dos resultados de uma pesquisa de mestrado que teve por objetivo investigar características do	Educação Matemática. Ensino Fundamental I. Pensamento algébrico.	Relato correspondente à dissertação já elencada pela busca no BDTD

					pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I. Os estudantes que fizeram parte dessa pesquisa até a aplicação das questões não tinham tido contato com a simbologia formal da álgebra.		
2016	Google Acadêmico	Artigo	SCHELLER, M; BONOTTO, D. de L.; VIALI, L.	Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais por meio da Modelagem Matemática na Educação: possibilidade de utilização de linguagem simbólica	Analisar as práticas a fim de demonstrar que a MME possibilita a utilização de linguagem simbólica pelos estudantes.	Álgebra nos Anos Iniciais, Linguagem simbólica, Pensamento funcional.	
2016	Google Acadêmico	Dissertação	PIMENTA, C.M. dos S.	A construção do conhecimento no desenvolvimento	Analisar, descrever e refletir sobre	Abstração Reconhecer Construir	

				do pensamento algébrico	os raciocínios desenvolvidos pelos alunos, compreender melhor a influência do contexto, em particular da mediação estabelecida pela professora.	Construção Consolidação <i>EarlyAlgebra</i> Mediação Modelo RBC+C Pensamento algébrico Tarefa exploratória Signos matemáticos	
2016	Google Acadêmico	Artigo	CORREIA, F.; BRANCO, N.	A análise de sequências pictóricas por alunos do 4º ano de escolaridade na promoção do pensamento algébrico	Compreender como é que alunos do 4.º ano analisam e generalizam sequências pictóricas crescentes, nomeadamente como determinam termos próximos, distantes e como expressam as suas generalizações.	Sequências pictóricas; generalização; pensamento algébrico.	
2016	Google Acadêmico	Artigo	NUNES, S.I.G.	O desenvolvimento do pensamento	Compreender o		Relatório partindo da dissertação

				algébrico através de padrões pictóricos de crescimento	desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano de escolaridade, em contexto de exploração de padrões de crescimento em sequências pictóricas.		publicada em 2014
2015	Google Acadêmico	Artigo	SILVA, D.P.da; SAVIOLI, A. M. P. das D.	Manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental	Identificar, analisar e discutir características do pensamento algébrico elementar nas produções escritas de oito tarefas da <i>Early Algebra</i> aplicadas a estudantes do 5ºAno do Ensino Fundamental I.	Educação Matemática. Pensamento Algébrico Elementar. <i>Early Algebra</i> . Anos Iniciais.	
2015	Google	Artigo	SILVA, D.P.	Caracterizações do	Compreende	Pensamento	

	Acadêmico		da; SAVIOLI, A.M.P.D.; PASSOS, M.M.	pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da <i>EarlyAlgebra</i>	r como esses estudantes do 5º ano lidam com tarefas que podem promover o desenvolvime nto do pensamento algébrico.	Algébrico. Análise de Conteúdo, <i>Early Algebra</i> , Séries Iniciais.	
2015	Google Acadêmico	Dissertação	RODRIGUE S, P. F. P.	O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico	Averiguar o contributo da aprendizagem destes tópicos na promoção do pensamento algébrico de alunos destes ciclos de escolaridade.	Não cita as palavras-chave	2º e 6º anos do Ensino Fundamental
2015	Google Acadêmico	Artigo	SAVIOLI, A.M.P.D.; BONI, K. T.	Contribuições para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico	Investigar e analisar, em procedimentos de cálculos aritméticos, indícios de pensamento algébrico que são manifestados oralmente por estudantes do 5º ano do	Educação Matemática. Procedimentos de Cálculos Aritméticos. Pensamento Algébrico. Registros de Representação Semiótica	

					Ensino Fundamental ao se envolverem com uma tarefa potencialmente algébrica.		
2014	Google Acadêmico	Tese	MESTRE, C. M. M.	O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade: uma experiência de ensino	Compreender como se desenvolve a capacidade de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade, no decurso de uma experiência de ensino.	Pensamento algébrico, generalização, pensamento relacional, pensamento funcional, representações, discussão coletiva, experiência de ensino.	
2014	Google Acadêmico	Dissertação	NUNES, C.I.G	O desenvolvimento do pensamento algébrico através de tarefas de padrões pictóricos de crescimento	Compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano de escolaridade, em contexto de exploração de padrões de	Pensamento algébrico, material manipulável, raciocínio recursivo.	

					crescimento em sequências pictóricas.		
2014	Google Acadêmico	Artigo	FERNANDE S, R.K; ALVES, E.M; GERALDO, M.L.; SAVIOLI, A.M.P. D.	Características de pensamento algébrico evidenciadas por estudantes do Ensino Fundamental em questões não rotineiras	Analisar os registros escritos de seis estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I, na intenção de verificar que características de pensamento algébrico foram manifestadas por eles e assim, responder a questão norteadora, que características de pensamento algébrico estudantes do Ensino Fundamental	Educação Matemática, Pensamento Algébrico. Ensino Fundamental I.	Relato correspondente à dissertação já elencada pela busca no BDTD

					I evidenciam ao resolver questões não rotineiras?		
2014	BDTD	Dissertação	FERNANDES, R.K.	Manifestação de pensamento algebrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I	O trabalho tem como objetivo analisar a produção escrita de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em questões retiradas de documentos nacionais relacionados à Prova Brasil, sendo estes PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil, e analisar quais características de	Linguagem e educação, Educação matemática, Estudantes - Testes e medidas educacionais, Matemática - Estudo e ensino, Álgebra - Formação de conceitos.	

					pensamento algébrico são manifestadas por eles na resolução das mesmas.		
--	--	--	--	--	---	--	--

Fonte: Elaboração da autora (2019).

Justificamos a exclusão de 4 contribuições nesta etapa: 3 por serem artigos retirados de dissertações já selecionadas; 1 por se tratar de aplicações realizadas com estudantes de 2º e 6º anos do Ensino Fundamental I e II, faixa etária que não faz parte do nosso escopo.

Apesar da produção que se trata de estudantes de 2º ao 6º ano do ensino Fundamental envolver os estudantes que são nosso foco de pesquisa esta contribuição foi excluída por apresentar de maneira geral as situações de aprendizagem o que impossibilitava a análise de estudantes dos 4º e 5º anos separadamente.

Os novos elementos apresentados no quadro 15 propiciaram a definição do *corpus* com 10 produções acadêmicas e a formulação da grelha que foi construída na fase que trataremos a seguir no item categorização.

Nessa nova etapa de exploração de material faremos uma leitura ampliada dos trabalhos selecionados. . Ainda, neste momento, a leitura não se baseia somente nos títulos e resumos, sendo feita uma leitura analítica. Esta etapa é nomeada de leitura seletiva:

A leitura seletiva é mais profunda que a exploratória; todavia, não é definitiva. É possível que se volte ao mesmo material com propósitos diferentes. Isso porque a leitura de determinado texto pode conduzir a algumas indagações que, de certa forma, podem ser respondidas recorrendo-se a textos anteriormente vistos. Da mesma forma, é possível que determinado texto, eliminado como não pertinente, venha a ser objeto de leitura posterior, em decorrência de alterações dos propósitos do pesquisador. (GIL, 2002, p. 78).

Com base nesta descrição, pode-se novamente reforçar o exercício de exatidão feito pelo pesquisador, que faz a todo o momento este movimento de ir e vir nas leituras e análises.

Agora, é apresentado o *corpus* das produções, que se compõe de pesquisas selecionadas para a próxima fase de interpretações e resultados. Para tanto, o quadro 16 apresenta a enumeração dos documentos do *corpus* com o acréscimo do ponto de partida das pesquisas e em quais abordagens elas estão fundamentadas.

Quadro 16 - Corpus de análise

	Tipo de Texto	Ano de Publicação	Autores	Título	Universidade	Fundamentação Teórica
1	Artigo	2017	SCHELLER, M; BONOTTO, D. de L.; MADRUGA, E.F.; BIEMBENGUT, M.S.; SÁNCHEZ, J. M. C.	Modelagem nos anos iniciais da educação básica: como os estudantes modelam situações-problema?	Instituto Federal de Educação Catarinense (IFC)	Modelagem
2	Artigo	2016	SCHELLER, M.; BONOTTO, D.L.; VIALI L.	Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais por meio da Modelagem Matemática na Educação: possibilidade de utilização de linguagem simbólica	PUC/RS	Modelagem
3	Dissertação	2016	PIMENTA, C.M. dos S.	A construção do conhecimento no desenvolvimento do	Universidade da Beira Interior (UBI).	<i>Early Algebra</i>

				pensamento algébrico		
4	Artigo	2016	CORREIA, F.; BRANCO, N.	A análise de sequências pictóricas por alunos do 4º ano de escolaridade na promoção do pensamento algébrico	Universidade de Lisboa/ Instituto Politécnico de Santarém	Pensamento Algébrico: (NCTM; Vale & Pimentel; Ponte; e Ponte; Branco; Matos)
5	Dissertação	2016	NUNES, S.I.C.	O desenvolvimento do pensamento algébrico através de padrões pictóricos de crescimento	Instituto Politécnico de Lisboa	Pensamento Algébrico: (Canavarro; Borralho e Barbosa)
6	Artigo	2015	SILVA, D.P.da; SAVIOLI, A.M.P.D. PASSOS, M.M.	Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da <i>Early Algebra</i>		<i>Early Álgebra</i>
7	Artigo	2015	SAVIOLI, A.M.P.D.; BONI, K. T.	Contribuições para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico	UEL	Semiótica
8	Artigo	2014	DA SILVA, D.P.;	Manifestação do	UEL	<i>Early Álgebra</i>

			SAVIOLI, A. M. P. das D.	pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental		
9	Tese	2014	MESTRE, C.M. M	O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade: uma experiência de ensino	Universidade de Lisboa	Pensamento Algébrico: (Lins e Kaput; Carraher e Schliemann; Kieran)
10	Dissertação	2014	FERNANDES, R.K.	Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I	UEL	Pensamento Algébrico: (Kieran)

Fonte: Elaboração da autora (2019).

Algumas produções não evidenciam seu referencial teórico, apresentando diferentes concepções sobre o pensamento algébrico, então optamos em apontá-los na coluna que se refere ao referencial teórico.

Neste momento questões “como” e “por que” unificam a pesquisa com a teoria, e utilizando a técnica de codificação, permite a evidência da contribuição destas pesquisas para o ensino e desenvolvimento do pensamento algébrico nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

Segundo Bardin (2009), a constituição da grelha implica que o pesquisador estabeleça um conjunto de critérios para olhar para o seu tema de estudo e estabeleça um procedimento (através de uma grelha/ matriz) onde registre de forma sistemática para interpretá-la.

As categorias apresentadas no quadro 15, grelha de análise, foram formadas a partir da leitura minuciosa dos materiais constituindo-se nas contribuições acadêmicas sobre o pensamento algébrico no ensino, com enfoque em situações de aprendizagem como amostra representativa para atender os direcionamentos da pesquisa: pensamento algébrico, 4º e 5º anos do ensino fundamental, período desde 2014, contribuições para o currículo que se aproximem da prática do professor. Na grelha, cada produção pode participar de uma ou mais categorias.

.

Quadro 17 - Grelha de análise: Categorias elencadas do corpus

Pensamento algébrico			Ensino/Aprendizagem
Generalização	Linguagem	Variável	Situações de Aprendizagem
Padrões Numéricos	Retórica	Aspecto funcional	Modelagem
Sequências Pictóricas	Simbólica	Aspecto relacional	Situação-problema
Geométricas (figuras)			Tarefa
			Avaliação

Fonte: Elaboração da autora (2019)

Utilizamos situações de aprendizagem como termo unificador no qual os autores denominam outros termos como tarefa, atividade, situação problema, entre outras

possibilidades, não necessariamente constituindo-se no conceito desenvolvido na Teoria Histórico-Cultural. No capítulo seguinte, apresentaremos as análises das produções com

No capítulo seguinte, apresentaremos as análises das produções com base na grelha de análise.

5. ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES ACADÊMICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL I

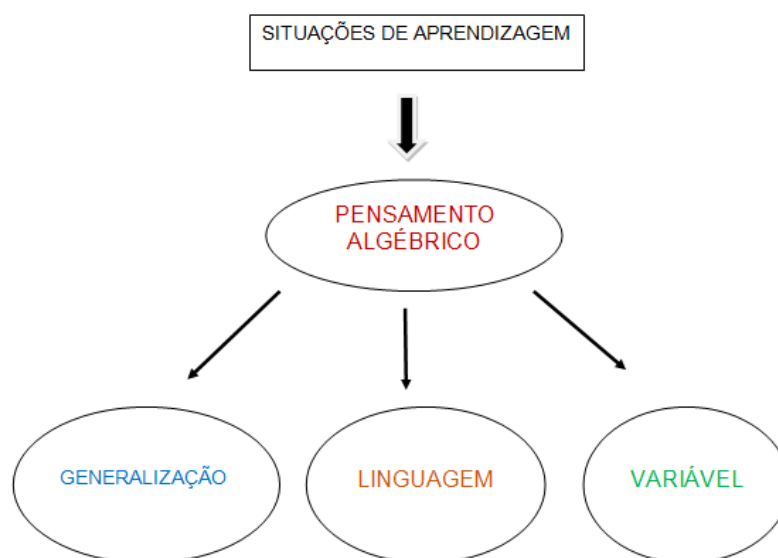
Neste capítulo, apresentaremos a análise dos trabalhos realizada após a leitura mais criteriosa e completa das produções acadêmicas, com o objetivo de identificar as categorias que estão evidenciadas nas atividades utilizadas nas pesquisas que fazem parte de nosso *corpus*.

Nesta fase acontece à busca dos significados e das contribuições que poderão ser construídas por intermédio da produção selecionada

Escolhemos como encaminhamento de análise e destacamos da grelha (quadro 17), a categoria relacionada ao ensino, ou seja, situações de aprendizagem como direcionadora para apresentação e análise das outras categorias que compreendem o pensamento algébrico: generalização, linguagem e variável.

O diagrama a seguir, (Figura 9) representa essa orientação.

Figura 8- Diagrama do foco de análise das contribuições acadêmicas:



Fonte: Elaboração da autora (2019).

Todas as produções que constituem a grelha tratam-se de aplicações e análises de situações ensino-aprendizagem que objetivam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental I.

As análises estão organizadas de forma a apresentar os objetivos da pesquisa, o contexto na qual foi aplicada, a contextualização da situação apresentada, a análise dos autores, bem como nossas observações e análises sobre as categorias.

Apresentamos a seguir as análises por situação de aprendizagem:

5.1 O TAMANHO DO CALÇADO

O artigo de Scheller, et al. (2017) apresenta como objetivo “compreender e analisar como estudantes dos anos iniciais da Educação Básica, em atividade de modelagem, resolvem situações-problema que podem requerer domínio algébrico simbólico.” (p.197)

Foram envolvidos 16 estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental oriundos de escola pública municipal em Santa Catarina. O processo com os estudantes foi conduzido por um dos autores da pesquisa.

O referencial teórico à que a pesquisa se refere é a Modelagem Matemática que, segundo os autores, “possibilita aos estudantes aprenderem matemática integrada às outras áreas do conhecimento, envolvendo situações-problemas que precisam ser interpretadas e descritas de diferentes formas pelos estudantes” (SCHELLER et. al., 2017, p. 198).

Defendendo a ideia de que a Modelagem já pode ser inserida nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os autores propuseram aos estudantes a seguinte situação- problema:

Figura 9 - O tamanho do calçado

O tamanho do seu calçado



Em todo o mundo existem várias numerações diferentes para um calçado, o que torna complicado comprar sapatos sem os provar. Mas se você optar pela compra na internet em sites estrangeiros? Como escolher corretamente a numeração? Estas e outras questões levam-nos a pensar: quando e onde iniciou essa história de número de calçado?

Você sabia? ... Tudo começou com um decreto do rei Eduardo I, da Inglaterra, em 1305. Ele estipulou, por exemplo, que trintam e quatro grãos de cevada equivaleriam ao número 34 e assim por diante. Isso facilitou a vida deles e a dos clientes que, antes da padronização, precisavam provar várias vezes um sapato até que ele ficasse pronto. Existem algumas tabelas que permitem determinar o tamanho do seu calçado. No Brasil, a numeração dos calçados varia 13 (bebês) a quase 50 (adulto), com diferença bastante pequenas entre um número e outro.

Mas como saber que é o tamanho adequado para o seu pé, se hoje em dia não temos cevada a nossa disposição com facilidade para realizar a comparação?

Então, como se pode determinar a numeração de um calçado?

Fonte: Scheller et al. (2017, p. 203).⁹

Após a leitura do problema, em um primeiro momento foi realizado com os estudantes a comparação de grãos de arroz e o tamanho do calçado de cada estudante (já que a cevada não é comum na região em que os estudantes moram). Logo após, o mediador apresentou a questão: “Como poderíamos determinar a numeração de um calçado para qualquer pessoa? Como que eu posso olhar pra um calçado e dizer: este dali é um 35, este outro 39, o que cada um pensou?”. (SCHELLER et. al, 2017, p.204).

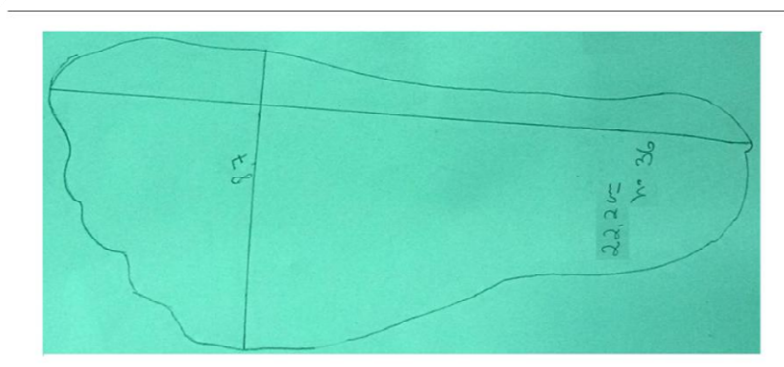
A primeira hipótese apresentada pela turma era de que o tamanho do calçado tivesse relação com a idade, apontando-nos assim um movimento de pensamento quantitativo (se eu crescer, meu pé cresce) o que foi logo descartado a partir de comparações entre os estudantes da turma. Outra hipótese foi a de experimentar o calçado, sendo necessário que o professor/mediador fizesse uma articulação, a fim de conduzir os estudantes a compreender que esta determinação poderia ser feita sem que tivessem experimentar os calçados.

⁹ No segundo parágrafo da imagem citada há a presença da expressão “trintam (sic) e quatro grãos.”.

Os estudantes optaram então, por medir os pés dos colegas e não os calçados, estipulando assim uma variável: o comprimento dos pés.

A Figura 11 apresenta o registro de um modelo de um pé, o modelo escolhido pela turma foi o que apresentava o maior comprimento e maior largura.

Figura 10 - Desenho do pé:



Fonte: Scheller et. al. (2017, p.205).

O professor indaga sobre o que é mais importante na escolha de um tamanho de calçado, o comprimento ou a largura dos pés? A opção dos estudantes foi pela medida do comprimento do pé, o que suscitou a ideia de organizar em uma tabela o número de calçado que os estudantes estavam usando naquele momento.

Figura 11 - Tabela de organização de medidas

Tabela 1 Levantamento inicial do comprimento do pé (cm) e do número do calçado dos estudantes

Comprimento (cm)	Número do calçado	Comprimento (cm)	Número do calçado
21	34	22,5	36
21,5	35	19	31
22	35	23,8	37
21,5	36	20	33
22,5	36	24,2	38
19,5	33	23,2	37
22	35	25,4	38
19,5	33	22,2	36

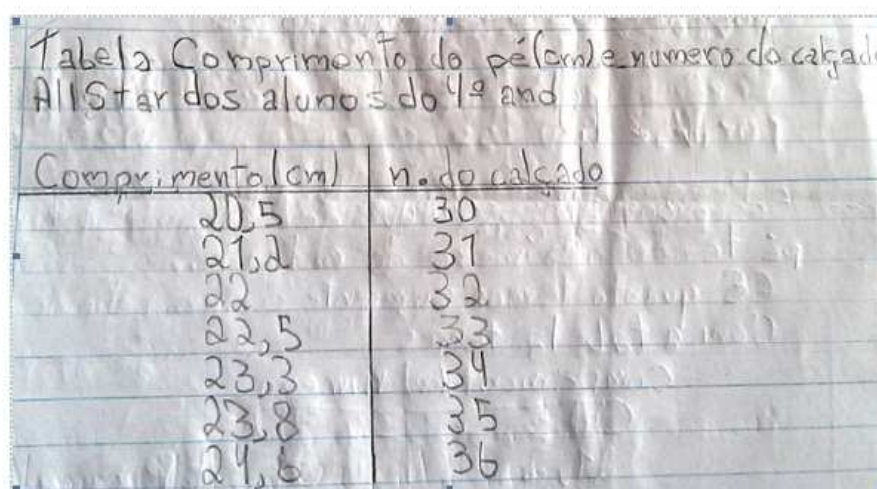
Fonte: Scheller et. al. (2017, p.206).

