

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ E SEUS INVARIANTES

Pedro Contino da Silva Costa

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ E SEUS INVARIANTES

Pedro Contino da Silva Costa

Orientador:

Dr. Vicente Pleitez (IFT - UNESP)

Monografia apresentada à Universidade Estadual Paulista-Botucatu- como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Física Médica

São Paulo
2011

Agradecimentos

Ao meu orientador, que vem me acompanhando desde 2009, Dr. Vicente Pleitez, do Instituto de Física Teórica, que soube de maneira brilhante conduzir-me para área teórica da física. Tendo como um dos resultados o respectivo trabalho.

Ao meu pai, Raymundo da Silva Costa Neto, que sempre me deu sustentação tanto material como emocional e me forneceu recursos para me manter durante toda graduação, sem o qual nada disso seria possível.

À minha namorada, Adriane Mary Ferreira dos Santos, que me acompanha desde antes do início da minha jornada pela física, apoiando-me a cada decisão tomada.

Resumo

Neste trabalho, mostraremos as transformações de Lorentz em três casos diferentes, partindo, no segundo capítulo, da mais descrita em livros, a transformação especial de Lorentz, que relaciona dois sistemas inerciais cujas velocidades relativas são direcionadas ao longo de um dos eixos das bases dos respectivos sistemas. Entretanto, veremos uma peculiaridade que passa despercebida nesta transformação, apesar de muitos livros relatarem como uma transformação paralela entre os sistemas inerciais, devido ao fato da velocidade ser paralela a um dos eixos, ela na verdade é uma transformação semi-paralela.

No terceiro capítulo, a transformação que veremos será aquela na qual um dos sistemas se desloca com uma velocidade relativa que tem direção arbitrária em relação a um dado sistema, mostraremos que tal transformação pode ser nomeada como transformação não rotacional de Lorentz.

Por fim, no quarto capítulo, obteremos o último tipo de transformação, a transformação rotacional de Lorentz, que encontra-se na interface entre a Relatividade Especial e a Relatividade Geral, uma vez que passaremos a descrever sistemas sendo rotacionados, logo sistemas não inerciais, mostraremos quais são as características que definem as transformações não rotacionais e rotacionais. E no último tópico deste capítulo veremos a idéia da "Teoria de Thomas" que usa esta transformação para criar o que ele define de "eixos coordenados próprios da partícula" usado para obter o fator $1/2$ do spin do elétron.

No presente trabalho, ainda, no quinto capítulo, definiremos como os invariantes de Lorentz são obtidos, quantidades que são medidas igualmente em referenciais de Lorentz distintos, com o enfoque na massa que vem sido descrita erroneamente, em muitos livros, como sendo uma medida que varia de acordo com o referencial.

Abstract

In this paper, we will show the types of Lorentz transformations, from the most described in books, special Lorentz transformation that relates two inertial systems whose relative velocities are directed along an axis of the respective bases systems. However, we will see a peculiarity that goes unnoticed in this transformation, although they have reported in many books a parallel between the transformation inertial systems, due to the fact that the speed is parallel to an axis, it is actually a semi-parallel processing.

The next transformation that we will see is one in which a system moves with a relative speed that has arbitrary direction with respect to a given system, we will show that this transformation may be appointed as non-rotational Lorentz transformation. Before obtain, the later type of transformation, the rotational Lorentz transformation, which is the interface between Special Relativity and General Relativity, we will describe the systems to be rotated, not just inertial systems, show what the characteristics are that define the non-rotational and rotational transformations. The in last topic of this chapter we will also show how the idea of "Thoma's theory" that uses this transformation to create what he defines as "the proper coordinate axes of the particle" used to obtain the factor $1/2$ electron spin.

In the last chapter we show how the Lorentz invariants are obtained, quantities measures that are also in different Lorentz reference, with the focus on mass that has erroneously been described in many books, that varies according to the agreement reference system.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	TRANSFORMAÇÃO ESPECIAL DE LORENTZ	3
2.1	Postulados da Relatividade e Conceito do Intervalo	3
2.2	O Espaço de Minkowski e a Transformação Especial de Lorentz	4
2.3	Dilatação do Tempo e Contração do Espaço	8
2.4	A Transformação Especial de Lorentz como Semi-Paralela	9
3	TRANSFORMAÇÃO NÃO ROTACIONAL DE LORENTZ	11
4	TRANSFORMAÇÃO ROTACIONAL DE LORENTZ	18
4.1	Transformação não Rotacional Revisada	18
4.2	Características de uma Transformação Rotacional	22
4.3	Transformações de Lorentz Semi-Paralelas em Eixos Distintos: a Transformação Rotacional	23
4.4	A Transformação Rotacional de Lorentz	25
4.4.1	Aplicação na Teoria de Thomas	26
5	INVARIANTES DE LORENTZ	30
5.1	Algumas Definições Tensoriais	30
5.2	Algumas Propriedades da Álgebra Tensorial	31
5.3	As Equações de Einstein para a Energia da Partícula Livre	32
5.4	Massa, a Energia de Repouso	35
6	CONCLUSÃO	37
	Referências Bibliográficas	38

1

INTRODUÇÃO

Desde Newton, sempre se buscou relacionar como observadores em referenciais distintos descreveriam um mesmo fenômeno, o que era relativo para cada referencial e o que permanecia o mesmo. Para Newton, tempo e espaço eram independentes e as transformações usuais para relacionar dois referenciais, inerciais ou não, eram dadas pela Transformação de Galileu, na qual o tempo era um observável que não se alterava para sistemas distintos.

As transformações de Galileu, espaciais e temporais, para relacionar um dado sistema I e I' em que o último desloca-se com uma velocidade \vec{v} em relação ao primeiro são dadas por

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t'; \quad t = t' \quad (1.1)$$

Se quiséssemos descrever como um dado ponto do espaço de I é descrito por I' usamos a transformação inversa

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t'; \quad t' = t \quad (1.2)$$

Tais transformações por muito tempo foram usados sem nenhum problema, uma vez que, antes do século XX, a tecnologia era muito precária, e os experimentos eram realizados com pouquíssima energia, conseqüentemente baixas velocidades, além disso havia pouca precisão nas medidas. À medida em que a tecnologia foi se desenvolvendo problemas começavam a surgir, tempos entre diferentes referenciais eram medidos diferentemente e dependiam da velocidade.

Com a Teoria da Relatividade proposta por Einstein, em 1905, tal questão foi resolvida pela substituição da transformação de Galileu pela de Lorentz na qual a primeira se mostra válida apenas para casos particulares. De imediato com as novas transformações, vindas da teoria da relatividade especial, vimos que espaço e tempo, são quantidades relativas e suas medidas podem ser diferentes de acordo com o referencial que se mede, ao contrário do que se via na transformação de Galileu. O mais interessante é que em casos particulares em que sistemas em baixas velocidades são relacionados as equações (1.1) e (1.2) continuam válidas, mas mesmo

assim, nos dias atuais a precisão dos experimentos são tão grandes que os efeitos relativísticos podem ser comprovados para baixas velocidades, conforme [1].

Essas novas transformações, entretanto, são limitadas para relacionar apenas referenciais inerciais. Mesmo problemas em que queremos relacionar referenciais inerciais distintos com uma velocidade relativa \vec{v} em uma direção arbitrária se tornam trabalhosos e diferentemente das transformações descritas anteriormente, nem sempre quando se aplicam duas transformações sucessivas de Lorentz, temos uma translação como o que se esperaria. Logo nem sempre teremos a seguinte relação,

$$L(v_1)L(v_2) = L(v_1 + v_2) \quad (1.3)$$

em que $L(v_1)$ e $L(v_2)$ representam transformações de Lorentz entre arbitrários sistemas inerciais I e I' com velocidade relativa v_1 e entre os sistemas I' e I'' com velocidade relativa v_2 . E $L(v_1 + v_2)$ representa uma transformação direta entre I e I'' .

Com o surgimento da teoria da relatividade, muitos livros e trabalhos acabam sendo induzidos, pelo próprio nome, de que tudo é relativo e desde então uma quantidade intrínseca da matéria, a massa passou a ser vista dessa maneira. Muitos físicos usando as transformações de Lorentz passaram a interpretar que as massas de partículas dependem de suas velocidades. Usando novas ferramentas matemáticas questões de quantidades relativas e absolutas entre sistemas podem ser resolvidas e podemos descobrir quais medidas são invariantes ou não.

No decorrer do trabalho veremos como são essas novas transformações e discutiremos casos em que (1.3) são válidas ou não. Questões de medidas absolutas em referenciais inerciais distintos também serão discutidas com enfoque na massa.

2

TRANSFORMAÇÃO ESPECIAL DE LORENTZ

2.1 Postulados da Relatividade e Conceito do Intervalo

Primeiramente seguem-se os dois postulados nos quais se constrói a teoria da relatividade especial de Einstein, escreveremos estes de acordo com [2].

1. Postulado da relatividade: As leis da natureza e resultados de experimentos realizados em um dado sistema de referência(ou podemos dizer, para um dado observador) são independentes do movimento de translação de um sistema como todo. Mais precisamente, existe uma infinidade de sistemas de referência Euclidianos movendo-se com velocidades constantes, em trajetórias retilíneas, relativas um ao outro no qual todos os fenômenos físicos ocorrem de maneira idêntica.

2. Postulado da constância da velocidade da luz: A velocidade da luz é finita e independente do movimento de sua fonte.

Antes de obtermos a transformação, devemos introduzir o conceito do Intervalo, uma medida que é um invariante de Lorentz, ou seja, não importa em qual referencial estejamos, a quantidade chamada de Intervalo será a mesma, que surge através da invariância da velocidade da luz. Essa quantidade provém do seguinte conceito: Considere dois sistemas de referencia inerciais I e I' com velocidade relativa \vec{v} entre eles. As coordenadas do espaço e tempo de um ponto são dadas por (t, x, y, z) e (t', x', y', z') nos sistemas I e I' , respectivamente. Os eixos de coordenadas são paralelos e orientados de tal maneira que o referencial I' desloca-se com velocidade v positiva na direção x no ponto de vista de I . Para simplificarmos, tomamos as origens de coordenadas dos referencias I e I' sendo paralelas e coincidentes em $t = t' = 0$. Se uma fonte de luz, em repouso, situada na origem de coordenadas de I é ligada e desligada rapidamente em $t = t' = 0$,

de acordo com o segundo postulado, ambos observadores situados em I e I' observarão uma concha esférica de radiação expandindo-se através das respectivas origens com velocidade c . A frente de onda reage no ponto (x,y,z) no sistema I em um dado tempo t pela seguinte equação.

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad (2.1)$$

e similarmente para I' , temos

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0, \quad (2.2)$$

Assumindo que o espaço é homogêneo e isotrópico, como implicação do primeiro postulado, a conexão entre os dois grupos de coordenadas é linear e dada por

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (2.3)$$

E a partir disso que podemos relacionar dois sistemas de referência, inerciais, distintos.

Podemos, então, definir o Intervalo.

