

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

GABRIEL ANTONIO CARITÁ

ANÁLISE DA ESTABILIDADE E RESSONÂNCIA DE ÓRBITAS
RETROGRADAS PLANARES DO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS
EM SISTEMAS ESTELARES E PLANETÁRIOS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

**Análise da estabilidade e ressonância de órbitas retrógradas
planares do problema de três corpos em sistemas estelares e
planetários**

GABRIEL ANTONIO CARITÁ

Orientadora: Dra. Maria Helena Moreira Morais

Rio Claro - SP

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

GABRIEL ANTONIO CARITÁ

Análise da estabilidade e ressonância de órbitas retrógradas
planares do problema de três corpos em sistemas estelares e
planetários

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em

Orientadora: Dra. Maria Helena Moreira
Morais

Rio Claro - SP

2022

C277a Caritá, Gabriel Antonio

Análise da estabilidade e ressonância de órbitas retrógradas planares do problema de três corpos em sistemas estelares e planetários : Ressonâncias retrógradas / Gabriel Antonio Caritá. -- Rio Claro, 2022

113 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Maria Helena Moreira Morais

1. Dinâmica Orbital. 2. Mecânica Celeste. 3. Ressonâncias. 4. Órbitas retrógradas. 5. Astronomia. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Gabriel Antonio Caritá

**Análise da estabilidade e ressonância de órbitas retrógradas
planares do problema de três corpos em sistemas estelares e
planetários**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais - UNESP/Rio Claro(SP)

Prof. Dr. Othon Cabo Winter - UNESP/Guaratinguetá

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho - UNESP/Rio Claro(SP)

Conceito : Aprovado

Rio Claro, SP 23 de Fevereiro de 2022

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste projeto foi desenvolvido um estudo numérico sobre a dinâmica orbital de sistemas planetários e estelares em que um dos corpos tem o movimento opostos aos demais, variando diferentes razões de massa e vetores de estado, a fim de observar a estabilidade e possíveis ressonâncias retrógradas, considerando as ressonâncias coorbitais $1/-2$ e $2/-1$. Verificou-se a estabilidade e as ressonâncias de órbitas retrógradas coplanares de sistemas planetários e estelares em diferentes configurações iniciais, baseando-se nos ângulos ressonantes retrógrados críticos e através de Análise de Fourier. Os cálculos computacionais foram realizados utilizando o integrador numérico de n-corpos REBOUND. A estabilidade foi verificada através do indicador caótico *mean exponential growth factor of nearby orbits* (MEGNO). Os resultados demonstraram a existência de famílias ressonantes retrógradas nos sistemas planetários de massas equiparáveis a joviana, saturniana, netuniana e suas razões, em diferentes regiões ressonantes. Já os sistemas estelares foram estudados somente nos casos circulares restritos, os quais, por sua vez, apresentaram a existência de ressonâncias em diferentes razões de massa e configurações de binários através do espaço de fase. O estudo visa comparar os resultados obtidos com ressonâncias retrógradas hipotéticas.

Palavra-chave: Dinâmica Orbital, Estabilidade e Caos, Seções de Poincaré, Ressonância Retrograda.

Abstract

In this project a numerical study of the orbital dynamics of planetary and stellar counter-revolving systems was developed, varying different mass ratios and state vectors, in order to observe the stability and possible resonances, considering the coorbital, $1/2$ and $2/1$ retrograde resonances. It was verified the stability of coplanar retrograde orbits of planetary and stellar systems in different initial configurations, based on the required retrograde resonant angles and Fourier Analysis. The computational calculations were performed using the numerical n-body integrator called REBOUND. Stability has been verified using a chaotic indicator *mean exponential growth factor of nearby orbits* (MEGNO). The obtained results demonstrated the existence of retrograde resonant families in planetary systems with masses comparable to the Jovian, Saturnian, Neptunian and their combinations, in different resonant regions. Star systems were studied only in restricted circular cases. We observed the existence of resonances in different masses values and binary configurations across phase space. This study aims to compare the results obtained with hypothetical retrograde resonances.

Keyword: Orbital Dynamics, Stability and Chaos, Poincaré Sections, Retrograde Resonance.

Lista de Figuras

2.1	Esquema ilustrativo do problema de três corpos planar considerando as coordenadas de Jacobi [33]. Fonte: Autor	23
2.2	Exemplificação da seção de Poincaré dada pelo cruzamento da órbita no plano selecionado. Fonte: Autor	29
2.3	Seção de Poincaré de x,y sendo $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} < 0$ de um grid para órbita retrógrada com a razão de massa equivalente $\mu = 0.001$. Fonte: Autor	30
2.4	Ilustração da interação gravitacional entre os vetores posição das massas m_i e m_j em relação a massa central m_c Fonte: [25]	31
4.1	Exemplo de mapa de estabilidade para a região 2/-1 retrógrada do CR3BP. Fonte: Autor	47
5.1	Gráficos de curva de nível para diferentes valores de μ e configurações. As curvas são apresentadas da esquerda para a direita referentes aos valores crescentes de constante de Jacobi segundo a tabela	
5.1.		52
5.2	Seções de Poincaré para $\mu = 0.05$	56
5.3	Seções de Poincaré para $\mu = 0.1$	57
5.4	Plot do intervalo entre cruzamentos na seção de poincaré dividido pelo número de órbitas/períodos.	59
5.5	Análise dos elementos orbitais em função dos períodos para $\mu = 0.1$.	61
5.6	Análise dos elementos orbitais em função dos períodos para $\mu = 0.1$.	62
5.7	Órbitas no referencial sinódico	63
5.8	Seções de Poincaré para $\mu = 0.2$	65
5.9	Seções de Poincaré para $\mu = 0.2$ para $C=-1.3$	66
5.10	Órbita no referencial girante para $C=-1.3$, $x_0 = -0.76$ e $\mu = 0.2$	67

5.11	Órbita no referencial inercial para $C=-1.3$, $x_0 = -0.76$ e $\mu = 0.2$	68
5.12	Seções de Poincaré para $\mu = 0.3$	70
5.13	Seções de Poincaré para $\mu = 0.3$	71
5.14	Seções de Poincaré para $\mu = 0.4$	72
5.15	Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.05$	74
5.16	Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.1$	74
5.17	Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.2$	75
5.18	Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.3$	75
5.19	Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.4$	76
6.1	Mapas de estabilidade/ressonante da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$	81
6.2	Mapas de ressonante da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$	83
6.3	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$	84
6.4	Mapas de amplitude da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{sat}$. Na configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$	86
6.5	Mapas de ressonante da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{sat}$ com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$	87
6.6	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, o terceiro corpo assume a massa de Saturno na configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$	88
6.7	Mapas ressonante da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$	89
6.8	Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$ na condição inicial $e_p = 0.9$	90

6.9	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Júpiter na configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$	91
6.10	Órbitas no referencial sinódico das ressonância 1/-1.	92
6.11	Mapas de amplitude da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0, \pi$	94
6.12	Mapas de estabilidade da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito para $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $e_p = 0.6$, $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$	96
6.13	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = 0$	97
6.14	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = \pi$	98
6.15	Mapas de estabilidade da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito para $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$, $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$	99
6.16	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = 0$	101
6.17	Mapas de amplitude da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = 0, \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$	103
6.18	Mapas de estabilidade da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito para $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ para $e_p = 0.5$, $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$	104
6.19	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = \pi$	106
6.20	Órbitas no referencial sinódico das ressonância 2/-1.	108
6.21	Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0, \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$	110
6.22	Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0, \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$	111
6.23	Mapas de ressonante da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$	113

6.24	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = 0, \pi$.	115
6.25	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = 0, \pi, \Delta\varpi^* = 0, \pi$.	116
6.26	Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = 0, \pi, \Delta\varpi^* = 0$.	118
6.27	Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = \pi, \Delta\varpi^* = \pi$.	119
6.29	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = \pi, \Delta\varpi^* = 0$.	121
6.30	Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito com $\phi^* = \pi, \Delta\varpi^* = 0$.	122
6.31	Orbita ressonante em ϕ_3^*	123
6.32	Órbitas no referencial sinódico das ressonância 1/-2.	124

Lista de Tabelas

- 5.1 Tabela de valores de constante de Jacobi nos gráficos de nível 51
- 5.2 Tabela comparativa entre as frequências obtidas por meio da FFT
com as esperadas para os valores da massa binária $\mu = 0.05$ a $\mu =$
0.4. As ressonâncias orbitais analisadas foram 1/-1, 1/-2, 2/-3 e 1/-3. . 55
- 5.3 Tabela referente a identificação de ressonâncias orbitais por meio do
tempo de conjunção (frequência entre as ilhas). A primeira, segunda
e terceira colunas indicam o conjunto de ilhas para cada ressonância,
o tempo de conjunção (frequência da seção) e o total de ilhas (k) as-
sociadas. A quarta e quinta colunas apresentam a ressonância orbital
e massa do binário, por fim a última coluna indica qual os resultados
estão ilustrados. 60
- 6.1 Tabela reportando os resultados sumarizados para a região coorbital,
indicando quais tipos de ressonância foram observadas nas diferen-
tes configurações estudadas para cada massa considerada. 80
- 6.2 Tabela reportando os resultados sumarizados para a região resso-
nante 2/-1, indicando quais tipos de ressonância foram observadas
nas diferentes configurações estudadas para cada massa conside-
rada. Observamos librações isoladas de ângulos, como por exemplo,
o ângulo do problema restrito (CR3BP) em Netuno e ϕ_2^* em Júpiter na
configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$ 95
- 6.3 Tabela reportando os resultados sumarizados para a região resso-
nante 1/-2, indicando quais tipos de ressonância foram observadas
nas diferentes configurações estudadas para cada massa considerada. 114

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Problema de Pesquisa	19
2	Fundamentos	21
2.1	Problema de n -corpos	21
2.2	Problema Geral de Três Corpos	21
2.3	Problema Planar Circular Restrito de Três Corpos - PCR3BP	24
2.4	Referencial Sinódico	26
2.5	Seções de Poincaré	28
2.6	Função perturbadora	30
3	Ressonância de movimento médio	33
3.1	Expansão da função perturbadora CR3BP	34
3.2	Ressonância Retrógrada - CR3BP	34
3.3	Ressonância retrógrada do problema geral de três corpos	36
4	Métodos Computacionais e Ferramentas	39
4.1	REBOUND e Integradores numéricos	39
4.1.1	IAS15	40
4.2	Transformada de Fourier	42
4.2.1	Análise de frequências por Transformada Rápida de Fourier - FFT	44
4.3	Estabilidade e Indicadores Caóticos	45
4.3.1	MEGNO $\langle Y \rangle$	45
4.3.2	Mapas de Estabilidade	46

5	CR3BP retrógrado em sistemas estelares	49
6	Estabilidade do problema geral de três corpos retrógrado planar	77
6.1	Estabilidade da região coorbital	80
6.2	Estabilidade da região 2/-1	94
6.3	Estabilidade da região 1/-2	110
7	Discussão	125
8	Considerações finais	129
	Referências	131
A	Resultados gerais	137
A.1	Seções de Poincaré	137
A.2	Mapas de estabilidade	137

1 Introdução

A formação de sistemas solares surge a partir de uma nuvem de gás e poeira em rotação interagindo gravitacionalmente entre si. As partículas em movimento se aglutinam e formam corpos com quantidade considerável de massa, afetando as demais partículas que também estão em rotação. Após milhões de anos de interação, planetas, luas e asteroides surgem. Tal formação permite a estabilidade de órbitas praticamente coplanares de planetas e asteroides. As teorias que descrevem a evolução do sistema solar não resolvem devidamente a existências de órbitas com inclinação elevadas em relação ao plano orbital, tornando-as problemáticas. Porém esses casos existem e estão, em maioria, em pequenos corpos entre as órbitas dos planetas gigantes (Centauros e Transneptunianos).

Recentemente diversos estudos têm demonstrado certo interesse e relevância em órbitas retrógradas. Podemos citar, como exemplo, o desenvolvimento teórico para ressonâncias retrógradas, o estudo da estabilidade de determinadas ressonâncias retrógradas, a descoberta do asteroide 2015 BZ509 em órbita retrógrada dentro da região coorbital de Júpiter, o asteroide (514107) Ka'epaoka'awela na ressonância coorbital retrógrada com Júpiter possivelmente desde os primórdios do sistema solar, entre outros [19, 22, 23, 42, 27, 32]. Desenvolvimentos recentes na modelagem analítica de configurações com inclinação mútua elevada demonstraram-se essenciais para identificar objetos com órbitas retrógradas e polares que, por sua vez, estão em ressonâncias orbitais com os planetas gigantes [22, 21, 23, 42, 17, 24, 29, 31].

De forma geral, sistemas extrassolares possuem formação semelhante à formação do sistema Solar e, com isso, provavelmente terão, assim como o sistema solar, corpos em órbitas com inclinação relativa elevada em relação ao plano orbital. Por outro lado, encontros próximos entre corpos massivos como por exemplo, estrelas,

podem gerar sistemas planetários com órbitas de inclinação elevada [16]. Conforme discutido pelos autores [28, 30, 27], no problema de três corpos com dissipação, demonstrou-se que as ressonâncias retrógradas capturam objetos mais frequentemente do que ressonâncias prógradas. Dessa forma, é de esperar a existência de objetos em ressonâncias retrógradas em sistemas extrassolares. Ademais, a recente e elevada descoberta de exoplanetas expande ainda mais as possibilidades de sistemas com tais características existirem.

Algumas técnicas e modelagens são utilizadas para se estimar e determinar ressonâncias nestes casos. O problema restrito de três corpos (CR3BP) consiste em uma modelagem prática para realizar estudos sobre a estabilidade orbital de sistemas estelares e planetários, permitindo, assim, investigar ressonâncias, sejam elas prógradas ou retrógradas, de corpos considerados pontos de massa, tais como asteroides. O desenvolvimento matemático determina uma integral de movimento denominada de constante de Jacobi, que se trata de uma função quadridimensional do tipo $C(x, \dot{x}, y, \dot{y})$. Essa função possibilita obter a seção de Poincaré, que permite analisar o espaço de fase de um sistema dinâmico. Ademais, a medida que o estudo avança para problemas mais complexos, como o problema restrito elíptico de três corpos (ER3BP) ou problema geral de três corpos (3BP), tal ferramenta não pode ser mais utilizada da mesma forma, necessitando modificações nas definições das variáveis do sistema. Nesse caso o uso de mapas de estabilidade em conjunto com indicadores caóticos se tornam necessários e, assim como as seções de Poincaré, trazem informações de grande importância do sistema analisado.

Em sistemas extrassolares a relação entre massas dos corpos principais desse sistema pode variar significativamente, principalmente quando se trata de sistemas estelares binários. Tais sistemas são considerados binários estelares quando a razão de massa do corpo primário e secundário, denominado como μ , é maior que 0.01. Logo, a órbita instantânea deixa de ser kepleriana devido a perturbação das massas. Nessa situação os elementos orbitais, definidos como osculantes, se tornam praticamente inutilizáveis e, portanto, a inserção de técnicas para a análise de ressonância são necessárias. Essas configurações de massa são interessantes, de forma que um planeta de massa considerável orbitando um sistema binário possa ter uma dinâmica orbital semelhante a um caso restrito.

A dinâmica orbital visa descrever fenômenos relacionados a dinâmica de n-corpos, visando desde o comportamento de asteroides, bem como sistemas planetários. Nesse sentido, este estudo teórico e numérico aborda possíveis fenômenos orbitais de ressonância retrógrada em sistemas planetários hipotéticos. Além disso, as crescentes descobertas de sistemas planetários extrassolares, com pelo menos dois planetas, aponta a possibilidade de arranjos ressonantes, sejam prógrados ou retrógrados. Nesse sentido, foi desenvolvido um estudo teórico sobre a dinâmica orbital de sistemas planetários e estelares extrassolares, com diferentes configurações de massa, a fim de observar a estabilidade e ressonâncias de tais sistemas. Foram analisadas as regiões ressonantes circulares e elípticas 1/-1, 1/-2, 2/-1 de órbitas retrógradas coplanares de sistemas planetários e estelares. O integrador numérico REBOUND foi utilizado para a realização dos cálculos numéricos. Os resultados apresentaram a existência de famílias de órbitas ressonantes. A razão de massa utilizada nos sistemas planetários para o binário estrela e planeta principal foram da ordem joviana e a variação da massa do segundo planetóide foram os casos: pontual, neptuniana, saturniana e joviana. Os sistemas estelares foram estudados com a variação de massa do sistema binário até massas idênticas.

1.1 Problema de Pesquisa

Segundo o que foi discutido até o momento, o estudo de órbitas retrógradas, se tornaram de suma importância para o entendimento tanto da formação do sistema Solar, como a explicação de corpos com inclinação elevada. Ademais, estabilidades de ressonâncias em sistemas extrassolares podem influenciar diretamente na compreensão da sua formação e de sua estabilidade. Neste quesito, é de se esperar que da mesma forma que existem casos ressonantes retrógrados no sistema solar, também possam existir em sistemas extrassolares. Este projeto visa estudar e analisar a estabilidade de ressonâncias retrógradas em sistemas extrassolares e estelares, identificando os sistemas mais favoráveis para a detecção destes objetos e relacionando eles com aqueles que conhecemos.

2 Fundamentos

2.1 Problema de n -corpos

A mecânica celeste visa a descrição detalhada da dinâmica de corpos celestes. Para isso utilizamos o desenvolvimento das equações de movimento para o caso de n -corpos, com a finalidade de prever a posição, velocidade e aceleração de n corpos em órbita. Uma das possíveis aplicações é o estudo do movimento de asteroides, próximos ou distantes, em rota de colisão com a Terra. A força gravitacional resultante entre uma interação de n -corpos em um espaço tridimensional é descrita a partir de,

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{\gamma}_j \quad (2.1)$$

onde, $\vec{\gamma}_j$ é a aceleração de cada partícula. Supondo que os n -corpos estejam isolados no espaço, é possível obter as equações de movimento no referencial inercial com o centro de massa localizado no corpo central a partir de

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{G(m_0 + m_i)}{|\mathbf{r}_i|^3} \mathbf{r}_i + \sum_{j \neq i} G m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$ são os vetores posição e m_i , m_j as massas dos corpos i e j , sendo G a constante gravitacional e m_0 a massa relacionada ao corpo central.

2.2 Problema Geral de Três Corpos

Considere o problema de três corpos a partir da relação de n -corpos, ou seja, o caso de $n = 3$, sendo as partículas P_k de massas $m_k > 0$ e $k = 1, 2, \dots, n$ se

movendo em um espaço tridimensional x, y e z de acordo com a lei de gravitação. As coordenadas cartesianas relacionadas a partícula k são dadas pelo vetor $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k) \in \mathcal{R}^3$. De forma geral, as equações de movimento da partícula, no referencial inercial, são dadas por [33]:

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{j=1} \frac{Gm_j}{r_{jk}^3} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k \quad (2.3)$$

Para $j \neq k$ e r_{jk} sendo a distância euclidiana entre a partícula k e j . Porém, como o problema considerado será o planar, iremos adotar as seguintes condições $\mathbf{r}_k \in \mathcal{R}^2$, $\dot{r}_k \in \mathcal{R}^2$ para $k = 3$.

Definindo o centro de massa $\rho = M^{-1} \sum_{k=1}^3 m_k r_k$ e $M = m_1 + m_2 + m_3$, escrevemos as equações de movimento como,

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{Gm_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \quad (2.4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{Gm_1}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{Gm_3}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \quad (2.5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{Gm_1}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{Gm_2}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (2.6)$$

ou seja, um sistema de seis equações diferenciais de segunda ordem. Levando em consideração que o centro de massa seja a origem $\rho = 0$, podemos simplificar o problema em um conjunto de quatro equações diferenciais de segunda ordem. A utilização de coordenadas de Jacobi permitem descrever determinados problemas com certa facilidade, entre eles um binário estelar por exemplo. As transformações podem ser verificadas com mais detalhes nos trabalhos de Pollard [33, 34] e Beaugé [1]. Portanto, para realizar a transformação para as coordenadas de Jacobi definimos que:

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{Q} = \mathbf{r}_3 - \beta \quad (2.7)$$

onde $\beta = \nu^{-1}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)$ para $\nu = m_1 + m_2$ é o centro de massa do vetor do par binário (m_1 e m_2), $\mathbf{q}$ é o vetor relativo entre P_2 e P_1 , por fim, $\mathbf{Q}$ é o vetor de β .

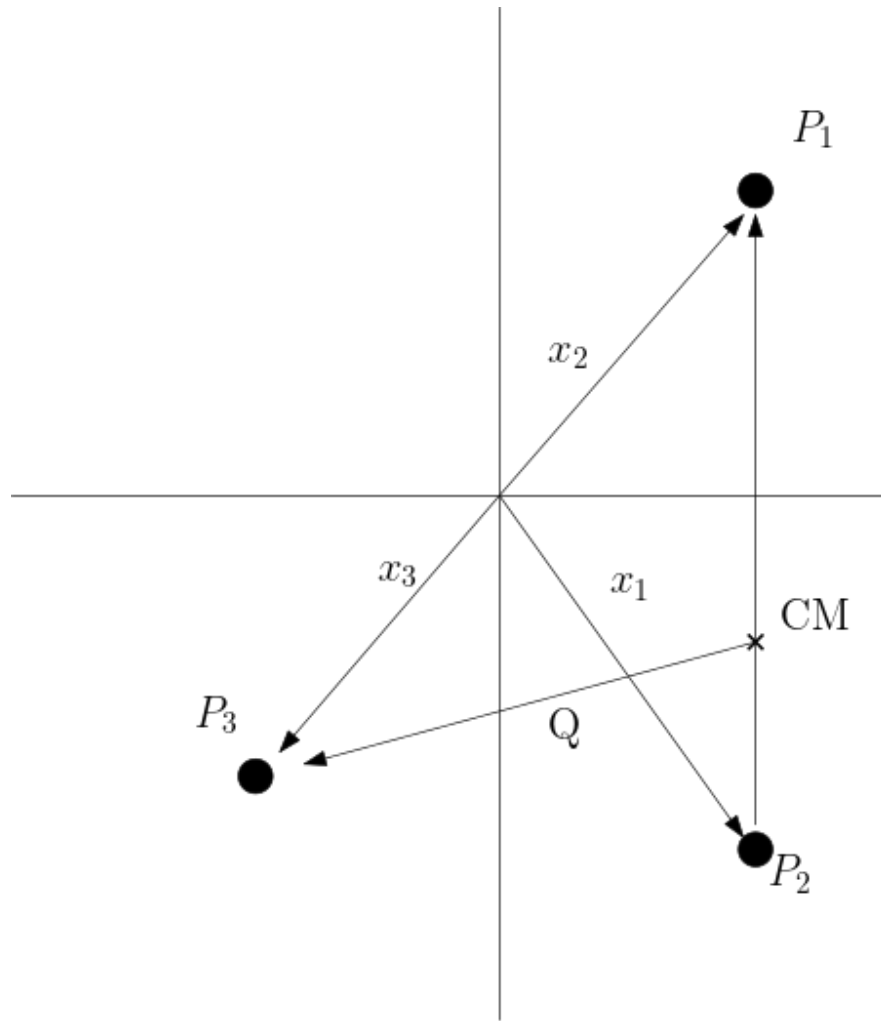


Figura 2.1: Esquema ilustrativo do problema de três corpos planar considerando as coordenadas de Jacobi [33]. Fonte: Autor

Portanto, devido a transformação de coordenadas, temos que $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j$, para $k > j$ e $k = 1, 2, 3$. Logo,

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{Q} + m_2 \nu^{-1} \mathbf{q} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{Q} - m_1 \nu^{-1} \mathbf{q} \quad (2.9)$$

Sendo a Equação (2.8) obtida a partir de,

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{Q} + \beta - \mathbf{r}_1 = \mathbf{Q} + \nu^{-1}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_1 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{Q} + m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\nu^{-1} = \mathbf{Q} + m_2 \nu^{-1} \mathbf{q} \quad (2.11)$$

E a Equação (2.9) de,

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{Q} + \beta - \mathbf{r}_2 = \mathbf{Q} + \nu^{-1}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_2 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{Q} - m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\nu^{-1} = \mathbf{Q} + m_2\nu^{-1}\mathbf{q} \quad (2.13)$$

Usaremos então as expressões (2.8) e (2.9) substituindo-as em (2.4), (2.5) e 2.6. E dividindo a primeira equação diferencial (2.4) por m_1 e (2.5) por m_2 , temos,

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{G\nu\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3} + Gm_3 \left[\frac{\mathbf{Q} - m_1\nu^{-1}\mathbf{q}}{\mathbf{r}_{23}^3} - \frac{\mathbf{Q} + m_2\nu^{-1}\mathbf{q}}{\mathbf{r}_{13}^3} \right] \quad (2.14)$$

sendo que, $\mathbf{r}_{12} = |\mathbf{q}|$, $\mathbf{r}_{13} = |\mathbf{Q} + m_2\nu^{-1}\mathbf{q}|$ e $\mathbf{r}_{23} = |\mathbf{Q} - m_1\nu^{-1}\mathbf{q}|$. Para obter a relação para $\mathbf{Q}$, temos que estabelecer outra equação a partir de $\mathbf{Q} = \mathbf{r}_3 - \beta = \mathbf{r}_3 - \nu^{-1}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_3 - \nu^{-1}(-m_3\mathbf{r}_3) = (1 + \nu^{-1}m_3) = \nu^{-1}Mm_3$, implicando que $\mathbf{r}_3 = \nu M^{-1}\mathbf{Q}$. Então, dividindo a Equação 2.6 por $m_3^{-1}\nu^{-1}M$,

$$\ddot{\mathbf{Q}} = -\frac{GMm_1\nu^{-1}}{\mathbf{r}_{13}^3}(\mathbf{Q} + m_2\nu^{-1}\mathbf{q}) - \frac{GMm_2\nu^{-1}}{\mathbf{r}_{23}^3}(\mathbf{Q} - m_1\nu^{-1}\mathbf{q}) \quad (2.15)$$

2.3 Problema Planar Circular Restrito de Três Corpos - PCR3BP

Neste momento iremos considerar o problema restrito de três corpos, onde m_3 pode ser aproximado a zero. Portanto, adotando o problema planar de três corpos em coordenadas de Jacobi. Utilizando as equações obtidas 2.14 e 2.15, temos $q(t)$ que descreve o movimento de P_2 em relação a P_1 e $Q(t)$, o qual, por sua vez, descreve o movimento relativo de P_3 em torno do centro de massa do sistema binário (P_1 e P_2) sendo $\beta = \nu^{-1}(m_1r_1 + m_2r_2)$ no sistema de coordenada inercial, conforme a figura 2.1, onde ρ é o centro de massa e origem desse sistema de três corpos. Se considerarmos P_3 um corpo de massa irrelevante ao sistema, ou seja, por exemplo, um asteroide, e que P_1 e P_2 sejam equivalentes a sistemas binários como Sol-Júpiter, podemos concluir que a perturbação de P_3 no sistema binário é desprezível e, portanto, aproximar a sua massa a zero ($m_3 \approx 0$). Tal definição permite assumir que, caso $m_3 \approx 0$, implica que $M = \nu$ e que, portanto,

$\beta = \rho = 0$. Logo o sistema de coordenadas corresponde ao centro de massa do sistema binário. Entretanto, tal sistema irá perturbar o corpo P_3 e seu movimento relativo representará o problema de dois corpos caso $m_3 = 0$ [33, 25].

A fim de facilitar as relações, podemos escrever que $\nu = m_1 + m_2 = 1$ e, por normalização, temos que $m_1 = 1 - \mu$ e $m_2 = \mu$, sendo $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. Por fim, iremos considerar que o sistema binário descreve uma órbita circular, ou seja, de excentricidade $e = 0$ e semieixo maior $a = 1$, o que irá definir o **problema circular planar restrito de três corpos** e que é descrito a seguir

$$\ddot{\mathbf{Q}} = -\frac{1-\mu}{r_{13}^3}(\mathbf{Q} - m_2\mathbf{q}(t)) + \frac{\mu}{r_{23}^3}(\mathbf{Q} - m_1\mathbf{q}(t)) \quad (2.16)$$

sendo que, $q(t)$ descreve um movimento circular de P_2 em torno de P_1 em um sistema de coordenadas inerciais centradas em P_1 . Logo, a partir da relação de anomalia excêntrica,

$$q_1(t) = \cos(t) \quad q_2(t) = \sin(t) \quad (2.17)$$

E as distâncias relativas de P_3 a P_1 e P_2 são descritas por,

$$r_{13}(t) = [(\mathbf{Q}_1 + \mu\cos(t))^2 + (\mathbf{Q}_2 + \mu\sin(t))^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

$$r_{23}(t) = [(\mathbf{Q}_1 - (1-\mu)\cos(t))^2 + (\mathbf{Q}_2 - (1-\mu)\sin(t))^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Escrevendo a energia potencial de m_3 ,

$$\Omega = \frac{1-\mu}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}} \quad (2.20)$$

A definição do problema restrito de três corpos é dada pela Equação (2.16), com a origem no centro de massa entre o sistema binário, para isso definimos a normalização das massas como $m_1 = 1 - \mu$ e $m_2 = \mu$. Portanto, integrando a Equação (2.16) obtemos uma integral de energia denominada de Integral de Jacobi, a qual é uma integral adicional de movimento que se conserva e é descrita por,

$$C = x^2 + y^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} \quad (2.21)$$

Podendo demonstrar a integral de Jacobi a partir de $Q(t)$ descrita na Equação (2.16) no referencial inercial,

$$\ddot{Q} = \Omega_Q \quad (2.22)$$

admitindo que

$$\frac{d}{dt}C(Q, \dot{Q}, t) = 0 \quad (2.23)$$

por sua vez,

$$\frac{d}{dt}C = (C_Q, \dot{Q}) + (C_{\dot{Q}}, \ddot{Q}) + C_t \quad (2.24)$$

$$= 2(\Omega_Q, \dot{Q}) - 2(\dot{Q}, \ddot{Q}) + 2(Q_1\ddot{Q}_2 - Q_2\ddot{Q}_1) + 2\Omega_t \quad (2.25)$$

$$= 2(Q_1\ddot{Q}_2 - Q_2\ddot{Q}_1) + 2\Omega_t \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}C = (Q_1\ddot{Q}_2 - Q_2\ddot{Q}_1) + \Omega_t \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}C = Q_1\Omega_{Q_2} - Q_2\Omega_{Q_1} + \Omega_t \quad (2.28)$$

Como $\dot{C} = 0$

$$-\Omega_t = Q_1\Omega_{Q_2} - Q_2\Omega_{Q_1} \quad (2.29)$$

$$C(Q_1, \dot{Q}_1, Q_2, \dot{Q}_2, t) = -\dot{Q}_1^2 - \dot{Q}_2^2 + 2(Q_1\dot{Q}_2 - Q_2\dot{Q}_1) + 2\Omega \quad (2.30)$$

O termo $2(Q_1\dot{Q}_2 - Q_2\dot{Q}_1)$ é o momento angular de m_3 e C a constante de Jacobi associada a energia somente de P_3 .

2.4 Referencial Sinódico

O sistema discutido acima é descrito no referencial inercial, porém, a fim de estabelecer comparações e relações, será feita a transformação para um referencial

sinódico, onde o problema de três corpos se torna um sistema autônomo, ou seja, independente do tempo. Como, por definição, o sistema P_1 e P_2 se movem em torno da origem com velocidade angular igual a um, é possível transformar para um novo sistema de coordenadas x_1 e x_2 , sem perder as definições estabelecidas inicialmente, esse sistema é chamado de sinódico. A transformação é feita a partir da rotação da matriz ortogonal $x = R(t)Q$ [33, 34, 25],

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

A transformação inversa é dada por,

$$Q = R^{-1}(t)x \quad (2.32)$$

Aplicando a substituição na equação 2.15, teremos $Q_1 = x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t)$ e $Q_2 = x_1 \sin(t) + x_2 \cos(t)$. Logo, obtêm-se o problema restrito no referencial sinódico.

Podemos também escrever que,

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_2 = x_1 + \tilde{\Omega}_{x_1} \quad (2.33)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 = x_2 + \tilde{\Omega}_{x_2} \quad (2.34)$$

Sendo que $\tilde{\Omega} = \Omega(R^{-1}x)$. Por isso,

$$\mathbf{r}_{13} = [(x_1 - \mu)^2 + x_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{r}_{23} = [(x_1 - (-1 + \mu))^2 + x_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

A substituição pode ser aplicada também na integral de Jacobi, permitindo obter tal relação no referencial sinódico $\tilde{C} = R^{-1}(t)C$, onde,

$$\tilde{C}(x, \dot{x}) = -|\dot{x}|^2 + r^2 + 2\tilde{\Omega}(x) \quad (2.37)$$

sendo $r = |\mathbf{x}| = |R(t)\mathbf{Q}| = |\mathbf{Q}|$.

No problema de três corpos elíptico o tempo na matriz de rotação não é mais a variável utilizada para se observar o referencial girante, fato que ocorre já que um

dos planetas não possui mais uma órbita circular. O elemento orbital θ (longitude verdadeira) assume o lugar da variável tempo, devido ao movimento relativo entre os dois corpos [10].

2.5 Seções de Poincaré

Podemos entender a Equação de (2.37) como uma superfície tridimensional em um espaço de fase quadridimensional para um dado valor de C (constante de Jacobi) associado a órbita. Com a finalidade de visualizar parcialmente tais superfícies, é necessário escolher uma seção, ou seja, escolher que uma das variáveis seja zero para que seja possível observar um corte na figura toroidal. Para isso, é necessário utilizar-se de um processo que será descrito abaixo.

Iniciando com a integral de Jacobi, devemos escolher uma coordenada que irá ser o corte das superfícies, neste caso a coordenada $\dot{Q}_1$ foi escolhida como nula de modo a observar seções de Q_1 e Q_2 . Temos então que $C(Q_1, Q_2, \dot{Q}_2)$. Consideraremos condições iniciais de uma órbita, as quais, iremos definir a partir de Q_1 e Q_2 , sabendo que $\dot{Q}_1 = 0$ e, $\dot{Q}_2$ irá ser determinado a partir da equação da integral de Jacobi e, para isso, a necessidade de escrever $\dot{Q}_2$ em função da constante de Jacobi, ou seja, $\dot{Q}_2(Q_1, Q_2, C)$. Partindo da Equação (2.38),

$$C(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, t) = C = -|\dot{Q}|^2 + 2(Q_1\dot{Q}_2 - Q_2\dot{Q}_1) + 2\Omega \quad (2.38)$$

Como $\dot{Q}_1 = 0$, foi escolhido como seção de corte, temos então que,

$$\dot{Q}_2 - 2Q_1\dot{Q}_2 - 2\Omega + C = 0 \quad (2.39)$$

Encontrando então os possíveis valores de $\dot{Q}_2$,

$$\dot{Q}_2 = Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 + 2\Omega - C} \quad (2.40)$$

A figura 2.2 representa uma ilustração do fenômeno descrito acima, onde Q cruza o plano demarcando as órbitas periódicas ou quasiperiódicas.