A construção desta tabela, segundo os autores, viabilizou aos estudantes: “identificação de números repetidos; e a existência de comprimentos de pés com tamanhos com grande variação para uma mesma numeração (tam.38)” (p.206), o que os levou a uma

reconstrução e a verificação de um equívoco na construção, já que havia uma variação grande entre os tamanhos dos pés apresentados pela numeração 38.

A figura 13 ilustra a reorganização dos dados a partir da utilização de uma tabela impressa em uma caixa de sapato (de uma marca específica desse produto) que relacionava o tamanho ideal de calçado para cada comprimento de pé, contudo perceberam que a variação no comprimento do pé para a seguinte numeração não era uniforme.

Figura 12 - Representação do Estudante 8



Comprimento (cm)	n.º do calçado
20,5	30
21,2	31
22	32
22,5	33
23,3	34
23,8	35
24,6	36

Fonte: Scheller et. al. (2017, p.206).

A prática, segundo os autores, “[...] proporcionou aos estudantes a exploração e a manipulação de quantidades e identificação de uma relação entre a numeração e o comprimento do pé, obtendo generalização de maior complexidade [...]” (SCHELLER et. al., 2017, p. 206).

Não vamos discutir aqui o que os autores nomeiam por “generalização de maior complexidade”, detemo-nos a indicar que no desenvolvimento do pensamento algébrico foi explorada a variação numérica das variáveis em questão, assim como a identificação de uma relação entre elas.

Foi então solicitado aos estudantes que determinassem o tamanho do pé para o calçado de numeração 37, que não era apresentado na tabela.

Os dados do comprimento do pé apresentavam uma variação não uniforme, porém foi usada a média de 0,7 cm, estabelecendo uma variação fixa entre um comprimento e outro, e associando à numeração; foi criado um modelo, representado na Figura 14. Essa regularidade,

de que a cada comprimento acrescido de 0,7 correspondesse ao número de calçado acrescido de 1, a partir de um início fixo, permitiu que os estudantes pudessem responder ao questionamento do professor.

Esta etapa nos remete a uma regularidade para generalização: relação do tamanho do calçado e tamanho do pé.

Figura 13 - Tabela de relação de tamanhos.

Tabela 2. Modelo que descreve o comprimento do pé (cm) em função do número do calçado, a partir da menor numeração obtida pelos estudantes

Comprimento (cm)	Número do calçado
20,5	30
+ 0,7	
21,2	31
+ 0,7	
21,9	32
22,6	33
23,3	34
24	35
24,7	36
25,4	37
...	...

Fonte: Reelaborado pelos autores a partir dos registros do estudante 1.

Fonte: Scheller et al. (2017, p.207)

Os autores verificaram neste momento que:

Na validação, ao multiplicarem o valor da numeração por 0,7, obtiveram resultados próximos aos contidos na Figura 3¹⁰ (por exemplo: $0,7 \times 30 = 21$ cm (20,5 na tabela), e verificaram a necessidade de reduzir 0,5 do produto encontrado. Desse modo, determinavam modelo capaz de determinar o tamanho do pé, descrito por eles em linguagem natural. No entanto, logo perceberam que este procedimento era útil apenas para determinar o tamanho do pé tendo a numeração do calçado. A pretensão consistia no inverso. (SCHELLER et. al., p.207)

Esta validação, ainda segundo os autores, fez com que os estudantes voltassem à primeira tabela de organização de medidas (Figura 13), agora concentrando suas atenções à variação da numeração, o que os fez constatar então, que para cada aumento de três

¹⁰ A figura 3 mencionada na citação do texto de Scheller et. al. é correspondente à figura 13 deste trabalho.

numerações havia um aumento de dois centímetros no comprimento do pé. (SCHELLER et. al. p.207)

Figura 14 - Compreensão da relação entre o número do calçado e o comprimento do pé:

Comprimento (cm)	Número do calçado
20,5	30
21,2	31
22	32
22,5	33
23,3	34
23,8	35

Fonte: Reelaborado pelos autores com base nos registros do estudante 9.

Fonte: Scheller et. al. (2017, p.208).

Em seguida, preenchendo as linhas faltantes, os estudantes identificaram a proporção de que a cada um cm de aumento na medida do comprimento do pé, a numeração aumentara em 1,5. Esta evidencia, fez com que os estudantes determinassem outro modelo:

Figura 15 - Compreensão da relação entre o número do calçado e o comprimento do pé:

Comprimento (cm)	Número do calçado
20,5	30
21,5	31,5
22,5	33
23,5	34,5
24,5	36
25,5	37,5
26,5	39

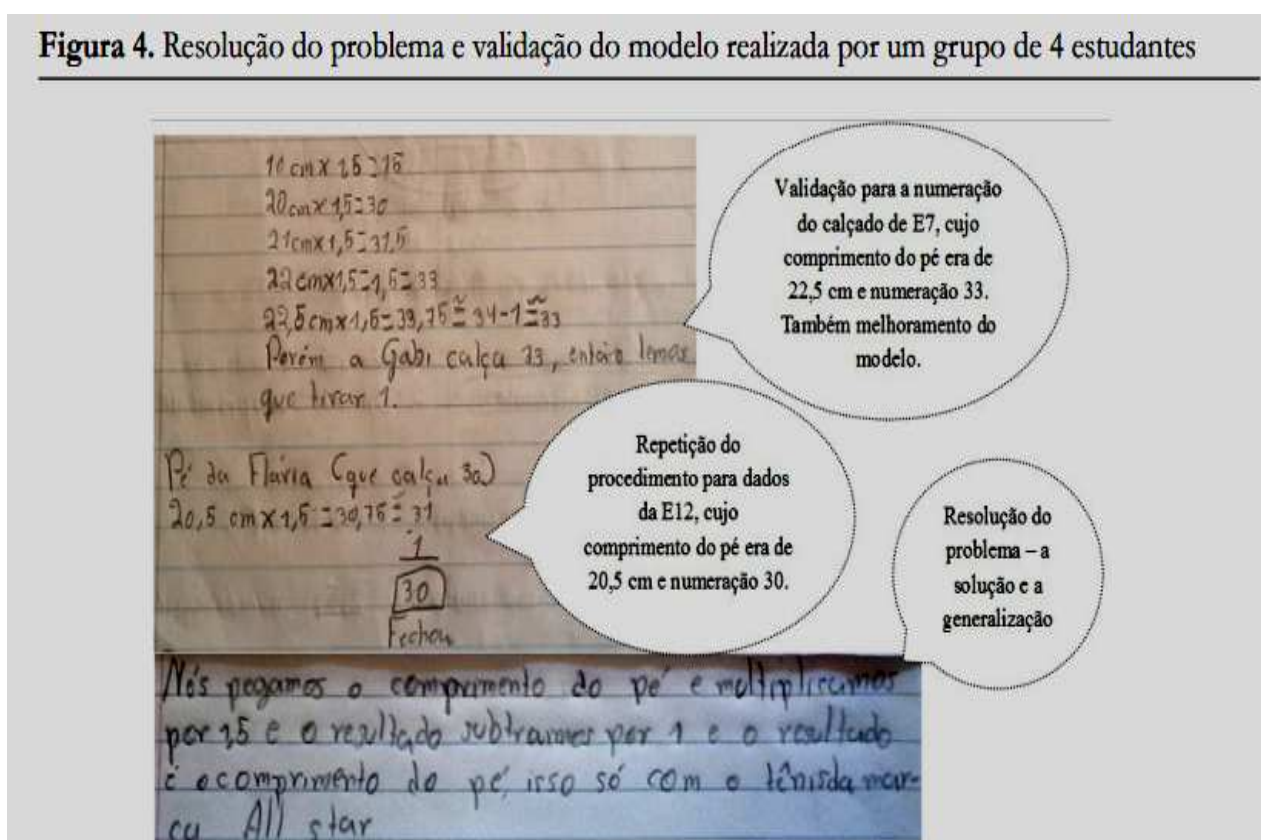
Fonte: Elaborado pelos autores a partir de dados da pesquisa.

Fonte: Scheller et. al.; (2017, p.208).

A Figura 16 nos apresenta um modelo que se pautou na busca de regularidade para uma generalização que identifique a numeração do calçado a partir do comprimento do pé, multiplicando o comprimento por 1,5 cm. Nesse momento observamos a ênfase na busca de regularidades, descartando o fato da maioria das marcas não oferecerem numerações de calçado correspondentes a números não inteiros.

A validação do modelo construído foi feita mediante a solicitação do professor de que os estudantes verificassem se o seu tamanho de pé correspondia à numeração apresentada pelo modelo obtido.

Figura 16 - Exemplo de validação do modelo obtido.



Fonte: Scheller et. al., (2017, p.209).

Segundo os autores, “[...] a resolução da situação-problema com a obtenção do modelo ilustra o tipo de linguagem de domínio dos estudantes, aquela a que estão mais familiarizados” (p.210), no caso eles a denominam de linguagem natural.

Entendemos que a denominação “linguagem natural” corresponde à linguagem verbal, em língua natural. Tomando como referencial, o movimento lógico-histórico da álgebra de

Sousa (2004) designaremos que a solução do grupo (parte inferior da Figura 17) expressa uma generalização dos procedimentos algébricos utilizando a linguagem verbal.

Os autores afirmam que se o professor em sua mediação conduzir os estudantes a apresentarem a resolução do problema de forma mais “resumida”, os estudantes serão capazes de expressassem na linguagem pré-simbólica.

Afirmam também que a atividade proporcionou aos estudantes o estabelecimento das relações numéricas entre duas variáveis, e que os estudantes superaram os desafios propostos provocados pelas mediações do professor.

A solução ao problema registrada com uso da linguagem verbal reflete a organização sintética do pensamento dos estudantes envolvendo o aspecto relacional, na tentativa de relacionar as duas variáveis, número do calçado/ comprimento do pé com uma regularidade na variação numérica entre elas, uma generalização, embora o modelo não corresponda exatamente com as mediações realizadas.

Nota-se também que o desenvolvimento dos cálculos do grupo (Figura 17) indica a relação entre as duas variáveis, porém uma das variáveis não aparece na síntese escrita.

5.2 FITAS DE MÖEBIUS

Scheller, Bonotto e Viali desenvolveram uma análise de três práticas de modelagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, objetivando “demonstrar que a prática de modelagem em educação matemática possibilita a utilização da linguagem simbólica pelos estudantes” (2016, p.702).

A pesquisa à que o artigo se refere envolveu 16 estudantes do 4º ano de uma escola municipal da região Sul do Brasil. Os autores propõem as seguintes situações expostas na Figura 18:

Figura 17 - Situações-problemas correspondente em três práticas de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental.

Prática	Situação-problema
1ª prática	Dentre várias caixas sem tampa de base retangular confeccionadas com uma folha de papel A4, qual possui maior espaço para armazenamento?   Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367 (2015).
2ª prática	O que acontece quando cortarmos/fracionamos longitudinalmente a fita de Möbius várias vezes? Que percepções se tem ao ir aumentando o número de frações na fita?  Fonte: http://www.unifal-mg.edu.br/extensao/?q=logo_extensao (2015).
3ª prática	Como determinar a numeração do calçado de uma pessoa?  Fonte: http://sergios.com.br/blog/page/75/ (2015).

Fonte: Scheller, Bonotto e Viali (2016 p.709).

Os dados da pesquisa permitiram-lhes inferir sobre as práticas de modelagem e a possibilidade de utilização de linguagem simbólica por estudantes dos anos iniciais.

Das três atividades realizadas na pesquisa, os autores ilustram somente a resolução da segunda prática (figura 19) elucidando a escolha pela “possibilidade de utilização de linguagem simbólica mais destacada.” (SCHELLER; BONOTTO; VIALI, 2016, p. 710). Na figura 19 está apresentada a situação-problema analisada, bem como a estratégia escolhida pela turma para resolução do problema.

Figura 18 - Estratégia escolhida diante da situação-problema na segunda prática de Modelagem Matemática desenvolvida pelos estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental.

Situação-problema	Estratégia escolhida
O que acontece quando cortamos longitudinalmente a fita de Möbius várias vezes? Que percepção se tem ao ir aumentando o número de frações na fita?	Confeccionar várias fitas de Möbius de mesma largura, fracionando cada uma delas em várias partes (ao meio, terça parte, quarta parte, ...). Anotar considerações decorrentes da observação na própria fita, após, todos juntos com o professor anotando na lousa, organizar em tabelas as informações obtidas, observando até o sexto corte, o número de fitas e largura da fita até o fracionamento total de cada uma delas.

Fonte: Scheller, Bonotto e Viali (2016, p.711).

A figura 20 apresenta a tabela organizada após os cortes feitos na fita, e a transcrição do diálogo de mediação realizado. Os autores destacam a ideia da “utilização de símbolos para expressar as regularidades” estimuladas pelo professor que requereu ao grupo uma forma de escrita “resumida” para elaboração de uma linguagem simbólica que representasse as informações. (SCHELLER; BONOTTO; VIALI, 2016, p.711).

Figura 19 - Tabela e transcrição do processo de resolução

- Já temos até aqui os resultados (referindo-se a uma tabela semelhante à ao lado), e agora, se forem 7 risquinhos na fita, quantas e quais fitas teremos? (Prof.) - Quatro fitas grandes. (E9) - Porque vocês acham que não entra a Möbius agora? (Prof.) - Porque na aula passada a gente cortou e viu? (E8) - Mas e hoje que nós não estamos mais cortando? (Prof.) - Porque no numérico (referindo-se a coluna direita da tabela) é uma fita grande, depois é uma fita grande com Möbius, fita grande e depois fita grande com Möbius (A estudante percebendo a regularidade). (E9) - Vamos ver se isso funciona sempre? E se for 10 riscos? E 100? (Prof.) - Vai sim, porque ali, o 6 tem Möbius, então o 8 e o 10 vai ter de Möbius, o 40, o 50, o 100 também vai ter, 40 vai ter de Möbius, porque todos os pares vão dar Möbius, e os ímpares não. (E8) - 50 fitas grandes e uma Möbius com 100 risquinhos. (E9) - E porque você pensa ser esta a resposta E9? (Prof.) - O 50 eu acho porque é metade de 100. (E9) - Então vamos ver na tabela. O 3 (referindo-se na tabela ao 3FG) é por que é a metade do 6? Então é sempre só pegar a metade de riscos? - Sim (a turma)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Riscos</th><th>Nº Fitas</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>1 FG</td></tr> <tr> <td>2</td><td>1 FG + 1 M</td></tr> <tr> <td>3</td><td>2 FG</td></tr> <tr> <td>4</td><td>2 FG + 1 M</td></tr> <tr> <td>5</td><td>3 FG</td></tr> <tr> <td>6</td><td>3 FG + 1 M</td></tr> </tbody> </table> Fonte: (E5) Representação tabular construída por E5 como forma de resumir as informações obtidas.	Riscos	Nº Fitas	1	1 FG	2	1 FG + 1 M	3	2 FG	4	2 FG + 1 M	5	3 FG	6	3 FG + 1 M
Riscos	Nº Fitas														
1	1 FG														
2	1 FG + 1 M														
3	2 FG														
4	2 FG + 1 M														
5	3 FG														
6	3 FG + 1 M														

(Transcrição do fragmento) Percebemos que: se o número de cortes for par teremos uma fita cilíndrica e uma fita de Möbius. Se o número de cortes for ímpar teremos só fitas grandes. (E9)
- O número de fitas é sempre a metade, por exemplo, o 6. A metade de 6 é 3. Então, 3 fitas grandes enroladas. Como é par tem mais uma de Möbius. O 5, a metade de 5 é 2,5. Não dá para ter meia fita, então nós aumentamos 0,5 e ficam 3 fitas. (E5)

Fonte: Scheller, Bonotto e Viali (2016, p.711)

Os registros dos diálogos (Figuras 20 e 21) dos estudantes, segundo as autoras, acompanham a variação quantitativa das variáveis riscos e número de fitas, principalmente na abstração e regularidade da situação, e que isto permite que o estudante ao compreender a regularidade, abstraia relações que não abstraiu empiricamente.

Figura 20 - Transcrição do diálogo de mediação

[continuação do diálogo, após continuar a preencher a tabela até 25 riscos.]

- Então se eu tiver 100 riscos vai ter ... (Prof.)
- (turma completou) 50 fitas grandes e uma *Möebius*.
- Ah, pela metade do 100 riscos, vocês chegam no 50? ... E como se encontra a metade de um número? (Prof.)
- Prof. a gente divide por 2. (E8)
- Então como escrever que de 100 riscos vai dar 50 fitas grandes e uma *Möebius* (Prof. apontando para a tabela), a partir da informação que vocês já tem que sempre é a metade? E se for um número qualquer de 'riscos'?
- Oh prof. todas os pares vão dar *Möebius*, e os ímpares não, certo. Então é só escrever 100 dividido por 2 que dá 50 FG mais uma *Möebius*. (E8)
- Vamos tentar organizar melhor e escrever mais resumidinho: o que é o 100 aqui? Ele é o número de riscos, certo? [a turma confirma]. Como vocês escolheram escrever as palavras 'números de riscos' bem pequenininho?
- 'N' pra número e 'R' pra risco, assim vamos lembrar de 'NR' como número de riscos na fita. (E5)
- [a professora escreve NR na lousa] e agora, como registrar esta expressão 'dividido por 2' também bem resumidinho? Vocês lembram do sinal da divisão? (Prof.) [a turma informa os sinais de $\div$ e a 'chave'.].

Fonte: Scheller, Bonotto e Viali (2016, p.712)

Na mediação transcrita na Figura 21, o professor direciona os estudantes para “outras formas de divisão necessárias para a expressão simbólica do modelo” (SCHELLER; BONOTTO; VIALI, 2016, p.712)

Posteriormente, foi solicitado aos estudantes que “resumissem” suas ideias e percepções a respeito do número de fitas bem como da largura da fita, a ilustração da Figura 5.2-5 apresenta um dos modos utilizados pelos estudantes, que já apresenta, segundo os autores, uma linguagem pré-simbólica.

Figura 21 - Expressão simbólica do primeiro modelo advinda da produção escrita durante o processo.

grande e número de riscos R

par, temos fita de Möbius (1M) +

$\frac{n \cdot R}{2}$ de FG

Quando o (R) número de riscos for

ímpar teremos só FG = $\frac{n \cdot R}{2} + 0,5$

Fonte: (E5)

(Transcrição do fragmento) - quando o número de riscos for par teremos fita de Möbius (1M) + $\frac{nR}{2}$ de FG.

Quando o 'R' (que representa número de riscos) for ímpar teremos só FG (fita grande) = $\frac{nR}{2} + 0,5$.

Fonte: Scheller, Bonotto e Viali (2016, p.713).

Os autores observam que a passagem pelas modificações de linguagens realizadas, mencionadas como natural e simbólica, foi essencial para que os estudantes pudessem determinar um modelo, e que o papel do professor foi determinante para que esta passagem fosse realizada, já que o professor conduziu os estudantes para que expressassem estes registros de diferentes formas.

Os diálogos mostram como o professor vai questionando e os estudantes respondendo sobre regularidade, abstração, variáveis e relações. Destacamos primeiramente a abstração do estudante na Figura 20 indicando que não precisa mais dos objetos empíricos para saber o número de fitas com 7 riscos (não consta na tabela), afirmando que a regularidade numérica já era suficiente para responder. Nessa mesma resposta, o estudante apresenta a regularidade da variável do número de fitas (“no numérico”) de início com a contagem “uma fita grande, depois é uma fita grande com Möebius...” e depois a contagem não é continuada, prevalecendo a regularidade das figuras “fita grande e depois fita grande com Möebius.” Inferimos que o estudante - que segundo os autores estava olhando para a segunda coluna da tabela - vê na tabela os números e letras e interpreta fazendo uso da linguagem geométrica do pensamento algébrico, pela evidência na descrição da forma do objeto, embora utilize da fala, em língua natural.

Pelo mesmo motivo, observamos na síntese escrita por E 9 (Fragmento da Figura 20) uma prevalência ao movimento das figuras. A relação progressiva do número de riscos em relação ao número de fitas não aparece. Prevalece na generalização da regularidade com a presença ou não da fita de Möebius.

O professor continua os questionamentos (Figura 20 e 5.21) aos estudantes na direção de relacionar as variáveis quantitativamente entre si, ou seja, qual o cálculo que se deve fazer para obter a quantidade de fitas quando há um número determinado de riscos.

Inferimos que a síntese produzida pelos estudantes (Figura 5.2-5) está mais próxima de uma linguagem sincopada do que simbólica, no que se refere ao pensamento algébrico, pois ainda há referência às letras dos nomes das variáveis e a escrita ainda mistura língua natural com símbolos.

A complexidade do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes a nosso ver, requer do professor conhecimento e percepção dos movimentos (foco do pensamento algébrico) que perfazem os objetos e as linguagens algébricas, a fim de não apressar o uso das atuais simbologias.