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \quad (2.4)$$

onde, agora Δx , Δy , Δz medem o intervalo espacial entre dois eventos quaisquer e Δt o intervalo de tempo entre estes mesmos eventos. A partir disso podemos definir os três tipos de Intervalo existentes,

$$\begin{cases} (\Delta s)^2 > 0 & (Timelike) \\ (\Delta s)^2 = 0 & (Lightlike) \\ (\Delta s)^2 < 0 & (Spacelike) \end{cases} \quad (2.5)$$

O primeiro, chamado Timelike (Tipo-tempo), nos diz que a informação de um determinado evento, dado pelos seus fótons, passou pelo ponto do segundo evento antes que este ocorresse. O segundo, chamado Lightlike (Tipo-luz), mostra que a informação do primeiro evento atinge o local do segundo evento no exato momento em que ele ocorre. Por fim, o terceiro, Spacelike (Tipo-espaço), a informação atinge a posição do segundo evento depois do mesmo ter ocorrido.

Todas são quantidades invariantes em relação a quaisquer referencias inerciais.

2.2 O Espaço de Minkowski e a Transformação Especial de Lorentz

Na Relatividade, ao contrário do conceito clássico, as coordenadas são descritas pelo espaço-tempo como uma entidade única e, por isso, vamos usar os quadri-vetores do espaço de Minkowski,

$$x^a = (ct, x, y, z), \quad x_a = (ct, -x, -y, -z), \quad a = 0, 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

São chamados de vetor contravariante e covariante, respectivamente. Podemos, agora, definir o chamado "Tensor Métrico" que nos permite passar o quadri-vetor contravariante ao covariante da mesma maneira do covariante ao contravariante.

$$x^a = \eta^{ab}x_b, \quad x_a = \eta_{ab}x^b, \quad \eta^{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde usamos a métrica do livro de [3], passando para as notações do livro [4]. Vemos a seguinte propriedade,

$$\eta^{ab}\eta_{ab} = \eta_b^a = \delta_b^a = \begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}. \quad (2.8)$$

Determinaremos a transformação de mudança de coordenadas usando o Intervalo, que agora será dado pelo produto escalar entre os quadri-vetores contravariante e covariante.

As transformações de Lorentz contravariante e covariante devem satisfazer as seguintes relações, respectivamente,

$$x^{m'} = L_a^{m'}x^a, \quad x_{m'} = L_{m'}^bx_b, \quad (2.9)$$

em que $L_a^{m'}$ e $L_{m'}^b$ são tensores mistos. Devido a invariância, temos o produto escalar

$$x^{m'}x_{m'} = L_a^{m'}L_{m'}^bx^ax_b = x^bx_b, \quad (2.10)$$

necessariamente com a seguinte condição:

$$L_a^{m'}L_{m'}^b = \delta_b^a, \quad a, b, m' = 0, 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

Usando as definições do tensor métrico e do tensor da transformação de Lorentz podemos obter mais uma relação.

Das propriedades de transformação de Lorentz contravariante e covariante, segue-se:

$$x^{m'} = L_a^{m'}x^a, \quad x_{n'} = L_{n'}^bx_b,$$

sendo que agora usamos o índice n' para o vetor covariante a fim de obtermos as relações desejadas. Do tensor métrico vemos:

$$\eta^{m'n'}x_{n'} = x^{m'}, \quad \eta_{ab}x^a = x_b,$$

usando essas relações, obtemos,

$$x^{m'} = \eta^{m'n'}x_{n'} = \eta^{m'n'}L_{n'}^bx_b = \eta^{m'n'}L_{n'}^b\eta_{ab}x^a = L_a^{m'}x^a,$$

chegando à seguinte propriedade:

$$L_a^{m'} = \eta_{ab}\eta^{m'n'}L_{n'}^b \quad (2.12)$$

Nosso próximo passo é obtermos as coordenadas de um sistema em relação ao outro para o caso unidirecional. Vamos escolher o exemplo em que um dado sistema de coordenadas Σ' , de

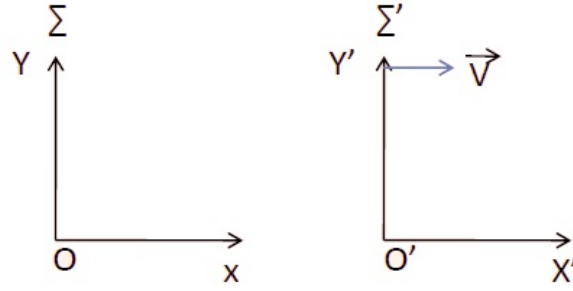


Figura 2.1: Σ e Σ' são dois sistemas de coordenadas, dos referenciais I e I' respectivamente, onde assumimos que ambos são paralelos e coincidentes em $t = t' = 0$. Σ' tem velocidade \vec{v} relativamente a Σ na direção do eixo coordenado x .

um referencial inercial I' , desloca-se com velocidade \vec{v} constante em relação a outro sistema de coordenadas Σ , de um referencial inercial I , no eixo x .

$$\begin{aligned} ct' &= Act + Bx; & y' &= y \\ x' &= Cct + Dx; & z' &= z \end{aligned} \quad (2.13)$$

Podemos escrever o tensor misto da transformação de Lorentz $L_a^{m'}$, na forma matricial, correspondente a essa transformação,

$$L_a^{m'} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Lembrando do intervalo e do fato de sua invariância, vemos:

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

substituindo as relações de (2.13) do lado esquerdo da equação, ficamos com

$$(A^2 - C^2)c^2t^2 + (B^2 - D^2)x^2 - y^2 - z^2 + (AB - CD)xc t = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

onde obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} A^2 - C^2 = 1 \\ D^2 - B^2 = 1 \\ AB = CD \end{cases} \quad (2.15)$$

Para facilitar os nossos cálculos e para fins didáticos, vamos parametrizar estas equações usando as relações dos senos e cossenos hiperbólicos.

$$\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1 \quad (2.16)$$

obtemos, conseqüentemente, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} A &= D = \cosh \phi \\ C &= B = -\sinh \phi \end{aligned} \quad (2.17)$$

nos levando a chamada pseudo-rotação, pois ângulo ϕ é fictício, uma vez que as relações trigonométricas hiperbólicas são definidas por:

$$e^\phi = \cosh \phi + \sinh \phi$$

e para θ real ele não equivale a rotações.

$$L_a^{m'} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Com isto estamos aptos para obter as relações da transformação,

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cosh \phi - x \sinh \phi; & y' &= y \\ x' &= -ct \sinh \phi + x \cosh \phi; & z' &= z \end{aligned},$$

para facilitar nossos cálculos, vamos resolver o problema para $x' = 0$, ou seja o ponto de origem do eixo x das coordenadas do referencial I' , que nos conduz a:

$$dx \cosh \phi = c dt \sinh \phi \implies \frac{v}{c} = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi},$$

usando a relação (2.16),

$$\cosh^2 \phi \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] = 1,$$

concluindo que:

$$\cosh \phi = \gamma, \quad \sinh \phi = \frac{v}{c} \gamma \quad (2.19)$$

com $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$, onde vemos que para altas velocidade teremos grandes valores de γ . E a transformação contravariante, $x^{m'} = L_a^{m'} x^a$ pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c} \gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Portanto, chegamos nas transformações:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right); & y' &= y \\ x' &= \gamma (x - vt); & z' &= z \end{aligned} \quad (2.21)$$

com a transformação inversa sendo:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} x' \right); & y &= y' \\ x &= \gamma(x' + vt'); & z &= z' \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.3 Dilatação do Tempo e Contração do Espaço

Vamos demonstrar dois fenômenos da natureza que são apontados como consequência da transformação de Lorentz. Tais fenômenos também podem ser visualizados diretamente pela invariância do Intervalo.

Primeiramente, demonstraremos a dilatação do tempo. Como antes, imagine o referencial inercial I' deslocando-se unidirecionalmente no eixo x com velocidade \vec{v} em relação ao referencial, também inercial, I . Suponhamos que dois eventos ocorram no mesmo ponto do espaço, x_o em I , nos tempos t_a e t_b , vamos medir o intervalo temporal obtido por I' , usando (2.21) temos,

$$\begin{aligned} ct'_a &= \gamma \left(ct_a - \frac{v}{c} x_o \right) \\ ct'_b &= \gamma \left(ct_b - \frac{v}{c} x_o \right) \end{aligned}$$

onde obtemos, com $t'_b - t'_a = \Delta t'$,

$$\Delta t' = \gamma \Delta t, \quad (2.23)$$

em que Δt é chamado de tempo próprio, pois é o intervalo de tempo no referencial onde os dois eventos ocorreram no mesmo ponto do espaço. Vemos que, quanto maior a velocidade, maior será o intervalo de tempo medido entre dois eventos quaisquer, pelo referencial I' , constatando-se assim a dilatação temporal do referencial I em relação ao referencial I' .

Vamos então, relacionar as distâncias, no eixo- x , espaciais entre esses dois referenciais. Suponhamos que um observador que esteja no referencial I obtenha a coordenada espacial x_1 de um objeto que esteja deslocando-se junto com o referencial I' , e em seguida obtenha outro ponto x_2 , que igualmente desloca-se com o primeiro ponto, ambos estão em repouso no referencial I' , a fim de medir sua distância. Para que a medida seja consistente, os pontos devem ser obtidos simultaneamente, devido ao seu deslocamento. No exemplo será dado por t_a , novamente de (2.21) chegamos as seguintes relações,

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - vt_a) \\ x'_2 &= \gamma(x_2 - vt_a) \end{aligned}$$

onde obtemos, com $x'_2 - x'_1 = \Delta x'$

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'. \quad (2.24)$$

Repare que $\Delta x'$ é o comprimento próprio, uma vez que no referencial I' os pontos estão fixos. Portanto, constatamos que quanto maior o valor de γ , ou seja, quanto maior a velocidade, menor será o comprimento medido pelo referencial I , concluindo que há contração do espaço para objetos que estejam se deslocando em relação a um dado referencial.

2.4 A Transformação Especial de Lorentz como Semi-Paralela

Antes de mostrarmos que a transformação é semi-paralela, relacionaremos a velocidade medida pelo referencial I , do centro de coordenadas o' e de qualquer outro ponto p' , do referencial I' .

Tomaremos um ponto p' como fixo no referencial I' , que será descrito pelos eixos coordenados Σ' , como $x'_{p'}$ e móvel no referencial I descrito, pelos eixos coordenados Σ , como $x_{p'}$. Usando a transformação (2.21) segue-se:

$$x_{p'} - vt = \frac{1}{\gamma} x'_{p'}, \quad y_{p'} = y'_{p'}, \quad z_{p'} = z'_{p'},$$

e portanto,

$$(x_{p'}, y_{p'}, z_{p'}) = \left(\frac{1}{\gamma} x'_{p'} + vt, y'_{p'}, z'_{p'} \right). \quad (2.25)$$

Relacionamos assim um ponto qualquer fixo em I' visto por I . Se tomarmos este ponto sendo a origem de coordenadas o' de Σ' temos $x'_{o'} = 0$, $y'_{o'} = 0$ e $z'_{o'} = 0$ e então,

$$(x_{o'}, y_{o'}, z_{o'}) = (vt, 0, 0). \quad (2.26)$$

Com isto concluímos,

$$\vec{v}_{o'} = \vec{v}_{p'} = (v, 0, 0), \quad (2.27)$$

que são as velocidades da origem de coordenadas e de um ponto qualquer, respectivamente, medidos pelo referencial I . Se considerarmos o vetor $o'p'$, obtido em I' seus componentes medidos pelo referencial I serão $(x_{p'} - x_{o'}, y_{p'} - y_{o'}, z_{p'} - z_{o'})$ e portanto:

$$\begin{aligned} x_{p'} - x_{o'} &= \frac{1}{\gamma} (x'_{p'} - x'_{o'}) \\ y_{p'} - y_{o'} &= y'_{p'} - y'_{o'} \\ z_{p'} - z_{o'} &= z'_{p'} - z'_{o'}; \end{aligned} \quad (2.28)$$

logo, observamos que um dado vetor em I' não será medido igualmente pelo referencial I e só serão iguais e logo paralelos em baixas velocidades, e nesses casos as transformações podem ser realizadas pela Transformação de Galileu, definidas pelas transformações (2.21) e (2.22) com γ igual a 1. Demonstrando que a transformação é semi-paralela, a figura 2.2 ilustra melhor esse fato.