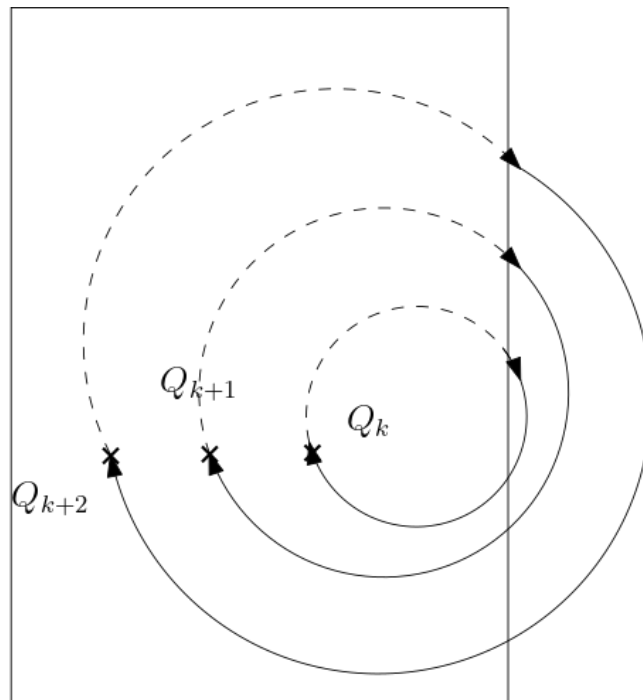


Figura 2.2: Exemplificação da seção de Poincaré dada pelo cruzamento da órbita no plano selecionado. Fonte: Autor

É de suma importância esclarecer que estas seções só podem ser construídas dessa forma para os casos do problema planar, circular, restrito de três corpos (CR3BP), devido a integral de Jacobi. A figura 2.3 representa uma seção de Poincaré. Os centros das ilhas aparentes correspondem a órbitas periódicas e possuem uma relação de Ressonância entre elas. É possível também obter seções através da Hamiltoniana do sistema.

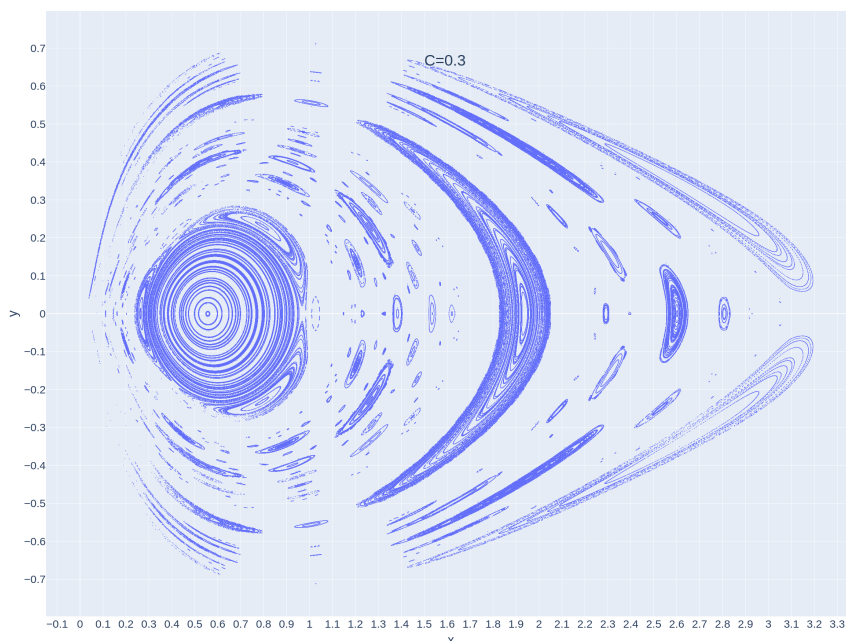


Figura 2.3: Seção de Poincaré de x, y sendo $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} < 0$ de um grid para órbita retrógrada com a razão de massa equivalente $\mu = 0.001$. Fonte: Autor

Nesta seção os pontos foram plotados a partir da exclusão de órbitas que colidiram ou escaparam ($a > 10AU$). Dessa forma, as regiões caóticas que deveriam estar presentes devido as interações numéricas descartadas acima, as quais preencheriam o espaço entre as ilhas, foram descartadas por motivos estéticos, de modo que exclusivamente neste caso estamos interessados em exemplificar o as ilhas relacionadas as órbitas periódicas no espaço de fase. Contudo, é de grande relevância enunciar que as órbitas caóticas no espaço de fase trazem consigo informações que podem ser de suma importância para o entendimento e análise do espaço de fase.

2.6 Função perturbadora

A partir do problema de três corpos, devemos considerar os efeitos que a interação gravitacional entre os corpos do sistema causam entre si. Para isso, consideramos, novamente o problema de três corpos no sistema descrito abaixo e ilustrado na figura 2.4, a qual descreve um problema de três corpos [25].

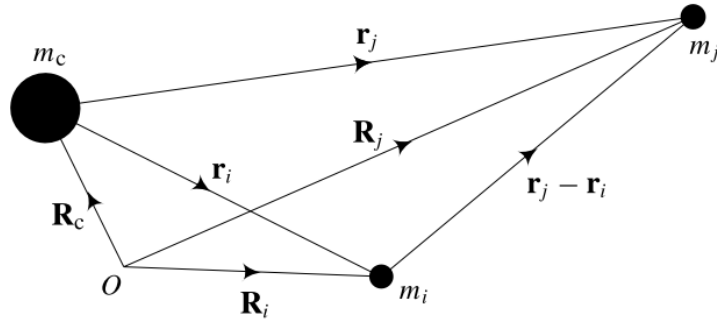


Figura 2.4: Ilustração da interação gravitacional entre os vetores posição das massas m_i e m_j em relação a massa central m_c Fonte: [25]

Considerando os vetores posição do sistema temos,

$$|\vec{r}_i| = r_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{1/2}, \quad |\vec{r}_j| = r_j = (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{1/2} \quad (2.41)$$

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2} \quad (2.42)$$

Utilizando a segunda lei de Newton podemos escrever as equações de movimento para os corpos no referencial inercial com a origem no central,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{G(m_c + m_i)}{|\mathbf{r}_i|^3} \mathbf{r}_i + Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) \quad (2.43)$$

sendo que $i \neq j$.

Podendo escrever as acelerações relativas como gradientes de funções escalares,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i(U_i + \mathcal{R}_i) \quad \ddot{\mathbf{r}}_j = \nabla_j(U_j + \mathcal{R}_j) \quad (2.44)$$

onde,

$$U_i = G \frac{(m_c + m_i)}{r_i} \quad U_j = G \frac{(m_c + m_j)}{r_j} \quad (2.45)$$

O termo $\mathcal{R}$ é a função perturbadora que representa o potencial relacionado com a interação entre as massas do sistema. Considerando os vetores $\mathbf{r}$ dos corpos, podemos escrever $\mathcal{R}$ para cada caso,

$$\mathcal{R}_i = \frac{Gm_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} - Gm_j \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \quad (2.46)$$

$$\mathcal{R}_j = \frac{Gm_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - Gm_i \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_i^3} \quad (2.47)$$

É de suma importância esclarecer que, nas equações citadas para a função perturbadora, existem termos que são considerados diretos e termos provenientes da escolha do sistema de coordenadas, os quais, por sua vez, são considerados indiretos. Se o centro massa do sistema for a origem os termos indiretos não irão aparecer. Essas equações podem ser descritas e utilizadas para n corpos. No caso particular de duas massas pontuais, sendo elas m e m' e seus vetores posição $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ relativos a massa central m_c , onde $r < r'$, temos que o movimento da partícula secundária interna é dada por,

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(m_c + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm' \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) \quad (2.48)$$

Portanto, a função perturbadora pode ser escrito como,

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \mu' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \quad (2.49)$$

onde $\mu' = Gm'$ e, de forma semelhante para a outra massa $\mu = Gm$, no caso a externa, temos que,

$$\mathcal{R} = \frac{\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mu \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \quad (2.50)$$

Ambos casos estão associados com os elementos orbitais osculantes pelas respectivas equações $n'^2 a'^3 = G(m_c + m')$ e $n^2 a^3 = G(m_c + m)$.

Os ângulos ressonantes podem ser obtidos a partir de expansões da função perturbadora, como por exemplo, a expansão literal clássica [25] ou a retrógrada [22].

3 Ressonância de movimento médio

Um dos objetivos deste estudo é buscar compreender o comportamento de órbitas ressonantes retrógradas de sistemas estelares e planetários. O fenômeno de ressonância na dinâmica orbital ocorre devido a interações gravitacionais que um ou mais corpos podem sofrer. Tais interações podem ocasionar possíveis relações entre as frequências de um sistema orbital. Podemos citar, como exemplo, alguns tipos de ressonância, sendo elas: ressonância de Kozai, Laplace, movimento médio e secular [15].

A ressonância de Laplace é uma ressonância entre três corpos com a razão de período 1:2:4. Um dos casos mais conhecidos é a ressonância das luas do planeta Júpiter. As ressonâncias seculares ocorrem quando a precessão do eixo definido, seja o nodo ascendente ou o perihélio de duas órbitas, ocorrem de forma sincronizada. Tal ressonância pode ser interpretada como um oscilador harmônico acoplado. A título de exemplo, um pequeno corpo como um asteroide, em ressonância secular com um planeta gigante. Nesses casos é possível observar ao longo de milhões de anos mudanças na excentricidade e na inclinação da órbita deste corpo. Já a ressonância de Kozai ocorre quando a inclinação e a excentricidade de uma órbita perturbada oscila de forma sincronizada. Esses casos são específicos a corpos que estão em órbitas significativamente inclinadas [15].

Este projeto tem como objetivo estudar em particular os casos de ressonância orbital, também denominada ressonância mean motion, obtendo uma relação de números inteiros entre dois corpos. Ressonâncias são capazes de estabilizar ou desestabilizar uma órbita, dependendo das interações gravitacionais e/ou sobreposições de ressonâncias [25].

A fim de identificar as ressonâncias mean motion (MMR) retrógradas/prógra-

das, deve-se considerar os termos existentes da expansão da função perturbadora, conforme discutido em 2.6. Esses termos foram expandidos e exemplificados por [25, 19] descrevendo sua associação com as ressonâncias.

3.1 Expansão da função perturbadora CR3BP

Considerando o problema circular restrito de três corpos (CR3BP), podemos assumir que os corpos primário e secundário possuem a relação de frequência $n_2 = \sqrt{G(m + m_2)/a_2^3}$. Se escrita a equação de movimento com o referencial em relação ao primário é possível obter os termos relacionados as ressonâncias utilizando as expansões elípticas. Contudo, tais expansões não são triviais e neste estudo iremos utilizar os resultados reportados por [25, 4].

Os termos de primeira ordem para o caso prógrado são: $(j-1)\lambda_1 - j\lambda_2 + \varpi_1$ (termo 4D.1.1). Nos casos de $j \geq 2$ os termos correspondem a ressonância prógrada $j/(j-1)$, sendo que, $\dot{\lambda}_1 = n_1$, $\dot{\lambda}_2 = n_2$ e a variação do ângulo no tempo é $(j-1)n_1 - jn_2 \approx 0$. Para os termos de segunda ordem de e_1 , observa-se termos do tipo $(j-2)\lambda_1 - j\lambda_2 + 2\varpi_1$ (termo 4D2.1), os quais correspondem a uma ressonância do tipo $j/(j-2)$ prógrada para $j \geq 3$. Os termos de terceira ordem de e_1 são aqueles do tipo $(j-3)\lambda_1 - j\lambda_2 + 3\varpi_1$ (termo 4D3.1), que correspondem a uma ressonância prógrada $j/(j-3)$ sendo $j \geq 4$. Já os termos de quarta ordem de e_1 são $(j-4)\lambda_1 - j\lambda_2 + 5\varpi_1$, referentes as ressonâncias prógradas do tipo $j/j(j-5)$ para $j \geq 6$.

É de grande relevância citar que estes resultados são válidos somente para pequenas variações na inclinação do plano.

Portanto, o ângulo ressonante prógrado pode ser descrito pela equação a seguir,

$$\theta = (j - k)\lambda_1 - j\lambda_2 + k\varpi_1, \quad (3.1)$$

onde consideramos uma ressonância prógrada no CR3BP de ordem $j/(j-k)$.

3.2 Ressonância Retrógrada - CR3BP

Uma órbita é considerada retrógrada quando a inclinação $\pi/2 < I < \pi$, possuindo uma configuração onde, o sistema principal de n corpos para $n \geq 2$ em torno

de uma massa central está em movimento contrário entre si como, por exemplo, no caso de um sistema de três corpos estrela - planeta - asteroide, sendo que o planeta e o asteroide se movem em direções contrárias. Diversos estudos, como [23, 22, 36, 28], apontam para corpos celestes em órbitas retrógradas tanto no sistema Solar quanto em sistemas extrassolares.

Nesse sentido, partindo das relações obtidas da função perturbadora demonstradas no tópico 2.8, e admitindo os elementos orbitais osculantes, onde considera-se que $\dot{\lambda} > 0$ para o planeta e $\dot{\lambda}' > 0$ para o asteroide, podemos realizar as transformações dos ângulos prógrados para os retrógrados, marcados com o símbolo (*).

Desta forma, sendo $I^* = 180 - I$, teremos também $\lambda'^* = -\lambda'$, $\omega^* = \omega - \pi$, $\Omega^* = -\Omega - \pi$, e, por fim, a longitude do pericentro se transforma de $\varpi = \omega + \Omega$ em $\varpi^* = \omega - \Omega$ e o mesmo vale para a longitude $\lambda = M + \omega + \Omega$ em $\lambda^* = M + \omega - \Omega$. Essas transformações permitem descrever o ângulo ressonante partindo de termos diretos e indiretos que surgem na expansão da função perturbadora.

A expansão literal para as ressonâncias, válida para o caso prógrado, foram obtidas por [4]. Já nos caso retrógrado a transformação dos ângulos no caso literal permite obter as ressonâncias, conforme foi realizado por [22].

Para a ressonância retrógrada 2/-1 os termos ressonantes são do tipo,

$$e^3 \cos(\lambda^* - 2\lambda' - 3\varpi^*) \text{ termo } [4D3.1, j = 2] \quad (3.2)$$

$$e\alpha^2 \cos(\lambda^* - 2\lambda' - \varpi^* + 2\Omega) \text{ termo } [4D3.5, j = 2] \quad (3.3)$$

O caso da ressonância 1/-2 retrógrada é dada a partir dos termos ressonantes diretos e indiretos,

$$e^3 \cos(2\lambda^* - \lambda' - 3\varpi^*) \text{ termo } [4D3.4, j = 2 \text{ e } 4I3.6] \quad (3.4)$$

$$e\alpha^2 \cos(2\lambda^* - \lambda' - \varpi^* + 2\Omega) \text{ termo } [4D3.10, j = 2 \text{ e } 4E2.6] \quad (3.5)$$

A ressonância 1/-1 retrógrada é dada pelos termos diretos e indiretos que, por sua vez, se trata de um caso específico, já que os termos diretos não podem ser obtidos de forma literal a partir da expansão da função perturbadora.

Portanto os termos indiretos da ressonância retrógrada 1/-1 são,

$$e^2 \cos(\lambda^* - \lambda' - 2\varpi^*) \quad \text{termo} \quad [4D2.1, j = 1 \text{ e } 4E2.2] \quad (3.6)$$

$$\alpha^2 \cos(\lambda^* - \lambda' + 2\Omega) \quad \text{termo} \quad [4D2.4, j = 1 \text{ e } 4E2.6] \quad (3.7)$$

Para os ângulos diretos um modelo semi-analítico foi desenvolvido e apresentado por [22].

Por meio dos exemplos citados até o momento, é possível obter uma relação sobre os termos ressonantes para qualquer órbita ressonante retrógrada do tipo p/q , sendo assim,

$$e^{p+q-2k} \alpha^{2k} \cos(q\lambda^* - p\lambda' - (p+q-2k)\varpi^* + 2k\Omega) \quad (3.8)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$ e $p+q \geq 2k$. Como o estudo se restringe somente a órbitas planares, escrevemos $\alpha = 0$, restando somente o termo de $e^{p+q} \cos(\phi)$, que no caso é o ângulo ressonante.

$$\phi = q\lambda^* - p\lambda' - (p+q)\varpi^*. \quad (3.9)$$

3.3 Ressonância retrógrada do problema geral de três corpos

De forma semelhante ao caso do problema de três corpos restrito (CR3BP), os ângulos ressonantes do problema geral de três corpos (3BP) são obtidos através da função perturbadora, sendo esta a função referente ao problema geral de três corpos. Esta expansão foi realizada e está definida em [20], possibilitando descrever os ângulos das ressonâncias de forma generalizada da seguinte maneira:

Na ressonância coorbital : $\phi^{cr3bp} = -\lambda - \lambda' + 2\varpi$, $\phi_1^{3bp} = -\lambda - \lambda' + 2\varpi'$, $\phi_2^{3bp} = -\lambda - \lambda' + \varpi' + \varpi$.

Para a ressonância 1/-2: $\phi^{cr3bp} = -2\lambda - \lambda' + 3\varpi$, $\phi_1^{3bp} = -2\lambda - \lambda' + 3\varpi'$, $\phi_2^{3bp} = -2\lambda - \lambda' + 2\varpi' + \varpi$, $\phi_3^{3bp} = -2\lambda - \lambda' + \varpi' + 2\varpi$.

Para a ressonância 2/-1: $\phi^{cr3bp} = -\lambda - 2\lambda' + 3\varpi$, $\phi_1^{3bp} = -\lambda - 2\lambda' + 3\varpi'$, $\phi_2^{3bp} = -\lambda - 2\lambda' + \varpi' + 2\varpi$, $\phi_3^{3bp} = -\lambda - 2\lambda' + 2\varpi' + \varpi$.

A diferença nos ângulos definidos nesse estudo é devido ao fator que para o caso retrógrado, os ângulos devem ser medidos de acordo com a direção do plano orbital e, por sua vez, temos que $\theta = \Omega + \omega + f$ e $\lambda = \Omega + \omega + M$ são redefinidos como $\theta = \Omega - \omega - f$ e $\lambda = \Omega - \omega - M$, o que explica a mudança de sinal nos ângulos ressonantes definidos acima.

4 Métodos Computacionais e Ferramentas

Neste tópico serão apresentados os métodos, meios e ferramentas computacionais utilizados neste estudo. Para todas as órbitas simuladas numericamente foi utilizado o pacote *REBOUND*, que se trata de um código disponibilizado nas linguagens de programação *C* e *Python* para realizar simulações de sistema orbitais de n corpos, sendo que este pacote possui diversos integradores com diferentes finalidades. No caso, o *REBOUND* é disponibilizado em uma biblioteca da linguagem *Python* e foi utilizado para todos os resultados numéricos que serão apresentados nesta dissertação.

Todas as simulações foram realizadas com a finalidade do estudo de órbitas retrógradas do problema de três corpos, tanto o restrito quanto o não restrito.

4.1 REBOUND e Integradores numéricos

O pacote REBOUND possui diversos integradores numéricos, sendo eles: IAS15, WHFast, SABA, JANUS, LEAPFROG, SEI, EOS, EULER e MERCURIUS. Todos eles são descritos e detalhados na documentação do software. Porém, somente dois deles possuem o indicador caótico MEGNO implementado, o qual é ferramenta de grande importância em estudos de estabilidade, sendo os integradores WHFast e IAS15. O IAS15 é um integrador de décima quinta ordem baseado no RADAU de passo adaptativo. Outro integrador implementado no REBOUND é o WHFast que, se trata de um integrador simplético e pode ser útil em alguns casos.[37, 38].

4.1.1 IAS15

Este integrador foi o utilizado para resolver todas as órbitas simuladas neste estudo. O IAS15 é um integrador implícito que, segundo os autores [37], é baseado principalmente no integrador GauB-Radau (RADAU), porém utiliza de aspectos de outros integradores, como o algoritmo de Everhart (um integrador Runge-Kutta modificado) e SORSA Toolchain, o qual também é parcialmente utilizado [5, 41].

O funcionamento do algoritmo é baseado em resolver a equação a seguir:

$$y'' = F(y', y, t) \quad (4.1)$$

Sendo y'' a aceleração e y' e y a velocidade e posição respectivamente. Essa equação permite utilizar de velocidades arbitrárias, e, por consequência, não é conservativa. Portanto não corresponde a um sistema hamiltoniano.

Expandindo a equação 4.1,

$$y'' \approx y''_0 + a_0 t + a_1 t^2 + \dots + a_6 t^7 \quad (4.2)$$

Portanto, o primeiro *timestep* é obtido a partir da definição inicial de dt , que por padrão é de 0.001 no REBOUND. Considerando que $h = t/dt$ e $b_k = a_k dt^{k+1}$ escrevemos a expansão da seguinte forma,

$$y''(h) = y''_0 + b_0 h + b_1 h^2 + \dots + b_6 h^7 \quad (4.3)$$

Sendo h adimensional, podemos expandir novamente em series.

$$y''(h) = y''_0 + g_1 h + g_2 h(h - h_2) + g_3 h(h - h_1)(h - h_2) + \dots + g_8 h(h - h_1) \dots (h - h_7) \quad (4.4)$$

Então temos que,

$$h = h_1 \quad (4.5)$$

$$g_1 = \frac{y''_1 - y''_0}{h_1} \quad (4.6)$$

$$h = h_2 \quad (4.7)$$

$$g_2 = \frac{y_1'' - y_0'' h_2}{h_2(h_2 - h_1)} \quad (4.8)$$

As expansões são feitas até a oitava ordem (g_8). Um dos principais motivos de se reescrever a equação novamente em séries, dessa forma, g_k depende somente da força, implicando seu aspecto implícito.

Para obter as equações de velocidade e posição integramos então a equação 4.3 de modo a obter as seguintes equações,

$$y'(h) = y_0' + h dt \left(y_0'' + \frac{h}{2} \left(b_0 + \frac{2h}{3} (b_1 + \dots) \right) \right) \quad (4.9)$$

$$y(h) = y_0' + y_0' h dt + \frac{h^2 dt^2}{2} \left(y_0'' + \frac{h}{3} \left(b_0 + \frac{h}{2} (b_1 + \dots) \right) \right) \quad (4.10)$$

O autor esclarece que para resolver as integrais com bastante precisão é escolhido o espaçamento de GauB-Radau (GauBian quadrature) utilizando a *quadrature* com oito funções, apresentando os valores de espaçamento, os quais foram propostos por Everhart.

A estimativa do *stepsize* é obtida a partir de uma forma definida como razoável, ou seja, o *timestep* tem que ser comparável ao menor valor relevante de escala de tempo do problema. Com isso podemos associar erros locais e globais para cada caso.

Erro global:

$$\bar{b}_6 = \frac{\max_i |b_{6,i}|}{\max_i |y_i''|}. \quad (4.11)$$

Erro local:

$$\bar{b}_6 = \max_i \frac{|b_{6,i}|}{|y_i''|} \quad (4.12)$$

Sendo i o índice das componentes do problema.

De modo geral, o REBOUND utiliza-se do erro global ao invés do local para estimar o *stepsize*. Ademais o mesmo procedimento, descrito nas equações acima, ocorre para determinar a precisão das constantes associadas ao *stepsize*.

Erro global:

$$\bar{\delta}b_6 = \frac{\max_i |b_{6,i}|}{\max_i |y_i''|} \quad (4.13)$$

Erro local:

$$\bar{\delta}b_6 = \max_i \frac{|b_{6,i}|}{|y_i''|} \quad (4.14)$$

Ademais o parâmetro de comparação de ajuste do erro do integrador é definido como $\epsilon_R = \epsilon_{\delta b} = 10^{-16}$ e a precisão da máquina na ordem de b_6 , a qual é insignificante se comparado com o valor do ϵ , concluindo que $\bar{\delta}b_6 < \epsilon_R$. O integrador trabalha com a precisão da máquina utilizando de *double floats* com precisão de cerca de $\approx 2 * 10^{-16}$.

4.2 Transformada de Fourier

No sentido de interpretar os dados desde projeto, é necessário introduzir uma ferramenta matemática poderosa, sendo ela a Análise de Fourier, a qual permite obter informações do problema que está sendo aplicada. Neste caso, a Análise de Fourier possibilita analisar as frequências de um domínio espacial do problema que está sendo estudado. É possível interpretar determinados problemas de dinâmica orbital como osciladores harmônicos e dessa forma obter as frequências do sistema com a finalidade de relacioná-las umas as outras para observar ressonâncias de movimento médio (mean motion).

Sabendo que uma função unidimensional de uma variável espacial $f(x)$ pode ser escrita como uma combinação linear de um número infinito de harmônicos, podemos escrever que [11, 7, 12],

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty A(k) \cos(kx) dk + \int_0^\infty B(k) \sin(kx) dk \right] \quad (4.15)$$

sendo, $A(k)$ e $B(k)$ transformadas de Fourier de seno e cosseno da $f(x)$, ou seja, fatores que carregam características da frequência espacial k . Considerando uma variável opcional x' temos,

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos(kx') dx' \quad (4.16)$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \sin(kx') dx' \quad (4.17)$$

Ambas funções não são explicitamente dependentes de x' . Podemos simplificar as expressões a partir da representação de uma função exponencial se substituirmos 4.16 e 4.17 em 4.15. Logo,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \cos(kx) \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos(kx') dx' dk + \int_0^{\infty} \sin(kx) \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \sin(kx') dx' dk \right] \quad (4.18)$$

sabendo que, $\cos(k[x' - x]) = \cos kx \cos kx' + \sin kx \sin kx'$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos(k[x' - x]) dx' \right] dk \quad (4.19)$$

Como 4.19 é uma função par de k , podemos reescreve-la da seguinte forma,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos(k[x' - x]) dx' \right] dk \quad (4.20)$$

A partir da relação de Euler, podemos concluir que, neste caso, a parte imaginária é nula, ou seja,

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \sin(k[x' - x]) dx' \right] dk = 0 \quad (4.21)$$

Fator que ocorre devido a paridade da função e sua propriedade ortogonal. Portanto, escrevendo no formato exponencial temos,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{ikx'} dx' \right] e^{-ikx} dk \quad (4.22)$$

E por fim,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk \quad (4.23)$$

Onde,

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (4.24)$$

se considerarmos que $x' = x$, então a função $F(k)$ se torna a transformada de Fourier de $f(x)$.

4.2.1 Análise de frequências por Transformada Rápida de Fourier - FFT

Para realizarmos a análise de frequências do sistemas orbitais devemos utilizar de uma ferramenta, como a transformada rápida de Fourier - FFT, para obter as frequências associadas ao sistema. Como o sistema estudado neste projeto é o problema de três corpos de forma geral, existirá uma frequência associada a ressonância do sistema do segundo corpo com a partícula teste (terceiro corpo). Logo tomando a transformada de Fourier para ambos, pode-se obter a relação entre os períodos dos mesmos. A análise deve ser feita no sistema de referencial inercial para estabelecer a relação de rotação entre os corpos do sistema. Devido a propriedade das órbitas com $\mu > 0.01$ não podemos utilizar os elementos orbitais para obter as frequências, já que para sistemas próximos a estelares binários, as órbitas instantâneas deixam de ser keplerianas. Logo a variação dos elementos orbitais não retornam resultados válidos.

A transformada rápida de Fourier (FFT) é umas das ferramentas mais importantes na análise de sinais em diversas áreas da física, contudo para que um computador a calcule com eficiência é necessário utilizar-se da FFT discreta, que consiste em um algoritmo de ordem $\mathcal{O}[N \log N]$ que determina uma somatória [12, 7],

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \quad (4.25)$$

O algoritmo utilizado nos cálculos numéricos desta dissertação foi o implementado na biblioteca *NumPy* da linguagem de programação *Python* [35] similar as rotinas numéricas de métodos aplicados em FORTRAN.

Como o integrador utilizado IAS15 é de passo adaptativo, o espaçamento entre os pontos, no caso, os relacionados ao tempo de integração, não são igualmente distantes. Logo a FFT não pode ser feita diretamente com os resultados reportados pelo software, o que implicaria em resultados falhos. Para isso é necessário realizar a interpolação dos dados. O método de interpolação de Spline foi utilizado para a análise de frequência.

As coordenadas cartesianas escolhidas para cada caso se diferenciam para o caso do segundo corpo e da partícula teste. Como o problema estudado se trata

de um problema circular de três corpos, a órbita do segundo corpo é descrita por um movimento circular, portanto, para a análise de frequências, a coordenada r em relação ao centro de massa não consegue fornecer informações suficientes sobre a frequência da órbita devido ao movimento circular. No caso do terceiro corpo, devemos utilizar a coordenada r já que ela contém informações sobre as coordenadas cartesianas x e y .

4.3 Estabilidade e Indicadores Caóticos

De modo geral, a estabilidade de um sistema dinâmico pode ser testada através de um indicador caótico. Podemos citar como exemplo: RLI (Relative Lyapunov indicator), FLI (Fast Lyapunov indicator), LCN (Lyapunov Characteristic Number), MEGNO (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits), SALI/GALI (Smaller and the Generalized Alignment Index methods of chaos detection) [39, 6, 9, 3, 40].

Com a finalidade de estudar a estabilidade de órbitas, o pacote numérico *REBOUND* disponibiliza a ferramenta MEGNO para determinar caos em órbitas, a qual foi utilizada na construção de mapas de estabilidade.

4.3.1 MEGNO <Y>

A introdução do MEGNO inicialmente foi realizada por [3] para análises de sistemas galáticos e utilizada em aplicações em sistemas planetários por [9]. O desenvolvimento do MEGNO surge a partir da dificuldade do LCN prover características da estrutura regular do espaço de fase do sistema, fator decorrente da própria definição do LCN, descrita pela equação 4.26 que segue abaixo.

$$\sigma(\gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(\gamma(t))}{\delta_0} \quad (4.26)$$

onde, se o limite existir, admitindo que δ_0 seja pequenas variações de γ nos limites de integração, a função $\delta(\gamma(t))$ satisfaz as equações variacionais de sua própria derivada $\dot{\delta}$.

A equação 4.26 pode ser escrita na forma integral da seguinte forma,

$$\sigma(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{\delta}(\gamma(t))}{\delta(\gamma(t))} dt \equiv \left\langle \frac{\dot{\delta}}{\delta} \right\rangle \quad (4.27)$$

O autor define como *Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits* a função J ,

$$J(\gamma(T)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\dot{\delta}(\gamma(t))}{\delta(\gamma(t))} t dt \quad (4.28)$$

Então, para as órbitas periódicas ou quasiperiódicas σ_r ,

$$J(\gamma(T)) \approx 2 \left(1 - \frac{\ln(1 + \lambda_{\gamma_r} T)}{\lambda_{\gamma_r} T} + O(\gamma_r(T)) \right) \quad (4.29)$$

Sendo, $\lambda_{\gamma_r} > 0$ o termo linear de divergência na região vizinha das órbitas periódicas e quasiperiódicas γ_r . Já o termo $O(\gamma_r(T))$ representa o termo oscilatório que, na média é nula.

O termo regular $\delta(\gamma(t))$ é aproximado para $\delta \approx \delta_0[1 + \lambda t + tu(t)]$, onde $u(t)$ é a função oscilatória de t que em módulo é limitada por λ . Nesse caso, é notório que a medida que T se torna grande o suficiente o valor da função do MEGNO J oscila em torno de dois e para $T \rightarrow \infty$ escrevemos sua amplitude como,

$$|J(\gamma_r(T)) - 2| < 4 \ln \frac{\lambda_{\gamma_r} + b}{\lambda_{\gamma_r} - b} \quad (4.30)$$

onde b é o termo variável presente na inequação que descreve a limitação de $|u(t)| < b < \lambda$.

Logo, para as órbitas quasiperiódicas o termo $O(\gamma_r(T))$ representa pequenas oscilações que são desconsideradas, permitindo escrever, $J(\gamma_r) \equiv J_r$. No caso onde γ_r for, ou, estar bem próximo de uma órbita periódica, o termo $O(\gamma_r(T))$ apresenta pequena amplitude de característica periódica. O MEGNO também é descrito na literatura como $\langle Y \rangle$

4.3.2 Mapas de Estabilidade

Mapas de estabilidade por definição, consistem em grids de condições iniciais (CI), como, por exemplo, semieixo maior e excentricidade, onde cada ponto é integrado numericamente no pacote *REBOUND* em um determinado período de tempo

utilizando a funcionalidade do MEGNO. A cada passo de iteração, o MEGNO é calculado a partir das equações variacionais do problema e retorna o valor associado ao indicador. Nos casos onde esse valor convergir para 2 é determinado que esta órbita é regular até o momento. Os casos caóticos são aqueles em que o valor é maior que 2 e/ou possui um comportamento exponencial ao longo tempo. As órbitas que escapam ou colidem também são apresentadas no mapa de estabilidade.

Segundo os autores [23, 26] o tempo de integração necessário para observar resultados coerentes utilizando o MEGNO no problema de três corpos é de $5 \times 10^4 \approx 10^5$ períodos orbitais de um sistema binário normalizado (Sol - Júpiter). A figura 4.1 exemplifica um mapa de estabilidade, considerando colisões e escapes.

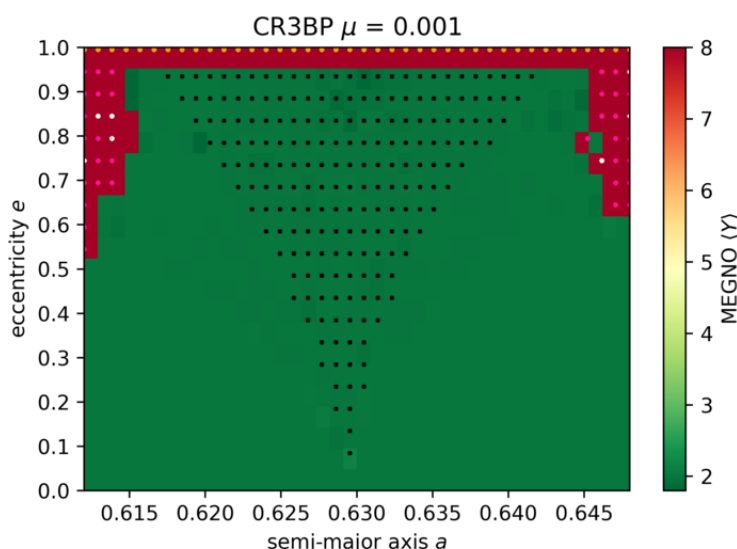


Figura 4.1: Exemplo de mapa de estabilidade para a região 2/-1 retrógrada do CR3BP. Fonte: Autor

Vale ressaltar que em problemas coplanares é necessário uma modificação para garantir que não exista nenhuma contribuição do eixo z tanto nas equações variacionais do MEGNO quanto na renormalização do vetor posição, pois, a medida que o tempo evolui numericamente, erros são acumulados nessa coordenada e isso causa efetivamente variações na determinação do indicador caótico. Erros de ordem 10^{-15} em z causam interferência nos resultados obtidos do MEGNO.