5.3 CALCULANDO O DOBRO

A dissertação de Mestre (2014) objetiva “compreender como se desenvolve a capacidade de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade no decurso de uma experiência de ensino implementada durante um ano letivo, numa perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico”. (Mestre, 2014)

Foram envolvidos os estudantes de uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental, com 20 estudantes, onde a pesquisadora atuava como mediadora em conjunto com a professora da turma. Os referenciais à que a pesquisa se refere são a *Early Algebra* e a *Design Research*.

A *Early Algebra* atenta-se no desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes de 6- 12 anos, “utilizando tarefas baseadas em situações problemas que introduzirão de forma gradual as notações algébricas” (CARRAHER, SCHLIEMAN E SCHWARTZ, 2007, p.235, tradução nossa).

Design Research é uma metodologia de experiência de ensino onde o investigador assume, simultaneamente, o papel de professor conduzindo as intervenções de pesquisa.

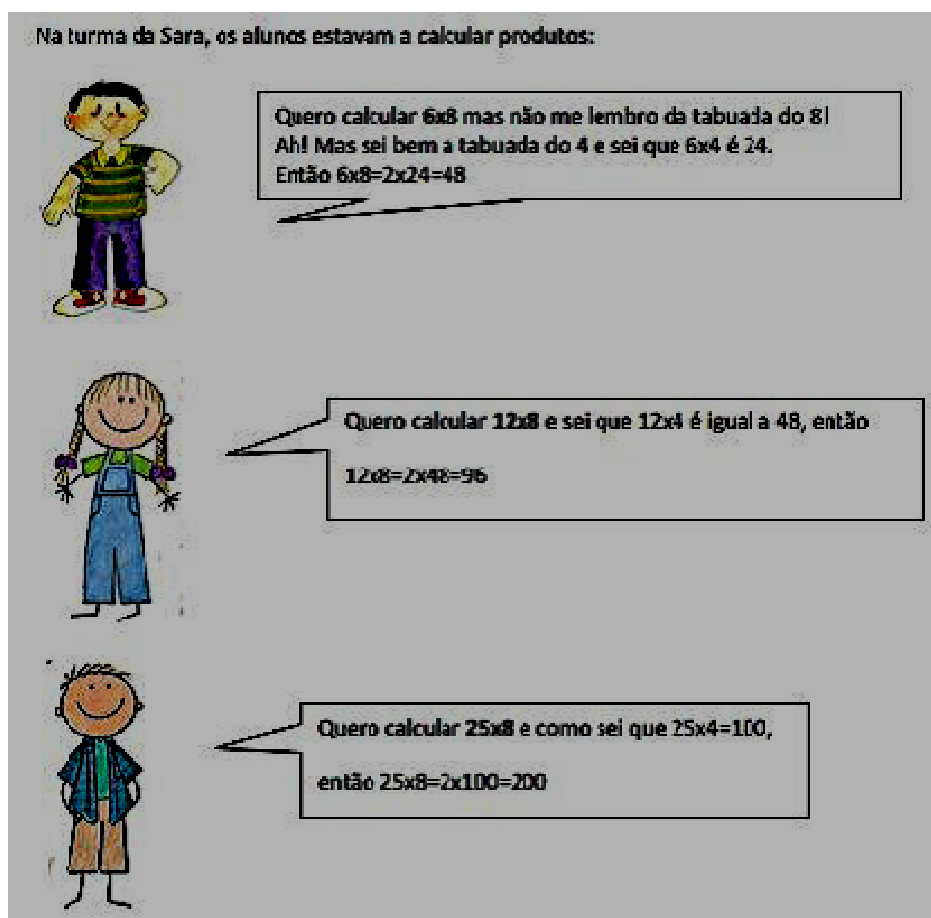
Apesar de não evidenciar na dissertação em seu resumo nem em sua apresentação, a autora apresenta a perspectiva dialógica de construção do conhecimento matemático e a teoria de Vygotski como referência no capítulo referente à experiência de ensino aplicada.

Das tarefas recolhidas no decorrer do ano letivo, a pesquisadora selecionou 9 para analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, selecionamos a atividade “Calcular usando o dobro”, que segundo Mestre (2014, p. 172), pretendia que “os alunos

reconhecessem as relações numéricas envolvidas na estratégia de cálculo e as generalizassem para além dos casos particulares.”.

Mestre aponta que as tarefas que tem este objetivo, desenvolvem nos estudantes a capacidade de generalização e de simbolização.

Figura 22 - “Calcular usando o dobro”



Fonte: Mestre (2014, p.336).

Esta tarefa envolvia as relações numéricas de dobro e metade e objetivava, segundo a autora, que: “a partir dos exemplos apresentados, os alunos reconhecessem as relações numéricas envolvidas na estratégia de cálculo e as generalizassem para além dos casos particulares.” (MESTRE, 2014, p.172).

Após a apresentação da tarefa, pela investigadora, os estudantes separaram-se em duplas e um trio, e a realizaram sem interferência do professor, para posteriormente realizar a discussão com a turma sobre as estratégias elencadas pelos grupos.

Dois grupos utilizaram segundo a autora “exemplos particulares, mas com sentido de “quase-variáveis”, ou seja, tomando-os como exemplos da relação numérica”,

Segundo a pesquisa, o movimento do pensamento algébrico que os estudantes realizam na utilização das “quase-variáveis”, propicia aos estudantes que em formas graduais nos apresentem representações mais simbólicas.

A autora apresenta a definição da expressão quase-variável que segundo Fujii significa “um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados” (FUJII, 2003, p. 59 apud, MESTRE, 2014, p.47). Não reconhecemos a expressão “quase-variáveis” no estudo da linguagem algébrica.

A estratégia apresentada por esta dupla, segundo Mestre (2014, p. 173) é um exemplo desse tipo de percepção da relação aritmética (Figura 24).

Figura 23 - Exemplo de Estratégia apresentada por uma dupla

Temos o 15×8 . Partimos o oito a meio e fica $15 \times 4 = 60 + 15 \times 4 = 60$
 Temos o 26×8 . Partimos o oito a meio e fica
 $26 \times 4 = 104 + 26 \times 4 = 104$
 208 ou $2 \times 104 = 208$
 Temos o 60×8 . Partimos o oito ao meio fica $60 \times 4 = 240 + 60 \times 4 = 240$
 Temos o 14×8 . Partimos o oito ao meio fica $14 \times 4 = 56 + 14 \times 4 = 56$
 112 ou $2 \times 56 = 112$
 2.º Ex. Sabemos que 25×8 fazemos 2 vezes $25 \times 4 = 100$ e depois $100 + 100 = 200$ e ficaram a saber
 $25 \times 8 = 200$

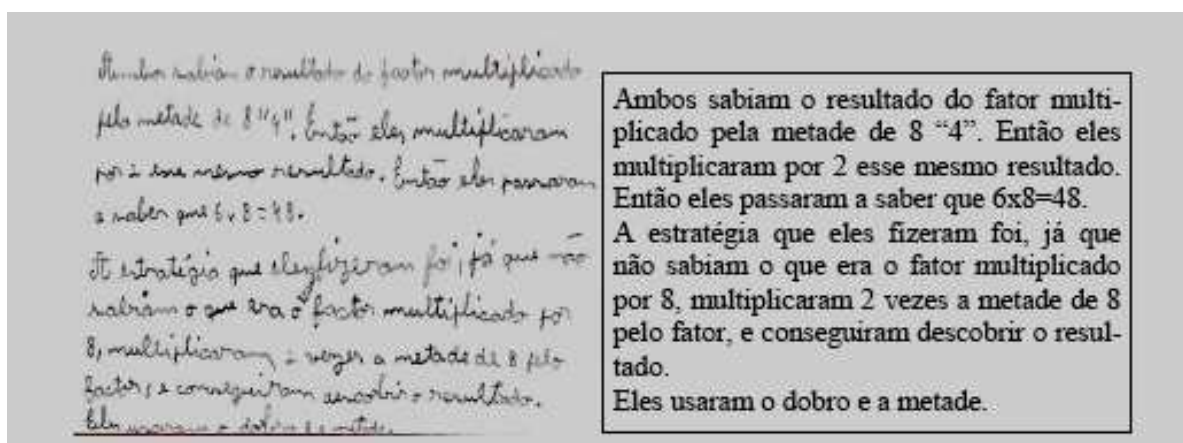
Fonte: Mestre (2014, p.173)

A partir desta resolução, a autora afirma que estes estudantes:

“Reconheceram a relação aritmética de forma a estendê-la para além dos casos particulares apresentados, embora não tenham ainda enunciado essa estratégia de forma geral. A forma como representaram numericamente a relação, ainda que de forma incorreta no que respeita à representação da igualdade, dá evidência do procedimento correto que efetuaram para obter os produtos da tabuada do oito usando o dobro dos produtos da tabuada do quatro.” (MESTRE, 2014, p.174)

Outra dupla apresentou um nível mais elaborado de pensamento no que se refere à generalização:

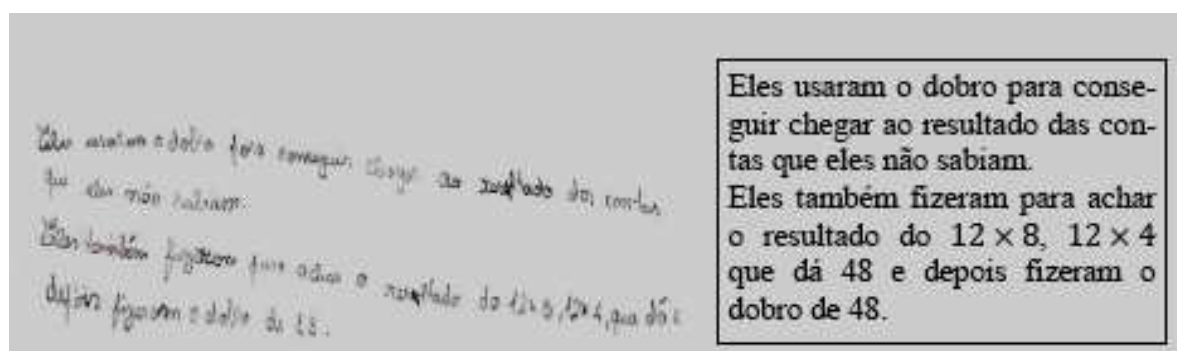
Figura 24 - Resolução de uma dupla que apresenta maior elaboração na generalização



Fonte: Mestre (2014, p.173).

Todos os grupos envolvidos se expressaram utilizando a linguagem verbal. Na discussão coletiva feita logo após a resolução em grupos, uma dupla apresentou a seguinte resolução:

Figura 25 - Resolução apresentada após a discussão coletiva.



Fonte: Mestre (2014, p.176)

Nesta resolução, a generalização se expressa matematicamente, porém ainda, segundo a autora, há o domínio da linguagem retórica, que não coincide com o conceito da linguagem retórica do estudo lógico-histórico da álgebra.

Após a exploração destas resoluções, a investigadora procura que os estudantes enunciem a estratégia de cálculo de uma forma mais geral, indo para além dos exemplos particulares apresentados.

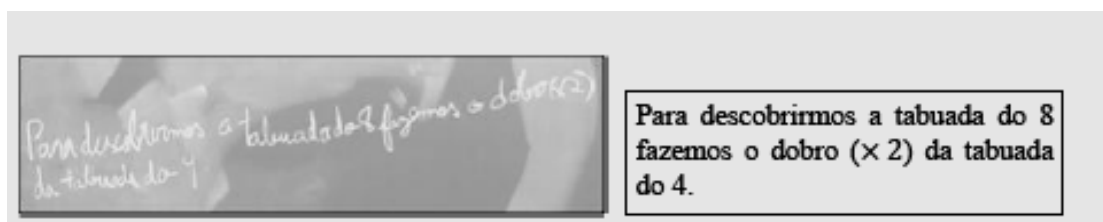
Figura 26 - Transcrição da mediação para elaboração de uma forma de cálculo mais geral

Investigadora – Ok. Temos lá três exemplos, mas esta estratégia só serve para aqueles exemplos?
 Vários alunos – Não.
 Fábio – A estratégia que nós fizemos dá para todas as contas.
 Investigadora – E como podemos resumir de forma clara essa estratégia? Que estratégia foi essa?
 Diogo – Fizemos a conta do dobro.
 Investigadora – O dobro de quê?
 Diogo – O dobro do resultado.
 Investigadora – És capaz de explicar melhor? Acrescentar mais um bocadinho?
 (Diogo não responde.)
 Investigadora – Qual era a tabuada que queríamos trabalhar?
 Vários alunos – A do oito.
 Investigadora – E para trabalhar a tabuada do oito, usamos qual tabuada?
 Vários alunos – A do quatro.
 Rita – Podemos usar as metades.
 Investigadora – E o que é que nós descobrimos? Eu posso fazer a tabuada do oito usando qual?
 Vários alunos – A do quatro.
 Investigadora – Como é que posso escrever isso?
 Rita – Se nós formos à tabuada do quatro, depois multiplicarmos o quatro pelo número que queríamos da tabuada do oito, se multiplicarmos duas vezes, vai dar o resultado da tabuada do oito.

Fonte: Mestre (2014, p.178).

Esta intervenção segundo Mestre (2014, p.178) permite com que o estudante aponte abstrações para a elaboração de uma generalização assim representada por um estudante:

Figura 27- Registro apresentado para representação de uma generalização através de um cálculo



Fonte: Mestre (2014, p.176).

Após cada tarefa eram realizadas discussões coletivas com mediação do professor estimulando que os estudantes deixassem de utilizar a linguagem verbal e passassem a utilizar a linguagem simbólica, conforme a transcrição desta intervenção:

Figura 28 - Transcrição da mediação para elaboração de uma forma de cálculo mais geral

Investigadora – Agora quero que pensem nesta frase que o João V. escreveu e que a escrevam na linguagem matemática. Como é que eu posso usar a linguagem matemática?

Vários alunos – Com contas.

Investigadora – Então como é que eu posso escrever isto? Mas atenção que eu não quero para casos particulares como o 6×8 , o 12×8 ou o 25×8 , eu quero para todos os números da tabuada do oito e do quatro.

Rita – Podemos fazer para 7×8 .

Investigadora – Isso é um caso particular. Eu quero que dê para todos os casos.

Rita – Como assim?

Investigadora – Para todos os casos da tabuada do oito. O que é que acontece na tabuada do oito?

Aluno – É sempre mais oito.

Investigadora – Vamos acrescentar sempre mais oito. Ou seja, se usarmos a multiplicação estamos a fazer o quê?

Vários alunos – Sempre a multiplicar por oito.

Investigadora – Como é que eu posso escrever isso?

Rita – Usamos um ponto de interrogação.

Fábio – Vezes oito.

Fonte: Mestre (2014, p.177)

Esta mediação propiciou novas representações tais como a apresentada na Figura 30.

Figura 29 - Expressão da generalização em linguagem matemática

The image shows two versions of a mathematical expression. On the left, a chalkboard with the handwritten equation $? \times 8 = 2 \times (? \times 4) = ?$. On the right, a typed version of the same equation inside a rectangular box: $? \times 8 = 2 \times (? \times 4) = ?$.

Fonte: Mestre (2014, p;178)

Numa etapa posterior, a pesquisadora conduz os estudantes para que se expressassem mais simbolicamente (Figura 31).

Figura 30 - Mediação para a construção de uma expressão simbólica

Rita – Mas aqui não se mete igual a um número?

Vários alunos – Não.

Investigadora – Se colocares este símbolo como fizeste, se aqui ele vale seis, aqui (apontando para o símbolo depois do sinal de igual) também vale seis. Se aqui vale 10, aqui também vai valer 10. Se eu substituir por outro número vai sempre valer esse número.

Investigadora – Então 6×8 é igual a $2 \times 6 \times 4$. Está bem? Isso é igual a...

Vários alunos – 48.

Investigadora – Mas a Rita tem aqui igual ao símbolo, ao ponto de interrogação...

Fábio – Assim, é igual a seis.

Investigadora – Se nós dissemos que aqui o símbolo valia seis, então seria igual a seis, pode ser assim?

Vários alunos – Não.

Gonçalo – É igual a duas vezes o ponto de interrogação vezes quatro.

Fonte: Mestre (2014, p.179).

Esta mediação culminou na seguinte representação:

Figura 31 - Generalização feita coletivamente

Fonte: Mestre (2014, p.180).

Observamos que os estudantes nesta situação de aprendizagem apresentaram um movimento entre a escrita em língua natural e o uso de símbolos, com os numerais e os sinais das operações no que se referem a aritmética inicialmente para expressarem suas respostas

Por meio das mediações realizadas pela investigadora, destacamos o movimento para a generalização pelos estudantes sobre um número multiplicado por oito, perpassando pelo

dobro de quatro. Estas elaborações acontecem principalmente no momento em que os estudantes necessitam justificar suas resoluções.

Para nós, os resultados do estudo evidenciaram que a capacidade de generalização evoluiu no sentido da mudança de atenção dos casos particulares para os casos gerais, quando os estudantes utilizam o símbolo “ ? ”, escolhido por eles.

5.4 JOÃO E MARIA

O artigo de Silva e Savioli (2015) pauta-se no objetivo de “identificar, analisar e discutir características do pensamento algébrico elementar nas produções escritas de oito tarefas da *Early Algebra* aplicadas a estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I” (p.139).

As tarefas apresentadas ocorreram numa escola pública envolvida no Programa “Observatório da Educação”, no Paraná. A turma selecionada era composta de 35 estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental I, que não haviam tido contato prévio com uma linguagem simbólica algébrica, no contexto escolar.

A professora mediadora destas tarefas era estudante do Programa de Doutorado Universidade Estadual de Londrina (UEL). Foram investigadas 8 tarefas advindas de um banco de dados disponibilizado em um website (*Tufts Education Early Algebra*) que além de disponibilizar tarefas fundamentadas na *Early Algebra*, oferece aulas interativas e fórum de discussões com o objetivo de dar ênfase à introdução da álgebra nos anos iniciais de ensino.

As autoras ressaltam que as tarefas propostas podem promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, mas consideram que “o desenvolvimento desse pensamento não está na tarefa, mas sim que é algo interno ao estudante.” (SILVA; SAVIOLI, 2015, p. 149).

Uma das tarefas, aplicadas e analisadas, nomeada João e Maria, está apresentada na figura abaixo (33).

Figura 32– Tarefa João e Maria

Figura4: Tarefa 4

Tarefa 4

Nome: _____ Data: _____

João e Maria têm uma caixa de doces cada um.
 João tem uma caixa e um doce em cima dela.
 Maria tem uma caixa e três doces em cima dela.
 Dentro das duas caixas têm exatamente o mesmo número de doces.

Desenhe ou escreva algo que compare quantos doces João e Maria têm.

Fonte: <http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp>

Fonte: Silva e Savioli (2015, p.147).

As análises foram realizadas a partir dos registros escritos com o objetivo de compreender como os estudantes estão estabelecendo e criando suas comunicações que evidenciam seu pensamento algébrico.

Na primeira resolução apresentada na Figura 34, segundo as autoras, o estudante apresenta três diferentes notações: o desenho, aritmética e a escrita em língua natural, para a resolução da tarefa.

Além disso, observaram que ao expressar sua ideia utilizando em sua resposta os símbolos M3 e J1, o estudante já apresenta a utilização de “uma linguagem mais simbólica (SILVA; SAVIOLI, 2014, p.151).

Figura 33 - Registro de alunos aluno participante referente à tarefa João e Maria

Figura 9: Registro escrito do participante E21 - Tarefa 4

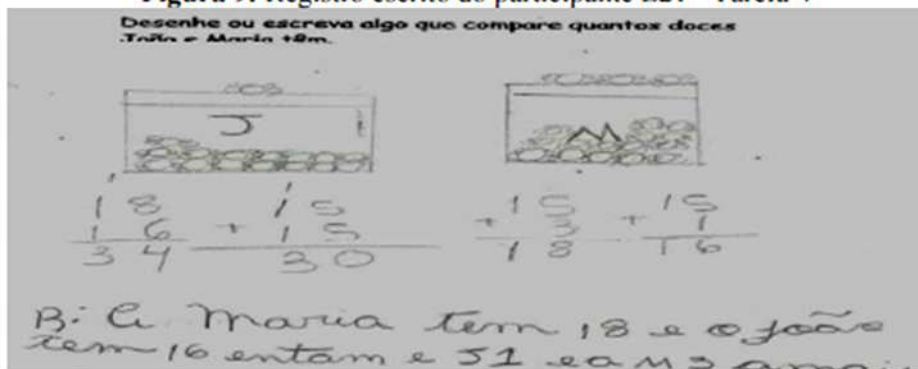


Figura 10: Registro escrito do participante E26 - Tarefa 4



Fonte: Silva e Savioli (2015, p.151).

Na resolução apresentada na parte inferior da Figura 5.4-2, o estudante se expressa somente por meio de desenhos, que segundo as autoras, já indicam uma generalização ao “pintar as caixas de docos de João e Maria o que indica que há a mesma quantidade de docos”. (SILVA; SAVIOLI, 2015, p.152)

As autoras observam também que os estudantes apresentaram quantidades específicas dentro da caixa de docos, e afirmam que estas representações são características das manifestações do pensamento algébrico desta faixa etária.