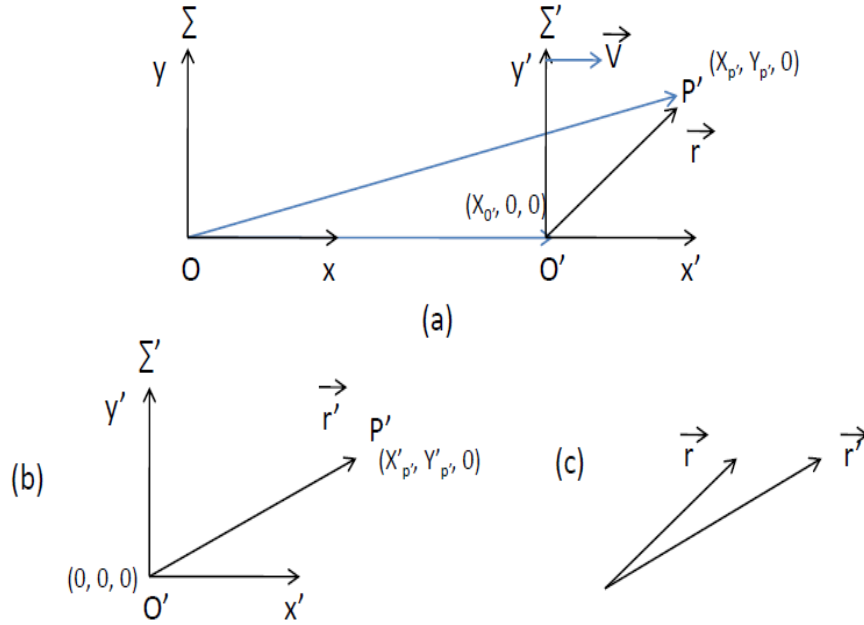


Figura 2.2: O desenho (a) descreve os pontos o' e p' , que se deslocam juntos, relativamente ao referencial I , conforme a equação (2.29), cujas coordenadas, que são descritas por Σ , são, respectivamente $(x_o, 0, 0)$ e $(x_{p'}, y_{p'}, 0)$. No desenho (b), estes mesmos pontos são descritos por Σ' , pelo referencial I' por $(0, 0, 0)$ e $(x'_{p'}, y'_{p'}, 0)$. Neste referencial os pontos estão em repouso. E em (c) os vetores obtidos \vec{r} e \vec{r}' , por esses dois referenciais, são comparados e devido a contração espacial em x , eles não são paralelos.

Se fizermos o mesmo procedimento, mas invertendo os pontos fixos, ou seja, ao pegarmos dois pontos fixos no referencial I com x_p um ponto qualquer no mesmo e x_o sendo a origem do centro de coordenadas Σ , usando a transformação inversa obtida em (2.22), relacionaremos esses mesmos pontos com os pontos do referencial I' , que neste exemplo estão se movendo.

$$(x'_p, y'_p, z'_p) = \left(\frac{1}{\gamma} x_p - vt', y_p, z_p \right). \quad (2.29)$$

com a origem de coordenadas o obtida por I' sendo.

$$(x'_o, y'_o, z'_o) = (-vt', 0, 0). \quad (2.30)$$

e portanto:

$$\vec{v}'_o = \vec{v}'_p = (-v, 0, 0), \quad (2.31)$$

que são as velocidades da origem de coordenadas e de um outro ponto qualquer, que estão em repouso no referencial I , medidos pelo referencial I' .

Estas relações das velocidade de o , p e o' e p' serão importantes para caracterizar o que chamamos de transformações não rotacionais.

3

TRANSFORMAÇÃO NÃO ROTACIONAL DE LORENTZ

Nesta segunda parte do trabalho vamos mostrar a Transformação de Lorentz não rotacional. Esta transformação nos fornece um caso bem mais geral, uma vez que a velocidade de um dado sistema pode ser tomada em qualquer direção. Com isto, temos condição para trabalhar em fenômenos bem mais realísticos, pois as velocidades serão tomadas arbitrariamente, como no estudo de colisões de partículas, em que um dado sensor mede simultaneamente a velocidade de várias partículas com velocidades em diferentes direções.

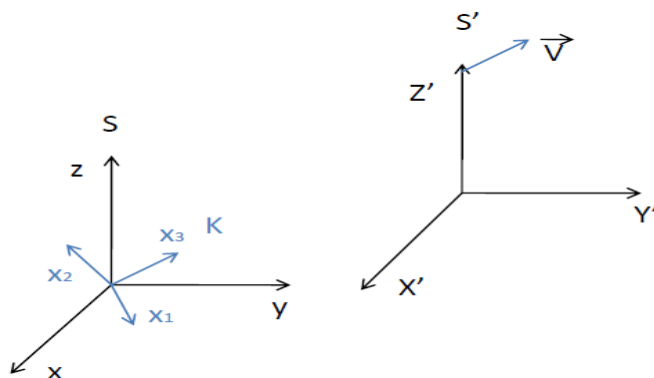


Figura 3.1: S e S' são dois sistemas de coordenadas, dos referenciais inerciais I e I' , respectivamente, que assumimos sendo ambos paralelos e coincidentes em $t = t' = 0$. S' tem velocidade \vec{v} relativamente a S . K é a nova base formada, no centro da origem de coordenadas de S , de modo que o eixo x_3 seja paralelo a direção da velocidade de S' .

Temos, para um observador em repouso no sistema I , descrito pelo sistema de coordenadas

S , a seguinte velocidade medida do referencial I' :

$$\vec{v} = v\vec{n}, \quad (3.1)$$

onde, \vec{n} é o vetor unitário na direção de \vec{v} e é dado por:

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}, \quad (3.2)$$

em que n_x , n_y e n_z são os cossenos diretores.

Passaremos para um novo sistema de coordenadas em I onde a velocidade é paralela a um dos eixos. Consideremos para a nova base, denominada K , que a velocidade seja paralela ao eixo \hat{e}_3 .

A base K , que estará centrada na origem da antiga base S , de I , será descrita por:

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = \frac{n_y\vec{i} - n_x\vec{j}}{\sqrt{1 - n_z^2}}, \\ \hat{e}_2 = \vec{n} \times \hat{e}_1, \\ \hat{e}_3 = \vec{n}, \end{cases} \quad (3.3)$$

Veja que este novo sistema de coordenadas foi construído de modo que ele seja ortonormal. A propriedade dos cossenos diretores nos fornece $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ o que leva \hat{e}_3 ser um vetor unitário. Já \hat{e}_2 foi obtido através do produto vetorial de \vec{n} por \hat{e}_1 que garante que este vetor é perpendicular à \hat{e}_3 e \hat{e}_1 e, por fim, define-se o vetor \hat{e}_1 de modo que seja unitário e ortogonal a \hat{e}_3 e vemos que nesta escolha isto é verdade. Esses novos eixos coordenados (3.3) foram usados no artigo [5] para obter a transformação.

Vamos caracterizar algum evento descrito pelo referencial I , por S , pelo vetor \vec{r} no tempo t .

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\ &= x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3, \end{aligned} \quad (3.4)$$

consequentemente, para $j=1,2,3$,

$$x_j = \vec{r} \cdot \hat{e}_j, \quad (3.5)$$

com isto obtemos:

$$x_j = x(\vec{i} \cdot \hat{e}_j) + y(\vec{j} \cdot \hat{e}_j) + z(\vec{k} \cdot \hat{e}_j). \quad (3.6)$$

Com a equação (3.4) podemos descrever o evento \vec{r} em relação aos pontos da base K .

$$x_1 = x \left[\frac{n_y\vec{i} - n_x\vec{j}}{\sqrt{1 - n_z^2}} \right] \cdot \vec{i} + y \left[\frac{n_y\vec{i} - n_x\vec{j}}{\sqrt{1 - n_z^2}} \right] \cdot \vec{j} + z \left[\frac{n_y\vec{i} - n_x\vec{j}}{\sqrt{1 - n_z^2}} \right] \cdot \vec{k}$$

e sabendo que S é uma base ortonormal, ou seja,

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \text{ e } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

obtemos,

$$x_1 = \frac{(xn_y - yn_x)}{\sqrt{1 - n_z^2}}. \quad (3.7)$$

Para o cálculo de x_2 , devemos antes obter \hat{e}_2 .

$$\hat{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ \frac{n_y}{\sqrt{1-n_z^2}} & \frac{-n_x}{\sqrt{1-n_z^2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{n_z n_x}{\sqrt{1-n_z^2}} \vec{i} + \frac{n_z n_y}{\sqrt{1-n_z^2}} \vec{j} - \frac{n_x^2 + n_y^2}{\sqrt{1-n_z^2}} \vec{k}.$$

Então,

$$x_2 = \frac{xn_z n_x + yn_y n_z - z(1 - n_z^2)}{\sqrt{1 - n_z^2}}, \quad (3.8)$$

onde no último termo usamos a propriedade dos cossenos diretores.

Por fim calculamos facilmente x_3 ,

$$x_3 = xn_x + yn_y + zn_z. \quad (3.9)$$

Descreveremos a velocidade do sistema de coordenadas S para um observador em repouso I' . A velocidade medida será, descrita pelo sistema de coordenadas S' ,

$$\vec{v}' = v' \vec{n}', \quad (3.10)$$

É importante ressaltar que $\vec{v}' = -\vec{v}$ e que $|\vec{v}'| = |\vec{v}|$ o que caracteriza a chamada Transformação de Lorentz não rotacional, como mostraremos no capítulo seguinte. Temos novamente \vec{n}' um vetor unitário na direção de \vec{v}' . Devido ao fato que os dois sistemas de coordenadas S e S' são paralelos e coincidentes em $t = t' = 0$, temos a seguinte implicação,

$$\vec{n}' = n_x \vec{i}' + n_y \vec{j}' + n_z \vec{k}', \quad (3.11)$$

onde \vec{i}', \vec{j}' e \vec{k}' são vetores unitários ao longo dos eixos coordenados de S' e os cossenos diretores são os mesmos que os do sistema S .