5 CR3BP retrógrado em sistemas estelares

Para analisar o espaço de fase e as ressonâncias existentes no problema circular de três corpos em duas dimensões, o uso de seções de Poincaré se torna uma ferramenta importante, conforme discutido na seção 2.5. Os casos estudados neste projeto são uma extensão daqueles realizados em [23], os quais se limitam aos casos $\mu \leq 0.01$.

Utilizando a equação de Jacobi 2.37 e escrevendo de forma usual para o CR3BP,

$$C = x^2 + y^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} \quad (5.1)$$

sendo μ a relação de massa entre o sistema binário (estrela-planeta), onde $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2$ e $r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2$. As seções foram construídas no plano (x-y), assumindo $\dot{x}_0 = 0$ e $\dot{y}_0$ obtido a partir da equação 5.1.

$$\dot{y}_0 \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \frac{2(1-\mu)}{|x_0 + \mu|} + \frac{2\mu}{|1 - (x_0 + \mu)|} - C} \quad (5.2)$$

Transformações do referencial baricêntrico para o astrocêntrico foram utilizadas [23],

$$x_1 = x_0 + \mu \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_0 - y_1 \quad (5.3)$$

$$y_1 = y_0 + \mu \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_0 - x_1 \quad (5.4)$$

Então, para garantir órbitas retrógradas, as coordenadas cartesianas devem assumir as seguintes características $x_1 > 0$ e $\dot{y}_0 < -x_1$ ou $\dot{y}_0 > -x_1$. Podemos obter o

limite do valor da constante de Jacobi para a órbita retrógrada a partir da substituição de $\dot{y}_0 = -x_1$ escrevemos,

$$C_{min} < \frac{2(1-\mu)}{|x_0 + \mu|} + \frac{2\mu}{|x_0 - 1 + \mu|} - \mu(\mu + 2x_0) \quad (5.5)$$

O valor de μ altera o valor mínimo da constante de Jacobi para a órbita retrógrada. As condições iniciais para o grid da seção de Poincaré são: $-3 < x < 3$, variando de 0.1 a cada passo e $0 < \dot{x}_0 < 0.8$ variando de 0.1 a cada passo, definindo $x = x_0 + \mu$. As seções construídas na região de $C_{min} < C < (C_{min} - K)$, sendo $K \leq 1.5$, em passos de 0.1, os quais demonstraram ser suficientes para verificar a mudança no espaço de fase. Em casos esporádicos K pode assumir valores menores que 1.5 de acordo com μ .

A escolha das condições iniciais em coordenadas cartesianas permite observar o comportamento das órbitas nas regiões de oposição ($y = 0, x < 0$) e conjunção ($y = 0, x > 0$). As seções de Poincaré foram determinadas definindo que $C(x, y = 0, \dot{x}, \dot{y})$, onde os valores de $\dot{y}$ são obtidos a partir da equação de Jacobi. Para garantir as órbitas retrógradas, consideramos que $x > 0, \dot{y} < 0$ ou $x < 0, \dot{y} > 0$. Os pontos da seção para $\dot{x} = 0$ e $y = 0$ correspondem as órbitas no pericentro ou no apocentro, de acordo com os valores de x e da constante de Jacobi. As ressonâncias foram identificadas a partir da escolha de um dos lados da seção, sendo $\dot{y} > 0$.

As equações de movimento para o CR3BP foram integradas numericamente até 10^4 períodos orbitais do corpo secundário planeta/estrela binário e as seções foram obtidas através do método da bisseção durante cada passo da iteração. Neste estudo, sistemas binários estelares ($\mu > 0.01$) foram considerados. Uma busca pelo espaço de fase visando observar ressonâncias retrógradas do tipo: 2/-1, 1/-1, 1/-2, 3/-2, 2/-3 foi realizada. Todas as seções estão anexadas em um link no apêndice A junto a um arquivo do tipo *gif* que demonstra a evolução das figuras a medida que o valor da constante de Jacobi varia. Devido a elevada quantidade dados, somente serão abordados com imagens alguns casos, porém todos eles foram analisados e serão descritos no corpo do texto.

Tabela 5.1: Tabela de valores de constante de Jacobi nos gráficos de nível

μ	C						
0.005	0.63	0.2	-0.2	-0.6	-1.0	-1.4	-1.8
0.01	0.61	0.2	-0.2	-0.6	-1.0	-1.4	-1.8
0.05	0.37	-0.0	-0.4	-0.8	-1.2	-1.6	-2.0
0.06	0.31	-0.1	-0.5	-0.9	-1.3	-1.7	-2.1
0.07	0.25	-0.2	-0.6	-1.0	-1.4	-1.8	-2.2
0.08	0.19	-0.2	-0.6	-1.0	-1.4	-1.8	-2.2
0.09	0.13	-0.3	-0.7	-1.1	-1.5	-1.9	-2.3
0.1	0.07	-0.3	-0.7	-1.1	-1.5	-1.9	-2.3
0.2	-0.56	-1.0	-1.4	-1.8	-2.2	-2.6	-3.0
0.3	-1.20	-1.6	-2.0	-2.4	-2.8	-3.2	-3.6
0.4	-1.87	-2.3	-2.7	-3.1	-3.5	-3.9	-4.3
0.5	-2.56	-3.0	-3.4	-3.8	-4.2	-4.6	-5.0

A tabela 5.1 apresenta os diferentes valores da constante de Jacobi com espaçamento 0.4 entre as curvas de nível para verificar se os mesmos cruzam as regiões de ressonância citadas. As linhas verticais vermelhas nas figuras de gráfico de nível apresentadas representam as regiões de ressonância 1/-1,2/-1,1/-2,3/-2 e 2/-3. A figura 5.1 apresenta as curvas de nível relacionadas a constante de Jacobi e as linhas de ressonâncias no grid de condições iniciais de semieixo maior por excentricidade, implicando que em determinados valores da constante seja possível observar determinadas ressonâncias.

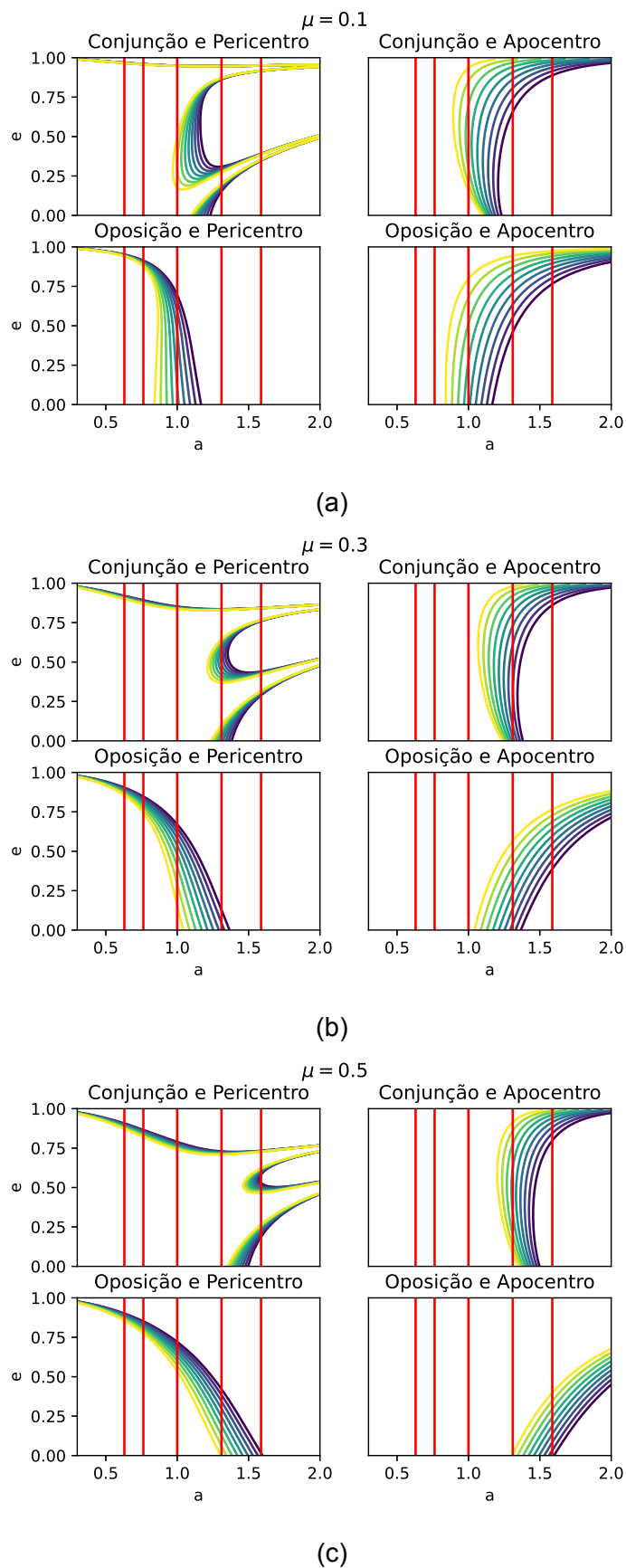


Figura 5.1: Gráficos de curva de nível para diferentes valores de μ e configurações. As curvas são apresentadas da esquerda para a direita referentes aos valores crescentes de constante de Jacobi segundo a tabela 5.1.

Foi realizada uma investigação nas seções de Poincaré nos valores de relação de massa entre o sistema binário $0.05 \leq \mu \leq 0.1$ em passos de 0.01 e $0.1 \leq \mu \leq 0.5$ em passos de 0.05. Devido ao número de figuras, somente as mais relevantes serão apresentadas e as demais serão anexadas no apêndice e disponibilizadas online.

Em todos os casos com m_u não nulo temos um sistema perturbado, portanto, a análise das ilhas ressonantes no espaço de fase fornecerá resultados referentes ao sistema perturbado. É notório que nesses casos existe a destruição das ilhas ressonantes presentes no espaço de fase conforme o aumento da massa do binário. Podemos descrever essa perturbação a partir da aproximação da partícula teste com o sistema binário estelar afetando diretamente a órbita da partícula, como a massa de ambas estrelas é de mesma ordem é de se esperar oscilações com amplitude significativa conforme a distância da partícula teste se aproxima do oscilador estelar, o mesmo efeito é observado em sistemas binários Sol-Planeta porém com amplitudes inferiores em tais variações. Nas seções apresentadas as órbitas relacionadas a caos, escapes e colisões não foram descartadas, pois tais resultados podem trazer informações de grande relevância para o entendimento da dinâmica do sistema.

Para garantir que a Análise de Fourier extraia todas as características da dinâmica da órbita da partícula teste, a Transformada Rápida de Fourier (FFT) foi realizada na coordenada $r(x, y)$ (distância da partícula até o centro massa) e X no referencial inercial, as quais apresentaram resultados ligeiramente desviados do esperado. Contudo, a análise de Fourier não foi suficiente para determinar as ressonâncias em sistemas com características de binários/circumbinários, nesses casos a razão entre as frequências dos corpos sofre desvios impedindo a determinação de tais ressonâncias. Teste com periodogramas como o Lomb-Scargle também foram realizados e os resultados se assemelham.

Neste capítulo as ressonâncias serão abordadas de duas formas, sendo a primeira descrita por relações com o toro invariante analisado, ou seja, entre as ilhas ressonantes obtidas numericamente. Uma segunda abordagem de análise é a frequência da órbita que gerou tais ilhas. Conforme abordado, a frequência nas órbitas está desviada do esperado sendo que não foi possível determinar a causa tal efeito. Acreditamos que isso é causado pelo fato de não estar analisando exata-

mente a órbita periódica. Este desvio começa a ser observado de forma significativa para órbitas e ressonâncias orbitais em casos de $\mu > 0.01$.

Iremos utilizar a nomenclatura de ressonância orbital para se referir das ressonâncias entre órbitas, e, entre as ilhas iremos nos referir de ressonância. Ambos casos possuem uma relação de conjunção e ressonância a qual será discutida com mais detalhes a frente.

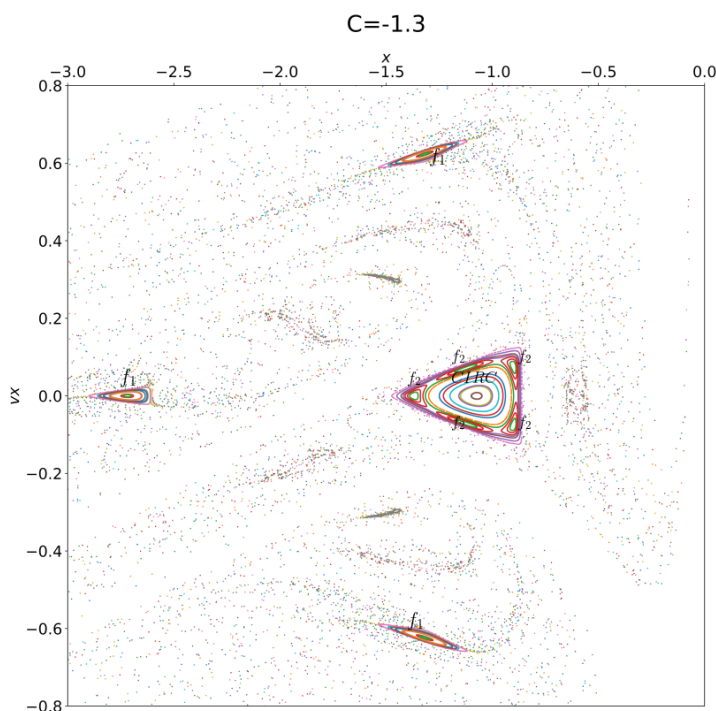
Nos casos de ressonâncias orbitais analisamos as condições iniciais nos centros das ilhas ressonantes, as quais seriam as soluções periódicas ou razoavelmente próximas de periódicas. É observado nas frequências obtidas pela FFT que para os casos estelares, apesar das condições iniciais serem referentes a soluções muito próximas as periódicas, existem diferenças nas frequências obtidas para ressonâncias orbitais de mesma ordem em diferentes condições iniciais, isso ocorre somente no referencial inercial, pois no caso do referencial sinódico as órbitas são exatamente periódicas.

De acordo com Broucke [2], o CR3BP possui soluções periódicas de períodos variáveis, diferentemente do problema do elíptico (ER3BP) o qual, permite somente soluções múltiplas de 2π . Portanto, as variações nas frequências obtidas são esperadas no CR3BP. A tabela 5.2 apresenta uma série de frequências obtidas para diferentes condições iniciais em diferentes seções de Poincaré entre os valores de $\mu = 0.05$ a $\mu = 0.4$. A primeira coluna apresenta a frequência obtida, a segunda coluna a ressonância de movimento médio (ressonância orbital) esperada, a terceira coluna o valor de μ e por fim a variação em torno da frequência esperada. Algumas frequências apresentadas na tabela estarão associadas as seções de Poincaré no decorrer deste capítulo, sendo as ilhas referentes demarcadas pela nomenclatura f .

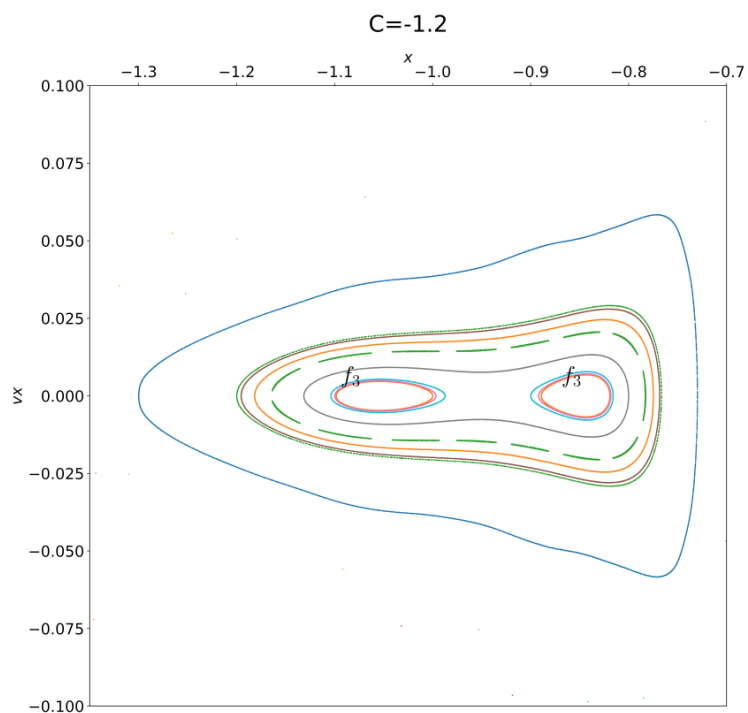
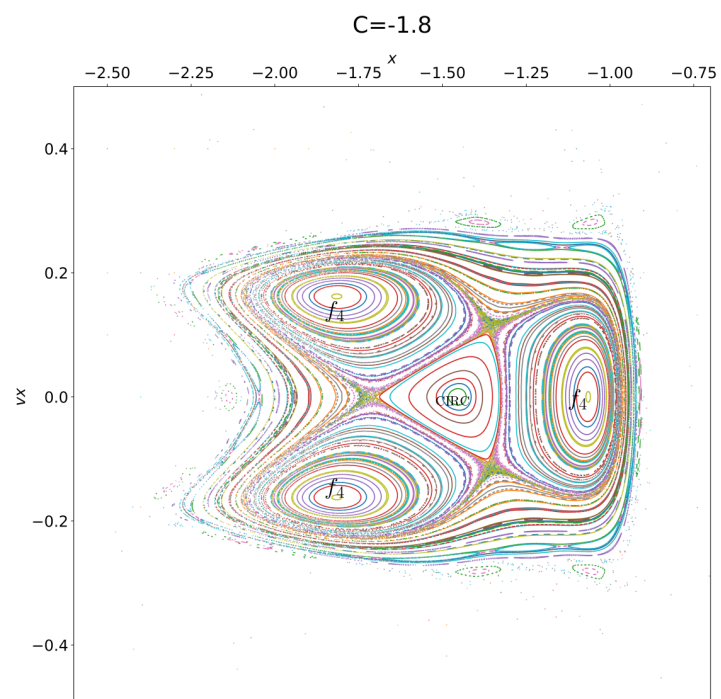
Tabela 5.2: Tabela comparativa entre as frequências obtidas por meio da FFT com as esperadas para os valores da massa binária $\mu = 0.05$ a $\mu = 0.4$. As ressonâncias orbitais analisadas foram 1/-1, 1/-2, 2/-3 e 1/-3.

	f	MMR	μ	$ \Delta f $	Figura
f_1	0.4867	1/-2	0.05	0.0133	5.2a
f_2	0.8122	2/-3	0.05	0.1522	5.2a
f_3	1.0393	1/-1	0.1	0.0393	5.3a
f_4	0.5105	1/-2	0.1	0.105	5.3b
f_5	1.1189	1/-1	0.2	0.1189	5.8a
f_6	0.7954	2/-3	0.2	0.1354	5.9
f_7	0.5189	1/-2	0.2	0.0189	5.8b
f_8	0.8073	2/-3	0.3	0.1473	5.12a
f_9	0.5329	1/-2	0.3	0.0329	5.12b
f_{10}	0.342	1/-3	0.3	0.0086	5.13a
f_{11}	0.34274	1/-3	0.4	0.01406	5.14a

A Figura 5.2 ilustra a seção de Poincaré para $\mu = 0.05$. Na Figura 5.2a a condição se $C = -1.3$ e $\dot{y} > 0$. Observamos dois tipos de ressonância, sendo uma delas associada a frequência orbital f_1 , equivalente a uma ressonância orbital do tipo 1/-2, já o segundo caso é conjunto de cinco ilhas em torno de uma órbita circular, com a frequência f_2 próximo a 0.8, indicando uma ressonância próxima a 2/-3, tal ressonância será discutida com mais detalhes a frente em casos semelhantes para diferentes valores de μ . As frequências estão apresentadas na Tabela 5.2.

(a) $C = -1.3$, $\dot{y} > 0$;Figura 5.2: Seções de Poincaré para $\mu = 0.05$.

A Figura 5.3 apresenta os casos de seções de Poincaré para $\mu = 0.1$. É apresentado na Figura 5.3a a condição se $C = -1.2$ e $\dot{y} > 0$, onde foi observado uma ressonância coorbital (1/-1) com libração em $\phi^* = \pi$, a qual está demarcada nas ilhas nas regiões de $\dot{x} = 0$, $x \approx -1.06$ e $x \approx -0.85$, sendo que as frequências associadas as ilhas estão descritas na Tabela 5.2. O valor neste caso da f_3 é de aproximadamente 1, e as ilhas estão dispostas em configurações quasi-periódicas, o que indica uma solução muito próxima de periódica, portanto, é razoável assumir que a frequência obtida neste caso implica em tal ressonância orbital. As ressonâncias apresentadas na tabela 5.2 demarcadas por f_2, f_6 e f_8 apresentaram os maiores desvios observados se comparados com o esperado.

(a) $C = -1.2, \dot{y} > 0$ (b) $C = -1.8, \dot{y} > 0$ Figura 5.3: Seções de Poincaré para $\mu = 0.1$.

Dado o total de ilhas k relacionados a ressonância do espaço de fase podemos escrever obter a ressonância orbital a partir da seguinte relação $1/(kT_{conj})$. Portanto, neste caso podemos estabelecer para as órbitas retrógradas a seguinte relação entre as ressonâncias entre ilhas e ressonâncias orbitais:

- Ressonância no espaço de fase do CR3BP são do tipo Q/P onde Q e P são primos entre si, dados pelo tempo de conjunção, medidos a partir do intervalo de cruzamento entre cada ilha;
- A transformação da ressonância do espaço de fase para a ressonância orbital no formato p/q é estabelecida a partir da relação de conjunção entre o período orbital e de conjunção, tal relação é dada por $q = Q$ e $p = P - q$.

A Figura 5.4 apresenta a diferença dos intervalos de cruzamento na seção de Poincaré por período de alguns exemplos de ressonâncias, as quais serão abordadas neste capítulo. As linhas acinzentadas pontilhadas indicam as regiões de ressonância entre as ilhas de $3/4$, $2/3$ e $1/2$. As frequências obtidas por meio da diferença do intervalo para cada ponto indica frequências próximas. Isso é causado pelo fato da escolha da condição inicial não estar exatamente na condição periódica, o que se mostrou nada trivial em tais sistemas. Nestes casos haverá um desvio associado a frequência das ilhas, as quais serão proporcionais a parâmetros do sistema como μ e ordem de ressonância e são esperados conforme já discutido. Foram observados as seguintes frequências entre as ilhas: a frequência em cor verde próximo a 0.74 indica a ressonância orbital $1/-3$ com frequências entre as ilhas próximas de $3/4$, a qual pode ser obtida pela relação descrita acima por $q = Q$ e $p = P - q$, sendo $3/4$, $Q = q = 3$ e $P = 4$, isso implica que $p = 1$ e portanto a ressonância orbital é $p/q = 1/3$. De forma semelhante, para os demais casos podemos obter as ressonâncias orbitais $1/-1$ e $1/-2$ a partir das frequências entre as ilhas $1/2$ e $2/3$ respectivamente. A linha vermelha, próxima a 0.5, indica uma ressonância ($2/-3$) a qual não foi possível identificar por este método que, por sua vez, está relacionada as frequências com maiores desvios apresentados na tabela 5.2, iremos discutir esse caso não identificado logo a frente.

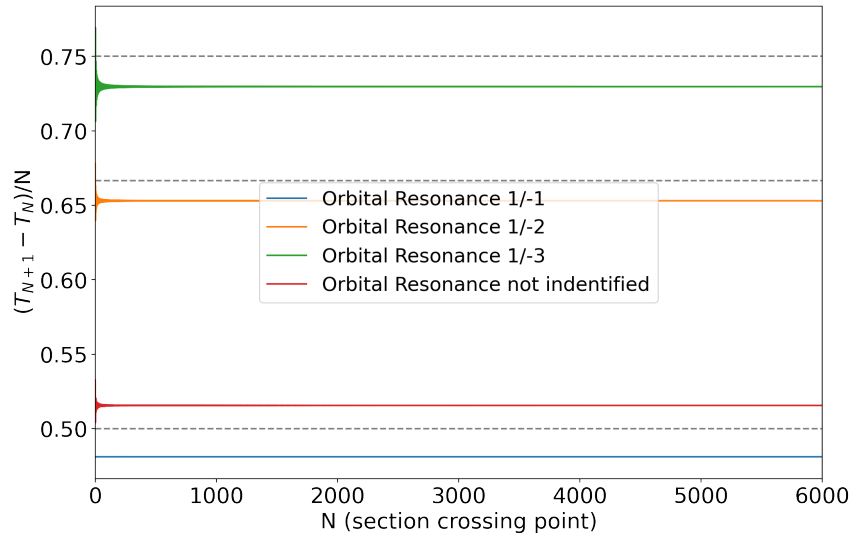


Figura 5.4: Plot do intervalo entre cruzamentos na seção de poincaré dividido pelo número de órbitas/períodos. As linhas cinzas apresentam as frequências fixas de cruzamento e as cores: verde, laranja e azul estão associadas as ressonâncias orbitais retrógradas 1/3, 1/2 e 1/1 respectivamente. A linha vermelha indica uma ressonância, a qual não foi possível identificar através das frequências

Neste caso é válido estabelecer a regra associada ao número total de ilhas descrita pelo autor Murray [25], com a ressalva de ser uma ressonância orbital retrógrada, o que implica que tal ressonância será descrita da seguinte forma: $p + q = k_i$, sendo k o número total de ilhas associadas no espaço de fase.

A tabela 5.3 apresenta as ressonâncias identificadas utilizando o tempo de conjunção relacionado com o número total de ilhas do espaço de fase. Contudo, existe um tipo de ressonância que é observada continuamente no espaço de fase para os valores de $\mu = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ totalizando 5 ilhas apresentando uma órbita externa com o maior desvio observado, a qual se trata de uma ressonância 2/-3. Tal ressonância será discutida com mais detalhes no decorrer do texto. É notório que tanto os resultados apresentados pela FFT na Tabela 5.2 quanto os apresentados na Tabela 5.3 demonstraram convergência, porém, em geral, a FFT não permite obter as frequências exatas/quasi-exatas em todos casos.

Na Figura 5.3b para $C = -1.8$ e $\dot{y} > 0$ é possível identificar a ressonância orbital 1/-2 pelas duas ilhas em $\dot{x} \approx \pm 0.16$, $x \approx -1.10$ em conjunto a ilha localizada em

Tabela 5.3: Tabela referente a identificação de ressonâncias orbitais por meio do tempo de conjunção (frequência entre as ilhas). A primeira, segunda e terceira colunas indicam o conjunto de ilhas para cada ressonância, o tempo de conjunção (frequência da seção) e o total de ilhas (k) associadas. A quarta e quinta colunas apresentam a ressonância orbital e massa do binário, por fim a última coluna indica qual os resultados estão ilustrados.

f	$T_{conjuno}$	Total de Ilhas (k)	Período da órbita periódica ($1/(kT_{conjuno})$)	μ	Figura
f_1	2/3	3	1/-2	0.05	5.2a
f_2	1/2	5	?	0.05	5.2a
f_3	1/2	2	1/-1	0.1	5.3a
f_4	2/3	3	1/-2	0.1	5.3b
f_5	1/2	2	1/-1	0.2	5.8a
f_6	1/2	5	?	0.2	5.9
f_7	2/3	3	1/-2	0.2	5.8b
f_8	1/2	5	?	0.3	5.12a
f_9	2/3	3	1/-2	0.3	5.12b
f_{10}	3/4	4	1/-3	0.3	5.13a
f_{11}	3/4	4	1/-3	0.4	5.14a

$\dot{x} = 0$ e $x \approx -1.50$. Já a ilha singular em $x \approx -1.5$ e $\dot{x} = 0$ associada a órbita circular. Nos casos citados as ressonâncias orbitais possuem libração de $\phi^* = \pi$. Esta ressonância em geral trata-se de um caso especial de ressonâncias de ordem 3, onde observa-se uma bifurcação relacionada ao tipo parabólica, surgindo de uma ilha ressonante 1/1 (ponto elíptico) e separando em uma ressonância 2/3 por pontos hiperbólicos na borda da ilha formada [8]. Este fenômeno está presente em todos os valores de μ , estudados porém para valores da massa do binário iguais ou superiores a 0.4 tal fenômeno surge em cerca $C = 2.0$.

Para $\mu = 0.1$ as ressonâncias orbitais 1/-1 estão presentes nas seções para os valores de $C = 0$ até $C = -1.2$, já as ressonâncias orbitais 1/-2 começam a existir nos valores de $C = -1.6$ até $C = -1.8$. Nos casos de $C = -1.9$ e $C = -2.0$ foi possível observar ressonâncias do tipo 1/-3 com libração $\phi^* = \pi$, a ressonância orbital 1/-4 foi observada para $C = -1.3$ librando em π .

A Figura 5.5a apresenta os elementos orbitais para a ressonância 1/-1 observada na seção de $C = -1.2$ para $\mu = 0.1$. É observado que o ângulo ressonante coorbital neste caso possui um comportamento periódico de libração em 180 e cir-

culação, é de verificar que o período de circulação está associado aos momentos que o semieixo está mais próximo ao par binário, o que poderia tornar aproximação dos elementos orbitais inválidos neste caso, explicando tal circulação. A transformação das condições iniciais dos elementos orbitais indica que o semieixo maior está desviado em 0.16 do esperado, já que pela terceira lei de Kepler para $\mu \ll 0.1$, tal configuração deveria ser observada em $a_{prev} \approx 1$.

Já na Figura 5.5b, é verificado que o ângulo referente a ressonância 1/-2 libra em 180 para a condição inicial $x_0 = 2.03$ na seção $C = -1.8$ sem óbvios efeitos perturbativos na aproximação de dois corpos. Também é verificado que a condição inicial em elementos orbitais está relativamente próximos do previsto para a ressonância 1/-2 ($a_{prev} \approx 1.59$). Existem variações periódicas no ângulo ressonante ocasionando amplitudes próximas a 80 graus, sendo possíveis efeitos causados pelo elevado valor da massa do binário.

Em ambos casos é possível verificar que os elementos orbitais não retornam resultados esperados já que os ângulos ressonantes possuem librações em mais de um dos ângulos, mesmo que a órbita indique um shape de ressonância orbital do tipo 1/-2, por exemplo.

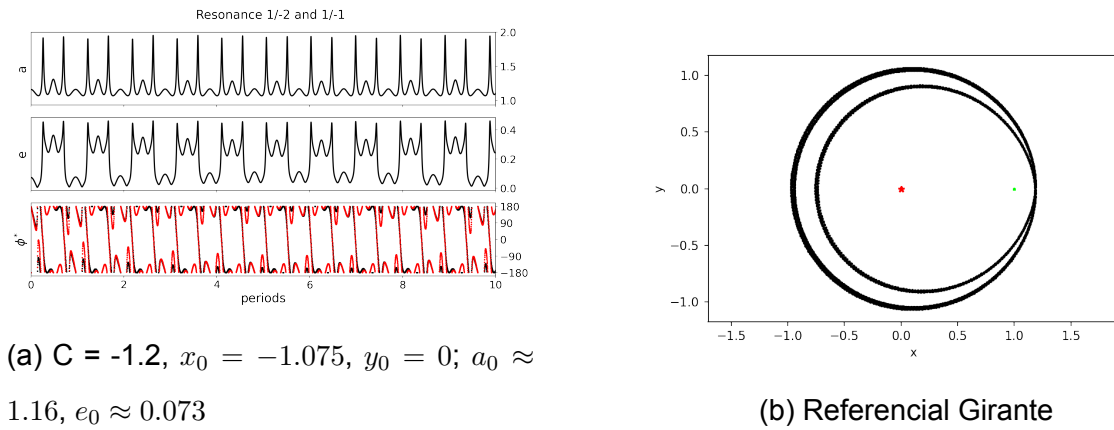
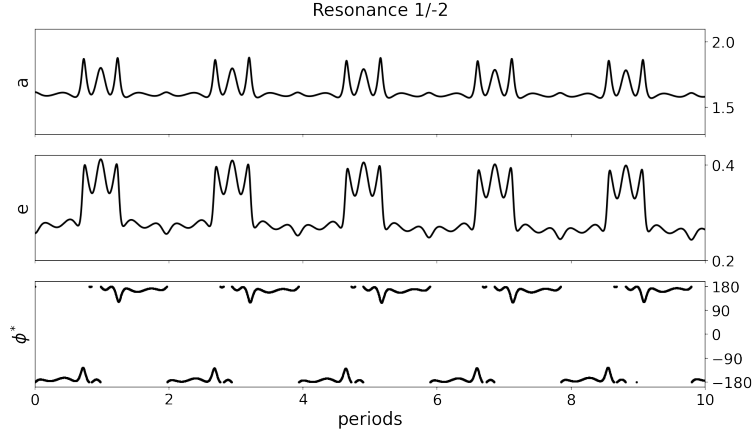


Figura 5.5: Análise dos elementos orbitais em função dos períodos para $\mu = 0.1$. Gráfico referente ao semieixo maior, excentricidade e ângulos ressonantes em função do tempo; a) Ângulos ressonantes 1/-1 em preto e 1/-2 em vermelho observada na seção $C=-1.8$; b) Referencial girante da orbita apresentada em (a); ambos casos possuem librações em 180, contudo a amplitude da 1/-1 é menor que a 1/-2. As condições iniciais estão descritas em cada caso em suas legendas.



(a) $C = -1.8$, $x_0 = 2.03$, $y_0 = 0$; $a_0 \approx 1.615$, $e_0 \approx 0.2507$

Figura 5.6: Análise dos elementos orbitais em função dos períodos para $\mu = 0.1$. Gráfico referente ao semieixo maior, excentricidade e ângulo ressonante 1/-2 em função do tempo; a) Ângulo ressonante 1/-2 observada na seção $C=-1.8$. As condições iniciais estão descritas em cada caso em suas legendas.

