97

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.003/94

RPA Relativística para ressonâncias gigantes isovetoriais

Otávio Socolowski Junior

Orientador

Alfredo Pio Noronha Rodrigues Galeão

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
213
BIBLIOTECA

Agosto 1994

A meu pai (em memória), a quem tanto devo.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus agradecimentos

- Ao Ivan, pelas palavras de incentivo nos momentos de desânimo e pela inestimável ajuda na confecção deste trabalho.
- Ao Cláudio, pelo companheirismo nesses anos que trabalhamos juntos.
- Aos amigos Luiz Barreiro, Andrea, Mauro e Felice, pela amizade dispensada.
- A todos os professores e funcionários do IFT.
- Aos professores Makoto, Renê e Hessel (UNESP-Rio Claro). Sou muito grato a eles pelos ensinamentos sobre física e sobre a vida.
- Ao professor Galeão , pela paciência e amizade demonstradas durante todos esses anos.
- Aos meus familiares, especialmente minha mãe, pelo amor e apoio.
- À FAPESP e à CAPES, cujo apoio financeiro possibilitou esse trabalho.

RESUMO

Derivamos em detalhe as equações da aproximação da fase aleatória (RPA) relativística apropriadas para ressonâncias gigantes isovetoriais em núcleos de camadas fechadas pelo método da linearização das equações de movimento. Baseamo-nos na hadrodinâmica quântica (QHD), uma teoria quântica de campos relativística para a descrição de sistemas nucleares que trata os nucleons como partículas de Dirac acopladas a mésons efetivos $\sigma(J^{\pi} = 0^{+}, T = 0)$, $\omega(1^{-}, 0)$, $\rho(1^{-}, 1)$ e $\pi(0^{-}, 1)$ e ao campo eletromagnético. No tratamento proposto, o estado fundamental do núcleo é descrito na aproximação de Hartree-Fock relativística, cujas equações são também derivadas aqui, com base na mesma QHD. Esse tratamento tem um alto grau de autoconsistência pois tanto o estado fundamental como as excitações são descritas com as mesmas interações .

Palavras-chaves: Ressonâncias gigantes, RPA relativística, aproximação de Hartree-Fock relativística, hadrodinâmica quântica.

Área de conhecimento: 1.05.04.01-0

ABSTRACT

We derive in detail the relativistic random phase approximation (RPA) equations suitable for isovector giant resonances in closed-shell nuclei by the method of linearization of the equations of motion . We base this derivation on quantum hadrodynamics (QHD), a relativistic quantum field theory for the description of nuclear systems that treats nucleons as Dirac particles coupled to the effective mesons $\sigma(J^\pi = 0^+, T = 0)$, $\omega(1^-, 0)$, $\rho(1^-, 1)$ and $\pi(0^-, 1)$ and to the electromagnetic field. In the treatment proposed here, the nuclear ground state is described in the relativistic Hartree-Fock approximation, whose equations are also derived here, in the same QHD framework. This treatment has a high degree of self-consistency since both the ground state and the excitations are described with the same interaction.

Key words: Giant resonances, relativistic RPA, relativistic Hartree-Fock approximation, quantum hadrodynamics.

ÍNDICE

Introdução geral 1

Notação e convenções 3

Capítulo I) Ressonâncias gigantes 5

I.1) Introdução 5

I.2) Características gerais 5

I.2.a) Ressonância dipolar elétrica 8

I.2.b) Ressonância quadrupolar elétrica 9

I.2.c) Ressonância octopolar elétrica 10

I.2.d) Ressonância monopolar elétrica 11

I.2.e) Ressonância dipolar magnética e de Gamow-Teller 12

I.3) Descrição teórica das ressonâncias gigantes 13

Capítulo II) Hadrodinâmica quântica 15

II.1) Introdução 15

II.2) QHD e teoria de campo médio 15

II.3) MFT para núcleos finitos (aproximação de Hartree) 19

Capítulo III) Aproximação de Hartree-Fock relativística 26

III.1) Introdução 26

III.2) Hamiltoniana relativística 26

III.3) Aproximação de Hartree-Fock relativística 34

III.4) Parâmetros do modelo 42

Capítulo IV) RPA relativística 44

IV.1) Introdução 44

IV.2) Obtenção das equações da RPA 44

IV.3) RPA relativística 48

IV.4) Equações da RPA no acoplamento JT 51

Conclusão 67

Apêndice II.A) Solução da equação de Dirac em um potencial central 69

Apêndice III.A) Teorema de Noether 76

Apêndice III.B) Propagador livre para o méson ρ 77

Apêndice III.C) Dedução do termo H_ω 78

Apêndice III.D) Componentes esféricas da matriz $\vec{\alpha}$ 79

Apêndice III.E) Equações de Hartree-Fock 80

Apêndice IV.A) Elementos de matriz $A_{p'h',ph}$ e $B_{p'h',ph}$ 102

Apêndice IV.B) Teorema de Wick 103

Apêndice IV.C) Expressões dos elementos de matriz aparecendo na hamiltoniana relativística 105

Apêndice IV.D) Contribuição do méson ρ para $\mathcal{A}^{(JT)}_{d_{p'}d_{h'},d_pd_h}$ e $\mathcal{B}^{(JT)}_{d_{p'}d_{h'},d_pd_h}$ 110

Referências 120

RPA RELATIVÍSTICA PARA RESSONÂNCIAS GIGANTES ISOVETORIAIS

ERRATA

1) Página 38, abaixo da Eq.(III.58.e)

onde se lê: III.D deve-se ler: III.E

2) Página 44, abaixo da Eq.(IV.1)

onde se lê: III.D deve-se ler: III.E

3) Página 67, primeiro parágrafo

onde se lê: III.D deve-se ler: III.E

4) Equações (III.69), (III.70), (III.E.92) e (III.E.93)

onde se lê: $< \kappa | Y_{LM} | - \kappa' >$ deve-se ler: $< \kappa \parallel Y_L \parallel - \kappa' >$

5) Equação (IV.13). Sua forma correta é

$$\varepsilon_q \sum_{p'h'} (X^{(q)}_{p'h'} b^{\dagger}{}_{p'} b_{\bar{h}'} - Y^{(q)}_{p'h'} b^{\dagger}{}_{\bar{h}'} b_{p'})$$

6) Equação (II.A.1)

onde se lê: g_s deve-se ler: g_σ

INTRODUÇÃO GERAL

Ressonâncias gigantes são modos vibracionais coletivos com diversas multipolaridades. Podem ser classificadas em iso-escalares, com prótons e nêutrons movendo-se em fase, e isovetoriais, com prótons e nêutrons movendo-se fora de fase.

Na tentativa de descrevê-las é conveniente buscarmos modelos simplificadores, já que somos incapazes de resolver exatamente o problema para um sistema complexo de muitos corpos, como o núcleo. Baseados na experiência adquirida com o tratamento teórico do núcleo, pode-se considerar, de um modo aproximado, o núcleo como tendo seus nucleons movendo-se em um potencial médio. Dentro desse modelo de partículas independentes, as ressonâncias gigantes são vistas como excitações partícula-buraco coletivas.

A *Aproximação de Fase Aleatória* (RPA-Random Phase Approximation) é a teoria microscópica básica para descrever esses estados coletivos. Na sua versão usual, não relativística, ela tem sido aplicada com bastante freqüência e considerável sucesso às ressonâncias gigantes [1,2].

Para resolver as equações da RPA é necessário, entre outras coisas, o conhecimento da interação nucleon-nucleon. Cálculos convencionais utilizam-se de interações fenomenológicas como, por exemplo, interações de Skyrme [21].

A proposta desta dissertação é **obter as equações da RPA** utilizando um modelo relativístico para a interação nucleon-nucleon. Construiremos uma interação efetiva baseada na *Hadrodinâmica Quântica* (QHD)[3], um modelo em teoria quântica de campos relativística que descreve sistemas nucleares levando em conta, além dos graus de liberdade bariônicos, os apropriados graus de liberdade mesônicos. Nesse modelo, o nucleon, que é visto como uma partícula de Dirac, é acoplado a vários mésons (σ, ω, ρ, π) através de uma lagrangeana efetiva.

As energias e funções de onda de partícula-única, necessárias para resolver as equações

da RPA, são obtidas através das equações de Hartree-Fock relativística, deduzidas a partir de nossa interação efetiva. A dedução das equações de Hartree-Fock seguiu, principalmente, a referência [4], explicitando os cálculos lá indicados.

Esta dissertação está organizada como segue.

No capítulo I apresenta-se uma breve introdução às ressonâncias gigantes, indicando suas principais características.

No capítulo II introduz-se a densidade de lagrangeana do modelo relativístico (QHD) e deduzem-se as equações de Hartree através da chamada *teoria de campo médio* (MFT).

No capítulo III deduz-se, a partir da densidade de lagrangeana dada no capítulo II, ignorando-se os estados de energia negativa e fazendo-se a aproximação instantânea, a hamiltoniana efetiva, que é, então , usada para obterem-se as equações de Hartree-Fock relativística pelo método variacional. Discutem-se ao final deste capítulo os parâmetros do modelo.

No capítulo IV são obtidas as equações da RPA relativística através do método de linearização das equações de movimento. Apresentam-se as equações tanto na representação não acoplada em momento angular e isospin como na representação acoplada. Damos em forma explícita as equações apropriadas para núcleos-alvo de camadas fechadas e, no caso das equações na representação acoplada, nos limitamos, por simplicidade, a núcleos-alvo com isospin nulo.

Alguns resultados bem conhecidos utilizados nessas deduções , assim como certas passagens algébricas mais longas, estão coletadas em 10 apêndices.

NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

Nós utilizamos aqui as convenções de Bjorken and Drell [5]. As unidades físicas são escolhidas com $\hbar = c = 1$. Quadrivetores contravariantes (x^μ) e covariantes (x_μ) são escritos como

$$x^\mu = (t, \vec{x}), \qquad x_\mu = (t, -\vec{x})$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

e o tensor métrico é

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$ e $\partial_\mu \partial^\mu = \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$, onde índices gregos repetidos são somados de 0 a 3.

Note que a parte trivetorial de um quadrivetor covariante leva um sinal menos: $x_i = -x^i$. Índices latinos repetidos são somados de 1 a 3, salvo menção contrária.

As matrizes $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ obedecem

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

e na representação de Dirac-Pauli são escritas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

com as matrizes de Pauli definidas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nós frequentemente usamos as matrizes 4×4, $\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$ e

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO I

RESSONÂNCIAS GIGANTES

I.1) Introdução

Modos de excitação coletiva em sistemas de muitos corpos existem em muitos ramos da física. Nos núcleos, tais excitações são conhecidas há mais de 45 anos. Baldwin e Klaiber (1947/1948) observaram um grande aumento da seção de choque de absorção de fótons para altas energias de excitação (10-20 MeV), mostrando um claro comportamento ressonante de caráter dipolar. Isso confirmou as primeiras indicações de Bothe e Gentner (1937) e as predições teóricas feitas por Migdal (1944).

Após o trabalho de Baldwin e Klaiber descobriu-se que essas ressonâncias são uma característica geral de todos os núcleos. Hoje estão bem estabelecidos experimentalmente seis modos vibracionais gigantes, que se dividem em duas classes. A primeira são os modos vibracionais elétricos, que incluem o modo dipolar, o quadrupolar, o monopolar e o octopolar. A outra classe de vibrações nucleares, a dos modos magnéticos, envolve a orientação dos spins dos nucleons. Fazem parte dessa classe a chamada ressonância de Gamow-Teller e a ressonância dipolar magnética.

Alguns desses modos são de natureza iso-escalar (prótons e nêutrons em fase), outros são de natureza isovetorial (prótons e nêutrons em oposição de fase) e outros, ainda, são mistos.

I.2) Características gerais

As vibrações nucleares são excitadas por vários tipos de reações , tais como: reações fotonucleares, espalhamento inelástico de elétrons e íons leves e reações de troca de carga com íons leves. As vibrações são detectadas observando-se como o projétil é absorvido ou espalhado pelo núcleo.

Geralmente elas são caracterizadas pelas seguintes quantidades:

(i) Multipolaridade 2^J, onde J é o momento angular transferido ao núcleo-alvo no processo de excitação .

(ii) Momento angular orbital L carregado pelo operador de excitação .

(iii) Spin S da excitação . Os modos com S=0 são denominados elétricos e aqueles com S=1 são denominados magnéticos.

(iv) Isospin T do operador de excitação . Para T=0, temos os modos iso-escalares e para T=1, os isovetoriais.

(v) Centróide de energia E_x, que é definido como a energia de excitação média na região do pico de ressonância.

(vi) Largura Γ, medida, por exemplo, à meia altura do pico.

(vii) Seção de choque integrada em energia. Os modelos teóricos prevêem, para cada tipo de ressonância, uma relação entre essa grandeza e uma determinada propriedade do estado fundamental do núcleo-alvo. Essas são as regras de soma, que são obedecidas em maior ou menor grau pelas diversas ressonâncias.

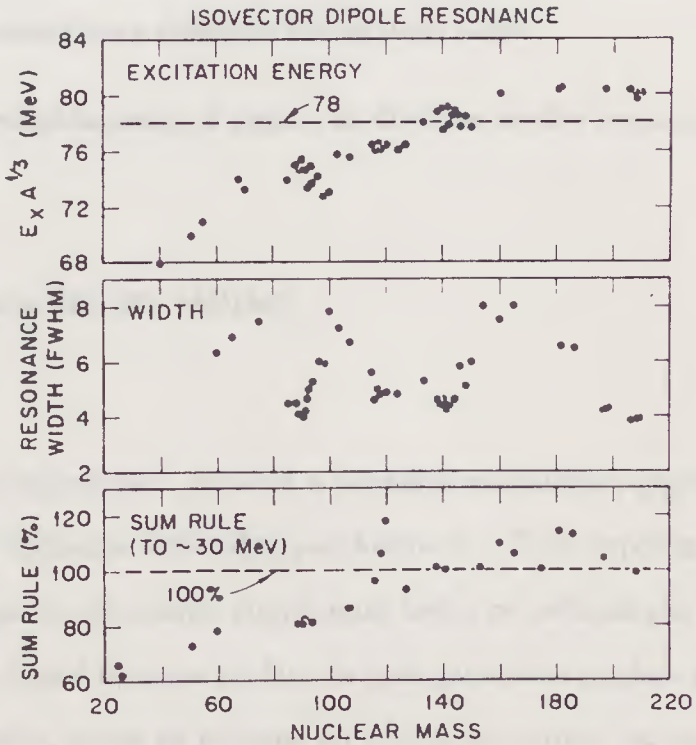

Fig.1. Variação com o número de massa do centróide de energia, da largura e do esgotamento da regra de soma para a ressonância dipolar elétrica isovetorial [Ref.6]

Verifica-se que, para cada valor de LSJT, essas últimas características variam suavemente com o número de massa A, indicando que as ressonâncias gigantes são propriedades gerais dos núcleos, ou mais precisamente, são respostas características da matéria nuclear a influências externas. Um exemplo encontra-se na Fig.1, para LSJT=1011.

Uma representação pictórica das ressonâncias gigantes pode ser obtida através do modelo da gota líquida. Desse ponto de vista, as ressonâncias gigantes de diferentes multipolaridades são diferentes tipos de movimentos coletivos de todos os nucleons em um núcleo. Já do

ponto de vista do modelo de camadas, elas são excitações partícula-buraco fortemente correlacionadas compostas pelos "saltos" de muitos nucleons das camadas fechadas (correspondendo ao estado fundamental) para camadas vazias mais altas.

Discutimos resumidamente, a seguir, os diversos modos ressonantes.

I.2.a) Ressonância dipolar elétrica

Como dito na introdução , esta foi a primeira ressonância gigante a ser descoberta, em 1947, em reações nucleares induzidas por fótons γ. Para explicar essas ressonâncias, um mecanismo foi proposto de acordo com o qual todos os prótons são deslocados em relação a todos os nêutrons. Isso é baseado no fato de que quando os núcleos são irradiados por fótons de energia 10-20 Mev, todos os prótons do núcleo se movem na mesma direção sob a ação do vetor campo elétrico $\vec{E}$ associado ao fóton. Em contrapartida, os nêutrons se movem na direção oposta já que o centro de massa do núcleo permanece em repouso. Como prótons e nêutrons estão em fases opostas, esta é uma ressonância isovetorial ($T = 1$).

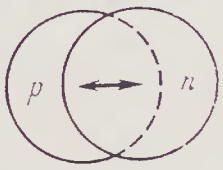

Fig.2 Modo de oscilação dipolar

Tal ressonância possui seu centróide de energia em MeV representado pela fórmula [1]

$$E_x = 31,2A^{-1/3} + 20,6A^{-1/6}, \qquad (I.1)$$

com largura em torno de 4-8 Mev.

I.2.b) Ressonância quadrupolar elétrica

Outro tipo de movimento coletivo é a ressonância quadrupolar gigante, observada pela primeira vez em 1971. Neste modo vibracional, tanto a forma do núcleo como a distribuição dos nucleons mudam. Um núcleo vibrando no modo quadrupolar é distorcido da forma esférica para uma forma elipsoidal alongada, passando novamente à forma esférica e a seguir para uma forma elipsoidal achatada.

Para excitar tal modo vibracional é necessário não somente fornecer uma certa energia ao núcleo mas também distribuí-la de tal modo que os nucleons se movimentem nas direções adequadas. Geralmente, a investigação das ressonâncias quadrupolares gigantes é feita com ajuda das reações de espalhamento inelástico de partículas α com energia de $\simeq$ 96 MeV.

Em modos iso-escalares ($T = 0$) onde prótons e nêutrons movem-se em fase (Fig.3), o centróide de energia é dado por [22]:

$$E_x(MeV) = 64,7A^{-1/3}, \qquad (I.2)$$

com a largura Γ obedecendo a relação $90A^{-2/3}$.

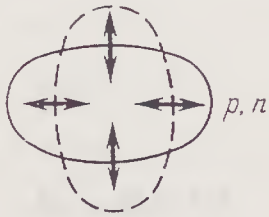

Fig.3 Modo de oscilação quadrupolar iso-escalar

Além dos modos iso-escalares, os modos isovetoriais ($T = 1$), onde prótons e nêutrons movem-se em fases opostas (Fig.4), também são observados.

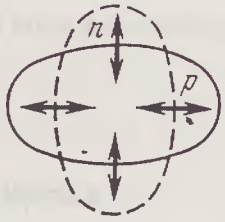

Fig.4 Modo de oscilação quadrupolar isovetorial

O centróide de energia dessas ressonâncias é observado em [22]

$$E_x(MeV) = 130A^{-1/3}, \qquad (I.3)$$

e a largura em terno de 6-10 MeV.

I.3.b) Ressonância octopolar elétrica

Em muitos núcleos ($66 \leq A \leq 200$), ressonâncias octopolares iso-escalares (Fig.5) de baixa energia são observadas com uma largura $\Gamma \simeq 1 - 2$ MeV, e com o centróide de energia em MeV dado por [23]:

$$E_x = 30A^{-1/3}. \qquad (I.4)$$

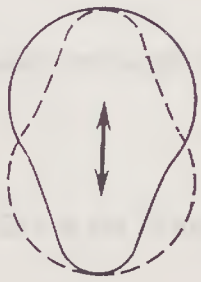

Fig.5 Modo de oscilação octopolar

I.2.d) Ressonância monopolar elétrica

Neste modo vibracional os nucleons movem-se para dentro e para fora (Fig.6) de modo que o núcleo expande-se e contrái-se radialmente (modo de respiração).

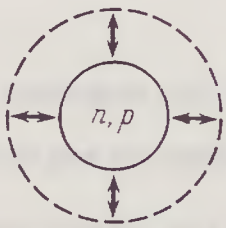

Fig.6 Modo de oscilação monopolar

A primeira sugestão para a existência de uma ressonância gigante monopolar foi feita em 1975 durante o estudo do espectro de espalhamento inelástico de dêuterons de 80 MeV por ^{40}Ca, ^{90}Zr e ^{208}Pb e uma comparação com o espectro de espalhamento inelástico de partículas α com uma energia de 96 MeV. Da comparação foi concluído que o espectro do espalhamento de dêuterons apresentava um pico adicional próximo a $80A^{-1/3}$ MeV (centróide de energia). Isso foi atribuído a uma excitação monopolar iso-escalar. Posteriormente, a existência dessas ressonâncias foi confirmada em 1977 durante a investigação do espalhamento inelástico de partículas α por chumbo.

A largura característica de tais modos encontra-se entre 3-4 MeV.

I.2.e) Ressonância dipolar magnética e de Gamow-Teller

As ressonâncias discutidas acima (dipolar, quadrupolar, octopolar e monopolar) são todas deformações geométricas do núcleo. As vibrações de spin diferem dessas pelo fato que podemos ter uma distribuição espacial dos nucleons inalterada, enquanto somente a orientação dos spins variam com o tempo. Quando não há movimento espacial, o princípio de Pauli é mais restritivo e somente uns poucos nucleons podem participar na vibração de spin. Por esse motivo os modos magnéticos são menos coletivos que os elétricos. Como o spin do nucleon tem associado um momento magnético e pode interagir através de campos eletromagnéticos, a absorção de fótons e espalhamento de elétrons são duas técnicas para estudar as propriedades de spin do núcleo.

Há, também, outros campos que interagem com os spins dos nucleons. Um desses é o campo do méson π, que ao ser absorvido por um nucleon muda a orientação do seu spin.

Uma das melhores técnicas experimentais para estudar vibrações de spin é o espalhamento inelástico de prótons de alta energia. O campo piônico do próton interage com

os nucleons do alvo. Se o píon trocado for neutro, a carga elétrica do projétil e do alvo permanecerá a mesma e a colisão será vista como um espalhamento inelástico comum. No entanto, se o píon trocado for carregado haverá uma troca na carga do projétil e do alvo. O próton incidente transformar-se-á em nêutron e um dos nêutrons do alvo transformar-se-á em próton. Essa vibração de spin com troca de carga é chamada ressonância gigante de Gamow-Teller (observada pela primeira vez em 1976).

O centróide de energia dessa ressonância encontra-se na faixa de $\simeq 10 - 15$ MeV.

A ressonância magnética dipolar gigante difere pouco da ressonância de Gamow-Teller. Sua principal diferença é conservar o número de prótons e nêutrons. Na ressonância magnética dipolar, o spin do próton é orientado na direção oposta ao spin do nêutron. Assim, como os momentos magnéticos dos prótons e nêutrons têm sinais opostos, o momento magnético total é maximizado nessa configuração . A energia de excitação dessa ressonância está na faixa de 8 MeV (núcleos pesados) a 15 MeV (núcleos leves).

I.3) Descrição teórica das ressonâncias gigantes

Uma das principais características das ressonâncias gigantes é que elas exaurem uma grande parte da regra da soma ponderada na energia. Assim, uma teoria conveniente para descrevê-las seria aquela cujos estados modelos satisfizessem as regras de soma do mesmo modo que os estados exatos o fazem.

A *Aproximação de Fase Aleatória* (RPA) é a teoria de muitos corpos mais simples a preencher tal requisito, característica que a torna a teoria microscópica básica para descrever as ressonâncias gigantes. Por esse fato, ela tem sido extensivamente aplicada às ressonâncias em toda a tabela periódica com bastante sucesso[1,2].

Outro argumento mostrando porque a RPA é uma boa aproximação para esses estados

coletivos, vem do fato que ela é especialmente apropriada para estados excitados que diferem do estado fundamental principalmente por componentes de 1 partícula-1 buraco. Como as ressonâncias gigantes têm, por definição , grande probabilidade de excitação a partir do estado fundamental, isso só é possível se os estados que a compõem diferirem do estado fundamental principalmente por componentes de 1p-1h, já que os operadores de excitação correspondentes são operadores de um corpo. Portanto a RPA de 1p-1h constitui-se numa boa aproximação , principalmente para probabilidades de transição total e centróides de energia.

CAPÍTULO II

HADRODINÂMICA QUÂNTICA

II.1) Introdução

Neste capítulo, introduziremos a *hadrodinâmica quântica* (QHD) [3], um modelo em teoria quântica de campos relativística que leva em conta, além dos graus de liberdade bariônicos, os apropriados graus de liberdade mesônicos. Este modelo formará a base para o desenvolvimento do restante deste trabalho culminando com a dedução da RPA relativística.

Na seção II.2 introduziremos a densidade lagrangeana do modelo e uma aproximação simplificadora, conhecida como *teoria de campo médio* (MFT) e, na seção II.3, faremos uma aplicação da MFT para núcleos finitos (aproximação de Hartree).

II.2) QHD e Teoria de Campo Médio

Motivado pelo modelo de troca de um méson (OBE) [20], que propicia todas as principais características para a descrição da força nuclear, constrói-se uma densidade de lagrangeana representando o acoplamento do campo bariônico ψ (prótons e nêutrons) com os diversos campos ϕ, V_μ, $\vec{b}_\mu$ e $\vec{\pi}$, associados, respectivamente, aos mésons $\sigma(J^\pi = 0^+, T = 0)$, $\omega(1^-, 0)$, $\rho(1^-, 1)$ e $\pi(0^-, 1)$. Incluiremos, também, o acoplamento do nucleon com o campo eletromagnético A_μ.

A densidade de lagrangeana mais simples para esse modelo é escrita como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_\sigma^2\phi^2) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\partial^\mu\vec{\pi} - m_\pi^2\vec{\pi}^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$
$$+\frac{1}{2}m_\omega^2 V_\mu V^\mu - \frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\cdot\vec{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{b}_\mu\cdot\vec{b}^\mu - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} + g_\sigma\bar{\psi}\phi\psi$$
$$-g_\omega\bar{\psi}\gamma^\mu V_\mu\psi - \frac{g_\pi}{2M}\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\vec{\tau}\cdot\partial_\mu\vec{\pi}\psi - g_\rho\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\cdot\vec{b}_\mu\psi - \frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\tau_3)A_\mu\psi, \qquad (II.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \qquad (II.2)$$

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{b}_\nu - \partial_\nu\vec{b}_\mu, \qquad (II.3)$$

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad (II.4)$$

Observe que $\vec{\pi}$ e $\vec{b}_\mu$ são vetores no espaço de isospin. Aqui M, m_σ, m_ω, m_ρ e m_π são as massas de repouso do nucleon e dos mésons correspondentes, enquanto g_σ, g_ω, g_ρ e g_π são as constantes de acoplamento méson-nucleon. Devemos notar que todos os campos são funções de $x^\mu = (t, \vec{x})$ e $\vec{\tau}$ representa o isospin do nucleon.

A princípio a interação $\pi - N$ pode ser descrita por dois esquemas de acoplamento:

-pseudovetorial

$$-\frac{g_\pi}{2M}\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\vec{\tau}\cdot\partial_\mu\vec{\pi}\psi, \qquad (II.5)$$

-pseudo-escalar

$$-ig_\pi\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\psi. \qquad (II.6)$$

É sabido que a utilização deste último não consegue reproduzir as características mais básicas da interação $\pi - N$ [3], a menos que sejam introduzidas interações mesônicas não - lineares. Porém, como isso está fora do alcance deste trabalho, adotaremos, para se conseguir resultados razoáveis na aproximação de troca de um píon, o acoplamento pseudovetorial. É verdade que o acoplamento pseudovetorial torna a lagrangeana não renormalizável. Contudo, adotaremos o ponto de vista de que essa é uma densidade de lagrangeana efetiva, no sentido que nós a usamos somente para gerar termos de troca de um bóson, com os parâmetros ajustados para reproduzir os dados experimentais [7,18]. Um tratamento rigoroso em teoria quântica de campos relativística exigiria a inclusão de termos de polarização do vácuo que são muito complicados e difíceis de serem incluídos em todas as ordens, especialmente para núcleos finitos.

Assumindo nossa densidade de lagrangeana efetiva, podemos obter as equações de movimento para os diversos campos exigindo que a ação correspondente a (II.1) seja invariante por variações de qualquer campo q_i, ou seja,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\vec{x}\mathcal{L}(\vec{x},t) = 0. \qquad (II.7)$$

Tal procedimento nos leva às bem conhecidas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)} = 0, \qquad (II.8)$$

onde q_i está representando cada um dos campos. Assim, conseguimos as equações de movimento:

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - g_\omega V_\mu) - (M - g_\sigma\phi) - g_\rho\gamma^\mu\vec{\tau}\cdot\vec{b}_\mu - \frac{g_\pi}{2M}\gamma_5\gamma^\mu\vec{\tau}\cdot\partial_\mu\vec{\pi} - \frac{e}{2}\gamma^\mu(1+\tau_3)A_\mu]\psi = 0, \quad (II.9)$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\sigma^2)\phi = g_\sigma\bar{\psi}\psi, \qquad (II.10)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 V^\nu = g_\omega \bar{\psi}\gamma^\nu\psi, \qquad (II.11)$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\pi^2)\vec{\pi} = \frac{g_\pi}{2M}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi), \qquad (II.12)$$

$$\partial_\mu \vec{G}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{b}^\nu = g_\rho \bar{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau}\psi, \qquad (II.13)$$

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = \frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^\nu(1+\tau_3)\psi. \qquad (II.14)$$

Certamente, a teoria quântica completa é altamente complexa, pois envolve equações de campo não lineares acopladas e, na prática, uma aproximação torna-se necessária. Métodos perturbativos mostram-se pouco eficientes, visto que as contantes de acoplamento méson-nucleon são grandes o suficiente para inviabilizar tal método. Felizmente, tal teoria pode ser aproximada, em altas densidades, substituindo-se os operadores de campo mesônicos e eletromagnético por seus valores esperados (campos clássicos). Assim:

$$\phi \quad \rightarrow \quad <\phi>, \qquad (II.15)$$

$$\vec{\pi} \quad \rightarrow \quad <\vec{\pi}>, \qquad (II.16)$$

$$V_\mu \quad \rightarrow \quad <V_\mu>, \qquad (II.17)$$

$$\vec{b}_\mu \quad \rightarrow \quad <\vec{b}_\mu>, \qquad (II.18)$$

$$A_\mu \quad \rightarrow \quad <A_\mu>. \qquad (II.19)$$

Tal aproximação é conhecida por *teoria de campo médio* (MFT).