Novamente iremos introduzir uma outra base, mas agora para o sistema I' , que será denominada K' , a qual está centrada na origem de S' . E que a velocidade \vec{v}' do sistema S seja paralela a um dos eixos coordenados, no caso \hat{e}_3 .

$$\begin{aligned} \hat{e}'_1 &= \frac{n_y \vec{i}' - n_x \vec{j}'}{\sqrt{1 - n_z^2}} \\ \hat{e}'_2 &= \vec{n}' \times \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_3 &= \vec{n}' \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vamos, novamente, introduzir um vetor direção, dado por \vec{r}' , que descreverá um evento do sistema I' . Este vetor é descrito pelas bases S' e K' respectivamente, por

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' \\ &= x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Determinaremos as coordenadas x' , y' e z' da base S' para a base K' .

$$\begin{cases} x' = \vec{r}' \cdot \vec{i}' \\ y' = \vec{r}' \cdot \vec{j}' \\ z' = \vec{r}' \cdot \vec{k}' \end{cases} \quad (3.14)$$

Vamos aplicar as equações de (3.12) em (3.13) para depois podermos usar (3.14), que nos relacionarão as coordenadas de S' e K' . Iniciando por x' ,

$$\begin{aligned} x' &= x'_1 \left[\frac{n_y \vec{i}' - n_x \vec{j}'}{\sqrt{1 - n_z^2}} \right] \cdot \vec{i}' + x'_2 \left[\frac{n_z n_x \vec{i}' + n_z n_y \vec{j}' - (1 - n_z^2) \vec{k}'}{\sqrt{1 - n_z^2}} \right] \cdot \vec{i}' \\ &+ x'_3 (n_x \vec{i}' + n_y \vec{j}' + n_z \vec{k}') \cdot \vec{i}' \end{aligned}$$

portanto,

$$x' = \frac{x'_1 n_y + x'_2 n_z n_x}{\sqrt{1 - n_z^2}} + x'_3 n_x. \quad (3.15)$$

ao analisarmos a expressão notamos que x' possui todos os termos dos eixos de coordenadas \vec{i}' de \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , devido aos produtos escalares. Para os cálculos de y' e z' procederemos usando esta propriedade de imediato, mas usaremos apenas os termos dos eixos de coordenadas de \vec{j}' para y' e os termos do eixo de coordenadas de \vec{k}' para z' .

$$y' = \frac{-x'_1 n_x + x'_2 n_y n_z}{\sqrt{1 - n_z^2}} + x'_3 n_y. \quad (3.16)$$

$$z' = \frac{-x'_2 (1 - n_z^2)}{\sqrt{1 - n_z^2}} + x'_3 n_z. \quad (3.17)$$

Podemos, agora, recorrer a transformação de especial Lorentz, obtida no capítulo 2, entre as novas bases K e K' que são semi-paralelas. Entretanto, neste o deslocamento é feito em x_3 , dada por

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

em que $x'_0 = ct'$, $x_0 = ct$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$. A transformação em (3.18) nos dá a transformação do sistema $I \rightarrow I'$ através das bases $K \rightarrow K'$, na qual a velocidade é unidirecional.

Com as relações (3.7), (3.8), (3.9), (3.18), (3.15), (3.16) e (3.17) podemos obter a matriz transformação do sistema I para o sistema I' dados pelos sistemas de coordenadas S e S' respectivamente, nas quais a velocidade de uma em relação a outra tem uma direção arbitrária.

Da transformação especial de Lorentz, dado por (3.18), obtemos a seguinte expressão para x'_0 ,

$$x'_0 = \gamma x_0 - \frac{v}{c} \gamma x_3,$$

onde x_3 é dado por (3.9),

$$x'_0 = \gamma x_0 - \frac{v}{c} \gamma n_x x - \frac{v}{c} \gamma n_y y - \frac{v}{c} \gamma n_z z. \quad (3.19)$$

A transformação especial de Lorentz também nos fornece as seguintes relações para os outros termos entre as bases K e K' :

$$\begin{cases} x'_1 = & x_1 \\ x'_2 = & x_2 \\ x'_3 = & -\frac{v}{c} \gamma x_0 + \gamma x_3 \end{cases}$$

Com as substituições de x_i , para $i = 1, 2, 3$ pelas expressões (3.7), (3.8) e (3.9), temos:

$$\begin{cases} x'_1 = & \frac{xn_y - yn_x}{\sqrt{1-n_z^2}} \\ x'_2 = & \frac{xn_z n_x + yn_y n_z - z(1-n_z^2)}{\sqrt{1-n_z^2}} \\ x'_3 = & -\frac{v}{c} \gamma x_0 + \gamma(xn_x + yn_y + zn_z) \end{cases} \quad (3.20)$$

As Equações de (3.20) nos relacionam os sistemas I' e I , entretanto essas relações são entre os sistemas de coordenadas K' e S e o que buscamos

$$\begin{aligned} x' = & \frac{1}{\sqrt{1-n_z^2}} \left\{ \frac{(xn_y - yn_x)n_y}{\sqrt{1-n_z^2}} + \frac{[xn_z n_x + yn_y n_z - z(1-n_z^2)]n_z n_x}{\sqrt{1-n_z^2}} \right\} \\ & + \left[\gamma(xn_x + yn_y + zn_z) - \frac{v}{c} \gamma x_0 \right] n_x \end{aligned}$$

onde, usamos (3.15) e substituímos os termos obtidos em (3.20). Iremos reagrupar os termos para x_0, x, y e z .

$$\begin{aligned} x' = & -\frac{v}{c} \gamma x_0 + \left(\frac{n_z^2 n_x^2 + n_y^2}{1-n_z^2} + \gamma n_x^2 \right) x + \left(\frac{n_x n_y n_z^2 - n_x n_y}{1-n_z^2} + \gamma n_x n_y \right) y \\ & + \left[\gamma n_z n_x - \frac{(1-n_z^2)n_z n_x}{1-n_z^2} \right] z. \end{aligned}$$

Deixaremos os termos de x, y e z em evidência e simplificaremos os seus respectivos termos. Para os termos de x ,

$$\frac{n_z^2 n_x^2 + n_y^2 + \gamma n_x^2 - \gamma n_x^2 n_z^2}{1-n_z^2} = \frac{\gamma n_x^2 (1-n_z^2) + n_z^2 n_x^2 + n_y^2}{1-n_z^2},$$

mas, usando $n_y^2 = 1 - n_x^2 - n_z^2$, obtemos,

$$\frac{\gamma n_x^2 (1-n_z^2) + (1-n_z^2) - n_x^2 (1-n_z^2)}{1-n_z^2} = 1 + n_x^2 (\gamma - 1),$$

para os termos de y ,

$$\begin{aligned} \frac{n_x n_y n_z^2 - n_x n_y + \gamma n_x n_y - \gamma n_y n_x n_z^2}{1 - n_z^2} &= \frac{-n_x n_y (1 - n_z^2) + \gamma (1 - n_z^2) n_x n_y}{1 - n_z^2} \\ &= n_x n_y (\gamma - 1), \end{aligned}$$

e em z ,

$$\gamma n_x n_z - n_x n_z = n_z n_x (\gamma - 1),$$

por fim, obtemos x' de uma maneira mais simplificada

$$x' = -\frac{v}{c} \gamma x_0 + [1 + n_x^2 (\gamma - 1)] x + [n_x n_y (\gamma - 1)] y + [n_z n_x (\gamma - 1)] z. \quad (3.21)$$

Para y' temos,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - n_z^2}} \left\{ \left[\frac{(x n_y - y n_x)}{\sqrt{1 - n_z^2}} \right] n_x + \left[\frac{x n_z n_x + y n_y n_z - z (1 - n_z^2)}{\sqrt{1 - n_z^2}} \right] n_y n_z \right\} \\ &+ \left[\gamma (x n_x + y n_y + z n_z) - \frac{v}{c} \gamma x_0 \right] n_y, \end{aligned}$$

reagrupando os termos,

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{v}{c} \gamma n_y x_0 + \left(\frac{n_x n_y n_z^2 - n_y n_x}{1 - n_z^2} + \gamma n_x n_y \right) x + \left(\frac{n_y^2 n_z^2 + n_x^2}{1 - n_z^2} + \gamma n_y^2 \right) y \\ &+ \left[\gamma n_z n_y - \frac{(1 - n_z^2) n_y n_z}{1 - n_z^2} \right] z. \end{aligned}$$

Simplificando os termos de x ,

$$\frac{n_x n_y n_z^2 - n_y n_x}{1 - n_z^2} + \gamma n_x n_y = \frac{-n_y n_x (1 - n_z^2)}{1 - n_z^2} + \gamma n_x n_y = n_x n_y (\gamma - 1),$$

os de y ,

$$\begin{aligned} \frac{n_y^2 n_z^2 + n_x^2 + \gamma n_y^2 n_z^2}{1 - n_z^2} &= \frac{\gamma n_y^2 (1 - n_z^2) + n_x^2 + n_z^2 n_y^2}{1 - n_z^2} = \\ \frac{\gamma n_y^2 (1 - n_z^2) + (1 - n_z^2) - (1 - n_z^2) n_y^2}{1 - n_z^2} &= 1 + n_y^2 (\gamma - 1), \end{aligned}$$

onde usamos, $n_x^2 = 1 - n_z^2 - n_y^2$, e finalmente para z

$$n_z n_y (\gamma - 1)$$

Então, ao simplificarmos y' ,

$$y' = -\frac{v}{c}\gamma n_y x_0 + n_x n_y (\gamma - 1)x + [1 + n_y^2 (\gamma - 1)] y + n_z n_y (\gamma - 1)z. \quad (3.22)$$

Por fim, resolveremos z' ,

$$z' = \frac{[-x n_z n_x - y n_y n_z + z(1 - n_z^2)] (1 - n_z^2)}{\sqrt{1 - n_z^2} \sqrt{1 - n_z^2}} + \left[(x n_x + y n_y + z n_z) \gamma - \frac{v}{c} \gamma x_0 \right] n_z,$$

reagrupando os termos,

$$z' = -\frac{v}{c}\gamma n_z x_0 + (\gamma n_x n_z - n_z n_x)x + (\gamma n_z n_y - n_z n_y)y + (\gamma n_z^2 + 1 - n_z^2)z,$$

e finalmente, de maneira simplificada, obtemos

$$z' = -\frac{v}{c}\gamma n_z x_0 + n_z n_x (\gamma - 1)x + n_z n_y (\gamma - 1)y + [1 + n_z^2 (\gamma - 1)]z. \quad (3.23)$$

Podemos agora reescrever essas relações na forma matricial, que será a Transformação de Lorentz não rotacional entre os sistemas I e I' pelas bases S e S' .

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L_a^{m'} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

em que $L_a^{m'}$ é o tensor misto da Transformação de Lorentz que pode ser expresso matricialmente seguinte forma

$$L_a^{m'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma n_x & -\frac{v}{c}\gamma n_y & -\frac{v}{c}\gamma n_z \\ -\frac{v}{c}\gamma n_x & 1 + n_x^2 (\gamma - 1) & n_x n_y (\gamma - 1) & n_x n_z (\gamma - 1) \\ -\frac{v}{c}\gamma n_y & n_y n_x (\gamma - 1) & 1 + n_y^2 (\gamma - 1) & n_y n_z (\gamma - 1) \\ -\frac{v}{c}\gamma n_z & n_z n_x (\gamma - 1) & n_z n_y (\gamma - 1) & 1 + n_z^2 (\gamma - 1) \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

4

TRANSFORMAÇÃO ROTACIONAL DE LORENTZ

No respectivo capítulo, veremos como se obtém a transformação usada para conseguir o fator meio do spin do elétron. Neste caso, para descrevermos a órbita eletrônica deste em relação ao seu núcleo, usaremos os "eixos de coordenadas próprios" da partícula, idéia proposta por Thomas, para descrever, de maneira matemática, o spin eletrônico. Fenômeno conhecido como "precessão de Thomas" que é revisado detalhadamente em [6].