No caso das ressonâncias coorbitais podemos utilizar a relação de cruzamento da seção $\dot{y} > 0$ ou $\dot{y} < 0$ para identificar a libração da ressonância. A ressonância 1/-1 é representada no espaço de fase da superfície como duas ilhas, se caso $\dot{y} > 0$ e ambas ilhas estarem simétricas em $\dot{x} = 0$. Isso implica que se trata de uma ressonância com libração em $\phi^* = \pi$ caso elas sejam simétricas, mas para $\dot{x} \neq 0$ sua libração é em $\phi^* = 0$. O contrário ocorre para $\dot{y} < 0$, caso as ilhas estejam em $\dot{x} = 0$ elas serão de libração $\phi^* = 0$, se elas estiverem dispostas em $\dot{x} \neq 0$ serão do tipo libração $\phi^* = \pi$. Essa análise foi observada de forma empírica para todas as ressonâncias do tipo coorbital existentes na investigação desse espaço de fase.

Nem sempre é possível utilizar os elementos orbitais para observar o comportamento do ângulo ressonante de forma semelhante, como é realizado para casos onde μ é de ordem 0.01. Os encontros próximos com o binário causam variações não desejadas pois o problema se torna perturbado e aproximações de dois corpos são inválidas em certos momentos. Portanto, em casos que tal fator ocorre, o tipo de libração deve ser comparado com órbitas de casos onde a massa do binário é pequena, como, por exemplo, $\mu = 0.001$. O sentido do "laço" que as ressonâncias 1/-1, 1/-2 descrevem permite verificar qual seu tipo de libração, onde caso o "laço" seja no sentido a esquerda ele é referente a uma órbita com libração $\phi = 0$, já

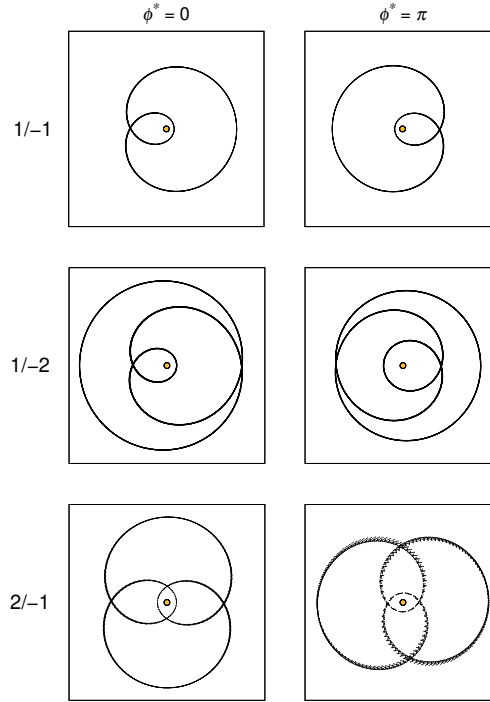


Figura 5.7: Orbitas no referencial sinódico respectivamente: 1/-1, 1/-2 e -2/1 nas configurações $\phi^* = 0$ e π

para a direita é de libração $\phi = \pi$. Para as ressonâncias 2/-1 é necessário verificar o sentido entre 'laços', podendo ocorrer tanto na vertical ($\phi^* = \pi$) quanto na horizontal ($\phi^* = 0$), conforme pode ser observado na Figura 5.7, a qual descreve tais órbitas em casos periódicos. Este comportamento tende a se estender de acordo com a ordem de ressonância, logo uma ressonância externa, como por exemplo a 2/-3, terá um shape orbital similar a ressonância 1/-2, porém com mais 'laços' e o mesmo ocorre para os casos de ressonâncias internas como 3/-2, a qual terá um shape semelhante a 2/-1 alterando somente a quantidade de 'laços' entrelaçados.

A Figura 5.8 indica as seções de Poincaré onde a massa do binário assume o valor de $\mu = 0.2$. Para o caso onde $C = -1.2$ e $\dot{y} > 0$, reportado na Figura 5.8a, foi observado somente uma ressonância próxima a coorbital referente ao centro das duas ilhas existentes nesse espaço de fase. A frequência obtida da órbita é de $f_5 \approx 1.11$, o que indicaria uma ressonância orbital 10/-9, porém isso só poderia ocorrer se fossem observadas ao menos 19 ilhas no espaço de fase, ou caso seja uma órbita quase periódica, as ilhas estão dispostas nas condições iniciais de $x \approx -1.15$

e $x \approx -0.65$ para $\dot{x} = 0$, descrevendo uma libração do tipo $\phi^* = \pi$ com órbita similar ao caso 1/-1 para $\mu = 0.1$.

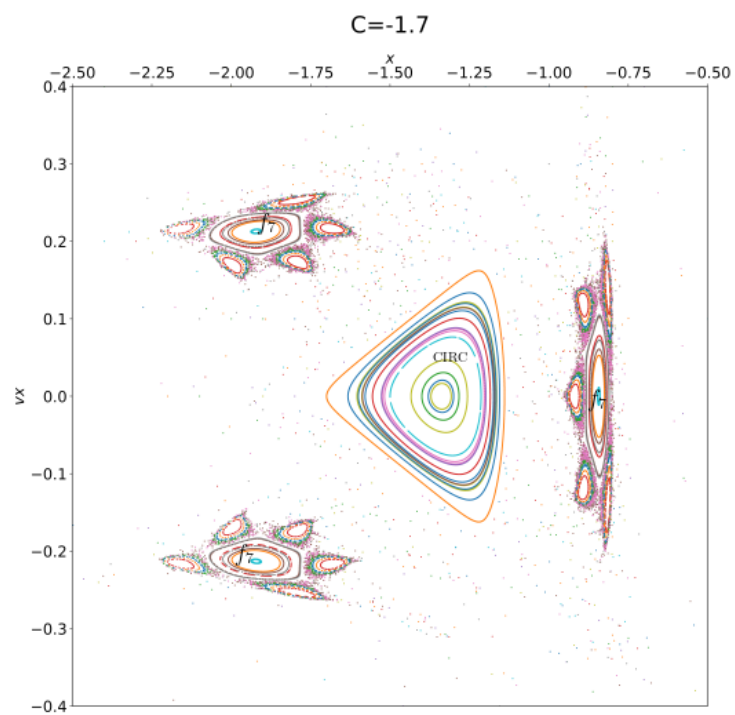
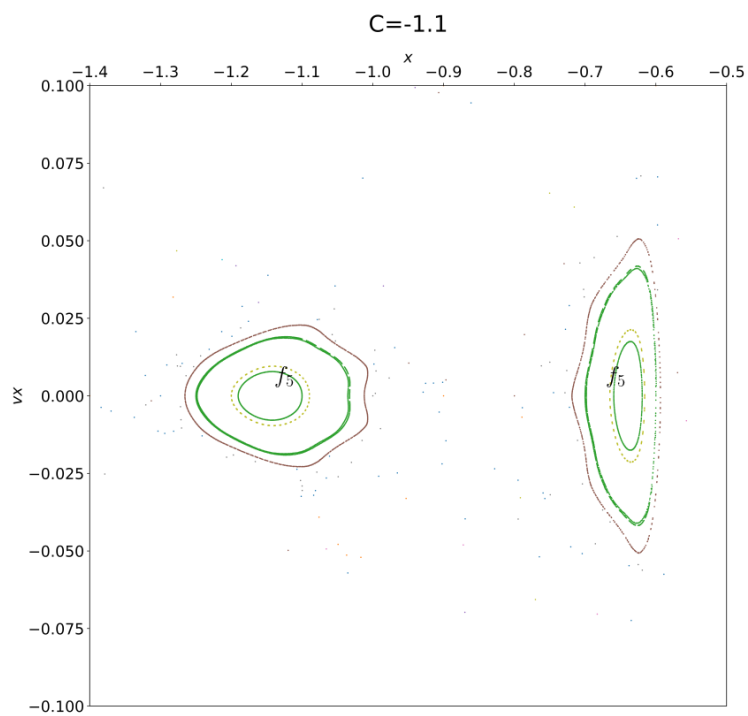


Figura 5.8: Seções de Poincaré para $\mu = 0.2$.

De forma similar apresentado na figura 5.8b, para $C = -1.7$ e $\dot{y} > 0$ é observado a ilha referente a órbita circular em $y = 0$ e $x \approx 1.37$, as duas ilhas observadas em $\dot{x} \approx \pm 0.21$ e $x \approx -1.95$ em conjunto com a localizada em $\dot{x} = 0$ e $x \approx -0.94$ são referentes a uma ressonância próxima do tipo 1/-2, com frequência $f_7 \approx 0.51$, a qual descreve ilhas de ressonâncias 1/3 que por sua vez é 1/-2 orbital pela regra da conjunção citada anteriormente. As ilhas dispostas em torno da ressonância orbital 1/-2 descrevem um total de 15 ilhas as quais são uma ressonância do tipo externa sendo que não foi possível identifica-la, devido a efeitos semelhantes aos discutidos na Figura 5.4, os quais serão abordados com mais detalhes a seguir.

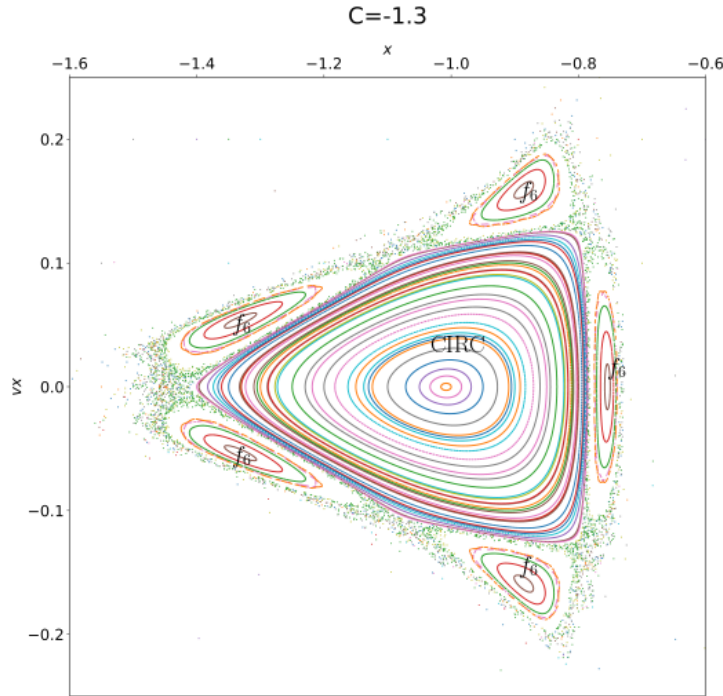


Figura 5.9: Seções de Poincaré para $\mu = 0.2$ para $C = -1.3$.

No caso onde $C = -1.3$ e $\dot{y} > 0$ foram identificadas cinco ilhas referentes que possivelmente indicariam uma ressonância orbital do tipo 2/-3 ou 1/-4, porém a frequência obtida neste e em casos similares é de aproximadamente 0.8 o que indica uma ressonância com frequência próxima a 2/-3, sendo que sua órbita é semelhante a uma ressonância 2/-3. Uma análise para massas do binário inferior demonstrou que essa família surge em $\mu = 0.02$ como consequência de uma bifurcação da órbita circular em conjunto com uma família de ressonância de mesmo tipo para excentri-

idades maiores, sendo que esta família existe nos valores limites de $C = -1.3$ a $C = -1.35$ até o limite de $\mu = 0.3$.

O semieixo maior desta órbita possui variações causados pela perturbação do sistema, não permitindo verificar seu comportamento ao longo do tempo, mesmo que para períodos curtos. Porém o total de ilhas não é 9. Esta ressonância também está presente para $C = -1.4$ com libração do tipo $\phi^* = \pi$, tal família surge para valores da massa do binário de 0.02 em $C = -1.3$ até a massa do binário de 0.3. A frequência obtida neste caso é de $f_6 = 0.7954$. A Figura 5.10 apresenta a órbita no referencial girante, contudo vale ressaltar que estes casos se tornam nada triviais e achar pontos que indicam órbitas periódicas torna-se uma tarefa complicada, portanto assumimos que nesse caso a órbita está muito próxima de ser periódica e que desvios na órbita/frequência podem ser causadas por tal motivo.

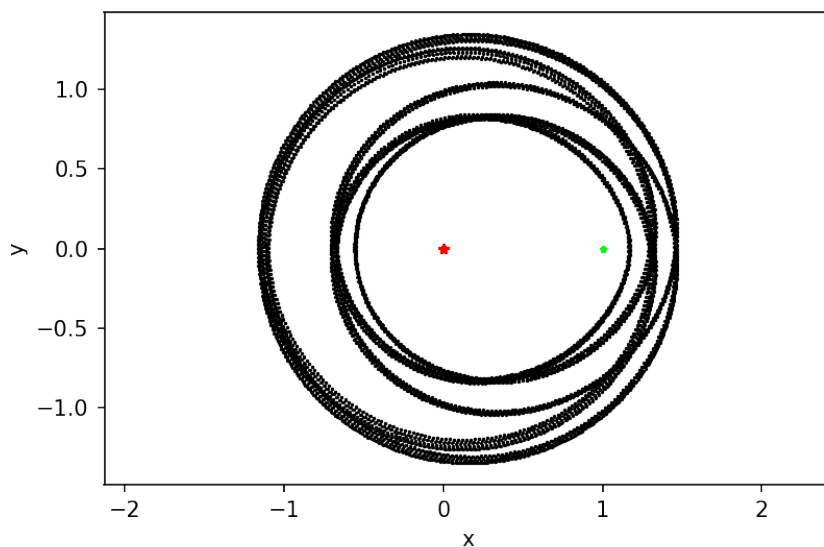


Figura 5.10: Órbita no referencial girante para $C=-1.3$, $x_0 = -0.76$ e $\mu = 0.2$. Essa órbita tem o comportamento similar ao caso de uma ressonância orbital 2/-3.

A Figura 5.11 apresenta a órbita citada anteriormente no referencial inercial. Observa-se que tal órbita aparenta ter uma configuração de ressonância dependente de ambas estrelas, podendo ser ressonantes com as estrelas em momentos diferentes de sua órbita. Uma das possíveis configurações no espaço de fase de ressonância entre as ilhas são três cadeias de ressonância 1/2, o qual explicaria a

frequência entre os intervalos obtidos neste caso, que é aproximada de 0.5. Contudo não foi possível explicar o motivo da frequência orbital f_6 estar próxima de 0.8, o que implicaria em uma ressonância 4/-5.

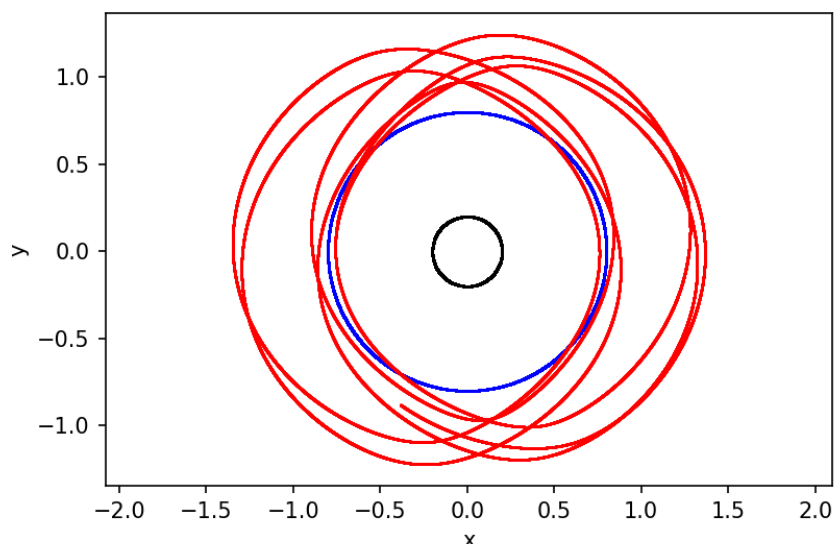
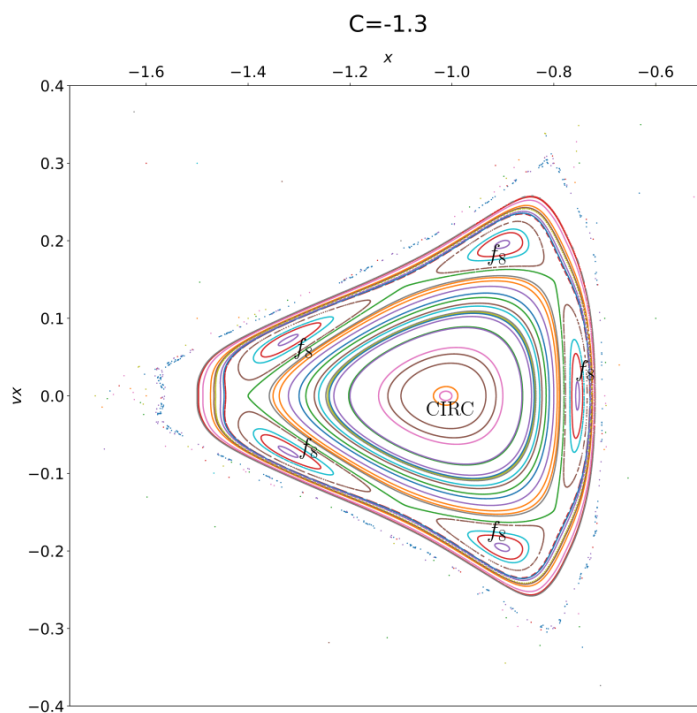
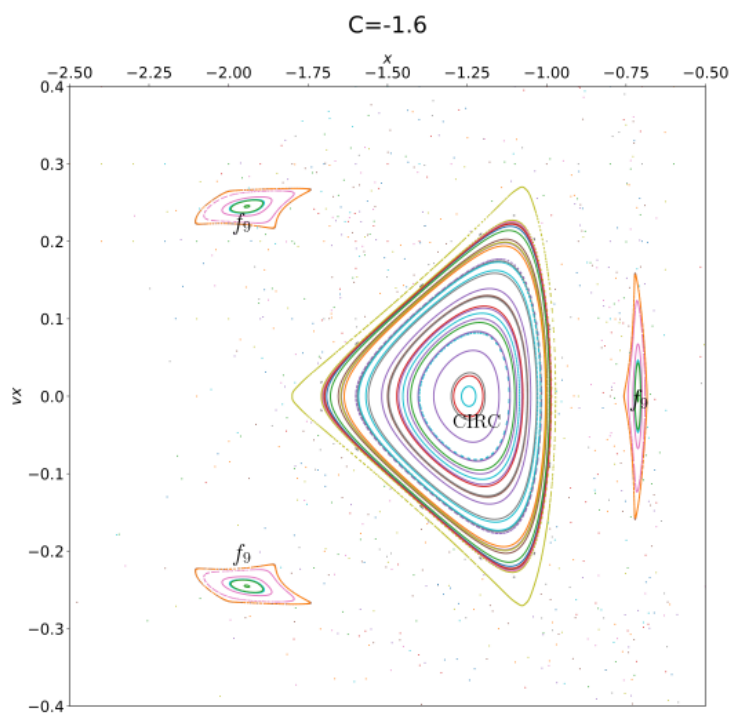


Figura 5.11: Órbita no referencial inercial para $C=-1.3$, $x_0 = -0.76$ e $\mu = 0.2$. As órbitas internas circulares são o par binário estrela-estrela, já a órbita em cor vermelha é a partícula teste.

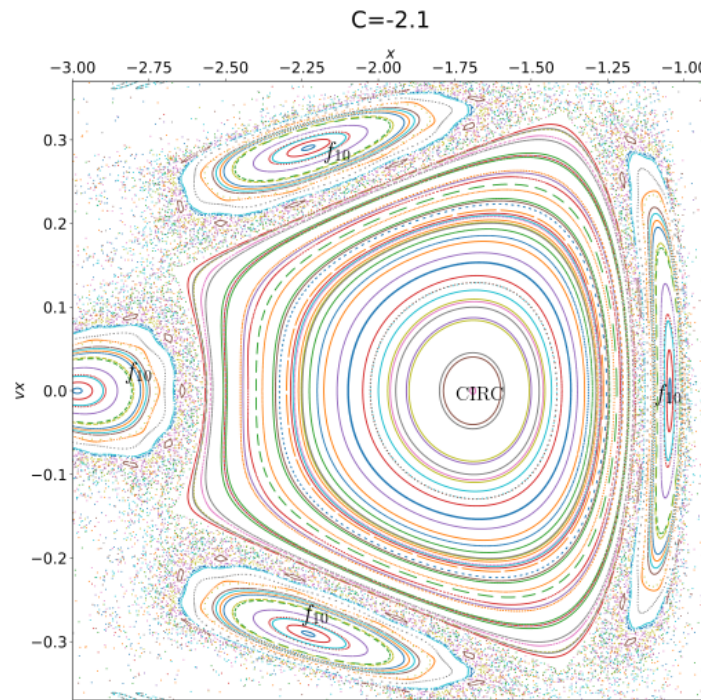
Para $\mu = 0.2$, a ressonância orbital 1/-2 foram observadas para $C = -1.6$ até $C = -1.8$ com libração em $\phi^* = \pi$, em $C = -1.9$ até $C = -2.4$ foi observado ressonâncias orbitais do tipo 1/-3 razoavelmente exatas. Para as constantes de Jacobi de $C = -1.0$ e $C = -1.1$ foi verificado que não existem órbitas circulares e foram observadas ressonâncias coorbitais em pequenas ilhas, implicando que sua existência é limitada a uma pequena região com condições iniciais equivalentes a $a_0 \approx 1.075$ e $e_0 \approx 0.11$. Também observamos 7 ilhas que formam uma ressonância orbital do tipo 3/-4 em $C = -1.2$, já em $C = -1.4$ observamos 8 ilhas que correspondem a uma ressonância 3/-5, sendo estas identificadas a partir da contagem total de ilhas em conjunto com frequência entre os períodos observados.

A Figura 5.12 apresenta alguns casos de seções de Poincaré para a massa da binária estelar assumindo o valor de $\mu = 0.3$. No primeiro cenário, onde $C = -1.3$ reportado na Figura 5.12a foi observado dentro da estrutura que envolve as ilhas,

um centro que se trata de uma órbita circular, uma órbita referente as cinco ilhas é observada na parte interna, similar ao caso de $\mu = 0.2$ e $\mu = 0.1$, a frequência f_8 é próximo a 0.8, portanto assume-se a configuração é a mesma já que suas órbitas são similares.

(a) $C = -1.3, \dot{y} > 0$ (b) $C = -1.6, \dot{y} > 0$ Figura 5.12: Seções de Poincaré para $\mu = 0.3$.

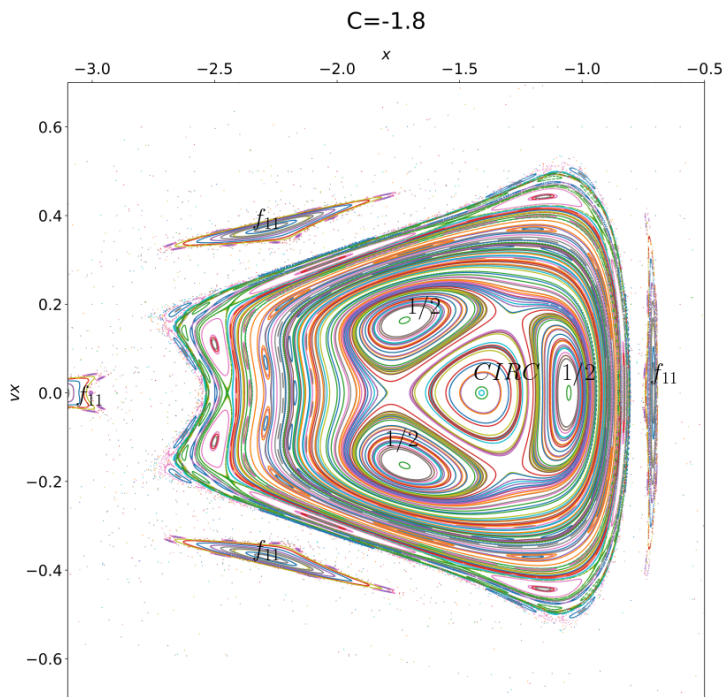
Já para $C = -1.6$ ilustrado na Figura 5.12b é possível observar uma ressonância próxima a 1/2 de libração em $\phi^* = \pi$. Para $\mu = 0.3$ não foram observadas ressonâncias coorbitais, as ilhas apresentadas por f_8 são observadas nas seções onde $C = -1.3$ e $C = -1.4$, as ressonâncias orbitais próximas de 1/2 estão presentes nas seções $C = -1.5$ até $C = -1.9$. A ressonância orbital 1/3 foi observada nas seções $C = -2.0$ a $C = -2.4$, conforme pode ser observado na Figura 5.13 para $C = -2.1$ indicando a frequência orbital associada a f_{10} . A ressonância 3/5 observada para $\mu = 0.2$ também aparece em $\mu = 0.3$ para $C = -1.4$



(a) $C = -2.1$, $\dot{y} > 0$;

Figura 5.13: Seções de Poincaré para $\mu = 0.3$.

A Figura 5.14 apresenta a ressonância orbital do tipo 1/3, sendo que esta também está presente para $C = -1.8$ a $C = -2.4$ com libração do tipo $\phi^* = 0$. A ressonância orbital 1/2 foi observado somente em $C = -1.8$. A ressonância orbital 2/5 está presente para $C = -1.8$.

(a) $C = -1.8$, $\dot{y} > 0$;Figura 5.14: Seções de Poincaré para $\mu = 0.4$.

Para $\mu = 0.5$ o limite dos valores adotados para o espaço de parâmetros não é suficiente para observar ressonâncias com o centro de massa do circumbinário. Para isso seria necessário aumentar o limite do valor de x , bem como a constante de Jacobi.

Dentre todas as ilhas ressonantes observadas nas seções de Poincaré, somente dois casos referentes a ressonâncias próximas a coorbitais e dois casos para $1/3$ libraram ϕ^* em torno 0, todas as demais ressonâncias próximas/exatas observadas possuem librações do tipo $\phi^* = \pi$ para $\mu \geq 0.1$. Portanto, órbitas com esse tipo de libração em órbitas retrógradas são dominantes no espaço de fase em casos de binários estelares.

Uma análise em seções de $\mu = 0.01$ e 0.05 demonstrou a existência de ressonâncias com libração em $\phi^* = 0$, sendo estas : $1/-1$, $1/-2$, $1/-3$, $2/-3$. O possível motivo de ressonâncias do tipo de libração em π não estarem presentes com frequência em sistemas binários é que a configuração inicial neste casos não é suficientemente estável devido a posição relativa com o par binário, que nestes caso, além de ser

massivo e perturbador, estará próximo o suficiente para destruir a estabilidade, logo, um motivo razoável para que somente os casos onde a libração é π de ordem ímpar existam em geral, é que nessas situações a partícula teste e o terceiro corpo estão anti alinhados permitindo assim sua estabilidade em tal região.

Conforme citado anteriormente, existe uma perturbação da órbita que pode ser observada nos elementos orbitais em casos onde o movimento se comporta como uma órbita elíptica kepleriana ao longo de curtos períodos. Analisar os elementos orbitais em ressonâncias desse tipo pode, ou não, apresentar informações que sejam interessantes de ser analisadas, contudo estes resultados são relativos, sendo dependentes dos seguintes fatores: ordem da ressonância, da massa do binário μ e sua órbita.

As Figuras a seguir apresentam as frequências obtidas para alguns casos de ressonância discutidos até o momento, considerando os valores de massa do binário $\mu = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ e 0.4 apresentados nas figuras 5.15, 5.16, 5.17, 5.18 e 5.19 respectivamente. As linhas vermelhas verticais opacas são referências para as configurações ressonantes 1/-3, 1/-2, 2/-3 e 1/-1. Os valores das frequências estão apresentados em uma janela nos gráficos para cada curva e na tabela 5.2. A legenda das figuras apresenta quais são as ressonâncias. Os picos de maior intensidade nos gráficos demonstram a frequência dominante no sistema, e os picos múltiplos destes com intensidade menor descrevem os harmônicos.

A Tabela 5.2 apresenta os resultados das frequências obtidas se comparados com as esperadas. Não é possível afirmar se o desvio observado é causado por μ ou pela órbita ser ou não mais próxima do par binário. Na ressonância 1/-2 e 1/-3 os desvios são na ordem $\Delta f = 0.0086 - 0.014$ para os valores de $\mu = 0.3$ e 0.4 , o que implica uma proporcionalidade com μ . Contudo outros aspectos devem ser considerados para concluir o efeito de μ no desvio da frequência observada, sendo o mais importante deles a distância da órbita ao sistema binário, o que irá afetar significativamente a dinâmica da partícula.

No que diz respeito a permanência das ressonâncias no espaço de fase, a medida que a massa do binário aumenta é evidente que o espaço de fase irá sofrer alterações, principalmente relacionadas as órbitas estáveis e/ou ressonâncias, portanto conforme a massa do binário varia ressonâncias podem ser deslocadas para

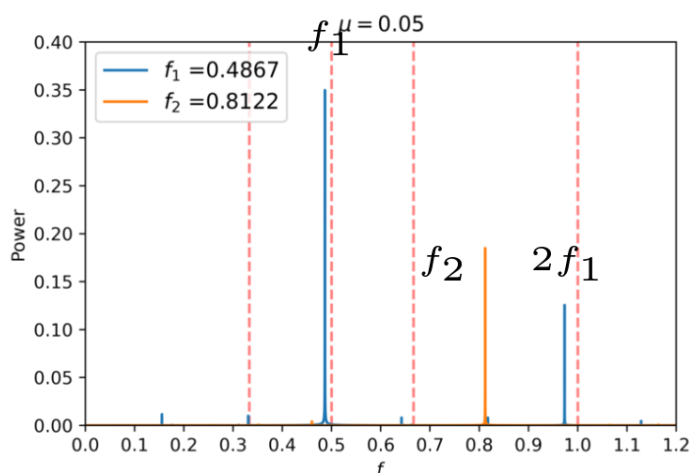


Figura 5.15: Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.05$. Onde f_1 e f_2 são os valores de frequência associados aos picos mais intensos do gráfico separados por cor, sendo os picos menos intensos referentes aos harmônicos.

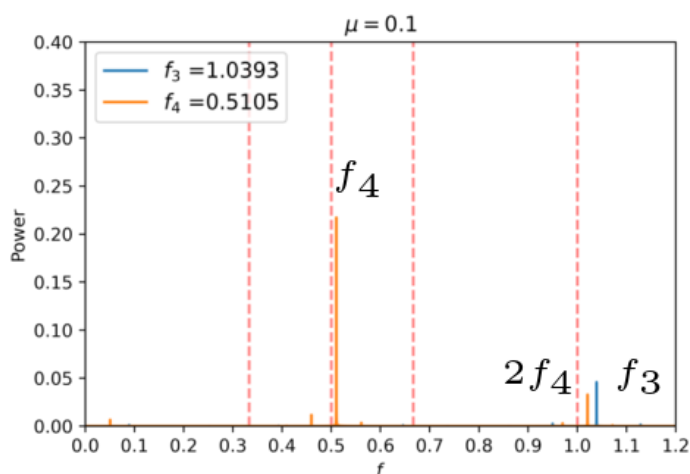


Figura 5.16: Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.1$. Onde f_3 e f_4 são os valores de frequência associados aos picos mais intensos do gráfico separados por cor, sendo os picos menos intensos referentes aos harmônicos.

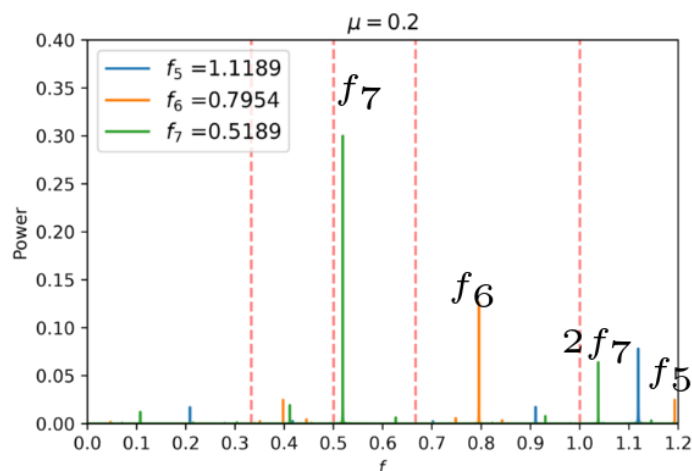


Figura 5.17: Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.2$. Onde f_5 , f_6 e f_7 são os valores de frequência associados aos picos mais intensos do gráfico separados por cor, sendo os picos menos intensos referentes aos harmônicos.

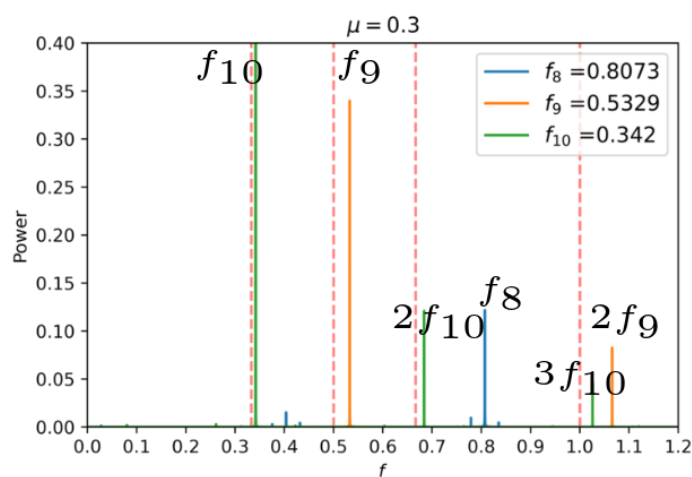


Figura 5.18: Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.3$. Onde f_8 , f_9 e f_{10} são os valores de frequência associados aos picos mais intensos do gráfico separados por cor, sendo os picos menos intensos referentes aos harmônicos.

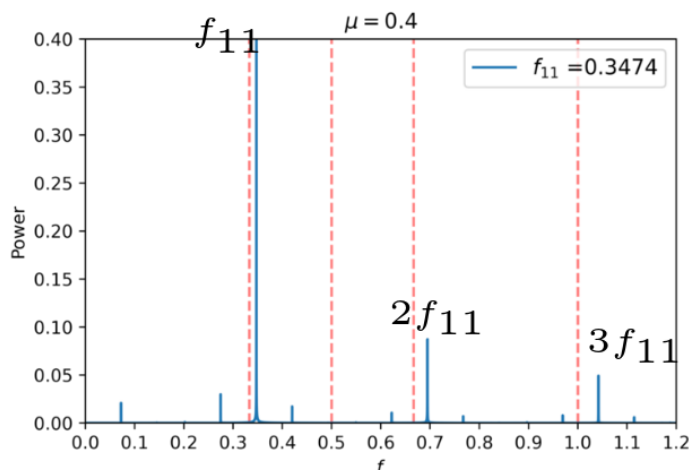


Figura 5.19: Espectro de Ressonâncias para $\mu = 0.4$. Onde f_{11} é o valor de frequência associado ao picos mais intensos do gráfico, sendo os picos menos intensos referentes aos harmônicos.

diferentes valores de energia ou sofrer bifurcações. Neste sentido observamos que as ressonâncias coorbitais (1/-1) existem até o limite de $\mu = 0.3$, sendo que neste valor de massa do binário sua existência está limitada a pequenas ilhas no espaço de fase, possuindo soluções muito próximas de periódicas. A ressonância 1/-2 e 1/-3 foi observada até o valor limite de massa do binário de $\mu = 0.4$. A ressonância 3/-5 foi verificada somente para $\mu = 0.2$ e $\mu = 0.3$. Já a ressonância 3/-4 foi obtida somente para $\mu = 0.2$.