II.3) MFT para núcleos finitos (aproximação de Hartree)

Vamos agora investigar a MFT para núcleos finitos. Nosso ponto de partida é a densidade lagrangeana (II.1). Restringiremos nossa discussão a núcleos esfericamente simétricos, de forma que a invariância rotacional exige que os valores de espera de todos os campos 3-vetoriais devem anular-se, ou seja, $< V_j >=< \vec{b}_j >=< A_j >= 0$ para j=1, 2, 3. Desde que o estado fundamental nuclear é assumido ter paridade bem definida, o valor esperado do campo pseudo-escalar (píon) deve desaparecer. O estado fundamental também tem uma carga Z bem definida, ou seja, não há transformações de prótons em nêutrons ou vice-versa; isso faz com que os valores esperados dos operadores de campo dos mésons ρ carregados também desapareçam. Assim, temos os operadores de campo sendo substituídos por campos clássicos como segue:

$$\phi \quad \rightarrow \quad < \phi >= \phi_0(\mid \vec{x} \mid), \tag{II.20}$$

$$\vec{\pi} \quad \rightarrow \quad < \vec{\pi} >= 0, \tag{II.21}$$

$$V_\mu \quad \rightarrow \quad < V_\mu >= \delta_{\mu 0} V_0(\mid \vec{x} \mid), \tag{II.22}$$

$$b_\mu^{(i)} \quad \rightarrow \quad < b_\mu^{(i)} >= \delta_{\mu 0} \delta^{i0} b_0^{(0)}(\mid \vec{x} \mid) \tag{II.23}$$

$$A_\mu \quad \rightarrow \quad < A_\mu >= \delta_{\mu 0} A_0(\mid \vec{x} \mid), \tag{II.24}$$

onde os campos bosônicos exibem a assumida simetria esférica e para simplificar a notação , usamos os mesmos símbolos para operadores de campo e seus valores de espera.

Fazendo as substituições (II.20)-(II.24) em (II.1), obtemos a densidade de lagrangeana na MFT, a saber:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MFT} = \bar{\psi}\big[i\gamma_\mu\partial^\mu - g_\omega\gamma^0 V_0 - g_\rho\tau_3\gamma^0 b_0 - e\frac{1}{2}(1+\tau_3)\gamma^0 A_0 - (M - g_\sigma\phi_0)\big]\psi \\ - \frac{1}{2}\big[(\nabla\phi_0)^2 + m_\sigma^2\phi_0^2\big] + \frac{1}{2}\big[(\nabla V_0)^2 + m_\omega^2 V_0^2\big] \\ + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 + \frac{1}{2}\big[(\nabla b_0)^2 + m_\rho^2 b_0^2\big] \qquad (II.25)\end{aligned}$$

onde, por simplicidade, estamos escrevendo $b_0^{(0)} \equiv b_0$.

Tomando o valor de espera de ambos os membros de (II.10)-(II.14) no estado fundamental do núcleo desejado, $|c>$, obtemos

$$\nabla^2 V_0 - m_\omega^2 V_0 = -g_\omega\rho_B, \qquad (II.26)$$

$$\nabla^2\phi_0 - m_\sigma^2\phi_0 = -g_\sigma\rho_s, \qquad (II.27)$$

$$\nabla^2 b_0 - m_\rho^2 b_0 = -g_\rho\rho_3, \qquad (II.28)$$

$$\nabla^2 A_0 = -\frac{1}{2}e(\rho_B + \rho_3), \qquad (II.29)$$

onde definimos as densidades

$$\rho_B(x) =< \psi^\dagger(x)\psi(x) >, \qquad (II.30.a)$$

$$\rho_s(x) =< \bar{\psi}(x)\psi(x) >, \qquad (II.30.b)$$

$$\rho_3(x) =< \psi^\dagger(x)\tau_3\psi(x) > . \qquad (II.30.c)$$

Por outro lado, fazendo as substituições (II.20)-(II.24) em (II.9) o operador de campo bariônico passa a obedecer a equação

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - g_\omega\gamma^0 V_0(r) - g_\rho\tau_3\gamma^0 b_0(r) - e\frac{1}{2}(1+\tau_3)\gamma^0 A_0(r) - (M - g_\sigma\phi_0(r))]\psi(x) = 0, \quad (II.31)$$

onde $r \equiv \mid \vec{x} \mid$. Alternativamente, pode-se obter (II.31) a partir da densidade de lagrangeana (II.25) pelo princípio da ação mínima, tratando-se A_0, ϕ_0, V_0 e b_0 como potenciais externos dados. Nesse caso, as equações (II.26)-(II.30.c) entram como condições de autoconsistência.

Como os campos bosônicos são , agora, campos clássicos, a eq.(II.31) é linear no operador ψ. Assim, podemos buscar soluções na forma de uma expansão em um conjunto completo de estados estacionários

$$\psi(x) = \sum_\alpha [\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})e^{-iE_\alpha^{(+)}t}b_\alpha + \mathcal{V}_\alpha(\vec{x})e^{iE_\alpha^{(-)}t}d_\alpha^\dagger], \qquad (II.32)$$

onde $\mathcal{U}_\alpha$ e $\mathcal{V}_\alpha$ formam um conjunto completo de espinores de Dirac, soluções de energia positiva e negativa, respectivamente. Aqui $b_\alpha(b_\alpha^\dagger)$ representa o operador de destruição (criação) de um nucleon no estado α, enquanto $d_\alpha(d_\alpha^\dagger)$ é o operador de destruição (criação) de um antinucleon no estado correspondente. Os operadores de criação e destruição obedecem as regras de anticomutação

$$\{b_\alpha, b_{\alpha'}^\dagger\} = \delta_{\alpha\alpha'} = \{d_\alpha, d_{\alpha'}^\dagger\}, \qquad (II.33.a)$$

$$\{b_\alpha, d_{\alpha'}\} = 0 = \{b_\alpha^\dagger, d_{\alpha'}^\dagger\}, \; etc. \qquad (II.33.b)$$

Neste trabalho, não estaremos considerando contribuições vindas do mar de Dirac, assim removeremos as soluções de energia negativa $\mathcal{V}_\alpha$. Seguindo essa prescrição e escrevendo $E_\alpha = E_\alpha^{(+)}$ para simplificar a notação , obtemos, introduzindo (II.32) em (II.31),

$$[\gamma_0 E_\alpha + i\vec{\gamma}\cdot\nabla - g_\omega\gamma^0 V_0 - g_\rho\tau_3\gamma^0 b_0 - e\frac{1}{2}(1+\tau_3)\gamma^0 A_0 - (M - g_\sigma\phi_0)]\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = 0, \quad (II.34)$$

ou, multiplicando por γ_0,

$$h_{MFT}\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = E_\alpha\mathcal{U}_a(\vec{x}), \quad (II.35)$$

onde definimos a hamiltoniana de Dirac para um nucleon movendo-se no campo médio externo

$$h_{MFT} \equiv -i\vec{\alpha}\cdot\nabla + g_\omega V_0 + g_\rho\tau_3 b_0 + e\frac{1}{2}(1+\tau_3)A_0 + \gamma_0(M - g_\sigma\phi_0). \quad (II.36)$$

A resolução do problema de Dirac em um potencial central como em (II.35) pode ser encontrada no apêndice II.A.

Com a solução geral do problema (II.35), podemos calcular as densidades (II.30.a)-(II.30.c). Para isso vamos definir o estado fundamental $\mid c >$ conseguido preenchendo os estados de partícula-única com nucleons até um determinado valor $\alpha = \alpha_F$. Em outras palavras, o estado $|c>$ é tal que:

$$d_\alpha \mid c >= 0, \qquad \text{todo}\,\alpha \quad (II.37.a)$$

$$b_\alpha^\dagger \mid c >= 0, \qquad \alpha \leq \alpha_F \quad (II.37.b)$$

$$b_\alpha \mid c >= 0, \qquad \alpha > \alpha_F. \quad (II.37.c)$$

Então , admitindo a forma (II.32) sem os estados de energia negativa, temos para ρ_B

$$\begin{aligned}\rho_B(x) &=< c \mid \psi^\dagger(x)\psi(x) \mid c > \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} \mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})e^{-iE_\alpha t}e^{iE_{\alpha'}t} \underbrace{< c \mid b^\dagger_{\alpha'} b_\alpha \mid c >}_{\delta_{\alpha\alpha'}\theta(\alpha_F-\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha}^{\alpha_F} \mathcal{U}^\dagger_\alpha(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}). \end{aligned} \tag{II.38}$$

Escrevendo o estado de partícula-única de Dirac, $\mathcal{U}_\alpha$, como em (II.A.19) a densidade ρ_B torna-se

$$\begin{aligned}\rho_B(\vec{x}) &= \sum_{\alpha}^{\alpha_F} \left(\frac{-iG_a}{r}\Phi^\dagger_{\kappa m}\,,\, -\frac{F_a}{r}\Phi^\dagger_{-\kappa m}\right)\zeta^\dagger_t \begin{pmatrix} i\frac{G_a}{r}\Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_a}{r}\Phi_{-\kappa m}\end{pmatrix}\zeta_t \\ &= \sum_{\alpha}^{\alpha_F}\left[\frac{G_a^2}{r^2}\Phi^\dagger_{\kappa m}\Phi_{\kappa m} + \frac{F_a^2}{r^2}\Phi^\dagger_{-\kappa m}\Phi_{-\kappa m}\right] \end{aligned} \tag{II.39}$$

e, com o uso da relação (II.A.22.c), temos

$$\rho_B(\vec{x}) = \sum_{a}^{a_F} \frac{\hat{j}^2}{4\pi}\frac{G_a^2 + F_a^2}{r^2}, \tag{II.40}$$

onde por comodidade escrevemos $\hat{j} = (2j+1)^{1/2}$. Procedendo analogamente achamos

$$\begin{aligned}\rho_s(x) &=< c \mid \bar{\psi}(x)\psi(x) \mid c > \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} \bar{\mathcal{U}}_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})e^{-iE_\alpha t}e^{iE_{\alpha'}t} \underbrace{< c \mid b^\dagger_{\alpha'} b_\alpha \mid c >}_{\delta_{\alpha\alpha'}\theta(\alpha_F-\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha}^{\alpha_F} \mathcal{U}^\dagger_\alpha(\vec{x})\gamma_0\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) \\ &= \sum_{\alpha}^{\alpha_F} \left(\frac{-iG_a}{r}\Phi^\dagger_{\kappa m}\,,\, -\frac{F_a}{r}\Phi^\dagger_{-\kappa m}\right)\zeta^\dagger_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\frac{G_a}{r}\Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_a}{r}\Phi_{-\kappa m}\end{pmatrix}\zeta_t \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha}^{\alpha_F} [\frac{G_a^2}{r^2} \Phi^\dagger_{\kappa m} \Phi_{\kappa m} - \frac{F_a^2}{r^2} \Phi^\dagger_{-\kappa m} \Phi_{-\kappa m}]$$

$$= \sum_{a}^{a_F} \frac{\hat{j}^2}{4\pi} \frac{G_a^2 - F_a^2}{r^2}, \qquad (II.41)$$

$$\rho_3(x) = < c \mid \psi^\dagger(x) \tau_3 \psi(x) \mid c >$$

$$= \sum_{\alpha\alpha'} \mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}) \tau_3 \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) e^{-iE_\alpha t} e^{iE_{\alpha'} t} \underbrace{< c \mid b^\dagger_{\alpha'} b_\alpha \mid c >}_{\delta_{\alpha\alpha'} \theta(\alpha_F - \alpha)}$$

$$= \sum_{\alpha}^{\alpha_F} \mathcal{U}^\dagger_\alpha(\vec{x}) \tau_3 \mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$$

$$= \sum_{\alpha}^{\alpha_F} (\frac{-iG_a}{r} \Phi^\dagger_{\kappa m} \ , \ -\frac{F_a}{r} \Phi^\dagger_{-\kappa m}) \zeta_t^\dagger \tau_3 \begin{pmatrix} i\frac{G_a}{r} \Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_a}{r} \Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} \zeta_t$$

$$= \sum_{\alpha}^{\alpha_F} [\frac{G_a^2}{r^2} \Phi^\dagger_{\kappa m} \Phi_{\kappa m} + \frac{F_a^2}{r^2} \Phi^\dagger_{-\kappa m} \Phi_{-\kappa m}] (-)^{t-1/2}$$

$$= \sum_{a}^{a_F} \frac{\hat{j}^2}{4\pi} \frac{G_a^2 + F_a^2}{r^2} (-)^{t-1/2}, \qquad (II.42)$$

onde usamos o fato que $\tau_3 \zeta_t = (-)^{t-1/2} \zeta_t$.

Levando em conta a simetria esférica, podemos escrever as equações de campo (II.26)-(II.29) como

$$\frac{d^2 V_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV_0(r)}{dr} - m_\omega^2 V_0(r) = -g_\omega \rho_B \qquad (II.43)$$

$$\frac{d^2 \phi_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi_0(r)}{dr} - m_\sigma^2 \phi_0(r) = -g_\sigma \rho_s \qquad (II.44)$$

$$\frac{d^2 b_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{db_0(r)}{dr} - m_\rho^2 b_0(r) = -g_\rho \rho_3 \qquad (II.45)$$

$$\frac{d^2 A_0(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA_0(r)}{dr} = -\frac{1}{2} e(\rho_B + \rho_3) \qquad (II.46)$$

onde ρ_B, ρ_s e ρ_3 são dados pelas equações (II.40), (II.41) e (II.42), respectivamente. Além disso, de acordo com o que foi feito no apêndice II.A, a equação (II.35) pode ser escrita em termos das funções radiais F_a e G_a como:

$$\frac{dG_a(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G_a(r) - \big[E_a - g_\omega V_0(r) - 2tg_\rho b_0(r) - (t+\frac{1}{2})eA_0(r) + M - g_\sigma\phi_0(r)\big]F_a(r) = 0, \qquad (II.47)$$

e

$$\frac{dF_a(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}F_a(r) + \big[E_a - g_\omega V_0(r) - 2tg_\rho b_0(r) - (t+\frac{1}{2})eA_0(r) - M + g_\sigma\phi_0(r)\big]G_a(r) = 0. \qquad (II.48)$$

Todas as informações necessárias para implementar a aproximação MFT para núcleos esféricos estão contidas nas equações (II.40)-(II.48). Essas equações podem ser resolvidas seguindo o processo:

1) Com uma hipótese inicial razoável para $\rho_B(r)$, $\rho_s(r)$ e $\rho_3(r)$ resolvem-se as equações (II.43)-(II.46), determinando-se uma primeira aproximação para os campos mesônicos V_0, ϕ_0, b_0 e para o campo coulombiano A_0.

2) Usando-se esses campos, resolvem-se as equações (II.47) e (II.48) determinando-se F_a e G_a para $a \leq a_F$.

3) Usando-se esses valores de F_a e G_a recalculam-se as densidades $\rho_B(r)$, $\rho_s(r)$ e $\rho_3(r)$ usando-se (II.40)-(II.42).

4) Com esses novos valores das densidades torna-se a resolver as equações (II.43)-(II.46) obtendo-se novamente os campos mesônicos.

5) Com esses novos campos volta-se ao passo 2) e repete-se o processo até se alcançar auto-consistência.

CAPÍTULO III

APROXIMAÇÃO DE HARTREE-FOCK RELATIVÍSTICA

III.1) Introdução

A partir da densidade de lagrangeana introduzida no capítulo anterior, construiremos, na seção III.2, a hamiltoniana nuclear relativística efetiva. Faremos isso dentro da chamada *aproximação instantânea*, uma aproximação que consiste em negligenciar a componente temporal do 4-momento carregado pelo méson. Tal aproximação é justificada para os processos (ressonâncias gigantes) em que estamos interessados.

Na seção III.3 derivamos as equações de Hartree-Fock através do método variacional. Tais equações irão nos proporcionar a melhor base na qual escreveremos as equações da RPA relativística deduzidas no próximo capítulo.

Seguimos, aqui, principalmente a Ref.[4] explicitando os cálculos lá indicados.

III.2) Hamiltoniana relativística

Nosso ponto de partida para a determinação da hamiltoniana relativística é a densidade lagrangeana definida no capítulo II, eq. (II.1). Como vimos, as equações de movimento resultantes são dadas por (II.9)-(II.14).

As equações (II.10) e (II.12) são equações de Klein-Gordon não homogêneas, enquanto (II.11) e (II.13) são equações de Proca e (II.14) são as familiares equações de Maxwell, todas com termos de fonte. Desde que a densidade lagrangeana é invariante sob transformações

U(1), ou seja, invariante pela transformação de fase global

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi, \qquad (III.1)$$

com α constante, conseguimos, do teorema de Noether (apêndice III.A), a corrente conservada $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$, ou seja, obtemos a equação de continuidade

$$\partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) = 0. \qquad (III.2)$$

Como conseqüência, $\partial_{\mu}V^{\mu} = 0$ e a equação (II.11) pode ser escrita como uma equação de Klein-Gordon. A equação (II.14) também pode ser escrita como uma equação de Klein-Gordon (no caso sem massa), bastando para isso que trabalhemos no gauge de Lorentz, onde $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$.

Se na densidade lagrangeana houvesse somente mésons ρ e π não carregados (ρ^0 e π^0), a densidade lagrangena também seria invariante sob a transformação

$$\psi \rightarrow e^{i\tau_3\theta/2}\psi, \qquad (III.3)$$

com uma corrente conservada $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\tau_3\psi$. Assim,

$$\partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\tau_3\psi) = 0 \qquad (III.4)$$

e a equação de movimento (II.13) para ρ^0 teria, nesse caso, como fonte essa corrente conservada, o que permitiria tratá-la analogamente à equação de movimento do méson ω. No entanto, a inclusão de mésons ρ e π carregados faz com que a corrente do segundo membro da equação (II.13), isto é, $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\vec{\tau}\psi$ deixe de ser conservada. Porém como para descrever estados de um determinado núcleo estamos interessados somente em processos que conservam o número de prótons e nêutrons separadamente, ou seja, em processos onde não ocorre a transformação de prótons em nêutrons e vice-versa, podemos ainda escrever

$$\partial_\mu < \bar{\psi}\gamma^\mu \vec{\tau}\psi >= 0, \qquad (III.5)$$

onde o valor médio é calculado em qualque estado nuclear. Isso sugere fazermos a aproximação

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu \vec{\tau}\psi) \simeq 0. \qquad (III.6)$$

Nesse caso (II.13) pode, também, ser aproximada por uma equação de Klein-Gordon *, seguindo a prática corrente [9,10].

Após essas argumentações , as equações (II.10)-(II.14) são , então , reescritas como:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\sigma^2)\phi = g_\sigma\bar{\psi}\psi, \qquad (III.7)$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\omega^2)V^\nu = g_\omega\bar{\psi}\gamma^\nu\psi, \qquad (III.8)$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\sigma^2)\vec{\pi} = \frac{g_\pi}{2M}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi), \qquad (III.9)$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\rho^2)\vec{b}^\nu \simeq g_\rho\bar{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau}\psi, \qquad (III.10)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = \frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^\nu(1+\tau_3)\psi. \qquad (III.11)$$

A hamiltoniana relativística pode ser obtida pelo procedimento habitual, através da transformação de Legendre:

$$H = \int d^3\vec{x}[\sum_i \partial_0 q_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q_i)} - \mathcal{L}], \qquad (III.12)$$

* Para um argumento mais quantitativo veja o apêndice III.B.

onde a soma em i abrange todos os campos em questão . Assim procedendo, obtemos:

$$H = H_0 + H_\sigma + H_\omega + H_\rho + H_\pi + H_\gamma, \qquad (III.13)$$

onde

$$H_0 = \int d^3\vec{x}\bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\nabla + M)\psi, \qquad (III.14)$$

$$H_\sigma = \int d^3\vec{x}\big[\frac{1}{2}(\partial_0\phi\partial_0\phi - \phi\nabla^2\phi + m_\sigma\phi^2) - g_\sigma\bar{\psi}\phi\psi\big], \qquad (III.15)$$

$$H_\omega = \int d^3\vec{x}\big[-\frac{1}{2}(\partial_0 V_\mu\partial_0 V^\mu - V_\mu\nabla^2 V^\mu + m_\omega V_\mu V^\mu) + g_\omega\bar{\psi}\gamma^\mu V_\mu\psi\big], \qquad (III.16)$$

$$H_\rho = \int d^3\vec{x}\big[-\frac{1}{2}(\partial_0\vec{b}_\mu\cdot\partial_0\vec{b}^\mu - \vec{b}_\mu\cdot\nabla^2\vec{b}^\mu + m_\rho\vec{b}_\mu\cdot\vec{b}^\mu) + g_\rho\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\cdot\vec{b}_\mu\psi\big], \qquad (III.17)$$

$$H_\pi = \int d^3\vec{x}\big[\frac{1}{2}(\partial_0\vec{\pi}\cdot\partial_0\vec{\pi} - \vec{\pi}\cdot\nabla^2\vec{\pi} + m_\pi\vec{\pi}^2) + \frac{g_\pi}{2M}\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\vec{\tau}\cdot\partial_i\vec{\pi}\psi\big], \qquad (III.18)$$

$$H_\gamma = \int d^3\vec{x}\big[-\frac{1}{2}(\partial_0 A_\mu\partial_0 A^\mu - A_\mu\nabla^2 A^\mu) + \frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\tau_3)A_\mu\psi\big], \qquad (III.19)$$

onde usamos o fato que $\partial_\mu V^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0$, $\partial_\mu\vec{b}^\mu \simeq 0$ e que no infinito os campos se anulam.

Tal hamiltoniana pode ser escrita somente em termos do campo de nucleons ψ resolvendo-se as equações (III.7)-(III.11) para os campos mesônicos:

$$\phi(x) = -g_\sigma\int d^4x'\,\Delta^0(x-x',m_\sigma)\bar{\psi}(x')\psi(x'), \qquad (III.20)$$

$$V_\mu(x) = -g_\omega \int d^4x' \, \Delta^0(x-x', m_\omega)\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\psi(x'), \qquad (III.21)$$

$$\vec{\pi}(x) = -\frac{g_\pi}{2M} \int d^4x' \, \Delta^0(x-x', m_\pi)\partial'_\mu[\bar{\psi}(x')\gamma_5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi(x')], \qquad (III.22)$$

$$\vec{b}_\mu(x) = -g_\rho \int d^4x' \, \Delta^0(x-x', m_\rho)\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\vec{\tau}\psi(x'), \qquad (III.23)$$

$$A_\mu(x) = -\frac{e}{2} \int d^4x' \, \Delta^0(x-x', m=0)\bar{\psi}(x')\gamma_\mu(1+\tau_3)\psi(x'), \qquad (III.24)$$

onde

$$\Delta^0(x-x', m) = \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_o'^2 - \vec{q}'^2 - m^2 + i\eta}, \qquad (III.25)$$

é o propagador livre de Klein-Gordon. Como estamos interessados somente em processos onde os mésons existem virtualmente na troca entre dois nucleons, não incluímos os termos para os campos mesônicos livres nas equações (III.20)-(III.24) que a rigor deveriam estar presentes. Obtemos, portanto, uma hamiltoniana efetiva, válida apenas para processos que não envolvam a criação e aniquilação de mésons livres. A substituição das equações (III.20)-(III.24) em (III.15)-(III.19) resulta em:

$$H_\sigma = \int d^3\vec{x} \Bigg[\frac{g_\sigma^2}{2} \int d^4x' \, d^4x'' \, \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \frac{d^4q''}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2 - \vec{q}'^2 - m_\sigma^2 + i\eta} \frac{e^{-iq''\cdot(x-x'')}}{q_0''^2 - \vec{q}''^2 - m_\sigma^2 + i\eta}$$

$$(-q_0'q_0'' + \vec{q}''^2 + m_\sigma^2)\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(x'')\psi(x'')\psi(x')$$

$$+ g_\sigma^2 \int d^4x' \, \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2 - \vec{q}'^2 - m_\sigma^2 + i\eta} \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\psi(x')\psi(x) \Bigg], \qquad (III.26)$$

$$H_\omega = \int d^3\vec{x}\Bigg[-\frac{g_\omega^2}{2}\int d^4x'\,d^4x''\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4q''}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2-\vec{q}'^2-m_\omega^2+i\eta}\,\frac{e^{-iq''\cdot(x-x'')}}{q_0''^2-\vec{q}''^2-m_\omega^2+i\eta}$$

$$(-q_0'q_0''+\vec{q}''^2+m_\omega^2)\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(x'')\gamma_\mu'\gamma''^\mu\psi(x'')\psi(x')$$

$$-\,g_\omega^2\int d^4x'\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2-\vec{q}'^2-m_\omega^2+i\eta}\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\gamma'^\mu\psi(x')\psi(x)\Bigg], \qquad (III.27)$$

$$H_\rho = \int d^3\vec{x}\Bigg[-\frac{g_\rho^2}{2}\int d^4x'\,d^4x''\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4q''}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2-\vec{q}'^2-m_\rho^2+i\eta}\,\frac{e^{-iq''\cdot(x-x'')}}{q_0''^2-\vec{q}''^2-m_\rho^2+i\eta}$$

$$(-q_0'q_0''+\vec{q}''^2+m_\rho^2)\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(x'')\gamma_\mu'\gamma''^\mu\vec{\tau}'\cdot\vec{\tau}''\psi(x'')\psi(x')$$

$$-\,g_\rho^2\int d^4x'\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2-\vec{q}'^2-m_\rho^2+i\eta}\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\gamma'^\mu\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}'\psi(x')\psi(x)\Bigg], \qquad (III.28)$$

$$H_\pi = \int d^3\vec{x}\Bigg[-\frac{1}{2}(\frac{g_\pi}{2M})^2\int d^4x'\,d^4x''\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4q''}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2-\vec{q}'^2-m_\pi^2+i\eta}\,\frac{e^{-iq''\cdot(x-x'')}}{q_0''^2-\vec{q}''^2-m_\pi^2+i\eta}$$

$$q_\mu'q_\nu''(-q_0'q_0''+\vec{q}''^2+m_\pi^2)\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(x'')\gamma_5'\gamma_5''\gamma'^\mu\gamma''^\nu\vec{\tau}'\cdot\vec{\tau}''\psi(x'')\psi(x')+(\frac{g_\pi}{2M})^2\int d^4x'\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}$$

$$\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2-\vec{q}'^2-m_\pi^2+i\eta}q_\mu'q_i'\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\gamma_5\gamma_5'\gamma^i\gamma'^\mu\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}'\psi(x')\psi(x)\Bigg], \qquad (III.29)$$

$$H_\gamma = \int d^3\vec{x}\Bigg[-\frac{1}{2}(\frac{e}{2})^2\int d^4x'\,d^4x''\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4q''}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2-\vec{q}'^2+i\eta}\,\frac{e^{-iq''\cdot(x-x'')}}{q_0''^2-\vec{q}''^2+i\eta}$$

$$(-q_0'q_0'' + \vec{q}''^2)\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(x'')\gamma_\mu'\gamma''^\mu(1+\tau_3')(1+\tau_3'')\psi(x'')\psi(x') - (\frac{e}{2})^2 \int d^4x' \frac{d^4q'}{(2\pi)^4}$$

$$\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{q_0'^2 - \vec{q}'^2 + i\eta}\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\gamma'^\mu(1+\tau_3)(1+\tau_3')\psi(x')\psi(x)\Big], \qquad (III.30)$$

onde, nessa notação esquemática, as matrizes marcadas com ($'$) atuam apenas nos operadores associados às coordenadas ($'$) e analogamente para os objetos marcados com ($''$). A rigor deveríamos tomar o produto normal em relação ao vácuo dos operadores de campo em H. Porém, como estamos excluíndo os estados de energia negativa (conforme comentado no capítulo II) tal produto normal equivale a colocarmos os $\bar{\psi}$ a esquerda dos ψ.

A partir deste ponto faremos a *aproximação instantânea.* Esta consiste em desprezar q_0 em relação a $\mid \vec{q} \mid$ e a m_π, m_σ, m_ω e m_ρ. Isso é justificável pelo fato que, q^μ sendo o quadrimomento transferido, as contribuições mais importantes correspondem a valores de q_0 nas vizinhanças das energias de excitação envolvidas, que, para ressonâncias gigantes, não ultrapassam 10-20 MeV. Essas energias são , portanto, desprezíveis em relação às massas dos mésons $m_\sigma \simeq 440 - 525\,MeV$, $m_\rho \simeq 750 - 770\,MeV$ e $m_\omega \simeq 760 - 780\,MeV$ e também, em menor extensão , a $m_\pi \simeq 140\,MeV$ (ver seção III.4). Da mesma maneira, podemos desprezar q_0 em relação a $\mid \vec{q} \mid$, pois os momentos dominantes, aqueles que apresentam maiores contribuições no interior do núcleo, estão na faixa do momento de Fermi: $k_F \simeq 1,30\,MeV \simeq 260\,MeV$. Essa aproximação é equivalente a neglegenciarmos, nos campos mesônicos e eletromagnético, os efeitos de retardamento.