Até o momento trabalhamos com transformações de Lorentz de referenciais inerciais, entretanto para este último tópico de transformações, passaremos a trabalhar com um referencial não inercial.

Antes de obtermos esta transformação, veremos que de fato a transformação vista anteriormente é não rotacional e que ela pode ser obtida através das relações vistas do primeiro capítulo. Para isto, chegaremos a relação não rotacional de uma maneira mais simplificada que permitirá concluir estas questões. Depois, descreveremos de maneira bem simplificada o que caracteriza uma transformação rotacional obtendo-a em seguida e por fim veremos como ela é aplicada na teoria de Thomas.

4.1 Transformação não Rotacional Revisada

Para obtermos as relações do capítulo anterior, partimos de dois referenciais inerciais, que possuam uma velocidade arbitrária de um sistema em relação ao outro. O truque para resolvermos este problema foi mudar os eixos de coordenadas dos dados sistemas para outro, que satisfazia a relação de um destes ser paralelo a velocidade do outro referencial. Depois fizemos a transformação especial de Lorentz e voltamos para antiga base com as relações desejadas da transformação.

Neste exemplo, faremos exatamente o contrário, partiremos de dois referenciais inerciais cujas velocidades são paralelas em relação a um dos eixos, ou seja, a transformação do primeiro capítulo, e faremos rotações de um mesmo ângulo nos dois sistemas, neste caso nos limitaremos apenas aos eixos x e y para facilitar os nossos cálculos. Ao fazer isto, iremos constatar que temos sistemas cujas velocidades são arbitrárias de um em relação ao outro, voltando ao estado inicial da transformação obtida no capítulo 2. Mas, neste exemplo arbitrária em relação ao plano xy .

Como anteriormente, temos dois sistemas inerciais S e S' , em que o segundo desloca-se com velocidade $\vec{v} = v\hat{a}_x$ em relação ao primeiro e em $t = t' = 0$ ambos são coincidentes.

Vamos criar um sistema de coordenadas \bar{S} pela rotação de um ângulo α em torno de z do sistema S e da mesma forma \bar{S}' pelo mesmo ângulo em torno de z' de S' .

De $S \rightarrow \bar{S}$, temos

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ \bar{z} = z \end{cases} \quad (4.1)$$

e da mesma forma para $S' \rightarrow \bar{S}'$

$$\begin{cases} \bar{x}' = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ \bar{y}' = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ \bar{z}' = z' \end{cases} \quad (4.2)$$

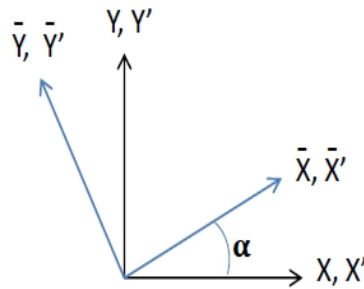


Figura 4.1: Ilustração da rotação de um ângulo α dos sistemas S e S'

Vamos primeiro relacionar \bar{x}' com \bar{x} , ou seja, chegaremos a transformação de Lorentz para essas novas coordenadas. Para resolvermos a transformação, primeiro substituímos as relações de x' e y' pelas relações (2.21) do capítulo 2, onde chegamos a:

$$\bar{x}' = \gamma x \cos \alpha - \gamma vt \cos \alpha + y \sin \alpha$$

e por fim, usamos a transformação inversa de (4.1), logo

$$\bar{x}' = (\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \bar{x} - (\gamma - 1) \bar{y} \sin \alpha \cos \alpha - \gamma \bar{t} v \cos \alpha \quad (4.3)$$

é importante ter em mente que $\bar{t} = t$ e $\bar{t}' = t'$. Vamos proceder da mesma maneira para \bar{y}' , substituiremos os respectivos termos de (2.21),

$$\bar{y}' = -\gamma x \sin \alpha + \gamma vt \sin \alpha + y \cos \alpha$$

e usando a inversa de (4.1), chegamos

$$\bar{y}' = -(\gamma - 1) \bar{x} \sin \alpha \cos \alpha + (\gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \bar{y} + \gamma \bar{t} v \sin \alpha \quad (4.4)$$

como não fizemos nenhuma transformação para z , concluímos que

$$\bar{z}' = \bar{z} \quad (4.5)$$

e finalmente, para a transformação do tempo, usando (2.21) e a inversa de (4.1):

$$\bar{t}' = \gamma \left[\bar{t} - \frac{v}{c^2} (\bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha) \right] \quad (4.6)$$

Com as relações (4.3)-(4.6) em mãos, vamos ao que realmente nos interessa neste tópico que é relacionar como as origens de coordenadas das novas bases são relacionadas uma com a outra e mostrar que de fato, esta transformação, assim como a do capítulo anterior, não é rotacional.

Como as contas são um pouco longas, vamos obter efetivamente apenas de \bar{y} e induzir as demais. Mas, antes de prosseguir, vamos analisar as origens de coordenadas de um referencial em relação ao outro. Explicaremos os conceitos usados no capítulo 2 que relacionaram as origens para o caso da transformação especial, e esta técnica será usada novamente.

Quando queremos observar o centro de coordenadas de um referencial em relação a outro, fazemos da seguinte maneira. Para $x' = \gamma(x + vt)$, tomamos $x = x_{o'}$, que é a origem das coordenadas de S' vista por S e $x' = 0$ uma vez que é o seu próprio centro de coordenadas. Isso nos dá $x_{o'} = -vt$ como o esperado. Se fizermos o contrário, chegaremos a algo sem sentido. Se tomarmos $x' = x'_{o'}$ este é um ponto qualquer de S' que no exemplo anterior foi escolhido como sendo igual a 0. E tomarmos $x = 0$ chegaremos a $x'_{o'} = \gamma vt$, ou seja, algo sem sentido, uma constante variando.

Mostrado o método que iremos seguir para calcular o centro de coordenadas o' de S' , efetuaremos a relação. Usando a expressão (4.3) tomaremos $\bar{x} = \bar{x}_{o'}$ e $\bar{y} = \bar{y}_{o'}$ como sendo a origem do eixo \bar{x}' e a origem de \bar{y}' de S' respectivamente, visto por S . Consequentemente $\bar{x}' = 0$, pois é o seu ponto de origem visto por ele mesmo.

Isolando $\bar{x}_{o'}$, após essas substituições, temos:

$$\bar{x}_{o'} = \frac{(\gamma - 1) \bar{y}_{o'} \sin \alpha \cos \alpha + \gamma tv \cos \alpha}{\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

Substituiremos este termo na expressão (4.4), onde para esta tomamos as mesmos parâmetros anteriores, mas agora com $\bar{y}' = 0$, ficando com

$$-(\gamma - 1) \sin \alpha \cos \alpha [(\gamma - 1) \bar{y}_{o'} \sin \alpha \cos \alpha + \gamma tv \cos \alpha] + (\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) (\gamma \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \bar{y}_{o'} + (\gamma \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \gamma tv \sin \alpha = 0$$

expandindo os termos

$$\begin{aligned} & -(\gamma - 1)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \bar{y}_{o'} - \gamma^2 tv \sin \alpha \cos^2 \alpha + \gamma tv \sin \alpha \cos^2 \alpha + \\ & \gamma^2 \bar{y}_{o'} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \bar{y}_{o'} \gamma \cos^4 \alpha + \gamma \bar{y}_{o'} \sin^4 \alpha + \bar{y}_{o'} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \\ & \gamma^2 vt \sin \alpha \cos^2 \alpha + \gamma vt \sin^3 \alpha = 0 \end{aligned}$$

já podemos ver que muitos termos irão se cancelar, expandindo um pouco mais e cancelando os termos, chegamos

$$\gamma (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \bar{y}_{o'} + \gamma vt \sin \alpha \cos^2 \alpha + \gamma tv \sin^3 \alpha = 0$$

simplificando

$$\gamma (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 \bar{y}_{o'} + \gamma v (\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha) = 0$$

usando as relações trigonométricas $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ para o primeiro termo e $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ no segundo, concluímos

$$\bar{y}_{o'} = -vt \sin \alpha \quad (4.7)$$

Se fizermos o cálculo para $\bar{x}_{o'}$, uma vez que o sistema S' se desloca para direita em relação S , obteremos:

$$\bar{x}_{o'} = vt \cos \alpha \quad (4.8)$$

Com isto, obtemos as seguintes relações:

$$(\bar{x}_{o'}, \bar{y}_{o'}, \bar{z}_{o'}) = (vt \cos \alpha, -vt \sin \alpha, 0) \quad (4.9)$$

Isto nos permite calcular a velocidade da origem de coordenadas de \bar{S}' vista por \bar{S} .

$$\bar{\mathbf{v}}_{o'} = (v \cos \alpha, -v \sin \alpha, 0) \quad (4.10)$$

Veja que o que temos no final é uma equivalência, em relação aos dois sistemas, de apenas uma rotação da velocidade, mas nesse caso de um ângulo $-\alpha$, ilustrada na figura 4.2.

Com isso, é fácil concluir que a velocidade $\bar{\mathbf{v}}$ medida pelo referencial \bar{S}' da origem de coordenadas o de \bar{S} é:

$$\bar{\mathbf{v}}'_o = (-v \cos \alpha, v \sin \alpha, 0) \quad (4.11)$$

Para finalizar este tópico, vamos mostrar o que de fato caracteriza as transformações não rotacionais são duas características

$$\bar{\mathbf{v}}_{o'} = -\bar{\mathbf{v}}'_o \quad (4.12)$$

e

$$|\bar{\mathbf{v}}_{o'}| = |\bar{\mathbf{v}}'_o| = |v| \quad (4.13)$$

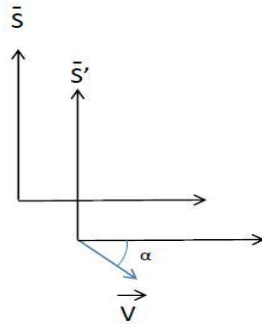


Figura 4.2: Este desenho mostra a visão de um observador que também rotaciona um ângulo α junto com os dois sistemas \bar{S} e \bar{S}' . Temos que para os observadores que estão nestes respectivos referenciais rotacionados, as velocidades das origens de um sistema em relação ao outro é que foram rotacionadas por um ângulo $-\alpha$.

4.2 Características de uma Transformação Rotacional

Criaremos agora um novo sistema de coordenadas, $\bar{\bar{S}}'$, que será obtido através de uma rotação de um ângulo β , em relação ao mesmo eixo que as rotações feitas anteriormente, do sistema \bar{S}' , o que teremos então é

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}}' = \bar{x}' \cos \beta + \bar{y}' \sin \beta \\ \bar{\bar{y}}' = -\bar{x}' \sin \beta + \bar{y}' \cos \beta \\ \bar{\bar{z}}' = \bar{z} \end{cases} \quad (4.14)$$

lembrando que $\bar{\bar{t}}' = \bar{t}' = t'$.