6 Estabilidade do problema geral de três corpos retrógrado planar

Neste capítulo estudamos o problema geral de três corpos retrógrado planar bem como regiões de ressonância em diferentes configurações iniciais, sendo estas relacionadas aos ângulos ressonantes críticos ou de variação de massas. Contudo, a fim de buscar possíveis soluções existentes no universo, assumimos órbitas que estão muito próximas ao plano, ou seja, com inclinação $inc = 180$, porém assumindo erros na ordem de 10^{-16} excluindo soluções exclusivas do plano, já que no universo observável soluções planares são praticamente impossíveis.

Para melhor entendimento dos dados apresentados é importante ressaltar que as variáveis com o índice p são referentes ao planeta do sistema principal (*i.e* Júpiter no sistema Sol-Júpiter), e as unidades estão normalizadas em massas solares e unidades astronômicas considerando o sistema binário com 1 AU de distância. No estudo de estabilidade do problema planar retrógrado elíptico e circular, mapas de estabilidade de semieixo maior e excentricidade foram construídos. Nesse sentido, analisamos a estabilidade das órbitas elípticas e circulares variando a excentricidade do planeta e_p de 0 a 1. O parâmetro μ do sistema binário foi fixado em 0.001. Três regiões de ressonância foram exploradas, sendo elas 1/-1, 2/-1 e 1/-2.

As regiões foram estudadas fixando o valor do ângulo ressonante inicial ϕ^* como 0 ou π , sendo que o ângulo ressonante inicial retrógrado planar no caso restrito é dado por $\phi^* = -q\lambda^* - p\lambda_p^* + (p+q)\varpi^*$, onde λ e λ_p são as longitudes médias da partícula teste/planeta e do planeta binário respectivamente e ϖ é definido por longitude do pericentro. Deve-se também levar em consideração os ângulos ressonantes do problema de três corpos. Estes ângulos serão apresentados nas figuras obtidas

e serão definidos a partir da redefinição da órbita retrógrada utilizada para o caso restrito, conforme abordado em 3.3.

Para uma análise completa do espaço de fase, também foram construídos dois tipos de figuras referentes a estabilidade das ressonâncias. A primeira referente a variação da excentricidade de ambos corpos (planeta binário e terceiro corpo) fixando o semieixo maior na exata localização da ressonância, a qual foi determinada a partir da terceira lei de Kepler nas unidades normalizadas, ou seja, para a ressonância 1/-1: $a_{1/1} = 1$, já para ressonância 1/-2: $a_{1/2} = 1.59$ e para a ressonância 2/-1: $a_{2/1} = 0.63$. A partir disto, os mapas foram construídos variando a excentricidade do planeta e_p , e a excentricidade e do terceiro corpo em um grid de 40 por 40. Esses gráficos permitem ter uma ideia geral do espaço de fase das ressonâncias desses corpos. Sendo estes realizados iterados numericamente por 200 mil períodos da binária.

Os gráficos para as regiões de variação do semieixo maior das ressonâncias 1/-1, 2/-1 e 1/-2 foram construídos com 840 pontos, assumindo a variação em torno do raio de Hill(R_H). Nos três casos o eixo y (excentricidade) possui 21 pontos, variando de 0 a 1 em passos de 0.05. Para a ressonância 1/-2 o eixo x foi variado de $a = 1.59 \pm 0.2R_H$ em passos de $0.01R_H$ gerando 40 pontos. Já para a ressonância 2/-1 o eixo x foi variado de $a = 0.63 \pm 0.3R_H$ em passos de $0.01R_H$ considerando 40 pontos nessa região. A ressonância 1/-1 foi construída com a variação do semieixo maior em torno de $a = 1.0 \pm 0.2$ considerando 40 pontos no espaçamento total. Nestes mapas as equações de movimento foram integradas numericamente durante 50 mil períodos orbitais da binária, contudo, casos pontuais os quais não apresentaram convergência e/ou resolução suficientes foram refeitos para 200 mil períodos em um grid de resolução maior com 1600 pontos, tais ocasiões serão citadas com mais detalhes quando apresentadas nas regiões 1/-2 e 1/-1

Os centros de ressonância obtidos a partir da menor variação da amplitude dos ângulos ressonantes, as quais são referentes as ressonâncias citadas, estão apresentados em dois tipos: $\star$ e $\wedge$, onde estão sobrepostos nos mapas de amplitude do ângulo de ressonância. Caso todos os ângulos ressonantes do problema de três corpos librem com amplitude menor que 90 graus o símbolo $\star$ (estrela) é utilizado para indicar os centros de ressonância (pontos elípticos), caso somente um dos ân-

gulos relacionado ao símbolo $\wedge$ livre sozinho com amplitude menor que 90 graus, tal símbolo será indicado nos mapas de amplitude ressonâncias. Em geral, a barra de cor apresentada nos mapas indicará somente a amplitude da variação do ângulo ressonante do problema restrito, ou seja, ϕ^* , a menos nos casos de librações singulares dos demais ângulos, neste cenário o mapa irá apresentar a amplitude de tal ângulo.

Na determinação das colisões foi adotado o raio da estrela principal e do planeta binário respectivamente como, $R_s = 0.005$ e $R_p = 0.0005$, sendo que a massa do planeta binário é $\mu = 0.001$. Nos sistemas planetários, as massas adotadas para terceiro corpo foram as de Netuno, Saturno e Júpiter normalizados em massas solar, sendo elas respectivamente $m_{jup} = 0.000954$, $m_{sat} = 0.0002857$ e $m_{nep} = 0.00005149$. Como o terceiro corpo neste caso não se trata mais de uma partícula teste, o valor de raio utilizado para as simulações com Júpiter ($m_t = m_{jup}$) foi de $r_{jup} = 0.0005$. Já para os casos de Netuno ($m_t = m_{nep}$) o raio utilizado foi $r_{nep} = 1.8 \cdot 10^{-4}$. Para os casos de ($m_t = m_{sat}$) foi considerado a metade do raio joviano. As linhas de colisão das órbitas estão representadas nos gráficos nas cores laranja e preta.

Também investigamos neste estudo as possíveis configurações de estabilidade, determinadas a partir dos ângulos críticos, as quais estão apresentadas nos mapas deste capítulo. As configurações foram $\phi^* = 0$, $\phi^* = \pi$ para $\Delta\varpi = 0$ e $\Delta\varpi = \pi$, onde $\Delta\varpi = \varpi - \varpi_p$. A partir disso, as regiões de estabilidade e ressonantes foram determinadas.

Os resultados dos sistemas planetários considerando como massa do terceiro corpo a massa de Netuno normalizada ($m_t = m_{nep}$) apresentou ser semelhante ao caso restrito, o que, por consequência, evidenciava que a massa netuniana não é suficiente para perturbar suficientemente o sistema e alterar a estabilidade a ressonância se comparado aos casos restritos. A evolução temporal dos elementos orbitais serão apresentados para alguns cenários. As cores laranja e preto serão referentes ao binário e ao terceiro corpo respectivamente.

6.1 Estabilidade da região coorbital

Os resultados a seguir são referentes a região de ressonância 1/-1. Os dados reportados abaixo são para as configurações críticas de ressonância dadas por $\phi^* = 0$ ou π e $\Delta\varpi^* = 0$ ou π , bem como para razões de massa de ordem de Netuno, Júpiter e Saturno, o qual foi considerado nesta região de ressonância devido Júpiter apresentar pouca estabilidade. As soluções estáveis e ressonantes obtidas numericamente estão apresentadas nos mapas 6.1 para o caso onde $m_t = m_{nep}$ na configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$. Já a figura 6.3 apresenta a evolução dos elementos orbitais com o tempo.

A tabela 6.1 apresenta os resultados sumarizados das ressonâncias na região coorbital, indicando quais massas e quais configurações de ϕ^* e $\Delta\varpi^*$ apresentaram ressonâncias, a libração de todos os ângulos ressonantes ou somente um dos ângulos ressonantes. Devido a redundância alguns resultados não foram apresentados na dissertação, porém, estão disponíveis no apêndice para consulta.

Na ressonância coorbital os ângulos ressonantes estudados são : $\phi^{cr3bp} = -\lambda^* - \lambda' + 2\varpi^*$, $\phi_1^{3bp} = -\lambda^* - \lambda' - 2\varpi'$, $\phi_2^{3bp} = -\lambda^* - \lambda' + \varpi' + \varpi^*$. Definimos como ponto fixo quando todos os ângulos ressonantes apresentados estão librando em torno de um ponto.

Tabela 6.1: Tabela reportando os resultados sumarizados para a região coorbital, indicando quais tipos de ressonância foram observadas nas diferentes configurações estudadas para cada massa considerada.

Massa	ϕ^*	$\Delta\varpi^*$	Ressonância	Figura
NETUNO	0	0	Ponto Fixo	6.1a,6.3a
NETUNO	0	π	CR3BP	6.1b,6.3b
NETUNO	π	0	CR3BP	Não apresentado
SATURNO	π	0	Ponto Fixo	6.4,6.6
JÚPITER	π	0	Ponto Fixo	6.7,6.9

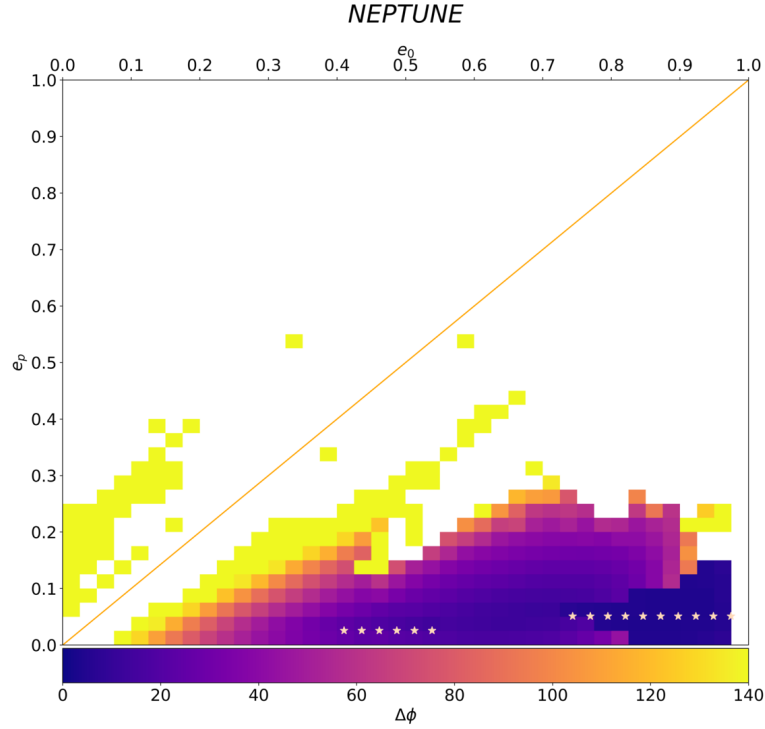
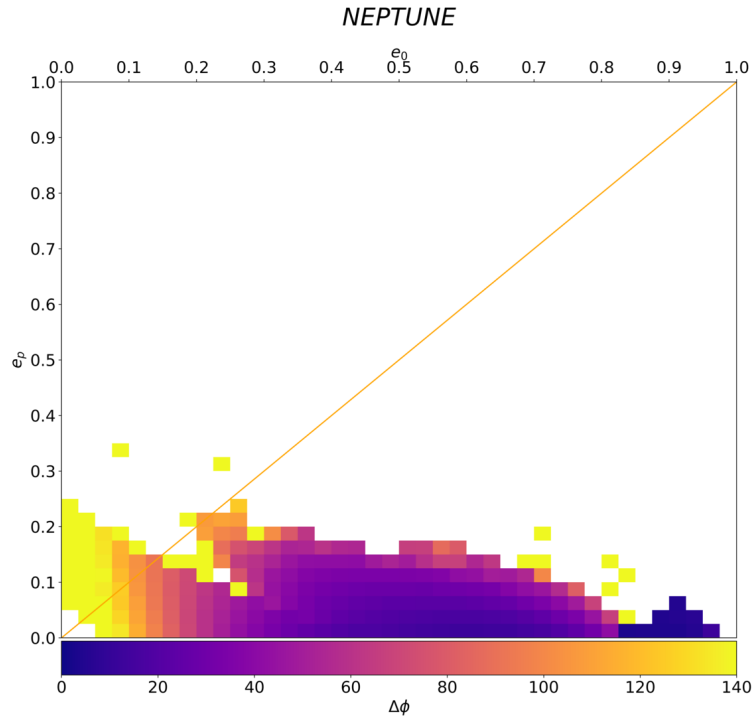
(a) Configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = 0$.(b) Configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = \pi$.

Figura 6.1: Mapas de estabilidade/ressonante da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito. Os pontos sobrepostos nas Figuras informam as regiões onde existem librações menores que 90 graus em todos os ângulos ressonantes.

Conforme é possível observar nas Figuras 6.1a e 6.1b, os resultados estão dispostos em função de uma barra que descreve a amplitude do ângulo ressonante ϕ^* , sendo a região escura de cor roxa/azul o equivalente ao centro de ressonância do sistema, ou seja, soluções periódicas. A amplitude está definida em função do valor absoluto da variação em torno de $[-\pi, \pi]$, o que implica que valores superiores a 110 são equivalente a órbitas que estão demasiadamente longe do centros de ressonância podendo ser órbitas onde os ângulos ressonantes circulam. Nestes, e, nos demais gráficos de excentricidade por excentricidade a seguir, as órbitas caóticas foram descartadas de modo a indicar somente a existência de órbitas que não possuem tal comportamento até o momento. O eixo y (e_p) apresenta a excentricidade do planeta binário e o eixo x (e_0) a excentricidade do terceiro corpo adotado.

Ambas configurações assumindo a massa de Netuno, sendo estas na Figura 6.1a $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = 0$ e $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = \pi$ na Figura 6.1b, apresentaram libração do ângulo restrito, contudo a libração de todos os ângulos do problema geral de três corpos está presente somente na Figura 6.1a, indicada pelo símbolo $\star$. Neste caso é verificado que as soluções observadas no primeiro caso ($\Delta\varpi = 0$ e $\phi^* = 0$) estão relacionadas somente a baixas excentricidades do binário, assim como o segundo caso ($\Delta\varpi = \pi$ e $\phi^* = 0$), o qual apresenta comportamento semelhante porém espelhado. A ressonância coorbital observada para configuração $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = 0, \pi$ são similares e esperadas na região circular de acordo com o que é esperado na literatura para o problema restrito [18]. No CR3BP o centro de ressonância tende para $a_0 = 1$ a medida que e_0 tende a 1 que, por sua vez, corrobora com os resultados obtidos para os casos onde o terceiro corpo assume a massa de Netuno, explicando ressonâncias entre órbitas com excentricidade do terceiro corpo elevada. A Figura 6.2 apresenta as configurações $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = 0$ e $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = \pi$ em mapas de semieixo maior por excentricidade, considerando que o binário assuma uma órbita circular ($e_p = 0$).

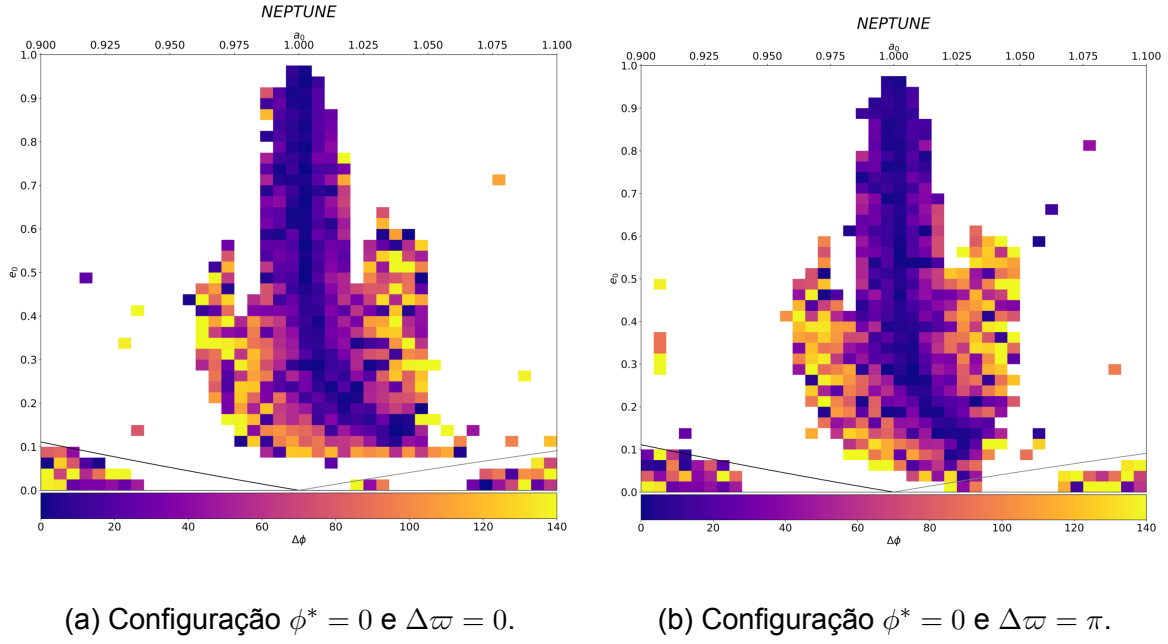


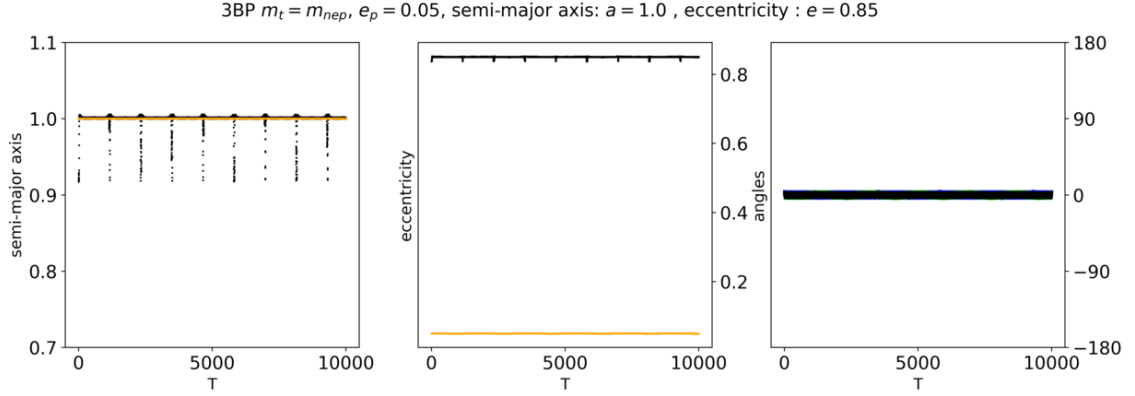
Figura 6.2: Mapas de ressonante da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$ onde $e_p = 0$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito (CR3BP).

A Figura 6.3 apresenta os elementos orbitais em função do tempo para ambas configurações citadas acima. No 3BP foram observados encontros próximos entre os corpos do sistema com grande frequência, tais resultados explicam variações significativas nos elementos orbitais.

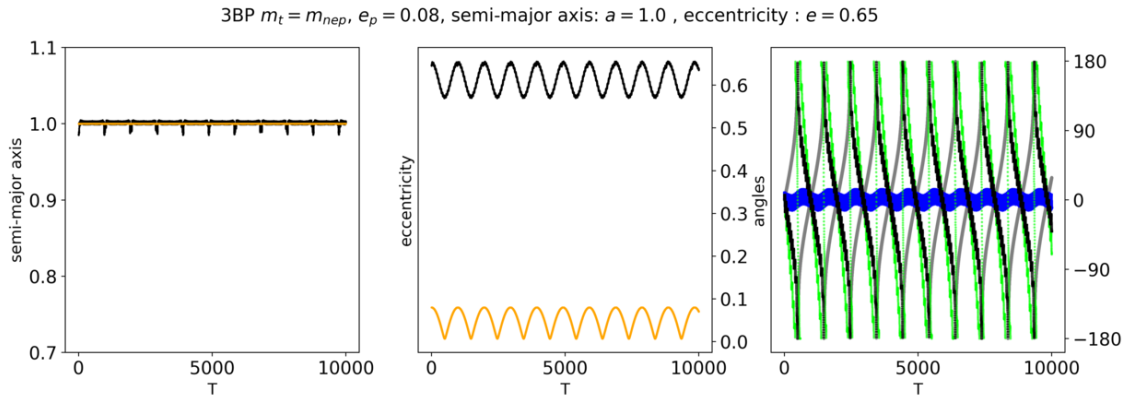
Na ressonância de três corpos os ângulos do 3BP serão apresentados nos gráficos a direita da figuras de elementos orbitais, indicando os ângulos ressonantes e a variação do argumento do pericentro. Os ângulos apresentados são : $\Delta\omega$, ϕ^* , ϕ_1^* e ϕ_2^* apresentados respectivamente nas seguintes cores : cinza, azul, verde e preto.

Na Figura 6.3a ilustra-se o gráfico de semieixo maior, o qual é seguido de um comparativo entre as excentricidades, assim como, um gráfico onde está associado a variação do argumento do pericentro com os ângulos ressonantes CR3BP, ϕ_1 , ϕ_2 na condição inicial indicada pelo símbolo $\star$ no mapa, mostrando um ponto elíptico, ou seja, todos os ângulos estão librando em torno de 0. Já a Figura 6.3b, permite-nos observar que somente o ângulo restrito está librando enquanto os demais circulam, incluindo o $\Delta\varpi$. Conforme discutido anteriormente, o ângulo do problema restrito

também está presente em ressonâncias do problema de três corpos, este ângulo possui comportamento distinto nos casos do problema restrito. No caso da libração de todos os ângulos ressonantes, a diferença do argumento do pericentro libra somente quando todos os ângulos ressonantes estão librando. A excentricidade no 3BP tende a variar em oscilações de longos períodos que indicam efeitos seculares nestes sistemas.



(a) Configuração: $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$



(b) Configuração: $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$

Figura 6.3: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Netuno na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$. (a) Condição inicial: $a_0 = 1, e_p = 0.05$ e $e_0 = 0.85$; (b) $a_0 = 1, e_p = 0.08$ e $e_0 = 0.65$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde e ϕ_2^* em preto.

O resultado considerando Netuno na configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$, não foi apresentado no texto devido seu comportamento ser semelhante ao de Saturno na mesma configuração. Todos os mapas estão disponíveis no apêndice.

A Figura 6.4 ilustra a estabilidade/ressonância do sistema para massa do terceiro corpo assumindo a massa de Saturno ($m_t = m_{sat}$) através do mapa ressonante, o qual apresentou duas famílias ressonantes, sendo uma delas para as órbitas de excentricidade elevada $e_0 \approx 0.95$ e binário de excentricidade pequena $e_p \approx 0.05$, e a outra para pequena região de excentricidade binário elevada $e_p \approx 0.93$ e órbita de excentricidade baixa $e_0 \approx 0.2$.

A ressonância coorbital demonstrou ser uma região instável e não ressonante para a maioria das configurações iniciais adotadas, bem como para as variações de massa. Deste modo, a massa de Saturno apresentou instabilidade nas demais configurações não apresentadas, sendo elas : $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = 0, \phi^* = \pi, \Delta\varpi^* = \pi$ e $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = \pi$. Porém, no caso planar ($inc = \pi$) observamos soluções ressonantes na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$ existindo estritamente no caso planar, ou seja, qualquer variação no plano na ordem de 10^{-16} causa instabilidades e alterações na orbita desse sistema, ocorrendo somente no caso de Saturno. No CR3BP ϕ^* tem comportamento estável no plano e fora dele, contudo isso não ocorre para o caso de Saturno. A Figura 6.5 apresenta o mapa ressonante de semieixo maior por excentricidade no caso do binário assumir a excentricidade de $e_p = 0.3$ na configuração $\Delta\varpi^* = 0, \phi^* = 0$ para Saturno. O resultado obtido no mapa de estabilidade demonstra que tal solução não ocorre exatamente em $a_0 = 1$, e sim, entre os valores de $1.0 < a_0 < 1.025$. O mesmo comportamento é observado no caso de Júpiter na configuração $\Delta\varpi^* = 0, \phi^* = \pi$, onde foram encontradas duas famílias ressonantes para $a_0 \neq 1$.

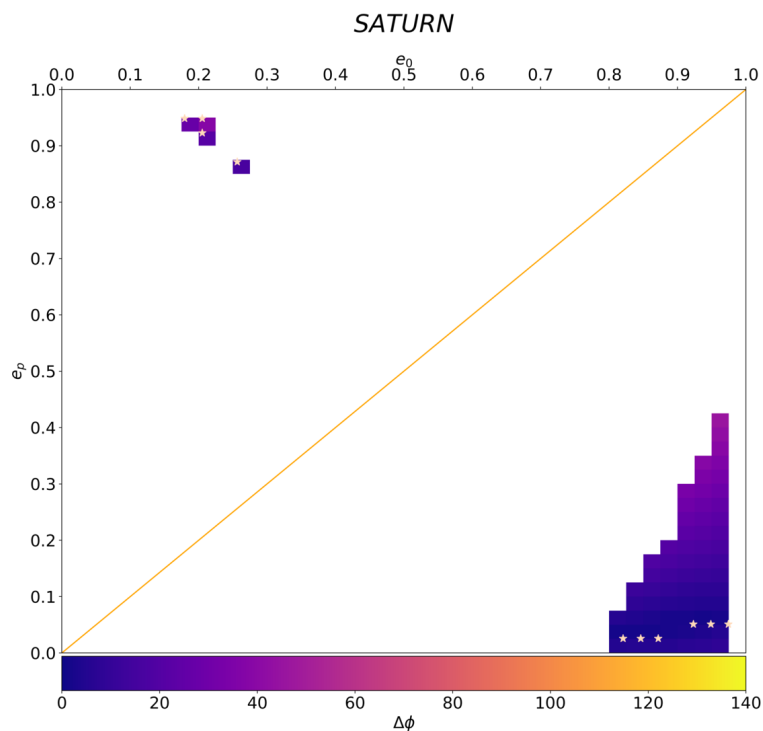


Figura 6.4: Mapas de amplitude da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{sat}$. Na configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito. Os símbolos sobrepostos nas Figuras informam as regiões onde existem librações menores que 90 graus em todos os ângulos ressonantes.

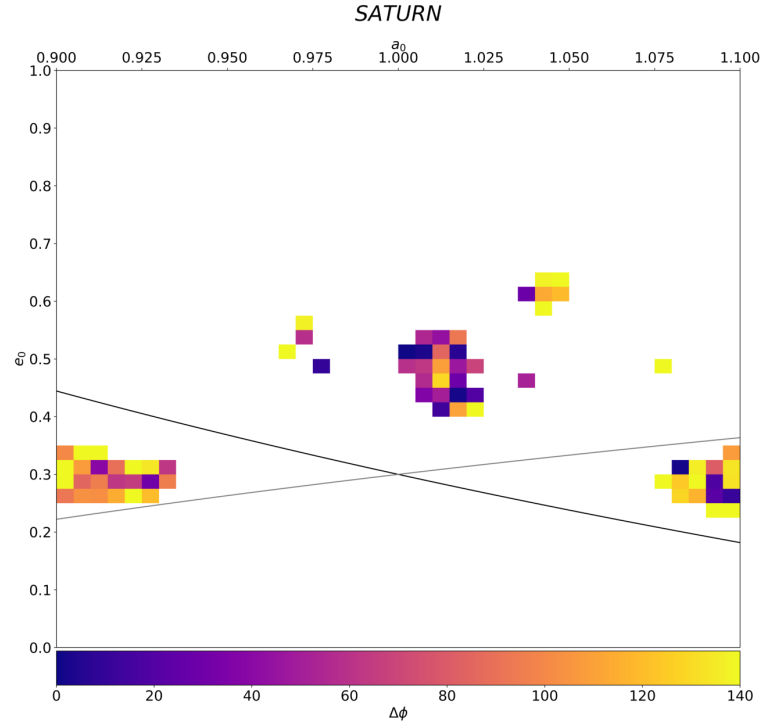


Figura 6.5: Mapas de ressonante da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{sat}$ com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$ onde $e_p = 0.3$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito (CR3BP).

A evolução dos elementos orbitais está reportada na Figura 6.6. É possível observar que o único ângulo que está librando com amplitude baixa é o referente ao problema restrito, enquanto os demais circulam, o que corrobora com as regiões apresentadas no mapa ressonante de tal configuração, neste caso os pontos elípticos irão existir somente em regiões bem específicas, conforme está apresentado pelo símbolo $\star$ na Figura 6.4. Este caso trata-se de uma libração em π .

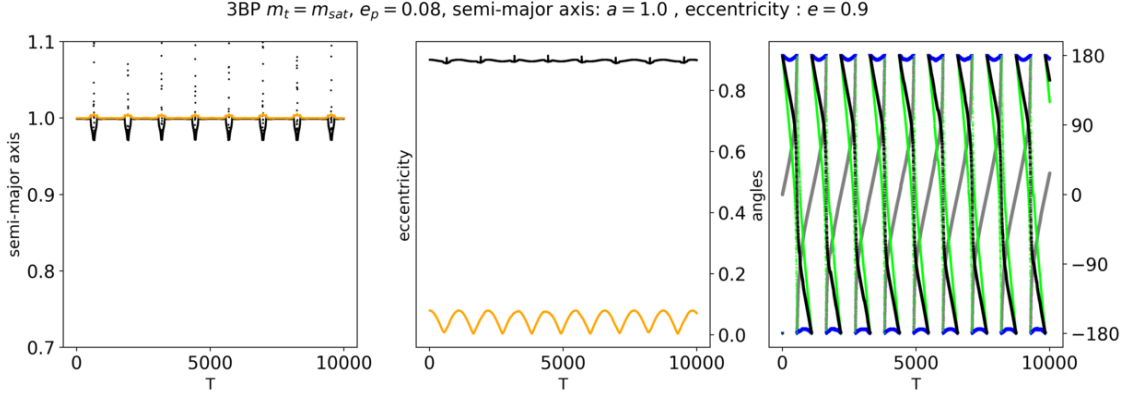


Figura 6.6: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Saturno na configuração $\phi^* = \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0$. Condição inicial: $a_0 = 1, e_p = 0.08$ e $e_0 = 0.9$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde e ϕ_2^* em preto.

O caso de ressonância a seguir trata-se de uma ressonância coorbital entre dois planetas jovianos na configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$, reportado na figura 6.7, sendo que não foram observadas órbitas que não possuem comportamento de libração, caso contrário elas estariam demarcadas em amarelo no mapa. Neste caso, a maior parte do espaço de fase colide ou escapa, retornando somente as famílias ressonantes observadas. As famílias ressonantes se estendem em duas regiões distintas de excentricidade elevada, os centros de ressonância estão identificados no mapa. Verificamos que as famílias ressonantes obtidas no sistema joviano retrógrado existem para regiões fora do plano, em diferentes condições iniciais (de excentricidade elevada) e com limite próximo de 140 graus de inclinação, o mesmo não ocorre para Netuno e Saturno nessa configuração.

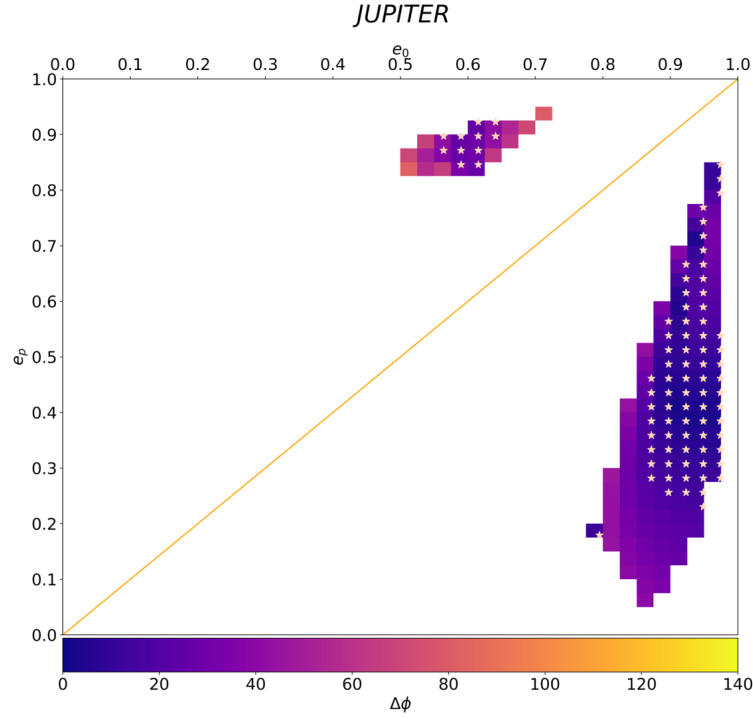
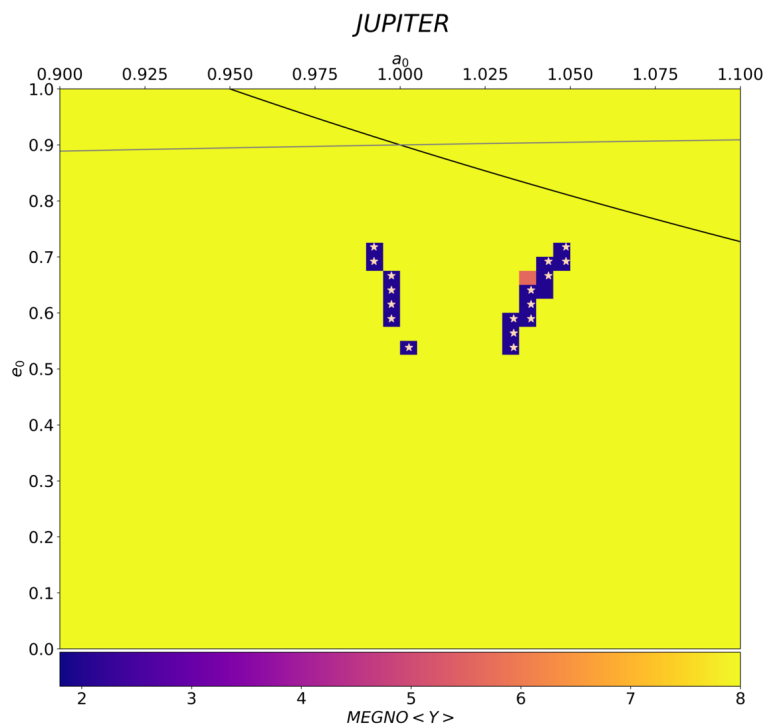
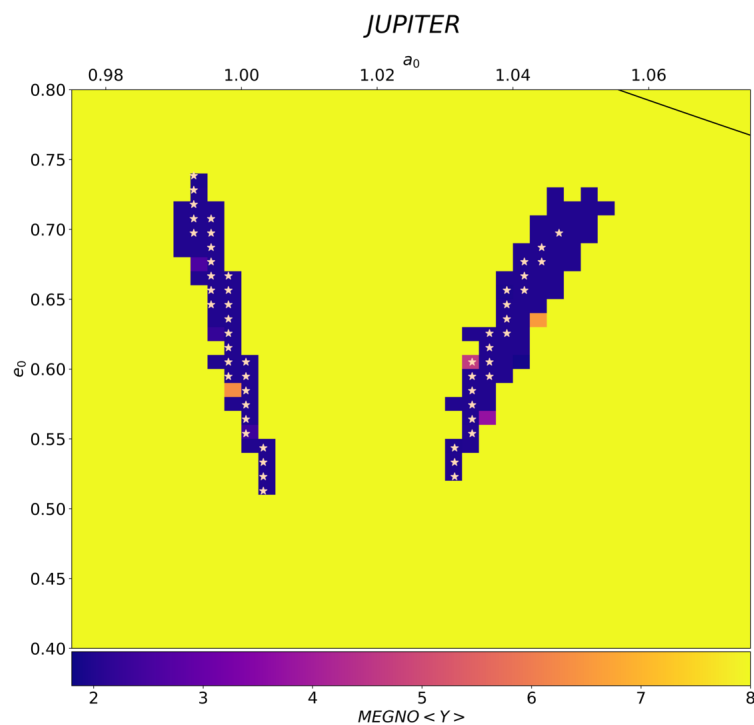


Figura 6.7: Mapas ressonante da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito. Os símbolos sobrepostos nas Figuras informam as regiões onde existem librações menores que 90 graus em todos os ângulos ressonantes.