Por meio da análise das respostas dos estudantes, segundo as autoras, esta tarefa proporcionou o estabelecimento de relações/ comparações; utilização de diferentes notações /representações; generalização, isto é, o estudante indica algum tipo de processo de generalização ao expressar sua resolução (SILVA; SAVIOLI, 2015, p.153).

O artigo não apresenta como foram realizadas as intervenções durante a realização das tarefas.

A pesquisa concluiu que “as tarefas propostas propiciaram a manifestação do pensamento algébrico em suas resoluções, e que este pensamento pode ser manifestado mesmo sem a utilização de símbolos nesta faixa etária, até que se apropriem da linguagem simbólica” (SILVA; SAVIOLI, 2014, p.154).

O fato do artigo não trazer o movimento de construção das respostas, ou ainda, reflexões dos próprios estudantes sobre o que escreveram nas tarefas, não nos permite inferir sobre a fluência do pensamento e da linguagem dos estudantes quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Também não podemos inferir que o fato da criança ter escrito J, J1, M M3 que representam variáveis inseridas em um campo de variação. Talvez somente uma sincopação de registros.

5.5 QUADRADINHOS DE CHOCOLATE

Nunes (2014, p.1) apresenta-nos uma pesquisa com o objetivo de “verificar se alunos, quando confrontados com tarefas de teor investigativo, eram capazes de encontrar/descobrir a existência do padrão de crescimento e quais as estratégias utilizadas que lhes possibilitavam chegar à resolução, sem a aprendizagem prévia de uma regra”. (Nunes, 2014, p.1)

Para tal fim, foram realizadas tarefas com 6 estudantes de 4º ano do Ensino Fundamental, as mediadoras das tarefas foram a professora da sala e a autora da pesquisa. Participaram como mediadores, a professora da sala e a autora da pesquisa.

A autora ratifica que:

Anteriormente à realização das primeiras tarefas de investigação matemática de cada conjunto não foi ensinada/abordada nenhuma regra ou padrão que permitisse a resolução das tarefas, pois ambicionava-se observar a existência/desenvolvimento do "pensamento algébrico" nos alunos e mobilizar os seus conhecimentos prévios. No entanto, sempre que se verificou necessário procedeu-se a um apoio individual aos alunos para os orientar sem dar demasiada ajuda. O que se pretendeu foi perceber quais as estratégias utilizadas pelos alunos para a descoberta de um padrão ou regularidade que lhes possibilitasse resolver as tarefas de investigação propostas, sem a aprendizagem/aplicação prévia de uma regra. (Nunes, 2014, p.92)

Das situações-problemas apresentadas selecionamos a exposta na Figura 35, por entendermos que esta tarefa se aproxima de tarefas frequentemente utilizadas nas práticas de ensino escolar.

Figura 34 - Situação Problema

1.ª Tarefa

A Mariana gosta muito de chocolate.

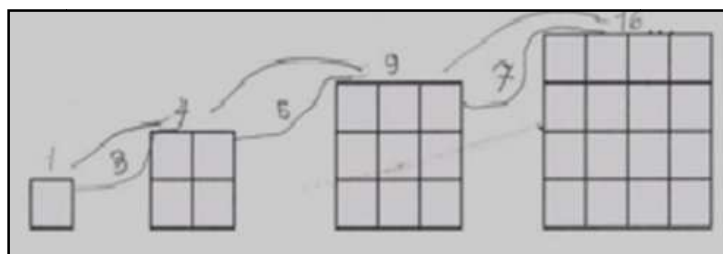
No 1º dia comeu 1 quadradinho de chocolate, no 2º dia comeu 4 quadradinhos de chocolate, no 3º dia comeu 9 quadradinhos de chocolate e no 4º dia comeu 16 quadradinhos de chocolate.

Repara na seguinte sequência e ajuda a Mariana a descobrir quantos quadradinhos de chocolate vai comer no 9º dia.

Fonte: Nunes (2014, p.96).

A partir dessa situação-problema, surgiram dois diferentes níveis de respostas dos estudantes, no primeiro caso, segundo Nunes (2014), o estudante utilizou uma estratégia para encontrar um padrão, mas limitou-se a contar os quadradinhos das figuras. Com isto, conseguiu detectar a quantidade de quadradinhos a ser somado de uma figura para outra, no entanto, não foi capaz de escrever um modo de generalização.

Figura 35 - Resposta do estudante 1



Fonte: Nunes (2014, p.102).

No segundo exemplo, classificado com o maior nível na escala da metodologia empregada, Nunes (2014, p. 103) constata que, o estudante utilizou a estratégia esperada,

encontrando um padrão. O estudante percebeu que multiplicando o número do dia por ele mesmo, resultava o número de quadradinhos que Mariana havia comido.

Figura 36 - Resposta do Estudante de melhor nível

Handwritten student work showing a sequence of squares and their areas. On the left, a 5x5 grid is drawn. In the center, a list of equations is written: $5 \times 5 = 25$, $6 \times 6 = 36$, $7 \times 7 = 49$, $8 \times 8 = 64$, and $9 \times 9 = 81$. To the right, another 5x5 grid is partially visible. At the bottom, a handwritten note reads: "R: Ery 9x9 e deu + me 81."

Fonte: Nunes (2014, p.104).

Observa-se que o trabalho se encontra no campo exploratório com enfoque em generalização de uma regularidade que se insere no registro geométrico. A resposta do estudante 1, mostra o total de quadradinhos e a variação desse total de um estágio a outro. A percepção da variação dos totais é mais complexa do que a da variação da quantidade de quadradinhos da base (ou altura) que é de uma unidade. Por sua vez, a área (total de quadradinhos) é obtida pelo quadrado do número que é a própria ordem da figura na sequência. Não se pode inferir que os estudantes relacionam conscientemente todas as variáveis do problema, mesmo nas respostas corretas.

Na resposta de melhor nível, percebe-se a necessidade de realizar a sequência até chegar à resposta, que indica a percepção da regularidade, porém necessitaria de mais dados para compreender melhor sobre a generalização.

5.6 CRIANDO REGRAS

O artigo de Silva, Savioli e Passos (2015) apresenta como objetivo “identificar e analisar características do pensamento algébrico manifestadas em registros escritos de uma tarefa de *Early Algebra* de estudantes dos anos iniciais” (SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 215, p.114).

Foram envolvidos 35 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental que não haviam tido contato prévio com a linguagem simbólica algébrica, que realizaram oito tarefas com abordagem da *EarlyAlgebra*, no entanto, o artigo só apresenta a análise da Tarefa 6.

As tarefas pesquisadas foram retiradas do banco de dados da *Tufts Early Algebra*, que disponibiliza em seu ambiente virtual, tarefas referentes a esta perspectiva.

Os objetivos propostos para esta tarefa são “interpretar, funções simples de adição e suas inversas; interpretar e produzir tabelas e produzir expressões algébricas.”. (SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 215, p.114).

Figura 37 - Situação de Aprendizagem: “Agora você cria a regra”

Tarefa 6			
Nome: _____ data: _____			
Agora você cria a regra...			
Entrada	Saída		
	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100			
101			
10			
	14		
		14	
			14
15			
6			
n			

Qual é a primeira regra? _____

Qual é a segunda regra? _____

Qual é a terceira regra? _____

Fonte: Silva, Savioli e Passos (2015, p.114).

Durante a análise as autoras apresentam verbalizações dos estudantes que na fase inicial da resolução da tarefa, indagam sobre: “Como eu crio uma regra?” ou ainda “Que regra?” (SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 215, p.117), o que evidencia as autoras o fato dos estudantes não estarem habituados a realizar este tipo de problematização, pois em geral, as situações trabalhadas em sala de aula, apresentam o caminho que os estudantes devem seguir na construção de sua resolução.

A maior parte dos estudantes (19) aplicou “as regras aos valores da coluna anterior e não ao valor da entrada, que seria outra possibilidade de resposta” (SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 215, p.118) segundo as autoras, isto ocorre pelo fato da situação proposta permitir diferentes interpretações. Mesmo que tenham tido acesso na Tarefa 5 realizada anteriormente e tendo acesso à informação que as regras deveriam ser aplicadas aos valores de entrada Para evidenciar o acesso de informações prévias fornecidas aos estudantes contidas na tarefa realizada anteriormente, apresentamo-la a seguir:

Figura 38 - Situação de aprendizagem realizada anteriormente – Tarefa 5

Tarefa 5

Nome: _____ data: _____

Entrada	Saída		
	Adicione 3 a entrada	Subtraia 2 a entrada	Multiplique por 3 a entrada
3			
7			
10			
	9		
		9	
			9
100			
101			
N			

Qual é a primeira regra? _____

Qual é a segunda regra? _____

Qual é a terceira regra? _____

A seguir, apresentamos dois exemplos de resolução de estudantes que registraram a maior quantidade de registros, segundo as autoras com “estratégias com particularidades não generalizáveis” (p.118)

Figura 39 - Apresentação das resoluções dos estudantes

Agora você cria a regra...

Entrada	Saída		
	1ª regra $+3$	2ª regra $+2$	3ª regra -1
100	103	105	104
101	104	106	105
10	13	15	14
11	14	16	15
9	12	14	13
9	12	14	14
15	18	20	19
6	9	12	11
n	+3	+2	-1

Qual é a primeira regra?
de mais três

Qual é a segunda regra?
de mais dois

Qual é a terceira regra?
menos um

Fonte: Silva, Savioli e Passos (2015, p. 118)

Nesta resolução, assim como a maior parte dos estudantes (19) o estudante completa o quadro aplicando as “regras criadas ao valor da coluna anterior e não ao valor de entrada “n”, completa com números, não demonstrando generalização.” (SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015, p.118).

Figura 40 - Apresentação das resoluções dos estudantes

Entrada	Saída		
	1ª regra +3	2ª regra -5	3ª regra $\times 2$
100	103	98	196
101	104	99	198
10	15	10	20
11	14	09	18
16	19	14	28
4	10	7	14
15	18	13	26
6	9	5	8
n	1	2	3

Qual é a primeira regra?
Remanecer três

Qual é a segunda regra?
Subtrair 5

Qual é a terceira regra?
Multiplicar por 2

Handwritten calculations below the rules:

For the first rule, calculations for 100, 101, 10, 11, 16, 4, 15, 6, and n are shown, all resulting in 103, 104, 15, 14, 19, 10, 18, 9, and 1 respectively.

For the second rule, calculations for 100, 101, 10, 11, 16, 4, 15, 6, and n are shown, all resulting in 98, 99, 10, 09, 14, 7, 13, 5, and 2 respectively.

For the third rule, calculations for 100, 101, 10, 11, 16, 4, 15, 6, and n are shown, all resulting in 196, 198, 20, 18, 28, 14, 26, 8, and 3 respectively.

Fonte: Silva, Savioli e Passos (2015, p. 119)

Na figura 41, segundo as autoras, o estudante completa o quadro com as regras criadas para os valores de entrada, “no entanto, para o valor de entrada “n”, expressa uma linguagem simbólica algébrica, demonstrando uma generalização. Descreve as regras do quadro” (SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015, p.116)

Surgiram também algumas resoluções que segundo as autoras, já apresentam manifestações de um pensamento algébrico uma vez que:

“Para o valor de entrada n , expressam um processo de generalização, sendo que desenvolvem algum tipo de generalização, percebem e tentam expressar regularidades ou invariâncias desenvolvendo uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente” (SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015, p.120)

Um exemplo deste tipo de resolução é explicitado na Figura 42.

Figura 41 - Exemplo de resolução apresentada pelos estudantes

Entrada	Saída		
	1ª regra	2ª regra	3ª regra
100	103	206	205
101	104	208	207
10	13	26	25
11	14	28	27
4	7	14	13
3	6	7	14
15	18	36	35
6	9	18	17
n	N+3	N×2	N-1

Qual é a primeira regra?
 regra 1

Qual é a segunda regra?
 regra 2

Qual é a terceira regra?
 regra 3

Fonte: Silva, Savioli e Passos (2015, p. 119)

Por meio destes registros, segundo as autoras, os estudantes apresentam uma generalização, porém, as apresentam de maneira diferente do padrão que utilizam na tabela, mesmo assim, manifestam um movimento de pensamento algébrico, para corroborar com esta afirmativa fazem referência a Kieran (2004).

[...] nas séries iniciais envolve o desenvolvimento de formas de pensar em atividades para as quais a álgebra sincopada pode ser usada como uma ferramenta, mas que não é exclusiva da álgebra e poderia ser resolvida sem o uso de símbolos, tal como analisar relações entre quantidades, perceber mudanças, observar estruturas, resolver problemas, generalizar, modelar, justificar, provar e prever (KIERAN, 2004, p.12 apud SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015, p.122)

A pesquisa destaca também que, dos 35 estudantes analisados, 31 não evidenciaram generalizações para o valor de entrada “n” e conclui que os participantes deste estudo evidenciaram por meio de suas produções escritas características de pensamento algébrico, e ainda, estabeleceram relações e comparações entre as informações descritas na tarefa, produzindo mais de uma representação para uma mesma situação-problema; desenvolvendo

algum processo de generalização; desenvolvem uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.

Observa-se que se trata de uma situação criada no campo numérico com ênfase na regularidade e no princípio de generalização requerido na última linha da tabela. Os estudantes não terem seguido a regra da tarefa em relação à entrada e saída dos dados, simplificou as possibilidades. Porém, o fato da situação ser em uma tabela, pode auxiliar os estudantes a organizar o pensamento no que se refere a repetição de um processo, por exemplo, na figura 42, coluna 2, em que a ação é multiplicar por 2 todos os números da coluna anterior.

Na síntese apresentada, ainda referente a esse exemplo, regra 2, observa-se a escrita da ação generalizada, mas não a regra completa.

Sobre a variável “n”, inferimos pelo relato das autoras, que os estudantes ainda não haviam tido contato com este tipo de apresentação, a maior parte dos estudantes não seguem o mesmo padrão utilizado em outras colunas linhas onde os valores eram determinados.

5.7 QUANTO CUSTA CADA PEIXE?

Boni e Savioli (2015) realizaram a análise de tarefas potencialmente algébricas com estudantes de 5º ano, com o objetivo de “investigar e analisar, em procedimentos de cálculos aritméticos, indícios de pensamento algébrico que são manifestados oralmente por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao se envolverem com uma tarefa potencialmente algébrica.” (BONI; SAVIOLI, 2015, p.266).

Foram envolvidos na pesquisa 6 estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, esses estudantes realizaram as situações propostas em duplas devidamente acompanhadas por um observador participante da pesquisa.

O artigo embasa-se teoricamente nos Registros de Representação Semiótica de Duval, nesse sentido as análises, por meio das expressões orais dos estudantes, buscam explicar as estratégias na resolução da tarefa, considerando estas expressões como “um tipo de representação semiótica que, permite exteriorizar indícios de representações mentais”. (BONI; SAVIOLI, 2015, p.268).

As autoras defendem que os cálculos aritméticos, e por consequência o cálculo mental, devem se desenvolver concomitantemente ao pensamento algébrico para uma boa aprendizagem matemática.

Desta forma, o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais de escolarização, se integrado aos procedimentos de cálculo, destacando o cálculo mental, propicia a “percepção e generalização de propriedades e relações de números e operações, bem como o entendimento do sinal de igual como uma relação de equivalência, ao invés de fornecer somente um resultado”. (BONI; SAVIOLI, 2015, p.271).

A tarefa proposta reproduzida na figura 43 foi retirada de uma publicação do NCTM, e objetiva “invocar o raciocínio e a resolução de problemas; bem como exigir habilidades de comunicação e conexão de diversos conceitos e princípios matemáticos” (CULLEN; GAYMORE, 2008, apud SILVA; SAVIOLI, 2015, p.274).

Figura 42 - Quanto custa cada peixe? Atividade de cálculo potencialmente algébrica

Quanto custa cada peixe?

			R\$ 6,00
			R\$ 12,00
			R\$ 19,00
			R\$ 16,00

		
R\$ _____	R\$ _____	R\$ _____

Fonte: Boni e Savioli (2015, p. 274).

Alguns estudantes utilizaram os dedos das mãos para efetuar contagens durante a resolução da tarefa. Outros, segundo as autoras, utilizaram-se da contagem mental a partir de um ponto específico conforme denota a transcrição a seguir.

Figura 43 - Descrição de áudio do momento em que os estudantes realizam tarefa.

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre a 3ª linha da tarefa:

E4: *Deixa eu ver... para dar 12...12 mais 2, 14, mais cinco dá...15, 16, 17, 18, 19. Achei! Aqui é...*

E3: 7?

E4: não...

E3: 9?

E4: Não, é 12.

E3: 12, 12... Como 12?

E4: *Aqui é 14, mais cinco.... deu 14, deu 14...*

E3: *Se for 12 esses dois aqui vai dar 24... vai dar 26.*

E4: *Ah é, dá 24. Para dar 14 tem que ser ...é ué tá certo! ...Ah não, tá não, é 7...7 e 7, 14, mais 5...*

E3: *19! 14, 15, 16, 17, 18, 19... é está certo: 7 reais*

Fonte: Boni e Savioli (2015, p. 277).

Segundo as autoras, essa estratégia:

Representa uma maneira de se apoiar em um recurso externo para não se perder no cálculo mental. Sendo assim, a contagem utilizando os dedos representa uma estratégia pessoal que não pode ser desvalorizada pela escola, pois por meio dessa estratégia, o estudante consegue atribuir sentido para o conceito matemático com o qual está operando e, assim, podemos considerar este procedimento como uma representação para o objeto matemático. (BONI; SAVIOLI, 2015, p.279)

Quatro estudantes apresentaram trocas nas operações como apontado na transcrição abaixo. (Figura 45)

Figura 44 - Trecho de descrição do áudio quando os estudantes operam sobre a 4ª linha e sobre as 3 colunas da tarefa, conferindo os resultados encontrados:

E2: Esse daqui é 7 mais 7, 14, mais 2, 16.

T1: E será que assim (mostrando as colunas) também dá certo?

E1: 2 mais 2, 4, com mais 2, 6 e com mais 7...13.

Anotação de T1: Ao efetuar a adição de 6 mais 7 a estudante E1 calcula mentalmente enquanto que E2 resolve a mesma operação contando nos dedos das mãos.[...]

E1: 5 com mais 5, 10, com mais 7, 17, com mais 2, 18, 19.

E1: Agora esse outro aqui é 7 com mais 7, é 14...

E2: com mais 5 é 19, com mais 2 é 21

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre a 2ª linha da tarefa:

E4: Cada peixe eu acho que é 2 reais, por que daí dá 2, 4 e 6.

E3: É, pode ser.

E4: E esse daqui tem que dar 12 reais. Então, 4, 8 e 12.

E3: Mas esse daqui vale 4 também?

Anotação de T2: nesse momento E3 aponta para o peixe diferente na 2ª linha.

E4: Deve ser, porque está nessa figura.

E3: Não... acho que esse daqui vai dar o mesmo tanto que esse daqui, não vai?

Anotação de T2: nesse momento E3 aponta para o peixe da 1ª linha.

E4: Espera aí! Nossa que difícil! ...Ah, entendi!

E3: Esse daqui vai valer 2 reais também, não vai?

E4: Por que é 2 reais, e esse daqui vai dar 6, eu acho.

E3: 6 e 6, 12... 14... calma aí...

E4: 2, 4 e 6...

E3: vai dar 10.

E4: não vai dar, tem que ser mais do que 2, como 4

Fonte: Boni e Savioli (2015, p. 278).

Fora destacado também, a utilização do cálculo automático que ocorreu quando os estudantes “recuperaram um resultado da memória”. (p.278)

Figura 45 - Transcrição relacionada ao cálculo automático

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre as 1ª, 2ª e 3ª linha da tarefa:

E2: Vai dar 2 (apontando para a 1ª linha).

Anotação de T1: Como vocês pensaram?

E1: Que seis dividido por 3 dá 2, por causa que esses peixes devem valer o mesmo tanto de reais (apontando para a 1ª linha)

Anotação de T1: Os estudantes conversaram entre eles.

E2: Agora a gente vai ter que fazer 12 menos 2 por causa que tem esse peixe diferente e fazer o que der dividido por 2 (apontando para a 2ª linha). Então cada um desses dois custam 5 e esse outro vale 2.

T1: Por que você acha que esses dois custam 5?

E2: Porque 10 dividido por 2 dá 5.

E1: E tem que fazer 12 menos 2 pra descobrir quanto que dá esses dois peixes juntos. Agora é 10 menos 5 para saber quanto que dá esses dois peixes (apontando para a 3ª linha). E agora é o resultado dividido por 2...dá 7.

Fonte: Boni e Savioli (2015, p. 279).

Boni e Savioli (2017, p. 279) afirmam que de maneira geral, todos os estudantes preferiram utilizar o cálculo mental ao invés de realizar um registro. Durante a realização da tarefa, alguns procedimentos de cálculos aritméticos puderam ser observados.