Dentro dessa aproximação , podemos reescrever (III.26)-(III.30) como *:

$$H_\sigma = -\frac{g_\sigma^2}{2}\int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}' \frac{Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\sigma)}{4\pi}\bar{\psi}(\vec{x},t)\bar{\psi}(\vec{x}',t)\psi(\vec{x}',t)\psi(\vec{x},t), \qquad (III.31)$$

---

* Como ilustração , deduzimos em detalhe no apêndice III.C o termo H_ω. Os demais termos são obtidos através de um cálculo análogo.

$$H_\omega = \frac{g_\omega^2}{2}\int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\, \frac{Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\omega)}{4\pi}\bar{\psi}(\vec{x},t)\bar{\psi}(\vec{x}',t)\gamma^\mu\gamma'_\mu\psi(\vec{x}',t)\psi(\vec{x},t), \qquad (III.32)$$

$$H_\rho = \frac{g_\rho^2}{2}\int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\, \frac{Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\rho)}{4\pi}\bar{\psi}(\vec{x},t)\bar{\psi}(\vec{x}',t)\gamma^\mu\gamma'_\mu\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}'\psi(\vec{x}',t)\psi(\vec{x},t), \qquad (III.33)$$

$$H_\pi = -\frac{1}{2}(\frac{g_\pi}{2M})^2\int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\, [\partial_i\partial'_j\frac{Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\pi)}{4\pi}]\bar{\psi}(\vec{x},t)\bar{\psi}(\vec{x}',t)\gamma_5\gamma'_5\gamma^i\gamma'^j\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}'\psi(\vec{x}',t)\psi(\vec{x},t), \qquad (III.34)$$

$$H_\gamma = \frac{1}{2}(\frac{e}{2})^2\int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\, \frac{Y(\vec{x}-\vec{x}',m=0)}{4\pi}\bar{\psi}(\vec{x},t)\bar{\psi}(\vec{x}',t)\gamma^\mu\gamma'_\mu(1+\tau_3)(1+\tau'_3)\psi(\vec{x}',t)\psi(\vec{x},t), \qquad (III.35)$$

onde definimos o potencial de Yukawa $Y(\vec{x}-\vec{x}',m)$

$$\frac{1}{4\pi}Y(\vec{x}-\vec{x}',m) \equiv \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{q}^2+m^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \qquad (III.36)$$

A hamiltoniana relativística toma, então , (agora na representação de Schrödinger) a forma:

$$\begin{aligned} H = &\int d^3\vec{x}\psi^\dagger(\vec{x})(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\gamma^0 M)\psi(\vec{x}) \\ &+\frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\psi^\dagger(\vec{x})\psi^\dagger(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\psi(\vec{x}')\psi(\vec{x}), \end{aligned} \qquad (III.37)$$

onde

$$\begin{aligned} V(\vec{x}-\vec{x}') = &-\frac{g_\sigma^2}{4\pi}Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\sigma)\gamma_0\gamma'_0 + \frac{g_\omega^2}{4\pi}Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\omega)\gamma_0\gamma'_0\gamma^\mu\gamma'_\mu \\ &+\frac{g_\rho^2}{4\pi}Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\rho)\gamma_0\gamma'_0\gamma^\mu\gamma'_\mu\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}' \\ &-\frac{1}{4\pi}(\frac{g_\pi}{2M})^2\partial_i\partial'_j Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\pi)\gamma_0\gamma'_0\gamma_5\gamma'_5\gamma^i\gamma'^j\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}' \\ &+\frac{1}{4\pi}(\frac{e}{2})^2 Y(\vec{x}-\vec{x}',m=0)\gamma_0\gamma'_0\gamma^\mu\gamma'_\mu(1+\tau_3)(1+\tau'_3). \end{aligned} \qquad (III.38)$$

Seja h uma hamiltoniana de Dirac em primeira quantização descrevendo um nucleon em um campo externo. Um exemplo seria h_{MFT} dado em (II.36) ou qualquer expressão análoga a essa com V_0, b_0, ϕ_0 e A_0 funções especificadas de $\vec{x}$. Suas autofunções de energia positiva satisfazem

$$h\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = E_\alpha \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}). \qquad (III.39)$$

Como estamos ignorando os efeitos do mar de Dirac (vácuo), podemos expandir o operador de campo na representação de Schrödinger na forma

$$\psi(\vec{x}) = \sum_\alpha \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) b_\alpha. \qquad (III.40)$$

Introduzindo essa expressão em (III.37), obtemos

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\alpha\alpha'} \int d^3\vec{x}\mathcal{U}^\dagger_\alpha(\vec{x})(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \gamma^0 M)\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}) b^\dagger_\alpha b_{\alpha'} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}' \mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\beta'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\beta(\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) b^\dagger_{\alpha'} b^\dagger_{\beta'} b_\beta b_\alpha. \qquad (III.41) \end{aligned}$$

Essa é a hamiltoniana que será usada na aproximação Hartree-Fock na seção seguinte.

III.3) Aproximação de Hartree-Fock relativística

Baseados na idéia de que os nucleons no núcleo podem ser considerados aproximadamente como partículas independentes se movendo em orbitais de partícula única produzidos por um potencial nuclear médio, podemos construir o estado fundamental aproximado de um sistema com A nucleons, criando-os um a um em cada nível do potencial médio, na ordem crescente das energias. Assim, escrevemos o estado fundamental $\mid \Phi_0 >$ na aproximação HF como:

$$| \Phi_0 >= \prod_{\alpha=1}^{A} b_\alpha^\dagger \mid 0 >, \qquad (III.42)$$

onde o estado $\mid 0 >$ é o vácuo físico, o qual não contém qualquer nucleon. Assim, qualquer operador de aniquilação b_α atuando nesse vácuo produz resultado nulo, ou seja,

$$b_\alpha \mid 0 >= 0. \qquad (III.43)$$

Supondo que $\mid \Phi_0 >$ corresponde ao mínimo de energia, temos, de acordo com o princípio variacional :

$$\delta < \Phi_0 \mid H \mid \Phi_0 >= 0, \qquad (III.44)$$

onde as variações são feitas com relação aos espinores $\mathcal{U}_\alpha$, sujeitos ao vínculo

$$\int d^3\vec{x}\mathcal{U}_\alpha^\dagger(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = 1, \qquad (III.45)$$

que fixa sua normalização . A utilização do método dos multiplicadores de Lagrange, permite-nos escrever (III.44) e (III.45) como um único problema variacional sem vínculos, a saber:

$$\delta[< \Phi_0 \mid H \mid \Phi_0 > - \sum_{\alpha=1}^{A} E_\alpha \int d^3\vec{x}\mathcal{U}_\alpha^\dagger(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})] = 0, \qquad (III.46)$$

onde E_α são os multiplicadores de Lagrange. Utilizando o estado fundamental $\mid \Phi_0 >$ como escrito em (III.42) e a hamiltoniana (III.41), obtemos:

$$\delta[\sum_{\alpha=1}^{A} \int d^3\vec{x}\mathcal{U}_\alpha^\dagger(\vec{x})(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \gamma_0 M)\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha',\alpha=1}^{A} \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\mathcal{U}_\alpha^\dagger(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha'}^\dagger(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha',\alpha=1}^{A}\int d^3\vec{x}\,d^3\vec{x}'\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\alpha}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{A}E_\alpha\int d^3\vec{x}\mathcal{U}^\dagger_\alpha(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})] = 0, \qquad (III.47)$$

onde usamos

$$< \Phi_0 \mid b^\dagger_\alpha b'_\alpha \mid \Phi_0 >= \delta_{\alpha\alpha'}\theta(A-\alpha), \qquad (III.48)$$

$$< \Phi_0 \mid b^\dagger_{\alpha'} b^\dagger_{\beta'} b_\beta b_\alpha \mid \Phi_0 >= (\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'})\theta(A-\alpha')\theta(A-\beta'), \qquad (III.49)$$

com

$$\theta(A-\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \leq A, \\ 0, & \text{se } \alpha > A. \end{cases} \qquad (III.50)$$

Aplicando a variação sobre os $\mathcal{U}^\dagger_\alpha$, ou seja, escrevendo (III.47) como

$$\delta[\ \ ] = [\mathcal{U}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger + \eta^\dagger] - [\mathcal{U}^\dagger] = 0, \qquad (III.51)$$

onde $[\mathcal{U}^\dagger \to \mathcal{U}^\dagger + \eta^\dagger]$ indica que na expressão entre colchetes substituímos todos os $\mathcal{U}^\dagger_\alpha$ por $\mathcal{U}^\dagger_\alpha + \eta^\dagger_\alpha$, com $\eta^\dagger_\alpha$ sendo um espinor infinitesimal arbitrário, obtemos a equação para o espinor de Dirac:

$$(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \gamma_0 M - E_\alpha)\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) + \sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$$

$$-\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}) = 0, \qquad (III.52)$$

que pode também ser escrita, multiplicando-se ambos os lados por $\mathcal{U}^\dagger_\beta(\vec{x})$, integrando-se sobre $\vec{x}$ e usando a propriedade de ortonormalidade, como

$$\int d^3\vec{x}\,\mathcal{U}^\dagger_\beta(\vec{x})(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\gamma_0 M)\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})+\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'\,d^3\vec{x}\,\mathcal{U}^\dagger_\beta(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$$

$$-\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'\,d^3\vec{x}\,\mathcal{U}^\dagger_\beta(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})=E_\alpha\delta_{\alpha\beta}. \qquad (III.52.a)$$

Mais compactamente, (III.52) tem a forma de uma equação de autovalores,

$$h_{HF}\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})=E_\alpha\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}), \qquad (III.53)$$

para a hamiltoniana de Hartree-Fock relativística

$$h_{HF}=-i\vec{\alpha}\cdot\nabla+\gamma_0 M+U^D(\vec{x})+U^E. \qquad (III.54)$$

Nessa equação ,

$$U^D(\vec{x})=\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}') \qquad (III.55)$$

é a contribuição direta para o campo médio (termo de Hartree) e U^E é um operador integral (não -local) definido por:

$$U^E\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})=\int d^3\vec{x}'U^E(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}'), \qquad (III.56)$$

que corresponde à contribuição de troca para o campo médio (termo de Fock). Em (III.56)

$$U^E(\vec{x}-\vec{x}')=\sum_b U^E_b(\vec{x}-\vec{x}'),\quad (b=\sigma,\omega,\rho,\pi,\gamma) \qquad (III.57)$$

onde

$$U^E_\sigma(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{g^2_\sigma}{4\pi}Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\sigma)\gamma_0[\sum_{\alpha'=1}^{A}\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')]\gamma'_0, \qquad (III.58.a)$$

$$U_{\omega}^{E}(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{g_{\omega}^{2}}{4\pi}Y(\vec{x}-\vec{x}',m_{\omega})\gamma_0\gamma^{\mu}[\sum_{\alpha'=1}^{A}\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')]\gamma_0'\gamma_{\mu}', \qquad (III.58.b)$$

$$U_{\rho}^{E}(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{g_{\rho}^{2}}{4\pi}Y(\vec{x}-\vec{x}',m_{\rho})\vec{\tau}\cdot\gamma_0\gamma^{\mu}[\sum_{\alpha'=1}^{A}\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')]\gamma_0'\gamma_{\mu}'\vec{\tau}', \qquad (III.58.c)$$

$$U_{\pi}^{E}(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{g_{\pi}}{2M}\right)^{2}[\partial_i\partial_j' Y(\vec{x}-\vec{x}',m_{\pi})]\vec{\tau}\cdot\gamma_0\gamma_5\gamma^{i}[\sum_{\alpha'=1}^{A}\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')]\gamma_0'\gamma_5'\gamma'^{j}\vec{\tau}', \qquad (III.58.d)$$

$$U_{\gamma}^{E}(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{2}\right)^{2}Y(\vec{x}-\vec{x}',m=0)(1+\tau_3)\gamma_0\gamma^{\mu}[\sum_{\alpha'=1}^{A}\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')]\gamma_0'\gamma_{\mu}'(1+\tau_3'). \qquad (III.58.e)$$

Usando a forma (II.A.19) para $\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x})$ em (III.53), mostra-se, no apêndice III.D, onde está definida a notação empregada, que as equações radiais de Hartree-Fock tem a forma geral *

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}F_a(r) &= [M-E_a+\Sigma_{s,a}^{D}(r)+\Sigma_{0,a}^{D}(r)]G_a(r)+\frac{\kappa}{r}F_a(r)\\ &\quad + Y_a^{\sigma}(r)+Y_a^{\omega}(r)+Y_a^{\rho}(r)+Y_a^{\pi}(r)+Y_a^{\gamma}(r),\end{aligned} \qquad (III.59)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}G_a(r) &= [M+E_a+\Sigma_{s,a}^{D}(r)-\Sigma_{0,a}^{D}(r)]F_a(r)-\frac{\kappa}{r}G_a(r)\\ &\quad + X_a^{\sigma}(r)+X_a^{\omega}(r)+X_a^{\rho}(r)+X_a^{\pi}(r)+X_a^{\gamma}(r),\end{aligned} \qquad (III.60)$$

onde $\Sigma_{s,a}^{D}$ e $\Sigma_{0,a}^{D}$ são as contribuições diretas para a auto-energia

* Os termos X_a^i são definidos aqui com os sinais opostos aos da Ref.[4].

$$\Sigma^D_{s,a} = \frac{g_\sigma^2}{4\pi} m_\sigma \sum_{a'} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') - F^2_{a'}(r')] j_0(im_\sigma r_<) h_0^{(1)}(im_\sigma r_>), \qquad (III.61)$$

$$\begin{aligned}\Sigma^D_{0,a} = & -\frac{g_\omega^2}{4\pi} m_\omega \sum_{a'} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')] j_0(im_\omega r_<) h_0^{(1)}(im_\omega r_>) \\ & - \frac{g_\rho^2}{4\pi} m_\rho \Big\{ \sum_{a'(p)} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')] - \sum_{a'(n)} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')] \Big\} \\ & j_0(im_\rho r_<) h_0^{(1)}(im_\rho r_>)(2t) \\ & + \frac{e^2}{4\pi} \sum_{a'(p)} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')] \frac{1}{r_>} (\frac{1}{2} + t), \qquad (III.62)\end{aligned}$$

e as contribuições de troca são :

$$\begin{aligned}Y^\sigma_a(r) = & -g_\sigma^2 m_\sigma \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2 \\ & \int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') - F_{a'}(r') F_a(r')] j_L(im_\sigma r_<) h_L^{(1)}(im_\sigma r_>), \qquad (III.63)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X^\sigma_a(r) = & -g_\sigma^2 m_\sigma \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2 \\ & \int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') - F_{a'}(r') F_a(r')] j_L(im_\sigma r_<) h_L^{(1)}(im_\sigma r_>), \qquad (III.64)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y^\omega_a(r) = & g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2 \\ & \int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r')] j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>) \\ & + g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' > \\ & \int dr' [G_{a'}(r') F_a(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* - F_{a'}(r') G_a(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^*] \\ & j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>), \qquad (III.65)\end{aligned}$$

$$X_a^\omega(r) = -g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>)$$
$$- g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >$$
$$\int dr' \left[G_a(r')F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r')G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^*\right]$$
$$j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>), \qquad (III.66)$$

$$Y_a^\rho(r) = g_\rho^2 m_\rho \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$
$$+ g_\rho^2 m_\rho \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r')F_a(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* - F_{a'}(r')G_a(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^*\right]$$
$$j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>), \qquad (III.67)$$

$$X_a^\rho(r) = -g_\rho^2 m_\rho \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) F_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$
$$- g_\rho^2 m_\rho \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >$$
$$\int dr' \left[G_a(r')F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r')G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^*\right]$$
$$j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>), \qquad (III.68)$$

$$Y_a^\pi = \left(\frac{g_\pi}{2M}\right)^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \left\{ \frac{\hat{j}^2 \hat{j}'^2}{4\pi} \frac{[G_{a'}(r)G_a(r) + F_{a'}(r)F_a(r)]}{r^2} \right.$$

$$+ m_\pi^3 \sum_L \hat{L}^{-4} | < \kappa | Y_{LM} | - \kappa' > |^2 \sum_{L_1 L_2} [(\kappa + \kappa') + \alpha(L_1)] \int dr' R_{L_1 L_2}(r, r')$$

$$\{[(\kappa + \kappa') + \alpha(L_2)] G_{a'}(r') G_a(r') - [(\kappa + \kappa') - \alpha(L_2)] F_{a'}(r') F_a(r')\}\Big\}, \qquad (III.69)$$

$$X_a^\pi = -(\frac{g_\pi}{2M})^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) F_{a'}(r) \Big\{ \frac{\hat{j}^2 \hat{j}'^2}{4\pi} \frac{[G_{a'}(r) G_a(r) + F_{a'}(r) F_a(r)]}{r^2}$$

$$+ m_\pi^3 \sum_L \hat{L}^{-4} | < \kappa | Y_{LM} | - \kappa' > |^2 \sum_{L_1 L_2} [(\kappa + \kappa') - \alpha(L_1)] \int dr' R_{L_1 L_2}(r, r')$$

$$\{[(\kappa + \kappa') + \alpha(L_2)] G_{a'}(r') G_a(r') - [(\kappa + \kappa') - \alpha(L_2)] F_{a'}(r') F_a(r')\}\Big\}, \qquad (III.70)$$

$$Y_a^\gamma(r) = -e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L \hat{L}^{-2} | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$

$$\int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r')] \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}$$

$$- e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} \hat{L}^{-2} < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >$$

$$\int dr' [G_{a'}(r') F_a(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* - F_{a'}(r') G_a(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^*]$$

$$\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}, \qquad (III.71)$$

$$X_a^\gamma(r) = e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_L \hat{L}^{-2} | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$

$$\int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r')] \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}$$

$$+ e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} \hat{L}^{-2} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >$$

$$\int dr' [G_a(r') F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r') G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^*]$$

$$\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}, \qquad (III.72)$$

III.4) Parâmetros do modelo

Para resolvermos as equações de Hartree-Fock devemos determinar os parâmetros aparecendo na densidade de lagrangeana (II.1). Desde que nós a encaramos como uma densidade de lagrangeana efetiva, os parâmetros do modelo (massas dos mésons e constantes de acoplamento) devem ser ajustados para reproduzir propriedades nucleares.

Há dois caminhos a se seguir para o ajuste dos parâmetros. No primeiro [4], determina-se experimentalmente a massa do nucleon e as massas dos mésons ω, ρ e π. A massa do méson σ, contudo, não é fixada desde que ela corresponde a uma representação da contribuição de troca de dois píons. Já que o méson escalar está relacionado, em grande parte, à interação de alcance intermediário e, portanto, afeta o raio do núcleo, sua massa é ajustada para obter-se o correto raio de carga para o ^{16}O. Para as constantes de acoplamento, nós fixamos os acoplamentos $\pi - N$ e $\rho - N$ nos seus valores físicos bem conhecidos e ajustamos os acoplamentos restantes ($\sigma - N$ e $\omega - N$) para reproduzir o ponto de saturação e a energia de ligação da matéria nuclear, localizada, em $k_F^0 = 1,30 fm^{-1} \simeq 257 MeV$ e $15,75 MeV$/nucleon, respectivamente. Os resultados são apresentados na tabela I.

g_σ^2	g_ω^2	g_ρ^2	g_π^2	m_σ	m_ω	m_ρ	m_π	M
28,53	125,66	6,91	186,14	440	783	770	138	938,9

Tabela I. Ajuste dos parâmetros seguindo Bouyssy et al.[4]. As massas são dadas em MeV.

No outro caminho [7], um estudo da parametrização da QHD é feito comparando-se o cálculo de Hartree-Fock relativístico com os valores experimentais de propriedades do estado

fundamental nuclear. Assim, dos oito parâmetros do modelo, fixam-se somente a massa do píon e sua constante de acoplamento ao seus valores físicos bem conhecidos. Os outros seis parâmetros são determinados por um ajuste de mínimos quadrados às propriedades do estado fundamental nuclear. Mais especificamente, ajustam-se a energia de ligação , o raio de carga e a espessura da superfície de cinco núcleos esféricos: ^{16}O, ^{40}Ca, ^{48}Ca, ^{90}Zr e ^{208}Pb. Os resultados são apresentados na tabela II.

g_σ^2	g_ω^2	g_ρ^2	g_π^2	m_σ	m_ω	m_ρ	m_π	M
108,63	148,05	13,35	180,90	525	760,69	752,32	138	938

Tabela II. Ajuste dos parâmetros seguindo J.-K. Zhang et al.[7]. As massas são dadas em MeV.

CAPÍTULO IV

RPA RELATIVÍSTICA

IV.1) Introdução

Deduziremos aqui as equações da RPA relativística através do método da linearização das equações de movimento. Faremos, em um primeiro momento, a dedução na representação não acoplada em momento angular e isospin, introduzindo depois o acoplamento JT necessário para simplificações de futuros cálculos. Na forma acoplada, no que diz respeito ao isospin, nos limitaremos a núcleos-alvo com N=Z.

IV.2) Obtenção das equações da RPA

No capítulo anterior definimos o estado fundamental de Hartree-Fock de um sistema com A nucleons (ver eq.(III.42)) como sendo aquele cujos estados ocupados de partícula-única correspondem aos A autovalores de energia mais baixos da equação

$$h_{HF}\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = E_\alpha \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}). \qquad (IV.1)$$

A parte radial das funções $\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$ que representam esses estados de partícula-única satisfazem as equações autoconsistentes de Hartree-Fock, (III.59) e (III.60), deduzidas no apêndice III.D. Todas as outras soluções da eq. (IV.1) correspondem a estados de partícula-única não ocupados.

Consideraremos, agora, estados excitados construídos retirando-se nucleons dos orbitais

ocupados e colocando-os nos orbitais desocupados. Tais estados são ortogonais ao estado fundamental já que as autofunções da eq.(IV.1) formam um conjunto ortonormal. Assim, um estado de partícula-buraco é definido em termos do estado fundamental de Hartree-Fock como:

$$|h^{-1}p>= b_p^\dagger b_{\tilde{h}}|\Phi_0> . \qquad (IV.2)$$

Aqui $b_{\tilde{h}}$ destrói uma partícula abaixo do nível de Fermi (estado de buraco) e $b_p^\dagger$ cria uma partícula em um orbital não ocupado acima do nível de Fermi (estado de partícula). Os operadores que atuam nos estados de buraco devem ser definidos com um fator de fase para que eles se transformem sob rotações , tanto no espaço usual, como no de isospin, como um tensor esférico [12]. Assim, na eq.(IV.2)

$$b_{\tilde{h}} = (-)^{j_h+m_h}(-)^{1/2+t_h}b_{-h}, \qquad (IV.3)$$

onde o sinal menos em b_{-h} implica um sinal menos sobre o número quântico magnético e sobre a projeção do isospin. Então , $\{-h\}$ representa o conjunto de números quânticos $\{n_h, \kappa_h, -t_h, -m_h\}$.

A rigor, o estado fundamental exato $|\Psi_0>$ da hamiltoniana H é mais geral do que o estado fundamental de Hartree-Fock, envolvendo, além deste, contribuições das excitações partícula-buraco, ou seja

$$|\Psi_0>= |\Phi_0> +|1p-1h> +|2p-2h> +..., \qquad (IV.4)$$

onde $|np-nh>$ (n=1,2,...) está representando uma determinada superposição de todas as possíveis excitações de n partículas-n buracos. Na verdade, em um cálculo de Hartree-Fock consistente a componente $|1p-1h>$ não aparece em (IV.4).

Como estamos interessados em descrever ressonâncias nucleares gigantes e essas são

consideradas como estados vibracionais, podemos supor que existe um operador $Q_q^\dagger$ tal que seu comutador com H satisfaça :

$$[H, Q_q^\dagger] = \varepsilon_q Q_q^\dagger. \qquad (IV.5)$$

Então , desde que $H|\Psi_0 >= \varepsilon_0|\Psi_0 >$ nós temos:

$$\begin{aligned} HQ_q^\dagger|\Psi_0 > &= [H, Q_q^\dagger]|\Psi_0 > + Q_q^\dagger H|\Psi_0 > \\ &= (\varepsilon_q + \varepsilon_0)Q_q^\dagger|\Psi_0 > . \end{aligned} \qquad (IV.6)$$

Assim, se conseguirmos encontrar um conjunto de operadores satisfazendo (IV.5), então o procedimento $Q_q^\dagger|\Psi_0 >$ gera estados excitados, como pode ser visto na eq.(IV.6).

Em geral nós não podemos encontrar tais operadores, o que corresponderia a resolver exatamente o problema de muitos corpos. Assim, baseados no fato que estamos interessados somente em excitações que sejam fundamentalmente do tipo 1 partícula-1 buraco, escolhemos o operador $Q_q^\dagger$ na forma

$$Q_q^\dagger = \sum_{ph} [X_{ph}^{(q)} b_p^\dagger b_{\bar{h}} - Y_{ph}^{(q)} b_{\bar{h}}^\dagger b_p], \qquad (IV.7)$$

que é a forma mais geral nos operadores de 1 partícula-1 buraco. A justificativa de tal escolha é a suposição de que alguns auto-estados da hamiltoniana podem ser bem descritos como combinações lineares de estados de 1 partícula-1 buraco. Por exemplo, a ressonância dipolar gigante $(J^\pi, T) = (1^-, 1)$ do ^{16}O é desse tipo. As amplitudes $X_{ph}^{(q)}$ e $Y_{ph}^{(q)}$ e a energia de excitação ε_q são incógnitas a serem determinadas.

Claramente, a forma definida acima para $Q_q^\dagger$, não pode satisfazer (IV.5) exatamente. De fato, com esta escolha, o lado direito da eq.(IV.5) é linear em $b_p^\dagger b_{\bar{h}}$ e $b_{\bar{h}}^\dagger b_p$, enquanto o lado esquerdo não o é. Assim, é costume linearizar o comutador $[H, Q_q^\dagger]$, isto é, reter somente os

termos lineares em $b_p^\dagger b_{\tilde{h}}$ e $b_{\tilde{h}}^\dagger b_p$. Isso é conhecido como *aproximação de linearização* e é a principal aproximação contida na RPA. Isso requer que:

$$[H, b_p^\dagger b_{\tilde{h}}] \simeq \sum_{p'h'} (A_{p'h',ph} b_{p'}^\dagger b_{\tilde{h}'} + B^*_{p'h',ph} b_{\tilde{h}'}^\dagger b_{p'}), \qquad (IV.8)$$

$$[H, b_{\tilde{h}}^\dagger b_p] \simeq -\sum_{p'h'} (A^*_{p'h',ph} b_{\tilde{h}'}^\dagger b_{p'} + B_{p'h',ph} b_{p'}^\dagger b_{\tilde{h}'}), \qquad (IV.9)$$

onde $A_{p'h',ph}$ e $B_{p'h',ph}$ são elementos de matriz cujos valores são conhecidos uma vez que H é especificado. Como mostrado no apêndice IV.A, eles são dados por

$$A_{p'h',ph} =< \Phi_0 | [b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [H, b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}]] | \Phi_0 >, \qquad (IV.10)$$

$$B_{p'h',ph} = - < \Phi_0 | [b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [H, b^\dagger{}_{\tilde{h}} b_p]] | \Phi_0 > . \qquad (IV.11)$$

Usando as relações (IV.7), (IV.8) e (IV.9), podemos escrever o comutador $[H, Q_q^\dagger]$ como:

$$[H, Q_q^\dagger] = \sum_{php'h'} \left[(A_{p'h',ph} X_{ph}^{(q)} + B_{p'h',ph} Y_{ph}^{(q)}) b^\dagger{}_{p'} b_{\tilde{h}'} + (B^*_{p'h',ph} X_{ph}^{(q)} + A^*_{p'h',ph} Y_{ph}^{(q)}) b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'} \right]. \qquad (IV.12)$$

Exigimos agora, que essa expressão seja igual ao lado direito de (IV.5), a saber

$$\varepsilon_q \sum_{p'h'} (X_{p'h'}^{(q)} b^\dagger{}_{p'} b_{\tilde{h}'} - Y_{p'h'}^{(q)}) b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}. \qquad (IV.13)$$

Igualando os coeficientes de $b^\dagger{}_{p'} b_{\tilde{h}'}$ e $b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}$ temos um par de equações acopladas

$$\sum_{ph} (A_{p'h',ph} X_{ph}^{(q)} + B_{p'h',ph} Y_{ph}^{(q)}) = \varepsilon_q X_{p'h'}^{(q)}, \qquad (IV.14)$$

$$\sum_{ph}(B^*_{p'h',ph}X^{(q)}_{ph} + A^*_{p'h',ph}Y^{(q)}_{ph}) = -\varepsilon_q Y^{(q)}_{p'h'}, \qquad (IV.15)$$

que podem ser colocadas na forma matricial

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{(q)} \\ Y^{(q)} \end{pmatrix} = \varepsilon_q \begin{pmatrix} X^{(q)} \\ -Y^{(q)} \end{pmatrix}. \qquad (IV.16)$$

Essas são as equações da RPA.