Para tal configuração verificamos a estabilidade e a ressonância através de um mapa de semieixo maior por excentricidade para a excentricidade do binário $e_p = 0.9$ em 200 mil períodos da binária, o qual nos informou a existência da família em $a_0 \leq 1$ e $a_0 > 1$, conforme é apresentado na Figura 6.8. Neste caso, a barra de cor indica o valor do MEGNO o sistema, sendo azul/roxo estável e amarelo instável. É possível verificar que ambas famílias apresentam librações de todos os ângulos ressonantes.



(a) Mapa de estabilidade da região coorbital para sistema joviano



(b) Zoom das famílias observadas para o sistema joviano, adotando o limite de 0.4 a 0.8 no eixo y e 0.975 à 1.075 no eixo x.

Figura 6.8: Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$ na condição inicial $e_p = 0.9$.

Os elementos orbitais em função do tempo da segunda família estão ilustrados na Figura 6.9, onde é possível observar a libração dos ângulos do problema de três corpos, bem como, encontros próximos que, por sua vez, causam oscilações periódicas (10000 períodos) na excentricidade e no ângulo ressonante apresentando uma configuração de amplitude de cerca de 90 graus. A Figura 6.10 ilustra as órbitas estáveis no referencial sinódico apresentadas neste capítulo.

No CR3BP $\phi^* = \pi$ é estável para o semieixo maior ($a_{res} = 1$), obtido pela terceira lei de Kepler, quando e_0 tende a 1 [18] explicando os resultados obtidos para o caso de Saturno e Netuno nesta configuração. Contudo no caso Joviano a configuração se mostrou mais estável e deslocada da região circular, possivelmente causa do efeito de interação gravitacional .

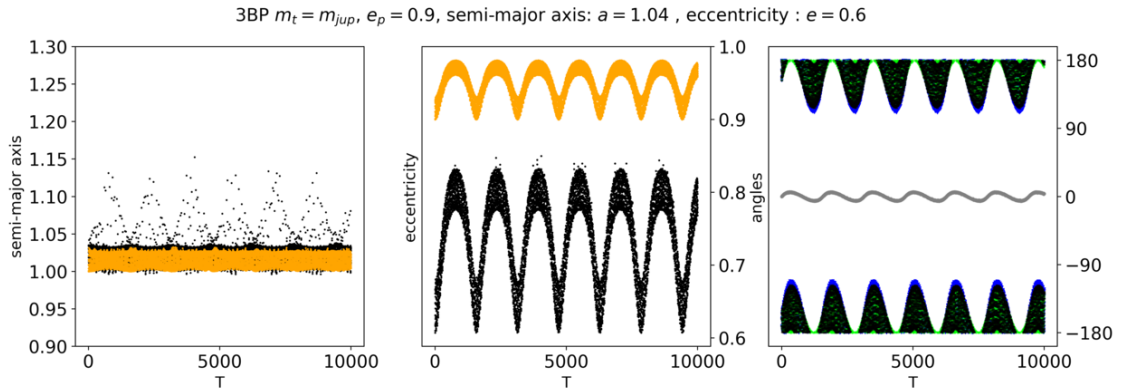


Figura 6.9: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Júpiter na configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$. Condição inicial: $a_0 = 1.04$, $e_p = 0.9$ e $e_0 = 0.6$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde e ϕ_2^* em preto.

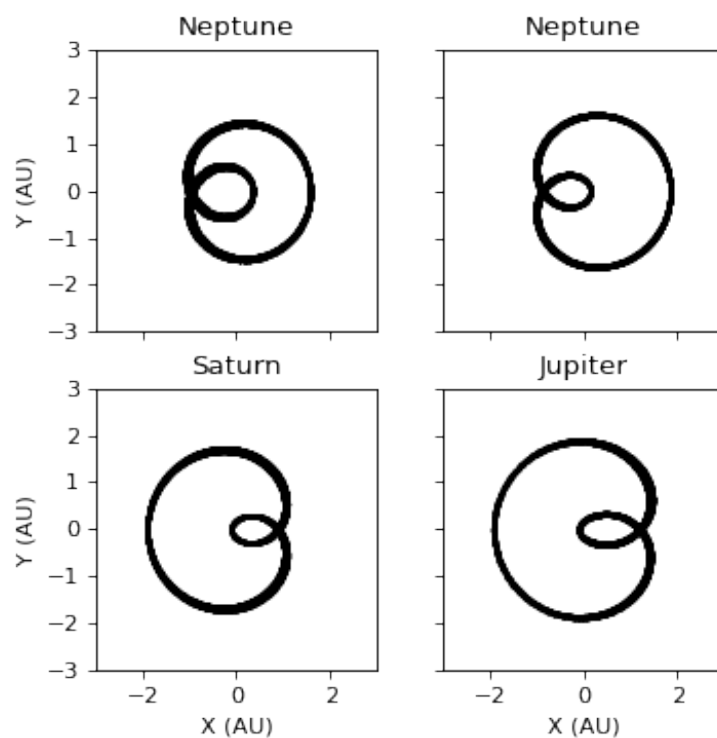
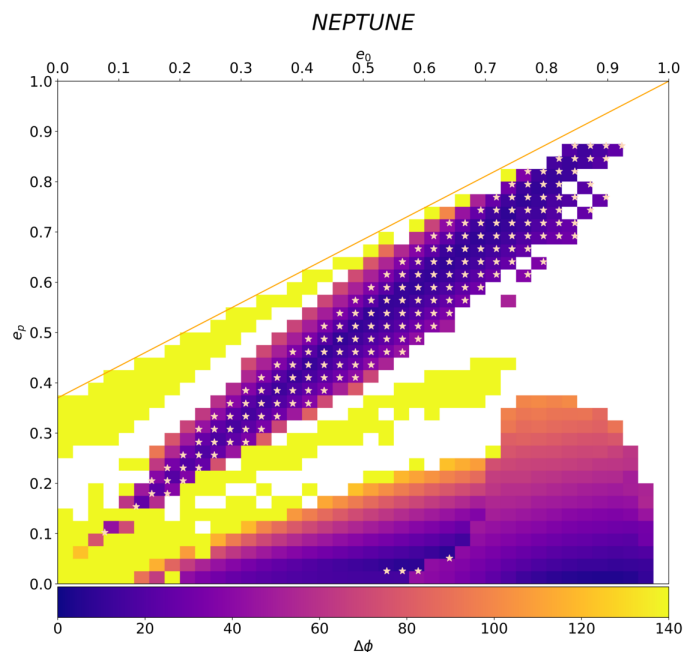
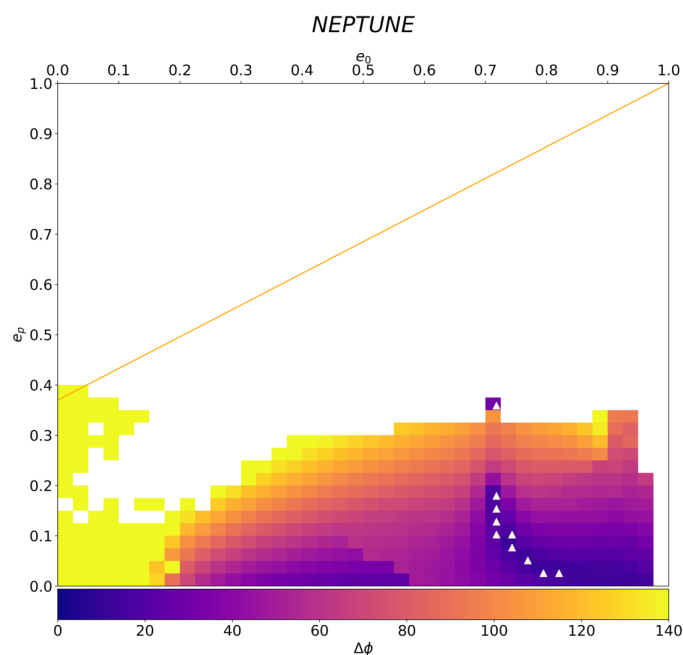


Figura 6.10: Órbitas no referencial sinódico das ressonância 1/-1 das órbitas estáveis encontradas para as configurações $\phi^* = 0$ e π , $\Delta\varpi^* = 0$ e π . Sendo os painéis superiores referentes as Figuras 6.3a,6.3b e os painéis inferiores as Figuras 6.6 e 6.9

6.2 Estabilidade da região 2/-1



(a) Configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$.



(b) Configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = \pi$.

Figura 6.11: Mapas de amplitude da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0, \pi$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito. Os símbolos $\star$ sobrepostos nas Figuras informam as regiões onde existem librações menores que 90 graus em todos os ângulos ressonantes, já o símbolo $\wedge$ indica a libração isolada do ângulo ϕ_3^* menor que 90 graus.

Os resultados que seguem são referentes a região de ressonância 2/-1, considerando a massas de Netuno e Júpiter. As figuras 6.11 e 6.13 são os mapas ressonantes/ estabilidade e a evolução dos elementos orbitais respectivamente, para o caso onde o terceiro corpo assume a massa de Netuno nas configurações $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$ e $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = \pi$.

Para a ressonância 2/-1 os ângulos ressonantes analisados foram: $\phi^{cr3bp} = -\lambda^* - 2\lambda' + 3\varpi^*$, $\phi_1^{3bp} = -\lambda^* - 2\lambda' - 3\varpi'$, $\phi_2^{3bp} = -\lambda^* - 2\lambda' + \varpi' + 2\varpi^*$, $\phi_3^{3bp} = -\lambda^* - 2\lambda' + 2\varpi' + \varpi^*$. Definimos como ponto fixo quando todos os ângulos ressonantes apresentados para essa região estão librando em torno de um ponto.

A tabela 6.2 apresenta os resultados sumarizados das ressonâncias observadas na região 2/-1, indicando quais massas e quais configurações iniciais apresentaram ressonâncias, podendo libração de todos os ângulos ressonantes ou de somente um dos ângulos ressonantes adotados.

Tabela 6.2: Tabela reportando os resultados sumarizados para a região ressonante 2/-1, indicando quais tipos de ressonância foram observadas nas diferentes configurações estudadas para cada massa considerada. Observamos librações isoladas de ângulos, como por exemplo, o ângulo do problema restrito (CR3BP) em Netuno e ϕ_2^* em Júpiter na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$

Massa	ϕ^*	$\Delta\varpi^*$	Ressonância	Figura
NETUNO	0	0	CR3BP e Ponto Fixo	6.11a,6.13
NETUNO	0	π	CR3BP e Ponto Fixo	6.11b,6.14
JÚPITER	0	0	CR3BP, Ponto Fixo e ϕ_2^*	6.17a,6.19
JÚPITER	π	0	Ponto Fixo	6.17b

É possível observar na configuração apresentada no mapa 6.11a dois regimes de famílias ressonantes, sendo uma destas com centro referente a região próxima a órbita circular do planeta $e_p \approx 0.05$ e a outra com comportamento linear entre os dois eixos, observa-se também uma separação entre a região do ponto fixo e a região de libração ângulo restrito. O mapa de estabilidade de semieixo maior por excentricidade está apresentado na Figura 6.12, sendo a libração do ponto fixo representadas pelo símbolo $\star$ no centro. A região em amarelo é caos e os pontos intermediários representam stickiness.

O segundo caso ilustrado na Figura 6.11b demonstra a existência de uma família de soluções nítida em torno da região de $e_0 \approx 0.7$ a 0.9 , bem como, diferentes regimes de libração do ângulo restrito próximo ao caso do binário circular e órbitas $e_0 \approx 0.4$ e 0.95 .

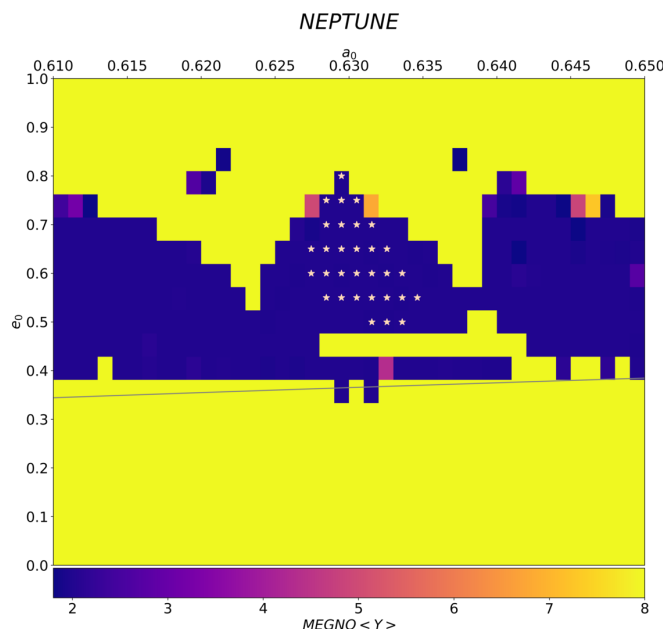


Figura 6.12: Mapa de estabilidade da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito para $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $e_p = 0.6$, $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$. Os símbolos apresentados na região estável indicam o centro de ressonância

Na ressonância 2/-1 e 1/-2 será introduzida mais uma curva nos ângulos, pois neste caso haverá o ϕ_3^* . Os ângulos apresentados são: $\Delta\omega$, ϕ^* , ϕ_1^* , ϕ_2^* e ϕ_3^* indicados respectivamente nas seguintes cores : cinza, azul, verde, preto e amarelo.

A Figura 6.13 apresenta os elementos orbitais para a configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi = 0$. Neste caso é observado a libração de todos os ângulos ressonantes em torno de 0.

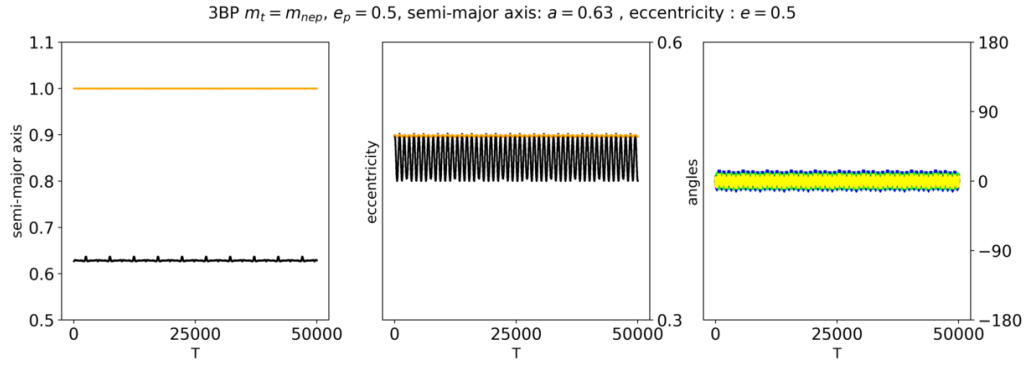


Figura 6.13: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Netuno na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$. Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0.5$ e $e_0 = 0.5$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde, ϕ_2^* em preto e ϕ_3^* em amarelo.

Já a Figura 6.14 relata dois casos próximos na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = \pi$. Estes resultados são interessantes devido serem os únicos casos observados que os ângulos libram em torno de diferentes pontos, este comportamento é devido a escolha do $\Delta\varpi$ e é esperado, sendo que os ângulos ϕ^* e ϕ_2^* libram em torno de 0 e os demais libram em torno de 180.

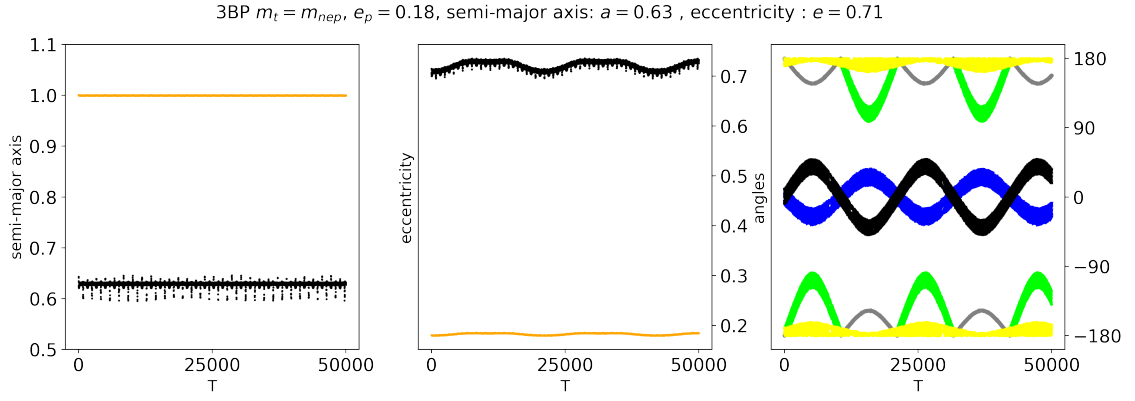
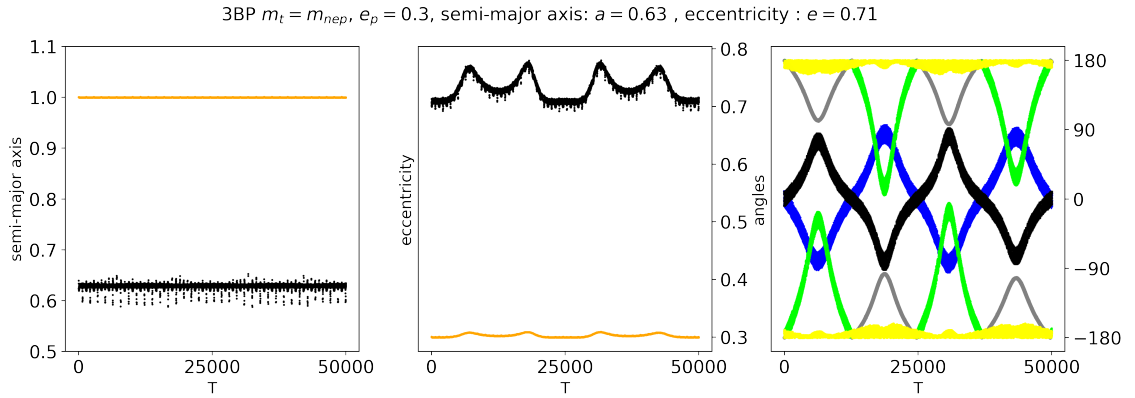
(a) Configuração: $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = \pi$ (b) Configuração: $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = \pi$

Figura 6.14: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Netuno na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = \pi$. (a) Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0.18$ e $e_0 = 0.71$; (b) Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0.3$ e $e_0 = 0.71$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde, ϕ_2^* em preto e ϕ_3^* em amarelo.

No problema restrito o ângulo crítico $\phi^* = \pi$ é estável em excentricidades elevadas, porém ocorre para o semieixo maior obtido a partir da terceira lei de Kepler. O mesmo comportamento é observado no caso de Netuno. Entretanto foi observado uma quebra na ressonância esperada no problema restrito se comparada ao caso de Netuno [23].

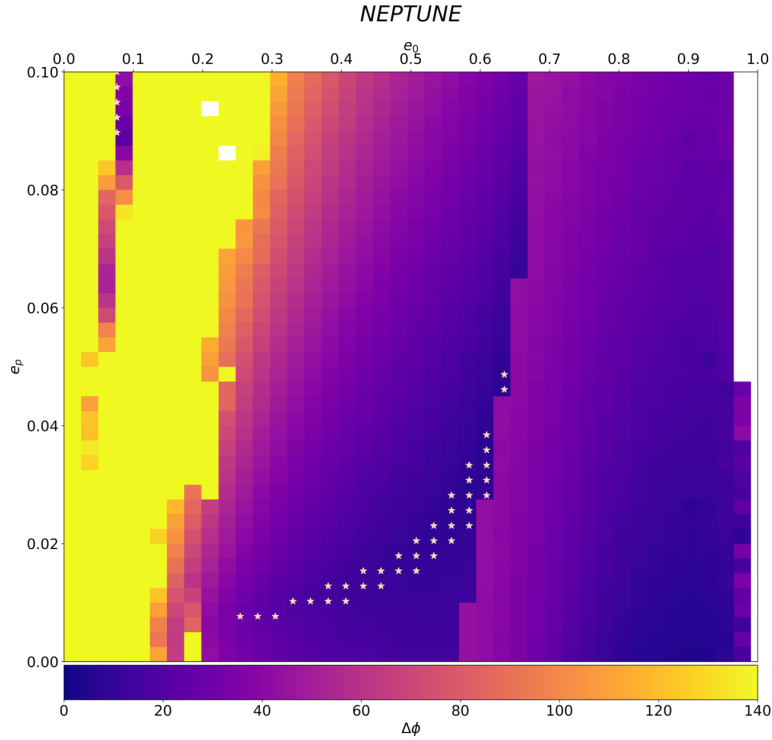


Figura 6.15: Mapa de estabilidade da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito para $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$, $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$. Os símbolos apresentados na região estável indicam o centro de ressonância

A Figura 6.15 apresenta um zoom da região de excentricidade do binário entre $e_p = 0$ e 0.1 na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = 0$. Na Figura 6.16 são apresentadas três condições iniciais para o problema circular considerando as excentricidades $e_0 = 0.5$, $e_0 = 0.58$ e $e_0 = 0.7$. O segundo caso, onde $e_0 = 0.58$, trata-se da região exata de quebra de ressonância, os elementos orbitais nesse momento possuem comportamento de encontros próximos que, por sua vez, apresentam variações significativas semieixo maior que condizem com o observado nos ângulos ressonantes, comportamento similares na excentricidade foram observados para o CR3BP considerando binários estelares. Por este motivo a amplitude do ângulo do CR3BP tem a tendência de variar em torno de 50 graus. As outras duas condições iniciais não $e_0 = 0.5$ e 0.7 não apresentam o mesmo comportamento. Verificamos também que no zoom do mapa de estabilidade, apresentado na Figura 6.15, este comportamento depende da excentricidade do binário e_p que, por sua vez, indica uma linha similar a de colisão porém relacionadas a encontros próximos, ou seja, a medida que e_p aumenta, a quebra da ressonância acontece em excentricidades

do terceiro corpo mais elevadas. Apesar de no CR3BP esse comportamento não estar previsto no 3BP estamos a considerar a massa de Netuno que, neste caso, demonstra ser significativa para tal região.

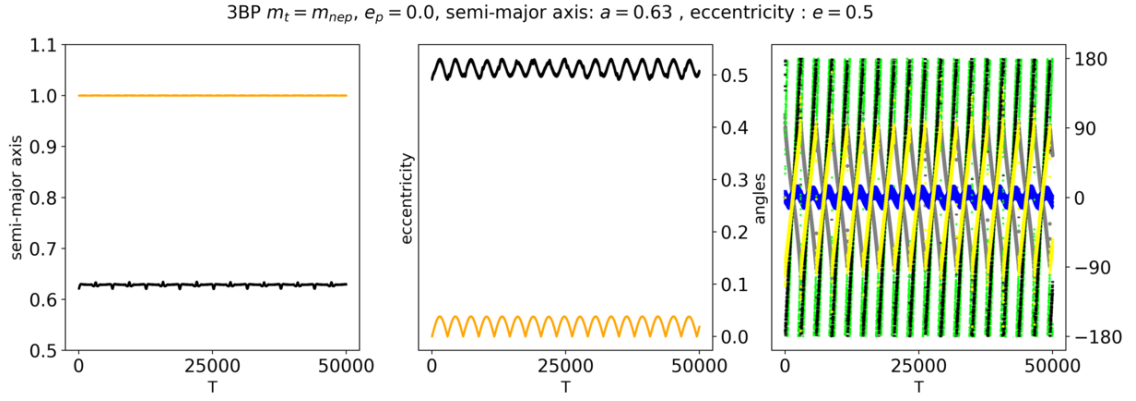
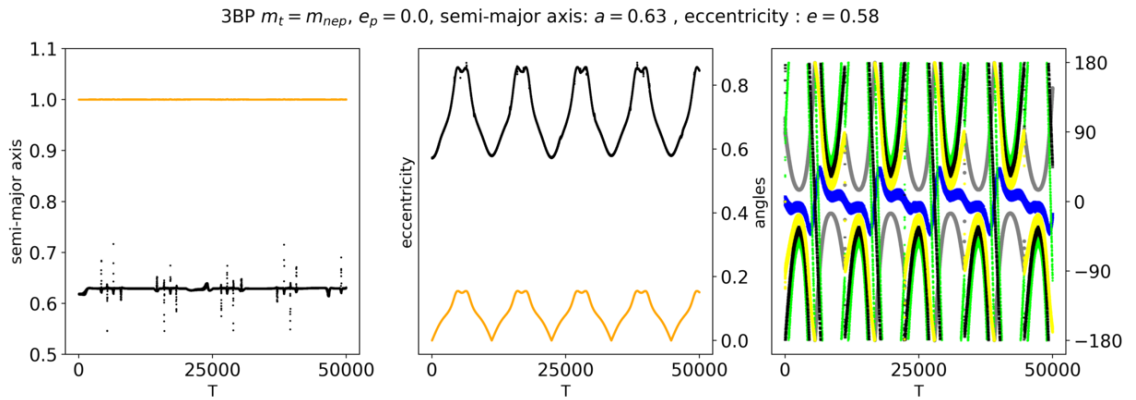
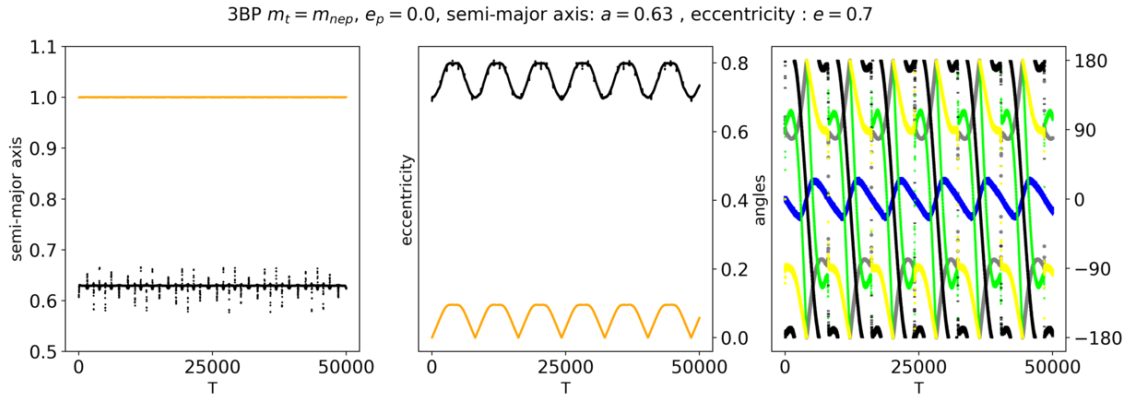
(a) Configuração: $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = 0$ (b) Configuração: $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = 0$ (c) Configuração: $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi = 0$

Figura 6.16: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Netuno na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = \pi$. (a) Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0$ e $e_0 = 0.5$; (b) Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0$ e $e_0 = 0.58$; (c) Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0$ e $e_0 = 0.7$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde, ϕ_2^* em preto e ϕ_3^* em amarelo.

Na ressonância 2/-1 considerando o caso onde o terceiro corpo assume a massa

de Júpiter, foram observados três famílias ressonantes na configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$, sendo aquela representada pelo símbolo $\wedge$ referente a libração do ângulo ϕ_3^* , onde o mapa ressonante na Figura 6.17a apresenta em sua barra de cor a amplitude do ângulo ressonante referente ao ϕ_2^* . Como as outras duas famílias ressonantes são referentes a um ponto elíptico, todos os ângulos devem librar em tais regiões, assim como o ϕ_2^* . Portanto, neste caso faz sentido representar a amplitude de ϕ_2^* , já que na região demarcada por $\wedge$ os ângulos : $\phi^*, \phi_1^*, \phi_3^*$ irão circular. Uma família ressonante foi observada na configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$ reportadas na Figura 6.17b, o qual, neste caso, representa a amplitude de libração do ângulo restrito.

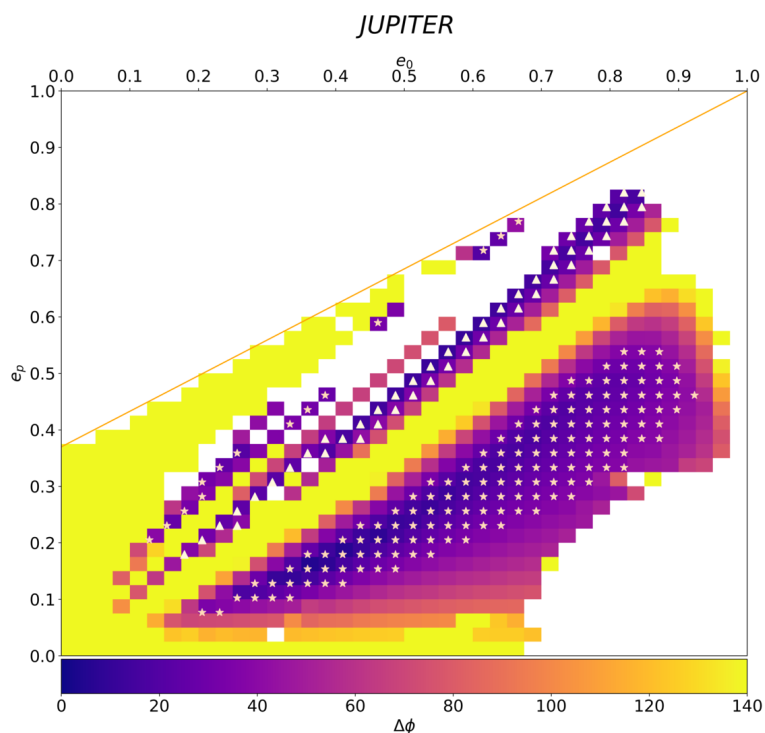
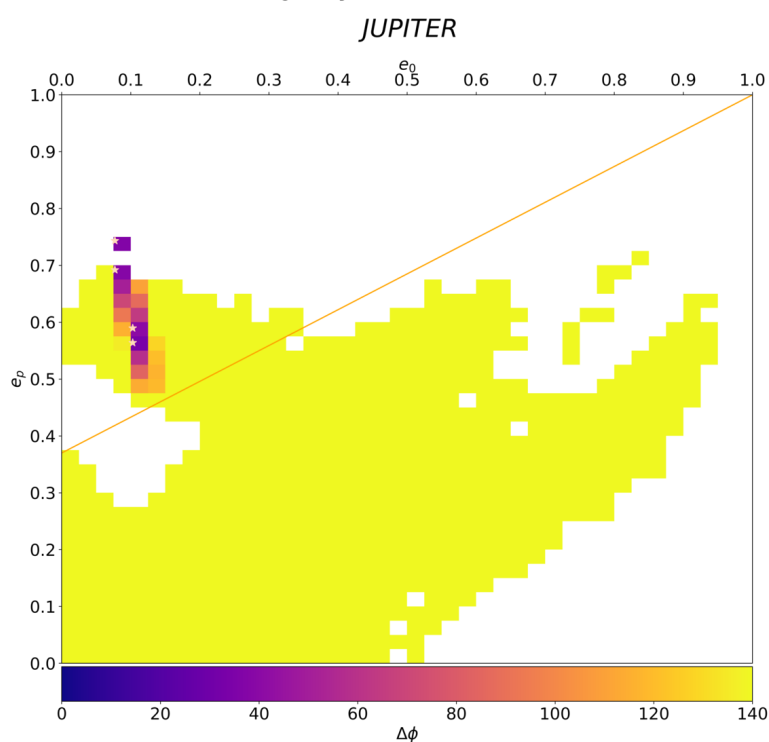
(a) Configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$.(b) Configuração $\phi^* = \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0$.

Figura 6.17: Mapas de amplitude da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = 0, \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito. Os símbolos $\star$ sobrepostos nas Figuras informam as regiões onde existem librações menores que 90 graus em todos os ângulos ressonantes, já o símbolo $\wedge$ indica a libração isolada do ângulo ϕ_3^* menor que 90 graus.

Inicialmente a análise do mapa de estabilidade de semieixo maior por excentricidade para $e_p = 0.5$ na primeira configuração, apresentada na Figura 6.17a, nos informa que existem 3 regiões de ressonância sendo duas delas referente a libração de todos os ângulos ressonantes e outra referente a libração de somente do ângulo ϕ_2^* , sendo estas ilustradas na Figura 6.18. Nota-se também a linha de caos que divide as ressonâncias, conforme observado nos mapas ressonantes. Nesta condição inicial as soluções obtidas em $e_0 = 0.37$ deixam de existir em integrações numéricas próximas a 200 mil períodos da binária.