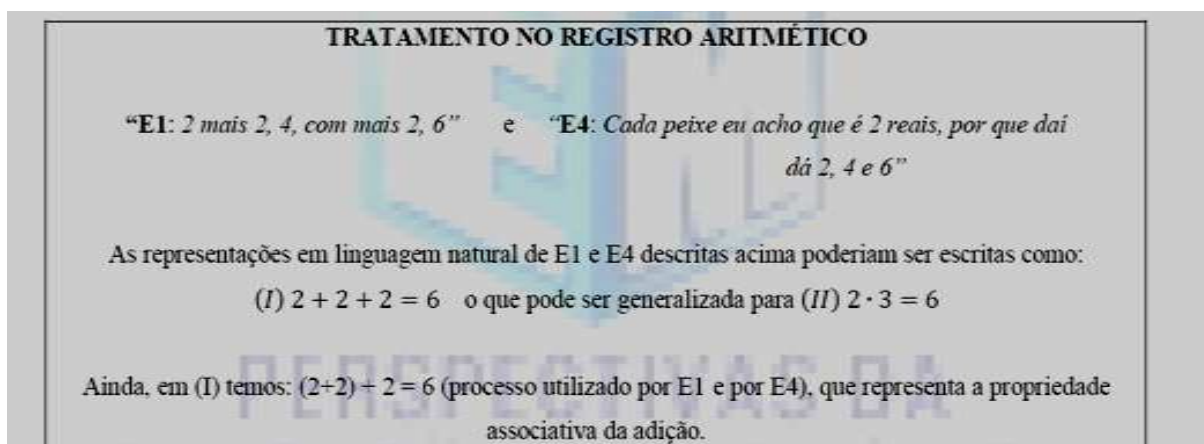
Estes procedimentos caracterizam estratégias próprias que os estudantes utilizam não apenas para facilitar a evocação do resultado que precisam, mas para determinar os caminhos que deveriam tomar para se chegar a esses resultados.

Outro ponto evidenciado na presente pesquisa que vale ressaltar é a utilização da linguagem verbal para descrever os procedimentos e as escolhas para resolver a tarefa proposta.

A linguagem verbal, segundo as autoras, além de permitir ao professor o acesso às imagens mentais dos estudantes durante a realização de alguma tarefa matemática, também permite que o estudante reflita sobre as relações existentes na situação-problema.

As autoras inferiram manifestações do pensamento algébrico em algumas resoluções, uma vez que “podemos entender o valor *dois* de um dos peixes como uma quase-variável” (BONI; SAVIOLI, 2015, p.280), por exemplo, quando os estudantes recorrem à inversão de operações, conforme exibe a figura 47. Essa evidência, segundo Boni e Savioli (2015, p.280), justifica-se pelo fato dos estudantes em diversos momentos, recorrerem “[...] à adição quando poderiam usar a multiplicação ou, de maneira contrária, recorreram à multiplicação quando poderiam usar a adição [...]”, demonstrando que os alunos já compreendiam as relações entre as operações envolvidas.

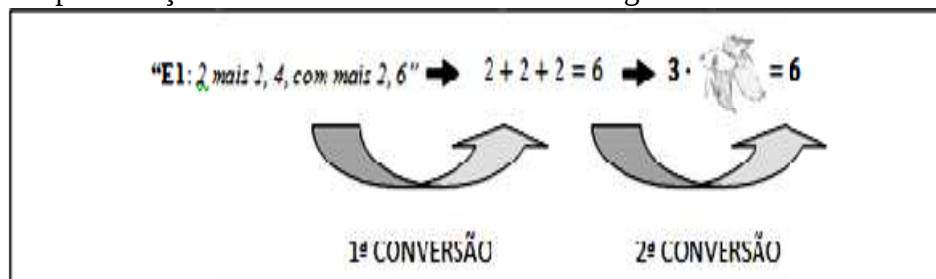
Figura 46 - Manifestações do pensamento algébrico em resolução dos estudantes



Fonte: Boni e Savioli (2015, p. 280).

Esta “conversão” entre registros é apresentada no artigo por meio da representação Semiótica e parte da “linguagem natural” para uma expressão aritmética (BONI; SAVIOLI, 2015, p.282).

Figura 47 - Representação Semiótica da conversão entre registros



Fonte: Boni e Savioli (2015, p. 281).

Com esta análise podemos também observar a capacidade de abstração dos estudantes, ao compreender que cada desenho representa um valor numérico, o preço do peixe. A atribuição de um número a cada símbolo (peixe) para que a soma resulte nos números dados, compreende a lógica das equações matemáticas, no caso com 3 incógnitas.

As manifestações do pensamento direcionam-se posteriormente, conforme figura 47 na aritmética generalizada no que se direciona a propriedade associativa e na estrutura multiplicativa.

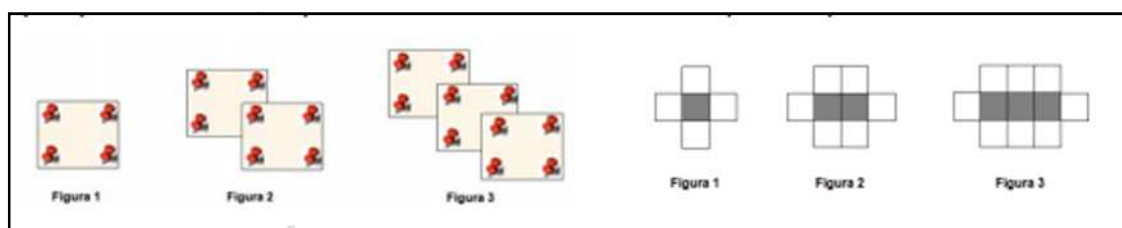
5.8 SEQUÊNCIA PICTÓRICA

Correia e Branco (2016) apresentam em seu artigo o objetivo de “compreender como é que alunos do 4.º ano analisam e generalizam sequências pictóricas crescentes; como determinam termos próximos ou distantes e como expressam as suas generalizações” (Correia e Branco, 2016, p.169). Para isso, analisaram duas tarefas que envolviam sequências pictóricas crescentes lineares.

Foram envolvidos 3 estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental selecionados por apresentarem três diferentes níveis de desempenho em Matemática.

Os estudantes foram acompanhados em entrevistas individuais pela pesquisadora.

Figura 48 - Sequência das tarefas



Fonte: Correia e Branco (2016, p.173).

Cada uma das atividades requeria do estudante, segundo as autoras, a “determinação de um termo próximo e de um termo distante que estabelecessem uma generalização para que os estudantes pudessem determinar qualquer termo da sequência numérica, associada à sequência pictórica” (CORREIA; BRANCO, 2016, p.173).

Apresentaremos as respostas dos estudantes com o mais alto e mais baixo desempenho de acordo com a avaliação da pesquisa.

A primeira resposta analisada representa o mais baixo desempenho em Matemática, que consta na 1ª sequência, um desenho com quatro lembretes e dezesseis pioneses. Quando a estudante é questionada sobre sua representação diz que, “após ter desenhado a figura quatro contou os seus pioneses”.

As autoras analisam esta resolução como: “diferente do esperado, não mantendo a regularidade, pelo que lhe é solicitado que indique quantos pioneses tem a primeira figura, a segunda e a terceira, ao que responde quatro, oito e doze, respetivamente”:

De modo que Andreia verifique que, de facto o número de pioneses da figura dois e três não corresponde ao que menciona, sugere-se que faça a contagem. Nesse momento percebe que não faz a interpretação correta das representações e após essa contagem refaz a sua análise da sequência. (CORREIA; BRANCO, 2016, p.174)

Após realizar a contagem das figuras, a estudante refaz seu registro apresentando a expressão:

Figura 49 - Registro do Estudante 1

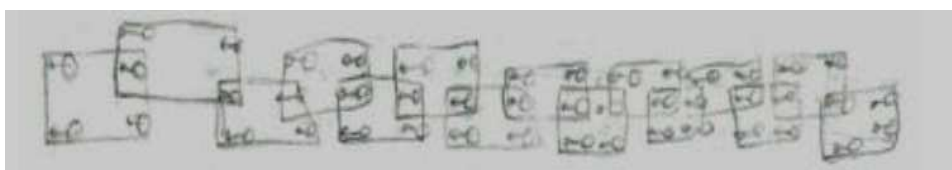


$$4+3+3+3=13$$

Fonte: Correia e Branco (2016, p.175).

Na outra fase, que requer a descoberta do termo distante, de ordem 15, a estudante desenha o termo com “quinze lembretes e quarenta e seis pioneses” conforme a Figura:

Figura 50 - Segundo Registro do Estudante 1



Fonte: Correia e Branco (2016, p.175).

Apesar da estudante dizer que são 46 pioneses no total, ela representa 47 em seu desenho, e quando é solicitado que ela apresente uma expressão que manifeste esta contagem, registra que no primeiro e no último lembrete há 4 pioneses e, na compreensão da autora continua indicando um resultado incorreto, que pode ser observado na figura abaixo.

Handwritten text on a grid background: $4 + 4 + 2 = 10$ and 10 quadrados brancos.

Fonte: Correia e Branco (2016, p.176).

Na transcrição apresentada a seguir, segundo as autoras, a estudante decompõe a figura em partes relacionando-as com o número da figura:

Figura 54 - Transcrição de mediação

Investigadora: Quatro mais quatro [lendo o registo da aluna], como é que tu contaste os quatro?

Andreia: Ah, contei quatro mais quatro [apontando em cima e em baixo dos quadrados escuros] e mais dois.

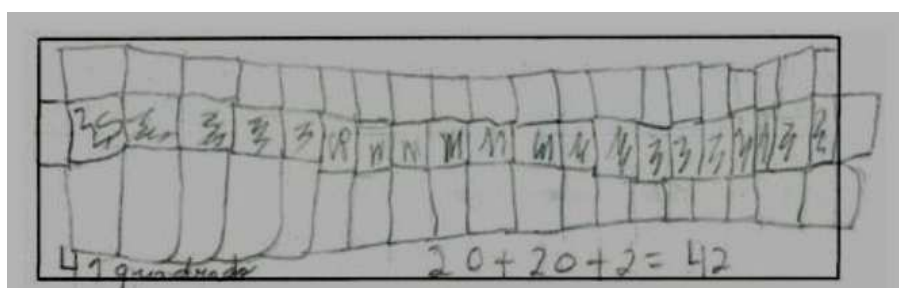
Investigadora: Os dois das pontas?

Andreia: Sim.

Fonte: Correia e Branco (2016, p.176).

Quando lhe é solicitado que determine o termo distante (20°), a estudante novamente faz por meio de desenho, conforme a figura abaixo.

Figura 55 - Resolução do estudante para encontrar o termo distante



Fonte: Correia e Branco (2016, p.177).

Na explicação verbal de seu registro, a estudante expressa como descobriu o 20º termo:

Figura 56 -Transcrição de mediação sobre a resolução do termo distante

Investigadora: Como é que sabias que eram vinte quadrados pretos?
Andreia: Porque na 1.ª tinha um quadrado preto, na 2.ª dois quadrados pretos e na 3.ª três quadrados pretos e na quarta quatro pretos.
Investigadora: Então na vinte...na figura vinte era?
Andreia: Vinte [quadrados sombreados]
 (...)
 Investigadora: E quantos quadrados brancos é que tu descobriste?
Andreia: Quarenta, aí quarenta e duas. Eu contei 20 [apontando para os quadros brancos em cima dos sombreados].
Investigadora: Vinte de cima?
Andreia: Vinte de cima mais vinte debaixo e depois mais as duas do lado.

Fonte: Correia e Branco (2016, p.177).

Nesta transcrição, as autoras apontam que a estudante estabeleceu a relação entre o número da figura e o número de quadrados sombreados e identificou por meio de relações o número de quadrados brancos, contudo, “escreve dois resultados distintos, um resultante da contagem, 41, e outro, o correto, obtido pela expressão numérica, na qual revela uma regra explícita para o cálculo do número de quadrados.” (CORREIA; BRANCO, 2016, p. 177). Porém ela ainda não consegue expressar esta relação para um modo geral (generalização).

O estudante de melhor desempenho em Matemática apresentou outro percurso para a resolução das tarefas.

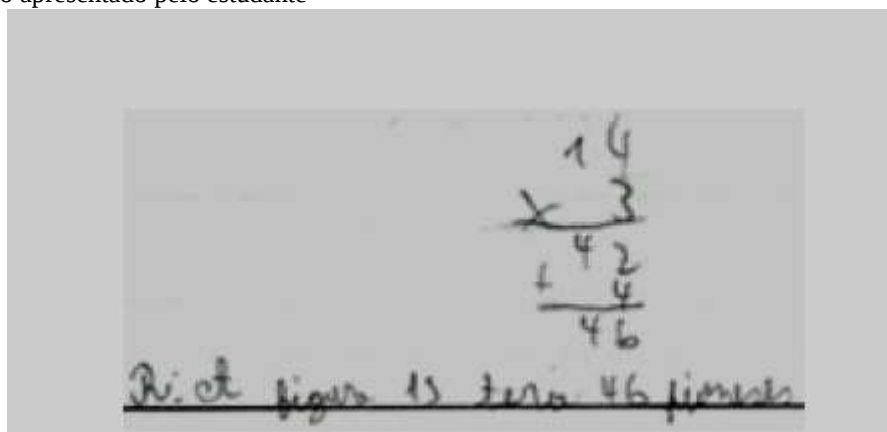
Na primeira etapa, desenha a figura com quatro lembretes e treze pioneses, indicando que ao longo da sequência acrescenta um lembrete, pelo fato que a figura quatro tem mais um lembrete do que a figura três da sequência, o estudante não apresenta o número de pioneses, e quando lhe é solicitado, explica que: “se cada figura tem quatro pioneses, então se a figura quatro teria quatro lembretes eram quatro vezes quatro, os quatro lembretes vezes os quatro pioneses”. (CORREIA; BRANCO, 2016, p. 181).

Porém seu registro inicial não apresenta coerência com sua explicação verbal, necessitando que o mediador solicite que o estudante recorra à contagem dos pioneses para confirmar sua resposta. Após esta contagem, o estudante reconstrói sua hipótese afirmando que agora, a figura dois apresenta sete pioneses.

Cada um agora tinha três [pionesses], este tinha quatro [último lembrete com quatro pionesses na figura 3] e aqui tinha três e este tinha quatro, o último tinha sempre quatro [figura quatro], mas os restantes tinham três. Então, a figura quatro era $3+3+3+4$. (CORREIA; BRANCO, 2016, p. 181)

Para determinar o termo 15, o estudante utiliza-se do mesmo processo, “era a mesma coisa, era três vezes catorze que me deu quarenta e dois e depois como o último lembrete tinha quatro pionesses, era juntando mais quatro, que me deu quarenta e seis”. (CORREIA; BRANCO, 2016, p. 181). O registro apresenta coerência com seu pensamento, conforme é apresentado na figura abaixo.

Figura 57 - Registro apresentado pelo estudante



$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 3 \\ \hline 42 \\ + 4 \\ \hline 46 \end{array}$$

Ric. a figura 15 tem 46 pionesses

Fonte: Correia e Branco (2016, p.182).

Quando lhe é solicitado que determine o termo distante (20^o), o estudante realiza o mesmo percurso, e verbaliza sua resolução: “era a mesma coisa, era três vezes catorze que me deu quarenta e dois e depois como o último lembrete tinha quatro pionesses, era juntando mais quatro, que me deu quarenta e seis” (Correia e Branco, 2016, p.181).

Isto posto, as autoras aferem que “o aluno encontra uma regra que lhe permite descobrir eficaz e rapidamente o número de pionesses de qualquer figura, tendo em conta a constituição dos termos pictóricos. Contudo, quando solicitada uma regra geral, Carlos remete para a utilização da regra para um caso específico.” (CORREIA; BRANCO, 2016, p.181)

Na segunda sequência, o estudante diz “ter observado que acrescenta um quadrado preto no centro e dois quadrados brancos, um em cima e um em baixo, de uma figura para a seguinte”. (CORREIA; BRANCO, 2016, p.182), e ainda efetua a expressão $4+4+1+1$, permitindo com que as autoras entendam que “decompôs a figura em partes que se relacionam com o número da figura ou são constantes: o conjunto de quadrados brancos da linha de cima;

o conjunto de quadrados brancos da linha de baixo; e os dois quadrados brancos dos extremos”.

Na resolução da questão sobre o termo distante o estudante:

Escreve a sequência numérica associada à sequência pictórica até ao 10.º termo, por ser metade de 20: 4-6-8-10-12-14-16-18-20-22. Em seguida faz a adição: $22+22=44$, ou seja, o aluno considera que o termo de ordem 20 tem o dobro dos quadrados brancos do termo de ordem 10. (CORREIA; BRANCO, 2016, p.183)

Para que o estudante reelabore seu raciocínio, o mediador incentiva-o a verificar se a mesma relação se verifica entre os termos 5 e 10, conforme a transcrição a seguir:

Figura 58– Transcrição

Investigadora: Então por essa lógica, metade de dez é quanto?

Carlos: Metade de dez é cinco.

Investigadora: Pronto. Então imagina que queríamos descobrir a figura dez e tu só ias descobrir até à figura cinco. Então dava quanto, a figura cinco tinha quantos quadrados brancos?

Carlos: Um, dois, três, quatro, cinco. [O aluno conta na sequência numérica que já tinha construído].

Investigadora: Se nós somássemos, (...) mais cinco não era? Mais outra figura cinco...

Carlos: Dava vinte e quatro.

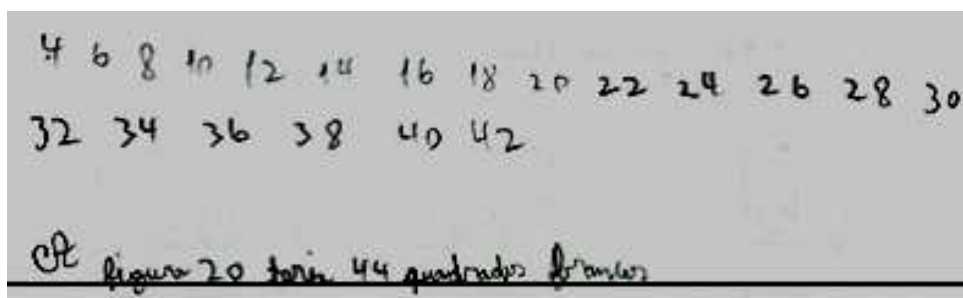
Investigadora: Bate certo com a figura dez? [aluno confirma com o número de quadrados brancos que já tinha descoberto na figura dez].

Carlos: Não.

Fonte: Correia e Branco (2016, p.183).

Assim, o estudante realiza outra estratégia para a resolução da questão:

Figura 59 - Estratégia de resolução



Fonte: Correia e Branco (2016, p.183).

Contudo, o estudante apesar de apresentar o resultado correto, não compreende porque sua 1ª hipótese não estava adequada, sendo encorajado pelo mediador pela reflexão das hipóteses.

Figura 60 - Transcrição da mediação sobre a hipótese do estudante

Investigadora: A diferença entre quarenta e quatro e quarenta e dois qual é?

Carlos: É de dois.

Investigadora: É de dois. Vamos lá ver na figura (virando a folha). Deixa lá ver. Imagina, nós temos a figura um, queremos descobrir a figura dois. São quatro não são? [apontando para a figura um, quadrados brancos].

Carlos: Sim.

Investigadora: Se nós somássemos quatro quadrados brancos à primeira figura não ia dar a dois [figura dois] pois não?

Carlos: Pois porque se não tinha que ter aqui dois e aqui dois [apontando para as extremidades laterais da figura dois].

Fonte: Correia e Branco (2016, p.183).

No que se refere à generalização, o estudante “registra a sequência numérica até ao 7.º termo e oralmente explica que para saber o número de quadrados brancos de qualquer figura constrói a sequência numérica até ao termo pretendido”. (CORREIA; BRANCO, 2016, p.184).

A realização deste estudo evidenciou segundo as autoras, a importância que tem a seleção das tarefas, em particular, a seleção da sequência pictórica e a solicitação tanto de termos próximos como de termos distantes.

Embora esta situação de aprendizagem apresente elementos geométricos e de os estudantes apelarem constantemente ao recurso do desenho no decorrer das mediações, as variações a serem analisadas pelos estudantes são quantitativas, no que se refere à contagem.

5.9 LUZES DE NATAL

Em sua tese, Pimenta (2016), objetiva analisar “o processo de abstração, identificado em alunos com nove e dez anos de idade, quando constroem um novo conhecimento matemático que decorre do incentivo ao desenvolvimento do pensamento algébrico”. (p.7)

Para tanto, selecionou-se tarefas exploratórias, que promovessem a observação de regularidades, relações e propriedades numéricas, a interpretação e utilização de linguagem

simbólica, a resolução de problemas de natureza algébrica e a generalização e extensão de procedimentos aritméticos a algébricos.

O referencial teórico de sua pesquisa tem por base a *Early Algebra*, mas também apresenta conceitos desenvolvidos em obras de Vygotsky e Davidov, como por exemplo, o processo de abstração do pensamento concreto para o abstrato.