IV.3) RPA relativística

Vamos agora calcular os elementos de matriz $A_{p'h',ph}$ e $B_{p'h',ph}$ utilizando a hamiltoniana dada em (III.41). Antes, vamos utilizar o teorema de Wick (apêndice IV.B) para reescrevê-la como:

$$H = \sum_{\alpha\alpha'}[< \alpha'|T|\alpha > + \sum_{\beta\beta'} < \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >_A < b^\dagger{}_{\beta'}b_\beta >]N(b^\dagger{}_{\alpha'}b_\alpha)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} < \alpha'\beta'|V|\alpha\beta > N(b^\dagger{}_{\alpha'}b^\dagger{}_{\beta'}b_\beta b_\alpha)$$

$$+\sum_{\alpha\alpha'}[< \alpha'|T|\alpha > + \frac{1}{2}\sum_{\beta\beta'} < \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >_A < b^\dagger{}_{\beta'}b_\beta >] < b^\dagger{}_{\alpha'}b_\alpha >, \qquad (IV.17)$$

onde usamos a notação

$$< \alpha'|T|\alpha >= \int d^3\vec{x}\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x})(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \gamma_0 M)\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}), \qquad (IV.18)$$

$$< \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >= \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\beta'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})\mathcal{U}_\beta(\vec{x}'), \qquad (IV.19)$$

$$< \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >_A = \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}' \mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\beta'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})\mathcal{U}_\beta(\vec{x}')$$

$$- \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}' \mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\beta'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}'), \qquad (IV.20)$$

com $V(\vec{x}-\vec{x}')$ dado por (III.38). As expressões explícitas para esses elementos de matriz em termos das funções de onda radiais $F_a(r)$ e $G_a(r)$ estão dadas no apêndice IV.C).

Substituindo (IV.17) em (IV.10) temos

$$A_{p'h',ph} = \sum_{\alpha\alpha'}[< \alpha'|T|\alpha > + \sum_{\beta\beta'} < \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >_A < b^\dagger{}_{\beta'} b_\beta >]$$

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [N(b^\dagger{}_{\alpha'} b_\alpha), b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}]]|\Phi_0 >$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} < \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [N(b^\dagger{}_{\alpha'} b^\dagger{}_{\beta'} b_\beta b_\alpha), b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}]]|\Phi_0 > . \qquad (IV.21)$$

Utilizando o teorema de Wick podemos escrever

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [N(b^\dagger{}_{\alpha'} b_\alpha), b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}]]|\Phi_0 >= \delta_{hh'}\delta_{p'\alpha'}\delta_{p\alpha} - \delta_{\tilde{h}'\alpha}\delta_{\alpha'\tilde{h}}\delta_{pp'}, \qquad (IV.22)$$

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [N(b^\dagger{}_{\alpha'} b^\dagger{}_{\beta'} b_\beta b_\alpha), b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}]]|\Phi_0 > = -\delta_{\tilde{h}'\beta}\delta_{p'\alpha'}\delta_{\tilde{h}\beta'}\delta_{p\alpha} + \delta_{\tilde{h}'\beta}\delta_{p'\beta'}\delta_{\tilde{h}\alpha'}\delta_{p\alpha}$$

$$+ \delta_{\tilde{h}'\alpha}\delta_{p'\alpha'}\delta_{\tilde{h}\beta'}\delta_{p\beta} - \delta_{\tilde{h}'\alpha}\delta_{p'\beta'}\delta_{\tilde{h}\alpha'}\delta_{p\beta}, \qquad (IV.23)$$

onde $\delta_{\tilde{h}\alpha} = (-)^{j_h+m_h}(-)^{1/2+t_h}\delta_{-h\alpha}$. Assim, substituindo (IV.22) e (IV.23) em (IV.21), conseguimos

$$A_{p'h',ph} = \left[< p'|T|p > + \sum_{h''} < p'h''|V|ph'' >_A\right]\delta_{h'h}$$

$$- \left[< \tilde{h}|T|\tilde{h}' > + \sum_{h''} < \tilde{h}h''|V|\tilde{h}'h'' >_A\right]\delta_{pp'} + < p'\tilde{h}|V|\tilde{h}'p >_A$$

$$\equiv (E_p - E_h)\delta_{pp'}\delta_{hh'} + < p'\tilde{h}|V|\tilde{h}'p >_A, \qquad (IV.24)$$

onde usamos a equação (III.52.a) para escrever a energia de partícula-única de Hartree-Fock E_α. De modo análogo para $B_{p'h',ph}$ temos:

$$B_{p'h',ph} = -\sum_{\alpha\alpha'}\left[< \alpha'|T|\alpha > + \sum_{\beta\beta'} < \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >_A < b^\dagger{}_{\beta'}b_\beta >\right]$$

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'}b_{p'}, [N(b^\dagger{}_{\alpha'}b_\alpha), b^\dagger{}_{\tilde{h}}b_p]]|\Phi_0 >$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'} < \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'}b_{p'}, [N(b^\dagger{}_{\alpha'}b^\dagger{}_{\beta'}b_\beta b_\alpha), b^\dagger{}_{\tilde{h}}b_p]]|\Phi_0 > . \qquad (IV.25)$$

Como

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'}b_{p'}, [N(b^\dagger{}_{\alpha'}b_\alpha), b^\dagger{}_{\tilde{h}}b_p]]|\Phi_0 >= 0, \qquad (IV.26)$$

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'}b_{p'}, [N(b^\dagger{}_{\alpha'}b^\dagger{}_{\beta'}b_\beta b_\alpha), b^\dagger{}_{\tilde{h}}b_p]]|\Phi_0 > = \delta_{\tilde{h}'\alpha}\delta_{p'\beta'}\delta_{\tilde{h}\beta}\delta_{p\alpha'} - \delta_{\tilde{h}'\alpha}\delta_{p'\alpha'}\delta_{\tilde{h}\beta}\delta_{p\beta'}$$

$$- \delta_{\tilde{h}'\beta}\delta_{p'\beta'}\delta_{\tilde{h}\alpha}\delta_{p\alpha'} + \delta_{\tilde{h}'\beta}\delta_{p'\alpha'}\delta_{\tilde{h}\alpha}\delta_{p\beta'}, \tag{IV.27}$$

a equação (IV.25) torna-se:

$$B_{p'h',ph} =< p'p|V|\tilde{h}'\tilde{h} >_A . \tag{IV.28}$$

Assim, as equações (IV.14) e (IV.15) com $A_{p'h',ph}$ e $B_{p'h',ph}$ dados em (IV.24) e (IV.28) e com E_α e $< \alpha'\beta'|V|\alpha\beta >_A$ obtidos a partir das soluções das equações de Hartree-Fock relativística do capítulo anterior, formam as nossas equações da RPA relativística.

IV.4) Equações da RPA com acoplamento JT

Na seção anterior deduzimos as equações da RPA na representação partícula-buraco sem acoplamento no momento angular e no isospin. No entanto, sabemos que a hamiltoniana nuclear é invariante por rotações no espaço usual, o que implica em que seus auto-estados tenham momento angular total bem definido. Em particular o estado fundamental dos núcleos par-par têm momento angular total zero. Assim os estados excitados obtidos conforme a prescrição $Q_q^\dagger|\Psi_0 >$ terão momento angular bem definido JM desde que os operadores de excitação sejam tensores esféricos de posto J, isto é, se a expansão (IV.7) tomar a forma [13]

$$Q_q^\dagger(JM) = \sum_{ph}[X^{(qJ)}_{a_p a_h} < j_h m_h j_p m_p|JM > b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}$$

$$- Y^{(qJ)}_{a_p a_h} < j_h m_h j_p m_p|J-M > (-)^{J+M} b^\dagger_{\tilde{h}} b_p], \tag{IV.29}$$

onde estamos usando a notação abreviada $a \equiv \{n\kappa t\}$.

Além dessa simetria exata, a hamiltoniana é também aproximadamente invariante por rotações no espaço de isospin. Com efeito o único termo que quebra essa simetria é a interação eletromagnética H_γ, e este pode ser considerado pequeno em relação aos demais, sendo um fato bem estabelecido que os estados nucleares têm, com muito boa aproximação , um isospin bem definido. É, no entanto, verdade que nos núcleos médios e pesados o isospin do estado fundamental,

$$T_0 = \frac{(N-Z)}{2}, \qquad (IV.30)$$

é diferente de zero. Porém nos núcleos leves ($A \leq 40$) não há excesso de nêutrons e

$$T_0 = 0 \qquad \text{(núcleos leves)}. \qquad (IV.31)$$

Nesse último caso o procedimento para obter estados excitados com isospin bem definido T é, em analogia com (IV.29), tomar os operadores de excitação na forma

$$Q_q^\dagger(JM,TT_3) = \sum_{ph}[X_{d_p d_h}^{(qJT)} < j_h m_h j_p m_p|JM >< \frac{1}{2}t_h \frac{1}{2}t_p|TT_3 > b^\dagger{}_p b_{\bar{h}}$$

$$- Y_{d_p d_h}^{(qJT)} < j_h m_h j_p m_p|J-M >< \frac{1}{2}t_h \frac{1}{2}t_p|T-T_3 >$$

$$(-)^{J+M}(-)^{T+T_3} b_{\bar{h}}^\dagger b_p], \qquad (IV.32)$$

onde introduzimos a notação abreviada $d \equiv \{n\kappa\}$.

Os valores possíveis de T são 0 e 1, correspondendo às excitações iso-escalares e isovetoriais, respectivamente. Embora estejamos aqui particularmente interessados nas excitações isovetoriais, T=1, deixaremos as expressões a seguir, salvo menção em contrário, na forma

geral, isto é, sem explicitar o valor de T, de modo que elas permaneçam válidas para ambos os tipos de excitações .

Na situação mais geral em que $T_0 \neq 0$, os estados obtidos pela mera aplicação do operador de excitação (IV.32) ao estado fundamental ainda não têm isospin bem definido. O procedimento para contornar esse problema é acoplar o isospin do operador de excitação ao do multipleto do estado fundamental conforme discutido na referência [14]. Isso introduz algumas complicações adicionais que não são essenciais aos nossos objetivos e, por simplicidade, nos limitaremos nesta dissertação aos casos em que $T_0 = 0$.

Se compararmos a eq.(IV.32) com a equação (IV.7), notamos que podemos passar da representação não acoplada para a representação acoplada, fazendo

$$X_{ph}^{(q)} \rightarrow X_{d_p d_h}^{(qJT)} < j_h m_h j_p m_p | JM >< \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | TT_3 >, \qquad (IV.33)$$

$$Y_{ph}^{(q)} \rightarrow Y_{d_p d_h}^{(qJT)} < j_h m_h j_p m_p | J - M >< \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T - T_3 > (-)^{J+M} (-)^{T+T_3}. \qquad (IV.34)$$

Assim, podemos escrever diretamente as equações da RPA na forma acoplada em JT como:

$$\sum_{ph} (A_{p'h',ph} X_{d_p d_h}^{(qJT)} < j_h m_h j_p m_p | JM >< \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | TT_3 >$$

$$+ B_{p'h',ph} Y_{d_p d_h}^{(qJT)} < j_h m_h j_p m_p | J - M >< \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T - T_3 > (-)^{J+M} (-)^{T+T_3}) =$$

$$= \varepsilon_q^{(JT)} X_{d'_p d'_h}^{(qJT)} < j'_h m'_h j'_p m'_p | JM >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | TT_3 >, \qquad (IV.35)$$

$$\sum_{ph} (B^*_{p'h',ph} X_{d_p d_h}^{(qJT)} < j_h m_h j_p m_p | JM >< \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | TT_3 >$$

$$+ A^*_{p'h',ph} Y^{(qJT)}_{d_p d_h} < j_h m_h j_p m_p | J - M >< \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T - T_3 > (-)^{J+M} (-)^{T+T_3}) =$$

$$= -\varepsilon^{(JT)}_q Y^{(qJT)}_{d'_p d'_h} < j'_h m'_h j'_p m'_p | J - M >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{J+M} (-)^{T+T_3}. \quad (IV.36)$$

Uma forma mais compacta pode ser conseguida multiplicando as equações (IV.36) e (IV.35), respectivamente, por $< j'_h m'_h j'_p m'_p | J - M >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{J+M} (-)^{T+T_3}$ e $< j'_h m'_h j'_p m'_p | JM >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | TT_3 >$ e somando sobre os números quânticos m'_p, m'_h, t'_p, t'_h. Após a utilização da relação de ortonormalidade dos coeficientes de Clebsch-Gordon, obtemos

$$\sum_{d_p d_h} (\mathcal{A}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h} X^{(qJT)}_{d_p d_h} + \mathcal{B}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h} Y^{(qJT)}_{d_p d_h}) = \varepsilon^{(JT)}_q X^{(qJT)}_{d'_p d'_h}, \quad (IV.37)$$

$$\sum_{d_p d_h} (\mathcal{B}^{*(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h} X^{(qJT)}_{d_p d_h} + \mathcal{A}^{*(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h} Y^{(qJT)}_{d_p d_h}) = -\varepsilon^{(JT)}_q Y^{(qJT)}_{d'_p d'_h}, \quad (IV.38)$$

onde

$$\mathcal{A}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < j_h m_h j_p m_p | JM >< j'_h m'_h j'_p m'_p | JM >$$

$$< \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | TT_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | TT_3 > A_{p'h',ph}, \quad (IV.39)$$

$$\mathcal{B}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < j_h m_h j_p m_p | JM >< j'_h m'_h j'_p m'_p | J - M >$$

$$< \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | TT_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{J+M} (-)^{T+T_3} B_{p'h',ph}. \quad (IV.40)$$

Analogamente ao feito em (IV.16), podemos escrevê-las em forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{(JT)} & \mathcal{B}^{(JT)} \\ \mathcal{B}^{*(JT)} & \mathcal{A}^{*(JT)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(qJT)} \\ Y^{(qJT)} \end{pmatrix} = \varepsilon_q^{(JT)} \begin{pmatrix} X^{(qJT)} \\ -Y^{(qJT)} \end{pmatrix}. \qquad (IV.41)$$

Essas são as equações da RPA relativística em forma acoplada em J e T. Embora elas sejam formalmente muito semelhantes às equações em forma não acoplada, (IV.16), é fácil perceber que as matrizes envolvidas para cada valor de J e T têm agora dimensões muito menores que as das matrizes correspondentes em (IV.16), mesmo se fizermos os cálculos no mesmo espaço-modelo, isto é, se incluirmos na descrição os mesmos níveis de partícula-única. Essa é a grande simplificação que conseguimos ao levarmos em conta explicitamente as simetrias da hamiltoniana.

Os elementos de matriz $\mathcal{A}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ e $\mathcal{B}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ são dados explicitamente por *:

$$\mathcal{A}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >^2 (E_{a_p} - E_{a_h}) \delta_{d_p d'_p} \delta_{d_h d'_h}$$

$$+ \mathcal{A}^{(JT)\sigma}_{d'_p d'_h, d_p d_h} + \mathcal{A}^{(JT)\omega}_{d'_p d'_h, d_p d_h} + \mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} + \mathcal{A}^{(JT)\pi}_{d'_p d'_h, d_p d_h} + \mathcal{A}^{(JT)\gamma}_{d'_p d'_h, d_p d_h}, \qquad (IV.42)$$

onde

$$\mathcal{A}^{(JT)\sigma}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = g_\sigma^2 m_\sigma \hat{J}^{-2} (-)^{j_h + j_p - j'_h - j'_p} \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 >$$

$$\delta_{t'_p - t'_h} \delta_{t_p - t_h} (-)^{\frac{1}{2} + t_h} (-)^{\frac{1}{2} + t'_h} \int dr dr' (G_{a'_p} G_{\bar{a}'_h} - F_{a'_p} F_{\bar{a}'_h})_r (G_{\bar{a}_h} G_{a_p} - F_{\bar{a}_h} F_{a_p})_{r'}$$

$$j_J(i m_\sigma r_<) h_J^{(1)}(i m_\sigma r_>) < \kappa'_p \| Y_J \| \kappa'_h >< \kappa_p \| Y_J \| \kappa_h >^*$$

$$- g_\sigma^2 m_\sigma \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_h^{-1} \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >^2 \delta_{t'_p t_p} \delta_{t'_h t_h}$$

$$\sum_L U(j'_p L J j_h; j_p j'_h) \int dr dr' (G_{a'_p} G_{a_p} - F_{a'_p} F_{a_p})_r (G_{\bar{a}_h} G_{\bar{a}'_h} - F_{\bar{a}_h} F_{\bar{a}'_h})_{r'}$$

$$j_L(i m_\sigma r_<) h_L^{(1)}(i m_\sigma r_>) < \kappa'_p \| Y_L \| \kappa_p >< \kappa'_h \| Y_L \| \kappa_h >^* \qquad (IV.43)$$

* Para detalhes deste cálculo ver apêndice IV.D)

$$\mathcal{A}^{(JT)\omega}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > \delta_{t'_p - t'_h} \delta_{t_p - t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\{ -g^2_\omega m_\omega \hat{J}^{-2} (-)^{j_h + j_p - j'_h - j'_p} \int dr dr' (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'}$$

$$j_J(i m_\omega r_<) h^{(1)}_J (i m_\omega r_>) < \kappa'_p \parallel Y_J \parallel \kappa'_h > < \kappa_p \parallel Y_J \parallel \kappa_h >^*$$

$$- g^2_\omega m_\omega \hat{J}^{-2} (-)^{j_h + j_p - j'_h - j'_p} \sum_L \int dr dr' (G_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel -\kappa'_h >$$

$$- F_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel \kappa'_h >)_r (G_{\tilde{a}_h} F_{a_p} < -\kappa_p \parallel T_{JL} \parallel \kappa_h >^*$$

$$- F_{\tilde{a}_h} G_{a_p} < \kappa_p \parallel T_{JL} \parallel -\kappa_h >^*)_{r'} j_L(i m_\omega r_<) h^{(1)}_L (i m_\omega r_>) \}$$

$$+ \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >^2 \delta_{t'_p t_p} \delta_{t'_h t_h} \{ g^2_\omega m_\omega \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_h'^{-1} \sum_L U(j'_p L J j_h; j_p j'_h)$$

$$\int dr dr' (G_{a'_p} G_{a_p} + F_{a'_p} F_{a_p})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} + F_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} j_L(i m_\omega r_<) h^{(1)}_L (i m_\omega r_>)$$

$$< \kappa'_p \parallel Y_L \parallel \kappa_p > < \kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_h >^*$$

$$+ g^2_\omega m_\omega \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_h'^{-1} \sum_{L\mathcal{J}} U(j'_p \mathcal{J} J j_h; j_p j'_h) \int dr dr' (G_{a'_p} F_{a_p} < \kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p >$$

$$- F_{a'_p} G_{a_p} < -\kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >)_r (G_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >^*$$

$$- F_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h >^*)_{r'} j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>)\}, \qquad (IV.44)$$

$$\mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\{\text{termo idêntico ao do méson } \omega \text{ fazendo } m_\omega \to m_\rho \text{ e } g_\omega \to g_\rho\}$$

$$+ \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\{\text{termo idêntico ao do méson } \omega \text{ fazendo } m_\omega \to m_\rho \text{ e } g_\omega \to g_\rho\}, \qquad (IV.45)$$

$$\mathcal{A}^{(JT)\pi}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\Big\{ (\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi \hat{j}^{-2} (-)^{j_h + j_p - j'_h - j'_p} < \kappa'_p \parallel Y_J \parallel -\kappa'_h >< -\kappa_p \parallel Y_J \parallel \kappa_h >^*$$

$$\int dr dr' \Big[(G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{d}{dr} \frac{d}{dr'} j_J(im_\pi r_<) h_J^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$- (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} - F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{\kappa'_p + \kappa'_h}{r} \frac{d}{dr'} j_J(im_\pi r_<) h_J^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$- (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} - F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{\kappa_p + \kappa_h}{r'} \frac{d}{dr} j_J(im_\pi r_<) h_J^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$+ (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} - F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} - F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{\kappa'_p + \kappa'_h}{r} \frac{\kappa_p + \kappa_h}{r'} j_J(im_\pi r_<) h_J^{(1)}(im_\pi r_>) \Big] \Big\}$$

$$- \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\Big\{ (\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_h'^{-1} \sum_L U(j'_p L J j_h; j_p j'_h) < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel -\kappa_p > < -\kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_h >^*$$

$$\int dr dr' \big[(G_{a'_p} G_{a_p} + F_{a'_p} F_{a_p})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} + F_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{d}{dr} \frac{d}{dr'} j_L(i m_\pi r_<) h_L^{(1)}(i m_\pi r_>)$$

$$- (G_{a'_p} G_{a_p} - F_{a'_p} F_{a_p})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} + F_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{\kappa'_p + \kappa_p}{r} \frac{d}{dr'} j_L(i m_\pi r_<) h_L^{(1)}(i m_\pi r_>)$$

$$- (G_{a'_p} G_{a_p} + F_{a'_p} F_{a_p})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} - F_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{\kappa'_h + \kappa_h}{r'} \frac{d}{dr} j_L(i m_\pi r_<) h_L^{(1)}(i m_\pi r_>)$$

$$+ (G_{a'_p} G_{a_p} - F_{a'_p} F_{a_p})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} - F_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{\kappa'_p + \kappa_p}{r} \frac{\kappa'_h + \kappa_h}{r'}$$

$$j_L(i m_\pi r_<) h_L^{(1)}(i m_\pi r_>) \big] \Big\}, \qquad (IV.46)$$

$$\mathcal{A}^{(JT)\gamma}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (1 + 2t'_p)(1 + 2t_p) \delta_{t'_p - t'_h} \delta_{t_p - t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t_h}$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t'_h} \Big\{ (\frac{e}{2})^2 \hat{J}^{-4} (-)^{j_h + j_p - j'_h - j'_p} < \kappa'_p \parallel Y_J \parallel \kappa'_h > < \kappa_p \parallel Y_J \parallel \kappa_h >^*$$

$$\int dr dr' (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{r_<^J}{r_>^{J+1}}$$

$$+ (\frac{e}{2})^2 \hat{J}^{-2} (-)^{j_h + j_p - j'_h - j'_p} \sum_L \hat{L}^{-2} \int dr dr' (G_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel -\kappa'_h >$$

$$- F_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel \kappa'_h >)_r (G_{\tilde{a}_h} F_{a_p} < -\kappa_p \parallel T_{JL} \parallel \kappa_h >^*$$

$$- F_{\tilde{a}_h} G_{a_p} < \kappa_p \parallel T_{JL} \parallel -\kappa_h >^*)_{r'} \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\}$$

$$+ \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >^2 \delta_{t'_p t_p} \delta_{t'_h t_h} (1 + 2t_p)(1 - 2t_h) \{ -(\frac{e}{2})^2 \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_h'^{-1}$$

$$\sum_L \hat{L}^{-2} U(j'_p L J j_h; j_p j'_h) < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel \kappa_p >< \kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_h >^*$$

$$\int dr dr' (G_{a'_p} G_{a_p} + F_{a'_p} F_{a_p})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} + F_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}$$

$$- (\frac{e}{2})^2 \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_h'^{-1} \sum_{L\mathcal{J}} \hat{L}^{-2} U(j'_p \mathcal{J} J j_h; j_p j'_h) \int dr dr' (G_{a'_p} F_{a_p} < \kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p >$$

$$- F_{a'_p} G_{a_p} < -\kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >)_r (G_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >^*$$

$$- F_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h >^*)_{r'} \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\}, \qquad (IV.47)$$

$$\mathcal{B}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \mathcal{B}^{(JT)\sigma}_{d'_p d'_h, d_p d_h} + \mathcal{B}^{(JT)\omega}_{d'_p d'_h, d_p d_h} + \mathcal{B}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} + \mathcal{B}^{(JT)\pi}_{d'_p d'_h, d_p d_h} + \mathcal{B}^{(JT)\gamma}_{d'_p d'_h, d_p d_h}, \qquad (IV.48)$$

onde

$$\mathcal{B}^{(JT)\sigma}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = g_\sigma^2 m_\sigma \hat{J}^{-2} (-)^{J+2j_p - j'_h - j'_p} \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{T+T_3}$$

$$\delta_{t'_p - t'_h} \delta_{t_p - t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h} \int dr dr' (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} - F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} - F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'}$$

$$j_J(im_\sigma r_<)h_J^{(1)}(im_\sigma r_>) < \kappa_p' \parallel Y_J \parallel \kappa_h' >< \kappa_h \parallel Y_J \parallel \kappa_p >^*$$

$$- g_\sigma^2 m_\sigma \hat{j}_p'^{-1} \hat{j}_p^{-1} \sum_{t_p t_h t_p' t_h'} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t_h' \frac{1}{2} t_p' | T - T_3 > (-)^{T+T_3} \delta_{t_p' - t_h} \delta_{t_p - t_h'}$$

$$\sum_L U(j_h L J j_h'; j_p' j_p) \int dr dr' (G_{a_p'} G_{\tilde{a}_h} - F_{a_p'} F_{\tilde{a}_h})_r (G_{a_p} G_{\tilde{a}_h'} - F_{a_p} F_{\tilde{a}_h'})_{r'}$$

$$j_L(im_\sigma r_<)h_L^{(1)}(im_\sigma r_>) < \kappa_p' \parallel Y_L \parallel \kappa_h >< \kappa_h' \parallel Y_L \parallel \kappa_p >^* \qquad (IV.49)$$

$$\mathcal{B}^{(JT)\omega}_{d_p' d_h', d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t_p' t_h'} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t_h' \frac{1}{2} t_p' | T - T_3 > (-)^{T+T_3} \delta_{t_p' - t_h'} \delta_{t_p - t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t_h'}$$

$$\{-g_\omega^2 m_\omega \hat{J}^{-2} (-)^{J+2j_p - j_h' - j_p'} \int dr dr' (G_{a_p'} G_{\tilde{a}_h'} + F_{a_p'} F_{\tilde{a}_h'})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'}$$

$$j_J(im_\omega r_<)h_J^{(1)}(im_\omega r_>) < \kappa_p' \parallel Y_J \parallel \kappa_h' >< \kappa_h \parallel Y_J \parallel \kappa_p >^*$$

$$- g_\omega^2 m_\omega \hat{J}^{-2} (-)^{J+2j_p - j_h' - j_p'} \sum_L \int dr dr' (G_{a_p'} F_{\tilde{a}_h'} < \kappa_p' \parallel T_{JL} \parallel -\kappa_h' >$$

$$- F_{a_p'} G_{\tilde{a}_h'} < -\kappa_p' \parallel T_{JL} \parallel \kappa_h' >)_r (G_{a_p} F_{\tilde{a}_h} < -\kappa_h \parallel T_{JL} \parallel \kappa_p >^*$$

$$- F_{a_p} G_{\tilde{a}_h} < \kappa_h \parallel T_{JL} \parallel -\kappa_p >^*)_{r'} j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>)\}$$

$$- \sum_{t_p t_h t_p' t_h'} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t_h' \frac{1}{2} t_p' | T - T_3 > (-)^{T+T_3} (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t_h'} \delta_{t_p' - t_h} \delta_{t_p - t_h'}$$

$$\{-g_\omega^2 m_\omega \hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_p^{-1}(-)^{j_h'+J-j_p'}\sum_L U(j_hLJj_h';j_p'j_p) < \kappa_p' \parallel Y_L \parallel \kappa_h >< \kappa_h' \parallel Y_L \parallel \kappa_p >^*$$

$$\int drdr'(G_{a_p'}G_{\tilde{a}_h} + F_{a_p'}F_{\tilde{a}_h})_r(G_{a_p}G_{\tilde{a}_h'} + F_{a_p}F_{\tilde{a}_h'})_{r'} j_L(im_\omega r_<)h_L^{(1)}(im_\omega r_>)$$

$$- g_\omega^2 m_\omega \hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_p^{-1}(-)^{j_h'+J-j_p'}\sum_{L\mathcal{J}} U(j_h\mathcal{J}Jj_h';j_p'j_p)\int drdr'(G_{a_p'}F_{\tilde{a}_h} < \kappa_p' \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h >$$

$$- F_{a_p'}G_{\tilde{a}_h} < -\kappa_p' \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >)_r(G_{a_p}F_{\tilde{a}_h'} < -\kappa_h' \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >^*$$

$$- F_{a_p}G_{\tilde{a}_h'} < \kappa_h' \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p >^*)_{r'} j_L(im_\omega r_<)h_L^{(1)}(im_\omega r_>)\}, \qquad (IV.50)$$

$$\mathcal{B}^{(JT)\rho}_{d_p'd_h',d_pd_h} = \sum_{t_pt_ht_p't_h'} < \frac{1}{2}t_h\frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t_h'\frac{1}{2}t_p'|T-T_3 > (-)^{T+T_3}(\zeta^\dagger_{t_p'}\vec{\tau}\zeta_{-t_h'})\cdot(\zeta^\dagger_{t_p}\vec{\tau}\zeta_{-t_h})$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t_h'}\{\text{termo idêntico ao do méson } \omega \text{ fazendo } m_\omega \to m_\rho \text{ e } g_\omega \to g_\rho\}$$

$$- \sum_{t_pt_ht_p't_h'} < \frac{1}{2}t_h\frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t_h'\frac{1}{2}t_p'|T-T_3 > (-)^{T+T_3}(\zeta^\dagger_{t_p'}\vec{\tau}\zeta_{-t_h})\cdot(\zeta^\dagger_{t_p}\vec{\tau}\zeta_{-t_h'})$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t_h'}\{\text{termo idêntico ao do méson } \omega \text{ fazendo } m_\omega \to m_\rho \text{ e } g_\omega \to g_\rho\}, \qquad (IV.51)$$

$$\mathcal{B}^{(JT)\pi}_{d_p'd_h',d_pd_h} = \sum_{t_pt_ht_p't_h'} < \frac{1}{2}t_h\frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t_h'\frac{1}{2}t_p'|T-T_3 > (-)^{T+T_3}(\zeta^\dagger_{t_p'}\vec{\tau}\zeta_{-t_h'})\cdot(\zeta^\dagger_{t_p}\vec{\tau}\zeta_{-t_h})$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t_h'}\left\{(\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi \hat{J}^{-2}(-)^{J+2j_p-j_h'-j_p'} < \kappa_p' \parallel Y_J \parallel -\kappa_h' >< -\kappa_h \parallel Y_J \parallel \kappa_p >^*\right.$$

$$\int drdr' \Big[(G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{d}{dr} \frac{d}{dr'} j_J(im_\pi r_<) h_J^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$- (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} - F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{\kappa'_p + \kappa'_h}{r} \frac{d}{dr'} j_J(im_\pi r_<) h_J^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$- (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} - F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{\kappa_p + \kappa_h}{r'} \frac{d}{dr} j_J(im_\pi r_<) h_J^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$+ (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} - F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} - F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{\kappa'_p + \kappa'_h}{r} \frac{\kappa_p + \kappa_h}{r'} j_J(im_\pi r_<) h_J^{(1)}(im_\pi r_>) \Big] \Big\}$$

$$- \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{T+T_3} (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{t_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\Big\{ (\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_p'^{-1} (-)^{j'_h + J - j'_p} \sum_L U(j_h L J j'_h; j'_p j_p) < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel -\kappa_h > < -\kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_p >^*$$

$$\int drdr' \Big[(G_{a'_p} G_{\tilde{a}_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}_h})_r (G_{a_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a_p} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{d}{dr} \frac{d}{dr'} j_L(im_\pi r_<) h_L^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$- (G_{a'_p} G_{\tilde{a}_h} - F_{a'_p} F_{\tilde{a}_h})_r (G_{a_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a_p} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{\kappa'_p + \kappa_h}{r} \frac{d}{dr'} j_L(im_\pi r_<) h_L^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$- (G_{a'_p} G_{\tilde{a}_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}_h})_r (G_{a_p} G_{\tilde{a}'_h} - F_{a_p} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{\kappa_p + \kappa'_h}{r'} \frac{d}{dr} j_L(im_\pi r_<) h_L^{(1)}(im_\pi r_>)$$

$$+ (G_{a'_p} G_{\tilde{a}_h} - F_{a'_p} F_{\tilde{a}_h})_r (G_{a_p} G_{\tilde{a}'_h} - F_{a_p} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{\kappa'_p + \kappa_h}{r} \frac{\kappa'_h + \kappa_p}{r'}$$

$$j_L(im_\pi r_<) h_L^{(1)}(im_\pi r_>) \Big] \Big\}, \qquad (IV.52)$$

$$\mathcal{B}^{(JT)\gamma}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{T+T_3} (1+2t'_p)(1+2t_p) \delta_{t'_p - t'_h} \delta_{t_p - t_h}$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h} \{ (\frac{e}{2})^2 \hat{J}^{-4} (-)^{J+2j_p - j'_h - j'_p} < \kappa'_p \parallel Y_J \parallel \kappa'_h > < \kappa_h \parallel Y_J \parallel \kappa_p >^*$$

$$\int dr dr' (G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} \frac{r_<^J}{r_>^{J+1}}$$

$$+ (\frac{e}{2})^2 \hat{J}^{-2} (-)^{J+2j_p - j'_h - j'_p} \sum_L \hat{L}^{-2} \int dr dr' (G_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel -\kappa'_h >$$

$$- F_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel \kappa'_h >)_r (G_{a_p} F_{\tilde{a}_h} < -\kappa_h \parallel T_{JL} \parallel \kappa_p >^*$$

$$- F_{a_p} G_{\tilde{a}_h} < \kappa_h \parallel T_{JL} \parallel -\kappa_p >^*)_{r'} \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}} \}$$

$$- \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{T+T_3} \delta_{t'_p - t_h} \delta_{t_p - t'_h} (1+2t'_p)(1+2t_p)$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h} \{ (\frac{e}{2})^2 \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_p'^{-1} (-)^{j'_h + J - j'_p} \sum_L \hat{L}^{-2} U(j_h L J j'_h; j'_p j_p) < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel \kappa_h >$$

$$< \kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_p >^* \int dr dr' (G_{a'_p} G_{\tilde{a}_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}_h})_r (G_{a_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a_p} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}$$

$$+ (\frac{e}{2})^2 \hat{j}_p'^{-1} \hat{j}_p^{-1} (-)^{j'_h + J - j'_p} \sum_{L\mathcal{J}} \hat{L}^{-2} U(j_h \mathcal{J} J j'_h; j'_p j_p) \int dr dr' (G_{a'_p} F_{\tilde{a}_h} < \kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h >$$

$$- F_{a'_p} G_{\tilde{a}_h} < -\kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >)_r (G_{a_p} F_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >^*$$

$$- F_{a_p} G_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p >^*)_{r'} \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}\}. \qquad (IV.53)$$