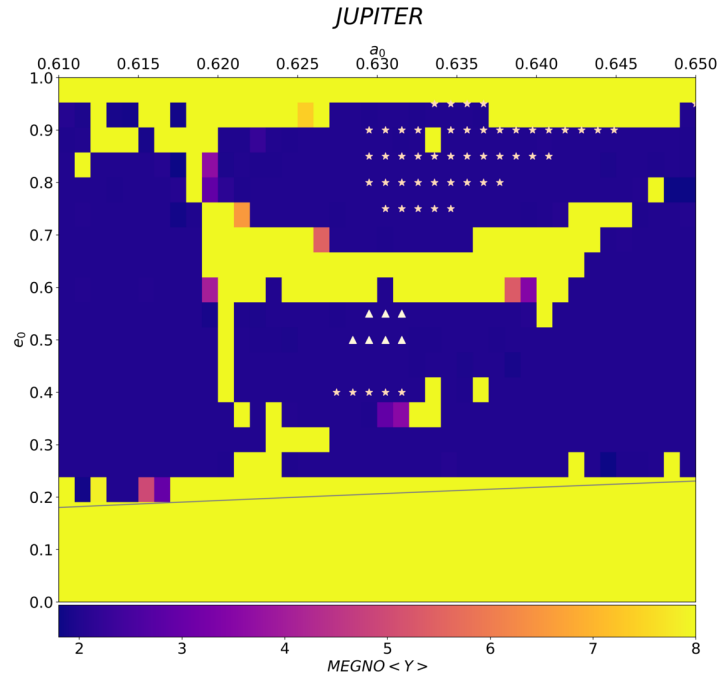


Figura 6.18: Mapas de estabilidade da região ressonante 2/-1 para o problema não restrito para $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ para $e_p = 0.5$, $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$.

Os três regimes de ressonância estão representados em função dos elementos orbitais nas Figuras 6.19a, 6.19b e 6.19c. O primeiro caso apresenta a libração de todos os ângulos ressonantes do problema de três corpos, incluindo o $\Delta\varpi$, o qual seria a família superior apresentada na Figura 6.18. No segundo caso observa-se a libração exclusiva do ângulo ressonante ϕ_2^* enquanto os demais ângulos circulam de forma semelhante, representando a segunda região descrita no mapa de estabilidade. Já o terceiro caso demonstra o regime voltando ao comportamento de

ressonância do ponto fixo, a qual deixa de existir após 100 mil períodos de integrações numéricas para excentricidades do binário acima de 0.5 ($e_p > 0.5$).

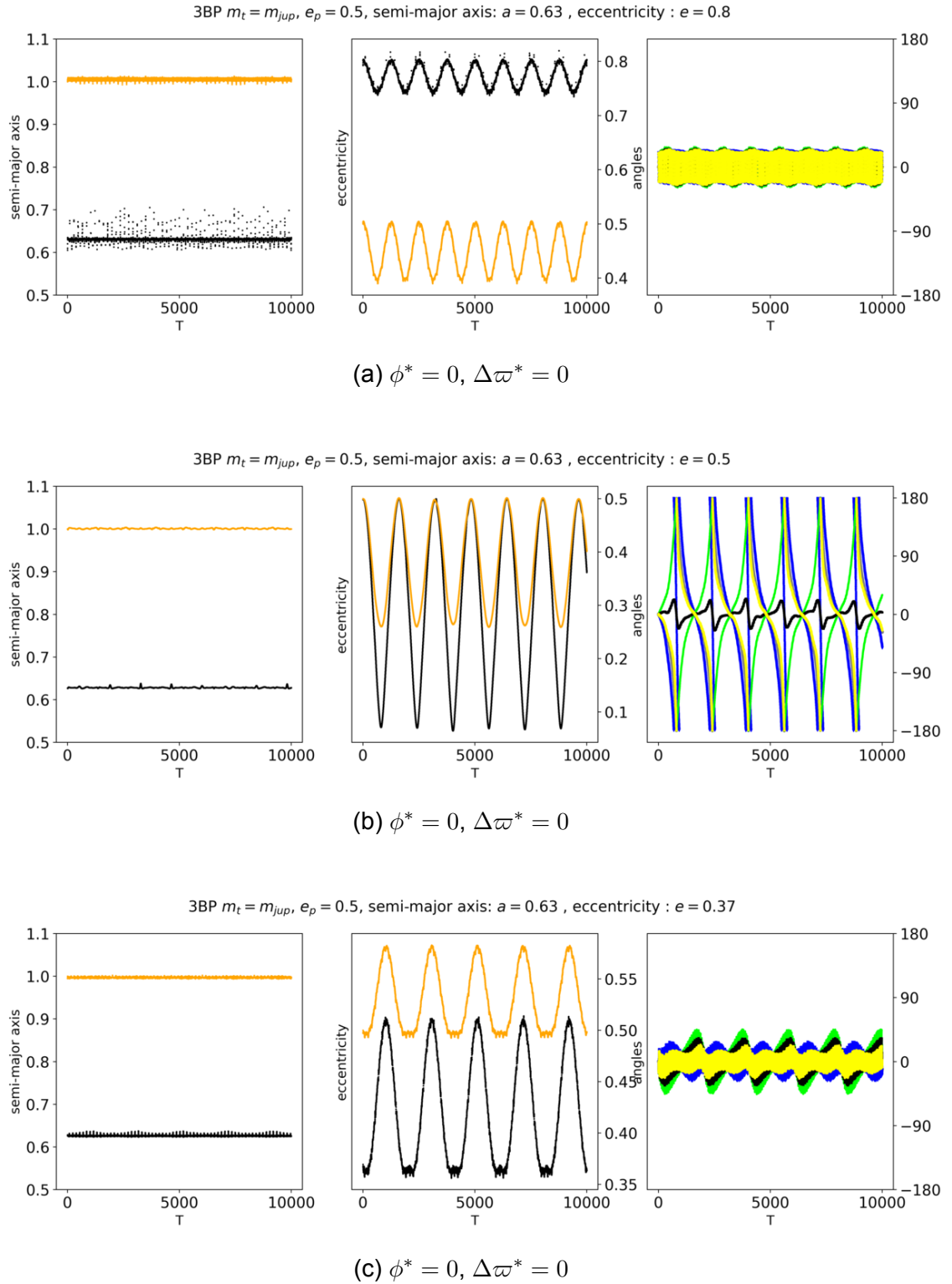


Figura 6.19: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Júpiter na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$. (a) Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0.5$ e $e_0 = 0.8$; (b) Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0.5$ e $e_0 = 0.5$; (c) Condição inicial: $a_0 = 0.63, e_p = 0.5$ e $e_0 = 0.37$.

De acordo com o que é observado na Figura 6.19b para o sistema joviano, verifica-se que a variação da excentricidade de ambos os corpos ocorre de forma similar, porém indicando que o terceiro corpo apresenta uma amplitude maior, este fator pode ser crucial para que o ângulo ressonante ϕ_2^* libere sozinho. Este fenômeno também é observado na ressonância 1/-2, porém a amplitude do binário joviano é superior ao do terceiro corpo, o qual é exatamente o caso espelhado a este, já que o planeta binário está em uma ressonância 1/-2 assim como o terceiro corpo está em 2/-1 com o binário, os resultados para ambas regiões não devem ser totalmente semelhantes devido a escolha de condições iniciais, já que na ressonância 2/-1 o terceiro corpo está mais próximo a estrela. Este fenômeno será discutido com mais detalhes a frente.

A Figura 6.20 apresenta as órbitas estáveis no referencial sinódico. O painel inferior esquerdo apresenta a órbita referente a libração do ângulo ϕ_2^* , inicialmente essa órbita tem o comportamento similar ao da ressonância 2/-1 no ponto fixo, contudo devido a precessão do argumento do pericentro o comportamento no sinódico não é fixo.

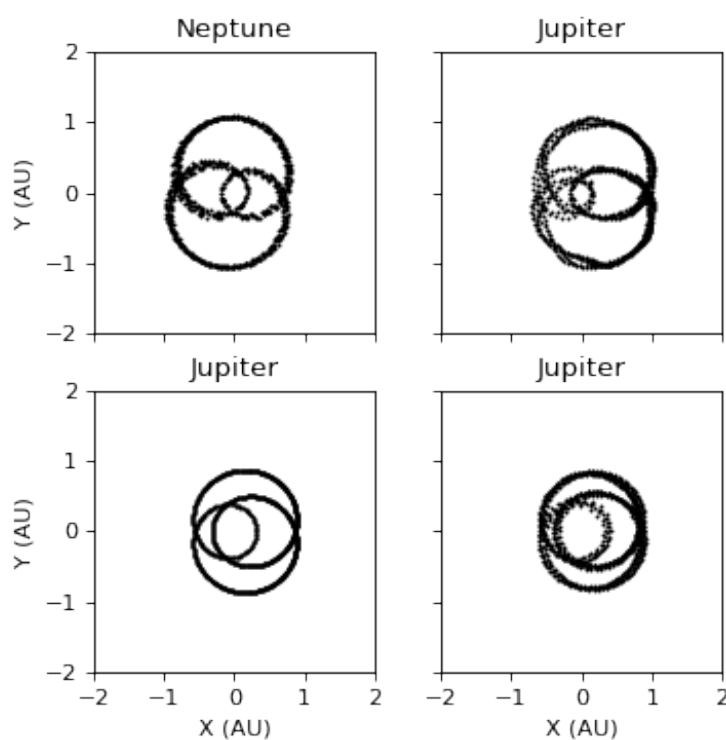
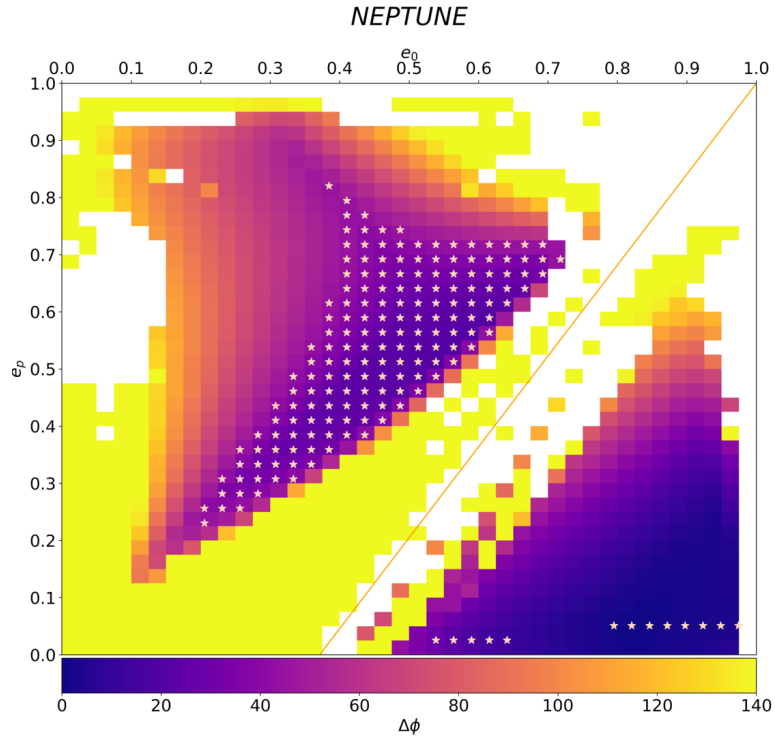
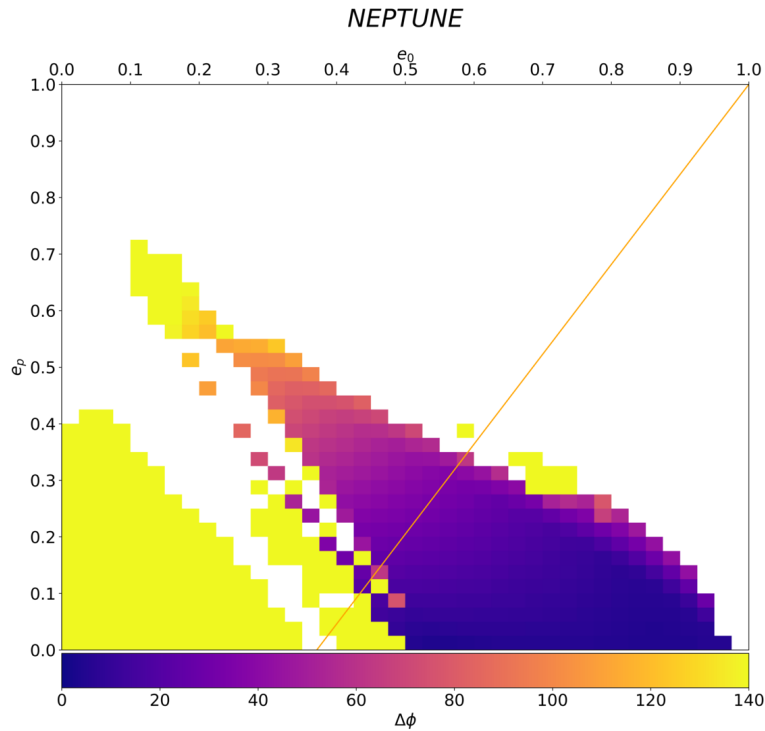


Figura 6.20: Órbitas no referencial sinódico das ressonância 2/-1 das órbitas estáveis encontradas para as configurações $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$ e π . Sendo os painéis da esquerda para direita: superiores referentes as Figuras 6.19a,6.14a e os painéis inferiores as Figuras 6.19b e 6.19c

6.3 Estabilidade da região 1/-2



(a) Configuração: $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$.



(b) Configuração: $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = \pi$.

Figura 6.21: Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0, \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito. Os símbolos $\star$ (brancos) sobrepostos nas Figuras informam as regiões onde existem librações menores que 90 graus em todos os ângulos ressonantes.

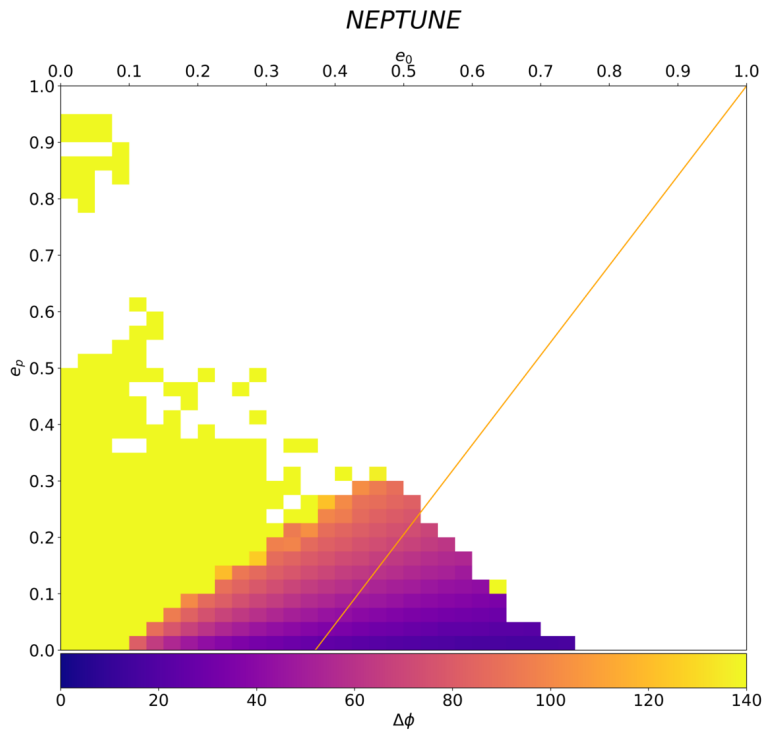
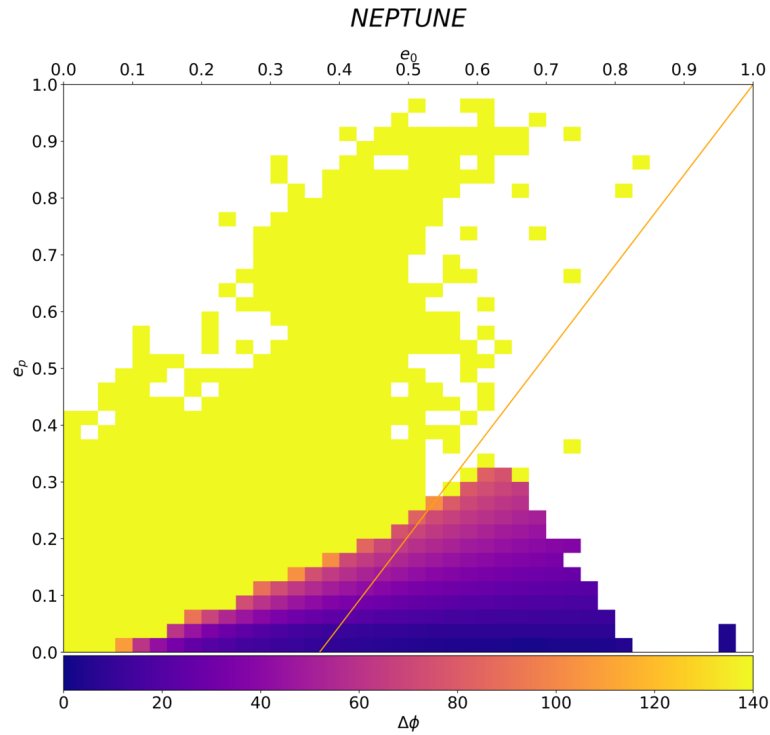


Figura 6.22: Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0, \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito. Os símbolos * (branco) sobrepostos nas Figuras informam as regiões onde existem librações menores que 90 graus em todos os ângulos ressonantes.

Nesta seção, de forma semelhante as anteriores, serão apresentados os resultados para a ressonância 1/-2. Esta região de ressonância demonstrou maior estabilidade em diferentes configurações, sendo observadas famílias ressonantes em todas configurações, conforme ilustrado na configuração $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = 0$ apresentada na Figura 6.21a duas famílias/ilhas ressonantes distintas separadas por caos, a qual também foi a única que apresentou librações do ponto fixo. Os demais casos são descritos por regiões singulares de ressonância reportados nas Figuras 6.21b, 6.22a, 6.22b. Vale ressaltar que as regiões observadas nas configurações $\phi^* = \pi, \Delta\varpi^* = 0$ e $\phi^* = \pi, \Delta\varpi^* = \pi$ são similares tanto em amplitude de ressonância quanto em estabilidade, conforme pode ser observado nas Figuras 6.22a e 6.22b.

Para a ressonância 1/-2 os ângulos ressonantes analisados foram: $\phi^{cr3bp} = -2\lambda^* - \lambda' + 3\varpi^*$, $\phi_1^{3bp} = -2\lambda^* - \lambda' - 3\varpi'$, $\phi_2^{3bp} = -2\lambda^* - \lambda' + 2\varpi' + \varpi^*$, $\phi_3^{3bp} = -2\lambda^* - \lambda' + \varpi' + 2\varpi^*$.

A Figura 6.23 representa um zoom na região da família próxima a órbita circular, sendo que na Figura 6.21a referente a configuração $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = 0$ foi observado uma quebra da família ressonante que, por sua vez, consiste na falta de resolução que foi verificada com a ampliação de tal região.

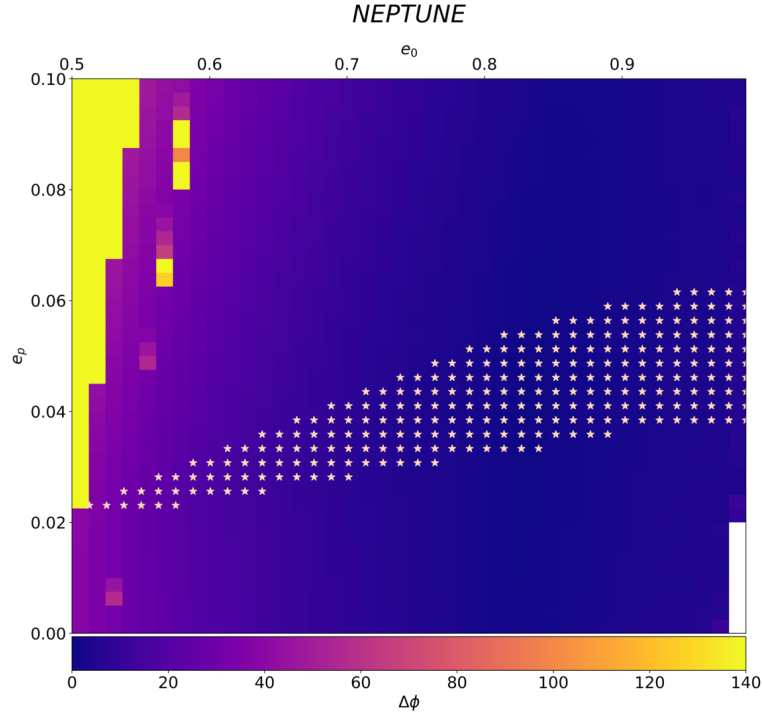


Figura 6.23: Mapas de ressonante da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{nep}$ com $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito (CR3BP). Zoom da família ressonante próxima a órbita circular nos limites de $e_p = 0$ a 0.1 e $e_0 = 0.5$ a 0.99 .

A tabela 6.3 apresenta os resultados sumarizados das ressonâncias observadas na região 1/-2, indicando quais massas e quais configurações apresentaram ressonâncias, assim como nos casos anteriores, podendo ser libração de todos os ângulos ressonantes ou de somente um dos ângulos ressonantes adotados. No caso para Saturno os resultados se mostraram similares ao caso Netuno. Júpiter não apresentou ressonâncias para a configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = \pi$.

Tabela 6.3: Tabela reportando os resultados sumarizados para a região ressonante 1/-2, indicando quais tipos de ressonância foram observadas nas diferentes configurações estudadas para cada massa considerada.

Massa	ϕ^*	$\Delta\varpi^*$	Ressonância	Figura
NETUNO	0	0	Ponto Fixo e CR3BP	6.21a,6.24a
NETUNO	0	π	CR3BP	6.21b,6.24b
NETUNO	π	0	CR3BP	6.22a,6.25a
NETUNO	π	π	CR3BP	6.22b,6.25b
JÚPITER	0	0	Ponto Fixo e ϕ_3^*	6.26a,6.29a,6.30a
JÚPITER	π	0	Ponto Fixo	6.26b,6.29b
JÚPITER	π	π	ϕ_3^*	6.27a,6.30b

Os mapas de estabilidade para a segunda configuração ($\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = \pi$) demonstraram ressonâncias e comportamento similar ao caso circular e próximo ao circular, indicando também ressonâncias do tipo do CR3BP com um centro bem definido. Nas regiões $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0, \pi$ obteve-se semelhanças na estabilidade bem como nas ressonâncias verificadas, indicando librações em torno de 180.

No problema restrito o ângulo crítico $\phi^* = \pi$ é estável em excentricidades elevadas, porém ocorre para o semieixo maior obtido a partir da terceira lei de Kepler para excentricidades entre 0 e 0.8, conforme [23].

A Figura 6.24 apresenta os elementos orbitais e os ângulos ressonantes em função do tempo para os casos $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$ e $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = \pi$. O primeiro caso apresenta o ponto elíptico, onde todos os ângulos ressonantes estão librando em torno de 0. Já no segundo caso é observado a libração somente do ângulo restrito.

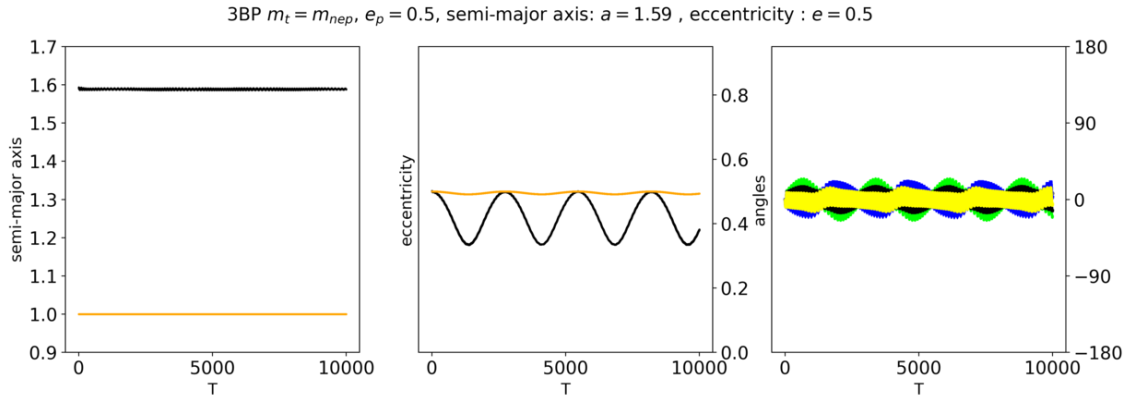
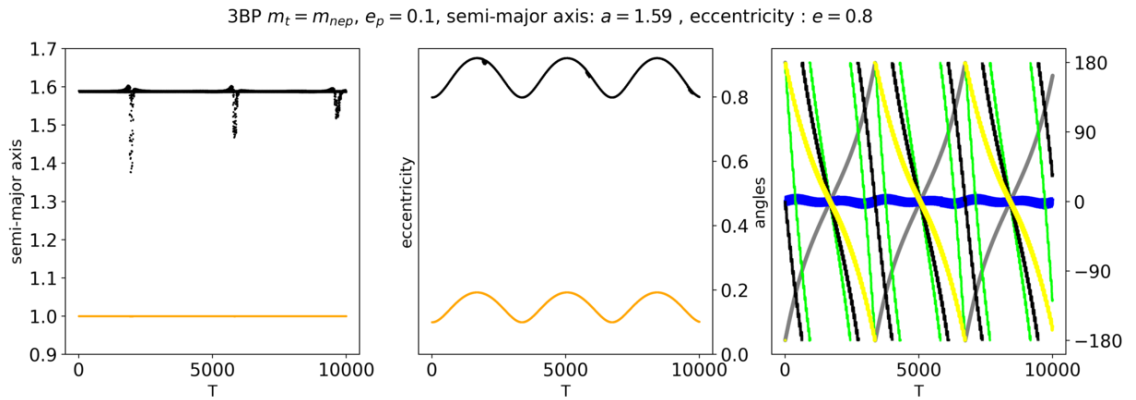
(a) $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$ (b) $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = \pi$

Figura 6.24: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Netuno na configuração $\phi^* = 0$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$. (a) Condição inicial: $a_0 = 1.59, e_p = 0.5$ e $e_0 = 0.5$; (b) Condição inicial: $a_0 = 1.59, e_p = 0.1$ e $e_0 = 0.8$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde, ϕ_2^* em preto e ϕ_3^* em amarelo.

A Figura 6.25 apresenta duas outras órbitas para as configurações $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$ e $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = \pi$. Ambos casos apresentam libração somente do ângulo do CR3BP, o qual libra em 180.

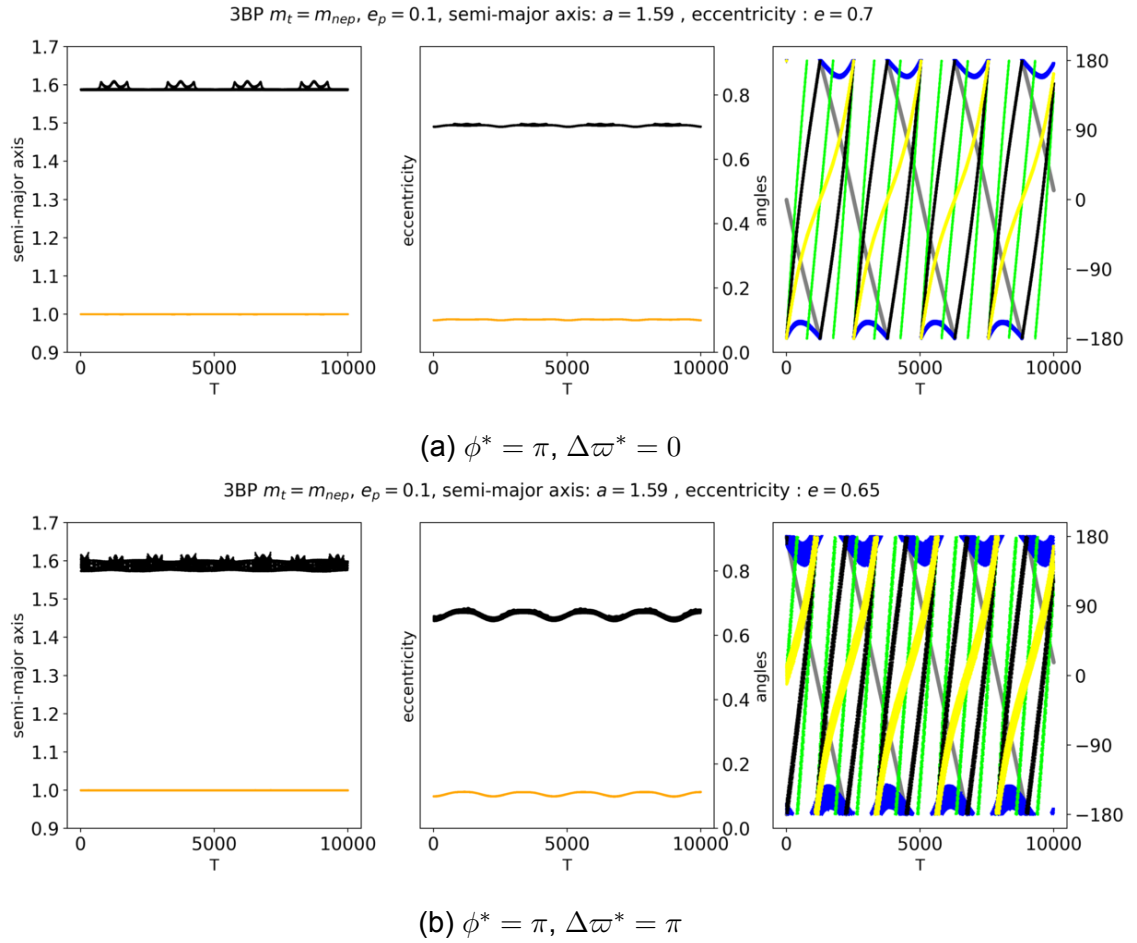


Figura 6.25: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Netuno na configuração $\phi^* = 0, \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$. (a) Condição inicial: $a_0 = 1.59, e_p = 0.1$ e $e_0 = 0.7$; (b) Condição inicial: $a_0 = 1.59, e_p = 0.1$ e $e_0 = 0.65$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde, ϕ_2^* em preto e ϕ_3^* em amarelo.

As figuras apresentadas a seguir são referentes ao caso onde o terceiro corpo assume a massa de Júpiter na ressonância 1/-2. A partir dos resultados reportados nas Figuras 6.26a e 6.26b é possível identificar que apesar da grande variação significativa de massa, se comparado ao caso netuniano, tais configurações ainda apresentam estabilidade e regiões de ressonância similares ao caso de Netuno se consideramos somente os ângulos definidos para este caso ($\phi^*, \phi_1^*, \phi_2^*$ e ϕ_3^*), porém restringidas por colisões e caos. Dessa forma, foram observados duas famílias ressonantes relacionadas ao ponto fixo na configuração inicial $\phi^* = 0, \Delta\varpi^* = 0$, assim como o caso de Netuno. Porém, tanto na Figura 6.26a como na Figura 6.27a, o

aumento da massa permite a existência de mais uma família ressonante nos casos citados, as quais demonstraram existirem para o valor mínimo de massa próxima de Saturno ($m > m_{sat}$). Sendo esta associada a libração do ângulo ϕ_3^* .

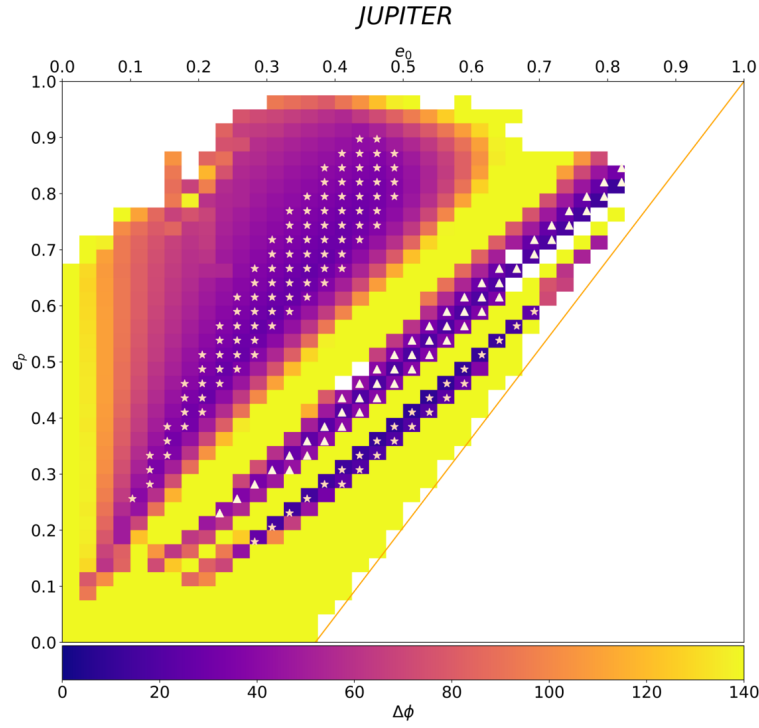
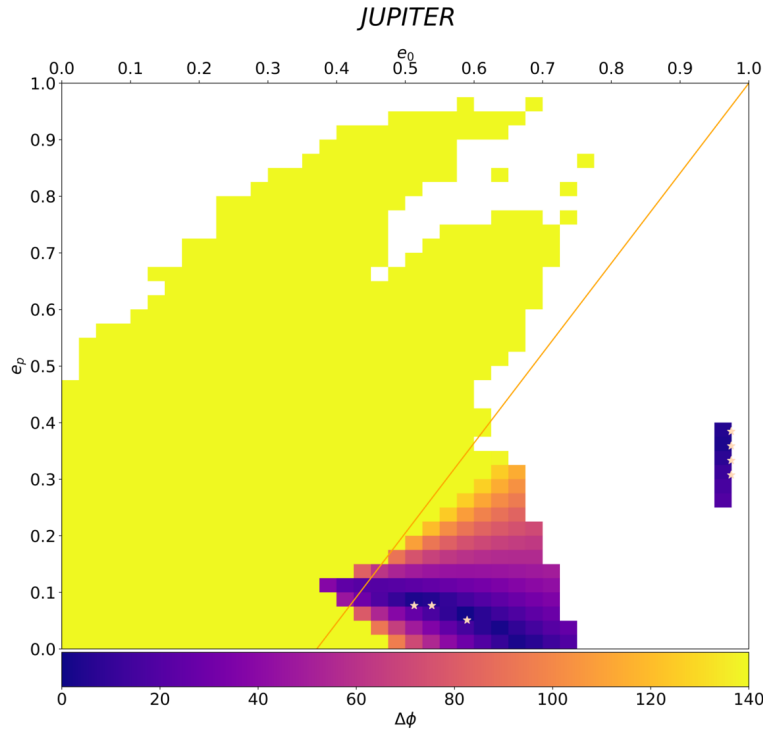
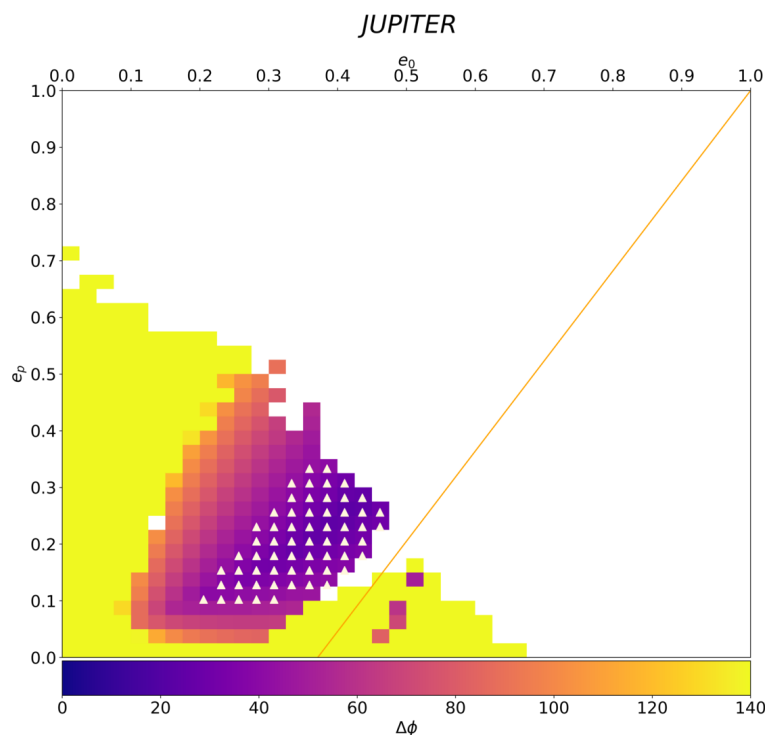
(a) Configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$.(b) Configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$.