A pesquisa envolveu toda a turma, porém foram analisadas as resoluções de 2 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, os quais pertenciam a turma onde a pesquisadora era professora.

Pimenta (2016) analisou 8 tarefas entre elas, a denominada “Luzes de Natal” que objetivou promover a construção do conceito de mínimo múltiplo comum e a utilização de linguagem matemática simbólica.

Os objetivos específicos desta tarefa são:

Promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e de identificar que ações é que estes desenvolvem durante a construção do novo conhecimento, o qual se centra no conceito de mínimo múltiplo comum e na utilização de linguagem simbólica que os alunos possam utilizar para interpretar e generalizarem regularidades numéricas. (PIMENTA, 2016, p.78)

A autora justifica que “o enunciado da tarefa ajusta-se à realidade dos alunos, enquadrando-se nas suas vivências. Procurou-se uma abordagem descritiva da situação, tendo-se recorrido a imagens apelativas que acompanhassem o enunciado escrito e que procurassem recriar uma situação real.” (PIMENTA, 2016, p.80).

Os personagens representados nas tarefas são referente a crianças com idade próxima a dos estudantes, visando facilitar a compreensão e motivá-los à resolução da tarefa, e tem como objetivo: promover a construção do conceito de mínimo múltiplo comum e a utilização de linguagem matemática simbólica.

Para que isto ocorra, a pesquisadora oferece aos estudantes, a utilização de tabelas, para que possam evidenciar as regularidades ali presentes, e medeia toda a realização da tarefa a fim de alcançar os objetivos anunciados.

A questão central no início da exploração da atividade é: “*Será que, para além do instante inicial (zero segundos), as lâmpadas voltaram a piscar em simultâneo?* – que, espera suscitar no estudante à identificação e à generalização de regularidades. (PIMENTA, 2016, p.79) A figura que segue representa essa situação:

Figura 61 - – Situação de Aprendizagem Luzes de Natal

Na Matelândia, neste Natal, várias famílias enfeitaram as suas árvores com lâmpadas *pisca-pisca*, as quais existem em diferentes formatos.

No mercado estão disponíveis lâmpadas com a forma circular, triangular, quadrangular, entre outras, tendo cada família selecionado apenas um desses tipos para colocar na sua árvore.

Três amigos compraram, cada um deles, uma dessas lâmpadas e estão a procurar dar resposta a algumas questões lhes foram colocadas. Tenta ajudá-los, respondendo às questões que se seguem.

Sabe-se que:

- O TitoMat comprou lâmpadas com formato circular, as quais piscam de 6 em 6 segundos;
- A RitaMat comprou lâmpadas com formato triangular, as quais piscam de 9 em 9 segundos;
- O EduMat comprou lâmpadas com formato quadrangular, as quais piscam de 18 em 18 segundos.

Considera que os três amigos começaram a cronometrar, ao mesmo tempo, durante 1 minuto, os instantes (segundos) marcados no seu cronómetro sempre que as luzes piscaram. Será que, para além do instante inicial (zero segundos), as lâmpadas voltaram a piscar em simultâneo?






TitoMat



RitaMat



EduMat

Fonte: Pimenta (2016, p. 387)

Para que os estudantes possam elaborar suas resoluções, é proposto o preenchimento da tabela, no intuito de organizar os dados e proporcionar aos estudantes a identificação das relações numéricas.

Observamos que nessa situação de aprendizagem, os estudantes não têm liberdade de escolher como irão solucionar o problema.

Figura 62 - Tabela para organização dos dados

TitoMat
0

RitaMat
0

EduMat
0

Fonte: Pimenta (2016, p. 81)

Figura 63 - Preenchimento da tabela realizado por um estudante.

TitoMat
0
6
12
18
24
30
36
42
48
54
60

RitaMat
0
9
18
27
36
45
54

EduMat
0
18
36
54

Fonte: Pimenta (2016, p. 108)

Nesta resolução, a autora destaca que “[...] através da informação constante nas tabelas, que o reconhecimento e seleção de dados e as competências adquiridas em aprendizagens anteriores contribuiu para cumprir, com sucesso, a primeira etapa da tarefa”. (PIMENTA, 2016, p. 108)

Contudo, a autora aponta que para responder a questão central da tarefa, “no primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?”, os estudantes terão que identificar regularidades presentes nas tabelas preenchidas e reconhecer que esse

padrão poderá ser útil para apresentarem uma resposta e justificarem o raciocínio desenvolvido.

Posteriormente, são apresentadas três questões, com o objetivo de incentivar os estudantes a observarem as regularidades presentes nas tabelas, que lhes permita dar resposta às questões colocadas e a iniciarem o processo de construção.

Figura 64 - Regularidades na tarefa “Luzes de Natal”

Observa a sequência numérica presente nas tabelas do TitoMat e do EduMat.

No primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.

Nota: Não consideres o instante inicial.

Considera agora a sequência presente nas tabelas da RitaMat e do EduMat.

Quanto tempo foi necessário esperar para voltar a ver as respetivas lâmpadas a piscar ao mesmo tempo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.

Nota: Não consideres o instante inicial.

De quanto em quanto tempo piscaram as três lâmpadas em simultâneo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados desta questão? Justifica.

Nota: Não consideres o instante inicial.

Tendo em consideração as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, determina o mínimo múltiplo comum (m.m.c) entre:

a) 6 e 18 b) 9 e 18 c) 6, 9 e 18 d) 5, 10 e 20 e) um número e o dobro desse número

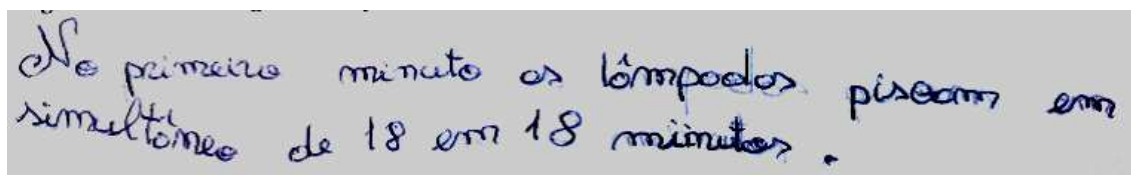
Fonte: Pimenta (2016, p. 81)

Frente a estas questões, a autora espera que “[...]eles consigam associar esse cálculo às regularidades presentes nas tabelas preenchidas e expostas nas questões anteriores. Intenciona-se que os alunos combinem e reorganizem dados e ideias já concebidas para obterem a construção pretendida [...]”(PIMENTA, 2016, p.81).

A figura 66 ilustra uma resposta à pergunta: “[...] No primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo? [...]” (PIMENTA, 2016, p.115). Esta questão surge depois dos alunos terem sido incentivados a analisar as tabelas já preenchidas e, em particular, a identificarem as regularidades aí presentes.” (PIMENTA, 2016, p.115)

É constatado que com esta resolução o estudante esteja apresentando uma resposta “parcialmente correta” identificando regularidades.

Figura 65- Resposta de estudante

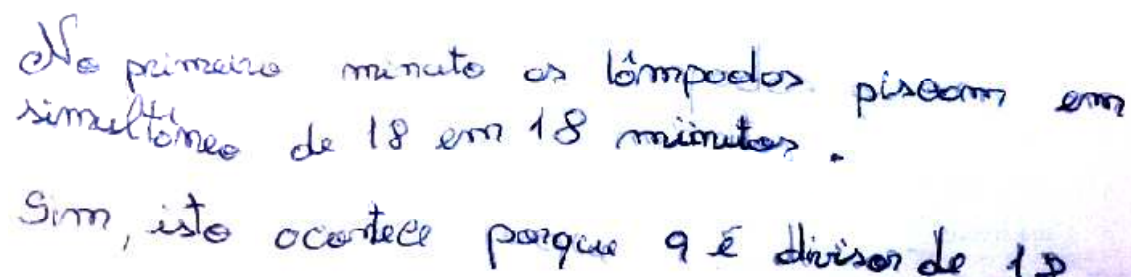


No primeiro minuto os lâmpados piscam em simultâneo de 18 em 18 minutos.

Fonte: Pimenta (2016, p. 115)

A autora observa que nesta resolução, o estudante utiliza a palavra “minutos” ao invés de “segundos” – considera-se a possibilidade de se ter tratado de uma distração, uma vez que, durante o preenchimento das tabelas, os alunos já tinham estabelecido uma relação entre um minuto e sessenta segundos. Quando é solicitado que o estudante justifique sua resposta, utiliza o argumento ilustrado na Figura 67

Figura 66 - Justificativa do estudante



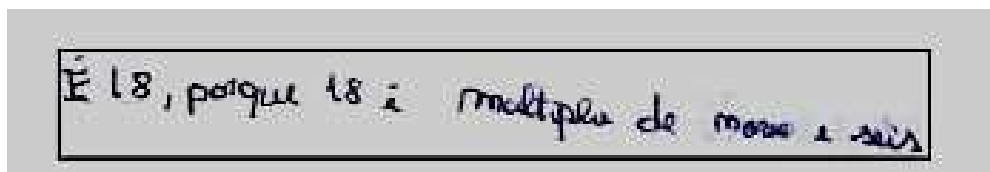
No primeiro minuto os lâmpados piscam em simultâneo de 18 em 18 minutos.
Sim, isto acontece porque 9 é divisor de 18

Fonte: Pimenta (2016, p. 115)

Esta justificativa segundo a autora pauta-se no conhecimento adquirido com a identificação das regularidades integrando os conhecimentos reconhecidos, tais como o conceito de divisor de um número.

Segundo ela, esta manifestação acontece, pois: a “[...] ação de construir ocorreu, nesta situação, através da integração de construções reconhecidas da apresentação de soluções e justificaçãopara os raciocínios desenvolvidos [...]” (PIMENTA, 2016, p.115).

Figura 67 - Justificativa do estudante



Fonte: Pimenta (2016, p. 116)

De acordo com os registros da Figura 5.9-7, foi verificado que os estudantes:

Integraram e combinaram o conceito de múltiplo com os dados enunciados para apresentarem Justificação para a Solução apresentada. Constatou-se, ainda, a mobilização de conhecimentos adquiridos com o preenchimento das tabelas e com os raciocínios anteriormente desenvolvidos – de quanto em quanto tempo as três lâmpadas piscam em simultâneo (PIMENTA, 2016, p.116).

A partir da utilização da organização tabular da Figura 69, foi solicitado que os estudantes identificassem “o número de vezes que as luzes do TitoMat piscaram no primeiro minuto, para além do instante inicial”(PIMENTA, 2016, p.117)

Figura 68 - Tabela de organização

Minutos	N.º de "piscas"
1	10
2	20
5	50
10	100
20	200
30	300
40	400
50	500
60	600

Fonte: Pimenta (2016, p. 116)

De acordo com os registros escritos apresentado na Figura 69, é verificado que:

De acordo com os registros escritos apresentados, constata-se que os alunos preencheram corretamente a tabela, apresentando Solução para a questão colocada e cumprindo, dessa forma, o objetivo delineado para esta etapa. Subjacente ao preenchimento desta tabela está a análise da tabela do TitoMat já preenchida, uma vez que os alunos contabilizaram dez “piscas” durante o primeiro minuto, excetuando o instante inicial. A combinação de Estruturas reconhecidas – cálculo – esteve igualmente presente no preenchimento das restantes células da tabela e na generalização da regularidade a qualquer número, determinado, de minutos. (PIMENTA, 2016, p.117).

Quando é requerida uma generalização a um número indeterminado de minutos e esse é apresentado em linguagem simbólica (m), os estudantes apresentaram dificuldades de compreensão deste significado, conforme ilustra a transcrição abaixo na Figura 70:

Figura 69 - Transcrição de mediação

GI: *O que é o m ? [Os alunos ficaram pensativos, chamaram a professora e essa especificou]*

P: *Uma letra! [Os alunos ficaram calados!] Uma letra que representa um número qualquer de minutos. [Os alunos mantiveram-se calados!]*

P: *[Voltou a intervir para que não desistissem da questão]: Vejam como completaram a tabela até este momento. As respostas estão corretas. Continuem a pensar da mesma forma.*

GI: *É m ?! [Referindo-se à resposta]*

P: *Então onde se tinha 1 minuto, a resposta seria 1 pisca, e não 10. Onde tinha 2, seria outro 2 e não 20 e para o 5 a mesma coisa?!*

Fonte: Pimenta (2016, p. 121)

O diálogo anterior segundo a autora, “evidencia que a generalização começa por estender-se a valores numéricos determinados, superiores a um minuto, que não ofereceram, qualquer dificuldade aos alunos” incluindo quando se solicitou a extensão desses a valores determinados não consecutivos. (PIMENTA, 2016, p.121)

Segundo Pimenta, a passagem a seguir, demonstra que os estudantes “compreenderam que num minuto as luzes piscavam dez vezes e estenderam, em proporção direta, esse valor a dois, cinco, dez, vinte, trinta, quarenta, cinquenta e sessenta minutos”.

Porém, quando a generalização se estendeu a um número indeterminado de minutos e esse foi apresentado em linguagem simbólica, os alunos transmitiram não compreender o respectivo significado. O registro escrito que se segue revela que as dificuldades em torno da linguagem simbólica persistem.

Figura 70- Transcrição da mediação

LP: *n ? [Referindo-se a uma possível solução]*

GI: *Por que razão n ?*

LP: *É a seguir!*

GI: *Não é a seguir, é vezes dez!*

P: *Parece-me melhor, podem agora representar o que estão a dizer?!*

[GI escreve $\times 10$]

P: *Não falta aí nada? Pensem lá!* [A professora afastou-se durante uns instantes, regressando quando os alunos mostraram querer entregar a tarefa].

GI: *Então, acabaram?! Tudo feito?! Correu bem?!*

[Os alunos abanaram a cabeça em sinal de concordância. A professora observou-a rapidamente, percebendo a presença da letra n na última questão, perguntando-lhe qual seria o respectivo significado]

P: *Por que $n \times 10$? O que querem dizer com n ?*

LP: *n de número qualquer.*

Fonte: Pimenta (2016, p. 121)

A pesquisadora associa as dificuldades dos estudantes pelo fato de não terem atribuído significado correto à letra m — *letra não considerada* — tendo apenas reconhecido a sua presença.

Quando m é substituído por n , sendo n , para os alunos, um número qualquer, o erro cometido parece relacionar-se com o facto de interpretarem a *Letra como objeto*, considerando n como abreviatura de número. Contudo, ainda que os alunos não tenham apresentado em linguagem simbólica correta a generalização a m minutos, considera-se que a *Construção* pretendida foi alcançada. Entende-se, ainda, que essa *Construção* ocorreu quando os alunos expressaram pela primeira vez, através de linguagem algébrica, a generalização da regularidade a n minutos e a escreveram em linguagem simbólica, atingindo o objetivo delineado para a tarefa. (Pimenta, 2016, p. 121)

A autora então concluiu que os estudantes apesar de não terem apresentado em linguagem simbólica correta a generalização a m minutos, alcançaram o objetivo pretendido. Isto porque ainda que essa construção tenha ocorrido quando os estudantes tenham expressado pela primeira vez, através de linguagem algébrica, a generalização da regularidade a n minutos e a escreveram em linguagem simbólica, atingindo o objetivo delineado para a tarefa.

A autora afirma que priorizou a identificação de regularidades, a compreensão da linguagem simbólica e a identificação do mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números naturais.

Pimenta (2016), também reforça importância do papel do professor como agente mediador para que os alunos cheguem à resolução da tarefa, “[...] esclarecendo dúvidas e promovendo a exposição oral e escrita de ideias, sem negligenciar as perspectivas pessoais dos alunos.” (PIMENTA, 2016, p.125).

Por fim, considerou que nesta atividade:

[...] a construção do novo conhecimento matemático assumiu uma dimensão individual e comunicacional, no sentido em que resultou de um processo de reconstrução interna concebida pela partilha de conhecimentos e ideias entre alunos e entre alunos e professora, a qual foi guiada por processos semióticos associados às características da própria tarefa. Neste sentido, ressalta a ideia de que a construção de um novo conhecimento, em particular a compreensão da generalidade e a utilização de linguagem simbólica, pode estar dependente da ação do professor.

Nesta situação analisada na pesquisa, podemos reconhecer a expressão de uma generalização na linguagem retórica apresentada na Figura 66. Além disso, as transcrições das mediações intencionais da professora nos levam a perceber o caminho seguido para que os estudantes construam uma simbologia que represente a relação entre as variáveis minutos e quantidade de vezes que a lâmpada piscou.

Pelo relato da professora inferimos que acelerar a aprendizagem no que se refere à linguagem verbal para a simbólica, possa ser um fator de dificuldade na aprendizagem dos conceitos interligados na segunda tarefa. Observa-se que é a professora que introduz a letra *m*, indicando a quantidade de minutos, o representante poderia ter sido escolhido pelos próprios alunos, seja uma ou mais letras, uma palavra, ou figura.

5.10 ÁBACO

A pesquisa de Fernandes (2014) investigou quais características do pensamento algébrico foram manifestadas por estudantes que ainda não haviam tido contato com a simbologia algébrica formal, aplicando questões adaptadas dos documentos PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil, 2011. A autora recolheu questões retiradas da Prova Brasil com potencial algébrico para analisar os registros dos estudantes. As questões sofreram algumas adaptações, como a retirada das alternativas

oferecidas pela avaliação; e os estudantes foram orientados a responder as questões sem intermediação do professor, ou de colegas.

Os estudantes envolvidos estavam matriculados no 5º ano do Ensino Fundamental em uma escola parceira do Projeto Observatório da Educação – CAPES, em que a pesquisadora estaria inserida. A turma era composta de 38 estudantes.

A autora apresenta diferentes concepções de ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico, porém compartilha da visão de Kieran (2007) afirmando que:

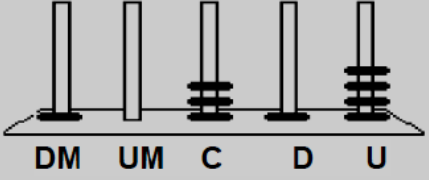
A álgebra não deve ser ensinada como técnica aprendida por meio de repetição de procedimentos, mas que a concepção de álgebra deve deslocar-se no sentido de que aprender álgebra, é pensar algebricamente em situações matemáticas e/ou em outras situações (FERNANDES, 2014, p.26)

As análises foram realizadas utilizando-se como metodologia a Análise de Conteúdo perpassando as seguintes categorias: estabelecimento de relações; relação funcional; relação de igualdade ou equivalência; regularidades; comparação entre grandezas; interpretação de dados; formulação de conjecturas (hipóteses); transição de notações (diferentes notações) e generalização. (FERNANDES, 2014)

Apresentamos uma das 12 atividades analisadas nesta contribuição.

Figura 71 - Situação de Aprendizagem: Ábaco

No ábaco abaixo, Cristina representou um número:



a. Qual foi o número representado por Cristina?

b. Explique como você pensou.

Fonte: Fernandes (2014, p.46)

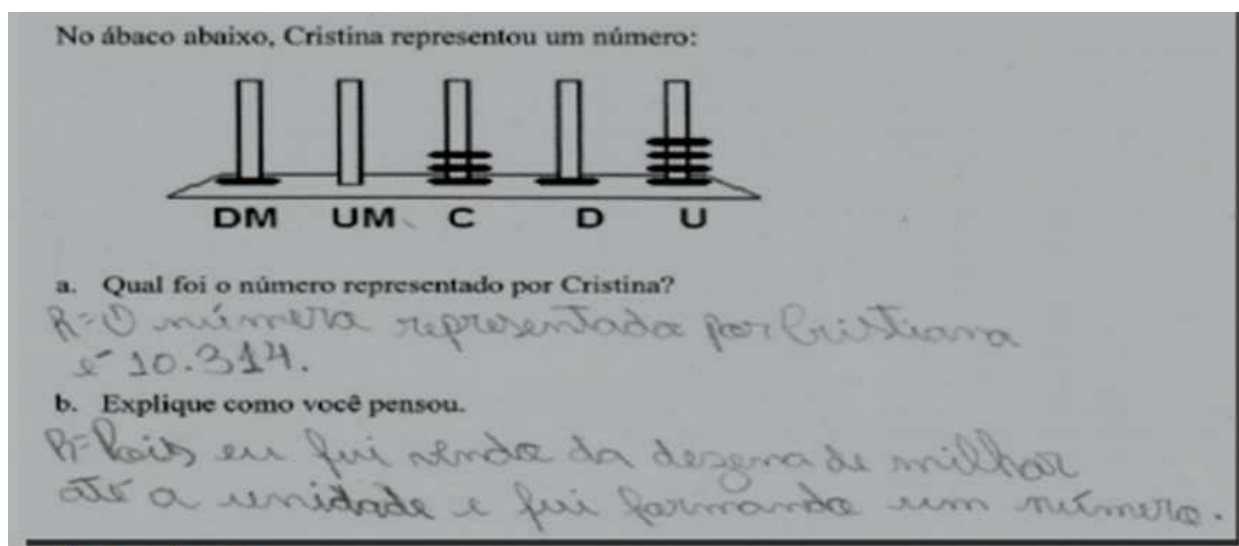
Esta questão evidencia segundo a autora, “o sistema de numeração decimal, tais como agrupamentos, trocas e a utilização da base 10 de nosso sistema” (FERNANDES, 2014, p.46). A autora enfatiza que segundo Kieran (1999)

Ao propiciar atividades que requerem do estudante a utilização do sistema de numeração decimal que necessitem de diferentes representações para a mesma ideia matemática, está se desenvolvendo características do pensamento algébrico (KIERAN, 1999, apud, FERNANDES, 2014, p.47).