As expressões para $\mathcal{A}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ e $\mathcal{B}^{(JT)}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ podem ser simplificadas com a suposição razoável, especialmente para núcleos leves, de considerar as funções de onda G e F como independentes do isospin, ou seja,

$$G_a \simeq G_d, \qquad (IV.54)$$

$$F_a \simeq F_d. \qquad (IV.55)$$

Com esta hipótese, podemos resolver a parte envolvendo isospin nas contribuições vindas dos mésons e do campo eletromagnético. Assim, em $\mathcal{A}^{(JT)\sigma}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ e $\mathcal{A}^{(JT)\omega}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ temos

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > \delta_{t'_p - t'_h} \delta_{t_p - t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h} = 2\delta_{T0}, \qquad (IV.56)$$

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >^2 \delta_{t'_p t_p} \delta_{t'_h t_h} = 1, \qquad (IV.57)$$

e nas contribuições dos mésons isovetoriais $\mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ e $\mathcal{A}^{(JT)\pi}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ conseguimos

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h} = 2\delta_{T1}, \qquad (IV.58)$$

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h} =$$

$$= 3U(\frac{1}{2} 1 T \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \frac{1}{2}). \qquad (IV.59)$$

Na contribuição eletromagnética $\mathcal{A}^{(JT)\gamma}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$, temos

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (1 + 2t'_p)(1 + 2t_p) \delta_{t'_p - t'_h} \delta_{t_p - t_h} (-)^{\frac{1}{2} + t_h} (-)^{\frac{1}{2} + t'_h} =$$

$$= 4 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} | T0 >^2 = 2, \qquad (IV.60)$$

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >^2 \delta_{t'_p t_p} \delta_{t'_h t_h} (1 + 2t_p)(1 - 2t_h) = 4 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} | T0 >^2 = 2. \quad (IV.61)$$

Do mesmo modo para a matriz $\mathcal{B}^{(JT)}$, temos em $\mathcal{B}^{(JT)\sigma}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ e $\mathcal{B}^{(JT)\omega}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{T + T_3} \delta_{t'_p - t'_h} \delta_{t_p - t_h} (-)^{\frac{1}{2} + t_h} (-)^{\frac{1}{2} + t'_h} =$$

$$= 2\delta_{T0}, \qquad (IV.62)$$

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{T + T_3} \delta_{t'_p - t_h} \delta_{t_p - t'_h} (-)^{\frac{1}{2} + t_h} (-)^{\frac{1}{2} + t'_h} =$$

$$= (-)^T, \qquad (IV.63)$$

e na contribuição dos mésons isovetoriais $\mathcal{B}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ e $\mathcal{B}^{(JT)\pi}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{T + T_3} (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{t_p} \vec{\tau} \zeta_{-t_h}) (-)^{\frac{1}{2} + t_h} (-)^{\frac{1}{2} + t'_h} =$$

$$= -2\delta_{T1}, \ (IV.64)$$

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2}t_h \frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t'_h \frac{1}{2}t'_p|T-T_3 >(-)^{T+T_3}(\zeta^\dagger_{t'_p}\vec{\tau}\zeta_{-t_h})\cdot(\zeta^\dagger_{t_p}\vec{\tau}\zeta_{-t'_h})(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t'_h} =$$

$$= 3(-)^T U(\frac{1}{2}1T\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}). \qquad (IV.65)$$

Na contribuição eletromagnética $\mathcal{B}^{(JT)\gamma}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ temos

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2}t_h \frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t'_h \frac{1}{2}t'_p|T-T_3 > (-)^{T+T_3}(1+2t'_p)(1+2t_p)\delta_{t'_p-t'_h}\delta_{t_p-t_h}$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t'_h} = 4(-)^T < \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}|T0 >^2 = 2(-)^T, \quad (IV.66)$$

$$\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2}t_h \frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t'_h \frac{1}{2}t'_p|T-T_3 > (-)^{T+T_3}(1+2t'_p)(1+2t_p)\delta_{t'_p-t_h}\delta_{t_p-t'_h}$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t'_h} = 4(-)^T < \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}|T0 >^2 = 2(-)^T. \quad (IV.67)$$

É interessante notar que se nos limitássemos à aproximação de Hartrre (termos direto), então somente os mésons iso-escalares contribuiriam para as excitações iso-escalares (T=0) e somente os mésons isovetoriais contribuiriam para as excitações isovetoriais (T=1), como pode ser visto nas equações (IV.56),(IV.58),(IV.62) e (IV.64). Na aproximação de Hartree-Fock, no entanto, os termos de troca fazem com que essa especificidade deixe de ser exata.

CONCLUSÃO

Obtivemos nesta dissertação as equações da RPA relativística apropriadas para ressonâncias gigantes isovetoriais, em núcleos de camadas fechadas. Utilizamos um modelo relativístico (QHD), onde o nucleon é acoplado a vários mésons através de uma densidade de lagrangeana efetiva, para a obtenção da interação efetiva. O mesmo modelo foi usado para deduzir as equações de Hartree-Fock relativísticas que nos proporcionam a melhor base para a descrição do estado fundamental nuclear, levando a um tratamento com alto grau de autoconsistência. Vale ressaltar que uma das razões para desenvolver uma teoria relativística para núcleos finitos no âmbito da aproximação de Hartree-Fock ao invés da abordagem, mais simples, de campo médio (MFT) é que uma descrição realística da interação nucleon-nucleon em termos de troca de mésons deve incluir o píon, e como visto no capítulo II (ver também o apêndice III.D) a aproximação de Hartree (ou campo médio) não pode fazê-lo. O mesmo argumento vale, em menor extensão , para o méson ρ. A inclusão desses mésons é especialmente relevante para excitações isovetoriais.

Esta dissertação seguiu, em linhas gerais, alguns trabalhos publicados sobre equações de Hartree-Fock relativísticas, como, por exemplo, Bouyssy *et. al.* [4] e Brockmann [9], entre outros. No que diz respeito às equações da RPA relativística, apesar de existirem alguns trabalhos a respeito [19], em nenhum deles as equações são totalmente explicitadas. Assim, nosso objetivo foi deduzí-las com bastante detalhes e colocá-las em uma forma adequada para serem utilizadas, em um futuro próximo, em cálculos numéricos.

Sofisticações podem ser incluídas ao modelo usado nesta dissertação . Como exemplo, poder-se-ia pensar em introduzir acoplamentos tensoriais para os mésons vetoriais e introduzir auto-interações do campo escalar, através do modelo σ não linear. Uma outra extensão desejável das equações finais aqui apresentadas seria adaptá-las para núcleos-alvo com isospin não -nulo e (mais complicado) para núcleos com camadas abertas ou deformados.

APÊNDICES

APÊNDICE II.A) Solução da equação de Dirac em um potencial central

Vamos buscar os estados estacionários para uma partícula de Dirac movendo-se em um potencial estático central da forma

$$V(r) = g_\omega V_0 + g_\rho \tau_3 b_0 + e\frac{1}{2}(1+\tau_3)A_0 - g_s\gamma_0\phi_0. \qquad (II.A.1)$$

A hamiltoniana de Dirac é então a hamiltoniana de campo médio definida em (II.36),

$$h_{MFT} = -i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \gamma_0 M + V(r). \qquad (II.A.2)$$

Se definirmos o operador momento angular total de partícula-única como

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{x}\times\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}, \qquad (II.A.3)$$

onde $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ é uma generalização das matrizes de Pauli, é fácil mostrar que $\vec{J}$ e $\vec{J}^2$ comutam com a hamiltoniana, sendo, então , constantes de movimento. O mesmo acontece com os operadores de isospin T_3 e $\vec{T}^2$.

Outra constante de movimento pode ser obtida definindo-se um operador K como:

$$K \equiv \gamma^0[\vec{\Sigma}\cdot\vec{J} - \frac{1}{2}] = \gamma^0[\vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 1]. \qquad (II.A.4)$$

Para verificar essa afirmação , vamos calcular o comutador $[h_{MFT}, K]$. Assim

$$\begin{aligned}[h_{MFT}, K] &= [h_{MFT}, \gamma^0\vec{\Sigma}\cdot\vec{J}] - \frac{1}{2}[h_{MFT}, \gamma^0] \\ &= \gamma^0 \underbrace{[h_{MFT}, \vec{\Sigma}]}_{2i\vec{\alpha}\times\vec{p}}\cdot\vec{J} + \underbrace{[h_{MFT}, \gamma^0]}_{-2\gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}\vec{\Sigma}\cdot\vec{J} - \frac{1}{2}\underbrace{[h_{MFT}, \gamma^0]}_{-2\gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}. \qquad (II.A.5)\end{aligned}$$

Como (notando que $\vec{\alpha} = \gamma_5\vec{\Sigma}$)

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{J}) = \gamma_5[\vec{p}\cdot\vec{J} + i\vec{\Sigma}\cdot(\vec{p}\times\vec{J})], \qquad (II.A.6)$$

temos para (II.A.5)

$$\begin{aligned}
[h_{MFT}, K] &= -2\gamma^0\gamma_5\vec{p}\cdot\vec{J} + \gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{p} \\
&= -2\gamma^0\gamma_5\vec{p}\cdot(\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}) + \gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{p} \\
&= -2\gamma^0\gamma_5\underbrace{\vec{p}\cdot\vec{L}}_{0} \\
&= 0, \qquad (II.A.7)
\end{aligned}$$

comprovando que K é uma constante de movimento. Fisicamente K mede o grau de alinhamento entre o spin e o momento angular orbital da partícula.

Assim, podemos construir uma autofunção simultânea de h_{MFT}, K, $\vec{J}^2$,J_3, T_3 e $\vec{T}^2$.

O autovalor do operador K, denotado por $-\kappa$, pode ser relacionado com j (lembrando que o autovalor de $\vec{J}^2$ é $j(j+1)$) usando a definição (II.A.4). Então :

$$\begin{aligned}
K^2 &= (\vec{\Sigma}\cdot\vec{L})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}) + 2\vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 1 \\
&= \vec{L}^2 + i\vec{\Sigma}\cdot(\vec{L}\times\vec{L}) + 2\vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 1 \\
&= \vec{L}^2 + \vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + 1, \qquad (II.A.8)
\end{aligned}$$

onde usamos $\vec{L}\times\vec{L} = i\vec{L}$, $[\gamma_0, \vec{\Sigma}] = 0$ e $(\gamma_0)^2 = 1$. Levando em conta que

$$\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{\Sigma}\cdot\vec{L} + \frac{3}{4}, \qquad (II.A.9)$$

temos

$$K^2 = \vec{J}^2 + \frac{1}{4}, \qquad (II.A.10)$$

Portanto

$$\kappa^2 = j(j+1) + \frac{1}{4}, \qquad (II.A.11)$$

ou

$$\mid \kappa \mid = j + \frac{1}{2}. \qquad (II.A.12)$$

Logo κ é um inteiro diferente de zero ($\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$).

Se escrevermos um auto-estado de K em termos de espinores de duas componentes, isto é,

$$K\mathcal{U} = -\kappa\mathcal{U} \qquad (II.A.13)$$

com

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_A \\ \mathcal{U}_B \end{pmatrix}, \qquad (II.A.14)$$

então podemos mostrar que, embora $\mathcal{U}$ não seja auto-estado de $\vec{L}^2$, $\mathcal{U}_A$ e $\mathcal{U}_B$ o são . Para isso notemos, a partir de (II.A.9) e (II.A.4), que

$$\vec{L}^2 = \vec{J}^2 + \frac{1}{4} - \gamma_0 K. \qquad (II.A.15)$$

Aplicando essa identidade ao auto-estado de K, obtemos, na representação de Dirac-Pauli para γ_0,

$$\vec{L}^2 \begin{pmatrix} \mathcal{U}_A \\ \mathcal{U}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(j+\frac{1}{2})^2 + \kappa]\mathcal{U}_A \\ [(j+\frac{1}{2})^2 - \kappa]\mathcal{U}_B \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} l_A(l_A+1)\mathcal{U}_A \\ l_B(l_B+1)\mathcal{U}_B \end{pmatrix}, \qquad (II.A.16)$$

onde denotamos os autovalores de $\vec{L}^2$ por $l_A(l_A+1)$ e $l_B(l_B+1)$. Levando em conta os possíveis valores de K conforme (II.A.12), achamos

$$\kappa = (j + \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l_A = j + \frac{1}{2} \\ l_B = j - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (II.A.17.a)$$

$$\kappa = -(j + \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l_A = j - \frac{1}{2} \\ l_B = j + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (II.A.17.b)$$

Então , para um dado κ, podemos encontrar j de (II.A.12) e determinar l_A e l_B de (II.A.17). É interessante notar que as paridades orbitais de $\mathcal{U}_A$ e $\mathcal{U}_B$ são necessariamente opostas.

Podemos, então , rotular nosso estado de partícula-única com o conjunto de números quânticos

$$\alpha \equiv \{n, \kappa, t, m\}, \qquad (II.A.18)$$

onde n denota o número quântico principal; κ determina j e l; t é a projeção de isospin ($t = 1/2$ para prótons, $t = -1/2$ para nêutrons); m é a projeção do momento angular total. Com esses números quânticos é claro de (II.A.12) e (II.A.17) que as funções de onda de partícula-única em um potencial central podem ser escritas como

$$\mathcal{U}_{n\kappa tm}(\vec{x}) \equiv \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} \zeta_t, \qquad (II.A.19)$$

onde G_a e F_a são funções radiais a serem determinadas e $\Phi_{\kappa m}$ é a função angular

$$\Phi_{\kappa m} = \sum_{m_l, m_s} < l m_l \frac{1}{2} m_s \mid j m > Y_{l m_l}(\theta, \phi) \chi_{m_s}, \qquad (II.A.20)$$

sendo χ_{m_s} autofunções de spin de Pauli, $j = |\kappa| - 1/2$ e l é determinado a partir de κ como l_A em (II.A.17), ou seja, $l = \kappa$ se $\kappa > 0$ e $l = -(\kappa + 1)$ se $\kappa < 0$. Além disso, as autofunções de isospin são

$$\zeta_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{prótons,} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{nêutrons.} \end{cases} \qquad (II.A.21)$$

Em (II.A.19) usamos a notação abreviada $a \equiv \{n, \kappa, t\}$.

É conveniente listar aqui algumas identidades envolvendo a função $\Phi_{\kappa m}$ (eq.(II.A.20)) que são usadas no decorrer da dissertação . São elas

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|} \Phi_{\kappa m} = -\Phi_{-\kappa m}, \qquad (II.A.22.a)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \nabla \frac{f(r)}{r} \Phi_{\kappa m} = -\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r}\right) f(r) \Phi_{-\kappa m}, \qquad (II.A.22.b)$$

$$\sum_m \Phi^\dagger_{\kappa m} \Phi_{\kappa' m} = \frac{2j+1}{4\pi} \delta_{\kappa\kappa'}, \qquad (\kappa' = \pm\kappa) \qquad (II.A.22.c)$$

$$\sum_m \Phi^\dagger_{\kappa m} \vec{\sigma} \Phi_{\kappa m} = 0, \qquad (II.A.22.d)$$

$$\sum_m \Phi^\dagger_{\kappa m} \vec{\sigma} \Phi_{-\kappa m} = \sum_m \Phi^\dagger_{-\kappa m} \vec{\sigma} \Phi_{\kappa m}, \qquad (II.A.22.e)$$

$$\int d\Omega \Phi^\dagger_{\kappa m} (\vec{\sigma} \cdot \nabla Y_{LM}) \Phi_{\kappa' m'} = \frac{\kappa + \kappa'}{r} \int d\Omega \Phi^\dagger_{-\kappa m} Y_{LM} \Phi_{\kappa' m'}. \qquad (II.A.22.f)$$

As relações (II.A.22.a) e (II.A.22.b) podem ser encontradas nas referências [5,8]; (II.A.22.c) pode ser encontrada em [3]. As outras relações são obtidas com o auxílio das primeiras.

A substituição da função de onda (II.A.19) na equação de Dirac

$$h_{MFT} \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = E_\alpha \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}), \qquad (II.A.23)$$

nos leva a (explicitando as matrizas $\vec{\alpha}$ e γ^0 na representação de Dirac-Pauli)

$$\begin{pmatrix} g_\omega V_0 + 2g_\rho t b_0 + e(\frac{1}{2}+t)A_0 + M - g_\sigma \phi_0 & -i\vec{\sigma}\cdot\nabla \\ -i\vec{\sigma}\cdot\nabla & g_\omega V_0 + 2g_\rho t b_0 + e(\frac{1}{2}+t)A_0 - M + g_\sigma \phi_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a}{r}\Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_a}{r}\Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} = E_\alpha \begin{pmatrix} i\frac{G_a}{r}\Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_a}{r}\Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix}, \qquad (II.A.24)$$

onde usamos $\tau_3\zeta_t = 2t\zeta_t$. Segue-se que :

$$[g_\omega V_0 + 2g_\rho t b_0 + e(\frac{1}{2}+t)A_0 + M - g_\sigma\phi_0)]\, i\frac{G_a}{r}\Phi_{\kappa m} + i\vec{\sigma}\cdot\nabla(\frac{F_a}{r}\Phi_{-\kappa m}) = E_\alpha i\frac{G_a}{r}\Phi_{\kappa m} \quad (II.A.25)$$

e

$$-[g_\omega V_0 + 2g_\rho t b_0 + e(\frac{1}{2}+t)A_0 - M + g_\sigma\phi_0)]\,\frac{F_a}{r}\Phi_{-\kappa m} + \vec{\sigma}\cdot\nabla(\frac{G_a}{r}\Phi_{\kappa m}) = -E_\alpha\frac{F_a}{r}\Phi_{-\kappa m}. \qquad (II.A.26)$$

Usando as relações (II.A.22.b), temos as equações diferenciais acopladas para as funções radiais F_a e G_a:

$$\frac{dG_a(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G_a(r) - [E_a - g_\omega V_0(r) - 2tg_\rho b_0(r) - (t+\frac{1}{2})eA_0(r) + M - g_\sigma\phi_0(r)]\,F_a(r) = 0, \qquad (II.A.27)$$

e

$$\frac{dF_a(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}F_a(r) + [E_a - g_\omega V_0(r) - 2tg_\rho b_0(r) - (t+\frac{1}{2})eA_0(r) - M + g_\sigma\phi_0(r)]\,G_a(r) = 0. \qquad (II.A.28)$$

Fica claro dessas equações que os autovalores de energia E_α independem de m e passamos, por isso, a denotá-los por E_a. Essa observação também justifica a notação F_a e G_a para as funções radiais.

A condição de normalização obedecida por F_a e G_a é

$$\int_0^\infty dr\,(G_a(r)^2 + F_a(r)^2) = 1. \qquad (II.A.29)$$

APÊNDICE III.A) Teorema de Noether

Suponha uma densidade lagrangeana na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \qquad (III.A.1)$$

O teorema de Noether nos diz que: *a todo grupo de transformações contínuas de ϕ que muda $\mathcal{L}$ no máximo por uma divergência, existe associada uma corrente conservada.*

Assim

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}, \qquad (III.A.2)$$

onde $\delta\mathcal{L}$ tem a forma $\partial_\mu s^\mu$. Usando as equações de Euler-Lagrange, achamos

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \\
&= \partial_\mu s^\mu. \qquad (III.A.3)
\end{aligned}$$

Então , obtemos a equação de continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \qquad (III.A.4)$$

onde

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - s^\mu \qquad (III.A.5)$$

é a corrente conservada.

APÊNDICE III.B) Propagador livre para o méson ρ

O propagador livre para o méson ρ, cujo campo associado $\vec{b}_\mu$ obedece a equação (II.13), pode ser escrito como [3]

$$R^{0ab}_{\mu\nu}(x-x') = \delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(-g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{m_\rho^2}\right)\frac{e^{-ik\cdot(x-x')}}{k^2-m_\rho^2+i\eta}, \qquad (III.B.1)$$

onde δ^{ab} refere-se ao isospin e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. Com tal propagador, podemos resolver (II.13) para o campo b^a_μ obtendo:

$$b^a_\mu(x) = \int dx' R^{0ab}_{\mu\nu}(x-x')[g_\rho\bar{\psi}(x')\gamma^\nu\tau^b\psi(x')]. \qquad (III.B.2)$$

Para os processos em que estamos interessados (ressonâncias gigantes) o quadrimomento transferido k^μ apresenta contribuições mais importantes nos valores de k^0 nas vizinhanças das energias de excitações (10-20 MeV). Além disso, os momentos dominantes $\vec{k}$, ou seja, aqueles que apresentam maiores contribuições no interior do núcleo, estão na faixa do momento de Fermi $k_F \simeq 1,30 fm^{-1} \simeq 260 MeV$. Baseados nesses argumentos e como $m_\rho \simeq 750 - 770\, MeV$, é razoável fazer a aproximação

$$R^{0ab}_{\mu\nu}(x-x') \simeq \delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-g_{\mu\nu})\frac{e^{-ik\cdot(x-x')}}{k^2-m_\rho^2+i\eta}. \qquad (III.B.3)$$

Então , o campo $b^a_\mu(x)$ (eq.(III.B.2)) pode ser escrito como

$$b^a_\mu(x) \simeq -\int d^4x'\Delta^0(x-x',m_\rho)[g_\rho\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\tau^a\psi(x')], \qquad (III.B.4)$$

onde $\Delta^0(x-x',m_\rho)$ é o propagador livre para o campo de Klein-Gordon, dado por

$$\Delta^0(x-x',m_\rho) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-x')}}{k^2-m_\rho^2+i\eta}. \qquad (III.B.5)$$

Assim, de (III.B.4), podemos dizer que, para os processos em que estamos interessados, o campo do méson ρ obedece aproximadamente a equação de Klein-Gordon não homogênea, justificando a equação (III.10).

APÊNDICE III.C) Dedução do termo H_ω

Vamos deduzir com um certo detalhe o termo H_ω (eq.(III.32)) dentro da aproximação instantânea. Como dito no texto, podemos desprezar q^0 em relação a $|\vec{q}|$ e m_ω. Assim, a equação (III.27) pode ser escrita como

$$H_\omega = \int d^3\vec{x}\Bigg[-\frac{g_\omega^2}{2}\int d^4x'\, d^4x''\, \frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4q''}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{\vec{q}'^2+m_\omega^2}\,\frac{e^{-iq''\cdot(x-x'')}}{\vec{q}''^2+m_\omega^2}$$

$$(\vec{q}''^2+m_\omega^2)\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(x'')\gamma'_\mu\gamma''^\mu\psi(x'')\psi(x')$$

$$+\, g_\omega^2\int d^4x'\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-iq'\cdot(x-x')}}{\vec{q}'^2+m_\omega^2}\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\gamma'^\mu\psi(x')\psi(x)\Bigg]. \qquad (III.C.1)$$

Fazendo a integração em q''^μ e q'^0 temos

$$H_\omega = \int d^3\vec{x}\Bigg[-\frac{g_\omega^2}{2}\int d^4x'\, d^4x''\,\frac{d^3\vec{q}'}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec{q}'\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{q}'^2+m_\omega^2}\delta(x_0-x'_0)\delta^4(x-x'')$$

$$\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(x'')\gamma'_\mu\gamma''^\mu\psi(x'')\psi(x')$$

$$+ g_\omega^2 \int d^4x' \, \frac{d^3\vec{q}'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}'\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{q}'^2 + m_\omega^2} \delta(x_0 - x_0')\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\gamma_\mu\gamma'^\mu\psi(x')\psi(x)\Big]. \quad (III.C.2)$$

Efetuando as integrações em x''^μ e x'^0, obtemos

$$H_\omega = \frac{g_\omega^2}{2} \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}' \, \frac{Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\omega)}{4\pi} \bar{\psi}(\vec{x}, x_0)\bar{\psi}(\vec{x}', x_0)\gamma^\mu\gamma'_\mu\psi(\vec{x}', x_0)\psi(\vec{x}, x_0), \quad (III.C.3)$$

onde escrevermos o potencial de Yukawa

$$\frac{1}{4\pi} Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\omega) \equiv \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{q}^2 + m_\omega^2}. \quad (III.C.4)$$

APÊNDICE III.D) Componentes esféricas da matriz $\vec{\alpha}$

Vamos definir as componentes esféricas do vetor $\vec{\alpha}$ como:

$$\alpha^{+1} = -(2)^{-1/2}(\alpha^x + i\alpha^y), \quad (III.D.1)$$

$$\alpha^{-1} = (2)^{-1/2}(\alpha^x - i\alpha^y), \quad (III.D.2)$$

$$\alpha^0 = \alpha^z. \quad (III.D.3)$$

Assim

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha} &= \alpha'^x \alpha^x + \alpha'^y \alpha^y + \alpha'^z \alpha^z \\ &= \frac{1}{2}(\alpha'^{-1} - \alpha'^{+1})(\alpha^{-1} - \alpha^{+1}) - \frac{1}{2}(\alpha'^{-1} + \alpha'^{+1})(\alpha^{-1} + \alpha^{+1}) + \alpha'^0 \alpha^0 \\ &= -\alpha'^{-1}\alpha^1 - \alpha'^{+1}\alpha^{-1} + \alpha'^0 \alpha^0. \qquad (III.D.4)\end{aligned}$$

Desde que

$$\alpha^{+1} = -(\alpha^{-1})^\dagger, \;\; \alpha^{-1} = -(\alpha^{+1})^\dagger, \;\; \alpha^0 = (\alpha^0)^\dagger, \qquad (III.D.5)$$

temos

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}' \cdot \vec{\alpha} &= \alpha'^{-1}(\alpha^{-1})^\dagger + \alpha'^{+1}(\alpha^{-1})^\dagger + \alpha'^0(\alpha^0)^\dagger \\ &= \sum_{k=-1,0,+1} \alpha'^k (\alpha^k)^\dagger \\ &= \sum_{k=-1,0,+1} (\alpha'^k)^\dagger \alpha^k \qquad (III.D.6)\end{aligned}$$

Definições e propriedades análogas a essas valem, obviamente, para qualquer operador vetorial. Quando estivermos lidando com componentes esféricas vamos denotá-las pelo índice k, enquanto para componentes cartesianas reservaremos os índices i e j.