Figura 6.26: Mapas de estabilidade da região ressonante 1/2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = 0, \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ressonante do problema restrito. Os símbolos $\star$ sobrepostos nas Figuras informam as regiões onde existem librações menores que 90 graus em todos os ângulos ressonantes.



(a) Configuração $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = \pi$.

Figura 6.27: Mapas de estabilidade da região ressonante 1/-2 para o problema não restrito considerando $m_p = 0.001$ e $m_t = m_{jup}$ com $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = \pi$. A barra de cor indica a amplitude do ângulo ϕ_3^* . O símbolo $\wedge$ indica a libração isolada do ângulo ϕ_3^* menor que 90 graus.

Já a Figura 6.28 ilustra a estabilidade do sistema em um grid de condições iniciais integrados numericamente por 200 mil períodos no caso da excentricidade da binária ser $e_p = 0.8$. Os resultados demonstram que o centro ressonante está localizada em uma região próxima de $a_0 \approx 1.577$, isso pode ser verificado a partir da densidade de pontos, e a estabilidade da família associada a ϕ_3^* também está presentes em outras condições iniciais de semieixo.

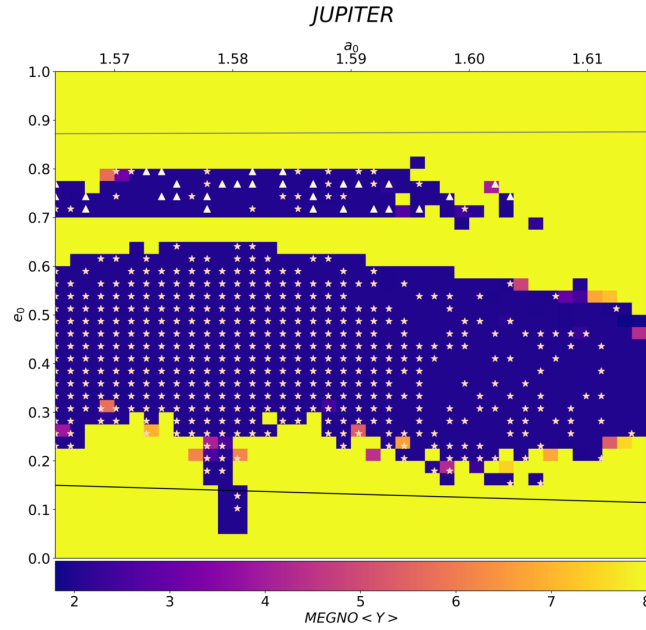


Figura 6.28: Mapa de estabilidade para o terceiro corpo assumindo a massa de Júpiter na ressonância 1/-2 na configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$, sendo a excentricidade do planeta interior $e_p = 0.8$. Os símbolos brancos sobrepostos na região estável representam a libração do ponto fixo caso seja $\star$ e libração do ângulo ϕ_3^* caso seja $\wedge$.

A Figura 6.29a apresenta a condição inicial $a_0 = 1.59$ e $e_0 = 0.4$, a qual demonstra a partir dos elementos orbitais ser um ponto elíptico apresentando librações de todos os ângulos ressonantes em torno 0 e 180. Já o caso reportado na Figura 6.29b é a condição inicial referente a região **não** ressonante de todos os ângulos, sendo esta $a_0 = 1.59$ e $e_0 = 0.55$, relacionado à libração do ângulo restrito, é observado também que provavelmente devido a condição não estar relativamente próxima ao centro, pois este poderia ser em outro semieixo fixo, a amplitude dos demais ângulos ressonantes torna-se grande suficiente que este ponto não foi observado e considerado como um ponto fixo, contudo indica que se trata de uma condição inicial próxima.

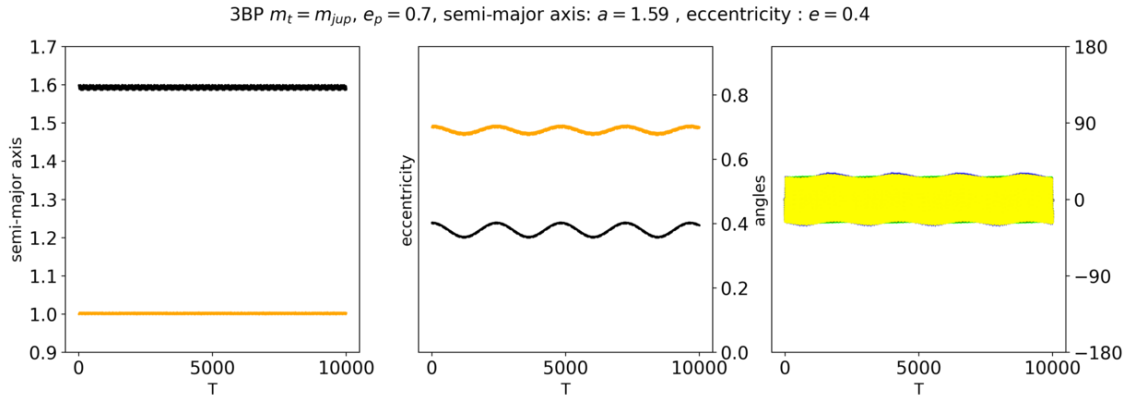
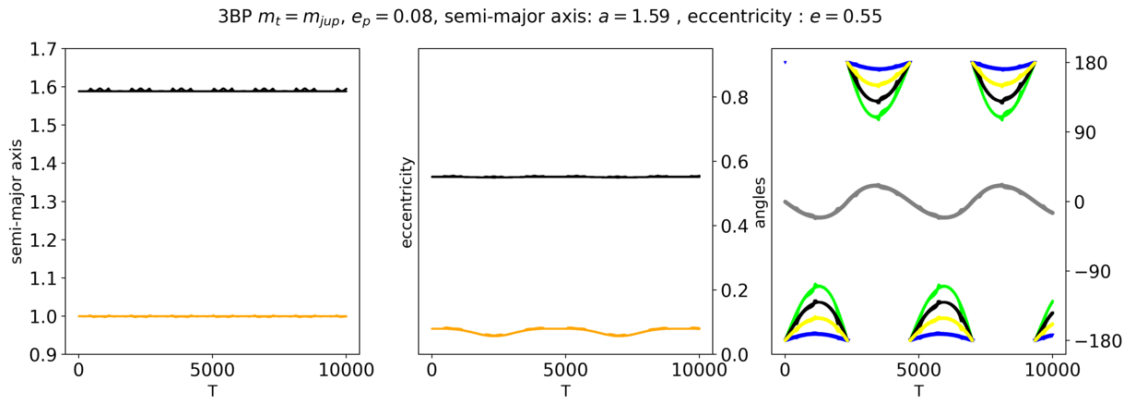
(a) $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$.(b) $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$.

Figura 6.29: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Júpiter na configuração $\phi^* = 0, \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0$. (a) Condição inicial: $a_0 = 1.59, e_p = 0.7$ e $e_0 = 0.4$; (b) Condição inicial: $a_0 = 1.59, e_p = 0.08$ e $e_0 = 0.55$. Os ângulos analisados foram $\Delta\varpi$ em cinza, ϕ^* em azul, ϕ_1^* em verde, ϕ_2^* em preto e ϕ_3^* em amarelo.

Assim como observado na ressonância 2/-1 na configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$, foram identificados efeitos similares de ressonância na configuração $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$ e $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = \pi$, onde o ângulo ϕ_3 librou em 0, apresentando uma família extensa de soluções, conforme ilustrado na Figura 6.26a e 6.27a, sendo que os elementos orbitais estão dispostos nas Figuras 6.30a e 6.30b. Também de forma similar foi observado que a variação da excentricidade ocorreu de modo semelhante ao caso da ressonância 2/-1, porém de amplitude invertida, o que é intuitivo já que estes casos possuem certa simetria.

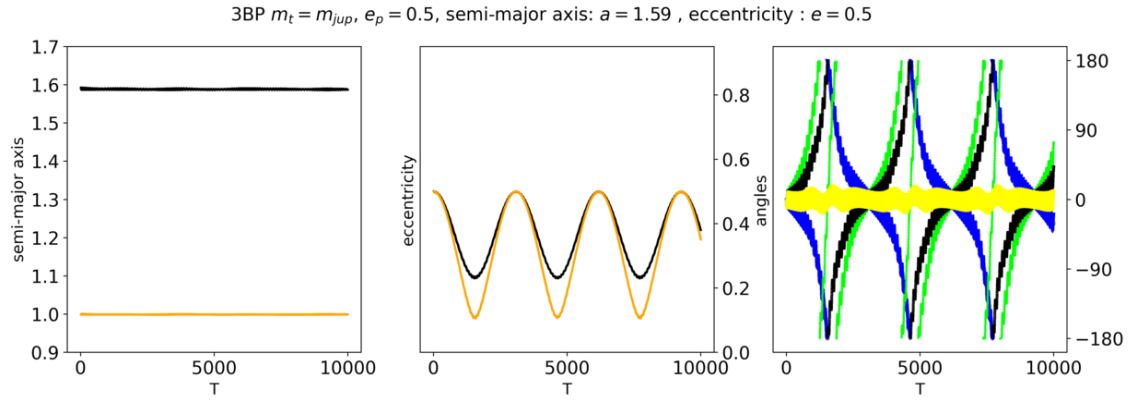
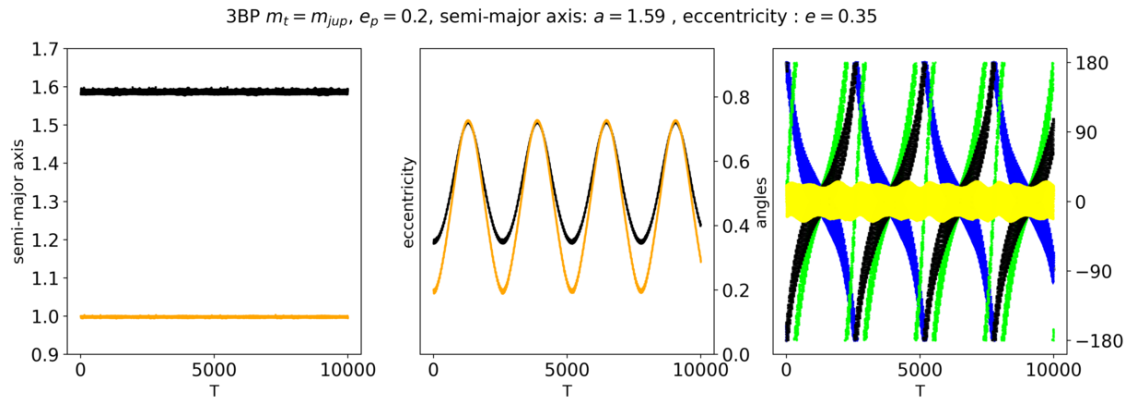
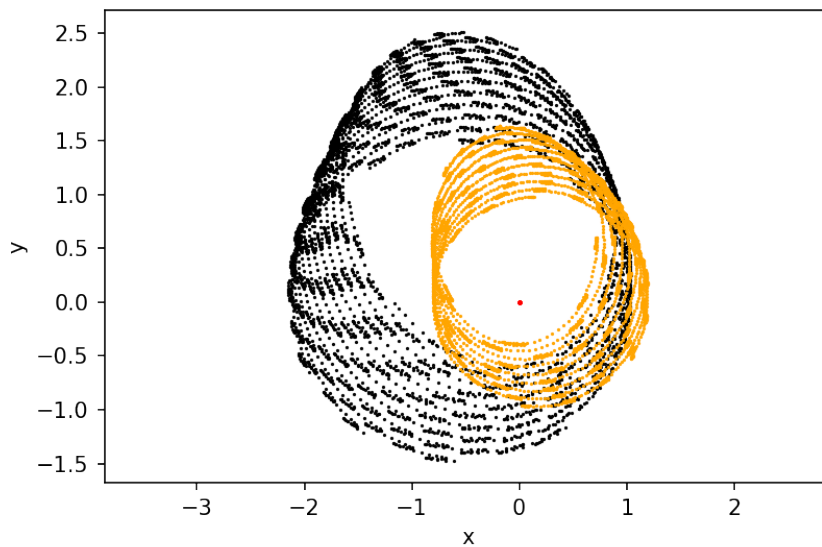
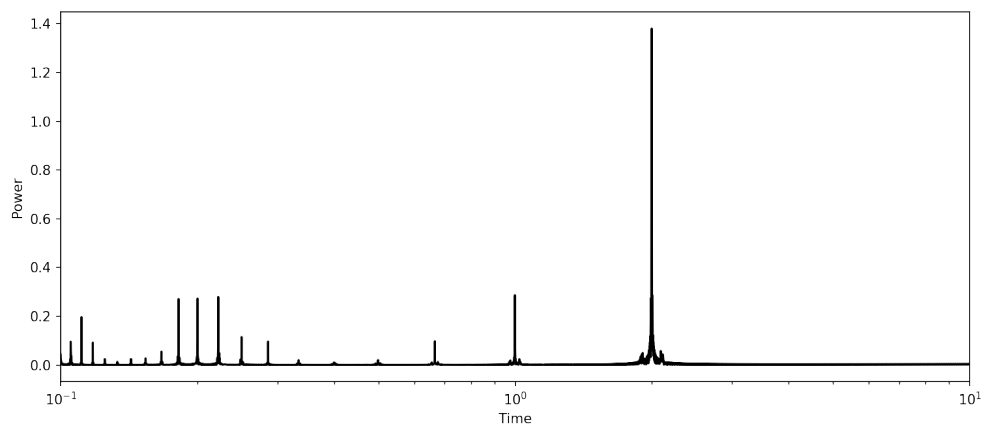
(a) $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$.(b) $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = \pi$.

Figura 6.30: Elementos orbitais em função do tempo no centro da região de ressonância para o problema não restrito, onde o terceiro corpo assume a massa de Júpiter na configuração $\phi^* = 0, \pi$ e $\Delta\varpi^* = 0, \pi$. (a) Condição inicial: $a_0 = 1.59, e_p = 0.5$ e $e_0 = 0.5$; (b) Condição inicial: $a_0 = 1.59, e_p = 0.2$ e $e_0 = 0.35$

Uma análise do referencial girante demonstra uma órbita similar a de ressonância 1/-2 em poucos períodos, porém devido a precessão o referencial girante deve ser analisado para curtos períodos. Para isso foi necessário analisar o referencial inercial dessas órbitas, o qual permite observar que ambos os casos estão relacionados em ressonância. O mesmo ocorre para a ressonância 2/-1 porém com relação invertida.



(a) Órbita no referencial inercial da condição inicial apresentada na Figura 6.30 para 1000 períodos da binária.



(b) Periodograma de X.

Figura 6.31: Órbita ressonante em ϕ_3^* . (a) A órbita no referencial inercial foi gerada através do integrador implícito então não necessariamente deve ser contínua; (b) O Periodograma obtido para a coordenada X da órbita apresenta o pico nítido em 2 períodos indicando a relação de ressonância orbital retrógrada 1/-2

A Figura 6.31 apresenta a órbita no referencial inercial e seu periodograma, sendo possível verificar que a órbita sofre uma precessão ao longo da evolução orbital, portanto, deste modo não é possível plotar seu movimento no referencial

girante. O periodograma indica um pico único em 2, o qual é o esperado para uma ressonância 1/-2. Neste caso este tipo de comportamento pode ser interpretado como uma ressonância.

A Figura 6.32 apresenta órbitas estáveis no referencial sinódico. O painel inferior esquerdo apresenta a órbita referente a libração do ângulo ϕ_3^* , inicialmente essa órbita tem o comportamento similar ao da ressonância 1/-2 no ponto fixo, contudo devido a precessão do argumento do pericentro o comportamento no sinódico não é fixo.

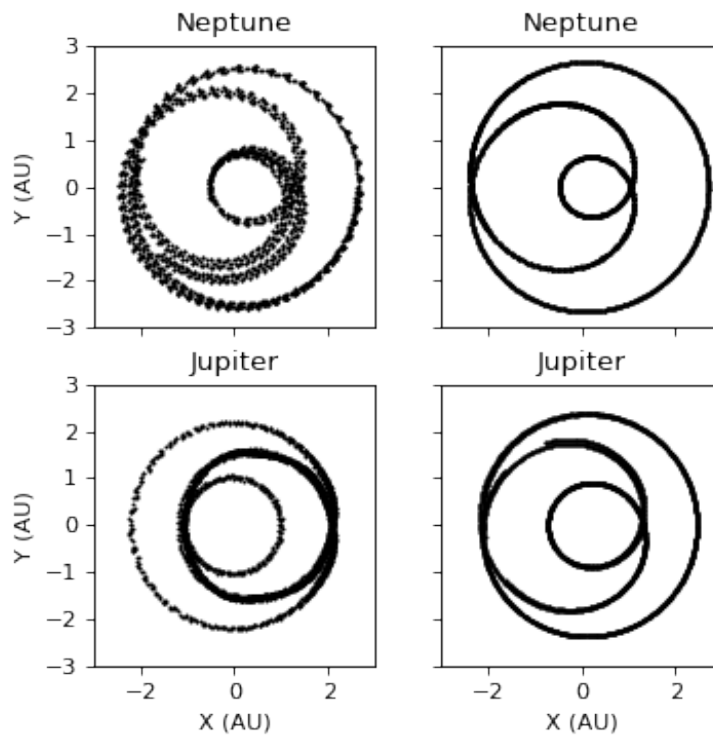


Figura 6.32: Órbitas no referencial sinódico das ressonância 1/-2 das órbitas estáveis encontradas para as configurações $\phi^* = 0$ e π , $\Delta\omega^* = 0$ e π . Sendo os painéis da esquerda para direita: superiores referentes as Figuras 6.25a,6.25b e os painéis inferiores as Figuras 6.29a e 6.29b

7 Discussão

No que diz respeito ao problema geral de três corpos, foi possível identificar e observar estabilidades e ressonâncias associadas, também observamos tipos de ressonância associadas a casos específicos, como por exemplo, librações do ângulo restrito e do ponto fixo. Em configurações com $\phi^* = 0$, $\Delta\varpi^* = 0$ na ressonância 2/-1 observamos a existência de famílias associadas a libração do ângulo ϕ_3^* e ϕ_2^* , bem como, na ressonância 1/-2.

Observou-se limitações de regiões de estabilidade nos casos de massa na ordem joviana na ressonância 1/-1, sendo permitida somente em regiões específicas. Foi constatado que o ângulo $\Delta\varpi$ possui comportamento distinto da análise se o problema fosse restrito, de forma que, existem casos onde todos os ângulos ressonantes do problema geral libram em ϕ^* e por consequência $\Delta\varpi^* \approx 0$, e casos onde somente o ângulo relacionado ao caso restrito libra, e, portanto, existe uma circulação da diferença dos argumentos do pericentro que ocorre de modo a manter a ressonância, diferentemente do caso restrito onde essa variação tem comportamento semelhante a $\Delta\varpi \approx 0$. Deste modo, é plausível que haja uma separação de tipos de ressonâncias sendo elas referentes ao problema de três corpos e ao problema restrito de três corpos.

Observou-se que os resultados obtidos para os mapas de estabilidade da região ressonante coorbital, os quais estão apresentados na seção 6.1, descrevem resultados exclusivos para a configuração de ressonância de 2 júpiteres $\phi^* = \pi$, $\Delta\varpi^* = 0$, conforme é ilustrado na figura 6.7. Ao analisarmos o caso para o mapa de Júpiter-Saturno 6.4 não foram observados sinais da possível estabilidade, tal ressonância é causada provavelmente pela interação gravitacional entre os dois planetas massivos.

Na ressonância 2/-1, apresentada na seção 6.2, existem estudos de órbitas retrógradas planares com um sistema binário prógrado constituído pelo Sol e Júpiter. Tais resultados apontam para a existência de diversas famílias ressonantes com diferentes combinações no problema restrito [13]. Contudo, os mapas de estabilidade obtidos numericamente reportam a existências de famílias de órbitas periódicas em diferentes configurações com diferentes razões de massa, o que implica que é possível que corpos de massa considerável possam existir em configurações retrógradas em regiões similares. É notável a existência de famílias de soluções periódicas a partir da análise da amplitude do ângulo ressonante, as quais podem ser observadas nos mapas de estabilidade apresentados na seção citada. Essas soluções existem quando a massa do terceiro corpo assume valores equivalentes a de Netuno, Saturno e Júpiter.

A ressonância retrógrada no caso de órbitas circulares do binário no problema restrito foi estudada inicialmente por [23], investigando a estabilidade de possíveis configurações do ângulo ressonante, considerando os casos de libração para $\phi^* = 0$ e $\phi^* = \pi$, onde o sistema adotado nas simulações é binário Sol-Júpiter. De forma similar, estudos como [14], também apresentam resultados de famílias de órbitas periódicas no problema restrito planar, sendo que o binário assume uma órbita elíptica ou circular, onde um sistema binário Sol-Netuno é adotado. Ambos casos possuem grande relevância de estudo devido a existência de grupos de asteroides como os troianos e transneptunianos que, eventualmente, podem estar em órbitas retrógradas. Devido a pequena perturbação que uma massa como a de ordem netuniana pode causar no problema de três corpos, existe uma grande semelhança na estabilidade do sistema de três corpos com o problema restrito. Dessa forma, podemos verificar as mesmas regiões de estabilidade, com pequenas diferenças, que as obtidas por [19],[23].

Os resultados apresentados na seção 6.3 para as massas netunianas e jovianas demonstraram a existência de regiões de órbitas estáveis e ressonantes, assim como os centros ressonantes dessas famílias. Em geral, é possível observar uma separação entre as regiões nos mapas ocasionadas pelas colisões do sistema planetário, fato que ocorre em todos os sistemas. Também é observado a separação de soluções de famílias ressonantes, a pequena perturbação causada pela massa de

corpos na ordem netuniana também resulta em instabilidade nas órbitas nas bordas de regiões estáveis.

De forma geral, os mapas para as configurações onde $\Delta\varpi = \pi$ apresentaram regiões ressonantes e estáveis em quantidade inferior do que o caso onde $\Delta\varpi = 0$, seja para $\phi^* = 0$ ou $\phi^* = \pi$ nas regiões de ressonância 1/-1 e 2/-1. Sua estabilidade está limitada a configurações de baixa excentricidade do planeta binário.

8 Considerações finais

De modo a estender os presentes estudos na literatura sobre estabilidade de sistema retrógrados planares, é que este projeto, em parte, obteve e apresentou os resultados para sistemas do problema restrito de três corpos com binários estelares. Os resultados apresentados por meio de seções de Poincaré permitem entender o comportamento das ressonâncias através do espaço de fase. As ilhas presentes nas figuras referentes as seções de Poincaré estão associadas diretamente as ressonâncias existentes, contudo, conforme já citado, a escolha das condições iniciais para determinar as frequências associadas às ressonâncias podem fazer com que os valores obtidos sofram desvios, porém estão próximo do esperado. Este fenômeno foi observado e comparado mediante a análise de Fourier para a frequência entre o segundo corpo e o terceiro corpo em conjunto com a frequência associada às ilhas no espaço de fase.

Foi observado que para $\mu \geq 0.1$ a utilização dos elementos orbitais para a análise de ressonância não é suficiente devido a perturbação do sistema e aproximações do problema de 2 corpos começam a ser inválidas em determinados momentos. Contudo, os elementos orbitais podem trazer informações de sua dinâmica durante momentos do período orbital que seu comportamento é de uma elipse kepleriana instantânea.

Nesses casos, a transformada de Fourier e outros periodogramas como o Lomb-Scargle sofreram com desvios de frequência esperados para o problema circular. Identificamos que obter os valores exatos das frequências associadas as ressonâncias nestes casos, se torna uma tarefa não trivial, sendo possivelmente responsável pela variação observada no sistema.

Verificou-se também que a medida que a massa μ do binário aumenta, existe um

aumento proporcional na perturbação que pode causar diretamente a destruição das ilhas ressonantes, ou seja, se comparado os binários estrela e planeta com binários estrela-estrela, é notória a distinção da população de ilhas ressonantes.

No CR3BP não observamos ressonâncias do tipo internas em sistemas estelares retrógrados.

A libração do ângulo do problema restrito foram observadas em todas as regiões estudadas em ao menos uma das configurações. Ressonâncias exclusivas associadas ao ângulo $\phi_3^{1/-2} = 2\lambda^* - \lambda' + \varpi' - 2\varpi^*$ e $\phi_2^{2/-1} = \lambda^* - 2\lambda' + \varpi' - 2\varpi^*$ foi obtido somente nas regiões de ressonância 1/-2 e 2/-1. Tais famílias demonstraram existir em regiões lineares onde $e_p \approx e_0$.

Por outro lado, também foram desenvolvidos estudos sobre a dinâmica orbital de sistemas planetários retrógrados, os quais estão associados ao problema geral de três de corpos. Verificamos que os ângulos ressonantes podem ser separados em três grupos, sendo estes associadas libração dos ângulos: Problema restrito - CR3BP (ϕ), Libração exclusiva de ϕ_3 ou ϕ_2 e, por fim, a libração de todos os ângulos ressonantes em conjunto (ponto fixo).

Observamos que os sistemas planetários em órbitas retrógradas nas regiões de ressonância coorbital, 1/-2 e 2/-1 apresentam resultados similares ao problema restrito caso a massa do terceiro corpo seja a massa de Netuno em binários do tipo Sol-Júpiter. Também demonstramos a existência de ressonâncias e estabilidade nas regiões citadas. Verificamos numericamente a existência de sistemas jovianos em ressonância coorbital na configuração $\phi^* = \pi$.

Referências

- [1] Christian Beaugé, Sylvio Ferraz-Mello, and Tatiana A Michtchenko. Planetary masses and orbital parameters from radial velocity measurements. *Extrasolar Planets*, S, 2, 2007.
- [2] RA Broucke. Periodic orbits in the elliptic restricted three-body problem technical report, 1 jul. 1967-30 jun. 1968. Technical report, 1969.
- [3] Pablo Miguel Cincotta and C Simó. Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials–i. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 147(2):205–228, 2000.
- [4] Keren M Ellis and Carl D Murray. The disturbing function in solar system dynamics. *Icarus*, 147(1):129–144, 2000.
- [5] Edgar Everhart. An efficient integrator that uses gauss-radau spacings. *International Astronomical Union Colloquium*, 83:185–202, 1985.
- [6] Cl. Froeschlé, R. Gonczi, and E. Lega. The fast lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. application to the structure of the main asteroidal belt. *Planetary and Space Science*, 45(7):881–886, 1997. Asteroids, Comets, Meteors 1996 - II.
- [7] Alex Gezerlis. *Numerical Methods in Physics with Python*. Cambridge University Press, 2020.
- [8] MS Gonchenko, AO Kazakov, EA Samylna, and AI Shykhmamedov. On 1: 3 resonance under reversible perturbations of conservative cubic h\`enon maps. *arXiv preprint arXiv:2105.01360*, 2021.

-
- [9] K Goździewski. Stability of the hd 12661 planetary system. *Astronomy & Astrophysics*, 398(3):1151–1161, 2003.
- [10] John D Hadjidemetriou and George Voyatzis. The 1/1 resonance in extrasolar systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111(1):179–199, 2011.
- [11] Eugene Hecht. *Optics*, 5e. Pearson Education India, 2002.
- [12] Željko Ivezić, Andrew J Connolly, Jacob T VanderPlas, and Alexander Gray. *Statistics, data mining, and machine learning in astronomy: a practical Python guide for the analysis of survey data*, volume 1. Princeton University Press, 2014.
- [13] Thomas Kotoulas and George Voyatzis. Planar retrograde periodic orbits of the asteroids trapped in two–body mean motion resonances with jupiter. *Planetary and Space Science*, 182:104846, 2020.
- [14] Thomas Kotoulas and George Voyatzis. Retrograde periodic orbits in 1/2, 2/3 and 3/4 mean motion resonances with neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 132(6):1–16, 2020.
- [15] Renu Malhotra. Orbital resonances and chaos in the solar system. In *Solar System Formation and Evolution*, volume 149, page 37, 1998.
- [16] Daniel Malmberg, Melvyn B Davies, and Douglas C Heggie. The effects of flybys on planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411(2):859–877, 2011.
- [17] Helena Morais and Fathi Namouni. Reckless orbiting in the solar system. *Nature*, 543(7647):635–636, 2017.
- [18] Maria Helena M Morais and Fathi Namouni. A numerical investigation of coorbital stability and libration in three dimensions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 125(1):91–106, 2016.
- [19] MHM Morais and CA Giuppone. Stability of prograde and retrograde planets in circular binary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 424(1):52–64, 2012.

-
- [20] MHM Morais, AV Martinheira, AC Signor, GA Caritá, and Damin LR. The disturbing function for the planetary retrograde problem. *artigo em preparação*, x(x):x, 2021.
- [21] MHM Morais and F Namouni. Asteroids in retrograde resonance with jupiter and saturn. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 436(1):L30–L34, 2013.
- [22] MHM Morais and F Namouni. Retrograde resonance in the planar three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117(4):405–421, 2013.
- [23] MHM Morais and F Namouni. On retrograde orbits, resonances and stability. *Computational and Applied Mathematics*, 35(3):881–891, 2016.
- [24] MHM Morais and F Namouni. First trans-neptunian object in polar resonance with neptune. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 472(1):L1–L4, 2017.
- [25] Carl D Murray and Stanley F Dermott. *Solar system dynamics*. Cambridge university press, 1999.
- [26] ZE Musielak and Billy Quarles. The three-body problem. *Reports on Progress in Physics*, 77(6):065901, 2014.
- [27] Fathi Namouni and Helena Morais. Coorbital capture at arbitrary inclination. *Computational and Applied Mathematics*, 37(1):65–71, 2018.
- [28] Fathi Namouni and Maria Helena Moreira Morais. Resonance capture at arbitrary inclination. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(2):1998–2009, 2015.
- [29] Fathi Namouni and Maria Helena Moreira Morais. The disturbing function for polar centaurs and transneptunian objects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 471(2):2097–2110, 2017.
- [30] Fathi Namouni and Maria Helena Moreira Morais. Resonance capture at arbitrary inclination—ii. effect of the radial drift rate. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 467(3):2673–2683, 2017.

-
- [31] Fathi Namouni and Maria Helena Moreira Morais. The disturbing function for asteroids with arbitrary inclinations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474(1):157–176, 2018.
- [32] Fathi Namouni and Maria Helena Moreira Morais. An interstellar origin for jupiter’s retrograde co-orbital asteroid. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 477(1):L117–L121, 2018.
- [33] Harry Pollard. *Celestial Mechanics*. Mathematical Association of America, 1976.
- [34] Harry Pollard and Donald G Saari. Singularities of the n-body problem. i. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 30(4):263–269, 1968.
- [35] Python. Numpy fft routine. <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html>, 2021.
- [36] DJ Ramm, Dimitri Pourbaix, John B Hearnshaw, and S Komonjinda. Spectroscopic orbits for k giants β reticuli and ν octantis: what is causing a low-amplitude radial velocity resonant perturbation in ν oct? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394(3):1695–1710, 2009.
- [37] Hanno Rein and David S Spiegel. las15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(2):1424–1437, 2015.
- [38] Hanno Rein and Daniel Tamayo. Whfast: a fast and unbiased implementation of a symplectic wisdom–holman integrator for long-term gravitational simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 452(1):376–388, 2015.
- [39] Zsolt Sándor, Bálint Érdi, András Széll, and Barbara Funk. The relative lyapunov indicator: an efficient method of chaos detection. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 90(1):127–138, 2004.
- [40] Ch. Skokos and T. Manos. The smaller (sali) and the generalized (gali) alignment indices: Efficient methods of chaos detection, 2015.

-
- [41] Pasquale Tricarico. Orsa tool chain. <http://orsa.sourceforge.net/about.html>, 2001.
- [42] Paul Wiegert, Martin Connors, and Christian Veillet. A retrograde co-orbital asteroid of jupiter. *Nature*, 543(7647):687–689, 2017.

A Resultados gerais

Todos os resultados obtidos neste estudo podem ser visualizados através dos links disponibilizados abaixo ou por meio do contato gabrielcarita@gmail.com

A.1 Seções de Poincaré

Gifs com todas as seções de Poincaré para o espaço de fase (X, Y) com $VX = 0$ assumindo $VY > 0$ e $VY < 0$ podem ser acessadas nestes link:

<https://drive.google.com/drive/folders/1eAfGqZpHJN2xXMKr50yIDmZWqKhrN27f?usp=sharing>

A.2 Mapas de estabilidade

Os mapas de estabilidade no caso planar podem ser acessados através deste link:

https://drive.google.com/drive/folders/1EYXfAZfU-OUI_9409w2gpEsJKgYyLldM?usp=sharing