Conforme a análise, esta atividade propicia uma “transição entre notações”: Por esta categoria, a autora entende que:

Ocorre quando utiliza-se diferentes representações para expressar a mesma ideia matemática, ou ainda, ao interpretar dados expressos em um tipo de notação e apresentar as interpretações feitas por meio da utilização de outra forma de notação.(FERNANDES, 2014, p.87)

Figura 72 - Resposta elaborada por um estudante

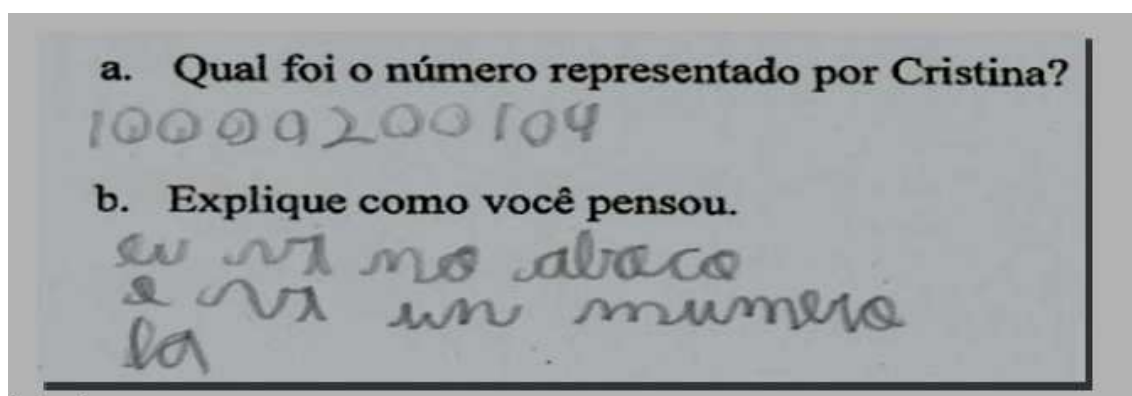


Fonte: Fernandes (2014, p. 88).

Segundo a análise, 9 estudantes apresentaram resoluções semelhantes a apresentada na figura 73, segundo Fernandes, (2014, p.89), neste caso, o estudante interpretou uma figura e criou uma estratégia realizando uma “transcrição entre notações” (no número representado por meio de uma figura para o número representado por meio de símbolo do sistema de numeração decimal).

Boa parte dos estudantes não apresentou a resposta correta, mas segundo a autora, este fato não impede que se manifestem indícios do pensamento algébrico no processo de aprendizagem que não é só evidenciado pelo resultado. É o caso do exemplo apresentado na figura abaixo.

Figura 73 - Resposta incorreta de um estudante.



Fonte: Fernandes (2014, p. 89).

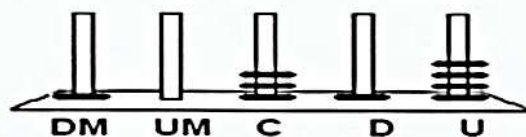
Neste registro, segundo a autora, o estudante escreve o número representado como “se fosse uma junção dos valores relativos a cada peça do ábaco”. (p. 89). Sendo assim, considerou-se que o estudante de certa forma traduziu as informações representadas simbolicamente na figura para informá-la utilizando outra representação.

Outro estudante (Estudante 21) apresentou uma resposta correta interpretando a figura e mostrando compreender que o numeral presente no ábaco possuía diversas ordens, no entanto quando escreve o numeral, não se atenta ao valor posicional do sistema de numeração indo- arábico. (figura 75)

A autora infere que nesta resolução, o estudante interpretou os dados apresentados e efetuou transição entre notações (FERNANDES, 2014, p.90)

Figura 74 - Resolução do Estudante 21

No ábaco abaixo, Cristina representou um número:



a. Qual foi o número representado por Cristina?

1.314 Esse foi o número representado por cristiana.

b. Explique como você pensou.

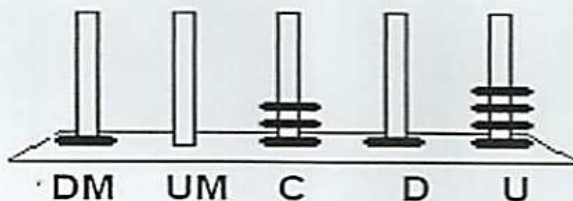
Eu contei no abaco e tinha uma bolinha no primeiro não tinha nenhuma no segundo fui contar no terceiro e tinha três aí eu contei no quarto e tinha uma bolinha aí eu contei no quinto fizinho e tinha três aí eu cheguei no número 1.314.

Fonte: Fernandes (2014, p. 90)

Na pesquisa, foi observado pela autora que 14 estudantes não manifestaram características do pensamento algébrico por não evidenciar a interpretação dos dados da figura e pelo fato de não terem transitado pelas diferentes notações pelo mesmo elemento matemático (FERNANDES, 2014, p.91), conforme exemplos das figuras 76 e 77.

Figura 75 - Resolução do Estudante 34

No ábaco abaixo, Cristina representou um número:



a. Qual foi o número representado por Cristina?

foi 10.314.

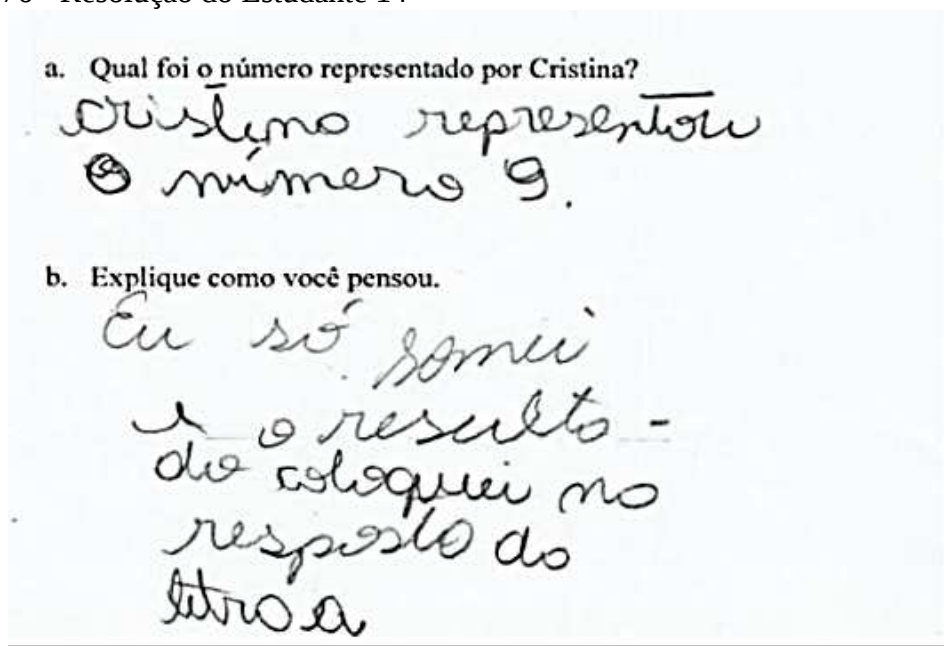
b. Explique como você pensou.

Eu fui contando até achar o resultado.

Fonte: Fernandes (2014, p. 128).

Este estudante, segundo a autora, verificou a quantidade de risquinhos em cada haste, compondo o numeral solicitado.

Figura 76 - Resolução do Estudante 14



Fonte: Fernandes (2014, p. 128).

Nesta resolução, o estudante somou a quantidade de riscos das hastes representadas, apresentando o 9 (número de hastes) como resposta final.

A autora conclui na análise desta atividade, que é possível que ocorra o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes, mesmo sem a utilização da notação algébrica formal. Isto é, os alunos ainda lançam mão da linguagem não simbólica na resolução do problema.

Para esta pesquisa, a notação compõe uma linguagem na qual o estudante expressa suas manifestações de pensamento. Podemos inferir que uma parte dos estudantes lança mão da contagem para as suas resoluções a exemplo da figura 77, onde o estudante efetua a soma das hastes para efetuar seu registro, não levando em consideração o sistema numérico posicional

Outros já conseguem estabelecer relação entre o valor posicional e a escrita aritmética, transpondo seus conhecimentos prévios sobre o sistema de numeração decimal em sua representação (Figura 73).

Interessante notar que na segunda questão 2, “Explique como você pensou” todos os estudantes registraram suas respostas na linguagem retórica.

5.11 CONSIDERAÇÕES DA ANÁLISE

A partir das contribuições elencadas em nossa análise, podemos considerar que há poucos trabalhos disponibilizados relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico para os 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, isto porque de acordo com as buscas levantadas nos bancos de dados foram somente relacionadas dez pesquisas num universo aproximado de 5 anos.

Todas as contribuições analisadas concordam que o pensamento algébrico deve ser desenvolvido ainda nas séries iniciais, num movimento contínuo durante toda escolaridade dos estudantes.

Das 10 contribuições selecionadas em nosso *corpus*, 6 são oriundas de Universidades do Brasil, e 4 de Portugal.

No Brasil, de onde advém a maioria das contribuições somente duas contribuições referem-se diretamente aos PCN’s, isto pode ocorrer devido ao ensino de álgebra não ser mencionado claramente para os 4º e 5º anos do Ensino Fundamental I. A álgebra está abordada no bloco de Números e Operações, trazendo como conteúdos a utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em sequências numéricas, a compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas e a construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples apresentada no Ensino Fundamental envolvendo a etapa do Ensino Fundamental II.

A BNCC é referencia somente na contribuição de Scheller, Bonotto e Vialli (2016) pesquisa elencada visto o tempo delimitado, e por ser considerado um documento recente.

Observamos que as duas pesquisas que tem como referencial a Modelagem apresentam aspectos de proximidade com a Teoria Histórico-Cultural, pela ênfase na construção e movimento do pensamento dos estudantes na elaboração de suas resoluções; na contextualização histórica presente, e por focar-se no processo do desenvolvimento e não só na automatização de sua aplicação.

As contribuições advindas de Portugal amparam-se nos NCTM, e por consequência apresentam este enfoque mais lógico, a exemplo da situação de aprendizagem apresentada por Correia e Branco (2016) na Figura 49, que por meio de movimentos regulares prioriza a análise de padrões aritméticos e geométricos, os aspectos lógicos da álgebra

Em 5 contribuições as situações de aprendizagem foram retiradas da *Early Algebra*, esta vertente embasada nos NCTM, utiliza-se de estratégia de resoluções de problemas para o ensino de matemática. Ao descrever as habilidades almejadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico como a compreensão de padrões; representação utilizando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos e analisar variações pode reafirmar o aspecto lógico evidenciado.

Esta referência na *Early Algebra* faz com que as situações propostas predominantemente sejam focadas no aspecto lógico formal, privilegiando o ensino de regras e técnicas operatórias, e não o desenvolvimento dos conceitos envolvidos neste tipo de pensamento. Além disso, podemos identificar que estas atividades que envolvem padrões, movimentos regulares, etc. têm o ponto de partida e o ponto de chegada no conhecimento empírico. O foco na lógica empírica, no caso da generalização, do particular para o geral, dando ênfase à linguagem em detrimento do pensamento algébrico, deixa de lado a interdependência dos dois aspectos.

Sousa (2004) nos indica que estas situações como vem sendo apresentadas no ensino, são insuficientes para levar os estudantes a uma compreensão de nexos conceituais algébricos que superem a formação de um pensamento empírico-discursivo, pois “a realidade não é composta apenas por movimentos regulares. Apesar disso, a escola prima por estudá-los de forma que possa abstraí-los e generalizá-los a partir de fórmulas matemáticas” (SOUSA, 2004, p.133).

Nas situações de aprendizagem dos documentos analisados notamos que no trabalho de Scheler (2017), por exemplo, busca-se a modelação de fenômenos que faziam parte de sua cotidianidade. As tarefas de Nunes (2014) já eram mais abstratas, necessitando ignorar alguns elementos, como a representação dos quadradinhos de chocolate juntos sugerindo a imagem de barra de chocolate que em determinada figura já não caracteriza o que se tem no comércio. Essa abstração também pode ser discutida com os estudantes, este tipo de situação é comumente utilizado em sala de aula.

Pudemos também evidenciar a ênfase na mediação intencional em seis pesquisas o que para nossa pesquisa é um dado relevante, esta intencionalidade expressa pelos autores tinha o

objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico possibilitando generalizações e reflexões.

Destas dez pesquisas, somente cinco apresentam as transcrições dos diálogos entre os estudantes e a mediação do adulto envolvido, as outras cinco que apresentam somente um momento, o que dificulta acompanhar o movimento do pensamento dos estudantes, a fluência de seu pensamento característica essencial para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico nesta teoria.

Do ponto de vista da Teoria Histórico-Cultural, o ponto de partida das situações de aprendizagem pode até partir dos movimentos do cotidiano, porém o ponto de chegada deve considerar os conceitos científicos, defendendo um enfoque na forma de constituição do pensamento algébrico e não na sua representação.

Por esta perspectiva, a ação de organizar estas situações de aprendizagem, tarefa do professor deve ser planejada intencionalmente para que ocorra um processo de elaboração e concretização do pensamento do estudante.

Além disso, as situações podem atrelar-se a aspectos históricos, abordando conceitos historicamente acumulados pela humanidade que garantam significado aos novos símbolos apresentados nesta aprendizagem.

Neste sentido, podemos apontar a situação de aprendizagem “O tamanho do calçado” (Figura 5.1-1) como uma situação que se aproxima do que é almejado num ensino focado na Teoria Histórico- Cultural, pois ela parte de um elemento de construção histórica, com a problematização voltada à necessidade de se ter um padrão de numeração de calçados para contextualizar a situação de aprendizagem.

Por todas as questões neste espaço evidenciadas, podemos concluir que ainda temos muito a caminhar no sentido de um ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico, com bases histórico-culturais, fincado no objetivo de propiciar um real desenvolvimento do pensamento dos estudantes numa atividade de estudo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

.

Este trabalho constituiu-se a partir da questão central: “*Quais são as contribuições acadêmicas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental que foram publicadas desde 2014?*”.

Para responder a questão, partimos para uma busca nos bancos de dados *SciELO* (*Scientific Eletronic Library Online*), *BDTD* (Biblioteca Digital de Teses e Dissertações), *Web of Science* e *Google Acadêmico*, que apesar de apresentarem muitas pesquisas sobre o pensamento algébrico, em sua maioria não atendiam aos requisitos necessários para fazer parte de nossa seleção, visto que não tinham o foco nos anos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental I.

Por meio da metodologia da Análise de Conteúdo, investigamos as contribuições das pesquisas acadêmicas publicadas desde 2014 que estivessem dentro das especificações, isto é, enfocavam-se no desenvolvimento do pensamento algébrico nos 4^{os} e 5^{os} anos do Ensino Fundamental.

Grande parte das contribuições apresentadas nas buscas nos bancos de dados focava-se na Formação de Professores e outros segmentos de ensino o que nos faz inferir que há uma lacuna na realização de pesquisas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico para esta faixa-etária.

As técnicas da Análise de Conteúdo foram essenciais para que chegássemos ao *corpus* com dez pesquisas que serviriam como uma contribuição para a construção da análise, bem como para a elaboração do produto final.

A partir destas contribuições e orientados pelas categorias destacadas em nossa grelha: variável, generalização e linguagem pudemos compreender como estão sendo estabelecidas as práticas de ensino em torno do pensamento algébrico para os 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

A análise realizada em cada contribuição exigiu outros estudos e buscas para compreensão das situações de aprendizagem analisadas, visto que estas estavam amparadas em diferentes fundamentações teóricas e metodologias.

Como estava objetivada a construção de um Produto Final de uma História em Quadrinhos que envolvesse o desenvolvimento do pensamento algébrico norteado pela Teoria Histórico-Cultural, fez-se necessária também uma pesquisa bibliográfica em torno desta Teoria, o pensamento algébrico e do movimento lógico-histórico deste conteúdo.

A intencionalidade da aplicação deste produto para os estudantes dos 4^{os} e 5^{os} anos do Ensino Fundamental, nos remeteu a um estudo sobre alguns documentos que norteiam a

organização do ensino, primeiramente focados em documentos nacionais; os PCN's e a BNCC, logo em seguida achamos conveniente apresentar também um currículo que estivesse versado pela Teoria Histórico-Cultural, apresentando o Currículo Municipal de Bauru.

A inclusão dos documentos americanos: *Common Core State Standards* durante a pesquisa surge com a oportunidade do estágio na USF, no tocante a embasar as experiências e observações vivenciadas na Flórida; os Princípios e Normas para a matemática escolar - NCTM -se fazem presentes também pela sua relevância e disseminação internacional..

Sobre as pesquisas, verificamos que há um movimento acadêmico frente à questão do desenvolvimento do pensamento algébrico na Teoria Histórico-Cultural, advindas de autores como Sousa, Moura, Cedro, Panossian, entre outros, mas que ainda chegam lentamente às práticas escolares.

Outro ponto a destacarmos é a maneira como os documentos que norteiam a educação no Brasil exploram e organizam este conteúdo, ainda embasados numa lógica formal, que não propicia nem ao professor (como subsídio), nem ao estudante (como prática deste subsídio), a possibilidade de vislumbrar chegarmos onde desejamos, isto é, na compreensão da necessidade da objetivação deste conteúdo, de sua dimensão lógico-histórica, de seu constante movimento. Salvo o Currículo Municipal de Bauru, e talvez outros, não analisados aqui.

Com tudo isso, podemos afirmar que o ensino deste conteúdo na forma como está organizado e praticado na escola, e como se apresentam nos documentos, baseado nas generalizações decorrentes de regularidades e não no movimento, dificulta a elaboração de um pensamento teórico deste conceito.

Por conta disso, os estudantes muitas vezes podem até utilizar representações algébricas, mas a compreensão é limitada quando se almeja levar em conta o processo lógico-histórico.

Como se trata de um trabalho inserido em um Programa de Mestrado Profissional em Docência para Educação Básica, nosso maior propósito é contribuir com a atividade pedagógica do professor, fornecendo embasamento teórico e também um leque de pesquisas e análises para a construção de sua trilha prática-pedagógica.

Este objetivo materializa-se como um produto educacional construído através de uma História em Quadrinhos, em busca de aproximar-se dos princípios da Teoria Histórico-Cultural, que versa na constituição do pensamento algébrico voltada aos estudantes de 4º e 5º anos.

Esperamos que este trabalho beneficie no sentido de uma reflexão e exercício e análise de nossas práticas e para um futuro menos difícil e mais pleno para a consolidação do ensino no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais Ensino Fundamental.

¹¹Enquanto professora, esta pesquisa permitiu-me uma retomada de reflexões com novos elementos, o primeiro deles sobre a escola, espaço onde atuo, com suas demandas e possibilidades que a partir de agora para o espaço essencialmente de aprendizagem onde seus principais componentes: estudantes (em atividade de estudo) e professor (em atividade de ensino) perpassam por atividades que devem propiciar novos conhecimentos científicos.

A intencionalidade do professor em sua atuação também é fundamental, pois no decorrer da pesquisa deparei-me com dúvidas e questionamentos frente á minha atuação em diversas situações que havia passado em sala de aula e que se tivesse me preparado com esta intencionalidade como mediadora certamente teria tido mais êxito no ensino de meus estudantes.

Sobre o pensamento algébrico, ou álgebra, o que antes para mim era uma representação sistematizada e pronta, hoje é uma linguagem complexa que deve ser experimentada e manipulada de diferentes formas pelos estudantes.

São aspectos essenciais a serem desenvolvidos neste conteúdo, a fluência que nos permite entender a percepção do movimento da realidade e dos conceitos (no caso, a álgebra) para compreensão da configuração de como este conceito se apresenta na atualidade; a variável deve ser compreendida não somente como o "x", mas também em suas outras possibilidades tais como: variável-palavra/ variável- figura/variável numeral/variável letra; e o campo de variação que nos remete à criação de diversos campos numéricos, como uma necessidade das diferentes civilizações.

¹¹ A partir daqui o texto está em primeira pessoa por se referir a aprendizagem particular no processo desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 4. ed. Lisboa: Edições 70, 2009.

BAURU. **Currículo comum para o ensino fundamental municipal de Bauru**. 2012. Disponível em: <http://www.bauru.sp.gov.br/arquivos/arquivos_site/sec_educacao/dpppe/curriculo.pdf>. Acesso em: 19 out. 2016.