APÊNDICE III.E) Equações de Hartree-Fock

A partir da equação de autovalores (III.53) vamos obter as equações de Hartree-Fock na sua forma radial. Para isso vamos substituir $\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$ escrito na forma (II.A.19), já que estamos

nos limitando a núcleos esféricos, e calcular as diversas contribuições . Assim, uma parte daquela equação de autovalor envolverá

$$K \equiv (-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \gamma_0 M - E_\alpha)\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$$

$$= \begin{pmatrix} M - E_\alpha & -i\vec{\sigma}\cdot\nabla \\ -i\vec{\sigma}\cdot\nabla & -M - E_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ -\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t$$

$$= \begin{pmatrix} (M - E_\alpha) i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) + i\vec{\sigma}\cdot\nabla\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ \vec{\sigma}\cdot\nabla\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) + (M + E_\alpha)\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t. \qquad (III.E.1)$$

Usando a propriedade (II.A.22.b) temos

$$K = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} i\left[(M - E_\alpha)G_a(r) - \left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r}\right)F_a(r)\right]\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r}\right)G_a(r) + (M + E_\alpha)F_a(r)\right]\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t. \qquad (III.E.2)$$

Vamos calcular agora, o termo direto

$$M^D \equiv U^D(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = \sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')V(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}), \qquad (III.E.3)$$

com suas várias contribuições , lembrando que $V(\vec{x}-\vec{x}')$ é dado em (III.38).

(a)<u>Méson σ</u>

$$M^D_\sigma = -\frac{g^2_\sigma}{4\pi}\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')\gamma'_0\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')][\gamma_0\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\sigma). \qquad (III.E.4)$$

Usando a forma (II.A.19) para $\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$, temos após efetuarmos os produtos matriciais

$$M^D_\sigma = -\frac{g^2_\sigma}{4\pi}\sum_{a'm'}\int r'^2 dr' d\Omega'\left[\frac{G^2_{a'}(r')}{r'^2}\Phi^\dagger_{\kappa' m'}(\Omega')\Phi_{\kappa' m'}(\Omega') - \frac{F^2_{a'}(r')}{r'^2}\Phi^\dagger_{-\kappa' m'}(\Omega')\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega')\right]$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ \frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\sigma), \qquad (III.E.5)$$

onde na nossa notação $(\Omega) \equiv (\theta, \phi)$ e $d\Omega \equiv sen\theta d\theta d\phi$. Usando as propriedades (II.A.22.c) e expandindo a função de Yukawa na forma [11,Eq.(16.22)]

$$Y(\vec{x}-\vec{x}',m) = -4\pi m \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{L} j_L(imr_<) h_L^{(1)}(imr_>) Y_{LM}(\Omega) Y_{LM}^*(\Omega'), \qquad (III.E.6)$$

onde $j_L(ix)$ e $h_L^{(1)}(ix)$ são , respectivamente, funções esféricas de Bessel e de Hankel de primeira espécie, conseguimos:

$$M_\sigma^D = \frac{g_\sigma^2}{4\pi} m_\sigma \sum_{a'LM} \hat{j}'^2 \int dr' [G_{a'}^2(r') - F_{a'}^2(r')] j_L(im_\sigma r_<) h_L^{(1)}(im_\sigma r_>)$$

$$\underbrace{\int d\Omega' Y_{LM}^*(\Omega')}_{(4\pi)^{1/2}\delta_{L0}\delta_{M0}} Y_{LM}(\Omega) \begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ \frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t$$

$$= \frac{g_\sigma^2}{4\pi} m_\sigma \sum_{a'} \hat{j}'^2 \int dr' [G_{a'}^2(r') - F_{a'}^2(r')] j_0(im_\sigma r_<) h_0^{(1)}(im_\sigma r_>)$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ \frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t. \qquad (III.E.7)$$

(b) <u>Méson π</u>

Para o méson π temos:

$$M_\pi^D = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{g_\pi}{2M}\right)^2 \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}' [\mathcal{U}_{\alpha'}^\dagger(\vec{x}')\gamma_0'\gamma_5'\gamma'^j\tau_q'\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')][\gamma_0\gamma_5\gamma^i\tau_q\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})]\partial_i\partial_j' Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\pi), \qquad (III.E.8)$$

onde está implícita uma soma em q=1,2,3 (espaço de isospin).

Efetuando o produto matricial, obtemos:

$$M_\pi^D = -\frac{1}{4\pi}(\frac{g_\pi}{2M})^2 \sum_{a'm'} \int dr'[G_{a'}^2(r')\Phi^\dagger_{\kappa' m'}(\Omega')\sigma^j\Phi_{\kappa' m'}(\Omega') - F_{a'}^2(r')\Phi^\dagger_{-\kappa' m'}(\Omega')\sigma^j\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega')]$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\sigma^i\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ \frac{F_a(r)}{r}\sigma^i\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} [\zeta'^\dagger_{t'}\tau'_q\zeta'_{t'}][\tau_t\zeta_t]\partial_i\partial'_j Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\pi). \qquad (III.E.9)$$

Desde que estamos considerando apenas núcleos esféricos e, nesse caso, todos os valores de m permitidos para cada nível $a \equiv \{n\kappa t\}$ são necessariamente preenchidos (subcamadas fechadas) vemos, utilizando (II.A.22.d), que o píon não contribui para o termo direto, ou seja,

$$M_\pi^D = 0. \qquad (III.E.10)$$

(b)<u>Méson ω</u>

Para calcular a contrubuição do méson ω, nós dividiremos o termo direto em duas partes:

$$M_\omega^D = M_{1\omega}^D + M_{2\omega}^D, \qquad (III.E.11)$$

com

$$M_{1\omega}^D = \frac{g_\omega^2}{4\pi}\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')]\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\omega), \qquad (III.E.12)$$

$$M_{2\omega}^D = \frac{g_\omega^2}{4\pi}\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')\gamma'_0\gamma'_i\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')][\gamma_0\gamma^i\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\omega), \qquad (III.E.13)$$

que são , respectivamente, a contribuição da parte temporal e da parte espacial.

A parte espacial não contribuirá para o termo direto. Isso pode ser mostrado efetuando-se o produto matricial, cujo resultado é

$$M_{2\omega}^{D} = \frac{g_\omega^2}{4\pi}\sum_{a'}\int d^3\vec{x}'\frac{iG_{a'}(r')F_{a'}(r')}{r'^2}[\sum_{m'}\Phi^{\dagger}_{\kappa' m'}(\Omega')\sigma^i\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega') - \sum_{m'}\Phi^{\dagger}_{-\kappa' m'}(\Omega')\sigma^i\Phi_{\kappa' m'}(\Omega')]\cdot$$

$$[\gamma_0\gamma^i\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\omega). \qquad (III.E.14)$$

Assim, pela relação (II.A.22.e) concluímos que

$$M_{2\omega}^{D} = 0. \qquad (III.E.15)$$

Então , resta-nos calcular o termo $M_{1\omega}^{D}$. O cálculo é semelhante ao do méson σ, de forma que:

$$M_{1\omega}^{D} = \frac{g_\omega^2}{4\pi}\sum_{a'm'}\int r'^2dr'd\Omega'[\frac{G_{a'}^2(r')}{r'^2}\Phi^{\dagger}_{\kappa' m'}(\Omega')\Phi_{\kappa' m'}(\Omega') + \frac{F_{a'}^2(r')}{r'^2}\Phi^{\dagger}_{-\kappa' m'}(\Omega')\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega')]$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ -\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega)\end{pmatrix}\zeta_t Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\omega). \qquad (III.E.16)$$

Usando a identidade (II.A.22.c) e a expansão (III.E.6), obtemos:

$$M_{1\omega}^{D} = -\frac{g_\omega^2}{4\pi}m_\omega\sum_{a'}\hat{j}'^2\int dr'[G_{a'}^2(r') + F_{a'}^2(r')]j_0(im_\omega r_<)h_0^{(1)}(im_\omega r_>)$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ -\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega)\end{pmatrix}\zeta_t. \qquad (III.E.17)$$

(d) Méson ρ

Analogamente ao feito para o méson ω, dividiremos a contribuição do ρ em duas partes:

$$M_\rho^D = M_{1\rho}^D + M_{2\rho}^D, \qquad (III.E.18)$$

com

$$M_{1\rho}^{D} = \frac{g_\rho^2}{4\pi} \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}' [\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')\tau_q' \mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')][\tau_q \mathcal{U}_\alpha(\vec{x})] Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\rho), \qquad (III.E.19)$$

$$M_{2\rho}^{D} = \frac{g_\rho^2}{4\pi} \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}' [\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')\gamma_0'\gamma_i'\tau_q' \mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')][\gamma_0\gamma^i\tau_q \mathcal{U}_\alpha(\vec{x})] Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\rho). \qquad (III.E.20)$$

Devido ao mesmo argumento usado no caso do méson ω, temos

$$M_{2\rho}^{D} = 0. \qquad (III.E.21)$$

Por outro lado

$$M_{1\rho}^{D} = -\frac{g_\omega^2}{4\pi} m_\rho \sum_{a'} \hat{j}'2 \int dr' [G_{a'}^2(r') + F_{a'}^2(r')] j_0(im_\omega r_<) h_0^{(1)}(im_\omega r_>)$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ -\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} [\zeta'^{\dagger}_{t'}\tau_q'\zeta_{t'}'][\tau_q\zeta_t]. \qquad (III.E.22)$$

Como

$$\begin{aligned} [\zeta'^{\dagger}_{t'}\tau_q'\zeta_{t'}'][\tau_q\zeta_t] &= [\zeta'^{\dagger}_{t'}\tau_3'\zeta_{t'}'][\tau_3\zeta_t] \\ &= (2t')(2t)\zeta_t, \end{aligned} \qquad (III.E.23)$$

temos

$$M_{1\rho}^{D} = -\frac{g_\rho^2}{4\pi} m_\rho \{ \sum_{a'(p)} \hat{j}'2 \int dr' [G_{a'}^2(r') + F_{a'}^2(r')] - \sum_{a'(n)} \hat{j}'^2 \int dr' [G_{a'}^2(r') + F_{a'}^2(r')] \}$$

$$j_0(im_\rho r_<) h_0^{(1)}(im_\rho r_>) \begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ -\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} (2t)\zeta_t, \qquad (III.E.24)$$

onde $\sum_{a'(p)}$ significa a soma somente sobre prótons e $\sum_{a'(n)}$ a soma somente sobre nêutrons.

(e)Campo eletromagnético

A contribuição eletromagnética é, também, análoga à do méson ω. Então ,

$$M_{\gamma}^{D} = M_{1\gamma}^{D} + M_{2\gamma}^{D}, \qquad (III.E.25)$$

onde

$$M_{1\gamma}^{D} = \frac{1}{4\pi}(\frac{e}{2})^2 \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')(1+\tau_3')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')][(1+\tau_3)\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}', m=0), \qquad (III.E.26)$$

$$M_{2\gamma}^{D} = \frac{1}{4\pi}(\frac{e}{2})^2 \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')\gamma_0'\gamma_i'(1+\tau_3')\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}')][\gamma_0\gamma^i(1+\tau_3)\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}', m=0), \qquad (III.E.27)$$

Como nos outros casos

$$M_{2\gamma}^{D} = 0. \qquad (III.E.28)$$

Assim, resta-nos calcular $M_{1\gamma}^{D}$. Para isso, vamos expandir $Y(\vec{x}-\vec{x}', m=0)$ como

$$Y(\vec{x}-\vec{x}', m=0) = 4\pi \sum_{LM} \hat{L}^{-2} \frac{r_{<}^{L}}{r_{>}^{L+1}} Y_{LM}(\Omega) Y_{LM}^{*}(\Omega'), \qquad (III.E.29)$$

onde $\hat{L} = (2L+1)^{1/2}$.

Introduzindo (III.E.29) em (III.E.26) conseguimos

$$M_{1\gamma}^{D} = \frac{1}{4\pi}(\frac{e}{2})^2 \sum_{a'} \hat{j}'^2 \int dr'[G_{a'}^2(r') + F_{a'}^2(r')]\frac{1}{r_{>}}$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ -\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} \underbrace{[\zeta'^{\dagger}_{t'}(1+\tau'_3)\zeta'_{t'}]}_{(1+2t')} \underbrace{[(1+\tau_3)\zeta_t]}_{(1+2t)\zeta_t}$$

$$= \frac{1}{4\pi}e^2 \sum_{a'(p)} \hat{j}'^2 \int dr'[G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')]\frac{1}{r_>}$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_a(r)}{r}\Phi_{\kappa m}(\Omega) \\ -\frac{F_a(r)}{r}\Phi_{-\kappa m}(\Omega) \end{pmatrix} (\frac{1}{2}+t)\zeta_t, \qquad (III.E.30)$$

A partir de agora, vamos calcular as diversas contribuições para o termo de troca (termo de Fock),

$$M^E \equiv U^E \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}' U^E(\vec{x}-\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}'). \qquad (III.E.31)$$

(a)Méson σ

Usando (III.58.a) temos

$$M^E_\sigma = \frac{g^2_\sigma}{4\pi}\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')\gamma'_0\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')][\gamma_0\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\sigma). \qquad (III.E.32)$$

Escrevendo o espinor de Dirac como em (II.A.19) e usando a expansão (III.E.6) para potencial de Yukawa, conseguimos, após efetuarmos o produto matricial,

$$M^E_\sigma = -g^2_\sigma m_\sigma \sum_{a'm'}\sum_{LM}\int r'^2 dr' d\Omega' [\frac{G_{a'}(r')}{r'}\frac{G_a(r')}{r'} - \frac{F_{a'}(r')}{r'}\frac{F_a(r')}{r'}]\Phi^\dagger_{\kappa' m'}(\Omega')\Phi_{\kappa m}(\Omega')$$

$$\underbrace{(\zeta'^{\dagger}_{t'}\zeta'_t)}_{\delta_{t't}} \begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ \frac{F_{a'}(r)}{r}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_{t'} j_L(im_\sigma r_<)h^{(1)}_L(im_\sigma r_>)Y_{LM}(\Omega)Y^*_{LM}(\Omega'), \qquad (III.E.33)$$

onde utilizamo-nos da identidade (II.A.22.a).

Definindo

$$\int d\Omega \Phi^{\dagger}_{\kappa m}(\Omega) Y_{LM}(\Omega) \Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \equiv < \kappa m \mid Y_{LM} \mid \kappa' m' >, \qquad (III.E.34)$$

podemos escrever (III.E.33) como:

$$M^E_\sigma = -g^2_\sigma m_\sigma \sum_{a'} \delta_{tt'} \sum_L \int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') - F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\sigma r_<) h^{(1)}_L(im_\sigma r_>)$$

$$\sum_{m'M} < \kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' >^* Y_{LM}(\Omega) \begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ \frac{F_{a'}(r)}{r}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t. \qquad (III.E.35)$$

(b) Méson ω

Da mesma forma como fizemos para o termo direto, aqui também dividiremos a contribuição do méson ω para o termo de troca em duas partes:

$$M^E_\omega = M^E_{1\omega} + M^E_{2\omega}, \qquad (III.E.36)$$

onde

$$M^E_{1\omega} = -\frac{g^2_\omega}{4\pi} \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}' [\mathcal{U}^{\dagger}_{\alpha'}(\vec{x}')\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')]\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x}) Y(\vec{x} - \vec{x}', m_\omega), \qquad (III.E.37)$$

$$M^E_{2\omega} = -\frac{g^2_\omega}{4\pi} \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}' [\mathcal{U}^{\dagger}_{\alpha'}(\vec{x}')\gamma'_0\gamma'_i\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')][\gamma_0\gamma^i\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})] Y(\vec{x} - \vec{x}', m_\omega). \qquad (III.E.38)$$

O termo $M^E_{1\omega}$ é essencialmente idêntico a M^E_σ, diferindo somente por um sinal global oposto e pela troca da matriz γ_0 pela matriz identidade. Assim é imediato concluirmos que

$$M^E_{1\omega} = g^2_\omega m_\omega \sum_{a'} \delta_{tt'} \sum_L \int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\omega r_<) h^{(1)}_L(im_\omega r_>)$$

$$\cdot \sum_{m'M} < \kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' >^* Y_{LM}(\Omega) \begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t. \qquad (III.E.39)$$

Para $M^E_{2\omega}$, podemos escrever

$$M^E_{2\omega} = \frac{g^2_\omega}{4\pi} \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}' [\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')\alpha'^i \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')][\alpha^i \mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})] Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\omega), \qquad (III.E.40)$$

onde usamos que $\gamma_0\vec{\gamma} = \vec{\alpha}$. Na equação (III.E.40) a soma em i abrange os valores $i = 1, 2, 3$. Podemos reescrevê-la em termos das componentes esféricas do vetor $\vec{\alpha}$ (ver apêndice III.D), de modo que

$$\sum_{i=1,2,3} \alpha'^i \alpha^i = \sum_{k=0,\pm1} (\alpha'^k)^\dagger \alpha^k. \qquad (III.E.41)$$

Assim

$$M^E_{2\omega} = \frac{g^2_\omega}{4\pi} \sum_{\alpha'=1}^{A} \sum_k \int d^3\vec{x}' [\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')(\alpha'^k)^\dagger \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')][\alpha^k \mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})] Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\omega). \qquad (III.E.42)$$

Efetuando o produto matricial e expandindo o potencial de Yukawa, temos:

$$M^E_{2\omega} = -g^2_\omega m_\omega \sum_{a'm'} \delta_{tt'} \sum_{LMk} \int dr' d\Omega' \big[iG_{a'}(r')F_a(r')\Phi^\dagger_{\kappa'm'}(\Omega')\sigma^{k\,\dagger}\Phi_{-\kappa m}(\Omega')$$

$$- iF_{a'}(r')G_a(r')\Phi^\dagger_{-\kappa'm'}(\Omega')\sigma^{k\,\dagger}\Phi_{\kappa m}(\Omega')\big] Y_{LM}(\Omega)Y^*_{LM}(\Omega')$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{F_{a'}(r)}{r}\sigma^k\Phi_{-\kappa'm'}(\Omega) \\ i\frac{G_{a'}(r)}{r}\sigma^k\Phi_{\kappa'm'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t j_L(im_\omega r_<) h^{(1)}_L(im_\omega r_>). \qquad (III.E.43)$$

Introduzindo o tensor

$$T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}(\Omega) = \sum_{Mk} < LM1k|\mathcal{J}\mathcal{M} > \sigma^k Y_{LM}(\Omega), \qquad (III.E.44)$$

podemos verificar que:

$$\sum_{\mathcal{JM}} T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}(\Omega')^{\dagger} T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}(\Omega) = \sum_{kM}\sum_{k'M'} \overbrace{\sum_{\mathcal{JM}} < LM1k|\mathcal{JM} >< LM'1k'|\mathcal{JM} >}^{\delta_{MM'}\delta_{kk'}}$$

$$(\sigma^{k'})^{\dagger} Y^{*}_{LM'}(\Omega')\sigma^{k} Y_{LM}(\Omega)$$

$$= \sum_{kM} (\sigma^{k})^{\dagger} Y^{*}_{LM}(\Omega')\sigma^{k} Y_{LM}(\Omega). \qquad (III.E.45)$$

Assim, podemos escrever (III.E.43) como:

$$M^{E}_{2\omega} = -g^{2}_{\omega} m_{\omega} \sum_{a'm'} \delta_{tt'} \sum_{L\mathcal{JM}} \int dr' \left[iG_{a'}(r')F_{a}(r') < -\kappa m|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|\kappa' m' >^{*} \right.$$

$$\left. - iF_{a'}(r')G_{a}(r') < \kappa m|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}| - \kappa' m' >^{*} \right] j_{L}(im_{\omega} r_{<}) h^{(1)}_{L}(im_{\omega} r_{>})$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{F_{a'}(r)}{r} T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L} \Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \\ i\frac{G_{a'}(r)}{r} T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L} \Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_{t}, \qquad (III.E.46)$$

onde

$$< \kappa m|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|\kappa' m' > \equiv \int d\Omega \Phi^{\dagger}_{\kappa m}(\Omega) T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}(\Omega) \Phi_{\kappa' m'}(\Omega). \qquad (III.E.47)$$

(c) Méson ρ

Também para o méson ρ, dividiremos a contribuição M^{E}_{ρ} na forma:

$$M^{E}_{\rho} = M^{E}_{1\rho} + M^{E}_{2\rho}, \qquad (III.E.48)$$

onde

$$M^{E}_{1\rho} = -\frac{g^{2}_{\rho}}{4\pi} \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^{3}\vec{x}' [\mathcal{U}^{\dagger}_{\alpha'}(\vec{x}')\tau'_{q}\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x}')][\tau_{q}\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})] Y(\vec{x} - \vec{x}', m_{\rho}), \qquad (III.E.49)$$

$$M_{2\rho}^{E} = -\frac{g_\rho^2}{4\pi}\sum_{\alpha'=1}^{A}\int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{x}')\gamma_0'\gamma_i'\tau_q'\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x}')][\gamma_0\gamma^i\tau_q\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\rho). \qquad (III.E.50)$$

As expressões para o méson ρ são essencialmente as mesmas que aquelas do méson ω. A única diferença encontra-se na parte de isospin. Assim

$$M_{1\rho}^{E} = g_\rho^2 m_\rho \sum_{a'L}\int dr'\left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$

$$\sum_{m'M} < \kappa m|Y_{LM}|\kappa' m' >^* Y_{LM}(\Omega)\begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega)\end{pmatrix}[\zeta'^{\dagger}_{t'}\tau_q'\zeta_t'][\tau_q\zeta_{t'}]. \qquad (III.E.51)$$

Uma vez que

$$[\zeta'^{\dagger}_{t'}\tau_q'\zeta_t'][\tau_q\zeta_{t'}] = (2-\delta_{tt'})\zeta_t, \qquad (III.E.52)$$

podemos escrever:

$$M_{1\rho}^{E} = g_\rho^2 m_\rho \sum_{a'}(2-\delta_{tt'})\sum_{L}\int dr'\left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$

$$\sum_{m'M} < \kappa m|Y_{LM}|\kappa' m' >^* Y_{LM}(\Omega)\begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega)\end{pmatrix}\zeta_t. \qquad (III.E.53)$$

Igualmente, a diferença entre $M_{2\rho}^E$ e $M_{2\omega}^E$ está na parte de isospin, sendo imediato escrever

$$M_{2\rho}^{E} = -g_\rho^2 m_\rho \sum_{a'm'}(2-\delta_{tt'})\sum_{L\mathcal{J}\mathcal{M}}\int dr'\left[iG_{a'}(r')F_a(r') < -\kappa m|T_{\mathcal{J}L}^{\mathcal{M}}|\kappa' m' >^*\right.$$

$$- iF_{a'}(r')G_a(r') < \kappa m|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}| - \kappa' m' >^*] j_L(im_\rho r_<)h^{(1)}_L(im_\rho r_>)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{F_{a'}(r)}{r} T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \\ i\frac{G_{a'}(r)}{r} T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t, \qquad (III.E.54)$$

(d) Campo eletromagnético

De forma similar ao feito para o méson ρ escreveremos

$$M^E_\gamma = M^E_{1\gamma} + M^E_{2\gamma}, \qquad (III.E.55)$$

onde

$$M^E_{1\gamma} = -\frac{1}{4\pi}(\frac{e}{2})^2 \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')(1+\tau'_3)\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')][(1+\tau_3)\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}', m=0), \qquad (III.E.56)$$

$$M^E_{2\gamma} = -\frac{1}{4\pi}(\frac{e}{2})^2 \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}'[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')\gamma'_0\gamma'_i(1+\tau'_3)\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')][\gamma_0\gamma^i(1+\tau_3)\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})]Y(\vec{x}-\vec{x}', m=0). \qquad (III.E.57)$$

Expandindo $Y(\vec{x}-\vec{x}', m=0)$ como feito na equação (III.E.29), obtemos para $M^E_{1\gamma}$

$$M^E_{1\gamma} = -(\frac{e}{2})^2 \sum_{a'L} \hat{L}^{-2} \int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] \frac{r^L_<}{r^{L+1}_>}$$

$$\sum_{m'M} < \kappa m|Y_{LM}|\kappa' m' >^* Y_{LM}(\Omega) \begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix}$$

$$[\zeta'^\dagger_{t'}(1+\tau'_3)\zeta'_t][(1+\tau_3)\zeta_{t'}]. \qquad (III.E.58)$$

Como

$$[\zeta'^{\dagger}_{t'}(1+\tau'_3)\zeta'_t][(1+\tau_3)\zeta_{t'}] = (1+2t)\delta_{tt'}(1+2t')\zeta_{t'}$$
$$= (1+2t')^2\delta_{tt'}\zeta_t, \qquad (III.E.59)$$

podemos escrever (III.E.58) na forma:

$$M^E_{1e} = e^2 \sum_{a'm'(p)} \delta_{tt'} \sum_{LM} \hat{L}^{-2} \int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] \frac{r^L_<}{r^{L+1}_>}$$
$$< \kappa m|Y_{LM}|\kappa' m' >^* Y_{LM}(\Omega) \begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t. \qquad (III.E.60)$$

Do mesmo modo, podemos escrever $M^E_{2\gamma}$ como:

$$M^E_{2\gamma} = e^2 \sum_{a'm'(p)} \delta_{tt'} \sum_{LJM} \int dr' \left[iG_{a'}(r')F_a(r') < -\kappa m|T^{\mathcal{M}}_{JL}|\kappa' m' >^*\right.$$
$$\left. - iF_{a'}(r')G_a(r') < \kappa m|T^{\mathcal{M}}_{JL}| - \kappa' m' >^*\right] \frac{r^L_<}{r^{L+1}_>}$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{F_{a'}(r)}{r}T^{\mathcal{M}}_{JL}\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \\ i\frac{G_{a'}(r)}{r}T^{\mathcal{M}}_{JL}\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t. \qquad (III.E.61)$$

(e) <u>Méson π</u>

A contribuição do méson π nos dá

$$M^E_\pi = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{g_\pi}{2M}\right)^2 \sum_{\alpha'=1}^{A} \int d^3\vec{x}' [\mathcal{U}^\dagger_{\alpha'}(\vec{x}')\gamma'_0\gamma'_5\gamma'^j\tau'_q\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}')][\gamma_0\gamma_5\gamma^i\tau_q\mathcal{U}_{\alpha'}(\vec{x})]\partial_i\partial'_j Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\pi).$$
$$(III.E.62)$$

Efetuando o produto matricial e expandindo o potencial de Yukawa, temos

$$M_\pi^E = -(\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi \sum_{a'm'}(2-\delta_{tt'})\sum_{LM}\int dr' d\Omega' [G_{a'}(r')G_a(r')\Phi^\dagger_{\kappa' m'}(\Omega')\sigma^j\Phi_{\kappa m}(\Omega')$$

$$+ F_{a'}(r')F_a(r')\Phi^\dagger_{-\kappa' m'}(\Omega')\sigma^j\Phi_{-\kappa m}(\Omega')] \begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}\sigma^i\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}\sigma^i\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t$$

$$\underbrace{\partial_i\partial'_j[j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>)Y_{LM}(\Omega)Y^*_{LM}(\Omega')]}_{I}, \qquad (III.E.63)$$

onde usamos (III.E.52).