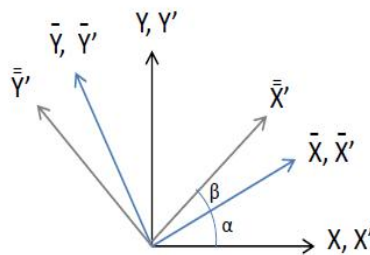


Figura 4.3

Neste novo referencial a velocidade medida da origem de coordenadas, o de \bar{S} será

$$\bar{\bar{\mathbf{v}}}'_o = (-v \cos(\alpha + \beta), v \sin(\alpha + \beta), 0) \quad (4.15)$$

É importante salientarmos que a origem, o , de \bar{S} é a mesma de S e a velocidade medida por \bar{S}' independe de que rotação S realizou pois a origem serve como eixo de rotação.

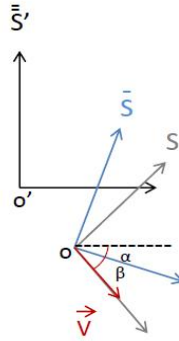


Figura 4.4: Este esquema mostra que a velocidade medida pelo referencial \bar{S}' das origens de coordenadas de \bar{S} e S é a mesma, \vec{V} , e para esse sistema é a velocidade de o de S que foi rotacionada pelo ângulo $\alpha + \beta$.

Uma vez que o referencial \bar{S} não foi alterado, a velocidade medida deste sistema da origem de coordenadas, $o' = o''$, de \bar{S}' continua sendo dada pela equação (4.10). Com isto vemos que a relação (4.13) é mantida pelos referenciais mas, a relação (4.12) não.

$$\bar{v}'_o \neq -\bar{v}_{o'} \quad (4.16)$$

E estas são as características de uma transformação rotacional, a igualdade do módulo e a não preservação da direção da velocidade observada pelos dois sistemas.

4.3 Transformações de Lorentz Semi-Paralelas em Eixos Distintos: a Transformação Rotacional

Vamos à seguinte questão. Se fizermos duas transformações semi-paralelas sucessivas levando o sistema inicial primeiramente de $S \rightarrow S'$, no eixo- x , e depois de $S' \rightarrow S''$, pelo eixo- y' , a transformação de $S \rightarrow S''$ será semi-paralela? Vamos responder a esta pergunta obtendo tal transformação.

Se tomarmos o sistema de coordenadas S' deslocando-se com velocidade \vec{u} em relação a S no eixo- x , teremos a transformação

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_u \left(t - \frac{u}{c^2} x \right); & y' &= y \\ x' &= \gamma_u (x - ut); & z' &= z \end{aligned} \quad (4.17)$$

para $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$. Se o sistema S'' desloca-se com velocidade \vec{v} , pelo eixo- y' em relação a S' , a transformação será dada por

$$\begin{aligned} t'' &= \gamma(t' - \frac{v}{c^2}y'); & y'' &= \gamma(y' - vt') \\ x'' &= x'; & z'' &= z' \end{aligned} \quad (4.18)$$

Com as relações dadas podemos obter a transformação de $S \rightarrow S''$ substituindo os termos das relações de (4.17) nos termos de (4.18), para então obtermos

$$\begin{aligned} t'' &= \gamma\gamma_u \left(t - \frac{u}{c^2}x - \frac{1}{\gamma} \frac{v}{c^2}y \right); & y'' &= \gamma\gamma_u \left(\frac{1}{\gamma_u}y + \frac{uv}{c^2}x - vt \right) \\ x'' &= \gamma_u(x - ut); & z'' &= z \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como anteriormente, vamos ver o centro de coordenadas de \bar{S} visto por S , usando o método, já descrito, para os descrevermos, temos

$$\gamma_u(x_{o''} - ut) = 0 \Rightarrow x_{o''} = ut$$

para a componente $y_{o''}$ usaremos a relação de $x_{o''}$ que acabamos de achar,

$$\gamma\gamma_u \left(\frac{1}{\gamma_u}y_{o''} + \frac{uv}{c^2}ut - vt \right) = 0 \rightarrow \frac{1}{\gamma_u}y_{o''} + \frac{u^2}{c^2}vt - vt = 0$$

colocando o termo vt em evidência, chegamos

$$\frac{1}{\gamma_u}y_{o''} - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)vt = \frac{1}{\gamma_u}y_{o''} - \frac{1}{\gamma_u^2}vt = 0 \Rightarrow y_{o''} = \frac{1}{\gamma_u}vt$$

e finalmente

$$z_{o''} = 0$$

Chegamos, portanto

$$(x_{o''}, y_{o''}, z_{o''}) = \left(ut, \frac{1}{\gamma_u}vt, 0 \right) \quad (4.20)$$

na qual a velocidade da origem de coordenadas de S'' , $\mathbf{w}_{o''}$ vista por S é

$$\mathbf{w}_{o''} = \left(u, \frac{1}{\gamma_u}v, 0 \right) \quad (4.21)$$

Nos resta obter a transformação inversa de (4.19) para isto, basta usarmos as transformações inversas de (4.17) e de (4.18), para obtermos,

$$\begin{aligned} t &= \gamma\gamma_u \left(t'' + \frac{v}{c^2}y'' + \frac{1}{\gamma} \frac{u}{c^2}x'' \right); & y &= \gamma(y'' + vt) \\ x &= \gamma\gamma_u \left(\frac{1}{\gamma}x'' + \frac{vu}{c^2}y'' + ut'' \right); & z &= z'' \end{aligned} \quad (4.22)$$

Logo, podemos ver como o centro de coordenadas o de S é visto por S'' . De imediato obtemos o termo de y''_o

$$\gamma(y''_o - vt'') = 0 \Rightarrow y''_o = -vt''$$

usando essa relação obtida para termos x''_o ,

$$\gamma\gamma_u \left(\frac{1}{\gamma}x''_o + \frac{vu}{c^2} - vt'' + ut'' \right) = 0 \Rightarrow x''_o = -\frac{1}{\gamma}ut''$$

e para $z''_o = 0$. Então,

$$(x''_o, y''_o, z''_o) = \left(-\frac{1}{\gamma}ut'', -vt'', 0 \right) \quad (4.23)$$

com a velocidade medida pelo referencial S'' da origem, o , de S , sendo

$$\mathbf{w}''_o = \left(-\frac{1}{\gamma}u, -v, 0 \right) \quad (4.24)$$

De imediato podemos ver que as velocidades não preservam a direção $\mathbf{w}_{o''} \neq -\mathbf{w}''_o$, nos restando ver se o módulo das velocidades é preservado

$$|\mathbf{w}_{o''}| = \sqrt{u^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)v^2} = \sqrt{u^2 - \frac{u^2v^2}{c^2} + v^2}$$

que tem o mesmo resultado de \mathbf{w}''_o , portanto

$$|\mathbf{w}_{o''}| = |\mathbf{w}''_o| = \sqrt{u^2 - \frac{u^2v^2}{c^2} + v^2} \quad (4.25)$$

Com isso concluímos que a transformação que acabamos de fazer é rotacional.

4.4 A Transformação Rotacional de Lorentz

Uma vez que descobrimos que duas transformações semi-paralelas sucessivas ao longo de eixos distintos nos fornece uma rotação, vamos descobrir como se obtém o ângulo rotacionado.

Antes de começarmos a calcular devemos levar em conta uma sutileza do problema que pode passar despercebido. Quando fazemos uma rotação em um dado sistema pelo eixo z o seu centro de coordenadas se mantém o mesmo, entretanto na transformação anterior relacionamos dois centros distintos, o de S e o'' de S'' . Como sabemos que uma transformação não rotacional deve manter a mesma direção das velocidades dos centro de coordenadas, equação (4.12), usaremos um sistema \bar{S} que foi rotacionado de um mesmo ângulo que S'' , mas se desloca na mesma direção de S e sendo seu centro de coordenadas coincidente com este. Temos, portanto, a relação.

$$\bar{\mathbf{w}}_{o''} = -\mathbf{w}''_o \quad (4.26)$$

isto é, a velocidade da origem, o'' , de S'' vista por \bar{S} tendo sentido contrário da velocidade de origem de \bar{S} , o , vista por S'' . Novamente, o que temos é o sistema \bar{S} obtido pela rotação de um dado ângulo do sistema S , ambos terão a mesma origem de coordenadas e S'' e \bar{S} são relacionados de uma maneira não rotacional. Uma vez que temos a velocidade do lado direito, dada por (4.24), temos a velocidade de medida pelo referencial \bar{S} .

A maneira de obtermos o ângulo rotacionado usando o fato que do ponto de vista de \bar{S} a velocidade do centro de coordenadas de S'' é dada pela rotação, de um ângulo arbitrário θ , da velocidade obtida, da origem o'' pelo sistema S , (4.21).

Podemos usar, novamente, a figura 4.2 para enxergarmos o que ocorre, mas \bar{S}' deve ser visto como S'' uma vez que na medida em que \bar{S} rotaciona em relação a S , no ponto de vista de \bar{S} é a velocidade da origem de S'' quem rotaciona. Este mesmo ângulo θ foi o que \bar{S} realizou a partir de S .

Então,

$$\begin{cases} \bar{w}_{o''x} = w_{o''x} \cos \theta + w_{o''y} \sin \theta \\ \bar{w}_{o''y} = -w_{o''x} \sin \theta + w_{o''y} \cos \theta \end{cases} \quad (4.27)$$

Substituindo os termos das velocidades, que já foram obtidos, chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - v^2/c^2}u &= u \cos \theta + \sqrt{1 - u^2/c^2}v \sin \theta, \\ v &= -u \sin \theta + \sqrt{1 - u^2/c^2}v \cos \theta \end{aligned}$$

Para resolvermos este sistema para $\cos \theta$ basta multiplicarmos a equação da parte superior por u e a inferior por $\sqrt{1 - u^2/c^2}v$ e, então, somarmos, estas novas expressões, uma com a outra, para eliminarmos $\sin \theta$. E fazemos de maneira similar para obtermos $\sin \theta$. Feito isso obtemos

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{\gamma}u^2 + \frac{1}{\gamma_u}v^2}{u^2 - \frac{u^2v^2}{c^2} + v^2} \quad (4.28)$$

$$\sin \theta = \frac{uv \left(\frac{1}{\gamma\gamma_u} - 1 \right)}{u^2 - \frac{u^2v^2}{c^2} + v^2} \quad (4.29)$$

Então, chegamos a conclusão que os eixos coordenados S'' , ou mais precisamente, os eixos do sistema \bar{S} que são semi-paralelos com o último, foram rotacionados por um ângulo θ que são dados pelas expressões (4.28) e (4.29), pelo eixo z do sistema S .

4.4.1 Aplicação na Teoria de Thomas

Aqui Thomas introduziu o conceito de "eixos coordenados próprios da partícula", que conforme citado no começo do capítulo, é o sistema de coordenadas que o elétron está em repouso e o núcleo girando.

Em geral, se uma partícula está em um movimento uniforme, então nós podemos escolher para ela o sistema de repouso, um sistema inercial que se move com a partícula com uma velocidade constante, tendo os eixos de coordenadas tais que a posição da partícula é a sua origem, não havendo nenhum problema. Se, entretanto, a velocidade da partícula não é

constante, mas muda com o tempo, então devemos tomar um sistema inercial que é movida com a velocidade da partícula a cada instante. Mas, como escolher eixos coordenados neste sistema inercial? É bem óbvio que devemos tomar a posição da partícula como origem de coordenadas para cada instante. Mas, como devemos escolher a direção dos eixos coordenados? Aqui um problema bem complicado surge. Se tomarmos a direção dos eixos coordenados a cada instante sendo arbitrários, então não criaremos uma teoria consistente. Thomas propôs o seguinte método.