_____. **Currículo comum para o ensino fundamental municipal de Bauru**. 2016. Disponível em: <http://www.bauru.sp.gov.br/arquivos2/arquivos_site/sec_educacao/curriculo_ef2.pdf>. Acesso em: 19 out. 2016.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**. V. 36, n. 5. 2005

BOYER, C. B. - **História da Matemática**, São Paulo, Edgar Blucher, 1974.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, 23 dez. 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 25 out. 2018.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2016. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc>>. Acesso em: 02 set. 2018.

_____. _____. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CALLEJO, M. L.; GARCÍA-RECHE, A.; FERNÁNDEZ, C. Evolución Del pensamiento algebraico temprano em estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización lineal. **Avances de Investigación em Educación Matemática**, n. 10, nov. 2016. Disponível em: <<http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/106>>. Acesso em: 10 set. 2018.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática** – Tipografia Matemática, Lisboa, 1952.

_____. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Portugal - Gradiva, Edição de 1998.

CARRAHER, D., SCHLIEMANN, A. Early algebra and algebraic reasoning. F. K. Lester (Ed.) **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning** (p. 669–705), 2007.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; SCHWARTZ, J.L. In: Early Algebra is not same as Algebra Early. KAPUT J.J., CARRAHER, D., BLANTON, M. **Algebra in the Early Grades**. Ed.Routledge. Taylor&Francis Group. New York. 2008. p.235-272.

CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. de. Uma Perspectiva Histórico-Cultural para o Ensino de Álgebra: O Clube de Matemática como Espaço de Aprendizagem. **Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp** – v. 15, n. 27 – jan./jun.2007. Acesso em: 29 março 2019.

CONSELHO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM, 2007.

CORREIA, F.; BRANCO, N. A análise de sequências pictóricas por alunos do 4.º ano de escolaridade na promoção do pensamento algébrico. **Revista da ESES**, dez. 2016. Disponível em: <<https://revistas.rcaap.pt/uiips/article/view/14404>>. Acesso em: 10 set. 2018.

COSTA, F.A. Ensino de Matemática por meio da modelagem matemática. **Revista Ensino da Matemática em debate**, vol.3 n.1 p.58-69 Disponível em <<https://revistas.pucsp.br/emd/article/view/29005/20276>>. Acesso em: 23 mar.2019

CURI, E. Práticas e reflexões de professoras numa pesquisa longitudinal. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 94, n. 237, p. 474-500, maio/ago. 2013. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbeped/v94n237/a07v94n237.pdf>>. Acesso em: 27 out. 2018.

DAVÍDOV, V. V. **Tipos de generalización em La enseñanza**. 3. ed. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

_____. **Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza em el futuro próximo**. In SHUARE, M. (Org.). La psicologia evolutiva y pedagogica em la URSS: antologia. Moscou: Progreso, 1987.

_____. **Problemas do ensino desenvolvimental: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia**. Tradução de LIBÂNEO, J. C. e FREITAS, R A. M. da M. Soviet Education, August, v. XXX n. 8, 1988

DUARTE, N. **A individualidade para-si**: contribuição a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo. Campinas: Autores Associados, 1993.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (Org). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. 4ª ed. Campinas, SP. Papirus, p.11-33, 2003

FERNANDES, R. K. **Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I**. 2014. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

FERREIRA, M. C. N. **Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental**: uma análise do conhecimento matemático acerca do pensamento algébrico. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.

FORQUIN, J. C. **Escola e cultura**: as bases sociais e epistemológicas do conhecimento escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

GALUCH, M. T. B.; SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem** conceitual e apropriação da linguagem escrita: contribuições da teoria histórico-cultural. **Estudos em avaliação educacional**, São Paulo, v. 20, n. 42, p. 111-124, jan./abr. 2009. Disponível em: <<http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/eae/arquivos/1470/1470.pdf>>. Acesso em: 27 out. 2018.

HAMILTON, D. Sobre as origens dos termos classe e curriculum. **Teoria & Educação**, n. 6, p. 33-51, 1992.

KAPUT, J. **What is algebra? What is algebraic reasoning?** In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. **Adding it up: Helping children learn mathematics**. Washington, DC: National Academies Press, 2001

KIERAN, C. **Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?** *The Mathematics Educator*, 8, 139-151, 2004.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. 1 ed. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira S.A, 1978.

LANNER DE MOURA, A. R. de; SOUSA, M.do C.. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp** – v.13 – n. 24 – jul./dez. 2005. Disponível em: Acesso em: 29 janeiro, 2019.

_____. Lógico – Histórico: Uma perspectiva para o ensino de álgebra. **SBEM - VII Encontro Nacional de Educação Matemática** – Recife 15 a 18 de julho, 2004. Disponível em: Acesso em: 18 abril, 2019.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Horizonte Universitário, 1978.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas. Papirus, 1997.

LORENZATO, S.; VILA, M.C. Século XXI: qual Matemática é recomendável? **Zetetiké**, n ° 1, 1993.

LURIA, A. R. O papel da linguagem na formação de conexões temporais e a regulação do comportamento em crianças normais e oligofrênicas. LEONTIEV, A. et al. **Psicologia e pedagogia: bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento**. Ed. São Paulo, SP: Centauro, 2005. P. 107-125.

MARCHELLI, P.S. Base nacional comum curricular e formação de professores: o foco na organização interdisciplinar do ensino e aprendizagem. **Revista de Estudos de Cultura**. n.7 2017, p.53-70.

MARSIGLIA, A. C. G. **Um quarto de século de construtivismo como discurso pedagógico oficial na rede estadual de ensino paulista: análise de programas e documentos da Secretaria de Estado da Educação no período de 1983 a 2008.** Araraquara: [s.n.], 2011.

MARX, K. **O capital: crítica da economia política.** Tomo I. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1996.

MARTINS, L. M. **Fundamentos da Psicologia Histórico-Cultural e da Pedagogia Histórico-Crítica,** 2012. Disponível em:

<http://ead.bauru.sp.gov.br/efront/www/content/lessons/78/Fundamentos%20da%20PHC%20e%20da%20PHC%20-%20MARTINS.pdf>

_____. **Fundamentos da Psicologia Histórico-Cultural e da Pedagogia Histórico-Crítica.** Mesquita, A.M. de; Fantin, F.C.B; Asbahr, F.F.. (Org.). **Currículo Comum para o ensino fundamental de Bauru.** 2ed.Bauru: Prefeitura Municipal de Bauru, 2016, v. 1, p. 18-42.

MELLO, S. A.. Algumas implicações pedagógicas da Escola de Vygotsky para a educação infantil. **Pro-Posições** (Unicamp), Campinas, v. 10, n. 1, p. 16-27, 1999.

MESTRE, C. M. M. V. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade:** uma experiência de ensino. 2014.379 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/305776490_O_desenvolvimento_do_pensamento_algebrico_de_alunos_do_4_ano_de_escolaridade_Uma_experiencia_de_ensino>. Acesso em: 13 nov. 2018.

MOURA, M. O. de. **Controle da variação de quantidades: atividades de ensino.** São Paulo, Universidade de São Paulo, 1996.

MOURA, M. O. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** Brasília: Liber Livro, 2010.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston: NCTM, 2000

NEVES, D.P.M. Aprender mais- Caderno de Reforço: Português e Matemática. São Paulo, IBEP, 2014.

NUNES, C. I. G. **Desenvolvimento do pensamento algébrico através de tarefas de investigação matemática com padrões de crescimento.** 2014. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Instituto Politécnico de Castelo Branco, Castelo Branco, 2014. Disponível em:<<https://repositorio.ipcb.pt/bitstream/10400.11/2695/1/Relat%C3%B3rio%20C%C3%A1tia.pdf>>. Acesso em: 13 nov. 2018.

NUNES, S. I. C. **O desenvolvimento do pensamento algébrico através de padrões pictóricos de crescimento.** 2016. 271 f.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa,2016.Disponível em: <<https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/6833/1/O%20desenvolvimento%20do%20pensamento%20alg%C3%A9brico%20atrav%C3%A9s%20de%20padr%C3%B5es%20pict%C3%B3ricos%20de%20crescimento.pdf>>. Acesso em: 13 nov. 2018.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico**. São Paulo: Scipione, 1997.

DI FLORA OLIVEIRA, M.C.M. **.Contribuições da teoria histórico-cultural para o ensino da matemática nos anos iniciais**. Dissertação. Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2017.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino de álgebra**. Tese de Doutorado - Universidade de São Paulo, São Paulo: 2014

_____; MOURA, M.O. **O movimento histórico e lógico dos conceitos e a constituição do objeto de ensino da álgebra**. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015

PELEGRINI, A. O.; VIOTTO FILHO, I. A. T. Fundamentos epistemológicos para uma pesquisa em educação: aproximações ao materialismo histórico dialético. **Nuances: estudos sobre educação**, Presidente Prudente, v. 26, p. 254-273, jan. 2015. Disponível em: <<http://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/view/2824/2927>>. Acesso em: 28 out. 2018.

PIRES, M. F. C. O materialismo histórico-dialético e a educação. **Interface-comunicação, saúde, educação**, v. 1, n. 1, p. 83-94, 1997. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/icse/v1n1/06.pdf>>. Acesso em: 26 out. 2018.

PIRES, C.M.C, RODRIGUES, I. **Nosso livro de matemática**. 4 ed. Sao Paulo: Zapt Editora, 2018.

REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 12. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

SACRISTÁN, J. G. A cultura para os sujeitos ou os sujeitos para a cultura? O mapa mutante dos conteúdos na escolaridade. In: SACRISTÁN, J. G. **Poderes instáveis em educação**. Porto Alegre: ARTMED, 1999. cap. 4, p. 147-206.

_____. Aproximação ao conceito de currículo. In: SACRISTÁN, J. G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. Porto Alegre: ARTMED, 1998. cap. 1, p. 13-87.

_____. O currículo: os conteúdos do ensino ou uma análise prática? In: SACRISTÁN, J. G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

_____; GÓMEZ, A. I. P. **Compreender e transformar o ensino**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SAVIANI, D. **Escola e democracia: teorias da educação, curvatura da vara, onze teses sobre educação e política**. 24. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

SCHELLER, M. et al. **Modelagem nos anos iniciais da educação básica: como os estudantes modelam situações-problema?** *Ciência & Educação* (Bauru), Bauru, v. 23, n. 1, p. 197-217, jan./mar. 2017. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v23n1/1516-7313-ciedu-23-01-0197.pdf>>. Acesso em: 10 set. 2018.

SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L.; VIALI, L. **Desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais por meio da modelagem matemática na educação: possibilidade de utilização de linguagem simbólica.** *Perspectivas da educação matemática*, v. 9, n. 1, p. 702-723. nov. 2016. Disponível em: <<http://www.seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2205/2265>>. Acesso em: 03 set. 2018.

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem e desenvolvimento: o papel da mediação.** Secretaria de Estado da Educação, jul. 2009. Disponível em: <http://ww1.researchgate.net/publication/266069699_APRENDIZAGEM_E_DESENVOLVIMENTO_O_PAPEL_DA_MEDIACAODisponível> em: <30 ago.2018.

SILVA, D. P. **Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I.** 2012. 157f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2012.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação.** São Carlos, SP. UFSCar, v. 6, n° 1, 2012.

_____. Manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.3, n.5, 2014. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/921/pdf_100>. Acesso em: 3 set. 2018.

SILVA, D.P.; SAVIOLI, A.M.P.D.; PASSOS,M.M. Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da Early Algebra. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v.8, n.3,p.104-135,2015.Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1340/2182>>. Acesso em: 3 set. 2018.

SILVA, M.H. **Estudos das visões sobre álgebra presentes nos parâmetros curriculares nacionais de matemática do ensino fundamental em relação a números e operações.** Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica – PUC, São Paulo, 2006

SOUSA, M. do C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental.** Tese (Doutorado) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004

_____. **Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de Matemática na perspectiva lógico-histórica.** In: *Bolema*. nº. 32. Rio Claro, SP: 2009. p. 83-99.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L. CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos**. Campinas: Mercado das Letras, 2014

VEIGA-NETO, A. De geometrias, currículo e diferenças. **Educação e Sociedade**, Campinas, v. 23, n. 79, p. 163-186, ago. 2002. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/es/v23n79/10853.pdf>>. Acesso em: 29 out. 2018.

VERGEL, R.. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. **Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, v. 9, n. 3, p. 193-215, 2015. Disponível em: <<http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6220>>. Acesso em: 3 set. 2018.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

_____. **Obras escogidas**: problemas teóricos y metodológicos de lpsicología. 2. ed. Madri: Ant Machado Libros, 2007.

_____; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 4. ed. Ícone: EDUSP, 1988.

ANEXO 1 – TABELA PESQUISA GOOGLE ACADÊMICO

Fonte: Google Acadêmico. (Acesso em 11 de julho de 2018).

¹² Disponível em <https://scholar.google.com.br/>

Ano	Nome do trabalho	Autores	Motivo de exclusão
2018	O pensamento algébrico e a generalização de padrões: uma experiência com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental	GUALANDI, J.H.; ZERBINATO, A	Ensino Fundamental II
2018	A importância da função discursiva de designações de relações algébricas para o desenvolvimento do pensamento algébrico	BRANDT, C.F.; MORETTI, M.T. SCHEIFER, C	Ensino Fundamental II
2018	A importância da função discursiva de designações de relações algébricas para o desenvolvimento do pensamento algébrico	BRANDT, C.F.	Ensino Fundamental II
2018	Aplicação informática versus materiais manipuláveis na promoção do pensamento algébrico ao nível do 1º Ciclo do Ensino Básico	SANTOS, N; AFONSO, P.; GIL, H	3º ano do Ensino Fundamental I
2017	Notas sobre indicadores de desenvolvimento do	SILVA, A.Z.	Ensino Fundamental II

	pensamento algébrico		
2017	A álgebra e o pensamento algébrico na proposta de Base Nacional Curricular Comum para os anos iniciais do Ensino Fundamental	LIMA, J.R.D.E.C.	Ensino Fundamental (geral)
2017	Material manipulável estruturado versus Applet no desenvolvimento do pensamento algébrico ao nível do 1º Ciclo do Ensino Básico	SANTOS, N. AFONSO, P.; GIL, H	2º e 3º ano do Ensino Fundamental I
2016	A emergência do pensamento algébrico nas atividades de aprendizes surdos	SHAA, F.; HEALY L.	Educação Especial
2016	Influência da tecnologia no desenvolvimento do pensamento algébrico: um estudo no 1º CEB	SANTOS, N.M.G.	1º ao 3º ano do Ensino Fundamental I
2016	Pensamento algébrico e os significados do sinal de igualdade: o uso da oralidade e da narrativa nas aulas de matemática	CRUZ, P.S.F.	Ensino Fundamental II
2016	Desenvolvendo o pensamento algébrico através de padrões	RODRIGUES, M.S.C.	Ensino Fundamental II
2016	Promovendo o conhecimento especializado do professor de matemática	ALMEIDA, M.S.C.; CABANHA, D.S.C.; RIBEIRO, M.	Educação Infantil e 1º ano do Ensino

	associado ao pensamento algébrico nos anos iniciais		Fundamental I
2016	Pensamento Algébrico e Diagramático: uma experiência de ensino com alunos do 10º ano	VAZ, S.; SCHURMAN, L.; NETO, T.	Ensino Médio
2016	Caracterizadores do pensamento algébrico e generalização de padrões matemáticos	BAQUEIRO, G.D.S.; SANTOS, G.D.S.; CAZUMBÁ, A.S.	Ensino Superior
2016	O desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 6º ano: uma perspectiva do ensino exploratório	SALMASIO, J.L.; RODRIGUES, R.V. S	Ensino Fundamental II
2016	Modelagem matemática e desenvolvimento do pensamento algébrico	FERNANDES, T.F.; ROBIM, B.N.P.A.S.; PEREIRA, R.S.G.	Ensino Médio
2016	O desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos: Uma compreensão à luz da Teoria das Situações Didáticas	SILVA JUNIOR, L.M.	Ensino Fundamental II
2016	O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9º ano	NOBRE, S.G. G	Ensino Fundamental II
2016	A Busca por Valor Desconhecido em Problemas Aditivos: Uma	BECK, V.C.; SILVA, J.A.	3º ano do Ensino Fundamental I

	Possibilidade de Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Alfabetização		
2016	Ensino da álgebra: uso da linguagem e do pensamento algébrico como ferramenta de aprendizagem na educação básica	BEZERRA, A. R. L.; SIMÃO, F. B.	Ensino Médio
2016	O pensamento algébrico na resolução de problemas com sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas em alunos do 8º ano de escolaridade	PATRÍCIO, V.C. C	Ensino Fundamental II
2016	O raciocínio proporcional no quadro do pensamento algébrico: uma experiência de ensino no 6º ano	GARCEZ, T.I.G.M.	Ensino Fundamental II
2015	A emergência do pensamento algébrico num grupo de crianças de 4º anos — entre os livros infantis e os padrões de repetição	SERRA, P.; RODRIGUES, M.	Educação Infantil
2015	Avaliação e desenvolvimento do pensamento algébrico numa turma do 10.º ano	VAZ, S.A. A	Ensino Fundamental II
2015	Pensamento algébrico e o currículo enculturador evidenciado por professores	MOURA, F. JUNIOR, S.	Ensino Médio
2015	Aspectos da linguagem e do	SAVIOLI, A.M.P.D.;	Ensino

	pensamento algébrico manifestados por estudantes do 6ºano do Ensino Fundamental	SILVA,E.P.	Fundamental II
2015	Prática de ensino supervisionada em educação pré-escolar e ensino básico: desenvolver o pensamento algébrico através de padrões	ALVES, B.S.	1º ano do Ensino Fundamental I
2015	Pensamento algébrico e erros em atividades algébricas de estudantes da EJA	JUNIOR, A.R.P SAVIOLI, A.M.D.P.	Educação de Jovens e Adultos
2015	A exploração do sistema monetário através de tarefas relacionadas com o pensamento algébrico suportadas pelas TIC: um caso de síndrome de Williams	JORGE, S.M.I.	7º ano do Ensino Fundamental II
2015	Desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico	ALEXANDRE, M.R.S.R.	1º e 2º ano do Ensino Fundamental I
2015	O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 1º e 2º ciclo do ensino básico	RODRIGUES, P.F.P.	2º e 6º anos do Ensino Fundamental I e II
2014	Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1º Ano do Ensino Médio	BECHER, E.L.	Ensino Médio

2014	O percurso da didatização do pensamento algébrico no ensino fundamental: uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático	AGUIAR, M.	Ensino Fundamental II
2014	Pensamento algébrico no 1º ciclo do ensino básico	VIEIRA, L.	2º ano do Ensino Fundamental I
2014	Contribuições dos problemas de partilha para o desenvolvimento do pensamento algébrico em iniciantes em álgebra formal	ALMEIDA, J.R.	Ensino Fundamental II
2014	Lendo e explorando histórias: a emergência do pensamento algébrico em crianças de 4º anos	CABAÇO, P.C.C.S.	Educação Infantil
2014	Pensamento algébrico de professores do pensamento algébrico de professores do 1º ciclo: algebrização da aritmética	REZIO, S.	Pesquisa com Professores
2014	Desenvolvimento da comunicação matemática na educação pré-escolar: o pensamento algébrico	VILELA, T.S.M.	Educação Infantil
2014	Padrões e o trabalho com sequências recursivas: uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico	THEODOROVISKI, R.	Ensino Médio

2014	Desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna do 10º ano	WISEU, F.A.V; NOGUEIRA, D.	Ensino Médio
2014	Explorando o pensamento algébrico por meio do jogo pega varetas	MACEDO, A.F. M; CHAVES, B.P.P.G.; ANTUNES, F.A. CIANI, A.B.	Ensino Fundamental II
2014	Prática de ensino supervisionada em educação pré-escolar e ensino do 1º ciclo do ensino básico: desenvolver o pensamento algébrico dos alunos	GARCIA, B.M.G.B.	Educação Infantil e 1º e 2º ano do Ensino Fundamental I
2014	Álgebra e aspectos do pensamento algébrico: um estudo com resolução de problemas na licenciatura em Ciências Naturais e Matemática – UFMT/Sinop	LAIR, S.S.S.	Ensino Superior
2014	O Desenvolvimento do pensamento algébrico com uso de sequências e regularidades: uma proposta de sequência didática	SILVA, A.S.	Ensino Fundamental II
2014	O contributo dos padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico	MOURA, A.; FONSECA, L.	3º ano do Ensino Fundamental I
2014	Um estudo do pensamento algébrico manifestado em resoluções de estudantes em	MARTELOZO, D.P.S.; GERETI, L.C.V.; MARINS, A.S.	Ensino Médio

	uma tarefa não rotineira		
2014	Saberes docentes e análise do Milieu descendente em uma atividade sobre pensamento algébrico	SOARES, R.M.; BIANCHINI, B.L.	Ensino Fundamental II
2014	Pensamento algébrico funcional na alfabetização: o uso da previsão de resultados em problemas aditivos	BECK, V.C.; SILVA, J.A.	3º ano do Ensino Fundamental I