Podemos reescrever a expressão I acima, atuando as derivadas nos diversos termos do produto, de forma que

$$\begin{aligned}
&\partial_i\partial'_j[j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>)Y_{LM}(\Omega)Y^*_{LM}(\Omega')] = \\
&\frac{x^i}{r}\frac{x'^j}{r'}[\frac{d}{dr}\frac{d}{dr'}j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>)]Y_{LM}(\Omega)Y^*_{LM}(\Omega') \\
&+\frac{x'^j}{r'}[\frac{d}{dr'}j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>)][\partial_i Y_{LM}(\Omega)]Y^*_{LM}(\Omega') \\
&+\frac{x^i}{r}[\frac{d}{dr}j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>)]Y_{LM}(\Omega)[\partial'_j Y^*_{LM}(\Omega')] \\
&+j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>)[\partial_i Y_{LM}(\Omega)][\partial'_j Y^*_{LM}(\Omega')]. \qquad (III.E.64)
\end{aligned}$$

Fazendo uso das relações de recorrência das funções esféricas de Bessel [15]

$$(2l+1)f_l = \rho(f_{l+1}+f_{l-1}), \qquad (III.E.65)$$

$$f_{l-1} = [\frac{d}{d\rho}+\frac{l+1}{\rho}]f_l, \qquad (III.E.66)$$

onde f_l está representando tanto j_L como $h_L^{(1)}$, podemos escrever

$$\frac{d}{dr}\frac{d}{dr'}j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>) = -m_\pi^2\hat{L}^{-4}\sum_{L_1L_2}\{\alpha(L_1)\alpha(L_2)R_{L_1L_2}(r,r')$$
$$+ r[\alpha(L_2)-\alpha(L_1)]j_{L_1}(im_\pi r)h_{L_2}^{(1)}(im_\pi r')\delta(r-r')\}, \qquad (III.E.67)$$

$$\frac{d}{dr}j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>) = m_\pi^2\hat{L}^{-4}r'\sum_{L_1L_2}\alpha(L_1)R_{L_1L_2}(r,r'), \qquad (III.E.68)$$

$$\frac{d}{dr'}j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>) = m_\pi^2\hat{L}^{-4}r\sum_{L_1L_2}\alpha(L_2)R_{L_1L_2}(r,r'), \qquad (III.E.69)$$

$$j_L(im_\pi r_<)h_L^{(1)}(im_\pi r_>) = -m_\pi^2\hat{L}^{-4}rr'\sum_{L_1L_2}R_{L_1L_2}(r,r'), \qquad (III.E.70)$$

onde

$$\alpha(L_1) = \begin{cases} -L, & \text{se } L_1 = L-1 \\ L+1, & \text{se } L_1 = L+1, \end{cases} \qquad (III.E.71)$$

com L_1 e L_2 assumindo somente os valores $L \pm 1$, e

$$R_{L_1L_2}(r,r') \equiv j_{L_1}(im_\pi r)h_{L_2}^{(1)}(im_\pi r')\theta(r'-r) + j_{L_2}(im_\pi r')h_{L_1}^{(1)}(im_\pi r)\theta(r-r'). \qquad (III.E.72)$$

Substituindo (III.E.64) e (III.E.67)-(III.E.70) em (III.E.63), obtemos:

$$M_\pi^E = M_{\pi 1}^E + M_{\pi 2}^E + M_{\pi 3}^E + M_{\pi 4}^E, \qquad (III.E.73)$$

onde

$$M_{\pi 1}^E = \left(\frac{g_\pi}{2M}\right)^2 m_\pi^3 \sum_{a'm'}(2-\delta_{tt'})\sum_{LM}\hat{L}^{-4} < \kappa m|Y_{LM}|-\kappa' m' >^* \int dr'[G_{a'}(r')G_a(r')$$

$$+ F_{a'}(r')F_a(r')] \sum_{L_1L_2} \alpha(L_1)\alpha(L_2)R_{L_1L_2}(r,r') \begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}Y_{LM}(\Omega)\Phi_{-\kappa'm'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}Y_{LM}(\Omega)\Phi_{\kappa'm'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t$$

$$+ (\frac{g_\pi}{2M})^2 \sum_{a'm'}(2-\delta_{tt'}) \sum_{LM} < \kappa m|Y_{LM}|-\kappa'm' >^* \frac{[G_{a'}(r)G_a(r)+F_{a'}(r')F_a(r')]}{r^2}$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}Y_{LM}(\Omega)\Phi_{-\kappa'm'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}Y_{LM}(\Omega)\Phi_{\kappa'm'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t, \qquad (III.E.74)$$

$$M^E_{\pi 2} = (\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi^3 \sum_{a'm'}(2-\delta_{tt'}) \sum_{LM} \hat{L}^{-4} < \kappa m|Y_{LM}|-\kappa'm' >^*$$

$$\int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] r \sum_{L_1L_2} \alpha(L_2)R_{L_1L_2}(r,r')$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}[\vec{\sigma}\cdot\nabla Y_{LM}(\Omega)]\Phi_{\kappa'm'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}[\vec{\sigma}\cdot\nabla Y_{LM}(\Omega)]\Phi_{-\kappa'm'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t, \qquad (III.E.75)$$

$$M^E_{\pi 3} = (\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi^3 \sum_{a'm'}(2-\delta_{tt'}) \sum_{LM} \hat{L}^{-4} \int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') < \kappa'm'|\vec{\sigma}\cdot\nabla' Y^*_{LM}|\kappa m >\right.$$

$$\left. + F_{a'}(r')F_a(r') < -\kappa'm'|\vec{\sigma}\cdot\nabla' Y^*_{LM}|-\kappa m >\right] r' \sum_{L_1L_2} \alpha(L_1)R_{L_1L_2}(r,r')$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}Y_{LM}(\Omega)\Phi_{-\kappa'm'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}Y_{LM}(\Omega)\Phi_{\kappa'm'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t, \qquad (III.E.76)$$

$$M^E_{\pi 4} = (\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi^3 \sum_{a'm'}(2-\delta_{tt'}) \sum_{LM} \hat{L}^{-4} \int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') < \kappa'm'|\vec{\sigma}\cdot\nabla' Y^*_{LM}|\kappa m >\right.$$

$$+ F_{a'}(r')F_a(r') < -\kappa' m'|\vec{\sigma}\cdot\nabla' Y^*_{LM}| - \kappa m >]r'r \sum_{L_1 L_2} R_{L_1 L_2}(r,r')$$

$$\begin{pmatrix} i\frac{G_{a'}(r)}{r}[\vec{\sigma}\cdot\nabla Y_{LM}(\Omega)]\Phi_{\kappa' m'}(\Omega) \\ -\frac{F_{a'}(r)}{r}[\vec{\sigma}\cdot\nabla Y_{LM}(\Omega)]\Phi_{-\kappa' m'}(\Omega) \end{pmatrix} \zeta_t. \qquad (III.E.77)$$

Agora estamos em condições de escrever as equações de Hartree-Fock em termos das funções de onda G_a e F_a. Para tal, devemos calcular

$$\int d\Omega\, \Phi^\dagger_{\kappa m}(\Omega)\zeta^\dagger_t\{(K)_1 + \sum_i[(M^D_i)_1 + (M^E_i)_1]\} = 0, \qquad (III.E.78)$$

$$\int d\Omega\, \Phi^\dagger_{-\kappa m}(\Omega)\zeta^\dagger_t\{(K)_2 + \sum_i[(M^D_i)_2 + (M^E_i)_2]\} = 0, \qquad (III.E.79)$$

onde $i = \sigma$, ω, π, ρ, γ. Aqui $(K)_{1,2}$, $(M^D_i)_{1,2}$ e $(M^E_i)_{1,2}$ são os blocos superior e inferior das matrizes K, M^D_i e M^E_i. Este cálculo, apesar de longo, não apresenta qualquer dificuldade, sendo portanto fácil mostrar que as equações (III.E.78) e (III.E.79) nos levam a

$$\frac{d}{dr}F_a(r) = [M - E_a + \Sigma^D_{s,a}(r) + \Sigma^D_{0,a}(r)]G_a(r) + \frac{\kappa}{r}F_a(r)$$
$$+ Y^\sigma_a(r) + Y^\omega_a(r) + Y^\rho_a(r) + Y^\pi_a(r) + Y^\gamma_a(r), \qquad (III.E.80)$$

$$\frac{d}{dr}G_a(r) = [M + E_a + \Sigma^D_{s,a}(r) - \Sigma^D_{0,a}(r)]F_a(r) - \frac{\kappa}{r}G_a(r)$$
$$+ X^\sigma_a(r) + X^\omega_a(r) + X^\rho_a(r) + X^\pi_a(r) + X^\gamma_a(r), \qquad (III.E.81)$$

onde

$$\Sigma^D_{s,a} = \frac{g^2_\sigma}{4\pi}m_\sigma \sum_{a'}\hat{j}'^2 \int dr'[G^2_{a'}(r') - F^2_{a'}(r')]j_0(im_\sigma r_<)h^{(1)}_0(im_\sigma r_>), \qquad (III.E.82)$$

$$\Sigma^D_{0,a} = -\frac{g_\omega^2}{4\pi} m_\omega \sum_{a'} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')] j_0(im_\omega r_<) h_0^{(1)}(im_\omega r_>)$$
$$- \frac{g_\rho^2}{4\pi} m_\rho \Big\{ \sum_{a'(p)} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')] - \sum_{a'(n)} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')] \Big\}$$
$$j_0(im_\rho r_<) h_0^{(1)}(im_\rho r_>)(2t)$$
$$+ \frac{e^2}{4\pi} m_\sigma \sum_{a'(p)} \hat{j}'^2 \int dr' [G^2_{a'}(r') + F^2_{a'}(r')] \frac{1}{r_>} (\frac{1}{2} + t), \qquad (III.E.83)$$

$$Y^\sigma_a(r) = -g_\sigma^2 m_\sigma \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r') G_a(r') - F_{a'}(r') F_a(r') \right] j_L(im_\sigma r_<) h_L^{(1)}(im_\sigma r_>), \quad (III.E.84)$$

$$X^\sigma_a(r) = -g_\sigma^2 m_\sigma \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r') G_a(r') - F_{a'}(r') F_a(r') \right] j_L(im_\sigma r_<) h_L^{(1)}(im_\sigma r_>), \quad (III.E.85)$$

$$Y^\omega_a(r) = g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r') \right] j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>)$$
$$+ g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r') F_a(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* - F_{a'}(r') G_a(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* \right]$$
$$j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>), \qquad (III.E.86)$$

$$X^\omega_a(r) = -g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$

$$\int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>)$$
$$- g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >$$
$$\int dr' \left[G_a(r')F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r')G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^*\right]$$
$$j_L(im_\omega r_<) h_L^{(1)}(im_\omega r_>), \qquad (III.E.87)$$

$$Y_a^\rho(r) = g_\rho^2 m_\rho \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$
$$+ g_\rho^2 m_\rho \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r')F_a(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* - F_{a'}(r')G_a(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^*\right]$$
$$j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>), \qquad (III.E.88)$$

$$X_a^\rho(r) = -g_\rho^2 m_\rho \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) F_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$
$$- g_\rho^2 m_\rho \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >$$
$$\int dr' \left[G_a(r')F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r')G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^*\right]$$
$$j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>), \qquad (III.E.89)$$

$$Y_a^\gamma(r) = -e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L \hat{L}^{-2} | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$
$$\int dr' \left[G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')\right] \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}$$

$$- e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} \hat{L}^{-2} < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >$$

$$\int dr' \left[G_{a'}(r') F_a(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* - F_{a'}(r') G_a(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* \right]$$

$$\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}, \qquad (III.E.90)$$

$$X_a^{\gamma}(r) = e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_{L} \hat{L}^{-2} | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2$$

$$\int dr' \left[G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r') \right] \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}$$

$$+ e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} \hat{L}^{-2} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >$$

$$\int dr' \left[G_a(r') F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r') G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* \right]$$

$$\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}, \qquad (III.E.91)$$

$$Y_a^{\pi} = \left(\frac{g_\pi}{2M}\right)^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \left\{ \frac{\hat{j}^2 \hat{j}'^2}{4\pi} \frac{[G_{a'}(r) G_a(r) + F_{a'}(r) F_a(r)]}{r^2} \right.$$

$$+ m_\pi^3 \sum_{L} \hat{L}^{-4} | < \kappa | Y_{LM} | - \kappa' > |^2 \sum_{L_1 L_2} [(\kappa + \kappa') + \alpha(L_1)] \int dr' R_{L_1 L_2}(r, r')$$

$$\left. \{ [(\kappa + \kappa') + \alpha(L_2)] G_{a'}(r') G_a(r') - [(\kappa + \kappa') - \alpha(L_2)] F_{a'}(r') F_a(r') \} \right\}, \quad (III.E.92)$$

$$X_a^{\pi} = -\left(\frac{g_\pi}{2M}\right)^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) F_{a'}(r) \left\{ \frac{\hat{j}^2 \hat{j}'^2}{4\pi} \frac{[G_{a'}(r) G_a(r) + F_{a'}(r) F_a(r)]}{r^2} \right.$$

$$+ m_\pi^3 \sum_{L} \hat{L}^{-4} | < \kappa | Y_{LM} | - \kappa' > |^2 \sum_{L_1 L_2} [(\kappa + \kappa') - \alpha(L_1)] \int dr' R_{L_1 L_2}(r, r')$$

$$\left. \{ [(\kappa + \kappa') + \alpha(L_2)] G_{a'}(r') G_a(r') - [(\kappa + \kappa') - \alpha(L_2)] F_{a'}(r') F_a(r') \} \right\}. \quad (III.E.93)$$

Nas equações acima, os elementos de matriz reduzidos obtidos através do teorema de Wigner-Eckart, são dados por [4]

$$< \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' >= \begin{cases} (4\pi)^{-1/2}\hat{j}\hat{j}'\hat{L}(-)^{j'-L-1/2}\begin{pmatrix} j & j' & L \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } l+l'+L \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } l+l'+L \text{ é ímpar,} \end{cases} \qquad (III.E.94)$$

$$< \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >= (\frac{6}{4\pi})^{1/2}(-)^{l}\hat{j}\hat{j}'\hat{l}\hat{l}'\hat{\mathcal{J}}\hat{L}\begin{pmatrix} l & L & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j' & \mathcal{J} \\ l & l' & L \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (III.E.95)$$

APÊNDICE IV.A) Elementos de matriz $A_{p'h',ph}$ e $B_{p'h',ph}$

Primeiro vamos notar que:

$$[b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}, b^\dagger{}_{p'} b_{\tilde{h}'}] = [b^\dagger{}_{\tilde{h}} b_p, b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}] = 0, \qquad (IV.A.1)$$

$$[b^\dagger{}_{\tilde{h}} b_p, b^\dagger{}_{p'} b_{\tilde{h}'}] = b^\dagger{}_{\tilde{h}}[b_p, b^\dagger{}_{p'} b_{\tilde{h}'}] + [b^\dagger{}_{\tilde{h}}, b^\dagger{}_{p'} b_{\tilde{h}'}] b_p$$

$$= b^\dagger{}_{\tilde{h}}\{b_p, b^\dagger{}_{p'}\} b_{\tilde{h}'} - b^\dagger{}_{\tilde{h}} b^\dagger{}_{p'}\{b_{\tilde{h}'}, b_p\}$$

$$+ \{b^\dagger{}_{\tilde{h}}, b^\dagger{}_{p'}\} b_{\tilde{h}'} b_p - b^\dagger{}_{p'}\{b_{\tilde{h}'}, b^\dagger{}_{\tilde{h}}\} b_p$$

$$= \delta_{pp'} b^\dagger{}_{\tilde{h}} b_{\tilde{h}'} - \delta_{hh'} b^\dagger{}_{p'} b_p$$

$$= \delta_{pp'}\delta_{hh'} - \delta_{pp'} b_{\tilde{h}'} b^\dagger{}_{\tilde{h}} - \delta_{hh'} b^\dagger{}_{p'} b_p, \qquad (IV.A.2)$$

e lembrar que, pela definição do estado fundamental de Hartree-Fock,

$$b_p|\Phi_0 >= b^\dagger{}_{\tilde{h}}|\Phi_0 >= 0. \qquad (IV.A.3)$$

Vamos agora construir o duplo comutador $[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [H, b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}]]$ e calcular seu valor de espera no estado $|\Phi_0 >$. Fazendo isso, temos:

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [H, b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}]]|\Phi_0 > = \sum_{p''h''} (A_{p''h'',ph} < \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, b^\dagger{}_{p''} b_{\tilde{h}''}]|\Phi_0 >$$

$$+ B^*_{p''h'',ph} < \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, b^\dagger{}_{\tilde{h}''} b_{p''}]|\Phi_0 >), \qquad (IV.A.4)$$

onde usamos a eq.(IV.8) que define os elementos de matriz $A_{p'h',ph}$ e $B_{p'h',ph}$. Usando (IV.A.1)-(IV.A.3) obtemos:

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [H, b^\dagger{}_p b_{\tilde{h}}]]|\Phi_0 >= \sum_{p''h''} A_{p''h'',ph}\delta_{p'p''}\delta_{h'h''} = A_{p'h',ph}. \qquad (IV.A.5)$$

Para determinar $B_{p'h',ph}$ em termos da hamiltoniana H, o processo é análogo. Devemos calcular o valor de espera do duplo comutador $[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [H, b^\dagger{}_{\tilde{h}} b_p]]$. Assim,

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [H, b^\dagger{}_{\tilde{h}} b_p]]|\Phi_0 > = -\sum_{p''h''} (A^*_{p''h'',ph} < \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, b^\dagger{}_{\tilde{h}''} b_{''}]|\Phi_0 >$$

$$+ B_{p''h'',ph} < \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, b^\dagger{}_{p''} b_{\tilde{h}''}]|\Phi_0 >), \qquad (IV.A.6)$$

onde usamos (IV.9). Novamente fazendo uso das equações (IV.A.1)-(IV.A.3) conseguimos:

$$< \Phi_0|[b^\dagger{}_{\tilde{h}'} b_{p'}, [H, b^\dagger{}_{\tilde{h}} b_p]]|\Phi_0 >= -\sum_{p''h''} B_{p''h'',ph}\delta_{p'p''}\delta_{h'h''} = -B_{p'h',ph}. \qquad (IV.A.7)$$

APÊNDICE IV.B) Teorema de Wick

O teorema de Wick estabelece que, para qualquer produto de expressões lineares nos operadores de campo de férmions, vale a igualdade:

$$
\begin{aligned}
ABCD...EF = N(ABCD...EF) \\
&+ < AB > N(CD...EF) - < AC > N(BD...EF) + ... \\
&+ < AB >< CD > N(...EF) - < AC >< BD > N(...EF) + ... \\
&+ < AB >< CD > ... < EF > - < AC >< BD > ... < EF > + ...,
\end{aligned}
\tag{IV.B.1}
$$

onde $< AB >$ indica a contração dos operadores A e B definida por

$$< AB > = < \Phi_0 | AB | \Phi_0 > . \tag{IV.B.2}$$

Em (IV.B.1), N(...) indica o produto normal dos operadores em relação ao estado fundamental não interagente $|\Phi_0 >$. Por exemplo:

$$N({b^\dagger}_p b_{p'}) = {b^\dagger}_p b_{p'}, \tag{IV.B.3}$$

$$N({b^\dagger}_{\tilde{h}} b_{\tilde{h}'}) = -b_{\tilde{h}'} {b^\dagger}_{\tilde{h}}, \tag{IV.B.4}$$

$$N({b^\dagger}_{\tilde{h}} {b^\dagger}_{\tilde{h}'} b_{\tilde{h}''} b_p) = b_{\tilde{h}''} {b^\dagger}_{\tilde{h}} {b^\dagger}_{\tilde{h}'} b_p. \tag{IV.B.5}$$

Ou seja, para o cálculo do produto normal, cada fator é escrito em termos de operadores de campo que ou aniquilam $|\Phi_0 >$ ou aniquilam $< \Phi_0|$. Feito isso, os operadores do primeiro tipo são colocados à direita dos operadores do segundo tipo, introduzindo-se um sinal menos (-) para cada transposição de operadores de campo de férmions. Além disso, para calcular o produto normal usa-se a propriedade de distributividade.

Finalmente os termos em (IV.B.1) têm sinal + ou - conforme seja necessário um número par ou ímpar, respectivamente, de transposições de operadores de campo de férmions para colocar os fatores A, B, C,...,E, F no ordenamento em que aparecem no termo correspondente.

Para uma demonstração do teorema de Wick como enunciado aqui veja, por exemplo, a referência [16].

APÊNDICE IV.C) Expressões dos elementos de matriz aparecendo na hamiltoniana relativística

Vamos calcular inicialmente o elemento de matriz $< \alpha_1|T|\alpha_2 >$. Como expresso em (IV.18) ele é dado por:

$$< \alpha_1|T|\alpha_2 >= \int d^3\vec{x}\mathcal{U}^\dagger_{\alpha_1}(\vec{x})(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \gamma_0 M)\mathcal{U}_{\alpha_2}(\vec{x}). \qquad (IV.C.1)$$

Usando a forma para $\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$ como dada em (II.A.19) e efetuando o produto matricial, temos

$$< \alpha_1|T|\alpha_2 > = \int d^3\vec{x}\Big[M\frac{G_{a_1}G_{a_2}}{r^2}\Phi^\dagger_{\kappa_1 m_1}\Phi_{\kappa_2 m_2} + \frac{G_{a_1}}{r}\Phi_{\kappa_1 m_1}\vec{\sigma}\cdot\nabla\frac{F_{a_2}}{r}\Phi_{-\kappa_2 m_2}$$

$$- M\frac{F_{a_1}F_{a_2}}{r^2}\Phi^\dagger_{-\kappa_1 m_1}\Phi_{-\kappa_2 m_2} - \frac{F_{a_1}}{r}\Phi^\dagger_{-\kappa_1 m_1}\vec{\sigma}\cdot\nabla\frac{G_{a_2}}{r}\Phi_{\kappa_2 m_2}\Big]\delta_{t_1 t_2}.$$

$$(IV.C.2)$$

Fazendo uso das relações (II.A.22), obtemos facilmente:

$$< \alpha_1|T|\alpha_2 > = \delta_{\kappa_1\kappa_2}\delta_{m_1m_2}\delta_{t_1t_2}\int dr\big[M(G_{a_1}G_{a_2} - F_{a_1}F_{a_2}) - G_{a_1}\frac{d}{dr}F_{a_2}$$

$$+ F_{a_1}\frac{d}{dr}G_{a_2} + \frac{\kappa_2}{r}(G_{a_1}G_{a_2} + F_{a_1}G_{a_2}\big]. \qquad (IV.C.3)$$

Para calcular o elemento de matriz do potencial, vamos dividí-lo nas contribuições vindas dos diversos mésons e do campo eletromagnético, ou seja, vamos escrevê-lo como:

$$< \alpha_1\alpha_2|V|\alpha_1'\alpha_2' > =< \alpha_1\alpha_2|V^\sigma|\alpha_1'\alpha_2' > + < \alpha_1\alpha_2|V^\omega|\alpha_1'\alpha_2' > + < \alpha_1\alpha_2|V^\rho|\alpha_1'\alpha_2' >$$

$$+ < \alpha_1\alpha_2|V^\pi|\alpha_1'\alpha_2' > + < \alpha_1\alpha_2|V^\gamma|\alpha_1'\alpha_2' > . \qquad (IV.C.4)$$

O cálculo de tais elementos de matriz é bastante similar àquele feito no apêndice III.E para as equações de Hartree-Fock. Portanto, faremos somente o termo $< \alpha_1\alpha_2|V^\omega|\alpha_1'\alpha_2' >$ com um certo detalhe e indicaremos o resultado final dos outros termos cujos cálculos são análogos.

Assim

$$< \alpha_1\alpha_2|V^\omega|\alpha_1'\alpha_2' > = \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\mathcal{U}^\dagger_{\alpha_1}(\vec{x})\mathcal{U}^\dagger_{\alpha_2}(\vec{x}')\Big[\frac{g_\omega^2}{4\pi}Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\omega)\gamma_0\gamma_0'\gamma^\mu\gamma_\mu'\Big]\mathcal{U}_{\alpha_1'}(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha_2'}(\vec{x}')$$

$$= \frac{g_\omega^2}{4\pi}\int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\underbrace{[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha_1}(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha_1'}(\vec{x})]}_{P_1}\underbrace{[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha_2}(\vec{x}')\mathcal{U}_{\alpha_2'}(\vec{x}')]}_{P_2}Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\omega)$$

$$- \frac{g_\omega^2}{4\pi}\int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\underbrace{[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha_1}(\vec{x})\alpha^i\mathcal{U}_{\alpha_1'}(\vec{x})]}_{P_3}\underbrace{[\mathcal{U}^\dagger_{\alpha_2}(\vec{x}')\alpha'^i\mathcal{U}_{\alpha_2'}(\vec{x}')]}_{P_4}$$

$$Y(\vec{x}-\vec{x}',m_\omega), \qquad (IV.C.5)$$

onde dividimos o elemento de matriz na parte temporal e na parte espacial e usamos $\vec{\alpha} = \gamma_0 \vec{\gamma}$. Usando a expressão (II.A.19) para $\mathcal{U}_\alpha$, podemos escrever P_1 como:

$$P_1 = \left(-i\frac{G_{a_1}}{r}\Phi^\dagger_{\kappa_1 m_1}, -\frac{F_{a_1}}{r}\Phi^\dagger_{-\kappa_1 m_1}\right)\zeta^\dagger_{t_1}\begin{pmatrix} i\frac{G_{a'_1}}{r}\Phi_{\kappa'_1 m'_1} \\ -\frac{F_{a'_1}}{r}\Phi_{-\kappa_1 m_1}\end{pmatrix}\zeta_{t'_1}$$

$$= \frac{1}{r^2}[G_{a_1}(r)G_{a'_1}(r) + F_{a_1}(r)F_{a'_1}(r)]\Phi^\dagger_{\kappa_1 m_1}(\Omega)\Phi_{\kappa'_1 m'_1}(\Omega)\delta_{t_1 t'_1}. \qquad (IV.C.6)$$

Analogamente

$$P_2 = \frac{1}{r'^2}[G_{a_2}(r')G_{a'_2}(r') + F_{a_2}(r')F_{a'_2}(r')]\Phi^\dagger_{\kappa_2 m_2}(\Omega')\Phi_{\kappa'_2 m'_2}(\Omega')\delta_{t_2 t'_2}. \qquad (IV.C.7)$$

Para P_3, temos

$$P_3 = \left(-i\frac{G_{a_1}}{r}\Phi^\dagger_{\kappa_1 m_1}, -\frac{F_{a_1}}{r}\Phi^\dagger_{-\kappa_1 m_1}\right)\zeta^\dagger_{t_1}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\frac{G_{a'_1}}{r}\Phi_{\kappa'_1 m'_1} \\ -\frac{F_{a'_1}}{r}\Phi_{-\kappa_1 m_1}\end{pmatrix}\zeta_{t'_1}$$

$$= \frac{i}{r^2}[G_{a_1}(r)G_{a'_1}(r)\Phi^\dagger_{\kappa_1 m_1}(\Omega)\sigma^i\Phi_{-\kappa'_1 m'_1}(\Omega)$$

$$- F_{a_1}(r)F_{a'_1}(r)\Phi^\dagger_{-\kappa_1 m_1}(\Omega)\sigma^i\Phi_{\kappa'_1 m'_1}(\Omega)]\delta_{t_1 t'_1}. \qquad (IV.C.8)$$

De maneira similar

$$P_4 = \frac{i}{r'^2}[G_{a_2}(r')G_{a'_2}(r')\Phi^\dagger_{\kappa_2 m_2}(\Omega')\sigma^i\Phi_{-\kappa'_2 m'_2}(\Omega')$$

$$- F_{a_2}(r')F_{a'_2}(r')\Phi^\dagger_{-\kappa_2 m_2}(\Omega')\sigma^i\Phi_{\kappa'_2 m'_2}(\Omega')]\delta_{t_2 t'_2}. \qquad (IV.C.9)$$

Substituindo (IV.C.6)-(IV.C.9) em (IV.C.5), expandindo a função de Yukawa $Y(\vec{x}-\vec{x}', m_\omega)$ como em (III.E.6) e introduzindo o tensor $T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}$ definido em (III.E.44), temos

$$< \alpha_1\alpha_2|V^\omega|\alpha_1'\alpha_2' >= -g_\omega^2 m_\omega \delta_{t_1t_1'}\delta_{t_2t_2'}\Big\{\sum_{LM} < \kappa_1 m_1|Y_{LM}|\kappa_1' m_1' >< \kappa_2' m_2'|Y_{LM}|\kappa_2 m_2 >^*$$

$$\int drdr'(G_{a_1}G_{a_1'} + F_{a_1}F_{a_1'})_r(G_{a_2}G_{a_2'} + F_{a_2}F_{a_2'})_{r'} j_L(im_\omega r_<)h_L^{(1)}(im_\omega r_>)$$

$$+ \sum_{L\mathcal{J}\mathcal{M}} \int drdr'(G_{a_1}F_{a_1'} < \kappa_1 m_1|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}| - \kappa_1' m_1' > -F_{a_1}G_{a_1'} < -\kappa_1 m_1|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|\kappa_1' m_1' >)_r$$

$$(G_{a_2}F_{a_2'} < -\kappa_2' m_2'|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|\kappa_2 m_2 >^* - F_{a_2}G_{a_2'} < \kappa_2' m_2'|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}| - \kappa_2 m_2 >^*)_{r'} j_L(im_\omega r_<)h_L^{(1)}(im_\omega r_>)\Big\}, \qquad (IV.C.10)$$

onde utilizamos, para escrever a forma acima, a equação (II.A.22.a).