Primeiro nós consideramos um sistema em repouso em um instante arbitrário e um outro sistema de repouso em um tempo infinitesimalmente posterior. A idéia de Thomas é tomar os eixos do último tais que sejam semi-paralelos com o anterior. Ele, então, toma sucessivos eixos tais que os eixos desse sistema de repouso em um dado instante sejam semi-paralelos aos eixos do sistema em repouso em um tempo infinitesimalmente anterior. Se fizermos isso dessa maneira, uma vez que o movimento da partícula é dado e os eixos iniciais são fixos, então a direção dos eixos em qualquer momento posterior são sucessivamente e unicamente determinados. Quando procedemos dessa maneira, eles são chamados de **eixos coordenados próprios da partícula**.

Vamos considerar um caso simples tomando (4.17) e (4.18) onde várias relações são derivadas a partir delas. Vamos considerar o referencial do laboratório como sendo o referencial I e considerar os eixos coordenados do sistema sendo S , fixo sobre ele. Vamos assumir que a partícula esteja instantaneamente na origem de coordenadas o , no tempo $t = 0$. Além disso, a velocidade da partícula neste tempo é \vec{u} , tomada ao longo do eixo- x . Os eixos y e z , são tomados arbitrariamente. Agora podemos considerar o sistema S' , que é relacionado com o sistema do laboratório pela seguinte transformação de Lorentz.

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_u \left(t - \frac{u}{c^2} x \right); & y' &= y \\ x' &= \gamma_u (x - ut); & z' &= z \end{aligned} \quad (4.30)$$

Neste sistema a origem o' coincide com o no tempo $t = 0$, e a partícula que está se movendo em um dado instante com velocidade $\vec{u} = (u, 0, 0)$ no sistema S está instantaneamente em repouso em o' do sistema S' . Portanto, é óbvio que o sistema S' é o sistema de repouso para a partícula no tempo $t = 0$.

Agora, nós consideramos os eixos coordenados S'' que está sobre o referencial I'' , cujo significado consideramos posteriormente, e assumimos que a transformação entre S'' e S' seja

$$\begin{aligned} t'' &= \gamma_{\Delta v} \left(t' - \frac{\Delta v}{c^2} y' \right); & y'' &= \gamma_{\Delta v} (y' - \Delta v \cdot t') \\ x'' &= x'; & z'' &= z' \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $\gamma_{\Delta v} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\Delta v)^2/c^2}}$. Consideramos que do ponto de vista do sistema do laboratório, a partícula está na origem o'' do sistema S'' e movendo-se com a mesma velocidade em um instante $t = \Delta t$. Isso significa que no instante $t = \Delta t$, o sistema S'' é o sistema de repouso da partícula. Portanto, demos o significado de S'' . Como, então a partícula se move? Ou melhor

dizendo, do ponto de vista do laboratório, onde está a partícula e com qual velocidade ela está se movendo no instante $t = \Delta t$? Uma vez que consideramos a partícula se movendo com o'' , ela deve possuir posição e velocidade de o'' vista pelo sistema do laboratório S .

Recaímos a (4.20), como sendo as coordenadas de $(x_{o''}, y_{o''}, z_{o''})$ de o'' vista por S . Entretanto, usamos aqui Δt ao invés de t . Logo, neste instante as coordenadas da partícula são dadas por

$$\mathbf{x} = \left(u\Delta t, \frac{1}{\gamma_u} \Delta v \cdot \Delta t, 0 \right) \quad (4.32)$$

com sua velocidade sendo

$$\mathbf{w} = \left(u, \frac{1}{\gamma_u} \Delta v, 0 \right) \quad (4.33)$$

Relembrando que a velocidade da partícula era $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ no instante $t = 0$, então a partícula mudou sua velocidade por uma quantidade $(0, \frac{1}{\gamma_u} \Delta v, 0)$ perpendicularmente em relação a \mathbf{u} durante o tempo Δt . Portanto, se fizermos Δt infinitesimalmente pequeno, a aceleração da partícula \mathbf{a} é dada por

$$\mathbf{a} = (0, a, 0), \quad a = \frac{1}{\gamma_u} \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.34)$$

Como Δt é infinitesimalmente pequeno, Δv também deve ser e, portanto, podemos ignorar os termos $(\Delta v)^2$ e obtermos

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| = |u| \quad (4.35)$$

Portanto, a direção da velocidade da partícula muda entre $t = 0$ e $t = \Delta t$, mas sua magnitude permanece constante.

Uma vez que temos a transformação de S' para S'' sendo não rotacional, temos que o sistema S'' não é somente o sistema de repouso da partícula no instante $t = \Delta t$, mas é também os eixos de coordenadas próprios da partícula. Temos, então, que os eixos coordenados da partícula são rotacionados com relação ao sistema S e nos resta descobrir com que ângulo ele é rotacionado. Uma vez que tomamos Δv ao invés de v , vamos considerar $\Delta\theta$ ao invés de θ . Usando (4.29) com $\gamma = \gamma_{\Delta v}$ e esta sendo uma quantidade infinitesimalmente pequena, podemos ignorar os termos $(\Delta v)^2$ e tomar $\sin \theta \approx \Delta\theta$ então,

$$\Delta\theta = \frac{\Delta v}{u} \left(\frac{1}{\gamma_u} - 1 \right) \quad (4.36)$$

e usando (4.34) podemos obter a velocidade angular, Ω , que é interpretada como a velocidade angular dos eixos próprios da partícula, com a qual o sistema S'' rotaciona S em torno do eixo- z ,

$$\Omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -(\gamma_u - 1) \frac{a}{u} \quad (4.37)$$

ou seja, podemos pensar que os eixos de coordenados próprio da partícula sendo o sistema \bar{S} , que obtivemos na seção anterior, que rotaciona através do sistema S .

Vemos que a velocidade angular dos eixos de coordenadas próprios da partícula depende somente de suas velocidade e aceleração e, portanto é uma quantidade invariante da escolha inicial dos eixos coordenados, ou seja, iniciamos com os eixos de S' que eram semi-paralelos aos eixos S do laboratório, mas se houvésemos iniciado com os eixos coordenados \tilde{S}' , que fossem obtidos por uma rotação de um ângulo α de S' pelo eixo- Z chegaríamos na mesma relação para sua velocidade angular.

A idéia de Thomas, para obter o fator meio do spin do elétron é que o sistema de coordenadas rotaciona, e então a taxa de mudança do spin, ou mais geral, de qualquer vetor em que está em um referencial não inercial é dada por,

$$\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_{no\ rot} = \left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_{sistema\ de\ repouso} + \vec{\Omega} \times \vec{s} \quad (4.38)$$

onde \vec{s} é o spin eletrônico e Ω é a velocidade de rotação de seus próprios eixos, que acabamos de calcular. O que essa equação nos fornece é que a medida da taxa de variação temporal do spin de um referencial não rotacional, que pode ser considerado o referencial do laboratório, é dada pela soma da taxa do spin orbitando o núcleo, sistema de repouso, com o segundo termo que nos relaciona o spin rotacionando em seu próprio eixo.

5

INVARIANTES DE LORENTZ

Uma vez que já obtivemos três tipos de transformações de Lorentz, mostraremos, nesta última parte do trabalho, a maneira que os seus invariantes são obtidos. Vimos no decorrer do trabalho dois de seus invariantes, o intervalo e a velocidade da luz e duas quantidades relativas, o tempo e o espaço. Agora, além de mostrar a maneira geral de obtê-los vamos mostrar mais um invariante, a massa.

No desenvolver deste, veremos qual é a melhor maneira de se escrever a equação de energia para uma partícula livre de potenciais, obtida por Einstein, que não nos induzirá ao conceito errôneo de que a massa de uma partícula varia com sua velocidade (conceito este, que vem sido constantemente criticado [7] e [8]). Concluiremos, também, que a inércia de um corpo, ao contrário da visão clássica que é descrita por sua massa, é dada pela sua energia total, e isto é o limitante de partículas massivas atingirem velocidades maiores ou igual a da luz. Por fim mostraremos que a visão da massa variando com a velocidade nos conduz a um paradoxo.

5.1 Algumas Definições Tensoriais

Escalares, ou tensores de ordem 0: são funções Φ que permanecem invariantes sob transformações, e especificamente para o nosso interesse sob transformações de Lorentz.

$$\Phi' = \Phi \quad (5.1)$$

Exemplos de escalares são a velocidade da luz c , o intervalo s e a massa m .

Quadri-vetores ou tensores de ordem 1: São objetos que se transformam de uma coorde-

nada para outra da seguinte maneira.

$$a^{n'} = \sum_m \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^m} a^m, \quad (5.2)$$

$$a_{m'} = \sum_n \frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}} a_n. \quad (5.3)$$

Em que a transformação (5.2) com os índices escritos na parte superior são os quadri-vetores contravariante e a equação (5.3) com o índice na parte inferior, é definido como quadri-vetor covariante. Podemos reescrever estas transformações utilizando a convenção de soma tensorial, em que não há necessidade de escrever o somatório e, utilizaremos o símbolo para a transformação de coordenadas que estamos realizando, que no caso é a transformação de Lorentz.

$$a^{n'} = L^{n'}_m a^m, \quad a_{m'} = L_{m'}^n a_n,$$

que são exatamente as mesmas obtidas no segundo capítulo.

Tensores de ordem 2: A partir da segunda ordem surge mais um tipo de tensor, o tensor misto.

$$T^{n'm'} = \sum_{a,b} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^b} T^{ab} \quad (5.4)$$

$$T^{n'}_{m'} = \sum_{a,b} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{m'}} T^a_b \quad (5.5)$$

$$T_{n'm'} = \sum_{a,b} \frac{\partial x^a}{\partial x^{n'}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{m'}} T_{ab} \quad (5.6)$$

Em que Temos as transformações tensoriais contravariante, mista e covariante, respectivamente. E novamente de maneira mais simplificada, temos

$$T^{n'm'} = L^{n'}_a L^{m'}_b T^{ab}, \quad T^{n'}_{m'} = L^{n'}_a L_{m'}^b T^a_b, \quad T_{n'm'} = L_{n'}^a L_{m'}^b T_{ab}$$

Seguindo este mesmo raciocínio podemos construir tensores de ordem n .

5.2 Algumas Propriedades da Álgebra Tensorial

Multiplicação: Multiplicação de um tensor de ordem n por um tensor de ordem m produz um tensor de ordem $(n + m)$

$$S^a_b{}^c T^{np}_q = N^{acnp}{}_{bq} \quad (5.7)$$

Contração: O somatório sobre um índice covariante e sobre outro contravariante de um tensor nos dá outro tensor cuja ordem é reduzida por 2.

$$T^{ab}{}_{nm} \rightarrow T^{ab}{}_{am} = S^b{}_m \quad (5.8)$$

Um exemplo simples de contração é o traço de um tensor de ordem 2, $T = T^b{}_b$, que é dado por um escalar.