Cálculos análogos a esse nos levam a:

$$< \alpha_1\alpha_2|V^\sigma|\alpha_1'\alpha_2' >= g_\sigma^2 m_\sigma \delta_{t_1t_1'}\delta_{t_2t_2'}\sum_{LM} < \kappa_1 m_1|Y_{LM}|\kappa_1' m_1' >< \kappa_2' m_2'|Y_{LM}|\kappa_2 m_2 >^*$$

$$\int drdr'(G_{a_1}G_{a_1'} - F_{a_1}F_{a_1'})_r(G_{a_2}G_{a_2'} - F_{a_2}F_{a_2'})_{r'} j_L(im_\sigma r_<)h_L^{(1)}(im_\sigma r_>), \qquad (IV.C.11)$$

$$< \alpha_1\alpha_2|V^\rho|\alpha_1'\alpha_2' >= -g_\rho^2 m_\rho(\zeta_{t_1}^\dagger\vec{\tau}\zeta_{t_1'})\cdot(\zeta_{t_2}^\dagger\vec{\tau}\zeta_{t_2'})\Big\{\sum_{LM} < \kappa_1 m_1|Y_{LM}|\kappa_1' m_1' >< \kappa_2' m_2'|Y_{LM}|\kappa_2 m_2 >^*$$

$$\int drdr'(G_{a_1}G_{a_1'} + F_{a_1}F_{a_1'})_r(G_{a_2}G_{a_2'} + F_{a_2}F_{a_2'})_{r'} j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$

$$+\sum_{L\mathcal{J}\mathcal{M}}\int drdr'(G_{a_1}F_{a'_1}<\kappa_1 m_1|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|-\kappa'_1 m'_1>-F_{a_1}G_{a'_1}<-\kappa_1 m_1|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|\kappa'_1 m'_1>)_r$$

$$(G_{a_2}F_{a'_2}<-\kappa'_2 m'_2|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|\kappa_2 m_2>^*-F_{a_2}G_{a'_2}<\kappa'_2 m'_2|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|-\kappa_2 m_2>^*)_{r'}j_L(im_\rho r_<)h^{(1)}_L(im_\rho r_>)\Big\},$$

(*IV.C*.12)

$$<\alpha_1\alpha_2|V^\gamma|\alpha'_1\alpha'_2>=(\frac{e}{2})^2(1+2t_1)(1+2t_2)\delta_{t_1t'_1}\delta_{t_2t'_2}\Big\{\sum_{LM}\hat{L}^{-2}<\kappa_1 m_1|Y_{LM}|\kappa'_1 m'_1>$$

$$<\kappa'_2 m'_2|Y_{LM}|\kappa_2 m_2>^*\int drdr'(G_{a_1}G_{a'_1}+F_{a_1}F_{a'_1})_r(G_{a_2}G_{a'_2}+F_{a_2}F_{a'_2})_{r'}\frac{r^L_<}{r^{L+1}_>}$$

$$+\sum_{L\mathcal{J}\mathcal{M}}\int drdr'(G_{a_1}F_{a'_1}<\kappa_1 m_1|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|-\kappa'_1 m'_1>-F_{a_1}G_{a'_1}<-\kappa_1 m_1|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|\kappa'_1 m'_1>)_r$$

$$(G_{a_2}F_{a'_2}<-\kappa'_2 m'_2|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|\kappa_2 m_2>^*-F_{a_2}G_{a'_2}<\kappa'_2 m'_2|T^{\mathcal{M}}_{\mathcal{J}L}|-\kappa_2 m_2>^*)_{r'}\frac{r^L_<}{r^{L+1}_>}\Big\},$$

(*IV.C*.13)

$$<\alpha_1\alpha_2|V^\pi|\alpha'_1\alpha'_2>=(\frac{g_\pi}{2M})^2 m_\pi(\zeta^\dagger_{t_1}\vec{\tau}\zeta_{t'_1})\cdot(\zeta^\dagger_{t_2}\vec{\tau}\zeta_{t'_2})$$

$$\sum_{LM}<\kappa_1 m_1|Y_{LM}|-\kappa'_1 m'_1><-\kappa'_2 m'_2|Y_{LM}|\kappa_2 m_2>^*$$

$$\int drdr'\Big\{(G_{a_1}G_{a'_1}+F_{a_1}F_{a'_1})_r(G_{a_2}G_{a'_2}+F_{a_2}F_{a'_2})_{r'}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr'}j_L(im_\rho r_<)h^{(1)}_L(im_\rho r_>)$$

$$-(G_{a_1}G_{a'_1}-F_{a_1}F_{a'_1})_r(G_{a_2}G_{a'_2}+F_{a_2}F_{a'_2})_{r'}\frac{\kappa_1+\kappa'_1}{r}\frac{d}{dr'}j_L(im_\rho r_<)h^{(1)}_L(im_\rho r_>)$$

$$-(G_{a_1}G_{a_1'}+F_{a_1}F_{a_1'})_r(G_{a_2}G_{a_2'}-F_{a_2}F_{a_2'})_{r'}\frac{\kappa_2+\kappa_2'}{r'}\frac{d}{dr}j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$

$$+(G_{a_1}G_{a_1'}-F_{a_1}F_{a_1'})_r(G_{a_2}G_{a_2'}-F_{a_2}F_{a_2'})_{r'}\frac{\kappa_1+\kappa_1'}{r}\frac{\kappa_2+\kappa_2'}{r'}j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)\Big\}. \tag{IV.C.14}$$

APÊNDICE IV.D) Contribuição do méson ρ para $\mathcal{A}^{(JT)}_{d_p'd_h',d_pd_h}$ e $\mathcal{B}^{(JT)}_{d_p'd_h',d_pd_h}$

Vamos, neste apêndice, calcular com um certo detalhe a contribuição do méson ρ para os elementos de matriz $\mathcal{A}^{(JT)}_{d_p'd_h',d_pd_h}$ e $\mathcal{B}^{(JT)}_{d_p'd_h',d_pd_h}$. O cálculo das contribuições dos outros mésons é bastante semelhante a este, sendo por isso omitido.

De acordo com (IV.24), (IV.28), (IV.39) e (IV.40) a contribuição do méson ρ para esses elementos de matriz, que denotaremos por $\mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d_p'd_h',d_pd_h}$ e $\mathcal{B}^{(JT)\rho}_{d_p'd_h',d_pd_h}$, é dada por

$$\mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d_p'd_h',d_pd_h}=\sum_{m_pm_hm_p'm_h'}\sum_{t_pt_ht_p't_h'}<j_hm_hj_pm_p|JM><j_h'm_h'j_p'm_p'|JM>$$

$$<\frac{1}{2}t_h\frac{1}{2}t_p|TT_3><\frac{1}{2}t_h'\frac{1}{2}t_p'|TT_3><p'\tilde{h}|V^\rho|\tilde{h}'p>_A, \tag{IV.D.1}$$

$$\mathcal{B}^{(JT)\rho}_{d_p'd_h',d_pd_h}=\sum_{m_pm_hm_p'm_h'}\sum_{t_pt_ht_p't_h'}<j_hm_hj_pm_p|JM><j_h'm_h'j_p'm_p'|J-M>$$

$$< \frac{1}{2}t_h\frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t'_h\frac{1}{2}t'_p|T-T_3 > (-)^{J+M}(-)^{T+T_3}$$

$$< p'p|V^\rho|\tilde{h}'\tilde{h} >_A . \qquad (IV.D.2)$$

Utilizando o elemento de matriz (IV.C.12) e o teorema de Wigner-Eckart [17],

$$< I_f M_f|T(\lambda\mu)|I_i M_i >= \hat{I}_f^{-1} < I_i M_i \lambda\mu|I_f M_f >< I_f \parallel T(\lambda) \parallel I_i >, \qquad (IV.D.3)$$

podemos escrever

$$< p'\tilde{h}|V^\rho|\tilde{h}'p >_A= (\zeta^\dagger_{t'_p}\vec{\tau}\zeta_{-t'_h})\cdot(\zeta^\dagger_{-t_h}\vec{\tau}\zeta_{t_p})(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\Big\{\sum_{LM_L}\hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_p^{-1}(-)^{j_h+m_h}(-)^{j'_h+m'_h} < j'_h - m'_h LM_L|j'_p m'_p >< j_h - m_h LM_L|j_p m_p > \mathcal{T}_1$$

$$+\sum_{\mathcal{JM}}\hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_p^{-1}(-)^{j_h+m_h}(-)^{j'_h+m'_h} < j'_h - m'_h\mathcal{JM}|j'_p m'_p >< j_h - m_h\mathcal{JM}|j_p m_p > \mathcal{T}_2\Big\}$$

$$-(\zeta^\dagger_{t'_p}\vec{\tau}\zeta_{t_p})\cdot(\zeta^\dagger_{-t_h}\vec{\tau}\zeta_{-t'_h})(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\Big\{\sum_{LM_L}\hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_h'^{-1}(-)^{j_h+m_h}(-)^{j'_h+m'_h} < j_p m_p LM_L|j'_p m'_p >< j_h - m_h LM_L|j'_h - m'_h > \mathcal{T}_3$$

$$+\sum_{\mathcal{JM}}\hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_h'^{-1}(-)^{j_h+m_h}(-)^{j'_h+m'_h} < j_p m_p\mathcal{JM}|j'_p m'_p >< j_h - m_h\mathcal{JM}|j'_h - m'_h > \mathcal{T}_4\Big\}, \qquad (IV.D.4)$$

onde

$$\mathcal{T}_1 = -g_\rho^2 m_\rho < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel \kappa'_h >< \kappa_p \parallel Y_L \parallel \kappa_h >^*$$

$$\int drdr'(G_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h} F_{a_p})_{r'} j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>), \quad (IV.D.5)$$

$$\mathcal{T}_2 = -g_\rho^2 m_\rho \sum_L \int drdr'(G_{a'_p} F_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa'_h > - F_{a'_p} G_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa'_h >)_r$$

$$(G_{\tilde{a}_h} F_{a_p} < -\kappa_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >^* - F_{\tilde{a}_h} G_{a_p} < \kappa_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h >^*)_{r'} j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>),$$

$$(IV.D.6)$$

$$\mathcal{T}_3 = -g_\rho^2 m_\rho < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel \kappa_p >< \kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_h >^*$$

$$\int drdr'(G_{a'_p} G_{a_p} + F_{a'_p} F_{a_p})_r (G_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} + F_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h})_{r'} j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>), \quad (IV.D.7)$$

$$\mathcal{T}_4 = -g_\rho^2 m_\rho \sum_L \int drdr'(G_{a'_p} F_{a_p} < \kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p > - F_{a'_p} G_{a_p} < -\kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >)_r$$

$$(G_{\tilde{a}_h} F_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >^* - F_{\tilde{a}_h} G_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h >^*)_{r'} j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>).$$

$$(IV.D.8)$$

Substituindo (IV.D.4) em (IV.D.1) achamos

$$\mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\Big\{ \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{L M_L} \hat{j}'^{-1}_p \hat{j}^{-1}_p (-)^{j_h+m_h} (-)^{j'_h+m'_h} < j_h m_h j_p m_p | J M > < j'_h m'_h j'_p m'_p | J M >$$

$$< j'_h - m'_h L M_L | j'_p m'_p > < j_h - m_h L M_L | j_p m_p > \mathcal{T}_1$$

$$+ \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{\mathcal{J} \mathcal{M}} \hat{j}'^{-1}_p \hat{j}^{-1}_p (-)^{j_h+m_h} (-)^{j'_h+m'_h} < j_h m_h j_p m_p | J M > < j'_h m'_h j'_p m'_p | J M >$$

$$< j'_h - m'_h \mathcal{J} \mathcal{M} | j'_p m'_p > < j_h - m_h \mathcal{J} \mathcal{M} | j_p m_p > \mathcal{T}_2 \Big\}$$

$$- \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\Big\{ \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{L M_L} \hat{j}'^{-1}_p \hat{j}'^{-1}_h (-)^{j_h+m_h} (-)^{j'_h+m'_h} < j_h m_h j_p m_p | J M > < j'_h m'_h j'_p m'_p | J M >$$

$$< j_p m_p L M_L | j'_p m'_p > < j_h - m_h L M_L | j'_h - m'_h > \mathcal{T}_3$$

$$+ \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{\mathcal{J} \mathcal{M}} \hat{j}'^{-1}_p \hat{j}'^{-1}_h (-)^{j_h+m_h} (-)^{j'_h+m'_h} < j_h m_h j_p m_p | J M > < j'_h m'_h j'_p m'_p | J M >$$

$$< j_p m_p \mathcal{J} \mathcal{M} | j'_p m'_p > < j_h - m_h \mathcal{J} \mathcal{M} | j'_h - m'_h > \mathcal{T}_4 \Big\}. \qquad (IV.D.9)$$

Introduzindo nessa equação o coeficiente de reacoplamento de Jahn, definido em termos de coeficientes de Clebsch-Gordan como

$$U(j_1 j_2 J j_3; J_1 J_2) = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 \\ M_1 M_2}} < j_1 m_1 j_2 m_2 | J_1 M_1 >< j_2 m_2 j_3 m_3 | J_2 M_2 >$$

$$< J_1 M_1 j_3 m_3 | J M >< j_1 m_1 J_2 M_2 | J M >, \qquad (IV.D.10)$$

e relacionado ao símbolo de 6-j por

$$U(j_1 j_2 J j_3; J_1 J_2) = (-)^{j_1+j_2+J+j_3} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_1 \\ j_3 & J & J_2 \end{Bmatrix}, \qquad (IV.D.11)$$

podemos escrever $\mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h}$ como:

$$\mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\{ \sum_L \hat{L}^{-2} (-)^{j_h+j_p-j'_h-j'_p} \delta_{LJ} \mathcal{T}_1 + \sum_{\mathcal{J}} \hat{\mathcal{J}}^{-2} (-)^{j_h+j_p-j'_h-j'_p} \delta_{\mathcal{J}J} \mathcal{T}_2 \}$$

$$- \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\{ \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_h'^{-1} \sum_L U(j'_p L J j_h; j_p j'_h) \mathcal{T}_3 + \hat{j}_p^{-1} j_h'^{-1} \sum_{\mathcal{J}} U(j'_p \mathcal{J} J j_h; j_p j'_h) \mathcal{T}_4 \}. \qquad (IV.D.12)$$

Assim, substituindo as expressões para $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ e $\mathcal{T}_4$, temos

$$\mathcal{A}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{-t_h} \vec{\tau} \zeta_{t_p}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\{ -g_\rho^2 m_\rho \hat{J}^{-2} (-)^{j_h+j_p-j'_h-j'_p} < \kappa'_p \parallel Y_J \parallel \kappa'_h >< \kappa_p \parallel Y_J \parallel \kappa_h >^*$$

$$\int drdr'(G_{a'_p}G_{\tilde{a}'_h} + F_{a'_p}F_{\tilde{a}'_h})_r(G_{\tilde{a}_h}G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h}F_{a_p})_{r'}j_J(im_\rho r_<)h_J^{(1)}(im_\rho r_>)$$

$$- g_\rho^2 m_\rho \hat{J}^{-2}(-)^{j_h+j_p-j'_h-j'_p}\sum_L \int drdr'(G_{a'_p}F_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel -\kappa'_h >$$

$$- F_{a'_p}G_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel \kappa'_h >)_r(G_{\tilde{a}_h}F_{a_p} < -\kappa_p \parallel T_{JL} \parallel \kappa_h >^*$$

$$- F_{\tilde{a}_h}G_{a_p} < \kappa_p \parallel T_{JL} \parallel -\kappa_h >^*)_{r'}j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)\}$$

$$- \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2}t_h\frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t'_h\frac{1}{2}t'_p|TT_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p}\vec{\tau}\zeta_{t_p})\cdot(\zeta^\dagger_{-t_h}\vec{\tau}\zeta_{-t'_h})(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\{-g_\rho^2 m_\rho \hat{j}_p^{-1}\hat{j}_h'^{-1}\sum_L U(j'_p L J j_h; j_p j'_h) < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel \kappa_p >< \kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_h >^*$$

$$\int drdr'(G_{a'_p}G_{a_p} + F_{a'_p}F_{a_p})_r(G_{\tilde{a}_h}G_{\tilde{a}'_h} + F_{\tilde{a}_h}F_{\tilde{a}'_h})_{r'}j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$

$$- g_\rho^2 m_\rho \hat{j}_p^{-1}\hat{j}_h'^{-1}\sum_{L\mathcal{J}} U(j'_p \mathcal{J} J j_h; j_p j'_h)\int drdr'(G_{a'_p}F_{a_p} < \kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p >$$

$$- F_{a'_p}G_{a_p} < -\kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >)_r(G_{\tilde{a}_h}F_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >^*$$

$$- F_{\tilde{a}_h}G_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h >^*)_{r'}j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)\}, \qquad (IV.D.13)$$

como indicado na eq.(IV.45).

De modo análogo, podemos escrever

$$< p'p|V^\rho|\tilde{h}'\tilde{h} >_A = (\zeta^\dagger_{t'_p}\vec{\tau}\zeta_{-t'_h})\cdot(\zeta^\dagger_{t_p}\vec{\tau}\zeta_{-t_h})(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\Big\{\sum_{LM_L} \hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_h^{-1}(-)^{j_h+m_h}(-)^{j_h'+m_h'} < j_h' - m_h' LM_L|j_p'm_p' >< j_p m_p LM_L|j_h - m_h > \mathcal{T}_5$$

$$+ \sum_{\mathcal{JM}} \hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_h^{-1}(-)^{j_h+m_h}(-)^{j_h'+m_h'} < j_h' - m_h' \mathcal{JM}|j_p'm_p' >< j_p m_p \mathcal{JM}|j_h - m_h > \mathcal{T}_6\Big\}$$

$$-(\zeta_{t_p'}^{\dagger}\vec{\tau}\zeta_{-t_h})\cdot(\zeta_{t_p}^{\dagger}\vec{\tau}\zeta_{-t_h'})(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t_h'}$$

$$\Big\{\sum_{LM_L} \hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_h'^{-1}(-)^{j_h+m_h}(-)^{j_h'+m_h'} < j_h - m_h LM_L|j_p'm_p' >< j_p m_p LM_L|j_h' - m_h' > \mathcal{T}_7$$

$$+ \sum_{\mathcal{JM}} \hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_h'^{-1}(-)^{j_h+m_h}(-)^{j_h'+m_h'} < j_h - m_h \mathcal{JM}|j_p'm_p' >< j_p m_p \mathcal{JM}|j_h' - m_h' > \mathcal{T}_8\Big\},$$

$$(IV.D.14)$$

onde

$$\mathcal{T}_5 = -g_\rho^2 m_\rho < \kappa_p' \parallel Y_L \parallel \kappa_h' >< \kappa_h \parallel Y_L \parallel \kappa_p >^*$$

$$\int drdr'(G_{a_p'}G_{\tilde{a}_h'} + F_{a_p'}F_{\tilde{a}_h'})_r(G_{\tilde{a}_h}G_{a_p} + F_{\tilde{a}_h}F_{a_p})_{r'} j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>),$$

$$(IV.D.15)$$

$$\mathcal{T}_6 = -g_\rho^2 m_\rho \sum_L \int drdr'(G_{a_p'}F_{\tilde{a}_h'} < \kappa_p' \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h' > -F_{a_p'}G_{\tilde{a}_h'} < -\kappa_p' \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h' >)_r$$

$$(G_{a_p}F_{\tilde{a}_h} < -\kappa_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >^* - F_{a_p}G_{\tilde{a}_h} < \kappa_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p >^*)_{r'} j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>),$$

$$(IV.D.16)$$

$$\mathcal{T}_7 = -g_\rho^2 m_\rho < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel \kappa_h >< \kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_p >^*$$

$$\int dr dr' (G_{a'_p} G_{\bar{a}_h} + F_{a'_p} F_{\bar{a}_h})_r (G_{a_p} G_{\bar{a}'_h} + F_{a_p} F_{\bar{a}'_h})_{r'} j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>), \tag{IV.D.17}$$

$$\mathcal{T}_8 = -g_\rho^2 m_\rho \sum_L \int dr dr' (G_{a'_p} F_{\bar{a}_h} < \kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h > - F_{a'_p} G_{\bar{a}_h} < -\kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >)_r$$

$$(G_{a_p} F_{\bar{a}'_h} < -\kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >^* - F_{a_p} G_{\bar{a}'_h} < \kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p >^*)_{r'} j_L(im_\rho r_<) h_L^{(1)}(im_\rho r_>). \tag{IV.D.18}$$

Substituindo (IV.D.14) em (IV.D.2) obtemos

$$\mathcal{B}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 >< \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{t_p} \vec{\tau} \zeta_{-t_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$(-)^{T+T_3} \Big\{ \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{L M_L} \hat{j}'^{-1}_p \hat{j}^{-1}_h (-)^{j_h+m_h} (-)^{j'_h+m'_h} (-)^{J+M} < j_h m_h j_p m_p | J M >$$

$$< j'_h m'_h j'_p m'_p | J - M >< j'_h - m'_h L M_L | j'_p m'_p >< j_p m_p L M_L | j_h - m_h > \mathcal{T}_5$$

$$+ \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{\mathcal{J}\mathcal{M}} \hat{j}'^{-1}_p \hat{j}^{-1}_h (-)^{j_h+m_h} (-)^{j'_h+m'_h} (-)^{J+M} < j_h m_h j_p m_p | J M >< j'_h m'_h j'_p m'_p | J - M >$$

$$< j'_h - m'_h \mathcal{J}\mathcal{M} | j'_p m'_p >< j_p m_p \mathcal{J}\mathcal{M} | j_h - m_h > \mathcal{T}_6 \Big\}$$

$$- \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{t_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$(-)^{T+T_3} \Big\{ \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{L M_L} \hat{j}_p'^{-1} \hat{j}_h'^{-1} (-)^{j_h+m_h} (-)^{j'_h+m'_h} (-)^{J+M} < j_h m_h j_p m_p | J M >$$

$$< j'_h m'_h j'_p m'_p | J - M > < j_h - m_h L M_L | j'_p m'_p > < j_p m_p L M_L | j'_h - m'_h > \mathcal{T}_7$$

$$+ \sum_{m_p m_h m'_p m'_h} \sum_{\mathcal{J} \mathcal{M}} \hat{j}_p'^{-1} \hat{j}_h'^{-1} (-)^{j_h+m_h} (-)^{j'_h+m'_h} (-)^{J+M} < j_h m_h j_p m_p | J M > < j'_h m'_h j'_p m'_p | J - M >$$

$$< j_h - m_h \mathcal{J} \mathcal{M} | j'_p m'_p > < j_p m_p \mathcal{J} \mathcal{M} | j'_h - m'_h > \mathcal{T}_8 \Big\}. \qquad (IV.D.19)$$

Introduzindo novamente o coeficiente de reacoplamento de Jahn, podemos escrever

$$\mathcal{B}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{t_p} \vec{\tau} \zeta_{-t_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h}$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t'_h} (-)^{T+T_3} \Big\{ \sum_L \hat{L}^{-2} (-)^{J+2j_p-j'_h-j'_p} \delta_{LJ} \mathcal{T}_5 + \sum_{\mathcal{J}} \hat{\mathcal{J}}^{-2} (-)^{J+2j_p-j'_h-j'_p} \delta_{\mathcal{J}J} \mathcal{T}_6 \Big\}$$

$$- \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{t_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h} (-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$(-)^{T+T_3} \hat{j}_p^{-1} \hat{j}_p'^{-1} (-)^{j'_h+J-j'_p} \Big\{ \sum_L U(j_h L J j'_h; j'_p j_p) \mathcal{T}_7 + \sum_{\mathcal{J}} U(j_h \mathcal{J} J j'_h; j'_p j_p) \mathcal{T}_8 \Big\}. \qquad (IV.D.20)$$

Então , substituindo $\mathcal{T}_5$, $\mathcal{T}_6$, $\mathcal{T}_7$ e $\mathcal{T}_8$ obtemos, finalmente,

$$\mathcal{B}^{(JT)\rho}_{d'_p d'_h, d_p d_h} = \sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2} t_h \frac{1}{2} t_p | T T_3 > < \frac{1}{2} t'_h \frac{1}{2} t'_p | T - T_3 > (-)^{T+T_3} (\zeta^\dagger_{t'_p} \vec{\tau} \zeta_{-t'_h}) \cdot (\zeta^\dagger_{t_p} \vec{\tau} \zeta_{-t_h}) (-)^{\frac{1}{2}+t_h}$$

$$(-)^{\frac{1}{2}+t'_h}\{-g_\rho^2 m_\rho \hat{J}^{-2}(-)^{J+2j_p-j'_h-j'_p}\int drdr'(G_{a'_p}G_{\tilde{a}'_h}+F_{a'_p}F_{\tilde{a}'_h})_r(G_{\tilde{a}_h}G_{a_p}+F_{\tilde{a}_h}F_{a_p})_{r'}$$

$$j_J(im_\rho r_<)h_J^{(1)}(im_\rho r_>) < \kappa'_p \parallel Y_J \parallel \kappa'_h >< \kappa_h \parallel Y_J \parallel \kappa_p >^*$$

$$-g_\rho^2 m_\rho \hat{J}^{-2}(-)^{J+2j_p-j'_h-j'_p}\sum_L \int drdr'(G_{a'_p}F_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel -\kappa'_h >$$

$$-F_{a'_p}G_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_p \parallel T_{JL} \parallel \kappa'_h >)_r(G_{a_p}F_{\tilde{a}_h} < -\kappa_h \parallel T_{JL} \parallel \kappa_p >^*$$

$$-F_{a_p}G_{\tilde{a}_h} < \kappa_h \parallel T_{JL} \parallel -\kappa_p >^*)_{r'} j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)\}$$

$$-\sum_{t_p t_h t'_p t'_h} < \frac{1}{2}t_h\frac{1}{2}t_p|TT_3 >< \frac{1}{2}t'_h\frac{1}{2}t'_p|T-T_3 > (-)^{T+T_3}(\zeta^\dagger_{t'_p}\vec{\tau}\zeta_{-t_h})\cdot(\zeta^\dagger_{t_p}\vec{\tau}\zeta_{-t'_h})(-)^{\frac{1}{2}+t_h}(-)^{\frac{1}{2}+t'_h}$$

$$\{-g_\rho^2 m_\rho \hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_p^{-1}(-)^{j'_h+J-j'_p}\sum_L U(j_hLJj'_h;j'_pj_p) < \kappa'_p \parallel Y_L \parallel \kappa_h >< \kappa'_h \parallel Y_L \parallel \kappa_p >^*$$

$$\int drdr'(G_{a'_p}G_{\tilde{a}_h}+F_{a'_p}F_{\tilde{a}_h})_r(G_{a_p}G_{\tilde{a}'_h}+F_{a_p}F_{\tilde{a}'_h})_{r'} j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)$$

$$-g_\rho^2 m_\rho \hat{j}_p'^{-1}\hat{j}_p^{-1}(-)^{j'_h+J-j'_p}\sum_{L\mathcal{J}} U(j_h\mathcal{J}Jj'_h;j'_pj_p)\int drdr'(G_{a'_p}F_{\tilde{a}_h} < \kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_h >$$

$$-F_{a'_p}G_{\tilde{a}_h} < -\kappa'_p \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_h >)_r(G_{a_p}F_{\tilde{a}'_h} < -\kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa_p >^*$$

$$-F_{a_p}G_{\tilde{a}'_h} < \kappa'_h \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa_p >^*)_{r'} j_L(im_\rho r_<)h_L^{(1)}(im_\rho r_>)\}. \qquad (IV.D.21)$$

REFERÊNCIAS

[1] J. Speth and A. van der Woude, Rep. Prog. Phys. 44(1981)719

[2] K.Goeke and J. Speth, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **32**(1982)65

[3] B.D. Serot and J.D. Walecka, Advances in Nuclear Physics, edited by J.W. Negele and E.Vogt (Plenum, New York, 1986) Vol.16, p.1

[4] A.Bouyssy, J.-F. Mathiot, Nguyen Van Giai and S. Marcos, Phys. Rev. C **36**(1987)380

[5] J.D. Bjorken and S.D. Drell. Relativistic Quantum Mechanics (McGraw-Hill, New York, 1964)

[6] F.E. Bertrand, Nucl. Phys. A**354**(1981)129c

[7] Jin-Kang Zhang, Yanhe Jin and D.S. Onley, Phys. Rev. C 48(1993)2697

[8] J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967)

[9] R. Brockmann, Phys. Rev. C **18**(1978)1510

[10] H.F. Boersma and R. Malfliet, Phys. Rev. C **49**(1994)1495

[11] J.D. Jackson, Classical Eletrodynamics (John Wiley, New York, 1975)

[12] D.J. Rowe, Nuclear Collective Motion (Methuen, 1970)

[13] I.S. Towner, A Shell Model Description of Light Nuclei (Claredon Press, Oxford, 1977)

[14] E.J.V. de Passos, D.P. Menezes and A.P.N.R. Galeão , Phys. Rev. C **36**(1987)2639

[15] A. Messiah, Quantum Mechanics (John Wiley, 1966)

[16] H. Muirhead, The Physics of Elementary Particles (Pergamon Press, Oxford, 1965)

[17] A.R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics (Princeton University Press, 1957)

[18] Jian-Kang Zhang and D.S. Onley, Phys. Rev. C **49**(1994)762

[19] P.G. Blunden and P. McCorquodale, Phys. Rev. C **38**(1988)1861

[20] R. Machleidt, Advances in Nuclear Physics, edited by J.W. Negele and E. Vogt (Plenum, New York, 1989) Vol.19, p.189

[21] P. Ring and P. Schuck, The Nuclear Many-Body Problem (Springer-Verlag, 1980)

[22] T.T.S. Kuo and E. Osnes, in Collective Phenomena in Atomic Nuclei, edited by T. Engeland, J. Rekstad and J.S. Vaagen (World scientific, 1984) Vol.2, p.79

[23] K.N. Mukhin, Experimental Nuclear Physics (Mir, Moscow,1987)

RPA RELATIVÍSTICA PARA RESSONÂNCIAS GIGANTES ISOVETORIAIS

ERRATA

1) Página 38, abaixo da Eq.(III.58.e)

onde se lê: III.D — deve-se ler: III.E

2) Página 44, abaixo da Eq.(IV.1)

onde se lê: III.D — deve-se ler: III.E

3) Página 67, primeiro parágrafo

onde se lê: III.D — deve-se ler: III.E

4) Equações (III.69), (III.70), (III.E.92) e (III.E.93)

onde se lê: $< \kappa | Y_{LM} | - \kappa' >$ — deve-se ler: $< \kappa \parallel Y_L \parallel -\kappa' >$

5) Equação (IV.13). Sua forma correta é

$$\varepsilon_q \sum_{p'h'} (X^{(q)}_{p'h'} b^{\dagger}{}_{p'} b_{\bar{h}'} - Y^{(q)}_{p'h'} b^{\dagger}{}_{\bar{h}'} b_{p'})$$

6) Equação (II.A.1)

onde se lê: g_s — deve-se ler: g_σ