Produto interno: é a multiplicação de dois tensores com simultânea contração sobre os índices de dois fatores.

$$S^a{}_b T^{nb}{}_q = N^{an}{}_q \quad (5.9)$$

Ao aplicarmos essa propriedade com dois tensores de ordem 1 temos o **produto escalar**.

Analisando essas três propriedades Tensoriais demonstraremos que de fato os escalares são invariantes de lorentz, mostrado em (5.1). Para isto, vamos analisar um produto escalar sob uma transformação de sistemas de coordenadas. Utilizando (5.2) e (5.3) ambos com o índice n , temos

$$\begin{aligned} a^{n'} a_{n'} &= \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial x^{n'}} a^b a_c \\ &= \frac{\partial x^c}{\partial x^b} a^b a_c \end{aligned}$$

vemos que obtemos somente valores iguais a 1 quando $x^b = x^c$ e temos o restante igual a zero, portanto:

$$\begin{aligned} a^{n'} a_{n'} &= \frac{\partial x^c}{\partial x^b} a^b a_c \\ &= \delta^c{}_b a^b a_c = a^b a_b \end{aligned}$$

ou seja, temos o escalar como invariante de Lorentz. O que acabamos de mostrar, foi a equação (2.10) e a propriedade (2.11).

Nesses dois tópicos anteriores usamos propriedades tensoriais de [9], e Stephani [4].

5.3 As Equações de Einstein para a Energia da Partícula Livre

Para obtermos a expressão de energia devemos antes obter a quadri-velocidade e a quadri-aceleração da partícula, mas para isto devemos obter o diferencial do tempo próprio e nomeá-lo de maneira diferente do que fizemos no primeiro capítulo.

Vamos escrever o diferencial de Intervalo e usarmos a condição do tempo próprio, que pode ser obtido através do timelike

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cd\tau)^2 \quad (5.10)$$

onde τ é o tempo próprio da partícula. As coordenadas da quadri-vetoriais da partícula, agora, dependem do tempo próprio $x^n(\tau) = (ct(\tau), \vec{r}(\tau))$

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right] = (cdt)^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \quad (5.11)$$

e então

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt \quad (5.12)$$

Quadri-velocidade, estas são obtidas derivando as coordenadas da partícula em relação ao tempo próprio.

$$u^n(\tau) = \frac{dx^n}{d\tau} = \gamma \frac{dx^n}{dt} = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(c, \vec{v}) \quad (5.13)$$

Com isto, podemos construir um invariante de lorentz que é dado pelo produto escalar entre as quadri-velocidades.

$$u^n u_n = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = c^2 \quad (5.14)$$

ou seja, como não há sentido em comprovar um postulado, isso mostra que de fato esse produto escalar deve ser invariante.

Quadri-aceleração,

$$\dot{u}^n = \frac{d^2 u^n}{d\tau^2} \quad (5.15)$$

Podemos agora obter uma relação importante que nos servirá para construirmos as equações de energia. Do produto das quadri-velocidades (5.14), temos.

$$\frac{d(u^n u_n)}{d\tau} = 0 = \dot{u}^n u_n + u^n \dot{u}_n = \dot{u}^n u_n + \eta^{mn} \eta_{an} u_m \dot{u}^a = 2\dot{u}^n u_n$$

onde usamos as propriedades do tensor métrico para subir e descer índices dado em (2.7), concluímos que a quadri-aceleração e a quadri-velocidade são ortogonais:

$$\dot{u}^n u_n = 0 \quad (5.16)$$

Quadri-força:

$$m \frac{d^2 x^n}{d\tau^2} = f^n = (f^0, \gamma \vec{F}) \quad (5.17)$$

com,

$$\vec{F} = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt}$$

é importante ressaltar que γ é dependente do tempo. O que nos resta fazer é obter a expressão para f^0 , e para isso usaremos a propriedade que obtemos em (5.16). Vamos calcular o produto escalar entre a quadri-força e a quadri-velocidade:

$$f^n u_n = \gamma c f^0 - \gamma^2 \vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow f^0 = \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}$$

onde, usamos (5.13) na forma covariante e (5.17). Com isso podemos reescrever a quadri-força.

$$f^n = \gamma \left(\frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}, \vec{F} \right) \quad (5.18)$$

Com isto, estamos aptos a obter facilmente a primeira relação de energia de Einstein. Uma vez que temos a expressão da quadri-velocidade, ao multiplicarmos pela massa temos os quadri-momentos e usando o fato que a derivada do termo de índice 0, a componente temporal do quadri-momento, nos fornece o termo temporal da quadri-aceleração, vemos que:

$$\frac{d(\gamma m c)}{d\tau} = \gamma \frac{d(\gamma m c)}{dt} = \frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}$$

obtemos,

$$\frac{d(\gamma m c^2)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.19)$$

usando a relação clássica que a taxa de variação da energia é igual a potência, $d(E)/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$, vemos que a energia é dada por:

$$E = \gamma m c^2 \quad (5.20)$$

Ao analisarmos esta expressão de energia vemos que ela não pode assumir quaisquer valores uma vez que γ não permite valores de velocidades maiores ou igual a da luz. Com isto vemos o que de fato dificulta a partícula obter maiores velocidades é sua energia total e não sua massa, portanto a energia total é a inércia da partícula.

Quadri-momento:

$$p^n = m u^n = (\gamma m c, \vec{p}) \quad (5.21)$$

onde o momento da partícula com massa m é dado por, $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$. Podemos reescrevê-lo de maneira mais elegante, usando os termos de energia

$$p^n = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (5.22)$$

Veja que ao falarmos em conservação de momento desta maneira, já estamos falando em conservação de energia.

Estamos aptos a construir mais um invariante que é dado entre o produto escalar entre os quadri-momentos e que tem grande importância para consolidar o fato que a massa é invariante.

$$p^n p_n = \gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 m^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = m^2 c^2$$

portanto,

$$p^n p_n = m^2 c^2 \quad (5.23)$$

Para finalizar essa seção, nos resta obter a segunda forma para expressar a energia. Esta é obtida através do produto escalar dos quadri-momentos, na forma de (5.22), igualando ao resultado obtido em (5.23).

$$p^n p_n = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \rightarrow \frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 + p^2$$

portanto,

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \quad (5.24)$$

5.4 Massa, a Energia de Repouso

Agora, vamos a pergunta. O que nos leva a interpretação de que massa varia com a velocidade?

Esta interpretação falsa pode ser vista como sendo consequência de uma simples simplificação matemática, de onde se cria o conceito de massa em repouso. Com esta simplificação equação (5.20) é escrita por muitos físicos na forma:

$$E = m' c^2,$$

com,

$$m' = \gamma m.$$

Do ponto de vista matemático isto não tem problema algum, mas o fato de escrevermos m' como sendo massa que depende de uma outra massa e que varia com a velocidade, isto implica em uma interpretação errônea (Esta simplificação de massa foi desaconselhada por Einstein [10]). Após esta simplificação, os físicos passam a chamar a massa, m , que expressamos inúmeras vezes, até agora, como massa em repouso, e isto, também, nos induz que ela difere de uma massa em movimento.

Podemos de maneira bem simples mostrar o que a massa nos diz, sabemos que a energia total de uma partícula livre de potenciais é dada pela soma de sua energia de repouso, E_0 , mais sua energia cinética E_k . Então, temos:

$$E = E_0 + E_k \quad (5.25)$$

conseguimos verificar facilmente a consistência dessa equação. Para baixas velocidades podemos expandir (5.20) por expansão de séries de Taylor, então

$$E = \gamma m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$$

onde os outros termos são desprezados por conta de $v \ll c$. O segundo termo, portanto, equivale a conhecida energia cinética para baixas velocidades, com isto comparando com (5.25), temos:

$$E_0 = mc^2 \quad (5.26)$$

Logo, o que temos é a energia de repouso E_0 sendo proporcional a massa, ou seja, a massa é uma outra maneira que a energia pode se expressar.

Se isto ainda não é suficiente para nos convencer de que a massa é invariante, vamos utilizar a equação (5.23) e no sistema de unidades onde $c = 1$ (conhecido como Heaviside-Lorentz). Neste sistema de o que temos é

$$p^n p_n = m^2$$

Isto nos mostra claramente, que independente do referencial inercial que estivermos, **a massa será a mesma.**

Por fim, para aqueles que continuam acreditando que a massa varia com a velocidade, vamos imaginar o seguinte experimento. Vamos colocar uma partícula massiva dentro de um acelerador linear, à medida que esta ganha velocidade, teremos maiores energias, e segundo essa interpretação, teremos maior massa da partícula $E = m'c^2$. Mas veja no referencial da partícula também só temos energia em forma de massa, o que chamariam de massa em repouso, entretanto surge uma questão: Se em ambos os referenciais, só medimos a massa, onde está o movimento da partícula? No referencial do acelerador ela não estará em movimento?

Sabemos que o movimento da partícula está no referencial do acelerador, portanto isso gera um paradoxo! Uma vez que para nenhum observador, de acordo com a interpretação da massa variando com a velocidade, temos a energia expressa da forma (5.25) e sim somente na forma de massa. Se a massa variasse com a velocidade deveríamos ter (5.25) com E_0 variando com a velocidade, ou seja, deveríamos ter o termo cinético somado com a massa variando.

6

CONCLUSÃO

Como vimos, na teoria da relatividade especial, as transformações de coordenadas são dadas pelas Transformações de Lorentz, que são muito mais trabalhosas de se obter do que as de Galileu. Constatamos que as Transformações de Galileu continuam válidas quando relacionamos sistemas com baixas velocidades.

Constatamos que, nessas novas transformações, que no simples caso de Transformação Especial de Lorentz, temos uma transformação semi-paralela e se não formos cuidadosos para realizar transformações para velocidades relativas com uma direção arbitrária, usando os métodos corretos, teremos uma transformação rotacional e não translacional. E vimos, também, como as transformações de Lorentz podem ser aplicadas para obtermos o fator $1/2$ do spin do elétron.

Concluimos, depois de obtermos as transformações de Lorentz, como seus invariantes são obtidos e que simplificações matemáticas podem nos levar a falsas interpretações.

Referências Bibliográficas

- [1] T. R. D. J. W. C. W. Chou, * D. B. Hume, *Science; Optical Clocks and Relativity* **329**, 1630 (2010).
- [2] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* (Wiley, 1999).
- [3] L. D. Landau, E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (London: Pergamon, 1975).
- [4] H. Stephani, *An Introduction to Special and General Relativity* (Cambridge; University Press, 2004).
- [5] C. P. F. R. arbitrary boosts for undergraduates, *Am. J. Phys.* **47**, 870 (1979).
- [6] S.-I. Tomonaga, *The Story of Spin* (The University of Chicago Press, 1997).
- [7] L. B. Okun, *Physics Uspekhi; The Einstein formula: $E_0 = mc^2$ “Isn’t the Lord laughing?”* **51**, 513 (2008).
- [8] L. B. Okun, *Physics.pop-ph; THE “RELATIVISTIC” MUG* ., . (2010).
- [9] G. A. e Hans Weber, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física* (Campus Elsevier, 2007).
- [10] O. L. B. T. concept of mass”, *Phys. Today; Einstein A “Letter to L. Barnett, 19 June 1948”* **42**, 31 (1989).